FAKULTET
ORGANIZACIONIH
NAUKA

Beograd

KOLEKTIV
AUTORA

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE I

1972. GODINA

A u t o r i:

Miloš Čanak, asistent

Nada Djuranović, asistent

Gojko Kalajdžić, asistent

Žarko Mijajlović, asistent

Vladimir Savić, asistent

Zoran Šami, asistent

Dragan Trifunović, asistent

Šćepan Ušćumlić, asistent

Dr Djuro Kurepa,
redovni profesor Univerziteta - glavni recenzent

Dr Časlav Djaja
docent Univerziteta (recenzija I, II, III, IV, V, VI i VII poglavlja).

Dr Momčilo Ušćumlić
docent Univerziteta (recenzija VIII, IX, X, XI i XII poglavlja)

Urednik
Borivoje Lečić

Štampa:

»SAVREMENA ORGANIZACIJA« — Izdavačko-štamparski sektor
Beograd, Jevrejska 16

P R E D G O V O R

Studentima novoosnovanog Fakulteta organizacionih nauka pružamo ovu Zbirku zadataka iz matematike I.

Zbirka će dobro doći i svim ostalim korisnicima matematike, jer obuhvata srazmerno veliki broj zadataka. Neki od zadataka izradjeni su do kraja, drugi sadrže uputstva i rezultate, a treći samo rezultate. Osim samih zadataka, knjiga sadrži i kratko uvodno objašnjenje područja matematike kome pripadaju zadaci pojedinih poglavlja knjige.

U pripremanju, pisanju, odabiranju, rešavanju zadataka i ostalom radu sudelovalo je više naših matematičara. Kako je posao trebalo završiti na vreme, bilo je potrebno uložiti više truda i raditi brže no što bi se inače radilo.

Zahvaljujemo saradnicima - izvodjačima na poslovima (organizovanja, sastavljanja zadataka, odabiranja, pisanja, ispravljanja, poboljšavanja teksta, prepisivanja, umnožavanja, rasturanja, kritikovanja itd.), koje je trebalo uraditi da bi zbirka bila obelodanjena.

Verujemo da će u budućnosti doći do jačeg izražaja veza izmedju predavanja i vežbanja iz matematike, s jedne strane, te preduzeća i primene matematike u pogonu, s druge strane.

Očekujemo primedbe, predloge i pomoć od strane studenata i korisnika ove Zbirke. Upućujemo poziv na saradnju i unapred se zahvaljujemo na odzivu.

Molimo da se primedbe, ispravke, predlozi, uputstva i ostalo šalju pismeno na adresu

Fakultet organizacionih nauka
(Matematička jedinica)
Beograd - Rakovica, Ul. Oslobodjenja br. 1

Takva saradnja sigurno će dati odgovarajuće pozitivne rezultate.

Beograd, 1972. godine

Dr Djuro R. Kurepa,
redovni profesor
Univerziteta u Beogradu

Dragan TRIFUNOVIĆ

1. MATEMATIČKA LOGIKA

Logički sud /iskaz, izreka/ *

Pod iskazom /sudom/ podrazumevamo rečenicu koja ima j e d n u i s a m o j e d n u vrednost istinitosti; znači, iskaz je rečenica koja je istinita /tačna/ ili neistinita /netačna/. - Ako skup logičkih sudova obeležimo sa $S = \{x \mid \text{osobine iskaza } x\}$, tada za sud x pišemo $x \in S$. Primeri iskaza mogu biti sledeći:

$$x = (|-2 < -2), \quad x = (\text{Kiša pada}),$$

$$x = (3 < 2), \quad x = (\pi \in N).$$

Medjutim, $x = (z^2 + 2z - 1 = 0)$ ne smatramo iskazom $(x \notin S)$, jer za razne vrednosti promenljive z odgovaraju i tačne i netačne vrednosti iskaza /pazi, iskaz mora imati j e d n u i s a m o j e d n u vrednost istinitosti/.

Znači pod iskazom se podrazumeva izreka koja ima smisla i za koju važe sledeća dva principa: a/ svaki iskaz ima bar jednu od osobina istinitosti ili neistinitosti, tj. ne postoji iskaz koji ne bi bio ni istinit

* Ovde se izlažu osnovi matematičke logike kao gradja koja direktno služi kao p r i r u č n i k u rešavanju zadataka iz logike.

ni neistinit /princip isključenja trećeg/; b/ svaki iskaz ima najviše jednu od osobina istinitosti ili neistinitosti, tj. nema iskaza koji bi bio i istinit i neistinit /princip kontradikcije/.

Po obliku iskaz može biti p r o s t i s l o ž e n. Prost iskaz je ako izražava samo jednu misao; npr., $a > b$. Iskaz "sastavljen od dva i više prostih iskaza vezanih logičkim operacijama naziva se složen iskaz / docnije videti o f o r m u l i/. Npr., "Iz $x + y > 0$ sleduje $x > 0$ i $y > 0$" je složen iskaz.

Aritmetička vrednost iskaza

Engleski matematičar George Boole /1815-1864/ otkrio je, da je vrlo korisno svakom istinitom sudu pridružiti broj 1 kao njegovu vrednost, a svakom lažnom sudu pridružiti broj 0 kao /aritmetičku/ vrednost. Aritmetička vrednost iskaza ili istinitosna vrednost iskaza obeležava se još sa $\top$ /tačno - od engleske reči true/ i $\perp$ /netačno/. Ako za funkciju istinitosti suda uvedemo obeležavanje τ, tada za jedan logički iskaz x može biti

$$\tau(x) = \begin{cases} \top, & \text{ako je iskaz } x \text{ tačan /istinit/} \\ \perp, & \text{ako je iskaz } x \text{ netačan /neistinit,lažan/.} \end{cases}$$

Napomenimo, da se u matematici istinit sud naziva t e o r e m a ili s t a v.

Negacija

Ako je x sud, tada je $\neg x$ oznaka za sud "nije x". Operator $\neg$ označava simbol za operaciju koja se naziva n e g a c i j a i vizuelno podseća na znak minus. Znači, svakom skupu S logičkih sudova pridružujemo skup $\neg S$ negacija $\neg x$ sudova $x \in S$. - Primer: za iskaz $x = (1 > 2)$ negacija glasi $\neg x = \neg(1 > 2) = (1 \leqslant 2)$. Paziti na činjenicu da, ako je

$x \in S$, tada ne mora biti $\neg x \in S$.

Za negaciju važi sledeća osobina: Negacija jednog logičkog iskaza x je i n v o l u t i v n a

$$\neg(\neg x) = x .$$

Za istinitosnu vrednost negacije imamo sledeće. Kako je za $x, \neg x \in S$

$$\tau(\neg x) = 1 \Longleftrightarrow \tau(x) = 0,$$

to možemo pisati

x	1	0
$\neg x$	0	1

.

Konjukcija

Neka su x i y dva logička iskaza, tada će biti $x \wedge y$ oznaka za iskaz "x i y". Operator $\wedge$ označava operaciju koja se zove k o n j u k c i j a. Neosporno, da ako je $x, y \in S$, tada je i $x \wedge y \in S$. Konjukcija se još naziva s a s t a v l j a n j e, i o v a n j e ili logičko množenje, a u upotrebi je i operator &.

Konjukcija zadanih sudova istinita je onda i samo onda, ako je istinit s v a k i od tih sudova

$$\tau(x \wedge y) = 1 \Leftrightarrow \tau(x) = 1 \wedge \tau(y) = 1.$$

Ova se definicija može iskazati i ovako

$$\tau(x \wedge y) = \inf\{\tau(x), \tau(y)\} ,$$

ili za čitav skup logičkih iskaza $a \in S$

$$\tau(\wedge S) = \inf_{a \in S} \tau(a).$$

U odnosu na istinitosnu vrednost iskaza x i y, istinitosna vrednost konjukcije može se prikazati tabelom

$\tau(x)$	$\tau(y)$	$\tau(x\wedge y)$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Konjukcija ima sledeće osobine:

1. Konjukcija je k o m u t a t i v n a $x\wedge y = y\wedge x$;
2. Konjukcija je a s o c i j a t i v n a $(x\wedge y)\wedge z = x\wedge(y\wedge z)$;
3. Konjukcija je i d e m p o t e n t n a $x\wedge x = x$;
4. T je n e u t r a l n i element za konjukciju $x\wedge T = T\wedge x = x$;
5. $\perp$ je n u l a - element za konjukciju $x\wedge\perp = \perp\wedge x = \perp$;

Napomenimo, da se navedene osobine konjukcije mogu dokazati pomoću tablica vrednosti istinitosti.

Disjunkcija

Neka su x i y dva logička iskaza, tada $x \vee y$ ima značenje "x ili y". Logički operator v označava operaciju koja se zove d i s j u n k c i j a. Kao i kod konjukcije, i ovde važi

$x,y \in S \Rightarrow (x \vee y) \in S.$

Operator v dobio je svoj oblik kao prvo slovo latinske reči vel = ili.

Disjunkcija $x \vee y$ ima istinitosnu vrednost netačno ($\perp$) onda i samo onda ako je svaki od tih sudova netačan.

$\tau(x \vee y) = \perp \Leftrightarrow \tau(x) = \perp \wedge \tau(y) = \perp.$

Istinitosnu vrednost disjunkcije možemo i ovako izreći; disjunkcija $x \vee y$ je tačna $\tau(x \vee y) = T$ onda i samo onda ako je tačan barem jedan

od sudova x,y.

Istinitosnu vrednost disjunkcije možemo prikazati i tabelom u zavisnosti od istinitosti iskaza x,y.

$\tau(x)$	$\tau(y)$	$\tau(x \vee y)$
T	T	T
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Za disjunkciju važe sledeći stavovi:

1. Disjunkcija je k o m u t a t i v n a $x \vee y = y \vee x$;
2. Disjunkcija je a s o c i j a t i v n a $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
3. Disjunkcija je i d e m p o t e n t n a $x \vee x = x$;
4. $\perp$ je neutralni element za disjunkciju $x \vee \perp = \perp \vee x = x$;
5. T je n u l a - element za disjunkciju $x \vee T = T \vee x = T$;
6. Disjunkcija i konjukcija vezuju se na sledeći način. Konjukcija je distributivna prema disjunkciji i obratno

   $x\wedge(y \vee z) = (x\wedge y) \vee (x\wedge z)$,

   $x \vee (y\wedge z) = (x \vee y)\wedge(x \vee z)$;

7. Konjukcija je a p s o r p t i v n a prema disjunkciji i obratno

   $x\wedge(x \vee y) = x$; $x \vee (x\wedge y) = x$

De Morganovi obrasci

Engleski matematičar A. De Morgan /1806-1871/ postavio je osnovnu teoremu, koja preko negacije povezuje logičke operacije: konjukciju i disjunkciju.

Za dva iskaza x,y važe sledeće jednakosti

$$\neg(x\wedge y) = \neg x \vee \neg y ,$$

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y,$$

odnosno, negacija iovanja je rastav negacija tih iskaza i obratno.

De Morganovi obrasci mogu se uopštiti. U skupu logičkih iskaza S važi

$$\neg \bigvee_{x\in S} a = \bigwedge_{x\in S} \neg a ,$$

$$\neg \bigwedge_{a\in S} a = \bigvee_{a\in S} \neg a ,$$

Dokaz De Morganovih obrazaca može se izvesti upotrebom tablica za istinitosne vrednosti iskaza x,y.

Implikacija

Za dva iskaza x,y obeležavanje $x \Longrightarrow y$ biće oznaka za iskaz "Ako je x onda je y". Simbol /operator/ $\Longrightarrow$ označava logičku operaciju i m p l i k a c i j a ili z a k l j u č i v a n j e. Logička operacija $\Longrightarrow$ može se pročitati na više načina:

x implicira y ,	x ima za posledicu y,
x povlači y ,	Ako x, onda y,
x daje y ,	Da bude x, mora biti y,
x obuhvata y ,	Da bude x, nužno je da bude y,
x uključuje y ,	Da bude y, dovoljno je da bude x.

Treba zapamtiti:

$\boxed{\text{dovoljan uslov} \Rightarrow \text{nužan uslov}}$

$\boxed{\text{hipoteza /pretpostavka/} \Longrightarrow \text{teza /tvrdjenje/}}$

Kod implikacije $x \Rightarrow y$ logički iskaz x naziva se a n t e c e d e n t o m implikacije, a y njenom k o n s e k v e n t o m.

Implikacija iskaza x,y, po definiciji, ima istinitosnu vrednost $\perp$ /implikacija je netačna/, onda i samo onda, ako iskaz x ima istinitosnu vrednost T, a iskaz y vrednost $\perp$, tj.

$$\tau(x \Rightarrow y) = \perp \Longleftrightarrow \tau(x) = T \wedge \tau(y) = \perp .$$

Na osnovu ovoga možemo prikazati sledeću tabelu istinitosti za implikaciju

$\tau(x)$	$\tau(y)$	$\tau(x \Longrightarrow y)$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

Ekvivalencija

Ako je istinit i iskaz $x \Rightarrow y$ i njegov obrat $y \Rightarrow x$, kaže se da je iskaz x ekvivalentan /ravnopravan/ sa iskazom y i piše se $x \Longleftrightarrow y$. Simbol /operator/ $\Longleftrightarrow$ označava operaciju e k v i v a l e n c i j e. Znači, ekvivalencija je složen iskaz $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ i obično se govori: "x je ako i samo ako je y"; "x je potreban i dovoljan uslov za y".

Ekvivalencija $x \Longleftrightarrow y$ ima istinitosnu vrednost T /tačno/ ako i samo ako su oba iskaza x,y medjusobno jedne iste vrednosti.

Tablica istinitosti za ekvivalenciju glasi:

$\tau(x)$	$\tau(y)$	$\tau(x \Longleftrightarrow y)$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

Za ekvivalenciju važe sledeće dve osobine:

1. Ekvivalencija je *komutativna* $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$;
2. Ekvivalencija je *asocijativna* $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$.

Ekskluzivna disjunkcija

Ako su x,y logički iskazi, tada je $x \underline{\vee} y$ oznaka za iskaz "Ili x ili y". Simbolom $\underline{\vee}$ označava se logička operacija ekskluzivna disjunkcija. Operator $\underline{\vee}$ čita se kao "aut" /latinski aut - /ekskluzivno/ ili/.

Ekskluzivna disjunkcija ima istinitosnu vrednost T /tačno/, ako i samo ako iskazi x,y medjusobno imaju suprotnu vrednost istinitosti.

Tablica istinitosti za ekskluzivnu disjunkciju glasi:

$\tau(x)$	$\tau(y)$	$\tau(x \underline{\vee} y)$
T	T	$\perp$
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Shefferova operacija

Američki logičar M.H.Sheffer /rodjen 1883./ uveo je sledeću logičku operaciju. Ako su x,y logički iskazi, tada $x \uparrow y$ označava "Nije i x i y". Operator $\uparrow$ zove se sheffer.

Znači, Shefferova operacija $x \uparrow y$ je istovetna sa složenim iskazom $\neg(x \wedge y)$.

Shefferova operacija, po definiciji, ima istinitosnu vrednost T /tačna/ ako i samo ako bar jedan od sudova x,y ima vrednost $\perp$.

Tablica istinitosti za Shefferovu operaciju glasi:

$\tau(x)$	$\tau(y)$	$\tau(x \uparrow y)$
T	T	$\perp$
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

Lukasiewiczeva operacija

Poljski matematičar J.Lukasiewicz uveo je sledeću logičku operaciju. Ako su x,y iskazi, tada $x \downarrow y$ označava iskaz "Nije x i nije y". Operator $\downarrow$ zove se Lukasiewicz.

Lukasiewiczeva operacija $x \downarrow y$ ima vrednost T, onda i samo onda ako su oba iskaza x,y netačna:

$\tau(x)$	$\tau(y)$	$\tau(x \downarrow y)$
T	T	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

Iskazne formule i hijerarhija

Iskaz sastavljen od promenljivih logičkih sudova, istinitosnih vrednosti T i $\perp$, logičkih operatora i zagrada, naziva se *formulom* algebre sudova i obeležava se velikim pisanim slovima $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$, ... Npr.,

$$\mathcal{A} = p \vee \neg(q \wedge \neg r),$$

predstavlja jednu formulu.

Za dve formule $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su logički ekvivalentne /istovredne/, ako za svaku moguću kombinaciju vrednosti istinitosti njihovih promenljivih sudova važi

$$\tau(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{B}).$$

Kod jedne formule prihvaćena je sledeća h i j e r a r h i j a

$\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$

kao niz opadajući po jačini razdvajanja.

Tautologija

Za jednu iskaznu formulu $\mathcal{A}$ kažemo da je t a u t o l o g i j a /identički istinita/, ako za svaku moguću kombinaciju istinitosnih vrednosti njenih promenljivih iskaza vredi

$$\tau(\mathcal{A}) = T .$$

Ako je iskazna formula $\mathcal{A}$ tautologija, onda se za tu iskaznu formulu kaže i t e o r e m a.

Svakako , da za iskaznu formulu $\mathcal{A}$ kažemo da je l a ž n a /identički neistinita/ ako je

$$\neg \mathcal{A} = T .$$

Npr., tautologija je formula

$\mathcal{A} : p \vee \neg p$,

jer je $\tau(\mathcal{A}) = T$ za bilo koju vrednost iskaza p.

Tautologija iskazne formule ispituje se najjednostavnije upotrebom tabele ili d r v e t a. Npr., da bi dokazali da je iskazna formula

$\mathcal{A} = x \wedge y \Longleftrightarrow y \wedge x$,

/komutativni zakon za konjukciju - $\mathcal{A}$ je stav/ tautologija $\tau(\mathcal{A}) = T$, koristimo sledeću tabelu:

$\tau(x)$	$\tau(y)$	$\tau(x \wedge y)$	$\tau(y \wedge x)$	$\mathcal{A}$
T	T	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

Kojom se dokazuje, da je za razne kombinacije istinitosnih vrednosti iskaza x i y , formula $\mathcal{A}$ uvek tačna, tj. $\tau(\mathcal{A}) = T$.

Sudovna ili iskazna funkcija

Ako u nekoj izreci ili rečenici P (x) dolazi proizvoljan član x nekog skupa S, kaže se da je P (x) s u d o v n a ili i s k a z n a funkcija nad S ili u S; to znači da svakom članu x iz S odgovara jedna ili više rečenica P (x) . Npr., sudovna funkcija je P (x) : "3x je pozitivan broj". Da li je funkcija P (x) tačna ili netačna zavisi od značenja veličine x: ako je $x > 0$, onda je P (x) istinito, ako je $x = 0$, onda je P (x) neistinito.

Sudovna ili iskazna funkcija naziva se još i p r e d i k a t o m. Ako sudovna funkcija na S sadrži n individualnih promenljivih, tada se kaže da je sudovna funkcija dužine n. Tako, sudovna funkcija P(x) je dužine 1, P (x,y) dužine 2 itd. Prost logički iskaz možemo smatrati kao sudovnu funkciju dužine 0.

Kvantifikatori

Neka je P(x) jednomestovna sudovna funkcija, tada će $(\forall x)P(x)$ označavati novu sudovnu funkciju, takodje jednomesnu , koju čitamo "Za svaki x je P(x)". Simbol $\forall$ zove se veliki ili dugi kvantifikator, a takodje i kvantifikator generalizacije. Do simbola $\forall$ došlo se okretanjem prvog slova nemačke reči alle = svi. Za promenljivu x kaže se da je u iskaznoj funkciji $(\forall x)P(x)$ vezana kvantorom $\forall$.

Ako je P(x) jednomesna sudovna funkcija, tada će $(\exists x)$ P(x) označavati novu sudovnu funkciju, koju čitamo "Postoji takav x, da je P(x)" . Simbol $\exists$ zove se mali ili kratki kvantifikator, a takodje i kvantifikator egzistencije. Do simbola $\exists$ došlo se okretanjem prvog slova latinske reči existo / egzistira, postoji / . Za promenljivu x kaže se da je u iskaznoj funkciji $(\exists x)$ P(x) vezana kvantorom $\exists$.

Često se koristi i kvantifikator $(\exists!\, x)P(x)$ koji ima sledeće značenje "Postoji tačno jedan x, takav da je P(x)".

Negacija kvantifikatora sprovodi se na osnovu sledećeg stava:

Za svaku sudovnu funkciju $P(x)$ vredi

$$\neg(\forall x)\, P(x) = (\exists x) \neg P(x) \quad \text{i dualno}$$
$$\neg(\exists x)\, P(x) = (\forall x) \neg P(x).$$

Znači, negacija velikog kvantora daje mali kvantor negacije i obrnuto.

Napomenimo da se veliki kvantor $(\forall x)$ može još i ovako da obeležava $\bigwedge_x$, a mali $(\exists x)$ sa $\bigvee_x$.

Kod višemesnih sudovnih funkcija obično se pojavljuju više kvantifikatora, i to iste vrste ili različitih vrsta. Npr., "Za svaki broj s postoji jedan jedini d sa osobinom m - s = d" sudovna funkcija glasi

$$(\forall m)(\forall s)(\exists!\, d)\, (m - s = d).$$

Napomena.- Za šira informisanja iz matematičke logike pogledati navedenu literaturu, a pre svega udžbenik - skripta Matematike I za Fakultet organizacionih nauka od dr. Đ.Kurepe, prof.univ.

__Zadaci iz matematičke logike__

1.1. U sledećim logičkim iskazima izdvoji proste od složenih:

a/ $2 \geqslant 4$.

b/ Ako je $x = 0$ onda je $x + 3 = 3$.

c/ Ako je $x > 5$ onda je $x + y > 5$ i $x + z > 5$.

d/ $\pi < e$.

__Rešenje__. Prosti iskazi a/ i d/; složeni iskazi b/ i c/.

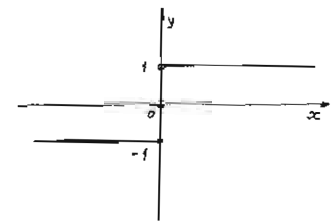
1.2. Navedi primer jedne rečenice koja ne može biti logički sud.

1.3. Iz trigonometrije navedi dva iskaza, iz planimetrije tri suda i iz ekonomije jedan sud. Da li jednačina $z^2 - 3z + 2 = 0$ čini jedan iskaz?

1.4. Odrediti aritmetičku vrednost iskaza $3 \in^{-} D(y)$, gde je funkcija $y = \operatorname{sign} x$.

__Rešenje__. Imamo da je $\tau(3 \in^{-} D(y)) = 0$, jer 3 ne pripada oblasti antidomena znakovne funkcije /signum/

$$y = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



/videti grafik funkcije $\Gamma_y = \{(x, \operatorname{sign} x) \mid x \in R\}$).

1.5. Dokazati jednakost

$$\tau(x) + \tau(\neg x) = 1,$$

ako je x element skupa iskaza $S\ (x \in S)$.

__Rešenje__. Ako je iskaz x netačan, tada je sigurno

$$\left.\begin{array}{l} \tau(x) = 0 \\ \tau(\neg x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \tau(x) + \tau(x) = 1.$$

Isto, ako je iskaz x tačan, tada je

$$\left.\begin{array}{l} \tau(x) = 1 \\ \tau(\neg x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tau(x) + \tau(\neg x) = 1 .$$

Odavde, najkraće možemo pisati $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$. - Za iskaz x uvodimo predpostavku da je takodje $\neg x \in S$, jer u protivnom jednakost ne bi imala smisla.

1.6. Da li jednačina $z^3 - (z-1)(z+1) = 0$ čini jedan logički sud ?

1.7. Simbolikom matematičke logike napisati sledeće: Iz

$x^2 - 4 = 0$ sleduje $x = 2$ i $x = -2$ ili $|x| = 2$.

Rešenje.

$(x^2 - 4 = 0) \Rightarrow (x = 2 \wedge x = -2) \vee (|x| = 2)$.

1.8. Prikazati tabelu istinitosti za negaciju.

Rešenje. Kako je za x, $\neg x \in S$

$\tau(\neg x) = 1 \Leftrightarrow \tau(x) = 0$,

to možemo pisati

x	1	0
$\neg x$	0	1

1.9. Ako je $x \in N$, za koje vrednosti promenljive x je tačna formula

a/ $\neg(x > 5)$, b/ $\neg(x < 5)$.

Rešenje.

a/ $\tau(\neg(x > 5)) = 1$, $(\forall x)\, x \in \{1,2,3,4,5\}$

b/ $\tau(\neg(x < 5)) = 1$, $(\forall x)\, x \in N \setminus \{1,2,3,4\}$

1.10. Na jednom primeru pokazati ispravnost jednakosti

$\neg(\neg x) = x$,

i protumačiti narodne izreke "nije da nije" i "nema da nema".

1.11. Negirati rečenicu $2 = 3$.

Rešenje. $\neg(2 = 3) = (2 \neq 3)$.

1.12. Dat je iskaz $x = (2 > 3)$. Odrediti $\neg x$.

Rešenje. $\neg x = \neg(2 > 3) = (2 \leqslant 3)$ /pazi: ne $2 < 3$!/.

1.13. Poznata je sledeća rečenica $p = (a \leqslant b)$. Odrediti $\neg p$.

Rešenje. $\neg p = \neg(a \leqslant b) = (a > b)$.

1.14. Popuniti sledeću tabelu:

x	$2 > \pi$	$\sin x > 1$	$A < 0$	$/a+b/^2 < 0$
$\neg x$				

1.15. Navesti 2 - 3 logička suda i negirati ih !

1.16. Da li su iskazi: a/ Paran broj n je bez ostatka deljiv sa 3; b/ Svaki kvadrat je pravougaonik; c/ $8 + 3 = 11$.

Rešenje. a/ Nije, jer broj n nije odredjen, te se ne zna deljivost sa 3. b/ Jeste. c/ Jeste.

1.17. Obrazovati negaciju sledeće rečenice: "Svaki paralelogram je kvadrat".

Rešenje. Negacija rečenice "Svaki paralelogram je kvadrat" n i j e rečenica "Svaki paralelogram nije kvadrat", već sledeća rečenica "Nije svaki paralelogram kvadrat".

1.18. Odrediti istinitosnu vrednost rečenice

$$\left(\left(\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \wedge -\frac{1}{2} > 1\right) \vee \left(-\frac{1}{2} > -1 \wedge \frac{1}{4}\right)\right) \vee \left(\frac{1}{3} < \frac{1}{4} \wedge \frac{1}{2} > \frac{1}{4}\right).$$

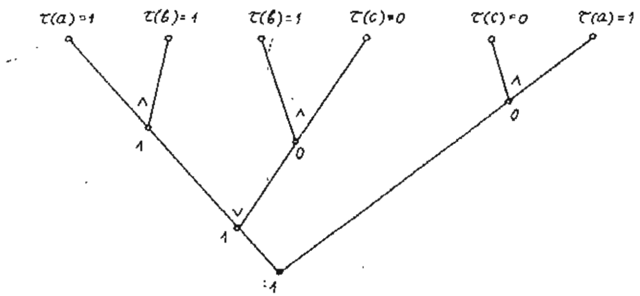
Rešenje. Ako u datoj rečenici respektivno izvršimo obeležavanje

$((a \wedge b) \vee (b \wedge c)) \vee (c \wedge a)$

i kako je

$\tau(a) = 1$, $\tau(b) = 1$, $\tau(c) = 0$

to primenom drveta nalazimo da rečenica ima aritmetičku vrednost 1.



Pokazati i drugi način rešavanja zadatka!

1.19. Data je formula $A = (p \vee \neg p)$. Dokazati da se, zamenjujući umesto promenljivog suda p tačnom ili netačnom rečenicom, uvek dobija $\tau(A) = T$.

Rešenje. Neka je $\tau(p) = T$. Tada imamo da je

$\tau(A) = \tau(p \vee \neg p) = T \vee \neg T = T \vee \perp = T.$

Ako je, pak, $\tau(p) = \perp$, tada je opet

$\tau(A) = \tau(p \vee \neg p) = \perp \vee \neg \perp = \perp \vee T = T.$

1.20. Odrediti $\tau(x)$, ako x označava sledeći sud: a/ $3 < 7$, b/ $-3 > -7$; c/ 0 je pozitivan broj; d/ 0 nije pozitivan ni negativan broj; e/ svaki kvadrat je pravougaonik.

Rešenje. a/ $\tau(3 < 7) = T$; b/ $\tau(-3 > -7) = T, \ldots$

Ponoviti definiciju nenegativnog i nepozitivnog broja $x \in R$.

1.21. U prethodnom zadatku izrazi $\neg x$, a potom odredi $\tau(\neg x)$.

Rešenje. a/ $\neg x = \neg(3 < 7)$ = nije $3 < 7 = (3 \geqslant 7)$

$\tau(\neg x) = \tau(3 \geqslant 7) = \perp.$

b/ itd.

1.22. Odrediti aritmetičku vrednost /istinitosnu vrednost/ sledećih iskaza:

a/ $(1 < 2) \wedge (2 < 5)$, c/ $(1 < 2) \wedge (x < 9)$,

b/ $(1 < 3) \wedge (-3 < -2)$, d/ $(\forall n)(n < n + 1)$.

Rešenje. a/ T; b/ T; c/ $\perp$; d/ T.

1.23. Izračunaj:

a/ $1 \wedge 1 \wedge 1$ d/ $0 \wedge 0 \wedge 0$

b/ $1 \wedge \neg 0$ e/ $(0 \wedge 0) \wedge \neg 0$

c/ $1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1$ f/ $(0 \wedge 1) \wedge (1 \wedge 0)$

Rešenje. a/ 1; b/ 1; c/ 1; d/ 0; e/ 0; f/ 0.

1.24. Izračunaj $\perp \vee \perp \vee T$!

Rešenje. Kako za disjunkciju važi asocijativni zakon, to možemo pisati

$\perp \vee \perp \vee T = (\perp \vee \perp) \vee T = \perp \vee T = T.$

1.25. Odrediti vrednost sledećih izraza:

a/ $(3 < 5) \vee (4 < 2)$,

b/ $\neg(a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)) \vee (3^2 = 3)$,

c/ $(3 < 5) \underline{\vee} (4 < 2)$,

d/ $(3 < 5) \underline{\vee} (1 < 4)$,

Rešenje. a/ T; b/ $\perp$; c/ T; d/ $\perp$.

1.26. Sledeće iskaze napisati simbolikom matematičke logike:

a/ $(x \neq 1)$ ako i samo ako x nije jednako jedan.

b/ Ako je $(x = 5)$ onda je $(x \neq 5)$ i obratno.

c/ Nije $(a = 0)$ ako je $(a \neq 0)$.

d/ q je dovoljno da bi bilo p i p je potrebno da bi bilo q.

e/ $x = 4$ ekvivalentno sa $5x = 20$.

Rešenje. a/ $(x \neq 1) \Rightarrow \neg(x = 1)$; b/ $(x = 5) \Rightarrow (x \neq 5) \wedge$ $(x \neq 5) \Rightarrow (x = 5)$, a to je $(x = 5) \Leftrightarrow (x = 5)$;
c/ $\neg(a = 0) \Rightarrow (a \neq 0)$; d/ $q = p$.

1.27. U sledećim iskaznim formulama označiti glavnu logičku operaciju:

a/ $((\neg x \vee y) \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \wedge \neg z)$,

b/ $\neg(x \vee \neg y)$,

c/ $(\neg a \wedge \neg b) \wedge \neg c$,

d/ $((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \Leftrightarrow (x \vee z)$,

e/ $a \wedge (a \Rightarrow b)$.

Rešenje. a/ Ekvivalencija; b/ Negacija; c/ Konjukcija; ovde proveri da je data formula identički jednaka sa formulom $\neg(a \vee b \vee c)$; d/ Ekvivalencija; e/ Konjukcija.

1.28. U sledećim iskaznim formulama označiti glavnu logičku operaciju:

a/ $x \neq 0 \vee y = 1 \wedge x \neq 1$,

b/ $x = 1 \Rightarrow f > x \wedge f \neq 1$,

c/ $\neg(a < 5 \Leftrightarrow a = 5 \vee a \neq b)$,

d/ $x = 0 \vee x \neq 0 \wedge x = 1$.

Rešenje. a/ Disjunkcija; b/ Implikacija; c/ Negacija; d/ Disjunkcija. - Pazi na hijerarhiju niza operacija ( ), $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ kao niz opadajući po jačini razdvajanja.

1.29. Upotrebiti simboliku matematičke logike i sledećim iskaznim formulama:

a/ Nije tačno: ako je x prost broj onda je deljiv sa 2.

b/ x je veći od pet i x je jednako pet onda i samo onda ako je x manje od pet.

c/ Četiri nije negativan broj.

d/ x je različito od dva ili je x veće od zbira a i b.

Rešenje. c/ $\neg(4 < 0)$; d/ $(x \neq 2) \vee (x > a + b)$.

1.30. Naći negaciju suda:

a/ $\neg(x \vee \neg y)$,

b/ $(\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg x)$,

c/ $(\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z)$.

Rešenje.

a/ $\neg(\neg(x \vee \neg y)) = x \vee \neg y$, direktno jer se zna da je $\neg(\neg a) = a$;
može i ovako $\neg(\neg(x \vee \neg y)) = \neg(\neg x \wedge \neg(\neg y)) = \neg(\neg x) \wedge y) = \neg(\neg x) \vee \neg y = x \vee \neg$.

b/ $\neg((\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg x)) = \neg((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x) = \neg(\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) =$
$= \neg(\neg((x \wedge y) \vee x)) = (x \wedge y) \vee x$;

ovde je primenjen zakon idempotencije za konjukciju.

c/ $\neg((\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z)) = \neg(\neg(x \vee y) \vee \neg(x \vee z)) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Zadatke rešiti i na drugi način!

1.31. Neka su data tri iskaza: A = 5 je neparan broj, B = svaki paralelogram ima bar dve jednake stranice i C = Površina kruga je πr . Odrediti aritmetičku vrednost iskaza:

a/ $\neg A \vee \neg A \vee \neg C$,

b/ $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$.

Rešenje.

a/ Kako za disjunkciju važi asocijativni i idempotentni zakon, to možemo pisati

$$\neg A \vee \neg A \vee \neg C = (\neg A \vee \neg A) \vee \neg C = \neg A \vee \neg C = \neg(A \wedge C),$$

te je: $\tau(\neg(A \wedge C)) = \top$, *jer je* $\tau(A \wedge C) = \bot$.

b/ Sam uraditi!

1.32. Za sledeće uradjene parove sudova x,y odrediti aritmetičku vrednost suda $x \Longrightarrow y$:

a/ $3 = 2 + 1$; $-3 = -1-3$

b/ $3 < 4$; $-3 < -4$

c/ $2 < 1$; $1 = 3 - 2$

Rešenje.

a/ $(3 = 2+1) \Longrightarrow (-3 = -1-3)$, $\tau(x \Longrightarrow y) = \perp$ jer je $\tau(x) = T$ i $\tau(y) = \perp$;

itd.

1.33. Izračunati : $(\neg\perp\wedge T) \vee \neg(\neg T \vee \neg(T \wedge \neg\perp))$.

Rešenje. $(\neg\perp\wedge T) \vee \neg(\neg T \vee \neg(T \wedge \neg\perp)) = (T \wedge T) \vee (T \wedge (T \wedge \neg\perp)) =$

$= T \vee (T \wedge (T \wedge T)) = T \vee (T \wedge T) = T \vee T = T.$

1.34. Napiši bar jednu rečenicu koja odgovara iskaznoj formuli

$(q \wedge r) \vee (p \wedge (q \vee r))$.

1.35. Izračunati istinitosnu vrednost iskaza $\mathcal{A}$

$(5 > 6 \quad 3 > -3) \vee (3 > -3 \wedge 0 > -1)$.

Rešenje. $\tau(\mathcal{A}) = T$.

1.36. Neka je $x \in N$. Odrediti x da bi bilo tačno:

a/ $x \not< 3 \wedge x < 8$,

b/ $x < 3 \wedge x > 8$,

c/ $x > 3 \wedge x < 8$,

d/ $x > 3 \wedge x > 8$,

e/ $x < 3 \vee x < 8$,

f/ $x < 3 \vee x > 8$,

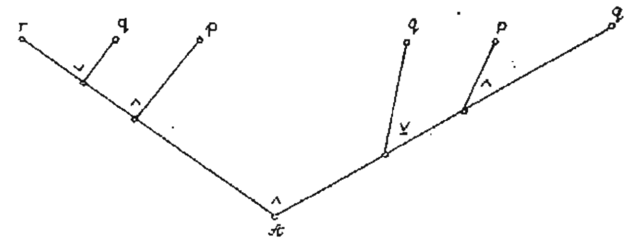
g/ $x > 3 \vee x < 8$,

i/ $x > 3 \vee x > 8$.

Rešenje. $\tau(x > 3 \wedge x > 8) = T \Leftrightarrow \tau(x > 3) = T \wedge \tau(x > 8) = T$,

te je rešenje $x \in N \setminus \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

1.37. Odrediti iskaznu formulu $\mathcal{A}$ kojoj odgovara sledeće drvo:



Rešenje. $((r \vee q) \wedge p) \wedge ((p \wedge q) \, \underline{\vee} \, q)$

1.38. Za dva logička iskaza x,y važe sledeći De Morganovi obrasci:

$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge y$,

$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.

Dokazati!

Rešenje. Koristeći tablicu istinitosti svih kombinacija za iskaze x,y, izvodimo dokaz.

x (1)	y (2)	$\neg x$ (3)	$\neg y$ (4)	$x \vee y$ (5)	$\neg(x \vee y)$ (6)	$x \wedge y$ (7)	$\neg(x \wedge y)$ (8)	$\neg x \wedge \neg y$ (9)	$\neg x \vee \neg y$ (1o)
T	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	T	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	$\perp$	T	T	T

Kako su 6,9 i 8,10 kolone istinitosnih vrednosti jednake (6)=(9) i (8)=(10), to su De Morganovi obrasci dokazani.

1.39. Za dva logička iskaza x,y dokazati ispravnost sledeće jednakosti

$(x \wedge y) \vee (\neg p \wedge \neg y) = (x \Longleftrightarrow y)$.

Rešenje.

x	y	$x \wedge y$	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \wedge \neg y$	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$	$x \Leftrightarrow y$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Kako su istinitosne vrednosti poslednjih kolona medjusobno jednake, to je zadata jednakost dokazana.

1.40. Dokazati da je sledeća iskazna formula valjana

$p \veebar q \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

Rešenje. Koristiti tabličnu metodu dokaza /kao u prethodnom zadatku/.

1.41. Neka je λ bilo koji od simbola $\top, \perp$. Dokazati jednakosti:

a/ $\top \wedge \lambda = \lambda$, c/ $\top \vee \lambda = \top$,

b/ $\perp \wedge \lambda = \perp$; d/ $\perp \vee \lambda = \lambda$.

Rešenje. d/ Neka je $\tau(\lambda) = \perp$, tada je $\perp \vee \perp = \perp$, što je tačno. Ne, ako je $\tau(\lambda) = \top$, tada je opet $\perp \vee \top = \top$ tačno.- Sam utvrditi pod a/, b/ i c/. - Jednakosti a/ - d/ kazuju da konjukcija i disjunkcija imaju n e u t r a l n i /pod a/ i n u l a element /pod b/ i c/ /.

1.42. Naći:

a/ $(\top \wedge \perp) \wedge (\perp \vee \top)$, b/ $\top \vee (\top \wedge (\perp \vee \top))$,

c/ $\perp \wedge ((\top \vee \perp) \wedge (\perp \vee \perp))$.

Rešenje. Npr., pod b/ : $\top \vee (\top \wedge (\perp \vee \top)) = \top \vee (\top \wedge \top) = \top \vee \top = \top$.

1.43. Popuniti sledeću tablicu:

x	1	1	1	2	2	2	3	3	3
y	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\tau(x+y=3 \wedge x-y=1)$									

1.44. Neka je $x \in N$. Naći x kako bi formula bila tačna:

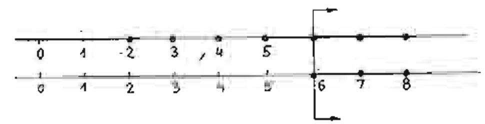
a/ $x > 2 \wedge x < 6$, b/ $x < 2 \vee x > 6$,

c/ $x < 2 \wedge x > 6$, d/ $x \geqslant 2 \wedge x \geqslant 6$.

Rešenje. d/ $\tau(x \geqslant 2 \wedge x \geqslant 6) = \top \Longleftrightarrow \tau(x \geqslant 2) = \top \wedge \tau(x \geqslant 6) \Rightarrow x \geqslant 6$.

Ovo se može napisati i ovako:

$x \in N \setminus \{1,2,3,4,5\}$.



1.45. Izračunati istinitosnu vrednost sledeće rečenice:

$(3^2 = 9 \wedge 3^2 = 2^3) \vee (3^2 = 2^3 \wedge 2^3 = 8)$.

Rešenje. $\perp$.

1.46. Popuniti sledeću tablicu:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\tau(2x - 1 < 0)$							
$\tau(\neg(2x - 1 < 0))$							

1.47. Popuniti sledeću tablicu:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\tau(x > 2)$									
$\tau(-3 \leqslant x)$									
$\tau(3x < 1)$									

1.48. Popuniti sledeću tablicu:

x	-6	-3	-1	0	1	3	6
y	1	0	-2	-3	-1	4	7
$\tau(x^2+y>1)$							
$\tau(xy<0)$							

1.49. **Izračunati**

a/ $\top \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot)$, b/ $\bot \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot)$,

c/ $\top \Rightarrow (\bot \Rightarrow (\bot \Rightarrow \top))$, d/ $\top \Rightarrow (\top \vee \bot)$,

e/ $((\top \wedge \bot) \Leftrightarrow (\bot \Rightarrow \top)) \vee (\top \Rightarrow \neg(\bot \Rightarrow \top))$.

Rešenje.

a/ $\top \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot) = \top \Rightarrow \bot = \bot$;

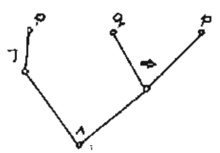
b/ $\bot \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot) = \bot \Rightarrow \bot = \top$;

c/ $\top \Rightarrow (\bot \Rightarrow (\bot \Rightarrow \top)) = \top \Rightarrow (\bot \Rightarrow \top) = \top \Rightarrow \top = \top$;

d/ $\top \Rightarrow (\top \vee \bot) = \top \Rightarrow \top = \top$;

e/ $((\top \wedge \bot) \Leftrightarrow (\bot \Leftrightarrow \top)) \vee (\top \Rightarrow \neg(\bot \Rightarrow \top)) = (\bot \Leftrightarrow \top) \vee (\top \Rightarrow \neg\top) =$
$= \bot \vee (\top \Rightarrow \bot) = \bot \vee \bot = \bot$.

1.50. Odrediti iskaznu formulu koja odgovara datom nedovršenom drvetu, a zatim odrediti njenu istinitosnu tablicu



Rešenje. Tražena formula je $\neg p \wedge (q \Rightarrow p)$. Istinitosna tablica ima sledeći oblik:

p	q	$\neg p$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \wedge (q \Rightarrow p)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

1.51. Neka je μ bilo koje od simbola $\top, \bot$. Dokazati jednakosti:

$\top \Rightarrow \mu = \mu$; $\mu \Rightarrow \top = \top$; $\bot \Rightarrow \mu = \top$; $\mu \Rightarrow \bot = \neg\mu$.

Rešenje. Pogledaj zadatak 1.41.

1.52. Da li je iskazna formula

$x + z = y + z \Leftrightarrow x = y$

tačna za sve vrednosti promenljivih $/x, y, z \in R/$?

Rešenje. $\tau(x + z = y + z \Leftrightarrow x = y) = \top$.

1.53. Odrediti istinitosnu tablicu date iskazne formule $\mathcal{A}$:

a/ $p \Rightarrow (q \wedge \neg r)$; b/ $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p$;

c/ $(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (q \vee r)$; d/ $(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow \neg p$;

e/ $(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(r \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q))$.

Rešenje. Iznesimo rešenje zadatka pod e/. Primenom De Morganovih obrazaca datu iskaznu formulu možemo pojednostaviti:

$(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(r \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q)) = \neg(p \vee q) \wedge \neg(r \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q)) =$
$= \neg((p \vee q) \vee (r \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q))) = \neg\mathcal{B}$,

te istinitosna tablica ima sledeći oblik

p	q	r	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$r \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q)$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{B}$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$

1.54. Dokazati da data iskazna formula ima vrednost T za sve vrednosti iskaza:

a/ $((p \vee q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$,

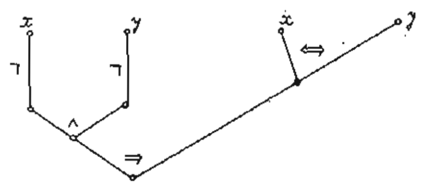
b/ $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$.

Rešenje. Iznosimo rešenje pod a/ koristeći istinitosnu tablicu.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	T	T	T	T	T
T	⊥	T	T	T	T	T	T
T	⊥	⊥	T	T	⊥	T	T
⊥	T	T	T	T	T	T	T
⊥	T	⊥	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	⊥	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T

Kako je poslednja kolona T za kombinacije /sve/ vrednosti $\tau(p), \tau(q)$ i $\tau(r)$, to je dokazano da je iskazna formula pod a/ tačna za sve vrednosti iskaza. U ovom slučaju kažemo da je iskazna formula tautologija.

1.55. Odrediti iskaznu formulu $\mathcal{B}$ koja odgovara datom nedovršenom drvetu, a zatim dokazati da je iskazna formula tautologija $\tau(\mathcal{B}) = T$.



Rešenje. Prema grananju drveta i naznačenim logičkim operatorima, imamo da je iskazna formula

$\mathcal{B}: (\neg x \wedge \neg y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$.

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \wedge \neg y$	$x \Leftrightarrow y$	$(\neg x \wedge \neg y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$
T	T	⊥	⊥	⊥	T	T
T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	T	⊥	⊥	⊥	T
⊥	⊥	T	T	T	T	T

Kako je poslednja kolóna tablice stalno T za sve kombinacije vrednosti $\tau(x)$ i $\tau(y)$, to je iskazna formula $\mathcal{B}$ tautologija, tj. $\tau(\mathcal{B}) = T$.

1.56. Dokazati da su sledeće iskazne formule tautologije:

a/ $(x \wedge y \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))$,

b/ $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$,

c/ $((x \Rightarrow y) \wedge (z \Rightarrow y)) \Rightarrow ((x \wedge z \Rightarrow y) \wedge (x \vee z \Rightarrow y))$.

Rešenje. Primeniti tabličnu metodu ispitivanja istinitosti kao u prethodnom zadatku.

1.57. Ispitati koja je od sledećih formula tautologija:

a/ $\neg(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow x \wedge \neg y$

b/ $x \wedge y \Leftrightarrow \neg(\neg x \vee \neg y)$

c/ $(\neg y \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow \neg x$

Rešenje. Postupiti kao u prethodnom zadatku.

1.58. Uprostiti sledeći složen iskaz:

$\neg(\exists x)(x < 1 \wedge x > 2)$.

Rešenje. $\neg(\exists x)(x < 1 \wedge x > 2) = (\forall x)\neg(x < 1 \wedge x > 2) =$
$= (\forall x)(\neg(x < 1) \vee \neg(x > 2)) = (\forall x)(x \geq 1 \vee x \leq 2)$.

1.59. Ispitati da li su identički istinite formule:

a/ $(\exists x)(\forall y) P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x) P(x,y)$, b/ $(\forall y)(\exists x)\, P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\, P(x,y)$.

<u>Rešenje</u>. a/ Ako postoji x da za svaki y vredi P/x,y/, onda pogotovo za svaki y postoji x tako da vredi P/x,y/. Iskazna formula je dakle identički istinita. b/ Ako za svaki y postoji x takav da je P/x,y/, to još ne osigurava da bi postojao x takav da za svaki y vredi P/x,y/. Formula dakle nije identički istinita.

1.60. Date su dve iskazne formule

$\mathcal{A} : p \vee q$

$\mathcal{B} : \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Dokazati da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ logički istovredne, što ćemo pisati $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

<u>Rešenje</u>. Primenimo tablicu istinitosti za sve kombinacije vrednosti $\tau(p)$ i $\tau(q)$.

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	T	⊥	⊥	⊥	T
T	⊥	T	⊥	T	⊥	T
⊥	T	T	T	⊥	⊥	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	⊥

Kako treća i poslednja kolona imaju jednake istinitosne vrednosti, to zaključujemo da su formule $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ logički istovredne, što pišemo $\tau(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{B})$ i kraće $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

1.61. Kada kažemo da su dve iskazne formule $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ logički istovredne /ili ekvivalentne/ i to proveriti na sledećem primeru

$\mathcal{A} : (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$,

$\mathcal{B} : x \Rightarrow (y \wedge z)$.

<u>Rešenje</u>. Za dve iskazne formule $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su l o g i č k i   i s t o v r e d n e /ili ekvivalentne/, ako

za svaku moguću kombinaciju vrednosti istinitosti prostih iskaza od kojih su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ sastavljene, formule $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ poprime medjusobno jednake vrednosti istinitosti.

Ispitivanje logičke istovrednosti najbolje se sprovodi preko tablice istinitosti, a što ćemo pokazati na datom primeru.

x	y	z	$x \Rightarrow y$	$x \Rightarrow z$	$(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$	$y \wedge z$	$x \Rightarrow (y \wedge z)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥
T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	T	T	T	T	T	T	T
⊥	T	⊥	T	T	T	⊥	T
⊥	⊥	T	T	T	T	⊥	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	⊥	T

Kako šesta i poslednja kolona imaju medjusobno jednake istinitosti, to tvrdimo da su iskazne formule $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ logički istovredne.

1.62. Proveriti sledeće ekvivalencije:

a/ $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow \neg x \vee y$,

b/ $\neg(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow x \wedge \neg y$

c/ $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$.

<u>Rešenje</u>. Pokažimo rešenje ekvivalencije pod b/.

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg(x \Rightarrow y)$	$\neg y$	$x \wedge \neg y$
T	T	T	⊥	⊥	⊥
T	⊥	⊥	T	T	T
⊥	T	T	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	T	⊥	T	⊥

1.63. Dokazati da je $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q) = (p \Leftrightarrow q)$.

Rešenje.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$\neg p\wedge\neg q$	$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$	$p\Leftrightarrow q$
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤

1.64. Dokazati da je relacija implikacije tranzitivna, tj.

$$((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)) \Rightarrow (p\Rightarrow r).$$

Rešenje.

p	q	r	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$	$p\Rightarrow r$	$((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

1.65. Dokazati sledeće implikacije:

a/ $((A\wedge B)\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow(B\Rightarrow C))$,

b/ $(A\Leftrightarrow B)\Rightarrow((A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))$.

Rešenje. Koristiti tabličnu metodu kao u prethodnom zadatku. Kao što se vidi iz prethodnog zadatka, dokaz se svodi na tautologiju.

1.66. Data je iskazna formula $\mathcal{A}$: $(x\Rightarrow y)\Rightarrow y$. Da li je iskazna formula tautologija ?

Rešenje. Da, $\tau(\mathcal{A}) = $ T. Koristiti tablicu istinitosti!

1.67. Ispitati tok vrednosti iskaznih formula:

a/ $(x\vee y)\wedge(z\vee x)$,

b/ $(x\Leftrightarrow y)\vee(\neg z\Rightarrow u)$.

Rešenje. Donosimo rešenje zadatka pod b/.

x	y	z	u	$x\Leftrightarrow y$	$\neg z$	$\neg z\Rightarrow u$	$(x\Leftrightarrow y)\vee(\neg z\Rightarrow u)$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤

1.68. Ispitati tok vrednosti istinitosti sledećih formula:

a/ $((x\Rightarrow y)\Rightarrow(\neg x\Rightarrow y))\Rightarrow y$,

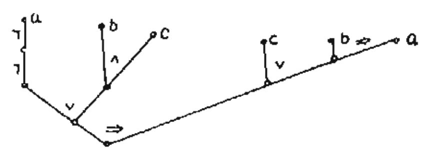
b/ $(x\Rightarrow y)\Rightarrow((\neg x\Rightarrow y)\Rightarrow y)$,

c/ $((x\Rightarrow y)\Rightarrow z)\Rightarrow(x\Rightarrow(y\Rightarrow z))$,

d/ $(x\Rightarrow y)\wedge(y\Leftrightarrow z)\Rightarrow(x\wedge y)$.

Rešenje. Postupiti kao u prethodnom zadatku.

1.69. Na zadanom drvetu odrediti hijerarhiju logičkih operacija i napisati odgovarajuću iskaznu formulu.



Rešenje. Najača logička

operacija na zadanom drvetu je implikacija $\Rightarrow$, a što se vidi iz same iskazne formule $(\neg(\neg a) \vee (b \wedge c)) \Rightarrow (c \veebar (b \Rightarrow a))$.

1.70. Napisati simbolikom matematičke logike sledeće iskaze:

a/ Za svaku tačku M i svaku tačku N postoji samo jedna prava n odredjena tim dvema tačkama.

b/ Za svako x, ako je $x + a = 0$ onda je $x = -a$.

c/ Za svaku tačku A van ravni α postoji prava p koja sadrži A i paralelna je sa α .

Rešenje. a/ $(\forall M)(\forall N)(\exists! n)(M \in n \wedge N \in n)$.

b/ $(\forall x)((x+a=0) \Rightarrow (x=-a))$.

c/ $(\forall A)(\exists p)(A \notin \alpha \Rightarrow A \in p \wedge p \parallel \alpha)$.

1.71. Ispitaj da li je identički istinita iskazna formula:

a/ $((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) \Rightarrow x$,

b/ $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow y \wedge z))$,

c/ $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow \neg y) \Rightarrow \neg x)$.

Rešenje. a/ $\tau((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) = \top$, $\tau(x) = \perp$, *te je* $\tau(x \Rightarrow y) = \perp$ što je nemoguće iz $\tau(x) = \perp$. *b/* $\tau(x \Rightarrow y) = \top$, $\tau((x \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow y \wedge z)) = \perp$, dakle $\tau(x \Rightarrow z) = \top$, $\tau(x \Rightarrow y \wedge z) = \perp$. Kako je $\tau(x \Rightarrow y) = \tau(x \Rightarrow z) = \top$ znači bilo $\tau(x) = \tau(y) = \tau(z) = \top$, bilo $\tau(x) = \tau(y) = \tau(z) = \perp$, što se oboje protivi $\tau(x \Rightarrow y \wedge z) = \perp$. *c/* $\tau(x \Rightarrow y) = \top$, $\tau((x \Rightarrow \neg y) \Rightarrow \neg x) = \perp$ *dakle* $\tau(x \Rightarrow \neg y) = \top$, $\tau(\neg x) = \perp$, *te je* $\tau(x) = \top$. Odavde dolazi da ne može biti $\tau(x \Rightarrow y) = \tau(x \Rightarrow \neg y)$.

1.72. Ispitaj da li su istovredne formule ovih parova:

a/ $\neg(x \vee y)$, $\neg x \wedge \neg y$;

b/ $\neg(x \wedge y)$, $\neg x \vee \neg y$;

c/ $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$, $x \wedge y \Rightarrow z$;

d/ $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$, $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$,

e/ $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \Rightarrow u)$, $(x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \Rightarrow u)$.

Rešenje. Postupiti kao u zadatku 1.61.

1.73. Neka je N skup pozitivnih prirodnih brojeva, Koji od navedenih iskaza je tačan, a koji netačan ?

a/ $(\forall x \in N)(\exists y \in N)(x < y)$;

b/ $(\exists y \in N)(\forall x \in N)(x < y)$;

c/ $(\forall x \in N)(\forall y \in N)(\exists z \in N)(x + y = z)$

d/ $(\forall x \in N)(\forall z \in N)(\exists y \in N)(x + y = z)$

Rešenje. a/ Iskaz je tačan, jer od svakog broja iz N postoji veći; b/ Iskaz je netačan, jer ne postoji najveći pozitivni prirodni broj; c/ Iskaz je tačan, jer je N zatvoren skup u odnosu na sabiranje; d/ Iskaz je netačan, jer N nije zatvoren skup u odnosu na oduzimanje.

1.74. Proveriti sledeće jednakosti:

a/ $\neg(\forall x) P(x) = (\exists x) \neg P(x)$,

b/ $\neg(\exists x) P(x) = (\forall x) \neg P(x)$,

c/ $\neg((\forall x) \neg P(x)) = (\exists x) P(x)$,

d/ $\neg((\exists x) \neg P(x)) = (\forall x) P(x)$.

Rešenje. a/ Trivijalno, ako postoji x za koji nije P/x/ onda ne stoji da za svaki x vredi P/x/; b/ Ako nije tačno da postoji x za koji vredi P/x/, onda za svaki x vredi da ne stoji P/x/ i obrnuto ; c/ Ako nije istina da za svaki x vredi da P/x/ nije ispunjeno, onda postoji bar jedan x za koji vredi P/x/ i obratno; d/ Ako nije istina da postoji x za koji P/x/ ne vredi, onda za svaki x vredi P/x/ i obratno.

Dragan TRIFUNOVIĆ

II TEORIJA SKUPOVA

Skup

Skup je celina izvesnih r a z l i č i t i h objekata koje nazivamo elementima skupa. Skupovi se obeležavju velikim slovima, a elementi skupa malim slovima. Postoje više načina predstavljanja skupova:

1° Ako su a,b,c,... elementi skupa A, tada se skup A označava sledećim diskretnim oblikom

$A = \{a,b,c,\dots\}$;

2° Ako elementi x skupa A imaju osobinu P(x), tada se skup A označava u sledećem obliku

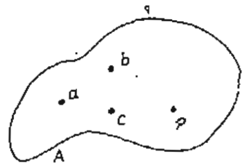
$A = \{x \mid P(x)\}$;

3° Skup se može označiti i kao geometrijski ili drugi objekt, npr., $A = \overline{PQ}$, gde skup A ima značenje duži $\overline{PQ}$, itd.

Ako je prazan skup $\emptyset$ skup bez elemenata, tada se pri analizi sa skupovima uvek podrazumeva da je skup neprazan $A \neq \emptyset$ i da je $\emptyset$ u sastavu skupa A.

Shematski, radi ilustracije, skupovi se prikazuju u obliku dijagrama kao na primeru skupa

$$A = \{a, b, c, p\}.$$



Ako se skup predstavlja u diskretnom obliku, tada skup n e z a v i s i od poretka kojim su dati njegovi elementi. Na primer, skupovi $\{a, a, b, b, b, c\}$, $\{c, c, a, b, a\}$, $\{a, b, c\}$ medjusobno su jednaki.

Skupovi mogu biti konačni i beskonačni. Ako je n prirodan broj, tada je skup $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ od n elemenata $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ k o n a č a n. Jedan skup je b e s k o n a č a n ako je broj njegovih elemenata nekonačan.

Odnos element - skup /relacija $\in$/

Odnos elementa prema skupu može biti dvojak: element p r i p a d a ili n e p r i p a d a skupu. Za ovakav odnos izmedju elementa i skupa uvodi se oznaka $\in$ koja ima sledeće značenje. Ako je x element skupa A, tj. ako element x pripada skupu A, tada pišemo

$$x \in A$$

ili

$$A \ni x$$

što je istovredno. Ako skupu A ne pripada element x, tada ovaj odnos pišemo

$$x \notin A \quad \text{ili} \quad x \text{ non} \in A \quad \text{ili} \quad \neg(x \in A).$$

Na primer, ako je skup prirodnih brojeva

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

tada je $8 \in N$, ali $\sqrt{3} \notin N$ što možemo pisati i ovako $\neg(\sqrt{3} \in N)$.

Znači, u opštem slučaju može biti

$$x \in A \vee \neg(x \in A)$$

sa valjanošću logičke istovrednosti:

$$\neg(x \in A) = x \notin A.$$

Navedimo još sledeće dve osobine relacije $\in$:

1° Ako je A prazan skup $(A = \emptyset)$, tada ne može biti $x \in A$ ni za kakav x, što možemo pisati ovako

$$(A = \emptyset) \Longrightarrow \neg(x \in A)$$

2° Za svaki predmet, objekt, element,... x važi $x \in x$, odnosno $x \in \{x\}$, što možemo pisati ovako

$$(\forall x)\ (x \in x \wedge x \in \{x\}).$$

Inkluzija

Inkluzija je relacija uporedjivanja medju skupovima. Ako su A i B dva skupa, pa ako je svaki element skupa A element i skupa B, kažemo da je skup A d e o ili p o d s k u p skupa B, tj.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

gde je $\subset$ znak za inkluziju /podskup/ kojeg je uveo talijanski matematičar G. Peano /1858 - 1932/. Na narednom dijagramu pokazana je inkluzija medju skupovima A i B.

Može se pisati $A \subset B$ ili $B \supset A$ što je istovredno. Ako nije $A \subset B$ i nije $B \subset A$, tj.

$$\neg(A \subset B) \wedge \neg(B \subset A)$$

tada kažemo da su skupovi A,B n e u p o r e d i v i, a što se vidi i sa dijagrama.

Za relaciju inkluzije važe sledeće oznake:

1° $A \subset A$, relacija inkluzije je refleksivna;

2° $(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow (A = B)$, relacija inkluzije je antisimetrična;

3° $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$, relacija inkluzije je tranzitivna.

Prema ovim osobinama inkluzije možemo zaključiti, da je inkluzija relacija p o r e t k a. Dalje je,

4° $\emptyset \subset A$, što je trivijalno.

Ako dva skupa A i B nisu uporediva, tada se piše $A \not\subset B$, ili A non $\subset B$ ili $\neg(A \subset B)$.

U smislu negacije relacije $\in$ i $\subset$ koje pišemo

$$\neg(x \in A) = x \notin A,$$

$$\neg(A \subset B) = A \not\subset B,$$

korisno je u više slučajeva pisati simbolikom logike /leva strana/, jer se direktno može da sprovede kompletna pravilnost o logičkim iskazima. Na primer,

$$\neg(\forall x)(x \in A \wedge A \subset B) = (\exists \forall)\neg(x \in A \wedge A \subset B) =$$

$$= (\exists x)(\neg(x \in A) \vee \neg(A \subset B)) = (\exists x)(x \notin A \vee A \not\subset B).$$

Jednakost skupova

Za dva skupa A,B kažemo da su jednaka ako je istodobno ispunjeno $A \subset B$ i $B \subset A$, tj.

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A).$$

Medjutim, ako su skupovi dati u diskretnom obliku, tada su dva skupa jednaka ako i samo ako se sastoje od istih elemenata. Na primer,

$$\{1,1,2,2,3,3,3\} = \{1,2,3\}.$$

Unija /zbir/ skupova

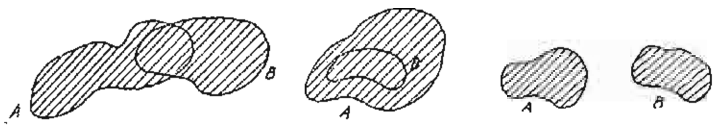
Ako su A i B dva ma koja neprazna skupa, tada se pod unijom skupova A i B podrazumeva skup svih elemenata koji se nalaze u jednom od skupova A i B, tj.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

gde je $\cup$ operator unije. Unija se često obeležava kao $A + B$, gde operator sabiranja nema uobičajeni smisao. Svakako, da se gornja definicija unije može i ovako iskazati

$$(\forall x)(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

Kako dva skupa mogu imati tri medjusobna položaja, to smo uniju dva skupa A, B prikazali dijagramima na sledeći način:



Na primer, za dva skupa $A = \{1,3,7\}$ i $B = \{3,6,8\}$ imamo da je $A \cup B = \{1,3,6,7,8\}$, ili za $A = \{a,b,c,d,e\}$ i $B = \{c,d,e\}$ je $A \cup B = \{a,b,c,d,e\} = A$, ili za $A = \{1,2\}$ i $B = \{7,8\}$ je $A \cup B = \{1,2,7,8\}$.

Unija ili zbrajanje skupova ima sledeće osobine:

1^o $A \cup A = A$ /idempotentnost/,

2^o $A \cup B = B \cup A$ /komutativnost/,

3^o $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ /asocijativnost/,

4^o $(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C)$ /distributivnost/,

5^o $\emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A$ /neutralni element/,

6^o $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$,

gde su A,B,C tri proizvoljna skupa /osobine su navedene bez dokaza/.

Unija od n skupova $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ obeležava se skraćeno još kao

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n .$$

Uopštenje, ako je $\{A_i\}_{i \in I}$ familija /konačna ili nekonačna/ skupova A_i, tj. ako je svakom indeksu i iz skupa I pridružen neki skup A_i, tada pod izrazom

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

podrazumevamo skup koji sadrži sve one i samo one elemente, koji su elementi od bar jednog izmedju skupova A_i. Ovo možemo i ovako napisati

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I),\ x \in A_i\} .$$

Neosporno, da iz ovoga sledi

$$(I = \emptyset) \Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset\right) .$$

Presek skupova

Presek ili zajednički deo dva proizvoljna, neprazna skupa A, B je skup svih elemenata koji istodobno pripadaju i skupu A i skupu B, tj.

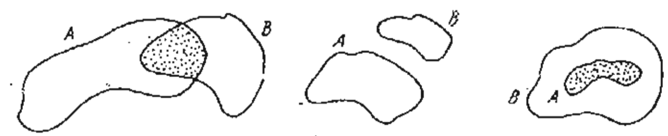
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} ,$$

gde je $\cap$ operator preseka.

Presek se još obeležava i kao $A \cdot B$ ili AB, gde operator množenja nema uobičajeni smisao. Primetimo, da se gornja definicija preseka može i ovako napisati

$$(\forall x)(x \in A \cap B) \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) .$$

Šrafiranim poljem na Venovim dijagramima ilustrovan je presek dva skupa



slučaj $\neg(A \subset B)$ slučaj $\neg(A \subset B)$ slučaj $A \subset B$.

Na primer, za dva skupa $A = \{2,8,9,11\}$ i $B = \{3,5,8,10,11\}$ presek je $A \cap B = \{8,11\}$, ili za $A = \{2,8\}$ i $B = \{1,3,9\}$ je $A \cap B = \emptyset$, ili za $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{a,b,c,d,e,g\}$ je $A \cap B = \{a,b,c\} = A$.

U drugom slučaju /Venovi dijagrami/ dva skupa nemaju presek, tj.

nijedan zajednički element. Za takva dva skupa bez zajedničkih elemenata /preseka/ kaže se da su disjunktna i piše

$A \cap B = \emptyset$.

..... u ovom slučaju je $A \cap B$ prazan skup kojeg smo ranije definisali na sledeći način

$(A=\emptyset) \Leftrightarrow (\forall x)\ \neg(x \in A)$.

Obratno, ako želimo da naglasimo da izmedju dva skupa A,B postoji presek, pisaćemo $A \cap B \neq \emptyset$.

Presek dva skupa ima sledeće osobine koje ovde iznosimo bez dokaza:

1° $A \cap A = A$ /idempotentnost/,

2° $A \cap B = B \cap A$ /komutativnost/,

3° $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ /asocijativnost/.

4° $(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$ /distributivnost/,

5° $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$,

6° $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$.

7° $(A \cap B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ /distributivnost $\cup$ prema $\cap$/,

8° $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ /distributivnost $\cap$ prema $\cup$/.

Osobina 7° i 8° pišu se kadkad i zajedno:

$(A \overset{\cup}{\cap} B) \overset{\cap}{\cup} C = (A \overset{\cap}{\cup} C) \overset{\cup}{\cap} (B \overset{\cap}{\cup} C)$,

9° $A \cup (A \cap B) = A$ /apsorptivnost/,

10° $A \cap (A \cup B) = A$ /apsorptivnost/,

gde su A,B,C proizvoljni skupovi.

Presek od n skupova $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ obeležava se skraćeno

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n .$$

Uopštenje, ako je $\{A_i\}\ i \in I$ familija /konačna ili nekonačna/ skupova A_i, tj. ako je svakom indeksu i iz skupa I pridružen neki skup A_i, tada pod izrazom

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

podrazumevamo skup koji sadrži sve one elemente koji su elementi svakog od skupova A_i. Ovo pišemo i na sledeći način

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I),\ x \in A_i\}$$

Prema osobinama preseka, imamo i ovo tvrdjenje u generalnom obliku

$$(\exists!\ A)\big((A = \emptyset \Leftrightarrow \neg(x \in A)) \wedge A \subset \{A_i\}\ i \in I\big) \Rightarrow \big(\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset\big) .$$

<u>Diferencija dva skupa</u>

Diferencija /razlika, oduzimanje/ dva skupa analizira se u sledeća dva slučaja:

1° Ako skupovi A,B nisu uporedivi, tj. ako je $\neg(A \subset B)$,

2° Ako su skupovi A,B uporedivi, tj. ako je $A \subset B$.

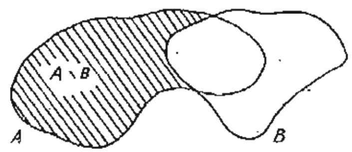
U prvom slučaju razlikujemo o b i č n u diferenciju koju obeležavamo sa $A \setminus B$ i s i m e t r i č n u diferenciju koju obeležavamo sa $A \triangle B$ ili $A \dot{-} B$. U drugom slučaju diferencija je k o m p l e m e n t skupa A koji se obeležava A' ili $\complement A$ ili A^c .

O b i č n a d i f e r e n c i j a. Pod običnom diferencijom skupova A i B podrazumevamo skup $A \setminus B$ svih elemenata koji pripadaju skupu A, a ne pripadaju skupu B, pod uslovom $\neg(A \subset B)$, tj.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$, $\neg(A \subset B)$.

Na primer, za skupove $A = \{a,b,c,d\}$ i $B = \{a,b,e,f,g\}$ imamo da je razlika $A \setminus B = \{c,d\}$.

Na Venovom dijagramu šrafiranim poljem prikazana je razlika skupova $A \setminus B$.



Gornja definicija razlike $A \setminus B$ može se napisati i u ovom obliku

$$(\forall x)((x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge \neg(x \in B))), \qquad \neg(A \subset B).$$

Ako je $\neg(A \subset B)$ tada u kompoziciji dva skupa postoje dve razlike $A \setminus B$ i $B \setminus A$ i kao kod uobičajenog oduzimanja treba paziti na nejednakost ovih razlika

$$A \setminus B \neq B \setminus A, \qquad (\forall x \in A) \wedge (\forall x \in B).$$

Ako su skupovi A,B disjunktivni $A \cap B = \emptyset$, tada je $A \setminus B = A$ i $B \setminus A = B$, tj.

$$((A \setminus B = A) \wedge (B \setminus A = B)) \Longleftrightarrow (A \cap B = \emptyset).$$

Navedimo da za razliku važi

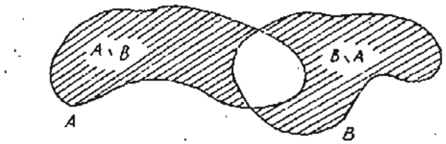
$A \setminus \emptyset = A$ i $\emptyset \setminus A = \emptyset$,

što direktno proizilazi iz osobine napred izložene.

S i m e t r i č n a   r a z l i k a. Pod simetričnom razlikom dva skupa A,B podrazumevamo uniju običnih razlika $A \setminus B$ i $B \setminus A$, tj.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

sa uslovom da je $\neg(A \subset B)$ /Vidi Venov dijagram/.



Primenom ekskluzivne disjunkcije definiciju simetrične razlike možemo i ovako napisati

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\}, \qquad \neg(A \subset B).$$

Neosporno, da ako su skupovi disjunktni $A \cap B = \emptyset$, tada je

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$$

Simetrična razlika ima sledeće osobine:

1° Simetrična razlika je interna operacija u skupu E, tj. skup E je zatvoren skup u odnosu na operaciju $\triangle$

$$(A \subset E \wedge B \subset E) \Longrightarrow A \triangle B \subset E, \qquad \forall A,B \subset E.$$

2° Asocijativni zakon je ispunjen

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C), \qquad \forall A,B,C \subset E.$$

3° Komutativni zakon je ispunjen

$$A \triangle B = B \triangle A, \qquad \forall A,B, \subset E.$$

4° Neutralni ili jedinični element skupa E u odnosu na operaciju $\triangle$ je prazan skup $\emptyset$, jer je

$$A \triangle \emptyset = A \ \wedge \ \emptyset \triangle A = A, \quad \forall A \subset E.$$

5° Inverzni ili simetrični element skupa E u odnosu na operaciju $\triangle$ je

$$A^{-1} = A$$

jer je

$$A \triangle A^{-1} = \emptyset \wedge A^{-1} \triangle A = \emptyset, \quad \forall A \subset E.$$

Prema ovim osobinama možemo zaključiti da je struktura $(E,\triangle)$ komutativna ili Abelova grupa, pri čemu je skup E partitivni skup svih podskupova A,B,C,... /o ovome videti docnije/.

K o m p l e m e n t. Ako su dva skupa A,B uporediva, npr., $A \subset B$, tada se razlika $B \setminus A$ naziva komplementom skupa A /obzirom na skup B/ i označava sa

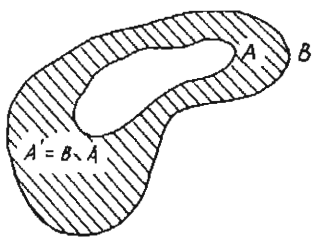
$$B \setminus A = A' = \complement_B A = A^c$$

Znači,

$$A' = B \setminus A = \{x \mid \neg(x \in A) \wedge x \in B\}, \quad A \subset B.$$

Naredni dijagram ilustruje komplement skupa A u odnosu na skup B.

Na primer, ako je



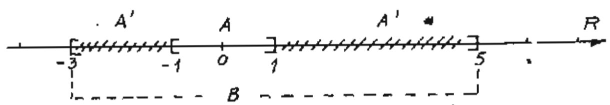
$$B = \{x \mid |x-1| \le 4 \wedge x \in R\}$$

$$A = \{x \mid |x| \le 1 \wedge x \in R\}$$

tada je

$$A' = [-3, -1] \cup [1,5]$$

što je prikazano na R-osi.



Pojedine elementarne stavove o komplementu skupa ovde ćemo izložiti kao osobine komplementa /bez dokaza/.

1° Komplement skupa ima osobinu involutivnosti, tj.

$$(A')' = A.$$

2° $A \cap A' = \emptyset$.

3° $A \cup A' = B, \quad A \subset B$.

4° $A \setminus B = A \cap B', \quad (\forall A,B) \wedge (A \subset B)$

<u>Demorganovi obrasci</u>

Engleski matematičar A.De Morgan /1806-1876/ postavio je osnovni stav o komplementu preseka i unije. Podsetimo da je ovo isto učinjeno i za negaciju konjukcije i disjunkcije.

Demorganov stav, koji se obično naziva Demorganovi obrasci, glasi: "Za dva skupa A,B važe sledeće dualne relacije

a/ $(A \cap B)' = A' \cup B'$,

b/ $(A \cup B)' = A' \cap B'$."

Demorganov stav dokazaćemo dvojako:

a/ $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

$$(A \cap B)' = \{x \mid x \in (A \cap B)\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} =$$

$$= \{x \mid x \in A' \vee x \in B'\} = \{x \mid x \in (A' \cup B')\} = A' \cup B'.$$

Istim načinom može se dokazati i obratno

$$A' \cup B' = (A \cap B)',$$

te u stavu pod a/ možemo pisati ekvivalenciju

$$(A \cap B)' \Leftrightarrow A' \cup B'.$$

b/ $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Primenimo zakon logičke istovrednosti /ekvivalentnosti/ za dokaz drugog dela Demorganovog stava. Naime, ako primenimo tabličnu metodu ispitivanja istinitosti para iskaznih formula $(A \cup B)'$ i $(A' \cap B')$ i ako ove formule imaju jednake istinitosne vrednosti, tada je i dokazan stav pod b/.

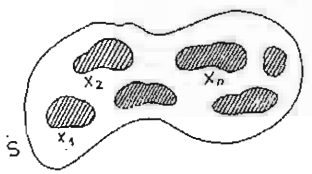
$x \in A$	$x \in B$	$x \in (A \cup B)$	$x \in (A \cup B)'$	$x \in A'$	$x \in B'$	$x \in A' \cap B'$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Partitivni skup

Neka je S zadan skup. Ako delove /podskupovi/ ovog skupa obeležimo sa $X (X \subset S)$, tada skup svih podskupova X od skupa S nazivamo partitivni skup i obeležavamo ga sa $\mathbb{P}(S)$ ili PS. Znači,

$$\mathbb{P}(S) = \{ X \mid X \subset S \} .$$

Treba kazati, da u podskupove X uključujemo prazan skup $\emptyset$, kao i sam skup S.



Postupak dobijanja partitivnog skupa možemo smatrati kao vrstu transformacije /funkcija/

$$\mathbb{P} : S \longrightarrow \mathbb{P}(S) ,$$

prelaza od skupa S na skup $\mathbb{P}(S)$.

Primer: Neka je $S = \{a, b, c\}$, tada je partitivni skup

$$\mathbb{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} .$$

Osobine partitivnog skupa su sledeće /bez dokaza/:

1° $((x \in S) \Rightarrow x \in \mathbb{P}(S)) \Leftrightarrow ((x \in \mathbb{P}(S)) \Rightarrow (x \in S)), \quad \forall x \in S ;$

2° $\emptyset \in \mathbb{P}(S), \quad \forall S ;$

3° $(x \in S) \Longrightarrow (\{x\} \in \mathbb{P}(S)), \quad \forall x \in S ;$

4° $S \in \mathbb{P}(S)$

5° $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \wedge \mathbb{P}(B) ;$

6° $\mathbb{P}(A \cup B) \supset \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B) ;$

Napomenimo, da smo kod elemenata partitivnog skupa upotrebljavali relacije $\in$ i ako su elementi partitivnog skupa skupovi /podskupovi/ te je opravdanje pisati relaciju uporedjivanja $\subset$

Broj elemenata partitivnog skupa u zavisnosti je od broja elemenata skupa S. Ako skup S ima n elemenata, tada partitivni skup $\mathbb{P}(S)$ ima 2^n elemenata /podskupova/, što možemo pisati kao funkciju

$$n \longrightarrow 2^n, \quad n \in N.$$

Na primer, za jedinični skup $\{x\}$, partitivni skup ima dva elementa $(2^1 = 2)$

$$\mathbb{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}$$

itd.

Primedba.- U knjizi dr. D.Kurepe [1] sam prouči dokaz veze $n \rightarrow 2^n$.

Kombinovani proizvod

U r e d j e n j e elemenata skupa. Na elementima jednog skupa uvodi uredjenje u smislu strogog odredjivanja redosleda /prvi, drugi, treći,../ medju elementima. Tako se govori o uredjenoj dvojci /paru/ (a,b), uredjenoj trojci (a,b,c), itd.

Ako su $a \in A$ i $b \in B$, tada se pod u r e d j e n o m d v o j k o m podrazumeva par

$$(a,b)$$

ako je element a proglašen prvim, a b drugim u tom paru. Elementi uredjenog para nazivaju se prva i druga k o o r d i n a t a ili prva i druga projekcija uredjenog para. Na primer, /8,72/ je jedan uredjen par prirodnih brojeva. Dobro poznati koordinatni sistem xOy je dvojka od dve brojevne ose s istim početkom.

Ima više načina definisanja uredjenog para, npr. preko jednoznačnog preslikavanja ili kao što je, recimo, ovo: "Uredjena dvojka elemenata a i b je

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}."$$

Veoma važan iskaz kod uredjenog para je sledeći stav:

$$((a,b) = (c,d)) \Longleftrightarrow ((a = c) \wedge (b = d)),$$

tj. dva uredjena para su jednaka ako i samo ako su jednaki prvi element sa prvim, i drugi element sa drugim.

Kod uredjenog para (a,b) uvodimo i n v e r z a n ili s i m e t r i č a n uredjen par koji je po definiciji

$$(a,b)^{-1} = (b,a).$$

Znači, inverzan uredjen par /u oznaci na -1/ dobija se promenom elemenata. Neosporno, da je u smislu inverzije uredjen par i n v o l u t i v a n, jer je

$$((a,b)^{-1})^{-1} = (a,b).$$

Sličnim rezonovanjem može se definisati i uredjena trojka

$$(a,b,c) = ((a,b),c)$$

kod koje takodje važi stav:

$$(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2) \Longleftrightarrow (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2) \wedge (c_1 = c_2)$$

itd.

Primetimo, da uredjen par ili opšte, uredjena n-torka mogu imati jednake elemente. Na primer, (a,a) ili (a,b,a) ili (a,a,a), itd. Treba obratiti pažnju da su uredjene trojke (x,y,x) i (x,x,y) medjusobno različite (za uslov $x \neq y$), dok su skupovi $\{x,y,x\}$ i $\{x,x,y\}$ medjusobno jednaki.

K o m b i n o v a n i p r o i z v o d. Za dva proizvoljna neprazna skupa A, B kombinovani proizvod $A \times B$ /čitaj A puta B, ili A krst B/ je skup svih uredjenih parova (a,b) pri čemu je $a \in A$ i $b \in B$

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Po francuskom matematičaru Rene Descartes /1596-1650/ kombinovani proizvod A x B naziva se još Karterijev proizvod, Dekartov proizvod ili još mešovit proizvod, direktni proizvod itd.

Primer: Za skupove $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{1,2,3,4\}$ imamo da je Dekartov proizvod

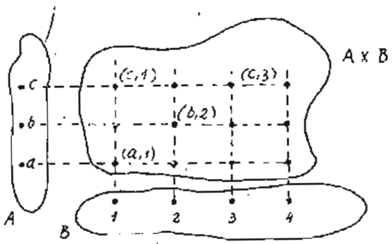
$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (c,1), (c,2), (c,3), (c,4)\}.$$

Obično se Dekartov proizvod A x B prikazuje grafički u vidu m r e ž e kao što je to pokazano za skupove A i B

$\vdots$	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
z	(z,a)	(z,b)	(z,c)	(z,d)	....
y	(y,a)	(y,b)	(y,c)	(y,d)	....
x	(x,a)	(x,b)	(x,c)	(x,d)	....
X	a	b	c	d	....

Shematiziranje Dekartovog proizvoda sprovodimo na sledeći način: uzimamo dva ortogonalna pravca, kao nosača skupova A i B, tada A x B čini "pravougaonik" konstruisan nad A i B.

Za prikazan primer imamo da je grafik Dekartovog proizvoda



Kombinovani ili Dekartov proizvod A x B ima sledeće osobine:

1° $A \times \emptyset = \emptyset$, $\forall A$;

2° $\emptyset \times A = \emptyset$, $\forall A$;

3° $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$;

4° Komutativan zakon ne važi, ali je ispunjeno

$(A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = B)$;

5° $(A \times B \subset X \times Y) \quad (A \subset X \wedge B \subset Y)$;

6° $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ - distributivni zakon X prema U;

7° $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ - distributivni zakon X prema $\cap$;

8° Za bilo koji skup $S \subset A \times B$ uredjenih parova (a,b) odredjen je i skup S^{-1} svih uredjenih inverznih parova $(a,b)^{-1}$

$$S^{-1} = \{(a,b)^{-1} \mid (a,b) \in S \subset A \times B\} \subset B \times A.$$

Kako je $S \subset A \times B$ sledi $S^{-1} \subset B \times A$, te odavde zaključujemo da ne mora biti $S^{-1} \subset A \times B$:

$$((S \subset A \times B) \Rightarrow (S^{-1} \subset B \times A)) \Rightarrow \neg(S^{-1} \subset A \times B) \wedge (S^{-1} \subset A \times B).$$

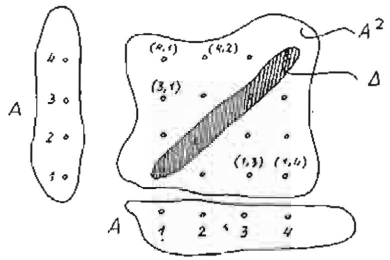
Ako su skupovi jednaki A = B, tj. ako je specijalno A x A, tada se ovaj kombinovan proizvod naziva k v a d r a t skupa A /ili Dekartov kvadrat/ i beleži

$$A^2 = A \times A = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A\}$$

Podskup Δ Dekartovog kvadrata A^2 $(\Delta \subset A^2)$ konstruisan od uredjenih parova (a,a) $(a \in A)$ zove se d i j a g o n a l a skupa A^2

$$\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}, \qquad \Delta \subset A^2$$

Primer: Za skup $A = \{1,2,3,4\}$ grafički pokazati A^2 i kvadratovu dijagonalu Δ.



$A^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

$\Delta = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

Primetimo, prema ovom primeru, da je odnos uredjenog para (a,b) prema njemu inverznom paru $(a,b)^{-1} = (b,a)$ u Dekartovom kvadratu A^2 simetričan u odnosu na dijagonalu Δ. Npr., $(4,1)^{-1} = (1,4)$.

Dekartov proizvod dva skupa koristimo da analogno definišemo i proizvod više skupova

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge a_3 \in A_3 \wedge \dots$
$\wedge \dots a_n \in A_n\}$

Slično se definiše i potencija A^n $(n \in N)$, kao i odgovarajuća dijagonala.

$\Delta = \{(a,a,a,\dots, a) \mid a \in A\}$.

Z a d a c i iz s k u p o v a

2.1. Odrediti sve elemente datih skupova

a/ $A = \{1,2,3,8\}$, b/ $B = \{e_1,e_2,e_1,e_2,e_3\}$,

c/ $C = \{1,1,1,2,3\}$, d/ $D = \{\{1,2\}\}$,

e/ $E = \{1,3,1,1,2,2, \{1,2\},\{2,3\}\}$.

Rešenje. a/ $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$, $8 \in A$; b/ $e_1 \in B$, $e_2 \in B$, $e_3 \in B$; c/ $1 \in C$, $2 \in C$, $3 \in C$; d/ $\{1,2\}$ D; e/ $1 \in E$, $2 \in E$, $\{1,2\} \subset E$, $\{2,3\} \subset E$.

2.2. Neka je x oznaka za elemente skupa $A = \{6,7,8,9,10\}$. Odredi sve vrednosti x da bude tačna sledeća formula:

a/ $x \in \{6,7\}$, b/ $x \in \{7,8,9\}$,

c/ $x \in \{6,7,9,10\}$, d/ $x \in \{4,5,11,12\}$.

Rešenje. a/ 6 i 7; b/ 7,8 i 9; c/ 6,7,9 i 10; d/ nema rešenja, jer $\{4,5,11,12\} \not\subset A$.

2.3. Ako su skupovi $X = \{x,y\}$, $Y = \{x,z,y\}$ i $Z = \{y,z\}$, tada popuniti sledeću tabelu istinitosnim vrednostima:

$\in$	X	Y	Z
x			
y			
z			

2.4. Da li su sledeće skupovne jednakosti ispunjene:

a/ $\{a,a\} = \{a\}$, b/ $\{a,b,b,c,a,c,c,c\} = \{a,b,c\}$,

c/ $\{1,2,2,3,\} = \{1,2,3\}$, d/ $\{1,1,2,4,4,4\} = \{1,2,4\}$.

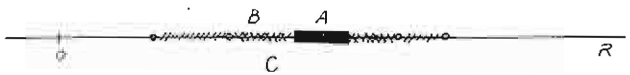
Rešenje. a/ da; b/ da; c/ da; d/ da.

2.5. Na brojevnoj liniji /R/ pokazati da inkluzija ima osobinu tranzitivnosti.

Rešenje. Osobina tranzitivnosti inkluzije glasi

$$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C ,$$

što je prikazano na brojevnoj liniji



2.6. U kakvoj su vezi sledeći skupovi:

a/ $A = \{2,2,1\}$, $B = \{1,1,2,3,2\}$, $C = \{2,2,3,3,2\}$;

b/ $A = \{2,3,5\}$, $B = \{5,3,4,2\}$;

c/ $A = \{!, ?, \in, 0\}$, $B = \{?, 0, \in, \in\}$.

Rešenje. a/ $A \subset B \wedge A \subset C$, $B = C$; b/ $A \subset B$; c/ $B \subset A$.

2.7. Popuniti sledeće dve tabele istinitosnim vrednostima:

$\subset$	$\{1,2,3\}$	$\{3,5,8\}$
$\{1,2\}$		
$\{3\}$		
$\{3,9\}$		

$=$	$\{1,2\}$	$2,3$
$\{2,1\}$		
$\{2,2,3\}$		
$\{1,2,3\}$		

2.8. Obeležimo sa X podskupove skupa $A = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{2,1\}\}$. Rešiti sledeće skupovne „nejednačine" :

a/ $X \subset \{1,2,3\}$, b/ $\{1\} \subset X$ i c/ $X \subset \{1,2\}$.

Rešenje.

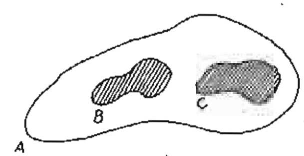
a/ $X = \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$;

b/ $X = \{1,2\}, \{1,3\}$;

c/ $X = \{1,2\}$.

Napomena. Skup A može se napisati i ovako $A = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$.

2.9. Napisati izraz za dijagram:



Rešenje. Može se napisati više skupovnih izraza za zadan Venov dijagram. Ovde dajemo jedno rešenje

$$((B \cap C = \emptyset) \wedge (B \subset A \wedge C \subset A)) \Rightarrow (B \cup C) \subset A .$$

2.10. Dati su skupovi $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{2,4,7\}$. Odrediti $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

Rešenje. $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,7\}$, $A \setminus B = \{1,3\}$ i $B \setminus A = \{4,7\}$.

2.11. Neka su skupovi $A,B,C \subset S = \{a,b,c,d,e,f\}$ takvi da je

/1/ $A \cap B = \{b,e\}$, /2/ $A \cup B = \{b,c,d,e,f\}$,

/3/ $A \cap C = \{b,c,f\}$, /4/ $A \cup C = \{a,b,c,e,f\}$.

Odrediti skupove A,B,C.

Rešenje. Za presek /1/ i /3/ imamo da je

$$b,e \in A \cap B \Rightarrow (b,e \in A \wedge b,e \in B),$$

$$b,c,f \in A \cap C \Rightarrow (b,c,f \in A \wedge b,c,f \in C),$$

te je odavde $b,c,e,f \in A$; $b,e \in B$; $b,c,f \in C$ (*). Slično, iz unija /2/ i /4/ dobijamo

$$a \in A \cup C \Rightarrow (a \in A \vee a \in C); \; a \notin A \cup B \Rightarrow (a \notin A \vee a \notin B)$$

što uključuje da je $a \in C$ (**). Dalje imamo da je

$$d \in A \cup B \Rightarrow (d \in A \vee d \in B); \; d \notin A \cup C \Rightarrow (d \notin A \vee d \notin C),$$

što uključuje da je $d \in B$ (***). Iz ovih zaključaka imamo da su skupovi

$A = \{b,e,c,f\}$, $B = \{b,e,d\}$ i $C = \{a,b,c,f\}$.

2.12. Za uslove rešenja iz prethodnog zadatka izračunati simetrične diferencije $A \triangle B$, $B \triangle C$, $C \triangle A$ i pokazati da vredi asocijativni zakon $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

<u>Rešenje.</u> Koristeći definiciju simetrične diferencije imamo direktno da je

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{c,f\} \cup \{d\} = \{c,f,d\},$$

$$B \triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{e,d\} \cup \{a,c,f\} = \{a,e,c,d,f\},$$

$$C \triangle A = (C \setminus A) \cup (A \setminus C) = \{a\} \cup \{e\} = \{a,e\}.$$

Asocijativni zakon dokazaćemo direktno iz uslova zadatka.
Imamo da je

$$(A \triangle B) \triangle C = \{c,f,d\} \triangle \{a,b,c,f\} = \{a,b,d\},$$

$$A \triangle (B \triangle C) = \{b,e,c,f\} \triangle \{a,e,c,d,f\} = a,b,d \; ,$$

što je trebalo i pokazati.

2.13. Dokazati jednakost

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B),$$

gde su E,A,B proizvoljni skupovi.

<u>Rešenje.</u> Direktnom primenom definicija navedenih operacija imamo sledeće:

$$E \setminus (A \cup B) = \{x \mid x \in E \wedge x \notin (A \cup B)\} =$$
$$= \{x \mid x \in E \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)\} =$$
$$= \{x \mid (x \in E \wedge x \notin A) \wedge (x \in E \wedge x \in B)\} =$$
$$= \{x \mid x \in (E \setminus A) \wedge x \in (E \setminus B)\} = (E \setminus A) \cap (E \setminus B).$$

2.14. Odrediti $A = \{x \mid x \in N \wedge x < 8\} \cap \{x \mid N \in x > 5\}$.

<u>Rešenje.</u> $A = \{x \mid x \in N \wedge 5 < x < 8\} = \{6,7\}$.

2.15. Dokazati jednakost

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B),$$

gde su E,A,B proizvoljni skupovi.

<u>Rešenje.</u>

$$E \setminus (A \cap B) = \{x \mid x \in E \wedge x \notin (A \cap B)\} =$$
$$= \{x \mid x \in E \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\} =$$
$$= \{x \mid (x \in E \wedge x \notin A) \vee (x \in E \wedge x \notin B)\} =$$
$$= \{x \mid x \in (E \setminus A) \vee x \in (E \setminus B)\} = (E \setminus A) \cup (E \setminus B).$$

Rešenje je moguće dobiti i na sledeći način.

$$E \setminus (A \cap B) = E \cap (A \cap B)' = E \cap (A' \cup B') = (E \cap A') \cup (E \cap B') = (E \setminus A) \cup (E \setminus B).$$

Kako je $\Leftarrow$: ispunjeno

$$(E\setminus A)\cup(E\setminus B)=(E\cap A')\cup(E\cap B')=E\cap(A'\cup B')=E\cap(A\cap B)'=E\setminus(A\cap B),$$

to možemo pisati sledeću ekvivalenciju

$$E\setminus(A\cap B)\Longleftrightarrow(E\setminus A)\cup(E\setminus B).$$

2.16. Dokazati da je za $a,b\in R$

$$\{x \mid a<x<b\}=\{x \mid |x-\tfrac{1}{2}(a+b)|<\tfrac{1}{2}(b-a)\}.$$

Rešenje. - Iz osobine skupa desne strane imamo da je

$$-\frac{1}{2}(b-a)<x-\frac{1}{2}(a+b)<\frac{1}{2}(b-a),$$

odnosno

$$\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(b-a)<x<\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a),$$

tj. $a<x<b$ što dovodi do osobine skupa leve strane.

2.17. Neka su A i B dva neprazna skupa. Dokazati relaciju apsorpcije /za presek i uniju/

$A\cup(A\cap B)=A$ i $A\cap(A\cup B)=A$.

Rešenje. Dokaz izvodimo po definiciji

$$\left.\begin{array}{l}(x\in A\cup(A\cap B))\Longleftrightarrow(x\in A\vee x\in A\cap B)\Rightarrow\\ (x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B))\Longleftrightarrow x\in A\end{array}\right\}A\cup(A\cap B)=A;$$

$$\left.\begin{array}{l}(x\in A\cap(A\cup B))\Longleftrightarrow(x\in A\wedge x\in A\cup B)\Longleftrightarrow\\ (x\in A\wedge(x\in A\vee x\in B))\Longleftrightarrow x\in A\end{array}\right\}A\cap(A\cup B)=A;$$

2.18. Prirodni brojevi razvrstani su u sledeće podskupove

$$\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\ldots$$

gde n-ti podskup sadrži n brojeva. Odredit zbir S_n brojeva u n-tom podskupu kao i zbir $S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n$.

Rešenje. Obeležimo date podskupove sa $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_n$. Prvi elementi podskupova $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ obrazuju niz 1,2,4,7,11,... čiji je opšti član

$$a_n=1+2+3+\ldots+(n-1)+a_1=\frac{n}{2}(n-1)+a_1$$

tj. prvi element podskupa A_n. Na osnovu ovoga, n-ti podskup glasi

$$A_n=\left\{\frac{n(n-1)}{2}+1,\ \frac{n(n-1)}{2}+2,\ldots,\ \frac{n(n-1)}{2}+n\right\}.$$

Kako elementi podskupa A_n obrazuju aritmetički niz, to je zbir elemenata u skupu A_n

$$S_n=\frac{n}{2}\left[\frac{n}{2}(n+1)+1+\frac{n}{2}(n+1)+n\right]=\frac{n}{2}(n^2+1).$$

Za izračunavanje zbira

$$S=\sum_{k=1}^{n}S_k=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n$$

imamo da je

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}(k^2+1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{n}{8}(n+1)(n^2+n+2).$$

Kod ovog zadatka korisno je ponoviti postupak dobijanja sledećih suma

$$s^1=1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}(n+1),$$

$$S^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) ,$$

$$S^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 = (S_1)^2 .$$

2.19. Naći partitivni skup $\mathcal{P}(S)$ skupa $S = \{a, \{b,c\}\}$.

Rešenje. $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a, \{b,c\}\}\}$.

Napomenimo, da pod partitivnim skupom $\mathcal{P}(S)$ skupa S podrazumevamo skup svih podskupova skupa S uključujući skupove $\emptyset$ i S.

2.20. Ako je skup $A = \{1,2,3\}$, tada odrediti istinitosnu vrednost iskaza $\{1,3\} \subset \mathcal{P}(A)$.

Rešenje. Imamo da je

$$\tau(\{1,3\} \subset \mathcal{P}(A)) = \top$$

jer je $\{1,3\}$ podskup partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} .$$

2.21. Skup prirodnih brojeva N svrstati u sledeće podskupove

$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,4\}$, $A_3 = \{3,5,7\}$, $A_4 = \{6,8,10,12\}$,

$A_5 = \{$[illegible]$,15,$[illegible]

[illegible] n-tom podskupu

Rešenje. Kao u [illegible] najpre odrediti prvi element n-tog podskupa, a zatim sabrati njegove elemente. Treba razlikovati n-ti podskup za parno i neparno n. [illegible]

$$S_{2n-1} = (2n-1)(2n^2-2n+1) ,$$

$$S_{2n} = 2n\,(2n^2 + 1) .$$

2.22. Ako je $A = \{x \mid 5x = 8 \wedge x \in N\}$, da li je $A \subset N$?

Rešenje. Kako je $x = 8/5$, te $x \notin N$, to zaključujemo da A nije podskup skupa prirodnih brojeva $(A \not\subset N)$.

2.23. Neka je $S = \{y \mid 4y - 1 = 19 \wedge y \in N\}$. Da li je $S = 5$?

Rešenje. Kako je $S = \{5\}$, to $S \neq 5$.

2.24. Odredi skupove $(x \in R)$:

$$A = \{x \mid x^2 = 9 \wedge 2x = 4\} , \quad B = \{x \mid x \neq x\} , \quad C = \{x \mid x+8 = 8\} .$$

Rešenje. $A = \emptyset$, $B = \emptyset$, $C = \{0\}$.

2.25. Da li medju skupovima $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ ima jednakih ?

Rešenje. Nema. Objasni!

2.26. Koji je potreban i dovoljan uslov da bi bilo

$\{a,b\} \subset \{c,d\}$,

gde su $a,b,c,d \in R$ i $(a < b \wedge c < d)$.

Rešenje. $c < a \wedge d > b$.

2.27. Neka je $A, B \subset S$. Dokazati sledeću ekvivalenciju

$A \cap B = \emptyset \iff A \subset B'$; $\quad B' = \complement B$.

Rešenje.

$:\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in S \setminus B)$

$\Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B') \Rightarrow A \subset B'$.

$\Leftarrow : A \subset B' \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B') \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in S \setminus B)$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Sličnim postupkom dokazati i ekvivalenciju

$A \cap B = \emptyset \iff B \subset A'$.

2.28. Ako su dva proizvoljna skupa $A, B \subset S$, tada važe Demorganove formule /A.De Morgan /1806-1871/, engleski matematičar/

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ i

$(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Rešenje.

$$(A \cup B)' = \{x / x \in (A \cup B)'\} = \{x / x \in S \setminus (A \cup B)\} =$$

$$= \{x / x \in S \wedge x \notin (A \cup B)\} = \{x / x \in S \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)\}$$

$$= \{x / (x \in S \wedge x \notin A) \wedge (x \in S \wedge x \notin B)\} = \{x / x \in S \setminus A \wedge x \in S \setminus B\}$$

$$= \{x / x \in A' \wedge x \in B'\} = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = \{x / x \in (A \cap B)'\} = \{x / x \in S \setminus (A \cap B)\}$$

$$= \{x / x \in S \wedge x \notin (A \cap B)\} = \{x / x \in S \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\}$$

$$= \{x / (x \in S \wedge x \notin A) \vee (x \in S \wedge x \notin B)\}$$

$$= \{x / x \in S \setminus A \vee x \in S \setminus B\} = \{x / x \in A' \vee x \in B'\} = A' \cup B'.$$

Deskriptivno pokaži Demorganove formule upotrebom Vennovih dijagrama.

2.29. Dati su skupovi

$A = \{a, b\}$; $B = \{a, b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$.

Da li su relacije $A \in B$ i $A \subset B$ tačne ?

Rešenje. Prva relacija je netačna, druga je tačna, što možemo i ovako napisati $\tau(A \in B) = 0$, $\tau(A \subset B) = 1$.

2.30. Koji je potreban i dovoljan uslov da bi bilo

$[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$,

gde su $a, b, c, d \in R$ i $(a < b \quad c < d)$?

Rešenje. Kako je $a < b \wedge c < d$, to je uslov $b < c$.

2.31. Neka je $x \in R$ i

$A = \{x \mid 0 < x < 2\}$,

$B = \{x \mid 1 < x < 5\}$,

$C = \{x \mid 4 \leq x \leq 10\}$.

Odrediti : $A \cup B$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cup C$, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, $(A \cap B) \cap B$.

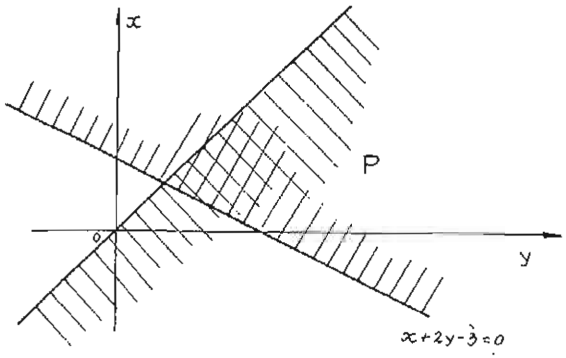
Rešenje. Poslužiti se brojevnom linijom; npr.,

$(A \cup B) \cup C = \{x \mid 0 < x \leq 10\}$.

2.32. U Descartesovom koordinatnom sistemu šrafirati sledeći presek

$$P=\{(x,y)\mid y<x\}\cap\{(x,y)\mid y>-\tfrac{1}{2}(x-3)\}.$$

Rešenje.



2.33. Dokazati relaciju $(A\setminus B)\cap B=\emptyset$.

Rešenje. Imamo da je

$$(A\setminus B)\cap B=\{x\mid x\in(A\setminus B)\wedge x\in B\}=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\wedge x\in B\}=\emptyset$$

Znajući da je $M\cap M'=\emptyset$ imamo i ovakav način dokaza:

$$(A\setminus B)\cap B=(A\cap B')\cap B=A\cap(B'\cap B)=A\cap\emptyset=\emptyset.$$

2.34. Ako je $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{2,3,7\}$, naći: $A\cup B$, $A\cap B$, $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ i $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$.

Rešenje. $A\cup B=\{1,2,3,7\}$; $A\cap B=\{2,3\}$; $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{1,7\}$;

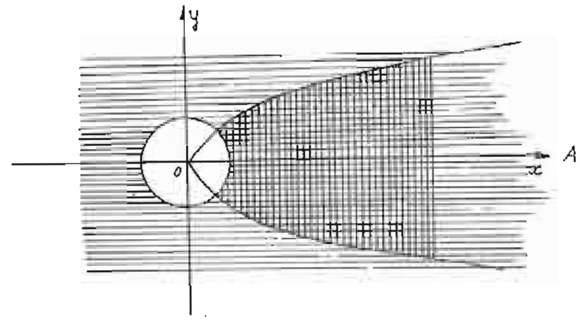
$(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$.

2.35. U Descartesovom pravouglom koordinatnom sistemu šrafirati sledeće skupove:

a) $A=\{(x,y)\mid y^2<x\}\cap\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$,

b) $B=\{(x,y)\mid y^3<x\}\cap\{(x,y)\mid x<y^2\}$.

Rešenje.



Skup B sam odredi!

2.36. Dati su skupovi tačaka

$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$,

$B=\{(x,y)\mid y^2>2x\}$,

$C=\{(x,y)\mid y^2<-2x\}$.

Na grafiku šrafirati oblasti:

a/ $A\cup B$ b/ $A\cup C$ c/ $B\cup C$ d/ $A\cap B$

e/ $B\cap C$ f/ $A\setminus B$ g/ $B\setminus A$ h/ $A\setminus C$

i/ $B\setminus C$ j/ $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Rešenje. Postupiti kao u prethodnom zadatku.

2.37. Odredi skupove $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ i $B\setminus A$ ako je

a/ $A =]\,2,4\,[$, $B = [3,5]$,

b/ $A =]\,2,4\,]$, $B = [3,5\,[$.

Rešenje.

a/ $A\cup B =]2,5\,]$, $A\cap B = [3,4\,[$, $A\setminus B =]2,3\,[$, $B\setminus A = [4,5]$.

b/ $A\cup B =]2,5\,[$, $A\cap B = [3,4]$, $A\setminus B =]\,2;3\,[$, $B\setminus A =]4,5\,[$.

2.38. Dokazati da svaki skup od n elemenata ima 2^n podskupova.

Rešenje. Vidi: Kurepa, dr. Djuro : Viša algebra [1].

2.39. Da li važe implikacije:

1/ $(A\setminus B) = C) \Rightarrow (A = B\cup C)$;

2/ $(A = B\cup C) \Rightarrow (A\setminus B = C)$,

gde su A,B,C proizvoljni skupovi?

Rešenje. Primenom dijagrama sudimo da je druga implikacija tačna, samo u slučaju kada $B\cap C = \emptyset$.

2.40. Dat je sledeći skup uredjenih tačaka

$A = \{(x,y) \mid 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$ i

$B = \{(x,y) \mid (x-4)^2 + y^2 \leq 16\}$.

Na grafiku šrafirati simetričnu diferenciju $A\triangle B$.

2.41. Za dva proizvoljna skupa A,B dokazati sledeću skupovnu jednakost

$A\triangle B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} A\triangle B &= (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cup B)\cap(A\cap B)' = (A\cup B)\cap(A'\cup B') = \\ &= [(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B'] = [(A\cap A')\cup(B\cap A')]\cup[(A\cap B')\cup(B\cap B')] = \\ &= [\emptyset\cup(B\cap A')]\cup[(A\cap B')\cup\emptyset] = (B\cap A')\cup(A\cap B') = \\ &= (B\setminus A)\cup(A\setminus B) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = A\triangle B . \end{aligned}$$

Analiziraj sve zakonitosti koje su primenjene u rešavanju.

2.42. Dokazati da važi

$A\triangle B = [A\setminus(A\cap B)]\cup[B\setminus(A\cap B)]$,

ako su A,B dva proizvoljna skupa.

Rešenje. Kako je simetrična definicija

$$A\triangle B \overset{def}{\Longleftrightarrow} (A\setminus B)\cup(B\setminus A),$$

to imamo da je

$$\begin{aligned} A\triangle B &= [A\setminus(A\cap B)]\cup[B\setminus(A\cap B)] = [A\cap(A\cap B)']\cup[B\cap(A\cap B)'] = \\ &= [A\cap(A'\cup B')]\cup[B\cap(A'\cup B')] = [(A\cap A')\cup(A\cap B')]\cup \\ &\cup[(B\cap A')\cup(B\cap B')] = [\emptyset\cup(A\cap B')]\cup[(B\cap A')\cup\emptyset] = \\ &= (A\cap B')\cup(B\cap A') = (A\setminus B)\cup(B\setminus A). \end{aligned}$$

2.43. Dokazati distributivnost za uniju i presek, tj.

a/ $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$,

b/ $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$,

gde su A,B,C tri proizvoljna skupa.

<u>Rešenje</u>. Distributivnost od $\cup$ prema $\cap$ i obratno a/ i b/, može se i skupno prikazati

$$A \overset{\cup}{\cap} (B \overset{\cap}{\cup} C) = (A \overset{\cup}{\cap} B) \overset{\cap}{\cup} (A \overset{\cup}{\cap} C)$$

Ovde izlažemo dokaz za slučaj a/:

$$\begin{aligned} A\cup(B\cap C) &= \{x \mid x\in A \vee x\in(B\cap C)\} = \\ &= \{x \mid x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)\} = \\ &= \{x \mid (x\in A \vee x\in B)\wedge(x\in A \vee x\in C)\} = \\ &= \{x \mid x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)\} = \\ &= (A\cup B)\cap(A\cup C). \end{aligned}$$

/Slučaj b/ sam pokazati!/.

P r i m e d b a.- Predlaže se korisniku ove zbirke da u sastavu realnih brojeva R obnovi osobine: apsorpcije, idempotencije, neutralnosti, komutativnosti, distributivnosti i asocijativnosti.

2.44. Ako komplemente dva proizvoljna skupa A i B obeležimo sa A' i B', tada je ispunjena jednakost

$$A \triangle B = A' \triangle B' .$$

<u>Rešenje.</u>

$$A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cap B')\cup(B\cap A') = (B'\cap A)\cup(A'\cap B) = L$$

$$A'\triangle B' = (A'\setminus B')\cup(B'\setminus A') = (A'\cap B)\cup(B'\cap A) = (B'\cap A)\cup(A'\cap B) = D$$

$$L = D \quad .$$

2.45. Za simetričnu diferenciju

$$A \triangle B \overset{def}{\Longleftrightarrow} (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

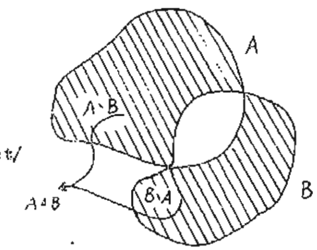
vrede sledeće osobine

1° $A\triangle B = B\triangle A$ /komutativnost/

2° $A\triangle\emptyset = A$ /neutralnost/

3° $A\triangle A = \emptyset$

4° $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$ /asocijativnost/



Treba dokazati osobinu pod 4°.

<u>Rešenje.</u>

$$\begin{aligned} A\triangle(B\triangle C) &= [A\setminus(B\triangle C)]\cup[(B\triangle C)\setminus A] = \\ &= [A\cap(B\triangle C)']\cup[(B\triangle C)\cap A'] = [A\cap\{(B\setminus C)\cup(C\setminus B)\}']\cup \\ &\cup[\{(B\setminus C)\cup(C\setminus B)\}\cap A'] = [A\cap\{(B\cap C')\cup(C\cap B')\}']\cup \\ &\cup[(B\cap C')\cup(C\cap B')\cap A'] = \square \end{aligned}$$

U algebri na skupovima dozvoljeno je operatore $\cup$ i $\cap$ zameniti sa + i $\cdot$. Radi preglednije manipulativnosti. Imamo da je

$$\square = A\cdot(BC' + CB')' + (BC' + CB')\cdot A' .$$

Kako je

$$\begin{aligned} (BC'+CB') &= \{(B\cap C')\cup(C\cap B')\}' = (B\cap C')\cap(C\cap B')' = \\ &= (B'\cap C)\cap(C'\cup B) = (B'+C)(C'+B) = B'C' + BB' + CC' + BC = \\ &= B'C' + BC , \end{aligned}$$

to je

$$\square = A\,(B'C' + BC) + (BC' + CB')A = ABC + AB'C' + BC'A + CA'B'$$

$$\begin{aligned} C\triangle(A\triangle B) &= [C\setminus(A\triangle B)]\cup[(A\triangle B)\setminus C] = [C\cap(A\triangle B)']\cup[(A\triangle B)\cap C'] = \\ &= [C\cap\{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\}']\cup[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cap C'] = \\ &= [C\cap\{(A\cap B')'\cap(B\cap A')'\}]\cup[(A\cap B')\cup(B\cap A')\cap C'] = \end{aligned}$$

$$= [C \cap \{(A \cap B')' \cap (B \cap A')'\}] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap A') \cap C'] =$$

$$= [C \cap \{(A' \cup B) \cap (B' \cup A)\}] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap A') \cap C'] = \oslash .$$

Kako je dalje

$$\oslash = C(A' + B)(B' + A) + (AB' + BA')C' = C(AA' + AB + AB' + BB') + AB'C' +$$

$$+ BA'C' = ABC + AB'C' + BC'A' + CA'B',$$

to je $\square = \oslash$ čime je asocijativnost dokazana.

2.46. Dokazati sledeću ekvivalenciju

$$A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (A \cap C),$$

gde su A, B, C proizvoljni skupovi.

Rešenje.

$$:\Rightarrow \quad A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \setminus C)' = A \cap (B \cap C')' = A \cap (B' \cup C) =$$

$$= (A \cap B') \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C) \cdot$$

$$\Leftarrow: \quad (A \setminus B) \cup (A \cap C) = (A \cap B') \cup (A \cap C) = A \cap (B' \cup C) =$$

$$= A \cap (B \cap C')' = A \cap (B \setminus C)' = A \setminus (B \setminus C).$$

2.47. Dokazati skupovnu jednakost

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D) ,$$

gde su A, B, C, D proizvoljni skupovi.

Rešenje.

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap B') \cap (C \cap D') = (A \cap C) \cap (B' \cap D') =$$

$$= (A \cap C) \cap (B \cup D)' = (A \cap C) \setminus (B \cup D) .$$

2.48. Ako su poznata tri proizvoljna skupa $A, B, C \subset S$, tada uprostiti sledeće izraze

a° $(A \cup B) \cap (A \cup B')$, $A, B \subset S$

b° $(A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B')$, $A, B \subset S$

c° $(A \cup B) \cap (B \cup C)$, $A, B, C \subset S$.

Rešenje.

$$a^{\circ} \quad (A \cup B) \cap (A \cup B') = (A \cap A) \cup (A \cap B') \cup (B \cap A) \cup (B \cap B') =$$

$$= A \cup (A \cap B') \cup (B \cap A) \cup \emptyset = A \cup (A \cap B') \cup (A \cap B) =$$

$$= A \cup [A \cap (B' \cup B)] = A.$$

na osnovu osobine apsorpcije.- Finalni deo rešenja mogao je da ima i ovakav tok

$$= A \cup [A \cap (B' \cup B)] = A \cap [S \cup (B' + B)] = A \cap (S \cup S) = A \cap S = A.$$

/Uprošćenja pod b/ i c/ sam izvesti!/.

2.49. Za prazan skup $\emptyset$ važe sledeće jednakosti

$\emptyset \subset A, \ \forall A$,	$\emptyset \setminus A = \emptyset$,
$A \cap \emptyset = \emptyset$,	$A \setminus \emptyset = A$,
$A \cup \emptyset = A$,	$A \cap A' = \emptyset$,
$A \Delta A = \emptyset$,	$A \Delta \emptyset = A$.

Objasniti!

2.50. Komplement skupa A u odnosu na skup B definiše se kao razlika

$$\complement_B A \overset{def}{\Longleftrightarrow} B \setminus A$$

pod uslovom, da je $A \subset B$. Komplement se još obeležava sa A' ili A^c, te je u obeležavanju istovetno

$\complement_B A = A^c = A' = B \setminus A$, $A \subset B$

Treba dokazati da je $\complement \complement A = A$, ili kraće $(A') = A$.

Rešenje.

$A \subset B,$

$B \setminus A = \complement A,$

$\complement (B \setminus A) = \complement \complement A = A,$

$x \in \complement\complement A \Longleftrightarrow x \notin \complement A \Longleftrightarrow x \in A.$

Uopšte, treba zapamtiti $x \in \complement X \Longleftrightarrow x \notin X.$

2.51. Dokazati dvojnu skupovnu jednakost

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

gde su A,B proizvoljni skupovi.

Rešenje.

$L = D_1 = D_2$;

$L = A \setminus B = A \cap B$; $D_1 = (A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap B' =$

$= (A \cap B') \cup (B \cap B') = A \cap B'$; $L = D_1$;

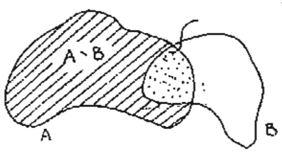
$D_2 = A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') = (A \cap A') \cup (A \cap B') =$

$= \emptyset \cup (A \cap B') = A \cap B' = D_1 = L$.

2.52. Dokazati da za dva proizvoljna skupa A,B važi jednakost

$A \setminus B = A \cap B'$.

Rešenje.



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \setminus B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} =$

$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B'\} = \{x \mid x \in A \cap B'\} =$

$= A \cap B'.$

2.53. Dokazati skupovnu jednakost

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C),$$

ako su A,B,C tri proizvoljna skupa.

Rešenje.

$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap B') \cap C' = (A \cap C') \cap B' = A \cap (B' \cap C') =$

$= A \cap (B \cup C)' = A \setminus (B \cup C)$

Pokazati rešenje i direktnom primenom odgovarajućih definicija.

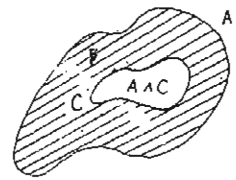
$(A \setminus B) \setminus C = \{x \mid x \in (A \setminus B) \setminus C\} = \{x \mid x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C\} = \cdots$

/nastaviti !/.

2.54. Za proizvoljne skupove A,B,C dokazati sledeću ekvivalenciju

$(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C) \Longleftrightarrow C \subset A$

Rešenje. Postupiti kao u prethodnom zadatku. Konsultovati naznačen Venov dijagram.



2.55. Dokazati da iz $A \cap B = A \wedge C \wedge A \cup B = A \cup C$ sledi da je $B = C$, tj

$(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$

Rešenje. Primenom dijagrama implikacija je očigledna! Algebarskim postupkom dokaz je sledeći:

$B = B \cap (A \cup A') = (B \cap A) \cup (B \cap A) = (B \cap A) \cup (B \setminus A) =$

$= (B \cap A) \cup [(B \cup A) \setminus A] = (C \cap A) \cup [(C \cup A) \setminus A] = C,$

$B = C.$

Ovde je primenjena jednakost

$B \setminus A = (B \cup A) \setminus A$ /dokazati je ! /.

2.56. Naći kvadrat $S^2 = S \times S$ za ove skupove S:

a/ $\{0,1\}$,

b/ $\{0,1,2,4,5\}$,

c/ N,

d/ prava p,

e/ obim kruga,

f/ obim kvadrata.

2.57. Naći $A \times B$ za ove skupove A i B:

a/ $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$;

b/ $\{1,2,3,4,5,6\}$, $\{0,1,2\}$;

c/ duž $\overline{AB}$, duž $\overline{CD}$;

d/ duž d, trougao ABC.

2.58. Naći:

a/ $(\{0,1\} \times \{0,14\} \times \{0,1\}$;

b/ $\{0,1\} \times (\{0,1\} \times \{0,1\})$.

2.59. Poznati su sledeći skupovi $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,d\}$ i $C = \{b,c\}$.

Odrediti:

a/ $\tau(C \subset A)$;

b/ $(A \cap B) \cup C$;

c/ $[(A \setminus C) \cup B] \times C$;

d/ $(A \triangle B) \times C$;

e/ $\tau(C \subset A \triangle B)$

f/ $A^2 \cap B^2$;

g/ $(A^2 \cap C^2) \cup \{(a,b)^{-1}, (d,c)^{-1}\}$.

2.60. Na primeru skupova $A = \{a,b\}$, $B = \{p,q\}$ i $C = \{1,2\}$ pokazati da za kombinovan proizvod ne važi asocijativni zakon.

__Rešenje.__ Kako je

$$(A \times B) \times C = \{((a,p),1), ((a,q),2), ((b,p),1), ((b,q),2)\},$$

$$A \times (B \times C) = \{(a,(p,1)), (a,(p,2)), (a,(q,1)), (a,(q,2)), (b,(p,1)), (b,(p,2)), (b,(q,1)), (b,(q,2))\}.$$

to je

$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

2.61. Neka je $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{a,d\}$. Odrediti:

a/ $(A \times B) \times A$,

b/ $(A \cup B) \times (A \cap B)$,

c/ $(A \cup B) \times (A \setminus B)$.

__Rešenje.__

a) $$(A \times B) \times A = \{((a,a),a), ((a,a),b), ((a,a),c), ((a,d),a), ((a,d),b), ((a,d),c), ((b,a),a), ((b,a),b), ((b,a),c), ((b,d),a), ((b,d),b), ((b,d),c), ((c,a),a), ((c,a),b), ((c,a),c), ((c,d),a), ((c,d),b), ((c,d),c)\};$$

b/ $(A \cup B) \times (A \cap B) = \{(a,a),(b,a),(c,a),(d,a)\}$;

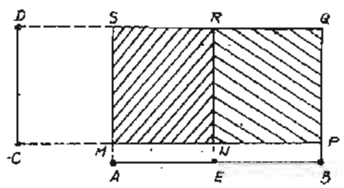
c/ $(A \cup B) \times (A \setminus B) = \{(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,b),(d,c)\}$

2.62. Neka je $A = \{a\}$. Obrazovati A^2, A^3, A^4.

Rešenje. $A^2 = \{(a,a)\}$; $A^3 = \{((a,a),a\}$, $A^4 = \{(((a,a),a),a)\}$.

2.63. Neka je E unutrašnja tačka duži $\overline{AB}$. Ako su skupovi $S_1 = \overline{CD}$ i $S_2 = \overline{AB} \setminus \{E\}$, tada odrediti kombinovani proizvod $S_1 \times S_2$.

Rešenje.



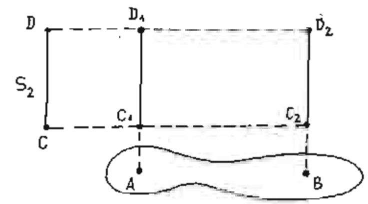
$S_1 \times S_2 = \overline{CD} \times (\overline{AB} \setminus \{E\}) = \square\, MPQS \setminus \overline{RN}$,

tj. "paralelogram" iz kojeg je izbačena duž.

2.64. Dat je $S_1 = \{A,B\}$ i $S_2 = \overline{CD}$. Odrediti kombinovani proizvod $S_1 \times S_2$.

Rešenje.

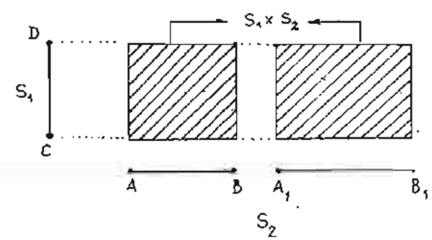
$S_1 \times S_2 = \overline{C_1D_1} \cup \overline{C_2\,D_2}$ /videti graf proizvoda/.



2.65. Šahovsku tablu prikazati pomoću Dekartovog proizvoda.

2.66. Ako su skupovi $S_1 = \overline{CD}$ i $S_2 = \overline{AB} \cup \overline{A_1B_1}$, tada odrediti kombinovan proizvod.

Rešenje.



$S_1 \times S_2 = \overline{CD} \times (\overline{AB} \cup \overline{A_1B_1}) = (\overline{CD} \times \overline{AB}) \cup (\overline{CD} \times \overline{A_1B_1})$

2.67. Dat je skup $X = \{1,1,1,2,a,2,2,a,a,2,b\}$. Odrediti Dekartov kvadrat X^2.

Rešenje. Kako je

$$X = \{1,1,1,2,a,2,2,a,a,2,b\} = \{1,2,a,b\},$$

to je

$$X^2 = X \times X = \{(1,1),(1,2),(1,a),(1,b),(2,1),(2,2),(2,a),(2,b),$$
$$(a,1),(a,2),(a,a),(a,b),(b,1),(b,2),(b,a),(b,b)\}.$$

2.68. Na skupovima $A = \{o,1,3\}$ i $B = \{4,5\}$ pokazati da za Dekartov proizvod $A \times B$ ne važi komutativni zakon.

Rešenje. Kako je

$$A \times B = \{(o,4),(o,5),(1,4),(1,5),(3,4),(3,5)$$

i

$$B \times A = \{(4,o),(4,1),(4,3),(5,o),(5,1),(5,3),$$

to je

$$A \times B \neq B \times A.$$

2.69. Skupu $A = \{1,2,3\}$ odrediti kvadrat A^2, dijagonalu Δ, a potom izračunati

a/ $A^2 \setminus \Delta$;

b/ $(A^2 \cap \Delta) \cup \{(3,2)^{-1}\}$;

Rešenje.

$$A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),$$
$$(3,2),(3,3)\}.$$

$$\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}.$$

a/ $A^2 \setminus \Delta = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$. Kako je $\Delta \subset A^2$, to možemo pisati da je $\Delta' = A^2 \setminus \Delta$.

b/ $(A^2 \cap \Delta) \cup \{(3,2)^{-1}\} = \Delta \cup \{(2,3)\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$.

2.70. Za ma koje skupove A i B važe apsortivne jednakosti

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

Rešenje. Primenom distributivnog zakona imamo da je

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B),$$

te možemo staviti da je

$$D = A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B).$$

Dalje je,

$$A \cup D = A \cup (A \cup (A \cap B)) = A \cup (A \cap B) = D,$$

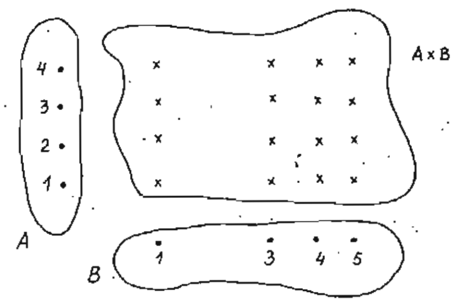
$$A \cap D = A \cap (A \cap (A \cup B)) = A \cap (A \cup B) = D.$$

Iz ovog sledi da je $A = D$.

2.71. Naći $A \times B$ za $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,4,5\}$ i pokaži graf proizvoda.

Rešenje.

$$A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),$$
$$(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,3),(4,4),(4,5)\}.$$



2.72. Za proizvoljne skupove A,B,C dokazati sledeću ekvivalenciju

2.72. Za proizvoljne skupove A,B,C dokazati sledeću ekvivalenciju

$$(A \cup B)\setminus C = A \cup (B\setminus C) \iff A\cap C = \emptyset .$$

Rešenje. $: \Longrightarrow$

$$(A\cup B)\setminus C = (A\cup B)\cap C' = (A\cap C')\cup(B\cap C') =$$
$$= (A\setminus C)\cup(B\setminus C) = A\cup(B\setminus C),$$

jer je $A\setminus C = A$ iz uslova $A\cap C = \emptyset$.

$\Longleftarrow :$

$(A \cup B)\cap C' = A\cup(B\cap C') \Longrightarrow$

$(A\cap C')\cup(B\cap C') = A\cup(B\cap C') \Longrightarrow$

$A\cap C' = A$,

$A\setminus C = A \Longrightarrow A\cap C = \emptyset$.

2.73. Ako je $\mathbb{P}(A)$ pozitivni skup skupa A, dokazati da je za dva skupa A,B ispunjena sledeća ekvivalencija

$$\mathbb{P}(A\cap B) \iff \mathbb{P}(A)\cap\mathbb{P}(B).$$

Rešenje.

$: \Longrightarrow$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \{x \mid x\in\mathbb{P}(A\cap B)\} = \{x \mid x\subset A\cap B\} = \{x \mid x\in A \wedge x\subset B\} =$$
$$= \{x \mid x\in\mathbb{P}(A)\wedge x\in\mathbb{P}(B)\} \Rightarrow \{x \mid x\in(\mathbb{P}(A)\cap\mathbb{P}(B))\} =$$
$$= \mathbb{P}(A)\cap\mathbb{P}(B).$$

$\Longleftarrow :$

$$\mathbb{P}(A)\cap\mathbb{P}(B) = \{x \mid x\in(\mathbb{P}(A)\cap\mathbb{P}(B))\} = \{x \mid x\in\mathbb{P}(A)\wedge x\in\mathbb{P}(B)\} =$$
$$= \{x \mid x\subset A \wedge x\subset B\} = \{x \mid x\in A\cap B\} =$$
$$= \{x \mid x\in\mathbb{P}(A\cap B)\} = \mathbb{P}(A\cap B).$$

2.74. Data je "skupovna jednačina"

$$(X \cup A)' \cup (X \cup A')' = B .$$

Odrediti skup X pod uslovom da je $A\subset S$ i $B\subset S$ i $X\subset S$.

Rešenje.

$$(X \cup A)' \cup (X\cup A')' = B ,$$
$$(X'\cap A')\cup(X'\cap A) = B ,$$
$$X'\cap(A'\cup A) = B ,$$
$$X'\cap S = B$$
$$X' = B \longrightarrow X = B'.$$

2.75. Čemu je jednako $A\setminus(A\setminus B)$?

Rešenje.

$$A\setminus(A\setminus B) = A\cap(A\setminus B)' = A\cap(A\cap B')' = A\cap(A'\cup B) =$$
$$= (A\cap A')\cup(A\cap B) = \emptyset\cup(A\cap B) = A\cap B.$$

2.76. Dokazati sledeću ekvivalenciju

$$(A\setminus B)' \iff A'\cup(A\cap B).$$

za proizvoljne skupove $A,B\subset S$.

Rešenje.

$: \Longrightarrow$

$$(A\setminus B)' = (A\cap B')' = (A'\cup B) = S\cap(A'\cup B) = (A\cup A')\cap(A'\cup B) =$$
$$= A'\cup(A\cap B).$$

$\Longleftarrow :$

$$A'\cup(A\cap B) = (A'\cup A)\cap(A'\cup B) = S\cap(A'\cup B) = A'\cup B = (A\cap B')' = (A\setminus B)'.$$

2.77. Za dva proizvoljna skupa $A,B \subset S$ dokazati sledeću ekvivalenciju

$A \cup (B \setminus A) \Longrightarrow A \cup B.$

Rešenje. Postupiti kao u prethodnom zadatku !

2.78. Za proizvoljne skupove $A,B,C,D \subset S$ dokazati sledeću ekvivalenciju.

$A \cap (B \cup C \cup D) \Longleftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D$.

Rešenje. Ekvivalenciju dokazati upotrebom tablice istinitosnih vrednosti.

2.79. Dokazati sledeću ekvivalenciju:

$(X \cup Y) \setminus Z \Longleftrightarrow (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$,

gde su X,Y,Z proizvoljni skupovi.

Rešenje.

$:\Longrightarrow$

$$(X \cup Y) \setminus Z = (X \cup Y) \cap Z' = (X \cap Z') \cup (Y \cap Z') = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z).$$

$\Longleftarrow:$

$$(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z) = (X \cap Z') \cup (Y \cap Z') = Z' \cap (X \cup Y) = (X \cup Y) \cap Z' = (X \cup Y) \setminus Z .$$

2.80. Dokazati sledeću ekvivalenciju:

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \Longleftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$

gde su A,B proizvoljni skupovi.

Rešenje. Postupiti kao u prethodnom zadatku.

L I T E R A T U R A

Pri izradi ove zbirke zadataka korišćena je odgovarajuća literatura. Na kraju svake bibliografske jedinice navedena je tačna paginacija, kako bi korisnik ove literature mogao direktno da konsultuje odgovarajuća teorijska razmatranja iz matematičke logike i skupova.

[1] K u r e p a, dr D u r o: Viša algebra. Univerzitet u Beogradu, Zavoda za izdavanje udžbenika SRS, Prva knjiga, Drugo izdanje, ispravljeno i dopunjeno, Beograd, 1971., str. XXIII+772+33 /1-16; 17-35; 45-54/.

[2] D e v i d e, dr. V l a d i m i r: Zadaci iz apstraktne algebre. Matematički problemi i ekspozicije 1 /urednik serije dr Dragoslav Mitrinović/, Naučna knjiga, Beograd, 1971., str.114 /9-24;25-39/.

[3] P r e š i ć, dr. S l a v i š a: Matematila za I razred stručnih škola, I deo, Logika, skupovi, brojevi. Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd,1970., str.2o3 /7-5o; 51-1o2/.

[4] K u r e p a, dr. D j u r o: Što su skupovi i kakva im je uloga. Priručnik za učenike srednjih škola, Materija i broj, Biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju, 2, Treće prošireno izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1970., str. 6 + 216"/1-62/.

[5] M i t r i n o v i ć dr. D r a g o s l a v, S: Matematika I u obliku metodičke zbirke zadataka za rešenjima. Univerzitet u Beogradu, "Gradjevinska knjiga", Drugo izmenjeno i prošireno izdanje, Beograd, 1967, str. XVI + 33o /3o - 1o/.

[6] K u r e p a, dr. S v e t o z a r : Uvod u matematiku – Skupovi, strukture, brojevi. Tehnička knjiga, Zagreb, 1971., str. 25o /po sadržaju/.

[7] K u r e p a, dr. S v e t o z a r: Matematička analiza Prvi dio. Tehnička knjiga, Zagreb, 1970., str. 341 /po sadržaju/.

[8] A v r a m o v, D.A.: Zbirka rešenih zadataka iz matematičke logike /Za početnike/. "Tehnička knjiga", Zagreb, 1970., str.77.

[9] K u r e p a dr. Đ j u r o : Viša matematika – Skripta. Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 1972., /u rukopisu/.

[10] K u r e p a, dr. D j u r o : Teorija skupova. Sveučilište u Zagrebu, "Školska knjiga", Zagreb, 1951., str. XX + 439.

Žarko MIJAJLOVIĆ

III OPŠTE OSOBINE FUNKCIJA

Def. 1. Ako svakom članu nekog množtva M pridružimo jedan /ili više/ članova skupa S, onda se govori o preslikavanju, funkciji, transformaciji množtva M u skup S ili o funkciji od M prema S.

Funkcije se označavaju slovima i drugim simbolima i skraćenicama. Ako je npr. f naziv za neku funkciju od M prema S, onda se za svaki član x iz M zna šta je funkcijom f u S pridruženo tome članu.

Funkcija i pripadna skupovna funkcija. Ako je f preslikavanje od M prema S, onda za svako $x \in M$ možemo sa $f\{x\}$ označiti skup svih vrednosti fx što ih f prima u x; preslikavanje $x \to f\{x\}$ je odredjena skupovna funkcija u M.

Oblast /domen/ i antidomen funkcije. Ako je za svako $x \in M$ definisano $fx \in S$, onda se M zove oblast ili domen funkcije f, pa se može označiti i sa Domf, Dof, ili čak Df /čitati domen od f/. Svaki element oblasti funkcije f zove se i vrednost varijable ili promenljive ili argumenta funkcije f. Antidomen funkcije f je skup vrednosti funkcije f.

Def. 2. Preslikavanje u skup i preslikavanje na skup. Ako je f funkcija čiji je domen A i antidomen B, kaže se da je f preslikavanje /transformacija/ množtva A na B /dakle: preslikavanje na B, a ne samo u B/.

Ako je antidomen funkcije f deo od B, govori se o preslikavanju f od A u skup B ili u klasu B.

Funkcije koje vrše 1-1 preslikavanje. To su funkcije f koje u različitim tačkama svoje oblasti imaju različite vrednosti, tj. za koje iz $x \in \mathrm{Dom}f$, $x' \in \mathrm{Dom}f$, $x \neq x'$ izlazi $f(x) \neq f(x')$. One čuvaju relaciju nejednakosti.

Def.3. Funkcije koje vrše 1-1 i na preslikavanja zovu se bijekcije.

Identično preslikavanje. Preslikavanje $x \to x$ za svako $x \in A$ zove se identično ili kanonsko preslikavanje skupa A. Obično se označuje sa 1 ili I, odnosno $I \setminus A$.
$I|_A$

Konstantna preslikavanja ili konstante. To su preslikavanja koja u svakoj tački svoje oblasti uzimaju jednu te istu vrednost.

Permutacija ili automorfizam zadanog skupa M zove se svako obostrano-jednoznačno preslikavanje od M na samog sebe. Skup svih automorfizama množtva M označava se sa M! /čitati: M faktorijel/.

Nizovi

Def. 4. Preslikavanje skupa prvih n prirodnih brojeva $\{1,2,\ldots, n\}$ u neki skup X naziva se konačan niz.

Def. 5. Preslikavanje skupa prirodnih brojeva, N, u neki skup X naziva se beskonačni niz.

Članove niza označavamo sa $a_1, a_2, \ldots, a_n$ u slučaju konačnog niza, odnosno sa $a_1, a_2, \ldots$ u slučaju beskonačnog niza.

Monotono rastući i monotono opadajući nizovi. Niz realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots$ je monotono rastući /uzlazan/ ako je $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$; on je strogo rastući ako je $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$
Slično se definišu i monotono opadajući i strogo opadajući nizovi.

Posebno važna vrsta realnih nizova su aritmetička i geometrijska progresija. Niz realnih brojeva čiji se svaki član dobija iz prethodnog množenjem sa konstantnim brojem q naziva se geometrijskom progresijom.

Za niz $b_1, b_2, \ldots$ koji čini geometrijsku progresiju važi:

/1/ $b_{n+1} = qb_n$.

/2/ $b_n = b_1 q^{n-1}$.

/3/ $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

q se naziva količnikom geometrijske progresije.

Niz realnih brojeva u kojem se svaki sledeći član dobija iz prethodnog dodavanjem jednog te istog broja naziva se aritmetičkom progresijom, ili drugim rečima ako je ispunjeno

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

d se naziva diferencijom progresije.
Za aritmetičku progresiju važe sledeće formule:

/1/ $a_n = a_1 + (n-1)d$.

/2/ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d$.

3.1. Dati su nizovi:

a/ 2,4,6,8,1o,12,... ili $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots \end{pmatrix}$.

b/ 2,7,12,17,22,27,... ili $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 2 & 7 & 12 & 22 & \ldots \end{pmatrix}$.

c/ 1,2,6,24,12o,... ili $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 1 & 2 & 6 & 24 & 120 & \ldots \end{pmatrix}$.

/1/ Odrediti koji su od datih nizova aritmetičke progresije.

/2/ U onim nizovima koji čine aritmetičku progresiju odrediti prvi član i diferenciju.

/3/ Naći opšte članove datih nizova i kod onih nizova koji čine aritmetičku progresiju naći zbir prvih n članova.

Rešenje.

/1/ Aritmetičke progresije su nizovi pod /a/ i /b/.

/2/ Kod aritmetičke progresije pod /a/ prvi član niza je $a_1 = 2$, a diferencija $d = 2$. Pod /b/ prvi član je $a_1 = 2$, a $d = 5$.

/3/ /a/ $a_n = 2 + (n-1)\,2$ odakle je $a_n = 2n$.

/b/ $a_n = 2 + (n-1)\,5$ odakle je $a_n = 5n - 3$.

/c/ $a_n = n!$.

Zbirovi su:

/a/ $S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \frac{n}{2}\left(2 + 2n\right) = n\,(n+1)$.

/b/ $S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \frac{n}{2}\left(2 + 5n - 3\right) = \frac{n}{2}\,(5n-1)$.

3.2. Naći zbir prvih:

/a/ 1oo prirodnih brojeva;

/b/ n prirodnih brojeva;

/c/ n kvadrata prirodnih brojeva.

Rešenje. Prirodni brojevi čine aritmetičku progresiju sa diferencijom 1 i opšti član je oblika $a_n = n$

/a/ $a_1 = 1$, $n = 100$ odakle sledi $S_{100} = \frac{100}{2}\left(1 + 100\right) = 5050$.

/b/ $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = n$ odakle sledi $S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \frac{n(n+1)}{2}$.

/c/ $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

$$n^3 - (n-1)^3 = \left((n-1) + 1\right)^3 - (n-1)^3 = 3\,(n-1)^2 + 3\,(n-1) + 1$$

$$\vdots$$

$$3^3 - 2^3 = (2+1)^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1\,.$$

$$2^3 - 1^3 = (1+1)^3 - 1^3 = 3\cdot 1^3 + 3\cdot 1 + 1\,.$$

Sumiranjem levih strana i desnih strana jednakosti dobija se

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3\,(1 + 2 + \ldots + n) + \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n\text{-puta}}$$

ili preko (b)

$$(n+1)^3 - 1 = 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

Pa je $3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) =$

$$= \frac{(n+1)}{2}\left[\,2\,(n+1)^2 - 3n - 2\,\right] = \frac{n+1}{2}\left[\,2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2\right] =$$

$$= \frac{(n+1)}{2}\,n\,(2n+1) \text{ ili}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.3. Date su dve aritmetičke progresije

$a,\ a+b,\ a+2b,\ \dots$

$c,\ c+d,\ c+2d,\ \dots$

Naći sumu:

$$S = ac + (a+b)(c+d) + (a+2b)(c+2d) + \dots + [a+(n-1)b][c+(n-1)d]$$

Rešenje.

$$S = ac + (ac + ad + bc + bd) + (ac + 2(ad + bc) + 2^2 bd) + \dots +$$
$$+ (ac + (n-1)(ad + bc) + (n-1)^2 bd) = nac + (ad + bc)(1+2+\dots n-1) +$$
$$+ db\,[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] = nac + (ad + bc)\frac{n(n-1)}{2} +$$
$$+ db\,\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

ili

$$S = n\,[ac + (n-1)\frac{ad + bc}{2} + (n-1)(2n-1)\frac{db}{6}].$$

3.4. Dokazati, da ako niz $a_1, a_2, \dots a_n$ obrazuje aritmetičku progresiju sa diferencijom d, da je tada

/a/ $$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

/b/ $$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Rešenje.

/a/ Kako je $\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)$ i slično za $\frac{1}{a_2 a_3}, \dots, \frac{1}{a_{n-1} a_n}$

imamo da je

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d}\,[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots +$$
$$+ \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}] = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d}\cdot\frac{a_n - a_1}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{d}\,\frac{(n-1)d}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

što je trebalo dokazati.

/b/ Slično kao pod /a/.

3.5. Automobil je prešao za prvu sekundu 6m, a za svaku sledeću prelazi 4m više nego što je prešao u prethodnoj.

/a/ Koliko je metara prešao za 8 sekundi ?

/b/ Koliko je prešao posle n sekundi?

Rešenje.

Neka je a_n dužina puta predjenog u n-toj sekundi. Tada je $a_{n+1} = a_n + 4$, pa niz a_n čini aritmetičku progresiju i $a_n = 6 + 4(n-1)$ ili $a_n = 4n + 2$

/a/ Tada je ukupno prešao put za 8 sekundi

$$S_8 = a_1 + \dots + a_8 = \frac{8}{2}(a_1 + a_8) = 4\,[6 + 6 + (8-1)\cdot 4] = 160.$$

/b/ $S_n = a_1 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(6 + 4n + 2) = 2n^2 + 4$

ili $S_n = 2n^2 + 4$.

S_n je dužina predjenog puta.

3.6. Dati su nizovi

/a/ $2, 6, 18, 54, 162, \dots$;

/b/ $-3, -6, -12, -24, -48, \dots$;

/c/ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$;

/d/ $1, -1, 1, -1, \dots$;

/e/ $1, 3, 5, 7, \dots$.

/1/ Koji od navedenih nizova čine geometrijsku progresiju i kod onih nizova koji čine geometrijsku progresiju odrediti prve članove i količnik.

/2/ Odrediti opšte članove navedenih nizova i njihove sume.

/3/ Odrediti koji su nizovi monotoni.

Rešenje.

/1/ Nizovi pod /a/, /b/, /c/ i /d/ čine geometrijsku progresiju sa prvim članovima i količnicima, respektivno:

$b_1 = 2,\ q = 3;\quad b_1 = -3,\ q = 2;\quad b_1 = 1,\ q = \frac{1}{2};\quad b_1 = 1,\ q = -1.$

/2/

/a/ $b_n = 2\cdot 3^{n-1}, \quad S_n = 2+6+18+\dots+2\cdot 3^{n-1} = 2\cdot\frac{1-3^n}{1-3} = 3^n - 1$.

/b/ $b_n = -3\cdot 2^{n-1}, \quad S_n = -3-3\cdot 2 - 3\cdot 2^2 - \dots - 3\cdot 2^{n-1} = -3\,\frac{1-2^n}{1-2} = 3-3\cdot 2^n$.

/c/ $b_n = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, ili $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} .$$

/d/ $b_n = 1\cdot(-1)^{n-1}$ ili $b_n = (-1)^{n-1}$

$$S_n = 1-1+(-1)^2+\dots+(-1)^{n-1} = \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{za } n \text{ parno} \\ 1, & \text{za } n \text{ neparno.} \end{cases}$$

/e/ Ovaj niz čini aritmetičku progresiju sa diferencijom $d=2$

$a_n = 2n-1, \quad S_n = 1+3+5+\dots+2n-1 = \frac{n}{2}(1+2n-1) = n^2$, tj. $S_n = n^2$.

/3/

/a/ monotono rastući ;

/b/ monotono opadajući ;

/c/ monotono opadajući ;

/d/ nije monoton niz ;

/e/ monotono rastući .

3.7. Banka daje na uloženi novac godišnju kamatu 10 %

/a/ U banku je uloženo 10000 din. Naći koliko je novca posle 7 god.

/b/ Ako je uloženo b_0 novca, koliko će biti novca posle n godina?

/c/ Posle koliko godina će biti dvostruko više novca u banci?

/d/ Posle koliko godina će biti k-puta više novca?

Rešenje. Ako je uloženo 10000 din. posle prve godine biće $10000 + 0{,}1\cdot 10000 = 1{,}1\cdot 10000$, posle druge godine biće $1{,}1\cdot 10000 + 0{,}1\cdot(1{,}1\cdot 10000) = (1{,}1)^2\cdot 10000$ din. Vidimo da količina novca raste u banci geometrijskom progresijom i to sa količnikom $q = 1{,}1$.

/a/ U banci će biti posle 7 godina $(1{,}1)^7\cdot 10000 = 19586$ din.

/b/ Analogno kao pod /a/, zaključujemo da ako je bilo b_n din. u banci posle sledeće godine biće $b_{n+1} = b_n + 0{,}1 \cdot b_n$ din., gde je b_n ukupna količina novca n godina pošto je novac uložen ili $b_{n+1} = 1{,}1 \cdot b_n$, pa je $b_n = b_1 q^{n-1}$ ili pošto je $b_1 = b_0 q$ /q=1,1/ to je $b_n = b_0 \cdot q^n$.

Dakle, posle n godina biće $b_n = b_0 q^n$ dinara u banci.

/c/ Da bi bilo dvostruko više novca mora da je ispunjeno $b_n = 2b_0$ i n nalazimo iz jednakosti:

$b_n = b_0 q^n$ i $b_n = 2b_0$ ili $2b_0 = b_0 q^n$. Odavde je $q^n = 2$, pa je

$n \log q = \log 2$. Dobijamo da je $n = \dfrac{\log 2}{\log q} = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}1} \approx \dfrac{0{,}3}{0{,}04} = 7{,}5$.

Znači posle 7,5 godina biće dvaput više novca nego što je uloženo. Primećujemo da to vreme ne zavisi od količine uloženog novca, tj. ma koju sumu uložili, posle 7,5 godina biće dvaput više novca.

/d/ Analogno kao pod /c/ biće $b_n = kb_0$, pa je $kb_0 = b_0 q^n$. Odavde je $k = q^n$, odnosno $n \log q = \log k$, pa je $n = \dfrac{\log k}{\log q}$.

Uopštenje prethodnog zadatka: Neka banka daje p% kamate na uloženu sumu a. Rešiti tačke /a/, /b/, /c/ i /d/ iz prethodnog zadatka.

3.8. Dokazati da ako niz b_n čini geometrijsku progresiju, to onda niz $a_n = \log b_n$ čini aritmetičku progresiju.

Rešenje.

$b_{n+1} = qb_n$ odakle $\log b_{n+1} = \log (qb_n) = \log q + \log b_n$ ili

$a_{n+1} = d + a_n$, gde je $d = \log q$.

3.9. Dokazati da je niz:

/a/ $a_n = n^3$ monotono rastući;

/b/ $a_n = \frac{1}{n}$ monotono opadajući;

/c/ $a_n = \frac{1}{2^n}$ monotono opadajući;

/d/ $a_n = \frac{n}{n+1}$ monotono rastući;

/e/ $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ monotnno opadajući;

/f/ $a_n = n!$ monotono rastući.

Rešenje.

/a/ $a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 > 0$

Dakle, $a_{n+1} > a_n$, pa je niz a_n monotono rastući.

/b/ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$, pa je $a_{n+1} < a_n$

i niz a_n je monotono opadajući.

/c/ $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$ Odakle sledi da je $a_n > a_{n+1}$, pa je a_n monotono opadajući.

/d/ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \dfrac{1}{n^2+2n} > 1$

odakle je

$a_{n+1} > a_n$, pa je niz a_n monotono rastući.

/e/ $a_n - a_{n+1} = \dfrac{1}{n^2+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2+1} = \dfrac{(n+1)^2 + 1 - (n^2+1)}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} =$

$$= \frac{n^2+2n+1+1-n^2-1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} > 0 \text{ odakle}$$

je $a_n - a_{n+1} > 0$, odnosno $a_n > a_{n+1}$, pa je niz a_n monotono opadajući.

/f/ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n!(n+1)}{n!} = n+1 > 1$ odakle je $a_{n+1} > a_n$,

pa je niz a_n monotono rastući.

3.10. Neka je $a_n = 3n+2$. Dokazati, da brojevi $b_n = 2^{a_n}$ obrazuju geometrijsku progresiju i naći njen količnik.

3.11. Tri broja obrazuju geometrijsku progresiju. Ako drugi broj uvećamo za 8 dobijamo aritmetičku progresiju. Ako posle toga uvećamo treći broj za 64, onda ponovo dobijamo geometrijsku progresiju. Naći te brojeve.

3.12. Opšti član aritmetičke progresije je $a_n = 3n+2$.

Izračunati S_m, S_{5m}, S_{m^2} .

3.13. $S_n = \frac{3n^2+9n}{2}$. Naći a_1 i d.

3.14. Opšti član aritmetičke progresije je $a_n = 5n+1$.

Dokazati, da brojevi $A_n = 3a_n+2$, takodje, obrazuju aritmetičku progresiju.

3.15. Dokazati da niz sa opštim članom $S_n = 5n^2 - 4n$ predstavlja niz suma nekih aritmetičkih progresija.

3.16. Brojevi b_n obrazuju geometrijsku progresiju. Dokazati, da je $b_r^2 = b_{r-3} \cdot b_{r+3}$ $/r > 3/$.

3.17.* Neka je $A = \{a,b,c,d\}$ i $B = \{x,y,z,w\}$. Neka je data funkcija:

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ y & x & y & w \end{pmatrix}$$

a. Prikazati grafički tu funkciju.

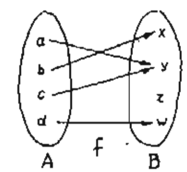
b. Odrediti domen i antidomen te funkcije. Da li je to 1-1 preslikavanje ?

Da li je to preslikavanje na?

<u>Rešenje.</u>

a. Slika 17.1 grafički prikazuje funkciju f.

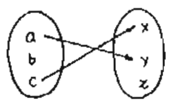
b. Domen funkcije f je skup A, a antidomen skup vrednosti funkcije f, tj. skup $\{x,y,w\}$. To nije 1-1 preslikavanje, jer $y = f(a) = f(c)$, ali $a \neq c$. Takodje f nije preslikavanje <u>na</u> skup B jer z nije slika nijednog elementa iz A.



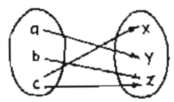
Sl. 17.1.

3.18. Koji dijagram od 18.1, 18.2, 18.3 prikazuje funkciju iz skupa $A = \{a,b,c\}$ u skup $B = \{x,y,z\}$?

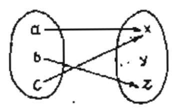
Rešenje. Sl.18.1. ne definiše funkciju, jer nikakva vrednost nije pridružena elementu b. Slika 18.2. ne prikazuje funkciju, jer su pridružene dve vrednosti elementu c. Medjutim, ako se ne zahteva jednoznačnost, tada sl. 18.2. prikazuje preslikavanje u širem smislu. Slika 18.3. definiše jednoznačno preslikavanje, odnosno funkciju.



Sl. 18.1



Sl. 18.2



Sl. 18.3

3.19. Neka je dat skup $X = \{a,b,c\}$. Odrediti sve permutacije /automorfizme/ skupa X.

Rešenje. Ima ukupno 6 permutacija skupa X /u opštem slučaju skup od n elemenata ima $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n$ permutacija/. To su:

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

3.20. Naći sve permutacije skupa $X = \{a,b,c,d\}$.

Uputstvo: Ima ukupno $4! = 24$ permutacija, za njihovo nalaženje videti zadatak 19.

3.21. Neka su g i q permutacije iz zadatka 19. Naći kompoziciju $g \circ q$.

Rešenje. Kada tražimo kompoziciju dve permutacije, to se svodi na kompoziciju funkcija q i g. Tada je:

$$g \circ q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} = p$$

Kompoziciju permutacija g i q dobijamo tako što, na primer, q prevodi a u c, a g prevodi c u b, pa onda $g \circ q$ prevodi sve skupa a u b. Slično je i za ostale elemente.

3.22. Naći sve moguće kompozicije od po dve permutacije u zadatku 19. Proveriti da li tako novodobijena preslikavanja i dalje jesu permutacije. Proveriti da li važi zakon asocijacije i komutacije za kompoziciju relacija.

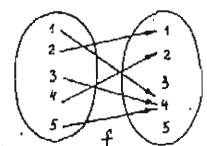
Uputstvo: Videti zadatak 21. Novodobijena preslikavanja ponovo su permutacije. Zakon asocijacije važi /videti zadatak 10, poglavlje relacija/. Lako se proverava da ne važi zakon komutacije.

3.23. Neka je $A = \{1,2,3,4,5\}$ i neka je f definisano slikom 23.1. Očigledno f preslikava A u A.

a. Naći $f(\{1,3,5\})$,

b. Naći $f^{-1}(\{2,3,4\})$,

c. Naći $f^{-1}(\{3,5\})$.



Sl. 23.1

Rešenje. a. $f(\{1,3,5\}) = \{f(1), f(3), f(5)\} = \{4\}$

b. $f^{-1}(\{2,3,4\}) = \{4,1,3,5\}$

c. $f^{-1}(\{3,5\}) = \emptyset$, pošto nijedan element iz A nema 3 i 5 kao svoju sliku.

3.24. Neka je f funkcija koja preslikava skup R realnih brojeva u R, definisana sa $f(x) = x^2$. Naći:

a. $f^{-1}(\{25\})$ b. $f(\{-9\})$, c. $f^{-1}(\{x/\ x \leq 0\})$, d. $f^{-1}(\{x/\ 4 \leq x \leq 25\})$.

<u>Rešenje.</u>

a. $f^{-1}(\{25\}) = \{5,-5,\}$, pošto je $f(5) = f(-5) = 25$ i jer nema drugih realnih brojeva čiji je kvadrat 25.

b. $f^{-1}(\{-9\}) = \emptyset$, pošto -9 nije kvadrat nijednog realnog broja.

c. $f^{-1}(\{x/\ x \leq 0\}) = \{0\}$, pošto $f(0) = 0 \leq 0$ i pošto je kvadrat svakog realnog broja veći od nule.

d. $f^{-1}(\{x/\ 4 \leq x \leq 25\})$ sastoji se od svih brojeva x za koje je $4 \leq x^2 \leq 25$.

Otuda $f^{-1}(\{x/\ 4 \leq x \leq 25\}) = [\ 2,5\ ] \cup [\ -5,-2\ ]$.

3.25. Dokazati da je $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, gde je f neka funkcija $A, B \subset$ Dom f.

<u>Rešenje.</u> Neka je $y \in f(A \cup B)$. Tada postoji $x \in A \cup B$ da je $y = f(x)$. Pošto iz $x \in A \cup B$ sleduje da je $x \in A$ ili $x \in B$, to je onda $f(x) \in f(A)$ ili $f(x) \in f(B)$, tj. $y \in f(A)$ ili $y \in f(B)$. Otuda je $y \in f(A) \cup f(B)$. Ovim smo dokazali da je $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Sa druge strane neka je $y \in f(A) \cup f(B)$. Tada je $y \in f(A)$ ili $y \in f(B)$. Pretpostavimo da je $y \in f(A)$. Tada postoji $x \in A$ da je $y = f(x)$. Ali, iz $x \in A$ sleduje da je $x \in A \cup B$ /jer je $A \subset A \cup B$/, što znači da je $f(x) \in f(A \cup B)$. Ako bi y bilo iz skupa $f(B)$, slično bi pokazali da je $y \in f(A \cup B)$. Ovim smo pokazali da kad god je $y \in f(A) \cup f(B)$ da je $y \in f(A \cup B)$, što znači da je $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Pošto je $f(A \cup B)$ sadržan u $f(A) \cup f(B)$, i obrnuto, pošto je skup $f(A) \cup f(B)$ sadržan u $f(A \cup B)$, to onda važi jednakost: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Dokazati da je $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, gde je f neka funkcija, $A, B \subset$ Dom f.

3.26. Sledeća tablica prikazuje broj stanovnika SAD u milionima za godine 184o, 185o, ..., 196o. Prikazati te podatke grafički.

Broj stanovnika u SAD /u milionima/, 184o-196o

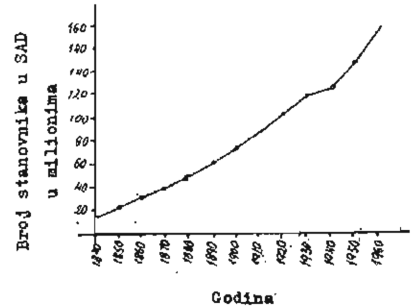
Godina	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
Broj stanovnika	17.1	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1	179.3

Sl. 1.1

<u>Rešenje.</u>

<u>I način</u>

Prema slici broj stanovnika, označen sa P je zavisna varijabila i vreme označeno sa t je nezavisna varijabila. Tačke su odredjene preko koordinata koje se čitaju iz tablice. Uzastopne tačke su povezane pravim linijama, pošto nema informacija o broju stanovnika u medjuperiodu.

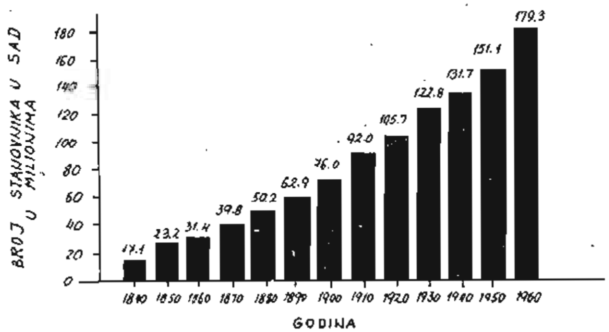


Sl. 1.2

Primetimo da jedinice na koordinatnim osama nisu jednake, jer promenljive prikazuju bitno različite veličine.

Funkcionalnu zavisnost izmedju broja stanovnika i vremena možemo prikazati kao $P = P(t)$

II način

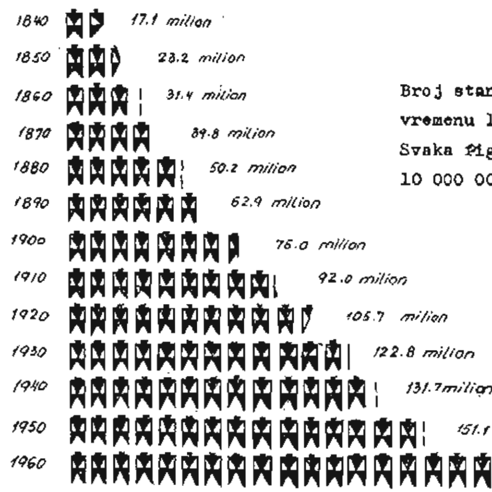


Sl. 1.3

Širine stubova , koje su sve jednake, u ovom slučaju nemaju značaja i mogu da se biraju po volji, s tim da se dva stuba ne dodiruju. Broj na vrhu stuba može biti izostavljen. U našem slučaju i vertikalna osa može biti izostavljena.

Ovakav grafički prikaz naziva se bar graf ili bar dijagram.

III način



Broj stanovnika u SAD u vremenu 1840-1960
Svaka figura predstavlja 10 000 000 ljudi

Sl. 1.4

Ovakvi dijagrami nazivaju se piktograf /piktogram/ i često se koriste za prikazivanje statističkih podataka široj publici.

3.27. Sledeća tablica prikazuje broj tona pšenice i kukuruza, koje je proizvedeno na jednom poljoprivrednom dobru u periodu 1950-1960.g.

Koristeći tablicu odrediti:

I. Prikazati grafički te podatke.

godina	Broj tona pšenice	Broj tona kukuruza
1950	200	75
1951	185	90
1952	225	100
1953	250	85
1954	240	80
1955	195	100
1956	210	110
1957	225	105
1958	250	95
1959	230	110
1960	235	100

Sl. 2.1

II.a. Godinu kada je najmanje žita proizvedeno.

b. Godinu kada je proizvedeno najviše kukuruza.

c. Godine izmedju kojih je došlo do najvećih oscilacija u proizvodnji pšenice.

d. Godine u kojim je proizvodnja kukuruza opadala a žita rasla, u odnosu na prethodnu godinu.

e. Godinu u kojoj je ukupna proizvodnja žita i kukuruza bila maksimalna.

III. Neka W i C respektivno označavaju broj tona žita i kukuruza. Očigledno je da su W i C funkcije vremena t, tj. W = F(t) , C = G (t).

a. Naći W za t = 1956.

b. Naći C za t = 1953, 1959.

c. Naći t kada je W = 225.

d. Naći F (1954) .

e. Naći C (1958.) .

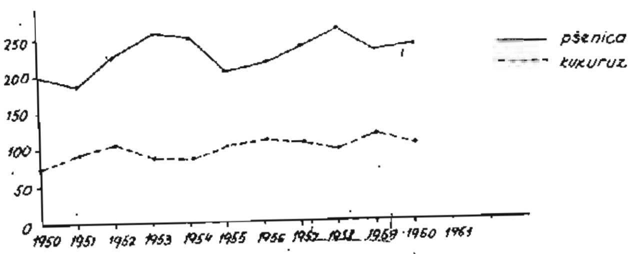
f. Naći C kada je W = 21o.

g. Šta je domen promenljive t?

IV. Prikazati u procentima proizvodnju pšenice i kukuruza u odnosu na ukupnu proizvodnju.

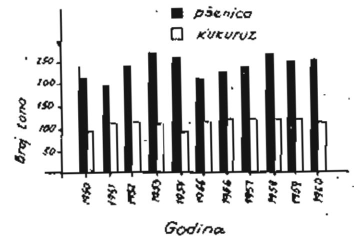
Rešenje.

I. Prvi način:



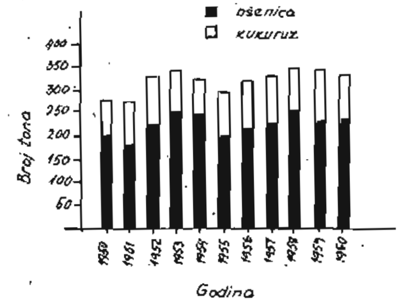
Sl. 2.2

Drugi način:



Sl. 2.3.

Treći način:



Sl. 2.4.

Primetimo da Sl. 2.4. prikazuje i ukupnu proizvodnju.

II. a. 1951. godine proizvedeno je najmanje žita.

b. Prema tablici 2.1. u godinama 1956 i 1959 proizvedeno je najviše kukuruza i to oba puta po 110 tona.

c. Izmedju godina 1954. i 1955. došlo je do najveće oscilacije u proizvodnji, tj. proizvedeno je 1955. 50 tona žita manje nego prethodne godine ili $\Delta W = W(1955) - W(1954) = 195 - 240 = -45$.

d. U godinama 1953, 1957, 1958, 1960.

e. 1958. godine proizvedeno je najviše ukupno žita i kukuruza – 345 tona.

III. a. Za t = 1956., W = 210.

b. Za t = 1953., 1959. C je respektivno 85 ili 110. Taj rezultat možemo pisati i ovako: $C(\{1953, 1959\}) = \{85, 110\}$.

c. U godinama 1953. i 1957. W = 225. Odavde vidimo da jednoj vrednosti zavisne promenljive mogu da odgovaraju više vrednosti nezavisne promenljive.

d. Prema tablici F (1954) = 240

e. G (1958) = 95 .

f. Kada je W = 210, vreme t = 1956, a te godine proizvedeno je 110 tona kukuruza, odnosno C = 110.

g. t prolazi kroz godine 1950., 1951.,..., 1960. Otuda domen promenljive t, odnosno funkcija F i G je skup {1950., 1951.,...,1960} .

IV. Za 1950. g. je procenat žita 200/ (200+75) = 72,7 %, procenat kukuruza 100 % - 72,7 % = 27,3 %. Slično je i u ostalim slučajevima:

Godina	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
Procenat pšenice	72.7	67.3	69.2	74.6	75.0	66.1	65.6	68.2	72.5	67.6	70.1
Procenat kukuruza	27.3	32.7	30.8	25.4	25.0	33.9	34.4	31.8	27.5	32.4	29.9

Sl. 2.5.

3.28. U jednoj laboratoriji mereno je vreme T /u sekundama/ kompletne vibracije štapa dužine L /u santimetrima/ i dobijeni su ovi rezultati za štapove raznih dužina:

L	10,1	16,2	22,2	33,8	42,0	53,4	66,7	74,5	86,6	100,0
T	0,64	0,81	0,95	1,17	1,30	1,47	1,65	1,47	1,74	2,01

Sl. 3.1.

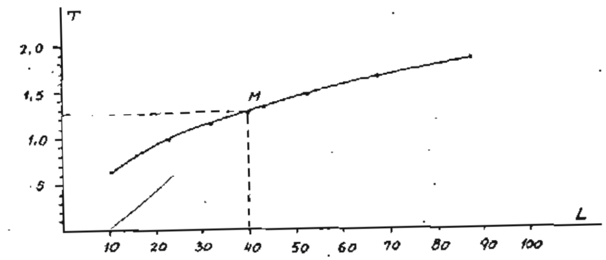
a. Predstaviti grafički T kao funkciju od L.

b. Iz grafika odrediti T za štap dužine L = 40 cm.

c. Šta možemo kazati o dobijenoj krivoj ? Odrediti minimum i maksimum funkcije T = F (L).

Rešenje.

a.



Sl.3.2.

Primetimo da dobijeni grafik predstavlja neprekidnu, glatku krivu.

b. Sa grafika vidimo da je za L = 40, T = 1,27. Odgovarajuća tačka M na krivoj u ima upravo te koordinate /40, 1,27/. Takodje kažemo da je vrednost F(40) dobijena interpolacijom.

c. Sa grafika vidimo da je funkcija T = F (L) monotono rastuća, tj. da ako je $T_1 < T_2$, tada je $F(T_1) < F(T_2)$. Minimum je dostignut za L = 10,1 tada je T = F (10,1) = 0,64 . Maksimum je dostignut za L = 100,1 i tada je T = F (100,0) = 2,01.

Šćepan UŠĆUMLIĆ

POJAM FUNKCIJE REALNE PROMENLJIVE

1° Neka su D i V podskupovi skupa realnih brojeva. Ako svakom elementu $x \in D$ pridružimo jedan /ili više/ elemenata $y = f(x) \in V$, onda se govori o <u>preslikavanju</u> ili <u>funkciji</u> skupa D na skup V. Tada pišemo

$f : D \to V$. ili $D \xrightarrow{f} V$.

Promenljiva x zove se nezavisno promenljiva a y zavisno promenljiva. Skup D zove se definicioni skup, ili oblast definisanosti ili domen funkcije $y = f(x)$; a V skup vrednosti, ili antioblast ili antidomen. U najjednostavnijim slučajevima oblast definisanosti je zatvoren interval /segment/ $[a,b]$, tj. skup svih realnih brojeva x, koji ispunjavaju uslov $a \leq x \leq b$, ili otvoren interval /a,b/, tj. skup svih realnih brojeva x koji ispunjavaju uslov $a < x < b$. Inače oblast definisanosti može biti ma kakav skup realnih brojeva.

2° Funkcija definisana nad skupom realnih brojeva N, sa vrednostima u proizvoljnom skupu zove se <u>niz</u>. <u>Brojevni niz</u> je funkcija definisana na skupu prirodnih brojeva N, sa vrednostima u skupu realnih brojeva R.

3° Funkcija se najčešće zadaje u obliku <u>analitičkog izraza, grafički i tabelarno</u>. Ako je data u obliku $y = f(x)$ kažemo da je zadata analitički

u <u>eksplicitnom</u> obliku. Ako je analitički izraz kojim je funkcija zadata oblika $F(x,y) = 0$, kažemo da je zadata <u>implicitno</u>.

4° Za funkciju $y = f(x)$ definisanu na intervalu $(-a, a)$ kažemo da je <u>parna</u> ako je $f(x) = f(-x)$, <u>neparna</u> ako je $f(-x) = -f(x)$, za svako $x \in (-a, a)$.

5° Ako funkcija $y = f(x)$ ispunjava uslov $f(x+\omega) = f(x)$, /ω konstanta različita od nule/ kažemo da je <u>periodična</u>. Najmanja pozitivna konstanta ω, za koju je $f(x+\omega) = f(x)$ zove se <u>osnovni period</u> funkcije $y = f(x)$.

6° Ako postoji funkcija $x = \varphi(y)$ takva da je $y = f[\varphi(y)]$ ili $F[\varphi(y), y] = 0$, onda se funkcija $x = \varphi(y)$ naziva <u>inverzna</u> funkcija funkcije $y = f(x)$, odnosno inverzna funkcija funkcije $F(x,y) = 0$.

7° Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je na intervalu /a,b/ <u>monotono</u>,

a/ <u>neopadajuća</u> ako je za $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$;

b/ <u>nerastuća</u> ako je za $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$;

c/ <u>rastuća</u> ako je za $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$;

d/ <u>opadajuća</u> ako je za $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$;

za svako $x_1, x_2 \in (a,b)$.

8° Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je na intervalu /a,b/ <u>ograničena</u>:

a/ <u>odozgo</u> ako postoji takav broj M da je za svako $x \in (a,b)$ $f(x) \leq M$;

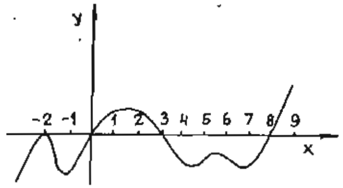
b/ <u>odozdo</u> ako postoji takav broj m da je za svako $x \in (a,b)$ $f(x) \geq m$.

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je <u>ograničena na intervalu</u> (a,b) ako je ograničena i odozgo i odozdo.

3.29. Nacrtan je grafik funkcije $y = f(x)$ /sl.1/. Odgovoriti na sledeća pitanja:

a/ Za koje vrednosti nezavisno promenljive x je vrednost funkcije jednaka nuli?

b/ Za koje vrednosti argumenta je funkcija pozitivna?



Sl. 1

c/ Za koje vrednosti argumenta je funkcija negativna?

Rezultat. a/ $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 8$;

b/ $x \in (0,3) \cup (9, +\infty)$;

c/ $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (3, 9)$.

3.30. Data je funkcija $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$. Naći $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Da li postoji $f(-1)$?

Rešenje. $f(-2) = \dfrac{-2-3}{(-2)^2-1} = \dfrac{-5}{4-1} = -\dfrac{5}{3}$,

$f(0) = \dfrac{0-3}{0-1} = 3$,

$f(3) = 0$,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}-3}{\frac{1}{4}-1} = \dfrac{-\frac{5}{2}}{-\frac{3}{4}} = \dfrac{10}{3}$.

$f(-1)$ ne postoji za $x = -1$, jer je $(-1)^2 - 1 = 0$ imanilac izraza $f(-1)$.

3.31. Naći $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, ako je $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$.

Rešenje. $f(0) = 0$

$f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$,

$f(2) = 0$,

$f(3) = 0$,

$f(4) = 24$.

3.32. Naći $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$ ako je $f(x) = \log x^2$.

Rešenje. $f(-1) = \log(-1)^2 = \log 1 = 0$,

$f(-0{,}001) = -6$,

$f(100) = \log 100^2 = \log 10^4 = 4$.

3.33. Naći $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ako je

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{za } -\infty < x \leq 0, \\ 2^x & \text{za } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Rešenje. $f(-2) = 1 + (-2) = -1$,

$f(-1) = 1 + (-1) = 0$,

$f(0) = 1 + 0 = 1$,

$f(1) = 2^1 = 2$,

$f(2) = 2^2 = 4$.

3.34. Data je funkcija $\varphi(x) = 2 \sin 2x + \cos x$. Naći $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(a)$, $\varphi(a-b)$, $\varphi(\Delta x)$

Rešenje. $\varphi(0) = 1,$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi(1) = 2\sin 2 + \cos 1,$$

$$\varphi(2) = 2\sin 4 + \cos 2,$$

$$\varphi(a) = 2\sin 2a + \cos a,$$

$$\varphi(a-b) = 2\sin 2(a-b) + \cos(a-b),$$

$$\varphi(\Delta x) = 2\sin 2\Delta x + \cos \Delta x.$$

3.35. Naći $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, ako je $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

Rezultat. $f(0) = 1,$

$$f(-x) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1) = \frac{-x}{2+x},$$

$$f(x)+1 = \frac{2}{1+x}; \quad \frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{1-x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1}.$$

3.36. Neka je $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 0 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$

Naći: $f(2)$, $f(0)$, $f(0,5)$, $f(-0,5)$, $f(3)$.

Rešenje. $f(2) = 2-1 = 1,$

$$f(0) = f(0,5) = 2,$$

$$f(3) = 0,$$

$$f(-0,5) = 2^{0,5} = \sqrt{2}.$$

3.37. Ako je

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -1 < x < 0 \\ 1+x^2, & 0 \leq x < 2, \end{cases}$$

Naći $f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Postoje li $f(2)$ i $f(5)$?

Rešenje. $f(1) = 1 + 1^2 = 2,$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi^2}{4},$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$f(2)$ i $f(5)$ ne postoji.

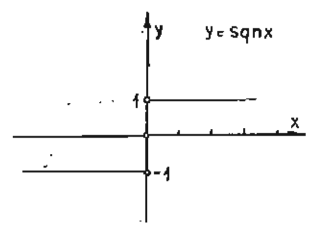
3.38. Funkcija $y = \operatorname{sgn} x$ definisana je na sledeći način

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{ako je } x < 0 \\ 0, & \text{ako je } x = 0 \\ 1, & \text{ako je } x > 0. \end{cases}$$

Konstruisati grafik ove funkcije i pokazati da je $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

Rešenje.

Kako je $|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x > 0 \\ 0, & \text{ako je } x = 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$



imamo ako je:

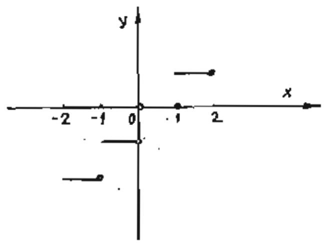
a/ $x > 0$: $|x| = x \operatorname{sgn} x$

b/ $x = 0$: $|0| = 0 = 0 \operatorname{sgn} 0$;

c/ $x < 0$: $|x| = -x = x \operatorname{sgn} x$;

pa je tvrdjenje dokazano.

3.39. Označimo sa $E(x)$ najveći ceo broj $d \leq x$, tj. ako je $x = 2,3$; $E(2,3) = 2$; $x = -3,1$: $E(x) = -3$; $E(\pi) = 3$, uopšte ako je $x = n+r$, gde je n ceo broj i $0 \leq r < 1$ tada je $E(x) = n$. Konstruisati grafik ove funkcije:



3.40. Ako je $f(x) = x^3 - x$, naći $f[f(x)]$ i $f\{f[f(x)]\}$.

Rešenje. 1° $f[f(x)] = [f(x)]^3 - f(x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) =$

$$= (x^3 - x)\,[(x^3 - x)^2 - 1] = (x^3 - x)(x^3 - x - 1)(x^3 - x + 1).$$

2° $f\{f[f(x)]\} = \left(f\,[f(x)]\right)^2 - f\,[f(x)] = 0.$

3.41. Napisati u eksplicitnom obliku sledeće funkcije implicitno date:

1° $x^2 + y^2 = 16$; 2° $x^3 y^2 = x^2 - 1$; 3° $10^{xy} = 2$;

4° $\log_{(10)}(3x-1) + \log_{(10)}(y+1) = 1$; 5° $5^{x+y} = 2$.

Rešenje. 1° Potrebno je y izraziti u zavisnosti od x. Iz date jednakosti $x^2 + y^2 = 16$ sledi da je:

$$y^2 = 16 - x^2,$$

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}, \quad /16 - x^2 \geq 0/.$$

Napomena. Iz eksplicitnog oblika zadate funkcije uočavamo da svakoj vrednosti argumenta x odgovaraju dve vrednosti funkcije y. Za takvu funkciju kažemo da je dvoznačna.

2° Rezultat. $y^2 = \dfrac{x^2 - 2}{x^3}$.

3° $10^{xy} = 2$,

$$xy = \log_{(10)} 2,$$

$$y = \frac{\log_{(10)} 2}{x}.$$

4° $\log_{(10)}(3x - 1) + \log(4+1) = 1$,

$$\log_{(10)}(3x-1)(y+1) = 1,$$

$$(3x-1)(y+1) = 10,$$

$$y+1 = \frac{10}{5x - 1}\ ; \quad y = \frac{10}{3x - 1} - 1$$

5° $e^{x+y} = 2$,

$$x+y = \ln 2,$$

$$y = \ln 2 - x.$$

3.42. Za $f(x) = \ln x$, naći $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Rešenje.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln \frac{x+h}{h}}{h} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \ln \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.43. Ako je $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, pokazati da je $f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

3.44. Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pokazati da je

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0.$$

3.45. Ako je $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$, pokazati da je $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

<u>Rešenje.</u>

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}+x^2=$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}=f(x).$$

3.46. Naći $f(x)$, ako je $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

<u>Rešenje.</u> Kako je

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2x\frac{1}{x}-2x\frac{1}{x}=$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

stoga je $f(x)=x^2-2$.

3.47. Naći linearnu funkciju $f(x)$ ako se zna da je:

$f(0)=3$ $f(1)=-2$.

<u>Rešenje.</u> Opšti oblik linearne funkcije $f(x)$ je $f(x)=ax+b$ gde su a i b konstante koje je potrebno odrediti.

$f(0)=b=3$,

$f(1)=a+b=-2$,

pa je dakle $b=3$, $a=-5$ i $f(x)=-5x+3$.

3.48. Naći kvadratnu funkciju $f(x)$ ako se zna da je

$f(0)=4$, $f(1)=3$, $f(2)=6$.

<u>Rešenje.</u> Tražena funkcija je oblika $f(x)=ax^2+bx+c$.

Konstante a,b i c odredjujemo iz uslova:

$f(0)=c=4$,

$f(1)=a+b+c=3$,

$f(2)=4a+2b+c=6$.

Iz poslednje tri jednačine sa tri nepoznate dobijamo da je $a=2$, $b=-3$ i $c=4$, pa je $f(x)=2x^2-3x+4$.

3.49. Naći celu racionalnu funkciju trećeg stepena

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, ako je

$f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=5$.

<u>Rezultat.</u> $f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2$.

3.50. Naći funkciju oblika $f(x)=a+bc^x$, ako je $f(0)=15$; $f(2)=30$, $f(4)=90$.

<u>Rezultat.</u> $f(x)=10+5\cdot 2^x$.

3.51. Naći $f(x)$ ako je

$f(x+1)=x^3-3x+2$

<u>Rešenje.</u> Kako je

$$f(x+1)=x^2-3x+2=x^2-3x+2+2x-2x=$$

$$=(x^2+2x+1)-5x+1=$$

$$=(x+1)^2-5x+5-5+1=$$

$$=(x+1)^2-5(x+1)+6$$

imamo da je $f(x)=x^2-5x+6$.

3.52. Naći $f(x)$ ako je

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2} \qquad /x > 0/.$$

Rezultat. $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$.

3.53. Naći $f(x)$, ako je

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2 .$$

Rešenje. Iz analitičkog izraza za $f\left(\frac{x}{1+x}\right)$ nalazimo da je

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2 = \left(\frac{x}{1}\right)^2 = \left(\frac{x}{1+x-x}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1+x-x}{x+1}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{x}{x+1}}{1 - \frac{x}{x+1}}\right)^2 .$$

Označimo da je $\frac{x}{x+1} = t$. Stoga je $f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2$, ili

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 .$$

3.54. Odrediti oblast definisanosti funkcija:

$$y = x^7 - \frac{6x^3}{7} + 0{,}5 .$$

Rešenje. Funkcija je zadata analitički u eksplicitnom obliku. Za proizvoljno x može se odrediti odgovarajuće y. Stoga je oblast definisanosti date funkcije skup svih realnih brojeva x.

3.55. $y = \dfrac{x^2}{1 + x}$.

Rešenje. Pošto delenje sa nulom nije definisano, data funkcija postoji za one vrednosti argumenta x, za koje je $x+1 \neq 0$. Stoga je oblast definisanosti date funkcije skup $D : (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$

3.56. $y = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 3x - 4}$.

Rešenje. Kao i u prethodnom primeru mora biti $x^2 - 3x - 4 \neq 0$, odnosno $x \neq -1$ i $x \neq 4$. Otuda je oblast definisanosti date funkcije skup $D : (-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$.

3.57. $y = \sqrt{3x - x^2}$.

Rešenje. Kvadratni koren postoji samo od onih brojeva koji su nenegativni, pa je data funkcija definisana ako je $3x - x^2 \geq 0$, tj. $x(3-x) \geq 0$. Poslednja nejednacina je zadovoljena ako je

/a/ $x \geq 0$, $3-x \geq 0$ ili /b/ $x \leq 0$, $3-x \leq 0$.

Rešimo sistem nejednačina /a/. Iz nejednačine $3-x \geq 0$ sledi da je $x \leq 3$. Dakle sistem /a/ je zadovoljen ako je $x \geq 0$ i istovremeno $x \leq 3$, odnosno ako je $x \in [0,3]$. Rešimo i sistem /b/. Druga nejednačina je zadovoljena ako je $x \geq 3$. Prema tome sistem /b/ nema rešenja. Konačno, data funkcija je definisana ako je $x \in [0,3]$.

3.58. $y = \sqrt{2x^2 + x + 9}$.

Rešenje. Data funkcija je definisana za one vrednosti argumenta za koje je $2x^2 + x + 9 \geq 0$. Stoga je oblast definisanosti funkcije skup $D : (-\infty , + \infty)$.

3.59. $y = \arcsin(1-x) + \ln(\ln x)$.

Rešenje. Funkcija $y = \arcsin x$ je definisana za $x \in [-1, 1]$, a funkcija $y = \ln x$ za $x > 0$. Stoga će data funkcija biti definisana ako je /a/ $|1-x| \leq 1$; /b/ $\ln x > 0$. Rešimo nejednačinu /a/. Ona je ekvivalentna dvostrukoj nejednačini $-1 \leq 1 - x \leq 1$, ili dvema linearnim nejednačinama: 1° $1-x \leq 1$, 2° $1-x \geq -1$. One su zadovoljene ako je $x \in [0,2]$. Dakle, uslov /a/ je zadovoljen ako je $x \in [0,2]$, a uslov /b/ ako je $x \in (1,+\infty)$, pa je data funkcija definisana za $x \in (1,2]$.

3.60. $y = \log(x^2 - 4)$.

Rešenje. Logaritam postoji samo od onih brojeva koji su veći od nule. Stoga je data funkcija definisana ako je $x^2-4 > 0$, tj. ako je $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

3.61. $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.

Rešenje. Data funkcija je definisana za one vrednosti x za koje je,

/a/ $x + 2 > 0$

/b/ $x - 2 > 0$.

Otuda je oblast definisanosti skup $D : (2, +\infty)$.

3.62. $y = \sqrt{x+3} - \sqrt{1-x} + e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Rešenje. Funkcija je definisana za one vrednosti nezavisno promenljive x za koje je $x + 3 \geq 0$; $1 - x \geq 0$ i $x \neq 0$. Stoga je data funkcija definisana ako je $x \; [-3,0) \cup (0,1]$.

3.63. $y = \ln \arcsin \frac{x+2}{5-x}$.

Rešenje. Kako je logaritamska funkcija definisana za $x > 0$, mora biti

$$\arcsin \frac{x+2}{5-x} > 0$$

pa otuda

$$0 < \frac{x+2}{5-x} \leq 1 .$$

Iz poslednje dvostruke nejednakosti sledi da je $x \in (-2, \frac{3}{2}]$.

3.64. $y = \arcsin(\sin x)$.

Rezultat. $D : (-\infty ; +\infty)$

3.65. $y = \sqrt{\ln \frac{x-4}{x+2}} + \sqrt{4 - 3x - x^2}$.

Rešenje. Data funkcija je definisana za one vrednosti x za koje je

/a/ $\ln \frac{x-4}{x+2} \geq 0$

/b/ $4-3x-x^2 \geq 0$

/c/ $\frac{x-4}{x+2} > 0$,

a to znači da je $\frac{x-4}{x+2} \geq 1$ i $4-3x-x^2 \geq 0$.

Rešavanjem poslednjih nejednačina dobijamo da je $x \in [-4, -2)$.

3.66. $y = \ln \sin(x-3) + \sqrt{16-x^2} + \sqrt{2^x+1}$.

Rezultat. $D : (3-2\pi, 3-\pi) \cup (3, 4]$.

3.67. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

Rezultat. $D: (-\infty, +\infty)$

3.68. $y = \frac{x}{|x|}$.

Rezultat. $D: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3.69. $y = \frac{x+2}{\sqrt{x - |x|}}$.

Rešenje. Data funkcija je definisana za one vrednosti x za koje je $x - |x| > 0$. Rešavanjem poslednje nejednačine nalazimo da je funkcija definisana za $x \in (-\infty, 0)$.

3.70. Dokazati da je $\ln \frac{\sqrt{x^2+1-x}}{\sqrt{x^2+1+x}} \equiv 2 \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ i naći oblast definisanosti funkcije

$$y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}.$$

Rešenje.

$$\ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} - x^2} \equiv \ln \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} \equiv$$

$$\equiv \ln \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2}{x^2+1 - x^2} \equiv \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \equiv 2 \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right),$$

pri čemu je $\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) > 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$. Prema tome funkcija $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$ je definisana za svako $x \in (-\infty, +\infty)$.

3.71. Odrediti domen i antidomen sledećih funkcija. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

Rezultat. $D: [-1, 2]$; $\overline{D}: [0, \frac{3}{2}]$.

3.72. $y = \ln(1 - 2\cos x)$.

Rezultat. $D: \left(2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{5\pi}{3}\right)$

$/k = 0, \pm 1, \dots /$

$\overline{D}: (-\infty, \log 3]$.

3.73. Koje su od sledećih funkcija parne a koje neparne:

a/ $f(x) = 3x - x^3$.

Rešenje. Kako je

$$f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -3x + x^3 = -(3x - x^3) = -f(x)$$

data funkcija je neparna.

b/ $f(x) = 8$.

Rezultat. Parna.

c/ $f(x) = |x|$.

Rezultat. Parna.

3.74. Koje su od sledećih funkcija parne a koje neparne:

1° $f(x) = x^7 - \frac{15}{7} x^3 + x$; 2° $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$;

3° $f(x) = \sqrt{1 - x^3 + x^4} + \sqrt{1 + x^3 + x^4}$; 4° $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$;

5° $f(x) = \ln|x|$.

Rešenje. 1° Pošto je

$$f(-x) = (-x)^7 - \frac{15}{7}(-x)^3 + (-x) = -x^7 + \frac{15}{7}x^3 - x = -(x^7 + \frac{15}{7}x^3 + x) = -f(x)$$ data funkcija je neparna.

2° $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$. Pošto je

$$f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-x}+a^{-(-x)})=\frac{1}{2}(a^{-x}+a^x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})=f(x)$$

data funkcija j. parna.

4° $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

$$f(-x)=\ln\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x).$$

Prema tome data funkcija je neparna.

5° Parna.

3.75. Pokazati da je $f(x)+f(-x)$ parna, a $f(x)-f(-x)$ neparna funkcija.

Rešenje. Označimo sa,

$$\Phi(x)=f(x)+f(-x),$$

a sa $\quad \Psi(x)=f(x)-f(-x)$.

Kako je $\Phi(-x)=f(-x)+f(-(-x))=f(-x)+f(x)=\Phi(x)$

$$\Psi(-x)=f(-x)-f(x)=-(f(x)-f(-x))=-\Psi(x),$$

pa je $\Phi(x)$ zaista parna a $\Psi(x)$ zaista neparna funkcija.

3.76. Pokazati da je funkcija $y=\log_{(a)}(x+\sqrt{x^2+1})$ neparna.

Rešenje. Zaista

$$y(-x)=\log_{(a)}(-x+\sqrt{-x^2+1})=\log_{(a)}(\sqrt{x^2+1}-x)=$$

$$=\log_{(a)}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\log_{(a)}(x+\sqrt{x^2+1})=-y(x),$$

pa je funkcija neparna.

3.77. Ispitati parnost sledećih funkcija:

1° $y=2x^{12}-3$; $\quad 2^\circ$ $y=2^x$; $\quad 3^\circ$ $y=\sin x$;

4° $y=\operatorname{tg}(x+1)$; $\quad 5^\circ$ $y=e^{x^2}$ $\quad 6^\circ$ $y=\sqrt[5]{(x-1)^2}+\sqrt[5]{(x+1)^2}$.

Rešenje. 1° parna; 2° ni parna ni neparna; 3° neparna;
4° ni parna ni neparna; 5° parna; 6° parna.

3.78. Koje su od sledećih funkcija periodične:

1° $y=\sin\frac{x}{3}$; $\quad 2^\circ$ $y=\cos\frac{2x-3}{5}$; $\quad 3^\circ$ $y=\operatorname{tg} bx$;

4° $y=2\sin x-3\cos x$; $\quad 5^\circ$ $y=\cos^2 x$.

Rešavanje. 1° Prema definiciji periodične funkcije potrebno je odrediti broj ω da bude,

$$\sin\frac{x}{3}=\sin\frac{x+\omega}{3},$$

$$\sin\frac{x}{3}=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\omega}{3}\right),$$

$$\sin\frac{x}{3}=\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\omega}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\omega}{3}.$$

Poslednja jednakost biće ispunjena ukoliko konstante uz $\sin\frac{x}{3}$ odnosno uz $\cos\frac{x}{3}$ budu respektivno jednake na levoj i desnoj strani. Otuda potrebno je da bude

$$\cos\frac{\omega}{3}=1 \quad \text{i} \quad \sin\frac{\omega}{3}=0.$$

Očigledno je da će poslednje jednakosti biti zadovoljene ako je $\omega=6k\pi$. Za $k=1$, dobijamo osnovni period date funkcije $\omega_0=6\pi$.

2° Kao i u prethodnom primeru periodu date funkcije ćemo odrediti iz uslova,

$$\cos\frac{2x-3}{5} = \cos\frac{2(x+\omega)-3}{5} .$$

Koristeći adicionu teoremu za cosinus imaćemo da je

$$\cos\frac{2x-3}{5} = \cos\frac{2x-3}{5}\cos\frac{2\omega}{5} - \sin\frac{2x-3}{5}\sin\frac{2\omega}{5} .$$

Iz poslednje jednakosti sledi da je

$$\cos\frac{2\omega}{5} = 1 \quad \text{i} \quad -\sin\frac{2\omega}{5} = 0 ,$$

a odatle $2\omega = 10\,k\pi$ i $\omega = 5\,k\pi$. Za $k = 1$ dobijamo osnovni period funkcije $\omega = 5\pi$.

3° $\omega = \frac{\pi}{b}$

4° Prema definiciji periodične funkcije potrebno je odrediti broj ω da bude,

$2\sin(x+\omega) - 3\cos(x+\omega) = 2\sin x - 3\cos x,$

$2[\sin x\cos\omega + \cos x\sin\omega] - 3[\cos x\cos\omega - \sin x\sin\omega] =$

$= 2\sin x - 3\cos x,$

$(2\cos\omega + 3\sin\omega)\sin x + (2\sin\omega - 3\cos\omega)\cos x =$

$= 2\sin x - 3\cos x.$

Poslednja jednakost biće zadovoljena, ako konstante uz $\sin x$ odnosno $\cos x$ budu respektivno jednake na levoj i desnoj strani. Otuda potrebno je da bude

/a/ $2\cos\omega + 3\sin\omega = 2,$

/b/ $2\sin\omega - 3\cos\omega = -3.$

Rešavanjem poslednjeg sistema jednačina dobijamo da je:

/a'/ $\cos\omega = 1,$ /b'/ $\sin\omega = 0.$

Iz jednačina /a'/ i /b'/ nalazimo da je $\omega = 2\,k\pi$. Najmanji pozitivan broj ω, je osnovni period funkcije $\omega_0 = 2\pi$.

5° Periodu date funkcije $y = \cos^2 x$, treba odrediti iz uslova

$\cos^2 x = \cos^2(x+\omega) .$

Iz poslednje jednakosti redom sledi:

$\cos^2 x - \cos^2(x+\omega) = 0,$

/*/ $(\cos x - \cos(x+\omega))(\cos x + \cos(x+\omega)) = 0.$

Poslednji proizvod je jednak nuli, onda kada je bar jedan od njegovih činilaca jednak nuli, tj.

/1/ $\cos x - \cos(x+\omega) = 0,$

/2/ $\cos x + \cos(x+\omega) = 0.$

Iz jednakosti /1/ dobijamo da je $\omega_0 = 2\pi$, a iz jednakosti /2/ da je $\omega_0 = \pi$. Pošto je osnovni period funkcije najmanji pozitivan broj ω za koji je $f(x) = f(x+\omega)$, pa je $\omega_0 = \pi$, jer je proizvod /*/ nula, ako je bar jedan od njegovih činilaca jednak nuli.

3.79. Funkcija $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ ima osnovni period $\omega = 2\pi$. Dokazati.

<u>Dokaz.</u> Data funkcija je zbir funkcija $y_1 = \sin x$, $y_2 = \frac{1}{2}\sin 2x$; $y_3 = \frac{1}{3}\sin 3x$. Osnovni period date funkcije ω_0 je najmanji zajednički sadržilac za ω_1, ω_2 i ω_3 gde su $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{2\pi}{3}$, osnovni periodi redom funkcija y_1, y_2 i y_3.

3.80. Odrediti periodičnost sledećih funkcija.

1° $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2° $y = 5 + 2\sin(1-x)$;

3° $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Rezultat. 1° π , 2° 2π , 3° π.

Naći inverzne funkcije i odrediti oblast definisanosti inverznih funkcija za sledeće funkcije.

3.81. $y = x + 1$.

Rešenje. Očigledno, iz jednakosti $y = x+1$ direktno dobijamo $x = y - 1$. Ispisujući umesto slova x, slovo y imamo da je $y = x - 1$, inverzna funkcija date funkcije. Oblast definisanosti dobijene funkcije je skup D: $(-\infty, +\infty)$.

3.82. $y = \ln \frac{x}{2}$.

Rezultat. Inverzna funkcija je $y = 2\,e^x$, koja je definisana za $x \in (-\infty, +\infty)$.

3.83. $y = 2^x - 2$.

Rešenje. Iz date funkcije dobijamo redom:

$$2^x = y + 2,$$

$$x \log_{(2)} 2 = \log_{(2)}(y + 2),$$

$$x = \log_{(2)}(y + 2).$$

Stoga je inverzna funkcija $y = \log_{(2)}(x+2)$, koja je definisana, ako je $x + 2 > 0$, tj ako je $x \in (2, +\infty)$.

3.84. Pokazati da je inverzna funkcija funkcije $y = \frac{1-x}{1+x}$ sama ta funkcija.

Rešenje. Rešavajući $y = \frac{1-x}{1+x}$, po x, imamo redom da je:

$$(1+x)y = 1-x,$$

$$y+xy = 1-x,$$

$$xy+x = 1-y,$$

$$x(1+y) = 1-y,$$

$$x = \frac{1-y}{1+y} .$$

Stoga je inverzna funkcija date $y = \frac{1-x}{1+x}$, a to je trebalo i dokazati.

3.85. Naći funkciju inverznu funkciji

$$y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}} .$$

Rešenje. Ako levu i desnu stranu analitičkog izraza kojim je funkcija zadata kubiramo, a zatim izvršimo potrebna sredjivanja dobijenog izraza imaćemo redom:

$$y^3 = x + \sqrt{1+x^2} + 3\sqrt{(x+\sqrt{1+x^2})^2(x-\sqrt{1+x^2})} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})^2} + x - \sqrt{1+x^2} ,$$

$$y^3 = 2x + 3\sqrt[3]{(x^2-1-x^2)(x+\sqrt{1+x^2})} + 3\sqrt[3]{(x^2-1-x^2)(x-\sqrt{1+x^2})} ,$$

$$y^3 = 2x - 3\left[\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt{x - \sqrt{1+x^2}}\right],$$

$$y^3 = 2x - 3y,$$

$$2x = y^3 + 3y, \qquad x = \frac{1}{2}(y^3 + 3y) .$$

Stoga, inverzna funkcija date je $y = \frac{1}{2}x(x^2+3)$.

3.86. Naći funkciju inverznu funkciji $y = \frac{e^{\cos x} - 1}{2 - e^{\cos x}}$ i odrediti oblast definisanosti inverzne funkcije.

Rezultat. $y = \arccos \ln \frac{2x+1}{x+1}$, $\frac{1}{e} < \frac{2x+1}{x+1} \leq e$.

3.87. Naći funkciju inverznu funkciji:

1° $y = \log_{(a)}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$; 2° $y = \log_{(a)}\left(x^2 + \sqrt{x^4+1}\right)$.

Rešenje. 1° Iz analitičkog izraza $y = \log_{(a)}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, kojim je funkcija zadata sledi, da je redom:

$$x + \sqrt{x^2+1} = a^y,$$

$$x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 = a^y,$$

$$2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} = a^y - 1,$$

$$2x\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = a^y - 1,$$

$$2x\,a^y = a^y - 1,$$

$$x = \frac{a^y - a^{-y}}{2}.$$

Dakle, inverzna funkcija datoj je $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$.

2° $y = \sqrt{\frac{a^{2x} - 1}{2a^x}}$.

3.88. Naći funkciju inverznu funkciji:

1° $y = \frac{\sin x + 2}{\sin x + 1}$; 2° $y = \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x - 3\cos x}$,

i odrediti oblast definisanosti, tako dobijene funkcije.

Rešenje. Analitički izraz $y = \frac{\sin x + 2}{\sin x + 1}$, kojim je funkcija zadata rešićemo prvo po $\sin x$.

$$y(\sin x + 1) = \sin x + 2,$$

$$y \sin x - \sin x = 2 - y,$$

$$\sin x\,(y-1) = 2 - y,$$

$$\sin x = \frac{2-y}{y-1}.$$

Iz zadnje jednakosti dobijamo da je:

$$x = \arcsin \frac{2-y}{y-1},$$

a odatle sledi da je inverzna funkcija datoj

$$y = \arcsin \frac{2-x}{x-1}.$$

Oblast definisanosti ove funkcije je skup svih vrednosti x, za koje je

$$\left|\frac{2-x}{x-1}\right| \leq 1.$$

Iz poslednjen nejednakosti dobijamo da je $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

Rezultat. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{3x+2}{2x-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$.

.89. Naći funkciju inverznu funkciji

$y = \cos x - \sin x + 1.$

Rešenje. Potrebno je analitički izraz kojim je funkcija zadata rešiti po x.

$$\cos x - \sin x = y - 1,$$

$$\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \cos^2 x = (y-1)^2.$$

Kvadriranje predposlednjeg izraza dozvoljeno je samo ako su njegova leva i desna strana istog znaka. Iz zadnje jednakosti imamo da je redom:

$$1 - \sin 2x = (y-1)^2,$$

$$\sin 2x = 1 - (y-1)^2,$$

$$\sin 2x = 1 - y^2 + 2y - 1,$$

$$\sin 2x = 2y - y^2.$$

Stoga je, $2x = \arcsin(2y - y^2)$,

$$x = \frac{1}{2} \arcsin(2y - y^2),$$

pa je inverzna funkcija datoj

$$y = \frac{1}{2} \arcsin(2x - x^2).$$

3.90. Naći funkciju inverznu funkciji

$$y = \ln\left(\arcsin \frac{x}{x+1}\right).$$

Rezultat.

$$y = \frac{\sin e^x}{1 - \sin e^x}.$$

Naći intervale u kojima su sledeće funkcije monotone /strogo monotone/.

3.91. $y = x - 2$.

Rezultat. Analitički izraz kojim je funkcija zadata predstavlja jednačinu prave, čiji je koeficijent pravca pozitivan. Stoga je data funkcija strogo monotono rastuća.

3.92. $y = x^2 - x + 2$.

Rešenje. Analitički izraz kojim je funkcija zadata je jednačina parabole, koja ima minimum za $x = \frac{1}{2}$.

Stoga, data funkcija je monotono opadajuća za $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$, a monotono rastuća ako je $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.

3.93. $y = 2^x$.

Rezultat. Data funkcija je monotono rastuća na skupu realnih brojeva.

3.94. $y = E(x)$. /Pogledaj zadatak 11, strana 6/.

Rezultat. Ne opada za $x \in (-\infty, +\infty)$.

3.95. $y = \sin x$.

Rezultat. Raste za $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

3.96. Data je funkcija u parametarskom obliku: $x = 3 \sin t$, $y = 1 - \cos 2t$, /t promenljiv parametar/. a/ Izraziti y kao funkciju od x.
b/ Odrediti oblast definisanosti funkcije $y = y(x)$ i skup vrednosti y.
c/ Naći oblast definisanosti inverzne funkcije za funkciju $y = y(x)$.

Rešenje. a/ Iz analitičkog izraza za nezavisno promenljivu x, koja je zadata kao funkcija parametra t, sledi da je redom

$$\frac{x}{3} = \sin t, \qquad t = \arcsin \frac{x}{3}.$$

Ako dobijeno t zamenimo u analitički izraz za y, $y = 1 - \cos 2t$ dobijamo redom:

$$y = 1 - \cos\left(\text{arc sin}\frac{x}{3}\right),$$

$$y = 2\sin^2\left(\text{arc sin}\frac{x}{3}\right),$$

$$y = 2\left[\sin\left(\text{arc sin}\frac{x}{3}\right)\right]^2,$$

$$y = \frac{2}{9}x^2.$$

Zadnja jednakost predstavlja, traženu direktnu vezu izmedju x i y.

/b/ $x \in [-3, 3]$, $y \in [0, 2]$.

/c/ Parna.

/d/ $y \geq 0$.

3.97. U sledećim zadacima eliminisati parametar t i naći direktnu zavisnost izmedju x i y.

$$x = t^2 - 2t + 1$$

$$y = t^2 - t + 2.$$

Rešenje. Da bi našli direktnu zavisnost izmedju x i y izrazićemo t preko x, a zatim ga zameniti u zavisnost za y.

$$x = (t-1)^2,$$

$$t-1 = \pm\sqrt{x},$$

$$t = \pm\sqrt{x} + 2.$$

Nadalje,

$$y = (\pm\sqrt{x} + 1)^2 - (\pm\sqrt{x} + 1) + 2;$$

$$y = x \pm \sqrt{x} - 2.$$

3.98. $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\qquad y = t + e^t$.

Rešenje. Kao u prethodnom primeru iz zavisnosti za x i t izrazićet u funkciji od x, pa zatim ga zameniti u zavisnost y od t.

$$2x = e^t + e^{-t},$$

$$e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0,$$

$$e^t = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

$$t = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Dobijeno t zamenimo u izraz za y, da bi dobili traženu direktnu zavisnost izmedju x i y.

$$y = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) + e^{\ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)},$$

$$y = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) + \left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right).$$

3.99. $x = \sin t - \cos t + 1,$

$y = \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$

Rezultat. $y = \dfrac{2}{(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}}$.

3.100. $x = \sin t + \sqrt{3}\cos t,$

$y = t + \sin\left(t + \text{arc tg}\sqrt{3}\right).$

Rešenje. Jednačinu kojom je izražemo x u zavisnosti od t možemo napisati u obliku

$$x = \sin t + \operatorname{tg}\theta\cos t,$$

gde je $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$. Iz poslednje jednakosti dobijamo redom

$$x = \sin t + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos t,$$

$$x\cos\theta = \sin t\cos\theta + \cos t\sin\theta,$$

$$x\cos\theta = \sin(t+\theta),$$

$$t + \theta = \text{arc sin}(x\cos\theta),$$

$$t = \text{arc sin}\frac{x}{2} - \theta.$$

Ako poslednji izraz za t zamenimo u jednačinu za y dobijamo da je

$$y = \text{arc sin}\frac{x}{2} - \theta + \sin\left(\text{arc sin}\frac{x}{2} - \theta + \text{arc tg}\sqrt{3}\right) \text{ ili}$$

$$y = \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}.$$

3.101. $x = a\cos t,$

$y = b\sin t.$

Rezultat. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

3.102. $x = p + r\cos t,$

$y = q + r\cos t.$

Rezultat. $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$

3.103. $x = \cos t,$

$y = \sin 2t.$

Rezultat. $y = 2x\sqrt{1-x^2}.$

3.104. $x = \operatorname{tg} t,$

$y = \sin 2t + 2\cos 2t.$

Rešenje. Iz izraza za $x = \operatorname{tg} t$, sledi da je $t = \operatorname{arc\,tg} x$.

Izraz za $y = \sin 2t + 2\cos 2t$ možemo napisati i na sledeći način.

$$y = \sin 2t + 2\cos 2t = 2\sin t\cos t + 2(\cos^2 t - \sin^2 t) =$$

$$= 2\left[\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} + \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} - \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\right] =$$

$$= 2\left[\frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} + \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} - \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\right] =$$

$$= 2\,\frac{1+\operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}.$$

Ako, u transformisani izraz za y, zamenimo t dobijamo da je

$$y = 2\,\frac{1+x-x^2}{1+x^2}.$$

3.105. Pokazati da su sledeće funkcije ograničene na skupu svih realnih brojeva.

1° $y = \sin x$; 2° $y = \cos x$; 3° $y = \operatorname{arc\,tg} x$; 4° $y = \operatorname{arcctg} x$

Rešenje. 1° Funkcija $y = \sin x$ je definisana za svako x

Za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $y = \sin x$ ima vrednost jednaku jedinici. To je istovremeno i najveća vrednost funkcije $y = \sin x$. Stoga je za svako $x \in (-\infty, +\infty)$, $\sin x \leq 1$, pa prema tome je funkcija $y = \sin x$ ograničena odozgo jedinicom. Nadalje, za $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $/k=0, \pm 1, \pm 2, \dots/$, $y = \sin x$ ima najmanju vrednost jednaku minus jeda. Prema tome, funkcija $y = \sin x$ je ograničena i odozdo konstantom $m = -1$. Dakle, data funkcija $y=\sin x$ je ograničena na skupu svih realnih brojeva, a to je trebalo dokazati.

2° Pošto je za svako $x \in (-\infty, +\infty)$,

$-1 \leq \cos x \leq 1,$

to je funkcija $y = \cos x$ ograničena i odozgo i odozdo pa je dakle i ograničena.

3° Za svako $x \in (-\infty, +\infty)$ je $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}$,

pa je data funkcija $y = \operatorname{arc\,tg} x$ zaista ograničeba

4° Za svako $x \in (-\infty, +\infty)$ je $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, pa je $y = \operatorname{arcctg} x$ zaista ograničena funkcija.

3.106. Ispittati ograničenost funkcije $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Rešenje. Izraz $\frac{1}{1+x^2} = y$, ima najveću vrednost onda kada mu je imenilac $\varphi(x) = 1 + x^2$, najmanji. Zbir kvadrata ima najmanju vrednost, onda kada ti kvadrati imaju najmanju vrednost. Stoga je $1 + x^2 \geqslant 1$, pa je $\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$. To znači da je data funkcija ograničena odozgo konstantom $M = 1$. Lako je uočiti da je ona ograničena i odozdo konstantom $m = 0$.

3.107. Ispitati ograničenost funkcije $y = 2^{1/x}$.

Rešenje. Za $x \in (-\infty, 0)$

$0 < 2^{1/x} < 1$.

Stoga je data funkcija $y = 2^{1/x}$ ograničena za $x < 0$. Za $x > 0$ ona je ograničena odozdo konstantom $m=1$, ali nije ograničena odozgo.

3.108. Ispitati ograničenost sledećih funkcija:

1° $y = e^{-x^2}$; 2° $y = e^{-1/x^2}$; 3° $y = \arcsin|\sin x|$.

Rezultat. 1° Funkcija $y = e^{-x^2}$ je ograničena odozgo konstantom $M=1$, a odozdo konstantom $m=0$.

2° $M = 1$, $m=0$; 3° $M = \frac{\pi}{2}$, $m = 0$.

GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE FUNKCIJE

1° Grafik funkcije $y = f(x)$ konstruišemo na sledeći način :

a/ odredjujemo oblast definisanosti funkcije D, b/ za izvestan broj karakterističnih argumenata funkcije $x_1, x_2, \dots, x_n$, izračunavamo

odgovarajući broj vrednosti funkcije $y_i = f(x_i)$ /$i=1,2,\dots,n$/.

v/ Konstruišemo skup tačaka $M_i(x_i, y_i)$ /$i=1,2,\dots,n$/ u koordinatnom sistemu xOy i spajamo ih linijom.

2° Pomoću grafika funkcije $y = f(x)$ neposredno se mogu konstruisati grafici sledećih funkcija:

1/ $y = -f(x)$ - simetrično preslikavanje grafika Γ u odnosu na x-osu,

2/ $y = f(-x)$ - simetrično preslikavanje grafika Γ u odnosu na y-osu,

3/ $y = f(x-a)$ - translacija grafika Γ paralelno x-osi za a,

4/ $y = f(x+b)$ - translacija grafika Γ paralelno y-osi za b,

5/ $y = kf(x)$ - uvećanje ordinata grafika Γ k - puta.

Isto tako pomoću grafika Γ, funkcije $y = f(x)$, mogu se približno nacrtati grafici sledećih funkcija:

1/ $y = \frac{1}{f(x)}$; 2/ $y = |f(x)|$;

3/ $y = [f(x)]^n$ $n \in N$; 4/ $y = \frac{1}{|f(x)|}$;

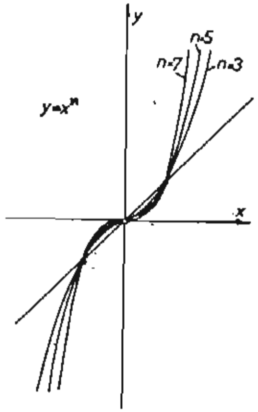
5/ $y = \sqrt{f(x)}$; 6/ $y = a^{f(x)}$ $a \in Re$;

7/ $y = \ln|f(x)|$;

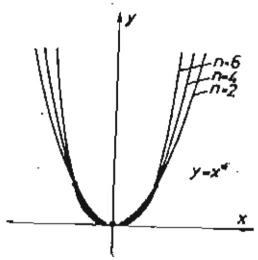
8/ $y = \frac{1}{\ln|f(x)|}$; 9/ $y = \sqrt{\ln|f(x)|}$ itd.

Nacrtati grafike sledećih elementarnih funkcija

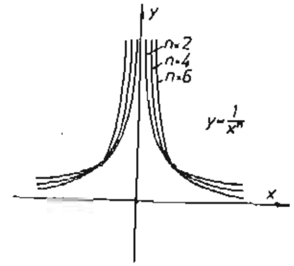
3.109. $y = x^n$,n neparan broj



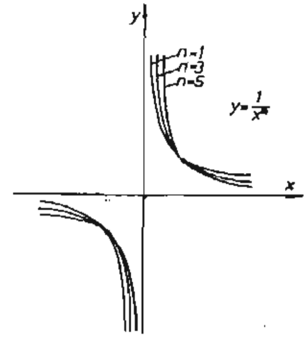
3.110. $y = x^n$, n paran broj.



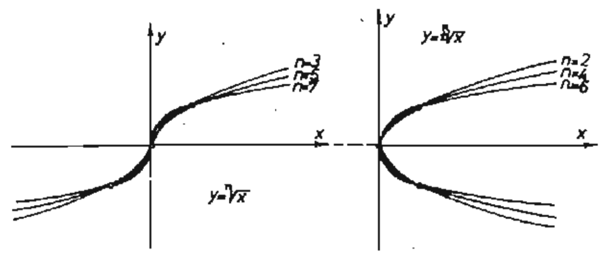
3.111. $y = \frac{1}{x^n}$, n paran broj.



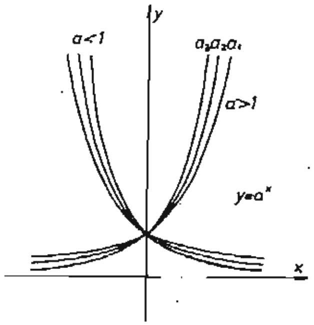
3.112. $y = \frac{1}{x^n}$, n neparan broj.



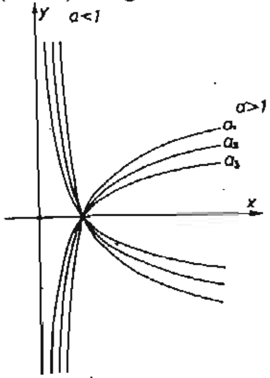
3.113. a/ $y = \sqrt[n]{x}$, n neparan broj; b/ $y = \pm \sqrt[n]{x}$, n paran broj.



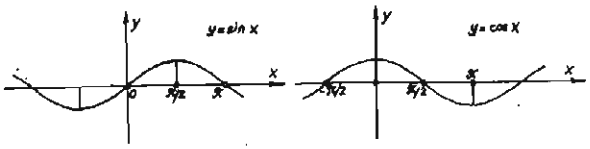
3.114. $y = a^x$, $(a \gtrless 1)$ - eksponencijalna funkcija.



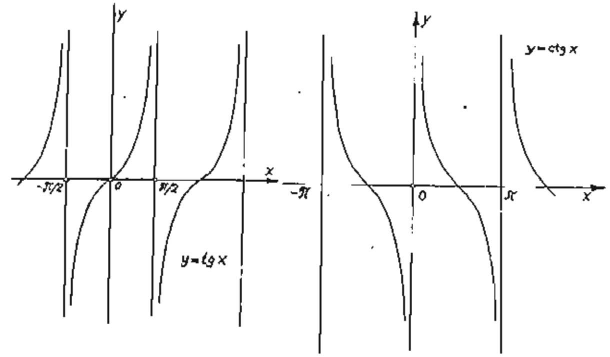
3.115. $y = \log_{(a)} x$, $(a \gtrless 1)$ - logaritamska funkcija.



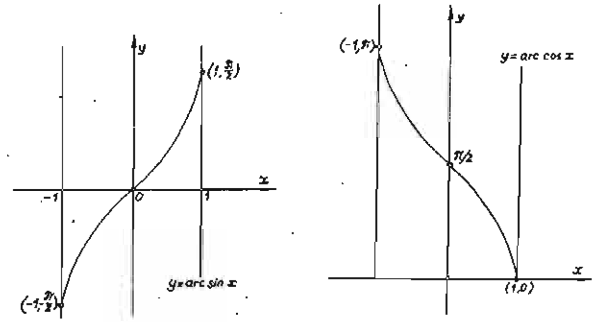
3.116. a/ $y = \sin x$; b/ $y = \cos x$.



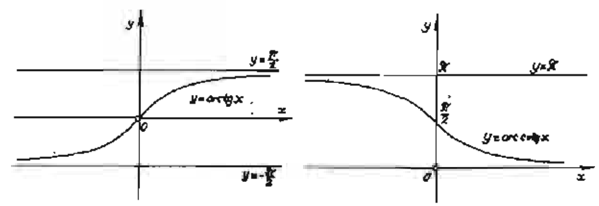
3.117. a/ $y = \operatorname{tg} x$; b/ $y = \operatorname{ctg} x$.



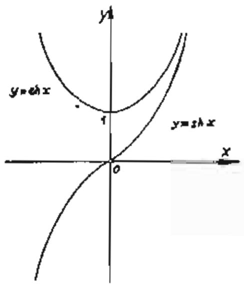
3.118. a/ $y = \arcsin x$; b/ $y = \arccos x$.

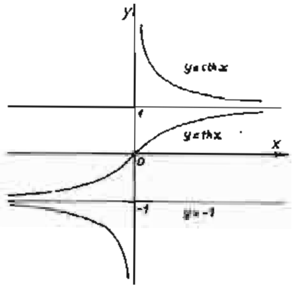


3.119. a/ $y = \operatorname{arctg} x$; b/ $y = \operatorname{arctg} x$.

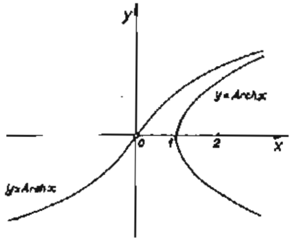


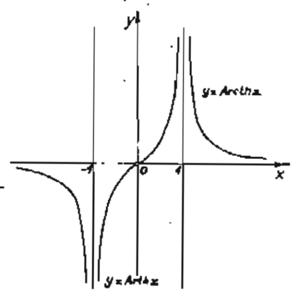
3.120. a/ $y = shx$; b/ $y = chx$; c/ $y = tghx$; d/ $y = ctghx$.





3.121. a/ $y = Arshx$; b/ $y = Archx$; c/ $y = Artghx$; d/ $y = Arctghx$.

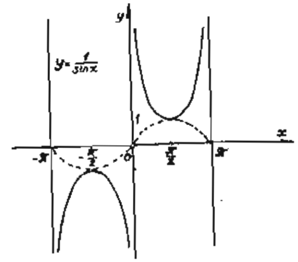




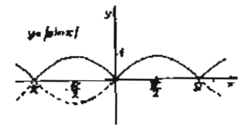
3.122. Pomoću grafika funkcije $y = \sin x$ nacrtati grafike sledećih funkcija:

1° $y = \dfrac{1}{\sin x}$

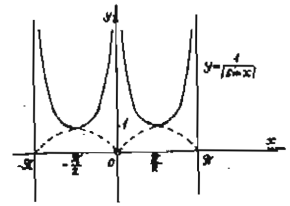
Konstruišemo prvo grafik funkcije $y = \sin x$, a zatim njegov "recipročan grafik". /Grafik date funkcije $y = \sin x$ konstruisan je isprekidanom linijom, a grafik funkcije $y = \dfrac{1}{\sin x}$ neprekidnom linijom.



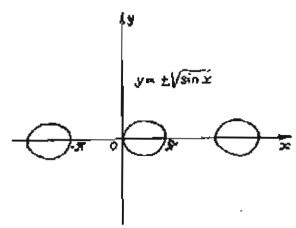
2° $y = |\sin x|$



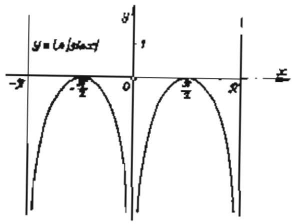
3° $y = \dfrac{1}{|\sin x|}$



4° $y = \pm\sqrt{\sin x}$.



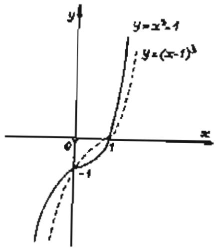
5° $y = \ln|\sin x|$.

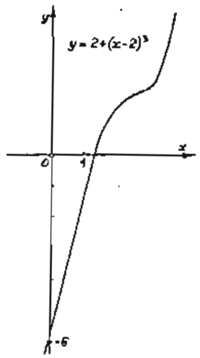


3.123. Nacrtati grafike sledećih funkcija:

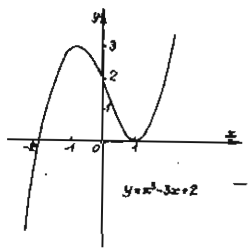
a/ $y = x^3 - 1$; b/ $y = (x - 1)^3$;

c/ $2 + (x-2)^3$.

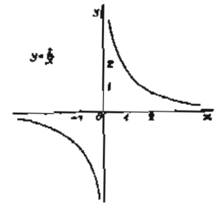




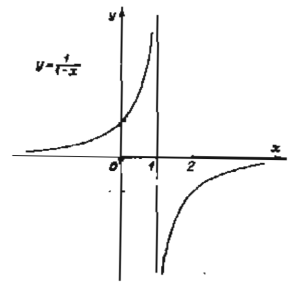
3.124. $y = x^3 - 3x + 2$.



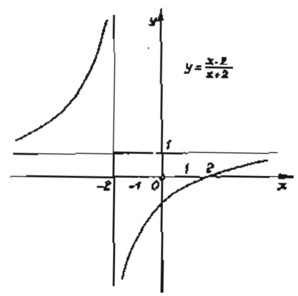
3.125. $y = \frac{2}{x}$



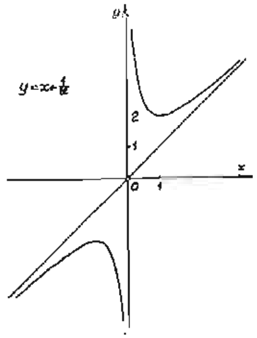
3.126. $y = \frac{1}{1-x}$



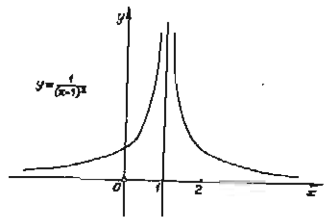
3.127. $y = \frac{x-2}{x+2}$.



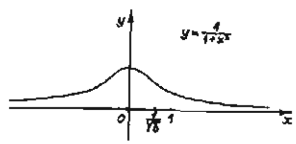
3.128. $y = x + \frac{1}{x}$.



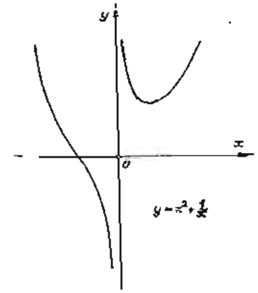
3.129. $y = \frac{1}{(x-2)^2}$



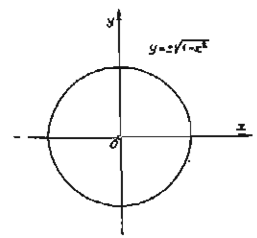
3.130. $y = \frac{1}{1+x^2}$



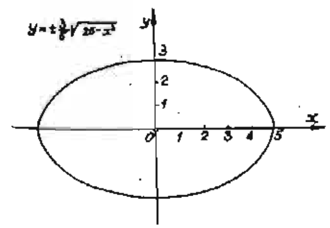
3.131. $y = x^2 + \frac{1}{x}$.



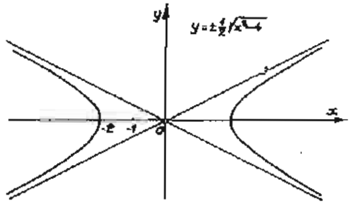
3.132. $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.



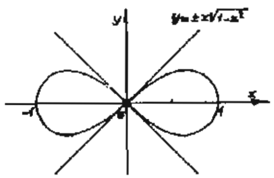
3.133. $y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.



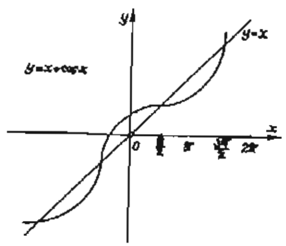
3.134. $y = \pm\sqrt{x^2-4}$.



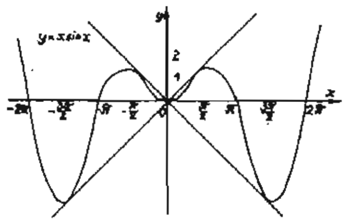
3.135. $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.



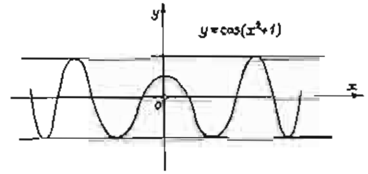
3.136. $y = x + \cos x$.



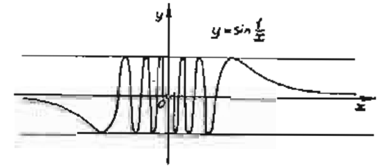
3.137. $y = x \sin x$.



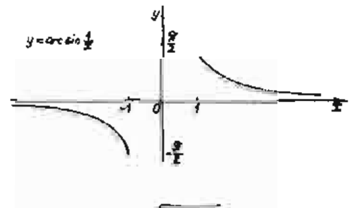
3.138. $y = \cos(x^2+1)$.



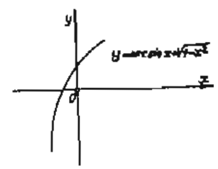
3.139. $y = \sin \frac{1}{x}$.



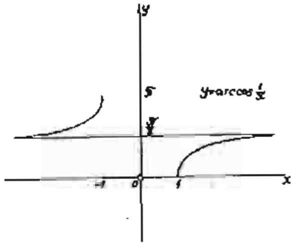
3.140. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.



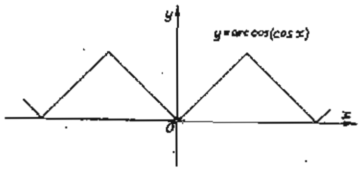
3.141. $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.



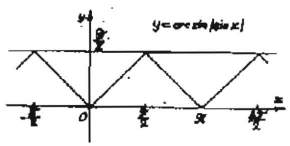
3.142. $y = \arccos \frac{1}{x}$.



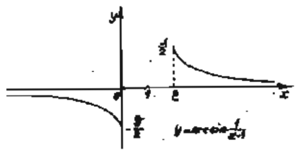
3.143. $y = \arccos(\cos x)$.



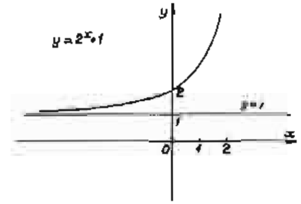
3.144. $y = \arcsin|\sin x|$.



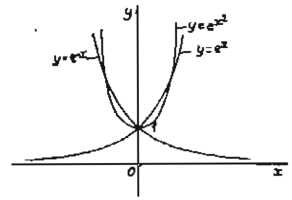
3.145. $y = \arcsin \frac{1}{x-1}$.



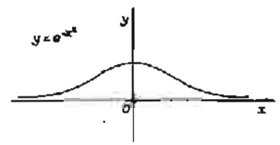
3.146. $y = 2^x + 1$.



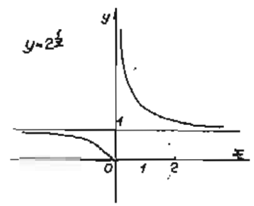
3.147. $y = e^{x^2}$.



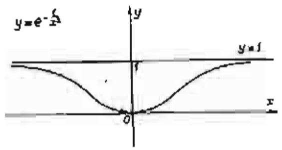
3.148. $y = e^{-x^2}$.



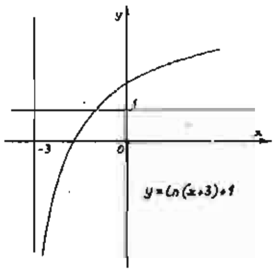
3.149. $y = 2^{1/x}$.



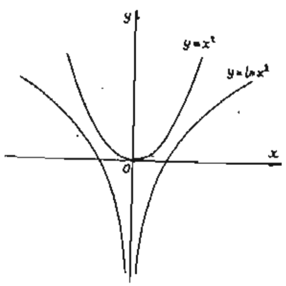
3.150. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.



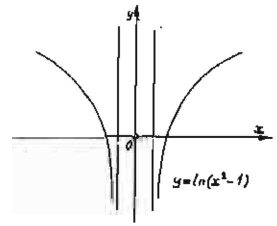
3.151. $y = \ln(x+3)+1$.



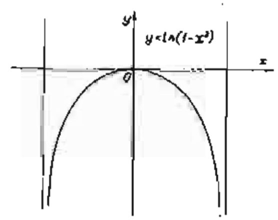
3.152. $y = \ln x^2$.



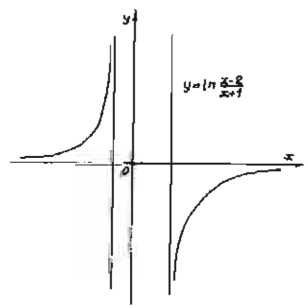
3.153. $y = \ln(x^2-1)$.



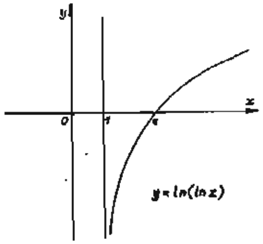
3.154. $y = \ln(1-x^2)$.



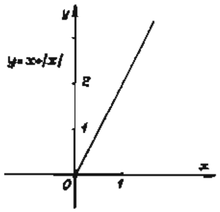
3.155. $y = \ln \frac{x-2}{x+1}$.



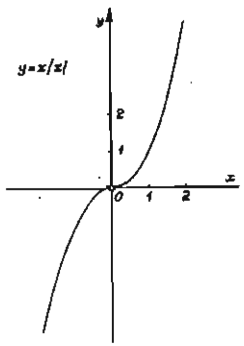
3.156. $y = \ln(\ln x)$.



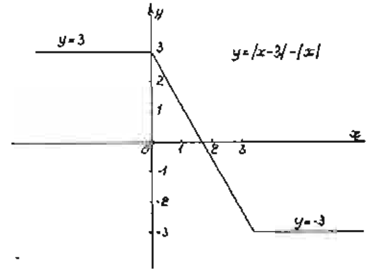
3.157. $y = x + |x|$.



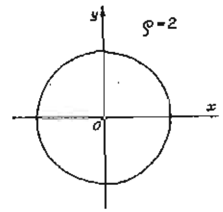
3.158. $y = x \quad x$.



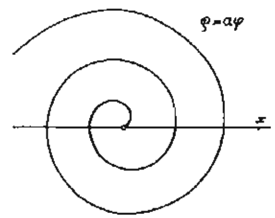
3.159. $y = |x-3| - |x|$.



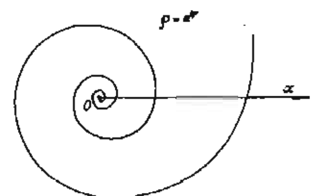
3.160. $\rho = 2$.



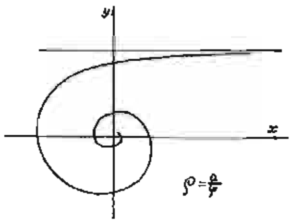
3.161. $\rho = a\varphi$.



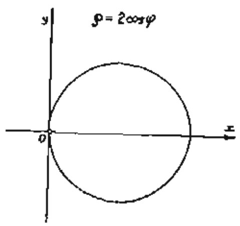
3.162. $\rho = e^{\varphi}$



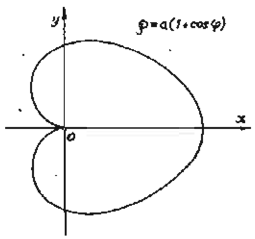
3.163. $\rho = \frac{a}{\varphi}$.



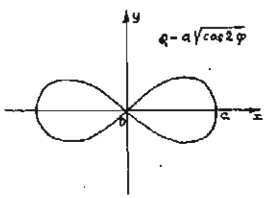
3.164. $\rho = 2 \cos \varphi$.



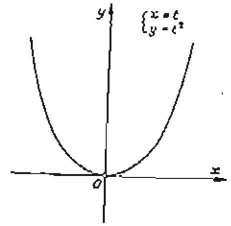
3.165. $\rho = a(1+\cos \varphi)$.



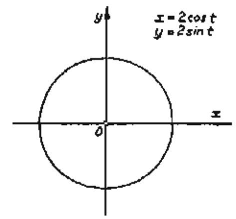
3.166. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.



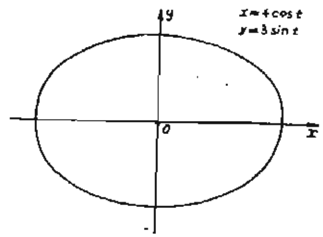
3.167. $x = t \qquad y = t^2$



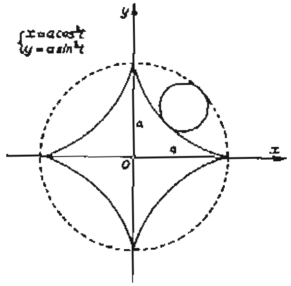
3.168. $x = 2 \cos t \qquad y = 2 \sin t$



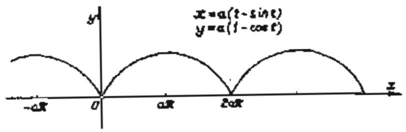
3.169. $x = 4 \cos t \qquad y = 3 \sin t$.



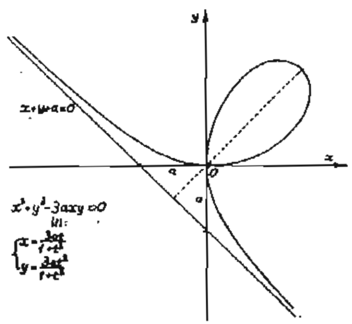
3.170. $x = a\cos^3 t \qquad y = a\sin^3 t.$



3.171. $x = a(t-\sin t) \qquad y = a(1-\cos t).$



3.172. $x = \dfrac{3at}{1+t^3} \qquad y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$



LITERATURA

1 G.N. BERMAN — Сборник задач по нурсу математического анализа, Издательство Главная реданция физичко-математической литературы, Москва 1967.

2 B.P. DEMIDOVIĆ — Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Издательство „Наука", Главная редакция физичко-математической литератури, Москва 1969

3 Pavle MILIČIĆ, Momčilo UŠĆUMLIĆ — Zbirka zadataka iz više matematike I "Gradjevinska knjiga", Beograd,1969

4 Miodrag MARIĆ — Zbirka zadataka iz više matematike za studente Tehnološko-metalurškog fakulteta u Beogradu, Skriptarnica TMF, Beograd, 1970.

Žarko MIJAJLOVIĆ

IV RELACIJE

Def.1. Binarna relacija R u skupu $X \times Y$ je podskup skupa $X \times Y$. Specijalno za slučaj $X=Y$, R se naziva binarnom relacijom u skupu X.

Def.2. Neka je X neprazan skup i R binarna relacija u X. Uredjen par $G=(X,R)$ naziva se graf. Elementi skupa X su čvorovi grafa, a elementi skupa R su grane , ivice ili rebra grafa.

Crtež grafa dobijamo na sledeći način. Čvorove grafa $x_1,\dots,x_n$ $(\in X)$ predstavljamo tačkama u ravni. Ako je $(x_i,x_j)\in R$, ili što je isto $x_i R x_j$, čvor x_i povezujemo granom sa čvorom x_j. Orijentacija grane je od x_i ka x_j. Ako $(x_i,x_j)\notin R$, čvorovi x_i i x_j nisu povezani granom.

Def.3. Inverzna relacija od R, u oznaci R^{-1}, je relacija od Y prema X, odredjena sa:

$$R^{-1} = \{(y,x) \,/\, (x,y)\in R\} .$$

Def.4. Neka su $U\subset X\times Y$ i $V\subset Y\times Z$ neke relacije. Tada relacija od X prema Y, koja se sastoji od svih uredjenih parova (x,z) takvih, da je za neko $y\in Y$ $(x,y)\in U$ i $(y,z)\in V$, naziva se kompozicija relacija U i V i označava se sa $V \circ U$.

Def.5.

/a/ Relacija R je refleksivna, ako je za svako $x\in X$, $(x,x)\in R$.

/b/ Relacija R je simetrična, ako je ispunjeno: ako je $(x,y)\in R$, onda $(y,x)\in R$

/c/ Relacija R je tranzitivna, ako je ispunjeno: ako je $(x,y)\in R$ i $(y,z)\in R$, onda $(x,z)\in R$.

/d/ Relacija R je antisimetrična, ako je ispunjeno: ako je $(x,y)\in R$ i $(y,x)\in R$, tada $y = x$.

Def.6. Relacija R relacija ekvivalencije, ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Tu se R zamenjuje simbolom $\sim$ /tilda/. Znači da je:

a. $x \sim x$ /refleksivnost/.

b. Ako je $x \sim y$, tada je $y \sim x$ /simetričnost/.

c. Ako je $x \sim y$ i $y \sim z$, tada je $x \sim z$ /tranzitivnost/.

Skup $C_x = \{y/\ y \sim x\}$ naziva se razred ili klasa ekvivalencije za x.

Važi teorema: Ma koje dve klase ekvivalencije C_x i C_y ili se poklapaju ili su disjunktne.

Zbog navedene teoreme kažemo da relacija $\sim$ vrši razbijanje ili raslojavanje skupa X.

Def.7. Relacija R na skupu X je uredjajna ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Tu se R zamenjuje simbolom $<$ /čitati „manje"/. Znači da je:

a. $x < x$ /refleksivnost/.

b. Ako je $x < y$ i $y < x$, tada je $x = y$ /antisimetričnost/.

c. Ako je $x < y$ i $y < z$, tada je $x < z$ /tranzitivnost/.

Ako je još ispunjeno: Za svako $x, y \in X$ je $x < y$ ili $y < x$, tada kažemo da je $<$ totalno /potpuno, linearno/ uredjajna. Za skup X na kome je definisana uredjajna relacija $<$ kažemo da je uredjen skup.

Element $a \in X$ je maksimalan ako za $x \in X$, $a < x$ implicira $a = x$, tj. nema elemenata koji su iza a. Slično, $b \in X$ je minimalan ako za $x \in X$, $x < b$

implicira $x = b$. Neka je A podskup uredjenog skupa X. Element $m \in X$ je donja ograda od A, ako je $m < x$ za svako $x \in X$. Ako je $m \in A$, tada kažemo da je m najmenji element u A. Slično, element $M \in X$ je gornja ograda skupa A, ako je $x < M$ za svako $x \in A$. Ako je $M \in A$, tada kažemo da je M najveći element u A.

Najveći element od skupa svih donjih granica skupa A naziva se infimum skupa A i označava se sa infA. Najmanji element od skupa svih gornjih granica skupa A naziva se supremum skupa A i označava se sa supA. infA i supA ne moraju obavezno da postoje.

4.1. Neka je relacija $<$ od skupa $A = \{1,2,3,4\}$ u skup $B = \{1,3,5\}$, tj. aRb ako i samo ako je $a < b$. Odrediti:

a. Napisati R kao skup uredjenih parova.

b. Prikazati R preko koordinate slike i u obliku grafa.

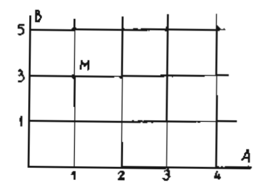
c. Naći R^{-1} i $R \circ R^{-1}$.

Rešenje.

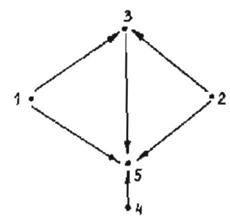
a. R se sastoji od uredjenih parova $(a,b)\in A\times B$, za koje je $a < b$, tj. $R = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5), (4,5)\}$

b. Sl.1.1. daje koordinatni prikaz relacije R, na primer, par $(1,3)\in R$ prikazan je tačkom M sa odgovarajućim koordinatama.

Neka je $X = A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$. Tada možemo smatrati da je relacija R zadata u X, tj. $R \subset X\times X$. Tada slika 1.2. prikazuje graf relacije R.



Sl.1.1.

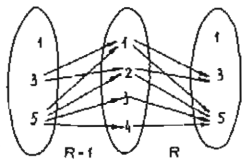


Sl.1.2.

c. Kako je $R^{-1} = \{(a,b)/(b,a) \in R\}$, to je $R^{-1} = \{(3,1),(5,1),(3,2),(5,2),$ $(5,3),(5,4)\}$. Da bi pronašli $R \circ R^{-1}$ uočimo sl.1.3.. Primetimo da je R^{-1}, drugi faktor u $R \circ R^{-1}$, na slici 1.3. prvi konstruisan.

Kako je $(3,1) \in R^{-1}$ i $(1,3) \in R$, to je $(3,3) \in R \circ R^{-1}$. Slično je i u ostalim slučajevima pa je:

$R \circ R^{-1} = \{(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$.



Sl.1.3.

4.2. Neka je $A = \{0, -2, 4, 6, 12\}$ i R sledeća relacija tog skupa;

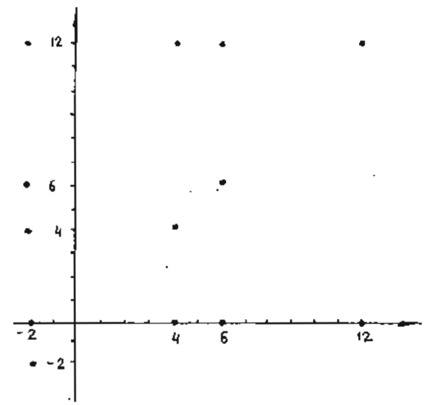
$R = \{(0,0),(-2,-2),(4,4),(6,6),(12,12),(-2,0),(-2,4),(-2,6),(-2,12),$ $(4,0),(6,0),(4,12),(6,12),(12, 0)\}$.

a. Odrediti graf i koordinatne slike te relacije.

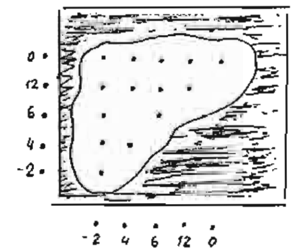
b. Da li je ta relacija refleksivna i tranzitivna?

<u>Rešenje.</u> a. Koordinatnu sliku date relacije možemo prikazati na dva načina:

Sl.2.2. kazuje da elementi ne moraju obavezno da budu prikazani u prirodnom poretku.

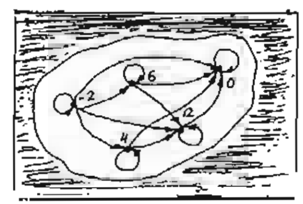


Sl.2.1.



Sl.2.2.

Slika 2.3. Prikazuje graf relacije R. Tu vidimo da postoje grane koje polaze i završavaju se u jednom te istom elementu. Takva grana naziva se <u>petlja.</u> Kod ovakvih grana orijentacija nije važna.



Sl.2.3.

b. Ako je $a \in A$, vidimo da je uvek $(a,a) \in R$, na primer, $0 \in A$ ali je i $(0,0) \in R$, ili što je isto, $0R0$. Otuda zaključujemo da je relacija R refleksivna.

Neposrednim proveravanjem, možemo zaključiti da je R tranzitivna relacija. Tako ako je, na primer $-2R6$ i $6R12$ tada je $-2R12$, ili $-2R6$ i $6R0$ tada je $-2R0$. Slično je i u ostalim slučajevima. Možemo primetiti da je ta relacija definisana na sledeći način:

xRy ako i samo ako je y deljivo sa x, a za tako definisanu relaciju videćemo u sledećem zadatku da je uredajna a time da je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

4.3. Neka je N skup prirodnih brojeva i relacija R definisana nad N na sledeći način: xRy ako i samo ako je y deljivo sa x. Pokazati da je R uredjajna relacija.

Rešenje. Činjenicu da je y deljivo sa x obeležavamo i na sledeći način: x/y. Odavde sledi da, ako je xRy, onda je $y=kx$, gde je k neki prirodni broj. Tako, na primer, je 2R6, 1Rn za svaki prirodni broj n, nR2n i nRn^2 gde je n isto prirodni broj, jer je respektivno:

$6=3\cdot 2$, $n=n\cdot 1$, $2n=2\cdot n$, $n^2=n\cdot n$.

a. Kako je za svaki prirodni broj n, $n=1\cdot n$ to je nRn, pa je R refleksivna relacija.

b. Neka je nRm i mRn. Iz nRm izlazi da je m deljivo sa n pa je $n \leq m$. Pošto je mRn, tada je kao i malopre n deljivo sa m, pa je $m \leq n$. Otuda iz $n \leq m$ i $m \leq n$ izlazi da je $n=m$, pošto je uredjenje prirodnih brojeva po veličini uredjajna relacija a time i antisimetrična.

c. Neka je nRm i mRp gde su n, m i p prirodni brojevi. To znači da je $m=an$ i $p=bm$, gde su a i b prirodni brojevi. Otuda je $p=b(an)$ ili $p=(ba)n$, ili drugim rečima p je deljivo sa n, tj. nRp.

a., b., c. pokazuju da je R refleksivna, antisimetrična i tranzitivna a time i uredjajna relacija. Otuda R se može zameniti simbolom $<$. Primetimo da ova uredjajna relacija $<$ nije i totalno uredjajna. Zaista, niti 2 deli 3, niti 3 deli 2, pa nije $2<3$ a takodje nije $3<2$. Primetimo da pri ovom uredjenju N ima najmanji element i to je 1, jer je za svaki prirodan broj n, n je deljivo sa 1 pa je $1<n$.

4.4. Neka je D skup celih brojeva i relacija R nad D definisana kao u zadatku 3. Pokazati da tako definisana relacija jeste uredjajna.

Uputstvo: Vidi rešenje zadatka 3.

4.5. Neka je $X=\{a,b,c,d\}$ i R relacija na X definisana sa:

$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(a,d),(b,d),(c,d)\}$.

a. Naći koordinatnu sliku i graf date relacije.

b. Pokazati da je R uredjajna relacija.

Uputstvo: Videti rešenje zadataka 1., 2., 3...

4.6. Neka je data uredjajna relacija $<$ na skupu X. Definišimo novu relaciju u X na sledeći način: xRy ako i samo ako je $y<x$. Pokazati da je R isto uredjajna relacija.

a. Kako je $x<x$ za svako x iz X to je i xRx za svako x iz X pa je R refleksivna.

b. Neka je xRy i yRx, tj. $y<x$ i $x<y$, pa zbog antisimetričnosti relacije $<$, imamo da je $x=y$ ili R je antisimetrična.

c. Neka je xRy i yRz, tj. $y<x$ i $z<y$, ili $z<y$ i $y<x$, pa je zbog tranzitivnosti relacije $<$, $z<x$ ili xRz, otkud sledi da je R tranzitivna relacija.

Tačke a., b., c., pokazuju da je R uredjajna relacija. R se zamenjuje simbolom $>$, i $x>y$ čita se: x veće od y. Relacija $>$ zove se dualnom relaciji $<$.

4.7. Neka je R uredjajna relacija u skupu X. Pokazati da je R^{-1} takodje uredjajna relacija.

Uputstvo: Pokazati da je R^{-1} ustvari dualna relacija $\geq$.

4.8. U zadacima 2. i 3. naći inverzne relacije.

Uputstvo: Videti zadatak 1.

4.9. Neka je T relacija na skupu R realnih brojeva definisana sa:

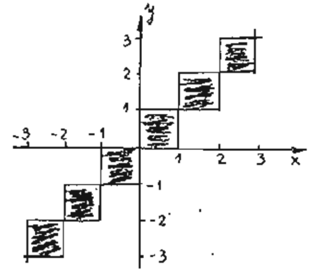
xTy ako i samo ako je $x,y \in [n,n+1]$ za neki ceo broj n.

Prikazati grafički tu relaciju.

Ovde je $[n,n+1]$ zatvoren interval u skupu realnih brojeva, tj. $[n,n+1] = \{x / n \leq x \leq n+1\}$. Tako, na primer, za $n=0$, $[n,n+1] = [0,1]$, a to je skup svih realnih brojeva izmedju 0 i 1.

Neki x i y biće u relaciji T ako se nalaze u takvom jednom intervalu. Na primer 1/2 i 1/3 su u relaciji T pošto je $1/2,\ 1/3 \in [0,1]$. Slično je $0T1$, $0T1/2$ jer je $0,1 \in [0,1]$; $0,1/2 \in [0,1]$. I uopšte ako je $0 \leq x \leq 1$ i $0 \leq y \leq 1$ tada je xTy pošto su x, y iz intervala $[0,1]$. Pošto se x kreće duž x-ose a y duž y-ose, tada skup parova (x,y) za koje je $x,y \in [0,1]$ biće kvadrat $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y)/\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Tada ako je $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ biće xTy. Ako se slično uradi za $n \in \{\dots,-2,-1,1,2,\dots\}$ onda se dobija graf relacije T.

Rešenje. T se sastoji od osenčenih kvadrata na slici 9.1.



Sl. 9.1.

4.10. Dokazati da je za proizvoljne tri relacije $R \subset W \times X$, $S \subset X \times Y$, i $T \subset Y \times Z$ ispunjeno: $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

Rešenje. $(T \circ S) \circ R = \{(w,z)$ / postoji x iz X da je $(w,x) \in R$ i $(x,z) \in T \circ S\} = \{(w,z)/$ postoji x iz X i postoji y iz Y da je $(w,x) \in R,\ (x,y) \in S,\ (y,z) \in T\} = \{(w,z)/$ postoji y iz Y da je $(w,y) \in S \circ R,\ (y,z) \in T\} = T \circ (S \circ R)$.

Ova osobina kompozicije relacija naziva se asocijativnost.

4.11. Pokazati da važi zakon asocijacije za kompoziciju funkcija.

Uputstvo: Funkcije f, g, h koje preslikavaju respektivno W u X, X u Y, Y u Z možemo da smatramo da su relacije, na primer $f = \{(w,x)/\ x = f(w)\}$ i slično, za g i h, pa prema zadatku 10 važi zakon asocijacije.

4.12. Neka su date dve relacije $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$. Dokazati da je:

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Neka z i x označavaju respektivno elemente iz skupova Z i X, tj. $z \in Z$, $x \in X$.

Tada imamo ovaj niz jednakosti:

$(S\circ R)^{-1} = \{(z,x)/(x,z)\in S\circ R\}$ — Koristi se definicija inverzne relacije.

$= \{(z,x)$ / postoji y, $(x,y)\in R$ i $(y,z)\in S\}$ — Koristi se definicija kompozicije relacija.

$= \{(z,x)$ / postoji y, $(y,x)\in R^{-1}$ i $(z,y)\in S^{-1}\}$ — Koristi se definicija inverzne relacije.

$= \{(z,x)/$ postoji y, $(z,y)\in S^{-1}$ i $(y,x)\in R^{-1}\}$ — Koristi se komutativnost konjunkcije i.

$= \{(z,x)/\ (z,x)\in R^{-1}\circ S^{-1}\}$ — Koristi se definicija kompozicije relacija.

$= R^{-1}\circ S^{-1}$

Otuda dobijamo jednakost: $(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$.

4.13. Neka je $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x,y,z,w\}$ i $C = \{5,6,7,8\}$ i neka su date relacije: $U = \{(1,x),(1,y),(2,x),(3,w),(4,w)\}$ i

$V = \{(y,5),(y,6),(z,8),(w,7)\}$

a. Naći koordinatne slike datih relacija.

b. Naći kompoziciju $V\circ U$.

Rešenje. a. Slično kao u zadacima 1. i 2.

b. Pošto je:

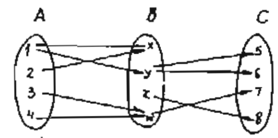
$(1,5)\in V\circ U$ jer je za $y\in B$ $(1,y)\in U$ i $(y,5)\in V$

$(1,6)\in V\circ U$ jer je za $y\in B$ $(1,y)\in U$ i $(y,6)\in V$

$(3,7)\in V\circ U$ jer je za $w\in B$ $(3,w)\in U$ i $(w,7)\in V$

$(4,7)\in V\circ U$ jer je za $w\in B$ $(4,w)\in U$ i $(w,7)\in V$

Nijedan uredjen par više ne pripada $V\circ U$ pa je



Sl. 13.1.

$V\circ U = \{(1,5),(1,6),(3,7),(4,7)\}$.

Primetimo da se $V\circ U$ sastoji od onih parova (x,y) za koje postoji, u gornjem dijagramu, "staza" od $x\in A$ prema $y\in C$, koja se sastoji od dve strelice, od kojih jedna sledi drugu.

4.14. Neka je N skup prirodnih brojeva i R označava relaciju uredjenja $<$ po veličini, tj. $(a,b)\in R$ ako i samo ako je $a<b$. Pokazati da je: $R\circ R^{-1} \neq R^{-1}\circ R$.

Rešenje.

Pokažimo da je $R^{-1}\circ R = N\times N$. Neka je $(a,b)\in N\times N$. Tada postoji prirodni broj c koji je veći i od a i od b, /na primer, ako je $a\le b$, dovoljno je uzeti $c = b+1$, pa je onda c veće i od a i od b/. Znači postoji prirodan broj c da je $a<c$ i $b<c$. Prema tome, kako je definisana relacija R to je ekvivalentno sa: postoji $c\in N$ da je aRc i bRc. Koristeći pojam inverzne relacije to je ekvivalentno sa: postoji $c\in N$ da je aRc i $cR^{-1}b$ a to je prema definiciji kompozicije relacija ekvivalentno sa $(a,b)\in R^{-1}\circ R$.

Ovde zaključujemo da je $N\times N = R^{-1}\circ R$, čime je pokazana gornja jednakost.

Slično se može pokazati da je $R\circ R^{-1} = (N\setminus\{1\}\ x\ (N\setminus\{1\})$, tj.

da je $R \circ R^{-1} = \{2,3,4,\dots\} \times \{2,3,4,\dots\}$. Zaista, neka je $(a,c) \in R \circ R^{-1}$. To znači da postoji prirodan broj b da je $(a,b) \in R^{-1}$ i $(b,c) \in R$, što je ekvivalentno $(b,a) \in R$ i $(b,c) \in R$. Imajući u vidu kako je definisana relacija R, to je ekvivalentno sa $b < a$ i $b < c$. Medjutim, ako je $a = 1$ ili $c = 1$, onda ne postoji prirodan broj b koji bi zadovoljavao navedene nejednakosti. Otuda u $R \circ R^{-1}$ ulaze samo oni parovi (a,c), kod kojih nisu obe koordinate jednake 1, tj. $R \times R^{-1} = (N \setminus \{1\}) \times (N \setminus \{1\})$.

Na osnovu prethodnog dobijamo da je $R^{-1} \circ R \neq R \circ R^{-1}$.

4.15. Neka su U i V relacije na skupu realnih brojeva R definisane sa:

$U = \{(x,y) / \ x^2+y^2 = 1\}$, $V = \{(y,z) / \ 2y+3z = 4\}$. Naći $V \circ U$.

Rešenje. Eliminacijom promenljive y dobija se:

$$V \circ U = \{(x,z) \ / \ 4x^2+9z^2-24z+12 = 0\}$$

4.16. Neka je R relacija u skupu prirodnih brojeva N definisana sa:

$R = \{(x,y) \ / \ x,y \in N, \ \ x+2y = 12\}$.

a. Napisati R kao skup uredjenih parova i predstaviti R grafički.

b. Naći R^{-1}, $R \circ R$ i $R \circ R^{-1}$.

Uputstvo: Videti prethodne zadatke.

4.17. Neka je $<$ uredajna relacija na skupu X. Neka je definisana relacija R u skupu X na sledeći način: xRy ako i samo ako je $x < y$ i $x \neq y$. Pokazati da je R tranzitivna ali da nije refleksivna, niti simetrična, niti antisimetrična.

Uputstvo: Ako bi R bila refleksivna relacija bilo bi xRx, otkud $x < x$ i $x \neq x$, što je kontradikcija. Slično se dokazuje i ostalo.

4.18. Neka je T relacija u skupu realnih brojeva R definisana sa xTy ako i samo ako je $0 \leq x-y \leq 1$.

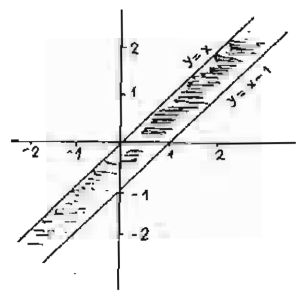
a. Prikazati T i T^{-1} kao podskupove od $R \times R$ i naći njihove koordinatne slike

b. Naći $T \circ T^{-1}$.

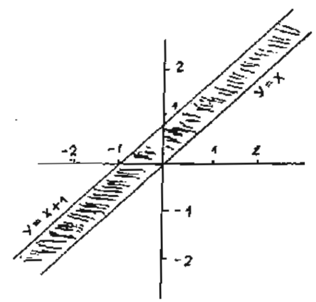
Rešenje.

a. $T = \{(x,y) / \ x,y \in R, \ 0 \leq x-y \leq 1\}$, $T^{-1} = \{(x,y)/(y,x) \in T\} = \{(x,y) / \ x,y \in R, \ 0 \leq y-x \leq 1\}$.

Slike 18.1. i 18.2. prikazuju respektivno relacije T i T^{-1}.



Sl.18.1.



Sl.18.2.

b. $T \circ T^{-1} = \{(x,z) / \ |x-z| \leq 1\}$.

4.19. Neka je skup $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ i R binarna relacija definisana u njemu na sledeći način: xRy ako i samo ako je $x+y = 8$.

a. Naći graf te relacije i njenu koordinatnu sliku.

b. Pokazati da je ta relacija simetrična. Da li je to relacija ekvivalencije?

Rešenje.

a. Slika 19.1. je graf te relacije, a slika 19.2. koordinatna slika te relacije.

b. Ako je xRy i yRz tada je x+y=8 i y+z=8 odakle oduzimanjem odgovarajućih strana dobijamo x-z=0 ili x=z, pa ako je R relacija ekvivalencije tada bi bilo xRx ili x+x=8, tj. x=4, što ne mora da bude u opštem slučaju, na primer 3+5=8, ali 3+3≠8 . Simetričnost relacije R je posledica komutativnosti sabiranja.

Sl. 19.1

Sl. 19.2.

4.20. Neka je f funkcija koja preslikava skup X u skup Y. Dokazati da je relacija R definisana sa xRy ako i samo ako je f(x)= f(y) relacija ekvivalencije.

Rešenje. a. Kako je f(x)= f(x) za svako x iz X, to je xRx za svako x iz X, pa je R refleksivna.

b. Neka je xRy. Tada je f(x)= f(y), odakle je f(y)= f(x), pa je yRx, što znači da je R simetrična.

c. Neka je xRy i yRz. Tada je f(x)= f(y) i f(y)= f(z), pa na osnovu tranzitivnosti relacije = /jednakosti/ f(x)= f(z), što znači da je R tranzitivna.

Tačke a., b. i c. pokazuju da je R relacija ekvivalencije.

4.21. Za skup $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ definisane su relacije:

I. xRy ako i samo ako je $x^2=y^2$

II. xTy ako i samo ako je $x^2+x = y^2+y$.

a. Pokazati da su to relacije ekvivalencije.

b. Naći grafove datih relacija i klase ekvivalencija.

Rešenje. a. U oba slučaja definisane relacije su kao u zadatku 20. pa je prema istom zadatku i prva i druga relacija, relacija ekvivalencije.

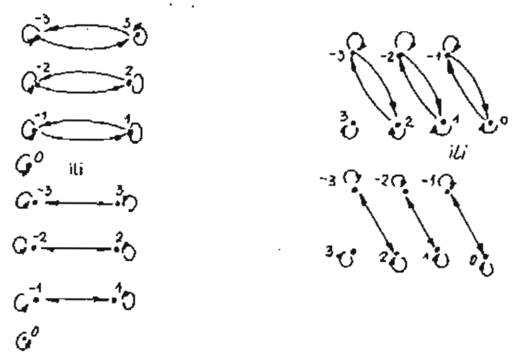
U I. je f:

$$f = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{ili } f(x)= x^2$$

U II. je g:

$$g = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{ili } g(x)= x^2+x$$

b. Grafovi su oblika:



Sl. 21.1.

Skup klasa ekvivalencija je:

I. $\{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \{-3, 3\}\}$

II. $\{\{3\}, \{-3, 2\}, \{-2, 1\}, \{-1, 0\}\}$

4.21. Neka je u skupu D celih brojeva definisana R, relacija na sledeći način: Dat je ceo broj d i xRy ako i samo ako je $x-y$ deljivo sa d, tj. ako je $x-y=kd$ za neki ceo broj d.

a. Dokazati da je to relacija ekvivalencije.

b. Za $d=2$ naći klase ekvivalencije.

Rešenje.

a. 1. Kako je $x-x=0$, tj. $x-x=d\cdot 0$ to je $x-x$ deljivo sa d pa je xRx, što znači da R refleksivna.

2. Neka je xRy, odakle sledi da je $x-y=kd$ za neki ceo broj k. Neposredno je onda $y-x=(-k)d$ pa je onda i yRx, što znači da je R simetrična.

3. Neka je xRy i yRz, tj. $x-y=kd$ i $y-z=nd$. Sabiranjem odgovarajućih strana vidimo da je $x-z=(k+n)d$ ili drugim rečima je xRz, pa je R tranzitivna. Tačke 1., 2. i 3. pokazuju da je R relacija ekvivalencije.

b. Neka je $d=2$, pa je xRy isto što i da je $x-y=k2$ za neki ceo broj k. Neka je $y=0$. Tada je $x=2k$ gde je k ceo broj, pa je onda jedna klasa ekvivalencije $C_0 = \{\dots,-4, -2, 0, 2, 4,\dots\}$. To je skup parnih brojeva.

Ako je $y=1$, tada je $x=2k+1$, gde je k ceo broj pa je C_1 oblika: $C_1 = \{\dots, -5,-3,-1,1,3,5,\dots\}$. To su i jedine klase ekvivalencije: $C_0 = \{2k/\ k \in D\}$ i $C_1 = \{2k+1/\ k \in D\}$.

Primetimo da je $C_0 \cap C_1 = \emptyset$ i da je $C_0 \cup C_1 = D$, Iz tog razloga i kažemo da relacija ekvivalencije vrši razbijanje skupa na kome je definisana. Gornja relacija ekvivalencije naziva se <u>kongruencija</u> i piše se u obliku $x \equiv y \pmod d$

4.22. Neka je R relacija ekvivalencije definisana kao u zadatku 21. Pokazati da ako je xRy i aRb da je onda i $axRby$, i $(a+x)R(b+y)$.

Uputstvo: Videti zadatak 21.

4.23. Neka su date dve relacije ekvivalencije $\sim_1$ i $\sim_2$ u skupu X i neka je definisana nova relacija R na sledeći način: xRy ako i samo ako je $x \sim_1 y$ i $x \sim_2 y$. Pokazati da je R relacija ekvivalencije.

Rešenje.

a. Pošto je $x \sim_1 x$ i $x \sim_2 x$ za svaki x, to je xRx za svaki x, pa je R refleksivna.

b. Neka je xRy. Tada je $x \sim_1 y$ i $x \sim_2 y$, ali zbog simetričnosti relacije ekvivalencije onda je $y \sim_1 x$ i $y \sim_2 x$ pa je i yRx, što znači da je i R simetrična relacija.

c. Neka je xRy i yRz. Tada je $x \sim_1 y$, $x \sim_2 y$ i $y \sim_1 z$, $y \sim_2 z$. Zbog tranzitivnosti relacije ekvivalencije, onda je $x \sim_1 z$ i $x \sim_2 z$, tj. xRz, što pokazuje da je R tranzitivna. Prethodne tačke a., b. i c. pokazuju da je R relacija ekvivalencije.

4.24. Neka su a i b proizvoljni realni brojevi. Dalje, neka je $\sim$ relacija u R^2 definisana sa

$(x,y) \sim (w,z)$ ako i samo ako $\exists k \in Z$, gde je Z skup celih brojeva, tako da je $x-w = ka$, $y-z = kb$

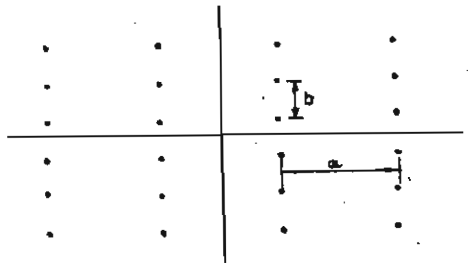
/a/ Dokazati da je $\sim$ jedna relacija ekvivalencije.

/b/ Nacrtati graf nekoliko klasa ekvivalencije.

Rešenje.

/a/ Uputstvo kao u zadatku 21.

/b/



Sl. 24.1.

Gornja slika daje tipičnu klasu ekvivalensije. Razdaljina izmedju tačaka po horizontali je a, a razdaljina izmedju tačaka po vertikali je b.

4.25. Utvrditi da li je svako od sledećih tvrdjenja tačno ili netačno. Neka su R i S /neprazne /. relacije u skupu A.

/1/ Ako je R simetrična, onda je R^{-1} simetrična.

/2/ Ako je R refleksivna, onda je $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.

/3/ Ako je R simetrična, onda $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.

/4/ Ako su R i S tranzitivne, onda je $R \cup S$ tranzitivna.

/5/ Ako su R i S tranzitivne, onda je $R \cap S$ tranzitivna.

/6/ Ako su R i S simetrične, onda je $R \cup S$ simetrična.

/7/ Ako su R i S simetrične, onda je $R \cap S$ simetrična.

/8/ Ako su R i S refleksivne, onda je $R \cap S$ refleksivna.

Rešenje. /1/ da, /2/ da, /3/ da, /4/ ne, /5/ da, /6/ da, /7/ da, /8/ da.

4.26. Uočimo NxN, skup uredjenih parova celih pozitivnih brojeva. Neka je $\simeq$ relacija u NxN definisana sa $(a,b) \simeq (c,d)$ ako i samo ako $a+d = b+c$.

/a/ Dokazati da je $\simeq$ relacija ekvivalencije.

/b/ Naći klasu ekvivalencije od $(2,5)$, tj. $C_{(2,5)}$.

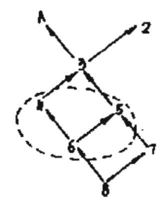
Rešenje.

/a/ Videti zadatak 21.

/b/ $C_{(2,5)} = \{(x,y) \mid (x,y) \sim (2,5)\} = \{(x,y) \mid x+5 = y+2\} =$

$= \{(x,y) \mid y-x = 3\} = \{(4,1),(5,2),(6,3),(7,4), \dots\}$

4.27. Neka je $W = \{1,2,\dots,7,8\}$ uredjen kao na sledećoj slici:



Sl. 27.1.

Uočimo podskup $V = \{4,5,6\}$ od W.

/a/ Naći skup gornjih granica od V.

/b/ Naći skup donjih granica od V.

/c/ Da li postoji sup (V) ?

/d/ Da li postoji inf (V) ?

Rešenje.

/a/ Svaki element u $\{1,2,3\}$, i samo ovi elementi, veći je od svakog elementa u V i zbog toga predstavlja jednu gornju granicu.

/b/ Samo 6 i 8 su manji od svakog elementa u V, pa je prema tome $\{6,8\}$ skup donjih granica.

/c/ Kako je 3 najmanji element skupa gornjih granica od V, to je sup (V) = 3. Primetimo da $3 \notin V$.

/d/ Kako je 6 najveći element skupa donjih granica od V, to je inf (V) = 6. Primetimo da je $6 \in V$.

4.28. Neka je $B = \{2,3,4,5,6,8,9,10\}$ uredjen sa "y je deljivo sa x", tj. $y < x$ ako i samo ako je y deljivo sa x.

/a/ Naći sve maksimalne elemente od B.

/b/ Naći sve minimalne elemente od B.

Rešenje. Konstruišimo dijagram 28.1. koji prikazuje dato uredjenje u B.

/a/ Maksimalni elementi su 2,3 i 5.

/b/ Minimalni elementi su 6,8,9 i lo.

2 je maksimalni element skupa X jer nema takvog elementa x iz skupa X koji bi bio veći od 2. Slično važi i za elemente 3 i 5.

Sl.28.1.

6 je minimalni element jer ne postoji $x \in X$ da je $x < 6$. Slično važi i za 9,8 i 10. Treba imati na umu šta znači $x < 6$ - to je: x je deljivo sa 6.

4.29. Neka je dat skup $X = \{a,b,c\}$.

a. Naći partitivni skup skupa X /partitivni skup, u oznaci P(X), je skup svih podskupova skupa X/.

b. Dokazati da je inkluzija $\subset$ jedno uredjenje tog skupa i naći graf pridružem toj relaciji.

c. Dokazati da je inkluzija uredjajna relacija od P(X), gde je X proizvoljni skup.

d. Da li je P(X) totalno uredjen inkluzijom?

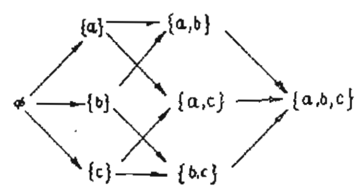
Rešenje.

a. $P(x) = \{ a/A \subset X\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

b. 1. Kako je $A \subset A$, to je inkluzija refleksivna relacija.

2. Ako je $A \subset B$ i $B \subset C$, tada su skupovi A i B jednaki, pa je inkluzija antisimetrična relacija.

3. Neka je $A \subset B$ i $B \subset C$. Tada je skup A sadržan u B i skup B je sadržan u C pa je onda i A sadržan u C, što znači da je inkluzija tranzitivna. Prethodne tačke pokazuju da je inkluzija tranzitivna relacija. Graf pridružen toj relaciji je:



Sl. 29.1.

Ovde su izostavljene neke grane zbog preglednosti slike. Strelicama su spojeni samo neposredni sledbenici. Primetimo da su čvorovi ove relacije svi podskupovi skupa X.

c. Dokaz je isti kao pod b.

d. Inkluzija nije totalno uredjajna jer, na primer $\{a,b\}$ i $\{a,c\}$ nisu uporedljivi u odnosu na inkluziju.

4.30. Da li su skupovi N, D, Q, R, totalno uredjeni u odnosu na $\leqslant$, tj. u odnosu na uredjenje brojeva po veličini. Ovde su navedeni skupovi redom prirodni brojevi, celi brojevi, racionalni brojevi i realni brojevi.

Rešenje. Svi navedeni skupovi su totalno uredjeni, jer je uredjenje brojeva po veličini refleksivna, tranzitivna i simetrična relacija, a takodje svaka dva broja su uporedljiva po veličini.

4.31. Uvesti bar jedno uredjenje u skup kompleksnih brojeva Z.

Rešenje. Neka Z označava skup kompleksnih brojeva: $Z = \{x+iy/\ x,y \in R\}$, gde R označava skup realnih brojeva a $i = \sqrt{-1}$.

Jedno uredjenje može se uvesti, na primer, na ovaj način:

za $z=x+iy$ i $z'=x'+iy'$, $x,y,x',y' \in R$, je $z < z'$ ako i samo ako je $x < x'$ ili $x = x'$ i $y \leqslant y'$. Ovde $x < x'$ znači da je x manje od x', tj. to je uredjenje realnih brojeva po veličini.

Pokazati da je $<$ zaista uredjenje.

Pokazati da $<$ uredjuje totalno skup Z kompleksnih brojeva /na primer $2+5i < 3+4i$, jer je $2 < 3$.

4.32. Neka je Q skup racionalnih brojeva i prirodno uredjenje po veličini u njemu i neka je $A = \{x/\ \ x \in Q,\ x^3 < 3\}$

a. Da li je A ograničen odozgo u Q; u R.

b. Da li postoji sup A u Q; u R?

Rešenje.

a. A je ograničen u skupu Q a takodje i u skupu R. Na primer $a = 2$ je jedna gornja granica skupa A /primetimo da je $2 \in Q$ i $2 \in R$ /. Zaista, ako je $x \in A$ tada je $x^3 < 3$, odakle je $x < \sqrt[3]{3}$. Kako je $\sqrt[3]{3} < 2$, to je i $x < 2$, pa je 2 gornja granica skupa A.

b. U skupu Q racionalnih brojeva sup (A) ne postoji. U skupu R realnih brojeva sup(A) postoji i sup $(A) = \sqrt[3]{3}$. Primetimo da $\sqrt[3]{3}$ nije racionalan broj, tj. $\sqrt[3]{3} \notin Q$.

Gojko KALAJDŽIĆ

V. GRUPOID. POLUGRUPA. GRUPA. PRSTEN (KOLO). TELO (POLJE). BULOVSKA ALGEBRA. VEKTORSKI PROSTOR

<u>Definicija 1.</u> Neka je G bilo kakav neprazan skup; ako nekim postupkom (nekom radnjom) f <u>svakom</u> uredjenom paru (x,y) elemenata iz G pridružimo odredjen elemenat iz tog istog skupa G, tada kažemo da skup G odredjen <u>grupoid</u> ili <u>monoid</u> u odnosu na odredjen postupak f, ili takodje da je skup (množina) G <u>zatvoren</u> u odnosu na pridruživanje (operaciju, radnju) f; ono što paru (x,y) (tj. ulazu ili podatku) pridružujemo (tj. izlaz ili iznos) označujemo sa f (x,y) ili xfy. Sam grupoid može se označiti kao uredjen par (G,f) .

Napomenimo da postupak (radnja) f, o kojem je reč u gornjoj definiciji, često obeležavamo nekim specifičnim simbolima kao, na primer, "o" (č.kružić), "$\odot$" (č.kružić sa tačkom), "+" (plus), "." (č.tačka), itd.

<u>Definicija 2.</u> Svaki grupoid (G,f)(vidi prethodnu definiciju) za koji je operacija f asocijativna (drži na umu, na primer, sabiranje ili množenje realnih brojeva), tj. za koju važi

$$(xfy)fz = xf(yfz) \text{ za } \underline{\text{svako}} \quad x,y,z \in G,$$

zove se <u>polugrupa</u> ili <u>semigrupa</u>.

<u>Definicija 3.</u> Svaka polugrupa, u kojoj postoji bar jedan neutralan elemenat i najmanje jedna suprotna vrednost <u>svakog</u> elementa te polugrupe, zove se grupa. Pri tome, za izve-

stan elemenat, označimo ga sa e, grupoida (odnosno polugrupe) (G,f) kažemo da je neutralni elemenat toga grupoida (odnosno polugrupe) ako za svaki elemenat $a \in G$ važi: $afe = a$ i $efa = a$ (imaj na umu, na primer, grupoid $(R,+)$ i 0 kao neutralni elemenat!); nadalje, za elemenat $a \in G$ grupoida (G,f) kažemo da ima svoj inverzni elemenat (ili svoju suprotnu vrednost), koji označujemo sa "$-a$" ili "a^{-1}", ako važi $(-a)fa = e$ gde je e neutralni elemenat (primetimo da se prvo mora ispitati postojanje neutralnog elementa e, da bi se uopšte moglo i govoriti o inverznim ili suprotnim elementima).

Definicija 4. Neka je (G,f) komutativna grupa, tj. grupa za čija svaka dva elementa $x,y \in G$ važi $xfy = yfx$ (zakom komutacije); nadalje, neka je (G,h) (uoči da je skup G isti kao u gornjoj grupi, ali da je operacija h različita!) polugrupa i neka za operacije f i h važi zakon distribucije operacije h prema f (oprez! pazi na redosled operacije h i f!), tj. neka za svaka tri elementa $x,y,z \in G$ važi $(xfy)hz = (xhz)f(yhz)$ (drži na umu skup realnih brojeva R umesto skupa G, sabiranje "+" umesto operacije f, te množenje "." umesto operacije h); tada gornji uslov glasi $(x+y).z = (x.z)+(y.z)$; tada uredjenu trojku (G,f,h) (oprez! pazi na redosled operacija f i h!) nazivamo prstenom ili kólom.

Uobičajeno je da se za "prvu" operaciju f upotrebljava simbol "+" (sabiranje), a umesto "druge" operacije "." (množenje) i onda kada to i ne znači sabiranje i množenje, na primer, u smislu sabiranja i množenja realnih brojeva.

Definicija 5. Neka je (G,f,h) prsten (vidi definiciju 4!); ako je uredjeni par $(G\setminus\{e\}, h)$, gde je e neutralni element grupe (G,f), grupa, prsten (G,f,h) zovemo telo ili polje.

Definicija 6. Neka je B neprazan skup te $\wedge, \vee$ i $'$ (čitaj komplement) tri operacije za koje važe sledeća pravila računanja:

1^o Grupoidnost. Ako su a i b elementi skupa B, onda su i pripadni "iznosi" $a\wedge b$, $a\vee b$, a' (što redom čitamo a kep b, a kap b te komplemente od a) potpuno odredjeni elementi istog skupa B.

2^o Asocijativnost. Za bilo koja tri elementa a,b i c skupa B važi:

(1) $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$,
(2) $(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$.

3^o Komutativnost. Za bilo koja dva elementa a i b skupa B važi:

(1) $a\wedge b = b\wedge a$,
(2) $a\vee b = b\vee a$.

4^o Postoje neutralni elementi, označavamo ih sa I i O, skupa B, takvi da za svaki element a skupa B važi:

(1) $I\wedge a = a\wedge I = a$,
(2) $O\vee a = a\vee O = a$.

Element I nazivamo neutralni elemenat za operaciju $\wedge$, a O nula elemenat, ili neutralni elemenat za operaciju $\vee$.

5^o Postojanje komplementa. Za svaki elemenat a iz B postoji jedinstven elemenat a', koji se zove komplement od a, sa ovim osobinama:

(1) $a\wedge a' = a'\wedge a = O$,
(2) $a\vee a' = a'\vee a = I$.

6^o Distributivni zakoni. Za bilo koja tri elementa a, b i c skupa B važi:

(1) $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,
(2) $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$.

Ako važe sva gornja pravila računanja, uredjenu četvorku $(B;\wedge,\vee,')$ zovemo Bulovom algebrom. Možemo je označiti i kao uredjenu šestorku $(B,I,O;\wedge,\vee,')$ da se istaknu neutralni elementi I i O operacija $\wedge$ i $\vee$.

Definicija 7. Neka je V neprazan skup, čije elemente označimo sa x,y,z,..., i neka je R (odnosno K) skup realnih (odnosno kompleksnih) brojeva, čije elemente označimo sa a, b,c,....; neka je, nadalje, $(V,+)$ komutativna grupa, gde je "+" izvesna operacija, nazivamo je sabiranjem, pomoću koje svakom uredjenom paru (x,y) elemenata iz skupa V pridružujemo opet elemenat iz skupa V, koji označujemo sa x+y i nazivamo zbirom elemenata x i y, i neka je definisano množenje "." realnih (odnosno kompleksnih) brojeva a,b,c,... sa elementima x,y,z,... skupa V tako da važe pravila:

P_1: ako $a \in R$ i $x \in V$, onda i $a.x \in V$,

P_2: (zakon distribucije prema sabiranju brojeva):
$(a+b).x = a.x + b.x$ za bilo koje elemente $a,b \in R$ i $x \in V$,

P_3: (zakon distribucije prema sabiranju elemenata iz skupa V):
$a.(x+y) = a.x + a.y$ za bilo koje $a \in R$ i $x,y \in V$,

P_4: (zakon asocijacije za množenje brojevima):
$a.(b.x) = (ab).x$ za svako $a,b \in R$ i svako $x \in V$,

P_5: $1.x = x$ za svako $x \in V$;

tada skup V nazivamo vektorskim ili linearnim prostorom nad telom (vidi definiciju 5) R (odnosno K) realnih (odnosno kompleksnih) brojeva. Svaki elemenat iz skupa V zove se vektorom nad telom R (odnosno K); dakle, prema gornjim oznakama, elemente x,y,z,... zovemo vektorima.

Definicija 8. Neka su obe od struktura (uredjenih parova) $(G, \circ)$ i $(F, *)$ grupoidi, odnosno polugrupe, odnosno grupe (vidi definicije 1,2 i 3!). Ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje $I: G \to F$ skupa G na skup F tako da za svaki par elemenata a i b skupa G i pripadne njihove slike I (a) i I (b) skupa F važi:

$$I(a \circ b) = I(a) * I(b),$$

tj. ako je slika "iznosa" elemenata a i b u strukturi $(G, \circ)$ upravo "iznos" slikâ I(a) i I(b) tih elemenata u strukturi $(F, *)$ (vodi računa da ako $a,b \in G$ onda $I(a), I(b) \in F$), onda za strukture $(G, \circ)$ i $(F, *)$ kažemo da su izomorfne i pišemo $(G, \cdot) \cong (F, *)$. Tako, dakle, možemo govoriti o izomorfnim grupoidima, polugrupama ili, pak, o grupama. Samo preslikavanje I zovemo izomorfizmom.

Ako je G = F, I zovemo automorfizmom.

Strukturu $(F, *)$ nazivamo homomorfnom strukturi $(G, \circ)$ (pazi na redosled tih struktura!), ako se za preslikavanje I o kojem

je gore bilo reči, ne traži da bude obostrano jednoznačno, već samo jednoznačno (tj. da jednom elementu skupa G ne može pridružiti više od jednog elementa skupa F). Tada je umesto oznake I umesna oznaka H. Samo preslikavanje H zovemo homomorfizmom.

Definicija 9. Neka su $(G,+,.)$ i $(F,\oplus,\odot)$ dve algebarske strukture sa po dve binarne operacije +,. te $\oplus$, $\odot$. Ako postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje $I: G \to F$ skupa G na skup F tako da za svaka dva elementa a,b skupa G i njihove pripadne slike I(a) i I(b) u skupu F važi:

$$I(a+b) = I(a) \oplus I(b), \qquad I(a.b) = I(a) \odot I(b),$$

tj. da je u odnosu na obe operacije "+" i "." slika "iznosa" elemenata a i b jednaka "iznosu" slikâ I(a) i I(b) tih elemenata u odnosu na odgovarajuće operacije $\oplus$ i $\odot$ u skupu F, kažemo da su strukture $(G, +, .)$ i $(F, \oplus, \odot)$ izomorfne, a samo preslikavanje $I: G \to F$ zovemo izomorfizmom.

Ako je G = F, I se zove automorfizam (izomorfizam na sama sebe).

Ako se u gornjoj definiciji lišimo uslova da je preslikavanje I obostrano jednoznačno već samo jednoznačno, kažemo da je struktura $(F, \oplus, \odot)$ homomorfna sa $(G, +, .)$ (pazi na redosled navedenih struktura; to je kao kada kažemo da je dete slično roditeljima a ne roditelji detetu!). Samo preslikavanje I, koje sada možemo označiti sa veliko H, zovemo homomorfizmom.

Najzad, ako je $F \subset G$ (pazi, tu se ne traži da bude F = G kao gore!), H se zove endomorfizam.

Sada tačno znamo kada za dva prstena, odnosno polja (vidi definicije 4 i 5!) kažemo da su izomorfni odnosno homomorfni.

Definicija 10. Neka su $(V, +, .)$ i $(W, +, .)$ dva vektorska prostora nad telom R (vidi definiciju 7!). Ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje $I: V \to W$ skupa V na skup W sa ova dva svojstva:

$$I(x+y) = I(x) + I(y) \text{ za svaka dva vektora } x,y \in V,$$
$$I(a.x) = a.I(x) \text{ za svako } a \in R \text{ i svako } x \in V,$$

kažemo da su vektorski prostori $(V, +, .)$ i $(W, +, .)$ izomorfni.

Izomorfne vektorske prostore obično identifikujemo, iako njihovi elementi, tj. vektori mogu biti vrlo različite prirode.

Z A D A C I

G r u p o i d

1. Izreci definiciju 1 stavljajući umesto: 1° operacije f operaciju h; 2° simbola f za operaciju simbol "+", odnosno ".", zatim "∘", te "*"; 3° skupa G skup N a umesto simbola f za operaciju simbol "+" ili ".".

2. Je li skup $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ grupoid u odnosu na: 1° sabiranje; 2° oduzimanje; 3° množenje? Sastavi odgovarajuće tablice.

   Vredi li zaključak za skup $T = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$!? Promatraj specijalno skup $U = \{0\}$.

   Rešenje. Nije grupoid. Naime, prema definiciji 1 trebalo bi da za svaka dva elementa skupa $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ pripadni "iznos", tj. zbir bude takodje elemenat toga skupa. Istina, ako uzmemo, na primer, elemente 2 i 4 skupa S, onda odgovarajući "iznos" ili zbir (ispituje se slučaj pod 1°), tj. broj $2+4=6$ takodje pripada skupu S. Medjutim, ako uzmemo kao "ulaz" elemente 7 i 9 skupa S, pripadni "izlaz", tj. zbir $7+9=16$ nije elemenat skupa S, a po definiciji 1 bi to morao biti ako bi uredjeni par $(S,+)$ bio grupoid. Dakle, on to nije.

   Shematski bi se gornje pitanje moglo rešiti ovako:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tu su elementi skupa S rasporedjeni gore horizontalno i levo vertikalno. U gornjem levom uglu naznačena je operacija "+" o kojoj je reč u tački 1°. Uoči na isti način markirane elemente: 2,4 i 6 (2 i 4 su "podaci" a 6 je "iznos"), te 7,9 i 16; red u kome se nalazi podatak 2 i "stubac" u kome se nalazi podatak 4 u preseku daju "iznos", u konkretnom slučaju zbir, $2+4=6$ (kažiprstom leve ruke upri u podatak 2 a desne u podatak 4 pa pogledom fiksiraj "iznos" 6).

Svi mogući "iznosi" smešteni su u gornjoj pravougaonoj tablici; naravno, neki se od njih pojavljuju više puta (koji se od njih pojavljuje samo jednom?!); tako, na primer, 5 sa leva i 3 odozgo daju kao iznos $3+5=8$ (nadji to 8), dok i 3 sa leva i 5 odozgo daju kao iznos, takodje, $5+3=8$ (nadji i to 8), koje se od prethodnog razlikuje od svog mesta u tablici.

Sa tablice se neposredno vidi da $(S,+)$ nije grupoid. Naime, medju "iznosima" javljaju se i brojevi 10,11,...,18 koji nisu elementi skupa $S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Svi su oni smešteni u donjem desnom uglu tablice ispod kose linije.

Dobro prouči nastanak gornje tablice, pa onda napravi odgovarajuće tablice i za tačke 2° i 3°. Sa tih tablica neposredno će se videti da ni u tim slučajevima nemamo posla sa grupoidima.

Zaključak je isti i za skup T ako je n prirodan broj veći od 2, tj. ako je n-1 veći od 1.

Ako je n=2, tj. ako je $T=\{0,1\}$, neposredno se zaključuje (kako?!) da je $(T,.)$ grupoid, dok to uredjeni parovi $(T,+)$ i $(T,-)$ nisu. Napravi radne tablice, pa se sa njih uveri u to.

Ako je n=1, tj. ako je $T=U=\{0\}$, u sva tri gornja slučaja radi se o grupoidu; naime, imamo: 1^o $0+0=0\in\{0\}$, 2^o $0-0=0\in\{0\}$, 3^o $0.0=0\in\{0\}$, što po definiciji 1 znači da imamo posla sa grupoidima.

3. Da li je: 1^o skup N svih prirodnih brojeva; 2^o skup D svih celih brojeva; 3^o skup Q svih racionalnih brojeva; 4^o skup R svih realnih brojeva; 5^o skup $Q+Q\sqrt{2}$ svih brojeva oblika $x+y\sqrt{2}$, pri čemu su x i y racionalni brojevi, tj. elementi skupa Q; 6^o skup $R+R\sqrt{5}$ svih brojeva oblika $x+y\sqrt{5}$, gde je $x,y\in R$, grupoid u odnosu na: a) sabiranje +; b) oduzimanje −; c) množenje . ?

Rešenje. Uredjeni par $(N,+)$ jeste grupoid, jer zbir dva prirodna broja opet je prirodan broj. $(N,.)$ je takodje grupoid, jer je proizvod dva prirodna broja uvek prirodan broj. Medjutim, $(N,-)$ nije grupoid; istina, razlika nekih prirodnih brojeva jeste prirodan broj; na primer, 5-2 je prirodan broj 3, ali je 2-5=-3, a to nije prirodan broj.

2^o Skup D je grupoid u odnosu na sve tri operacije: sabiranje, oduzimanje i množenje. Posebno, u ovom slučaju imamo da je i $(D,-)$ grupoid, jer je razlika dva cela broja uvek ceo broj.

3^o Sva tri uredjena para: $(Q,+)$, $(Q,-)$, $(Q,.)$ jesu grupoidi. To je jasno, jer je zbir, odnosno razlika, odnosno proizvod dva racionalna broja, tj. razlomka opet racionalan broj, tj. razlomak.

4^o I ovde se u sva tri slučaja radi o grupoidima.

5^o Dokažimo, na primer, da je uredjeni par $(Q+Q\sqrt{2},+)$ grupoid; neka su $p+q\sqrt{2}$ i $r+s\sqrt{2}$ dva proizvoljna elementa skupa $Q+Q\sqrt{2}$. To znači da su brojevi p,q,r,s racionalni, tj. elementi skupa Q. Mi treba da dokažemo da je i pripadni "iznos", tj. zbir

$$(p+q\sqrt{2}) + (r+s\sqrt{2})$$

takodje elemenat skupa $Q+Q\sqrt{2}$, tj. da je i on oblika:

$$(\text{racionalan broj}) + (\text{racionalan broj puta}\sqrt{2}).$$

U tu svrhu napišemo gornji zbir u obliku:

$$(p+q\sqrt{2}) + (r+s\sqrt{2}) = (p+r) + (q+s)\sqrt{2};$$

pošto su brojevi p+r i q+s racionalni, jer su takvi brojevi p,q,r,s (vidi zadatak 3 pod 3^o!), tvrdjenje je dokazano.

Radeći analogno prethodnom, dokaži da su i $(Q+Q\sqrt{2},-)$ i $(Q+Q\sqrt{2},.)$ grupoidi. Dokaži, slično, da se i u tački 6^o radi o grupoidima.

4. Promatraj izraze 0, x, −x $(x\neq 0)$; obrazuju li oni grupoid u odnosu na zbrajanje? A u odnosu na množenje i oduzimanje?

5. Promatraj skupove $A=\{2\}$ i $B=\{2,6\}$; da li su oni grupoidi u odnosu na sabiranje? Odredi najmanji skup X odnosno Y tako da važi: $A\subset X$, $B\subset Y$ i da su X i Y grupoidi u odnosu na sabiranje. Da li su skupovi X i Y jednaki?

Rešenje. Nisu grupoidi. Naime, kada bi skup A, tj. skup $\{2\}$ bio grupoid u odnosu na sabiranje, morao bi, na primer, i broj 2+2=4 biti elemenat skupa A, tj. skupa $\{2\}$, a on to nije. Iz istih razloga ni skup B nije grupoid u odnosu na sabiranje.

Proširimo skup A tako da postane grupoid; kako $2\in A$ i kako je $A\subset X$ (sa X je obeleženo traženo proširenje) mora biti i $2\in X$; ako hoćemo da nam skup X bude grupoid, on mora da sadrži i elemenat (tj. broj) 2+2=4; to znači, da bi skup X bio grupoid u odnosu na sabiranje, pored broja 2 nužno mora da sadrži i broj 4; medjutim, pošto on sadrži 2 i 4, on mora da sadrži i "iznos" 2+4=6; dakle, skup X mora da sadrži brojeve 2,4 i 6; zbog osobine grupoida on mora da sadrži i pripadne iznose ili zbirove: 2+6=8, 2+4+6=12, 6+6+4=16, itd. Nadji još nekoliko brojeva koje mora da sadrži skup X. Zašto medju njima nema neparnih?

Iz gornje "konstrukcije" skupa X naslućujemo da on predstavlja skup svih parnih prirodnih brojeva. Radi se još o tome da ispitamo da li je u skupu X smešten svaki parni prirodni broj. Jeste. Vežbe radi dokažimo to metodom matematičke indukcije. Treba, dakle, ispitati da li je za svaki prirodan broj n, broj 2n elemenat skupa X.

Radimo: 1° Za n=1 tvrdjenje se svodi na $2.1 \in X$, a to je tačno po pretpostavci (naime, pretpostavljeno je da skup X sadrži skup A, tj. skup $\{2\}$);

2° pretpostavimo da tvrdjenje važi za neko $n=k$ $(k \geq 1)$, tj. $2k \in X$;

3° dokažimo, koristeći se naravno pretpostavkom pod 2°, da je tvrdjenje tačno i za $n=k+1$, tj. da važi $2(k+1) \in X$; zaista, prvo je $2(k+1) = 2k + 2$; prema pretpostavci pod 2°, broj 2k pripada skupu X, a prema 1° broj 2 pripada takodje skupu X; kako je skup X grupoid u odnosu na sabiranje, njemu mora pripadati i zbir prethodna dva broja, tj. broj $2k+2 = 2(k+1)$, a to je i trebalo dokazati; ovim je metodom matematičke indukcije dokazano da svaki prirodan paran broj mora pripadati skupu X, da bi on bio grupoid u odnosu na sabiranje.

Kako smo napred videli da ni jedan neparan broj ne može pripadati skupu X (to je iz razloga što se pomoću sabiranja iz parnih brojeva ne može dobiti neparan broj), zaključujemo da skup X i nema drugih elemenata sem parnih brojeva.

Prema tome, najmanji skup X koji sadrži skup A i koji je grupoid u odnosu na sabiranje jeste skup svih parnih prirodnih brojeva; taj se skup označava sa 2N, da se naznači da on nastaje iz skupa N kada mu se svaki član pomnoži sa 2; dakle X je = 2N.

Radeći analogno prethodnom, dokaži da je i skup Y o kome je reč u zadatku jednak skupu 2N; prema tome, skupovi X i Y su

jednaki.

6. Da li je skup 2N, sa kojim smo se upoznali u prethodnom zadatku, grupoid u odnosu na množenje? A u odnosu na delenje?

7. Da li je skup 2N-1 svih neparnih prirodnih brojeva grupoid u odnosu na sabiranje? A u odnosu na množenje?
   Tu je $2N-1 = \{2n-1 \mid n \in N\}$.

8. Radeći analogno kao u zadatku 5, odredi najmanji skup X koji sadrži skup $A = \{3\}$, tako da uredjeni par (X,+) bude grupoid.

9. Isto pitanje samo za uredjeni par (X,.), gde nam tačka "." znači obično množenje.

10. Promatraj izvestan skup S, na primer, skup $\{a,b,c\}$ i pripadni mu skup PS svih delova iz S, uključujući tu i prazan skup $\emptyset$ kao i sam skup S.

Je li skup PS grupoid u odnosu na: 1° uniju $\cup$; 2° presek $\cap$, 3° odstranjivanje (oduzimanje) $\setminus$ skupova?

Rešenje. 1° Prvo se podsetimo sledećeg: ako je skup A podskup skupa S, to pišemo ovako $A \subset S$; to je isto što i reći A je elemenat partitivnog (dionog) skupa PS, što se piše $A \in PS$; prema tome, zapisi $A \subset S$ i $A \in PS$ su ravnopravni i znače jedno te isto.

Radi se o tome da ispitamo da li je uredjeni par $(PS, \cup)$ grupoid; neka su A i B bilo koja dva elementa skupa PS, tj. neka je $A \in PS$ i $B \in PS$; prema gornjem to znači isto što i $A \subset S$ i $B \subset S$; treba ispitati da li i pripadni "iznos", tj. unija $A \cup B$ pripada skupu PS, tj. da li je $A \cup B \in PS$, ili, što je isto, da li je $A \cup B \subset S$?

Medjutim, $A \subset S$ i $B \subset S$ znači da svaki elemenat iz A, odnosno iz B pripada skupu S; kako unija $A \cup B$ sadrži samo one elemente koji su u A ili B, to je i svaki elemenat unije $A \cup B$ elemenat skupa S, što i znači da je $A \cup B \subset S$, tj. $A \cup B \in PS$, za čime se i išlo.

Pogledajmo kako izgleda radna tablica za specijalan slučaj kada je $S = \{a,b,c\}$:

(Vidi radnu tablicu na sledećoj strani)

Dobro prouči nastanak i strukturu date radne tablice; gore i levo naneseni su podaci tj. elementi skupa PS a ispod i desno pripadni "iznosi"; levim kažiprstom upri u levi podatak, desnim u gornji podatak, a pogledom traži pripadni "iznos".

Radeći analogno kao pod 1^0 dokaži da se i u slučajevima 2^0 i 3^0 radi o grupoidima; načini radne tablice za oba slučaja.

11. Promatraj funkcije: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$ i njihov skup $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$; je li skup S grupoid u odnosu na slaganje funkcija, tj. u odnosu na operaciju "$\circ$", ako je za neke dve funkcije, na primer, f i g, $(g\circ f)(x) = g(f(x))$, ili kraće: $g\circ f = g(f)$, tj. "iznos" funkcije f postaje "podatak" funkcije g?

Rešenje. Pre svega, pogledajmo šta će, na primer, biti $f_3\circ f_4$; prema gornjem, "iznos" funkcije f_4 treba uzeti za podatak funkcije f_3; no, po definiciji funkcije f_4 (gledaj šta je $f_4(x)$!) njen je iznos jednak $-\frac{1}{x}$; to je, dakle, podatak za funkciju f_3, tj. treba naći $f_3(-\frac{1}{x})$; u tu svrhu pogledajmo kako je definisana funkcija f_3, tj. kako se na neki podatak primenjuje "radnja" f_3; to je dato u samom zadatku: $f_3(x) = \frac{1}{x}$, ili rečima: na neki "podatak" radnja f_3 primenjuje se tako, da jedinicu podelimo tim "podatkom"; prema tome, ako radnju f_3 primenimo na naš "podatak" $-\frac{1}{x}$, što znači ako jedinicu podelimo tim podatkom, dobićemo da je $f_3(-\frac{1}{x}) = 1/(-\frac{1}{x}) = -x$; s druge strane, u samom zadatku stoji da je $-x$ isto što i $f_2(x)$, naime da je $f_2(x) = -x$.

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\boxed{\{b,c\}}$	$\{a,b,c\} = S$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b,a\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\boxed{\{a,b\}}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\boxed{\{a,b,c\}}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$

Zaključak: pošli smo od funkcije $f_3 \cdot f_4$ i došli do funkcije f_2, tj. iznos $f_3 \cdot f_4$ poklapa se sa elementom f_2 skupa S; dakle, u ovom slučaju, "radnja" "$\circ$" nas nije "izvela" iz polaznog skupa S.

Treba uraditi istu stvar i za preostale elemente skupa S. Uradi to za vežbu. Dobro razmisli o gornjem slaganju funkcija (iznos jedne funkcije postaje podatak druge itd.).

Uveri se u ispravnost sledeće radne tablice:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	$\boxed{f_4}$
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
$\boxed{f_3}$	f_3	f_4	f_1	$\boxed{f_2}$
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

12. Promatraj funkcije: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1-x$, $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_4(x) = \frac{1}{x}$, $f_5(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_6(x) = \frac{1}{1-x}$ i njihov skup $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$; je li skup S grupoid u odnosu na slaganje funkcija, tj. u odnosu na operaciju "$\circ$", ako $g \cdot f$ znači: umesto x u g(x) piši f, tj. "podatak" za g je "iznos" od f? Napravi radnu tablicu.

Rešenje. Jeste. Pogledajmo, na primer, šta će biti $f_2 \cdot f_6$; "iznos" od f_6 je (gledaj definiciju funkcije f_6!) $\frac{1}{1-x}$; taj iznos treba shvatiti kao "podatak" funkcije f_2; no, prema samom zadatku, imamo $f_2(x) = 1-x$, tj. primeniti "radnju" f_2 na neki podatak znači oduzeti taj podatak od jedinice; zato je $f_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{x-1}$ a to je upravo funkcija $f_5(x)$; prema tome, pošli smo od $f_2 \circ f_6$ i došli do f_5, tj. "iznos" $f_2 \circ f_6$ jednak je f_5 a to je elemenat skupa S.

Uradi ovo isto i za ostale elemente skupa S, pa se uveri da u ovom slučaju radna tablica izgleda ovako:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	$\boxed{f_6}$
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
$\boxed{f_2}$	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	$\boxed{f_5}$
f_3	f_3	f_5	f_6	f_2	f_4	f_1
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_3	f_2	f_6	f_1	f_4
f_6	f_6	f_4	f_1	f_5	f_6	f_3

Nije teško primetiti da je u svakom redu i svakom stubcu gornje tablice zastupljen svaki elemenat skupa S, tj. bilo koji red, odnosno stubac možemo shvatiti kao izvesnu od permutacija skupa S.

Uporedi gornju tablicu sa tablicom zadatka 11; vidimo da se na gornjoj tablici na glavnoj dijagonali ne nalazi samo funkcija f_1, već i f_6 i f_3, tj. slaganjem bilo koje od gornjih funkcija sa njom samom nije uvek funkcija f_1; tako, na primer, imamo da je $f_3 \circ f_3 = f_6$.

13. Posmatraj skup S svih realnih brojeva oblika sin x gde je x realan broj, tj. skup $S = \{\sin x \mid x \in R\}$; da li je taj skup grupoid u odnosu na sabiranje? A u odnosu na množenje?

Rešenje. Ispitajmo prvo da li je uredjeni par $(S,+)$ grupoid. Neka su sin x i sin y bilo koja dva elementa skupa S; treba da ispitamo da li i pripadni iznos, tj. zbir sin x + sin y takodje pripada skupu S; drugim rečima, treba da utvrdimo da li postoji takav realan broj $z \in R$ tako da bude $\sin x + \sin y = \sin z$ za svaka dva elementa sin x i sin y skupa S, ili, što je isto, za svaka dva realna broja x i y; tako, na primer, za $x = \pi$ i $y = \pi/4$ imamo $\sin \pi = 0$ i $\sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$ pa su brojevi 0 i $\sqrt{2}/2$ elementi skupa S;

i u odnosu na delenje ":".

P o l u g r u p a

1. Definiciju 2 polugrupe izreci stavljajući umesto: 1^o simbola f za operaciju simbol "+", odnosno ".", zatim "∘" te simbol "-"; 2^o umesto skupa G skup N a umesto simobla f za operaciju simbol +; 3^o skupa G skup R a umesto f "."; 4^o skupa G skup S a umesto f "*".

2. Ispitaj ponovo zadatak 3 o grupoidima. Da li se u onim slučajevima toga zadatka u kojima se radilo o grupoidima radi i o polugrupama? Posebno ispitaj slučaj da li je $(D,-)$ grupoid. A $(R,-)$? Tu je, naravno, D skup svih celih a R skup svih realnih brojeva, te "-" operacija oduzimanje.

3. Da li su uredjeni parovi $(PS,\cup)$, $(PS,\cap)$ i $(PS,\setminus)$, o kojima je reč u zadatku 10 o grupoidima, polugrupe.

Rešenje. Proverimo, na primer, da li je $(PS,\cup)$ polugrupa. Pre svega, ranije je pokazano da je to grupoid; prema definiciji 2 treba još proveriti da li je operacija $\cup$ u skupu PS asocijativna, tj. da li za bilo koja tri elementa A, B i C skupa PS (imaj na umu da su elementi skupa PS i sami skupovi, preciznije, podskupovi skupa S!) važi:

$$(1) \qquad (A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C).$$

A to je tačno. Šta više, skupovna jednakost(1) važi uopšte za ma koja tri skupa, pa će onda važiti i za naša tri skupa A, B i C. Dokaži to za vežbu. Imaj na umu da su dva skupa, na primer, X i Y jednaka tada i samo tada ako je svaki od njih sadržan u onom drugom, tj. ako je $X\subset Y$ i $Y\subset X$. Treba, dakle, dokazati prvo da je leva strana podskup desne, tj. da je svaki elemenat leve strane sadržan u desnoj, a zatim da je svaki elemenat desne strane sadržan u levoj, tj. da je cela desna strana sadržana u levoj. Radi!

Dakle, uredjeni par $(PS,\cup)$ je polugrupa. Isto je tako i $(PS,\cap)$ polugrupa. Dokaži to! Medjutim, par $(PS,\setminus)$ nije polugrupa, tj. skup PS u odnosu na odstranjivanje skupova nije polugrupa, iako jeste grupoid (vidi zadatak 10 o grupoidima!). Naime, operacija $\setminus$ medju elementima skupa PS nije asocijativna, tj. za bilo koja tri elementa A, B, C skupa PS ne važi:

$$(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\setminus C).$$

Tako, na primer, za konkretan slučaj skupa PS, gde je $S = \{1,2,3\}$ (vidi zadatak 10 o grupoidima!), ako uzmemo: $A = S = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3\}$ i $C = \{3\}$, biće

$$(A\setminus B)\setminus C = (\{1,2,3\}\setminus\{2,3\})\setminus\{3\} = (\{1\})\setminus\{3\} = \{1\},$$

$$(A\setminus(B\setminus C) = \{1,2,3\}\setminus(\{2,3\}\setminus\{3\}) = \{1,2,3\}\setminus\{2\} = \{1,3\}$$

a skupovi $\{1\}$ i $\{1,3\}$ nisu jednaki.

Uredjene parove o kojima je reč u ovom zadatku uporedi, na primer, redom sa uredjenim parovima $(D,+)$, $(D,.)$, $(D,-)$.

4. Promatraj ponovo skup $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ iz zadatka 11 o grupoidima. Pokazali smo da je on grupoid u odnosu na operaciju "∘" slaganja funkcija (vidi radnu tablicu zadatka 11 o grupoidima!). Ispitaj da li je taj grupoid asocijativan, tj. da li je uredjeni par $(S,\circ)$ polugrupa.

Rešenje. Jeste. Naime, za slaganje funkcija uopšte važi zakon asocijacije, tj. ako su f,g,h bilo koje tri funkcije za koje postoje složene funkcije $(f\circ g)\circ h$ i $f\circ(g\circ h)$ onda je

$$(1) \qquad (f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$$

(ispitaj poglavlje o funkcijama!). Tim pre će onda zakon asocijacije važiti za posebne četiri funkcije f_1,f_2,f_3,f_4. Dokažimo, na primer, da je $(f_2\circ f_4)\circ f_3 = f_2\circ(f_4\circ f_3)$; prvo

iz radne tablice zadatka 11 o grupoidima čitamo:
$f_2 \circ f_4 = f_3$ i $f_4 \circ f_3 = f_2$ pa prethodna jednakost postaje $f_3 \circ f_3 = f_2 \circ f_2$; no, iz iste tablice vidimo da je i $f_3 \circ f_3$ i $f_2 \circ f_2$ jednako f_1 pa je tvrdjenje dokazano.

Dokaži analogno da je, na primer, $(f_1 \circ f_2) \circ f_4 = f_1 \circ (f_2 \circ f_4)$ te $(f_4 \circ f_1) \circ f_3 = f_4 \circ (f_1 \circ f_3)$.

Ipak, vežbe radi, dokažimo jednakost (1) za bilo koje tri funkcije (pa dakle i za funkcije skupa S). Podjimo prvo od leve strane i pogledajmo šta se dobija kada se na neki "podatak" x primeni "radnja" $(f \circ g) \circ h$. Jedno za drugim imamo: "iznos" funkcije h, koji ćemo označiti jednostavno sa hx, jeste "podatak" funkcije $f \circ g$; sada "iznos" funkcije g, tj. $g(hx)$ postaje "podatak" funkcije f; konačni je iznos, dakle, jednak $f(g(hx))$, tj. važi

$$(2) \qquad \big((f \circ g) \circ h\big)(x) = f(g(hx)).$$

Podjimo sada od desne strane jednakosti (1) koju hoćemo dokazati i pogledajmo šta se dobije kada se na podatak x primeni "radnja" $f \circ (g \circ h)$. Slično kao u prethodnom, imamo: "iznos" funkcije $g \circ h$ postaje "podatak" funkcije f; još se radi o tome da utvrdimo šta nam je "iznos" funkcije $g \circ h$; a to se radi prema ranijoj shemi: $(g \circ h)(x) = g(hx)$; i na to treba primeniti "radnju" f; krajnji je "iznos", dakle, $f(g(hx))$; zato je

$$(3) \qquad \big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f(g(hx)).$$

U jednakostima (2) i (3) desne strane su identične, tj. jednake za svako x. No, tada i njihove leve strane moraju biti jednake za svako x (naravno iz oblasti definicije), pa mora biti

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

a to je upravo jednakost (1) koju smo i hteli dokazati (podseti se dobro kada kažemo da su dve funkcije jednake).

Dobro razmotri "ideju vodilju" koja nas je gore dovela do rezultata. Mi smo naprosto "dešifrovali" i levu i desnu stranu jednakosti (1) i kao rezultat u oba slučaja dobili istu veličinu. Vrati se ponovo na jednakost (1) iz prethodnog zadatka 3 pa i nju dokaži na sličan način, tj. "dešifrovanjem" njene i leve i desne strane.

5. Da li je skup $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ iz zadatka 12 o grupoidima polugrupa u odnosu na operaciju "$\circ$" slaganja funkcija?

<u>Uputstvo.</u> Vidi prethodni zadatak 4.

6. Posmatraj skup S', odnosno skup V, odnosno W iz zadatka 15, odnosno 16, odnosno 17 o grupoidima. Da li su oni polugrupe u odnosu na operaciju "$\circ$" slaganja permutacija?

<u>Uputstvo.</u> Primeti da se tu, ipak, radi o funkcijama (prouči ponovo zadatak 15 o grupoidima). Vidi prethodni zadatak 4.

7. Da li je skup $S = \{1, -1, i, -i\}$, iz zadatka 18 o grupoidima, polugrupa u odnosu na množenje? A u odnosu na delenje? Zašto on nije polugrupa u odnosu na sabiranje?

<u>Rešenje.</u> Nije teško proveriti da su $(S, \cdot)$ i $(S, :)$ grupoidi. Napravi radnu tablicu. Da li je grupoid $(S, \cdot)$ asocijativan? Jeste. Naime, ipak su elementi skupa S brojevi (možemo ih sve shvatiti kao kompleksne brojeve), pa pošto zakon asocijacije u odnosu na množenje važi za ceo skup kompleksnih brojeva, važiće on, tim pre, i za gornja četiri broja 1, -1, i, -i. Prema tome, $(S, \cdot)$ je i polugrupa.

Ispitajmo sada da li je i grupoid $(S, :)$ asocijativan. Znamo da skup svih realnih, pa ni kompleksnih brojeva nije asocijativan u odnosu na delenje; tako, na primer, $(8:4):2$ nije isto što i $8:(4:2)$. Medjutim, to još ne znači da ni skup S nije asocijativan u odnosu na delenje. Naime, treba ispitati da li možda, za ta specijalna četiri broja ipak važi zakon asocijacije. Tako je, na primer, $(1:1):1 = 1:(1:1)$

kao i $(i:1):(-1) = i:(1:(-1))$, ali je $(i:1):i \neq i:(1:i)$, jer je leva strana jednaka: $(i:1):i = i:i = 1$, a desna: $i:(1:i) = i:(-i) = -1$. Prema tome, grupoid $(S,:)$ nije asocijativan pa nije ni polugrupa.

Što se tiče uredjenog para $(S,+)$, on, iako je asocijativan, nije polugrupa iz razloga što nije ispunjen prvi i osnovni zahtev: on nije grupoid.

8. Promatraj skup $A = \{a,b\}$ sastavljen od dva proizvoljna elementa; u njemu su operacije "$\circ$", "$*$" i "$\odot$" zadate pomoću sledećih radnih tablica:

1^o

$\circ$	a	b
a	a	b
b	b	a

2^o

$*$	a	b
a	a	b
b	a	b

3^o

$\odot$	a	b
a	a	b
b	b	b

Jesu li uredjeni parovi $(A,\circ)$, $(A,*)$, $(A,\odot)$ polugrupe?

Rešenje. 1^o Iz same tablice sleduje da je $(A,\circ)$ grupoid, jer nas operacija "$\circ$", koja je tom tablicom i definisana, ne "izvodi" iz samog skupa A. Tako je, na primer, $(a\circ b)\circ(b\circ b)$ = (gledaj u tablicu 1^o koliko je $a\circ b$ i $b\circ b$) = $b\circ a$ = (sada gledaj koliko je $b\circ a$) = b, a to je elemenat skupa A.

Ispitajmo sada da li je taj grupoid asocijativan, tj. da li važi:

$$(1) \qquad (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z),$$

pri čemu su x,y,z elementi skupa A, tj. svaki od njih može biti bilo a bilo b. Evo šta sve može biti uredjena trojka (x,y,z): (a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), (b,a,a), (a,b,b), (b,a,b), (b,b,a), (b,b,b), dakle njih 8 ($=2^3$). Za svaku od tih trojki treba ispitati da li važi jednakost (1). Tako, na primer, za $(x,y,z)=(b,a,b)$ imamo da je leva strana jednakosti (1) jednaka:

$$(x\circ y)\circ z = (b\circ a)\circ b = (\text{gledaj tablicu } 1^o!) = b\circ b = a,$$

i slično za desnu stranu

$$x\circ(y\circ z) = b\circ(a\circ b) = (\text{gledaj tablicu } 1^o!) = b\circ b = a$$

pa u ovom slučaju jednakost (1) važi; isto tako, za $(x,y,z) = (a,b,b)$, biće:

$$(x\circ y)\circ z = (a\circ b)\circ b = b\circ b = a,$$
$$x\circ(y\circ z) = a\circ(b\circ b) = a\circ a = a$$

pa jednakost (1) važi i u ovom slučaju. Uveri se da ona važi i u preostalih šest slučajeva. Time će biti dokazano da je $(A,\circ)$ polugrupa.

Radeći analogno kao pod 1^o, dokaži da se i u slučajevima 2^o i 3^o radi o polugrupama.

Grupa

1. Izreci definiciju 3 grupe, stavljajući umesto: 1^o simbola f za operaciju, simbol "$\circ$", odnosno "$*$", zatim "+", te "."; 2^o skupa G skup N a umesto f "."; skupa G skup D a umesto f "+"; 3^o skupa G skup R a umesto f "+".

2. Promatraj skup $S = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$; je li on grupa u odnosu na sabiranje +? A u odnosu na množenje "."? Zašto?

Rešenje. Nije. Istina, skup S je asocijativan u odnosu na sabiranje (naime, tu se, ipak, radi o brojevima); on ima i neutralni elemenat; to je broj 0, jer ako sa x označimo bilo koji elemenat skupa S, biće $x + 0 = 0 + x = x$, tj. broj 0 je "neutralan" u odnosu na sabiranje; nadalje, svaki elemenat skupa S ima i svoj suprotni ili inverzni elemenat koji takodje pripada skupu S; drugim rečima, ako sa x označimo bilo koji elemenat skupa S, onda u skupu S postoji izvestan elemenat y takav da je $x + y = 0$

(=neutralni elemenat); taj elemenat y možemo označiti sa $-x$, da se naznači da je on u bliskoj vezi sa x; tako je, na primer, suprotni elemenat elementa 5 skupa S jednak -5, jer on, pre svega, pripada skupu S, a zatim za njega važi: $5+(-5)=0$; isto je tako suprotni elemenat elementa -4 skupa S sam broj 4, jer je 4 elemenat skupa S i važi $-4+4=0$ (=neutralni elemenat).

Prema tome, struktura $(S,+)$ je asocijativna, ima neutralni elemenat, te svaki elemenat skupa S ima svoj suprotni elemenat koji, takodje, pripada skupu S. Ipak, uredjeni par $(S,+)$ nije grupa. To je iz razloga što nije ispunjen prvi i osnovni zahtev: $(S,+)$ nije grupoid. Na primer, za "podatke" 5 i 4 koji su elementi skupa S, pripadni "iznos" ili zbir: $5+4=9$ nije u polaznom skupu S.

Radeći slično kao gore proveri koji od "grupovnih" "propisa" ili aksioma (gledaj definiciju 3 grupe!) važi u uredjenom paru $(S,.)$, tj. ispitaj šta je sa grupoidnošću (ili zatvorenošću), važi li zakon asocijacije u odnosu na ".", postoji li neutralni elemenat i koji, te najzad, ima li svaki elemenat x skupa S svoj inverzni elemenat, koji, u slučaju operacije ".", označujemo sa x^{-1}, da se vidi njegova bliska veza sa elementom x.

3. Promatraj skup $N=\{1,2,3,\dots\}$ svih prirodnih brojeva. Je li on grupa u odnosu na sabiranje + ? A u odnosu na množenje "."? U kome je slučaju zadovoljeno više "grupovnih" aksioma (gledaj definiciju 3 grupe!)?

4. Je li algebarska struktura $(D,+)$ grupa? Tu je D skup svih celih brojeva. A $(D\setminus\{0\},+)$? Zašto?

5. Dokaži da je uredjeni par $(Q,+)$ grupa. Je li to slučaj i sa $(Q,-)$? Zašto?

6. Jesu li uredjeni parovi $(5D,+)$ i $(5D,-)$ grupe? Tu je 5D skup svih celih brojeva oblika $5n$ tj. $5D=\{5n \mid n\in D\}$.

7. $(R,+)$ je grupa. Dokaži. Je li to slučaj i sa strukturom $(R,\cdot)$? A sa strukturom $(R\setminus\{0\},\cdot)$?

8. Promatraj skup $S=Q+Q\sqrt{2}$ svih brojeva oblika $p+q\sqrt{2}$ gde su p i q elementi skupa Q, tj. racionalni brojevi (vidi zadatak 3 o grupoidima).

Je li taj skup grupa u odnosu na sabiranje + ? A u odnosu na množenje "."?

Rešenje. $(S,+)$ jeste grupa. Dokaži to. Vidi zadatak 3 o grupoidima.

Ispitajmo da li je $(S,.)$ grupa.

1° Je li $(S,.)$ grupoid? Jeste. Naime, neka su x i y elementi skupa S; treba da ispitamo je li i pripadni "iznos", tj. proizvod $x.y$ elemenat skupa S; no, šta to zapravo znači da su x i y elementi skupa S? Znači (gledaj kako smo definisali skup S!) da i x i y moraju biti oblika: (racionalan broj) + (racionalan broj puta $\sqrt{2}$); zato možemo pisati

$$x=p+q\sqrt{2},\quad y=r+s\sqrt{2},$$

gde su p,q,r,s racionalni brojevi tj. elementi skupa Q.

Sada treba da ispitamo da li je i pripadni "iznos", tj. proizvod oblika: (racionalan broj) + (racionalan broj puta $\sqrt{2}$); zato računajmo:

$$x.y=(p+q\sqrt{2}).(r+s\sqrt{2}),$$

ili, nakon množenja i sredjivanja desne strane (radi!),

$$x.y=(pr+2qs)+(ps+qr)\sqrt{2}; \tag{1}$$

kako su brojevi p,q,r,s racionalni, biće to i brojevi $(pr+2qs)$ i $(ps+qr)$, iz razloga što je proizvod i zbir dva racionalna broja opet racionalan broj (tj. ako bi se hteli izražavati stručno, iz razloga što su $(Q,.)$ i $(Q,+)$ grupoidi); iz (1), dakle, sleduje da je i proizvod $x.y$ oblika: (racionalan broj) + (racionalan broj puta $\sqrt{2}$), te je, kao takav, i sam elemenat skupa S. Dakle, $(S,.)$ je grupoid.

2° Je li $(S,.)$ asocijativni grupoid, tj. je li to polugrupa? Jeste. Naime, zakon asocijacije važi, uopšte, za sve realne brojeve, pa će tim pre važiti i za soecijalne realne brojeve sadržane u S.

3° Ima li polugrupa $(S,.)$ neutralni elemenat, tj. postoji li u skupu S bar jedan elemenat, označimo ga sa e, takav da za svaki elemenat x skupa S važi: $e.x = x$ i $x.e = x$ (dakle takav elemenat koji bi bio neutralan u odnosu na množenje)? Ako takav elemenat postoji u skupu S, naravno da, i on mora biti oblika: (racionalan broj) + (racionalan broj puta $\sqrt{2}$).

Prva misao koja nam se nameće pri traženju takvog broja je (vidi prethodni zadatak 7): broj 1 je neutralan elemenat skupa svih realnih brojeva u odnosu na operaciju množenje, tj. za svaki realan broj x važi: $1.x = x.1 = x$; kako se i u našem slučaju radi o brojnom skupu i operaciji množenja, biće broj 1 neutralan elemenat para $(S,.)$; samo se radi još o tome da li broj 1 pripada skupu S, tj. da li je on oblika: (racionalan broj) + (racionalan broj puta $\sqrt{2}$)?; a on to jeste; naime, mi broj 1 možemo napisati u obliku: $1 = 1 + 0.\sqrt{2}$, a broj na desnoj strani je, očigledno, elemenat skupa S, jer su brojevi 1 i 0 racionalni. Prema tome, 1 je neutral polugrupe $(S,.)$.

4° Da li svaki elemenat $x = p + q\sqrt{2}$ skupa S ima svoj suprotni ili inverzni elemenat, u oznaci x^{-1}, koji je i sam elemenat skupa S, tj. oblika: (racionalan broj) + (racionalan broj puta $\sqrt{2}$), i za koji važi: $x.x^{-1} = 1$ (= neutralni elemenat)? Ispitajmo, dakle, da li za proizvoljno, ali fiksirano, $x = p + q\sqrt{2}$ iz S postoji $x^{-1} = r + s\sqrt{2}$ (p,q,r,s racionalni brojevi) takodje iz S, tako da bude:

$$(p + q\sqrt{2}).(r + s\sqrt{2}) = 1. \tag{2}$$

Budimo odmah na početku načisto sa sledećim: racionalne brojeve p i q smatramo poznatim a ispitujemo da li postoje, za te brojeve p i q, još dva racionalna broja r i s, tako da važi (2).

Nakon množenja leve strane u jednakosti (2) i kraćeg sredjivanja (radi!), dobijamo novu jednakost

$$(pr + 2qs - 1) + (qr + ps)\sqrt{2} = 0, \tag{3}$$

pa se naš posao sveo na to, da za date racionalne brojeve p i q, ispitamo da li postoje racionalni brojevi r i s tako da važi jednakost (3).

Ako bi koeficijent $(qr + ps)$ uz $\sqrt{2}$ bio različit od nule, broj na levoj strani jednakosti (3) bio bi iracionalan (zbog $\sqrt{2}$), dok je na desnoj strani racionalan broj (čak i ceo), što je, naravno, nemoguće; mora dakle, biti

$$qr + ps = 0; \tag{4}$$

sada jednakost (3) postaje

$$pr + 2qs - 1 + 0.\sqrt{2} = 0,$$

tj.

$$pr + 2qs = 1. \tag{5}$$

Ako bi bilo $p = q = 0$, iz (5) bi sledilo $0.r+2.0.s = 1$, tj. $0 = 1$, a to je apsurd. To, zapravo, znači da elemenat $0 + 0 . \sqrt{2}$ skupa $Q + Q\sqrt{2}$ ne može imati svoj inverzni elemenat $r+s\sqrt{2}$ ni za jedan par (r,s) racionalnih brojeva r i s. Prema tome, skup $Q + Q\sqrt{2}$ nije grupa u odnosu na množenje.

Ipak, pokušajmo spasiti bar nešto. Videli smo da nas jedino nepostojanje inverznog elementa za elemenat $0 + 0 . \sqrt{2}$ skupa $Q + Q\sqrt{2}$ sprečava da skup $Q+Q\sqrt{2}$ proglasimo množidbenom grupom. Pa da, onda, isključimo taj elemenat $0+0.\sqrt{2} = 0$, i posmatramo skup $Q+Q\sqrt{2} \setminus \{0\}$. Da li je, možda, već on grupa u odnosu na množenje? Jeste. Naime, sve što je do sada rečeno za uredjeni par $(Q+Q\sqrt{2},.)$ važi i za uredjeni par $(Q+Q\sqrt{2} \setminus \{0\},.)$. Treba, dakle, još jedino ispitati da li svaki elemenat skupa $Q+Q\sqrt{2} \setminus \{0\}$ ima svoju suprotnu vrednost, tj. svoj inverzni elemenat.

Iz (4) i (5) (shvati to kao dve linearne jednačine sa dve nepoznanice r i s!) sleduje

$$(6) \qquad r = \frac{-p}{2q^2-p^2}, \qquad s = \frac{q}{2q^2 \cdot p^2}, \quad (p,q \neq 0).$$

Pre svega, primetimo da je za $p \neq 0 \neq q$, uvek $2q^2-p^2 \neq 0$, tj. da u skupu $Q+Q\sqrt{2}\setminus\{0\}$ gornji razlomci uvek imaju smisla (uvek su definisani). Zaista, ako bi bilo $2q^2-p^2 = 0$, tj. $p^2 = 2q^2$, ili, nakon korenovanja, $p = \pm q\sqrt{2}$, na levoj strani bio bi racionalan broj p, a na desnoj (u slučaju da je $q \neq 0$) iracionalan broj $q\sqrt{2}$, što je, naravno, nemoguće. Ako je, pak, $q = 0$, tada bi zbog $p = \pm q\sqrt{2}$, moralo biti i $p = 0$, što je nemoguće, jer tačka ili broj $p + q\sqrt{2} = 0+0.\sqrt{2}$ ne pripada skupu $Q+Q\sqrt{2}\setminus\{0\}$. Dakle, u skupu $Q+Q\sqrt{2}\setminus\{0\}$ mora biti $2q^2-p^2 \neq 0$, pa su u tom skupu brojevi r i s potpuno odredjeni sa (6).

Kako su brojevi p i q po pretpostavci racionalni, racionalni su i brojevi r i s dati sa (6), jer se dobijaju iz p i q pomoću sabiranja, oduzimanja, množenja i delenja (nula isključena!).

Vrati se ponovo na početak ove tačke 4^0, pa dobro pogledaj šta se dobilo i šta se tražilo.

Prema tome, svaki elemenat skupa $Q+Q\sqrt{2}\setminus\{0\}$ ima svoj inverzni elemenat koji takodje pripada skupu $Q+Q\sqrt{2}\setminus\{0\}$. Pri tome, ako je $x = p+q\sqrt{2}$ bilo koji elemenat skupa $Q+Q\sqrt{2}\setminus\{0\}$, njegov inverzni elemenat x^{-1} je jednak (gledaj (6)!):

$$x^{-1} = \frac{-p}{2p^2-p^2} + \frac{q}{2q^2-p^2} \cdot \sqrt{2} .$$

Uveri se da je zaista: $x.x^{-1} = 1$ (= neutralni elemenat), tj. da važi

$$\left(p + q\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{-p}{2q^2-p^2} + \frac{q}{2q^2-p^2} \cdot \sqrt{2}\right) = 1.$$

Radi postepeno.

Na osnovu dokazanog pod 1^0, 2^0, 3^0 i 4^0, zaključujemo da je uredjeni par $(Q+Q\sqrt{2}\setminus\{0\},\cdot)$ grupa, dok $(Q+Q\sqrt{2},\cdot)$ to nije.

Ako se u gornjem zadatku umesto skupa Q stavi skup D, tj. ako se posmatra skup $D+D\sqrt{2}$ svih brojeva oblika $m+n\sqrt{2}$, gde su m i n celi brojevi, ispitaj da li će se i u tom slučaju raditi o grupama u odnosu na operacije + i $\cdot$.

Isto pitanje ako se umesto skupa Q stavi skup R svih realnih brojeva.

Ako sa $T = Q+Q\sqrt{5}$ označimo skup svih brojeva oblika $p+q\sqrt{5}$, gde su p i q racionalni brojevi, radeći analogno kao u prethodnom zadatku, dokaži da su uredjeni parovi $(T,+)$ i $(T\setminus\{0\},\cdot)$ grupe, dok to uredjeni par nije.

9. Neka je S neprazan skup i PS partitivni ili dioni skup skupa S; je li neki od uredjenih parova: $(PS,\cup)$, $(PS,\cap)$, $(PS,\setminus)$ grupa?

Ispitaj prethodno zadatak 10 o grupoidima i zadatak 3 o polugrupama.

Rešenje. Ispitajmo, na primer, je li $(PS,\cup)$ grupa. U zadatku 3 o polugrupama dokazali smo da je $(PS,\cup)$ asocijativni grupoid, tj. polugrupa; ima li ta polugrupa neutralni elemenat, tj. postoji li bar jedan elemenat E skupa PS, ili, drugim rečima, bar jedan podskup E skupa S (ispitaj dobro zadatak 10 o grupoidima!) takav da za svaki elemenat A skupa PS, ili, drugim rečima, za svaki podskup A skupa S važi: ako za "podatke" uzmemo skupove E i A ili A i E, iznos je sam skup A, što se može zapisati ovako

$$E\cup A = A\cup E = A, \quad \forall A \in PS.$$

Očigledno je da za skup E možemo uzeti prazan skup $\emptyset$, koji je po definiciji elemenat partitivnog skupa PS; naime, za svaki skup X, pa dakle i za svaki skup $A \in PS$, važi: $\emptyset \cup X = X\cup\emptyset = X$ (dokaži to! Dobro se podseti kada su dva skupa jednaka!).

Prema tome, polugrupa $(PS,\cup)$ ima neutralni elemenat; to je prazan skup $\emptyset$.

Na kraju, ispitajmo da li u toj polugrupi svaki elemenat A (drži uvek na umu da su elementi skupa PS podskupovi skupa S) ima svoju suprotnu vrednost, tj. da li za bilo koji uočeni "podatak" A iz skupa PS možemo naći još jedan "podatak" B istog skupa PS, tako da pripadni "iznos", tj. unija skupova A i B, bude neutralni elemenat polugrupe $(PS, \cup)$, tj. prazan skup $\emptyset$, ili, formalizovano, da li za svako $A \in PS$, postoji $B \in PS$, tako da bude: $A \cup B = \emptyset$; medjutim, kako je pretpostavljeno da je skup S neprazan, to postoji bar jedan podskup A skupa S (na primer, sam skup S, koji po pretpostavci pripada skupu PS), pa leva strana jednakosti $A \cup B = \emptyset$ nije prazan skup za $A = S$, pa makar B bilo jednako i $\emptyset$ (prazno!); prema tome, elemenat S skupa PS nema svoj inverzni elemenat S^{-1}, tj. svoju suprotnu vrednost S^{-1} za koju bi važilo: $S \cup S^{-1} = \emptyset$, pa polugrupa $(PS, \cup)$, iako ima neutralni elemenat, nije grupa (ispitaj definiciju 3 grupe!).

Radeći analogno kao u prethodnom, dokaži da je i $(PS, \cap)$ polugrupa (vidi zadatak 3 o polugrupama!) koja takodje ima neutralni elemenat; to je sam skup S; naime, za svaki elemenat A skupa PS važi $A \cap S = S \cap A = A$, tj. ako za podatke uzmemo A i S, pripadni "iznos", tj. presek $A \cap S$ je opet podatak A (dakle, "podatak" S deluje "neutralno" u skupu PS u odnosu na operaciju $\cap$); dokaži prethodnu jednakost: $A \cap S = A$ koja važi za svaki elemenat A skupa PS, ili, drugim rečima, za svaki podskup A skupa S.

Ipak, $(PS, \cap)$ nije grupa. Razlog je isti kao i u prethodnom slučaju. Dokaži to.

U zadatku 3 o polugrupama videli smo da $(PS, \setminus)$ nije asocijativni grupoid, tj. polugrupa. Tim pre se onda tu ne može raditi o grupi. Najzad, ima li grupoid $(PS, \setminus)$ neutralni elemenat? Je li to, možda, prazan skup $\emptyset$? Nije. Istina, za svaki elemenat A skupa PS, tj. za svaki podskup A <u>nepraznog</u> skupa S, važi: $A \setminus \emptyset = A$, tj. za <u>uredjeni</u> par "podataka" $(A, \emptyset)$, pripadni "iznos" $A \setminus \emptyset$ je sam podatak A; medjutim, ako podjemo od istih podataka A i $\emptyset$ ali u obrnutom redosledu, tj. od <u>uredjenog</u> para $(\emptyset, A)$, pripadni "iznos" je jednak: $\emptyset \setminus A = \emptyset$, a to ne mora biti jednako sa A, jer skup A

ne mora biti prazan (na primer, ako za A uzmemo sam skup S koji je po pretpostavci neprazan); prema tome, elemenat $\emptyset$ skupa PS, ne deluje "neutralno" i sa "leva" i sa "desna" na svaki "podatak" A skupa PS, pa, prema tome, on ne može biti neutralan elemenat grupoida $(PS, \setminus)$ (ispitaj definiciju 3 grupe!). Dokaži, analogno prethodnom, da ni jedan elemenat skupa PS ne može biti neutralan u odnosu na odstranjivanje skupova " $\setminus$ ".

U samom zadatku pretpostavljeno je da je skup S neprazan, tj. da ima bar jedan elemenat. Ako je, pak, skup S prazan, tj. $S = \emptyset$, pripadni partitivni skup PS je jednočlan: $PS = \{\emptyset\}$. Dokaži da se u sva tri slučaja ovog zadatka, ipak, radi o grupama.

10. Posmatraj funkcije $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4 = -\frac{1}{x}$ i njihov skup $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Je li taj skup S grupa u odnosu na operaciju "$\circ$" slaganja funkcija? Ispitaj zadatak 11 o grupoidima i zadatak 4 o polugrupama.

<u>Rešenje.</u> U zadatku 4 o polugrupama videli smo da je $(S, \circ)$ polugrupa.

Treba još ispitati da li u toj polugrupi postoji neutralan elemenat, a zatim, da li svaki elemenat skupa S ima svoj inverzni elemenat koji takodje pripada skupu S. U tu svrhu napravimo ponovo radnu tablicu kao u zadatku 11 o grupoidima:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Iz tablice se neposredno vidi da je: $f_1 \circ f_1 = f_1$, $f_1 \circ f_2 = f_2$,

$f_1 \circ f_3 = f_3$, $f_1 \circ f_4 = f_4$, te $f_1 \circ f_1 = f_1$, $f_2 \circ f_1 = f_2$, $f_3 \circ f_1 = f_3$, $f_4 \circ f_1 = f_4$, tj. elemenat f_1 skupa S je "neutralan" i sa "leva" i sa "desna" u odnosu na operaciju "$\circ$" slaganja funkcija. Primetimo samo da smo gornje jednakosti mogli kraće zapisati ovako: $f_1 \circ f_i = f_i$ te $f_i \circ f_1 = f_i$ pri čemu $i \in \{1,2,3,4\}$. Dakle, f_1 je neutralan elemenat polugrupe $(S, \circ)$.

Ima li svaki elemenat skupa S svoj inverzni elemenat (koji, takodje, treba da je u S)? Pokušajmo stvar ispitati za elemenat $f_2 \in S$; treba, dakle, ispitati da li za neki elemenat, označimo ga sa f, skupa S važi: $f_2 \circ f = f_1$ (=neutralni elemenat), te $f \circ f_2 = f_1$ (=neutralni elemenat). Koristimo se priloženom tablicom i to ovako: levim kažiprstom uprimo u naš "podatak" f_2 koji je smešten levo, zatim, u redu u kome je smešten taj podatak f_2 pogledom potražimo neutralni elemenat f_1 (ako ga taj red sadrži!), te od toga mesta gde je f_1 desnim kažiprstom uprimo u odgovarajući elemenat skupa S (koji je smešten gore vodoravno); to je, takodje, f_2; dakle je $f_2 \circ f_2 = f_1$ (=neutralni elemenat), pa je elemenat f_2 sam sebi inverzan.

Zaključi, analogno, da su i elementi f_1, f_3, f_4 sami sebi inverzni. Time će biti dokazano da svaki elemenat skupa S ima svoj suprotni ili inverzni elemenat.

Dakle, $(S, \circ)$ je grupa.

Je li grupa $(S, \circ)$ komutativna, tj. važi li u skupu S zakon komutacije u odnosu na slaganje funkcija. Podseti se da taj zakon ne važi uopšte za slaganje funkcija, tj. nije uvek: $f \circ g = g \circ f$. Ipak, da li taj zakon, možda, važi za gornje četiri specijalne funkcije: f_1, f_2, f_3, f_4. Sa radne tablice pročitaj koliko je, na primer, $f_3 \circ f_4$ i $f_4 \circ f_3$ pa uporedi rezultate.

Dobro prouči kako se sa gornje tablice proveravaju aksiome grupe: 1° grupoidnost, 2° postojanje neutralnog elementa, 3° postojanje inverznih elemenata. Asocijativnost se ne može proveriti neposredno iz radne tablice, već to treba posebno ispitati.

11. Promatraj funkcije: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = 1-x$, $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_5(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$ i njihov skup $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_6\}$; je li skup S u odnosu na operaciju "$\circ$" slaganja funkcija?

Ispitaj, prethodno, zadatak 12 o grupoidima te zadatak 4, odnosno 5 o polugrupama.

Uputstvo. Uveri se da radna tablica izgleda ovako (vidi zadatak 12 o grupoidima):

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

U zadatku 5 o polugrupama videli smo da je $(S, \circ)$ polugrupa; analogno prethodnom zadatku uveri se, pomoću prethodne tablice, da je f_1 neutralni elemenat te polugrupe, te da su elementi f_1, f_2, f_3, f_6 sami sebi inverzni; nadalje, inverzni elemenat elementa f_4 je f_5, i obrnuto, inverzni elemenat elementa f_5 je f_4. Prema tome, uredjeni par $(S, \circ)$ je grupa.

12. Je li skup $S = \{1, -1, i, -i\}$, gde je imaginarna jedinica (dakle, $i^2 = -1$), grupa u odnosu na množenje?

Uputstvo. Ispitaj, prethodno, zadatak 7 o polugrupama. Uveri se da radna tablica izgleda ovako:

∘	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	[illegible]	1	-1

pa, slično kao u prethodna dva zadatka, dokaži da je 1 neutralni elemenat polugrupe $(S,\cdot)$, te da su elementi 1 i -1 sami sebi inverzni, dok su elementi <u>i</u> i <u>-i</u> uzajamno inverzni, tj. -i je inverzni elemenat od i, i obrnuto, i je inverzni elemenat od -i.

13. Promatraj skup $S = \{1,2,3\}$ i pripadni skup S! svih permutacija skupa S. Dokaži da je skup S! grupa u odnosu na operaciju "∘" slaganje permutacija.

<u>Rešenje.</u> Prouči ponovo zadatak 15 o grupoidima i zadatak 6 o polugrupama. U njima smo dokazali da je uredjeni par $(S!,\circ)$ polugrupa.

Ako uvedemo oznake:

$p_1 = 123,\ p_2 = 132,\ p_3 = 213,\ p_4 = 231,\ p_5 = 312,\ p_6 = 321,$

tada radna tablica uz zadatak 15 o grupoidima postaje:

∘	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_5	p_6	p_3	p_4
p_3	p_3	p_4	p_1	p_2	p_6	p_5
p_4	p_4	p_3	p_6	p_5	p_1	p_2
p_5	p_5	p_6	p_2	p_1	p_4	p_3
p_6	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1

Sa tablice se neposredno vidi (kako?!) da je p_1, tj. permutacija 123, neutralni elemenat polugrupe $(S!,\cdot)$. Nadalje je:

$$p_1\circ p_1 = p_1,\ p_2\circ p_2 = p_1,\ p_3\circ p_3 = p_1,\ p_6\circ p_6 = p_1,$$

te

$$p_4\circ p_5 = p_1,\ p_5\circ p_4 = p_1,$$

pa pošto je p_1 neutralni elemenat, to su permutacije p_1, p_2, p_3, p_6, same sebi inverzne, dok su permutacije p_4 i p_5 uzajamno inverzne.

Prema tome, polugrupa $(S!,\cdot)$ ima neutralni elemenat i svaki elemenat skupa S! ima svoj inverzni elemenat, pa je $(S!,\cdot)$ i grupa.

<u>Primedba.</u> Uporedi gornju tablicu zadatka 13 sa prethodnom tablicom zadatka 11.

14. Promatraj skup $V = \{1234,\ 2143,\ 3412,\ 4321\}$ od četiri specijalne permutacije skupa $\{1,2,3,4\}$. Dokaži da je taj skup grupa u odnosu na operaciju "." slaganja permutacija.

<u>Uputstvo.</u> Prouči ponovo zadatak 16 o grupoidima i zadatak 6 o polugrupama. Iz njih sledi da je $(V,\cdot)$ polugrupa. Nadalje, ako uvedemo oznake:

$$p_1 = 1234,\ p_2 = 2143,\ p_3 = 3412,\ p_4 = 4321.$$

uveri se da radna tablica izgleda ovako:

∘	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_1	p_4	p_3
p_3	p_3	p_4	p_1	p_2
p_4	p_4	p_3	p_2	p_1

Pomoću tablice dokaži da je p_1 neutralni elemenat, te da je svaki elemenat skupa V sam sebi inverzan (vidi prethodne zadatke!).

Proveri je li gornja grupa $(V,\cdot)$ komutativna. Na primer, je li $p_3 \cdot p_4$ isto što i $p_4 \circ p_3$, i slično za ostale parove?

15. Promatraj skup $K = \{e,a,b,c\}$ od četiri proizvoljna elementa. U skupu K je zadata operacija (tj. pravilo računanja) pomoću sledeće radne tablice:

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

To znači da ako za "podatke" uzmemo, na primer, b i c (i to tim redom!), onda se pripadni "iznos" $b \circ c$ čita sa tablice; to je elemenat a.

Prihvatajući kao poznato da u skupu K važi zakon asocijacije u odnosu na operaciju "$\circ$", dokaži da je $(K,\circ)$ grupa. Uveri se takodje, da je ta grupa komutativna, te da je, na primer, $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.

Primedba. Grupa $(K,\cdot)$ iz gornjeg zadatka zove se Klajnova "četvorna grupa". Nije teško videti da je i grupa $(V,\circ)$, o kojoj je reč u prethodnom zadatku 14, jedna Klajnova grupa.

16. Promatraj skup $W = \{0123, 0132, 0213, 0231, 0312, 0321\}$ sastavljen od šest posebnih permutacija skupa $\{0,1,2,3\}$. Dokaži da je on grupa u odnosu na operaciju "$\circ$" slaganja permutacija.

Uputstvo. Ispitaj prethodno zadatak 17 o grupoidima i zadatak 6 o polugrupama, pa dalje postupi slično kao u zadatku 13. Uporedi radne tablice zadatka 13 i ovog

zadatka 16.

17. Promatraj ponovo zadatak 8 o polugrupama. Uverili smo se da su uredjeni parovi: $(A,\circ)$, $(A,*)$, $(A,\odot)$ polugrupe. U kojim slučajevima se tu radi o grupama?

Rešenje. $(A,\circ)$ je grupa. Tu je a neutralni elemenat, dok je svaki od elemenata a i b sam-sebi inverzan.

$(A,*)$ nije grupa jer nema neutralni elemenat. Naime, kada bi elemenat a bio neutralni, moralo bi biti

$$b*a = a*b = b,$$

a to u našem slučaju nije, jer je $b*a = a$, dok je $a*b = b$ (gledaj tablicu 2° iz zadatka 8 o polugrupama!). Iz istih razloga ni b nije neutralni elemenat polugrupe $(A,*)$.

Ni $(A,\odot)$ nije grupa. Istina, polugrupa $(A,\odot)$ ima neutralni elemenat. To je elemenat a, što se neposredno vidi sa tablice 3° iz zadatka 8 o polugrupama. Medjutim, elemenat b nema svoj inverzni elemenat. Zaista, ako bi to bio elemenat a, moralo bi biti

$$b\odot a = a \text{ (=neutralni elemenat)},$$

a to nije, jer je prema pomenutoj tablici $b\odot a = b$. Isto tako, ni b nije inverzan sa samim sobom, jer bi moralo biti

$$b\odot b = a \text{ (=neutralni elemenat)},$$

što, očigledno, nije, jer je $b\odot a = b\ (\neq a)$.

18. Promatraj jednačinu $x^3 = 1$ i skup X njenih rešenja. Dokaži da je skup X komutativna grupa u odnosu na množenje $\cdot$

Rešenje. Jednačina $x^3 = 1$ je ekvivalentna sa jednačinom $x^3-1 = 0$, odnosno rastavljajući levu stranu na faktore kao razliku kubova, sa jednačinom

$$(x-1)\cdot(x^2+x+1) = 0.$$

Iz poslednje jednačine sleduje:

$$x-1 = 0 \vee x^2+x+1 = 0,$$

i konačno

(1) $x_0 = 1,\ x_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Prema tome, skup X je dat sa $X = \{x_0, x_1, x_2\}$, pri čemu su x_0, x_1 i x_2 kompleksni brojevi definisani sa (1). Evo kako izgleda radna tablica za algebarsku strukturu $(X,\cdot)$:

$\cdot$	x_0	x_1	x_2
x_0	x_0	x_1	x_2
x_1	x_1	x_2	x_0
x_2	x_2	x_0	x_1

Sa tablice se neposredno vidi da je $(X,\cdot)$ grupoid. Taj grupoid je i asocijativan, jer su njegovi elementi kompleksni brojevi, a za skup kompleksnih brojeva, uopšte, važi zakon asocijacije. Dakle, $(X,\circ)$ je polugrupa. Ta polugrupa ima i neutralni elemenat. To je x_0, tj. broj 1 (gledaj tablicu!). Nadalje, elemenat x_0 je sam sebi inverzan, dok su elementi x_1 i x_2 uzajamno inverzni. Prema tome, $(X,\cdot)$ je grupa.

Grupa $(X,\cdot)$ je komutativna, tj. za bilo koja dva elementa a i b skupa X važi: $a\cdot b = b\cdot a$. To se može proveriti posebno za svaki par elemenata skupa X, a može se zaključiti, neposredno, sa gornje tablice na sledeći način: ako su elementi skupa, za koji hoćemo da utvrdimo da li u njemu važi zakon komutacije u odnosu na izvesnu operaciju, poredjeni u istom redosledu gore horizontalno i levo vertikalno u radnoj tablici, tada, ako je ta tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu (to je ona koja ide od početka do kraja tablice), taj skup je komutativan u odnosu na tu operaciju.

Kako je naša tablica za grupu $(X,\cdot)$ simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, to je, prema gore rečenom, grupa $(X,\cdot)$ komutativna. Ovim je tvrdjenje dokazano.

19. Promatraj skup $M = \{e,p,q\}$ od tri posebne permutacije: $e = 123$, $p = 312$, $q = 231$ skupa $\{1,2,3\}$. Dokaži da je skup M grupa u odnosu na operaciju "$\circ$" slaganja (množenja) permutacija.

<u>Uputstvo.</u> Uveri se da radna tablica izgleda ovako:

$\cdot$	e	p	q
e	e	p	q
p	p	q	e
q	q	e	p

pa pomoću nje dokaži tvrdjenje zadatka.

20. Promatraj skup $T = \{0,1,2\}$ i u njemu operaciju "sabiranje modulo 3" u oznaci "$+_3$". To znači sledeće: ako uzmemo za podatke dva elementa skupa T čiji je obični zbir manji od 3, onda je i njihov "zbir modulo 3" jednak tome običnom zbiru; na primer, ako za "podatke" uzmemo elemente 0 i 1 skupa T, njihov obični zbir je $0+1=1$, dakle, manji od 3, pa je zato i njihov "zbir modulo 3" jednak tome običnom zbiru, tj. $0 +_3 1 = 1$; iz istih je razloga i: $1 +_3 1 = 2$, te $0 +_3 2 = 2$, i slično za ostale parove podataka čiji je zbir manji od 3.

Medjutim, ako je obični zbir neka dva broja iz skupa T veći ili jednak sa 3, onda se za "zbir modulo 3" tih elemenata uzima razlika toga običnog zbira i broja 3; na primer, ako za podatke uzmemo 2 i 2, obični je zbir jednak $2+2=4$, što je veće od 3, pa je odgovarajući "zbir modulo 3" jednak: $2 +_3 2 = 2+2-3 = 4-3 = 1$, a to je opet elemenat skupa T. Eto, tako se u skupu $\{0,1,2\}$ vrši "sabiranje modulo 3".

Dokaži da je algebarska struktura $(T,+_3)$ komutativna grupa.

<u>Rešenje.</u> Evo kako izgleda radna tablica:

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Sa tablice se neposredno vidi da je $(T,+_3)$ grupoid. Broj 0 je neutralni elemenat, jer je (gledaj tablicu!):

$$0 +_3 0 = 0,\ 0 +_3 1 = 1 +_3 0 = 1,\ 0 +_3 2 = 2 +_3 0 = 2.$$

Inverzni elementi elemenata 0,1,2 jesu, redom, 0,2,1; zaista, imamo da je:

$$0 +_3 0 = 0,\ 1 +_3 2 = 2 +_3 1 = 0 \ (\text{=neutralni elemenat}).$$

Konačno, u skupu T važi zakon asocijacije u odnosu na operaciju "$+_3$" sabiranja modulo 3. To se može direktno proveriti koristeći se gornjom tablicom za brže računanje (asocijativnost se ne može neposredno ustanoviti pomoću radne tablice, kao, na primer, komutativnost). Dokažimo, na primer, da je $(2+_3 1)+_3 2 = 2+_3(1+_3 2)$; zaista, leva strana je jednaka:

$$(2+_3 1)+_3 2 = (\text{gledaj tablicu!}) = 0+_3 2 = 2,$$

a desna

$$2+_3(1+_3 2) = (\text{gledaj tablicu!}) = 2+_3 0 = 2,$$

i zato

$$(2 +_3 1) +_3 2 = 2 +_3 (1 +_3 2),$$

što smo i hteli dokazati. Ovim smo pokazali samo da asocijativni zakon važi za uredjenu trojku (2,1,2) elemenata skupa T. Nije teško proveriti da on važi i za preostale trojke

elemenata skupa T.

Prema tome, $(T,+_3)$ je grupa. Da je ona komutativna sleduje iz simetričnosti gornje tablice u odnosu na glavnu dijagonalu.

21. Neka je $U = \{0,1,2,3\}$. Dokaži da je uredjena dvojka $(U,+_4)$, gde nam $+_4$ označava sabiranje modulo 4 (vidi prethodni zadatak!), grupa.

<u>Uputstvo.</u> Ispitaj prethodno gornji zadatak 20. Napravi radnu tablicu. Što se tiče asocijativnosti, zadovolji se za sada da je proveriš na nekim konkretnim slučajevima, na primer, za trojku (3,1,2).

22. Promatraj skup P svih izraza (polinoma) oblika $a_o+a_1x+a_2x^2$, pri čemu su a_o, a_1, a_2 celi brojevi, tj. skup P dat sa:

$$P = \{a_o + a_1x + a_2x^2 \mid a_o,\ a_1,\ a_2 \in D\}.$$

Je li taj skup grupa u odnosu na sabiranje?

<u>Rešenje.</u> 1^o $(P,+)$ je grupoid. Zaista, neka su $a_o+a_1x+a_2x^2$ i $b_o+b_1x+b_2x^2$ dva proizvoljna elementa skupa P; to znači da su brojevi a_o,a_1,a_2 i b_o,b_1,b_2 celi. Treba da dokažemo da je i pripadni "iznos" tj. zbir $(a_o+a_1x+a_2x^2)+(b_o+b_1x+b_2x^2)$ takodje elemenat skupa P. U tu svrhu, napišemo taj zbir u obliku:

(1) $$(a + a\ x+a\ x^2)+(b + b\ x+b\ x^2) = (a_o+b_o)+(a_1+b_1)x + +(a_2+b_2)x^2;$$

kako su brojevi a_o+b_o, a_1+b_1, a_2+b_2 celi, jer su takvi brojevi a_o, a_1, a_2 i b_o, b_1, b_2, na osnovu (1) zaključujemo da i zbir o kome je reč pripada skupu P. Dakle, $(P,+)$ je grupoid.

2^o $(P,+)$ je asocijativni grupoid, tj. $(P,+)$ je polugrupa. Zaista, neka su: $a = a_o+a_1x+a_2x^2$, $b = b_o+b_1x+b_2x^2$,

$c = c_0+c_1x+c_2x^2$ tri proizvoljna elementa skupa P; to znači da je svaki od brojeva a_1, b_1, c_1, gde je i = 0,1,2, ceo broj. Treba da dokažemo da važi zakon asocijacije:

$$(2) \qquad (a+b)+c = a+(b+c).$$

Da bismo to dokazali, izračunajmo vrednosti leve i desne strane jednakosti (2). Leva je strana jednaka:

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= \Big((a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)\Big) + (c_0+c_1x+c_2x^2)\\ &= \Big((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2\Big) + (c_0+c_1x+c_2x^2)\\ &= \Big((a_0+b_0)+c_0\Big) + \Big((a_1+b_1)+c_1\Big)x + \Big((a_2+b_2)+c_2\Big)x^2.\end{aligned}$$

Analogno se dobija da je desna strana jednaka:

$$a+(b+c) = \Big(a_0+(b_0+c_0)\Big) + \Big(a_1+(b_1+c_1)\Big)x + \Big(a_2+(b_2+c_2)\Big)x^2.$$

Kako je, dalje, $(a_i+b_i)+c_i = a_i+(b_i+c_i)$, gde i može biti bilo 0, bilo 1, ili 2, (ispiši svaki od tih slučajeva posebno!), jer zakon asocijacije važi u skupu D celih brojeva u odnosu na sabiranje, na osnovu gornjeg zaključujemo da i leva i desna strana imaju istu vrednost, čime bi jednakost (2) bila i dokazana.

3° Polugrupa (P,+) ima neutralni elemenat. To je broj 0. Naime, mi broj 0 možemo prikazati u obliku: $0 = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$, a to je očigledno elemenat skupa P. Jasno je da je 0 neutralni elemenat.

4° Svaki elemenat $a_0+a_1x+a_2x^2$ skupa P ima svoj inverzni elemenat. To je $-a_0-a_1x-a_2x^2$, jer je zbir ta dva elementa jednak nuli, tj. neutralnom elementu.

Dakle, (P,+) je grupa.

Ispitaj da li je gornja grupa (P,+) komutativna, tj. da li u skupu P važi zakon komutacije u odnosu na sabiranje njegovih elemenata.

23. Promatraj skup K svih kompleksnih brojeva, tj. skup K dat sa $K = \{x+iy \mid x\in R,\ y\in R,\ i = \sqrt{-1}\}$. Dokaži da je taj skup grupa u odnosu na sabiranje kompleksnih brojeva.

<u>Uputstvo.</u> Radi paralelno sa prethodnim zadatkom.

24. Dokaži da je skup $D+iD = \{m+in \mid m\in D,\ n\in D\ i = \sqrt{-1}\}$ komutativna grupa u odnosu na sabiranje.

<u>Uputstvo.</u> Primeti da je skup D+iD, zapravo, jedan podskup skupa K svih kompleksnih brojeva. Radi analogno kao u prethodna dva zadatka.

25. Promatraj skup $S = \{(x,y) \mid x\in R,\ y\in R\}$. U tome skupu uvodi se operacija (pravilo) sabiranja na sledeći način: ako su (x,y) i (a,b) dva proizvoljna elementa skupa S, pod njihovim **zbirom** podrazumeva se uredjen par (x+a,y+b); dakle, saberu se odgovarajuće koordinate uredjenih parova (x,y) i (a,b).

Dokaži da je struktura (S,+) komutativna grupa.

<u>Uputstvo.</u> Radi paralelno sa zadatkom 19.

26. Promatraj grupe $(X,\cdot)$ i $(M,\circ)$ iz prethodnih zadataka 18 i 19. Dokaži da su one izomorfne (vidi definiciju 8).

<u>Dokaz.</u> Treba da dokažemo da postoji obostrano jednoznačno preslikavanje $I: X\to M$ skupa $X = \{x_0,x_1,x_2\}$ <u>na</u> skup $M = \{e,p,q\}$, tako da slika (od preslikavanja I) bilo kog "iznosa" grupe $(X,\cdot)$ bude jednaka "iznosu" pojedinih slika u grupi $(M,\circ)$. Na primer, ako uzmemo za "podatke" elemente x_1 i x_2 skupa X, onda, jer je $(X,\cdot)$ grupa, u skupu X leži i njihov "iznos": $x_1\cdot x_2$ koji je jednak x_0 (gledaj tablicu uz zadatak 18); svaki od tih elemenata x_1, x_2 te $x_1\cdot x_2 = x_0$ treba da ima potpuno odredjene svoje slike $I(x_1)$, $I(x_2)$ te $I(x_1\cdot x_2) = I(x_0)$ koje pripadaju grupi $(M,\circ)$; pošto su $I(x_1)$ i $I(x_2)$ elementi skupa M, onda, jer je $(M,\circ)$ grupa, i njima odgovara potpuno odredjen "iznos" $I(x_1)\circ I(x_2)$ u odnosu na operaciju "∘" iz grupe $(M,\circ)$, koji takodje pripada skupu M. To je onaj "iznos" pojedinih slika, o kome smo već govorili i on treba da je jednak slici "iznosa" u grupi $(X,\cdot)$, tj. treba da bude

(1) $$I(x_1 \cdot x_2) = I(x_1) \circ I(x_2),$$

ili, zbog $x_1 \cdot x_2 = x_0$,

(2) $$I(x_0) = I(x_1) \circ I(x_2).$$

Još se radi o tome da vidimo šta ćemo uzeti za $I(x_0)$, $I(x_1)$ te $I(x_2)$; naravno, sva ta tri elementa treba da pripadaju skupu $M = \{e,p,q\}$ i posebno da budu različiti, jer za I tražimo da bude obostrano jednoznačno. U tome nam mnogo pomažu radne tablice grupa $(X,\cdot)$ i $(M,\circ)$ (gledaj tablice zadataka 18 i 19). Njihova očigledna sličnost navodi nas da stavimo da je: $I(x_0) = e$, $I(x_1) = p$ te $I(x_2) = q$, tj. da preslikavanje $I: X \to M$ definišemo ovako:

$$I = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ e & p & q \end{pmatrix}.$$

Ovako definisano preslikavanje I je, očigledno, obostrano jednoznačno i ono zadovoljava jednakost (2), koja se sada svodi na

$$e = p \circ q,$$

koja je tačna, što se neposredno proverava pomoću tablice uz zadatak 19. Samo se radi još o tome, da li će preslikavanje I da zadovoljava uslov:

$$I(a \cdot b) = I(a) \cdot I(b),$$

za bilo koje elemente a i b skupa X (tj. a i b mogu biti bilo x_0, ili x_1, odnosno x_2)? Proverimo još da li stvar važi, na primer, za $a = x_2$ i $b = x_0$, tj. da li je

$$I(x_2 \cdot x_0) = I(x_2) \circ I(x_0);$$

no, sa pomenute radne tablice neposredno čitamo da je

$x_2 \cdot x_0 = x_2$, i zato $I(x_2 \cdot x_0) = I(x_2) =$ (gledaj u šta I prevodi x_2!) $= q$; u drugu ruku imamo da je $I(x_0) = e$, pa se gornja jednakost svodi na

$$q = q \circ e,$$

što je, očigledno, tačno (gledaj tablicu uz zadatak 19). Dakle, i u ovom slučaju stvar je u redu.

Evo kako se gornje pitanje efikasno rešava pomoću radnih tablica grupa $(X,\cdot)$ i $(M,\circ)$ (ili, uopšte, algebarskih struktura sa konačno mnogo elemenata): pošto su elementi e,p,q grupe $(M,\circ)$ u njenoj radnoj tablici, tamo gde se nanose podaci, tj. gore horizontalno i levo vertikalno, raspoređeni na isti način kao i njima odgovarajući elementi x_0,x_1,x_2 u radnoj tablici grupe $(X,\cdot)$ (da to nije slučaj, mi bi formirali novu radnu tablicu grupe $(M,\circ)$, izmenivši redosled nanošenja elemenata skupa M, tako da to bude slučaj), treba proveriti da li i "iznosi" u tablici grupe $(M,\circ)$ zauzimaju ista mesta kao i njihovi originali u tablici grupe $(X,\cdot)$. Možemo to i ovako reći: ako jednu od tih tablica nadnesemo iznad druge, tako da se odgovarajući "podaci" skupova X i M nalaze jedan iznad drugog, da li se tada i u svim mestima tablicâ odgovarajući podaci, tj. elementi skupova X i Y nalaze jedni iznad drugih (a ne samo oni gore horizontalno i levo vertikalno!)! A to, očigledno, jeste.

Prema tome, grupe $(X,\cdot)$ i $(M,\circ)$ su izomorfne i preslikavanje I je izomorfizam.

Da bi stvar bolje shvatili, dokažimo da preslikavanje $J: X \to M$ skupa X na skupu M, definisano sa

$$J = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p & q & e \end{pmatrix}$$

tj. za koje je $J(x_0) = p$, $J(x_1) = q$ i $J(x_2) = e$, iako je obostrano i jednoznačno i preslikava skup X na skup M, ipak nije izomorfizam izmedju grupa $(X,\cdot)$ i $(M,\circ)$.

Da bismo to dokazali formirajmo novu radnu tablicu grupe $(M, \circ)$, nanoseći gore horizontalno i levo vertikalno u ovom redosledu: prvo p, zatim q i potom e, tj. u redosledu kojim su u tablici grupe $(X, \cdot)$ naneseni njima odgovarajući elementi x_0, x_1 i x_2 pri preslikavanju J.

Evo kako, sada, izgleda radna tablica grupe $(M, \circ)$:

$\circ$	p	q	e
p	q	e	p
q	e	p	q
e	p	q	e

Ako ovu radnu tablicu nadnesemo tj. (uporedimo) iznad radne tablice (tj. sa radnom tablicom) grupe $(X, \cdot)$, vidimo da se odgovarajući elementi skupova X i M u samoj tablici ne nalaze uvek jedan iznad drugog, iako se podaci tih tablica naneseni gore horinzontalno a levo vertikalno nalaze jedan iznad drugog, onako kako koji kome odgovara pri preslikavanju J. Tako, na primer, iznad srednjeg "iznosa" $x_1 \cdot x_1 = x_2$, koji se nalazi u sredini tablice za grupu $(X, \cdot)$, nalazi se "iznos" $q \circ p = p$ koji pri preslikavanju J ne odgovara pomenutom elementu x_2, jer je $J(x_2) = e$, a to je različito od p. Dakle, za preslikavanje $J\colon X \to M$ ne važi:

$$J(x_1 \cdot x_1) = J(x_1) \circ J(x_1),$$

jer je leva strana jednaka: $J(x_1 \cdot x_1) = J(x_2) = e$, a desna: $J(x_1) \circ J(x_1) = q \circ p = p$, a to dvoje nije jednako, jer su permutacije e i p različite, što se ne bi smelo desiti da je J izomorfizam. On to, dakle, nije.

27. Dokaži da su grupe $(M, \circ)$ i $(T, +_3)$, o kojima je reč u zadacima 19 i 20 izomorfne.

<u>Uputstvo.</u> Radi paralelno sa prethodnim zadatkom.

<u>Važna primedba.</u> Pri dokazivanju da je uredjeni par $(T, +_3)$ grupa, videli smo kako su se sve grupovne aksiome mogle proveriti neposredno sa radne tablice, osim

asocijativnosti koja je zahtevala posebno ispitivanje. Pri dokazu zadatka 20 nismo dali potpun dokaz da je struktura $(T, +_3)$ asocijativna, već smo to samo proverili za dva - tri konkretna slučaja. Medjutim, sada, kada znamo da je grupa $(M, \circ)$ izomorfna sa strukturom $(T, +_3)$, to, pošto je struktura $(M, \circ)$ asocijativna (što je poznato od ranije), biće to, zbog izomorfnosti tih struktura, i struktura $(T, +_3)$. Dakle, sad imamo potpun zaključak: algebarska struktura $(T, +_3)$ je asocijativna.

Tako se radi i u opštem slučaju, tj. ako se za neku strukturu $(X, \cdot)$ ne može direktno (ili, pak, nije lako) ispitati da li je ona asocijativna, komutativna i sl., onda se pokušava naći struktura $(Y, *)$ koja je izomorfna sa tom strukturom $(X, \cdot)$ i za koju znamo da je asocijativna, komutativna i sl. Tada, na osnovu toga, zaključujemo da je i struktura $(X, \cdot)$ asocijativna, komutativna i sl.

28. Grupe $(X, \cdot)$ i $(T, +_3)$, o kojima je reč u zadacima 18 i 20, jesu izomorfne. Dokaži.

<u>Uputstvo.</u> Ispitaj prethodna dva zadatka.

29. Promatraj ponovo grupe $(V, \circ)$ i $(K, \circ)$ iz zadataka 14 i 15. Jesu li one izomorfne?

<u>Uputstvo.</u> Jesu. Koristeći se radnim tablicama tih grupa, dokaži da je preslikavanje $I\colon V \to K$, dato sa

$$I = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ e & a & b & c \end{pmatrix}$$

izomorfizam.

30. Dokaži da grupe $(V, \circ)$ i $(S, \cdot)$, o kojima je reč u zadacima 14 i 12, nisu izomorfne.

<u>Dokaz.</u> Ispiši, prethodno, tablice tih grupa. Ako bi te grupe bile izomorfne, postojalo bi obostrano jednoznačno preslikavanje (izomorfizam) $I\colon V \to S$ skupa V <u>na</u> skup S tako da za svaka dva elementa a i b skupa V i njihov

"iznos" $a \circ b$ u grupi $(V, \circ)$, važi

$$(1) \qquad I(a \circ b) = I(a) \cdot I(b).$$

Kako u grupi $(V, \circ)$ postoji elemenat p_1 takav da je:

$$p_1 \circ p_1 = p_1, \; p_2 \circ p_2 = p_1, \; p_3 \circ p_3 = p_1, \; p_4 \circ p_4 = p_1,$$

to bi, u slučaju da je I izoromofizam gornjih grupa, na osnovu (1) i gornjih jednakosti, moralo biti:

$$(2) \qquad I(p_1) \cdot I(p_1) = I(p_1), \quad I(p_2) \cdot I(p_2) = I(p_1),$$
$$I(p_3) \cdot I(p_3) = I(p_1), \quad I(p_4) \cdot I(p_4) = I(p_1).$$

Pošto I preslikava skup V <u>na</u> skup S, to su $I(p_1)$, $I(p_2)$, $I(p_3)$ i $I(p_4)$ elementi skupa S, i to različiti, jer su takvi elementi p_1, p_2, p_3, p_4 skupa V, a preslikavanje $I: V \to S$ obostrano jednoznačno; to, zapravo, znači da oni iscrpljuju čitav skup S, tj. svaki je od njih ili 1, ili -1, ili i, odnosno -i.

Na osnovu toga i jednakosti (2), zaključujemo da i u grupi $(S, \cdot)$ postoji elemenat (to je onaj koji je jednak $I(p_1)$!), takav da je proizvod bilo kog broja iz skupa S jednak tome fiksnom broju.

Medjutim, sa radne tablice grupe $(S, \cdot)$, neposredno se proverava da u grupi $(S, \cdot)$ takav elemenat ne postoji. Naime, broj 1 to nije, jer je, na primer, $i \cdot i = -1$, a to je različito od 1; isto tako, to nije ni -1, odnosno i, te -i, jer je na primer, $1 \cdot 1 = 1$ $(\neq -1)$, $i \cdot i = -1$ ($\neq$ i od <u>i</u> i od -i); dakle, u grupi $(S, \cdot)$ ne postoji elemenat sa svojstvom da je proizvod bilo kog elementa skupa S sa samim sobom jednak tom elementu. Ovo je, pak, u kontradikciji sa prethodnim, jer ako je I izomorfizam izmedju grupa $(V, \circ)$ i $(S, \cdot)$, takav je elemenat $I(p_1)$ skupa S.

Na osnovu dobijene kontradikcije zaključujemo da je naša pretpostavka da postoji izomorfizam I izmedju grupa $(V, \circ)$ i $(S, \cdot)$ pogrešna. Dakle, ne postoji ni jedan izomorfizam

I izmedju grupa $(V, \circ)$ i $(S, \cdot)$, što i znači da te grupe nisu izomorfne. Ovim je tvrdjenje u potpunosti dokazano.

31. Grupe $(S, \cdot)$ i $(U, +_4)$, o kojima je reč u zadacima 12 i 21, su izomorfne.

<u>Uputstvo.</u> Napravi radne tablice. Dokaži da je preslikavanje $I: S \to U$, dato sa

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

izomorfizam izmedju tih grupa.

32. Grupe $(S, \cdot)$ i $(V, \circ)$, iz zadataka 10 i 14, jesu izomorfne. Dokaži.

33. Dokaži da su grupe $(S, \circ)$ i $(S', \circ)$, o kojima je reč u zadacima 11 i 13, izomorfne.

<u>Uputstvo.</u> Dokaži da je preslikavanje $I: S \to S'$, dato sa

$$I = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p_1 & p_3 & p_2 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix},$$

(oprez! f_2 prelazi u p_3, a f_3 u p_2!), izomorfizam. Formiraj novu tablicu za grupu $(S', \circ)$, pa postupi kao u zadatku 26.

34. Dokaži da su grupe $(S', \circ)$ i $(W, \circ)$ iz zadataka 13 i 16, izomorfne.

35. Promatraj algebarske strukture $(R^+, \cdot)$ i $(R, +)$, gde je: R^+ skup svih pozitivnih realnih brojeva, R skup svih realnih brojeva, a + i $\cdot$ obično sabiranje, odnosno množenje realnih brojeva. Dokaži da su te strukture izomorfne. Je li $(R^+, \cdot)$ grupa?

<u>Dokaz.</u> Činjenica da treba vršiti preslikavanje skupa R^+ svih pozitivnih brojeva na ceo skup R svih realnih

brojeva, navodi nas da potražimo neku obostrano jednoznačnu funkciju $I: R^+ \to R$, kojoj je domen skup R^+ pozitivnih realnih brojeva, a antidomen ceo skup R.

Jedna od takvih funkcija jeste i logaritam, tj.

$$I(x) = \log x, \quad x \in R^+. \tag{1}$$

Ona je definisana na celom skupu R^+ i prima svaku vrednost iz skupa R (ponovi definiciju i osobine logaritamske funkcije!). Samo se radi još o tome da se ispita da li je tako definisano preslikavanje I strukture $(R^+,\cdot)$ u strukturu $(R,+)$ izomorfizam, tj. da li je slika "iznosa" u $(R^+,\cdot)$ jednaka "iznosu" slika u $(R,+)$, ili, drugim rečima, da li za svako $x,y \in R^+$ važi:

$$I(x\cdot y) = I(x) + I(y).$$

Pa pogledajmo šta, zapravo, znači da se na neki podatak primeni "radnja" I. Znači: logaritmuj taj podatak. Dakle, gornja jednakost postaje

$$\log(x\cdot y) = \log x + \log y,$$

a to je tačno (seti se važne osobine logaritma: logaritam proizvoda dva pozitivna broja jednak je zbiru logaritama tih brojeva!).

Prema tome, preslikavanje I dato sa (1) jeste izomorfizam izmedju struktura $(R^+,\cdot)$ i $(R,+)$, pa su one izomorfne.

Pošto smo za jednu od tih struktura (to je $(R,+)$) već dokazali da je grupa, zbog njihove izomorfnosti biće to i druga od tih struktura (ispitaj primedbu posle zadatka 27). Naravno da se može i neposredno proveriti da je $(R^+,\cdot)$ grupa. Uradi to.

36. Promatraj, opet, grupe $(R,+)$ i $(R^+,\cdot)$ iz prethodnog zadatka. Dokaži da je i preslikavanje $J: R \to R^+$, dato sa

$$J(x) = a^x \quad (a>0), \qquad x \in R,$$

takodje izomorfizam izmedju grupa $(R,+)$ i $(R^+,\cdot)$.

37. Dokaži da je preslikavanje $A(x) = c\cdot x$, gde je c realna konstanta, automorfizam grupe $(R,+)$. Tu je x elemenat skupa R.

<u>Uputstvo.</u> Uoči da funkcija A, za c različito od 0, preslikava ceo skup R <u>na</u> samog sebe (primeti da je graf gornje funkcije upravo jedna prava), te da za svako $x,y \in R$ važi: $A(x+y) = c\cdot(x+y) = c\cdot x + c\cdot y = A(x) + A(y)$.

<u>**Prsten ili kolo**</u>

1. **Izreci** definiciju 4 stavljajući umesto: 1° simbolâ f i h za operacije, redom, simbole "$\circ$" i "$*$"; 2° skupa G skup R a **umesto f i h**, redom, "+" i "$\cdot$".

2. **Uredjena trojka** $(D,+,\cdot)$ je prsten. Dokaži. Tu je D skup **svih celih brojeva.**

3. **Dokaži da je uredjena trojka** $(R,+,\cdot)$ prsten. Tu je R skup **svih realnih brojeva.**

<u>Dokaz.</u> Neposredno se proverava da je $(R,+)$ komutativna grupa (vidi zadatak 7 o grupama!). Isto tako, očigledno je i $(R,\cdot)$ grupoid, jer je proizvod dva realna broja opet realan broj. Taj je grupoid i asocijativan, jer za množenje realnih brojeva važi zakon asocijacije. Dakle, $(R,\cdot)$ je polugrupa. Nadalje, množenje realnih brojeva je distributivno prema njihovom sabiranju, tj. za svaka tri realna broja a,b,c važi:

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \text{ (zakon distribucije!).}$$

Prema tome, pošto je skup R komutativna grupa u odnosu na prvu operaciju, tj. na sabiranje, polugrupa u odnosu na drugu operaciju, tj. množenje i pošto je druga operacija distributivna (razdelna) prema prvoj, na osnovu definicije

4 zaključujemo da je uredjena trojka $(R,+,\cdot)$ prsten ili kolo.

4. Dokaži da je algebarska struktura $(Q,+,\cdot)$ prsten. Da li je i $(Q,-,\cdot)$ prsten?

Uputstvo. Radi analogno prethodnom zadatku. $(Q,-,\cdot)$ nije prsten iz osnovnog razloga što $(Q,-)$ nije grupa. Dokaži da se tu zaista ne radi o grupi. Šta je sa asocijativnošću, tj. dali za svaka tri racionalna broja p,q,r važi: $(p-q)-r = p-(q-r)$?

5. Promatraj skup $Q+Q\sqrt{2}$ svih brojeva oblika $q+q\sqrt{2}$ gde su p i q racionalni brojevi, tj. elementi skupa Q. Dokaži da je uredjena trojka $(Q+Q\sqrt{2},+,\cdot)$ prsten.

Uputstvo. Ispitaj zadatak 8 o grupama. Primeti da u ovom slučaju nije potrebno isključivati broj 0, jer se za uredjeni par $(Q+Q\sqrt{2},\cdot)$ traži samo da bude polugrupa, a ne i grupa.

6. Neka je S neprazan skup i PS partitivni skup skupa S. Promatraj uredjenu trojku $(PS, \cup, \cap)$. Dokaži da se tu ne radi o prstenu. Ispitaj koji od "prstenovih aksioma" važi, a koji ne važi.

Uputstvo. Ispitaj, prethodno, zadatak 9 o grupama. Na osnovu toga zadatka nije teško dokazati da je u strukturi $(PS, \cup, \cap)$ zadovoljen svaki od prstenovih aksioma (vidi definiciju 4 prstena!), sem što u polugrupi $(PS, \cup)$ svaki elemenat nema svoj inverzni elemenat.

Uveri se da iz istih razloga ni uredjena trojka $(PS, \cap, \cup)$ nije prsten.

7. Promatraj skup P svih polinoma, tj. izraža oblika: $a_0+a_1x+\ldots$ $\ldots a_nx^n$ gde su a-ovi celi brojevi i n prirodan broj, ali ne fiksiran, tj. n = 1,2,3.... Jasno je kako se sabiraju i množe takvi izrazi, tj. polinomi. Dokaži da je uredjena trojka $(P,+,\cdot)$ prsten ili kolo. Tu nam "+" znači sabiranje, a "$\cdot$" množenje polinoma.

Uputstvo. Ispitaj zadatak 22 o grupama. Istina, tamo je bilo n = 2 fiksirano, ali, radeći analogno, neposredno se zaključuje da je i uopšte $(P,+)$ komutativna grupa. Dokaži da je $(P,\cdot)$ asocijativni grupoid, tj. polugrupa. Konačno, množenje polinoma je distributivno prema njihovom sabiranju. Proveri to na nekim konkretnim primerima.

8. Promatraj skup $D+iD = \{m+in \mid m\in D,\ n\ D,\ i=\sqrt{-1}$. Dokaži da je struktura $(D+iD,+,\cdot)$ jedan prsten.

Uputstvo. Ispitaj zadatak 24 o grupama. Neposredno se zaključuje da je $(D+iD,\cdot)$ polugrupa (čak ima i neutral; koji?!). Konačno, zakon distribucije množenja prema sabiranju važi, uopšte, za kompleksne brojeve, pa će važiti i za brojeve skupa D+iD.

Telo ili polje

1. Dokaži da je uredjena trojka $(Q,+,\cdot)$ telo ili polje.

Dokaz. Pre svega, $(Q,+)$ je komutativna grupa (poznato od ranije). Skup racionalnih brojeva Q je asocijativni grupoid u odnosu na množenje, tj. $(Q,\cdot)$ je polugrupa. Množenje, uopšte, realnih brojeva je distributivno prema njihovom sabiranju, tj. za svaka tri realna broja a,b,c važi: $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$, pa će to važiti i za racionalne brojeve. Dakle, $(Q,+,\cdot)$ je prsten ili kolo.

Konačno, ako iz skupa Q izbacimo neutralni elemenat u odnosu na "prvu" operaciju (dakle +) tj. ako iz skupa Q odstranimo 0, preostatak $Q\setminus\{0\}$, biće grupa u odnosu na množenje, tj. uredjeni par $(Q\setminus\{0\},\cdot)$ je grupa. To je jasno, jer $(Q\setminus\{0\},\cdot)$ je svakako, grupoid; on je asocijativan (tu se, ipak, radi samo o brojevima), ima neutralni elemenat, to je broj 1, te, najzad, pošto smo isključili 0, svaki elemenat $r\in Q$ ima svoj inverzni elemenat, to je $\frac{1}{r}\in Q$, tako da važi $r\cdot\frac{1}{r} = 1$ (=neutralni elemenat).

Iz izloženog, na osnovu definicije 5 telo ili polja, sleduje da je $(Q,+,\cdot)$, zaista, telo. Zovemo ga telom ili poljem svih racionalnih brojeva.

2. $(R,+,\cdot)$ je telo ili polje. Dokaži.
Zovemo ga telom ili poljem svih realnih brojeva.

3. Ako sa $R(i)$ (i je imaginarna jedinica) označimo skup svih kompleksnih brojeva, dokaži da je uredjena trojka $(R(i),+,\cdot)$ telo.

Zovemo ga telom ili poljem svih kompleksnih brojeva.

4. Promatraj još jednom skup $Q+Q\sqrt{2}$ svih brojeva oblika $p+q\sqrt{2}$, gde su p i q racionalni brojevi, tj. elementi skupa Q. Dokaži da je uredjena trojka $(Q+Q\sqrt{2},+,\cdot)$ telo ili polje.

<u>Uputstvo.</u> To je neposredna posledica zadatka 8 o grupama i zadatka 5 o prstenima.

5. Promatraj skup $D+D\sqrt{2}$ svih brojeva oblika $m+n\sqrt{2}$, gde su m i n celi brojevi, tj. elementi skupa D. Je li struktura $(D+D\sqrt{2},+,\cdot)$ telo?

<u>Uputstvo.</u> Ispitaj da li je $(D+D\sqrt{2}\setminus\{0\},\cdot)$ grupa. Šta je sa inverznim elementima?

6. Dokaži da je uredjena trojka $(Q+Q\sqrt{5},+,\cdot)$ telo ili polje. Ispitaj prethodni zadatak 4.

7. Promatraj tela $(Q+Q\sqrt{2},+,\cdot)$ i $(Q+Q\sqrt{5},+,\cdot)$, o kojima je reč u zadacima 4 i 7.

Definišemo preslikavanje $I: Q+Q\sqrt{2}\to Q+Q\sqrt{5}$ na sledeći način: za proizvoljni elemenat $x = p+q\sqrt{2}$ skupa $Q+Q\sqrt{2}$ stavljamo:

$$I(x) = I(p+q\sqrt{2}) = p+q\sqrt{5}, \quad p+q\sqrt{5}\in Q+Q\sqrt{5}.$$

Ispitaj je li I izomorfna izmedju tela $(Q+Q\sqrt{2},+,\cdot)$ i $(Q+Q\sqrt{5},+,\cdot)$.

<u>Rešenje.</u> Ispitaj prethodno definiciju 9. Preslikavanje I nije izomorfizam. Zaista, neka su $x = p+q\sqrt{2}$ i

$y = r+s\sqrt{2}$ dva proizvoljna elementa skupa $Q+Q\sqrt{2}$; treba ispitati da li važi:

$$(1) \qquad I(x+y) = I(x) + I(y), \quad I(x\cdot y) = I(x)\cdot I(y),$$

vodi računa da su u oba gornja tela obe operacije iste. Jedno za drugim, imamo

$$\begin{aligned} I(x+y) &= I(p+q\sqrt{2} + r+s\sqrt{2}) = I\big((p+r) + (q+s)\sqrt{2}\big) = \\ &= \text{(gledaj kako smo definisali preslikavanje I)} = \\ &= (p+r) + (q+s)\sqrt{5} \\ &= (p+q\sqrt{5}) + (r+s\sqrt{5}) \\ &= \text{(gledaj definiciju od I)} = \\ &= I(p+q\sqrt{2}) + I(r+s\sqrt{2}) \\ &= I(x) + I(y), \end{aligned}$$

tj. povezujući kraj i početak,

$$I(x+y) = I(x) + I(y) \text{ za svako } x,y\in Q+Q\sqrt{2},$$

čime je prva od jednakosti (1) dokazana.

Ispitajmo sada da li važi i druga od jednakosti (1). Iz istih razloga kao u prethodnom slučaju, imamo:

$$\begin{aligned} I(x\cdot y) &= I\big((p+q\cdot\sqrt{2})\cdot(r+s\cdot\sqrt{2})\big) \\ &= I\big(pr+2qs + (ps+qr)\sqrt{2}\big) \\ &= \text{(gledaj definiciju od I)} = \\ &= (pr+2qs) + (ps+qr)\sqrt{5}, \end{aligned}$$

tj.,

$$(2) \quad I(x\cdot y) = pr+2qs + (ps+qr)\sqrt{5}.$$

S druge strane je:

$$I(x)\cdot I(y) = (p+q\sqrt{5})\cdot(r+s\sqrt{5}) = (pr+5qs) + (ps+qr)\cdot\sqrt{5},$$

tj.,

$$(3) \quad I(x)\cdot I(y) = (pr+5qs) + (ps+qr)\cdot\sqrt{5}.$$

Kada bi važila i druga od jednakosti (1), tj. kada bi bilo

$$I(x \cdot y) = I(x) . I(y),$$

na osnovu (2) i (3) moralo bi biti i

$$(pr+2qs) + (ps+qr)\sqrt{5} = (pr+5qs) + (ps+qr)\sqrt{5},$$

što se, nakon kraćeg sredjivanja (radi!), svodi na

$$3qs = 0,$$

što očigledno ne mora biti. Dakle, druga od jednakosti (1) ne važi za svaki par brojeva x i y. Iz toga razloga ni preslikavanje I nije izomorfizam izmedju tela $(Q+Q\sqrt{2},+,\cdot)$ i $(Q+Q\sqrt{5},+,\cdot)$.

Primetimo da iz gornjeg dokaza neposredno sleduje da je I izomorfizam izmedju struktura $(Q+Q\sqrt{2},+)$ i $(Q+Q\sqrt{5},+)$.

Bulovska algebra

1. Neka je zadat neprazan skup S; posmatraj njegov partitivni skup PS i uobičajene operacije u tome skupu: unija $\cup$, presek $\cap$ i uzimanje komplemenata (komplementiranje) "′".

Dokaži da je uredjena šestorka: a° $(PS, S, \emptyset; \cap, \cup, ')$, b° $(PS, \emptyset, S; \cup, \cap, ')$ Bulovska algebra.

Uputstvo. Prethodno dobro ispitaj definiciju 6 Bulovske algebre.

a° Uporedjujući ovaj zadatak sa definicijom 6, imamo da je ovde: B = PS (dakle, ovde su elementi skupa B upravo podskupovi A,B,C,... skupa S), I = S, O = $\emptyset$ (=prazan skup), $\wedge = \cap$, $\vee = \cup$, "′" = "′" u smislu da nam ovde, na primer, A' znači $C_S A$ (= komplement od A u odnosu na S), tj. $A = C_S A$.

Sada proveri svako od pravila računanja od 1° do 6° iz definicije 6 (ispitaj poglavlje o skupovima).

b° Sve je isto kao i u prethodnom slučaju, osim što je ovde $\wedge = \cup$ a $\vee = \cap$, što je gore bilo obratno.

2. Promatraj skup $S = \{T, \perp\}$ ("te" i "ne te"); u njemu su na uobičajeni način definisane operacije: $\wedge$ (konjunkcija ili sastav), $\vee$ (disjunkcija ili rastav), $\neg$ (negacija) (tj. ako su a i b elementi skupa S, dakle, ili T ili $\perp$, mi tačno znamo koliko je, na primer, $a \wedge b$, $a \vee b$, te $\neg a$; na primer, ako je $a = \perp$ i $b = \perp$, onda je $a \wedge b = \perp \wedge \perp = \perp$, te $\neg a = \neg \perp = T$).

Dokaži da je uredjena šestorka $(S, T, \perp; \wedge, \vee, \neg)$ Bulovska algebra.

Uputstvo. Ispitaj definiciju 6. Ovde je: B = S (tj. ovde se skup sastoji samo iz dva elementa, ali se naravno svaki od njih može uzimati više puta!), I = T , O = $\perp$, $\wedge = \wedge$, $\vee = \vee$, "′" = $\neg$ (tj. ako je a elemenat skupa B = S, onda nam ovde a' znači $\neg a$, tj. $a' = \neg a$).

Sada proveri svaki od aksioma pravila računanja iz definicije 6. Još jednom ispitaj zadatke iz logike.

Vektorski prostor

1. Izreci definiciju 7 vektorskog prostora stavljajući umesto simbola + i $\cdot$ za operacije redom simbole $\oplus$ i $\circ$.

2. Dokaži da je uredjena trojka $(R,+,\cdot)$ vektorski prostor nad telom R realnih brojeva. Pri tome, operacije + i $\cdot$ znače obično sabiranje i množenje realnih brojeva.

Rešenje. Pre svega, primetimo da se skup V iz definicije 7 vektorskog prostora poklapa sa telom skalara (brojeva) R.

1° Algebarska struktura $(R,+)$ je komutativna grupa. To se proverava neposredno (ispitaj zadatke o grupama!).

2° Proverimo da li važi svako od pravila $P_1 - P_8$ iz definicije 7 vektorskog prostora (imaj na umu da je ovde V = R):

P_1: Ako $a \in R$ i $x \in R$ onda i $a \cdot x \in R$. To je jasno, jer proizvod dva realna broja uvek je realan broj, ili drugim rečima, jer je $(R,\cdot)$ grupoid.

P_2: (zakon distribucije prema sabiranju skalara):

$(a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x$ za bilo koje $a,b,x \in R$.

Pošto je i x realan broj, gornje pravilo P_2 izražava zapravo distributivni zakon množenja realnih brojeva prema njihovom sabiranju, za koji znamo da važi. Prema tome, zadovoljen je i aksiom (pravilo) P_2.

P_3: (zakon distribucije prema sabiranju elemenata iz R):

$a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y$ za bilo koje $a,x,y \in R$.

I taj aksiom važi iz istih razloga kao i u prethodnom slučaju.

P_4: (zakon asocijacije za množenje skalarima):

$a\cdot(b\cdot x) = ab\cdot x$ za svako $a,b,x \in R$;

to je neposredna posledica zakona asocijacije za realne brojeve u odnosu na operaciju . (napomenimo još jednom da tu i $x \in R$).

P_5: $1.x = x$ za svako $x \in R$. To je očigledno.

Iz dokazanog na osnovu definicije 7 sleduje da je skup R vektorski ili linearni prostor nad telom R. U tome smislu realne brojeve, tj. elemente skupa R možemo zvati i vektorima.

3. Dokaži da je i uredjena trojka $(K,+,.)$ vektorski prostor nad telom R, odnosno K. Tu je K skup svih kompleksnih brojeva.

4. Je li skup R realnih brojeva vektorski prostor nad telom K kompleksnih brojeva?

Uputstvo. Radi paralelno sa zadatkom 2 pa posebno ispitaj da li je zadovoljen aksiom (pravilo) P_1.

5. Skup Q svih racionalnih brojeva je vektorski prostor nad telom Q racionalnih brojeva. Dokaži.

6. Dokaži da skup Q svih racionalnih brojeva nije vektorski prostor nad telom R realnih brojeva.

Uputstvo. Ispitaj posebno da li važi aksiom P_1, tj. da li je proizvod realnog i racionalnog broja uvek racionalan broj. Jasno je da to ne mora biti. Nadji neki kontraprimer.

7. Skup C svih funkcija oblika $a.\cos x + b.\sin x$, gde su a i b proizvoljni realni brojevi, jeste vektorski prostor nad telom R realnih brojeva, pri čemu se sabiranje i množenje brojem definira na uobičajeni način:

(1) $(a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos x + b_2\sin x) = (a_1+a_2)\cos x + (b_1+b_2)\sin x$,

(2) $c.(a.\cos x + b.\sin x) = (ca).\cos x + (cb).\sin x$.

Rešenje. 1° Uredjena dvojka $(C,+)$ je komutativna grupa. Zaista, $(C,+)$ je grupoid; to sleduje iz (1), jer ako su brojevi a_1, a_2 i b_1, b_2 realni, biće to i njihovi zbirovi a_1+a_2 i b_1+b_2 (pa nije li $(R,+)$ grupoid!). U skupu C važi asocijativni zakon u odnosu na sabiranje, jer on važi uopšte za sabiranje funkcija. Dakle, $(C,+)$ je polugrupa.

Polugrupa $(C,+)$ ima svoj neutralni elemenat: to je funkcija $0.\cos x + 0.\sin x$ tj. konstanta 0 (imaj na umu da svaku konstantu možemo shvatiti kao funkciju); jasno je da je 0 neutralni elemenat.

Bilo koji elemenat $a.\cos x + b.\sin x$ skupa C ima svoj inverzni elemenat: to je $-a.\cos x - b.\sin x$, što se neposredno proverava.

Konačno, uopšte za sabiranje funkcija važi zakon komutacije pa će on specijalno važiti i u skupu C. Ovim je dokazano da je $(C,+)$ komutativna grupa.

2° Proverimo da li važi svako od pravila $P_1 - P_5$ iz definicije 7 vektorskog prostora:

P_1: ako $c \in R$ i $z \in C$ onda i $c.z \in C$. To sleduje neposredno iz definicione jednakosti (2), jer su sa c,a,b i brojevi ca i cb realni.

P_2: $(a+b).z = a.z + b.z$ za svako $a,b,\in R$ i $z\in C$. To važi uopšte za bilo koja dva broja a i b i za bilo koju funkciju f, pa će specijalno važiti i za funkcije iz skupa C.

P_3: $c.(z+u) = c.z + c.u$ za svako $c\in R$ i svako $z,u\in C$. I ovo pravilo važi iz istih razloga kao i gornje pravilo P_2.

P_4: $a.(b.z) = (ab).z$. Ovo takodje važi uopšte za sve funkcije, pa dakle i za funkcije skupa C.

P_5: $1.z = z$ za svako $z\in C$. To je očigledno.

Prema tome, skup C je jedan vektorski prostor nad telom R realnih brojeva. Same funkcije a.cos x + b.sin x, kao elemente skupa C, možemo zvati vektorima vektorskog prostora C.

Primedba. Pri gornjem dokazu uvek imaj na umu da su elementi skupa C upravo funkcije oblika a.cos x + + b.sin x; tako, na primer, kada kažemo da je z elemenat skupa C, to znači da postoje realni brojevi a i b takvi da je z = a.cos x + b.sin x. Pošto smo dokazali da je skup C vektorski prostor nad telom R, to sada funkcije oblika a.soc x + b.sin x možemo zvati i vektorima nad telom R. Već iz ovih nekoliko primera vidimo kako vektori, u smislu definicije 7, mogu imati vrlo različitu prirodu.

8. Neka je P_2 skup svih funkcija oblika $a_0+a_1x+a_2x^2$ gde su a_0, a_1 i a_2 proizvoljni realni brojevi. Dakle, elementi skupa P_2 jesu polinomi stepena (stupnja) 2 (otuda i indeks 2 uz P!) čiji su koeficijenti realni brojevi. U tome skupu sabiranje i množenje brojem uvodi se na uobičajeni način (tj. kao sabiranje polinoma i množenje polinoma brojem).

Dokaži da je skup P_2 vektorski prostor nad telom R. Zbog čega on nije vektorski prostor nad telom K kompleksnih brojeva?

Rešenje. Dokažimo prvo da je P_2 komutativna grupa u odnosu na sabiranje. Jedno za drugim imamo:

1° $(P_2,+)$ je grupoid. Zaista ako su y i z dva proizvoljna

elementa skupa P_2 oni moraju biti oblika:

$$y = a_0+a_1x+a_2x^2 , \quad z = b_0+b_1x+b_2x^2,$$

gde su a-ovi i b-ovi realni brojevi. Treba dokazati da je i njihov zbir toga oblika, tj. da pripada skupu P_2. Radimo:

$$y+z = (a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)$$

$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2,$$

ili, stavljajući $c_0 = a_0+b_0$, $c_1 = a_1+b_1$, $c_2 = a_2+b_2$,

$$y+z = c_0+c_1x+c_2x^2$$

na osnovu čega zaključujemo da i zbir y + z pripada skupu P_2, jer su zajedno sa a-ovima i b-ovima i svi c-ovi realni brojevi (gledaj kako smo definisali skup P_2!).

2° Asocijativnost. Ona važi uopšte za sabiranje funkcija, tj. za bilo koje tri funkcije f,g,h koje se mogu sabirati važi zakon asocijacije (ispitaj poglavlje o funkcijama!):

$$\big(f(x)+g(x)\big)+h(x) = f(x)+\big(g(x)+h(x)\big),$$

ili kraće: $(f+g)+h = f+(g+h)$. Tim pre će onda asocijativnost za sabiranje važiti u skupu P_2 čiji su elementi polinomi drugog stepena, dakle, specijalne funkcije.

3° Postoji neutralni elemenat. To je $0+0.x+0.x^2$, dakle konstanta 0. Jasno je da je to neutralni elemenat, jer za proizvoljni elemenat iz skupa P_2 važi: $y+0 = 0+y = y$ (naravno da je tu y oblika $a_0+a_1x+a_2x^2$, ali u prethodnim jednakostima ipak nismo pisali umesto y ceo taj izraz već to držimo stalno na umu).

4° Svaki elemenat $y = a_0+a_1x+a_2x^2$ skupa P_2 ima svoj suprotni ili inverzni elemenat. To je $-y = -a_0-a_1x-a_2x^2$. Jasno je da i ovaj elemenat $-y$ pripada skupu P_2, jer zajedno sa brojevima a_0,a_1 i a_2 biće realni i brojevi $-a_0$, $-a_1$ i $-a_2$.

Na osnovu 1°, 2°, 3° i 4° zaključujemo da je $(P_2,+)$ grupa. Ta je grupa i komutativna, jer uopšte za sabiranje funkcija važi zakon komutacije. Tim pre će onda on važiti i za polinome drugog stepena kao specijalne funkcije (primeti da su to upravo kvadratne funkcije).

Proverimo sada da li su zadovoljena pravila računanja P_1 - P_5 iz definicije 7 za slučaj $V = P_2$ (oprez! ovo poslednje P_2 označava nam gornji skup, a ne pravilo P_2 koje slučajno ima istu oznaku).

P_1: Ako $c \in R$ i $y \in P_2$ onda i $c.y \in P_2$. To je jasno, jer činjenica da $y \in P_2$ znači da je y oblika: $y = a_0+a_1x+a_2x^2$ gde su a-ovi realni brojevi, tj. elementi od R, pa je:

$$c.y = c.(a_0+a_1x+a_2x^2) = (ca_0)+(ca_1)x+(ca_2)x^2,$$

što nam i kaže da je $c.y$ elemenat skupa P_2, jer su zajedno sa brojevima c, a_0, a_1 i a_2 i brojevi ca_0, ca_1 i ca_2 realni (pa nije li $(R,.)$ grupoid?!).

P_2: Za bilo koje $a,b \in R$ i $y \in P_2$ (vidi gornju primedbu o oznaci), važi: $(a+b).y = a.y + b.y$. Zaista, neka je $y = a_0+a_1x+a_2x^2$. Tada je jedno za drugim:

$$\begin{aligned}(a+b).y &= (a+b).(a_0+a_1x+a_2x^2)\\ &= a.(a_0+a_1x+a_2x^2)+ b.(a_0+a_1x+a_2x^2)\\ &= a.y + a.y,\end{aligned}$$

ili, povezujući početak sa krajem: $(a+b).y = a.y + b.y$, a to je upravo pravilo $\underline{P_2}$ (oprez! ovo $\underline{P_2}$ nije gornji skup P_2).

P_3: Za bilo koje $c \in R$ i $y,z \in P_2$ važi: $c.(y+z) = c.y + c.z$; naime, činjenica da su y i z elementi skupa P_2 znači da su oni oblika:

$$y = a_0+a_1x+a_2x^2 \quad i \quad z = b_0+b_1x+b_2x^2,$$

pa, jedno za drugim, imamo:

$$\begin{aligned}c.(y+z) &= c.((a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2))\\ &= c.(a_0+a_1x+a_2x^2) + c.(b_0+b_1x+b_2x^2)\\ &= c.y + c.z \text{ (gledaj šta nam je y i z!)},\end{aligned}$$

ili, povezujući početak sa krajem: $c.(y+z) = c.y + c.z$, što i izražava pravilo P_3 koje smo hteli dokazati.

P_4: Za svako $b,c \in R$ i svako $y \in P_2$ važi: $c.(b.y) = (cb).y$. Zaista, slično kao u prethodna dva slučaja, imamo:

$$\begin{aligned}c.(b.y) &= c.(b.(a_0+a_1x+a_2x^2))\\ &= c.(ba_0+ba_1x+ba_2x^2)\\ &= cba_0+cba_1x+cba_2x^2\\ &= cb.(a_0+a_1x+a_2x^2)\\ &= (cb).y,\end{aligned}$$

odnosno, $c.(b.y) = (cb).y$, što je i trebalo dokazati.

P_5: Za svako $y \in P_2$ važi: $1.y = y$. To je jasno jer je:

$$1.y = 1.(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_0+a_1x+a_2x^2 = y.$$

<u>Zaključak.</u> Skup P_2 je komutativna grupa u odnosu na sabiranje i za njega važe pravila računanja P_1 - P_5 iz definicije 7, pa je on jedan <u>vektorski</u> ili <u>linearni</u> prostor nad telom R realnih brojeva; same elemente toga skupa, tj. funkcije oblika: $a_0+a_1x+a_2x^2$ možemo zvati <u>vektorima</u> nad telom R.

Medjutim, taj isti skup P_2 nije vektorski prostor nad telom K kompleksnih brojeva. Naime, ne važi pravilo (aksiom) P_1. Prema tome aksiomu trebalo bi biti $c.y \in P_2$ za svako $c \in K$ i svako $y \in P_2$, ili, vodeći računa da je y oblika: $y = a_0+a_1x+a_2x^2$,

$$c.(a_0+a_1x+a_2x^2) \in P_2 \quad \text{za svako } c \in K \text{ i svaki realan}$$

broj a_0, odnosno a_1 te a_2. A to ne mora važiti, jer ako je c jedan kompleksan broj koji nije realan, (na primer, broj i), tada su i brojevi ca_0, ca_1 i ca_2 kompleksni pa proizvod:

$$c.y = c.(a_0+a_1x+a_2x^2) = (ca_0)+(ca_1)x+(ca_2)x^2$$

ne pripada skupu P_2, jer koeficijenti ca_0, ca_1 i ca_2 poslednjeg polinoma $(ca_0)+(ca_1)x+(ca_2)x^2$ nisu realni brojevi (vrati se još jednom na formulaciju tekućeg zadatka, pa vidi kako smo definisali skup P_2).

9. Dokaži da je skup P_3 svih polinoma $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ trećeg stupnja, gde su svi a-ovi realni brojevi, jedan vektorski prostor nad telom R (ispitaj prethodni zadatak!).

Uputstvo. Dokaz je na slovo isti kao dokaz prethodnog zadatka 8; treba samo umesto izraza $a_0+a_1x+a_2x^2$ svuda pisati $a_0+a_1x+ax^2+a_3x^3$, tj. dodavati tom izrazu još i a_3x^3.

10. Promatraj skup P_n svih polinoma $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ n-tog stupnja, gde su svi a-ovi realni brojevi. Dokaži da je skup P_n jedan vektorski prostor nad telom R realnih brojeva.

Uputstvo. Dokaz je analogan dokazu zadatka 8. Treba samo umesto izraza oblika $a_0+a_1x+a_2x^2$ svuda pisati izraz $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$.

Vodeći primer vektorskih prostora

11. Posmatrajmo skup R svih realnih brojeva i pripadni Dekartov proizvod toga skupa sa samim sobom, dakle, skup $R\times R = R^2$ svih uredjenih parova (x,y) gde su x i y realni brojevi, tj. $x,y\in R$. Dakle je: $R\times R = R^2 = \{(x,y) \mid x\in R \wedge y\in R\}$.

U skupu R^2 uvodimo jednakost, sabiranje i množenje brojem na sledeći način:

1° za dva elementa (tj. uredjena para) (x_1,x_2) i (y_1,y_2) skupa R^2 kažemo da su jednaka ako i samo ako je $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$, tj.

$$(x_1,x_2) = (y_1,y_2) \iff x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2;$$

2° zbir dva uredjena para (dakle elementa skupa R^2) (x_1,x_2) i (y_1,y_2) jeste uredjeni par $(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$, tj.

$$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2);$$

3° pod proizvodom broja a i uredjenog para (x,y) realnih brojeva podrazumevamo uredjen par (ax,ay) (tj. svaka se koordinata para (x,y) množi tim brojem a), tj.

$$a.(x,y) = (ax,ay).$$

Dokaži da je skup R^2, sa gornjim pravilima računanja, jedan vektorski prostor nad telom R realnih brojeva. Da li se tu telo R može zameniti telom K kompleksnih brojeva?

Dokaz. Odmah na početku budimo načisto sa time da su elementi skupa R^2, za koji hoćemo dokazati da je vektorski prostor, upravo uredjeni parovi (x_1,x_2) realnih brojeva. Druga je stvar što mi, kratkoće radi, možemo govoriti da je, na primer, x elemenat skupa R^2 i pri tome stalno držimo na umu da je to x oblika: $x = (x_1,x_2)$, gde su x_1 i x_2 realni brojevi. To će nas ubuduće stalno pratiti i treba biti načisto sa tim.

Dokažimo da je $(R^2,+)$ komutativna grupa. Radimo:

a° $(R^2,+)$ je grupoid. Zaista, neka su (x_1,x_2) i (y_1,y_2) dva proizvoljna elementa skupa R^2; treba da ispitamo da li je i njihov zbir takodje elemenat skupa R^2; no, prema 2° imamo da je:

$$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2),$$

pa se stvar svodi na to da ispitamo je li uredjeni par $(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$ elemenat skupa R^2; za to je dovoljno ispitati jesu li koordinate x_1+y_1 i x_2+y_2 toga para realni brojevi, tj. elementi skupa R; a one to jesu, jer su brojevi x_1, x_2, y_1 i y_2 realni (pa nije li $(R,+)$ grupoid?!); dakle, $(R^2,+)$ je grupoid.

b° U skupu R^2 važi zakon asocijacije u odnosu na sabiranje +, tj. za svaka tri elementa $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$,

$z = (z_1, z_2)$ važi:

$$(1) \qquad (x+y)+z = x+(y+z).$$

Zaista, leva i desna strana ove jednakosti koju hoćemo dokazati jednake su:

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= \big((x_1,x_2)+(y_1,y_2)\big)+(z_1,z_2)\\ &= (\text{gledaj definiciju zbira } 2^\circ) =\\ &= \big((x_1+y_1),(x_2+y_2)\big) + (z_1,z_2)\\ &= (\text{isti razlog}) =\\ &= \big((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2\big),\end{aligned}$$

odnosno, povezujući kraj i početak,

$$(2) \qquad (x+y)+z = \big((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2\big);$$

analogno se dobije (radi!) da je desna strana jednaka:

$$(3) \qquad x+(y+z) = \big(x_1+(y_1+z_1)\ ,\ x_2+(y_2+z_2)\big).$$

Ispitajmo da li su uredjeni parovi koji se nalaze na desnim stranama jednakosti (2) i (3) jednaki. Prema 1° treba, dakle, ispitati jesu li njihove odgovarajuće koordinate jednake, tj. je li

$$(x_1+y_1)+z_1 = x_1+(y_1+z_1) \quad \text{i} \quad (x_2+y_2)+z_2 = x_2+(y_2+z_2);$$

a ovo je tačno, jer zakon asocijacije važi za sabiranje realnih brojeva (primeti kako smo asocijativnost u R^2 sveli na asocijativnost u R, iako su elementi tih skupova potpuno različite prirode).

Pošto su desne strane jednakosti (2) i (3) jednake, biće to slučaj i sa njihovim levim stranama, što i izražava jednakost (1) koju smo hteli dokazati. Dakle, $(R^2,+)$ je polugrupa.

c° Polugrupa $(R^2,+)$ ima neutralni elemenat. To je uredjeni par $e = (0,0)$. Zaista, ako je $x = (x_1,x_2)$ proizvoljan ele-

menat skupa R^2, biće na osnovu 1° i 2°:

$$x+e = (x_1,x_2)+(0,0) = (x_1+0,x_2+0) = (x_1,x_2) = x,$$

tj. $x+e = x$ i analogno $e+x = x$, što i dokazuje da je elemenat e neutralan u odnosu na sabiranje.

d° Svaki elemenat $x = (x_1,x_2)$ skupa R^2ima svoj inverzni elemenat. To je $-x = (-x_1, -x_2)$. Pre svega, primetimo da par $(-x_1, -x_2)$ pripada skupu R^2, jer su zajedno sa brojevima x_1 i x_2 realni i brojevi $-x_1$ i $-x_2$. Nadalje je:

$$(-x+x) = (-x_1,-x_2)+(x_1,x_2) = (-x_1+x_1, -x_2+x_2) = (0,0),$$

tj. $-x+x = (0,0)$ (=neutralni elemenat), i slično: $x+(-x) = (0,0)$ (=neutralni elemenat), što i dokazuje da je $-x$ inverzni elemenat od x.

Na osnovu pokazanog pod a°, b°, c° i d° zaključujemo da je $(R^2,+)$ grupa.

Ta je grupa i komutativna, jer za svaka njena dva elementa $x = (x_1,x_2)$ i $y = (y_1,y_2)$ važi: $x+y = y+x$; zaista, imamo da je:

$$x+y = (x_1x_2)+(y_1y_2) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2),$$

i slično: $y+x = (y_1+x_1,\ y_2+x_2)$; medjutim, poslednja dva uredjena para jednaka su (vidi 1°); jer je $x_1+y_1 = y_1+x_1$, $x_2+y_2 = y_2+x_2$. Dakle je: $x+y = y+x$. Ovim je komutativnost grupe $(R^2,+)$ dokazana.

Proverimo sada je li zadovoljeno svako od pravila računanja P_1-P_5 iz definicije 7 vektorskog prostora.

P_1: Ako $c \in R$ i $(x_1,x_2) \in R^2$ tada i $c.(x_1,x_2) \in R^2$ (pazi, tu nam je $V = R^2$ a elementi skupa R^2 su uredjeni parovi <u>realnih</u> brojeva!). To je jasno, jer prema 3° imamo da je:

$$c.(x_1,x_2) = (cx_1,\ cx_2);$$

nadalje, kako su brojevi c, x_1 i x_2 realni, biće realni i brojevi cx_1 i cx_2 (pa nije li $(R,.)$ grupoid?!), te gornji uredjeni par (cx_1, cx_2) pripada skupu R^2, a za tim smo i išli.

P_2: Za bilo koje $a,b \in R$ i $(x_1,x_2) \in R^2$ važi:

$$(a+b).(x_1 x_2) = a.(x_1,x_2) + b.(x_1,x_2).$$

Zaista, leva strana ove jednakosti je prema 3^o jednaka:

$$(a+b).(x_1,x_2) = \Big((a+b)x_1, (a+b)x_2\Big) = (ax_1+bx_1, ax_2+bx_2),$$

i slično desna (prvo na osnovu 3^o a potom 2^o):

$$a.(x_1,x_2)+b.(x_1,x_2)=(ax_1,ax_2)+(bx_1,bx_2)=(ax_1+bx_1,ax_2+bx_2).$$

Pošto smo u oba slučaja dobili kao krajnji "iznos" isti uredjeni par, zaključujemo da su leva i desna strana jednakosti koju dokazujemo jednake, pa je tvrdjenje dokazano.

P_3: Za bilo koje $a \in R$ i $x,y \in R^2$ važi: $a.(x+y) = a.x + a.y$;

naime, činjenica da su x i y elementi skupa R^2 znači da su oni oblika: $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$, gde su x_1, x_2, y_1 i y_2 realni brojevi.

Leva strana gornje jednakosti koju hoćemo dokazati sada postaje (gledaj prvo 2^o a zatim 3^o):

$$\begin{aligned} a.(x+y) &= a.\Big((x_1,x_2)+(y_1,y_2)\Big) \\ &= a.(x_1+y_1, x_2+y_2) \\ &= \Big(a(x_1+y_1),\ a(x_2+y_2)\Big) \\ &= (ax_1+ay_1,\ ax_2+ay_2), \end{aligned}$$

ili, povezujući početak i kraj: $a.(x+y) = (ax_1+ay_1, ax_2+ay_2)$.

Slično je i desna strana jednaka (primenjuj prvo 3^o a onda 2^o):

$$\begin{aligned} a.x + a.y &= a.(x_1,x_2) + a.(y_1,y_2) \\ &= (ax_1,ax_2) + (ay_1,ay_2) \\ &= (ax_1+ay_1, ax_2+ay_2), \end{aligned}$$

tj.: $a.x + a.y = (ax_1+ay_1, ax_2+ay_2)$. Kao što vidimo, u oba slučaja smo dobili kao krajnji "iznos" istu veličinu (tj. isti uredjeni par), pa zaključujemo da su leva i desna strana jednakosti koju smo hteli dokazati jednake. Ovim smo dokazali da je zadovoljeno pravilo računanja P_3.

P_4: Za svako $a,b \in R$ i svako $x = (x_1,x_2) \in R^2$ važi:

$$a.(b.x) = (ab).\ x.$$

Zaista, radeći analogno kao u prethodna dva slučaja, imamo (dva puta se primenjuje 3^o):

$$\begin{aligned} a.(b.x) &= a.\Big(b.(x_1,x_2)\Big) \\ &= a.(bx_1,bx_2) \\ &= \Big(a(bx_1), a(bx_2)\Big) \\ &= \text{(primeni zakon asocijacije za množenje realnih brojeva } a,b,x_1 \text{ te } a,b,x_2!) = \\ &= \Big((ab)x_1, (ab)x_2\Big) \\ &= (ab).(x_1,x_2), \end{aligned}$$

ili, povezujući početak sa krajem i vodeći računa da je $(x_1,x_2) = x$:

$$a.(b.x) = (ab).\ x,$$

a to je i trebalo dokazati.

P_5: Za svako $x = (x_1,x_2) \in R^2$ važi: $1.x = x$. To je jasno, jer je:

$$1.x = 1.(x_1,x_2) = (1.x_1, 1.x_2) = (x_1,x_2) = x.$$

Na osnovu svega dokazanog i definicije 7, skup R^2 je jedan vektorski ili linearni prostor nad telom R realnih brojeva.

Medjutim, skup R^2 nije vektorski prostor nad telom K kompleksnih brojeva. To je iz razloga što ne mora biti zadovoljeno pravilo računanja P_1. Naime, ako je a neki kompleksan broj koji nije realan (na primer, 2i) i $x = (x_1,x_2)$ neki elemenat skupa R^2 koji je različit od (0,0), onda pripadni proizvod: $a.x = a.(x_1,x_2) = (ax_1,ax_2)$ nije elemenat skupa R^2, jer koordinate poslednjeg uredjenog para nisu realni brojevi.

12. Neka je R_o^2 skup svih uredjenih parova oblika (x,0) gde je x realan broj (pazi! tu je uvek druga koordinata jednaka nuli), tj. $R_o^2 = \{(x,0) \mid x \in R\}$.

U tome skupu računa se analogno kao u skupu R^2 iz prethodnog zadatka.

Dokaži da je skup R_o^2 vektorski prostor nad telom R realnih brojeva.

Uputstvo. Primeti da je skup R_o^2 upravo podskup skupa R^2 iz prethodnog zadatka. Naime, skup R_o^2 sastoji se samo iz onih elemenata (x,y) skupa R^2 kod kojih je druga koordinata jednaka nuli, tj. y = 0 (otuda i indeks 0 u oznaci R_o^2!). Zato će sva pravila računanja skupa R^2 automatski važiti i u skupu R_o^2. Jedino se postavljaju ova dva pitanja:

1° Je li $(R_o^2, +)$ grupoid (ostale aksiome grupe automatski se prenose iz R^2 u R_o^2 !)?

2° Važi li pravilo P_1?

Dokaži da je odgovor na ta dva pitanja potvrdan. Tada će iz tvrdjenja zadatka 11 sledovati i tvrdjenje ovog zadatka.

13. Neka je R^3 skupa svih uredjenih trojki realnih brojeva, tj. neka je $R^3 = R\times R\times R = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 \in R \wedge x_2 \in R \wedge x_3 \in R\}$.

U tome skupu uvodi se jednakost, sabiranje i množenje brojem potpuno analogno kao u zadatku 11.

Dokaži da je R^3 vektorski prostor nad telom R realnih brojeva.

Uputstvo. Dokaz teče potpuno paralelno sa dokazom zadatka 11. Treba samo svuda umesto, na primer, uredjenog para (x_1,x_2) pisati uredjenu trojku (x_1,x_2,x_3) dakle,

samo se još, da ne kažemo formalno, pripisuje treća koordinata x_3).

Nemoj samo da čitaš, radi!

14. Promatraj skup $R^n = \underbrace{R\times R\times\ldots\times R}_{n}$ svih uredjenih n-torki realnih brojeva, tj. skup:

$$R^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_1 \in R,\ x_2 \in R,\ldots,\ x_n \in R\}.$$

Tu je n prirodan broj, tj. n = 1,2,3,... .

U taj skup uvodi se jednakost, sabiranje i množenje brojem analogno kao u zadatku 11, tj.:

$$1^\circ \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n) = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \Leftrightarrow x_1=y_1 \wedge x_2=y_2 \ldots x_n=y_n;$$

$$2^\circ \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2 \ldots, x_n+y_n);$$

$$3^\circ \quad a.(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (ax_1,ax_2,\ldots,ax_n).$$

Dokaži da je skup R^n vektorski prostor nad telom R realnih brojeva.

Uputstvo. Dokaz teče potpuno analogno kao dokaz zadatka 11. Jedino treba formalno svuda umesto, na primer, (x_1,x_2) pisati $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ (dakle, naprosto kao da smo iza druge koordinate x_2 dopisali "$\ldots x_n$").

Uradi to sve vežbe radi.

Primedba. Ako je n=1, gornji skup R^n postaje R^1, tj. sam skup R. To znači da iz gornjeg zadatka, specijalno za n=1, sleduje zadatak 2.

Isto tako, za n=2, iz gornjeg zadatka sleduje zadatak 11. Itd.

15. Promatraj jednu fiksnu ravninu U čije tačke obeležavamo sa A,B,C,... Svaki par tačaka A i B ravnine U potpuno odredjuje jedan segment (duž) čiji su krajevi te tačke i koji možemo označiti AB ili BA. Medjutim, ako se govori o uredjenom paru tačaka (A,B), onda imamo odgovarajući "usmereni segment" kome

je "početak" u A i "završetak" ili "vrh" u B i koji možemo označiti sa $\overrightarrow{AB}$. U tom smislu mi razlikujemo $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ (kao što, na primer, razlikujemo uredjene parove (A,B) i (B,A)).

Označimo sa T skup svih takvih "usmerenih segmenata", tj.: $T = \{\overrightarrow{AB} \mid A \in U \wedge B \in U\}$ (crtaj!).

U skupu T uvodimo sledeća pravila računanja (mi zapravo taj skup na neki način organizujemo!):

1° Za dva usmerena segmenta $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, tj. za dva elementa $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ skupa T kažemo da su jednaka i pišemo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ako važi troje: segmenti $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su <u>paralelni</u>, imaju <u>istu dužinu</u>, <u>istog su smera</u>.

Prema tome, na osnovu 1° mi izvestan usmereni segment nećemo smatrati promenjenim ako ga paralelno pomeramo u ravni U, tj. usmerene segmente možemo paralelno pomerati u ravni.

2° Pod zbirom dva usmerena segmenta $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, u oznaci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, podrazumevamo usmereni segment koji nastaje na sledeći način: usmereni segment $\overrightarrow{CD}$ se paralelno pomeri, tako da njegov početak C dodje u vrh B usmerenog segmenta $\overrightarrow{AB}$; neka pri tome pomeraju vrh D usmerenog segmenta $\overrightarrow{CD}$ dodje u izvesnu tačku E ravni U (vidi sliku 1); tada je prema 1° usmereni segment $\overrightarrow{BE}$ jednak usmerenom segmentu $\overrightarrow{CD}$ (paralelni su, jednake dužine i istog smera), tj.: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE}$; zato je:

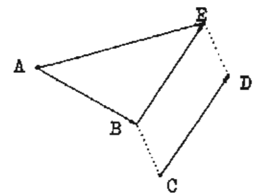
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE};$$

usmereni segment $\overrightarrow{AE}$ po dogovoru zovemo zbirom usmerenih segmenata $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BE}$ odnosno $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ i to pišemo:

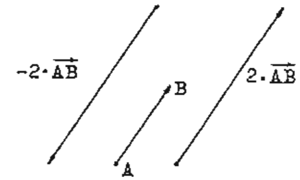
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD};$$

sam postupak koji nas je doveo do vektora $\overrightarrow{AE}$ možemo zvati nadovezivanjem, a vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BE}$ nadovezanim.

3° Pod proizvodom $a.\overrightarrow{AB}$ realnog broja $a \in R$ (drži na umu, na primer, broj 2 te -2) i usmerenog segmenta $\overrightarrow{AB}$ podrazumevamo bilo koji usmeren segment koji je paralelan sa $\overrightarrow{AB}$, čiji je smer isti kao smer od $\overrightarrow{AB}$ ako je <u>$a>0$</u> i suprotan od smera segmenta $\overrightarrow{AB}$ ako je <u>$a<0$</u>, te čija je dužina jednaka proizvodu apsolutne vrednosti $|a|$ broja a i dužine usmerenog segmenta $\overrightarrow{AB}$ (vidi sliku 2).



sl. 1.



sl. 2.

Eto, tako se računa u skupu T (drži uvek na umu da su elementi skupa T upravo usmereni segmenti).

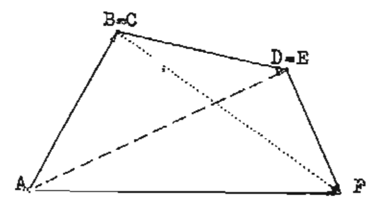
Dokaži da je skup T jedan vektorski prostor nad telom R realnih brojeva.

<u>Dokaz</u>. Dokažimo prvo da je $(T,+)$ grupa. Jedno za drugim imamo: a° $(T,+)$ je grupoid. To je jasno, jer prema 2°, zbir dva usmerena segmenta ravnine U opet je usmereni segment te iste ravnine, dakle, elemenat skupa T.

b° U grupoidu $(T,+)$ važi zakon asocijacije. Naime, ako su $x = \overrightarrow{AB}$, $y = \overrightarrow{CD}$, $z = \overrightarrow{EF}$, tri usmerena segmenta, onda je $(x+y)+z = x+(y+z)$, tj.:

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}). \tag{1}$$

Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da su usmereni segmenti $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ (tim redom) nadovezani (vidi sliku!), tj. da je $B = C$ i $D = E$. Jer kada, na primer, usmereni segmenti $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ ne bi bili nadovezani, mi bismo na osnovu 1° usmereni segment $\overrightarrow{CD}$ pomerili paralelno tako da njegov početak C padne u vrh B segmenta $\overrightarrow{AB}$, a potom bi slično radili i sa usmerenim segmentom $\overrightarrow{EF}$.



Sl. 3.

Na osnovu 2^o, sa slike čitamo da je leva strana jednakosti (1) jednaka:

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF},$$

a desna:

$$\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF},$$

dakle, obe od njih jednake su istoj veličini: usmerenom segmentu $\overrightarrow{AF}$; stoga su one i medju sobom jednake, čime je jednakost (1), a time i asocijativnost grupoida $(T,+)$ dokazana.

c^o Polugrupa $(T,+)$ ima neutralni elemenat. To je "usmereni segment" $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots$ koji obeležavamo sa $\vec{O}$ (početak i vrh se poklapaju). Zaista, ako je $\overrightarrow{AB}$ proizvoljan elemenat skupa T, onda je (vidi 2^o!):

$$\vec{O} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB} + \vec{O} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB},$$

tj.

$$\vec{O} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{AB} + \vec{O} = \overrightarrow{AB},$$

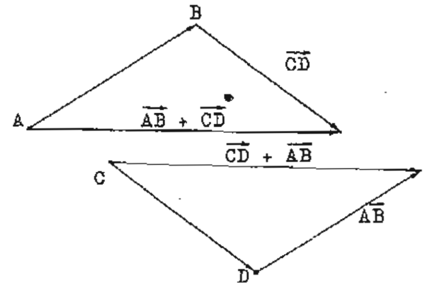
što i dokazuje da je $\vec{O}$ neutralni elemenat skupa T u odnosu na sabiranje njegovih elemenata.

d^o Svaki elemenat $\overrightarrow{AB}$ skupa T ima svoj inverzni elemenat koji, po analogiji sa brojevima možemo označiti sa $-\overrightarrow{AB}$. To je usmereni segment $\overrightarrow{BA}$. Zaista, prema 2^o imamo:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{O},$$

što i dokazuje da je $\overrightarrow{BA}$ inverzni elemenat od $\overrightarrow{AB}$. Dakle, prema gornjem dogovoru je: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Na osnovu a^o, b^o, c^o i d^o zaključujemo da je $(T,+)$ grupa. Ta grupa je i komutativna. Naime, neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ dva proizvoljna usmerena segmenta, tj. dva proizvoljna elementa skupa T. Nadovezujući prvo segment $\overrightarrow{CD}$ na segment $\overrightarrow{AB}$, a potom segment $\overrightarrow{AB}$ na segment $\overrightarrow{CD}$ (vidi sliku 4.), biće, na osnovu 2^o: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$, što i izražava zakon komutacije u skupu T u odnosu na sabiranje + .



sl. 4.

Proverimo sada da li važi svako od pravila P_1-P_2 definicije 7 vektorskog prostora.

P_1: Za svaki realan broj $a \in R$ i svaki usmeren segment $\overrightarrow{AB} \in T$, pripadni proizvod (vidi 3^o) $a.\overrightarrow{AB}$ takodje je elemenat skupa T. To je neposredna posledica tačke 3^o kojom smo definisali množenje usmerenog segmenta nekim realnim brojem. Specijalno, za svaki usmereni segment $\overrightarrow{AB}$ važi: $0.\overrightarrow{AB} = \vec{O}$.

P_2: Za bilo koje realne brojeve $a,b \in R$ i bilo koji usmereni segment $\overrightarrow{AB} \in T$ važi:

$$(a+b).\overrightarrow{AB} = a.\overrightarrow{AB} + b.\overrightarrow{AB}$$

Primeti da i leva i desna strana te jednakosti predstavlja upravo izvesni usmereni segment, koji se dobija iz usmerenog segmenta $\overrightarrow{AB}$ pomoću radnji: sabiranje (vidi 2^o) i množenje brojem (vidi 3^o). Treba da dokažemo da su ti usmereni segmenti $(a+b).\overrightarrow{AB}$ i $a.\overrightarrow{AB}+b.\overrightarrow{AB}$ jednaki. U tu svrhu setimo se da za dva usmerena segmenta kažemo da su jednaka ako važi: da su paralelni, da imaju isti smer i da su iste dužine (vidi 1^o!).

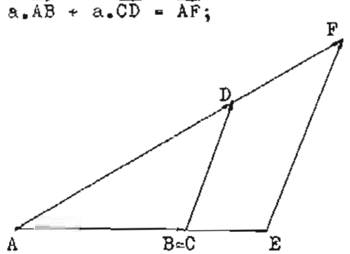
Služeći se crtanjem i pravilima računanja pod 2^o i 3^o, uveri se da svaki od gornjih uslova jednakosti važi za razne vrednosti brojeva a i b. Posebno ispitaj ova četiri karakteristična slučaja: $a = 2$, $b = 1$ (oba pozitivna); $a = -2$, $b = -1$ (oba negativna); $a = 2$, $b = -1$ (jedan pozitivan i po apsolutnoj vrednosti veći od drugog); $a = -2$, $b = 1$ (samo jedan pozitivan i po apsolutnoj vrednosti manji od negativnog . Crtaj!

P_3: Za svaki realan broj $a \in R$ i svaka dva usmerena segmenta $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in T$ važi:

$$a.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}) = a.\overrightarrow{AB}+a.\overrightarrow{CD}.$$

Pretpostavimo da smo usmereni segment $\overline{CD}$ pomerili tako da njegov početak C padne u vrh B segmenta $\overrightarrow{AB}$; tada je $\overrightarrow{AD}$ usmeren segment koji predstavlja zbir segmenata $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, tj. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (vidi sl.5); neka je, dalje,: $\overrightarrow{AE} = a.\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{EF} = a.\overrightarrow{CD}$, tada je sa slike 5, a na osnovu 2°:

$$a.\overrightarrow{AB} + a.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF};$$



sl. 5.

s druge strane, iz sličnosti trouglova ABD i AEF sleduje da im se i treće strane $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AF}$ odnose kao i strane $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AE}$, odnosno $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$; dakle je: $\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{AF} = 1:a \Rightarrow \overrightarrow{AF} = a.\overrightarrow{AD}$.

Prema tome, prvo je bilo $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, a sada $\overrightarrow{AF} = a.\overrightarrow{AD}$; zato je: $\overrightarrow{AF} = a.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$; medjutim, to isto $\overrightarrow{AF}$ je jednako i $a.\overrightarrow{AB} + a.\overrightarrow{CD}$; zato je konačno: $a.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = a.\overrightarrow{AB} + a.\overrightarrow{CD}$, što smo i hteli dokazati.

P_4: Za svaka dva realna broja $a,b \in R$ i svaki usmereni segment $\overrightarrow{AB} \in T$, važi: $a.(b.\overrightarrow{AB}) = (ab).\overrightarrow{AB}$. Vidi uputstvo za dokaz pravila P_2.

P_5: $1.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ za svako $\overrightarrow{AB} \in T$. To neposredno sleduje iz 3°.

Prema tome, pošto su ispunjeni svi zahtevi definicije 7, skup T svih usmerenih segmenata jedne ravnine, sa kojima se

računa prema 1°, 2° i 3°, predstavlja jedan vektorski prostor nad telom R realnih brojeva. Same elemente skupa T, tj. usmerene segmente jedne ravnine, možemo zvati vektorima. To su upravo oni vektori sa kojima smo se sreli još u početnim razredima srednjih škola. Vidimo kako oni podležu mnogo opštijim principima, tj. kako izlaze iz prethodnih opštih razmatranja.

Naravno da i skup svih usmerenih segmenata u prostoru obrazuje jedan vektorski prostor. Dokaz je na slovo isti.

Linearna zavisnost vektorâ u zadanom vektorskom prostoru

Definicija 7.1 Neka je zadat bilo koji vektorski prostor V nad telom R realnih brojeva i neka su $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ tri vektora, tj. tri elementa skupa V; za bilo koja tri realna broja a, b, c, tj. elementa skupa R, posmatrajmo vezu:

$$(1) \qquad a.\underline{x} + b.\underline{y} + c.\underline{z} = 0,$$

gde je nula neutralni elemenat grupe (V,+) (tj. ako je, na primer, V vektorski prostor iz zadatka 2, odnosno 8, onda će nam gornja nula značiti vektor 0, odnosno $C + 0.x + 0.x^2$ tih vektorskih prostora).

Ako iz veze (1) nužno sleduje da je svaki od brojeva a,b,c jednak nuli, kažemo da su vektori x,y,z linearno nezavisni.

U gornjoj definiciji uzeli smo tri vektora x,y,z i definisali njihovu linearnu nezavisnot, što je učinjeno radi konkretnosti; naravno da su se tu mogla posmatrati i dva, odnosno četiri, pet itd., vektora iz vektorskog prostora V; tako, na primer, za dva vektora x i y iz V, reći ćemo da su linearno nezavisni, ako iz veze:

$$a.x + b.y = 0 , \qquad a,b \in R ,$$

nužno sleduje da su oba od brojeva jednaka nuli.

Ako, pak, vektori x,y,z nisu linearno nezavisni, kažemo da su linearno zavisni; drugim rečima to znači ovo: ako je moguće da jednakost (1) važi i kada je bar jedan od brojeva a,b,c različit od broja 0, vektori x,y,z jesu linearno zavisni.

Zaključak. Ako se hoće ispitati da li su izvesni vektori nekog vektorskog prostora linearno nezavisni, odnosno linearno zavisni, onda se posmatraju veze oblika (1), pa se ispituje da li iz njih nužno sleduje da su odgovarajući brojevi a,b,c,... (već prema tome koliko vektora posmatramo) svi jednaki nuli ili to nisu.

Definicija 7.2 Najveći broj linearno nezavisnih vektora jednog vektorskog prostora zove se dimenzija toga vektorskog prostora. Ako je dimenzija nekog vektorskog prostora jednaka dva, odnosno tri, itd., onda uredjen skup od bilo koja dva, odnosno tri, itd., linearno nezavisna vektora čini vektorsku bazu toga prostora.

16. Promatraj ponovo vektorski prostor R nad telom R iz zadatka 2; kao što smo videli, tu su upravo vektori sami realni brojevi kao i skalar, tj. elementi tela R; to znači da je, na primer, broj 7 vektor; medjutim, taj broj 7 je ovde i skalar; da bi to na neki način razlikovali, možemo broj 7 kao vektor zapisivati sa strelicom iznad: $\vec{7}$.

Ispitaj da li su vektori iz vektorskog prostora R linearno nezavisni: 1° x=7, y=-3; 2° x=-41, y=113; 3° x=2, y=0; 4° x=1, y=1; 5° x=1, y=2, z=3; 6° x=-1, y=1, z=2; 7° x=1, y=0, z=-1.

Rešenje. Ispitaj prethodno definiciju 7.1 linearne zavisnosti vektora u opštem vektorskom prostoru V nad telom R.

1° Pošto imamo dva vektora: $x=\vec{7}$, $y=\overrightarrow{-3}$, saglasno pomenutoj definiciji 7.1, treba da ispitamo da li iz uslova

$$(0) \qquad a.x+b.y = 0 \quad \text{tj.} \quad a.\vec{7}+b.(\overrightarrow{-3}) = \vec{0},$$

nužno sleduje da je a=0 i b=0, ili je, pak, moguće da gornja jednakost važi i onda kada oba od brojeva (skalara) i nisu istovremeno jednaki nuli. U prvom slučaju rekli bismo da su vektori $\vec{7}$ i $\overrightarrow{-3}$ linearno nezavisni, a u drugom da su linearno zavisni. Radimo. Ispituje se, dakle, kada je $a.\vec{7}+b.(\overrightarrow{-3}) = \vec{0}$, tj. kada je 7a-3b=0 (vodi računa da je vektor, na primer, $\overrightarrow{-3}$ isto što i broj -3, samo što ga u početku radi lakšeg poimanja zapisujemo sa strelicom iznad!); prema tome, stvar se svela na to da ispitamo da li iz uslova:

$$(1) \qquad 7a - 3b = 0,$$

sleduje da je i a=0 i b=0, ili to ne mora biti. No, iz toga uslova neposredno sleduje da je:

$$7a = 3b + 0 \Rightarrow 7a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{7}.b;$$

to znači da se broj (skalar) a izražava preko broja b, tj. ako za b uzmemo bilo koji realan broj, na primer, b=14, tada je odgovarajuće a jednako: $a = \frac{3}{7}.14$, tj. a = 6; drugim rečima, za te brojeve važiće uslov (1); zaista, stavljajući u (1) a=6 i b=14 (primeti da smo b odabrali proizvoljno, tj. za neko drugo b dobili bismo i neko drugo a!), dobijamo:

$$7.6 - 3.14 = 0,$$

što je očigledno tačno.

Zaključak. Moguće je, dakle, da važi veza (0) a da pri tome ne budu oba broja (skalara) a i b jednaka nuli; jedna od takvih mogućnosti je i gore dobijena: a = 6 i b = 14. Zato kažemo da su vektori $\vec{7}$ i $\overrightarrow{-3}$, tj. brojevi 7 i -3, linearno zavisni. Smisao ovog poslednjeg je u sledećem: ako je bar jedan od brojeva a i b, za koje važi jednakost (0), recimo da je to broj (skalar) a, različit od nule, onda jednakost (0) smemo podeliti sa brojem a ($\neq 0$) i, slično kao gore, dobiti veze:

$$a.\vec{7} + b.(\overrightarrow{-3}) = \vec{0} \Rightarrow a.\vec{7} = -b.(\overrightarrow{-3}) + \vec{0} \Rightarrow a.\vec{7} = -b.(\overrightarrow{-3}),$$

i najzad, delenjem sa a ($\neq 0$):

$$\vec{7} = \frac{b}{a} .(\overrightarrow{-3}),$$

tj. vektor $\vec{7}$ (ili broj 7) je moguće linearno izraziti preko vektora $\overrightarrow{-3}$ (ili broja -3). Stoga je i prirodno da kažemo da su vektori $\vec{7}$ i $\overrightarrow{-3}$ (ili brojevi 7 i -3) linearno zavisni. Sada je odmah jasno šta praktično znači kada kažemo da su, recimo dva, tri, itd., vektora linearno nezavisni; znači da se nijedan od njih ne može linearno izraziti preko ostalih.

2° Zavisni su. Postupi analogno prethodnom slučaju.

3° Pošto smo nakon prvog primera stali čvršće na noge, sada možemo raditi i sa manje priče; dakle, iz uslova: $a.\overrightarrow{\sqrt{2}} + b.\vec{0} = \vec{0}$, gde su i a i b realni brojevi, zbog $b.\vec{0} = \vec{0}$ za bilo koji broj (skalar) b, sleduje: $a.\overrightarrow{\sqrt{2}} = \vec{0}$, a odavde očigledno i $a = 0$.

Zaključak. Ako je $a.\overrightarrow{\sqrt{2}} + b.\vec{0} = \vec{0}$, onda je nužno $a = 0$, dok b može biti bilo koji realan broj, tj. moguće je da taj uslov važi, a da oba od brojeva a i b i ne budu istovremeno jednaka nuli. Dakle, vektori $\overrightarrow{\sqrt{2}}$ i $\vec{0}$ jesu linearno zavisni.

Primedba. Nula vektor bilo kog vektorskog prostora je linearno zavisan od bilo kog drugog vektora toga prostora.

4° Neka je $a \in R$ i $b \in R$; uslov $a.\vec{1} + b.\vec{1} = \vec{0}$ možemo napisati i u obliku (vidi pravilo računanja P_5!): $a+b = 0 \Rightarrow a = -b$ pa imamo zaključak sličan kao pod 1°, tj. ako uzmemo, na primer, $b = 5$, biće $a = -5$, i zato: $-5.\vec{1} + 5.\vec{1} = \vec{0}$, a da nijedan od brojeva a i b nije nula. Dakle, vektori $\vec{1}$ i $\vec{1}$ su linearno zavisni.

Primedba. Bilo koji vektor, bilo kog linearnog vektorskog prostora, linearno je zavisan sa samim sobom.

5° Neka su a,b,c realni brojevi (skalari); da li iz uslova:

$$a.\vec{1} + b.\vec{2} + c.\vec{3} = \vec{0}, \text{ tj. } a + 2b + 3c = 0,$$

(drži na umu da su vektori $\vec{1}$, $\vec{2}$, $\vec{3}$ upravo brojevi 1,2,3!), sleduje da je svaki od brojeva a,b,c jednak nuli ili to nije slučaj? No, iz poslednjeg uslova neposredno sleduje: $a = -2b - 3c$; ako, dakle, uzmemo da nam je bilo b bilo c različito od nule, tada makar i bilo $a = 0$, zaključujemo da su vektori, tj. brojevi 1,2,3 linearno zavisni; tako, na primer, ako je $b = 4$ i $c = -3$, biće $a = -2.4 - 3.(-3)$

$= 1$, pa naš uslov postaje:

$$1.\vec{1} + 4.\vec{2} - 3.\vec{3} = \vec{0},$$

što je očigledno tačno. Odatle, na primer, sleduje (kako?!) da je:

$$\vec{2} = \frac{-1}{4}.\vec{1} + \frac{3}{4}.\vec{3},$$

tj. vektor (broj) $\vec{2}$ je linearno zavisan od preostalih vektora (brojeva) $\vec{1}$ i $\vec{3}$.

6° Zavisni su. Radi analogno prethodnom. Isti je slučaj i u 7°.

Primedba. Iz ovih nekoliko primera zaključujemo da su svi vektori u vektorskom prostoru R linearno zavisni. To ne važi samo za gornje primere, već i u opštem slučaju.

17. Promatraj ponovo vektorski prostor P_2 iz zadatka 8; njegovi vektori su polinomi drugog stupnja sa realnim koeficijentima, tj. izrazi oblika $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, gde su a-ovim realni brojevi. Za razne vrednosti tih koeficijenata dobijamo razne vektore (elemente) prostora (skupa) P_2. Tako, na primer, ako nam uredjena trojka (a_0, a_1, a_2) redom znači uredjenu trojku: (1,0,0), zatim (0,1,0), pa (0,0,1), (0,0,0), (1,2,0) i sl., dobićemo da su veličine (izrazi): $1 + 0.x + 0.x^2$, tj. 1, odnosno (računaj smenjujući odgovarajuće vrednosti za a-ove u opšti oblik $a_0 + a_1x + a_2x^2$) x, pa x^2, 0, $1+2x$, i sl. vektori toga prostora.

Ispitaj koje su od sledećih skupina vektorâ prostora P_2 linearno zavisne, a koje nezavisne:

1° 1, x; 2° 1, x^2; 3° x, x^2; 4° 1, x, x^2; 5° 2x, $-3x$, $4x^2$; 6° 1, x, x^2, $7 - 8x + 19x^2$; 7° $2 + 3x - 4x^2$, $4 + 6x - 8x^2$.

Rešenje. Ispitaj prethodno definiciju 7.1 i gornji zadatak 16.

Odmah na početku budimo načisto sa tim da su elementi, tj. vektori vektorskog prostora P_2 upravo izrazi ili funkcije oblika $a_0 + a_1x + a_2x^2$, koje zovemo polinomima drugog stupnja (stepena). Pri tome moramo znati šta znači da su dva takva izraza jednaka. Istina tu se radi o funkcijama, a znamo da su dve funkcije jednake ako imaju isti domen i ako je za svaki "podatak" iz toga domena, "iznos" i jedne i druge ista veličina.

Medjutim, kako se ovde ipak radi o specijalnim funkcijama (polinomima), važiće i nešto jednostavniji uslovi jednakosti. U tom smislu važi sledeće: da bi dva polinoma $p = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ i $q = b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m$ stupnjeva (stepena) n i m, bila jednaka, treba i dosta je da im odgovarajući koeficijenti budu jednaki, tj. ako je:

$$p = q, \text{ onda je } a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \text{ itd.};$$

ako je slučajno jedan polinom stepena većeg nego drugi, onda, da bi oni bili jednaki (za svako x!), koeficijenti toga polinoma uz one članove x^k $(k=0,1,2,\dots)$, kojih nema u onom drugom polinomu, moraju biti jednaki nuli. Tako, na primer, ako hoćemo da bude:

$$2x+3x^2 = a+bx+cx^2+dx^4+ex^7,$$

onda mora biti: a=0, b=2, c=3, d=0 i e=0. Ako nije moguće da svi odgovarajući koeficijenti dvaju polinoma budu jednaki, onda ni ti polinomi ne mogu biti jednaki; tako, na primer, polinom $2x+3x^2$ ne može biti jednak polinomu $a+3x+bx^2+$ $+cx^3$, bez obzira kako mi odabrali koeficijente a,b,c; naime, ako bi bilo:

$$2x+3x^2 = a+3x+bx^2+cx^3,$$

moralo bi biti: a=0, b=3, c=0 i najzad, 3=2, što ne može nikad biti.

Posebno, ako imamo da nam je izvestan polinom $p = a_0+a_1x+\dots$ $\dots+a_nx^n$ stupnja n, jednak nuli (za svako x!), tj. ako je:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n = 0,$$

onda tu 0 treba shvatiti kao nula-polinom: $0+0.x+0.x^2+\dots$ $\dots+0.x^n$ (=0), odakle će, na osnovu gornjeg, slediti da je: $a_0=0,\ a_1=0,\dots,a_n=0$; prema tome, izvestan polinom je jednak nuli (za svako x!) ako su mu svi koeficijenti jednaki nuli.

Sve ovo pročitaj i na primerima ilustruj još jednom i dobro

upamti.

Predjimo sada na rešavanje tekućeg zadatka. Pri tome će jednakost "polinomnih izraza" biti bitna.

1° Treba da ispitamo jesu li vektori 1 i x vektorskog prostora P_2 linearno zavisni ili nezavisni. Drugim rečima, treba posmatrati vezu:

$$a.1 + b.x = 0,$$

gde su a i b realni brojevi, a 0 je neutralni element grupe $(P_2,+)$ (vidi zadatak 8 i napomenu u definiciji 7.1), tj. nula-polinom skupa P_2: $0 = 0+0.x+0.x^2$, i ispitati da li je ona zdovoljena jedino ako je i a=0 i b=0. Jeste. Naime, prethodna veza predstavlja, upravo jednakost polinoma a+bx sa nulom, pa na osnovu napred rečenog <u>mora</u> biti i a=0 i b=0. Prema definiciji 7.1 to znači da su vektori 1 i x, vektorskog prostora P_2, linearno nezavisni.

Praktično to znači da se nijedan od njih ne može linearno izraziti preko drugog, u smislu da je jedan od njih jednak proizvodu neke realne konstante i onog drugog; tako, na primer, ni za jednu konstantu $c \in R$ ne važi:

$$x = c.1, \text{ niti pak } 1 = c.x;$$

to može da bude tačno za neko x (u prvom slučaju, na primer, x = c), ali ne i za <u>svako</u> realno x (c je fiksno); na primer, ako stavimo prvo x=0, biće $0=c.1 \Rightarrow c=0$, a zatim x=1: $1=c.1 \Rightarrow c=1$, što je nemoguće, jer ne može biti c=0 i c=1. Eto, u tome je smisao linearne nezavisnosti vektora 1 i x vektorskog prostora P_2.

2° i 3° Nezavisni su. Radi analogno prethodnom slučaju.

4° Neka su a,b,c realni brojevi (skalari!); ispitajmo da li veza

$$a.1 + b.x + c.x^2 = 0, \text{ tj. } a + bx + cx^2 = 0,$$

ima nužno za posledicu: a=b=c=0, ili možda može neki od brojeva a,b,c da bude i različit od nule. No, gornja veza nam kazuje da je polinom na levoj strani jednak nuli za svako x, a to znači da mu svaki koeficijent <u>mora</u> biti jednak nuli, dakle: a=0, b=0, c=0. To i znači da su vektori $1,x,x^2$ linearno nezavisni.

5° Neka su a,b,c realni brojevi; tada iz jednakosti:

$$a.2x + b.(-3x) + c.4x^2 = 0, \text{ tj. } 2ax - 3bx + 4cx^2 = 0,$$

koju možemo napisati i u obliku:

$$(2a - 3b)x + 4cx^2 = 0,$$

sleduje da mora biti $2a-3b=0$ i $4c=0$, tj. $a = \frac{3}{2}.b$ i $c=0$; to znači da b može biti proizvoljan realan broj, pa dakle i od nule različit, i da pri tome važi gornja veza; tako, na primer, ako stavimo b=2, biće a=3 i, naravno, c=0, polazna jednakost postaje:

$$3.2x - 2.3x + 0.4x^2 = 0,$$

što je očigledno tačno.

Prema tome, vektori $2x,-3x,4x^2$ <u>nisu</u> linearno nezavisni, jer iz uslova: $a.2x + b.(-3x) + c.4x^2 = 0$ ne sleduje obavezno da je i a=0 i b=0 i c=0; može, recimo, biti a=3, b=2 i c=0 a da taj uslov bude zadovoljen.

6° Ispitajmo da li za vektore 1, x, x^2, $7-8x+19x^2$ veza:

$$a + bx + cx^2 + d(7-8x+19x^2) = 0,$$

gde su a,b,c realni brojevi, ima za posledicu da su svi brojevi a, b, c, d jednaki nuli. U tu svrhu napišimo gornju vezu u obliku (radi postepeno!):

$$(a+7d) + (b-8d)x + (c+19)x^2 = 0;$$

odavde neposredno sleduje: $a+7d=0$, $b-8d=0$, $c+19d=0$, odnosno

$$a = -7d, \quad b = 8d, \quad c = -19d;$$

ako, dakle, stavimo da je, na primer, d=1, biće a=-7, b=8 i c=-19; to znači da će gornja veza važiti ~~i~~ u slučaju kada svi brojevi a,b,c i d nisu jednaki nuli (na primer, kada je a=-7, b=8, c=-19 i d=1); prema tome, vektori 1, x, x^2 i

$7-8x+19x^2$ <u>nisu</u> linearno nezavisni, tj. bar jedan od njih može se izraziti preko ostalih; uostalom, to je bilo odmah jasno, jer se iz samog načina zapisivanja vektora $7-8x+19x^2$ vidi da se on linearno izražava preko vektora 1,x i x^2 (kažemo da je on linearna kombinacija vektora 1,x i x^2), tj.:

$$7-8x+19x^2 = 7.1 + (-8).x + 19.x^2.$$

<u>Primedba.</u> Analogno prethodnom, sleduje da je i svaki vektor $a_0+a_1x+a_2x^2$ vektorskog prostora P_2, linearno <u>zavisan</u> od ova tri karakteristična vektora: 1, x i x^2; to se vidi i iz samog zapisivanja vektora $a_0+a_1x+a_2x^2$, jer u tome izrazu figurišu upravo vektori 1,x i x^2. To znači da se svaki vektor prostora P_2 može izraziti preko tri osnovna vektora: 1,x i x^2; s druge strane, pokazali smo da su ta tri vektora medju sobom linearno nezavisna (vidi pod 4°); zato je i prirodno da skup $B = \{1,x,x^2\}$ sastavljen od ta tri vektora nazivamo <u>bazom</u> ili osnovom vektorskog prostora P_2, jer se svaki drugi vektor izražava preko ta tri osnovna (vidi definiciju 7.2). Pošto ta baza ima tri elementa, vektorski prostor P_2 je dimenzije 3 (trodimenzioni vektorski prostor).

<u>Primedba.</u> U gornjoj primedbi videli smo da je skup $B = \{1,x,x^2\}$ jedna baza vektorskog prostora P_2, kao i da je njegova dimenzija 3; to, medjutim, ne znači da taj prostor nema i drugih baza (oprez! on ne može imati dve različite dimenzije!); naime, prema definiciji 7.2 vektorske baze, <u>svaki</u> skup od 3 (to 3 nam označava dimenziju od P_2) linearno nezavisna vektora prostora P_2 čini njegovu vektorsku bazu; tako, na primer, i vektori $2,-x$ i $3x^2$ jesu linearno nezavisni (dokaži to!), pa je i skup $A = \{2,-x,3x^2\}$ jedna vektorska baza prostora P_2.

7° Neka su a i b realni brojevi; posmatrajmo vezu

$$a.(2+3x-4x^2) + b.(4+6x-8x^2) = 0,$$

i ispitajmo da li je ona zadovoljena jedino za a=b=0, ili može neki od brojeva a i b da bude različit od nule. U tu svrhu, napišimo gornju jednakost u obliku (radi postepeno!):

$$(2a + 4b) + (3a + 6b)x + (-4a - 8b)x^2 = 0;$$

odavde sleduje da mora biti: $2a+4b=0$, $3a+6b=0$ i $-4a-8b=0$, tj. $a=2b$; to znači da b možemo birati proizvoljno, dok za a treba uzeti dvostruku vrednost od b da bi važila polazna veza; tako, na primer, ako stavimo da je $b=1$ ($\neq 0$), biće $a=2.1=2$, i za to a i b biće zadovoljena polazna veza; dakle, ne moraju oba od brojeva a i b biti jednaka 0, što znači da su vektori $2+3x-4x^2$ i $4+6x-8x^2$ linearno zavisni.

18. Isto pitanje kao u prethodnom zadatku, samo za sledeće skupine vektora prostora P_2:

1^o 1, 2, x (tu je, na primer, $2=2+0.x+0.x^2$);

2^o $x, x^2, x-x^2$;

3^o $1, x^2, x-x^2$;

4^o $5, 3x, 2+x^2$;

5^o $0, -x, x$;

6^o $x-3, x^2+x+1$.

Uputstvo. Ispitaj još jednom prethodni zadatak. 1^o zavisni; 2^o nezavisni; 3^o nezavisni; 4^o nezavisni; 5^o zavisni; 6^o nezavisni.

19. Promatraj ponovo zadatak 9 prema kome skup P_3 svih polinoma $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ trećeg stupnja sa realnim koeficijentima obrazuje vektorski prostor nad telom R realnih brojeva. Specijalno su, na primer, 0, 1, x, x^2, x^3, $x-x^3$, itd., vektori toga prostora (tu je, na primer, broj 0 ustvari nula polinom skupa P_3, tj. $0 = 0+0.x+0.x^2+0.x^3$).

Ispitaj koje su od sledećih skupina vektora prostora P_3 linearno zavisne a koje nezavisne:

1^o $1, x, x^2, x^3$; 2^o $x, 2x, x^2, -x^3$; 3^o $1, -4, x, -4x$;

4^o $x, -x^2, 6x^3$; 5^o $1, 2x, -x^3$; 6^o $-2, x^2, x^3$; 7^o x, x^2, x^3.

Rešenje. 1^o Neka su a,b,c,d realni brojevi; treba da ispitamo da li iz jednakosti:

$$a.1 + b.x + c.x^2 + d.x^3 = 0,$$

nužno sleduje da je svaki od brojeva a,b,c,d jednak nuli; gornju jednakost možemo napisati jednostavno kao jednakost polinoma sa nulom:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = 0;$$

da bi ovo bilo zadovoljeno mora biti $a=0$, $b=0$, $c=0$ i $d=0$ (ispitaj još jednom zadatak 17!), što i znači da su vektori $1,x,x^2,x^3$ linearno nezavisni (tj. ni jedan od njih se ne može izraziti preko ostalih).

Primedba. U prethodnoj tački dokazano je da su vektori $1,x,x^2$ i x^3 linearno nezavisni. Pri tome važi i više, u smislu da se bilo koji drugi vektor prostora P_3 može linearno izraziti preko ta četiri. To sleduje neposredno iz činjenice da je opšti oblik vektora u prostoru P_3 dat sa: $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, gde su a-ovi realni brojevi, što se može napisati i u obliku:

$$a_0.1 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3,$$

odakle se lepo vidi da se taj vektor izražava preko vektora $1,x,x^2$ i x^3. Zato je i prirodno da skup $B = \{1,x,x^2,x^3\}$ zovemo vektorskom bazom prostora P_3 (pomoću nje i skupa R realnih brojeva izražava se svaki drugi elemenat skupa P_3; možemo reći i ovako: čitav prostor P_3 je razapet nad vektorima $1,x,x^2$ i x^3). Broj elemenata baze B predstavlja dimenziju prostora P_3 (ispitaj definiciju 7.2). Dakle, prostor P_3 je dimenzije 4.

Slično kao i u drugoj primedbi zadatka 17, ni ovde ne znači da je gornja baza B vektorskog prostora P_3 jedina. Pošto smo ustanovili da je dimenzija toga prostora jednaka 4, prema definiciji 7.2 svaki skup od 4 linearno nezavisna vektora vektorskog prostora P_3 čini vektorsku bazu istog.

2^o Radeći analogno kao u prethodna dva zadatka dokaži da su vektori $x, 2x, x^2, -x^3$ linearno zavisni. To se, uostalom, neposredno vidi i odatle, što se vektor 2x linearno izražava preko ostalih vektora; naime, mi vektor 2x možemo, očigledno napisati u obliku:

$$2x = 2.x + 0.x^2 + 0.(-x^3),$$

odakle se lepo vidi kako se vektor 2x izražava preko ostalih vektora x, x^2 i $-x^3$ posmatrane skupine vektora pod 2^o

3^o Zavisni su. Radi analogno prethodnom.

4^o Nezavisni su. Postupi analogno kao pod 1^o. Primetimo da ova tri vektora: x, $-x^2$ i $6x^3$ ne čine vektorsku bazu prostora P_3. To je iz razloga što vektorska baza mora imati onoliko elemenata kolika je dimenzija dotičnog vektorskog prostora, a videli smo da je dimenzija vektorskog prostora P_3 jednaka 4.

5^o Nezavisni su. 6^o Nezavisni. 7^o Nezavisni. Uveri se u sve ovo.

20. Posmatraj još jednom vektorski prostor P_n nad telom R iz zadatka 10. Tu su vektori polinomni izrazi oblika: $a_o+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, gde su a-ovi realni brojevi i n prirodan broj; specijalno u tome prostoru vektor 0 je upravo izraz: $0 = 0+0.x+0.x^2+...+0.x^n$.

Ispitaj koje su od sledećih skupina vektora vektorskog prostora P_n linearno nezavisne ,a koje zavisne:

1^o $1, x, x^2, x^3,...x^n$; 2^o x, x^3, x^n $(n\geqslant 4)$;

3^o $x, x^2, x^3,...,x^n$ $(n\geqslant 4)$; 4^o $2x, -3x, 1$ $(n\geqslant 2)$.

Rešenje. 1^o Neka su a_o, a_1, a_2, ...,a_n realni brojevi; posmatrajmo jednakost:

$$a_o\cdot 1 + a_1\cdot x + a_2x^2+...+a_n\cdot x^n = 0,$$

pa ispitajmo da li je ona zadovoljena jedino ako je svaki od a-ova jednak nuli, tj. ako je $a_o=a_1=a_2=...=a_n=0$. No, gornju jednakost možemo jednostavno zapisati kao jednakost polinoma sa nulom:

$$a_o + a_1x + a_2x^2 +...+ a_nx^n = 0,$$

a ovo je tačno jedino ako je $a_o=a_1=a_2=...=a_n=0$. S-toga su vektori $1,x,x^2,...,x^n$ vektorskog prostora P_n linerano nezavisni.

Primedba. Neka je y proizvoljan vektor vektorskog prostora P_n. To znači da je to y nužno oblika: $y = b_o+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n$, gde su b-ovi realni brojevi (naravno da neki, ili pak svi medju njima mogu biti jednaki i nuli). No, tu jednakost možemo napisati i ovako:

$$y = b_o.1 + b_1.x + b_2.x^2+...+b_n.x^n,$$

da se istaknu komponente $1,x,x^2,...,x^n$ posmatrane skupine vektora pod 1^o. Odavde se lepo vidi da se proizvoljni elemenat y, tj. vektor y prostora P_n,može linearno izraziti preko linearno nezavisnih vektora $1,x,x^2,...,x^n$, tj. da je čitav prostor P_n izgradjen (razapet) nad skupom vektora: $B = \{1,x,x^2,...,x^n\}$. Stoga skup B čini jednu vektorsku bazu prostora P_n.

Neposredno se vidi da ova baza B ima n+1 elemenata (vektora); to znači da je dimenzija prostora P_n jednaka n+1; specijalno, za n=2 i n=3 dobijamo da su dimenzije prostora P_2 i P_3 redom jednake 3 i 4, a to je rezultat koji smo dobili i u zadacima 17 i 19.

2^o Nezavisni su. Radi analogno prethodnim slučajevima.

3^o Nezavisni su. Uveri se u to. Vodi računa da je tu n veće od 3.

4^o Vektori 2x, -3x i 1 su linearno zavisni. Naime, neka su a,b i c realni brojevi; treba ispitati da li iz veze:

$$a.2x + b.(-3x) + c.1 = 0, \quad \text{tj. } (2a-3b)x + c = 0,$$

nužno sleduje da je i a=0 i b=0 i c=0, ili to, pak, ne mora biti. No, iz uslova da je $(2a-3b)x + c = 0$ (za svako x!) sleduje:

$$2a-3b = 0 \wedge c = 0 \quad \rightarrow \quad a= \frac{3}{2}.b \wedge c = 0;$$

ako uzmemo da nam je, na primer, b=4, biće a= (računaj!)=6 i naravno c=0; za te vrednosti od a,b,c polazna jednakost postaje:

$$6.2x + 4.(-3x) + 0.1 = 0,$$

što je očigledno tačno. Prema tome, moguće je da polazna jednakost važi i onda kada svaki od brojeva a,b,c nije istovremeno jednak 0 (na primer, za $a=6$, $b=4$ i $c=0$), što prema definiciji 7.1 znači da su vektori $2x$, $-3x$ i 1 linearno zavisni.

Da su gornji vektori linearno zavisni moglo se zaključiti i neposredno iz činjenice da se, na primer, vektor $2x$ može linearno izraziti pomoću vektora $-3x$; naime, očigledno je: $2x = -\frac{2}{3}\cdot(-3x)$; sada je lako ubaciti u igru i treći vektor 1, dodajući ga desnoj strani pomnoženog sa nulom:

$$2x = -\frac{2}{3}\cdot(-3x) + 0\cdot 1,$$

pa je vektor $2x$ izražen preko preostala dva.

21. Promatraj ponovo vektorski prostor R^2 nad telom R realnih brojeva, o kome je bilo reči u zadatku 11. Tu su vektori uredjeni parovi realnih brojeva. Specijalno, kada se govori o nula-vektoru prostora R^2, misli se na uredjeni par (0,0) što je, upravo neutralni element grupe $(R^2,+)$; vidi napomenu uz definiciju 7.1).

Ispitaj da li su vektori sledećih skupina vektora iz vektorskog prostora R^2 linearno nezavisni ili zavisni:

1° (1,0), (0,1); 2° (1,0), (0,1), (x,y) (x i y realni brojevi); 3° (2,1), (0,2); 4° (-1,1), (1,-2), (1,-5); 5° (3,0), (0,5).

Rešenje. Neka su a i b realni brojevi; posmatrajmo jednakost:

$$a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1) = (0,0) \quad (= 0),$$

pa ispitajmo da li ona može da važi jedino ako je $a=0$ i $b=0$. No, tu jednakost možemo napisati u obliku (ispitaj ponovo pravila 1°, 2° i 3° iz zadatka 11, koja govore o tome kako se računa u skupu R^2!):

$$(a,0) + (0,b) = (0,0),$$

odnosno u obliku:
$$(a,b) = (0,0);$$

odavde sleduje (vidi 1° iz zadatka 11!) da mora biti $a=0$ i $b=0$. Na osnovu definicije 7.1 to znači da su vektori (1,0) i (0,1) linearno nezavisni.

2° Treba da ispitamo da li jednakost:

$$a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1) + c\cdot(x,y) = (0,0),$$

gde su a,b,c realni brojevi, ima nužno za posledicu da je svaki od brojeva a,b i c jednak nuli. U tu svrhu napišimo tu jednakost u obliku:

$$(a,0) + (0,b) + (cx,cy) = (0,0),$$

a zatim u obliku

$$(a+cx, b+cy) = (0,0) \text{ (vidi } 3^\circ \text{ i } 2^\circ \text{ iz zadatka 11!);}$$

odavde sleduje da mora biti

$$a + cx = 0$$
$$b + cy = 0;$$

ovo je jedan sistem od dve linearne jednačine sa tri nepoznanice: a, b i c (oprez! mi x i y smatramo poznatim a tražimo a,b i c); iz toga sistema neposredno izlazi da je

$$a = -cx \text{ i } b = -cy;$$

to znači da c možemo da biramo proizvoljno (pa, dakle, i od nule različito), a potom a i b izračunavamo (x i y su dati).

Specijalno, ako u gornje veze stavimo $c=1$, biće $a=-x$ i $b=-y$, pa polazna jednakost postaje:

$$-x\cdot(1,0) - y\cdot(0,1) + 1\cdot(x,y) = (0,0),$$

odnosno

$$(x,y) = x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1) + (0,0),$$

i konačno

$$(x,y) = x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1);$$

pošto vektor (x,y) možemo shvatiti kao opšti vektor prostora R^2, na osnovu poslednje jednakosti zaključujemo da se svaki vektor prostora R^2 može linearno izraziti preko vektora (1,0) i (0,1) (šta više, poslednjom jednakošću dat je i način kako se proizvoljni vektor (x,y) izražava preko ta dva: prva koordinata x pomnoži se sa "prvim" vektorom (1,0), druga koordinata y sa "drugim" vektorom (0,1) i to se sve sabere).

To možemo shvatiti kao da je čitav prostor R^2 "izgradjen na vektorima (1,0) i (0,1)"; kažemo i da je prostor R^2 razapet nad vektorima (1,0) i (0,1). Zato je i prirodno da skup B od ta dva vektora, tj. skup $B = \{(1,0),\ (0,1)\}$ nazovemo vektorskom bazom prostora R^2.

Pošto gornja baza B ima dva elementa, prema definiciji 7.2 to znači da je dimenzija prostora R^2 jednaka 2 (dvodimenzioni prostor).

Naravno da prostor R^2 može imati i drugih baza, no sve one moraju biti istobrojne, tj. imati tačno dva elementa. Prema tome, svaka dva linearno nezavisna vektora iz R^2 čine jednu vektorsku bazu prostora R^2. Specijalno, gornju bazu B nazivamo osnovnom ili ortonormiranom (poslednji naziv kasnije će se opravdati). Same vektore (1,0) i (0,1) te baze najčešće obeležavamo sa e_1 i e_2. Prema tome, za svaki vektor (x,y) prostora R^2 važi rastav: $(x,y) = x.e_1 + y.e_2$.

Primedba. Posmatrajmo jednu koordinantnu ravninu Oxy; po x-osi i y-osi nanesen je skup R realnih brojeva (O je u koordinantnom početku); tada svakom uredjenom paru (x,y) realnih brojeva, tj. svakom elementu skupa R^2 (ili drugim rečima, svakom vektoru (x,y) prostora R^2), odgovara u koordinantnoj ravni potpuno odredjena tačka M, čije su koordinate upravo x i y, tj. tačka M(x,y) (crtaj!). I obrnuto, svakoj tački u ravni odgovara potpuno odredjen par realnih brojeva; to su koordinate te tačke.

Prema tome, izmedju vektorâ (x,y) prostora R^2 i tačaka M koordinantne ravnine postoji obostrano-jednoznačna korespondencija, tj. prostor R^2 možemo u neku ruku indentifikovati sa ravninom; pa i dimenzija prostora R^2 ista je kao i dimenzija ravnine (seti se kako se kaže: ravnina je dvodimenzioni prostor!).

U koordinantnoj ravnini ucrtaj tačke koje odgovaraju vektorima $e_1=(1,0)$ i $e_2=(0,1)$; označimo ih redom sa E_1 i E_2 (crtaj!). Geometrijski, vektore e_1 i e_2 možemo shvatiti kao usmerene segmente $\overrightarrow{OE_1}$ (nalazi se na x-osi) i $\overrightarrow{OE_2}$ (nalazi se na y-osi) dužina jednakih jedinici (jedinični vektori; vidi zadatak 15); neka proizvoljnom vektoru (x,y) prostora R^2 odgovara tačka M(x,y) kordinantne ravnine; tada je potpuno odredjen i usmereni segment $\overrightarrow{OM}$; sada, ranije izvedena jednakost:

$$(x,y) = x.(1,0) + y.(0,1)$$

medju vektorima prostora R^2, postaje:

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{OE_1} + y.\overrightarrow{OE_2},$$

(ispitaj zadatak 15; najzad vidi kako se računa sa usmerenim segmentima). Prema tome, vidimo kako se svaki vektor $\overrightarrow{OM}$ (sa početkom u O), koordinantne ravnine, linearno izražava preko dva normalna jedinična vektora $e_1=\overrightarrow{OE_1}$ i $e_2=\overrightarrow{OE_2}$ (otuda i naziv ortonormirana baza: orto znači normalan ili ortogonalan, a "normiran" znači da mu je dužina 1). Dakle, skup $\{\overrightarrow{OE_1},\ \overrightarrow{OE_2}\}$ čini jednu ortonormiranu bazu vektora u koordinantnoj ravnini (misli se na vektore kao usmerene segmente).

Zaključak. Gornja razmatranja pokazuju kako se prostor R^2 svih uredjenih parova realnih brojeva i izvesna ravnina, koja sa svoje strane predstavlja naš uobičajeni dvodimenzioni prostor, ogledaju jedan u drugome. Posebno, iz gornje dve jednakosti vidimo kako je računanje (sabiranje i množenje brojem) prostora R^2 potpuno analogno sa računanjem u koordinantnoj ravnini (kasnije ćemo videti da to znači da su ti prostori izomorfni; vidi definiciju 10).

3° Neka su a i b realni brojevi; iz istih razloga kao u prethodna dva slučaja, jednakost

$$a.(2,1) + b.(0,2) = (0,0)$$

možemo napisati u obliku

$$(2a, a+2b) = (0,0);$$

odavde sleduje da mora biti: $2a=0 \wedge a+2b=0 \Rightarrow a=0 \wedge b=0$; prema tome, da bi polazna jednakost važila, oba od brojeva a i b moraju biti jednaka nuli, što prema definiciji 7.1 znači da su vektori $(2,1)$ i $(0,2)$ linearno nezavisni.

Na osnovu prethodne primedbe zaključujemo da i skup od ta dva vektora čini, takodje, jednu vektorsku bazu prostora R^2.

4^o Vektori $(-1,1)$, $(1,-2)$ i $(1,-5)$ jesu linearno zavisni; to neposredno sleduje iz prethodne primedbe; videli smo da je dimenzija prostora R^2 jednaka 2; to po definiciji 7.2 dimenzije vektorskog prostora znači da najviše dva vektora toga prostora mogu biti linearno nezavisna; a mi imamo tri vektora.

Ipak, vežbe radi, uverimo se da su ti vektori linearno zavisni, radeći onako kako to zahteva definicija 7.1 linearne zavisnosti. U tu svrhu neka su a,b i c realni brojevi; treba da pokažemo da jednakost

$$a\cdot(-1,1) + b\cdot(1,-2) + c\cdot(1,-5) = (0,0)$$

može da važi a da svaki od brojeva a,b i c i nije jednak nuli; no, koristeći pravila $3^o, 2^o$ i 1^o računanja u skupu R^2 iz zadatka 11, i to tim redom, gornju jednakost možemo napisati u obliku (radi postepeno!):

$$(-a+b+c, a-2b-5c) = (0,0);$$

odavde sleduje da mora biti:

$$-a + b + c = 0$$
$$a - 2b - 5c = 0;$$

ovo je jedan sistem od dve linearne jednačine sa tri nepoznanice (podrobnije o tome vidi poglavlje: Sistemi linearnih jednačina); ako saberemo gornje dve jednačine, nepoznanica a će se poništiti i dobiće se: $-b-4c = 0 \Rightarrow b = -4c$; ako se sa ovom vrednošću za b vratimo u jednu od gornjih jednačina, recimo u prvu, dobićemo da je:

$$-a - 4c + c = 0,$$

a odatle: $a = -3c$; ovim su nepoznanice a i b izražene preko

nepoznanice c; to znači da c možemo birati proizvoljno (pa, dakle, i od nule različito), a potom izračunavamo a i b pomoću: $a = -3c$ i $b = -4c$; ako stavimo da nam je, na primer, $c=-1$ $(\neq 0)$, biće (računaj!): $a=3$ i $b=4$; za te vrednosti brojeva a,b i c polazna jednakost postaje:

$$3\cdot(-1,1) + 4\cdot(1,-2) - 1\cdot(1,-5) = (0,0),$$

za koju se neposredno proverava (radi!) da je tačna.

Prema tome, moguće je da polazna jednakost važi i kada svaki od brojeva a,b i c nije jednak nuli (na primer, za $a=3$, $b=4$ i $c=-1$; šta više, tu je <u>svaki</u> od njih različit od nule); to po definiciji 7.1 i znači da su vektori o kojima je reč linearno zavisni.

5^o Nezavisni su. Postupi analogno prethodnim slučajevima.

22. Isto pitanje kao u prethodnom zadatku za sledeće skupine vektora: 1^o $(1,0)$, $(0,3)$; 2^o $(3,0)$, $(-9,0)$; 3^o $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$; 4^o $(2x,x)$, $(x,-2x)$ (x je realan broj različit od nule); 5^o $(-2,0)$, $(0,5)$, $(1,y)$ (y je realan broj); 6^o $(2,2)$, $(2,-2)$.

<u>Uputstvo.</u> Prouči prethodno zadatak 21 pa radi analogno.

1^o Nezavisni; 2^o Zavisni; 3^o Zavisni; 4^o Nezavisni (vodi računa da je pretpostavljeno da je $x\neq 0$); 5^o Zavisni; 6^o Nezavisni.

23. Posmatraj ponovo vektorski prostor R^3 iz zadatka 13; njegovi su vektori uredjene trojke realnih brojeva; specijalno, nula-vektor toga prostora jeste uredjena trojka $(0,0,0)$ $(=0)$.

Ispitaj da li su vektori sledećih skupina vektora prostora R^3 linearno nezavisni ili zavisni:

1^o $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$; 2^o $(1,0,0)$, $(0,0,1)$;

3^o $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, (x,y,z) (x,y, i z su zadani realni brojevi).

<u>Rešenje.</u> 1^o Neka su a,b,c realni brojevi; treba ispitati da li iz jednakosti:

$$a\cdot(1,0,0)+b\cdot(0,1,0)+c\cdot(0,0,1) = (0,0,0) \quad (=0),$$

nužno sleduje da mora biti i $a=0$ i $b=0$ i $c=0$, ili je moguće da ona bude zadovoljena i kada svaki od brojeva a,b,c nije jednak nuli.

Koristeći pravila množenja uredjene trojke brojem, zatim pravilo kako se sabiraju uredjene trojke, i konačno, pravilo jednakosti uredjenih trojki (ispitaj zadatke 13 i 11!), poslednja jednakost postaje:

$$(a,0,0) + (0,a,0) + (0,0,c) = (0,0,0),$$

odnosno

$$(a,b,c) = (0,0,0);$$

odavde sleduje da mora biti: $a=0$, $b=0$ i $c=0$; prema definiciji 7.1 to znači da su vektori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ linearno nezavisni.

2° Nezavisni su. Postupi analogno kao u prethodnom slučaju

3° Ovi su vektori linearno zavisni bez obzira kakvi su brojevi x,y i z (učinjena je pretpostavka da su realni), tj. (x,y,z) možemo shvatiti kao proizvoljan vektor prostora R^3. Zaista, neka su a,b,c i d realni brojevi i neka je:

$$a\cdot(1,0,0)+b\cdot(0,1,0)+c\cdot(0,0,1)+d\cdot(x,y,z) = (0,0,0);$$

dokažimo da ova jednakost može da važi i kada svaki od brojeva a,b,c i d nije jednak nuli (tj. kada je bar jedan različit od nule); na osnovu definicije 7.1, sleduje tada i gornje tvrdjenje.

Iz istih razloga kao i pod 1°, gornju jednakost možemo napisati u obliku (radi postepeno!):

$$(a+dx, b+dy, c+dz) = (0,0,0);$$

odavde sleduje da mora biti:

$$a + dx = 0$$
$$b + dy = 0$$
$$c + dz = 0;$$

ovo je jedan sistem od tri jednačine sa četiri nepoznanice: a,b,c i d (oprez! tu x, y i z smatramo poznatim); o takvim sistemima biće reči docnije (vidi poglavlje: Sistemi linearnih jednačina); ipak, gornji sistem je vrlo jednostavan i iz njega neposredno sleduje da je:

$$a = -dx, \quad b = -dy, \quad c = -dz;$$

to znači da nepoznanicu d možemo birati proizvoljno, a potom izračunavamo nepoznanice a,b i c (x,y i z dati brojevi); specijalno, ako stavimo da je $d=-1$ (dakle različito od nule), biće $a=x$, $b=y$ i $c=z$, pa polazna jednakost postaje:

$$(1) \qquad x\cdot(1,0,0)+y\cdot(0,1,0)+z\cdot(0,0,1) - (x,y,z) = (0,0,0),$$

za koju se neposredno proverava da je tačna.

Prema tome, polazna jednakost može da važi i kada svaki od brojeva a,b,c,d nije jednak nuli (na primer, za $d=-1$ $(\neq 0)$, $a=x$, $b=y$ i $c=z$; tu nije isključeno da bude $a=b=c=0$, na primer, ako je $x=y=z=0$; važno je da je bar jedan različit od nule, a to je konkretno d, bez obzira kakvi su x, y i z, jer d ne zavisi od njih). Ovim je tvrdjenje dokazano.

Primedba. Vratimo se ponovo na jednakost (1); prebacujući vektor (x,y,z) na desnu stranu i vodeći računa da je: $(x,y,z)+(0,0,0) = (x,y,z)$, jednakost (1) možemo napisati i u obliku:

$$(x,y,z) = x\cdot(1,0,0) + y\cdot(0,1,0) + z\cdot(0,0,1),$$

tj. vektor (x,y,z) linearno se izražava preko vektora $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$; u tome i jeste smisao linearne zavisnosti tih vektora.

Medjutim, vektor (x,y,z) možemo shvatiti kao opšti vektor prostora R^3; prema gornjem, to znači da se svaki vektor prostora R^3 linearno izražava preko tri osnovna vektora: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$, koje redom možemo označiti sa e_1 (1 na prvom mestu), e_2 (1 na drugom mestu) i e_3 (1 na trećem mestu).

Zato je i prirodno da skup $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ od ta tri vektora nazovemo vektorskom bazom vektorskog prostora R^3 (ispitaj zadatak 21).

Pošto ta baza B ima tri elementa (vektora), po definiciji 7.2 to znači da je prostor R^3 dimenzije tri (trodimenzioni prostor).

Taj prostor R^3 upravo je ovaj naš obični trodimenzioni prostor (nacrtaj jedan koordinantni sistem u prostoru, pa postupi analogno kao u zadatku 21).

24. Posmatraj ponovo vektorski prostor R^n (n je prirodan broj) iz zadatka 14. Njegovi su vektori uredjene n-torke realnih brojeva: $(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Na kraju, nula-vektor toga prostora je uredjena n-torka $(0,0,\dots,0)$ (ima n nula).

Specijalno, za $n=2$ i $n=3$ dobijamo vektorske prostore R^2 i R^3 o kojima je gore bilo reči.

Dokaži da su vektori: $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $(0,0,1,\dots,0)$, $\dots,(0,0,0,\dots,1)$ linearno nezavisni. Te vektore možemo označiti redom sa: e_1 (1 na prvom mestu, ostalo 0), e_2 (1 na drugom mestu, ostalo 0), e_3 (1 na trećem mestu, ostalo 0), $\dots$, e_n (1 na n-tom mestu, ostalo 0).

Dokaz. Neka su $a_1,a_2,\dots a_n$ realni brojevi; treba dokazati da iz jednakosti:

$$(1) \qquad a_1\cdot e_1 + a_2\cdot e_2 + a_3\cdot e_3 + \dots + a_n\cdot e_n = e,$$

gde su $e_1,e_2,e_3,\dots e_n$ gore definisani vektori i $e=(0,0,\dots,0)$ nula-vektor prostora R^n, nužno sleduje da je svaki od a-ova jednak nuli.

Radimo. Prvo je: $a_1\cdot e_1 = a_1\cdot(1,0,0,\dots,0)$ = (gledaj 3° iz zadatka 13) $= (a_1,0,0,\dots,0)$, zatim $a_2\cdot e_2 = (0,a_2,0,\dots,0)$, $\dots$, i najzad $a_n\cdot e_n = (0,0,0,\dots a_n)$, tj. proizvod broja a_k i vektora e_k jeste uredjena n-torka u kojoj su sve nule osim što se na k-tom mestu nalazi $a_k\cdot 1 = a_k$ (drži na umu konkretan slučaj, na primer, $n=3$); tu k može biti $1,2,3,\dots,n$. Sada je:

$$a_1\cdot e_1 + a_2\cdot e_2 = (a_1,0,0,\dots,0) + (0,a_2,0,\dots,0)$$
$$= \text{(gledaj } 2^\circ \text{ iz zadatka 13)} =$$

$$= (a_1,a_2,0,\dots,0),$$

a zatim:

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = (a_1,a_2,0,\dots,0) + (0,0,a_3,\dots,0)$$
$$= \text{(isti razlog kao gore)} =$$
$$= (a_1,a_2,a_3,\dots,0),$$

itd.; vidimo da ćemo kao krajnji rezultat dobiti da je:

$$(2) \quad a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \dots + a_ne_n = (a_1,a_2,a_3,\dots,a_n).$$

Prema tome, polaznu jednakost (1) možemo napisati kao jednakost dve uredjene n-torke (vidi 1° iz zadatka 14):

$$(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n) = (0,0,0,\dots,0);$$

odavde sleduje da mora biti i $a_1=0$ i $a_2=0$ i $a_3=0$ i $\dots$ $\dots$ i $a_n=0$, što po definiciji 7.1 i znači da su dotični vektori $e_1,e_2,\dots,e_n$ linearno nezavisni. Ovim je tvrdjenje dokazano.

Primedba. Posmatrajmo ponovo vektore $e_1,e_2,e_3,\dots,e_n$ koji su gore definisani; neka je $x=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ proizvoljan vektor vektorskog prostora R^n; tada se, potpuno analogno kao gore, može pokazati da važi:

$$(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2+x_3\cdot e_3+\dots+x_n\cdot e_n$$

(to je upravo isto što i jednakost (2), samo što umesto a-ova dolaze x-ovi); iz poslednje jednakosti vidimo kako se (i na koji način!) proizvoljni vektor x vektorskog prostora R^n linearno izražava preko vektora $e_1,e_2,\dots,e_n$; zato je i prirodno da uredjen skup $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ tih vektora nazovemo vektorskom bazom vektorskog prostora R^n.

Pošto gornja baza B ima n elemenata, prema definiciji 7.2 to znači da je dimenzija prostora R^n jednaka n (n-dimenzioni vektorski prostor); samu bazu B zovemo osnovnom ili ortonormiranom bazom n-dimenzionog vektorskog prostora R^n.

Primedba. Postoje i razni drugi vektorski prostori čija je dimenzija jednaka n; tako, na primer, prostor

P_{n-1} ima takodje dimenziju jednaku n (vidi zadatak 20; umesto n stavljeno je n-1). Može se pokazati da su svi vektorski prostori istih dimenzija, na primer n, medjusobno izomorfni (vidi definiciju 10); najistaknutiji medju svim tim prostorima je upravo prostor R^n; zato je i uobičajeno kada se kaže n-dimenzioni vektorski prostor, da se misli na prostor R^n svih uredjenih n-torki realnih brojeva kao vektora, sa kojima se računa po pravilima 1^o, 2^o i 3^o iz zadatka 14.

Linearno izražavanje vektora preko zadanih vektorâ razlaganje vektora duž zadanih komponenti u zadanom vektorskom prostoru

25. Zadani su vektori 7, $-3x$ i $2x^2$ vektorskog prostora P_2 (ispitaj zadatke 8 i 17). Sledeće vektore izrazi pomoću gornja tri vektora:

1^o $3 + 8x - 4x^2$; 2^o x^2; 3^o $16x$; 4^o -9; 5^o $12x - 6x^2$;

6^o $4x - 9$; 7^o $a + bx + cx^2$ (tu su a, b, c dati realni brojevi).

Rešenje. 1^o Treba naći takve brojeve a, b i c (ukoliko postoje) da važi jednakost (dobro prouči zadatak 17!):

$$3 + 8x - 4x^2 = a\cdot 7 + b\cdot(-3x) + c\cdot 2x^2;$$

no, ovo je jednakost dva polinoma drugog stupnja (vidi zadatak 17), a oni su jednaki (za svako x) jedino ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki; dakle je:

$$7a = 3, \quad -3b = 8, \quad 2c = -4,$$

i zato:

$$a = \frac{3}{7}, \quad b = -\frac{8}{3}, \quad c = -2,$$

pa traženo razlaganje glasi:

$$3 + 8x - 4x^2 = \frac{3}{7}\cdot\underline{7} - \frac{8}{3}\cdot(\underline{-3x}) - 2\cdot\underline{2x^2}.$$

2^o Treba naći takve brojeve p, q i r da važi jednakost:

$$x^2 = p\cdot 7 + q\cdot(-3x) + r\cdot 2x^2;$$

no, ta jednakost predstavlja upravo jednakost dva polinoma (levu stranu treba shvatiti kao polinom: $0+0\cdot x+x^2$), a oni su jednaki jedino ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki; mora dakle biti:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad 2r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2},$$

pa traženo razlaganje vektora x^2 duž vektora 7, $-3x$ i $2x^2$, glasi:

$$x^2 = 0\cdot\underline{7} + 0\cdot\underline{-3x} + \frac{1}{2}\cdot\underline{2x^2}.$$

3^o Postupi analogno prethodnom slučaju.

4^o Radi analogno kao pod 2^o (-9 shvati kao polinom: $-9+0\cdot x+0\cdot x^2$).

5^o i 6^o Postupi analogno kao pod 1^o i 2^o.

7^o Budimo odmah načisto da brojeve a, b i c smatramo poznatim. Potražimo takve brojeve p, q i r da važi jednakost:

$$a + bx + cx^2 = p\cdot\underline{7} + q\cdot\underline{-3x} + r\cdot\underline{2x^2};$$

iz jednakosti ova dva polinoma sleduje da je:

$$7p = a, \quad -3q = b, \quad 2r = c,$$

odnosno: $p = a/7$, $q = -b/3$, $r = c/2$; traženo je razlaganje:

$$a + bx + cx^2 = \frac{a}{7}\cdot\underline{7} + \frac{-b}{3}\cdot\underline{-3x} + \frac{c}{2}\cdot\underline{2x^2}.$$

Specijalno, za a=3, b=8 i c=-4, iz 7^o sleduje 1^o (uveri se u to uporedjujući rezultat iz 1^o sa rezultatom iz 7^o za a=3, b=8 i c=-4). Isto tako, stavljajući u 7^o: a=0, b=0 i c=1, dobijamo 2^o.

Šta treba uzeti za a, b i c pa da vektor $a + bx + cx^2$ postane vektor iz tačke 4^o, tj. vektor -9? Isto pitanje, samo umesto vektora iz tačke 4^o vektor iz tačke 3^o, odnosno 5^o, a zatim iz 6^o. Uporedi te rezultate sa rezultatima dobijenim pod $3^o, 4^o, 5^o$ i 6^o.

26. Dati su vektori $2-4x+x^2$ i $3x-x^2$ vektorskog prostora P_2; sledeće vektore izrazi pomoću gornja dva (naravno, ukoliko je to moguće):

1^o $1-x$; 2^o $x+x^2$; 3^o $6-x+3x^2$; 4^o $9-4x^2$; 5^o $1-x+x^2$;
6^o $7-8x+9x^2$; 7^o 1; 8^o $6-6x+x^2$.

Uputstvo. Radi potpuno analogno prethodnom zadatku. Tako, na primer, za vektor $7-8x+9x^2$ iz tačke 6^o, treba da bude (p i q su nepoznati):

$$7-8x+9x^2 = p\cdot(2-4x+x^2) + q\cdot(3x-x^2); \tag{1}$$

grupišući odgovarajuće članove na desnoj strani, gornju jednakost možemo napisati u obliku (radi postepeno!):

$$7-8x+9x^2 = 2p+(3q-4p)x+(p-q)x^2,$$

odakle sleduje da mora biti (jednakost dva polinoma!):

$$2p = 7, \quad 3q-4p = -8, \quad p-q = 9;$$

ovo je upravo jedan sistem od tri linearne jednačine sa dve nepoznanice p i q; o sličnim problemima biće reči docnije (vidi poglavlje: Sistemi linearnih jednačina); no, gornji sistem dosta je jednostavan; naime, iz prve jednačine neposredno se dobija da je: $p = 7/2$; sada treća od jednačina postaje: $7/2 - q = 9$ $q = -11/2$ (računaj!).

Prema tome, iz prve i treće jednačine, dobili smo da je:

$$p = \frac{7}{2}, \qquad q = -\frac{11}{2}$$

a šta je sa drugom od gornje tri jednačine?; nju uopšte nismo koristili; zato treba ispitati da li nadjene vrednosti za p i q zadovoljavaju i tu jednačinu (jer mi tražimo rešenje celog sistema); pa uvrstimo te vrednosti za p i q u drugu od jednačina:

$$3\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) - 4\cdot\frac{7}{2} = -8,$$

odnosno, nakon sredjivanja (radi postepeno!): $-\frac{61}{2} = -8$,

što je očigledno apsurd; to znači da posmatrani sistem ne može biti zadovoljen ni za jedno p i q (protivrečan je); stoga ni jednakost (1) ne može važiti ni za jedno realno p i q; drugim rečima, znači da se vektor $7-8x+9x^2$ ne može linearno izraziti preko vektora $2-4x+x^2$ i $3x-x^2$ (saglasno prethodnim zadacima, to upravo znači da su oni linearno nezavisni).

Radeći analogno gornjem, dokaži da se vektori o kojima je reč u $1^o, 2^o, 3^o, 4^o, 5^o$ i 7^o, takodje ne mogu izraziti pomoću gornja dva vektora; to je ipak moguće sa vektorom o kome je reč u 8^o; uveri se u to.

27. Dati su vektori $(2,0)$ i $(0,-1)$ vektorskog prostora R^2; sledeće vektore toga prostora izrazi pomoću ta dva:

1^o $(1,0)$; 2^o $(0,1)$; 3^o $(7,-5)$; 4^o $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$;
5^o $(0,0)$; 6^o (a,b), gde su a i b dati realni brojevi.

Rešenje. U svim ovim slučajevima radi se o tome da se odrede takvi realni brojevi p i q, da zbir (kaže se još i linearna kombinacija):

$$p\cdot(2,0) + q\cdot(0,-1),$$

bude jednaka vektoru koji hoćemo razložiti duž vektora $(2,0)$ i $(0,-1)$.

1^o U ovom slučaju, dakle, p i q treba odrediti iz uslova (naravno ukoliko je to moguće):

$$(1,0) = p\cdot(2,0) + q\cdot(0,-1),$$

koji se može napisati u obliku (vidi zadatke 11 i 21; radi postupno):

$$(1,0) = (2p, -q);$$

ovo je jednakost dvaju uredjenih parova; zato je:

$$2p = 1 \text{ i } -q = 0 \Rightarrow p=1/2, \; q=0,$$

pa traženo razlaganje glasi:

$$(1,0) = \frac{1}{2}\cdot(2,0) + 0\cdot(0,-1).$$

2° i 3° Radi analogno kao pod 1°.

4° Treba odrediti realne brojeve p i q (ukoliko postoje), tako da važi jednakost:

$$(\sqrt{2},-\sqrt{3}) = p\cdot(2,0) + q\cdot(0,-1),$$

koja je ekvivalentna sa jednakošću

$$(\sqrt{2},-\sqrt{3}) = (2p,-q);$$

odavde sleduje da mora biti:

$$2p = \sqrt{2} \text{ i } -q = -\sqrt{3} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } q = \sqrt{3},$$

pa traženo razlaganje glasi:

$$(\sqrt{2},-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(2,0) + \sqrt{3}\cdot(0,-1).$$

5° Tu su i p i q jednaki nuli. Uveri se u to.

6° Treba odrediti takve realne brojeve p i q (tu a i b smatramo poznatim), tako da važi:

$$(a,b) = p\cdot(2,0) + q\cdot(0,-1);$$

vektor (a,b) možemo shvatiti kao opšti vektor prostora R^2; zato, uzimajući za a i b neke konkretne vrednosti, iz rezultata, koji bude dobijen u ovom delu zadatka, sledovaće i rezultati ostalih delova, tj. iz 6° sledovaće $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ i 5°.

Radeći slično kao pod 1°, gornju jednakost možemo napisati u obliku:

$$(a,b) = (2p,-q),$$

odakle sleduje da mora biti:

$$2p = a \text{ i } -q = b \Rightarrow p = \frac{a}{2}, \quad q = -b,$$

pa traženo razlaganje glasi:

$$(a,b) = \frac{a}{2}\cdot(2,0) - b\cdot(0,-1).$$

Specijalno, ako stavimo a=7 i b=-5, vektor (a,b) postaje vektor (7,-5), a to je vektor o kome je reč u 3°; na osnovu prethodnog rezultata, razlaganje toga vektora po vektorima (2,0) i (0,-1) (stavljaj svuda a=7 i b=-5) glasi:

$$(7,-5) = \frac{7}{2}\cdot(2,0) + 5\cdot(0,-1).$$

Šta treba uzeti za a i b da bi se iz 6° dobili ostali delovi tekućeg zadatka? Radi.

28. Uveri se da su vektori (3,1) i (-1,2) vektorskog prostora R^2 linearno nezavisni, pa pomoću njih izrazi sledeće vektore:

1° (0,-4); 2° $(\pi,-7)$ $(\pi = 3{,}14\ldots)$; 3° (5,0);
4° (2,8); 5° (a,b) gde su a i b zadani realni brojevi.

<u>Rešenje.</u> Da su vektori (3,1) i (-1,2) linearno nezavisni, pokazuje se neposredno (ispitaj zadatak 21).

1° Odredimo realne brojeve p i q tako da važi:

$$(0,-4) = p\cdot(3,1) + q\cdot(-1,2),$$

odnosno, nakon sredjivanja (radi postepeno) :

$$(0,-4) = (3p-q,p+2q);$$

odavde sleduje da mora biti:

$$3p - q = 0$$
$$p + 2q = -4;$$

to je jedan sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznanice p i q; iz prve od tih jednačina sleduje: q = 3p; ako to smenimo u drugu od jednačina, dobićemo jednačinu sa jednom nepoznanicom p:

$$p + 2\cdot 3p = -4,$$

odakle se neposredno dobija da je: $p = -\frac{4}{7}$; sada je $q = 3\cdot(-\frac{4}{7}) = -\frac{12}{7}$; traženo razlaganje glasi:

$$(0,-4) = -\frac{4}{7}\cdot(3,1) - \frac{12}{7}\cdot(-1,2).$$

U ostalim slučajevima postupi analogno prethodnom slučaju 1° i prethodnom zadatku 27. Uveri se da su u tim slučajevima brojevi p i q redom jednaki:

2° $p = \frac{2\pi}{7} - 1$, $q = -3 - \frac{\pi}{7}$; 3° $p = \frac{10}{7}$, $q = -\frac{5}{7}$;

4° $p = \frac{20}{7}$, $q = \frac{22}{7}$; 5° $p = \frac{2a+b}{7}$, $q = \frac{3b-a}{7}$.

Ispiši svako od tih razlaganja. Posebno, iz poslednjeg opšteg slučaja, izvedi preostale specijalne slučajeve; tako, na primer, za a=2 i b=8 iz 5° sleduje 4°; uveri se u to. Izvedi analogno iz 5° i slučajeve $1^\circ, 2^\circ$ i 3°.

<u>Primedba.</u> Iz prethodna dva zadatka vidimo kako nas takvi i slični problemi u vektorskom prostoru dovode do sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznanice (tu se radilo o vektorskom prostoru R^2).

Ako bismo posmatrali slične probleme u prostoru R^3, oni bi nas doveli do sistema od tri linearne jednačine sa tri nepoznanice. Zato će o takvim problemima biti više reči kasnije (vidi poglavlje: Sistèmi linearnih jednačina).

<u>Izomorfizam vektorskih prostora</u>

29. Dokaži da su prostori R i R_0^2, o kojima je reč u zadacima 2 i 12, izomorfni.

<u>Dokaz.</u> Ispitaj prethodno definiciju 10. Prema toj definiciji, da bismo dokazali da su prostori R i R_0^2 izomorfni, treba da dokažemo da postoji preslikavanje I: $R \to R_0^2$ skupa R <u>na</u> skup R^2, koje je obostrano jednoznačno i za koje vredi: slika "iznosa" u prostoru R jednaka je "iznosu" slikâ u prostoru R^2; to znači: ako uzmemo dva proizvoljna "podatka" x i y iz prostora R (to su upravo vektori prostora R), tada tim "podacima" u prostoru R_0^2 odgovaraju potpuno odredjene slike I(x) i I(y) pri preslikavanju I prostora R <u>na</u> prostor R_0^2; s druge strane, "podacima" x i y prostora R (tj. vektorima x i y), odgovara potpuno odredjen "iznos" x+y, koji je takodje u prostoru R (to je, upravo, zbir vektora x i y); isto tako i slikama I(x) i I(y) tih

podataka (koje pripadaju skupu R_0^2, tj. one su vektori prostora R_0^2) u prostoru R_0^2, odgovara potpuno odredjen "iznos" I(x) + I(y) (to je taj "iznos" slikâ koji je gore pomenut), koji, takodje, pripada prostoru R_0^2. E, da li je taj "iznos" slika I(x) + I(y) jednak slici "iznosa" x+y, tj. da li je:

$$I(x+y) = I(x) + I(y)?$$

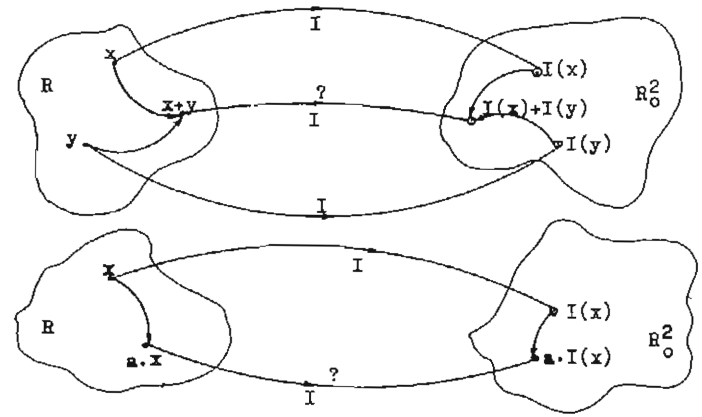
To je ključno pitanje svakog izomorfizma (ispitaj zadatke o grupama koji se odnose na izomorfizam).

Dalje, treba ispitati da li analogna stvar važi i kada se umesto operacije + vektorskog prostora, posmatra operacija ., tj. treba ispitati da li važi i:

$$I(a\cdot x) = a\cdot I(x),$$

gde je a skalar (broj) a x vektor prostora R; dakle, slika proizvoda nekog skalara a i vektora x, treba da bude jednaka proizvodu toga <u>istog</u> skalara (broja) i slike I(x) vektora x.

Shematski bi se prethodna razmatranja mogla prikazati ovako:



Pošto se odredi preslikavanje I prostora R <u>na</u> prostor R_0^2 (ili uopšte, nekog prostora V na prostor W), koje je obostrano jednoznačno, da bi ono bilo izomorfizam treba i dosta je da se opravdaju upitnici na gornjim shemama.

Primenimo to na naš slučaj. Vektori prostora R jesu, upravo, sami realni brojevi, tj. $R = \{x \mid x \in R\}$; s druge strane, vektori prostora R_o^2 (vidi zadatak 12) jesu uredjeni parovi realnih brojeva kod kojih je druga koordinata uvek jednaka nuli, tj. $R_o^2 = \{(x,0) \mid x \in R\}$.

Prvo treba da konstruišemo takvo preslikavanje skupa R <u>na</u> skup R_o^2 koje je obostrano jednoznačno; drugim rečima, treba tačno da preciziramo šta će nam biti slika nekog elementa x iz skupa R; naravno, ta slika mora pripadati skupu R_o^2; pri tome, neki element skupa R (tj. neki vrktor prostora R) može da ima samo jednu sliku, i obratno, bilo koji element skupa R_o^2 jeste slika samo jednog elementa skupa R; u tome je smisao obostrane jednoznačnosti traženog preslikavanja.

No, iz same gornje reprezentacije skupova R i R_o^2, prosto se samo od sebe nameće da elementu x skupa R (tj. vektoru x prostora R), pridružimo element (x,0) skupa R_o^2 (tj. vektor (x,0) prostora R_o^2), kao njegovu sliku, tj. da preslikavanje $I\colon R \longmapsto R_o^2$ skupa R <u>na</u> skup R_o^2 definišemo sa:

$$(1) \qquad I(x) = (x,0) \qquad (\forall x \in R).$$

Tako definisano preslikavanje I je, očigledno, obostrano jednoznačno i preslikava skup R na čitav skup R_o^2. Dokažimo da je I izomorfizam. Zaista, neka su x i y proizvoljni elementi (vektori) skupa (prostora) R (gledaj gornje sheme); pripadne su slike jednake:

$$I(x) = (x,0) \text{ i } I(y) = (y,0),$$

(vidi gore šta znači na neki podatak primeniti "radnju" I); dalje, slika "iznosa" x+y je jednaka: I(x+y) = (gledaj u definiciju preslikavanja I!) = (x+y,0), dok je "iznos" slikâ I(x) i I(y) jednak:

$$I(x) + I(y) = (x,0) + (y,0).$$

Je li to dvoje jednako, tj. je li:

$$I(x+y) = I(x)+I(y), \text{ odnosno, } (x+y,0) = (x,0)+(y,0)?$$

Ova poslednja jednakost je, očigledno, tačna (vidi pravilo 2^o u zadatku 11!). Ovo upravo znači da je opravdan upitnik

na prvoj od gornjih shema.

Potražimo sada sliku $I(a \cdot x)$ vektora $a \cdot x$ iz prostora R; po definiciji preslikavanja I, imamo da je:

$$I(a \cdot x) = (a \cdot x, 0);$$

treba da ispitamo je li to jednako: $a \cdot I(x)$; prema pravilu kako se uredjen par množi brojem (vidi 3^o iz zadatka 11), imamo da je:

$$a \cdot I(x) = (\text{gledaj šta je } I(x)!) = a \cdot (x,0) = (a \cdot x, 0),$$

a to je upravo $I(a \cdot x)$ (gledaj iznad!); dakle je:

$$I(a \cdot x) = a \cdot I(x),$$

što je i trebalo pokazati (vidi definiciju 10). Ovim je opravdan i upitnik na drugoj od prethodnih shema.

Prema tome, preslikavanje $I\colon R \longmapsto R_o^2$ prostora R na prostor R_o^2 je izomorfizam, pa su ti prostori izomorfni. Ovim je dokaz završen.

<u>Primedba.</u> Jasno je da je prostor R jednodimenzioni vektorski prostor (skup R možemo shvatiti i kao skup tačaka jedne prave -brojne prave-, a prava je jednodimenzioni prostor; da je dimenzija prostora R jednaka 1, sleduje i iz zadatka 24 za n=1). S druge strane, važi uopšte: svi vektorski prostori nad telom R medjusobno su izomorfni ako i samo ako imaju istu dimenziju. Pošto su prostori R i R_o^2 izomorfni, to je i dimenzija prostora R_o^2 jednaka 1.

30. Dokaži da su vektorski prostori R^3 i P_2, o kojima je reč u zadacima 8 i 13, izomorfni.

<u>Dokaz.</u> Ispitaj prethodno zadatak 29 i definiciju 10. Napomenimo još jednom da su vektori prostora P_2 polinomi drugog stupnja sa realnim koeficijentima, dok su vektori prostora R^3 uredjene trojke realnih brojeva (ispitaj zadatke 8 i 13).

Radimo analogno kao pri dokazu prethodnog zadatka 29. Treba, dakle, da konstruišemo obostrano jednoznačno preslikavanje $I\colon R^3 \longmapsto P_2$ prostora R^3 <u>na</u> prostor P_2, tako da za svaka dva vektora y i z prostora R^3 (drži na umu da to y i z moraju biti uredjene trojke realnih brojeva!), i svaki realan broj a, važi:

$$\text{(1)} \qquad I(y+z) = I(y) + I(z) \quad i \quad I(a\cdot y) = a\cdot I(y),$$

(vidi shemu iz prethodnog zadatka; tu umesto R i R_o^2 dolaze prostori R^3 i P_2, a umesto x dolazi z; nacrtaj tu shemu i za ovaj zadatak).

Neka je $y = (a_o,a_1,a_2)$ proizvoljni vektor prostora R^3 (tu su a_o,a_1 i a_2 proizvoljni realni brojevi); medjutim, mi ta tri realna broja: a_o,a_1 i a_2 možemo uzeti za koeficijente izvesnog polinoma drugog stupnja; tako, uporedo sa gornjom uredjenom trojkom, možemo posmatrati i polinom drugog stupnja: $a_o+a_1x+a_2x^2$, koji je sa svoje strane vektor prostora P_2.

Vidimo kako se proizvoljnoj uredjenoj trojki realnih brojeva tj. proizvoljnom vektoru prostora R^3 može, na vrlo jednostavan način, pridružiti potpuno odredjen polinom drugog stupnja tj. potpuno odredjen vektor prostora P_2; naime, prvu koordinatu uredjene trojke treba uzeti za prvi koeficijent toga polinoma, drugu koordinatu za drugi koeficijent, i treću koordinatu za treći koeficijent. Zato je prirodno da preslikavanje $I: R^3 \longrightarrow P_2$ prostora R^3 na prostor P_2 definišemo ovako: proizvoljnom elementu $y = (a_o,a_1,a_2)$ skupa R^3 (tj. proizvoljnom vektoru $y = (a_o,a_1,a_2)$ prostora R^3), pridružujemo kao sliku $I(y) = I((a_o,a_1,a_2))$, element (tj. vektor) $a_o+a_1x+a_2x^2$ skupa R^3 (tj. prostora R^3); drugim rečima, preslikavanje I definišemo sa:

$$\text{(2)} \qquad I\big((a_o,a_1,a_2)\big) = a_o+a_1x+a_2x^2,$$

gde je (a_o,a_1,a_2) proizvoljni vektor prostora R^3 (tj. proizvoljni podatak, original), dok je $a_o+a_1x+a_2x^2$ odgovarajući vektor prostora P_2 tj. odgovarajuća slika vektora (a_o,a_1,a_2) pri preslikavanju I .

Sada treba ispitati da li tako definisano preslikavanje I zadovoljava uslove izomorfizma. Prvo, ono je obostrano jednoznačno, što se vidi iz samog načina kako smo ga definisali; preslikavanje I preslikava prostor R^3 na čitav prostor P_2, jer bilo koji element ili vektor prostora P_2, označimo ga sa $b_o+b_1x+b_2x^2$, jeste slika nekog vektora iz prostora R^3, to je upravo vektor (b_o,b_1,b_2).

Dokažimo sada da to preslikavanje zadovoljava uslove (1) (vidi još jednom shemu uz zadatak 29!). U tu svrhu, neka su $y = (a_o,a_1,a_2)$ i $z = (b_o,b_1,b_2)$ dva proizvoljna vektora prostora R^3, i neka je a proizvoljan realan broj; tada je, pre svega:

$$\text{(3)} \qquad y+z = (a_o,a_1,a_2)+(b_o,b_1,b_2) = (a_o+b_o,a_1+b_1,a_2+b_2),$$
$$a\cdot y = a\cdot(a_o,a_1,a_2) = (aa_o,aa_1,aa_2),$$

(drži na umu pomenutu shemu!); to su odgovarajući "iznosi" za podatke y i z, odnosno a i y, u prostoru R^3.

Nadjimo sada slike tih "podataka" i njihovih pripadnih "iznosa" pri preslikavanju I. Jedno za drugim, imamo da je:

$$I(y) = I\big((a_o,a_1,a_2)\big) = \text{(gledaj (2)!)} = a_o+a_1x+a_2x^2,$$

$$I(z) = I\big((b_o,b_1,b_2)\big) = \text{(gledaj u (2) kako se na neki podatak primenjuje "radnja" I)} = b_o+b_1x+b_2x^2,$$

$$I(y+z) = \text{(gledaj (3)!)} = I\big((a_o+b_o,a_1+b_1,a_2+b_2)\big) =$$
$$= \text{(gledaj u (2) kako se na neki podatak primenjuje "radnja" I)} =$$
$$= (a_o+b_o)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2,$$

$$I(a\cdot y) = I\big(a\cdot(a_o,a_1,a_2)\big) = I\big((aa_o,aa_1,aa_2)\big) = \text{(isti razlog kao gore!)} =$$
$$= (aa_o)+(aa_1)x+(aa_2)x^2.$$

Najzad, proverimo da li važe jednakosti (1); proverimo prvo, je li:

$$I(y+z) = I(y) + I(z),$$

odnosno, na osnovu gore izračunatog (gledaj šta nam je $I(y+z)$ i sl.):

$$(a_o+b_o)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2 = (a_o+a_1x+a_2x^2)+(b_o+b_1x+b_2x^2);$$

no, kako je ova jednakost očigledno tačna, zaključujemo da je tačna i prva od jednakosti (1); proverimo sada da li važi i druga od jednakosti (1), tj. da li važi:

$$I(a\cdot y) = a\cdot I(y)\cdot$$

medjutim, na osnovu gore izračunatog, ova je jednakost ekvivalentna sa jednakošću (gledaj gore šta nam je $I(a\cdot y)$ i $I(y)$!):

$$(aa_o)+(aa_1)x+(aa_2)x^2 = a\cdot(a_o+a_1x+a_2x^2),$$

a ova je očigledno tačna.

Ovim je dokazano da preslikavanje I, definisano sa (2), zadovoljava obe od jednakosti (1), pa pošto je ono i obostrano jednoznačno, zaključujemo da je izomorfizam. Dakle, prostori R^3 i P_2 jesu izomorfni.

Primedba. Radeći potpuno analogno kao gore, uveri se da je i preslikavanje $J: R^3 \longrightarrow P_2$, prostora R^3 na prostor P_2, dato sa:

$$J((a_o,a_1,a_2)) = a_1+a_ox+a_2x^2$$

(oprez! tu prvu koordinatu uredjene trojke ne uzimamo, kao gore, za prvi koeficijent odgovarajućeg polinoma, već za drugi koeficijent, a drugu za prvi, dok treću koordinatu uredjene trojke opet uzimamo za treći koeficijent), gde je (a_o,a_1,a_2) proizvoljni vektor prostora R^3, a $a_o+a_1x+a_2x^2$ odgovarajući vektor prostora P_2.

Nadji još neki sličan izomorfizam izmedju ta dva prostora.

31. Dokaži da je prostor R^2 iz zadatka 11 izomorfan sa prostorom P_1 iz zadatka 10 za n=1.

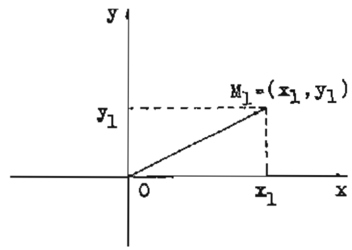
Uputstvo. Vodi računa da su vektori prostora R^2 uredjeni parovi (a_o,a_1) realnih brojeva, dok su vektori prostora P_1 polinomi prvog stupnja sa realnim koeficijentima, tj. izrazi oblika a_o+a_1x, gde su a_o i a_1 realni brojevi.

Dalje postupi potpuno analogno prethodnom zadatku 30.

32. Posmatraj ponovo vektorske prostore R^2 i T, o kojima je reč u zadacima 11 i 15. Vektori prostora R^2 jesu uredjeni parovi realnih brojeva, dok su vektori prostora T usmereni pravocrtni segmenti jedne fiksne ravnine. U tu ravninu uvedimo pravougli Dekartov koordinantni sistem Oxy, sa koordinantnim početkom u tački O.

Pošto se usmereni segmenti (tj. vektori prostora T) ne menjaju kada ih paralelno pomeramo (ispitaj zadatak 15!), možemo smatrati da svi usmereni segmenti koordinantne ravnine imaju početak u tački O, tj. u koordinantnom početku.

Svakom uredjenom paru (x_1,y_1) realnih brojeva, tj. svakom vektoru (x_1,y_1) prostora R^2, odgovara potpuno odredjena tačka M_1 koordinantne ravnine Oxy; to je upravo ona tačka čija je prva koordinata jednaka x_1, a druga y_1.



S druge strane, tom tačkom M_1, potpuno je odredjen usmereni segment $\overrightarrow{OM_1}$, tj. vektor $\overrightarrow{OM_1}$ prostora T.

Drugim rečima, svakom vektoru (x_1,y_1) prostora R^2, na gornji način, pridružujemo potpuno odredjen vektor $\overrightarrow{OM_1}$ prostora T; označimo to pridruživanje (preslikavanje) sa I;

Dakle je:

$$I((x_1,y_1)) = \overrightarrow{OM_1},$$

gde je O koordinantni početak, a M_1 tačka čije su koordinate x_1 i y_1.

Dokaži da je preslikavanje I izomorfizam, tj. da su prostori R^2 i T izomorfni.

Uputstvo. Radi analogno kao u zadacima 29 i 30. Crtaj!

Važna primedba. Može se dokazati da su svi vektorski prostori iste dimenzije medjusobom izomorfni (tj. da se njihovi vektori i računanje sa tim vektorima potpuno "ogledaju" jedni u drugima). Tako, na primer, prostori R^2 i T, o kojima je reč u gornjem zadatku, jesu dimenzije dva (to je naša obična ravnina, tj. dvodimenzioni prostor!).

Od svih prostora dimenzije n (n je prirodan broj), najvažniji je vektorski prostor R^n (ispitaj zadatke 14 i 24), čiji su vektori uredjene n-torke realnih brojeva. Specijalno za n=1, odnosno n=2 i n=3, dobijamo prostore R, odnosno R^2 i R^3, a to su ovi naši obični jednodimenzioni, odnosno, dvodimenzioni i trodimenzioni prostori (prava, odnosno ravnina i "prostor").

Recimo zato nešto više o tim vektorskim prostorima.

Skalarni proizvod vektorâ vektorskog prostora R^n

Definicija 7.3 Neka su $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ i $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ dva vektora vektorskog prostora R^n (drži stalno na umu da su vektori prostora R^n upravo uredjene n-torke realnih brojeva!); pod skalarnim proizvodom tih vektora podrazumevamo skalar (tj. broj): $a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$ i pišemo:

$$(a_1,a_2,\dots,a_n)\circ(b_1,b_2,\dots,b_n) = a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n.$$

To znači da se pomnože odgovarajuće koordinate (prva sa prvom, druga sa drugom, itd.) tih vektora i onda se ti proizvodi saberu.

33. Nadji skalarni proizvod sledećih vektorâ vektorskog prostora R^2:

1° $(1,-7)$, $(-3,-2)$; 2° $(1,1)$, $(3,-6)$; 3° $(1,0)$, $(0,1)$; 4° $(a,0)$, $(0,b)$ (a i b su ma kakvi realni brojevi).

Rezultat: 1° 11; 2° -3; 3° 0; 4° 0.

34. Nadji skalarni proizvod sledećih vektorâ vektorskog prostora R^3:

1° $(1,0,0)$, $(0,1,0)$; 2° $(2,-6,5)$, $(-1,8,4)$; 3° $(1,1,1)$, $(3,4,5)$; 4° (x,y,z), (a,b,c); 5° (x,y,z), (x,y,z).

Rešenje. 1° Na osnovu definicije 7.3 za n = 3, neposredno se nalazi da je traženi skalarni proizvod jednak

$$(1,0,0)\circ(0,1,0) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0.$$

2° Uveri se da je traženi skalarni proizvod jednak -30.

3° Rezultat: 12.

4° Iz istih razloga kao pod 1°, imamo da je

$$(x,y,z)\circ(a,b,c) = ax + by + cz.$$

5° $$(x,y,z)\circ(x,y,z) = xx + yy + zz = x^2+y^2+z^2$$

Primetimo da smo u ovom slučaju tražili skalarni proizvod vektora sa samim sobom; možemo ga zvati "skalarni kvadrat" vektora (x,y,z).

35. Nadji skalarni proizvod sledećih vektorâ vektorskog prostora R^4:

1° $(-2,1,0,9)$, $(-2,-1,1,2)$; 2° $(\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11})$, $(\sqrt{12},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11})$; 3° $(3,\pi,1,-4\pi)$, $(0,-7,3\pi,5)$; 4° $(0,0,1,1)$, $(1,1,0,0)$.

Rešenje.

2° Na osnovu definicije 7.3 za n=4, imamo da je:

$$(\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11})\circ(\sqrt{12},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11}) = \sqrt{3}\cdot\sqrt{12}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{7}\sqrt{7}+\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}$$
$$= 6+5+7+11 = 29.$$

Postupi analogno i u ostalim slučajevima.

Rezultat: 1° 21; 3° -24π; 4° 0.

36. Nadji skalarni proiz od sledećih vektorâ vektorskog prostora R^n:

1° $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$;

2° $(1,1,1,\dots,1)$, $(2,2,2,\dots,2)$;

3° $(1,2,3,\dots,n)$, $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n})$;

4° $(-1,-1,-1,\dots,-1)$, $(-1,-1,-1,\dots,-1)$;

5° $(1,2,1,2,1,\dots,2)$, $(2,1,2,1,2,\dots,1)$,

tu se 1 i 2 naizmenično smenjuju (pretpostavlja se da je n paran broj).

Rešenje. Ispitaj definiciju 7.3. 1° Primenjujući neposredno pomenutu definiciju, uveri se da je traženi skalarni proizvod jednak nuli.

2° Direktno iz definicije 7.3 sleduje da je:

$$(1,1,1,\dots,1)\circ(2,2,2,\dots,2) = 1\cdot2+1\cdot2+1\cdot2+\dots+1\cdot2$$
$$= 2+2+2+\dots+2 = n\cdot2 = 2n.$$

3° Iz istih razloga kao u prethodnom slučaju, imamo da je:

$$(1,2,3,\dots,n)\circ(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\dots,\tfrac{1}{n}) = 1\cdot1+2\cdot\tfrac{1}{2}+3\cdot\tfrac{1}{3}+\dots+n\cdot\tfrac{1}{n}$$
$$= 1+1+1+\dots+1 = n\cdot1 = n.$$

4° Uveri se da je traženi skalarni proizvod jednak n.

5° Rezultat: $n\cdot2 = 2n$.

37. Nadji skalarni proizvod sledećih vektorâ vektorskog prostora R^n:

1° $(1,2,3,\dots,n)$, $(1,1,1,\dots,1)$;

2° $(a,2a,3a,\dots,na)$, $(-1,-1,-1,\dots,-1)$ (tu je a proizvoljan realan broj; zbog čega je bitna pretpostavka da je a realan broj?);

3° $(1,q,q^2,\dots,n^{n-1})$, $(1,1,1,\dots,1)$ (q je realan broj $\neq 1$).

Rešenje. Na osnovu definicije 7.3 neposredno sleduje da je:

$$(1,2,3,\dots,n)\circ(1,1,1,\dots,1) = 1+2+3+\dots+n;$$

Metodom matematičke indukcije, dokaži da je poslednji zbir jednak: $1 + 2 + 3 +\dots+ n = \frac{n(n+1)}{2}$;

dakle, traženi je skalarni proizvod jednak $\frac{n(n+1)}{2}$.

2° Koristeći se rezultatom pod 1°, uveri se da je traženi skalarni proizvod jednak $-\frac{n(n+1)}{2}\cdot a$.

3° Prvo je

$$(1,q,q^2,\dots,q^{n-1})\circ(1,1,1,\dots,1) = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1};$$

metodom matematičke indukcije, dokažimo da je poslednji zbir

jednak

$$(1) \qquad 1 + q + q^2 +\dots+ q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1-q},$$

(pretpostavka je da je q različito od 1, tj. da je $1-q\neq0$); to je upravo zbir geometrijske progresije (zbir geometrijskog niza) čiji je kvocijent jednak q.

Prvi korak: Proverimo da li tvrdjenje važi za n=1; no, za n=1, jednakost (1), koju hoćemo dokazati, svodi se na:

$$1 = \frac{1 - q}{1 - q},$$

a ovo je tačno, jer zbog $1-q \neq 0$ smemo izvršiti kraćenje sa $1-q$.

Drugi korak: Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n=k, gde je k neki fiksan prirodan broj veći od 1, tj. pretpostavimo da jednakost (1) važi za neko n=k:

$$(2) \qquad 1 + q + q^2 +\dots+ q^{k-1} = \frac{1 - q^k}{1-q},$$

(to je takozvana induktivna pretpostavka).

Treći korak: Pomoću prva dva koraka dokažimo da je jednakost (1) tačna i za n=k+1, tj. dokažimo da je:

$$(3) \qquad 1 + q + q^2 +\dots+ q^{k-1} + q^{(k+1)-1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1-q}.$$

No, leva strana ove jednakosti, koju treba da dokažemo, jednaka je:

$$1+q+q^2+\dots+q^{k-1}+q^{(k+1)-1}=(1+q+q^2+\dots+q^{k-1})+q^k;$$

zbir na desnoj strani, koji se nalazi u zagradi, prema induktivnoj pretpostavci, tj. prema (2), jednak je $\frac{1-q^k}{1-q}$, pa je leva strana jednakosti (3) dalje jednaka:

$$1+q+q^2+\dots+q^{k-1}+q^{(k+1)-1} = \frac{1-q^k}{1-q} + q^k,$$

odnosno, nakon sabiranja razlomaka na desnoj strani (radi!):

$$1 + q + q^2 +\dots+ q^{k+1-1} = \frac{1- q^{k+1}}{1-q},$$

a to je upravo jednakost (1) za $n=k+1$, tj. jednakost (3) (na levoj strani ovaj put nije napisan pretpostavljeni sabirak q^{k-1}, već se podrazumeva da je on uračunat u sabirke koje zamenjuju tri tačke).

Zaključak. Kako god smo mi, iz pretpostavke da jednakost (1) važi za neki prirodan broj k, zaključili da ona važi i za naredni prirodan broj (sledbenik od k), tj. k+1, tako bi, iz činjenice da jednakost (1) važi za prirodan broj 1 (gledaj prvi korak), zaključili da ona važi i za naredni prirodan broj 2; i sada se stvar ponavlja tj. iz činjenice da jednakost (1) važi za prirodan broj 2, na osnovu gore dokazanog (tu nam je sada k=2), važiće ona i za naredni prirodan broj 3, pa onda za 4 (shvatajući da je k=3), zatim za 5 (ako za k uzmemo da je 4), itd.,itd.; idući tako sve dalje i dalje, a oslanjajući se stalno na činjenicu da iz drugog koraka sleduje treći, zaključujemo da jednakost (1) važi za svaki prirodan broj n. U tome je smisao metoda matematičke indukcije.

Moglo bi se to kraće ovako reći: kako god smo prešli sa broja k na njegova sledbenika k+1, možemo isto tako preći sa 1 na 2, sa 2 na 3, sa 3 na 4, sa 4 na 5, itd., do kog god broja n želimo.

Prema tome, traženi je skalarni proizvod jednak:

$$(1,q,q^2,\ldots,q^{n-1})\circ(1,1,1,\ldots,1) = \frac{1-q^n}{1-q};$$

uveri se u to za sledeće konkretne slučajeve:

a^0 $n=3$ i $q=2$; b^0 $n=6$ i $q=3$; c^0 $n=5$ i $q=-2$.

Norma (intenzitet) zadana vektora vektorskog prostora R^n

Definicija 7.4 Neka je zadan vektor $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ vektorskog prostora R^n (a-ovi su realni brojevi).

Prema definiciji 7.3, skalarnog proizvoda, imamo da je skalarni proizvod vektora a sa samim sobom, tj. skalarni kvadrat vektora a, u oznaci a^2, jednak:

$$a^2=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\circ(a_1,a_2,\ldots,a_n) = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

Kvadratni koren iz skalarnog kvadrata vektora a zovemo normom ili intenzitetom vektora $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$; označavamo je stavljanjem vektora izmedju dve uspravne crtice: $|a| = |(a_1,a_2,\ldots,a_n)|$.

Dakle je

$$|a| = |(a_1,a_2,\ldots,a_n)| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2},$$

tj. norma $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ vektora $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ jednaka je kvadratnom korenu iz zbira kvadrata koordinata toga vektora.

38. Nadji normu ili intenzitet sledećih vektora vektorskog prostora R^2:

1^0 (1,0); 2^0 (-1,1); 3^0 (0,0); 4^0 (8,-7); 5^0 (-6,-9); 6^0(-3,4); 7^0 (3,-4); 8^0(12,5); 9^0(-12,-5); 10^0 (12,-5).

Rešenje. 9^0 Primenjujući definiciju 7.4 na vektor -12,-5 vektorskog prostora R^2, imamo da je tražena norma jednaka:

$$|(-12,-5)| = \sqrt{-12^{\ 2} + -5^{\ 2}} = \sqrt{169} = 13.$$

I u ostalim slučajevima postupi analogno.

Primedba. U zadatku 32 opisali smo kako se svakom vektoru prostora R^2 pridružuje potpuno odredjen usmeren segment, tj. vektor, koordinantne ravnine Oxy. Tako smo vektoru (x_1,y_1) prostora R^2 pridružili usmereni segment $\overline{OM}_1$ (gledaj sliku uz zadatak 32I).

Dužina ili intenzitet toga usmerenog segmenta jednaka je (primeni Pitagorinu teoremu na naznačeni pravougli trougao):

$$\overline{OM}_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Medjutim, desna strana ove jednakosti upravo je norma vektora (x_1,y_1) vektorskog prostora R^2. Time je opravdan i naziv norme ili intenziteta koji je upotrebljen u definiciji 7.4.

39. Nadji normu sledećih vektora vektorskih prostora R^3 i R^4:

1° (1,0,0); 2° (0,1,0); 3° (0,0,1); 4° (2,-1,3);
5° (1,1,1); 6° (x,y,z) (x,y,z su realni brojevi);
7° (0,0,0); 8° (1,0,0,0); 9° (0,1,0,0); 10° (0,0,1,0);
11° (0,0,0,1); 12° (1,-1,1,-1); 13° (-2,-2,-2,-2);
14° (x,y,z,u).

Rešenje. 4° Na osnovu definicije 7.4 za n=3, imamo da je

$$|(2,-1,3)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^3} = \sqrt{14}.$$

6° Tražena norma je jednaka:

$$|(x,y,z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Postupi potpuno analogno i u ostalim slučajevima.

Rezultati za ostale slučajeve: 1° 1; 2° 1; 3° 1; 5° $\sqrt{3}$;
7° 0; 8° 1; 9° 1; 10° 1; 11° 1; 12° 2; 13° 4;
14° $\sqrt{x^2+y^2+z^2+u^2}$.

40. Dokaži da su vektori $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $e_3 = (0,0,1,\dots,0)$, ..., $e_n = (0,0,0,\dots,1)$ ortonormirane vektorske baze B, vektorskog prostora R^n (ispitaj zadatak 24; uzmi neki konkretan slučaj, na primer, n=3), jedinični (tj. da im je norma jednaka 1).

Dokaz. Budimo odmah načisto s tim kako su gradjeni vektori $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$; čim kažemo, na primer, vektor e_3 ("e tri"), to znači da imamo posla sa uredjenom n-torkom (radi se u prostoru R^n!) kod koje su sve koordinate jednake nuli osim treće (poveži ovo treće sa gore podvučenim "tri"!), koja je jednaka jedinici; isti je slučaj i sa bilo kojim drugim vektorom e_k, gde indeks k pripada skupu $\{1,2,3,\dots,n\}$.

Nadjimo, na primer, normu vektora e_4 (naravno, ukoliko je $n \geqslant 4$); taj vektor ima sve koordinate jednake nuli, sem četvrte koja je jednaka jedinici; zato je, na osnovu definicije 7.4, norma toga vektora jednaka:

$$|e_4| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + \dots + 0^2} = \sqrt{1} = 1,$$

što i znači da je vektor e_4 jedinični.

Uveri se da je, uopšte, $|e_k| = 1$ $(k=1,2,\dots,n)$ (naime, vektor e_k ima jedino k-tu koordinatu različitu od nule, i ona je jednaka jedinici; stoga je zbir kvadrata njegovih koordinata jednak 1).

Primedba. Neka su $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$ dva proizvoljna vektora vektorskog prostora R^2. Tada, prema definicijama 7.3 i 7.4, znamo šta je skalarni proizvod tih vektora, odnosno šta su njihove norme:

$$x \circ y = (x_1,x_2)\circ(y_1,y_2) = x_1y_1 + x_2y_2, \quad |x| = |(x_1,x_2)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad |y| = |(y_1,y_2)| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Ispitajmo da li važi ova dvostruka nejednakost:

$$(0) \qquad -|x|\cdot|y| \leqslant x \circ y \leqslant |x|\cdot|y|,$$

odnosno, na osnovu gore izračunatog,

$$(1) \qquad -\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2} \leqslant x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}.$$

Dokažimo, na primer, da je tačna desna od ovih nejednakosti (postupi potpuno analogno za levu!):

$$(2) \qquad x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2 + y_2^2};$$

desna strana ove nejednakosti uvek je nenegativna; ako je pri tome leva strana negativna, tvrdjenje je dokazano (jer je uvek negativan broj manji od nenegativnog, tj. pozitivnog ili nule); ako bi i leva strana gornje nejednakosti, koju hoćemo dokazati, bila pozitivna, nakon kvadriranja i leve i desne strane dobili bismo (pazi, nejednakost se sme kvadrirati jedino ako su obe strane nenegativne!):

(3) $$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2);$$

ako na levoj strani ove nejednakosti izvršimo naznačeno kvadriranje, a na desnoj naznačeno množenje, nakon kraćeg sredjivanja (radi postepeno!) dobićemo novu nejednakost koja je ekvivalentna sa njom:

(4) $$2\cdot x_1y_1x_2y_2 \leqslant x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 ,$$

koja se, očigledno, može napisati u obliku:

$$(x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 - 2\cdot(x_1y_2)(x_2y_1) \geqslant 0,$$

odnosno u obliku:

(5) $$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0;$$

ova je nejednakost očigledno tačna, jer je kvadrat bilo kog realnog broja uvek nenegativan.

Prema tome, pošto je tačna nejednakost (5), biće tačna i nejednakost (4), zatim (3), i konačno (2). Ovim je dokazana desna od nejednakosti (1), odnosno (0).

Radeći potpuno analogno, uveri se da se leva od nejednakosti (1) svodi na nejednakost

$$-(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leqslant 0,$$

a ova je očigledno tačna, jer se na levoj strani nalazi negativan realan broj (primeti da je ta nejednakost ekvivalentna sa (5); naime, nastaje iz nje množenjem sa -1).

Ako nejednakost (0), odnosno (1), podelimo sa $|x| \cdot |y|$, odnosno sa $\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}$, dobićemo nejednakost:

$$-1 \leqslant \frac{x\ y}{|x|\cdot|y|} \leqslant 1, \text{ odnosno } -1 \leqslant \frac{x_1y_1+x_2y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \leqslant 1;$$

odavde zaključujemo da je količnik skalarnog proizvoda dva vektora vektorskog prostora R^2, i proizvoda njihovih normi

uvek manji ili jednak jedinici, a veći ili jednak od -1.

Jednostavnosti radi posmatrali smo vektore iz prostora R^2; analogna stvar važi i u prostoru R^n: ako su x i y bilo koja dva vektora vektorskog prostora R^n, onda je količnik skalarnog proizvoda tih vektora i proizvoda njihovih normi uvek manji ili jednak 1, a veći ili jednak od -1.

To upravo znači da taj količnik možemo uzeti za, na primer, kosinus nekog ugla α (seti se definicije funkcije kosinus!).

Definicija 7.5 Neka su $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ i $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ dva proizvoljna vektora vektorskog prostora R^n. Pod uglom izmedju ta dva vektora podrazumevamo onaj ugao $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$, čiji je kosinus jednak količniku skalarnog proizvoda tih vektora i proizvoda njihovih normi; dakle je:

$$\cos\alpha = \frac{x\circ y}{|x|\cdot|y|} = \frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}} .$$

Napomena. Gornji količnik jednak je nuli jedino ako je njegov brojilac jednak nuli, tj. ako je skalarni proizvod

$$x\circ y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n ,$$

jednak nuli; no, kako je tada $\cos\alpha = 0$, biće ugao prav $(=90^\circ)$; prema tome, dva vektora prostora R^n jesu normalna ili ortogonalna ako i samo ako je njihov skalarni proizvod jednak nuli.

Prema tome, ako hoćemo odrediti ugao izmedju dva zadana vektora vektorskog prostora R^n (tu je, naravno, n=1,2,3...), onda treba prvo naći skalarni proizvod tih vektora i njihove norme (vidi definicije 7.3 i 7.4); količnik iz tog proizvoda ~~normi~~ i proizvoda jeste kosinus ugla izmedju tih vektora; na kraju se taj ugao nadje pomoću odgovarajućih tablica.

41. Nadji ugao izmedju sledećih vektora vektorskog prostora R^2:

1° (1,0), (0,1); 2° (1,0), (1,1); 3° (0,1), (-1,1); 4° (1,1), (1,-1); 5° $(1,\frac{1}{2}),(-1,2)$; 6° $(\sqrt{3}/2,\ 1/2)$, $(1/2,\ \sqrt{3}/2)$.

Rešenje. 6° Nadjimo prvo skalarni proizvod tih vektora:

$$(\sqrt{3}/2,1/2)\ (1/2,\sqrt{3}/2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

norme tih vektora redom su jednake:

$$|(\sqrt{3}/2,1/2)| = \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1,$$
$$|(1/2,\sqrt{3}/2)| = \sqrt{(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{1/4 + 3/4} = 1;$$

prema tome, kosinus traženog ugla α je jednak:

$$\cos\alpha = \frac{\text{skalarni proizvod vektora}}{\text{proizvod normi tih vektora}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1\cdot 1} = \sqrt{3}/2,$$

a sam ugao α iznosi 30°.

U koordinantnom sistemu Oxy ucrtaj tačke M_1 i M_2 čije su koordinate redom $(\sqrt{3}/2,1/2)$ i $(1/2,\sqrt{3}/2)$ (ispitaj zadatak 321), pa se pomoću uglomera uveri da je ugao izmedju vektorâ (tj. usmerenih segmenata) $\overrightarrow{OM_1}$ i $\overrightarrow{OM_2}$ zaista jednak 30°.

Uveri se da je traženi ugao u ostalim slučajevima jednak: 1° 90°, tj. vektori su ortogonalni; 2° 45° (uveri se u to pomoću koordinantnog sistema); 3° 135°; 4° 90°; 5° 90°.

42. Nadji ugao izmedju sledećih vektora vektorskog prostora R^3:

1° (1,0,0), (0,1,0); 2° (0,1,0), (0,0,1); 3° (0,0,1), (1,0,0); 4° (1,-1,0), $(1,-1,\sqrt{2}/2)$; 5° $(-\sqrt{3}/2,-1/2,0)$, $(-1/2,-\sqrt{3}/2,0)$.

Rešenje. 4° Jedno za drugim, imamo da je

$$(1,-1,0)\ (1,-1,\sqrt{2}/2) = 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot\sqrt{2}/2 = 2,$$

$$|(1,-1,0)| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = 2,$$

$$|(1,-1,\ 2/2)| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(2/2)^2} = \sqrt{1+1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}},$$

pa je kosinus traženog ugla α jednak

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5/2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,9 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 26^\circ \text{ (tablice!)}.$$

Postupi analogno i u ostalim slučajevima, pa se uveri da su traženi uglovi jednaki: 1° 90°; 2° 90°; 3° 90°; 5° 30°.

43. Dokaži da su svi vektori $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2=(0,1,0,\ldots,0)$, $e_3 = (0,0,1,\ldots,0)$, ..., $e_n = (0,0,0,\ldots,1)$ vektorskog prostora R^n, uzajamno ortogonalni.

Kako su to upravo elementi ortonormirane baze B vektorskog prostora R^n, i kako je u zadatku 40 pokazano da su oni jedinični, to će na osnovu toga i gornjeg zadatka biti i opravdan naziv ortonormirane baze.

Uputstvo. Dokaži da je skalarni proizvod bilo koja dva od vektora jednak nuli, itd.

Literatura

Djuro Kurepa

[1] Viša algebra, Beograd, 1971, XXIII+1390, drugo izdanje.

Svetozar Kurepa

[1] Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primene, Zagreb, Tehn.knjiga 1967, 788.

[2] Uvod u matematiku. Skupovi, Strukture. Brojevi. Zagreb, Tehn. knjiga 1970, 252.

Dragoslav S. Mitrinović - Dragomir Ž. Djoković

[1] Polinomi i matrice, Beograd, 1966, 399

Vladimir Devidé

[1] Zadaci iz apstraktne algebre, Naučna knjiga, Beograd, 1968, 114

Alendoerfer C. B. - Cletus Oakley

[1] Principi matematike (prevela Jelena Stojanović), Beograd 1966, 562.

Gojko KALAJDŽIĆ

VI. LINEARNI ALGEBARSKI OBLICI

DETERMINANTE

Definicija 1. Neka je zadana kvadratna tablica a brojeva ili brojevnih izraza sastavljena od dva niza po dva elementa:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

(pazi, tu, na primer, a_{21} ne treba čitati "a dvadeset jedan", već "a dva jedan", dakle kao dva indeksa; analogno vredi i za ostale članove tablice a; prvi indeks označuje broj retka ili vrste, a drugi broj stubca ili kolone).

Determinantu tablice a, u oznaci det a ili $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, definiramo jednakošću:

$$\det a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

desna strana ove jednakosti je vrednost determinante, a leva strana njena oznaka. Zovemo je determinantom drugog reda.

__Definicija 2.__ Neka je data tablica a brojeva ili brojevnih izraza sastavljena od tri niza po tri člana:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Determinantu tablice a, u oznaci det a ili $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ definiramo jednakošću:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}- -a_{22}a_{31}a_{12}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}\ .$$

Levu stranu ove jednakosti zovemo naprosto determinantom trećeg reda, a desnu njenom vrednošću. Ta se vrednost može neposredno izračunati služeći se sledećom šemom (Sarrus-ovo pravilo):

$$\begin{array}{|ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Formalno se dopišu dva prava stupca, pa se proizvodi elemenata na glavnim dijagonalama saberu i od toga oduzmu proizvodi elemenata na sporednim dijagonalama.

__Definicija 3.__ Neka je data determinanta D trećeg reda:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ;$$

ako se precrta redak i stupac u kojima se nalazi neki elemenat a_{ik} (i-ti redak i k-ti stupac; tu i može biti bilo 1, 2 ili 3, i sličko k; drži na umu, na primer, i=2 i k=1, tj. element a_{21}) determinante D, onda šema preostalih elemenata tvori determinantu koja ima jedan redak i jedan stupac manje nego polazna determinanta D, dakle, determinantu drugog reda, a naziva se __subdeterminantom__ ili __minorom__ elementa a_{ik} (konkretno a_{21}). Minor koji odgovara elementu a_{ik} (konkretno a_{21}) možemo označiti sa M_{ik} (konkretno M_{21}), da se istakne da je to minor koji odgovara elementu u i-tom retku i k-tom stupcu (konkretno drugom retku i prvom stupcu). Tako je, na primer, minor elementa a_{21} determinante D jednak:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

__Definicija 4.__ Pomnoži li se minor M_{ik} elementa a_{ik} determinante D (drži na umu neki konkretan minor, recimo kao gore, M_{21}) sa +1 ili -1, već prema tome da li zbir i+k ("indeks retka + indeks stupca") paran ili neparan broj, dobijamo __algebarski komplement__ (kofaktor) A_{ik} elementa a_{ik}, tj.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}\ .$$

__Teorem 1.__ Skalarni proizvod bilo kog retka ili stupca determinante D sa "retkom" ili "stupcem" algebarskih komplemenata elemenata __toga__ retka ili stupca, jednak je vrednosti determinante. Na primer, ako uočimo prvi redak (a_{11}, a_{12}, a_{13}) determinante D, odgovarajući "redak" algebarskih komplemenata jeste (A_{11}, A_{12}, A_{13}), i gornji teorem kaže da je:

$$D = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \circ (A_{11}, A_{12}, A_{13})$$
$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$= a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

Analogno se postupa sa bilo kojim retkom ili stupcem. Specijalno vidimo da je vrlo zgodno razvijati upravo po onom retku ili stupcu koji ima više nula, jer tada nije ni potrebno računati minore tih elemenata (koji su nule!), pošto ih svakako treba množiti sa 0.

Napomena. Pri odredjivanju predznaka kod izračunavanja algebarskih komplemenata, praktično se postupa ovako (uopšte kod svih determinanata!): podje se od polja (1,1) (prvi redak i prvi stupac) kome odgovara predznak +, a potom, idući onako kako ide top u šahu (dakle samo duž retka ili stupca), naizmenično se smenjuju znaci + i −, sve dok se ne dodje do polja koje želimo.

Primedba. Gornji teorem 1 važi uopšte za determinante bilo kog reda, a ne samo trećeg. Pošto su algebarski komplementi pojedinih elemenata determinante četvrtog reda upravo determinante trećeg reda, na osnovu gornje teoreme se, dakle, izračunavanje determinante četvrtog reda svodi na izračunavanje četiri determinante trećeg reda (dakle za 1 nižeg!). Slično je i sa determinantama 5-og, 6-og,...reda.

Determinante drugog reda

1. Izračunaj sledeće determinante:

1^0 $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 8\end{vmatrix}$; 2^0 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -2\end{vmatrix}$; 3^0 $\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 3\end{vmatrix}$; 4^0 $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 5\end{vmatrix}$;

5^0 $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 8\end{vmatrix}$; 6^0 $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 3\end{vmatrix}$; 7^0 $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & -2\end{vmatrix}$; 8^0 $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -2 & 5\end{vmatrix}$.

Opiši rečima kako svaka od tih determinanata nastaje iz prve.

2. Izračunaj sledeće determinante:

1^0 $\begin{vmatrix} \sin a & -\cos a \\ \cos a & \sin a\end{vmatrix}$; 2^0 $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a\end{vmatrix}$; 3^0 $\begin{vmatrix} \sin a & 1/2 \\ \sin 2a & \cos a\end{vmatrix}$;

4^0 $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b\end{vmatrix}$; 5^0 $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin b & \cos b\end{vmatrix}$; 6^0 $\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin b & \cos b\end{vmatrix}$.

Rešenje. Ponovi prethodno osnovne trigonometrijske identitete (sinus i kosinus dvostrukog broja, sinus zbira i razlike dva broja, kosinus zbira i razlike dva broja, itd.).

1^0 Iz same definicije determinante drugog reda, neposredno sledujе da je:

$$\begin{vmatrix} \sin a & -\cos a \\ \cos a & \sin a\end{vmatrix} = \sin a\cdot\sin a + \cos a\cdot\cos a = 1,$$

pri čemu je iskorišćen osnovni trigonometrijski identitet

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad (a\in R).$$

2^0 $$\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a\end{vmatrix} = \cos a\cdot\cos a - \sin a\cdot\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a;$$

kako za svaki realan broj a važi identitet

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$$

(kosinus dvostrukog broja), na osnovu gornjeg imamo da je

$$\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a\end{vmatrix} = \cos 2a.$$

Radeći analogno prethodnim slučajevima, uveri se u ispravnost sledećih rezultata:

3^0 0 (sinus dvostrukog broja!);

4^0 $\sin(a+b)$ (sinus zbira!);

5^0 $\cos(a+b)$ (kosinus zbira!);

6^o $\cos(a-b)$ (kosinus razlike!).

3. Dokaži sledeće jednakosti:

1^o $\begin{vmatrix} a+\sqrt{a} & a^2-2 \\ 1 & a-\sqrt{a} \end{vmatrix} = 0;$ 2^o $\begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^2-b^2 & a+b \end{vmatrix} = 0;$

3^o $\begin{vmatrix} a-b & -1 \\ b^3 & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix} = a^3;$ 4^o $\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2};$

5^o $\begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{1-t^2} & \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix} = 1$ (tu se pretpostavlja da je $t \neq 1$ i $t \neq -1$).

4. Ako su a i b pozitivni brojevi, dokaži identitet

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokaz. Na osnovu definicije determinante drugog reda, neposredno sleduje da je

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_b a \cdot \log_a b ;$$

nadjimo koliko je $\log_b a \cdot \log_a b$; u tu svrhu, stavimo

$$(2) \qquad \log_b a = x \quad i \quad \log_a b = y;$$

treba, dakle, naći koliko je $x \cdot y$; no, iz (2), na osnovu definicije logaritma (podseti se šta je logaritam nekog broja za neku bazu!), sleduje da je

$$b^x = a \qquad i \qquad a^y = b;$$

ako ove jednakosti obe logaritmujemo, ali ne po bazi b, odnosno a, već po istoj bazi, na primer, 10 (baza 10 se ne piše!), i vodimo računa o tome kako se logaritmuje stepen (kako?), dobićemo da je

$$x \cdot \log b = \log a \quad i \quad y \cdot \log a = \log b;$$

odavde neposredno sleduje da je

$$x = \frac{\log a}{\log b} \quad i \quad y = \frac{\log b}{\log a},$$

i zato

$$x \cdot y = \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log a} = 1;$$

kako je, s druge strane, $x \cdot y = \log_b a \cdot \log_a b$, na osnovu jednakosti (1) zaključujemo da je tvrdjenje ispravno.

5. Reši jednačinu po x: $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$; dokaži da je x realno ako su realni brojevi a,b,c.

Rešenje. Na osnovu definicije determinante drugog reda, imamo da je gornja jednačina ekvivalentna sa jednačinom

$$(a-x)(c-x) - b^2 = 0,$$

odnosno, nakon kraćeg sredjivanja (radi!), sa jednačinom

$$x^2 - (a+c) \cdot x + ac - b^2 = 0;$$

ovo je jedna kvadratna jednačina po nepoznanici x, i njena su rešenja data sa

$$x_{1/2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2},$$

tj.

$$x_{1/2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + (2b)^2}}{2};$$

kako su brojevi a,b,c po pretpostavci realni, brojevi $(a-c)^2$

i $(2b)^2$ biće nenegativni (kvadrat realnog broja ne može biti negativan broj!), pa će i njihov zbir, tj. gornja potkorena veličina

$$(a-c)^2 + (2b)^2$$

biti nenegativan broj; no, koren iz nenegativnog broja je realan broj; stoga su i gornja rešenja x_1 i x_2, posmatrane jednačine, realni brojevi, a to se i htelo dokazati.

6. Ako je $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$, onda se izraz $ax^2+2bx+c$ može predstaviti kao potpun kvadrat, ili, što je isto, jednačina $ax^2+2bx+c=0$ ima samo jedno rešenje; i obrnuto. Dokaži.

Dokaz. Neka je prvo $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$; to znači da je $ac-b^2=0$; treba da dokažemo da jednačina $ax^2+2bx+c=0$ ima samo jedno rešenje; no, to je kvadratna jednačina po x, i njena su rešenja data sa

$$x_{1/2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a},$$

tj.

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a};$$

kako je, medjutim, prema gornjem: $ac-b^2=0$, a ovo je upravo prethodna potkorena veličina, gornji izraz za rešenja $x_{1/2}$ postaje

$$x_{1/2} = \frac{-b}{a},$$

što i znači da polazna jednačina ima samo jedno rešenje, jer je $x_1 = x_2 = -b/a$; ovim je dokazan prvi deo tvrdjenja. Pošavši od činjenice da jednačina $ax^2+2bx+c=0$ ima samo jedno rešenje, izvedi zaključak da mora biti $b^2-ac=0$, a time i da je $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$; tada će tvrdjenje biti u potpunosti dokazano.

7. Izraz $\frac{ax+b}{cx+d}$, za koji je $cd \neq 0$, ne zavisi od x ako i samo ako je $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$. Dokaži!

Dokaz. To što je $cd \neq 0$, znači da je i $c \neq 0$ i $d \neq 0$ (drži to na umu tokom celog dokaza!); neka dotični izraz ne zavisi od x, tj. neka je

$$(1) \qquad \frac{ax + b}{cx + d} = f,$$

pri čemu f ne zavisi od x (tj. f je konstanta u odnosu na x!); treba da dokažemo da je tada $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

Zaista, ako se u jednakosti (1) oslobodimo razlomka, dobićemo da je

$$ax + b = f(cx + d),$$

odnosno nakon kraćeg sredjivanja (radi postepeno!):

$$(a-fc)\cdot x + (b-fd) = 0;$$

ova jednakost treba da važi za svako realno x (prema samom uslovu zadatka); kako po pretpostavci veličina f ne zavisi od x, to ni koeficijenti a-fc i b-fd (leva strana gornje jednakosti je upravo polinom prvog stupnja po x!) ne zavise od x; zato mora biti (seti se da je polinom jednak nuli za svako x jedino ako su mu svi koeficijenti jednaki nuli!):

$$a-fc = 0 \text{ i } b-fd = 0 \Rightarrow \frac{a}{c} = f \text{ i } \frac{b}{d} = f,$$

jer je po pretpostavci i $c \neq 0$ i $d \neq 0$ (gledaj napred!); iz poslednje dve jednakosti sleduje da je

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ad - bc = 0,$$

što i znači da je $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$; ovim je prvi deo tvrdjenja dokazan.

Dokažimo sada da važi i obrnuto tvrdjenje, tj. dokažimo da ako je $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, onda izraz $\frac{ax+b}{cx+d}$ (c i d različiti od 0) ne zavisi od x;

Zaista, to što je $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ znači da je $ad-bc=0$, odnosno $ad=bc$; iz poslednje jednakosti, delenjem sa $cd\,(\neq 0)$, sleduje da je $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; ako stavimo da su i leva i desna strana ove jednakosti jednake nekom istom broju f (jer su medjusobom jednake!), biće

$$\frac{a}{c} = f \quad i \quad \frac{b}{d} = f \quad \Rightarrow \quad a = cf \quad i \quad b = df;$$

sada izraz za koji hoćemo dokazati da ne zavisi od x postaje

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{cf\cdot x + df}{cx + d} = \frac{f(cx+d)}{cx+d} = f,$$

pa je tvrdjenje dokazano, jer f ne zavisi od x.

8. Napiši u obliku determinante drugog reda skalarni proizvod ovih nizova:

1^0 2,3; −5,6; 2^0 −8,−3; 3,11; 3^0 a,b; a,−b;

4^0 0,0; 2,2; 5^0 a,b; x,y; 6^0 cos x, sin x; cos x, −sin x.

Rešenje. 3^0 Skalarni proizvod nizova ili vektora (a,b) i (a,−b) je jednak: $(a,b)\,(a,-b) = a\cdot a + b\cdot(-b) = a\cdot a - b\cdot b = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$.

Postupi analogno i u ostalim slučajevima.

Determinante trećeg reda

9. Primenom Sarrus-ova pravila (vidi definiciju 2), izračunaj sledeće determinante:

1^0 $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; 2^0 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 3^0 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$;

4^0 $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 3 \\ 10 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 8 \end{vmatrix}$; 5^0 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 10 & 7 \\ 1 & 12 & 8 \end{vmatrix}$; 6^0 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 6 & 10 \\ 1 & 9 & 12 \end{vmatrix}$.

Rešenje. 2^0 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot5\cdot3 + 3\cdot1\cdot2 + (-4)\cdot(-3)\cdot2 - {}$
$-2\cdot5\cdot(-4) - 3\cdot(-3)\cdot3 - 2\cdot1\cdot5 = 162.$

Ostali rezultati: 1^0 0; 3^0 −47; 4^0 119; 5^0 181; 6^0 −316.

10. Dokaži sledeće jednakosti:

1^0 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc-(a^3+b^3+c^3)$; 2^0 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$;

3^0 $\begin{vmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$;

4^0 $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \cos y & \sin x \sin y \\ -\sin x & \cos x \cos y & \cos x \sin y \\ 0 & -\sin y & \cos y \end{vmatrix} = 1.$

Dokaz. 2° $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot0\cdot0 + a\cdot c\cdot(-b) + b\cdot(-a)\cdot(-c) = -(-b)\cdot0\cdot b - (-c)\cdot c\cdot 0 - 0\cdot(-a)\cdot a = 0.$

4° Neposrednom primenom Sarrus-ova pravila dobijamo da je vrednost D posmatrane determinante jednaka:

$$\begin{aligned}
D &= \cos x\cdot\cos x\cos y\cdot\cos y + \sin x\cos y\cdot\cos x\sin y\cdot 0 + \sin x\sin y\cdot(-\sin x)\cdot(-\sin y) - 0\cdot\cos x\cos y\cdot\sin x\sin y \\
&\quad -(-\sin y)\cdot\cos x\sin y\cdot\cos x - \cos y\cdot(-\sin x)\cdot\sin x\cos y \\
&= \cos^2x\cdot\cos^2y + 0 + \sin^2x\cdot\sin^2y - 0 + \cos^2x\cdot\sin^2y + \\
&\quad + \cos^2y\cdot\sin^2x \\
&= (\cos^2x\cdot\cos^2y + \cos^2x\cdot\sin^2y) + (\sin^2x\cdot\sin^2y + \cos^2y\cdot\sin^2x) \\
&= \cos^2x(\cos^2y + \sin^2y) + \sin^2x(\sin^2y + \cos^2y) \\
&= (\text{dva puta primeni identitet } \sin^2a + \cos^2a = 1,\ a\in R!) = \\
&= \cos^2x\cdot1 + \sin^2x\cdot1 \\
&= \cos^2x + \sin^2x \\
&= 1,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

U preostala dva slučaja postupi analogno.

11. Dokaži sledeće identičnosti:

1° $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} = -2(a^3+b^3)$; $\quad 2^\circ$ $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = 2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc$;

3° $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2+x \end{vmatrix} = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$;

12. Izračunaj sledeće determinante:

1° $\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$; $\quad 2^\circ$ $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix}$; $\quad 3^\circ$ $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$.

Da li rezultat zavisi od x,y i z? Izreci odgovarajuće pravilo!

<u>Rezultat.</u> Svaka od gornjih determinanata ima vrednost abc; dakle, njihova vrednost ne zavisi od x,y i z.

<u>Zaključak.</u> <u>Ako neka determinanta ima samo nule bar sa jedne strane glavne dijagonale, njena je vrednost jednaka proizvodu elemenata sa glavne dijagonale</u> (to važi uopšte za determinantu bilo kog reda, a ne samo trećeg).

13. Uveri se da je:

$$\begin{vmatrix} 2+3i & 4-i & 2+5i \\ 1 & -2 & 1+2i \\ -3 & -2-i & 4+2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-3i & 4+i & 2-5i \\ i & -2 & 1-2i \\ -3 & -2+i & 4-2i \end{vmatrix} = 180i,$$

gde je i imaginarna jedinica, dakle: $i^2 = -1$.

<u>Uputstvo.</u> Izračunaj prethodno svaku od gornjih determinanata.

14. Determinante iz zadatka 9 izračunaj razvijanjem po elementima: 1° prvog retka; 2° drugog stupca; 3° trećeg retka; 4° trećeg stupca; 5° prvog retka; 6° prvog stupca.

<u>Rešenje.</u> 2° Prema teoremu 1 imamo da je (razvijamo po drugom stupcu):

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3\cdot(-11) + 5\cdot23 - 2\cdot(-7) = 162,$$

a to je upravo rezultat koji smo dobili i u zadatku 9.

Postupi analogno i u ostalim slučajevima, pa rezultate uporedi sa rezultatima zadatka 9.

15. Izračunaj determinante razvijanjem po elementima onog retka ili stupca koji sadrži najviše nula:

$1^\circ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; $2^\circ \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$; $3^\circ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

Rezultat. 1° -3; 2° -20; 3° -28.

16. Reši sledeće jednačine:

$1^\circ \begin{vmatrix} x & 2 & 3x \\ x & 2 & 9 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$; $2^\circ \begin{vmatrix} x-2 & x+2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $3^\circ \begin{vmatrix} x & x+3 & 2 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Rešenje. 1° Neposredno se proverava da je determinanta koja se nalazi na levoj strani ove jednačine jednaka $12x^2-42x+18$, pa data jednačina postaje

$$12x^2 - 42c + 18 = 0,$$

odnosno delenjem sa 6:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0;$$

ovo je jedna kvadratna jednačina po x, i njena su rešenja jednaka: $x_1 = 3$ i $x_2 = \frac{1}{2}$.

Postupi analogno i u preostalim dvema jednačinama, pa se uveri da su njihova rešenja: 2° $x = 2$; 3° $x = \frac{4 \pm \sqrt{22}}{3}$.

17. Dokaži $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 1 \\ \sin b & \cos b & 1 \\ \sin c & \cos c & 1 \end{vmatrix} = \sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a).$

18. Ako su a,b i c stranice, i α ugao naspram stranice a trougla ABC, odredi $\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

Rešenje. Ako gornju determinantu označimo sa D, neposrednom primenom Sarrus-ovog pravila nalazimo da je

$$\begin{aligned} D &= a^2 + bc\sin^2\alpha\cos\alpha + bc\sin^2\alpha\cos\alpha - c^2\sin^2\alpha - \\ &- a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha \\ &= a^2(1 - \cos^2\alpha) - \sin^2\alpha(b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha) \\ &= a^2\cdot\sin^2\alpha - a^2\cdot\sin^2\alpha = 0, \end{aligned}$$

pri čemu je iskorišćen osnovni trigonometrijski identitet

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha,$$

i kosinusna teorema za trougao:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha.$$

19. Ako je $1+x+x^2=0$, dokaži da je:

$1^\circ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$; $2^\circ \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = -3x^3$;

$3^\circ \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ x & 1 & x^2 \\ 1 & x^2 & x \end{vmatrix} = 0$; $4^\circ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $5^\circ \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x^2 & x & 1 \\ x & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

Dokaz. 1° Primenom Sarrus-ovog pravila neposredno se nalazi da je vrednost D, determinante pod 1°, jednaka:

$$\begin{aligned} D &= 2x^3 - x^6 - 1 \\ &= (x^3 - x^6) + (x^3 - 1) \\ &= x^3(1 - x^3) + (x^3 - 1) \end{aligned}$$

$= $ (razlika kubova!) $=$

$= x^3(1-x)(1+x+x^2) + (x-1)(x^2+x+1)$

$=$ (po uslovu zadatka je $1+x+x^2=0$) $=$

$= x^3(1-x)\cdot 0 + (x-1)\cdot 0$

$= 0,$

a to je i trebalo dokazati.

Nastojeći uvek da iskoristiš uslov zadatka: $1+x+x^2=0$ (kao, na primer, u prethodnom slučaju), dokaži i preostale jednakosti 2^o, 3^o, 4^o i 5^o.

20. Ako u determinanti dva uzastopna stupca (retka) zamene svoja mesta, determinanta menja znak. Na primer, ako prvi i drugi stupac zamene mesta, dokaži da je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Uputstvo. Izračunaj posebno levu i desnu stranu gornje jednakosti koju treba dokazati, pa uporedi dobijene rezultate.

21. Determinanta koja ima dva proporcionalna stupca (odnosno retka), jednaka je nuli. Na primer, ako je drugi stupac proporcionalan sa trećim (tj. ako nastaje iz trećeg množenjem njegovih elemenata sa nekim istim brojem k), onda je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\cdot a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & k\cdot a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & k\cdot a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Uputstvo. Izračunaj gornju determinantu po Sarrus-ovom pravilu, pa se uveri da je rezultat jednak nuli, bez obzira kakvi su njeni elementi a_{ij} i komponenta k.

U slučaju da je k=1 ili k=0, iz gornjeg zadatka, specijalno sleduje:

Ako determinanta ima dva jednaka stupca (odnosno retka), njena vrednost je jednaka nuli.

Ako neki stupac (odnosno redak) determinante ima samo 0, njena je vrednost jednaka nuli.

22. Determinanta se množi brojem ili brojevnim izrazom tako da se neki njen stupac ili redak (ali samo jedan!) pomnoži tim brojem, odnosno brojevnim izrazom. Tako je, na primer,

$$k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k\cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & k\cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & k\cdot a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Uveri se u to izračunavši posebno svaku od gornjih determinanata, pa uporedjujući dobijene rezultate.

Iz ovog zadatka sleduje da ako neki stupac (odnosno redak) determinante ima zajednički faktor, onda taj faktor možemo izvući ispred determinante (oprez! ako više stupaca ili redaka determinante ima isti zajednički faktor, onda se taj faktor izvlači ispred determinante iz svakog stupca ili retka posebno!).

23. Ako su elementi jednog stupca (odnosno retka) predstavljeni u vidu zbira od po dva broja ili brojevna izraza, determinanta se može napisati kao zbir od dve determinante, na primer,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ;$$

tu je prvi stupac bio predstavljen u vidu zbira dva stupca; analogno važi i za bilo koji drugi stupac ili redak.

Uputstvo. Svaku od gornjih determinanata izračunaj po Sarrus-ovom pravilu, pa dobijene rezultate uporedi.

24. Ako nekom stupcu (odnosno retku) determinante dodamo bilo koji drugi stupac (odnosno redak) pomnožen sa bilo kojim

brojem ili brojevnim izrazom, determinanta ne menja vrednost. Na primer, ako drugom stupcu dodamo prvi stupac pomnožen sa nekim brojem k, biće

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+k\cdot a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+k\cdot a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+k\cdot a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Dokaz se može izvesti izračunavanjem obe od gornjih determinanata, pa uporedjivanjem dobijenih rezultata, analogno kao u prethodnim zadacima (uradi to vežbe radi!). Medjutim, dokaz možemo izvesti i svodjenjem na prethodni zadatak 23, te zadatak 21.

Naime, determinanta koja se nalazi na desnoj strani gornje jednakosti koju hoćemo dokazati, ima drugi stupac predstavljen u vidu zbira dva stupca; stoga se ona, prema zadatku 23, može napisati kao zbir od dve determinante; prva od tih determinanata (radi!) upravo je determinanta koja se nalazi na levoj strani gornje jednakosti, dok druga od njih (ispiši je!) ima drugi stupac proporcionalan sa prvim (koeficijent proporcionalnosti je k), pa je prema zadatku 21 jednaka nuli. Otuda tvrdjenje.

Važna primedba. Zadacima 20, 21, 22, 23 i 24 izražene su osnovne osobine determinanata trećeg reda. Analogne osobine važe i za determinante bilo kog reda, i njih treba dobro upamtiti. Posebno upiremo prstom u osobinu determinanata izraženu zadatkom 24, koja se mnogo upotrebljava pri samom izračunavanju determinanata.

25. Koristeći se osobinom determinanata izraženom zadatkom 21, dokaži da je svaka od sledećih determinanata jednaka nuli:

$$1^\circ \begin{vmatrix} 4 & -3 & 11 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & -3 & 11 \end{vmatrix};\quad 2^\circ \begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix};\quad 3^\circ \begin{vmatrix} 7 & 8 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix};$$

$$4^\circ \begin{vmatrix} 3a & 3 & x \\ 5a & 5 & y \\ -a & -1 & z \end{vmatrix};\quad 5^\circ \begin{vmatrix} a & a^2 & m \\ a & ab & n \\ c & ac & p \end{vmatrix};\quad 6^\circ \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x & x & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. 5° Kako je $a^2:a = ab:b = ac:c$, zaključujemo da je drugi stupac dotične determinante proporcionalan sa njenim prvim stupcem, pa na osnovu zadatka 21 ta determinanta mora biti jednaka nuli.

I u ostalim slučajevima postupi slično: nadji neka dva stupca ili retka koji su proporcionalni, pa se osloni na osobinu determinanata izraženu zadatkom 21.

26. Sledeće determinante napiši kao zbir od dve ili više determinanata:

$$1^\circ \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix};\quad 2^\circ \begin{vmatrix} 2+a & 5 & -a \\ 1-a & -4 & a \\ 3+b & 7 & b \end{vmatrix};\quad 3^\circ \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

Rešenje. 3° Prvi stupac ove determinante možemo shvatiti kao zbir "dva stupca": (1,1,1) i (a,0,0); prema osobini determinanata koja je izražena zadatkom 23, imamo da je data determinanta jednaka

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1+b & 1 \\ 0 & 1 & 1+c \end{vmatrix}.$$

Sada bi se na druge stupce dobijenih determinanata mogao primeniti analogan postupak; dobile bi se 4 determinante kod kojih je samo treći stupac izražen u vidu zbira "dva stupca": (1,1,1) i (0,0,c); ako bi na svaku od te 4 determinante još jednom primenili zadatak 23, dobili bismo polaznu determinantu izraženu kao zbir od 8 determinanata; ispiši svaku od njih, izračunaj ih, rezultate saberi, pa rezultat uporedi sa rezultatom koji se dobije neposrednim izračunavanjem polazne determinante pod 3°; uveri se da su ta dva rezultata ista.

Što se tiče determinanata pod 1° i 2°, primeti da je kod prve od njih prvi redak izražen kao zbir "dva retka": (a,b,c) i (b,c,a), a kod druge prvi stupac izražen kao zbir "dva stupca": (a,1,3) i (a,−a,b); primeni, zatim, osobinu determinanata izraženu zadatkom 23.

27. Koristeći se osobinama determinanata izraženim zadacima 21 i 23, dokaži sledeće jednakosti:

1° $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin(a+x) \\ \sin b & \cos b & \sin(b+x) \\ \sin c & \cos c & \sin(c+x) \end{vmatrix} = 0$; 2° $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \cos(a+x) \\ \sin b & \cos b & \cos(b+x) \\ \sin c & \cos c & \cos(c+x) \end{vmatrix} = 0$

3° $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & 1 \\ \sin^2 b & \cos^2 b & 1 \\ \sin^2 c & \cos^2 c & 1 \end{vmatrix} = 0$; 4° $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log(xy) \\ \log y & \log b & \log(ab) \\ \log p & \log p & \log(pq) \end{vmatrix} = 0$,

pri čemu se u poslednjem slučaju pretpostavlja (zašto?) da su brojevi ili brojni izrazi: x,y,a,b,p,q pozitivni.

Dokaz. 1° Primenom adicione teoreme za sinus zbira dva broja na svaki element trećeg stupca determinante pod 1°, nalazimo da je ona jednaka determinanti:

$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin a\cdot\cos x + \cos a\cdot\sin x \\ \sin b & \cos b & \sin b\cdot\cos x + \cos b\cdot\sin x \\ \sin c & \cos c & \sin c\cdot\cos x + \cos c\cdot\sin x \end{vmatrix};$$

treći stupac ove determinante predstavljen je u vidu zbira dva stupca; stoga se ona može rastaviti na zbir od dve determinante (ispitaj zadatak 23!):

$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin a\cdot\cos x \\ \sin b & \cos b & \sin b\cdot\cos x \\ \sin c & \cos c & \sin c\cdot\cos x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \cos a\cdot\sin x \\ \sin b & \cos b & \cos b\cdot\sin x \\ \sin c & \cos c & \cos c\cdot\sin x \end{vmatrix};$$

na osnovu osobine determinanata izražene zadatkom 21, prva od ovih determinanata jednaka je nuli, iz razloga što su joj prvi i treći stupac proporcionalni (treći nastaje iz prvog

množenjem sa cos x!), a druga zbog proporcionalnosti drugog i trećeg stupca (treći nastaje iz prvog množenjem sa sin x!); zato je i njihov zbir, tj. polazna determinanta jednak nuli, što je i trebalo dokazati.

2° Postupi analogno prethodnom slučaju, vodeći računa da je, na primer, $\cos(a+x) = \cos a\cdot\cos x - \sin a\cdot\sin x$ (adicioni teorem za cosinus zbira dva broja).

3° Iskoristi osnovni trigonometrijski identitet: za svaki realan broj x važi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

naime, jedinicu u prvom retku posmatrane determinante napiši u obliku $\sin^2 a + \cos^2 a$ (koristi se prethodni identitet za $x=a$), i slično u drugom, odnosno trećem retku; zatim postupi kao pod 1°.

4° Iskoristi važno svojstvo logaritma: logaritam proizvoda pozitivnih brojeva jednak je zbiru logaritama pojedinih faktora; naime, svaki element trećeg stupca posmatrane determinante napiši u vidu zbira: $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(pq) = \log p + \log q$; zatim postupi kao pod 1°.

28. Koristeći se osobinama determinanata izraženim zadacima 20 – 24, dokaži sledeće jednakosti:

1° $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$; 2° $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \sin^2 b & \sin^2 c \\ \cos^2 a & \cos^2 b & \cos^2 c \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$;

3° $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$; 4° $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & a & b \\ a^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2ab(b-a)$;

5° $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$; 6° $\begin{vmatrix} a-x & p-y & 1 \\ b-x & q-y & 1 \\ c-x & r-y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & 1 \\ b & q & 1 \\ c & r & 1 \end{vmatrix}$

Rešenje. 1° Prema zadatku 24, ako prvom retku posmatrane determinante dodamo drugi redak (pomnožen sa 1!), determinanta neće promeniti vrednost; ispiši nastalu determinantu; ako sada, u toj determinanti, prvom retku dodamo treći, dobićemo da je ona jednaka (sve smo ovo mogli kraće ovako reći: prvom retku determinante 1^o dodajmo njen drugi i treći redak):

$$\begin{vmatrix} (a-b)+(b-c)+(c-a) & (b-c)+(c-a)+(a-b) & (c-a)+(a-b)+(b-c) \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0,$$

jer je ceo njen prvi redak sastavljen samo od nula naime, očigledno je: $a-b+b-c+c-a = 0$.

2^o Prvi i drugi redak dodaj trećem retku, pa iskoristi osnovni trigonometrijski identitet: $\sin^2x + \cos^2x = 1$.

3^o Sam rezultat govori da dotična determinantna mora imati faktor $a+b+c$ (šta više, mora ga imati tri puta); pokušajmo zato, koristeći se osobinama determinanata izraženim zadacima 20 - 24, da u nekom celom retku, ili pak stupcu, te determinante "naštimamo" taj faktor $a+b+c$; na osnovu osobine izražene zadatkom 22, taj faktor bismo mogli izvući ispred cele determinante i već bi bili jedan korak bliže cilju.

Pa pokušajmo sa dodavanjem drugog i trećeg retka prvom; nastaje determinanta

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix},$$

čija je vrednost, na osnovu zadatka 24, ista kao i vrednost polazne determinante.

Na osnovu osobine izražene zadatkom 22, poslednja je determinanta jednaka (a time i determinanta pod 3^o):

$$(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Dobili smo, dakle, jedan od faktora $a+b+c$, a u rezultatu treba da dobijemo tri; stoga i u poslednjoj determinanti treba nastojati da se u nekom njenom celom redu, ili pak stupcu, pojavi faktor $a+b+c$. U tu svrhu, drugom retku te

determinante dodajmo treći redak; dobijamo

$$(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b+2c & b+c-a & b+c-a \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix};$$

ako bi svakom elementu drugog retka dodali po 2a, očigledno bi u celom drugom retku poslednje determinante dobili faktor $a+b+c$ (prvi bi elemenat toga retka bio taj dvostruki faktor). Samo se radi još o tome kako to izvesti, tj. na osnovu čega bismo mogli dodati svakom elementu drugog retka po 2a? Setimo se zato važne osobine determinanata, izražene zadatkom 24; na osnovu te osobine možemo drugom retku poslednje determinante dodati njen prvi redak pomnožen sa 2a; time je gornji cilj postignut; ispiši tu determinantu; ceo njen drugi redak sadrži faktor $a+b+c$; prema zadatku 22, taj faktor možemo izvući ispred cele determinante; kao rezultat dobijamo

$$(a+b+c)(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix};$$

prema onome šta treba da dobijemo, poslednja determinanta trebala bi upravo biti jednaka $a+b+c$; to bi se moglo proveriti neposredno, primenom Sarrus-ovog pravila (uradi to!) ipak, vežbe radi uradimo to na sledeći način: drugom stupcu poslednje determinante dodajmo treći stupac pomnožen sa -1 (ili, drugim rečima, od drugog stupca oduzmimo treći stupac); ispiši tu determinantu; prvi i drugi elemenat njenog drugog stupca jednaki su nuli, dok je treći upravo $a+b+c$; stoga, na osnovu zadatka 22, iz toga stupca možemo izvući zajednički faktor $a+b+c$; rezultat je

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2c & 1 & c-a-b \end{vmatrix};$$

ako poslednju determinantu razvijemo po drugom stupcu (vidi teorem 1). dobićemo da je njena vrednost jednaka:

$$-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1\cdot(-1) = 1,$$ pa konačan rezultat glasi:
$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\cdot 1 = (a+b+c)^3,$$

a to je i trebalo dokazati.

Napomena. Možda ovaj metod izračunavanja determinanata, na prvi pogled, izgleda malo zamršen i izveštačen. Medjutim, vrlo je važan i efikasan. Zato se sa njim treba što bolje sroditi. Napose, iz prethodnog primera vidimo kako se pomoću ovog metoda može dobiti sam rezultat u vrlo preglednom obliku, što je svakako vrlo važno; naime, da smo polaznu determinantu pod 3^0 računali direktno po Sarrus-ovom pravilu, ili pak razvijanjem po nekom stupcu, odnosno retku, rezultat bi bio vrlo zamršen; uveri se u to.

4^0 Prvo dobro pogledaj šta treba da dobiješ, pa onda radi slično kao u prethodnom slučaju. Drugom stupcu dodaj prvi stupac; pojaviće se zajednički faktor 2a u svim elementima drugog stupca; izvuci ga ispred cele determinante, pa ispiši nastalu determinantu; tako se dobio faktor 2a koji figurira u rezultatu za kojim idemo.

Oduzmi, zatim, prvi stupac od trećeg; prvi elemenat toga stupca biće 0, drugi b-a, a treći $b^2-a^2 = (b-a)(b+a)$; dakle, ceo nastali treći stupac ima zajednički faktor b-a; izvuci i njega ispred determinante.

Konačno, preostalu determinantu razvi po prvom retku, koji sadrži dve nule; njena je vrednost upravo jednaka b, pa s obzirom na izvučene faktore 2a i b-a zaključujemo da je vrednost determinante pod 4^0, od koje smo pošli, jednaka 2ab(b-a); to je i trebalo dokazati.

5^0 Prvi redak oduzmi od drugog i trećeg retka; ispiši nastalu determinantu, koja prema zadatku 24 ima istu vrednost kao i polazna determinanta; drugi redak te determinante ima zajednički faktor b-a, a treći redak c-a (vodi računa da je, na primer, $b^2-a^2 = (b-a)(b+a)$); izvuci te faktore ispred determinante; preostalu determinantu (ispiši je!) razvi po

prvom stupcu; uveri se da je njena vrednost upravo c-b.

Konačan je rezultat, dakle, jednak (b-a)(c-a)(c-b), a to je i trebalo dokazati.

6^0 Treći stupac dodaj prvom stupcu pomnožen sa x, a drugom stupcu pomnožen sa y; dobićeš upravo determinantu koja se nalazi na desnoj strani jednakosti koju hoćemo dokazati; prema zadatku 24, njihove su vrednosti jednake.

29. Koristeći se osobinama determinanata izraženim zadacima 23, 22 i 21, dokaži sledeću jednakost

$$\begin{vmatrix}a+k\cdot p & p+n\cdot a & x\\ b+k\cdot q & q+n\cdot b & y\\ c+k\cdot r & r+n\cdot c & z\end{vmatrix} = (1-kn)\cdot\begin{vmatrix}a & p & x\\ b & q & y\\ c & r & z\end{vmatrix}.$$

Dokaz. Podjimo od determinante na levoj strani jednakosti koju hoćemo dokazati. Njen prvi stupac izražen je u vidu zbira "dva stupca"; prema zadatku 23 tu determinantu možemo napisati kao zbir od dve sledeće determinante

$$\begin{vmatrix}a & p+n\cdot a & x\\ b & q+n\cdot b & y\\ c & r+n\cdot c & z\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}k\cdot p & p+n\cdot a & x\\ k\cdot q & q+n\cdot b & y\\ k\cdot r & r+n\cdot c & z\end{vmatrix};$$

s druge strane, svaka od ove dve determinante ima drugi stupac izražen u vidu zbira "dva stupca"; zato, iz istih razloga kao malopre, svaku od tih determinanata možemo napisati kao zbir od po dve determinante; stoga je determinanata od koje smo pošli jednaka zbiru determinanata

$$\begin{vmatrix}a & p & x\\ b & q & y\\ c & r & z\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & n\cdot a & x\\ b & n\cdot b & y\\ c & n.c & z\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}k\cdot p & p & x\\ k\cdot q & q & y\\ k.r & r & z\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}k\cdot p & n\cdot a & x\\ k\cdot q & n\cdot b & y\\ k\cdot r & n\cdot c & z\end{vmatrix}$$

druga i treća od ovih determinanata imaju proporcionalne prve i druge stupce (koeficijenti proporcionalnosti su redom n i k), pa na osnovu osobine determinanata izražene zadatkom 21, obe su jednake nuli; preostaju, dakle, jedino prva i četvrta od gornje četiri determinante; prva je upravo determinantna koja se nalazi na desnoj strani jednakosti koju dokazujemo; što se tiče četvrte, primetimo da se iz njenog prvog stupca može izvući faktor k, a iz drugog stupca faktor n (vidi zadatak 22!) ; sleduje da je ona jednaka

$$kn\cdot\begin{vmatrix} p & a & x \\ q & b & y \\ r & c & z \end{vmatrix}$$

ova se determinanta razlikuje od prve od gornjih determinanata jedino u tome što su joj prvi i drugi stupac izmenjali mesta; prema zadatku 20, njih dve se razlikuju jedino u preznaku, tj. važi:

$$kn\cdot\begin{vmatrix} p & a & x \\ q & b & y \\ r & c & z \end{vmatrix} = -kn\cdot\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix};$$

prema tome, gornji zbir od četiri determinante, koji je jednak polaznoj determinanti, postaje:

$$\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} + 0 + 0 - kn\cdot\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = (1-kn)\cdot\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix},$$

a to je upravo desna strana jednakosti koju dokazujemo, pa je tvrdjenje dokazano.

30. Dokaži da vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ \cos ax & \cos(a+1)x & \cos(a+2)x \\ \sin ax & \sin(a+1)x & \sin(a+2)x \end{vmatrix},$$

ne zavisi od veličine a.

Uputstvo. Datu determinantu razvi po elementima prvog retka, pa iskoristi adicioni teorem za sinus razlike dva broja:

$$\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos y.$$

Rezultat. $1\cdot\sin x - t\cdot\sin 2x + t^2\cdot\sin x = (1-2t\cos x+t^2)\sin x.$

Primedba. Pri izračunavanju determinante razvijanjem po

nekom njenom stupcu ili retku (ispitaj teorem 11), svakako je velika olakšica ako taj stupac, odnosno redak sadrži što više nula; naime, ako je neki elemenat stupca, odnosno retka po kome razvijamo jednak nuli, onda nije ni potrebno računati algebarski komplement (vidi definiciju 41) toga elementa, jer ga svakako množimo sa nulom.

Prema tome, ako hoćemo neku determinantu da razvijemo po nekom od njenih stupaca ili redaka, onda ćemo odabrati onaj njen stupac ili redak koji ima najviše nula.

Ono što se ovde hoće posebno naglasiti, jeste, da koristeći se osobinom determinanata izraženom zadatkom 24 vidi primedbu uz taj zadatak , možemo postići da bilo koji redak, odnosno stupac determinante ima sve nule osim jedne (misli se samo na jedan redak ili jedan stupac). Tada tu determinantu treba razviti po tom retku, odnosno stupcu.

Sve ovo važi i uopšte za determinante bilo kog reda, a ne samo trećeg.

Ilustrujmo to na nekoliko primera.

31. Ako je $z^5=1$, izračunaj vrednost determinante

$$D = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Neposrednom primenom Sarrus-ovog pravila dobijamo da je

$$(1) \qquad D = z + z^2 + z^3 + z^4.$$

Sada treba iskoristiti uslov zadatka da broj zadovoljava jednačinu $z^5=1$; no, ta jednačina ima pet različitih rešenja; jedno od njih očigledno je i $z=1$ (jer je $1^5=1$); za tu vrednost od z iz (1) sleduje da je

$$D = 1+1^2+1^3+1^4 = 4.$$

Neka je sada $z\neq 1$ i naravno $z^5=1$. Na desnoj strani jednakosti (1) imamo ustvari jednu geometrijsku progresiju od četiri člana sa kvocijentom z; pošto je u ovom slučaju taj kvocijent različit od 1, možemo primeniti formulu da zbir geometrijske progresije (vidi, na primer, zadatak 37 (3°) o vektorskim prostorima); dakle, iz (1) sleduje da je

$$D = z\frac{1-z^4}{1-z} \qquad D = \frac{z-z^5}{1-z} \qquad (z \neq 1);$$

vodeći računa da je $z^5=1$, iz poslednje jednakosti sleduje da je

$$D = \frac{z-1}{1-z} = -\frac{1-z}{1-z} = -1.$$

Zaključak. Ako je $z=1$, tada je $D=4$; u ostalim slučajevima je $D = -1$.

32. Izračunaj sledeće determinante:

$$1^\circ \begin{vmatrix} 7 & -9 & 5 \\ -3 & 10 & 3 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}; \quad 2^\circ \begin{vmatrix} 8 & -7 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 4 \end{vmatrix}; \quad 3^\circ \begin{vmatrix} -3 & 9 & 2 \\ 5 & -8 & 9 \\ 4 & -12 & 7 \end{vmatrix};$$

$$4^\circ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}; \quad 5^\circ \begin{vmatrix} \boxed{1} & 7 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad 6^\circ \begin{vmatrix} -1 & 3 & 11 \\ -5 & 4 & 13 \\ 14 & 1 & 18 \end{vmatrix};$$

$$7^\circ \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 6 & -6 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 8^\circ \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad 9^\circ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Naravno, svaku od ovih determinanata mogli bismo izračunati neposrednom primenom Sarrus-ovog pravila, ili direktnim razvijanjem po nekom retku ili stupcu. Medjutim, pogledajmo kako se kombinovanjem osobine determinanata izražene zadatkom 24 i metoda izračunavanja determinanata razvijanjem po elementima nekog stupca ili retka (ispitaj prethodnu primedbu!), može mnogo brže doći do rezultata (ovo će posebno biti od koristi za determinante višeg reda!).

1° Prvom stupcu ove determinante dodaj treći stupac; nastaje determinanta

$$\begin{vmatrix} 12 & -9 & 5 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix},$$

koja, na osnovu zadatka 24, ima istu vrednost kao i polazna determinanta; poslednju determinantu razvi po prvom stupcu; izlazi da je ona jednaka:

$$12\cdot\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 12\cdot(-28) = -336.$$

Izračunaj polaznu determinantu razvijajući je direktno po, na primer, prvom stupcu, pa se uveri da ćeš dobiti isti rezultat.

2° Od prvog retka oduzmi treći redak; nastalu determinantu razvi po elementima prvog retka.

Rezultat: 40.

3° Drugom stupcu dodaj prvi stupac pomnožen sa 3; ispiši nastalu determinantu, pa je razvi po elementima drugog stupca; uveri se da je traženi rezultat jednak -203.

4° Uočimo, na primer, treći stupac; u njemu imamo već jednu nulu; šta treba uraditi pa da, na primer, na mesto broja 6 (tj. na polje "23" - č. dva tri) dodje broj 0? Pri tome, naravno, treba da i dalje zadržimo već postojeću nulu u tome stupcu (inače nismo ništa uradili; jednu nulu bi dobili a jednu izgubili); pokušajmo ovako: iznad broja 6 nalazi se broj 2; ako bismo to 2 pomnožili sa -3 i dodali dotičnom broju 6, cilj bi bio postignut; samo, to se ne može tek tako raditi, tj. ne smemo samo 2 pomnožiti sa -3 i dodati broju 6; setimo se zato osobine determinanata izražene zadatkom 24; na osnovu te osobine možemo čitav redak (a ne samo 2 kao elemenat toga retka) pomnožiti sa -3 i dodati ga drugom retku; cilj će biti postignut, a da nismo ni dirali u treći redak u kojem se već nalazi jednu nula; tako data determinanta postaje

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} ;$$

ovu determinantu treba razviti po elementima trećeg stupca; kao rezultat dobijamo da je ona jednaka:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 18 = 36.$$

Osvrnimo se još jednom na prethodni postupak, pomoću koga smo na mesto šestice, u determinanti pod 4^o, doveli nulu; mi smo naprosto, koristeći se zadatkom 24, pomoću dvojke iz trećeg stupca "uništili" šesticu koja se nalazila ispod nje.

Zgodno je da taj elemenat determinante, pomoću koga "uništavamo" elemente iz njegovog stupca, odnosno retka, zovemo "topom" (seti se, na primer, kako deluje top u šahu!).

U našem slučaju, "top" je bio elemenat sa polja (1,3) (prvi redak i treći stupac), tj. broj 2, i on je dejstvovao duž trećeg stupca.

Naravno da je on mogao da "dejstvuje" i duž retka u kojem je smešten, dakle duž prvog retka; tada bi pomoću toga "topa", tj. pomoću te dvojke, trebalo "uništiti" trojku koja se nalazi u tom retku, u tom smislu da se umesto nje dovede nula, a da se pri tome vrednost determinante ne promeni; u tu svrhu, sada bi trebalo pomnožiti treći stupac sa nekim brojem, označimo ga za kratko sa x, tako da se, kada ga dodamo drugom stupcu, na polju (1,2) gde se nalazi trojka koju hoćemo smeniti nulom, pojavi nula, tj. tako da bude $3+2\cdot x = 0$; odavde se dobije da za broj x treba uzeti $x=-3/2$ tj. treći stupac treba pomnožiti sa $-3/2$ i dodati ga drugom stupcu; tada će se na polju (1,2) pojaviti nula umesto trojke, a prema zadatku 24 determinanta neće promeniti vrednost.

Da slučajno prvi elemenat posmatranog retka nije nula, mi bismo pomoću uočenog "topa", tj. pomoću uočene dvojke, na sličan način i na njegovo mesto doveli nulu; pri svemu tome ne obraćamo mnogo pažnju na to dali ostali elementi determinante postaju komplikovaniji ili glomazniji, nego što

su možda bili; nama je jedini cilj da pomoću uočenog "topa" (naravno da je top uvek različit od nule!), u celom retku, odnosno stupcu, na koji smo se okomili i u kojem se nalazi taj "top", dobijemo sve nule, osim samog "topa"; zatim tu determinantu treba razviti po tome retku, odnosno stupcu; pri tome je korist očigledna, jer se determinanta svodi na samo jednu determinantu reda za jedan niže od polazne determinante.

Na sličan način izračunaj prethodnu determinantu, uzimajući za "topa" trojku sa polja (2,1) (drugi redak i prvi stupac), i "uništavajući" pomoću njega šesticu koja se nalazi u drugom retku (dakle, onom u kojem se nalazi i sam "top").

5^o Prethodno dobro ispitaj postupak koji je opisan u prethodnom slučaju. Za "topa" uzmimo jedinicu sa polja (1,1) koja je i markirana (uvek je najzgodnije za topa uzeti jedinicu ako je to moguće, jer se pomoću nje najlakše "dejstvuje"!); pomoću toga "topa" uništimo sve što se nalazi ispod njega (dakle, uzimamo da "top" "dejstvuje" duž stupca u kojem se nalazi); da bismo uništili peticu, treba prvi redak pomnožiti sa -5 i dodati ga drugom retku; a da bismo uništili -4, treba prvi redak pomnožiti sa 4 i dodati ga trećem retku (uvek se radi tako: kada "pravimo" nule u nekom stupcu, onda množimo i dodajemo retke, i obrnuto); nastaje determinanta

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & -32 & -13 \\ 0 & 29 & -7 \end{vmatrix} ;$$

prema zadatku 24 njena vrednost je ista kao i vrednost polazne determinante; poslednju determinantu razvijamo po elementima prvog stupca; kao rezultat dobijamo da je ona, a time i polazna determinanta, jednaka:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -32 & -13 \\ 29 & -7 \end{vmatrix} = 601.$$

Izračunaj tu istu determinantu uzimajući da uočeni "top" "dejstvuje" duž prvog retka (dakle, retka u kojem se i sam nalazi; "top" ne može "dejstvovati" duž nekog retka ili stupca u kojem se on ne nalazi!).

Izračunaj još jednom tu determinantu, ali uzimajući za "topa" jedinicu sa polja (3,2) (treći redak i drugi stupac), koji neka "dejstvuje" duž odgovarajućeg stupca (dakle drugog stupca).

6^o Uzmi za "topa", na primer, elemenat sa polja (1,1), tj. broj -1, koji neka "dejstvuje" duž prvog stupca (ispitaj prethodna dva slučaja); prvi redak dodaj drugom pomnožen sa -5, a trećem sa 14; nastalu determinantu zatim razvij po prvom stupcu; rezultat je 76.

Uradi to isto uzimajući da uočeni "top" "dejstvuje" duž prvog retka.

7^o Za "topa" uzmi jedinicu sa polja (3,3), tj. iz trećeg retka i trećeg stupca, koji neka "dejstvuje" duž trećeg retka; treba, dakle, treći stupac dodati drugom stupcu pomnožen sa 1, a prvom pomnožen sa -2; nastalu determinantu razvij po trećem retku; uveri se da je rezultat jednak 10.

Uradi to isto uzimajući za "topa" elemenat sa polja (3,2), tj. broj -1, i koji neka "dejstvuje" duž drugog stupca.

Izračunaj tu determinantu još jednom, uzimajući za "topa" elemenat sa polja (1,1), tj. 2 iz prvog retka i prvog stupca, koji neka "dejstvuje" duž stupca (ili, pak, retka).

8^o i 9^o Odaberi neki elemenat za "topa" (naravno, uvek je najzgodnije uzeti jedinicu ako postoji), pa postupi kao u prethodnim slučajevima; rezultati su, redom 162 i 54.

33. Posmatraj ponovo determinante iz zadataka 9 i 15. Svaku od njih izračunaj "top-postupkom", tj. postupkom koji je opisan u prethodnom zadatku (dakle, pravljenjem što više nula u nekom retku ili stupcu determinante), pa rezultate uporedi sa ranije dobijenim.

Determinante četvrtog i višeg reda

34. Izračunaj vrednost determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} .$$

Rešenje. Ispitaj prethodno primedbu uz teorem 1. Datu determinantu D razvijmo po elementima poslednjeg stupca; dobijamo da je

$$(1) \qquad D = -4\cdot A_{14} + 4\cdot A_{24} - 2\cdot A_{34} + 0\cdot A_{44} ,$$

gde su A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44} odgovarajući algebarski komplementi elemenata -4, 4, -2, 0 stupca po kome razvijamo, dakle:

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} , \quad A_{24} = (-1)^{2+4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} ,$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} , \quad A_{44} = (-1)^{4+4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} ;$$

ovo su sada determinante trećeg reda koje možemo izračunati na neki od ranije opisanih načina; svakako je to najlakše uraditi pomoću "top-postupka" (ispitaj zadatak 32!); pri tome nije ni potrebno računati poslednju od gornjih determinanata, jer nju i onako treba množiti sa nulom, pa nije ni bitno kolika je njena vrednost; uveri se da je: $A_{14} = 0$, $A_{24} = 35$, $A_{34} = -7$.

Prema tome, na osnovu (1), imamo da je

$$D = -4\cdot 0 + 4\cdot 35 - 2\cdot(-7) = 154.$$

Drugo rešenje. U primedbi uz zadatak 24 naglašeno je da osobine determinanata izražene zadacima 20 - 24, važe i za determinante bilo kog reda a ne samo trećeg. Prema tome, možemo i za izračunavanje determinanata četvrtog i višeg reda da koristimo "top-postupak", koji je opisan u zadatku 32. Pa primenimo taj postupak na našu determinantu D.

Za "topa" odaberimo neki elemenat determinante koji se nalazi u nekom stupcu ili retku koji već sadrži neku nulu; neka to bude broj -1 sa polja (1,2), tj. iz prvog retka i drugog stupca, i neka taj "top" "dejstvuje" duž stupca u kome se nalazi; pomoću toga "topa" treba da "uništimo" dvojku i peticu što se nalaze na njegovoj "liniji" (drži na umu kako dejstvuje top u šahu!); u tu svrhu, prvi redak determinante D dodajmo drugom retku pomnožen sa 2, a trećem retku pomnožen sa 5; prema zadatku 24 determinanta D neće promeniti svoju vrednost; dakle je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 13 & -20 \end{vmatrix} .$$

Ako ovu determinantu razvijemo po drugom stupcu, dobićemo da je ona jednaka

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 13 & -20 \end{vmatrix} ,$$

čime je izračunavanje determinante četvrtog reda svedeno na izračunavanje samo jedne determinante trećeg reda. Izračunajmo i nju "top-postupkom". Za "topa" uzmimo jedinicu sa polja (1,1), koji neka dejstvuje duž stupca u kojem se nalazi, dakle duž prvog stupca; prvi redak dodajmo drugom retku pomnožen sa -3, a trećem sa -1; nastala determinanta ima istu vrednost kao i polazna:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 0 & -14 & 10 \\ 0 & 7 & -16 \end{vmatrix} ;$$

konačno, ako ovu determinantu razvijemo po prvom stupcu, dobićemo da je ona jednaka

$$D = \begin{vmatrix} -14 & 10 \\ 7 & -16 \end{vmatrix} = (-14)\cdot(-16) - 7\cdot 10 = 154,$$

a to je rezultat koji smo i malopre dobili. Vidimo koliko je ovaj "top-postupak" efikasniji od prethodnog. Zato ga treba dobro uvežbati.

35. Proveri:

1° $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ -5 & 5 & 5 & 16 \\ -3 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 60;$ $\quad 2^{\circ}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 64.$

<u>Uputstvo.</u> Primeni "top-postupak" (ispitaj prethodni zadatak).

1° za "topa" uzmi jedinicu sa polja (1,1), koja neka "dejstvuje" duž prvog stupca; pomoću toga "topa" uništi svaki elemenat koji se nalazi u prvom stupcu ispod njega, u smislu da se umesto tih elemenata pojave nule; zatim, nastalu determinantu razvij po prvom stupcu.

2° Za "topa" uzmi jedinicu sa polja (1,2), koji neka "dejstvuje" duž svoga retka (dakle, prvog retka); dobijenu determinantu razvij po prvom retku.

36. Proveri:

1° $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2;$ $\quad 2^{\circ}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 266;$

3° $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -200;$ $\quad 4^{\circ}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -5 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & -4 & -7 \\ 3 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -241.$

<u>Uputstvo.</u> Primeni "top-postupak" (prethodno dobro ispitaj zadatak 34).

37. Proveri:

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -160.$$

Rešenje. Primenimo "top-postupak" (ispitaj zadatak 34; ovde, zbilja, ne bi vredelo razvijati tu determinantu po nekom retku ili stupcu direktno, jer bi kasnije trebalo računati šest determinanata petog reda, što je svakako veliki posao).

Za topa uzmimo jedinicu sa polja (1,1), koji neka "dejstvuje" duž prvog stupca; prvi redak dodajmo svim ostalim redcima pomnožen sa -1; nastaje determinanta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix};$$

prema osobini determinanata izraženom zadatkom 24, njena vrednost je ista kao i vrednost polazne determinante D; razvijmo je po elementima prvog stupca; dobijamo da je ona jednaka

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ \boxed{-2} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Prema tome, izračunavanje polazne determinante šestog reda sveli smo na izračunavanje samo jedne determinante petog reda. I za njeno izračunavanje primenimo "top-postupak". Za topa uzmimo markirani elemenat -2, koji neka "dejstvuje" duž retka u kojem se nalazi (iz razloga što u tome retku imamo već tri nule); trećem stupcu dodajmo prvi stupac pomnožen sa -1; time smo postigli da u četvrtom retku imamo sve nule osim samog "topa", a da determinanta nije promenila svoju vrednost; ispiši tu determinantu; ako je razvijemo po četvrtom retku, dobićemo da je ona jednaka

$$D = -(-2)\cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & \boxed{-2} \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix};$$

dobili smo, dakle, samo jednu determinantu četvrtog reda.

Sada na nju primenjujemo "top-postupak"; za "topa" uzmimo markirano -2, koje neka "dejstvuje" duž stupca u kojem se nalazi; prvi redak pomnožen sa -1 dodajmo poslednjem retku; time smo postigli da nastala determinanta u poslednjem stupcu ima sve nule osim samog "topa", a da joj je vrednost ostala ista; ispiši tu determinantu; nakon njenog razvijanja po poslednjem stupcu; na osnovu gornje jednakosti imamo da je

$$D = (-2)\cdot(-2)\cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix};$$

ovo je jedna determinanta trećeg reda; iz svakog njenog stupca izvucimo zajednički faktor 2 (oprez! dvojka se izvlači iz svakog stupca posebno) ispred determinante; za nastalu determinantu neposredno se proverava da je jednaka -5; zato je, prema prethodnom:

$$D = (-2)\cdot(-2)\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot(-5) = -160,$$

što je i trebalo dokazati.

Izračunaj polaznu determinantu još jednom, ali uzimajući za "topa" neki drugi elemenat determinante, na primer, -1 sa polja (3,4), koji neka "dejstvuje" duž trećeg retka.

38. Proveri:

1° $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 56;$ 2° $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 1;$

3° $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2;$ 4° $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 8 & -5 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -12.$

39. Koristeći se osobinama determinanata izraženim zadacima 20 – 24, dokaži sledeće jednakosti:

1° $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = -(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c);$

2° $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ x & a^3 & 1 & a \\ y & z & a^3 & 1 \end{vmatrix} = (1-a^4)^3$ (dakle, rezultat ne zavisi od veličina x, y, z).

Dokaz. 1° Drugi, treći i četvrti stupac posmatrane determinante dodajmo njenom prvom stupcu; na osnovu zadatka 24, determinanta neće promeniti vrednost; u prvom stupcu nastale determinante (ispiši je!) pojaviće se zajednički faktor $a+b+c$; prema osobini determinanata izraženom zadatkom 22 taj faktor možemo izvući ispred cele determinante (uvek drži na umu šta treba da dobijemo!); ako vrednost polazne determinante označimo sa D, biće dakle

(1) $$D = (a+b+c)\cdot D_1,$$

gde je D_1 preostala determinanta nakon izvlačenja faktora $a+b+c$, tj.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix};$$

na ovu determinantu primenimo "top-postupak"; pri tome za "topa" uzmimo jedinicu sa polja (1,1), koji neka "dejstvuje" duž stupca u kojem se nalazi, dakle, duž prvog stupca; prvi redak pomnožen sa –1 dodajmo ostalim redcima; na osnovu zadatka 24, determinanta D_1 neće promeniti vrednost; nastalu determinantu (ispiši je!) razvijmo po elementima prvog stupca; dobijamo da je

$$D_1 = \begin{vmatrix} a-b & -c & c \\ -b & a-c & b \\ c-b & b-c & a \end{vmatrix}.$$

Prvom i drugom stupcu poslednje determinante dodajmo treći stupac; vrednost determinante ostaje ista, dakle

$$D_1 = \begin{vmatrix} a+c-b & 0 & c \\ 0 & a+b-c & b \\ a+c-b & a+b-c & a \end{vmatrix};$$

iz prvog i drugog stupca ove determinante izvucimo zajedničke faktore $a+c-b$ i $a+b-c$ ispred cele determinante (ispitaj zadatak 22!); dobijamo da je

(2) $$D_1 = (c+a-b)(a+b-c)\cdot D_2,$$

gde je D_2 preostala determinanta, dakle

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix};$$

sada se neposredno proverava da je vrednost ove determinante jednaka:

(3) $$D_2 = -(b+c-a).$$

Na osnovu (3), iz (2) sleduje da je

$$D_1 = -(c+a-b)(a+b-c)(b+c-a),$$

a zatim, na osnovu (1), i

$$D = -(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c),$$

što je i trebalo dokazati.

2° Jedno za drugim imamo da je

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ x & a^3 & 1 & a \\ y & z & a^3 & 1 \end{vmatrix} = \text{(četvrtom stupcu dodaj treći pomnožen sa } -a\text{)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ a^3 & 1 & a & 0 \\ x & a^3 & 1 & 0 \\ y & z & a^3 & 1-a^4 \end{vmatrix} = \text{(razvij po četvrtom stupcu)} =$$

$$= (1-a^4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^3 & 1 & a \\ x & a^3 & 1 \end{vmatrix} = \text{(trećem stupcu dodaj drugi pomnožen sa } -a\text{)} =$$

$$= (1-a^4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a^3 & 1 & 0 \\ x & a^3 & 1-a^4 \end{vmatrix} = \text{(razvij po trećem stupcu)} =$$

$$= (1-a^4)(1-a^4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^3 & 1 \end{vmatrix} = (1-a^4)(1-a^4)(1-a^4) =$$

$$= (1-a^4)^3,$$

što je i trebalo dokazati.

40. Proveri:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a^4 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ x_{31} & a^4 & 1 & a & a^2 \\ x_{41} & x_{42} & a^4 & 1 & a \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & a^4 & 1 \end{vmatrix} = (1-a^5)^4 \text{ (dakle, rezultat ne zavisi od x-eva).}$$

<u>Uputstvo.</u> Radi paralelno sa prethodnim zadatkom 39 pod 2°.

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA I NEJEDNAČINA

A. Opšti oblik sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznanice x i y glasi

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

pri čemu su a-ovi i b-ovi zadani realni (kompleksni) brojevi. Za taj sistem vezane su tri determinante date sa

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

1° Ako je glavna determinanta D različita od nule, tj. $D \neq 0$, sistem ima jedinstveno rešenje dato sa $x = D_x/D$, $y = D_y/D$.

2° Ako je $D = D_x = D_y = 0$, sistem je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja.

3° Ako je $D = 0$ i <u>bar</u> jedna od determinanata D_x i D_y različita od nule, sistem je protivurečan i nema rešenje.

<u>Geometrijska interpretacija.</u> Svaka od jednačina gornjeg sistema predstavlja u koordinantnoj ravni Oxy izvesnu pravu (ukoliko je <u>bar</u> jedan od a-ova u svakoj od tih jednačina različit od nule).

1° Ako je $D \neq 0$, te se prave seku u jednoj tački, i koordinate x i y toga preseka jesu upravo rešenje gornjeg sistema.

2° Ako je $D=D_x=D_y=0$, prave se poklapaju, tj. "seku" se u svakoj svojoj tački, i koordinate bilo koje od tih tačaka jesu jedno od rešenja posmatranog sistema.

3° U ovom slučaju prave su paralelne, tj. ne seku se ni u jednoj tački.

B. Opšti oblik sistema od tri linearne jednačine sa tri nepoznanice x, y i z glasi

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 ,$$

pri čemu su a-ovi i b-ovi zadani realni (kompleksni) brojevi. Svaka od jednačina toga sistema, gledano geometrijski, predstavlja jednu ravninu u koordinantnom sistemu Oxyz u prostoru (ukoliko je bar jedan od a-ova u svakoj od tih jednačina različit od nule). Za taj sistem su vezane četiri determinante trećeg reda: D, D_x, D_y i D_z; pri tome je

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a determinante D_x, D_y i D_z nastaju iz determinante D kada se, redom, umesto njenog prvog, drugog, odnosno trećeg stupca stavi "slobodni stupac" (b_1, b_2, b_3).

1° Ako je glavna determinanta D različita od nule, tj. $D \neq 0$, sistem ima jedinstveno rešenje (regularan je!) dato sa: $x = D_x/D$, $y = D_y/D$, $z = D_z/D$.

2° Ako je $D=0$ i bar jedna od preostalih determinanata D_x, D_y i D_z različita od nule, sistem je protivurečan i nema rešenje.

3° Ako su sve determinante jednake nuli, tj. $D=D_x=D_y=D_z=0$, sistem je neodredjen ili protivurečan. Pri tome važi:

a) Ako je bar jedan od algebarskih komplemenata (kofaktora drugog reda) determinante D različit od nule, ili to nije slučaj ali bilo koje dve od jednačina sistema imaju proporcionalne sve odgovarajuće koeficijente, uključujući tu i slobodne članove, onda je sistem neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja.

b) U ostalim slučajevima sistem je protivurečan i nema rešenje.

Geometrijska interpretacija. 1° Sve tri ravnine seku se u samo jednoj tački i koordinate (x,y,z) te presečne tačke jesu upravo rešenje posmatranog sistema.

2° Bar dve od ravnina jesu paralelne, tj. sve tri se ne seku ni u jednoj (zajedničkoj) tački.

3° a) Ili se dve ravnine poklapaju a treća ih seče (dakle, sve tri se seku po jednoj pravoj; tada koordinate x,y i z bilo koje tačke te presečne prave predstavljaju jedno od beskonačno mnogo rešenja sistema!), ili se sve poklapaju, da ne kažemo "seku" se po celoj jednoj ravnini.

3° b) Ili su dve ravnine paralelne a treća ih seče po dvema pravuljama, ili su sve tri paralelne (dakle, ni u jednom slučaju ne postoji tačka koja bi bila zajednička svim tim ravninama, što i znači da posmatrani sistem nema rešenja).

C. Potpuno se analogno postupa i sa sistemima od 4,5,6,... i više jednačina sa isto toliko nepoznanica. Tako, na primer, za sistem od četiri linearne jednačine sa četiri nepoznanice x, y,z,t (ispiši taj sistem!), vezane su četiri determinante D, D_x, D_y, D_z, D_t koje su gradjene na isti način kao i odgovarajuće determinante za sistem od dve ili tri linearne jednačine sa dve ili tri nepoznanice (ovde u igru ulazi i četvrta determinanta D_t, koja nastaje iz D kada se umesto njenog četvrtog stupca stavi "slobodni stupac" sistema); pri tome, ako je $D \neq 0$, važi (Kramerovo pravilo):

$$x = D_x/D, \quad y = D_y/D, \quad z = D_z/D, \quad t = D_t/D.$$

Analogno je i sa sistemima od više jednačina sa isto toliko nepoznanica.

Sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznanice

1. Reši sledeće sisteme linearnih jednačina, pa rešenju daj geometrijsko objašnjenje:

1° $\begin{aligned}2x - y &= -4\\ -x + y &= 3\end{aligned}$; 2° $\begin{aligned}x - 2y - 7 &= 0\\ 3x - 6y + 1 &= 0\end{aligned}$; 3° $\begin{aligned}2x - y + 1 &= 0\\ 6x - 3y + 3 &= 0\end{aligned}$.

Rešenje. 1° Kako je (vidi pod A u uvodnom delu ovog paragrafa):

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad D_x = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

sistem ima jedinstveno rešenje, i ono glasi

$$x = D_x/D = -1, \qquad y = D_y/D = 2.$$

Geometrijski posmatrano, tačka $(x,y) = (-1,2)$, jeste presečna tačka pravih $2x - y = -4$ i $-x + y = 3$. Nacrtaj te prave u nekom koordinantnom sistemu Oxy, pa se uveri da njihova presečna tačka ima koordinate -1 i 2.

2° Prvo slobodne članove jednačinâ sistema prebacimo na desnu stranu, tj. dati sistem napišimo u obliku

$$x - 2y = 7$$
$$3x - 6y = -1;$$

odgovarajuće determinante vezane za ovaj sistem jesu:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -40, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -22;$$

pošto su $D=0$ i obe od determinanata D_x i D_y različite od nule, prema onom što je rečeno u uvodnom delu pod A sistem nema rešenje, tj. on je protivurečan.

Geometrijski to znači da se prave $x - 2y = 7$ i $3x - 6y = -1$, nigde ne seku, tj. da su paralelne. Nacrtaj te prave u nekom koordinantnom sistemu Oxy, pa se uveri u to.

3° Slično kao i pod 2°, prvo slobodne članove prebaci na desnu stranu. Uveri se da su sve tri determinante vezane za taj sistem jednake nuli, tj.

$$D = D_x = D_y = 0,$$

pa je posmatrani sistem neodredjen, ima beskonačno mnogo rešenja; naime, očigledno je da druga od jednačina toga sistema nastaje iz prve množenjem sa 3; stoga je dovoljno zadržati samo jednu od njih, na primer, prvu; no, iz te jednačine sleduje da je

$$y = 2x + 1,$$

tj. x možemo birati proizvoljno, a potom y računamo iz gornje veze; često se to i ovako piše:

$$x = p, \qquad y = 2p + 1,$$

gde je p proizvoljan parametar; kada se p menja, x i y će se menjati prema tim vezama (za svako p dobijamo jedno rešenje sistema); na primer, ako stavimo da nam je $p=3$, biće $x = 3$ i $y = 2\cdot3+1 = 7$, tj. jedno od rešenja našeg sistema jeste $x=3$ i $y=7$, u što se lako uveravamo.

Geometrijski posmatrano to znači da se prave $2x - y + 1 = 0$ i $6x - 3y + 3 = 0$ poklapaju, da ne kažemo "seku" u svakoj svojoj tački. Nacrtaj te prave u nekom koordinantnom sistemu Oxy, pa se uveri da će se one poklopiti.

2. Reši sledeće sisteme od po dve linearne jednačine sa po dve nepoznanice, pa rešenju daj geometrijsko tumačenje:

1° $\begin{aligned}x + 5y &= -19\\ 4x + y &= 0\end{aligned}$; 2° $\begin{aligned}3x - 2y &= -14\\ -x + 9y &= 63\end{aligned}$; 3° $\begin{aligned}2x - 3y &= 15\\ x - y &= 4\end{aligned}$.

Uputstvo. Postupi analogno kao u prethodnom zadatku. Rezultat: 1° $x=1$, $y=-4$; 2° $x=0$, $y=7$; 3° $x=-3$, $y=-7$.

3. Pomoću determinanata dokaži da su sledeći sistemi protivurečni, tj. da nemaju rešenje:

1° $\begin{aligned}x + y + 3 &= 0\\ 3x + 3y + 6 &= 0\end{aligned}$; 2° $\begin{aligned}3x - 2y &= 4\\ 2y - 1 &= 3x\end{aligned}$; 3° $\begin{aligned}x + y &= 0\\ 2x + 2y &= 1\end{aligned}$.

Rezultate proveri geometrijski!

Uputstvo. Ispitaj zadatak 1 pod 2^o.

4. Služeći se determinantama uveri se da su sledeći sistemi neodredjeni, tj. da imaju beskonačno mnogo rešenja:

$$1^o \quad \begin{matrix} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 4 \end{matrix}; \qquad 2^o \quad \begin{matrix} -7x + y = 3 \\ 14x - 2y = -6 \end{matrix}; \qquad 3^o \quad \begin{matrix} x + y + 1 = 0 \\ 2x + 2y + 2 = 0 \end{matrix}.$$

Nadji sva rešenja tih sistema. Rezultate proveri i grafički, tj. geometrijski.

Uputstvo. Radi analogno kao pod 3^o u zadatku 1.

Rezultati: 1^o $x = p$, $y = \frac{3}{4}\cdot p - \frac{1}{2}$; 2^o $x = q$, $y = 7q + 3$; 3^o $x = r$, $y = -r - 1$; tu su p, q i r proizvoljni realni parametri (brojevi); za razne vrednosti tih parametara dobićemo razna rešenja gornjih sistema; uzimajući za te parametre neke konkretne vrednosti, na primer, $p=2$, $q=1$ i $r=-1$, nadji i neka (tj. odgovarajuća) rešenja tih sistema.

5. Za razne vrednosti parametra a, diskutovati rešenje sistema

$$\begin{aligned} ax + \quad y &= 2 \\ 2x + \overline{a-1}\, y &= -4, \end{aligned}$$

od dve linearne jednačine sa dve nepoznanice x i y.

Rešenje. Determinante vezane za taj sistem glase:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} = a^2-a-2; \quad D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & a-1 \end{vmatrix} = 2(a+1);$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4(a+1).$$

Ispitajmo prvo za koje vrednosti parametra a su te determinante jednake nuli. Jedno za drugim, imamo:

$D = 0 \Rightarrow a^2-a-2 = 0 \Rightarrow$ (reši tu kvadratnu jednačinu po a)

$\Rightarrow a = 2$ ili $a = -1$;

$D_x = 0 \Rightarrow 2(a+1) = 0 \Rightarrow a+1 = 0 \Rightarrow a = -1$;

$D_y = 0 \Rightarrow -4(a+1) = 0 \Rightarrow a+1 = 0 \Rightarrow a = -1$.

Prvi slučaj. Ako je $D \neq 0$, tj. $a \neq 2$ i $a \neq -1$, posmatrani sistem ima jedinstveno rešenje i ono glasi

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(a+1)}{a^2-a-2} = \frac{2(a+1)}{(a-2)(a+1)} = \frac{2}{a-2},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4(a+1)}{a^2-a-2} = \frac{-4(a+1)}{(a-2)(a+1)} = \frac{-4}{a-2}.$$

Drugi slučaj. Neka je sada $D=0$; to znači da je ili $a=2$, ili $a=-1$; stoga u ovom slučaju razlikujmo dva podslučaja.

1^o $a=2$. Tada je $D_x=2(2+1)=6$ $(\neq 0)$, i $D_y=-4(2+1)=-12$ $(\neq 0)$, pa je za $a=2$ sistem protivurečan.

2^o $a=-1$. U ovom slučaju je $D_x=2(-1+1)=0$ i $D_y=-4(-1+1)=0$, tj. za $a=-1$ sve tri determinante D, D_x i D_y jednake su nuli, pa sistem ima beskonačno mnogo rešenja (neodredjen je).

Zaista, za $a=-1$ dati sistem postaje

$$\begin{aligned} -x + y &= 2 \\ 2x - 2y &= -4, \end{aligned}$$

odakle se neposredno vidi da druga jednačina nastaje iz prve množenjem sa -2; znači da se u ovom slučaju dati sistem svodi na samo jednu jednačinu

$$-x + y = 2;$$

odavde sleduje da je $y = x + 2$, pri čemu x možemo birati proizvoljno; ako stavimo da je $x = p$, gde je p proizvoljan realan broj, biće $y = p + 2$, pa rešenje sistema za $a=-1$ možemo napisati u obliku

$$x = p, \qquad y = p + 2,$$

gde je p proizvoljan realan broj (parametar) (napomenimo da mi rešenja tražimo samo u skupu realnih brojeva ukoliko ne kažemo izričito drugačije).

Zaključak. Ako je parametar a različit od 2 i -1, sistem ima jedinstveno rešenje; ako je parametar a jednak 2, sistem je protivurečan i nema rešenje; konačno, ako je parametar a jednak -1, sistem je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja.

6. Za razne vrednosti parametra a, diskutuj rešenje sistema:

1° $\begin{aligned}(a-4)x + y &= a\\ -3x + ay &= 3a\end{aligned}$; 2° $\begin{aligned}(a-4)x + y &= 1\\ -3x + ay &= 1\end{aligned}$.

Za one vrednosti parametra a za koje postoje rešenja, nadji ta rešenja.

Uputstvo. Radi paralelno sa prethodnim zadatkom 5.

Rezultat: 1° Ako je a različito od 3 i 1, rešenje je jedinstveno i jednako

$$x = \frac{a}{a-1}, \qquad y = \frac{3a}{a-1};$$

ako je a=1, sistem je protivurečan (ispiši taj sistem za a=1!) i nema rešenja; konačno, ako je a=3, sistem je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešanja koja se mogu predstaviti u obliku

$$x = p, \qquad y = p + a,$$

gde je p roizvoljan parametar (broj).

2° Ako je a različito od 3 i 1, rešenje je jedinstveno i dato sa

$$x = \frac{1}{a-3}, \qquad y = \frac{1}{a-3};$$

ako je a=1, sistem je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja koja možemo predstaviti u obliku

$$x = p, \qquad y = 3p + 1,$$

gde je p proizvoljan realan parametar; konačno, ako je a=3, sistem je protivurečan i nema rešenje.

7. Za razne vrednosti parametra a izvrši diskusiju sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznanice:

$$\begin{aligned} ax + (a+1)y &= 2\\ a^2x + (a+1)^2y &= 2a+1 \end{aligned}.$$

Za one vrednosti parametra a za koje postoji rešenje, nadji to rešenje.

Rešenje. Nadjimo prvo determinante vezane za posmatrani sistem; one su jednake:

$$D = a(a+1), \quad D_x = a+1, \quad D_y = a.$$

Prvi slučaj. Neka je prvo $D \neq 0$, tj. $a \neq 0$ i $a \neq -1$; tada sistem ima jedinstveno rešenje i ono glasi

(1) $$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{a}, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{a+1};$$

Drugi slučaj. Neka je sada D=0; to znači da je ili a=0 ili a=-1; zato ćemo razlikovati dva podslučaja:

1° a=0. Kako je tada $D_x = 0+1 = 1$ ($\neq 0$) a D=0, sistem je za tu vrednost parametra a protivurečan (bez obzira što je $D_y = 0$!) i nema rešenje.

2° a=-1. Sada je $D_y = -1$ ($\neq 0$) i D=0, pa je sistem opet protivurečan i nema rešenje.

Zaključak. Ako je parametar a različit od nule i minus jedan, sistem ima jedinstveno rešenje i ono je dato sa (1). Za a=0 i a=-1 sistem je protivurečan i nema rešenje.

Primetimo da posmatrani sistem ni za jednu vrednost parametra a nije neodredjen, pa ne može imati ni beskonačno mnogo rešenja.

8. Za razne vrednosti realnog parametra a diskutuj rešenje sistema

$$\begin{aligned} (2a-1)x + (a+1)y &= a+1\\ x + 2y &= 2 \end{aligned}.$$

Za one vrednosti parametra a za koje postoji rešenje, nadji to rešenje.

Uputstvo. Radi paralelno sa zadacima 5 i 7.

Rezultat: Ako je parametar a različit od 1, sistem ima jedinstveno rešenje i ono glasi

$$x = 0, \quad y = 1$$

(primeti da ono uopšte ne zavisi od a!); ako je a=1, sistem se svodi (redúcira) na samo jednu jednačinu (uveri se u to!): $x + 2y = 2$, pa jednu od nepoznanica, na primer, y, možemo birati proizvoljno, dok se nepoznanica x izračunava iz veze $x = -2y + 2$; pošto se y bira proizvoljno, možemo staviti da je $y=p$, gde je p proizvoljan realan parametar, pa rešenju možemo dati oblik

$$x = -2p + 2, \quad y = p.$$

9. Ako su (x_1,y_1) i (x_2,y_2) dva rešenja izvesnog sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznanice

$$(S) \qquad \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 , \end{aligned}$$

uveri se da je tada i

$$(0) \qquad x = x_1 + p(x_2-x_1), \quad y = y_1 + p(y_2-y_1),$$

gde je p proizvoljan broj, takodje rešenje toga sistema. Drugim rečima, to znači da ako taj sistem ima dva različita rešenja, onda on ima beskonačno mnogo rešenja.

Rešenje. Pošto su (x_1,y_1) i (x_2,y_2) po pretpostavci rešenja sistema (S), mora biti:

$$(1) \quad a_{11} x_1 + a_{12}y_1 = b_1, \qquad (3) \quad a_{11}x_2 + a_{12}y_2 = b_1 ,$$

$$(2) \quad a_{21} x_1 + a_{22}y_1 = b_2, \qquad (4) \quad a_{21}x_2 + a_{22}y_2 = b_2 .$$

Očigledno je da jednakosti (0) možemo napisati u obliku

$$(00) \qquad x = (1-p)x_1 + px_2, \quad y = (1-p)y_1 + py_2.$$

Da bismo proverili da li je sa (0), odnosno (00) dato rešenje sistema (S), gde je p proizvoljan broj, treba proveriti da li to x i y zadovoljavaju obe od jednačina sistema (S); u tu svrhu uvrstimo x i y dato sa (00) u jednačine sistema (S); nakon kraćeg sredjivanja (radi postepeno!), dobijaju se jednakosti

$$(1-p)(a_{11}x_1 + a_{12}y_1) + p(a_{11}x_2 + a_{12}y_2) = b_1 ,$$

$$(1-p)(a_{21}x_1 + a_{22}y_1) + p(a_{21}x_2 + a_{22}y_2) = b_2 ,$$

za koje treba proveriti da li su tačne.

No, na osnovu jednakosti (1) i (3), a zatim (2) i (4), prva i druga od ovih jednakosti, za koje hoćemo provetiri jesu li tačne, redom postaju:

$$(1-p)\cdot b_1 + p\cdot b_1 = b_1 ,$$

$$(1-p)\cdot b_2 + p\cdot b_2 = b_2 ,$$

a zatim (bez obzira koliko je p!):

$$b_1 = b_1 , \qquad b_2 = b_2 ,$$

pa je odgovor potvrdan. Ovim je i naše tvrdjenje dokazano.

Primedba. Geometrijski gledano, to znači ovo: ako dve prave imaju zajedničke dve (različite!) tačke, onda one imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka, tj. one se poklapaju.

Sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznanice

10. Reši sledeći sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznanice:

$$(S) \qquad \begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 . \end{aligned}$$

Rešenje. Nadjimo prve determinante koje odgovaraju posmatranom sistemu (S). Jedno za drugim imamo da je:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (\text{računaj!}) = 6, \quad D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Prema onome što je rečeno u uvodnom delu pod B, pošto je determinanta D sistema (S) različita od nule, sistem ima jedinstveno rešenje, i ono glasi

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = -2,$$

tj. $(x,y,z) = (1,2,-2)$. Nadjene vrednosti za x, y i z uvrsti u jednačine sistema (S), pa se uveri da je svaka od njih zadovoljena.

11. Reši sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 3 \\ 4x - y + z &= 1 \\ 3x - 2y + 3z &= 4\,. \end{aligned}$$

<u>Rešenje.</u> Kako je

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (\text{računaj!}) = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

na osnovu onoga što je rečeno u uvodnom delu pod B, zaključujemo da je sistem protivurečan i da nema rešenje, jer je $D=0$ i $D_x \neq 0$ (bez obzira koliko je D_y i D_z!).

12. Reši sistem jednačina

$$(S) \qquad \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 5x + y + 4z &= 7. \end{aligned}$$

<u>Rešenje.</u> Nadjimo prvo determinante koje odgovaraju posmatranom sistemu (S); imamo:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (\text{računaj!}) = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0;$$

(primetimo da se može i neposredno zaključiti da je svaka od gornjih determinanata jednaka nuli; naime, ako u svakoj od njih poslednjem retku dodamo prva dva retka pomnožena sa -1, nastaju determinante koje u poslednjem retku imaju samo nule, pa su zato i njihove vrednosti jednake nuli; pri tome iskorišćena je osobine determinanata izražena zadatkom 24).

Pošto su sve četiri determinante, vezane za posmatrani sistem (S), jednake nuli, na osnovu onoga što je rečeno u uvodnom delu pod B, zaključujemo da je sistem neodredjen ili protivurečan.

Napomenimo da kod sistema od tri linearne jednačine sa tri nepoznanice, iz činjenice da su sve odgovarajuće determinante jednake nuli, još uvek ne sledi da je taj sistem neodredjen, tj. da ima beskonačno mnogo rešenja; naime, on može biti i protivurečan, što zahteva naknadna ispitivanja (kod sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznanice ovo nije bilo moguće!).

To što su sve četiri determinante sistema jednake nuli ima <u>nužno</u> za posledicu da je <u>bar jedna</u> od jednačina posmatranog sistema (to važi uopšte, a ne samo u ovom slučaju!) posledica preostalih jednačina sistema, ukoliko je bar jedan kofaktor A_{ik}, determinante D, $\neq 0$.

U našem slučaju očigledno je poslednja od jednačina jednaka zbiru prve dve; stoga je možemo odbaciti, pa se dati sistem (S) svodi (reducira) na sebi ekvivalentan sistem

$$(T) \quad \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 6. \end{aligned}$$

Ovo je jedan sistem od dve linearne jednačine sa tri nepoznanice; njega očigledno možemo rešiti po nepoznanicama x i y, pri čemu nepoznanica z može da bude proizvoljan broj; naime, sistem (T) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} 3x - y &= -2z + 1 \\ x + y &= -2z + 6, \end{aligned}$$

pri čemu je druga od jednačina još i podeljena sa 2; glavna determinanta ovog sistema sa nepoznanicama x i y (z uzimamo za proizvoljan realan parametar!) jednaka je $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$, dakle, različita od nule, pa taj sistem ima jedinstveno rešenje po x i y (naravno da će za razne z-ove biti različiti i x-evi i y-oni, ali je bitno da se za svaki realan broj z to x i y mogu odrediti!); samo rešenje gornjeg sistema (T), a time i sistema (S), glasi

$$x = -z + \frac{7}{4}, \qquad y = -3z - \frac{7}{4},$$

pri čemu z biramo proizvoljno; uobičajeno je da se to piše ovako (što je očigledno isto, samo u drugom obliku):

$$x = -p + \frac{7}{4}, \qquad y = -3p - \frac{7}{4}, \quad z = p,$$

gde je p proizvoljan broj.

Dakle, sistem (S) je neodredjen (a ne protivurečan!).

Primedba. Sistem (T) možemo da shvatimo na "tri načina" kao sistem od dve jednačine sa dve nepoznanice (treću nepoznanicu da smatramo parametrom): po x i y (kao što smo i uradili), po x i z, i po y i z; da se desilo da nijedan od ta "tri sistema" ne možemo rešiti po "njegovim" nepoznanicama, onda bi sistem (T), a time i (S) bio protivurečan (u tome treba videti gore pomenutu mogućnost da sistem od tri jednačine može biti protivurečan i kada je $D=D_x=D_y=D_z=0$).

Važna primedba. Već smo napomenuli da ako su sve četiri de-

terminante nekog sistema od tri linearne jednačine sa tri nepoznanice jednake nuli, a bar jedan od algebarskih komplemenata (kofaktora drugog reda) determinante D različit od nule, onda je nužno bar jedna od tih jednačina posledica preostale dve; nije teško utvrditi da li je neka od jednačina sistema posledica samo jedne od preostale dve (treba jednostavno ispitati da li neke dve od tih jednačina imaju proporcionalne koeficijente, uključujući tu i slobodne članove!); ako je to slučaj, jednu od te dve jednačine treba odbaciti, dok će druga od njih sa onom trećom činiti jedan sistem od dve linearne jednačine sa po tri nepoznanice, koji je ekvivalentan polaznom sistemu (vidi zadatak 12!) ; ako je i od te dve jednačine jedna posledica one druge, što se analogno ispituje, onda i od njih treba odbaciti jednu (bilo koju); time bi polazni sistem bio sveden (reduciran) na samo jednu od 3 jednačine; to upravo znači da postoji samo jedna veza izmedju nepoznanica polaznog sistema (tj. jedna koja je bitno različita, jer ostale veze proizilaze iz te!); stoga se u tom slučaju dve nepoznanice mogu birati proizvoljno, dok se treća izračunava pomoću njih iz pomenute veze; to je tako ako je i od preostale dve jednačine jedna od njih posledica one druge.

Ako to, pak, nije slučaj, tj. ako su, nakon odbacivanja jedne od jednačina polaznog sistema, preostale jednačine linearno nezavisne, onda se postupa kao i pri rešavanju sistema (T) iz prethodnog zadatka 12 (ispitaj još jednom prethodnu primedbu!).

Pri svemu ovome do sada pretpostavljali smo da se bar jedna od jednačina polaznog sistema može izraziti pomoću samo jedne od preostale dve. Ako to nije slučaj, onda se polazni sistem svodi (reducira) na sistem od bilo koje dve njegove jednačine (dakle, odbaci se bilo koja od njih!) ; dalje treba postupiti kao sa sistemom (T) iz prethodnog zadatka; ako nas rešavanje tog reduciranog sistema dovede do protivurečnosti (ispitaj primedbu uz prethodni zadatak 12!), i polazni sistem biće protivurečan; inače je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja.

13. Reši sistem linearnih jednačina pomoću determinanata

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 5z &= 1 \\ x - 3y + z &= 12 \\ 3x + 19y - 21z &= -8 . \end{aligned}$$

Uputstvo. Postupi kao u prethodnom zadatku. Posebno ispitaj prethodnu primedbu.

Rezultat. Sistem je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja; sama rešenja mogu se predstaviti, na primer, u obliku

$$x = 11p + \frac{51}{10} , \quad y = 7p - \frac{23}{10} , \quad z = 10p ,$$

gde je p proizvoljan broj.

14. Pomoću determinanata reši sledeće sisteme linearnih jednačina, pa rezultatu daj geometrijsko tumačenje:

1^o $\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= 1 ; \\ 2x - 6y + 4z &= -2 \\ -3x + 9y - 6z &= 3 \end{aligned}$ 2^o $\begin{aligned} 3x - y - 3z &= 2 . \\ 9x - 3y - 9z &= 6 \\ -3x + y + 3z &= -1 \end{aligned}$

Rešenje. Prethodno ispitaj primedbe posle zadatka 12.

1^o Pošto se neposredno proverava da su sve četiri determinante vezane za posmatrani sistem jednake nuli (naime, svaka od tih determinanata ima bar po dva proporcionalna retka, pa na osnovu zadatka 21 o determinantama, svaka od njih mora biti jednaka nuli!), sistem je neodredjen ili protivurečan, što treba posebno ispitati.

Saglasno sa onim što je rečeno u primedbama posle zadatka 12, ispitajmo prvo da li neke dve od jednačina posmatranog sistema imaju proporcionalne koeficijente, uključujući tu i slobodne članove, tj. da li jedna od njih posledica neke druge; očigledno je da su koeficijenti druge i prve jednačine proporcionalni (koeficijent proporcionalnosti je -2); stoga jednu od njih, recimo drugu, možemo odbaciti; dati sistem svodi se (reducira) na sistem od dve linearne jednačine sa tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= 1 \\ -3x + 9y - 6z &= 3 ; \end{aligned}$$

sada treba ispitati da li je i u ovome reduciranom sistemu jedna od jednačina posledica one druge, tj. da li nastaje iz one druge množenjem sa nekim brojem; no, pošto su im svi koeficijenti proporcionalni, vidimo da je to zaista slučaj; stoga i jednu od tih jednačina možemo odbaciti, neka to bude, na primer, druga.

Prema tome, dati sistem sveo se (reducirao) na samo jednu jednačinu sa tri nepoznanice:

$$-x + 3y - 2z = 1;$$

to znači da dve nepoznanice, na primer, y i z možemo birati proizvoljno, dok treću od njih izražavamo pomoću te dve, dakle,

$$x = 3y - 2z - 1;$$

uobičajeno je da se to ovako piše:

$$(1) \qquad x = 3p - 2q - 1, \quad y = p, \quad z = q,$$

gde su p i q proizvoljni brojevi; naravno da su ta dva zapisa ravnopravna, samo što ovaj drugi eksplicitno daje svaku od nepoznanica x, y i z (preko dva proizvoljna parametra).

Zaključak. Posmatrani sistem je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja koja su data sa (1).

Gledano geometrijski, svaka od jednačina posmatranog sistema predstavlja jednačinu izvesne ravnine u prostoru; to što su svi koeficijenti prvih dveju jednačina proporcionalni, geometrijski upravo znači da se te dve ravnine, čije su to jednačine, poklapaju, da ne kažemo "seku" u svakoj svojoj tački; isto tako, činjenica da prva i treća od jednačina posmatranog sistema imaju proporcionalne koeficijente, znači da se ravnine čije su to jednačine poklapaju; no, pošto se ravnina odredjena prvom jednačinom poklapa i sa ravninom koja je odredjena drugom jednačinom, i sa ravninom koja je odredjena trećom jednačinom, to se sve tri te ravnine poklapaju, tj. "seku" se u svim svojim tačkama; drugim rečima to znači da koordinate x, y i z , bilo koje tačke te ravnine (jer se sve tri poklapaju), zadovoljavaju jednačine tih (tj. te!) ravnina, a to su upravo jednačine posmatranog sistema 1°.

2° Neposredno se proverava da svaka od determinanata ovog sistema ima bar po dva proporcionalna stupca; stoga su, iz istih razloga kao i u prethodnom slučaju, sve one jednake nuli (ispiši te determinante); prema tome, posmatrani sistem je neodredjen ili protivurečan, to treba posebno ispitati.

Sada treba raditi sve analogno prethodnom slučaju; prve dve jednačine imaju proporcionalne koeficijente (koeficijent proporcionalnosti je 3); stoga jednu od njih, na primer drugu, možemo odbaciti; dati sistem se svodi (reducira) na sistem

$$(S)\quad \begin{aligned} 3x - y - 3z &= 2 \\ -3x + y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

od dve linearne jednačine sa tri nepoznanice.

Da li je možda i od ove dve jednačine jedna posledica one druge? Nije. Istina, one imaju proporcionalne koeficijente uz nepoznanice, ali se ti odgovarajući koeficijenti ne odnose kao i njihovi slobodni članovi; stoga jednu od tih jednačina ne možemo dobiti iz druge.

Sada se postavlja pitanje (ispitaj prvu primedbu posle zadatka 12!): da li se gornji sistem (S) može rešiti bar po dve nepoznanice, dakle, po x i y, ili x i z, odnosno y i z?

Pa pokušajmo ga rešiti po x i y (dakle, nepoznanicu z smatramo parametrom); u tu svrhu napišimo ga u obliku

$$\begin{aligned} 3x - y &= 3z + 2 \\ -3x + y &= -3z - 1 \ ; \end{aligned}$$

no, glavna determinanta ovog sistema po x i y jednaka je

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ dok je, na primer, } D_x = \begin{vmatrix} 3z+2 & -1 \\ -3z-1 & 1 \end{vmatrix} = 1(\neq 0),$$

pa je sistem (S) protivurečan; stoga je protivurečan i polazni sistem pod 2°

<u>Zaključak.</u> Iako su sve determinante posmatranog sistema jednake nuli, sistem je ipak protivurečan (a ne neodredjen!).

Da je sistem (S) protivurečan, moglo se zaključiti i neposredno; naime, sabiranjem njegovih jednačina dobijano da je 0=1, a to je apsurd. Medjutim, gornji postupak je opšti i svakako ga treba znati.

Geometrijski posmatrano, iz istih razloga kao u prethodnom slučaju, imamo da se ravnine odredjene prvim dvema jednačinama posmatranog sistema poklapaju; medjutim, ravnine odredjene prvom i trećom od tih jednačina nisu istovetne, iako su paralelne (to je iz razloga što nisu proporcionalni svi koeficijenti tih jednačina, već samo oni uz odgovarajuće nepoznanice).

Prema tome, prve dve ravnine poklapaju se, a treća je paralelna prvoj, što znači da sve tri ravnine nemaju nijednu zajedničku tačku; drugim rečima, ne postoji tačka čije bi koordinate zadovoljavale jednačine tih ravnina istovremeno, a time ni jednačine posmatranog sistema. To i znači da sistem nema rešenja, tj. da je protivurečan.

15. Pomoću determinanata reši sledeće sisteme linearnih jednačina:

1°
$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 1 \\ x - 3y - 5z &= 2 \\ 7x + y + 5z &= 0 \ ; \end{aligned}$$

2°
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 3x + 4z &= 0 \\ 5x - y + 4z &= 0 \ ; \end{aligned}$$

3°
$$\begin{aligned} 5x + 2y &= -1 \\ 3x + 3z &= 9 \\ 2y + 4z &= 20 ; \end{aligned}$$

4°
$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 2z - 1 \\ 4x &= 2y + 3 \\ x + 4y &= z - 2 \ ; \end{aligned}$$

5°
$$\begin{aligned} 5x + 6y - 12z &= 5 \\ 2x - 2y - 6z &= -1 \\ 4x - 5y + 3z &= \frac{15}{2} \ ; \end{aligned}$$

6°
$$\begin{aligned} 2x + y &= z \\ 4x + 3y &= 3 \\ 5y + z &= 1 \ ; \end{aligned}$$

7° $\begin{aligned} 2x - 3y - z &= 1 \\ x + y + 2z &= 2 \\ 4x - y + 3z &= 3\,; \end{aligned}$ 8° $\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= -2 \\ x + y - z &= 3 \\ 2x + y - z &= -5\,; \end{aligned}$

9° $\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ 5x + y + 4z &= 7\,; \end{aligned}$ 10° $\begin{aligned} 3x + 4y + 3z &= 2 \\ x + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 1\,. \end{aligned}$

Svaki od rezultata obrazloži i geometrijski.

Uputstvo. Postupi analogno kao u prethodnih nekoliko zadataka.

Rezultat: 1° $x=1$, $y=3$, $z=-2$; geometrijski gledano, svaka od jednačina posmatranog sistema predstavlja jednu ravninu, i te se tri ravnine seku u jednoj tački, čije su koordinate upravo $x=1$, $y=3$ i $z=-2$, dakle u tački $(1,3,-2)$;

2° $x=0$, $y=0$, $z=0$; ravnine odredjene jednačinama sistema seku se u tački $(0,0,0)$, tj. prolaze kroz koordinantni početak;

3° $x=-1$, $y=2$, $z=4$; 4° $x=1/2$, $y=-1/2$, $z=1/2$ (napomena: pri rešavanju prvo sve nepoznanice prebaci na jednu stranu);

5° $x=2$, $y=1/2$, $z=2/3$; 6° $x=5/6$, $y=1/9$, $z=14/9$ (prvo sve nepoznanice prebaci na jednu stranu; ako se u nekoj od jednačina neke od nepoznanica ne pojavljuje, ona se može nadopisati sa koeficijentom jednakim nuli; na primer, ako se ne pojavljuje x, onda se formalno dopiše (doda) $0\cdot x$);

7° sistem je protivurečan; 8° sistem je neodredjen; sama rešenja data su sa

$$x = -8, \quad y = p + 11, \quad z = p,$$

pri čemu je p proizvoljan broj; geometrijski gledano, sve tri ravnine ovog sistema seku se, ne u jednoj tački, već po jednoj pravoj; koordinate bilo koje tačke te prave zadovoljavaju sve tri jednačine posmatranog sistema;

9° sistem je neodredjen; njegova su rešenja data sa

$$x = -3p + 1, \quad y = -p + 2, \quad z = 4p\,,$$

pri čemu je p proizvoljan realan broj;

10° sistem je protivurečan.

16. Za razne vrednosti parametra a diskutuj sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4x + ay + 2z &= 1 \\ x + ay + 5z &= 1 \\ 3x + 6y + 3az &= 2\,. \end{aligned}$$

Rešenje. Nadjimo prvo determinante vezane za ovaj sistem; jedno za drugim imamo da je:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & a & 2 \\ 1 & a & 5 \\ 3 & 6 & 3a \end{vmatrix} = (\text{računaj!}) = 9(a^2+a-12) = 9(a-3)(a+4)\,;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & a & 5 \\ 2 & 6 & 3a \end{vmatrix} = (\text{oduzmi drugi redak od prvog, pa razvij po prvom retku!}) = 6(a-3)\,;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3a \end{vmatrix} = 9(a-3)\,; \quad D_z = \begin{vmatrix} 4 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 6(a-3)\,.$$

Prvi slučaj. Ako je glavna determinanta D različita od nule, tj. $D = 9(a-3)(a+4) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq -4, \\ a \neq 3 \end{cases}$ sistem ima jedinstveno rešenje i ono glasi

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{3(a+4)}\,, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{a+4}\,, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{2}{3(a+4)}\,.$$

Drugi slučaj. Glavna determinanta D jednaka je nuli i bar jedna od determinanata D_x, D_y i D_z različita je od nule, tj.:

$$D = 0 \Rightarrow 9(a-3)(a+4) = 0 \Rightarrow a=3 \vee a=-4,$$
$$D_x \neq 0 \Rightarrow 6(a-3) \neq 0 \longrightarrow a \neq 3$$

(slučaj $D_y \neq 0$ i $D_z \neq 0$ ne daje ništa novo, jer opet dobijamo da je $a \neq 3$; da nije tako, trebalo bi i te slučajeve posmatrati); znači, ako je $a=3$ ili $a=-4$, i $a \neq 3$, tj. ako je $a=-4$ (jer se slučajevi $a=3$ i $a \neq 3$ medjusobom isključuju!),

7° 2y

...atrani sistem protivurečan je i nema rešenje.

Treći slučaj. Sve četiri determinante posmatranog sistema jednake su nuli (naravno ukoliko je to moguće!).

Pošto je $D_x = 0$ jedino za $a=3$, treba proveriti da li su i sve preostale determinante jednake nuli za $a=3$. A one to jesu, što se neposredno proverava.

Prema tome, za $a = 3$ sistem je neodredjen ili protivurečan, što treba posebno ispitati. No, za $a=3$ dati sistem postaje

$$(S)\qquad \begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 1\\ x + 3y + 5z &= 1\\ 3x + 6y + 9z &= 2\,, \end{aligned}$$

i za njega treba ispitati da li je neodredjen ili protivurečan.

Ispitajmo prvo (vidi primedbe posle zadatka 12, kao i zadatke 13 i 14!) da li neke dve od jednačina toga sistema zavise jedna od druge, ili, što je isto, da li imaju proporcionalne sve koeficijente. Ovde to očigledno nije slučaj. Zato možemo odbaciti bilo koju od jednačina posmatranog sistema (prema onom što je rečeno u drugoj primedbi posle zadatka 12!) ; neka to bude, na primer, treća jednačina; posmatrani sistem svodi se (reducira) na sebi ekvivalentan sistem

$$(T)\qquad \begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 1\\ x + 3y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

od dve linearne jednačine sa tri nepoznanice.

Ispitajmo sada da li se taj sistem može rešiti po nepoznanicama x i y, ili x i z, odnosno y i z; pri tome uvek onu treću nepoznanicu smatramo promenljivim parametrom.

Pa pokušajmo ga rešiti, na primer, po nepoznanicama y i z, pri čemu nepoznanicu x treba shvatiti kao promenljiv parametar; u tu svrhu, napišimo taj sistem u obliku (nepoznanice na jednu stranu a "poznate" na drugu!):

$$\begin{aligned} 3y + 2z &= -4x + 1\\ 3y + 5z &= -x + 1\,; \end{aligned}$$

glavna determinanta ovog sistema po nepoznanicama y i z jednaka je $\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 9$, dakle različita od nule, pa sistem ima jedinstveno rešenje po y i z; samo rešenje glasi (radi postepeno!):

$$(O)\qquad x = p,\quad y = -2p + \frac{1}{3}\,,\quad z = p,$$

gde je p proizvoljan broj.

Prema tome, sistem (T) je neodredjen, pa je takav i sistem (S), i njegova rešenja su data sa (O).

Zaključak. Ako je parametar a različit od 3 i -4, sistem ima jedinstveno rešenje; ako je parametar a jednak -4, sistem je protivurečan i nema rešenje; konačno, ako je parametar a jednak 3, sistem je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja koja su data sa (O).

17. Pomoću determinanata diskutuj sistem jednačina

$$(S)\qquad \begin{aligned} x + y + z &= 6\\ ax + 4y + z &= 5\\ 5x + (a+1)y + z &= 7 \end{aligned}$$

za razne vrednosti parametra a.

Rešenje. Determinante vezane za posmatrani sistem jesu:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a & 4 & 1\\ 5 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = (a-4)(a+3),\qquad D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 1\\ 7 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = -(a+3),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1\\ a & 5 & 1\\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = a+3,\qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6\\ a & 4 & 5\\ 5 & a+1 & 7 \end{vmatrix} = 6(a-4)(a+3).$$

Prvi slučaj. Neka je glavna determinanta D različita od nule, tj.

$$D \neq 0 \Longrightarrow (a-4)(a+3) \neq 0 \Longrightarrow a\neq 4 \;\wedge\; a\neq -3;$$

tada sistem (S) ima jedinstveno rešenje i ono je dato sa

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(a+3)}{(a-4)(a+3)} = -\frac{1}{a-4}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{a-4},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{6(a-4)(a+3)}{(a-4)(a+3)} = 6.$$

<u>Drugi slučaj.</u> Neka je sada glavna determinanta jednaka nuli, tj.

$$D = 0 \implies a=4 \lor a=-3;$$

za $a=4$ imamo da je $D_x=-7$, pa, bez obzira koliko u tom slučaju iznose determinante D_y i D_z, zaključujemo da je sistem protivurečan, jer je glavna determinanta jednaka nuli a <u>bar</u> jedna od preostalih, na primer, D_x, različita od nule.

Ako je, pak, $a=-3$, biće i sve ostale determinante jednake nuli, tj. $D=D_x=D_y=D_z=0$, pa je sistem (S) neodredjen ili protivurečan, što treba naknadno ispitati.

Za $a=-3$ sistem (S) glasi

$$\text{(T)} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ -3x + 4y + z &= 5 \\ 5x - 2y + z &= 7\,; \end{aligned}$$

pošto nikoje <u>dve</u> od ovih jednačina nisu medusobom zavisne, tj. ne mogu se izraziti jedna preko druge, to možemo odbaciti bilo koju od jednačina sistema (T) (ispitaj drugu od primedbi uz zadatak 12!); neka to bude, na primer, treća od jednačina sistema (T), koji je, dakle, ekvivalentan sa sistemom

$$\text{(U)} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ -3x + 4y + z &= 5 \end{aligned}$$

od <u>dve</u> linearne jednačine sa <u>tri</u> nepoznanice; sistem (U) očigledno možemo rešiti po, na primer, nepoznanicama x i y (pri tom nepoznanicu z smatramo parametrom!), i rešenje toga sistema glasi (radi postepeno!):

$$\text{(O)} \qquad x = -3p + \frac{19}{7}, \quad y = -4p + \frac{23}{7}, \quad z = 7p,$$

gde je p proizvoljan broj.

Pošto je sistem (U) ekvivalentan sa sistemom (T), tj. sa sistemom (S) za $a=-3$, biće i sistem (T), tj. sistem (S) za $a=-3$, neodredjen (a ne protivurečan!) i njegova rešenja data su sa (O).

<u>Zaključak.</u> Ako je parametar a različit od 4 i -3, sistem ima jedinstveno rešenje; ako je parametar a jednak 4, sistem je protivurečan i nema rešenje; konačno, ako je parametar a jednak -3, sistem (S) je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja koja su data sa (O).

18. Za razne vrednosti parametra a diskutuj rešenja sistema jednačina:

$$1^\circ \quad \begin{aligned} 3ax + ay + z &= 5 \\ 2x - 4y + 2az &= a+1 \\ 5x - 3y + 3z &= 7\,; \end{aligned} \qquad 2^\circ \quad \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1\,; \end{aligned}$$

$$3^\circ \quad \begin{aligned} (a+1)x + ay + (2a+3)z &= 1 \\ ax + ay + (a+1)z &= a \\ ax + ay + (a-1)z &= a; \end{aligned} \qquad 4^\circ \quad \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + y + 2az &= 2 \\ x + 2y + z &= 1\,. \end{aligned}$$

<u>Uputstvo.</u> Radi paralelno sa prethodna dva zadatka.

<u>Rezultat:</u> 1° $D = 14(a-1)(2a-1)$, $D_x = (a-1)(11a+35)$, $D_y = -3(a-1)\cdot(11a-7)$, $D_z = 14(a-1)(a-5)$;

ako je a različito od 1 i 1/2, sistem ima jedinstveno rešenje dato sa

$$x = \frac{11a+35}{14(2a-1)}, \quad y = \frac{21-33a}{14(2a-1)}; \quad z = \frac{a-5}{2a-1};$$

ako je $a=1$, biće $D=D_x=D_y=D_z=0$ i sistem je neodredjen (obrazloži to!); njegova se rešenja mogu predstaviti u obliku

$$x = -3p + \frac{11}{7}, \quad y = -2p + \frac{2}{7}, \quad z = 7p,$$

gde je p proizvoljan realan broj;

ako je $a=1/2$, biće $D=0$, dok su sve tri ostale determinante različite od nule, pa je u tom slučaju sistem protivurečan i nema rešenje.

2° Ako je a različito od 1 i -2, sistem je regularan (odredjen) i ima jedinstveno rešenje: $x = y = z = \frac{1}{a+2}$;
ako je $a=1$, sistem je neodredjen i njegova se rešenja mogu predstaviti u obliku:

$$x = 1 - p - q, \quad y = p, \quad z = q,$$

gde su p i q proizvoljni realni brojevi;

ako je $a=-2$, sistem je protivurečan.

3° Ovde je $D=-2a$, $D_x=2a(a-1)$, $D_y=-2a^2$, $D_z=0$; ako je $a\neq0$, sistem ima jedinstveno rešenje: $x=1-a$, $y=a$, $z=0$; ako je $a=0$, sistem je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja koja se mogu predstaviti u obliku: $x=1$, $y=p$, $z=0$, pri čemu je p proizvoljan realan broj.

4° $D=a(3-4a)$, $D_x=-2(3a-2)$, $D_y=2(a^2+2a-2)$, $D_z=4-5a$; ako je $a\neq0$ i $a\neq3/4$, sistem ima jedinstveno rešenje (ispiši ga!); za $a=0$ i $a=3/4$, sistem je protivurečan.

Homogeni sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznanice

19. Proveri da li sistem homogenih jednačina

$$(S) \qquad \begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 4x - y - 2z &= 0 \\ 5x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

ima netrivijalna rešenja (dakle, takva rešenja kod kojih bi bar jedna od nepoznanica bila različita od nule), i ako ih ima naći ta rešenja.

Rešenje. Prema onome što je rečeno u uvodnom delu pod B, sistem (S) će imati i netrivijalnih rešenja jedino ako je determinanta D toga sistema jednaka nuli (ostale determinante kod homogenih sistema uvek su jednake nuli; to je iz razloga što svaka od njih sadrži bar jedan stupac sastavljen od samih nula; to je upravo onaj stupac sa desne strane sistema); pošto je u našem slučaju

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

zaključujemo da posmatrani sistem (S) ima i netrivijalnih rešenja.

Sada se može primeniti isti postupak iznalaženja tih netrivijalnih rešenja kao kod iznalaženja rešenja nehomogenog sistema u slučaju da je njegova determinanta jednaka nuli (a time i sve ostale njegove determinante ukoliko on ima rešenja!); treba, dakle, prvo ispitati (ispitaj primedbe uz zadatak 121) da li su neke dve od gornjih jednačina linearno zavisne, tj. da li se jedna od njih može dobiti iz druge množenjem nekim brojem; to se, pak, ispituje tako da se proveri da li neke dve od jednačina sistema imaju proporcionalne koeficijente uz nepoznanice (ovde slobodni članovi ne igraju nikakvu ulogu u toj proporcionalnosti, kao kod nehomogenih sistema!); ako je to slučaj, onda jednu od tih jednačina treba odbaciti i sa preostale dve postupiti analogno; ako to, pak, nije slučaj, treba odbaciti bilo koju od jednačina posmatranog sistema, pa preostale dve jednačine rešiti po nekom paru nepoznanica (onu treću nepoznanicu shvatiti kao parametar).

U našem slučaju nikoje dve od jednačina sistema (S) nemaju proporcionalne koeficijente uz nepoznanice, pa možemo odbaciti bilo koju od tih jednačina; neka to bude, na primer, treća; sistem (S) je dakle ekvivalentan sa sistemom

$$(T) \qquad \begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 4x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

od dve linearne jednačine sa tri nepoznanice; taj se sistem očigledno može rešiti po, na primer, nepoznanicama y i z (x smatramo parametrom); u tu svrhu napišimo ga prvo u obliku

$$2y + z = -x$$
$$y + 2z = 4x,$$

odakle se neposredno dobija da je

$$x = p, \qquad y = -2p, \qquad z = 3p,$$

gde je p proizvoljan broj; uobičajeno je da se netrivijalna rešenja kod homogenih sistema zapisuju i u vidu razmere:

$$x : y : z = 1 : (-2) : 3$$

(p se skratilo).

Primedba. Za iznalaženje rešenja homogenog sistema često se koristi i sledeći postupak: ako su bilo koje dve jednačine posmatranog sistema linearno zavisne, sistem se svodi na samo jednu od tih jednačina (bilo koju!), pa se dve nepoznanice biraju proizvoljno, dok se treća izražava pomoću njih iz te jednačine; ako postoje bar dve od jednačina sistema koje nisu linearno zavisne, tj. koje nemaju proporcionalne koeficijente, onda se u determinanti toga sistema uoči redak koji odgovara onoj trećoj od jednačina toga sistema i nadju algebarski komplementi elemenata toga retka; tada se nepoznanice x, y i z odnose kao ti algebarski komplementi (kofaktori), koji redom odgovaraju prvom, drugom i trećem elementu uočenog retka.

Pošto su, na primer, jednačine sistema (S) koje obrazuju sistem (T) linearno nezavisne, možemo na njih primeniti gornji postupak iznalaženja rešenja; u tu svrhu uočimo onaj redak determinante D sistema (S) koji odgovara preostaloj jednačini toga sistema; to je treći redak te determinante; algebarski komplementi (kofaktori) prvog, drugog i trećeg elementa toga retka jesu, redom:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -9,$$

pa prema gore opisanom postupku, imamo da je

$$x : y : z = (-3) : 6 : (-9),$$

ili, nakon kraćenja sa -3:

$$x : y : z = 1 : (-2) : 3,$$

a to smo dobili i ranije.

Iz gornje proporcije sleduje da je

$$x : 1 = y : (-2) = z : 3 = p,$$

gde je sa p označen zajednički koeficijent proporcionalnosti, i zato $x = p, \quad y = -2p, \quad z = 3p,$

pri čemu je p proizvoljan realan broj.

20. Ispitaj da li homogeni sistem ima netrivijalna rešenja, i ako ima naći ta rešenja:

1°
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 4y - 6z &= 0\ ; \end{aligned}$$

2°
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 8z &= 0 \\ x - 5y - z &= 0\ ; \end{aligned}$$

3°
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 4x + 5y - 6z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0\ ; \end{aligned}$$

4°
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 0 \\ 4x - 2y + 4z &= 0 \\ 5x + y + 6z &= 0\ . \end{aligned}$$

Uputstvo. Radi paralelno sa prethodnim zadatkom.

Rezultat: 1° Sistem ima netrivijalna rešenja, koja su data sa

$$x = -\frac{2}{5}p, \qquad y = \frac{8}{5}p, \qquad z = p,$$

gde je p proizvoljan broj.

2° Sistem nema netrivijalnih rešenja, jer je njegova determinanta D jednaka 118, dakle različita od nule.

3° Determinanta ovog sistema je jednaka -43, dakle različita je od nule, pa sistem nema netrivijalnih rešenja.

4° Sistem ima i netrivijalna rešenja, i ona su data sa

$$x : y : z = 8 : 2 : (-7),$$

ili, što je isto:

$$x = 8p, \qquad y = 2p, \qquad z = -7p,$$

gde je p proizvoljan broj.

21. U sistemu jednačina

$$(S) \qquad \begin{aligned} x + ay - z &= 0 \\ x - 2y + 5z &= 0 \\ 5x + (a+2)y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

odredi parametar a tako da sistem ima i netrivijalna rešenja. Za nadjeno a reši posmatrani sistem.

Rešenje. Da bi sistem (S) imao i netrivijalna rešenja, treba i dosta je da njegova determinanta bude jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & a+2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno nakon izračunavanja gornje determinante,

$$15a - 30 = 0 \implies a = 2,$$

Prema tome, ako je parametar a jednak 2, sistem (S) ima i netrivijalna rešenja; za tu vrednost parametra a taj sistem postaje

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ x - 2y + 5z &= 0 \\ 5x + 4y + 4z &= 0 \;; \end{aligned}$$

njegova se rešenja nalze prema jednom od dva postupka opisana u zadatku 19, i ona glase

$$x = 8p, \qquad y = -6p, \qquad z = -4p,$$

gde je p proizvoljan broj.

Uvrsti ove vrednosti u prethodni sistem, pa se uveri da je zadovoljena svaka od jednačina toga sistema (bez obzira koliko je p!).

22. Odredi onu vrednost parametra a za koju postoje i netrivijalna rešenja sistema:

$$1^\circ \; \begin{aligned} ax + 4y - 3z &= 0 \\ 2x + y - az &= 0 \\ 3x + 3y + 2z &= 0; \end{aligned} \qquad 2^\circ \; \begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ ax + y + z &= 0; \end{aligned} \qquad 3^\circ \; \begin{aligned} x + (2a-1)y + 3z &= 0 \\ x + ay + 2z &= 0 \\ x + (a+3)y + z &= 0 \end{aligned}$$

Za tako nadjene vrednosti parametra a reši te sisteme.

Uputstvo. Radi paralelno sa prethodnim zadatkom.

Rezultat: 1° $a=5$ ili $a=-5/3$; za $a=5$, rešenja posmatranog sistema (ispiši taj sistem stavljajući umesto parametra a njegovu vrednost 5) glase:

$$x = 17p, \qquad y = -19p, \qquad z = 3p,$$

a za $a=-5/3$

$$x = -3p, \qquad y = p, \qquad z = 3p,$$

gde je p proizvoljan broj.

2° $a = 1$; ako u posmatrani sistem umesto a stavimo 1, dobijamo, dakle, sistem koji ima i netrivijalna rešenja, ali pri iznalaženju tih rešenja sada ne možemo odbaciti bilo koju od jednačina toga sistema; već samo drugu ili treću; to je iz razloga što su one istovetne za $a=1$ (dakle, linearno zavisne!); inače, samo je rešenje dato sa:

$$x = -p, \qquad y = 0, \qquad z = p,$$

gde je p proizvoljan broj; primetimo da u ovom slučaju nepoznanica y uvek je jednaka nuli (ne zavisi od p!), dok se x i z mogu menjati.

3° $a = -2$; sama netrivijalna rešenja glase

$$x = 0, \qquad y = -p, \qquad z = p$$

(p je proizvoljan broj).

23. Odredi parametar a tako da sistem linearnih jednačina

$$(S)\qquad \begin{aligned} 2ax - 3y &= -a+3 \\ 3x - 2y &= -1 \\ 4x - ay &= -2 \end{aligned}$$

ima rešenje.

Rešenje. Sistem (S) sastoji se od tri linearne jednačine sa dve nepoznanice; ako bismo odabrali bilo koje dve od tih jednačina, dobili bismo sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznanice, sa kojim smo se ranije upoznali; samo se radi još o tome, da li će rešenje toga "odabranog" sistema da zadovoljava i onu treću od jednačina sistema (S); naš je zadatak upravo u tome da odredimo parametar a tako da to bude slučaj.

U tu svrhu napišimo sistem (S) u ekvivalentnom obliku

$$(T)\qquad \begin{aligned} 2ax - 3y + (a-3)z &= 0 \\ 3x - 2y + z &= 0 \\ 4x - ay + 2z &= 0, \end{aligned}$$

gde je $z = 1$ (stavljajući u sistem (T) da je $z=1$, uveri se da on postaje upravo sistem (S)!). Ovo je, pak, jedan homogeni sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznanice, pri čemu je uvek $z=1$; to znači da taj sistem ima samo netrivijalna rešenja (zbog $z\neq 0$), pa njegova determinanta mora biti jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} 2a & -3 & a-3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -a & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

kako je vrednost ove determinante jednaka (računaj!): $a^2-9a+18$, biće

$$a^2-9a+18 = 0,$$

odakle sleduje da je $a=3$ ili $a=6$.

Prema tome, ako je $a=3$, ili pak $a=6$, sistem (S) ima rešenje po x i y; tada se mogu uzeti bilo koje dve od jednačina toga sistema i rešiti po x i y; dobijeno rešenje će da zadovoljava i treću od jednačina. Uveri se da u slučaju da je $a=3$, rešenje sistema (S) glasi $x=1$, $y=2$, a u slučaju da je $a=6$, rešenje je $x=-1/5$, $y=1/5$.

24. Ispitaj za koje vrednosti parametra a sistem linearnih jednačina ima rešenje, pa za tu vrednost parametra naći to rešenje:

1° $\begin{aligned} ax + 4y &= 3 \\ 2x + y &= a \\ 3x + 3y &= -2; \end{aligned}$ $\quad 2^\circ$ $\begin{aligned} ax + y &= -1 \\ x + y &= -1 \\ x + 2y &= -1; \end{aligned}$ $\quad 3^\circ$ $\begin{aligned} x + (a+3)z &= -a \\ x + 3z &= -2a+1 \\ x + 2z &= -a. \end{aligned}$

Uputstvo. Radi paralelno sa prethodnim zadatkom.

Rezultat: 1° $a = 5$ ili $a = -5/3$; ako je $a=5$, rešenje glasi $x = \frac{17}{3}$, $y = -\frac{19}{3}$, a ako je $a=-5/3$, rešenje je $x=-1$, $y= 1/3$;

2° $a=1$; rešenje je $x=-1$, $y=0$; 3° $a=1$ ili $a=-1$; rešenja su redom: $x=-1$, $z=0$ i $x=-3$, $z=2$ (pazi, u ovom slučaju treba uzeti da je $y=1$; ispitaj prethodni zadatak!).

25. Pomoću determinanata reši sledeće sisteme od po četiri linearne jednačine sa po četiri nepoznanice:

1° $\begin{aligned} 2x + 8y - z - 2t &= 2 \\ 15y + 2z + 3t &= 1 \\ 4x + 10y - 2z &= 0 \\ 3x + 6y + 2t &= 1; \end{aligned}$ $\quad 2^\circ$ $\begin{aligned} 4x - 3y + 2u &= 9 \\ 2x + 6z &= 28 \\ -2y + 4u &= 14 \\ 3x + 4u &= 26; \end{aligned}$

3° $\begin{aligned} x - y - 2z &= 0 \\ 2x - y + t &= 5 \\ x - t &= 1 \\ 2y + 3z &= 0. \end{aligned}$

Rešenje. 2° Nadjimo prvo determinante vezane za taj sistem; jedno za drugim imamo da je:

$$D=\begin{vmatrix}4&-3&0&2\\2&0&6&0\\0&-2&0&4\\3&0&0&4\end{vmatrix}=\text{(razvij po trećem stupcu!)}=-6\cdot\begin{vmatrix}4&-3&2\\0&-2&4\\3&0&4\end{vmatrix}=-6\cdot(-56)=336;$$

$$D_x=\begin{vmatrix}9&-3&0&2\\28&0&6&0\\14&-2&0&4\\26&0&0&4\end{vmatrix}=\text{(razvij po trećem stupcu!)}=-6\cdot\begin{vmatrix}9&-3&2\\14&-2&4\\26&0&4\end{vmatrix}=-6\cdot(-112)=672;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}4&9&0&2\\2&28&6&0\\0&14&0&4\\3&26&0&4\end{vmatrix}=\text{(razvij po trećem stupcu!)}=-6\cdot\begin{vmatrix}4&9&2\\0&14&4\\3&26&4\end{vmatrix}=-6\cdot(-168)=1008;$$

$$D_z=\begin{vmatrix}4&-3&9&\boxed{2}\\2&0&28&0\\0&-2&14&4\\3&0&26&4\end{vmatrix}=$$ (primeni "top-postupak"; za topa uzmi markiranu dvojku, koji neka "dejstvuje" duž četvrtog stupca) =

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}2&0&28\\-8&4&-4\\-5&6&8\end{vmatrix}=-2\cdot(-672)=1344;$$

$$D_u=\begin{vmatrix}4&-3&0&9\\2&0&6&28\\0&-2&0&14\\3&0&0&26\end{vmatrix}=\text{(razvij po trećem stupcu!)}=-6\cdot\begin{vmatrix}4&-3&9\\0&-2&14\\3&0&26\end{vmatrix}=-6\cdot(-280)=1680.$$

Samo rešenje posmatranog sistema glasi:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{672}{336},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{1008}{336},\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{1344}{336},\quad u=\frac{D_u}{D}=\frac{1680}{336}$$

tj.

$$x=2,\quad y=3,\quad z=4,\quad u=5.$$

Radeći analogno prethodnom, reši i preostala dva sistema.

Rezultat: 1° $x=1$, $y=0$, $z=2$, $t=-1$; 3° $x=1$, $y=-3$, $z=2$, $t=0$.

Topovski ili T-postupak ("top-postupak") rešavanja sistema linearnih jednačina

Pri rešavanju prethodnog zadatka videli smo kako je već rešavanje sistema od četiri linearne jednačine sa četiri nepoznanice skopčano sa izračunavanjem četiri determinante četvrtog reda što svakako predstavlja veliki posao; stvar se još više komplikuje ako radimo sa sistemima sa 5 i više linearnih jednačina i isto toliko nepoznanica; stoga metod rešavanja sistema linearnih jednačina pomoću determinanata u praksi nema neki veći značaj, posebno ako je broj jednačina veći od tri; za praksu je od posebnog značaja tzv. "top-postupak" ili Gaussov postupak za rešavanje sistema linearnih jednačina. Objasnimo stvar na primeru (ispitaj "top-postupak" za izračunavanje determinanata!).

26. Reši sistem jednačina

$$(S)\qquad \begin{array}{rcl|lll} 3x+5y\boxed{-\ z}-2t&=&11 & \cdot(-1) & \cdot 1 & \cdot(-2)\\ 2x+4y-z+t&=&8 & + & & \\ 4x-y+z&=&-24 & & + & \\ 5x+3y-2z+t&=&-13 & & & + \end{array}$$

Rešenje. U prvoj jednačini sistema (S) izabrali smo nalevo član $-z$ (top ili tvrdjava) i pomoću toga "topa" poništili sve odgovarajuće članove "ispod" njega. Kako je to poništavanje vršeno naznačeno je shematski. Na primer, prvu jednačinu pomnožili smo sa -1, i dodali je drugoj jednačini; nastala je jednačina koja ne sadrži nepoznanicu z, itd. Tako nastaje novi sistem (T), koji je ekvivalentan sa sistemom (S); on glasi (radi postepeno, vršeći one "radnje" koje su na gornjoj shemi naznačene!):

$$(T)\qquad \begin{array}{rcl|ll} 3x+5y\boxed{-\ z}-2t&=&11 & & \\ \boxed{-x}-y+3t&=&-3 & \cdot 7 & \cdot(-1)\\ 7x+4y-2t&=&-13 & + & \\ -x-7y+5t&=&-35 & & + \end{array}$$

Jednačina u kojoj smo izabrali "topa" ostaje nepromenjena (to je bila prva jednačina sistema (S); inače i da nije bila prva u sistemu (S), uzeli bismo je za prvu u sistemu (T)!); preostale tri jednačine sistema (T) ne sadrže nepoznanicu z, pa ih možemo shvatiti kao poseban sistem, koji ima jednu jednačinu i jednu nepoznanicu manje nego polazni sistem (S), što je svakako velika korist.

Medjutim, i taj sistem možemo nastaviti rešavati "top-postupkom"; pri tome ne diramo više u prvu jednačinu sa markiranim "topom", koju "prenosimo" iz sistema (S) u sistem (T); dakle, sada u drugoj jednačini sistema (T) treba odabrati jedan "top" i raditi isto što i u prethodnom; neka taj "top" bude -x; topove uvek uokvirujemo i pri svakom naknadnom prepisivanju jednačine u kojoj smo bili izabrali "topa", taj top treba uokviriti (na primer, prva jednačina sistema (S) preneta je u sistem (T) nepromenjena, i opet smo njen "top" uokvirili iako sa njim više ne "dejstvujemo"!); iz sistema (T), nakon izvršenih naznačenih radnji nad njim, nastaje sistem (U), čije su dve prve jednačine prenesene iz sistema (T):

$$
(U) \qquad \begin{array}{rrrrl}
3x + 5y & \boxed{-z} & - 2t & = 11 & \\
\boxed{-x} - y & & + 3t & = -3 & \\
\boxed{-3y} & & +19t & = -34 & \Big] \cdot -2 \\
-6y & & + 2t & = -32 & \Big] + \\
\end{array} \;;
$$

poslednje dve jednačine sistema (U) sadrže samo dve nepoznanice; no, i na njega primenimo "top-postupak"; pri tome sada ne diramo u prve dve jednačine, tj. one koje već "sadrže topove"; za topa uzmimo $-3y$ i njega markirajmo; nakon izvršene naznačene "radnje", sistem (U) prelazi u sistem (V), koji ima prve tri jednačine iste kao i sistem (U) (to su one koje imaju "topove"!):

$$
(V) \qquad \begin{array}{rrrr}
3x + 5y & \boxed{-z} & - 2t & = 11 \\
\boxed{-x} - y & & + 3t & = -3 \\
\boxed{-3y} & & +19t & = -34 \\
& & \boxed{-36t} & = 36 \,. \\
\end{array}
$$

Ovaj poslednji sistem možemo zvati "topovskim sistemom"; dobro pogledaj kako je on gradjen; svaka njegova jednačina sadrži tačno po jednog "topa"; pri tome druga od jednačina ne sadrži nepoznanicu koju sadrži "top" iz prve jednačine,

treća od jednačina ne sadrži nepoznanice koje sadrže topovi iz prve dve jednačine, itd.

I sada se ide natrag rešavajući unatrag jednačine "topovskog" sistema; iz poslednje se neposredno dobije da je $t=-1$; pomoću toga pretposlednja postaje

$$-3y - 19 = -34,$$

odakle je $y=5$; sada druga od jednačina daje: $-x -5 -3 = -3$, tj. $x=-5$; konačno, iz prve jednačine dobijamo: $-15 + 25 - z + 2 = 11$, tj. $z=1$, pa rešenje "topovskog" sistema (V) glasi:

$$(1) \qquad x = -5, \quad y = 5, \quad z = 1, \quad t = -1.$$

No, sistemi (S) i (V) jesu ekvivalentni, pa je sa (1) dato i rešenje sistema (S).

Već na ovome primeru od četiri linearne jednačine sa četiri nepoznanice vidimo kako je ovaj "top-postupak" vrlo efikasan, a tek kada imamo 5,6,... i više jednačina, kada je sa determinantama zaista nezgodno raditi.

Važna napomena. Pri rešavanju gornjeg zadatka, pri prelazu sa sistema (S) na sistem (T), prvu jednačinu sistema (S), (tj. onu u kojoj smo izabrali "topa"!) jednostavno smo preneli u sistem (T) i više u nju nismo dirali sve do kraja, tj. sve do "top-sistema"; stoga nije bilo ni potrebno da se ona prepisuje (pošto je pri daljnjim radnjama uvek "mirovala"); isto tako, pri prelazu sa sistema (T) na sistem (U), nije bilo potrebno prepisivati prve dve jednačine, jer pomoću njih kasnije i tako nismo ništa radili; tada bi, na primer, sistem (T) glasio

$$
\begin{array}{rl}
\boxed{-3y} + 19t & = -34 \\
-6y + 2t & = -32 \;; \\
\end{array}
$$

naravno da u tom slučaju sistemi (S), (T) i (U) ne bi bili ekvivalentni; medjutim, na kraju bi obrazovali "topovski" sistem koji se sastoji samo iz onih jednačina u kojima smo uočavali "topove" a koje, radi kratkoće, nismo stalno prepisivali (uključujući tu i poslednju jednačinu koja se dobije pri rešavanju, na primer, u našem primeru jednačinu

$-36t=36$); to bi bio upravo gornji sistem (V), a on je ekvivalentan sa polaznim sistemom (S).

Za ubuduće ovu napomenu imaj u vidu.

<u>Napomena oko izbora topa.</u> Naravno da "topa" možemo da izaberemo u bilo kojoj jednačini sistema; bitno je da onu jednačinu, u kojoj smo izabrali "topa" i pomoću njega uništili sve "ispod" i "iznad" njega, više ne diramo (šta više, ne moramo je ni prepisivati, sve do kraja kada obrazujemo "topovski" sistem); inače, za "topa" je najzgodnije izabrati onu nepoznanicu uz koju je koeficijent 1 ili -1, jer se pomoću njega najlakše "dejstvuje"; ako, pak, koeficijent nije 1, onda delenjem cele jednačine sa tim koeficijentom uvek možemo postići da bude.

27. Primeni topovski postupak i reši ove sisteme jednačina:

1°
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + t &= 3\\ 3x + 7y + 7z + 2t &= 12\\ x + 4y + 5z + 2t &= 2\\ 2x + 9y + 8z + 3t &= 7\,; \end{aligned}$$

2°
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + 2t &= 4\\ 4x + 3y + z + t &= 5\\ 5x + 11y + 3z + 2t &= 2\\ -10x - 22y - 6z - 4t &= 7\,; \end{aligned}$$

3°
$$\begin{aligned} 9x + y + 4z - 5t &= 1\\ 7x + y + 6z - t &= 7\\ 3x + 2y + 2z + 2t &= 2\\ 2x + 2y + 3z + 4t &= 5\,; \end{aligned}$$

4°
$$\begin{aligned} x + 2y - z + t &= 1\\ 2x - y - 3z + 2t &= 2\\ 3x - 2y + z - 5t &= -7\\ 4x + 3y - z + t &= -1\,. \end{aligned}$$

<u>Rešenje.</u> Još jednom dobro ispitaj rešenje prethodnog zadatka u kome je opisan topovski postupak za rešavanje sistema linearnih jednačina.

1° Vršeći radnje koje su naznačene shemama i vodeći računa o "važnoj napomeni" iz prethodnog zadatka, jedan za drugim, imamo sledeće sisteme

$$\begin{array}{rcl|l} \boxed{x} + 2y + 3z + t &=& 3 & \cdot(-3)\quad \cdot(-1)\quad \cdot(-2)\\ 3x + 7y + 7z + 2t &=& 12 & +\\ x + 4y + 5z + 2t &=& 2 & \qquad\;\; +\\ 2x + 9y + 8z + 3t &=& 7 & \qquad\qquad\quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|l} \boxed{y} - 2z - t &=& 3 & \cdot(-2)\quad \cdot(-5)\\ 2y + 2z + t &=& -1 & +\\ 5y + 2z + t &=& 1 & \qquad\;\; + \end{array}\quad ,$$

$$\begin{array}{rcl|} \boxed{6z} + 3t &=& -7\\ 6z + 3t &=& -7 \end{array}\quad .$$

Poslednji sistem sastoji se od dve iste jednačine; stoga jednu od njih možemo odbaciti; obrazujmo sada topovski sistem; on se sastoji od onih jednačina gornjih sistema koje imaju "topove"; dakle, "topovski" sistem koji odgovara sistemu 1° glasi:

$$\begin{aligned} \boxed{x} + 2y + 3z + t &= 3\\ \boxed{y} - 2z - t &= 3\\ \boxed{6z} + 3t &= -7\,. \end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine sleduje da je $z = -\frac{1}{2}t - \frac{7}{6}$, pri čemu je t proizvoljno; sada iz druge od gornjih jednačina sleduje da je

$$y = 2\left(-\frac{1}{2}t - \frac{7}{6}\right) + t + 3 = \frac{2}{3}\,,$$

a potom iz prve

$$x = -2\cdot\frac{2}{3} - 3\left(-\frac{1}{2}t - \frac{7}{6}\right) - t + 3 = \frac{1}{2}t + \frac{31}{6}\,.$$

Prema tome, rešenje sistema 1° glasi

$$x = p + 31/6,\quad y = 2/3,\quad z = -p - 7/6,\quad t = 2p,$$

gde je p proizvoljan broj, i sistem je neodredjen.

<u>Zaključak.</u> Ako poslednja jednačina "topovskog" sistema sadrži više od jedne nepoznanice, sistem je neodredjen i ima beskonačno mnogo rešenja.

Radeći analogno prethodnom, uveri se da je i sistem 3° takodje neodredjen; njegova su rešenja data sa

$$x = 8p - 6/7,\quad y = -13p + 1/7,\quad z = -6p + 15/7,\quad t = 7p,$$

gde je p proizvoljan broj.

2^o Vršeći radnje koje su šematski naznačene, jedan za drugim dobijamo sledeće sisteme:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y \boxed{+\ z} + 2t &=& 4 \\ 4x + 4y + z + t &=& 5 \\ 5x + 11y + 3z + 2t &=& 2 \\ -10x - 22y - 6z - 4t &=& 7 \end{array} \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-3) \quad \cdot 6$$

$$\begin{array}{rcl} 2x \qquad - t &=& 1 \\ \boxed{-x} + 2y - 4t &=& -10 \\ 2x - 4y + 8t &=& 31 \end{array} \quad \cdot 2 \quad \cdot 2$$

$$\begin{array}{rcl} 4y - \boxed{9t} &=& -19 \\ 0y + 0t &=& 11 \end{array},$$

pa pripadni "topovski" sistem glasi

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y \boxed{+\ z} + 2t &=& 4 \\ \boxed{-x} + 2y \qquad - 4t &=& -10 \\ 4y \qquad \boxed{-\ 9t} &=& -19 \\ \boxed{0} &=& 11 . \end{array}$$

No, poslednja jednačina ovog topovskog sistema je nemoguća, pa je taj sistem, a time i polazni sistem pod 2^o, protivurečan.

Zaključak. Ako nas topovski postupak dovede do kontradikcije da je nula jednaka nekom broju koji je različit od nule (možemo reći i topu, jer su topovi uvek različiti od nule!), onda je to znak da je sistem na koji primenjujemo taj "top-postupak" protivurečan.

4^o Postupi analogno kao u prethodnim primerima. Sistem je odredjen (tj. regularan) i ima jedinstveno rešenje; ono je dato sa

$$t = 15/19, \quad z = -25/38, \quad y = 5/38, \quad x = -27/38.$$

28. Primeni topovski postupak i reši sledeće sisteme linearnih jednačina:

1^o
$$\begin{aligned} -2x + 3y + 4z &= -8 \\ 2x - 3y + 4z &= -16 \\ 2x + 3y - 4z &= 20\ ; \end{aligned}$$

2^o
$$\begin{aligned} 3x + 5y + 4z &= 0 \\ -6x - 2y + 5z &= 1 \\ 7x + y - 9z &= -2\ ; \end{aligned}$$

3^o
$$\begin{aligned} 3x + 2y + 3z + t &= -29 \\ -x + 2y - 3z + 2t &= -2 \\ 2x - 4y + z - 5t &= 29 \\ x + 3y - z - t &= -2\ ; \end{aligned}$$

4^o
$$\begin{aligned} 3x - 0{,}2y + 0{,}03z &= 4 \\ 6x + 3{,}5y + 4{,}1\,z &= 2{,}3 \\ 8x - 12\,y + 0{,}4\,z &= 6\ ; \end{aligned}$$

5^o
$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 5 \\ x - y - z + t &= 3 \\ 2x - 3y - 4z + 5t &= -12 \\ x + y - z + 2t &= 5\ ; \end{aligned}$$

6^o
$$\begin{aligned} x + 2y + z - 6t &= 1 \\ 2x + 3y - z + 5t &= 2 \\ 3x - y + 2z - 7t &= 3 \\ 4x + y - 3z + 6t &= 4\ ; \end{aligned}$$

7^o
$$\begin{aligned} 5x - 4y + 3z + u &= -8 \\ 2x - 3y - z \qquad &= -1 \\ 9x + 7y \qquad - 2u &= -9 \\ -x + 4y + z + 3u &= 0\ ; \end{aligned}$$

8^o
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ x + 3y + z + u &= 0 \\ x - y + 2z - 3u &= 0 \\ 3x + 4y - z - 3u &= -1\ ; \end{aligned}$$

9^o
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 1 \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 2 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5 + x_6 + x_7 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad + x_6 + x_7 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad + x_7 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \qquad &= 7 . \end{aligned}$$

Rezultat. 1^o $(x,y,z)=(1,2,-3)$; 2^o $(x,y,z)=(17/24,-23/24,2/3)$; 3^o $(x,y,z,t)=(-2,-3,-4,-5)$; 5^o $(x,y,z,t)=(54/5,22/5,-17/5,-34/5)$; 6^o $(x,y,z,t)=(1,0,0,0)$; 7^o $(x,y,z,u)=(-1,0,-1,0)$; 8^o $(x,y,z,u)=(-5/11,\ 0,2/11,1/22)$; 9^o $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)=(22,-1,-2,-3,-4,-5,-6)$.

Sistemi linearnih nejednačina

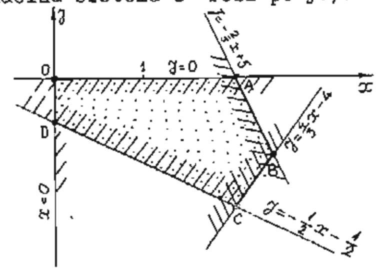
29. U koordinantnoj ravnini Oxy odredi oblast tačaka (x,y) čije koordinate x i y zadovoljavaju istovremeno sistem nejednačina:

$$1^\circ \left.\begin{matrix} x - 2y + 1 \leqslant 0 \\ 2x + y - 3 \geqslant 0 \end{matrix}\right\};\quad 2^\circ \left.\begin{matrix} y + 2 \geqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{matrix}\right\};\quad 3^\circ \left.\begin{matrix} x + y \geqslant 1 \\ x - y \leqslant 1 \end{matrix}\right\};$$

$$4^\circ \left.\begin{matrix} -x + y \leqslant 2 \\ 5x + 2y \geqslant 10 \\ 5x - 2y \leqslant 10 \end{matrix}\right\};\quad 5^\circ \left.\begin{matrix} -x + 2y \leqslant 4 \\ 5x + 2y \geqslant 10 \\ 4x - 3y \leqslant 12 \\ 7x + 4y \leqslant 28 \end{matrix}\right\};\quad 6^\circ \left.\begin{matrix} x + 2y \geqslant -1 \\ 5x + 2y \leqslant 10 \\ 4x - 3y \leqslant 12 \\ x \geqslant 0 \quad y \leqslant 0 \end{matrix}\right\}.$$

Rešenje. 6° Kako su sve nejednačine linearne, tražena oblast je ograničena pravama. Sistem 6° ekvivalentan je sa sistemom (svaku od nejednačina sistema 6° reši po y!):

$$(S)\quad \left.\begin{matrix} y \geqslant -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y \leqslant -\frac{5}{2}x + 5 \\ y \geqslant \frac{4}{3}x - 4 \\ y \leqslant 0, \; x \geqslant 0 \end{matrix}\right\}.$$



Jednačine graničnih pravih glase (one nastaju iz gornjih nejednačina sistema (S) kada se umesto znaka nejednakost stavi znak jednakosti):

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{5}{2}x + 5, \quad y = \frac{4}{3}x - 4, \quad y=0, \quad x=0.$$

Na slici su osenčene oblasti rešenja pojedinih nejednačina sistema (S), odnosno 6°. Tako, na primer, prvu od nejednačina sistema (S) zadovoljavaju one tačke (x,y) koordinantne ravnine Oxy, koje leže "iznad" prave koja odgovara toj ne-

jednačini, tj. prave $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, pa je stoga ona i osenčena ka "gore".

Tražena oblast je unutrašnjost i rub poligona OABCD.

M A T R I C E

Definicija 1. Matrica a tipa (razreda, oblasti, domena) $m \times n$ nad telom R realnih brojeva je pravougaona shema brojeva ili brojevnih izraza $a_{ij} \in R$:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Prema tome, matrica a tipa $m \times n$ je upravo funkcija $a\colon S \longrightarrow R$, koja preslikava Dekartov proizvod $S = M \times N$ u skup realnih brojeva R; pri tome je $M = \{1,2,\dots,m\}$ i $N = \{1,2,\dots,n\}$, tj. skup S (domen te funkcije a!) je upravo skup uredjenih parova (i,j), pri čemu prva koordinata i pripada skupu M, a druga koordinata j skupu N; svakom tom uredjenom paru (i,j) skupa S odgovara potpuno odredjena vrednost $a(i,j)$ (č. "a od i, jot") funkcije (matrice) a; tu vrednost (komponentu, elemenat) označavamo jednostavno sa a_{ij}, tj. $a(i,j) = a_{ij}$; samu tu funkciju označavamo gornjom shemom.

U prvi redak (vrstu) dolaze komponente ili vrednosti koje odgovaraju uredjenim parovima (ovde je te uredjene parove zgodno zvati i "poljima"; tako, na primer, možemo govoriti o polju (3,7) izvesne matrice; to je upravo "presek trećeg (3) retka i sedmog (7) stupca; sličnu stvar imamo na šahovskoj ploči) $(1,j)$ gde je $j \in N$, tj. $j=1,2,\dots,n$ (primeti da je tu prva koordinata uvek 1, tj. u prvom retku je prvi indeks svih komponenata jednak 1);

analogno je i sa drugim, trećim, ... retkom, u kojima su smeštene sve komponente matrice čiji su prvi indeksi redom jednaki 2,3,. ... .

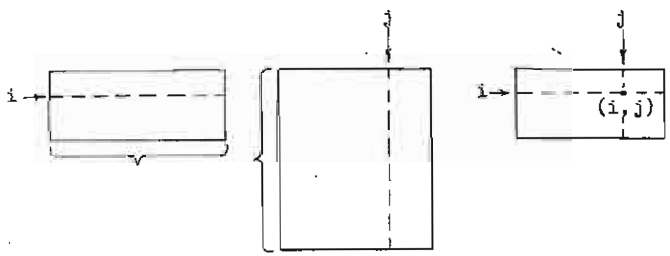
Organizacija matrica pravila računanja sa matricama

M_1. Jednakost matrica. Za dve matrice (vidi gornju definiciju 1) kažemo da su jednake ako imaju iste domene (tj. ako su im iste oblasti) i ako su im jednake sve odgovarajuće komponente (vrednosti) (tj. ako su im jednake komponente koje se nalaze na odgovarajućim poljima tih matrica).

M_2. Sabiranje matrica. Matrice se mogu sabirati (oduzimati) jedino ako imaju iste domene (tj. ako su istog tipa ili razreda); samo sabiranje (oduzimanje) vrši se tako da se saberu (oduzmu) odgovarajuće komponente tih matrica (tj. komponente koje se nalaze na istim poljima tih matricâ).

M_3. Množenje matrice brojem ili brojevnim izrazom. Matricu množimo brojem ili brojevnim izrazom tako da svaku njenu komponentu pomnožimo tim brojem ili brojevnim izrazom.

M_4. Množenje matrica. Neka je (a,b) takav uredjen par (dakle, bitno je koja je od tih matrica prva a koja druga!) matricâ da matrica a ima toliko stupaca koliko matrica b ima redaka (vidi sliku);



tada (i samo tada) se proizvod ab matrice a i matrice b (oprez! pazi na redosled!) definira kao matrica ab, koja ima redaka koliko i matrica a, a stupaca koliko i matrica b, i čija je komponenta (vrednost, elemenat) na polju (i,j) (i-ti redak i j-ti stupac), koju označimo sa $(ab)_{ij}$, jednaka skalarnom proizvodu i-tog retka ("vektora") matrice a i j-tog stupca ("vektora") matrice b.

Na primer, ako je

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

prvo zaključujemo da se matrica a može množiti matricom b (prva ima onoliko stupaca (3) koliko druga ima redaka (3)!), a zatim da je "izlazna" matrica ab tipa (oblasti) 2×4 (broj redaka kao i matrica a, a broj stupaca kao i matrica b!); nadjimo, na primer, kolika je komponenta $(ab)_{23}$ na polju (2,3) matrice ab; prema gore rečenom imamo da je

$$\begin{aligned} (ab)_{23} &= (\text{drugi -2- redak od a})\circ(\text{treći -3- stupac od b}) \\ &= (0,2,-1)\circ(-3,2,4) \\ &= 0\cdot(-3) + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 4 \\ &= 0; \end{aligned}$$

slično je i za ostale komponente matrice ab; nakon kraćeg računa dobijamo da je

$$ab = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 22 & 0 \\ -2 & 11 & \boxed{0} & 0 \end{bmatrix}.$$

M_5. Veza izmedju matricâ i brojevâ ili brojevnih izrazâ. Svaku matricu razreda 1×1 (tj. matricu sa jednom jedinom komponentom) poistovećujemo sa vrednošću te matrice (tj. sa tom komponentom). Tako je, na primer, $[-7] = -7$, te $[\sin x] = \sin x$.

Definicija 2. Ako retke izvesne matrice a pišemo redom kao stupce, a stupce matrice a redom kao retke, nastaje transponovana (dualna) matrica zadane matrice a; označavamo je sa a^T ili a'.

Definicija 3. Neka je a izvesna kvadratna matrica (dakle matrica koja ima redaka koliko i stupaca); ako svaku komponentu te matrice zamenimo njenim algebarskim komplementom (vidi definiciju 4 o determinantama), nastaje izvesna matrica koju označimo sa fa; transponovanu matricu (vidi prethodnu definiciju 2) te matrice fa, zovemo adjungovanom matricom zadane matrice a ili adjunktom matrice a; označavamo je sa Aa (tako je, na primer, Ac adjunkta neke matrice c); dakle je $Aa = (fa)^T$.

Definicija 4. Ako za kvadratnu matricu a postoji matrica x takva da važi

$$ax = xa = I,$$

gde je I jedinična matrica (po glavnoj dijagonali su jedinice a van su nule; naravno, takve matrice su uvek kvadratne) istog tipa koa i matrica a, onda matricu x zovemo inverznom matricom matrice a; označavamo je sa a^{-1}, da se naznači da ona nastaje iz matrice a; dakle, $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ (Doma = DomI).

Teorem 1. Neka je a kvadratna matrica konačne oblasti; da bi ta matrica imala svoju inverznu matricu a^{-1} (vidi prethodnu definiciju 4), treba i dosta je da je ona regularna, tj. da je njena determinanta det a različita od nule; u tom slučaju, sama matrica a^{-1} je jednaka proizvodu broja $\frac{1}{\det a}$ (recipročna vrednost od deta !) i adjungovane matrice ili adjunkte (vidi definiciju 3) zadane matrice a.

Primedba. Iz gornjeg teorema 1 sleduje da ako se hoće odrediti inverzna matrica a^{-1} zadane kvadratne matrice a, treba raditi sledeće:

1° Naći determinantu det a matrice a; ako je ona jednaka nuli, matrica a nema inverznu matricu i stvar je gotova; ako to nije, tj. ako je $\det a \neq 0$, radi se dalje;

2° Nadju se algebarski komplementi A_{ij} svake komponente a_{ij} matrice a;

3° Formira se nova matrica fa, stavljajući u matrici a umesto komponenata a_{ij} odgovarajuće algebarske komplemente A_{ij};

4° Nadje se transponovana matrica matrice fa; to je adjunkta Aa zadane matrice a;

5° Proizvod broja 1/deta i te matrice Aa jeste matrica a^{-1}.

Sabiranje i množenje matrica

1. Da li je $\begin{bmatrix} \sin^2x + \cos^2x & \log 100 & 5 \\ 3 - 24i & 85 - 79 & 0 \\ (a-b)(a+b) & \sin 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10:2 \\ 5-2-24i & 6 & \log 1 \\ a^2 - b^2 & 0 & \cos 0 \end{bmatrix}$?

Rešenje. Jeste. Naime, obe od gornjih matrica jesu iste oblasti 3×3; dalje, svi odgovarajući elementi jedne od tih matrica jednaki su elementima one druge, što se neposredno proverava; tako, na primer, na polju (1,1) prve matrice stoji $\sin^2x + \cos^2x$, a na istom polju druge matrice stoji 1; no, to dvoje je jednako, jer za bilo koji realan broj x važi identitet: $\sin^2x + \cos^2x = 1$; ili, na polju (3,1) prve matrice stoji $(a-b)(a+b)$, a druge matrice a^2-b^2, a to dvoje je jednako (razlika kvadrata; a i b su realni brojevi), itd. Uveri se da su i ostale odgovarajuće vrednosti tih matrica jednake.

2. Zadana je matrica $a = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$; nadji x i y iz uslova:

1° $a_{xy} > 0$; 2° $a_{xy} < 0$; 3° $a_{xy} \geqslant 0$; 4° $a_{xy} > 4$;

5° $a_{xy} > 7$.

Rešenje. Treba da nadjemo one elemente a_{xy} u matrici a koji zadovoljavaju neki od gornjih uslova.

1° Nadjimo elemente matrice a koji su pozitivni; to su: $3 = a_{11}$, $6 = a_{21}$, $5 = a_{22}$ i $4 = a_{23}$; to znači da je u ovome slučaju: $a_{xy} = a_{11} \Rightarrow x = 1$ i $y = 1$, $a_{xy} = a_{21} \Rightarrow x = 2$ i $y=1$,

$a_{xy} = a_{22} \Rightarrow x=2$ i $y=2$, $a_{xy} = a_{23} \Rightarrow x=2$ i $y=3$. Za te vrednosti x-a i y-a zadovoljena je nejednakost 1^o.

Postupi analogno i u ostalim slučajevima. Rezultat: 2^o uredjeni par (x,y) može biti: (1,2) i (2,4), tj. $x=1$, $y=2$ i $x=2$, $y=4$;

3^o To su one vrednosti x-a i y-a iz 1^o uključujući još i slučajeve $a_{xy}=0$, a to važi za $x=1$, $y=3$ i $x=1$, $y=4$;

4^o $x=2$, $y=1$ i $x=2$, $y=2$;

5^o pošto ni jedan elemenat a_{xy} matrice a nije veći od 7, ova nejednačina nema rešenja.

3. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, nadji koliko je: A+B, A-B, 3A, -4B, 3A - 4B, B-A.

<u>Rezultat:</u> $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$,

$$3A = 3\cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad -4B = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ -12 & -28 \end{bmatrix},$$

$$3A-4B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ -12 & -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -12 & -34 \end{bmatrix}.$$

4. Ako je $a = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$,

nadji koliko je: a+b, a-b, ab, $(a+b)_{21}$, $(a-b)_{12}$, $(ab)_{22}$.

<u>Rezultat:</u> $a+b = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, $a-b = \begin{bmatrix} 3 & -13 \\ 13 & -2 \end{bmatrix}$,

$$ab = \begin{bmatrix} 33 & 38 \\ 9 & 78 \end{bmatrix},$$

$(a+b)_{21}$ = (gledaj šta leži na polju (2,1) matrice a+b) = 1,

$(a-b)_{12} = -13$,

$(ab)_{22}$ = (drugi redak matrice a množi skalarno sa drugim stupcem matrice b) = (7,2)(10,4) = $7\cdot 10 + 2\cdot 4 = 78$.

5. Ako je $X = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, nadji $X^2 = X\cdot X$, $X^3 = X^2\cdot X$.

<u>Rešenje.</u> $X^2 = X\cdot X = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos x\cdot\cos x + (+\sin x)(-\sin x) & \cos x\cdot\sin x + \sin x\cdot\cos x \\ -\sin x\cdot\cos x + (-\sin x)\cdot\cos x & -\sin x\cdot\sin x + \cos x\cdot\cos x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & 2\sin x\cdot\cos x \\ -2\sin x\cdot\cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix}$$

= (kosinus i sinus dvostrukog broja!) =

$$= \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je oblik matrice X^2 isti kao i oblik same matrice X, jedino što umesto argumenta x dolazi argument 2x.

Sada, kada znamo koliko je X^2, radeći analogno prethodnom i vodeći računa o adicionom teoremu za kosinus i sinus zbira dva broja: $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$, $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$, nalazimo da je

$$X^3 = X^2\cdot X = \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -\sin 3x & \cos 3x \end{bmatrix},$$

dakle, opet matrica oblika kao i sama matrica X, samo što umesto x sada dolazi 3x. Uveri se da ta zakonitost važi i uopšte, tj. da je, na primer,

$$X^4 = X^3\cdot X = \begin{bmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -\sin 4x & \cos 4x \end{bmatrix}, \quad X^5 = X^4\cdot X = \begin{bmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -\sin 5x & \cos 5x \end{bmatrix},$$

itd.

6. Ako je $a = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$, nadji $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a$, $a^4 = a^3 \cdot a$.

<u>Rešenje.</u> $a^2 = a \cdot a = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} =$

(kako se množi matrica brojem?!) =

$$= - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = -a, \text{ tj. } a^2 = -a;$$

sada stvar dalje ide lako, jer je: $a^3 = a^2 \cdot a$ = (prema prethodnom je $a^2 = -a$) $= -a \cdot a = -a^2$ = (iz istih razloga) $= -(-a) = a$, tj. $a^3 = a$; isto je tako $a^4 = a^3 \cdot a$ = (prema prethodnom je $a^3 = a$) $= a \cdot a = a^2$ = (jer je $a^2 = -a$) $= -a$, itd.

Radeći analogno, nadji koliko je a^5, a^6, ...

7. Proveri: $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$;

nadji koliko je: $-A$, $A+B$, $A-B$, AB, BA, $AB-BA$, $A^2 = AA$, $B^2 = BB$, $3A+2B$, $\frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{4}B^2$, $3(AB)$, $3A$, $(A+B)^2$, $A^2+2AB+B^2$, $(A+B)^3$.

<u>Rezultat.</u> $-A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$, $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$,

$AB = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -33 & 29 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 13 & -24 \\ -2 & 26 \end{bmatrix}$, $AB-BA = \begin{bmatrix} -3 & 24 \\ -31 & 3 \end{bmatrix}$,

$A^2 = \begin{bmatrix} 29 & -15 \\ -25 & 64 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}$, $3A+2B = \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 23 & -25 \end{bmatrix}$,

$\frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{4}B^2$ = (gledaj gore koliko je A^2 i B^2!) $= \begin{bmatrix} \frac{77}{12} & -\frac{29}{4} \\ -\frac{28}{5} & \frac{76}{3} \end{bmatrix}$,

$3(AB) = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ -99 & 87 \end{bmatrix}$, $3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 15 & -21 \end{bmatrix}$,

$(A+B)^2$ = (gore nadjenu matricu A+B pomnoži samu sobom) =

$= \begin{bmatrix} 55 & -48 \\ -72 & 135 \end{bmatrix}$, $(A+B)^3 = \begin{bmatrix} -377 & 762 \\ 1143 & -1647 \end{bmatrix}$,

$A^2+2AB+B^2$ = (gledaj gore koliko iznose matrice A^2, AB i B^2) =

$= \begin{bmatrix} 62 & -24 \\ -95 & 138 \end{bmatrix}$.

<u>Primedba.</u> Vidimo da gore nadjene matrice AB i BA nisu jednake tj. za matrično množenje ne važi (uvek!) zakon komutacije. Isto tako, vidimo da za gornje dve matrice A i B ne važi: $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ (kvadrat zbira!), što je inače tačno ako nam A i B znače brojeve (ta će jednakost važiti i za matrice ako su <u>komutativne</u>; dokaži to!).

9. Promatraj matricu $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; dokaži da je njen kvadrat, tj. njen proizvod sa njom samom, jednak matrici $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, te da je

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

10. Ako je $M(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, dokaži da je $M(a) \cdot M(b) = M(a+b)$.

<u>Uputstvo.</u> Prvo ispiši matrice $M(a)$, $M(b)$ i $M(a+b)$, a potom izmnoži prve dve. Dalje radi analogno zadatku 5.

11. Nadji: 1° $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$; 2° $\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

<u>Rezultat.</u> 1° $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & -1\end{bmatrix}$; 2° $\begin{bmatrix}6 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 1\\ 8 & -1 & 4\end{bmatrix}$.

12. Odredi AB-BA ako je: 1° $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix};$$

2° $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{bmatrix}$.

<u>Uputstvo.</u> U oba slučaja prvo izračunaj proizvode AB i BA, a potom njihovu razliku.

<u>Rezultat.</u> 1° $AB-BA = \begin{bmatrix}-10 & -4 & -7\\ 6 & 14 & 4\\ -7 & 5 & -4\end{bmatrix}$

2° $AB-BA = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

13. Dokaži da su matrice $X = \begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$ i $Y = \begin{bmatrix}c & d\\ d & c\end{bmatrix}$ komutativne

za sve realne ili kompleksne brojeve a,b,c,d.

<u>Dokaz.</u> Treba da dokažemo da je XY = YX; u tu svrhu, nadjimo matrice XY i YX; neposredno se dobija da su one jednake:

$$XY = \begin{bmatrix}ac+bd & ad+bx\\ bc+ad & bd+ac\end{bmatrix}, \qquad YX = \begin{bmatrix}ca+db & cd+da\\ da+cb & db+ca\end{bmatrix};$$

sada se neposredno zaključuje da su ove dve matrice jednake.

14. Odredi sve matrice komutativne sa matricom A ako je:

1° $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; 2° $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$; 3° $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

<u>Rešenje.</u> 1° Pretpostavimo da je izvesna matrica B komutativna sa matricom A, tj. da je AB=BA; da bi proizvod AB postojao mora matrica B imati onoliko stupaca koliko matrica A ima redaka, dakle, dva stupca; s druge strane, da bi postojao proizvod BA, matrica B mora imati onoliko redaka koliko matrica A ima stupaca, a ovih ima dva; prema tome, matrica B mora imati oblasti 2×2, tj. $B = \begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$,

gde su x, y, z i t brojevi koje treba odrediti iz uslova

$$AB = BA.$$

No, matrica AB je očigledno jednaka: $AB = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}x+2z & y+2t\\ 3x+4z & 3y+4t\end{bmatrix}$, i slično $BA = \begin{bmatrix}x+3y & 2x+4y\\ z+3t & 2z+3t\end{bmatrix}$, pa gornji

uslov postaje

$$\begin{bmatrix}x+2z & y+2t\\ 3x+4z & 3y+4t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+3y & 2x+4y\\ z+3t & 2z+4t\end{bmatrix}.$$

Iz jednakosti ove dve matrice sleduje da mora biti

$$x+2z=x+3y,\quad y+2t=2x+4y,\quad 3x+4z=z+3t,\quad 3y+4t=2z+4t,$$

odnosno, nakon kraćeg sredjivanja

$$2z = 3y,\quad 2t = 2x+3y,\quad x+z = t,\quad 3y = 2z;$$

prva i poslednja od ovih jednakosti su iste, pa jednu možemo odbaciti; iz prve sleduje da je $y = \frac{2}{3}z$; ako vrednost za t iz treće jednačine stavimo u drugu, biće

$$2(x+z)=2x+3y \;\Rightarrow\; 2z=3y,$$

a to je opet prva od jednačina; to znači da je druga od jednačina posledica prve i treće, pa je možemo odbaciti; polazni uslov se, dakle, svodi na dve jednačine

$$y = 2/3 \cdot z, \quad t = x+z,$$

pri čemu su x i z proizvoljni brojevi; ako još stavimo da je $x=p$ i $z=3q$, biće $y=2q$ i $t=p+3q$ (sada su p i q proizvoljni brojevi), pa su sve tražene matrice B date sa (gledaj gore šta nam je matrica B; sada samo umesto x,y,z,t stavljamo gore nadjene vrednosti):

$$B = \begin{bmatrix} p & 2q \\ 3q & p+3q \end{bmatrix},$$

gde su p i q proizvoljni brojevi. Za razne vrednosti brojeva p i q dobijaju se razne matrice B, i sve su one komutativne sa matricom A datom pod 1^o. Proveri da za gornju matricu B važi AB=BA.

2^o Postupi analogno prethodnom slučaju. Sve tražene matrice jesu oblika $\begin{bmatrix} p & 2q \\ -q & p-2q \end{bmatrix}$, gde su p i q proizvoljni brojevi.

3^o Tražene matrice imaju oblik $\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & p \end{bmatrix}$, p i q proizvoljni brojevi

15. Uveri se da su matrice $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

i $Y = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

komutativne, tj. da je XY = YX.

16. Promatraj matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, gde je i imaginarna jedinica, dakle $i^2 = -1$. Dokaži

da za te matrice važe jednakosti: $A^2=B^2=C^2=I$ (I je jedinična matrica oblasti 2×2), $BC = -CB = iA$ (malo i je imaginarna jedinica!), $CA = -AC = iB$, $AB = -BA = iC$.

17. Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ važi

$(A+B)^2 = A^2 + B^2$. Dokaži.

<u>Uputstvo.</u> Prvo nadji matricu A+B pa je kvadriraj, tj. pomnoži je samu sa sobom; potom kvadriraj matrice A i B pa ih saberi; na kraju uporedi dobijene rezultate.

18. Proveri da li matrica $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ zadovoljava jednačinu

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0.$$

<u>Uputstvo.</u> U zadanoj jednačini umesto x treba svuda pisati zadanu matricu, umesto 0 treba pisati nula-matricu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, i uopšte umesto neke konstante treba pisati matricu čija je glavna dijagonala upravo ta konstanta, a van su nule.

U stvari treba proveriti da li je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d)\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

19. Izračunaj f(A) ako je

1^o $f(x) = x^2-x-1$, $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

2^o $f(x) = x^2-5x+3$, $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

<u>Uputstvo.</u> Pogledaj uputstvo iz prethodnog zadatka. 1^o Umesto x u f(x) svuda piši matricu A, a umesto broja 1 stavi jediničnu matricu iste oblasti kao i matrica A,

dakle oblasti 3×3; potom izvrši naznačene radnje; rezultat je: $f(A) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

$$2^0\ f(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}^2 - 5\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (\text{računaj!}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

20. Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, uveri se da je

$$A^3 - 2A^2 - 9A = 0, \qquad A^2 - 2A - 9I \neq 0,$$

gde su 0 i I nula-matrica i jedinična matrica iste oblasti kao i sama matrica A. Primeti da je leva strana gornje jednakosti jednaka proizvodu matrice A i leve strane gornje "nejednakosti".

21. Neka je M_2 skup svih kvadratnih matrica drugog reda sa realnim vrednostima (elementima), tj.

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3, x_4 \in R \right\}.$$

Dokaži da je skup M_2 komutativna grupa u odnosu na sabiranje matrica.

Uputstvo. Grupoidnost. Uzmi bilo koja dva elementa iz skupa M_2 (drži na umu da to moraju biti matrice koje su gore okarakterisane!), na primer,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix},$$

pa proveri da li i njihov zbir $x+y$ takodje pripada skupu

M_2, tj. da li je to matrica tipa 2×2 sa realnim vrednostima (elementima).

Asocijativnost. To važi uopšte za sabiranje matrica. Dokaži to u ovom specijalnom slučaju za matrice oblasti 2×2.

Neutralni elemenat. To je nula-matrica $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dokaži.

Inverzni elemenat od matrice $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ jeste matrica $\begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 \\ -x_3 & -x_4 \end{bmatrix}$.

Komutativnost. To važi uopšte za sabiranje matrica (oprez! za množenje matrica ne važi zakon komutacije!). Uveri se u to u ovom specijalnom slučaju kada se radi o matricama oblasti 2×2.

22. Skup M_3 svih kvadratnih matrica trećeg reda, tj. matrica tipa 3×3, jeste komutativna grupa u odnosu na sabiranje matrica. Vrednosti (elementi) tih matrica neka budu realni brojevi.

Uputstvo. Postupi analogno prethodnom zadatku.

23. Skup M_3^2 svih matrica oblasti 2×3 (otuda i indeksi uz M!) sa realnim vrednostima (elementima), jeste komutativna grupa u odnosu na sabiranje matrica.

24. Skup M_1^3 svih matrica oblasti 3×1 (to su upravo stupac-matrice), jeste komutativna grupa u odnosu na sabiranje matrica. Dokaži.

25. Promatraj još jednom skupove matrica: M_2, M_3, M_3^2 i M_1^3 o kojima je bilo reči u zadacima 21,22,23 i 24.

Dokaži da su svi oni vektorski prostori nad telom realnih brojeva.

Uputstvo. Oslanjajući se na pomenute zadatke imamo da je svaki od tih skupova komutativna grupa. Prema definiciji 7 vektorskog prostora, treba još za svaki od njih proveriti da li važe pravila računanja $P_1 - P_5$.

26. Promatraj matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$,

$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $H = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

i pripadni skup $P = \{A,B,C,D,E,F,G,H\}$. Dokaži da je taj skup grupoid u odnosu na množenje matrica.

Uputstvo. Napravi radnu tablicu za taj skup P i operaciju · u njemu (ispitaj slične zadatke o grupama i grupoidima, na primer, zadatak 11 ili 13 o grupama!).

Da li je taj skup P možda i grupa u odnosu na množenje matrica?

27. Ispitaj da li su stupci matrice

$1^\circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $2^\circ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$; $3^\circ \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -4 & 18 \end{bmatrix}$; $4^\circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$;

$5^\circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $6^\circ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -8 & 12 \end{bmatrix}$; $7^\circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 3 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

linearno zavisni ili nezavisni.

Rešenje. Ispitaj prethodno slične zadatke o vektorskim prostorima.

6° Ta matrica ima tri stupca (ispiši svaki od njih!); neka su x, y i z realni brojevi; treba da ispitamo da li iz veze

$$x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (=\text{nula-stupac})$$

nužno sleduje da je i $x=0$ i $y=0$ i $z=0$, ili je moguće da neki od tih brojeva bude i različit od nule.

No, ako na levoj strani gornje jednakosti prvo izvršimo naznačena množenja matrica brojem, a potom saberemo nastale matrice, ta jednakost postaje

$$\begin{bmatrix} 2x - 3y + 4z \\ -3x + 2y - 2z \\ 2x - 8y + 12z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

to je upravo jednakost dve "stupac-matrice" i ona je zadovoljena ako i samo ako je:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 0 \\ -3x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x - 8y + 12z &= 0, \end{aligned}$$

što predstavlja jedan homogeni sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznanice (ispitaj poglavlje o sistemima linearnih jednačina); i mi se sada pitamo da li taj sistem ima jedino trivijalno rešenje (tj. $x=y=z=0$) , ili možda ima i netrivijalnih rešenja (da je bar jedna od nepoznanica različita od nule); kao što znamo, odgovor na to pitanje daje determinanta toga sistema: ako je ona različita od nule, sistem ima jedino trivijalno rešenje, a ako je jednaka nuli, sistem ima i netrivijalnih rešenja; kod nas je determinanta sistema jednaka nuli (uveri se u to), pa sistem ima i netrivijalnih rešenja; takvo je, na primer, $x=2$, $y=8$, $z=5$ (nadji sva netrivijalna rešenja!).

Zaključak. Pošto je polazna veza moguća i kada svaki od brojeva x, y, z i nije jednak nuli, stupci posmatrane matrice su linearno zavisni (tj. jedan od njih se može izraziti preko ostalih; koristeći navedene vrednosti za x, y i z, izrazi prvi stupac pomoću druga dva).

U preostalim slučajevima postupi analogno. 1° nezavisni; 2° nezavisni; 3° zavisni; 4° zavisni; 5° nezavisni; 7° zavisni.

28. Nadji inverznu matricu matrice A date sa:

1° $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$; 2° $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{bmatrix}$ $(xy \neq 1)$; 3° $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ $(ps \neq qr)$;

4° $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 5° $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; 6° $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$;

7° $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 8° $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$; 9° $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

10° $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Prethodno ispitaj definiciju 4 inverzne matrice i posebno teorem 1 kao i primedbu uz taj teorem.

6° Prvi korak. Kako je u ovom slučaju det A = 35 ($\neq 0$), posmatrana matrica ima svoju inverznu matricu A^{-1}.

Drugi korak. Nadjimo sve algebarske komplemente A_{ij} matrice A date pod 6°, tj. matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & \boxed{1} \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

ispitaj definiciju 4 i napomenu posle teorema 1 o determinantama ; uveri se da su ti algebarski komplementi jednaki:

$$A_{11}=19,\quad A_{12}=1,\quad A_{13}=-5,\quad A_{21}=9,\quad A_{22}=6,\quad A_{23}=5,$$

$$A_{31}=-3,\quad A_{32}=-2,\quad A_{33}=10.$$

Tako je, na primer, komplement A_{23} jednak:

$$A_{23} = (\text{gledaj markirano polje matrice A}) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -1\cdot(-8-(-3)) = 5,$$

i slično u ostalim slučajevima.

Treći korak. Formirajmo matricu fA (ispitaj definiciju 3; ovde umesto a stoji A); ona glasi

$$fA = \begin{bmatrix} 19 & 1 & -5 \\ 9 & 6 & 5 \\ -3 & -2 & 10 \end{bmatrix} .$$

Četvrti korak. Nadjimo transponovanu matricu (vidi definiciju 2) $(fA)^T$ matrice fA; to je adjungovana matrica ili adjunkta (vidi definiciju 3) matrice A koju, kao što je već napomenuto, označavamo sa adj A ili sa $\mathcal{A}A$; dakle je

$$\mathcal{A}A = (fA)^T = \begin{bmatrix} 19 & 9 & -3 \\ 1 & 6 & -2 \\ -5 & 5 & 10 \end{bmatrix} .$$

Peti korak. Matricu $\mathcal{A}A$ pomnožimo brojem $\frac{1}{\det A}$ = (gledaj "prvi korak") = 1/35; na osnovu teorema 1, rezultat će biti upravo tražena inverzna matrica A^{-1} matrice A; prema tome, imamo da je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\mathcal{A}A = \frac{1}{35}\cdot \begin{bmatrix} 19 & 9 & -3 \\ 1 & 6 & -2 \\ -5 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{35} & \frac{9}{35} & \frac{-3}{35} \\ \frac{1}{35} & \frac{6}{35} & \frac{-2}{35} \\ \frac{-5}{35} & \frac{5}{35} & \frac{10}{35} \end{bmatrix} .$$

9° Prvi korak. det A = (razvij po prvom stupcu) =

$$= 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\text{razvij po prvom stupcu}) =$$

$$= 1\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$ (= proizvodu elemenata sa glavne dijagonale; ispitaj zadatak 12 o determinantama), tj. $\det A = 1$ $(\neq 0)$ pa matrica A ima svoju inverznu matricu A^{-1}.

<u>Drugi korak.</u> Algebarski komplementi A_{ik} elemenata matrice A (računaj!) jednaki su:

$A_{11}=1$, $A_{12}=0$, $A_{13}=0$, $A_{14}=0$, $A_{21}=-3$, $A_{22}=1$,

$A_{23}=0$, $A_{24}=0$, $A_{31}=11$, $A_{32}=-2$, $A_{33}=1$, $A_{34}=0$,

$A_{41}=-38$, $A_{42}=7$, $A_{43}=-2$, $A_{44}=1$.

Tu je, na primer, A_{43} jednako

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot 2 = -2,$$

i slično u ostalim slučajevima.

<u>Treći korak.</u> $$fA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -2 & 1 & 0 \\ -38 & 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Četvrti korak.</u>

$$\mathcal{A}A = (fA)^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Peti korak.</u> Inverzna matrica A^{-1} data je sa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \mathcal{A}A = \frac{1}{1}\cdot \mathcal{A}A = \mathcal{A}A,$$

tj. inverzna matrica A^{-1} upravo je gore navedena adjungovana matrica $\mathcal{A}A$ matrice A.

Nadji proizvod matrica A i A^{-1} pa se uveri da je rezultat jedinična matrica (ispitaj definiciju 4).

Uveri se da su ostali rezultati jednaki: 1° $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/10 & 1/5 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$;

2° $A^{-1} = \frac{1}{1-xy}\cdot \begin{bmatrix} 1 & -x \\ -y & 1 \end{bmatrix}$;

3° $A^{-1} = \frac{1}{ps-qr}\cdot \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix}$; 4° $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

5° $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; 7° $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

8° $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{bmatrix}$; 10° $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -2 & 1 & 0 \\ -38 & 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

29. Data je matrica $B = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}$ i matrica A: 1° $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

2° $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$; 3° $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$.

U svakom od tih slučajeva odredi broj x (x je kompleksan broj) tako da bude ispunjen uslov

(1) $ABC = -I$, $CA = B$ (C je kvadratna matrica reda 2).

<u>Rešenje.</u> Pre svega, kako je $\det A = -1$ $(\neq 0)$, postoji matrica A^{-1}; ako sada jednakost

$$CA = B$$

pomnožimo s desna matricom A^{-1} (sad za sad nije bitno koliko iznosi ta matrica, važno je da ona postoji), dobićemo da je

$$CAA^{-1} = BA^{-1};$$

kako je, dalje, $AA^{-1} = I$ (= jedinična matrica reda 2), poslednja jednakost postaje

$$CI = BA^{-1} ,$$

odnosno, zbog $CI = C$ (proizvod bilo koje kvadratne matrice i odgovarajuće jedinične matrice jednak je samoj toj matrici!),

$$C = BA^{-1} ;$$

ako sada ovu vrednost za matricu C unesemo u prvi od uslovâ (1), dobićemo da mora biti

$$ABBA^{-1} = -I ;$$

množeći ovu jednakost s desne strane sa A, biće

$$AB^2A^{-1}A = -IA ,$$

i zato (iz istih razloga kao gore):

$$AB^2 = -A ;$$

konačno, ako ovu jednakost pomnožimo s leva sa A^{-1} dobićemo

$$A^{-1}AB^2 = -A^{-1}A \quad \Rightarrow \quad B^2 = -I .$$

Dakle, pošto je det A različito od nule (tj. pošto je matrica A regularna, ima svoju inverznu matricu A^{-1}), uslovi (1) su ekvivalentni sa jednim jedinim uslovom

$$(2) \qquad B^2 = -I ,$$

u kome više ne figuriše nepoznata matrica C. Ako sada u (2) smenimo zadanu matricu B, dobićemo da mora biti

$$\begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}^2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Kako je $\begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{bmatrix}$,

poslednji se uslov svodi na jednakost dve matrice:

$$\begin{bmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ,$$

odakle sleduje (ispitaj pravilo M_1 o računanju sa matricama!) da je

$$-x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

2^o i 3^o Rezultat je isti kao pod 1^o. To, uostalom, sleduje i odatle što se uslovi (1) svode na jedan jedini uslov (2) u kome figuriše samo matrica B (dakle, bitno je samo da je matrica A regularna, tj. da je det A $\neq 0$).

30. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, nadji A^2, $A^3 = A^2 \cdot A$, A^{-1}, $A^{-2} = (A^{-1})^2$.

<u>Rezultat.</u>

$$A^2 = \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -5 & 19 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 54 \\ 90 & -53 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-2} = \frac{1}{289} \begin{bmatrix} 19 & 3 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} .$$

31. Ako su A i B dve <u>regularne</u> i <u>komutativne</u> kvadratne matrice istog reda, dokaži da važe jednakosti

$$(1) \qquad AB^{-1} = B^{-1}A , \quad A^{-1}B = BA^{-1} .$$

<u>Dokaz.</u> To što su matrice A i B regularne znači da su im determinante različite od nule, tj. da postoje njihove inverzne matrice A^{-1} i B^{-1}, a to da su komutativne znači da važi jednakost

$$AB = BA .$$

Ako ovu jednakost pomnožimo s leva matricom B^{-1} (koja, kao što je gore napomenuto, postoji), dobićemo novu jednakost

$$B^{-1}AB = B^{-1}BA ,$$

odnosno, vodeći računa da je prvo $B^{-1}B = I$, a potom $IA = A$, jednakost

$$B^{-1}AB = A .$$

Konačno, množenjem poslednje jednakosti sa B^{-1} s desne strane, dobijamo da je

$$B^{-1}ABB^{-1} = AB^{-1} ;$$

kako je $BB^{-1} = I$, pa zatim $B^{-1}AI = B^{-1}A$, poslednja jednakost postaje

$$B^{-1}A = AB^{-1} ,$$

čime je prva od jednakosti (1) dokazana.

Postupi analogno i pri dokazu druge od jednakosti (1).

32. Odredi matricu X iz jednačine

$$AXB = C ,$$

ako je u pojedinim slučajevima A, B i C dato sa:

1^o $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$;

2^o $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$;

3^o $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$.

Rešenje. 3^o Pre svega primetimo da je $\det A =$ (računaj!) $= 1 (\neq 0)$ i $\det B = -2$ ($\neq 0$), pa su obe od matrica A i B regularne, tj. postoje njihove inverzne matrice A^{-1} i B^{-1}.

Podjimo od zadane jednačine

(1) $$AXB = C ,$$

u kojoj su A, B i C zadane matrice (vidi 3^o); cilj nam je da na levoj strani te jednakosti dobijemo samo matricu X; u tu svrhu, pomnožimo gornju jednačinu s desna sa matricom B^{-1} (koja, kao što smo videli, postoji!); dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$AXBB^{-1} = CB^{-1} ,$$

odnosno, vodeći računa da je prvo $BB^{-1} = I$, a potom da je proizvod bilo koje matrice i odgovarajuće jedinične matrice jednak samoj toj matrici (naravno, ukoliko se radi o kvadratnim matricama), jednačinu

(2) $$AX = CB^{-1}.$$

Ovim smo se na levoj strani jednačine (1) oslobodili matrice B (naporedo sa jednačinom (1) posmatraj i jednačinu

$$axb = c ,$$

gde su a,b i c zadani <u>brojevi</u> ; kako se iz te jednačine nalazi nepoznanica x?; treba je prvo <u>podeliti</u> sa b ($\neq 0$) tj. pomnožiti sa b^{-1}, itd.; sličnu stvar imamo i sa matricama, samo što za množenje matrica ne važi zakon komutacije kao za brojeve pa moramo voditi računa da li množimo sa desna ili sa leva; inače, gornju "brojevnu" jednačinu axb=c, na osnovu pravila M_5 o računanju sa matricama, možemo shvatiti i kao matričnu jednačinu (1), gde nam je $A = [a]$, $X = [x]$, $B = [b]$ i $C = [c]$).

Da bismo se sada na levoj strani jednačine (2) oslobodili matrice A, pomnožimo je s leva matricom A^{-1} (koja, kao što smo već primetili, postoji) ; iz istih razloga kao malopre, dobijamo da je

(3) $$X = A^{-1}CB^{-1} .$$

Ovim je nepoznata matrica X izražena preko zadanih matrica A,B i C. Samo se radi još o tome da se ta matrica odredi za matrice A,B i C konkretno zadane pod 3^o (jer posmatramo taj slučaj).

U tu svrhu, nadjimo prvo (gledaj gornju jednačinu (3)) inverzne matrice A^{-1} i B^{-1} (ispitaj zadatke 28 i 29). Uveri se da su one jednake

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} , \qquad B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Prema (3), da biemo konkretno našli matricu X, treba prvo da nadjemo matricu $A^{-1}C$ a potom da nju pomnožimo matricom B^{-1}; jedno za drugim imamo da je:

$$A^{-1}C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix} = \text{(računaj!)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{bmatrix},$$

a zatim:

$$A^{-1}C \cdot B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

odakle nakon izvršenih naznačenih radnji, na osnovu (3) (gledaj pravilo M_3 o računanju sa matricama) dobijamo da je matrica X jednaka

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Postupi analogno i u preostala dva slučaja.

Rezultat. 1° $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, 2° $X = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$.

33. Reši matričnu jednačinu

1° $(A-2I)X = A+I$; 2° $X(A-2I) = A+I$,

gde je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a I jedinična matrica reda 3.

Rešenje. 1° Pre svega imamo da je (ispitaj pravila M_1, M_2 i M_3 o računanju sa matricama):

$$A-2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

i slično $A+I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Mi treba da rešimo jednačinu

$$(1) \qquad (A-2I)X = A+I$$

gde je X nepoznata matrica. U tu svrhu, slično kao u prethodnom zadatku, nastojimo da na levoj strani te jednačine dobijemo samo matricu X; zato bi trebalo tu jednačinu pomnožiti s leva inverznom matricom $(A-2I)^{-1}$ matrice $A-2I$; samo se radi još o tome da li ta matrica ima svoju inverznu matricu; a ona je ima iz razloga što je

$$\det(A-2I) = \text{(gledaj koliko je } A-2I) = 6\ (\neq 0).$$

Dakle, iz jednačine (1) sleduje da je matrica X jednaka

$$X = (A-2I)^{-1}(A+I).$$

Dalje je

$$(A-2I)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

i zato

$$(A-2I)^{-1}(A+I) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix},$$

1° $A^2 = I$, Nađi X da je $AX = X$

$A^2 = I$, $B^3 = I$

1° Nađi X da je

$X = AXB$

pa tražena matrica X glasi

$$X = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2° Postupi analogno kao pod 1°. I rezultat je isti.

34. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Odredi matricu X za koju je

$$(1) \qquad XA = B .$$

<u>Rešenje.</u> Kako je ovde $\det A = 0$, matrica A nije regularna (<u>singularna</u> je), pa nema svoju inverznu matricu A^{-1}; stoga ne možemo postupiti kao u prethodnim primerima da bismo našli matricu X iz jednačine (1), već se radi ovako:

<u>Prvi korak.</u> Odredi se oblast (domen) tražene matrice X u zavisnosti od toga kakve su matrice A i B; naime, da bi se matrica X mogla množiti matricom A oblasti 3×3 (gledaj pravilo M_4 o računanju sa matricama), broj njenih stupaca mora biti jednak broju redaka matrice A tj. 3; u tom slučaju matrica XA bi imala onoliko redaka koliko i matrica X, a ta bi matrica trebala biti jednaka matrici B koja je oblasti 3×3, tj. koja ima tri retka; stoga i matrica X mora imati tri retka; dakle, matrica X je oblasti (domena) 3×3.

<u>Drugi korak.</u> Pošto se odredi oblast tražene matrice, uzimamo njen opšti oblik; u ovom slučaju to je matrica

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix},$$

i naš posao se svodi na to da odredimo komponente a,b,c,p, q,r,x,y,z te matrice tako da važi veza (1).

<u>Treći korak.</u> Vrednosti za A, B i gornja vrednost za X se smenjuju u zadanu jednačinu (1) i izvrše naznačene radnje. Izlazi

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \text{ (množi!)}$$

odnosno,

$$\begin{bmatrix} a+2b-5c & 2a-b & -a-b+3c \\ p+2q-5r & 2p-q & -p-q+3r \\ x+2y-5z & 2x-y & -x-y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ovo je jednakost dveju matrica. Ako izjednačimo odgovarajuće komponente <u>prvog</u>, <u>drugog</u> i <u>trećeg</u> retka tih matrica, dobijamo sledeća tri sistema od po tri linearne jednačine sa po tri nepoznanice (u prvom su nepoznanice a,b,c, u drugom p,q,r i u trećem x,y,z); ti sistemi glase

$$\begin{aligned} a+2b-5c &= -2 \\ 2a-b &= 1 \\ -a-b+3c &= 1 \end{aligned} \;;\quad \begin{aligned} x+2y-5z &= 4 \\ 2x-y &= 3 \\ -x-y+3z &= -3 \end{aligned} \;;\quad \begin{aligned} p+2q-5r &= 8 \\ 2p-q &= 1 \\ -p-q+3r &= -5 \end{aligned} .$$

Rešenja tih sistema su jednaka (primeni "top-postupak" na svaki od njih):

$$\begin{aligned} b &= 2a-1 \\ c &= a \end{aligned} \;;\quad \begin{aligned} y &= 2x-3 \\ z &= x-2 \end{aligned} \;;\quad \begin{aligned} q &= 2p-1 \\ r &= p-2 \end{aligned}$$

pri čemu su a, x i p proizvoljni realni brojevi.

Prema tome, matrica X za koju je zadovoljena jednačina (1) glasi

$$X = \begin{bmatrix} a & 2a-1 & a \\ p & 2p-1 & p-2 \\ x & 2x-3 & x-2 \end{bmatrix}$$

pri čemu su a,p i x proizvoljni realni brojevi.

Kao što vidimo, u slučaju da je det A = 0, matrična jednačina (1) ima beskonačno mnogo rešenja. Tako, na primer, ako stavimo da je a=1, p=1, x=2 iz gornjeg dobijamo da matrica

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

predstavlja jedno rešenje matrične jednačine (1). Uveri se u to!

35. Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

odredi matricu X za koju je

$$AX = B .$$

Uputstvo. Postupi analogno prethodnom zadatku. Matrica X je data sa

$$X = \begin{bmatrix} 1-a & 8-b & -4-c \\ a & -3+b & 2+c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

pri čemu su a,b i c proizvoljni realni brojevi.

36. Reši matrične jednačine

1° AX=B; 2° XA=B, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uputstvo. Postupi analogno prethodnom zadatku.

1° $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 2° $X = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Primedba. Iz gornjeg zadatka vidimo da matrične jednačine

$$AX = B \quad \text{i} \quad XA = B$$

ne moraju imati isto rešenje (kao što je slučaj, na primer, sa "brojevnim" jednačinama).

37. Reši matričnu jednačinu

(1) $$AX = B ,$$

ako su A i B matrice:

1° $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$;

2° $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$;

3° $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

4° $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$;

5° $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$;

6° $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 6 & 10 & 16 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Ispitaj prethodne zadatke.

1° i 2° U ovim slučajevima je det $A \neq 0$ pa iz (1) sleduje $X = A^{-1}B$, itd.

Rezultat: 1° $X = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$, 2° $X = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/4 \\ 4/3 & 5/3 & 5/2 \end{bmatrix}$

3° Ovde matrica A nije kvadratna pa se ne može ni govoriti o inverznoj matrici.

Pošto je u ovom slučaju matrica A tipa 2×3, da bi postojao proizvod AX matrica X mora biti tipa $3\times n$; sama matrica AX je tada oblasti $2\times n$, gde je n, sad za sad, neodredjen prirodan broj. Medjutim, veza (1) kaže da ta matrica treba da je jednaka matrici B, koja je oblasti 3×3; prema pravilu M_1 o računanju sa matricama, te dve matrice bi tada morale biti i iste oblasti, što je nemoguće jer matrica AX ima 2 retka a matrica B 3 retka (bez obzira koliko je n).

Dakle, u ovom slučaju jednačina (1) nema rešenje.

4° Radeći analogno prethodnom slučaju zaključujemo prvo da je matrica X oblasti $3\times n$, a zatim da je matrica AX oblasti $2\times n$; pošto je u ovom slučaju matrica B oblasti 2×2, mora biti "$2\times n$" = "2×2", odakle sleduje da je $n=2$. Dakle, tražena matrica X je oblasti 3×2, i možemo je napisati u obliku

$$X = \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{bmatrix},$$

gde su a,b,c,x,y,z nepoznati brojevi koje treba odrediti tako da važi veza (1).

Sada veza (1) postaje

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{bmatrix},$$

odnosno (množi!):

$$\begin{bmatrix} 3a+4b+5c & 3x+4y+5z \\ -3a-b+4c & -3x-y+4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ovo je jednakost dve matrice. Ako izjednačimo odgovarajuće komponente prvog i drugog stupca tih matrica dobićemo dva sistema od po dve linearne jednačine sa po tri nepoznanice a,b,c i x,y,z:

$$3a+4b+5c = 3 \qquad 3x+4y+5z = 6$$
$$-3a-b+4c = -3\,; \qquad -3x-y+4z = -6\,,$$

čija su rešenja data sa (primeni top-postupak):

$$a = 1+7p,\quad b = -9p,\quad c = 3p;$$
$$x = 2+7q,\quad y = -9q,\quad z = 3q,$$

gde su p i q proizvoljni brojevi.

Tražena matrica X glasi: $X = \begin{bmatrix} 1+7p & 2+7q \\ -9p & -9q \\ 3p & 3q \end{bmatrix}$,

tj. postoji beskonačno mnogo matrica X koje zadovoljavaju jednačinu (1). Tako, na primer, za $p = -1$ i $q = 0$ dobijamo da matrica $X = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 9 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ zadovoljava jednačinu (1).

5° Radeći analogno prethodnom slučaju nalazimo da je matrica X oblika $\begin{bmatrix} x & p & a \\ y & q & b \end{bmatrix}$, pa veza (1) glasi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & p & a \\ y & q & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

odakle sleduje da mora biti

$$2x+3y = 3 \qquad 2p+3q = 5 \qquad 2a+3b = 8$$
$$4x+6y = 4\,; \qquad 4p+6q = 6\,; \qquad 4a+6b = 9\,.$$

Medjutim, svaki od ovih sistema od po dve jednačine sa po dve nepoznanice je protivurečan (zašto?!), tj. ne mogu se odrediti brojevi x,y,p,q,a,b tako da važi (1). Dakle, u ovom slučaju jednačina (1) nema rešenje.

6° Sve je isto kao u slučaju 5° samo što ovde sistemi glase:

$$2x+3y = 3 \qquad 2p+3q = 5 \qquad 2a+3b = 8$$
$$4x+6y = 6\ ; \qquad 4p+6q = 10\ ; \qquad 4a+6b = 16\ ,$$

a oni su svi neodredjeni i imaju beskonačno mnogo rešenja:

$x = 3z$, $y = 1-2z$; $p = 3r$, $q = 5/3-2r$; $a=4-3c$, $b=2c$,

gde su z,r i c proizvoljni brojevi. Sama matrica X glasi:

$$X = \begin{bmatrix} 3z & 3r & 4-3c \\ 1-2z & 5/3-2r & 2c \end{bmatrix} .$$

38. Isto pitanje kao u prethodnom zadatku samo za jednačinu

$$XA = B .$$

39. Reši matričnu jednačinu

(1) $$AXB = C$$

za ove vrednosti matrica A,B,C:

1° $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$;

2° $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$;

3° $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

<u>Uputstvo.</u> Pošto su u svakom od slučajeva matrice A i B kvadratne i regularne, tj. $\det A \neq 0 \neq \det B$, veza (1) se može napisati u obliku $X = A^{-1}CB^{-1}$, itd.

40. Reši matričnu jednačinu

(1) $$AXA = B,$$

ako A i B znače ove matrice:

1° $[1,1]$, $[1,1]$; 2° $[2\ \ 0]$, $[0\ \ 0]$; 3° $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $[2\ \ 5]$;

4° $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; 5° $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Rezultat:</u> 1° $X = \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$ i 2° $X = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$ gde je x proizvoljan realan broj; 3° jednačina (1) nema rešenje; 4° i 5° u oba ova slučaja matrica A je regularna pa veza (1) postaje $X = A^{-1}BA^{-1}$, itd.

<u>Matrično rešavanje sistemâ linearnih jednačina</u>

Neka je zadan sistem od, na primer, tri linearne jednačine sa tri nepoznanice (analogno se postupa za bilo koji drugi sistem):

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 . \end{aligned}$$

Ako označimo sa A, X i B sledeće matrice vezane za taj sistem:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} ,$$

pri čemu matricu X možemo zvati matricom nepoznanica ili nepoznatom matricom, onda se gornji sistem može zapisati u matričnom obliku

(1) $$AX = B$$

(uveri se u to množeći matrice A i X pa izjednačujući tu matricu sa matricom B).

Ako je matrica A regularna, tj. ako je $\det A \neq 0$, onda iz (1) sleduje da je

$$X = A^{-1}B .$$

Prema tome, nepoznata matrica X je jednaka proizvodu inverzne matrice A^{-1} matrice A i zadane matrice B.

41. Matričnom metodom reši sledeće sisteme linearnih jednačina:

1°
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1\\ 2x + y + z &= 1\\ 2x + 3y + z &= -1 \;; \end{aligned}$$

2°
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5\\ 2x + 3y + z &= 1\\ 2x + y + 3z &= 11 \;; \end{aligned}$$

3°
$$\begin{aligned} x - 3y \quad &= 6\\ 5x - 2y + z &= 6\\ 3x + \quad 2z &= 0 \;; \end{aligned}$$

4°
$$\begin{aligned} x - y + 2z - 3t &= -1\\ 3x - 4y + 8z - 5t &= 2\\ 2x - y + 6z - t &= 2\\ -x + y - 3z + t &= -1 \,. \end{aligned}$$

Rešenje. 1° Ovde je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ i zato

(1) $\qquad AX = B$.

Kako je det $A = 10$ ($\neq 0$), iz (1) sleduje da je $X = A^{-1}B$.

Sada treba naći matricu A^{-1}; ona je jednaka

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 7 & -1\\ 0 & -5 & 5\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix} \;;$$

proizvod te matrice A^{-1} i matrice B je jednak (radi!)

$$A^{-1}B = \frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 7 & -1\\ 0 & -5 & 5\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ -1\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} 10\\ -10\\ 0\end{bmatrix}$$

pa matrica X glasi

$$X = \begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}, \text{ tj. } \begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix},$$

odakle sleduje da je $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. To je rešenje posmatranog sistema 1°.

4° Radi se analogno kao pod 1°. Ovde matrice A, X i B glase:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & -4 & 8 & -5\\ 2 & -1 & 6 & -1\\ -1 & 1 & -3 & 1\end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1\\ 2\\ 2\\ -1\end{bmatrix}.$$

Kako je det $A = -1$ ($\neq 0$) (primeni top-postupak; za topa uzmi 1 sa polja (1,1) koji neka dejstvuje duž prvog stupca; nastalu determinantu razvij po prvom stupcu, itd.), posmatrana matrica A ima svoju inverznu matricu A^{-1} pa je

$$X = A^{-1}B \,.$$

Sama matrica A^{-1} glasi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 7 & -28\\ 1 & -1 & 0 & -2\\ 1 & -2 & -2 & -9\\ -1 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

pa je matrica X data sa

$$X = A^{-1}\cdot B = (\text{množi!}) = \begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

tj. $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$, odakle sleduje da je $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$, $t = 1$.

U preostala dva slučaja postupi analogno.

Rezultat: 2° $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\ -2\\ 3\end{bmatrix} \Longrightarrow x = 2,\ y = -2,\ z = 3.$

3° $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/5\\ -6/5\\ -18/5\end{bmatrix} \Longrightarrow x = \frac{11}{5},\ y = -\frac{6}{5},\ z = -\frac{18}{5}.$

42. Matričnom metodom reši sledeće sisteme linearnih jednačina:

1° $\begin{aligned} -2x + 3y + 4z &= -8 \\ 2x - 3y + 4z &= -16 \\ 2x + 3y - 4z &= 20 \,; \end{aligned}$ $\qquad 2^\circ$ $\begin{aligned} 3x + 5y + 4z &= 0 \\ -6x - 2y + 5z &= 1 \\ 7x + y - 9z &= -2 \,; \end{aligned}$

$$3^\circ \quad \begin{aligned} 3x + 4y - z - 3t &= -1 \\ x - y + 2z - 3t &= 0 \\ x + 3y + z + t &= 0 \\ x + y + z + t &= 0 \,. \end{aligned}$$

Uputstvo. Ispitaj prethodni zadatak.

Rezultat: 1° $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow x=1, \quad y=2, \quad z=-3 \,;$

2° $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/24 \\ -23/24 \\ 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow x=\frac{17}{24}\,, \; y = -\frac{23}{24}\,, \; z = \frac{2}{3} \;;$

3° $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} -5/11 \\ 0 \\ 2/11 \\ 1/22 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -\frac{5}{11}\,, \; y=0, \; z=\frac{2}{11}\,, \; t=\frac{1}{22}\,.$

LITERATURA

Djuro KUREPA

[1] Viša algebra, Beograd, 1971, XXIII+1390, drugo izdanje.

Dragoslav S. MITRINOVIĆ

[1] Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima, I deo, Beograd, Gradj.knjiga 1971,XVI+297.

Dragoslav S. MITRINOVIĆ - Dragomir Ž. DJOKOVIĆ

[1] Polinomi i matrice, Beograd, 1966, 39?.

Dragoslav S. MITRINOVIĆ - Dobrivoje MIHAILOVIĆ - Petar M.VASIĆ

[1] Linearna algebra - polinomi - analitička geometrija, Beograd, Gradjevinska knjiga 1966, treće izdanje, 336.

Gojko KALAJDŽIĆ

VII. KVADRATNI ALGEBARSKI OBLICI

KVADRATNE FORME

Definicija 1. Neka su zadane tri nezavisne veličine ili varijabile (promenljivice) x_1, x_2, x_3 i kvadratna matrica a reda 3:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

pri čemu su a-ovi nezavisni od x-ova.

Svakoj komponenti a_{ik} (razlikuj $a_{ik} \neq a_{ki}$) matrice a (drži na umu, na primer, komponentu a_{23}) odgovaraju dva indeksa "i" i "k" (konkretno 2 i 3); s druge strane, tim indeksima odgovaraju zadane veličine ili varijabile x_i i x_k (konkretno x_2 i x_3); tada imamo i odgovarajući monom $a_{ik}x_ix_k$ (konkretno $a_{23}x_2x_3$) (dobro pogledaj kakva je zakonitost indeksâ uz rodna slova a i x).

Zbir svih takvih monoma zovemo kvadratnom formom od 3 zadane veličine (varijabile) x_1,x_2,x_3. Možemo je kraće zapisati pomoću sigme:

$$\begin{aligned} f = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}x_ix_k = {} & a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + \\ & + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3 \,. \end{aligned}$$

Analogna je stvar ako imamo uopšte n (n=1,2,...) nezavisnih varijabli (veličina) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i kvadratnu matricu a reda n.

Vidimo da matrica a potpuno odredjuje formu. Medjutim, jednoj istoj kvadratnoj formi može da odgovara više matrica koje tu formu odredjuju. Tako, na primer, za formu

$$f = 2x_1x_1 + 6x_1x_2 + 4x_2x_2$$

imamo da je: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 6$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 4$, pa njena matrica a glasi $a = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; s druge strane, tu istu formu f možemo napisati, na primer, i u obliku: $f = 2x_1x_1 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1 + 4x_2x_2$ (oprez! pazi na redosled x_1x_2 i x_2x_1), za koju je:

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 3, \quad a_{21} = 3, \quad a_{22} = 4,$$

pa njena matrica b glasi: $b = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; dakle, matrice a i b odredjuju jednu istu formu.

Medju svim takvim matricama jedne zadane forme postoji <u>samo jedna</u> koja je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu (takva je, na primer, gornja matrica b). Nju zovemo jednostavno <u>matricom</u> zadane forme.

Vratimo se za kratko opet na kvadratnu formu od tri nezavisne varijable. Ako stavimo da je:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix},$$

tada je

$$x^T a x = \left[\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j\right] = \text{(vidi pravilo } M_5 \text{ o računanju sa matricama)}$$

$$= \sum a_{ij}x_ix_j .$$

Uveri se u to izračunavši prvo matricu ax a potom matricu $x^T \cdot ax$. Ovo važi uopšte za kvadratne forme od n zadanih veličina (varijabli), pa se kvadratne forme često i zapisuju u matričnom obliku

$$x^T \cdot ax ,$$

gde su a i x gore definisane matrice.

<u>Definicija 2.</u> Kvadratna forma je <u>dijagonalna</u> ako je njena matrica dijagonalna, tj. ako su joj van glavne dijagonale same nule (pri tome se misli na simetričnu matricu te forme).

Član $a_{ik}x_ix_k$ zadane kvadratne forme zovemo mešovitim ako je $i \neq k$ (na primer, $a_{23}x_2x_3$ je mešoviti član, dok to $a_{22}x_2x_2$ nije). Prema gornjoj definiciji, kvadratna forma je dijagonalna ako ne sadrži mešovitih članova.

Uopšte, sva terminologija matrica neposredno se prenosi na kvadratne forme. Tako, na primer, kvadratna forma je regularna (pravilna) ako je njena (simetrična) matrica regularna, itd.

<u>Napomena.</u> Ako se radi o kvadratnim formama od dve odnosno tri zadane varijable: x_1, x_2 odnosno x_1, x_2, x_3, onda je uobičajeno da se stavlja $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ (pri tome se vodi računa o tome da je x prva, y druga i z treća po redu od zadanih varijabli).

1. Odredi matricu A sledećih kvadratnih formi f:
1° $3x^2+6xy-y^2$; 2° x^2-y^2; 3° ax^2+y^2-bxy; 4° $(3x-2y)^2$;
5° $(3x-5y)(4x-3y)$; 6° $(mx+ny)(px+qy)$; 7° $z^2+xy+yz$;
8° $2x^2-3y^2+7xy-z^2$; 9° $(5x-2y)x+(3x+y)(x-5y)$;
10° $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$.

<u>Rešenje.</u> 1° $f = 3x^2+6xy-y^2$; Ovo je kvadratna forma od dve zadane veličine varijable x i y; ovde je:

a_{11} = (koeficijent uz $xx = x^2$) = 3,

a_{12} = (koeficijent uz xy) = 6,

a_{21} = (koeficijent uz yx) = 0,

a_{22} = (koeficijent uz $yy = y^2$) = -1,

pa tražena matrica A glasi: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Medjutim, ako u zadanoj formi $f = 3x^2+6xy-y^2$ <u>mešoviti</u> član 6xy (ako ih neka forma ima više, onda se to uradi sa svakim od njih) napišemo kao zbir dve njegove "polovine":

$$6xy = 3xy + 3yx$$

(pazi na redosled veličina x i y u sabircima na desnoj strani), zadana forma dobija simetričniji oblik:

$$f = 3x^2 + 3xy + 3yx - y^2$$

(sada ona i formalno sadrži svaki od proizvoda xx, xy, yx, yy) a njena matrica A glasi: $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, tj. njena je matrica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. To je matrica zadane forme f.

Uveri se da je zbilja $X^TAX = f$ (= zadana forma) pri čemu je kao i obično $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow X^T = [x \quad y]$.

2^o Ispitaj prethodni slučaj. Tražena matrica je jednaka $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Proveri rezultat kao u prethodnom slučaju.

3^o Zadanu formu $f = ax^2+y^2-bxy$ napišimo u obliku (vidi 1^o):

$$f = ax^2 - \frac{b}{2}xy - \frac{b}{2}yx + y^2,$$

odakle sleduje $a_{11} = a$, $a_{12} = -\frac{b}{2}$, $a_{21} = -b/2$, $a_{22} = 1$, pa tražena simetrična matrica glasi: $A = \begin{bmatrix} a & -b/2 \\ -b/2 & 1 \end{bmatrix}$.

4^o Prvo je $f = (3x-2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$, pa zadanu kvadratnu formu možemo napisati u obliku (vidi 1^o)

$$f = 9x^2 - 6xy - 6yx + 4y^2 ;$$

tražena je simetrična matrica jednaka $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$.

5^o Postupi kao pod 4^o; $A = \begin{bmatrix} 12 & -29/2 \\ -29/2 & 15 \end{bmatrix}$.

6^o $A = \begin{bmatrix} mp & (mq+np)/2 \\ (mq+np)/2 & nq \end{bmatrix}$; 9^o $A = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}$.

7^o $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ 10^o $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8^o $f = 2x^2 - 3y^2 + 7xy - z^2$; ovo je kvadratna forma tri zadane varijable x,y,z; možemo je zapisati i u simetričnom obliku:

$$f = 2x^2+3/2\cdot xy+0\cdot xz+3/2\cdot yx-3y^2+0\cdot yz+0\cdot zx+0\cdot zy-z^2$$

pa njena simetrična matrica glasi: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2\. Koja je od ovih funkcija kvadratna forma i kolika je determinanta te kvadratne forme:

1^o $3x^2+y^2$; 2^o $2\ x+2\ \ y+3$; 3^o xy; 4^o yz;
5^o $11x-6y\ \ 5x-4\ +6xy-\ 3x-2y\ \ 2x+6y$; 6^o u^2+v^2+2xy;
7^o $y+z\ ^2 -\ y-z\ ^2$; 8^o $t_1^2-4t_1t_2+t_2^2$; 9^o $x^2+y^2+z^2+z$;
10^o $2x+3y+z^2$?

<u>Rešenje.</u> Budimo odmah na početku načisto sa tim da se pod determinantom zadane kvadratne forme podrazumeva determinanta njene (simetrične) matrice. Dakle, da bismo našli determinantu neke zadane kvadratne forme, treba prvo naći matricu te forme (ispitaj prethodni zadatak), a potom determinantu te matrice.

1^o Jeste; njena je simetrična matrica jednaka $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pa je determinanta posmatrane forme $3x^2+y^2$ jednaka 3.

2^o Funkcija $2(x+2)(y+3)$, koju možemo napisati i u obliku $2xy+6x+4y+12$, nije kvadratna forma veličina x i y jer sadrži i "nekvadratne" članove 6x, 4y i 12.

3^o Jeste; $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -1/4$.

4^o To je kvadratna forma veličina y i z; determinanta je jednaka $-1/4$.

5^o Zadanu funkciju možemo napisati i u obliku radi!

$$49x^2 - 82xy + 36y^2 ,$$

a ovo jeste kvadratna forma. Njena je determinanta jednaka 83.

6° To je kvadratna forma od četiri zadane veličine u,v,x i y (ispiši je potpuno); njena je determinanta jednaka:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

(razvij po drugom stupcu).

7° Jeste; -4. 8° Jeste; $-\frac{9}{16}$. 9° Nije (zašto?!). 10° Nije.

3. Nadji inverznu formu f^{-1} svake od formi iz zadatka 1.

Rešenje. Napomenimo još jednom da pod inverznom formom f^{-1} zadane forme f $(=x^T a x)$ podrazumevamo onu formu koja nastaje kada se u kvadratnoj formi f umesto (simetrične) matrice a stavi njena inverzna matrica a^{-1}, tj. kvadratna forma

$$f^{-1} = x^T a^{-1} x .$$

1° U zadatku 1° našli smo da je (simetrična) matrica A zadane forme $f = 3x^2+6xy-y^2$ jednaka $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$;

njena inverzna matrica je jednaka (ispitaj zadatke o inverznim matricama):

$$A^{-1} = \frac{-1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} ,$$

pa je tražena inverzna forma f^{-1} jednaka

$$f^{-1} = x^T A^{-1} x = \frac{-1}{12} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\text{računaj!})$$

$$= \frac{-1}{12} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x-3y \\ -3x+3y \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{12} \left[x(-x-3y)+y(-3x+3y) \right]$$

$$= \frac{-1}{12} \left[-x^2-6xy+3y^2 \right],$$

odakle sleduje (gledaj pravilo M_5 o o računanju sa matricama) da je

$$f^{-1} = \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{2} xy - \frac{1}{4} y^2 .$$

Uveri se da je simetrična matrica ove forme upravo gornja matrica A^{-1}.

U ostalim slučajevima postupi analogno.

$$2^\circ \; f^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2-y^2 ,$$

dakle je u ovom slučaju $f^{-1} = f$.

$$3^\circ \; f^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2/4} \; (ax^2+bxy+ay^2) .$$

4° Ovde je $\det A = 0$ pa matrica A nema svoju inverznu matricu A^{-1}. Zato ni posmatrana forma f pod 4° nema svoju inverznu formu f^{-1}.

Svodjenje kvadratnih formi na dijagonalni oblik

Već smo napomenuli da su od posebnog interesa dijagonalne kvadratne forme (ispitaj definiciju 2). Tako, na primer, forma x^2+y^2 jeste dijagonalna dok to kvadratna forma

$$(1) \qquad f = 3x^2- xy-3y^2+5xz+2z^2$$

nije, jer sadrži mešovite članove xy i xz.

Pokušajmo zato da u poslednjoj formi umesto veličina x i y uvedemo nove veličine $\hat{x}$, $\hat{y}$ i $\hat{z}$ koje linearno zavise od x, y i z tako da nastala kvadratna forma bude dijagonalna po veličinama $\hat{x}$, $\hat{y}$ i $\hat{z}$. Razmotrimo ceo postupak dijagonalizacije na gornjem primeru. Pri tome razlikujemo dva slučaja:

Prvi slučaj. Kvadratna forma sadrži bar jedan dijagonalni (nemešoviti) član.

Drugi slučaj. Kvadratna forma sadrži samo mešovite članove.

U našem slučaju, kvadratna forma f data sa (1) sadrži dijagonalni član x^2, pa imamo, dakle, posla sa prvim slučajem. Dalje postupamo ovako:

Prvi korak. Grupišemo sve članove kvadratne forme koji sadrže tu veličinu x u jednu celinu (tu celinu stavljamo, na primer, u veliku zagradu), tj. formu f zapisujemo u obliku

$$f = \{3x^2- xy+5xz\} -3y^2 + 2z^2 .$$

(U slučaju da forma f nije imala mešovitih članova koji sadrže x, onda bi se preostali deo (tj. deo forme f bez x^2) te forme mogao shvatiti kao posebna kvadratna forma sa jednom veličinom manje, pa bi na nju trebalo primeniti razmatranje koje je upravo u toku).

<u>Drugi korak.</u> Iz izdvojene celine izvlači se kao faktor koeficijent od x^2; u našem slučaju to je 3; dakle je:

$$f = 3\left\{x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{5}{3}xz\right\} - 3y^2 + 2z^2.$$

<u>Treći korak.</u> U zagradi se iz <u>mešovitih</u> članova izvlači faktor 2x:

$$f = 3\left\{x^2 - 2x\left(\frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right)\right\} - 3y^2 + 2z^2.$$

<u>Četvrti korak.</u> Izraz u velikoj zagradi podešava se na kvadrat binoma: $I^2 \pm 2 \cdot I \cdot II + II^2$; s obzirom na ono što smo već uradili, mi imamo $I^2 - 2 \cdot I \cdot II$, gde je I "prvi" jednako x i II "drugi" jednako $\frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z$; dakle, u velikoj zagradi nam treba još II^2 "drugi na kvadrat", tj. $(\frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z)^2$; stoga ga <u>dodajemo</u> i <u>oduzimamo</u>; imamo

$$f = 3\left\{x^2 - 2x\left(\frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right) + \left(\frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right)^2 - \left(\frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right)^2\right\} - 3y^2 + 2z^2,$$

odnosno, zbog $I^2 - 2 \cdot I \cdot II + II^2 = (I - II)^2$,

$$f = 3\left\{\left(x - \frac{1}{6}y - \frac{5}{6}z\right)^2 - \left(\frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right)^2\right\} - 3y^2 \quad 2z^2,$$

ili, razdvajajući sabirke u kojima imamo x i one u kojima ga nemamo:

$$f = 3\left(x - \frac{1}{6}y - \frac{5}{6}z\right)^2 + \quad -3\left(\frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right)^2 - 3y^2 + 2z^2.$$

Izraz koji se nalazi u velikoj zagradi predstavlja sam za sebe kvadratnu formu, označimo je sa f', koja više <u>ne sadrži</u> x, dakle formu sa jednom veličinom (varijablom) manje nego polazna forma f. Dakle je:

$$f' = -3\left(\frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right)^2 - 3y^2 + 2z^2.$$

<u>Peti korak.</u> Uvodimo nove veličine x', y', i z' sa:

$$(2) \qquad x' = x - \frac{1}{6}y - \frac{5}{6}z, \quad y = 6y', \quad z = 6z',$$

(ovde je stavljeno, na primer, $y = 6y'$ a ne $y' = y$ samo zato

da bi se, na primer, izraz $\frac{1}{6}y$ pojednostavio; naime, sada je $\frac{1}{6}y = \frac{1}{6} \cdot 6y' = y'$), pa forma f postaje

$$(3) \qquad f = -3x'^2 + f',$$

pri čemu je, na osnovu gornjeg

$$(4) \qquad f' = -111y'^2 - 30y'z' - 3z'^2.$$

I sada treba isti posao nastaviti sa kvadratnom formom f'. Ona sadrži dijagonalni član y^2, pa opet imamo "<u>prvi slučaj</u>". Dakle, imamo:

<u>Prvi korak.</u>

$$f' = \left\{-111y'^2 - 30y'z'\right\} - 3z'^2.$$

<u>Drugi korak.</u>

$$f' = -111\left\{y'^2 + \frac{30}{111}y'z'\right\} - 3z'^2.$$

<u>Treći korak.</u>

$$f = -111\left\{y'^2 + 2y' \cdot \frac{15}{111}z'\right\} - 3z'^2.$$

<u>Četvrti korak.</u>

$$f = -111\, y' + \frac{5}{33}z'^2 - \frac{36}{37}z'^2.$$

<u>Peti korak.</u>

$$5 \qquad \mathfrak{y} = y' + \frac{5}{33}z', \quad \mathfrak{z} = \frac{1}{37}z', \quad \mathfrak{x} = x'$$

$$\Rightarrow f' = -111\mathfrak{y}^2 - 1332\mathfrak{z}^2.$$

Sada zadana kvadratna forma f (na osnovu (3)) postaje

$$f = -3\mathfrak{x}^2 - 111\mathfrak{y}^2 - 1332\mathfrak{z}^2$$

a to je dijagonalna kvadratna forma po veličinama $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ i $\mathfrak{z}$ koje na sledeći način (vidi smene (2) i (5)) linearno zavise od polaznih veličina (varijabli) x, y i z:

$$\mathfrak{x} = x - \frac{1}{6}y - \frac{5}{6}z; \quad \mathfrak{y} = \frac{1}{6}y + \frac{5}{198}z; \quad \mathfrak{z} = \frac{1}{222}z;$$

Razmotrimo sada slučaj dijagonalizacije kvadratne forme:

$$(1) \qquad f = 2xz + yz$$

Pošto ona ne sadrži nijedan dijagonalni (nemešoviti) član, onda imamo "drugi slučaj" dijagonalizacije kvadratnih formi i postupamo ovako:

<u>Prvi korak.</u> Uoči se bilo koji od članova te kvadratne forme (svi su oni mešoviti, inače bismo imali "prvi slučaj" koji je razradjen u prethodnom primeru;) neka to bude, na primer, član $2xz$; tada umesto x i z koji čine taj član navodimo nove varijable x' i z' koji na sledeći način <u>linearno</u> zavise od veličine x i z

$$x = x' - z'$$
$$z = x' + z'$$

dok za preostalu varijablu (ili varijable, ukoliko ih zadana kvadratna forma ima više) y jednostavno stavljamo

$$y' = y;$$

sada uočeni čkan $2xz$ u novim varijablama x' i z' glasi

$$2xz = 2(x' - z')(x' + z') = 2x'^2 - 2z'^2,$$

pa posmatrana kvadratna forma f postaje

$$f = 2x'^2 - 2z'^2 + y'(x' + z')$$

odnosno

$$(2) \qquad f = 2x'^2 + x'y' + y'z' - 2z'^2$$

Medjutim, to je kvadratna forma po varijablama x', y' i z' <u>koja sadrži bar jedan dijagonalan član</u> (na primer x'^2), što znači da smo "drugi slučaj" dijagonalizacije sveli na "prvi slučaj", pa dalje treba postupiti prema postupku koji je opisan u prethodnom primeru. Uradi to. Rezultat je kvadratna forma:

$$(3) \qquad f = 2\mathfrak{x}^2 - 2\mathfrak{y}^2$$

(primeti da je to kvadratna forma od samo dve varijable $\mathfrak{x}$ i $\mathfrak{y}$, dok polazna forma (1) sadrži te varijable x, y, z), pri čemu "konačne formule transformacije" glase:

$$\mathfrak{x} = x' + \tfrac{1}{4}y', \quad \mathfrak{y} = \tfrac{1}{4}y' - z', \quad \mathfrak{z} = z',$$

odnosno, vodeći računa da je: $x = x' - z'$, $z = x' + z'$, $y = y'$ (odakle sleduje $x' = \frac{1}{2}x+z$, $z' = \frac{1}{2}z - x$, $y' = y$):

$$(4) \qquad \mathfrak{x} = \tfrac{1}{4}(2x+2z+y), \quad \mathfrak{y} = \tfrac{1}{4}(2x-2z+y), \quad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(z-x).$$

To su formule transformacije "nedijagonalne" kvadratne forme (1) u dijagonalnu kvadratnu formu (3) (i obratno; u kvadratnoj formi (3) smeni veličine $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ dato sa (4) pa se uveri da će se dobiti ponovo kvadratna forma (1)).

<u>Važna napomena.</u> Jednu istu kvadratnu formu možemo na više načina svesti na dijagonalni oblik, tj. dijagonalizacija jedne kvadratne forme nije <u>jednoznačna</u>. Zato je uvek potrebno, uz nadjeni dijagonalni oblik napisati i formule transformacije kao u prethodna dva primera. Tako, na primer, ako u kvadratnoj formi

$$f = 2xy$$

stavimo:

$$x = \tfrac{1}{2}(x' - y'), \quad y = x' + y',$$

ona postaje dijagonalnom kvadratnom formom

$$f = x'^2 - y'^2.$$

Medjutim, ako stavimo da je

$$x = 2\mathfrak{x} - \mathfrak{y}, \qquad y = \tfrac{1}{2}(2\mathfrak{x} + \mathfrak{y}),$$

ona opet postaje dijagonalnom (sada po varijablama $\mathfrak{x}$ i $\mathfrak{y}$

$$f = 4\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2$$

ali ne istog oblika kao gore. O tome treba voditi računa (naravno da sada i varijable x' i y' zavise od varijabli $\mathfrak{x}$ i $\mathfrak{y}$; uveri se da je $x' = 2\mathfrak{x}$, $y' = \mathfrak{y}$).

1. Sledeće kvadratne forme svedi na dijagonalni oblik:

1° $x^2+3xy-y^2$; 2° $u^2-3uv+v^2$; 3° $-u^2+3uv+v^2$;

4° $-u^2+3uv-v^2$; 5° $x^2-2xy-3y^2+5xz+2z^2$; 6° $-xy+yz+zx$;

7° $2zy+3yx+4xz$; 8° $-xz+yz+xy$; 9° $5xz-xy+6yz+3z^2$.

<u>Uputstvo.</u> Ispitaj gore opisani postupak dijagonalizacije kvadratnih formi:

1° $\hat{x}^2-\hat{y}^2$, $\hat{x}=x+\frac{3}{2}y$, $\hat{y}=\frac{\sqrt{13}}{2}y$

2° $\hat{x}^2-\hat{y}^2$, $\hat{x}=x-\frac{3}{2}y$, $\hat{y}=\frac{\sqrt{3}}{2}y$

3° $-\hat{x}^2+\hat{y}^2$, $\hat{x}=x-\frac{3}{2}y$, $\hat{y}=\frac{\sqrt{13}}{2}y$

4° $-\hat{x}^2+\hat{y}^2$, $\hat{x}=x-\frac{3}{2}y$, $\hat{y}=\frac{\sqrt{5}}{2}y$

5° $\hat{x}^2-\hat{y}^2-\hat{z}^2$, $\hat{x}=x-y+\frac{5}{2}z$, $\hat{y}=2y-\frac{5}{4}z$, $\hat{z}=\frac{\sqrt{43}}{4}z$

6° $-\hat{x}^2+\hat{y}^2+\hat{z}^2$, $\hat{x}=\frac{1}{2}(x+y)-z$, $\hat{y}=\frac{1}{2}(x-y)$, $\hat{z}=z$.

2. Sledeće kvadratne forme svedi na dijagonalni oblik:

1° $x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$;

2° $3x^2+8xy-3y^2+4z^2-4zu+u^2$;

3° $2xy-6xz-6yu+2zu$;

<u>Rezultat.</u> 1° $5\hat{x}^2-\hat{y}^2-\hat{z}^2$; $x=\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x}+\frac{\sqrt{6}}{6}\hat{y}+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$,

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x}+\frac{\sqrt{6}}{6}\hat{y}-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$, $z=\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x}-\frac{\sqrt{6}}{3}\hat{y}$.

2° $5\hat{x}^2-5\hat{y}^2+5\hat{z}^2$; $x=\frac{\sqrt{5}}{5}(2\hat{x}+\hat{y})$, $y=\frac{\sqrt{5}}{5}(\hat{x}-2\hat{y})$,

$z=\frac{\sqrt{5}}{5}(2\hat{z}+\hat{u})$, $u=\frac{\sqrt{5}}{5}(-\hat{z}+2\hat{u})$.

3° $2\hat{x}^2+4\hat{y}^2-2\hat{z}^2-4\hat{u}^2$; $x=\frac{1}{2}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}+\hat{u})$, $y=\frac{1}{2}(-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}-\hat{u})$,

$z=\frac{1}{2}(-\hat{x}-\hat{y}+\hat{z}+\hat{u})$, $u=\frac{1}{2}(\hat{x}-\hat{y}+\hat{z}-\hat{u})$.

3. Ispitaj sledeće krive drugog reda:

1° $3x^2-4xy+y^2+2x-y=0$;

2° $x^2+y^2+xy-2x+2y=0$;

3° $-x^2+y^2+xy+2x+2y=0$;

4° $x^2-y^2+xy+2x+2y+1=0$;

5° $x^2+y^2-2xy+2x+2y+1=0$;

6° $4x^2-12xy+9y^2-8x+12y-7=0$;

7° $(x+y+1)^2=x-y$;

8° $3x^2-y^2+xy+x+y=0$;

9° $xy+2x+2y+1=0$;

10° $xy-1=0$.

<u>Uputstvo.</u> 1° Uoči onaj deo izraza na levoj strani koji predstavlja kvadratnu formu, tj.

$$3x^2-4xy+y^2,$$

pa ga svedi na dijagonalni oblik, itd. (pri tome vodi računa da se tada transformiše i preostali deo $2x-y$ leve strane).

LITERATURA

Djuro KUREPA

[1] Viša algebra, Beograd, 1971. drugo izdanje, XXIII + 1390

Zoran ŠAMI

VIII N I Z O V I

I Niz je funkcija definisana nad skupom prirodnih brojeva N sa vrednostima u R.

II Kažemo da niz $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ ima za graničnu vrednost broj a (ili konvergira broju a), u notaciji $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ako za svako proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji broj $N(\varepsilon)$ takav da je $|a_n + a| < \varepsilon$ za $n > N(\varepsilon)$. Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a_n se zove beskonačno mala.

III Ako su svi članovi niza $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ za $n > No$ (No je fiksireno), veći od nekog proizvoljno velikog broja M, kažemo da niz konvergira beskonačnosti i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Nizovi koji nemaju graničnu vrednost kažemo da divergiraju.

IV Ako je $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

V Monotono ograničen niz ima graničnu vrednost.

VI Potreban i dovoljan uslov da bi niz a_n konvergirao jeste da za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $N(\varepsilon)$ takav da je $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$ za $n > N\varepsilon$ i $p > 0$. (Cauchyev kriterijum).

VII Ako postoje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ onda je:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \qquad (\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0)\,.$$

VIII Niz $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $n = 1,2,\dots$, ima konačnu graničnu vrednost

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2{,}7182818284\dots$$

8.1. Dat je niz $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1,2,\dots$ Dokazati da granična vrednost niza a_n nije 2, već da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

Rešenje Ako pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 2$ tada prema definiciji granične vrednosti niza imamo: za svako $\varepsilon > 0$ postoji $N(\varepsilon)$, tako da je $|\frac{n}{n+1} - 2| < \varepsilon$, za $n > N(\varepsilon)$.

Pošto gornja tvrdnja mora da važi za svako $\varepsilon > 0$, ona važi i za $\varepsilon = \frac{1}{2}$, tj. mora biti

$$|\frac{n}{n+1} - 2| < \frac{1}{2} \quad \text{za} \quad n > N(\tfrac{1}{2}). \tag{1}$$

S druge strane je

$$|\frac{n}{n+1} - 2| = |\frac{-n-2}{n+1}| = \frac{n+2}{n+1} > 1 \quad \text{za svako } n = 1,2,\dots \tag{2}$$

Kako je (2) očigledno protivrečno sa (1) to niz $a_n = \frac{n}{n+1}$ nema za graničnu vrednost broj 2, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sad da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. Moramo dakle dokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $N(\varepsilon)$ tako da $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ za svako $n > N(\varepsilon)$.

Imamo

$$|\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{-1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{sledi} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1\,.$$

Dovoljno je dakle uzeti $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ pa će za svako $\varepsilon > 0$ i $n > N(\varepsilon)$ biti ispunjeno $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$.

8.2. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1} = 2$.

8.3. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}$. Naći $N(\varepsilon)$ ako je $\varepsilon = 0{,}0001$.

8.4. Dokazati pomoću Cauchy-eve teoreme da niz $a_n = \frac{1}{n}$ konvergira pa onda dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Rešenje Moramo pokazati da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N(\varepsilon)$ tako da je

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{za } n > N(\varepsilon),\ p > 0. \text{ Kako je}$$

$$|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}| = \frac{p}{n(n+p)} < \varepsilon \quad \text{sledi} \quad n^2 + pn - \frac{p}{\varepsilon} > 0\,. \tag{1}$$

Nejednačina (1) je zadovoljena za $n > \dfrac{-p + \sqrt{p^2 + \frac{4p}{\varepsilon}}}{2}$ tj. dovoljno je uzeti $N(\varepsilon) = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 + \frac{4p}{\varepsilon}}}{2}$ pa će za svako $\varepsilon > 0$, $p > 0$ važiti $|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}| < \varepsilon$ za $n > N(\varepsilon)$. Sledi, prema Cauchy-evoj teoremi da niz $a_n = \frac{1}{n}$ konvergira.

Slično zadatku 1, dobijamo da je dovoljno uzeti $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ pa će za svako $\varepsilon > 0$ biti $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ za $n > N(\varepsilon)$, što znači da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, što je i trebalo dokazati.

8.5. Da li imaju graničnu vrednost nizovi:

1° $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ parno} \\ \frac{1}{n} & n \text{ neparno} \end{cases}$; 2° $a_n = \dfrac{1}{n-(-1)^n}$ 3° $a_n = n[1-(-1)^n]$.

Rez. 1° Nema; 2° Ima; 3° Nema.

8.6. Koji je izraz veći za dovoljno veliko n:

1° $5000\, n + 1000$ ili $0{,}03n^2$; 2° 2^n ili n^{100000} 3° 5000^n ili $n!$.

Rez. 1° Drugi; 2° prvi; 3° drugi.

8.7. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000\, n}{n^2+1}$

Rešenje U ovom, kao i u sledećim zadacima pokušaćemo da naučimo tehniku traženja granične vrednosti niza, pošto oslanjajući se na samu definiciju granične vrednosti, ona teško odredjuje čak i u jednostavnim primerima.

Ako je opšti član niza dat kao količnik dva polinoma po n tada se granična vrednost lako odredjuje ako i brojilac i imenilac podele sa n^k gde je k najveći stepen broja n koji se javlja u oba polinoma. Za naš zadatak imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1000\, n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000n}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

8.8. Naći granične vrednosti sledećih nizova:

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-1}{(n+1)^2}$; 2° $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+\frac{1}{2}n^2+n+1}$. Rez. 1° 1; 2° 1.

8.9. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+n-1}}{2n^2+3n-5}$. Rez. $\dfrac{1}{2}$.

8.10. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{an+b} - \sqrt{an+c}\right)$, $(a > 0)$.

Rešenje Zadaci ovakvog tipa, rešavaju se racionalizacijom brojioca (ili imenioca, ili po potrebi i brojioca i imenioca).

Imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{an+b} - \sqrt{an+c}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{an+b})^2 - (\sqrt{an+c})^2}{\sqrt{an+b} + \sqrt{an+c}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-c}{\sqrt{an+b}+\sqrt{an+c}} =$$

$$= \frac{b-c}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{an+b}+\sqrt{an+c}\right)} = 0.$$

Naći sledeće granične vrednosti:

8.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$ Rez. 0.

8.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^h + b_1 n^{h-1} + \dots + b_h}$ $(a_0, b_0 \neq 0)$.

Rez. 0 ako je $k < h$; $\dfrac{a_0}{b_0}$ ako je $k = h$; $\operatorname{sgn} \dfrac{a_0}{b_0} \infty$, ako je $k > h$.

8.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2+n^2}{n^3}$.

Rešenje Nadjimo prvo sumu $S_n = 1^2+2^2+\dots+n^2$. Stavljajući u identitet $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ redom $x = 1, 2, \dots n$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
(1-1)^3 &= 0 = 1^3 - 3.1^2 + 3.1 - 1\\
(2-1)^3 &= 1^3 = 2^3 - 3.2^2 + 3.2 - 1\\
(3-1)^3 &= 2^3 = 3^3 - 3.3^2 + 3.3 - 1\\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - \qquad (1)\\
[(n-1)-1]^3 &= (n-2)^3 = (n-1)^3 - 3(n-1)^2 + 3(n-1) - 1\\
(n-1)^3 &= (n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1.
\end{aligned}$$

Sabiranjem levih i desnih strana dobijamo

$$1^3+2^3+\dots+(n-2)^3+(n-1)^3 = [1^3+2^3+\dots+(n-1)^3+n^3] - 3(1^2+2^2+\dots+n^2) + 3(1+2+\dots+n) - n. \qquad (2)$$

Uzimajući u obzir da je $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ i sredjivanjem iz (2) dobijamo

$$S_n = 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n^3-n}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1). \qquad (3)$$

Napomenimo da se istim postupkom može naći $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

S obzirom na (3) imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

Postavljen zadatak možemo rešiti i na drugi način koristeći se sledećom teoremom:

Neka $b_n \to \infty$ kad $n \to \infty$, pri čemu je počev od nekog n $b_{n+1} > b_n$. Tada je

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, ako postoji limes na desnoj strani, konačan ili beskonačan (Stolz).

Stavimo $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, $b_n = n^3$ Očigledno $b_{n+1} > b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$.

Tada je primenom Stolzove teoreme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1^2+2^2+\ldots+n^2) - (1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)}{n^3 - (n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-3n+1} = \frac{1}{3}.$$

8.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. Rez. $\frac{1}{2}$.

8.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right]$. Rez. $\frac{-3}{2}$.

8.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$. Rez. $\frac{4}{3}$.

8.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$. Rez. $\frac{1}{4}$.

8.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p > -1)$.

Rešenje Stavimo $a_n = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, $b_n = n^{p+1}$. Kako je $p > -1$ to je $p+1 > 0$, pa je $(n+1)^{p+1} > n^{p+1}$, tj. $b_{n+1} > b_n$. Takodje je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

Dakle, uslovi Stolzove teoreme su ispunjeni, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{\binom{p+1}{1} n^p - \binom{p+1}{2} n^{p-1} + \ldots} = \frac{1}{p+1}.$$

8.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Rešenje Transformišimo opšti član niza. Imamo

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) +$$

$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Odatle je

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

8.20. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $(a > 1)$.

Rešenje Stavimo $a = 1+h$, tada je zbog $a>1$, $h>0$. Imamo

$$\frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(1+h)^n} = \frac{n^k}{1+\binom{n}{1}h+\ldots+\binom{n}{k+1}h^{k+1}+\ldots\binom{n}{n}h^n} < \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}h^{k+1}} =$$

$$= \frac{n^k (k+1)!}{n(n-1)\ldots(n-k)h^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \cdot \frac{1}{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{n-k} = b_n.$$

Kako je $0 < \frac{n^k}{a^n} < b_n$ i uz to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ to je i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$

što je i trebalo pokazati.

8.21. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, ako je $|q| < 1$.

8.22. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$. Rez. 0.

8.23. Pokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, $(|a| < 1)$; $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$, $(a > 1)$;

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1, (a = 1)$.

8.24. Naći sledeće granične vrednosti:

$1^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}(0{,}3)^n$; $2^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n$; $3^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^0}\right)^n$; $4^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n+3}{2\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^n-3}$

Rez. 1° 0; 2° ∞; 3° 0; 4° -1.

Nađi sledeće limese:

8.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$.

Rešenje Razlikovaćemo četiri slučaja $|a|<1$, $|a|>1$, $a=-1$, $a=1$.

Ako je $|a|<1$ tada je očigledno $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=0$.

Ako je $|a|>1$ imamo;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a^n}+1}=1.$$

Ako je $a=1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Za $a=-1$ opšti član niza je $\frac{(-1)^n}{1+(-1)^n}$ pa niz nema graničnu vrednost jer ima dve tačke nagomilavanja $\frac{1}{2}$ i $-\infty$.

8.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$. Rez. 0 ako je $a\neq\pm1$; $\frac{1}{2}$ ako je $a=1$; nema granične vrednosti ako je $a=-1$.

8.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{4^n}}$. Rez. $\frac{3}{4(1-a)}$ ako je $|a|<1$, nema granične vrednosti za $|a|\geq1$.

8.28. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ $(a>0)$.

Rešenje Stavimo $b_n=\frac{a^n}{n!}$. Tada je $b_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a}{n+1}b_n$. Očigledno je $0<b_{n+1}<b_n$ za svako $n>a-1$. Dakle, niz b_n je monotono opadajući i ograničen pa ima graničnu vrednost.

Neka je $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x$. Tada je

$$x=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}b_n=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}\right)\lim_{n\to\infty}b_n=x\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=$$

$=x\,0=0.$

Dobili smo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$, što je i trebalo dokazati.

Istaknimo da je ovakvo rezonovanje dozvoljeno, tek pošto dokažemo da granična vrednost postoji. U protivnom, može da dođe do velikih grešaka. Naprimer, neka je $b_n=(-1)^n$. Ako ne bi prethodno ispitali postojanje granične vrednosti ovog niza već odmah stavimo $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x$, tada iz $b_{n+1}=(-1)^{n+1}=-b_n$, sledi $x=\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(-b_n)=-x$, tj. $x=0$, što naravno nije tačno jer niz $b_n=(-1)^n$ uopšte nema graničnu vrednost.

8.29. Nađi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$. Rez. 0.

8.30. Dokazati da je $\lim\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$

Rešenje Razlikovaćemo dva slučaja, $a\geq1$; $0<a<1$. Neka je $a\geq1$.

U dokazu ćemo koristiti odnos geometrijske i aritmetičke sredine n pozitivnih brojeva. Naime, ako su $x_1,x_2,\dots,x_n$, pozitivni brojevi tada važi nejednakost

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\qquad(1)$$

gde znak jednakosti važi tada i samo tada ako je $x_1=x_2=\dots=x_n$.

Ako nejednakost (1) primenimo na brojeve $1,1,\dots1,a$, dobijamo

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{1.1\dots1.a}\leq\frac{a+1+1+\dots+1}{n}=\frac{a+n-1}{n}=b_n$$

Dobili smo $1\leq\sqrt[n]{a}\leq b_n$, pa kako je $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$ to je i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Neka je sad $0<a<1$. Tada je $\frac{1}{a}>1$ pa imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1.$$ Time je dokaz završen.

8.31. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\ \dots\ \sqrt[2^n]{2})$.

<u>Rešenje</u> Imamo

$$\sqrt{2}\ \sqrt[4]{2}\ \dots\ \sqrt[2^n]{2} = \frac{\sqrt{2}\ \sqrt[4]{2}\ \dots\ \sqrt[2^n]{2}\ \sqrt[2^n]{2}}{\sqrt[2^n]{2}} = \frac{\sqrt{2}\ \sqrt[4]{2}\ \dots\ \sqrt[2^{n-1}]{2}\ \sqrt[2^{n-1}]{2}}{\sqrt[2^n]{2}} =$$

$$= \dots = \frac{\sqrt{2}\ \sqrt[4]{2}\ \sqrt[4]{2}}{\sqrt[2^n]{2}} = \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{2}}{\sqrt[2^n]{2}} = \frac{2}{\sqrt[2^n]{2}}$$

Kako je $1 < \sqrt[2^n]{2} < \sqrt[n]{2}$ to je $\dfrac{2}{\sqrt[n]{2}} < \dfrac{2}{\sqrt[2^n]{2}} < 2$.

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt[n]{2}} = \dfrac{2}{1} = 2$ to sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt[2^n]{2}} = 2$.

8.32. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

<u>Rešenje</u> Stavimo $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$; Sledi $n = (1+h_n)^n = 1 + \binom{n}{1}h_n +$

$+ \binom{n}{2}h_n^2 + \dots + \binom{n}{n}h_n^n > \binom{n}{2}h_n^2$. Odavde je $1 > \dfrac{n-1}{2} h_n^2$,

tj. $h_n < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. Kako je $h_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} = 0$

to kad $n \to \infty$, $h_n \to 0$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+h_n) = 1$.

Dokaz možemo izvesti koristeći teoremu: ako je $a_n > 0$, tada je

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, ako postoji limes na desnoj strani. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

8.33. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n}$. Rez. 1.

<u>Uputstvo</u> Koristiti Stolzovu teoremu i prethodni zadatak.

8.34. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

<u>Rešenje</u> Koristićemo poznati odnos harmonijske i geometrijske sredine n pozitivnih brojeva. Neka su $x_1, x_2, \dots x_n$ pozitivni brojevi, tada važi

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1\, x_2, \dots, x_n} \qquad (1)$$

gde znak jednakosti važi tada i samo tada ako je $x_1 = x_2 \dots = x_n$.

Primenjujući (1) na brojeve $1, 2, \dots n$ dobijamo

$$\frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} < \sqrt[n]{1\ 2, \dots, n} = \sqrt[n]{n!} \quad \text{odnosno}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} = b_n.$$

Ako na niz b_n primenimo Stolzovu teoremu (nije teško uveriti se da je možemo primeniti) dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Kako je $0 < \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} < b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ to je i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$,

što je i trebalo dokazati.

Odrediti sledeće granične vrednosti:

8.35. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \dfrac{1}{3n})^n$.

<u>Rešenje</u> U ovom, i u nekoliko sledećih zadataka koristićemo se poznatom graničnom vrednošću $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\dfrac{1}{n})^n = e$. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{3n})^n = \lim_{n\to\infty} [(1 + \frac{1}{-3n})^{-3n}]^{-\frac{1}{3}} = [\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{-3n})^{-3n}]^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{3}}.$$

8.36. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Rez. $\frac{1}{e}$.

8.37. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+10}$. Rez. e.

8.38. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$. Rez. 1.

8.39. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+1) - \ln n]$. Rez. 1.

8.40. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

Rešenje Imamo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = c_n$$

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = b_n$$

Dakle $c_n \leq a_n \leq b_n$, pa kako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ to sledi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

8.41. Dat je niz $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, ... $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Rešenje Pokažimo prvo da dati niz ima graničnu vrednost.

Jasno je da je $a_n > a_{n-1}$. Takodje je

$a_n^2 = 2 + a_{n-1}$ odakle je

$$a_n = \frac{2}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{2}{a_n} + 1 < \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2}+1$$

tj. dati niz je monoton i ograničen pa ima graničnu vrednost. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Tada je

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_{n-1}} = \sqrt{2+x} \quad \text{odakle je}$$

$x^2 = 2+x$ tj. $x = 2$ (drugo rešenje $x = -1$ ne odgovara jer je $a_n > 0$).

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

U ovom zadatku možemo rešenje naći i na drugi način. Imamo

$$\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^2},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^2}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{2^2})} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^3}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{2^3})} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

Zaključujemo $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Odavde je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2$.

8.42. Dat je niz $a_1 = \sqrt{c}$, $a_2 = \sqrt{c+\sqrt{c}}$, ... $a_n = \sqrt{c+a_{n-1}}$, $c > 0$. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Uputstvo Vidi prethodni zadatak. Rez. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{4c+1})$

Granične vrednosti funkcija

I Kaže se da x teži ka a, u notaciji $x \to a$, ako za svako $\varepsilon > 0$ važi $|x-a| < \varepsilon$. Ako je $x < a$, $a-x < \varepsilon$ kaže se da x teži ka a sa leve strane, u notaciji $x \to a-0$. Ako je $x > a$, $x-a < \varepsilon$ kaže se da x teži ka a sa desne strane, u notaciji $x \to a+0$.

II Kazaćemo da funkcija $f(x)$ teži ka A kod x teži ka a u notaciji $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, ako za ma kakav proizvoljno mali broj $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takav da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za $|x-a| < \delta$.

III Analogno je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ ako je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za $|x| > N(\varepsilon)$, i $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ako je $|f(x)| > M$ za $0 < |x-a| < \delta(M)$.

IV Ako postoji $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ kažemo da funkcija $f(x)$ ima levu graničnu vrednost za $x = a$. Ako postoji $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$ kažemo da funkcija $f(x)$ ima desnu graničnu vrednost za $x = a$.

V Potreban i dovoljan uslov za postojanje granične vrednosti funkcije

$f(x)$ u tački a jeste $f(a-0) = f(a+0)$.

VI Važna su dva poznata limesa.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

8.43. Naći $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^7 + 3x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 1}{x^7 - x^5 + 2x^3 - 5x + 7}$.

Rešenje Prvi tip limesa sa kojim se susrećemo jeste limes racionalne funkcije, kod koje i brojilac i imenilac teže ka ∞. Rešavamo ga sličnim postupkom kao što smo radili kod nizova: deljenjem sa x^k, gde je k najveći stepen x koji se pojavljuje u izrazu. Imamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^7 + 3x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 1}{x^7 - x^5 + 2x^3 - 5x + 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^7}}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^6} + \frac{7}{x^7}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Naći sledeće limese:

8.44. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)^3 (x^2+x+1)^2}{x^7 - 50x + 5}$. Rez. 1.

8.45. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}$. Rez. 1.

8.46. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x^4+1}}$. Rez. 2.

8.47. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Rez. 1.

8.48. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$. Rez. 5^{-5}.

8.49. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$. Rez. $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$.

8.50. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Rešenje Podelićemo i brojilac i imenilac sa $\sqrt{x}$. Imamo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

8.51. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$. Rez. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

8.52. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+b_1x+c_1}\right)$, a, b, c, b_1, c_1 proizvoljne konstante, $a > 0$.

Rešenje Susrećemo se sa novim tipom zadatka, kad se traži granična vrednost funkcije koja predstavlja razliku dve funkcije od kojih svaka teži ka beskonačnosti. Drugim rečima, imamo posla sa neodredjenim izrazom "$\infty - \infty$". Ovakav tip limesa efikasno rešavamo racionalizacijom brojioca (odnosno imenioca). Imamo:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+b_1x+c_1}\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^2 - \left(\sqrt{ax^2+b_1x+c_1}\right)^2}{\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{ax^2+b_1x+c_1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(b-b_1)x + c - c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{ax^2+b_1x+c_1}} = \frac{b-b_1}{2\sqrt{a}}.$$

8.53. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$. Rez. $\frac{3}{2}$.

8.54. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+4} - x\right)$. Rez. $-\frac{5}{2}$.

8.55. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}\right)$. Rez. 2.

8.56. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$. Rez. $\frac{1}{2}$.

8.57. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$. Rez. $\frac{1}{3}(a+b)$.

8.58. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+b^2}-x}$.

Rešenje Zadatak ćemo rešiti racionalisanjem i brojoca i imenioca:

Imamo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+b^2}-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^2\left(\sqrt{x^2+b^2}+x\right)}{b^2\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)} =$$

$$= \frac{a^2}{b^2} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}+1} = \frac{a^2}{b^2}.$$

8.59. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2/3}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

Rešenje Imamo

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}\left[\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^2-\left(2\sqrt{x+1}\right)^2\right]}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{3/2}\left[\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right]}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^{3/2}}{\left(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)}.$$

Nakon deljenja sa $x^{3/2}$ i brojioca i imenioca poslednjeg izraza

dobijamo $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-2}{4\cdot 2} = -\frac{1}{4}.$$

8.60. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$. Rez. $-\frac{1}{4}$.

8.61. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

Rešenje Imamo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)\left(\sqrt[3]{x^3-x^6+1}\right)+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\,\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

8.62. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]$. Rez. $\frac{4}{3}$.

8.63. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-4x+3}{x^4-3x+2}$.

Rešenje Ako je $P_n(a) \neq 0$ i $Q_m(a) \neq 0$ tada je $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{P_n(a)}{Q_m(a)}$

gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog, odnosno m-tog stepena. Ako je $P_n(a) = Q_n(a) = 0$, onda se razlomak $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ može skratiti binomom x-a jedan ili više puta, posle čega se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nalazi neposredno. Primenimo ovo razmatranje na naš zadatak. Prvi (i najvažniji) korak jeste da faktorišemo oba polinoma. Imamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5-4x+3}{x^4-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^5-x-3x+3}{x^4-x-2x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x^4-1)-3(x-1)}{x(x^3-1)-2(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,[x(x+1)(x^2+1)-3]}{(x-1)\,[x(x^2+x+1)-2]} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x+1)(x^2+1)-3}{x(x^2+x+1)-2} =$$

$$= \frac{1(1+1)(1^2+1)-3}{1(1^2+1+1)-2} = \frac{1}{1} = 1 .$$

8.64. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-x+1}$. Rez. -1.

8.65. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$. Rez. $\frac{3}{2}$.

8.66. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$. Rez. $-\frac{1}{2}$.

8.67. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-4x^3+9x^2-20x+20}{x^4-4x^3+3x^2+4x-4}$. Rez. 3.

8.68. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1}$, $m, n \in N$.

<u>Rešenje</u> Imamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)}{x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x+1)} = \frac{n}{m} .$$

8.69. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

<u>Rešenje</u> Stavimo $x = t^{3\cdot 5} = t^{15}$. Tada kad $x \to -1$, $t \to -1$ pa imamo

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to -1} \frac{1+t^3}{1+t^5} = \lim_{t\to -1} \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{(1+t)(1-t+t^2-t^3+t^4)} =$$

$$= \lim_{t\to -1} \frac{1-t+t^2}{1-t+t^2-t^3+t^4} = \frac{3}{2} .$$

8.70. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^{p/q}}{1-x^{r/s}}$, $p,q,r,s \in N$. Rez. $\frac{ps}{qr}$.

8.71. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. Rez. $\frac{3}{2}$.

<u>Uputstvo</u> Staviti $1+x = t^6$.

8.72. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$.

<u>Rešenje</u> Iako se traži limes trigonometrijske funkcije, princip rada ostaje isti: nastojimo da skratimo onaj faktor brojioca i imenioca koji je jednak 0 kad je $x = \frac{\pi}{4}$. Dobijamo

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x} = \lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\sin 2x}{1+\cos^2 2x-\sin^2 2x} = \lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\sin 2x}{2(1-\sin^2 2x)} =$$

$$= \lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\sin 2x}{2(1-\sin 2x)(1+\sin 2x)} = \lim_{x\to \pi/4} \frac{1}{2(1+\sin 2x)} = \frac{1}{4} .$$

8.73. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, $a > 0$.

<u>Rešenje</u> U ovom zadatku imamo posla sa limesom funkcije, koja kad je $x = a$ ima neodredjen oblik " $\frac{0}{0}$ ". Medjutim, za razliku od prethodnih zadataka, zadatke ovog tipa rešavamo racionalizacijom brojioca ili imenioca. Imamo

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} .$$

8.74. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$. Rez. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

8.75. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$, $a > 0$. Rez. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

8.76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$. Rez. $\frac{2}{3}$.

8.77. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$, $a > 0$ $n \in N$.

Rešenje Ako racionališemo brojilac dobijamo

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a})[(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}(\sqrt[n]{a})+\ldots+(\sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{a})^{n-2}+(\sqrt[n]{a})^{n-1}]}{(x-a)[(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-1}(\sqrt[n]{a})+\ldots+(\sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{a})^{n-2}+(\sqrt[n]{a})^{n-1}]}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-1}(\sqrt[n]{x})+\ldots+(\sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{a})^{n-2}+(\sqrt[n]{a})^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{n(\sqrt[n]{a})^{n-1}}=\frac{1}{n}\,a^{\frac{1-n}{n}}$$

8.78. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}}{x-4}$. Rez. $\dfrac{1}{3}\,4^{-\frac{2}{3}}$.

8.79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$. Rez. $\dfrac{m}{3}$.

8.80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{x+1}-1}$. Rez. -1.

8.81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$, $n\in N$.

Rešenje Pre svega, pomnožimo i brojilac i imenilac sa $(\sqrt{1+x^2}+x)^n$. Dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^{2n}-[(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)]^n}{x(\sqrt{1+x^2}+x)^n}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^{2n}-1}{x(\sqrt{1+x^2}+x)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{[(\sqrt{1+x^2}+x)^n-1][(\sqrt{1+x^2}+x)^n+1]}{x(\sqrt{1+x^2}+x)^n}$$

Ako primenimo pravilo da je limes produkta jednak produktu limesa i da je limes zbira jednak zbiru limesa sledi

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n+1}{(\sqrt{1+x^2}+x)^n}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-1}{x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{[(\sqrt{1+x^2}+x)-1][(\sqrt{1+x^2}+x)^{n-1}+(\sqrt{1+x^2}+x)^{n-2}+\ldots+1]}{x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{[(\sqrt{1+x^2}+x)^{n-1}+(\sqrt{1+x^2}+x)^{n-2}+\ldots+1]}{1}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{x}=$$

$$=2n\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+1\right]=2n\left[1+\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}\right]=$$

$$=2n\left[1+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right]=2n\,(1+0)=2n.$$

8.82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

Rešenje Susrećemo se sa limesom čije se izračunavanje svodi na primenu poznatog limesa $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Imamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}.$$

Napomenimo da ako u zadacima ovog tipa dati izraz nije dat u obliku pogodnom za primenu pomenutog limesa, tada taj izraz treba prethodno transformisati.

8.83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$. Rez. 3.

8.84. $\lim\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$. Rez. $\dfrac{1}{4}$.

8.85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Rešenje Ako transformišemo dati izraz pa primenimo gore navedeni limes dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}.$$

8.86. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}$. Rez. $\frac{3}{2}$.

8.87. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$. Rez. 2.

8.88. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Rešenje Imamo

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$$

8.89. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin a}{x}$. Rez. $\cos a$.

8.90. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{1-x^3}$. Rez. $-\frac{1}{3}$.

8.91 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$. Rez. 8.

8.92. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

Rešenje Racionalizacijom imenioca dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(\sqrt{1+\sin x}+\cos x)}{1+x\sin x-\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}{\sin x(x+\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{1+\sin x}+\cos x)}{x+\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x+\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{\sin x}+1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

8.93. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}$.

Rešenje Imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[mn]{\cos^n ax}-\sqrt[mn]{\cos^m bx}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^n ax-\cos^m bx}{x^2[(\sqrt[mn]{\cos^n ax})^{mn-1}+(\sqrt[mn]{\cos^n ax})^{mn-2}(\sqrt[mn]{\cos^m bx})+\dots+(\sqrt[mn]{\cos^m bx})^{mn-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\cos ax)^{\frac{mn-1}{m}}+(\cos ax)^{\frac{mn-2}{m}}(\cos bx)^{\frac{1}{m}}+\dots+(\cos bx)^{\frac{mn-1}{n}}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^n ax-\cos^m bx}{x^2}=\frac{1}{mn}\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\sin^2\frac{ax}{2})^n-(1-2\sin^2\frac{bx}{2})^m}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{mn}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{ax}{2}[\binom{n}{1}-\binom{n}{2}\sin^2\frac{ax}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}(\sin\frac{ax}{2})^{2(n-1)}]}{x^2}+$$

$$+\frac{1}{mn}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{bx}{2}[\binom{m}{1}-\binom{m}{2}\sin^2\frac{bx}{2}+\dots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m}(\sin\frac{ax}{2})^{2(m-1)}]}{x^2}=$$

$$=\frac{2}{mn}\left(\lim_{x\to 0}\frac{m\sin^2\frac{b}{2}x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{n\sin^2\frac{a}{2}x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{n}-\frac{a^2}{m}\right).$$

8.94. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x\sin x}$. Rez. 3.

8.95. $\lim_{n\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\cos 3x\dots\cos nx-1}{x^2}$.

Rešenje Imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\ldots\cos nx-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\cos^2 2x\ldots\cos^2 nx-1}{x^2(\cos x\cos 2x\ldots\cos nx+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x\cos 2x\ldots\cos nx+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\cos^2 2x\ldots\cos^2 nx-1}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\cos^2 2x\ldots\cos^2 nx-1}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\cos^2 2x\ldots\cos^2 nx-\sin^2 x-\cos^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\cos^2 x\,\frac{\cos^2 2x\cos^2 3x\ldots\cos^2 nx-1}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-1^2+\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x\cos^2 3x\ldots\cos^2 nx-1}{x^2}\right).$$

Ponavljajući isti postupak još n-1 puta, tj. stavljajući redom $1=\sin^2 2x+\cos^2 2x,\ldots\ 1=\sin^2 nx+\cos^2 nx$, i transformišući dobijene izraze dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\ldots\cos nx-1}{x^2}=\frac{1}{2}\left(-1^2-2^2-\ldots-n^2\right)=-\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1).$$

8.96. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$

Rešenje Ovakav tip limesa rešavamo koristeći poznati limes

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (1)$$

Dakle, naš prvi, ustvari i jedini zadatak je da dati limes dovedemo na oblik, na kojeg možemo primeniti (1). Napomenimo da se u zadacima često koristi limes ekvivalentan limesu (1) : $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Imamo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^2=1\cdot e^2=e^2.$$

8.97. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$ Rez. e.

8.98. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+1}.$ Rez. $\sqrt{e}.$

8.99. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}.$ Rez. e.

Uputstvo Staviti $\mathrm{ctg}x=\frac{1}{\mathrm{tg}x}$.

8.100. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}.$ Rez. 1.

Uputstvo Iskoristiti identitet $\sin x=\left(\frac{\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}\right)^{\frac{1}{2}}$ i pravilo $\lim\limits_{x\to a}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

8.101. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$

Rešenje Iskoristićemo pravilo da je $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\ln\lim\limits_{x\to a}f(x)$, ukoliko je $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ pozitivan. Imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

Napomenimo da je ovo veoma poznata granična vrednost, koja nam kazuje da se funkcije $\ln(1+x)$ i x ponašaju asimptotski jednako.

102. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$ Rez. 1.

103. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$

Rešenje Stavimo $x=\ln(1+t)$. Tada, kada $x\to 0$, $t\to 0$. Takodje je $1+t=e^x$ odnosno $t=e^x-1$. Dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{1}=1\,.$$

8.104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0$. Rez. $\ln a$.

Uputstvo Iskoristiti jednakost $a^x=e^{x\ln a}$.

8.105. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Rešenje Iskoristićemo zadatak 104. Imamo.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)\right]^{1/x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x\ln\sqrt[3]{abc}}\ln\sqrt[3]{abc}}$$

Kako $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^x-1}{x}+\dfrac{b^x-1}{x}+\dfrac{c^x-1}{x}\right)\to\dfrac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln\sqrt[3]{abc}$,

kad $x\to 0$ to sledi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}.$$

8.106. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\dots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a_1>0,\ a_2>0,\dots,\ a_n>0$.

Rez. $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$.

8.107. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$. Rez. $a-b$.

8.108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$. Rez. 1.

8.109. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{\operatorname{tg} nx}$. Rez. $\dfrac{m}{n}$.

8.110. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$.

Rešenje Imamo

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=\lim_{x\to a}\frac{a^{x^a}\left(a^{a^x-x^a}-1\right)}{a^x-x^a}=$$

$$=\lim_{x\to a}a^{x^a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x-x^a}-1}{a^x-x^a}=a^{a^a}\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x-x^a}-1}{a^x-x^a}$$

Stavimo $a^x-x^a=t$. Očigledno kada $x\to a$, tada $t=a^x-x^a\to 0$.
Dobijamo:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=a^{a^a}\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=a^{a^a}\ln a.$$

8.111. Naći levi i desni limes funkcije $f(x)=\dfrac{e^{1/x}+a^2+a}{e^{1/x}+2}$ u tački $x=0$. Za koju vrednost konstante a postoji $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$?.

Rešenje Očigledno je $\lim\limits_{x\to 0+0}e^{1/x}=\infty$. Ako stavimo $x=-t$ tada kad $x\to 0-0$, $t\to 0+0$ pa imamo

$$\lim_{x\to 0-0}e^{1/x}=\lim_{t\to 0+0}e^{-\frac{1}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0+0}e^{1/t}}=0. \quad (1)$$

Iz (1) sledi

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{e^{1/x}+a^2+a}{e^{1/x}+2}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1+\frac{a^2+a}{e^{1/x}}}{1+\frac{2}{e^{1/x}}}=1.$$

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{e^{1/x}+a^2+a}{e^{1/x}+2}=\frac{a^2+a}{2}$$

Da bi postojao $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ mora biti

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}f(x)\qquad\text{odnosno}$$

$1 = \frac{a^2+a}{2}$ tj. $a^2+a-2 = 0$ ili $a_1 = 1$, $a_2 = -2$.

NEPREKIDNOST FUNKCIJA

I Za funkciju $f(x)$ kažemo da je neprekidna u tački x_o ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1^o postoji vrednost funkcije za $x = x_o$: $f(x_o)$;

2^o postoje leva i desna granična vrednost za $x = x_o$: $f(x_o-0)$ i $f(x_o+0)$;

3^o važi $f(x_o-0) = f(x_o) = f(x_o+0)$.

II Uslov pod 3^o ekvivalentan je uslovu $\lim\limits_{h\to 0} [f(x_o+h) - f(x_o)] = 0$.

III Ako je funkcija neprekidna za svako $x \in [a,b]$, kažemo da je neprekidna na intervalu $[a,b]$. Ako uslov pod 3^o nije ispunjen, funkcija je prekidna za $x = x_o$.

IV Ako postoje vrednosti: $f(x_o-0)$, $f(x_o)$, $f(x_o+0)$ iako medjusobno nisu jednake, tačka x_o se zove tačka prekida prvoga reda.
Prekidi koji nisu prekidi prvog reda zovu se prekidi drugog reda.

V Funkcija $f(x)$ je ravnomerno neprekidna na datom skupu X ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon)$ tako da za ma koje x', $x'' \in X$ iz $|x'-x''| < \delta$ sledi $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

8.112. Dokazati da je $y = \cos x$ neprekidna za svako x.

<u>Rešenje</u> Dovoljno je dokazati da je za svako $x \in R$ ispunjen uslov

$$\lim_{h\to 0} [f(x+h) - f(x)] = 0.$$ Imamo,

$$\lim_{h\to 0} [\cos(x+h) - \cos x] = \lim_{h\to 0} 2 \sin \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2} = 0.$$

8.113. Dokazati da je $y = \sin x$ neprekidna za svako x.

8.114. Dokazati da je funkcija $f(x) = ax+b$ neprekidna za svako x.

8.115. Dokazati da je funkcija $y = a^x$, $a > 0$, neprekidna za svako x.

<u>Rešenje</u> Imamo

$$\lim_{h\to 0} (a^{x+h} - a^x) = a^x \lim_{h\to 0} (a^h - 1) = 0.$$

8.116. Naći prekidne tačke funkcija:

1^o $y = \frac{1}{1+e^{1/x}}$; 2^o $y = xe^{1/x}$; 3^o $y = (x+1) e^{\frac{1}{x-1}}$;

4^o $y = \sin \frac{1}{x}$.

Koji od uslova neprekidnosti nisu ispunjeni?

Rez. 1^o $x = 0$; 2^o $x = 0$; 3^o $x = 1$. 4^o $x = 0$.

8.117. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 0 \\ a \;, & x = 0 \\ 1+x, & x > 0 \end{cases}$

Kolika treba da je konstanta a da bi funkcija bila neprekidna za $x = 0$?

<u>Rešenje</u> Kako je $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} (1+x) = 1$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (1-x^2) = 1$$

to da bi funkcija bila neprekidna mora biti

$1 = f(0) = a$, tj. za $a = 1$ data funkcija je neprekidna.

8.118. Odrediti parametar λ, tako da funkcija $y = \begin{cases} e^{-x}+1, & x > 0 \\ x + \lambda, & x < 0 \end{cases}$

bude neprekidna za sve vrednosti promenljive. Rez. $\lambda = 2$.

8.119. Funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$ nije definisana u tački $x = 0$. Kako je treba definisati u toj tački da bi bila neprekidna za svako $x > 1$?

<u>Rešenje</u> Mora biti $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = f(0)$. Kako je

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{3}{2}$$. to se u tački $x = 0$ funkcija $f(x)$ mora definisati sa $f(0) = \frac{3}{2}$. Dakle, da bi $f(x)$ bila neprekidna za svako $x > -1$ treba da bude definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}, & x \neq 0 \\ \dfrac{3}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

8.120. Odrediti $f(0)$ da bi sledeće funkcije bile neprekidne za $x = 0$:

1° $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$; 2° $f(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}$; 3° $f(x) = \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

Rez. 1° $f(0) = 1$; 2° $f(0) = n$; 3° $f(0) = 2$.

8.121. Dokazati da je funkcija $f(x) = \sin x$ ravnomerno neprekidna za svako x.

Rešenje Prema definiciji ravnomerne neprekidnosti, moramo dokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon)$ tako da za ma koje $x_1, x_2 \in R$ iz $|x_1-x_2| < \delta$ sledi $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan pozitivan broj i neka je

$$|x_1-x_2| < \delta = \varepsilon \quad , \quad x_1, x_2 \in R \tag{1}$$

Tada je

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = \left|2 \sin \frac{x_1-x_2}{2} \cos \frac{x_1+x_2}{2}\right| \tag{2}$$

Kako je $|\sin x| \leq |x|$ za svako x i $|\cos x| \leq 1$ za svako x to iz (2) sledi

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq 2\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right| \cdot 1 = |x_1-x_2| < \delta = \varepsilon .$$

Dakle, dokazali smo da postoji δ (i to baš $\delta = \varepsilon$) tako da su uslovi za ravnomernu konvergenciju ispunjeni, tj. funkcija $f(x) = \sin x$ je ravnomerno neprekidna, što je i trebalo dokazati.

8.122. Dokazati da je funkcija $f(x) = x + \sin x$ ravnomerno neprekidna za svako x.

REDOVI

I Brojni red $a_1+a_2+\dots+a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{(suma reda)} \tag{1}$$

gde je $S_n = a_1+a_2+\dots+a_n$. Ukoliko (1) nije ispunjeno red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

II Potreban, ali ne i dovoljan uslov da bi red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kovergirao jeste $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

III Ako za $n > n_0$ ispunjeno $0 \leq a_n \leq b_n$, tada iz konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sledi konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a iz divergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sledi divergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

IV Ako je $a_n > 0$, $b_n > 0$ za $n > n_0$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$, tada redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju ili divergiraju istovremeno.

V Za konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ koristimo sledeće kriterijume:

1° Dalamberov kriterijum: ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ tada za $q > 1$ red divergira, za $q < 1$ red konvergira, za $q = 1$ na osnovu ovog kriterijuma ne možemo dati nikakvu ocenu.

2° Košijev kriterijum: ako je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ tada za $q > 1$ red divergira, za $q < 1$ red konvergira, za $q = 1$ neizvesno.

3° Rabeov kriterijum: ako je $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$ tada za $q > 1$ red konvergira za $q < 1$ red divergira, za $q = 1$ neizvesno.

VI Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira apsolutno ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

VII Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira uslovno ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira a red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira.

VIII Za red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, $b_n > 0$ (ovakav red zovemo alternativnim), koristimo za odredjivanje uslovne konvergencije Leibnizov kriterijum: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, $b_n > 0$ uslovno konvergira ako je $b_n \geq b_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Jasno je da za odredjivanje upsolutne konvergencije alternativnog reda koristimo kriterijume III, IV, V za odredjivanje konvergencije reda sa pozitivnim članovima.

8.123. Dokazati po definiciji konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ i naći njegovu sumu.

Rešenje Formirajmo parcijalnu sumu S_n prvih n sabiraka datog reda. Imamo

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1 - (\frac{-1}{2})^n}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left[1 - (\frac{1}{2})^n\right]$$

Kako $\lim_{n\to\infty} S_n$ postoji to dati red konvergira i njegova suma je

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left[1 - (-\frac{1}{2})^n\right] = \frac{2}{3}.$$

8.124. Dokazati po definiciji konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ i naći njegovu sumu. Rez. $S = \frac{3}{2}$.

8.125. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ konvergira i naći njegovu sumu.

Rešenje Imamo

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Odavde je

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

Dakle, dati red konvergira i njegova suma je $S = \frac{1}{3}$.

8.126. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira pa naći njegovu sumu.

Rez. $S = 1$.

8.127. Dokazati po definiciji konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ i naći njegovu sumu.

Rešenje Imamo

$$S_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

Ako ovu sumu napišemo o obliku

$$\begin{aligned}
S_n = {} & \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \; + \\
+ {} & \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} \; + \\
+ {} & \sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2} \; + \\
+ {} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ {} & \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3} \; + \\
+ {} & \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} \; + \\
+ {} & \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1}
\end{aligned}$$

Jasno je da je $S_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1$. Sledi

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1) = 1 - \sqrt{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2}.$$

Pomoću Dalamberovog i Kašijevog kriterijuma ispitati konvergenciju sledećih redova.

8.128. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

<u>Rešenje</u> Primenićemo Dalamberov kriterijum. Imamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Prema Dalamberovom kriterijumu dati red konvergira.

8.129. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Rez. Konvergira.

8.130. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$. Rez. Konvergira.

8.131. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Rez. Konvergira.

8.132. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. Rez. Konvergira.

8.133. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \ldots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$ Rez. Konvergira.

Pomoću Rabeovog kriterijuma ispitati konvergenciju sledećih redova:

8.134. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n}\right]^p$.

<u>Rešenje</u> Primenom Rabeovog kriterijuma dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\left(\dfrac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n}\right)^p}{\left(\dfrac{1.3.5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{2.4.6 \ldots 2n(2n+2)}\right)^p} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{(2n+2)^p - (2n+1)^p}{(2n+1)^p} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\frac{\binom{p}{1}(2n)^{p-1} + \binom{p}{2}(2n)^{p-2}3 + \ldots}{(2n)^p + \binom{p}{1}(2n)^{p-1} + \ldots} = \frac{1}{2}p.$$

Prema Rabeovom kriterijumu sledi da za $p > 2$ red konvergira, a za $p < 2$ divergira. Za $p = 2$ ovim kriterijumom se ne može dobiti rezultat.

8.135. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$. Rez. Konvergira.

8.136. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \ldots (p+n-1)}{q(q+1) \ldots (q+n-1)}$, $p > 0,\ q > 0.$

<u>Rešenje</u> Formirajmo količnik $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ i primenimo Rabeov kriterijum. Imamo

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{p(p+1) \ldots (p+n-1)}{q(q+1) \ldots (q+n-1)}}{\dfrac{p(p+1) \ldots (p+n-1)(p+n)}{q(q+1) \ldots (q+n-1)(q+n)}} = \frac{q+n}{p+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{q+n}{p+n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(q-p)n}{p+n} = q - p.$$

Prema Rabeovom kriterijumu sledi da za $q > p + 1$ red konvergira, a za $q < p + 1$ red divergira. Ako je $q = p + 1$, tada po Rabeovom kriterijumu ne možemo ništa da kažemo o konvergenciji datog reda, medjutim nije teško videti da je onda $a_n = \frac{p}{q+n}$. Kako je $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p}{q+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{pn}{n+q} = p > 0$ to se redovi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ponašaju jednako. S druge strane poznato je da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira ako je $p>1$, tj. red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, pa i red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{q+n}$

divergira. Dakle u slučaju $q = p + 1$ dati red je divergentan.

8.137. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$.

Rešenje Zadatak ćemo rešiti uporedjivanjem datog reda sa redom

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, za kojeg znamo da je divergentan. Uopšte, ako želimo da ispitujemo konvergenciju reda pomoću kriterijuma uporedjivanja redova tada se dati red obično uporedjuje sa redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. U našem slučaju imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1000\,n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1000n+1} = \frac{1}{1000} .$$

Dakle, redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$ ponašaju se jednako, pa

kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, to i dati red divergira.

Metodom uporedjivanja redova ispitati konvergenciju sledećih redova:

8.138. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. Rez. Divergira.

8.139. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

Rešenje Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{n+1}} = 1,$$

to se dati red i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ ponašaju jednako, pa kako red

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergira to i dati red konvergira.

8.140. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$. Rez. Konvergira.

8.141. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$. Rez. Divergira.

8.142. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$.

Rešenje Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,[(\sqrt{n+2})^2-(\sqrt{n-2})^2]}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = 2,$$

to se dati red i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ ponašaju jednako. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ konvergira ako je $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ tj. ako je $\alpha > \frac{1}{2}$, pa i dati red konvergira za $\alpha > \frac{1}{2}$.

8.143. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{1/n} - \frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right)$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Rešenje Uporedimo dati red sa redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} - 1 - \frac{b^{1/n}-1}{2} - \frac{c^{1/n}-1}{2}}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{b^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{c^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} = \ln a - \frac{1}{2} \ln b -$$

$$- \frac{1}{2} \ln c = \ln \frac{a}{\sqrt{bc}} .$$

Ako je $\ln \frac{a}{\sqrt{bc}} \neq 0$, sada se dati red i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ponašaju jednako, tj. dati red divergira. Medjutim ako je $\ln \frac{a}{\sqrt{bc}} = 0$ tada ne možemo ništa da zaključimo, već moramo da ispitujemo dalje. Neka je $\ln \frac{a}{\sqrt{bc}} = 0$ sledi $\frac{a}{\sqrt{bc}} = 1$ tj. $a = \sqrt{bc}$, pa je dati red oblika $\sum_{n=1}^{\infty} [(\sqrt{bc})^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2}] =$

$$= - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(\sqrt{b})^{1/n} - (\sqrt{c})^{1/n}]^2 .$$

Uporedimo ga sa redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} - \frac{1}{2} \frac{(b^{1/2n} - c^{1/2n})^2}{\frac{1}{n^2}} = - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b^{1/2n}-1}{\frac{1}{n}} - \frac{c^{1/2n}-1}{\frac{1}{n}} \right)^2 =$$

$$= - \frac{1}{8} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{b^{1/2n} - 1}{\frac{1}{2n}} - \lim_{n\to\infty} \frac{c^{1/2n} - 1}{\frac{1}{2n}} \right)^2 = - \frac{1}{8} (\ln b - \ln c)^2 = - \frac{1}{8} \ln^2 \frac{b}{c}$$

Ako je $\ln \frac{b}{c} \neq 0$ tada se dati red ponaša jednako kao red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, tj. dati red konvergira. Ako je $\ln \frac{b}{c} = 0$, dakle $b = c$, tada je $a = \sqrt{b.b} = b = c$ pa dati red takodje konvergira jer mu je opšti član

$$a_n = a^{1/n} - \frac{a^{1/n} + a^{1/n}}{2} = 0.$$

Dakle, konačno: dati red konvergira za $a = \sqrt{bc}$, a divergira za za $a \neq \sqrt{bc}$.

8.144. $\sum_{n=1}^{\infty} (a^{1/n} - b^{1/n})$, $a > 0$, $b > 0$. Rez. Konvergira za $a = b$; za $a \neq b$ red divergira.

Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju sledećih alternativnih redova:

8.145. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Rešenje Kako je $|a_n| = |\frac{(-1)^{n-1}}{n}| = \frac{1}{n}$, to dati red apsolutno ne konvergira. Da ispitamo uslovnu konvergenciju primenimo Leibnizov kriterijum. Imamo

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1} b_n , \text{ tj. } b_n = \frac{1}{n} ,$$

Kako je $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ za svako n, to je $b_{n+1} < b_n$ za svako n tj. niz b_n je monotono opadajući. Takodje je $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ pa prema Leibnizovom kriterijumu dati red uslovno konvergira.

8.146. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ Rez. Apsolutno ne konvergira; uslovno konvergira.

8.147. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

Rešenje Kako je $|a_n| = |\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}| = \frac{1}{n^p}$, to dati red apsolutno konvergira za $p > 1$. Da ispitamo uslovnu konvergenciju primenimo Leibnicov kriterijum. Imamo

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^p} = (-1)^{n-1} b_n, \text{ tj. } b_n = \frac{1}{n^p} .$$

Kako je $\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p}$ za svako n, ako je $p > 0$ to je za $p > 0$

$b_{n+1} < b_n$. Takodje je za $p > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pa prema Leibnicovom kriterijumu dati red uslovno konvergira za $p > 0$. Dakle, konačno: red apsolutno konvergira za $p > 1$, uslovno konvergira za $0 < p \leq 1$, a divergira za $p \leq 0$.

8.148. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$. Rez. Apsolutno konvergira za $p > 1$; uslovno konvergira za $0 < p \leq 1$; divergira za $p \leq 0$.

8.149. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}(-1)^{n-1}$.

Rešenje Imamo da je $|a_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right| = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$.

Dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{2n+2} - 1\right) =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{-1}{2n+2} = -\frac{1}{2} < 1$ pa dati red apsolutno ne konvergira.

S druge strane imamo

$a_n = (-1)^{n-1} b_n$, $b_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$ za svako n, pa je $b_{n+1} > b_n$ za svako n, te po Leibnizovom kriterijumu dati red ne konvergira ni uslovno. Dakle red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ divergira.

8.150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}$. Rez. Ne konvergira ni apsolutno, ni uslovno.

Uputstvo Za ispitivanje apsolutne konvergencije ovog reda primeni Rabeov kriterijum (vidi zadatak broj 134).

L i t e r a t u r a

1. B.P. Demidovič: Sbornik zadač i upražnenii po matematičeskomu analizy (izdanje "Nauka", Moskva, 1969.).

2. Pavle Miličić i Momčilo Uščumlić: Zbirka zadataka iz Više matematike I (izdanje "Gradjevinska knjiga", Beograd, 1969.).

Nada DJURANOVIĆ

IX. I Z V O D I

1. Definicija izvoda. Ako se argument promeni od vrednosti x na vrednost $x + \Delta x$, a odgovarajuća vrednost funkcije od $f(x)$ na $f(x + \Delta x)$, tada se veličina Δx zove priraštaj nezavisne veličine, a veličina $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ se zove priraštaj (zavisne veličine) funkcije. Izvodom ili derivatom funkcije $y = f(x)$ po argumentu x naziva se limes količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta (nezavisno promenljive), kada priraštaj nezavisno promenljive teži nuli:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} .$$

Izvod geometrijski predstavlja ugaoni koeficijent smera tangente ka grafiku funkcije $y = f(x)$ u tački x :

$$y' = tg\, \alpha .$$

2. Osnovna pravila izvoda

Ako je c = konstanta, $u=u(x)$, $v = v(x)$ funkcije koje imaju izvod, tada važe ova pravila:

1.) $c' = o$, 2.) $x' = 1$, 3. $(cu)' = cu'$,

4.) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 5.) $(uv)' = u'v + v'u$,

6.) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$.

3. <u>Tablica izvoda osnovnih funkcija</u>

1. $(x^n)' = n\, x^{n-1}$,

2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > o)$,

3. $(\sin x)' = \cos x$,

4. $(\cos x)' = -\sin x$,

5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$,

8. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(|x| < 1)$,

9. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

10. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$,

11. $(a^x)' = a^x \ln a$,

12. $(e^x)' = e^x$,

13. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

14. $\log a^x = \frac{\log_a e}{x}$

ZADACI:

Polazeći od definicije izvoda naći izvode sledećih funkcija:

9.1. $y = \sqrt{x}$.

REŠENJE: Nalazimo priraštaj funkcije $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$.

Odavde:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$$ (primenjujemo racionalizaciju razlomka)

$$= \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Sada tražimo limes ovog količnika, tj.:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

9.2. $y = \sin x$.

REŠENJE: Nadjimo prvo priraštaj funkcije Δy.

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$ (primenjujemo formulu: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$)

$$= \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x$$

$$= \sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x.$$

Nadjimo sada limes količnika priraštaja:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sin x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Dakle, $y' = (\sin x)' = \cos x$.

9.3. $y = 2x^2 + x$, $\qquad (y' = 4x + 1)$.

9.4. $y = 5\cos x - 3\sin x$, $\qquad (y' = -5\sin x - 3\cos x)$.

9.5. $y = \frac{1}{x^2}$, $\qquad (y' = -\frac{2}{x^3})$.

ALGEBARSKE FUNKCIJE

9.6. $y = x^4 - a^n$, gde su a i n konstante.

REŠENJE: Na osnovu pravila o izvodu zbira $(u+v)' = u'+v'$, imaćemo:

$$y' = (x^4 - a^n)' = (x^4)' - (a^n)' = 4x^3 - 0 = 4x^3.$$

Kako je $a^n = \text{const}$, primenjujući pravila $c' = 0$ $u(x^n)' = nx^{n-1}$;

9.7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x - \sqrt{10}$.

REŠENJE: Prvo primenjujemo pravilo $(u+v)' = u'+v'$;

$$y' = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x - \sqrt{10}\right)' = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' - \left(\frac{2}{3}x^3\right)' + (4x)' - (\sqrt{10})' =$$

$$= \frac{1}{5}(x^5)' - \frac{2}{3}(x^3)' + 4(x)' - 0 = \frac{1}{5}(5 \cdot x^4) - \frac{2}{3}(3 \cdot x^2) + 4 \cdot 1 = x^4 - 2x^2 + 4.$$

Zatim primenjujemo pravilo $(cu)' = cu'$ i $c' = 0$. Sada koristimo $(x^n)' = nx^{n-1}$.

9.8. $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$, a i b su konstante.

REŠENJE: Napišimo prvo y u obliku:

$y = \left(a x^{-\frac{2}{3}} - b x^{-\frac{4}{3}}\right)$ pa primenimo pravilo $(u+v)' = u'+v'$.

$$y' = \left(a x^{-\frac{2}{3}} - b x^{-\frac{4}{3}}\right)' = \left(a x^{-\frac{2}{3}}\right)' - \left(b x^{-\frac{4}{3}}\right)' = a\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' - b\left(x^{-\frac{4}{3}}\right)' =$$

$$= a\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}\right) - b\left(-\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}-1}\right) = -\frac{2}{3}a x^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}b x^{-\frac{7}{3}}.$$

Kako su a i b const., koristimo pravilo $(cu)' = cu'$; zatim pravilo $(x^n)' = n x^{n-1}$.

9.9. $y = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$.

REŠENJE: Primenjujemo pravilo o izvodu količnika:

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)'(\sqrt[3]{x}+1) - (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)'}{(\sqrt[3]{x}+1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}(\sqrt[3]{x}+1) - (\sqrt[3]{x}-1)\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}}{(\sqrt[3]{x}+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{x^{-\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{x}+1) - (\sqrt[3]{x}-1)\,x^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{x}+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{2/3}}\cdot\frac{2}{(\sqrt[3]{x}+1)^2} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)^2}.$$

9.10. $y = \dfrac{at^6 + b^6}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, a i b su konstante.

REŠENJE: Kako je $\sqrt{a^2-b^2}$ konstanta, prvo koristimo pravilo $(cu)' = cu'$:

$$y' = \left(\frac{at^6+b^6}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot (at^6+b^6)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \left[(at^6)' + (b^6)'\right] =$$ Kako je $b^6 = \text{const}$ i $a = \text{const}$, imamo:

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} (a.6\,t^5 + 0) = \frac{6\,a\,t^5}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

9.11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

9.12. $y = \dfrac{ax+b}{c}$, $\left(\dfrac{a}{c}\right)$.

9.13. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, $\left(\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}\right)$.

9.14. Dokazati:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

9.15. $y = m\,x^n - n\,x^m$, $\left(mn(x^{n-1} - x^{m-1})\right)$

9.16. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}\right)$.

9.17. $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$, $a = \text{const}$, $\left(1 - \sqrt{\dfrac{a}{x}}\right)$.

Uputstvo: prvo razviti ovaj kvadratni trinom.

9.18. $y = \dfrac{ax + bx^2}{am + bm^2}$, a,b,m su konstante, $\left(\dfrac{1}{am+bm^2}\ (a+2bx)\right)$

9.19. $y = \dfrac{\text{tg}\,x}{x}$.

REŠENJE: Primenjujemo pravilo o izvodu količnika

$$y' = \left(\frac{\text{tg}\,x}{x}\right)' = \frac{(\text{tg}\,x)'x - \text{tg}\,x(x)'}{x^2} =$$

Sada koristimo pravilo: $(\text{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x - \text{tg}\,x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}.$$

9.20. $\rho = \dfrac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$.

REŠENJE: Koristimo pravilo o izvodu količnika, kao i pravila: $(\sin x)' = \cos x$ i $(\cos x)' = -\sin x$:

$$\rho' = \left(\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\right)' =$$

$$= \frac{(\cos\varphi + \sin\varphi)'(\cos\varphi - \sin\varphi) - (\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi)'}{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}$$

$$= \frac{(-\sin\varphi + \cos\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi) - (\cos\varphi + \sin\varphi)(-\sin\varphi - \cos\varphi)}{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2 + (\cos\varphi + \sin\varphi)^2}{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2} =$$

$$= \frac{1 - 2\sin\varphi\cos\varphi + 1 + 2\sin\varphi\cos\varphi}{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2} =$$

$$= \frac{2}{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}.$$

9.21. $y = x \arcsin x$.

REŠENJE: Primenjujemo pravila o izvodu umnoška i

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}:$$

$$y' = (x \arcsin x)' = (x)'\arcsin x + x(\arcsin x)' =$$

$$= 1 \cdot \arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

9.22. $y = \sin x + \cos x$, $(\cos x - \sin x)$.

9.23. $\rho = \dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$, $\left(\dfrac{1}{1+\cos\varphi}\right)$.

9.24. $y = x^3 \operatorname{arc\,tg} x$, $\left(\dfrac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \cdot \operatorname{arc\,tg} x\right)$.

9.25. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $\left(\dfrac{\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}\right)$

9.26. $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x$, (0).

9.27. $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$, $\left((x\cos x - \sin x)\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\right)$.

9.28. $y = \dfrac{1}{\arccos x}$, $\left(\dfrac{1}{(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}\right)$.

9.29. $y = \dfrac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$, $\left(\dfrac{(1+\operatorname{tg} x)(\sin x + x\cos x) - x\sin x\,\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\right)$.

EKSPONENCIJALNE I LOGARITAMSKE FUNKCIJE

9.30. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

REŠENJE: Napišimo y u obliku $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ i prvo primenimo pravilo $(cu)' = cu'$, a zatim pravila:

$(n+v)' = n' + v'$ i $(e^x)' = e^x$;

$$y' = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' - (e^{-x})'\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

9.31. $y = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$.

REŠENJE: Koristimo pravila: $\left(\frac{n}{v}\right)' = \dfrac{n'v - nv'}{v^2}$ i $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$:

$$y' = \left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)' = \frac{(1-\ln x)'(1+\ln x) - (1-\ln x)(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x) - \frac{1}{x}(1-\ln x)}{(1+\ln x)^2} = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2} .$$

9.32. $y = x \log x$.

REŠENJE: Primenjujemo pravila $(nv)' = n'v + nv'$ i $(\log x)' = \dfrac{\log e}{x}$;

$$y' = (x\log x)' = (x)'\log x + x(\log x)' =$$

$$= 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{\log e}{x} =$$

$$= \log x + \log e = \log ex.$$

9.33. $y = \dfrac{\ln 3 \sin x + \cos x}{3^x}$.

REŠENJE: Koristimo pravila: $\left(\frac{n}{v}\right)' = \dfrac{n'v - nv'}{v^2}$, kao i $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\sin x)' = \cos x$ i $(\cos x)' = -\sin x$:

$$y' = \left(\frac{\ln 3 \sin x + \cos x}{3^x}\right)' =$$

$$= \frac{(\ln 3 \sin x + \cos x)' 3^x - (\ln 3 \sin x + \cos x)\, 3^{x\prime}}{3^{2x}} =$$

$$= \frac{(\ln 3 \cos x - \sin x)\, 3^x - (\ln 3 \sin x + \cos x) 3^x \ln 3}{3^{2x}} =$$

$$= \frac{3^x(\ln 3 \cos x - \sin x - \ln^2 3 \sin x - \ln 3 \cos x)}{3^{2x}} =$$

$$= -\frac{\sin x\,(1 + \ln^2 3)}{3^x} = -(1+\ln^2 3)\,\frac{\sin x}{3^x}.$$

9.34. $y = x^n \ln x$, $\quad (x^{n-1}(n \ln x + 1))$.

9.35. $y = \dfrac{3^x}{2^x}$, $\quad \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x \ln \frac{3}{2}\right)$.

9.36. $y = \dfrac{1-10^x}{1+10^x}$, $\quad \left(-\dfrac{2\cdot 10^x \ln 10}{(1+10^x)^2}\right)$.

9.37. $y = x^3 - 3^x$, $\quad (3x^2 - 3^x \ln 3)$.

9.38. $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$, $\quad \left(\dfrac{e^x}{\sin^2 x}(\sin x - \cos x)\right)$.

9.39. $y = \ln a \log_a x - \log x \cdot \ln x$, $\quad \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2 \ln x}{x \ln 10}\right)$.

SLOŽENE FUNKCIJE:

Izvod složene funkcije (lančasto pravilo):

$$y'_x = [\,y(u(x))\,]' = y'_u \cdot u'_x.$$

9.40. $y = \sqrt[3]{2x^2 + x - 1}$.

REŠENJE: Ovde je $u(x) = 2x^2 + x - 1$, pa je $y = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$.

Imamo: $y'_u = (u^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}}$ i $u'_x = (2x^2+x-1)' = 4x + 1$.

Primenom lančastog pravila dobijamo:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot u'_x = \frac{1}{3}(2x^2 + x - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4x + 1).$$

9.41. $y = e^{10x}$.

REŠENJE: Ovde je $u(x) = 10x$, pa je $y = e^u$. Dakle, $y'_u = e^u$, a $u'_x = 10$. Primenom lančastog pravila, dobijamo:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot u'_x = e^{10x} \cdot 10 = 10\, e^{10x}.$$

9.42. $y = 10^{e^x}$.

REŠENJE: Ovde je $u(x) = e^x$, pa je $y = 10^u$. Dakle dobijamo $y'_u = 10^u \ln 10$ i $u'_x = e^x$.

Primenom lančastog pravila dobijamo:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 10^u \cdot \ln 10 \cdot u'_x = \ln 10 \cdot 10^{e^x} \cdot e^x.$$

9.43. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1+x}{1-x}$.

REŠENJE: $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, a $y = \operatorname{arc\,tg} u$. Diferenciranje dobijamo: $y'_u = \dfrac{1}{1+u^2}$ i

$$u'_x = \frac{1\cdot(1-x) - (-1)\cdot(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Dakle, dobijamo:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2}{2+2x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

9.44. $y = \sin^2 x^3$

REŠENJE: Uvodimo smenu $u = \sin x^3$, pa je $y = u^2$. Uvedimo dalje $v = x^3$, odakle je $u = \sin v$. Diferenciranjem dobijamo: $y'_u = 2u$, $u'_v = \cos v$, $v'_x = 3x^2$. Znači ovde imamo složenu funkciju oblika: $y = y(u(v(x)))$. Primenjujemo lančasto pravilo:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2 \sin v \cdot \cos v \cdot v'_x =$$

$$= 2 \sin x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 =$$

$$= \sin 2x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \sin 2x^3.$$

Ovde smo koristili obrazac $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

9.45. $y = \dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

REŠENJE: Napišimo y u obliku proizvoda, a zatim primenimo prvo pravilo $(uv)' = u'v + uv'$ a onda lančasto pravilo:

$$y' = \left((1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} (1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\right)' = \left((1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}\right)' (1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} + (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} \left((1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{8} (1-\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right) (1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} + (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)(1+\sqrt{x})^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{x}}} - \frac{1}{4\sqrt{x}} \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}\,(1+\sqrt{x})}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{x}} \frac{1+\sqrt{x} + \sqrt{1-\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{x})} = -\frac{1}{4\sqrt{x}} \frac{1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{x}} \frac{2}{(1+\sqrt{x})\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}.$$

9.46. $y = \arc\sin \dfrac{2}{x}$, $\left(-\dfrac{2}{x\sqrt{x^2-4}}\right)$.

9.47. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$, $\left(a^a x^{a^a-1} + a x^{a-1} \cdot a^{x^a} \ln a + a^x a^{a^x} \ln^2 a\right)$.

9.48. $y = \ln \sin x$, $(\operatorname{ctg} x)$.

9.49. $y = e^{x^2-x+2}$, $(2x-1)\, e^{x^2-x+2}$.

9.50. $y = \ln[\ln(\ln x)]$, $\left(\dfrac{1}{x \ln x \ln \ln x}\right)$.

9.51. $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $\left(-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\right)$.

9.52. $y = \ln^2 x + \ln(\ln x)$, $\left(\dfrac{2 \ln x}{x} + \dfrac{1}{x \ln x}\right)$.

9.53. $y = \ln \arc\sin x - (\arc\sin x)^2$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\dfrac{1}{\arc\sin x} - 2 \arc\sin x\right)\right)$.

9.54. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, $(-\sin 4x)$.

9.55. $y = \dfrac{\cos 2x + 1}{\cos 2x - 1}$, $\left(\dfrac{2 \cos x}{\sin^3 x}\right)$.

9.56. $y = \sin^n x \cos nx$, $\left(n \sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n \sin^n x \sin nx\right)$

Sledeće funkcije prvo logaritmujte, pa onda nadjite izvod.

9.57. $y = x^x$.

REŠENJE: $\ln y = x \ln x$. Sada diferencirajmo i levu i desnu stranu. Imamo: $(\ln y(x))' = (\ln y)' y'_x = \dfrac{y'}{y}$;

$\frac{y'}{y} = (x)'\ln x + x\,(\ln x)' = 1.\ln x + x\,\frac{1}{x} = \ln x + 1.$ Odavde:

$$y' = y\,(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

9.58. $y = \sin x^{\cos x}$.

REŠENJE: $\ln y = \cos c \ln \sin x$. Odavde:

$$\frac{y'}{y} = -\sin x . \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x.$$ Sledi:

$$y' = y\,\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right),$$ tj.

$$y' = (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right),$$

9.59. $y = x^{\ln x}$.

REŠENJE: $\ln y = \ln x \ln x = \ln^2 x$. Diferenciranjem dobijamo:

$$\frac{y'}{y} = (\ln^2 x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}.$$

$$y' = y . 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln x} 2 \ln x\, \frac{1}{x} = 2 . x^{\ln x - 1} . \ln x.$$

9.60 $y = x^{\frac{1}{x}}$, $\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\, x^{\frac{1}{x}}\right)$.

9.61. $y = x^{x^x}$, $\left(x^{x^x}\left[\, x^x(\ln x+1)\ln x + x^{x-1}\right]\right)$.

9.62. $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$, $(y' = 0)$.

Naći izvod sledećih funkcija datih u parametarskom obliku:

$$x = x(t),\ y = y(t);\quad y' = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

9.63. $x = \cos t$, $y = t + \sin t$.

REŠENJE: $y'_t = 1 + \cos t$, $x'_t = -\sin t$. Odavde:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 + \cos t}{-\sin t} = -\frac{1 + \cos t}{\sin t}.$$

9.64. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

REŠENJE:

$$y'_t = \frac{6at(1+t^3) - 3t^2 . 3at^2}{(1+t^3)^2} = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2},$$

$$x'_t = \frac{3a(1+t^3) - 3t^2 3at}{(1+t^3)^2} = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2} = \frac{3 \cdot a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Odavde dobijamo:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

9.65. $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$, $\left(\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}\right)$.

9.66. $x = b\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $\left(-\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\, t\right)$.

9.67. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $\left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}\right)$.

9.68. $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$, $(5t^2)$.

Naći izvod sledećih funkcija, implicitno datih:

Neka jednačina $F(x,y) = 0$ definiše y kao implicitnu funkciju od x. Diferenciramo po x obe strane jednačine $F(x,y) = 0$ i dobijamo jednačinu prvog stepena po y', koje odatle lako nalazimo.

9.69. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

REŠENJE: Ovde je $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Diferencirajmo i levu i desnu stranu jednačine imajući u vidu da je y funkcija od x:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\cdot y' = 0.$$

Dobili smo linearnu jednačinu po y'. Rešimo je po y':

$$y' = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

9.7o. $x^3+\ln y - x^2e^y = 0$. Naći $y'(1)$.

REŠENJE: Diferencirajmo po x obe strane jednačine:

$$3x^2 + \frac{1}{y}\cdot y' - 2xe^y - x^2e^yy' = 0.$$

PAŽNJA: Izvod od x^2e^y nalazimo kao izvod proizvoda i pri tome imamo na umu da je y funkcija od x.

Zato imamo:

$$(x^2e^y)' = (x^2)'e^y + x^2(e^y)' = 2xe^y + x^2e^y\cdot y'.$$

Sredimo dobijenu jednačinu:

$$y'\left(\frac{1}{y} - x^2e^y\right) + 3x^2 - 2xe^y = 0.$$

Sada odavde nadjimo y':

$$y' = \frac{2xe^y-3x^2}{\frac{1}{y}-x^2e^y} = \frac{y(2xe^y-3x^2)}{1-x^2y\,e^y};$$

$$y'(1) = \frac{y(2.1.e^y-3.1^2)}{1-1^2y\,e^y} = \frac{y(2e^y-3)}{1-y\,e^y}.$$

9.71. $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$. Naći y' za y = 0.

REŠENJE: Nadjimo izvod leve i desne strane jednačine:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

$$\frac{y'x-y}{x^2+y^2} - \frac{x+yy'}{x^2+y^2} = 0.$$ Odavde :

$$y'x - y - x - yy' = 0,$$

$y'(x-y)-(x+y) = 0.$ Sledi:

$y' = \frac{x+y}{x-y}$; za y = 0 dobijamo y' = 1.

9.72. $x^2+xy + y^2 = 6$; $\left(-\frac{2x+y}{x+2y}\right)$.

9.73. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$. Naći $y'(4)$. $\left(-\sqrt{\frac{y}{x}},\ y'(4) = -1\right)$.

9.74. $x\ln y - y\ln x = 1$, $\left(\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln y};\ y'(1) = e^2-e\right)$.

9.75. $e^x\sin y - e^{-y}\cos x = 0$. Naći y' za y = 0.

$\left(\frac{-e^x\sin y + e^{-y}\sin x}{e^x\cos y + e^{-y}\cos x};\ y' = -e^{-1}\right)$.

9.76. $Ax^2+2Bxy + Cy^2+2Dx + 2Ey+F = 0$, $\left(\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}\right)$.

9.77. Kakav ugao obrazuje sa apscisnom osom x tangenta na krivoj $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, koja prolazi kroz tačku sa apcisom x = 1?

REŠENJE: Kao što znamo, izvod funkcije u odrednoj tački predstavlja tangens ugla α koji u toj tački zaklapa tangenta na krivu sa pozitivnim smerom x-ose. Zato nalazimo izvod:

$y' = \frac{2}{3}\cdot 5\ x^4 - \frac{1}{9}\ 3\ x^2 = \frac{10}{3}\ x^4 - \frac{1}{3}\ x^2,$

Za $x = 1,\quad y' = 3.$

Dakle: $\operatorname{tg}\alpha = y' = 3$, a sam ugao α:

$\alpha = \operatorname{arc\,tg} 3 \approx 71^\circ 34'.$

Diferencijal:

Diferencijal funkcije jednak je proizvodu izvoda funkcije i priraštaja argumenta: $dy = y'\Delta x$. Kako za $y = x$ dobijamo $dx = 1 \cdot \Delta x$, pišemo $dy = y'dx$.

Naći diferencijal sledećih funkcija:

9.78. $y = 2^x - 3^{-x} + \sqrt{x}.$

REŠENJE: $dy = y'dx$.

Kako je $y' = 2^x \ln 2 - (-3^{-x})\ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, dobijamo:

$dy = (2^x \ln 2 + 3^{-x}\ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx.$

9.79. $y = \ln(\cos\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}.$

REŠENJE: Nadjimo y':

$$y' = \frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\ (-\sin\frac{1}{x})\ (\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{x^2}\quad ;$$

$$dy = y'dx = \left[\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right]dx = \frac{1}{x^2}\ (\operatorname{tg}\frac{1}{x} + 1)\ dx.$$

9.80. $y = x^{a^x} - a^x.$

REŠENJE: Nadjimo prvo, logaritmovanjem, izvod funkcije $z = x^{a^x}$;

$\ln z = a^x \ln x$. Odavde, diferenciranjem, dobijamo

$\frac{z'}{z} = a^x \ln a\ \ln x + a^x\ \frac{1}{x}$;

$z' = z\ (a^x \ln a\ \ln x + a^x\ \frac{1}{x}) = x^{a^x}\cdot a^x\ (\ln a\ \ln x + \frac{1}{x}).$

Sada nadjimo y':

$$y' = (x^{a^x})' - (a^x)' = x^{a^x}\ a^x\ (\ln a\ \ln x + \frac{1}{x}) - a^x \ln a\ ,$$

$$dy = y'dx = a^x\left[x^{a^x}\ (\ln a\ \ln x + \frac{1}{x}) - \ln a\right] dx.$$

9.81. $y = \frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$, $\left(\frac{dx}{x^2-36}\right).$

9.82. $y = \operatorname{arc\,tg} e^{2x}$, $\left(\frac{2e^{2x}\ dx}{1+e^{4x}}\right).$

9.83. $y = x\ (\ln x - 1)$, $(\ln x\ dx).$

Kada je priraštaj argumenta Δx mali, imamo:

$\Delta y \approx dy$, a odatle:

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx y'\Delta x$, tj:

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + y'\Delta x.$

Ovaj se obrazac koristi za približno izračunavanje funkcije.

9.84. Izračunati približno značenje arc sin 0,51.

REŠENJE: Razmatramo funkciju $y = \arcsin x$ stavljajući $x = 0.5$, $\Delta x = 0.01$ i primenivši formulu:

$$\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)'\Delta x =$$

$$= \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x, \text{ dobijamo:}$$

$$\arcsin 0.51 \approx \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0.5)^2}}\ 0{,}01 =$$

$$= \frac{\pi}{6} + 0.011 = 0.513.$$

9.85. Izračunati približno vrednost: a) $\log_{10} 11$ i b) $\log_{10} 998$.

REŠENJE: Posmatramo funkciju $y = \log_{10} x$. Stavimo:

a) $x = 10$, $\Delta x = 1$ i primenimo formulu:

$$\log(x+\Delta x) = \log x + (\log x)'\Delta x = \log x + \frac{1}{x}\,\Delta x\,\log e;$$

$$\log_{10} 11 = \log_{10} 10 + \frac{0.43429}{10}\cdot 1 = 1+0.043429 = 1.04343.$$

jer je $(\log x) = \frac{\log e}{x} = \frac{0.43429}{x}$.

b) $x = 1000$, $\Delta x = -2$

$$\log(1000-2) \doteq \log 1000 - \frac{0.43429}{1000}\cdot 2 = 3 - 0.00086858 = 2.99913.$$

9.86. Izračunati približno:

a) arc sin 0.4983, b) arc tg 1.05 ;

(a) $18^{\circ}22''$; b) 0.8104).

9.87. Izračunati približno:

a) $\sin 46{,}3^{\circ}$, b) $\cos 59.1^{\circ}$ v) $\sin 1^{\circ}$

(a) 0.858; b) 0.796; v) 0,0175).

VIŠI IZVODI I DIFERENCIJALI:

$$y'' = (y')',\quad y''' = (y'')',\ldots,\ y^{(n)} = (y^{(n-1)})',$$

$$d^2y = d(dy) = y''(dx)^2,\ d^3y = y'''(dx)^3,\ldots,\ d^ny = y^{(n)}(dx)^n$$

9.88. $y = x^5+2x^4-3x^3-x^2-\frac{1}{2}x+7$. Naći y', y'', y'''.

REŠENJE:

$$y' = 5x^4+8x^3-9x^2-2x-\frac{1}{2};$$

$$y'' = 20x^3+24x^2-18x-2;$$

$$y''' = 60x^2+48x-18;$$

$$y^{IV} = 120x+48;$$

$$y^{V} = 120,\quad y^{VI} = y^{VII} = \ldots = 0.$$

9.89. $y = \ln x$. Naći $y^{(n)}$.

REŠENJE: $y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y'' = -1\cdot x^{-2}$,

$$y^{III} = 1.2.x^{-3};\quad y^{IV} = -1.2.3.x^{-4},$$

$$y^{(n)} = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{n-1}x^{-n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

9.90. $y = 2^x$. Naći $y^{(n)}$.

REŠENJE: $y' = 2^x\ln 2$, $y'' = 2^x\ln^2 2$,

$$y^{III} = 2^x\ln^3 2,\ldots, y^{(n)} = 2^x\ln^n 2.$$

9.91. $y = \sqrt{1+x^2}$. Naći y''.

REŠENJE: $y' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}};$

$$y'' = 1.(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + x(\tfrac{1}{2})(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

9.92. Naći n-ti izvod za $y = x^n$, $(n!)$.

9.93. Naći y^{III} za $y = x^2\ln x$, $\left(\frac{2}{x}\right)$.

9.94. Naći y'' za $y = \sin^2 x$, $(2\cos 2x)$.

9.95. Naći n-ti izvod za $y = \frac{1}{1+x}$, $\left(\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}\right)$.

9.96. Naći n-ti izvod za $y = e^x$, (e^x).

9.97. Naći diferencijale 1-og, 2-og i 3-eg reda funkcije $y = (2x-3)^3$.

REŠENJE: $y' = 3(2x-3)\cdot 2$,

$dy = y'dx = 3(2x-3)^2 \cdot 2\, dx = 6\,(2x-3)^2\, dx$,

$d^2y = y''(dx)^2 = 2\cdot 6(2x-3)\cdot 2(dx)^2 = 24(2x-3)(dx)^2$,

$d^3y = 24\cdot 2(dx)^3 = 48\,(dx)^3$.

9.98. Naći diferencijale dy i d^2y za funkciju: $v = e^{2t}$.

REŠENJE: $dv = 2\, e^{2t}dt$.

$d^2v = 4\, e^{2t}(dt)^2$.

9.99. Naći dy, d^2y, d^3y za $y = x(\ln x-1)$.

$$\left(dy = \ln x\, dx,\quad d^2y = \frac{(dx)^2}{x},\quad d^3y = -\frac{(dx)^3}{x^2}\right).$$

TEJLOROVA FORMULA.

Funkcija f(x) koja ima izvode reda $\leqslant (n+1)$ u nekom intervalu koji sadrži tačku a, može se predstaviti kao zbir algeb. polinoma stepena $\leqslant n$ i ostatka Rn:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n,$$ pri čemu je

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ gde je $\varepsilon = a+\theta(x-a)$, za neko $0<\theta<1$; za $a = 0$ dobija se formula Mak-Lorena:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0<\theta<1.$$

9.100. Napisati Mak-Lorenov razvoj funkcije $y = e^x$.

REŠENJE: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$

$f(0) = e^0 = 1$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$,

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1, \ldots,$

$f^{(n)}(0) = 1$.

Dakle:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

9.101. Napisati Mak-Lorenov razvoj funkcije $y = \cos x$.

REŠENJE: $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$,

$(\cos x)^{III} = \sin x$, $\cos^{IV}x = \cos x$,

$\cos 0 = 1$, $(\cos 0)' = 0$, $(\cos 0)'' = -1$,

$(\cos 0)^{III} = 0$, $(\cos 0)^{IV} = 1$

Dakle:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

9.102. Napisati Mak-Lorenov polinom 3-eg stepena za funkciju $y = a^x$.

REŠENJE:

$f(x) = a^x$, $\quad f(0) = 1$,

$f'(x) = a^x \ln a$, $\quad f'(0) = \ln a$,

$f''(x) = a^x \ln^2 a$, $\quad f''(0) = \ln^2 a$,

$f^{III}(x) = a^x \ln^3 a$, $\quad f^{III}(0) = \ln^3 a$,

$f^{IV}(x) = a^x \ln^4 a$, $\quad f^{IV}(\theta x) = \ln^4 a \cdot a^{\theta x}$.

$$a^x = 1 + x\ln a + \frac{x^2\ln^2 a}{2!} + \frac{x^3\ln^3 a}{3!} + R_3$$

$$R_3 = \frac{x^2\ln^4 a}{4!}a^{\theta x}, \qquad 0<\theta<1.$$

9.1o3. Izračunati s tačnošću do 10^{-3} približno značenje $\sqrt[3]{29}$.

REŠENJE: Napišimo zadati koren u obliku:

$\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{1/3}$. Koristimo binomni razvoj:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + Rn,$$

odakle se dobija približna jednakost:

$$(1+x)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n$$

čija se pogrešnost $Rn = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}x^n(1+\theta x)^{m-n-1}$

može učiniti po želji malom za $|x|<1$ i za dovoljno veliko n.

Ovde je $x = \frac{2}{27}$, $n = \frac{1}{3}$, pa dobijamo:

$$\sqrt[3]{29} \approx 3\left(1 + \frac{2}{81} - \frac{2.2}{81.2!} + \frac{2.2.2.5}{81^3} - \frac{2^5.5}{81^4} + \dots + Rn\right).$$

Tražimo veličine greške Rn:

za n = 1 $\quad 3|R_1| < \frac{3.2.2}{81^2} < 0{,}002$

za n = 2 $\quad 3|R_2| < \frac{3.2.22.5}{81^3} < 0{,}0003$.

Dakle, da bi dobili zadatu tačnost, dovoljno je uzeti tri člana, tj.

$$\sqrt[3]{29} \approx 3\ (1+0{,}024 - 0{,}0006) = 3{,}072.$$

9.1o4. Naći Mak-Lorenov razvoj za y = sin x.

$\left(\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right).$

9.1o5. Aproksimirati funkciju $y = \sqrt{x}$ polinomom četvrtog stepena oko tačke x = 1 i proceniti grešku za $x \in \left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right]$.

$$\left(\sqrt{x} \approx 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16}\right)$$

$$|Rn| = \frac{(x-1)^4}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\theta(x-1)^7}} \quad \frac{1}{4!.10^4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{9}{10})^7}} =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{4'!\ 32.27^2}\Big).$$

PARCIJALNI IZVODI PRVOG REDA:

Parcijalni izvodi funkcije $z = f(x,y)$ se definišu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = f'_x(x,y) \text{ za konstantno } y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = f'_y(x,y) \text{ za konstantno } x.$$

Totalni diferencijal funkcije $z = f(x,y)$ se izračunava po formuli:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

9.1o6. $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$. Naći $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial u}{\partial y}$.

REŠENJE: Smatrajući y za konstantu, dobijamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1.$$

Smatrajući x za konstantnu veličinu, dobijamo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2.$$

9.1o7 $z = e^{x^2+y^2}$. Naći totalni diferencijal.

REŠENJE:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x = 2x\,e^{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y = 2y\,e^{x^2+y^2};$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 2\,e^{x^2+y^2}(xdx + ydy).$$

9.1o8. $z = \ln (x^2+y^2)$. Naći dz $\left(\dfrac{2(x\,dx + y\,dy)}{x^2+y^2}\right)$.

9.1o9. $z = x^y$. Naći dz , $\left(x^y \left(\frac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy\right)\right)$.

9.11o. $z = \sin(x^2 + y^2)$. Naći dz . $\left(2(xdx+ydy\cos x^2+y^2)\right)$.

CRTANJE GRAFIKA FUNKCIJA POMOĆU KARAKTERISTIČNIH TAČAKA

Kriterijumi rastenja i opadanja funkcije:

1. Ako je $f'(x_0) > 0$, onda funkcija $f(x)$ raste u tački x_0.
2. Ako je $f'(x_0) < 0$, onda funkcija $f(x)$ opada u tački x_0.

Odredjivanje minimuma i maksimuma:

1. Ako je za $x = x_0 f'(x_0) = 0$ i za svako malo $h > 0$ $f'(x_0-h) \geq 0$, $f'(x_0+h) \leq 0$, tada funkcija $f(x)$ u tački x_0 ima maksimum; ako je $f'(x_0-h) \leq 0$, $f'(x_0+h) \geq 0$, onda funkcija u tački x_0 ima minimum.
2. Način: ako je $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, onda funkcija $f(x)$ ima u x_0 maksimum, ako je $f''(x_0) < 0$, a minimum ako je $f''(x_0) > 0$.

Dovoljni uslovi konveksnosti konkavnosti grafika funkcije

Ako je $f''(x) < 0$ u (a,b) , onda je grafik funkcije konkavan u tom intervalu.

Ako je $f''(x) > 0$, u (a,b) , onda je konveksan.

Asimptote:

Prava $x = a$ jeste vertikalna asimptota krive $y = f(x)$, ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ili $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Prava $y = b$ jeste horizontalna asimptota krive $y = f(x)$, ako postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ili $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Prava $y = kx + b$ jeste kosa asimptota krive $y = f(x)$ ako postoje limesi:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx],$$

ili $$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]$$

9.111. $y = x^3 + 2x^2 - 1$.

REŠENJE:

1. Oblast definisanosti: $D = (-\infty, +\infty)$.

Ispitajmo ponašanje funkcije na kraju intervala:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} (x^3+2x^2-1) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} (x^3+2x^2-1) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty.$$

2. Nule funkcije i znak:

Ispitajmo da li je $x_1 = -1$ nula funkcije:

$$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Znači, $x_1 = -1$ jeste nula funkcije. Nadjimo ostale nule na sledeći način:

$$(x^3+2x^2-1) : (x+1) = x^2 + x - 1,$$

$$\begin{array}{l} \underline{(x^3 + x^2)} \\ = x^2-1 \\ \underline{-(x^2+x)} \\ = -x-1 \\ = = \end{array}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 \pm 2.25}{2}$$

$$x_2 \approx \frac{-1+2.25}{2} = \frac{1.25}{2} \approx 0{,}62$$

$$x_3 \approx \frac{-1-2.25}{2} = \frac{-3{,}25}{2} = -1{,}62.$$

Znači, nule funkcije su:

$x_1 = -1$, $x_2 \approx 0{,}62$, $x_3 = -1{,}62$.

Ispitajmo znak naše funkcije:

$$y = x^3 + 2x^2 - 1 = (x+1)(x+1.62)(x-0{,}62)$$

na sledeći način:

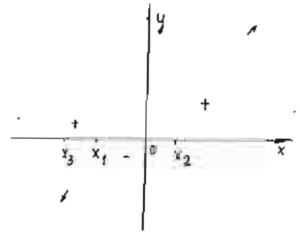
x+1	−	−	+	+
x+1.62	−	+	+	+
x−o.62	−	−	−	+
(x+1)(x+1,62)(x−o.62)	−	+	−	+

$-1{,}62 \quad -1 \quad 0 \quad 0.62$

Dakle: $y > 0$ za $x > o.62$ i $-1{,}62 < x < -1$

$y < 0$ za $x < -1.62$ i $-1 < x < o{,}62$

tj. imamo ovakvu situaciju:



3. Parnost funkcije:

$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 - 1 =$

$= -x^3+2x^2-1 = -(x^3-2x^2+1)$.

Dakle, funkcija nije ni parna ni neparna.

4. Monotonost funkcije i ekstremi:

$y' = (x^3 + 2x^2 - 1)' = 3x^2 + 4x = x(3x+4)$.

$y' = 0$ za $x_1 = 0$ i $x_2 = -\frac{4}{3}$:

Podsetimo se kako se ispituje znak kvadratne funkcije:

$y = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$; $x_1 < x_2$

za $a > 0$ $y > 0$ za $x > x_2$ i $x < x_1$, a $y < 0$ za

$$x_1 < x < x_2$$

za $a < 0$ $y < 0$ za $x \geq x_2$ i $x < x_1$, a $y > 0$ za

$$x_1 < x < x_2$$

pa je prema tome znak od $y' = 3x^2 + 4x$:

$y' > o$ za $x > o$ i $x < -\frac{4}{3}$ tj. tada y raste: $y\nearrow$

$y' < o$ za $-\frac{4}{3} < x < o$, tj. tada y opada: $y\downarrow$

$y'' = 6x + 4$

$f''(o) = 4 > o$, dakle y $x = o$ jeste minimum: $f_{min} = f(o) = -1$,

$f''(-\frac{4}{3}) = -2 < o$, dakle $x = -\frac{4}{3}$ jeste maksimum:

$$f_{max} = f(-\frac{4}{3}) = \frac{5}{27}$$

5. Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

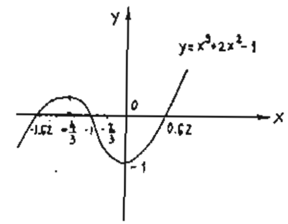
$y'' > o$ za $x > -\frac{2}{3}$; tada je grafik konveksan;

$y'' < o$ za $x < -\frac{2}{3}$; tada je grafik konkavan.

$x = -\frac{2}{3}$ je prevojna tačka.

$$f(-\frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3})^3 + 2(-\frac{2}{3})^2 - 1 = -\frac{11}{27}.$$

Dakle, naš grafik izgleda ovako:



9.112. $y = x - |x+x^2|$.

REŠENJE:

$$y = x - |x+x^2| = \begin{cases} x-(x+x^2), & x+x^2 \geq o \\ x-[-(x+x^2)], & x+x^2 < o \end{cases} = \begin{cases} -x^2, & x \geq o \text{ i } x \leq -1 \\ x^2+2x, & -1 < x < o \end{cases}$$

$x+x^2 \geq o$ za $x \geq o$ i $x \leq -1$,

a $x+x^2 = x(x+1) < o$ za $-1 < x < o$.

1. domen: $D = (-\infty, +\infty)$

ponašanje na krajevima intervala:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty.$$

2. Nule funkcije i znak:

$-x^2 = 0$ za $\boxed{x = 0}$

$x^2+2x = x(x+2) = 0$ za $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$, ali te vrednosti ne pripadaju intervalu definisanosti $(-1,0)$

$-x^2 < 0$ za $x \geq 0$ i $x \leq -1$,

$x^2+2x \geq 0$ za $x \geq 0$ i $x \leq -2$,

i $x^2+2x < 0$ za $-2 < x < 0$.

Kako je $y = x^2+2x$ definisano za $x \in (-1,0)$, posmatrajmo samo zajednički deo od $(-2,0)$ i $(-1,0)$, tj. $(-2,0) \cap (-1,0) = (-1,0)$.

Znači, $y < 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$

3. Parnost:

$$f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \text{ i } x \leq -1 \\ x^2-2x, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Znači, funkcija nije ni parna ni neparna.

4. Monotonost i ekstremi:

$$y' = \begin{cases} -2x, & x \geq 0 \text{ i } x \leq -1 \\ 2x+2, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$y' = 0$ za $x = 0$ $\quad f(0) = 0$

i $x = -1$ ali $-1 \notin (-1,0)$;

$y' \geq 0$ za $x \leq -1$ tj. tada $y \nearrow$,

$y' \geq 0$ za $x \geq 0$ tj. tada $y \searrow$,

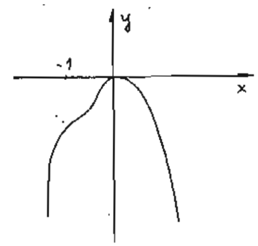
$y' > 0$ za $-1 < x < 0$ tj. tada $y \nearrow$.

$$y'' = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \text{ i } x \leq -1 \\ 2 & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Kako y'' menja znak u tački $x = -1$, to je prevojna tačka: $f(-1) = -1$.

Dakle, grafik će ovako izgledati:

$y = x - (x+x^2)$



9.113. $y = \frac{x+2}{2x+1}$.

REŠENJE:

1. Domen: $2x+1 \neq 0$, tj. $x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow$.

$$D = (-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{2}, +\infty),$$

ponašanje na krajevima intervala:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2};$$

Znači, prava $y = \frac{1}{2}$ jeste horizontalna asimptota.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-} y = -\infty, \quad \lim_{x\to-\frac{1}{2}+} y = +\infty$$

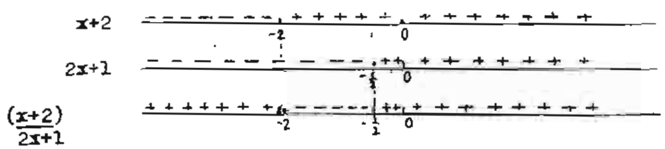
pa je prava $x = -\frac{1}{2}$ vertikalna asimptota.

2. Nule i znak:

$y = 0$ za $x = -2$

Znak količnika $\frac{x+2}{2x+1}$ je isti kao i znak proizvoda $(x+2)(2x+1)$.

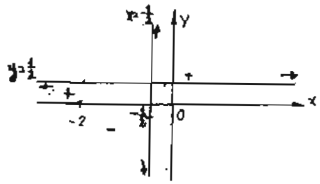
Odredićemo ga na ovaj način:



Dakle

$y > 0$ za $x > -\frac{1}{2}$ i $x < -2$

$y < 0$ za $-2 < x < -\frac{1}{2}$



3. Parnost:

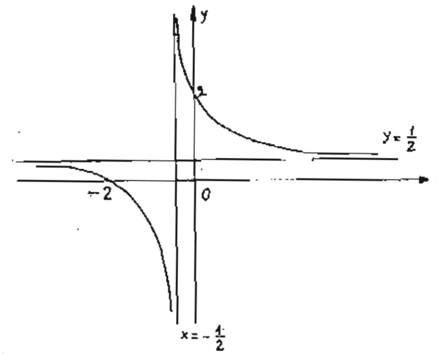
$$f(-x) = \frac{-x+2}{-2x+1} = -\frac{(x-2)}{-(2x-1)} = \frac{x-2}{2x-1},$$

Nije ni parna ni neparna.

4. Monotonost i ekstremi:

$$y' = \frac{2x+1-2(x+2)}{(2x+1)^2} = \frac{-3}{(2x+1)^2} < 0.$$

$y' < 0$ za $\forall x \in D$. Znači, funkcija je opadajuća u celom domenu i nema ekstremuma, jer y' nema nula.



9.114. $y = \frac{x}{x^2+1}$

REŠENJE:

1. Domen: kako je $x^2+1 \neq 0$ za svako realno x,

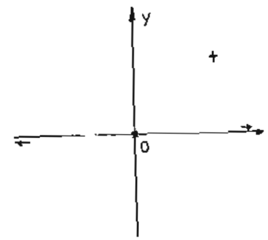
$D = (-\infty, +\infty)$.

Ispitajmo ponašanje funkcije na krajevima intervala:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0,$$

Znači, $y = 0$ jeste horizontalna asimptota.

Znači imamo na grafiku



2. Nule i znak:

$y = 0$ za $x = 0$

Kako je $x^2+1 > 0$, imaćemo

$\frac{x}{x^2+1} > 0$, za $x > 0$

$y < 0$, za $x < 0$.

3. Parnost

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x) \quad \text{- neparna.}$$

4. Monotonost i ekstremumi:

$$y' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2};$$

$$y' = 0 \quad \text{za} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

$y' < 0$ za $-x^2+1 < 0$ tj. za $x > 1$; $x < -1$; tada $y \searrow$,

$y' > 0$ za $-x^2+1 > 0$ tj. za $-1 < x < 1$; tada $y \nearrow$.

5. $$y'' = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^4} =$$

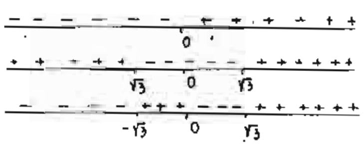
$$= \frac{(x^2+1)(-2x^3-2x+4x^3-4x)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

$f''(1) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} < 0$; za $x = 1$ $y_{max} = y(1) = \frac{1}{2}$,

$f''(-1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0$; za $x = -1$ $y_{min} = y(-1) = \frac{-1}{2}$.

$y'' = 0$ za $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$



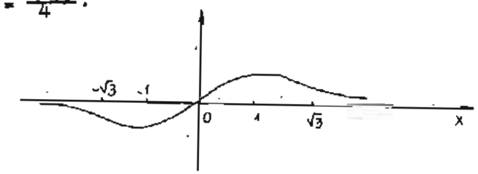
Dakle, $y'' > 0$ za $x > \sqrt{3}$ i $-\sqrt{3} < x < 0$

$y'' < 0$ za $0 < x < \sqrt{3}$, i $x < -\sqrt{3}$.

Prevojne tačke su:

$x_1 = 0, y(0) = 0, x_2 = \sqrt{3}, y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad x_3 = -\sqrt{3},$

$y(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{4}.$



9.115. $$y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-12}$$

REŠENJE:

1. Domen: $x^2-x-12 \neq 0$ za $x_{12} \neq \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$

za $x_1 \neq -3$, za $x_2 \neq 4$ tj. $D = (-\infty, -3) \cup (-3, 4) \cup (4, +\infty)$

ponašanje na krajevima intervala:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-12} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}} = 1.$$

Znači $y = 1$ jeste horizontalna asimptota

$\lim\limits_{x\to -3-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -3+} y = -\infty$. (jer je za $x < -3$ $x^2-x-12 > 0$)

$x = -3$ je vertikalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to 4-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+} y = +\infty$

$x = 4$ je vertikalna asimptota.

2. Nule i znak:

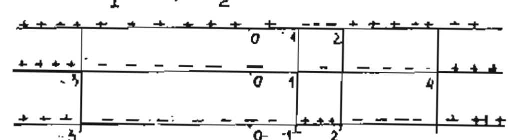
$y = 0$ za $x^2-3x+2 = 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$,

$x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$

x^2-3x+2

x^2-x-12

$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-12}$



Znači, $y > o$ za $x > 4$, $1 < x < 2$, $x < -3$,

$y < o$ za $2<x<4$, $-3 < x < 1$.

3. Parnost:

$f(-x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+x-12}$; nije ni parna ni neparna,

4.

$$y' = \frac{(2x-3)(x^2-x-12) - (2x-1)(x^2-3x+2)}{(x^2-x-12)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-28x+38}{(x^2-x-12)^2} = \frac{2(x^2-14x+19)}{(x^2-x-12)^2}.$$

$y' = o$ za $x_{1/2} = 7 \pm \sqrt{49-19} = 7 \pm \sqrt{30} \approx 7 \pm 5,5$

$x_1 \approx 1,5$;

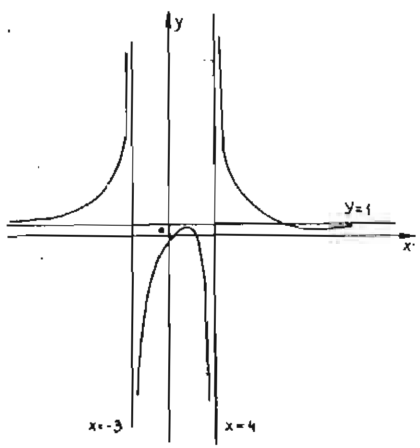
$x_2 \approx 12,5$.

$y' > o$ za $x < 1,5$ i $x > 12,5$

$y' < o$ za $1,5 < x < 12,5$

Znači y $x = 1,5$ $y_{max} = y(1,5) =$

$x = 12,5$ $y_{min} = y(12,5) =$



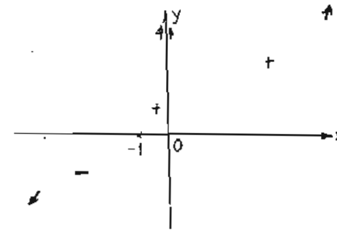
5.116. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

REŠENJE: 1. Domen: $x \neq o$, $D = (-\infty, o) \cup (o, +\infty)$.

$\lim_{x \to \pm\infty} y = \pm \infty$,

$\lim_{x \to o-} y = +\infty$, $x = o$ je znači vertikalna asimptota.

$\lim_{x \to o+} y = +\infty$



2. Nule i znak:

$$y = \frac{x^3+1}{x^2} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2}$$

$\boxed{x_1 = -1}$, $x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{2}$.

Kako je $x^2 > o$, $x^2-x+1 > o$ za $\forall x$ (jer ima komplekse korene), znak funkcije odredjuje faktor $x+1$, tj.:

$y > o$ za $x+1 > o$, tj. za $x > -1$,

$y < o$ za $x+1 < o$, tj. za $x < -1$.

3. Parnost:

$f(-x) = -x + \frac{1}{x^2}$; nije ni parna ni neparna.

4.

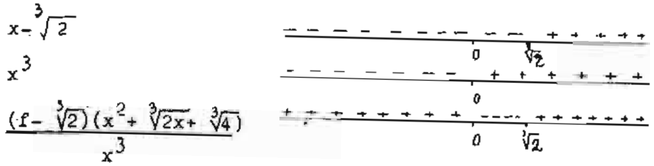
$$y' = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3-2}{x^3} = \frac{(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + x + \sqrt[3]{4})}{x^3},$$

$y' = o$ za $x = \sqrt[3]{2}$.

Ispitajmo znak od y'. Kako je $x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt[3]{4} > o$ za $\forall x$, znak odredjuju činioci $x - \sqrt[3]{2}$ i x^3:

Za $x < \sqrt[3]{2}$ $y \searrow$, a za $x > \sqrt[3]{2}$ $y \nearrow$

Dakle, za $x = \sqrt[3]{2}$ $y_{min} = f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.



Dakle, $y' > o$ za $x > \sqrt[3]{2}$ i $x < o$, tj. tada $y\nearrow$;

$y' < o$ za $o < x < \sqrt[3]{2}$, tj. tada $y\downarrow$.

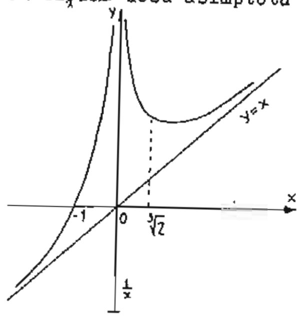
5. $y'' = \frac{6}{x^4} > o$ za $\forall x$.

6. Asimptote kose:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\infty} \left[x + \frac{1}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = o,$$

Znači, ima kosu asimptotu $y = x$.



$y = x + \frac{1}{x^2}$

9.117. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

RESENJE: 1. Domen $x \neq o$, $D = (-\infty, o) \cup (o, +\infty)$.

$\lim_{x\to\mp\infty} y = e^o = 1$; znači, $y = 1$ je horizontalna asmiptota.

$\lim_{x\to o-} y = e^{-\infty} = o$, $x = o$ je vertikalna asimptota (y-osa).

$\lim_{x\to o+} y = e^{+\infty} = +\infty$

2. Nule i znak:

Eksponencijalna funkcija nema nule i pozitivna je, tj. $y > o$ $\forall x \in D$.

3. Parnost: $e^{-\frac{1}{x}} = f(-x)$; nije ni parna ni neparna.

4. $y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < o$ za $\forall x$, tj. $y\downarrow$.

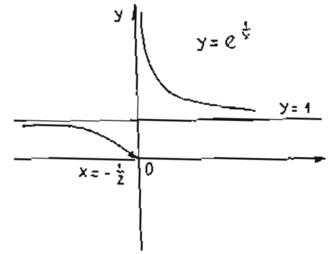
y' nema nula pa y nema ekstreme.

5. $y'' = \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} (2 + \frac{1}{x}) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \frac{2x+1}{x}$;

$y'' = o$ za $x = -\frac{1}{x}$

Dakle, prevojna tačka je

$x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = e^{-2}$



9.118. $y = \frac{e^{x+1}}{x+2}$.

RESENJE: 1. Domen: $x \neq -2$, $D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Ponašanje na krajevima intervala:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}}{x+2} = 0$, $y = o$ je horizontalna asimptota (x-osa).

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{x+2} = +\infty$,

$\lim_{x\to-2-} \frac{e^{x+1}}{x+2} = -\infty$, $x=-2$ je vertikalna asimptota.

$\lim_{x\to-2+} \frac{e^{x+1}}{x+2} = +\infty$.

2. Nule i znak:

Nule nema: $e^{x+1} > o$ za $\forall x$, pa znak od y odredjuje $x+2$

Dakle, $y > o$ za $x > -2$,

$y < o$ za $x < -2$.

3. Parnost:

$f(-x) = \frac{e^{-x+1}}{-x+2}$; nije ni parna ni neparna.

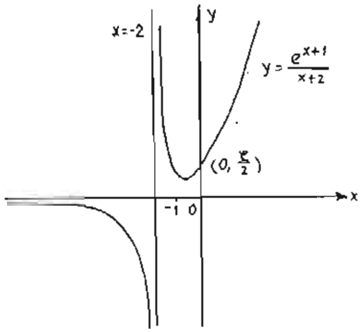
4. Ekstremi:

$$y' = \frac{e^{x+1}(x+2) - e^{x+1}}{(x+2)^2} = e^{x+1}\,\frac{x+1}{(x+2)^2},$$

$y' = o$ za $x = -1$

$y' > o$ za $x > -1$, $y\nearrow$; znači za $x = -1$

$y' < o$ za $x < -1$, $y\searrow$ $y_{min} = f(-1) = 1$.



9.119. $y = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}$

REŠENJE: 1. Domen:

$x^2-3x-4 \neq o$ za $x_{1/2} \neq \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \neq \frac{3 \pm 5}{2}$ za $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 4$.

$D = (-\infty,-1) \cup (-1,4) \cup (4,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{(x+1)(x-4)}} = e^0 = 1$; $y = 1$ je horizontalna asimptota

$\lim\limits_{x\to -1-} e^{\frac{1}{(x+1)(x-4)}} = e^{+\infty} =$, jer je $x^2-3x-4 > o$ za $x < -1$, $x > 4$

$\lim\limits_{x\to -1+} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} = e^{-\infty} = 0$, $x^2-3x-4 < o$, za $1 < x < 4$

$\lim\limits_{x\to 4-} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} = e^{-\infty} = 0$, $x = -1$ i $x = 4$ su vertikalne asimptote.

$\lim\limits_{x\to 4+} e^{\frac{1}{x^2-3x-4}} = e^{+\infty} = +\infty$

2. Nule i znak:

Nula nema i $y > o$ za $\forall x \in D$.

3. Parnost:

$f(-x) = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}$; nije ni parna ni neparna.

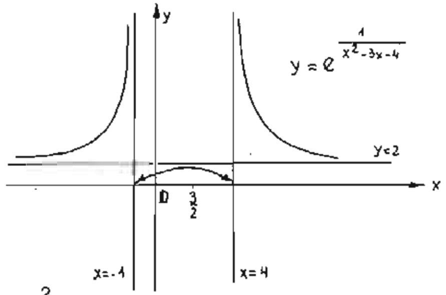
4. Ekstremi:

$$y' = \frac{-2x+3}{(x^2-3x-4)^2}\; e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}.$$

$y' = o$ za $x = \frac{3}{2}$.

$y' < o$ za $x > \frac{3}{2}$ $y\nearrow$, $y_{min} = f(\frac{3}{2})$

$y' < o$ za $x < \frac{3}{2}$ $y\searrow$.



9.120. $y = x\ln^2 x$

REŠENJE: 1. Domen: $(0, +\infty)$.

Ponašanje na krajevima intervala:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln^2 x = \infty$,

$\lim\limits_{x\to 0+} x\ln^2 x = +0$, jer x brže teži o od ln x,

2. Nule i znak:

$y = 0$ za $\ln^2 x = 0$, tj. za $x = 1$.

Zbog $x \in (0, +\infty)$ i $\ln^2 x > 0$ za $\forall x$ $y > 0$

za $\forall x \in D$.

3. Parnost:

$f(-x) = x^2\ln^2(-x)$; ni parna ni neparna.

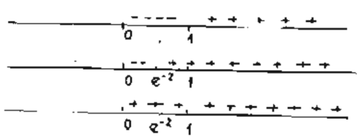
4. Ekstremi:

$y' = \ln^2 x + x.2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$.

$y' = 0$ za $\ln x = -2$, tj. za $x = e^{-2}$.

Ispitajmo znak od y':

ln x
ln x+2
ln x(ln x+2)



Znači:

$y' > 0$ za $x > 1$ i $0 < x < e^{-2}$ $y\nearrow$,

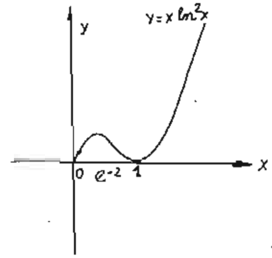
$y' < 0$ za $e^{-2} < x < 1$, $y\searrow$,

Dakle, za $x = e^{-2}$ $y_{max} = f(e^{-2}) = 4e^{-2}$.

5. Prevojne tačke:

$y'' = 2\ln x\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$,

$y'' = 0$ za $\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-2}$ je prevojna tačka.

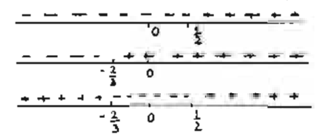


9.121. $y = \ln\frac{2x-1}{3x+2}$.

REŠENJE:

1. Domen: $\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right) > 0$

2x-1
3x+2
$\frac{2x-1}{3x+2}$



$D = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

Ponašanje na krajevima intervala

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \ln\frac{2}{3}$, $y = \ln\frac{2}{3}$ je horizontalna asimptota;

$\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}-} y = +\infty$, $x = -\frac{2}{3}$ i $x = \frac{1}{2}$ su vertikalne asimptote.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+} y = -\infty$,

2. Nule i znak:

$y = 0$ za $\frac{2x-1}{3x+2} = 1 \Rightarrow 2x-1 = 3x+2 \Rightarrow$ za $\boxed{x = -3}$

$y > 0$ za $2x-1 > 3x+2$ tj. za $x < -3$,

$y < 0$ za $x > -3$.

3. Parnost:

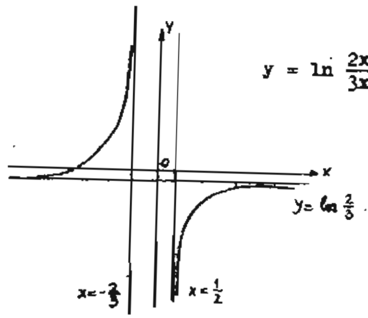
$f(-x) = \ln \frac{-2x-1}{-3x+2}$; nije ni parna ni neparna.

4. Ekstremi:

$$y' = \frac{2(3x+2)-3(2x-1)}{(3x+2)} = \frac{7}{(2x-1)(3x+2)}.$$

$y' > 0$ za $x > \frac{1}{2}$ i $x < -\frac{2}{3}$ $\qquad y\nearrow$,

$y' < 0$ za $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$ $\qquad y\searrow$.



$y = \ln \frac{2x-1}{3x+2}$

Nacrtati grafike sledećih funkcija:

9.122. $y = |x-x^2| - x$.

9.123. $y = x(x^2-1)$.

9.124. $y = \frac{x-1}{x+2}$.

9.125. $y = \frac{x-1}{x^2+1}$.

9.126. $y = \frac{5-x}{9-x^2}$.

9.127. $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.

9.128. $y = x - \frac{1}{x}$.

9.129. $y = x-2 - \frac{6}{x-1}$.

9.130. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

9.131. $y = x\, e^{-\frac{1}{x}}$

9.132. $y = (1-x^2)\, e^{-x}$

9.133. $y = x\, e^{\frac{1}{x^2}}$

9.134. $y = e^{\frac{1}{1-x}}$

9.135. $y = \ln \frac{1-x}{x+5}$

9.136. $y = \ln \frac{x-2}{x+1}$

9.137. $y = x + \ln (x^2-1)$.

9.138. $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

LOPITALOVO PRAVILO:

1. Neodredjeni izrazi oblika „$\frac{0}{0}$" i „$\frac{\infty}{\infty}$"

Ako je izraz $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ kad $x \to a$ oblika „$\frac{0}{0}$" ili „$\frac{\infty}{\infty}$",

tada je:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} .$$

2. Neodredjeni izrazi oblika „$0\cdot\infty$" i „$\infty - \infty$"

Ako je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$, onda se proizvod $f_1(x)\, f_x(x)$, tj. izraz „$0\ \infty$" piše u obliku

$\frac{f_1(x)}{\frac{1}{(f_2(x)}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ ili $\frac{f_2(x)}{\frac{1}{(f_1(x)}}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, pa se limes traži kao u 1.

U slučaju „$\infty - \infty$" transformišemo na oblik:

$$f_1(x)-f_2(x) = \frac{\frac{1}{f_2(x)} - f_1(x)}{\frac{1}{f_1(x)f_2(x)}} .$$

Naći sledeće limese:

9.139. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^5+4x^2+5}$.

REŠENJE: Ovde je neodredjen izraz oblika „$\frac{\infty}{\infty}$". Primenićemo Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5+4x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5x^4+8x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{20x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{60\,x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{120\,x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{120} = \infty .$$

9.140. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $(a>0)$.

REŠENJE: Ovo je neodredjen izraz oblika „$\frac{0}{0}$". Primenimo Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{a^x\ln a - ax^{a-1}}{1} = a^a\ln a - a\,a^{a-1} = a^a\ln a - a^a =$$

$$= a^a(\ln a-1) .$$

9.141. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.

REŠENJE: Ovo je neodredjen izraz oblika „$0\cdot(-\infty)$". Zato ćemo, koristeći jednakost:

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

izvršiti transformaciju:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} ,$$

i dobiti neodredjen izraz oblika „$\frac{\infty}{\infty}$" $\left(\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)$,

pa je dalje $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{x^2}}$ ... $= \lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0$.

9.142. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

REŠENJE: Ovo je neodredjen izraz oblika „$\infty - \infty$". Dovešćemo izraz na zajednički imenilac i dobiti oblik „$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{1}{2} .$$

9.143. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

REŠENJE: Logaritmovanjem izraza dobijamo oblik „$\frac{0}{0}$". To je opšti način rešavanja neodredjenog izraza "1^∞"

$$\ln y = \frac{\ln x}{1-x} ,$$

$$\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$$

Dakle, $y \to e^{-1}$, kod $x\to 1$, tj. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

9.144. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$, $\left(\dfrac{1}{6}\right)$.

9.145. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$, $\left(\dfrac{3}{e}\right)$.

9.146. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$, $n\in N$, (0).

9.147. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^{x/2}}{x+e^x}$, (0).

9.148. $\lim\limits_{x\to 0} (x^2\ln x)$, (0).

9.149. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$, (0).

9.150. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$, (1).

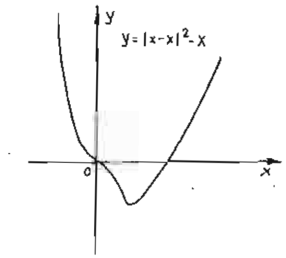
9.151. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

9.152. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^{p}}-\dfrac{q}{1-x^{q}}\right)$ $\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

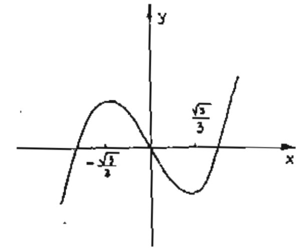
9.153. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg}\pi x$ $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)$

9.154. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ (1)

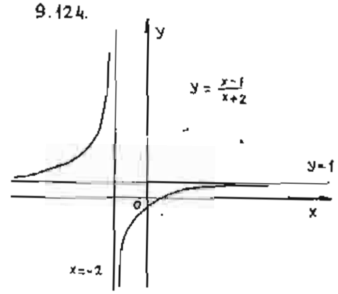
9.122.



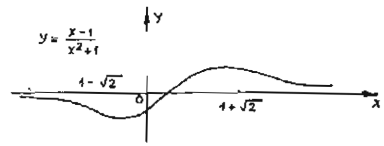
9.123.



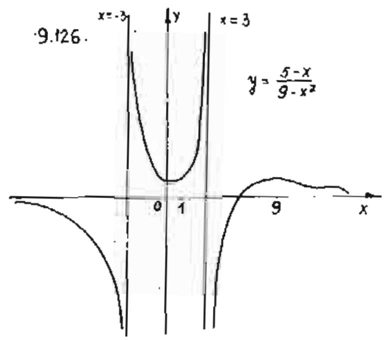
9.124.



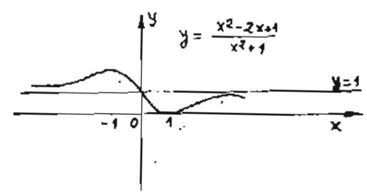
9.125



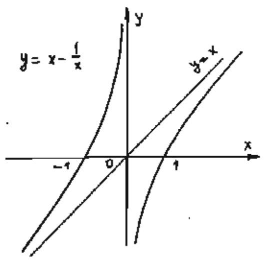
9.126.



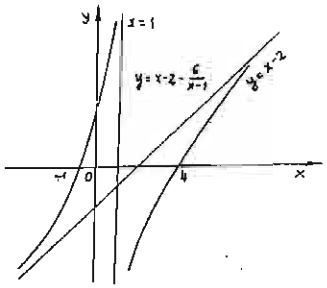
9.127.



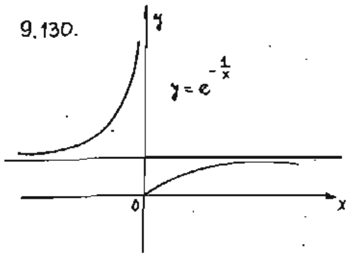
9.128



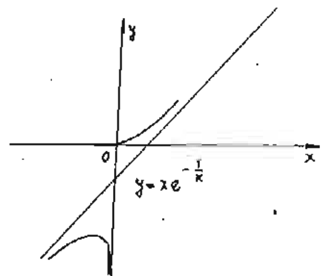
9.129.



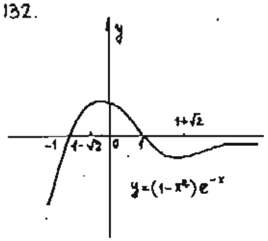
9.130.



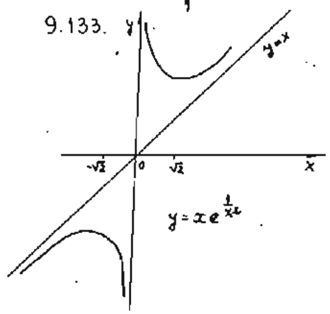
9.131.



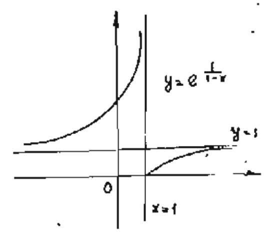
9.132.



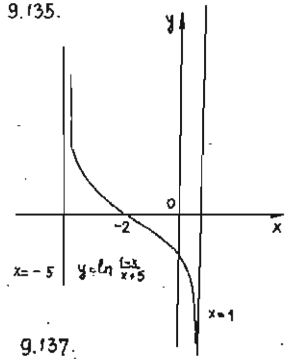
9.133.



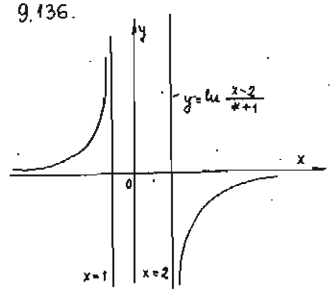
9.134.



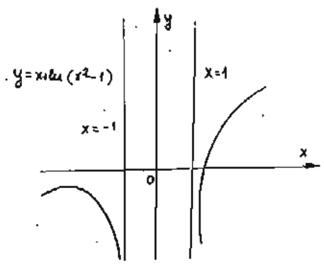
9.135.



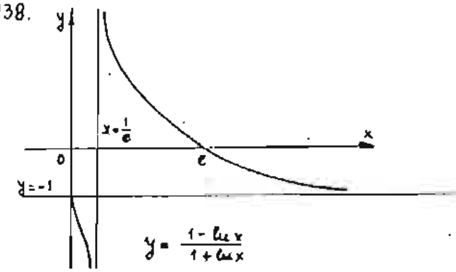
9.136.



9.137.



9.138.



LITERATURA

1. M.P.Ušćumlić i P.M.Miličić:
Zbirka zadataka iz više matematike I, Beograd,1967.

2. G.N.Berman:
Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza,
Moskva, 1967.

3. Danko Popov:
Vystaja matematika v upražneniah i zadačah.

4. Kaplan: Praktičeskie zanatija po vystej matematike.

5. Demidovič: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu.

Vladimir SAVIĆ

X. NEODREDJENI INTEGRALI

1. Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija i $F'(x) = f(x)$, onda je

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

gde je C-proizvoljna konstanta.

2. Neodredjeni integral ima sledeće osobine:

a) $d\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$; b) $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$;

c) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ $(A = \text{const})$;

d) $\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

3. Tablica osnovnih integrala

I. $\int dx = x + C$ II. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + (C)$ $(\alpha \neq -1)$

III. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ IV. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$ $(a > 0)$

V. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$ VI. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

VII. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ VIII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

IX. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ X. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

XI. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + C \\ \operatorname{arc\,ctg} x + C \end{cases}$ XII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

XIII. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

4. Osnovne metode integracije su:

a. Metoda dekompozicije. Ako je

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, onda je

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

b. Metoda smene promenljivih. Ako se stavi $x = \varphi(t)$, gde su $\varphi(t)$ i $\varphi'(t)$ neprekidne funkcije, dobija se

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

c. Metoda parcijalne integracije. Ako su u i v diferencijabilne funkcije od x, onda je

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Napomena: Rešenja zadataka stavljena su u srednje zagrade uz sam zadatak.
Jednostavnosti radi, u rešenjima je izostavljana aditivna konstanta.

Koristeći osnovna svojstva neodredjenih integrala i

tablicu osnovnih integrala, izračunati sledeće integrale:

Primer 1. $J = \int (8x^3 - 3\sin x - a^x + \frac{4}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\,dx$

$$J = \int (8x^3 - 3\sin x - a^x + \frac{4}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\,dx =$$

$$= 8\int x^3 dx - 3\int \sin x\,dx - \int a^x dx + 4\int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 8 \cdot \frac{x^4}{4} - 3(-\cos x) - \frac{a^x}{\ln a} - 4\operatorname{ctg} x + \arcsin x + C =$$

$$= 2x^4 + 3\cos x - \frac{a^x}{\ln a} - 4\operatorname{ctg} x + \arcsin x + C.$$

Primer 2. $J = \int \frac{1 + \sqrt{x}\cos^2 x}{1 + \cos 2x}\,dx$

$$J = \int \frac{1 + \sqrt{x}\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1 + \sqrt{x}\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Primer 3. $J = \int a^x e^x dx =$

$$J = \int e^{x\ln a} \cdot e^x dx = \int e^{x(\ln a + 1)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\ln a+1} \int e^{x(\ln a+1)} d\left[x(\ln a+1)\right] =$$

$$= \frac{e^{x(\ln a+1)}}{\ln a + 1} + C = \frac{a^x e^x}{\ln a e} + C.$$

Primer 4. $\quad J = \int \frac{x^2 + 2}{x^4 + x^2} dx$

$$J = \int \frac{x^2+2 + x^2 - x^2}{x^4 + x^2} dx = \int \frac{2(x^2 + 1) - x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx =$$

$$= \int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = - \frac{2}{x} - \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Primer 5. $\quad J = \int \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^4 - 1}} dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\right) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{(x^2)^2-1}} =$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + \sqrt{x^4 - 1} \right| + C.$$

10.1. $\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)\, dx.$

$$\left[\frac{x^6}{6} - \frac{3x^5}{5} - \frac{7x^2}{2} + 5x \right].$$

10.2. $\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx.$

$$\left[- \frac{4}{\sqrt{x}} + 18 \sqrt[6]{x} + 5 \ln |x| \right].$$

10.3. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$, $\quad \left[- \frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tg} x \right].$

10.4. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx$, $\quad \left[- \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) \right].$

10.5. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx$, $\quad \left[\frac{8}{15} \sqrt[8]{x^{15}} \right].$

10.6. $\int (3-x^2)^3 dx$, $\quad \left[27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \right].$

10.7. $\int x^2(5-x)^4 dx$, $\quad \left[\frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 \right].$

10.8. $\int (1+x)^6 dx$, $\quad \left[\frac{1}{7}(1+x)^7 \right].$

10.9. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x} dx$, $\quad \left[x + \ln x \right].$

10.10. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$, $\quad \left[\ln x - \frac{1}{4x^4} \right].$

10.11. $\int \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} dx$, $\quad \left[\frac{x^2}{2} - 2 \operatorname{arc\,tg} x \right].$

10.12. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$, $\quad \left[x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right].$

10.13. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$, $\quad \left[\arcsin x + \ln(x + \sqrt[2]{x^2+1}) \right].$

10.14. $\int (3^x - 4^x)\, dx$, $\quad \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{4^x}{\ln 4} \right].$

10.15. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$, $\quad \left[- \frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5 \ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x \right].$

10.16. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$, $\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x\right]$.

10.17. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$, $\left[(\cos x+\sin x)\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)\right]$.

10.18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$, $\left[\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x\right]$.

10.19. $\int (2x-3\sin x+\cos x)dx$, $\left[x^2+3\cos x+\sin x\right]$.

10.20. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$, $\left[-x+\operatorname{tg} x\right]$.

10.21. Ako je $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, dokazati da je:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad (a\neq 0).$$

IZRAČUNATI SLEDEĆE INTEGRALE

Primer 1. $J = \int\frac{dx}{\sqrt{7x+2}}$

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{7x+2}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}(7x+2)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{7}\sqrt{7x+2}+C.$$

Primer 2. $J = \int\frac{dx}{2x^2-3}$.

$$J=\int\frac{dx}{2x^2-3} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2-1} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\ln\left|\frac{x\sqrt{\frac{2}{3}}+1}{x\sqrt{\frac{2}{3}}-1}\right| +$$

$$+C = -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3}}{x\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right|+C.$$

Primer 3. $J = \int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\arcsin\frac{3x}{2}+C =$$

$$=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$$

Primer 4. $J = \int\frac{dx}{1+\cos 4x}$

$$J=\int\frac{dx}{2\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg} 2x + C.$$

Primer 5. $J = \int(3x+7)^6\,dx$

$$J=\int(3x+7)^6 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}(3x+7)^7+C =$$

$$=\frac{1}{21}(3x+7)^7+C.$$

10.22. $\int(5-2x)^9dx$, $\left[-\frac{1}{20}(5-2x)^{10}\right]$.

10.23. $\int\sqrt{2x-3}\,dx$, $\left[\frac{1}{3}(2x-3)^{3/2}\right]$.

10.24. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$, $\left[-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}\right]$.

10.25. $\int\frac{x}{\sqrt{2x+5}}\,dx$, $\left[\frac{1}{6}\sqrt{(2x+5)^3}-\frac{5}{2}\sqrt{2x+5}\right]$.

10.26. $\int\frac{dx}{x^2+9}$, $\left[\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right]$.

10.27. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$, $\left[\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{2} + x\sqrt{3}} \right|\right]$.

10.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$, $\left[\ln |x + \sqrt{x^2 - 4}|\right]$.

10.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}$, $\left[\ln |x + \sqrt{x^2 + 7}|\right]$.

10.30. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$, $\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right]$.

10.31. $\int e^{-\frac{5}{2}x}\, dx$, $\left[-\frac{2}{5} e^{-\frac{5}{2}x}\right]$.

10.32. $\int \sin(2x+3)\, dx$, $\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+3)\right]$.

10.33. $\int \cos(1-3x)\, dx$, $\left[-\frac{1}{3}\sin(1-3x)\right]$.

10.34. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$, $\left[\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+2)\right]$.

10.35. $\int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$, $\left[-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

10.36. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$, $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]$.

10.37. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$, $\left[-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right]$.

10.38. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$, $\left[-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right]$.

Transformišući prethodno podintegralnu funkciju, izračunati sledeće integrale:

Primer 1 $\quad J = \int \frac{2x - 3}{x^2-3x + 7}\, dx$

$$J = \int \frac{2x - 3}{x^2-3x + 7}\, dx = \int \frac{d(x^2-3x+7)}{x^2-3x+7} =$$

$$= \ln |x^2 - 3x + 7| + C.$$

Primer 2. $\quad J = \int \frac{x^4+x^3+x+1}{x^5+x}\, dx$

$$J = \int \frac{x^4+x^3+x+1}{x^5+x}dx = \int \frac{(x^4+1)+x(x^2+1)}{x(x^4+1)}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x^2+1}{x^4+1}\right)dx = \ln|x| + \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx =$$

$$= \ln|x| + \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\, dx = \ln|x| + \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x^2-2+\frac{1}{x^2})+2} =$$

$$= \ln|x| + \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2+2} = \ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \ln|x| + \sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + C.$$

Primer 3. $\quad J = \int \frac{x\, e^{\arcsin x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx.$

$$J = \int \frac{x\, e^{\arcsin x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{1}{2}\int e^{\arcsin x^2}\, d(\arcsin x^2) =$$

$= \frac{1}{2} e^{\arcsin x^2} + C.$

10.39. $\int x(x^2-13)^{23}dx$, $\left[\frac{1}{48}(x^2-13)^{24}\right]$.

10.40. $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$, $\left[-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|\right]$.

10.41. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$, $\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]$.

10.42. $\int (3x^2-2x+1)(x^3-x^2+x-9)dx$, $\left[\frac{1}{2}(x^3-x^2+x-9)^2\right]$.

10.43. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+6x-5}$, $\left[\frac{1}{2}\ln|x^2+6x-5|\right]$.

10.44. $\int \frac{x\,dx}{5+x^4}$, $\left[\frac{\sqrt{5}}{10}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x^2}{\sqrt{5}}\right]$.

10.45. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$, $\left[\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|\right]$.

10.46. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right]$.

10.47. $\int x e^{-x^2}dx$, $\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]$.

10.48. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+2}$, $\left[\ln(e^x+2)\right]$.

10.49. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$, $\left[\mathrm{arctg}\,e^x\right]$.

10.50. $\int \frac{dx}{(e^{-x}+1)\sqrt{e^x}}$, $\left[2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{e^x}\right]$,

10.51. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$, $\left[-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})\right]$.

10.52. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$, $\left[-e^{\frac{1}{x}}\right]$.

10.53. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$, $\left[\cos\frac{1}{x}\right]$.

10.54. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$, $\left[\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]$.

10.55. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$, $\left[\ln|\ln(\ln x)|\right]$.

10.56. $\int \sin^5 x\cos x\,dx$, $\left[\frac{1}{6}\sin^6 x\right]$.

10.57. $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$, $\left[\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{1}{6}\sin^6 x\right]$.

10.58. $\int \mathrm{tg}\,x\,dx$, $\left[-\ln|\cos x|\right]$.

10.59. $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx$, $\left[\ln|\sin x|\right]$.

10.60. $\int \cos^5 x\sin^4 x\,dx$, $\left[\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x\right]$.

10.61. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$, $\left[\ln|\sin x|-\frac{\sin^2 x}{2}\right]$.

10.62. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+3}dx$, $\left[\ln(\sin^2 x+3)\right]$.

1o.63. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+5\cos^2 x}$, $\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right]$.

1o.64. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$, $\left[\ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|\right]$.

1o.65. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$, $\left[\ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

1o.66. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$, $\left[-\operatorname{arctg}(\cos 2x)\right]$.

1o.67. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$, $\left[\frac{2}{3} \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{tg} x}\right]$.

1o.68. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$, $\left[-\frac{4}{3}(\operatorname{ctg} c)^{\frac{3}{4}}\right]$.

1o.69. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$, $\left[\ln |\arcsin x|\right]$.

1o.7o. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$, $\left[(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2\right]$.

Pomoću dekompozicije podintegralne funkcije izračunati sledeće integrale:

Primer 1. $\displaystyle J = \int \frac{x^4}{x-3}\,dx$

$$J = \int \frac{x^4}{x-3}\,dx = \int \frac{(x^4-81)+81}{x-3}\,dx =$$

$$= \int \left(x^3+3x^2+9x+27+\frac{81}{x-3}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{9}{2}x^2+27x+81\ln|x-3|+C.$$

Primer 2. $\displaystyle J = \int \cos^2 2x\,dx$

$$J = \int \cos^2 2x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

Primer 3. $\displaystyle J = \int \sin x \cos 2x\,dx$

$$J = \int \sin x \cos 2x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 3x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin x\,dx = -\frac{1}{6}\cos 3x +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Primer 4. $\displaystyle J = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$

$$J = \int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (\operatorname{tg}^2 x+1)^2\,d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int (\operatorname{tg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 1)\,d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$$

1o.71. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-3}\,dx$, $\left[9x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 27\ln|x+3|\right]$.

1o.72. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$, $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|\right]$.

1o.73. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)(x+3)}\,dx$, $\left[\ln \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}\right]$.

1o.74. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$, $\left[\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}\right]$.

1o.75. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+3x^2+2}\,dx$, $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}\right]$.

10.76. $\int \frac{dx}{1+e^x}$, $\left[x-\ln (1+e^x) \right]$.

10.77. $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}$, $\left[x + 2 \text{ arctg } e^x \right]$.

10.78. $\int \sin^2 x \, dx$, $\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]$.

10.79. $\int \cos^2 x \, dx$, $\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right]$.

10.80. $\int \sin^4 x \, dx$, $\left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right]$.

10.81. $\int \cos^4 x \, dx$, $\left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right]$.

10.82. $\int \cos x \sin 3x \, dx$, $\left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x \right]$.

10.83. $\int \cos 3x \cos 4x \, dx$, $\left[\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{14} \sin 7x \right]$.

10.84. $\int \sin 3x \sin 5x \, dx$, $\left[\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x \right]$.

10.85. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$, $\left[-\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x \right]$.

10.86 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$, $\left[-\frac{1}{\sin x} + \ln \left| \text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right]$.

10.87. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$, $\left[\text{tg } x + \frac{1}{3} \text{tg}^3 x \right]$.

Primenom metode parcijalne integracije izračunati sledeće integrale:

Primer 1. $J = \int x^2 \ln x \, dx$

$u = \ln x, \; du = \frac{dx}{x}, \; dv = x^2 dx, \; v = \frac{x^3}{x}$

$$J = \int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C,$$

Primer 2. $J = \int \text{arctg } x \, dx$

$u = \text{arctg } x, \; du = \frac{dx}{1+x^2}, \; dv = dx, \; v = x,$

$$J = \int \text{arctg } x \, dx = x \text{ arctg } x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \text{ arc tg } x -$$
$$- \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x \text{ arctg } x - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + C.$$

Primer 3. $J = \int \sqrt{3x^2 + 2} \, dx$

$u = \sqrt{3x^2+2}, \; du = \frac{3x \, dx}{\sqrt{3x^2+2}}, \; dv = dx, \; v = x,$

$$J = \int \sqrt{3x^2+2} \, dx = x \sqrt{3x^2 + 2} - \int \frac{3x^2 \, dx}{\sqrt{3x^2+2}} =$$
$$= x \sqrt{3x^2+2} - \int \frac{(3x^2+2)-2}{\sqrt{3x^2+2}} dx = x \sqrt{3x^2+2} - \int \sqrt{3x^2+2} +$$
$$+ 2 \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}} = \frac{x}{2} \sqrt{3x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 + 1}} =$$
$$= \frac{x}{2} \sqrt{3x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \ln \left| x \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2} x^2 + 1} \right| + C_1 =$$
$$= \frac{x}{2} \sqrt{3x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x \sqrt{3} + \sqrt{3x^2 + 2} \right| + C.$$

Primer 4. $J = \int x^2 \cos x \, dx$

$u = x^2, \; du = 2x \, dx, \; dv = \cos x \, dx, \; v = + \sin x$

$J = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$

$u = x, \; du = dx, \; dv = \sin x \, dx, \; v = - \cos x$

$J = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx =$

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$

Primer 5. $J = \int e^{x} \cos x \, dx$

$u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$, $dv = e^{x} dx$, $v = e^{x}$

$$J = e^{x} \cos x + \int e^{x} \sin x \, dx$$

$u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$, $dv = e^{x} dx$, $v = e^{x}$

$$J = e^{x} \cos x + e^{x} \sin x - \int e^{x} \cos x \, dx =$$

$$= \frac{e^{x}}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

10.88. $\int \ln x \, dx$, $\left[x (\ln x - 1) \right]$.

10.89. $\int x \ln x \, dx$, $\left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]$.

10.90. $\int x \ln^2 x$, $\left[\frac{1}{2} x^2 (\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) \right]$.

10.91. $\int x^{n} \ln x \, dx, (n \neq -1)$, $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) \right]$.

10.92. $\int x^3 (\ln x)^2 dx$, $\left[\frac{x^4}{4} (\ln^2 x - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8}) \right]$.

10.93. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} \, dx$, $\left[-\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} \ln |1-x^2| + \frac{x^3}{3} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right]$.

10.94. $\int x^3 e^{-x^2} dx$, $\left[-\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2} \right]$.

10.95. $\int e^{\sqrt{x}} dx$, $\left[2 (\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}} \right]$.

10.96. $\int x e^{2x} dx$, $\left[e^{2x} \frac{2x - 1}{4} \right]$.

10.97. $\int x \sin x \, dx$, $\left[\sin x - x \cos x \right]$.

10.98. $\int x^2 \sin 2x \, dx$, $\left[-\frac{2x^2 - 1}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x \right]$.

10.99. $\int e^{-x} \cos x \, dx$, $\left[\frac{\sin x - \cos x}{2} e^{-x} \right]$.

10.100. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$, $\left[\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} \right]$.

10.101. $\int x^4 \cos x \, dx$, $\left[(x^4 - 12x^2 + 24) \sin x + (4x^3 - 24x) \cos x \right]$.

10.102. $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$, $\left[x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| \right]$.

10.103. $\int e^{ax} \sin^2 x \, dx$, $\left[\frac{e^{ax}}{a(a^2+4)} (a^2 \sin^2 x - 2a \sin x \cos x + 2) \right]$.

10.104. $\int (\arcsin^2 x) dx$, $\left[x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x \right]$.

10.105. $\int x^2 \arccos x \, dx$, $\left[-\frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{3} \arccos x \right]$.

10.106. $\int \frac{x \, e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$, $\left[\frac{(x-1) \, e^{\operatorname{arctg} x}}{2 \sqrt{1+x^2}} \right]$.

10.107. $\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx$, $\left[\frac{x}{8} (2x^2 + a^2) \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| \right]$.

10.108. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ $(1 < n \in N)$,

$$\left[J_n = \frac{x}{(2n-2) a^2 (x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{(2n-2) a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \right].$$

10.109. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}} dx$, $\left[-\frac{x^2}{4} \sqrt{1-x^4} + \frac{1}{4} \arcsin x^2 \right]$.

10.110. $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$, $\left[-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right]$.

10.111. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$, $\left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | \right]$.

Dovodjenjem kvadratnog trinoma na kanonični oblik izračunati sledeće integrale:

Primer 1. $J = \int \frac{dx}{3x^2+2x+1}$

$$J=\int\frac{dx}{3x^2+2x+1} = \frac13\int\frac{dx}{x^2+\frac23x+\frac13} = \frac13\int\frac{dx}{(x^2+\frac23x+\frac19)+\frac13-\frac19} =$$

$$=\frac13\int\frac{dx}{(x+\frac13)^2+\frac29} = \frac13\cdot\frac{1}{\frac29}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+\frac13}{\frac{\sqrt2}{3}}\right)^2+1} =$$

$$=\frac{1}{\frac23}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\frac{\sqrt2}{3}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac13}{\frac{\sqrt2}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt2}+C.$$

Primer 2. $J=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+1}}$

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-4x+4)+4}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x-2}{\sqrt5})^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt5}}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt5}+C=\arcsin\frac{x-2}{\sqrt5}+C.$$

10.112. $\int\frac{dx}{x^2+3x}$, $\left[\frac13\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|\right]$.

10.113. $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$, $\left[\frac{2\sqrt3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}\right]$.

10.114. $\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}$, $\left[\frac14\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|\right]$.

10.115. $\int\frac{dx}{3+x-x^2}$, $\left[\frac{\sqrt{13}}{13}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{13}-1}{2x+\sqrt{13}+1}\right|\right]$.

10.116. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}}$, $\left[\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|x+\frac34+\sqrt{x^2+\frac32x}\right|\right]$.

10.117. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$, $\left[\arcsin\frac{x-2}{2}\right]$.

10.118. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$, $\left[\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}\right|\right]$.

10.119. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$, $\left[\frac12\ln\left|x+\frac12+\sqrt{x^2+x-\frac34}\right|\right]$.

10.120. $\int\frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$, $\left[-2\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{4+2x-x^2}}{x}\right]$.

10.121. $\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}$, $\left[-\sqrt2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-2x^2+5x-2}{2(x-2)}}\right]$.

10.122. $\int\sqrt{4x+x^2}\,dx$, $\left[\frac{2+x}{2}\sqrt{4x+x^2}-2\ln\left|x+2+\sqrt{4x+x^2}\right|\right]$.

10.123. $\int\sqrt{2+x+x^2}\,dx$, $\left[\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac72\ln\left|x+\frac12+\sqrt{2+x+x^2}\right|\right]$.

10.124. $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx$, $\left[\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-1}+\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|\right]$.

10.125. $\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx$, $\left[\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac98\arcsin\frac{2x-1}{3}\right]$.

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA

Funkcija $f(x)$ naziva se racionalno razlomljena, ako ima oblik:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi sa realnim koeficijentima.

Razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ zove se prav ako je stepen broioca manji od stepena imenioca.

Svaka prava racionalno razlomljena funkcija može da se predstavi u obliku zbira konačnog broja prostih razlomaka sledećih tipova:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n} \qquad (1 < n \in N)$$

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \qquad (1 < n \in N)$$

gde je:

$\frac{p^2}{4} - q < 0$, to jest koreni imenioca su imaginarni.

Prema prethodnom, za integraciju pravih razlomljeno racionalnih funkcija dovoljno je znati:

1. integrirati proste razlomke,
2. razložiti pravu racionalno razlomljenu funkciju na proste razlomke,

Pomenuto razlaganje obično se vrši metodom neodredjenih koeficijenata.

Integracija prostih razlomaka vrši se na sledeći način:

1. $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2. $$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C,$$

gde je $1 < n \in N$.

3. Korišćenjem smene $x + \frac{p}{2} = t\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, može se pisati sledeće:

$$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} =$$

$$= (t^2+1)\left(q - \frac{p^2}{4}\right), \text{ i } \quad dx = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,dt, \text{ odakle je}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{At+B}{t^2+1}\,dt = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + B\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+1) + B\,\mathrm{arctg} + C,$$

gde se još samo treba vratiti na staru promenljivu x. A i B su neki brojevi.

4. Korišćenjem smene $x + \frac{p}{2} = t\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, i formule:

$$(1) \quad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$1 < n \in N$, koja predstavlja rešenje zadatka 1o8. može se izračunati integralom

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx,$$

jer je:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{At+B}{(t^2+1)^n}\,dt = A\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^n} + B\int \frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

gde su A i B neki brojevi.

Prvi integral se izračunava ovako:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^n} = \frac{1}{2(1-n)(t^2+1)^{n-1}} + C,$$

a drugi pomoću formule (1).

Primer 1. $\mathcal{J} = \int \frac{7x^4+2x^3+3x^2+5x+3}{x^3+1}\,dx$

Podintegralne funkcije se mogu predstaviti u obliku zbira:

$$7x+2+\frac{3x^2-2x+1}{x^3+1}, \text{ ili}$$

$$7x+2+\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}$$

gde je $A = 2$, $M = 1$, $N = -1$. Zato je:

$$\mathcal{J} = \int (7x+2)dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx.$$

Poslednji integral, posle smene $x - \frac{1}{2} = \frac{t\sqrt{3}}{2}$, postaje:

$$\int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{t\,dt}{t^2+1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{3}\int d(\text{arctg } t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg } t + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \text{ gde je}$$

$$C = C_1 - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}.$$

Dakle je:

$$\mathcal{J} = \frac{7x^2}{2} + 2x + 2\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Primer 2. $\mathcal{J} = \int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx.$

Podintegralna funkcija je prav razlomak i može se predstaviti u obliku:

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

pri čemu se, recimo metodom neodredjenih koeficijenata, dobija

$A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{2}$, $D = -2$, $E = 1$. Zato je:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} +$$

$$+ \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\text{arctg } x + \frac{1}{x^2+1} +$$

$$+ \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + C = \left\{\begin{array}{l}\text{primenjujući formulu (1), stavljajući} \\ \text{u njoj } n = 2,\ a^2 = 1, \text{ dobija se}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\text{arctg } x + \frac{1}{x^2+1} +$$

$$+ \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\text{arctg } x + C = \frac{x+2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln|x+1| -$$

$$- \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + 2\,\text{arctg } x + C.$$

Primer 3. $\mathcal{J} = \int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$

Podintegralna funkcija je prav razlomak i može se napisati u obliku:

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3},$$

pri čemu se, recimo metodom neodredjenih koeficijenata, dobija

$A = 2$, $B = -2$, $C = -2$, $D = 1$, tako da je

$$\mathcal{J} = 2\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x+1)^3} =$$

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(1+x)^2} + C =$$

$$= \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

10.126. $\displaystyle\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx$,

$\left[5x+2\ \ln|x|+3\ \ln|x-2|+4\ \ln|x+2|\right]$.

10.127. $\displaystyle\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x-6x}\,dx$,

$\left[\frac{1}{6}\ \ln|x|+\frac{1}{2}\ \ln|x-2|+\frac{1}{3}\ \ln\ |x+3|\right]$.

10.128. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$,

$\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ \ln|x|+5\ \ln|x-2|-3\ \ln|x+2|\right]$.

10.129. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$, $\quad\left[-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x+4}+2\ \ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|\right]$.

10.130. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$, $\quad\left[-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+3\ \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right]$.

10.131. $\displaystyle\int \frac{3x^3+5x^2-25x-1}{(x+2)(x-1)^2}\,dx$,

$\left[3x+\frac{6}{x-1}+5\ \ln\ |x+2|\right]$.

10.132. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$, $\quad\left[-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ \ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\ x\right]$.

10.133. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}\,dx$, $\quad\left[2\ \ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\ \operatorname{arctg}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$.

10.134. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$,

$\left[\frac{1}{9}\ \ln(x^2+2)-\frac{1}{9\sqrt{2}}\ \operatorname{arctg}\ \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{9}\ \ln\ |x-1|\right]$.

10.135. $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}\,dx$,

$\left[-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\ \ln\ |x^2-4x+13|+\frac{4}{3}\ \operatorname{arctg}\ \frac{x-2}{3}\right]$.

10.136. $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$,

$\left[\frac{1}{x-1}+2\ \ln\ |x-1|+\frac{2x+1}{x^2+1}-\ln\ (x^2+1)+\operatorname{arctg}\ x\right]$.

10.137. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$, $\quad\left[\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}\ (x+1)\right]$.

INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA

1. Integrali oblika:

a. $\int R(x,x^{p_1},\ x^{p_2},\dots,x^{p_n})\,dx$,

b. $\int R\left[x,\ (ax+b)^{p_1},\ (ax+b)^{p_2},\dots,\ (ax+b)^{p_n}\right]dx$,

c. $\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2},\dots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right]dx$,

gde je R racionalna funkcija od naznačenih izraza, a p_i ($i = 1,2,\dots,n$) su racionalni brojevi, svode se redom smenama:

$x = t^m$, $ax + b = t^m$, $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^m$

na integraciju racionalnih funkcija. Pri tome je m zajednički sadržalac imenilaca razlomaka p_i ($i = 1,2,\dots,n$).

2. Integrali oblika:

a. $\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,dx$,

b. $\int R(x,\ \sqrt{x^2+a^2})\,dx$,

c. $\int R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,dx$,

gde je R racionalna funkcija od naznačenih izraza, svode se redom smenama:

$x = a \sin t$ (ili $x = a \cos t$)

$x = a \operatorname{tg} t$ (ili $x = a \operatorname{ctg} t$)

$x = \dfrac{a}{\cos t}$ (ili $x = \dfrac{a}{\sin t}$)

na integraciju racionalnih funkcija.

3. Integral $\displaystyle\int \frac{Mx + N}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ izračunava se smenom

$$x - \alpha = \frac{1}{t}.$$

4. Integral $\displaystyle\int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1}+\dots+a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ može se izračunati ako se napiše u obliku:

$$\int \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = (A_0x^{n-1}+A_1x^{n-2}+\dots+A_n)\sqrt{ax^2+bx+c} + A_{n+1}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Koeficijenti A_i ($i = 0,1,2,\dots,n+1$) izračunavaju se diferenciranjem poslednje jednakosti, oslobadjanjem od imenioca i uporedjivanjem koeficijenata na levoj i desnoj strani uz iste stepene od x.

5. Integral binomnog diferencijala

$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ može se izraziti u konačnom obliku u sledeća tri slučaja (m, n i p su racionalni brojevi):

a. Kada je p ceo pozitivan broj, primenom Njutnove binomne formule i neposrednim integriranjem. Kada je p ceo negativan broj, smenom $x = t^s$, gde je s zajednički sadržalac imenilaca razlomaka m i n, dati integral svodi se na integraciju racionalne funkcije.

b. Kada je $\frac{m+1}{n}$ ceo broj, smenom $a+bx^n = t^s$, gde je s imenilac razlomka p.

c. Kada je $\frac{m+1}{n} + p$ ceo broj, smenom $ax^{-n}+b = t^s$, gde je s imenilac razlomka p

Primer 1. $\displaystyle J = \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx.$

Ovde funkcija R ima oblik:

$R(x, x^{1/2}, x^{2/3})$. Smena je $x = t^6$, te je:

$$J = \int \frac{t^3}{t^6-t^4}6t^5dt = 6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt = 6\int\frac{(t^4-1)+1}{t^2-1}dt =$$

$$= 6\int(t^2+1)dt + 6\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)} = 2t^3+6t+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| +$$

$$+ C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C.$$

Primer 2. $\displaystyle J = \int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}.$

Ovde je funkcija R oblika $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$. Smena je

$x = \dfrac{1}{\cos t}$, $dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$, te je:

$$J = \int\frac{\cos t\,dt}{1+2\cos^2 t} = \int\frac{\cos t\,dt}{3-2\sin^2 t} = \int\frac{d(\sin t)}{3-2\sin^2 t} =$$

$$= \int\frac{du}{3-2u^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}u\right)}{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}u\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{2}{3}}u}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}u}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+u}{\sqrt{\frac{3}{2}}-u}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}\right| + C.$$

Primer 3. $\quad J = \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

Posle smene $x-1 = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$, integral J postaje

$$J = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Ako se jednakost

$$\int \frac{-t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = (At+B)\sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

diferencira, pomnoži sa $\sqrt{5t^2+5t+1}$ i izjednače koeficijenti uz jednake stepene od t dobija se $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{3}{20}$, $\lambda = -\frac{11}{40}$.

Dovodjenjem kvadratnog trinoma $5t^2+5t+1$ na kanonički oblik, dobija se, posle kratkog računa:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|.$$

Najzad, posle vraćanja na promenljivu x, dobija se

$$J = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|.$$

Primer 4. $\quad J = \int x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$.

Ovde je $m = 3$, $n = 2$, $p = -\frac{3}{2}$. Kako je $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$, to je $1 - x^2 = t^2$, $-x\,dx = t\,dt$

$$J = \int x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \int x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,x\,dx =$$

$$= -\int (1-t^2)(t^2)^{-\frac{3}{2}}\,t\,dt = \int \left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{t} + t + C = \frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Primer 5. $\quad J = \int x\sqrt{1+x^4}\,dx$

Ovde je $m = 1$, $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ a $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, te je $x^{-4} + 1 = t^2$

$x = (t^2-1)^{-\frac{1}{4}}$, $\quad \sqrt{1+x^4} = x^2 t$, $\quad dx = -\frac{1}{2}\,t(t^2-1)^{-\frac{5}{4}}\,dt$.

Dakle:

$$J = \int x\sqrt{1+x^4}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{4}x^2\sqrt{1+x^4} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right| + C, \text{ pošto je}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^2} = \frac{t}{4(t^2-1)} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C,$$ gde se još treba samo vratiti na promenljivu x.

10.138. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$, $\quad \left[x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1)\right]$.

10.139. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$, $\quad \left[6\sqrt[6]{x} - 6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}\right]$.

10.140. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$,

$\left[\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - x + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 4\ln(\sqrt[4]{x}+1)\right]$.

10.141. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,dx$,

$\left[\frac{1}{3}(3x+4) - \frac{1}{2}(3x+4)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{3x+4} - \ln\left|\sqrt[3]{3x+4}+1\right|\right]$.

10.142. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$, $\quad \left[\frac{(x-4)\sqrt{2x+1}}{3}\right]$.

10.143. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx,$

$$\left[6\sqrt[6]{x+1} - 3\sqrt[6]{(x+1)^2} - 2\sqrt[6]{(x+1)^3} + \frac{3}{2}\sqrt[6]{(x+1)^4} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} + 3\ln\left[1+\sqrt[6]{(x+1)^2}\right] - 6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1}\right].$$

10.144. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx, \qquad \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right].$

10.145. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{(1+x)^2}, \qquad \left[-\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{4/3}\right].$

10.146. $\displaystyle\int \frac{1}{1-2x}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\,dx, \qquad \left[\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\right].$

10.147. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \left[-\ln\left|\frac{2-x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|\right].$

10.148. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}, \qquad \left[\ln\left|\frac{x+3-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|\right].$

10.149. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}, \qquad \left[\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}\right].$

10.150. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}, \qquad \left[\frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}\right].$

10.151. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx,$

$$\left[-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2} - 4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right].$$

Primenjujući najpre metodu dekompozicije izračunati sledeće integrale:

10.152. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}},$

$$\left[\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|\right].$$

10.153. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}},$

$$\left[-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2} - 2\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{|1+x|}\right].$$

10.154. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}, \qquad \left[-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} - 2\arcsin\frac{1}{|x-2|}\right].$

Zadatke 155 - 159 treba rešavati tek pošto se proradi odeljak o integraciji trigonometrijskih funkcija.

10.155. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}, \qquad \left[\frac{1}{20}\,\mathrm{arctg}\,\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}\right].$

10.156. $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx, \qquad \left[2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right].$

10.157. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx, \qquad \left[\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2}\right].$

10.158. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx, \qquad \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right].$

10.159. $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}, \qquad \left[\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}\right].$

10.160. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx,$

$$\left[\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} - 21\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}\right].$$

10.161. $\displaystyle\int x^5(1+x^2)^{2/3}\,dx, \qquad \left[\frac{3}{22}(1+x^2)^{11/3} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{8/3} + \frac{3}{10}(1+x^2)^{5/3}\right].$

10.162. $\int \frac{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, $\quad \left[2(4+\sqrt[3]{x})^{3/2}\right]$.

10.163. $\int \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, $\quad \left[\frac{1}{14}(1+3\sqrt[3]{x^2})^{7/3} - \frac{1}{8}(1+3\sqrt[3]{x^2})^{4/3}\right]$.

10.164. $\int \sqrt[4]{(1+x^{1/2})^3}\,dx$, $\quad \left[\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{7/4}\right]$.

10.165. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$, $\quad \left[-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\right]$.

10.166. $\int \sqrt{x^4-1}\cdot\frac{dx}{x}$, $\quad \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^4-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x^4-1}\right]$.

10.167. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\quad \left[\frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}(4\sqrt[4]{x}-3)\right]$.

Integral oblika

$$\int R(x;\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

gde je R racionalna funkcija po x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se pomoću sledećih smena svodi na integrale od racionalnih funkcija:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x+t$, ako je $a>0$
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, ako je $c>0$
3. $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$, gde su x_1 i x_2 realni i različiti koreni kvadratnog trinoma ax^2+bx+c.

Primer 1. $\quad J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Kako je $a = 1>0$, koristi se smena $\sqrt{x^2+2x+3} = x+t$. Dobija se:

$$x = \frac{t^2-3}{2-2t},\quad \sqrt{x^2+2x+3} = \frac{2t-t^2-3}{2-2t},$$

$$dx = 2\,\frac{2t-t^2-3}{(2-2t)^2}\,dt,$$

$$J = 2\int\frac{dt}{t^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2x+3}-x+\sqrt{3}}\right| + C$$

Napomena. U ovom zadatku se može staviti i $\sqrt{x^2+2x+3} = xt+\sqrt{3}$, jer je $C = 3>0$.

Primer 2. $\quad J = \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Ovde je $c = 1>0$ i smena $\sqrt{x^2-x+1} = xt-1$ daje:

$$x = \frac{2t-1}{t^2-1},\quad dx = -2\,\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2-t+1}{t^2-1},\quad x+\sqrt{x^2-x+1} = \frac{t}{t-1},$$

$$J = \int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}\,dt = \int\left[\frac{2}{t} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\right]dt =$$

$$= \frac{3}{t+1} + 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1} + 2\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+1\right| -$$

$$- \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-x+1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+x+1\right| + C.$$

10.168. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}$,

$$\left[\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x+2}{(\sqrt{x^2-x+1}-x)^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x-1}\right| + C\right].$$

10.169. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$, $\quad \left[\ln\left|\frac{x+3-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|\right]$.

10.170. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$,

10.171. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$,

$$\left[\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}\left[(z-1)^3+(z-1)^{-3}\right]+\left[(z-1)^2+(z-1)^{-2}\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]\right\}+\frac{1}{2}\ln|z-1|,\ z=x+\sqrt{x^2-2x+2}\right].$$

INTEGRACIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

1. Integrali racionalnih funkcija po $\sin x$ i $\cos x$ smenom

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, odakle je $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

i $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$, svode se na integrale racionalnih funkcija po t.

2. Integrali $\int\sin^n x\,dx$ i $\int\cos^n x\,dx$, gde je n prirodan broj, mogu se izračunati primenom sledećih rekurentnih formula do kojih se dolazi parcijalnom integracijom:

$$\int\sin^n x\,dx=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$$

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx.$$

3. Integrali $\int\frac{dx}{\sin^n x}$, $\int\frac{dx}{\cos^n x}$, $n\in N$, izračunavaju se takodje primenom rekurentnih formula koje se dobijaju kao rezultat parcijalne integracije:

$$\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}$$

$$\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$$

4. Integrali $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, gde su m i n celi brojevi, izračunavaju se primenom pogodnih transformacija ili primenom rekurentnih formula:

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$$

i

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n}=\frac{n-1}{m+n}\int\sin^{m-2}x\cos^n x\,dx.$$

Za obe formule važi pretpostavka $m+n\neq 0$

5. Neka je dat integral:

$$(*)\quad\int R(\sin x,\cos x)\,dx$$

gde je $R(\sin x,\cos x)$ racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$.

Ako je $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ integral $(*)$ se izračunava smenom $\cos x=t$.

Ako je $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ integral $(*)$ se izračunava smenom $\operatorname{tg}x=t$.

Ako je $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ integral se izračunava smenom $\sin x=t$.

6. Pomoću formula

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

može se u nekim slučajevima podintegralna funkcija dosta uprostiti.

Formule:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

koriste se takodje za uprošćavanje podintegralne funkcije.

Primer 1. $J=\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

Smena:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

daje:

$$J=\int\frac{1}{8-4\,\frac{2t}{1+t^2}+7\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int\frac{2\,dt}{t^2-8\,t+15}=$$

$$=\int\frac{2\,dt}{(t-3)(t-5)}=\int\frac{dt}{t-5}-\int\frac{dt}{1-3}=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C\,.$$

Primer 2 $\quad J=\int\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}\,dx\,.$

Kako je $\frac{(-\sin)^3}{\cos x-3}=-\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}$, može se koristiti smena $\cos x=t$.

$$J=\int\frac{-\sin^2 x\,d(\cos x)}{\cos x-3}=\int\frac{(\cos^2 x-1)\,d\,(\cos x)}{\cos x-3}=$$

$$=\int\frac{t^2-1}{t-3}\,dt=\int\left(t+3+\frac{8}{t-3}\right)dt=\frac{t^2}{2}+3\,t+$$

$$+\,8\ln|t-3|+C=\frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+8\ln|\cos x-3|+C.$$

Primer 3. $\quad J=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx\,.$

Kako je $\frac{(-\cos x)^3}{\sin^4 x}=-\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$, koristi se smena $\sin x=t$.

$$J=\int\frac{(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)}{\sin^4 x}=\int\frac{1-t^2}{t^4}\,dt=\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C.$$

Primer 4. $\quad J=\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}\,.$

Kako je

$$\frac{1}{(-\sin x)^2-4(-\sin x)(-\cos x)+5(-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x},$$ koristi

se smena $\operatorname{tg} x=t$:

$$J=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+5}=\int\frac{dt}{t^2-4t+5}=$$

$$=\int\frac{d(t-2)}{(t-2)^2+1}=\operatorname{arctg}(t-2)+C=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x-2)+C.$$

10.172. $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$, $\quad\left[\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right]$.

10.173. $\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$, $\quad\left[\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|\right]$.

10.174. $\int\frac{\sin x\cos x}{(3+\cos x)^2}\,dx$, $\quad\left[-\ln|3+\cos x|-\frac{3}{3+\cos x}\right]$.

10.175. $\int\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$, $\quad\left[\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|\right]$.

10.176. $\int\cos^4 x\sin^3 x\,dx$, $\quad\left[-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x\right]$.

10.177. $\int\cos^5 x\sin^2 x\,dx$, $\quad\left[\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x\right]$.

10.178. $\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$, $\quad\left[\cos x-2\operatorname{arctg}(\cos x)\right]$.

10.179. $\int\frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x-1}\,dx$, $\quad\left[-\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right|\right]$.

10.180. $\int\frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$, $\quad\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right]$.

10.181. $\displaystyle\int \frac{dx}{19\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3}$, $\left[\frac{1}{16}\ln\left|\frac{4\,\mathrm{tg}\,x-3}{4\,\mathrm{tg}\,x+1}\right|\right]$.

10.182. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x\,dx$, $\left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} - \frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x}\right]$.

10.183. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$, $\left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}\right]$.

10.184. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x\sin x}}$, $\left[\frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{tg}^5 x} + 2\sqrt{\mathrm{tg}\,x}\right]$.

10.185. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}$, $\left[4\sqrt[4]{\mathrm{tg}\,x}\right]$.

10.186. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$, $\left[-8\,\mathrm{ctg}\,2x - \frac{8}{3}\mathrm{ctg}^3\,2x\right]$.

10.187. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$, $\left[-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|\right]$.

10.188. $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$, $\left[\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x\right]$.

10.189. $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$,

$$\left[\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24}\right].$$

10.190. $\displaystyle\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$,

$$\left[\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}\right].$$

INTEGRACIJA TRANSCENDENTNIH FUNKCIJA

1. Integrali oblika $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, gde je $P(x)$ polinom n-tog stepena, izračunavaju se metodom parcijalne integracije stavljajući $u = P(x)$,

$dv = e^{ax}dx$ ili $dv = \sin ax\,dx$, ili $dv = \cos ax\,dx$.

2. Integral oblika:

$$\int\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right]e^{ax}dx$$

gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n i m (pretpostavimo da je $n > m$, što ne umanjuje opštost), izračunava se iz jednakosti

$$\int\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right]e^{ax}dx =$$
$$= e^{ax}\left[P_{1n}(x)\cos bx + Q_{1n}(x)\sin bx\right], \text{ gde su}$$

$P_{1n}(x)$ i $Q_{1n}(x)$ polinomi stepena n sa još neodredjenim koeficijentima, koji se izračunavaju tako što se gornja jednakost diferencira, podeli sa e^{ax} i uporede koeficijenti uz $\cos bx$ i $\sin bx$ sa raznih strana tako dobijene jednakosti.

3. Integrali $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arc\,ctg}\,x\,dx$, izračunavaju se parcijalnom integracijom stavljajući

$u = \ln x$, $u = \arcsin x$, $u = \mathrm{arc\,tg}\,x$, $u = \arccos x$, $u = \mathrm{arc\,ctg}\,x$, $dv = P(x)\,dx$.

$P(x)$ je polinom po x.

4. Integrali

$$\int P(\ln x)\,x^n\,dx, \quad \int P(\arcsin x)\,dx$$

gde je P polinom po $\ln x$, odnosno $\arcsin x$, svode se smenom $\ln x = t$, $\arcsin x = t$ na integrale

$\int P(t)\,e^{(n+1)t}dt$ i $\int P(t)\cos t\,dt$ koji se mogu integraliti.

Primer 1 $\quad J = \int e^x(x \sin x + \cos x)\, dx$

$$J = \int e^x(x \sin x + \cos x)\, dx = $$
$$= e^x \Big[(Ax+B) \sin x + (Cx+D) \cos x \Big]$$

$$e^x(x \sin x + \cos x) = e^x \Big\{ \big[(A-C)x + A+B-D\big] \sin x + $$
$$+ \Big[(A+C)\, x + B + C + D \Big] \cos x \Big\}$$

$A - C = 1 \qquad A + B - D = 0$

$A + C = 0 \qquad B + C + D = 1$

Rešenja ovog sistema jednačina su:

$A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = 1$. Dakle je

$$J = e^x \Big[(\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}) \sin x + (1 - \tfrac{x}{2}) \cos x \Big] + C,$$

odnosno

$$J = \frac{e^x}{2} \Big[(x+1) \sin x + (2-x) \cos x \Big] + C.$$

Primer 2. $\quad J = \int x \arcsin x\, dx$

$$u = \arcsin x,\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ dv = x\, dx,\ v = \frac{x^2}{2}$$

$$J = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$J_1 = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big\{ x = \sin t,\ dx = \cos t\, dt \Big\} = \int \frac{\sin^2 t \cos t\, dt}{\cos t} =$$

$$= \int \sin^2 t\, dt = \int (\tfrac{1}{2} - \tfrac{\cos 2t}{2})\, dt = \tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{4} \sin 2t + C =$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C. \text{ Dakle je:}$$

$$J = (2x^2-1) \frac{\arcsin x}{4} + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

10.191. $\int (x^2-2x+2)\, e^{-x} dx$, $\quad \Big[-e^{-x}(x^2 + 2) \Big]$.

10.192. $\int x^3 e^{3x} dx$, $\quad \Big[e^{3x}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}) \Big]$.

10.193. $\int x^5 \sin 5x\, dx$,

$$\Big[-(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{25} + \frac{24x}{625}) \cos 5x + (\frac{x^4}{5} - \frac{12x^2}{125} + \frac{24}{3125}) \sin 5x \Big].$$

10.194. $\int x e^x \sin x\, dx$, $\quad \Big[\frac{e^x}{2} \big[x(\sin x - \cos x) + \cos x\big] \Big]$.

10.195 $\int x^2 e^x \cos x\, dx$,

$$\Big[\frac{e^x}{2} \big[x^2(\sin x + \cos x) - 2x \sin x + (\sin x - \cos x)\big] \Big].$$

10.196. $\int e^{\sin x} \sin 2x\, dx$, $\quad \Big[2(\sin x - 1)\, e^{\sin x} \Big]$.

10.197. $\int (\arcsin x + \arcsin^2 x)\, dx$,

$$\Big[\arcsin^2 x + \arcsin x - 2)x + \sqrt{1-x^2}\, (1+2 \arcsin x) \Big].$$

10.198. $\int x^3 \ln^3 x\, dx$, $\quad \Big[\frac{x^4}{4}(\ln^3 x - \frac{3}{4} \ln^2 x + \frac{3}{8} \ln x - \frac{3}{32}) \Big]$.

10.199. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx$, $\quad \Big[-\frac{\arcsin x}{x} + \ln \Big| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \Big| \Big]$.

10.200. $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$, $\quad \Big[\frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \Big| \frac{1+x}{1-x} \Big| \Big]$.

Miloš ČANAK

XI ODREDJRNI INTEGRALI

a) Odredjeni integrali - pojam i osobine

U v o d

1° Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalu $[a, b]$ i neka je taj interval podeljen na n delova tačkama: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Posmatrajmo sumu

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{gde je } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{i} \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Ako postoji konačan $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ za ma kakvu podelu intervala $[a, b]$ zvačemo ga odredjenim integralom u Riman-ovom smislu funkcije $f(x)$ u granicama od a do b i označavaćemo ga sa $\int_a^b f(x)dx$ tj.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i .$$

Tada kažemo da je funkcija $y = f(x)$ integrabilna na otsečku $[a,b]$.

2° Osobine odredjenog integrala.

I) $$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

II) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

III) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad (a < c < b)\ ;$$

IV) Ako je $f(x)$ parna funkcija tj. ako je $f(-x) = f(x)$ tada je:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx\ ;$$

V) Ako je $f(x)$ neparna funkcija tj. ako je $f(-x) = -f(x)$ tada je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0\ ;$$

VI) Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$ tada postoji na tom otsečku neodredjeni integral $\int f(x)dx = F(x) + c$ i važi jednakost:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\ .$$

Ovo je tzv. Newton-Leibniz-ova formula.

VII) Ako je funkcija $y = f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$ a funkcija $x = \phi(t)$ neprekidna sa svojim izvodom $\phi'(t)$ na intervalu $[\alpha,\beta]$ gde je $a = \phi(d)$ i $b = \phi(\beta)$ tada je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\ \phi'(t)dt.$$

Zadaci

Primenom Newton-Leibniz-ove formule izračunati integrale

11.1) $$\int_0^1 x^n\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

11.2) $$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Smenom $x = at$; $dx = a\,dt$ pri čemu za $x = 0$; i $x = a$ imamo $t = 0$; $t = 1$ dobija se:

$$I = \int_0^1 \frac{a\,dt}{a\sqrt{1 - t^2}} = (\arcsin t)\Big|_0^1 = (\arcsin 1) - (\arcsin 0) = \frac{\pi}{2}\ .$$

11.3) $$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} \qquad (\text{Rešenje: } \frac{\pi}{4})\ ;$$

11.4) $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad (2)$$

11.5) $$\int_1^2 x(\ln x + 1)\,dx\ .$$

Uputstvo: Koristiti metodu parcijalne integracije.

11.6) $$\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2}\,dx \qquad (\tfrac{7}{4})$$

11.7) $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

11.8) $\displaystyle\int_{e}^{e^e} x^3 e^{x^4}\, dx$

Smenom $x^4 = t$; $4x^3\, dx = dt$ pri čemu za $x = e$; $x = e^e$ imamo $t = e^4$; $t = e^{4e}$ dobija se

$$I = \frac{1}{4}\int_{e^4}^{e^{4e}} e^t\, dt = \left[\frac{1}{4} e^t\right]_{e^4}^{e^{4e}} = \frac{1}{4}\left[e^{e^{4e}} - e^{e^4}\right]$$

11.9) $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\, dx$ $\left(\frac{R^2\pi}{4}\right)$;

11.10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\, dx}{x^6 + 2x^3+1}$ $\left(\frac{\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{9}\ln 2 - \frac{1}{6}\right)$;

11.11) $\displaystyle\int \arcsin x\, dx$ $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$;

11.12) Rešiti jednačinu $\displaystyle\int_{\ln 4}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 4}} = \frac{\pi}{4}$;

<u>Uputstvo</u>: smena $e^t - 4 = z^2$.

b) <u>Nesvojstveni integrali</u>

<u>U v o d</u>

1° Integrali sa beskonačnim granicama:

Ako je $f(x)$ neprekidna u intervalu $[a; \infty]$ tada je:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx .$$

Ako postoji konačan limes na desnoj strani kažemo da integral konvergira a u suprotnom da divergira.

Na isti način je i:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \quad ;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\, dx \quad ;$$

2° Integrali neograničenih funkcija:

Ako je $f(x)$ neograničena u tački $x = c$; $c\in[a,b]$ i neprekidna za $x\in[a,c]$ i $x\in[c,b]$ tada je:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx .$$

Zadaci

11.13) $\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-kx}\,dx$, $(k>0)$ $\left(\text{Rešenje } \frac{e^{k}}{k}\right)$;

11.14) $\int\limits_{2}^{\infty} \cos x\,ds$ (divergira) ;

11.15($\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

Uputstvo: $u = \ln x,\ dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$

11.16) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{t\sqrt{t^2+a^2}}$ $(a \neq 0)$ $\left(\frac{1}{a}\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right)$;

11.17) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$ $(a>0)$ $\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

Uputstvo: koristiti metod parcijalne integracije.

11.18) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$ $(a>0)$ $\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)$;

11.19) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{x^7} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{5} x^{-7}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{x^{-6}}{-6}\right]_{\varepsilon}^{5} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[-\frac{1}{6x^6}\right]_{\varepsilon}^{5} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\left(-\frac{1}{6\cdot 5^6}\right) + \frac{1}{6\varepsilon^6}\right] = \infty .$$

Ovaj integral dakle divergira.

11.20) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\arcsin x\right]_{0}^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right]$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} .$$

11.21) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ (divergira) ;

11.22) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$ (6) ;

11.23) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Uputstvo: smena $\ln x = t$, $\frac{dx}{x} = dt$.

c) Primena odredjenog integrala

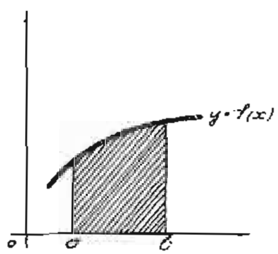
1. Izračunavanje površine ravnog lika

Ako je $y = f(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$ tada je površina krivolinijskog trapeza ograničenog lukom krive, pravama $x = a$; $x = b$ i otsečkom x ose za $x \in [a,b]$ data obrascem:

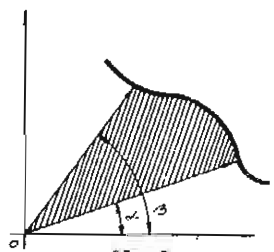
$$P = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{(slika 1).}$$

Ako je kriva data u polarnim koordinatama $\rho = f(\phi)$ onda je površina krivolinijskog trougla OAB data obrascem:

$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [f(\phi)]^2\, d\phi \qquad \text{(slika 2).}$$



Sl. 1.



Sl. 2.

2. Zapremina rotacionog tela

Telo koje nastaje rotacijom krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $y = f(x)$; pravama $x = a$; $x = b$; $y = 0$ oko x ose ima zapreminu:

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

Ako krivolinijski trapez ograničen krivom $y = f(x)$ i pravama $y = c$; $y = d$, $x = 0$ rotira oko y ose, opisuje telo zapremine:

$$V = \pi \int_c^d x^2\, dy.$$

Zapremina tela koje nastaje rotacijom krivolinijskog trougla, ograničenog krivim: $\rho = f(\phi)$; $\phi = \alpha$; $\phi = \beta$ oko polarne ose data je obrascem:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\phi\, d\phi .$$

3. Dužina luka krive

Dužina luka s, krive $y = f(x)$ izmedju tačaka sa apscisama $x = a$; $x = b$ izračunava se po obrascu:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

Ako je kriva data u parametarskom obliku: $x = \phi(t)$; $y = \psi(t)$ tada je:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}\, dt$$

Ako je kriva data jednačinom $\rho = f(\phi)$ tada je:

$$s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\phi$$

4. Komplanacija obrtnih površi

Površina koju opisuje luk krive $y = f(x)$ izmedju tačaka sa apscisama $x = a$ i $x = b$ rotiranjem oko x ose data je obrascem:

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

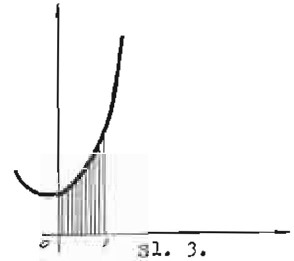
Ako se luk obrće oko y ose imamo:

$$P = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + x'^2}\, dy$$

Ako je kriva data u drugom obliku treba izvršiti odgovarajuću zamenu promenljivih u gornjem obrascu.

Zadaci

11.24. Nađi površinu ograničenu lukom krive $y = x^2+x+1$; pravama $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.



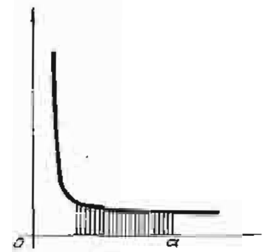
Sl. 3.

$$P = \int_0^1 (x^2+x+1)\, dx \qquad \text{(Vidi sliku 3).}$$

11.25) Naći površinu ograničenu lukom krive $x = 6 - y - y^2$ i y osom.

(Rešenje $\frac{125}{6}$)

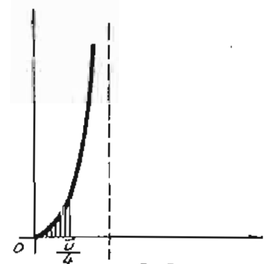
11.26) Izračunati površinu ograničenu lukom krive $y = \frac{1}{x}$; pravama $x = 1$; $x = a$; $y = 0$ $(a > 0)$. Čemu teži $P(a)$ kad $a \to 0$?



Sl. 4.

$$P = \int_1^a \frac{1}{x}\, dx \qquad \text{(Vidi sliku 4).}$$

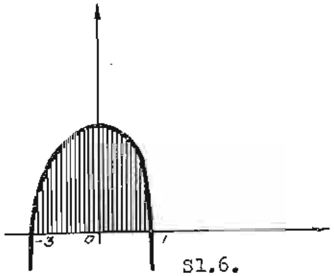
11.27. Izračunati površinu ograničenu lukom krive $y = \operatorname{tg} x$, pravom $x = \frac{\pi}{4}$ i x osom.



Sl. 5.

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx \qquad \text{(Vidi sliku 5).}$$

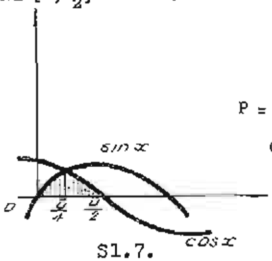
11.28) Izračunati površinu ograničenu krivama $y = 3 - 2x - x^2$ i $y = 0$.



$$P = \int_{-3}^{1} (3-2x-x^2)\,dx \quad \text{(Vidi sliku 6).}$$

Sl.6.

11.29) Izračunati površinu ograničenu krivim $y = \sin x$; $y = \cos x$ i odsečkom $[0; \frac{\pi}{2}]$ x osa.



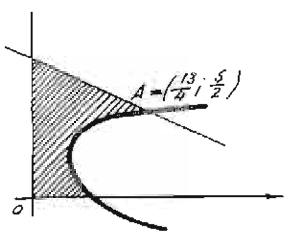
$$P = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \quad \text{(Vidi sliku 7).}$$

Sl.7.

11.30) U presečnim tačkama prave $x - y + 1 = 0$ i parabole $y = x^2 - 4x + 5$ povučene su tangente na paraboli. Izračunati površinu ograničenu parabolom i tangentama. Nacrtati sliku.

(Rešenje $\frac{31}{4}$).

11.31) Izračunati površinu ograničenu linijama $x = y^2 - 2y + 2$; $x = 0$; $y = 0$; $2x + y = 9$.



Sl.8.

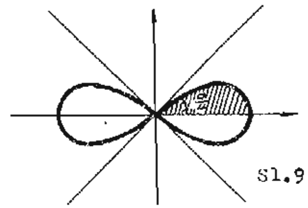
Uputstvo: Šrafiranu površinu na slici 8 treba na pogodan način podeliti na više površina čije se nalaženje svodi na izračunavanje elementarnih odredjenih integrala.

11.32) Naći površinu ograničenu parabolama

$x^2 = 2py$; $y^2 = 2px$. $\left(\frac{4}{3} p^2\right)$.

11.33) Naći površinu ograničenu lukom lemniskate $\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$.

$$P = 4\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\phi = 4\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\phi\, d\phi = 2a^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\phi\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$



(Vidi sliku 9).

Sl.9.

11.34) Naći površinu ograničenu krivom $\rho = a \cos\phi$.

$\left(\frac{a\pi}{4}\right)$;

11.35) Naći površinu ograničenu lukom cikloide $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ i delom x ose.

$(3a^2\pi)$;

11.36) Naći površinu ograničenu lukom krive

$y = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ i pravama $x = 0$; $x = \frac{1}{e}$; $y = 0$.

$$\left(P = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x} = 1\right)$$

11.37) Naći površinu ograničenu krivim

$y = -x^2+4x-3 \; ; \quad y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3$ $\qquad (\frac{2167}{375})$;

11.38) Naći površinu ograničenu krivom $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

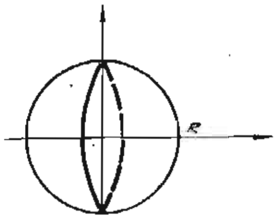
i pravama: $x = 0$; $y = 0$; $x = b$. $\qquad \left(\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{\frac{-b}{a}}\right)\right)$;

11.39) Izračunati površinu ograničenu linijama $y^2 = 2x+1$; $y = x-1$.

$(\frac{16}{3})$;

11.40) Naći površinu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $\qquad (ab\pi)$;

11.41) Izvesti obrazac za zapreminu lopte poluprečnika R.



Lopta čija se zapremina traži nastaje rotacijom kruga $x^2 + y^2 = R^2$ oko x ose. Tada je:

$$V = \pi\int_{-R}^{R} y^2 dx = \pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx =$$

$$= \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)_{-R}^{R} = \pi\left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right] = \frac{4R^3\pi}{3} .$$

11.42) Naći zapreminu koja nastaje rotacijom dela površi ograničene krivim $y = x^2$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$ oko

1° x ose, 2° y ose. $\qquad (\frac{\pi}{5} \; ; \; \frac{\pi}{2})$;

11.43) Naći zapreminu tela koje nastoje rotacijom dela površi ograničene krivim: $y = \frac{1}{1+x^2}$; $x = 1$, $x = -1$; $y = 0$: 1° oko x ose. 2° oko y ose. $\left(\left(\frac{\pi+2}{4}\right)\pi\right)$;

11.44) Naći zapreminu tela koje nastoje rotacijom dela površi ograničene krivim

$$y = e^x; \; x = 0; \; y = 0;$$

a) oko x ose, b) oko y ose $(\frac{\pi}{2}$; $e\,\pi)$

11.45) Naći zapreminu koja nastaje rotacijom površi ograničene krivim:

a) $y = x^2(1 - x^2)$; $y = 0$ $\qquad (\frac{32\pi}{315})$;

b) $y^2 = x^4(1+x)$ $\qquad (\frac{\pi}{30})$;

c) $y = 2^x$; $4y - 3x = 5$ $\qquad (7 - \frac{15}{4\ln 2})\frac{\pi}{2}$;

oko x ose.

11.46) Naći obim kruga $x^2 + y^2 = a^2$.

Uputstvo: $s = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx$; gde je $y = \sqrt{a^2-x^2}$.

11.47) Naći dužinu luka krive $x = \frac{t^6}{6}$; $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ između presečnih tačaka sa koordinatnim osama.

$(\frac{13}{3})$;

11.48) Naći dužinu luka kardioide $\rho = a(1 - \cos\phi)$;

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\phi = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1-2\cos\phi+\cos^2\phi)+a^2\sin^2\phi}\,d\phi =$$

$$= 2a\int_0^\pi \sqrt{2-2\cos\phi}\,d\phi = 4a\int_0^\pi \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}}\,d\phi = 4a\int_0^\pi \sin\frac{\phi}{2}\,d\phi =$$

$$= 4a\left(-2\cos\frac{\phi}{2}\right)_0^\pi = 8a.$$

11.49) Naći dužinu luka jednog svoda cikloide $x = a(t-\sin t)$; $y = a(1-\cos t)$;

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt; \text{ Kako je } x'(t) = a(1-\cos t),\quad y'(t) = a \sin t$$

$$\text{to je: } s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = 8a \quad \text{(kao primer 158).}$$

11.50) Naći dužinu luka krive $y^2 = x^3$ koji otseca prava $x = \frac{4}{3}$. $\left(\frac{112}{27}\right)$

11.51) Naći dužinu luka krive $y = \ln(\cos x)$ izmedju tačaka sa apscisama $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$. $(\ln \operatorname{ctg} \pi/8)$;

11.52) Naći dužinu luka krive $y = \ln \sin (x-1)$ izmedju tačaka $x = 1 + \frac{\pi}{3}$ i $x = 1 + \frac{2\pi}{3}$. $(\ln 3)$;

11.53) Naći dužinu luka krive $y = \ln x$ izmedju tačaka sa ordinatama $y = \ln \sqrt{3}$ i $y = \ln \sqrt{8}$. $(1+\ln\sqrt{3/2})$;

11.54) Naći dužinu luka krive $y = \frac{1}{2} e^{2x}$ izmedju tačaka sa apscisama $x = 0$; $x = 1$.

11.55) Naći dužinu luka prvog zavoja Arhimedove spirale $\rho = a\phi$.

$$\left(\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln \left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right);$$

11.56) Izračunati površinu koja nastaje rotacijom krive $y = 2\sqrt{x}$ i prave $x = 3$ oko x ose.

$$P = 2\pi \int_0^3 y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx.$$

Smenom $x+1 = t^2$; $dx = 2t\,dt$ gde za $x = 0$; $x = 3$ imamo $t = 1$; $t = 2$ dobija se:

$$P = 4\pi \int_1^2 t.2t\,dt = 8\pi \int_1^2 t^2\,dt = \frac{8t^3\pi}{3}\Big|_1^2 = \frac{8\pi}{3}(8-1) = \frac{56\pi}{3}.$$

11.57) Izvesti obrazac za površinu sfere poluprečnika R. $(4R^2\pi)$;

11.58) Izračunati površinu nastalu rotacijom luka krive $y = \sin x$ oko x ose izmedju tačaka $x = 0$ i $x = \pi$.

$$P = 2\pi \int_0^\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx; \quad y' = \cos x, \text{ pa je}$$

$$P = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Smenom $\cos x = t$; $-\sin x\,dx = dt$, pri čemu za $x = 0$ i $x = \pi$ imamo $t = 1$ i $t = -1$, dobijamo

$$P = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\pi \left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right|\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right] - 2\pi\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(-1+\sqrt{2})\right] =$$

$$= 2\pi\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right] = 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right].$$

11.59) Naći površinu koja nastaje rotacijom jednog svoda cikloide $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ oko x ose. $\left(\frac{64\,a^2\pi}{3}\right)$;

11.60) Izračunati površine koje nastaju rotacijom krivih:

a) $x^2 + y^2 = 2y$, oko x ose $(4\pi^2)$;

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ oko x ose

$$\left(2\pi\left[b^2 + ab\,\frac{\arcsin e}{e}\right]; \quad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right);$$

c) $y = e^{-x}$ oko x ose za $x \geq 0$

$$\left(\pi\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]\right).$$

Miloš ČANAK

XII. POOPŠTENJE INTEGRALA

a) Dvostruki integrali

UVOD

1. Pod dvojnim integralom neprekidne funkcije $z = z(x,y)$ nad nekom zatvorenom pravilnom oblašću D podrazumeva se broj:

$$\iint_D z(x,y)dz\ dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_i \sum_j z(x_i,y_i)\ \Delta x_i\ \Delta y_j$$

gde je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$.

2. Ako je oblast D odredjena nejednakostima: $a \leq x \leq b$; $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ gde su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $[a,b]$ onda odgovarajući dvojni interval može biti izračunat po formuli:

$$\iint_D z(x,y)dx\ dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\ dy$$

3. Ako se vrši prelaz na polarne koordinate φ i r po formulama:

$x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$ biće:

$$\iint_D z(x,y)\,dx\,dy = \iint_D z(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,d r\,d\varphi$$

4. Ako se traži površina oblasti D u ravni xOy; ona se može naći po formuli:

$$P = \iint_D dx\,dy$$

5. Ako se traži zapremina cilindra koji odozgo ograniča- va neprekidna površ definisana jednačinom $z = z(x,y)$ odozdo ravan $z = o$ a sa strane prava cilindrična površ, koja u ravni xOy iseca neku oblast D; tada se ona može naći po formuli:

$$V = \iint_D z(x,y)\,dx\,dy$$

6. Ako je neka površ zadana jednačinom $z = z(x,y)$ onda je veličina površine data formulom:

$$P = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

gde je $p = z'_x$; $q = z'_y$ a D projekcija odgovarajućeg dela površi na ravan $z = o$.

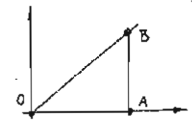
ZADACI:

U sledećim zadacima za navedenu oblast ispisati granice integracije dvojnog intervala $\iint_D z(x,y)\,dx\,dy$ za oba moguća poretka integracije.

12.1. Oblast D je trougao sa temenima $O(o,o)$ $A(1,o)$, $B(1,1)$

REŠENJE:

$$\int_0^1 dx \int_0^y z(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_y^1 z(x,y)\,dx \quad \text{(vidi sliku).}$$



12.2. Oblast D je paralelogram sa temenima $A(1,2)$; $B(2,4)$; $C(2,7)$; $D(1,5)$.

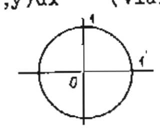
REŠENJE: $\iint_D z(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} z(x,y)\,dy =$

$$= \int_2^4 dy \int_1^{\frac{y}{2}} z(x,y)\,dx + \int_4^5 dy \int_1^2 z(x,y)\,dx + \int_5^7 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^2 z(x,y)\,dx.$$

12.3. Oblast D je krug $x^2 + y^2 \leq 1$

REŠENJE:

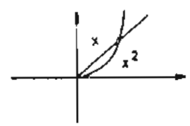
$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} z(x,y)\,dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x,y)\,dx \quad \text{(vidi sliku).}$$



U sledećim zadacima promeniti poredak integracije:

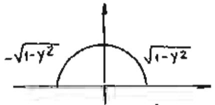
12.4. $\iint_D z(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} z(x,y)\,dx$.

REŠENJE: $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x z(x,y)\,dy$ (vidi sliku).



12.5. $\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} z(x,y)\, dy$

REŠENJE: $I = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x,y)\, dx$ (vidi sliku).



12.6. $\int_{0}^{2\pi} dx \int_{0}^{\sin x} z(x,y)\, dx.$

REŠENJE: $I = \int_{0}^{1} dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} (z(x,y)\, dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} z(x,y)\, dx.$

U dvojnom integralu $\iint_D z(x,y)\, dx\, dy$ preći na polarne koordinate φ i r i napisati granicu integracije za oba moguća slučaja.

12.7. Oblast D je krug $x^2 + y^2 \leq a^2$

REŠENJE:

$$I = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{a} r\, z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr =$$

$$= \int_{0}^{a} r\, dr \int_{0}^{2\pi} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

12.8. Oblast D je pravougaonik sa temenima $O(o,6)$; $A(1,o)$; $B(1,1)$; $C(o,1)$

REŠENJE:

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\cos\varphi}} r\, z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int^{\frac{1}{\sin\varphi}} r\, z(r\cos\varphi, \sin\varphi)\cdot$$

$$\cdot dr = \int_{0}^{1} r\, dr \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi + \int_{1}^{\sqrt{2}} r\, dr \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Pretpostavljajući da su φ i ρ polarne koordinate izmeniti poredak integracije u sledećim primerima:

12.9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{\cos\varphi} z(\varphi, r)\, dr.$

REŠENJE: $I = \int_{0}^{1} dr \int_{-\arccos r}^{\arccos r} z(\varphi, r)\, d\varphi.$

12.10. $\int_{0}^{a} d\varphi \int_{0}^{\varphi} z(\varphi, r)\, dr$ $(0 < a < 2\pi)$;

REŠENJE: $I = \int_{0}^{a} dr \int_{r}^{a} z(\varphi, r)\, d\varphi.$

Izračunati sledeće integrale:

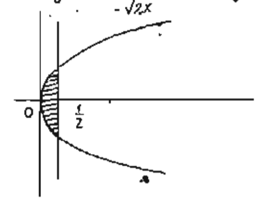
12.11. $\iint_D x y^2\, dx\, dy$, ako je oblast integracije ograničena parabolom $y^2 = 2x$ i pravom $x = \frac{1}{2}$.

REŠENJE

$$I = \int_{0}^{1/2} x\, dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y^2 dy = \int_{0}^{1/2} x\, dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} = \int_{0}^{1/2} \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\, x\, dx =$$

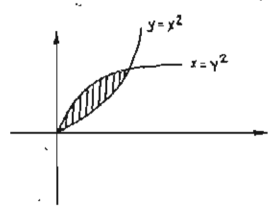
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{0}^{1/2} x^{5/2} dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \left.\frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}}\right|_{0}^{1/2} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{21} \left.\sqrt{x}^7\right|_{0}^{1/2} = \frac{1}{21}$$



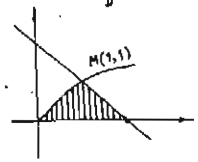
(vidi sliku).

12.12. $\iint_D \frac{x}{y}\, dx\, dy$ ako je oblast D ograničena parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$.



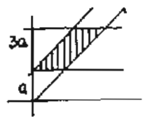
REŠENJE: $\frac{3}{8}$ (vidi sliku)

12.13. $\iint_D 2y\,dx\,dy$ ako je oblast D ograničena linijama $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x + y = 2$.



REŠENJE: $I = \frac{5}{6}$ (vidi sliku)

12.14. $\iint_D (x^2 + y^2)dx\,dy$ ako je D paralelogram sa stranama $y = x$; $y = x+a$; $y = a$; $y = 3a$ $(a > 0)$



REŠENJE: $I = 14\,a^4$ (vidi sliku).

12.15. $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy$ ako je $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$

REŠENJE: $I = \frac{\pi}{12}$

12.16. $\iint_D x \sin(x+y)\,dx\,dy$; ako je $0 \le x \le \pi$; $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

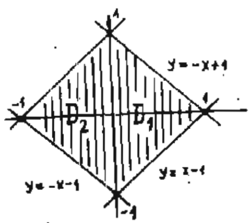
REŠENJE: $I = \pi + 2$

12.17. $\iint_D x^2 y\, e^{xy} dx\,dy$ ako je $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2$.

REŠENJE: $I = 2$.

12.18. $\iint_{|x|+|y|\le 1} x^2\,dx\,dy$

REŠENJE:



$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \iint_{D_1} x^2 dx\,dy + \iint_{D_2} x^2\,dx\,dy =$$

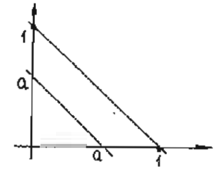
$$= \int_0^1 x^2 dx \int_{x-1}^{1-x} dy + \int_{-1}^{0} x^2\,dx \int_{-1-x}^{1+x} dy =$$

$$= 2\int_0^1 x^2(1-x)dx + 2\int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx =$$

$$= 4\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{3}$$ (vidi sliku).

12.19. Izračunati $I(a) = \iint_D (x+y)^{-d}\,dx\,dy$ po oblasti D definisanoj nejednačinama: $x > 0$; $y > 0$; $0 < a$; $a \le x + y \le 1$; a zatim utvrditi za koje će vrednosti parametara a postojati $\lim_{a\to 0} I(a)$ i naći tu graničnu vrednost.

REŠENJE: $I(a) = I_1(a) - I_2(a)$, gde je:



$$I_1(a) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)^{-d}\,dy$$

$$I_2(a) = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x+y)^{-d}\,dy .$$

Ako se uvede smena $x + y = t$ dobija se:

$$I_1(a) = \int_0^1 dx \int_x^1 t^{-d}\,dt = \int_0^1 dx\, \frac{t^{1-d}}{1-d}\Big|_x^1 = \frac{1}{1-d}\int_0^1 (1-x^{1-d})\,dx =$$

$$= \frac{1}{1-d}\left(x - \frac{x^{2-d}}{2-d}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{1-d}\left(1 - \frac{1}{2-d}\right) = \frac{1-d}{(d-1)(d-2)} = \frac{1}{2-d}$$

$$I_2(a) = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x+y)^{-d}\,dy = \int_0^a dx \int_x^a t^{-d} dt = \int_0^a dx\, \frac{1}{1-d}(t^{1-d})\Big|_x^a =$$

$$= \frac{1}{1-d}\int_0^a (a^{1-d} - x^{1-d})dx = \frac{1}{1-d}\left(x\,a^{1-d} - \frac{x^{2-d}}{2-d}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{1}{1-d}\left(a^{2-d} - \frac{a^{2-d}}{2-d}\right) = \frac{1}{1-d}\left(1 - \frac{1}{2-d}\right) a^{2-d} = \frac{a^{2-d}}{2-d}$$

Tada je $I_1(a) - I_2(a) = \frac{1}{2-d} - \frac{1}{2-d}\,a^{2-d}$ odnosno

$$I(a) = \frac{1}{2-d}\,(1 - a^{2-d})$$

Odavde je: $\lim_{a\to 0} I(a) = \frac{1}{2-d}$ $(\alpha \ne 2)$.

12.20. $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$; ako je oblast integracije krug $x^2+y^2 \leq a^2$

REŠENJE: $I = \pi(1-e^{-a^2})$

12.21. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

REŠENJE: $I = \dfrac{2\pi a^3}{3}$

12.22. $\iint\limits_D \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$

gde je oblast D definisana nejednačinom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

REŠENJE: $I = \dfrac{2}{3}\pi ab$; treba staviti

$x = ar\cos\varphi$; $y = br\sin\varphi$.

Naći površine ograničene sledećim linijama:

12.23. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$

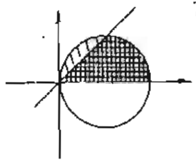
REŠENJE: $P = ab\pi$.

12.24. $x^2+y^2 = 2x$; $y = 0$; $y = x$

REŠENJE: $P = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\,dr =$

$= 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

(vidi sliku).



12.25. $xy = a^2$; $x+y = \frac{5}{2}a$ $\quad (a>0)$

REŠENJE:

$$P = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x} dy = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx\left(\frac{5}{2}a-x-\frac{a^2}{2}\right) =$$

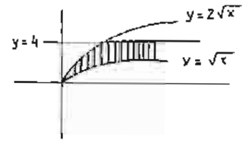
$$= \left(\frac{5}{2}ax-\frac{1}{2}x^2-a^2\ln x\right)\Bigg|_{\frac{a}{2}}^{2a} =$$

$$= \left(\frac{15}{8}-2\ln a\right)a^2.$$

12.26. $y = x^2$; $x = y^2$

REŠENJE: $P = \dfrac{1}{3}$

12.27. $y = \sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x}$; $y = 4$.



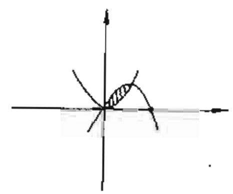
REŠENJE: $P = \dfrac{16}{3}$ (vidi sliku).

12.28 $xy = a^2$; $xy = 2a^2$; $y = x$; $y = 2x$ $(x>0;\ y>0)$

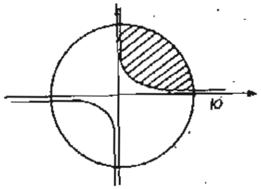
REŠENJE: $P = \dfrac{a^2}{2}\ln 2$

12.29. $y = 2x-x^2$; $y = x^2$

REŠENJE: $P = \dfrac{1}{3}$ (vidi sliku)



12.30. $y = \frac{3}{x}$; $x^2 + y^2 = 10$; $x > 0$

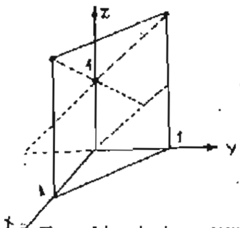


REŠENJE: $P = 2 \arcsin \frac{4}{5} - 3 \ln 3$

(vidi sliku)

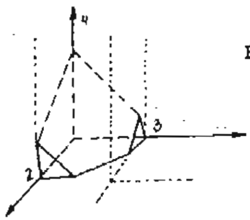
Naći zapreminu tela ograničenog sledećim površinama:

12.31. $z = 1+x+y$; $x + y = 1$; $x = 0$; $y = 0$.



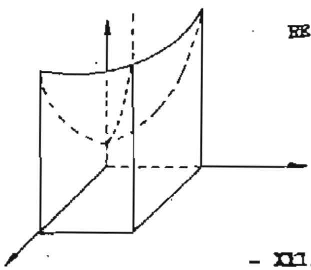
REŠENJE: $V = \frac{5}{6}$ (vidi sliku)

12.32. Koordinatnim ravnima i ravnima $x = 2$; $y = 3$; $x + y + z = 4$.



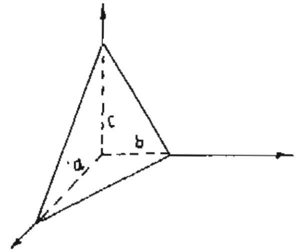
REŠENJE: $V = \frac{55}{6}$ (vidi sliku)

12.33. $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $z = 4$; $y = 4$; i paraboloidom $z = x^2 + y^2 + 1$



REŠENJE: $V = \frac{560}{3}$ (vidi sliku)

12.34. Ravni $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ i koordinatnim ravnima



REŠENJE:

$$V = c \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)dy = \frac{abc}{6}$$

(vidi sliku).

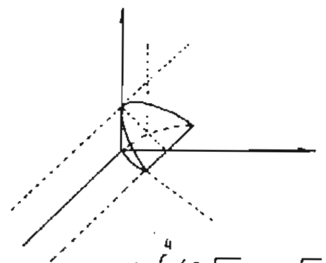
12.35. Ravnima $y = 0$; $z = 0$; $3x + y = 6$; $3x + 2y = 12$; $x + y + z = 6$.

REŠENJE: $V = 12$.

12.36. Rotacionim paraboloidom $z = x^2 + y^2$; koordinatnim ravnima i ravni $x + y = 1$.

REŠENJE: $V = \frac{1}{6}$

12.37. Ravnima $z = 0$; $y + z = 2$ i cilindrom $y = x^2$.



REŠENJE: Kako je $z = 2-y$ to je

$$V = \iint_D (2-y)\,dx\,dy = 2\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} (2-y)dx = 2\int_0^2 (2-y)\,(x)\Big|_0^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= 4\int_0^4 (2\sqrt{y} - y\sqrt{y})\,dy = 4\sqrt{y^3}\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{32}{15}\sqrt{2}.$$

12.38. Ravnima $z = dx$; $z = 0$ i cilindrom $x^2 + y^2 = 2ax$.

REŠENJE: $V = \pi d a^3$.

12.39. Elipsoidom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

REŠENJE: $\frac{1}{8} V = \iint_D z \, dx\, dy = c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy =$

$$= c \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy = \frac{\pi abc}{6}; \quad V = \frac{4\pi abc}{3}$$

Uputstvo: staviti: $x = a\, r \cos\varphi$; $y = a\, r \sin\varphi$.

12.40. Cilindrom $x^2 + y^2 - 2x = o$; i površi $z = x^2 y$; $z \geq o$

REŠENJE:

$$V = \iint_D x^2 y \, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^4 dr = \frac{4}{5}.$$

12.41. Izračunati površinu dela cilindra $z^2 = 4x$ koji pripada prvom oktantu a koji isecaju cilindar $y^2 = 4x$ i ravan $x = 1$.

REŠENJE:

$$P = \iint_D \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \int_0^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx\, (y)\Big|_0^{2\sqrt{x}} =$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx = \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

12.42. Izračunati površinu dela paraboloida $2z = x^2 + y^2$ koji iseca cilindar $x^2 + y^2 = 1$.

REŠENJE: Kako je $p = x$; $q = y$ to je

$$P = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1 + r^2}\, dr = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)\pi.$$

12.43. Izračunati površinu dela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

koji iseca cilindar $x^2 + y^2 = b^2$ $(b \leq a)$.

REŠENJE: Kako je $p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{y}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$, to je:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dx\, dy = \iint_D \frac{a}{z}\, dx\, dy = a\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}}$$

ili

$$S = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi a\left(-\sqrt{a^2 - r^2}\right)\Big|_0^b = 2\pi a^2\left(1 - \sqrt{a^2 - b^2}\right).$$

12.44. Naći površinu onog dela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ koji se projektuje na ravan $z = o$ van kruga $x^2 + y^2 - Rx = o$ $x \geq o$; $y \geq o$.

REŠENJE:

$$P = R\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{R\cos\varphi}^{R} \frac{r\, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R\int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\varphi}\, d\varphi = R^2.$$

12.45. Naći površinu dela paraboloida $z^2 = 2xy$ $(z > o)$ koji je ograničen ravnima $x = o$; $x = a$; $y = o$, $y = b$.

REŠENJE: $P = \frac{4}{3}(a+b)\sqrt{ab}$

12.46. Izračunati površinu dela konusa $z^2 = x^2 + y^2$ isečenog cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$.

REŠENJE: $P = 2\pi\sqrt{2}$.

b. TROSTRUKI I VIŠESTRUKI INTEGRALI

UVOD

Ako je funkcija $f(x,y,z)$ neprekidna u oblasti V odredjenoj nejednakostima $x_1 \leq x \leq x_2$; $y_1(x) \leq y < y_2(x)$ $z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)$, gde su $y_1(x)$; $y_2(x)$; $z_1(x,y)$ neprekidne funkcije, onda trojni integral funkcije $f(x,y,z)$ uzet po oblasti V može biti izračunat po formuli:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz .$$

2. Ako je funkcija $f(x_1,\dots,x_n)$ neprekidna u nekoj ograničenoj oblasti Ω, definisanoj nejednakostima

$x_1' < x_1 < x_1''$

$x_2'(x_1) < x_2 \leq x_2''(x_1)$

. . . .

$x_n'(x_1,x_2\dots x_{n-1}) < x_n \leq x_n''(x_1,x_2\dots x_{n-1})$

gde su x_1' i x_1'' brojevi a $x_2'(x_1)$; $x_2''(x_1)\dots x_n'(x_1,x_2\dots x_{n-1})$ $x_n''(x_1,x_2\dots x_{n-1})$ neprekidne funkcije onda odgovarajući višestruki integral može biti izračunat po formuli:

$$\iint_\Omega \int f(x_1,x_2\dots x_n)\,dx_1 dx_2\dots dx_n =$$

$$= \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \dots \int_{x_n'(x_1\dots x_{n-1})}^{x_n''(x_1\dots x_{n-1})} f(x_1\dots x_n)\,dx_n .$$

3. Zapremina proizvoljne proste zatvorene oblasti V u prostoru izračunava se po formuli

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz$$

ZADACI:

Izračunati sledeće trostruke integrale:

12.47. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$

REŠENJE:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^2 dy(z)\Big|_0^3 = \int_0^1 dx \int_0^2 3\,dy = \int_0^1 dx\cdot(3y)\Big|_0^2 =$$

$$= \int_0^1 6\,dx = 6.$$

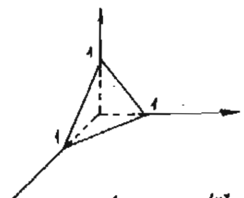
12.48. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3y^2 z\,dz .$

REŠENJE:

$$I = \int_0^a dx \int_0^x dy\,\left(x^3y^2\frac{z^2}{z}\right)\Big|_0^{xy} = \int_0^a dx \int_0^x \frac{x^5y^4}{2}\,dy =$$

$$= \int_0^a \frac{x^5}{2}dx \int_0^x y^4 dy = \int_0^a \frac{x^{10}}{10}\,dx = \frac{x^{11}}{10\cdot 11}\Big|_0^a = \frac{a^{11}}{110} .$$

12.49. $\iiint\limits_V (1-x)\,y\,z\,dx\,dy\,dz$; ako je oblast V ograničena ravnima $x=0$; $z=0$; $y=0$; $z=1-x-y$.



REŠENJE:

$$I = \int_0^1 (1-x)dx \int_0^{1-x} y\,dy \int_0^{1-x-y} z\,dz =$$

$$= \int_0^1 (1-x)dx \int_0^{1-x} y\,dy\,\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x-y} =$$

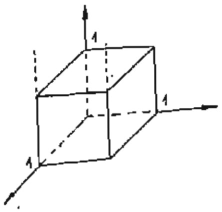
$$= \int_0^1 (1-x)dx \int_0^{1-x} \left[(1-x)^2 y - 2(1-x)y^2 + y^3\right] dy =$$

$$= \int_0^1 (1-x)dx \left[(1-x)^2\frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]\Big|_0^{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\left[\frac{(1-x)^4}{2} - \frac{2}{3}(1-x)^4 + \frac{1}{4}(1-x)^4\right] dx =$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^5\, dx = -\frac{(1-x)^6}{144}\Big|_0^1 = \frac{1}{144}$$ (vidi sliku).

12.5o $\iiint\limits_V (x+y+z)\, dx\, dy\, dz$ ako je oblast V ograničena ravnima $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$; $y = 1$; $z = 0$; $z = 1$.



REŠENJE:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)\, dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2}\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(x+y+\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 dx \left(\frac{(2x+1)}{2}\, y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2x+1}{2} + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2}.$$

12.51. $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ ako je oblast V ograničena površi $3(x^2 + y^2) + z^2 = 3a^2$

REŠENJE:

$$I = \iint\limits_D dx\, dy \int_{z_1}^{z_2} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz = \iint\limits_D dx\, dy\, I_1$$

Kako je $I_1 = \int_{z_1}^{z_2} (x^2+y^2+z^2)\,dz = \left[(x^2+y^2)z + \frac{z^3}{3}\right]\Big|_{z_1}^{z_2} =$

$= 2a^2\sqrt{3}\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, gde je $z_{1,2} = \pm\sqrt{3(a^2-x^2-y^2)}$

to je

$$I = 2a^2\sqrt{3}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy = 2a^2\sqrt{3}\iint\limits_{r\le a}\sqrt{a^2-r^2}\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2a^2\sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int \sqrt{a^2-r^2}\, r\, dr = -2\pi a^2\sqrt{3}\int_0^a (a^2-r^2)^{1/2}\, d(a^2-r^2) =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{a^2-r^2}\right)^3\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^5\sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi a^5}{\sqrt{3}}$$

12.52. $\iiint\limits_V y\cos(z+x)\,dx\, dy\, dz$; gde je oblast V ograničena cilindrom $y = \sqrt{x}$; i ravnima $y = 0$; $z = 0$; $x+z = \frac{\pi}{2}$.

REŠENJE: $I = \frac{\pi^3}{16} - \frac{1}{2}$.

12.53. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz$ gde je oblast V ogranočena elipsoidom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

REŠENJE: $I = \frac{4}{5}\pi abc$.

12.54. $\iiint\limits_V \left[(x+y+z)^2 - \frac{9}{5}a^2\right] dx\, dy\, dz$; gde je oblast V definisana nejednakostima: $x^2 + y^2 - 2az \le 0$; $x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2 \le 0$; $a>0$.

REŠENJE: $I = -\frac{7\pi}{30}a^5$

12.55. $I = \iiint\limits_V \frac{dx\, dy\, dz}{(z+a)^2-x^2-y^2}$, gde je oblast V ograničena površinama $z = \frac{1}{2a}(x^2+y^2)$; $z = b$; $a>0$; $b>0$.

Naći $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{I}{b}$

REŠENJE: $I = -\,2\,a \ln a + 2(a+b)\ln(a+b) - b\ln(a^2+b^2) +$

$$+\ 2\,a\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln(a+b)^2 - \ln(a^2+b^2)\right] = \lim_{b\to\infty}\ln\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = 0.$$

U sledećim zadacima odrediti granice integracije:

12.56. $x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ z \geqslant 0;\ x + y \leqslant a;\ z \leqslant h$

REŠENJE: $I = \int_0^h dx \int_0^a dy \int_0^{a-y} f(x,y,z)\,dz\,.$

12.57. $x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ z \geqslant 0;\ x + y + z \leqslant a\,.$

REŠENJE: $I = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} f(x,y,z)\,dz\,.$

12.58. $x^2 + y^2 \leqslant z^2;\quad x^2 + z^2 \leqslant a^2;\ z \geqslant 0$

REŠENJE: $I = \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{a^2-2x^2}}^{\sqrt{a^2-2x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y,z)\,dz\,.$

U sledećim zadacima na različite načine napisati granice integracije

12.59. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,.$

REŠENJE:

$$I = \int_0^1 dx \left\{ \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy + \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy \right\} =$$

$$= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dz + \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx \right\}.$$

12.6o. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz\,.$

REŠENJE:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dz \int_{-z}^{z} dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,.$$

12.61. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dx\,.$

REŠENJE:

$$I = \int_0^1 dx \left\{ \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x,y,z)\,dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dy \right\} =$$

$$= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x,y,z)\,dy \right\} +$$

$$+ \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,.$$

1o.62. Izračunati sledeće nesvojstvene integrale:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}\,.\quad \text{REŠENJE:}\quad \left(I = \frac{8}{13}\right)$$

12.63. $\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{xy\ dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2+z^2)^3}\,.$

REŠENJE: $I = \frac{\pi}{16}$

12.64. Izračunati sledeće integrale:

$$\int\int\cdots\int dx_1\, dx_2 \dots dx_n \quad \text{ako je } x_k > 0$$

$(k = 1,2\dots n)$ i $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$

REŠENJE:

$I = \frac{1}{n!}$

12.65. $$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n .$$

REŠENJE : $I = \frac{n}{3}$.

U sledećim zadacima naći zapreminu tela ograničenu površinama:

12.66. $z = x^2 + y^2;\ z = 2x^2 + 2y^2;\ y = x;\ y = x^2.$

REŠENJE:

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2x^2+2y^2-x^2-y^2)\, dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{x} = \int_0^1 \left(x^3 - x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right) dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{6}\right) dx = \frac{3}{35} .$$

12.67. $x=0;\ x = 1;\ y = 0;\ y = 1-x;\ z = x+y;\ z = x\,y$

REŠENJE:

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y-xy)\, dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{x}{2}(1-x)^2\right] dx = \frac{7}{24} .$$

12.68. $x^2+z^2 = a^2;\ x + y = \pm a;\ x - y = \pm a.$

REŠENJE:

$$V = 4\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 4\int_0^a dx \int_0^{a-x} (2\sqrt{a^2-x^2})\, dy =$$

$$= 8\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}(a-x)dx = 8\left[a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx - \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\right]dx =$$

$$= \frac{2}{3}a^3(3\pi - 4).$$

12.69. $z = 0;\ x^2 + y^2 = 4az;\ x^2 + y^2 = 2cx .$

REŠENJE : $\frac{3\pi c^4}{8a}$.

12.7o. Cilindrima $z = \ln(x+2)$ i $z = \ln(6-x)$ i ravnima $x = 0;\ x + y = 0;\ x - y = 2$

REŠENJE: $V = 4\,(4 - 3\ln 3)$

c. KRIVOLINIJSKI INTEGRAL

UVOD

1. Ako je $f(x,y,z)$ definisana i neprekidna funkcija u svim tačkama glatke krive $x = x(t);\ y = y(t),\ z = z(t)$ a ds diferencijal luka onda se krivolinijski integral prve vrste (krivolinijski integral po luku) izračunava po formuli:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t);\ y(t);\ z(t)\right] \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\, dt.$$

Ovaj integral ima osobinu da ne zavisi od orijentacije krive.

2. U specijalnom slučaju ako je $f = f(x,y)$ a parametarske jednačine $x = x(t)$; $y = y(t)$ pri čemu je $t_1 \le t \le t_2$ imaćemo:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t);\ \ y(t)\right]\ \ \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt.$$

3. Ako kriva integracije ima oblik $y = y(x)$ element luka se izračunava po formuli $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.
Tada je:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{x_1}^{x_2} f\left[x;\ y(x)\right]\ \sqrt{1 + y'^2}\ \ dx\ .$$

4. Ako su funkcije $P = P(x\ ,y,z)$; $Q = Q(x,y,z)$; $R = R(x,y,z)$ neprekidne duž krive integracije onda se krivolinijski integral druge vrste (krivolinijski integral po koordinatama) izračunava po formuli:

$$\int_C P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\ dy + R(x,y,z)\ dz =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ P\left[x(t);y(t);\ z(t)\right]\ x_t' + Q\left[x(t);y(t);\ z(t)\right]\ \ y_t' +$$
$$+ R\left[x(t);\ y(t);\ z(t)\right]\ \ z_t' \Big\}\ dt.$$

Pri promeni smera integracije duž krive c ovaj integral menja znak.

5. Ako je $P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\ dy + R(x,y,z)\ dz = du$ tj. ako izraz pod integralom pretstavlja totalni

diferencijal neke jednoznačne funkcije u tada je

$$\int_C P\ dx + Q\ dy + R\ dz = \ u(x_2,y_2,z_2)\ -\ u(x_1,y_1,z_1)$$

gde su (x_1,y_1,z_1) i (x_2,y_2,z_2) respektivno početna i krajnja tačka putanje integracije.
Da bi se mogla primeniti gornja formula moraju biti ispunjeni sledeći uslovi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}\ .$$

U tom slučaju funkcija u može biti nadjena po formuli:

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\ dy\ + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\ dz$$

gde je (x_0,y_0,z_0) neka fiksirana tačka oblasti V.

6. Ako se zatvorena, glatka kriva c obilazi tako da oblast D njome ograničena ostaje sa leve strane a funkcije P,Q, su neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti D i na njenom rubu, onda važi Grinova formula:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dx\ dy\ .$$

ZADACI:
Izračunati sledeće krivolinijske integrale:

12.71. $\int_C x\ ds$; ako je C deo prave $y = x$ izmedju tačaka (0,o) i (1,1).

REŠENJE: $I = \int_0^1 x\ \ \sqrt{1+y'^2}\ dx$. Kako je $y' = 1 = y'^2$ to je:

$$I = \int_0^1 x\ \sqrt{2}\ dx\ \ = \frac{x\sqrt{2}}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12.72. $\int\limits_c y^2 ds$; gde je c gornja polovina kruga $x^2+y^2 = a^2$ izmedju tačaka (a,o) i $(-a;o)$.

REŠENJE: $I = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

12.73. $\int\limits_c y\, ds$; po luku parabole $y^2 = 2x$ od tačke (o,o) do tačke $(4; \sqrt{8})$.

REŠENJE: $I = \dfrac{26}{3}$.

12.74. $\int\limits_c \sqrt{2\, y}\, ds$; gde je c prvi svod cikloide $x = a(t-\sin t)$; $y = a(1-\cos t)$.

REŠENJE: $I = 4\pi a \sqrt{a}$.

12.75. $\int\limits_c \dfrac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, gde je c odsečak prave $y = \dfrac{x}{2} - 2$ izmedju tačaka $(o,-2)$ i $(4,o)$.

REŠENJE: $I = \ln \dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{3}$

12.76. $\oint\limits_c x\, y\, ds$; gde je c kontura pravougaonika koji odredjuju prave $x = o$; $y = o$; $x = 4$, $y = 2$.

REŠENJE: $I = 24$.

12.77. $\int\limits_c (x+y)\, ds$; ako je c kontura trougla $O(o,o)$ $A(1,o)$ $B(o,1)$

REŠENJE: $I = 1 + \sqrt{2}$

12.78. $\int\limits_c \sqrt{x^2+y^2}\, ds$; ako je c krug $x^2 + y^2 = ax$

REŠENJE: Ako se uvedu polarne koordinate $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $ds = \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}\, d\varphi =$ $= a\, d\varphi$, dobija se

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\, a\, d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = a^2 \sin\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 .$$

12.79. $\int\limits_c x\, y\, z\, ds$; gde je c luk krive $x = t$; $y = \dfrac{\sqrt{8t^3}}{3}$; $z = \dfrac{t^2}{2}$ od tačke $t = o$ do $t = 1$.

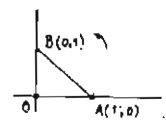
REŠENJE: $I = \dfrac{16\sqrt{2}}{143}$

12.80. $\int\limits_c (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$ gde je c deo zavojnice $x = a\cos t$; $y = a\sin t$, $z = b\, t$ $(o \le t \le 2\pi)$

REŠENJE: $I = \dfrac{2\pi}{3}(3a^2 + 4\pi b^2)\sqrt{a^2+b^2}$

Izračunati sledeće krivoliniske integrale:

12.81. $\int\limits_c \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x + y}$ ako je c kontura trougla koji obrazuje prava $x + y = 1$ sa koordinatnim osama



REŠENJE: $I = I_1 + I_2 + I_3$ gde je

$I_1 = \int\limits_{OA}$ $\quad I_2 = \int\limits_{AB}$ $\quad I_3 = \int\limits_{BO}$

Kako je $I_1 = I_3 = o$, to je

$$I = I_2 = \int_1^0 \frac{x(-dx)-(1-x)dx}{x+(1-x)} = \int_1^0 \frac{-x\, dx - dx + x\, dx}{1} =$$

$$= \int_0^1 dx = 1.$$

12.82. $\int_C x^3 dy - y^3 dx$; po konturi kruga $x^2+y^2 = a^2$.

REŠENJE: $I = \frac{3}{2} a^4 \pi$.

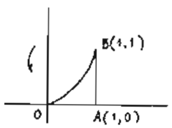
12.83. $\int_C x\, dy + \frac{y}{1+x} dx$; kada x varira od x = o do x = 4 duž krive $y = 2\sqrt{x} - x$.

REŠENJE: $I = \frac{4}{3} + \ln 5 - 4 \operatorname{arc\,tg} 2$.

12.84. $\int_C (x^2 + y^2)\, dx$; gde je kriva integracije gornji deo kruga $(x-1)^2 + y^2 = 1$ od tačke (o,o) do tačke (2,o)

REŠENJE: $I = -\frac{1o}{3}$

12.85. $\int_C x\, y\, dx + (x+y)\, dy$; gde je c zatvorena kontura koju obrazuju linije $y = o$; $x = 1$, $y = x^2$

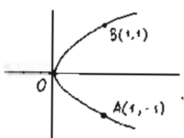


REŠENJE: $I = I_1 + I_2 + I_3$, gde je

$I_1 = \int_{\overline{OA}}$ $\quad I_2 = \int_{\overline{AB}}$ $\quad I_3 = \int_{\overline{BO}}$.

Kako je $I_1 = o$ $\quad I_3 = -\frac{17}{12}$ $\quad I_2 = \frac{3}{2}$ $\quad I = \frac{1}{12}$

12.86. $\int_C x\, y\, dx$; ako je c luk parabole $x = y^2$ od tačke (1,-1) do tačke (1,1)



REŠENJE: $I = I_1 + I_2$, gde je

$I_1 = \int_{\overline{AO}}$ $\qquad I_2 = \int_{\overline{OB}}$.

Kako je $I_1 = \int_{\overline{AO}} x\, y\, dx = \int_1^0 x(-\sqrt{x})dx = \int_0^1 x^{3/2} dx =$

$$\frac{2\, x^{5/2}}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

a $I_2 = \int_{OB} x\, y\, dx = \int_0^1 x\, \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{5}$, to je

$I = I_1 + I_2 = \frac{4}{5}$.

12.87. $\int_C y\, dx - x\, dy$; ako je c luk cikloide $x = 2(t-\sin t)$; $y = 2(1-\cos t)$ od tačke (o,o) do tačke $(4\pi, o)$

REŠENJE: $I = 24\pi$.

12.88. $\int_C z\, dx + x\, dy + y\, dz$; ako je c zavojnica $y = a \sin t$; $x = a \cos t$; $z = at$.

REŠENJE: Kako je $dx = -a \sin t\, dt$; $dy = a \cos t\, dt$; $dz = a dt$, to je

$$I = \int_0^{2\pi} at(-a \sin t)dt + a \cos t(a \cos t\, dt) + a \sin t\, adt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt =$$

$$= a^2 \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = a^2 \pi.$$

12.89. $\int_C x^3 dx + 3z\, y^2\, dy - x^2\, y\, dz$; gde je c deo prave od tačke (3,2,1) do tačke (o,o,o)

REŠENJE: $I = -\frac{87}{4}$.

U sledećim primerima naći funkciju kada je poznat njen totalni diferencijal

12.9o. $(e^y+x)\, dx + (x\, e^y - 2\, y)\, dy$.

REŠENJE: Tražena funkcija u imaće parcijalne izvode

$$\frac{\partial n}{\partial x} = e^y + x; \quad \frac{\partial n}{\partial y} = x\, e^y - 2y .$$

Pišemo da je $n = \int (e^y + x)dx + \varphi(y) = x\, e^y + \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$.

Ako tražimo parcijalni izvod po y dobijenog izraza i izjednačimo ga sa već poznatom vrednošću dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x\, e^y + \frac{x^2}{2} + \varphi(y)\right] = x\, e^y + \varphi'(y) = x\, e^y - 2y.$$

Odavde je $\varphi'(y) = -2y$, pa je $\varphi(y) = -y^2$.

Tada je $n = x\, e^y + \frac{x^2}{2} - y^2 + c$.

12.91. $\frac{x+ay}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y-ax}{x^2+y^2}\,dy$.

REŠENJE:

$$n = \int_0^x \frac{x+ay}{x^2+y^2}\,dx \quad \int_1^y \frac{dy}{y} + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + a \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + c.$$

(Ovo je drugi način nalaženja tražene funkcije)

12.92. $(2x \cos y - y^2 \sin x)\,dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)\,dy$

REŠENJE: $n = n(x,y) = x^2 \cos y + y^2 \cos x + c$.

12.93. $(2x\,y\, e^{x^2y} + y^2 e^{xy^2} + 1)\,dx + (x^2 e^{x^2y} + 2x\,y e^{xy^2} - 2y)dy$

RESENJE: $n(x,y) = e^{x^2y} + e^{xy^2} + x - y^2 + c$.

12.94. $(x^2 - 2y\,z)dx + (y^2 - 2x\,z)dy + (z^2 - 2x\,y)\,dz$.

RESENJE: Neka je $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ fiksirana tačka oblasti.

Tada je:

$$n(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz =$$

$$= \int_0^x (x^2 - 2y\,z)dx + \int_0^y (y^2 - 2\cdot 0\cdot z)dy + \int_0^z (z^2 - 2\cdot 0\cdot 0)dz =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2\,y\,z\,x\right)\Big|_0^x + \frac{y^3}{3}\Big|_0^y + \frac{z^3}{3}\Big|_0^z$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2\,x\,y\,z + c.$$

12.95. $(2x\,y\,z + \ln y)\,dx + (x^2y + \frac{x}{y})\,dy + (x^2y - 2z)\,dz$.

REŠENJE: $n = x \ln y + x^2 y\, z - z^2 + c$.

12.96. $\frac{dx - 3\,dy}{z} + \frac{3y - x + z^3}{z^2}\,dz$.

REŠENJE: $n = \frac{x - 3\,y}{z} + \frac{z^2}{2} + c$.

Vodeći računa da je podintegralni izraz totalni diferencijal izračunati integrale:

12.97. $\int_c 2\,x\,y\,dx + x^2\,dy$; od tačke $(0,0)$ do tačke $(1,1)$ ako je putanja c:

1. $y = x$ 2. $y = x^2$ 3. $x = y^2$ 4. $y = x^3$.

REŠENJE: Kako je $n = n(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy =$

$$= \int_0^x 2\,x\,y\,dx + \int_0^y 0\,dy = x^2 y\Big|_0^x = x^2 y$$

to je

$$\int_c 2\,x\,y\,dx + x^2\,dy = n(1,1) - n(0,0) = 1.$$

12.98. $\int_c x\,dy + y\,dx$; ako je c luk krive $x^5 + y^9 + x^2y^2 - 6y + 3x$ izmedju tačaka $(0,0)$ i $(1,1)$.

REŠENJE: Kako je $\eta = xy$ to je

$I = \eta(1,1) - \eta(o,o) = 1.$

12.99. $\displaystyle\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy).$

REŠENJE: $I = -2.$

12.1oo. $\displaystyle\int_{(0;\frac{\pi}{2})}^{(\frac{\pi}{2};\pi)} \cos y\, dx - x \sin y\, dy.$

$(0;\ \frac{\pi}{2})$

REŠENJE: $I = \frac{\pi}{2}$.

12.1o1. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^{x} \cos y\, dx - \sin y\, dy.$

REŠENJE: $I = e^{a} \cos b - 1$.

12.1o2. $\displaystyle\int_{(1,-1;2)}^{(2,1,3)} x\, dx - y^2 dy + z\, dz.$

REŠENJE: Kako je $\eta = \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{z^2}{2}$ to je

$I = \eta(2,1,3) - (1,-1,2) = (2 - \frac{1}{3} + \frac{9}{2}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2) = \frac{1o}{3}.$

12.1o3. $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} y\, z\, dx + z\, x\, dy + x\, y\, dz.$

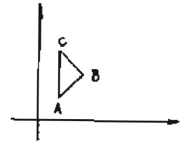
REŠENJE: Kako je $\eta = x\, y\, z.$ to je

$I = \eta(3,2,1) - \eta(1,2,3) = 3.2.1 - 1.2.3 = o.$

12.1o4. $\displaystyle\int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{z\, x\, dy + x\, y\, dz - y\, z\, dx}{(x-yz)^2} \quad (z \neq \frac{x}{y})$.

Koristeći Grinovu formulu izračunati integrale:

12.1o5. $\oint 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$, ako je c kontura trougla čija su temena A(1,1); B(2,2); C(1,3).



REŠENJE: $\displaystyle\oint = 2\int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x-y)dx\ dy =$

$\displaystyle = -4\int_1^2 (x-2)^2 dx = -\frac{4}{3}(x-2)^3 \Big|_1^2 =$

$= -\frac{4}{3}$.

12.1o6. $\oint_c x\, y^2 dy - x^2 y\, dx$; ako je c kontura kruga $x^2 + y^2 = a^2$.

REŠENJE: $\oint = \frac{\pi a^4}{2}$

12.1o7. $\oint_c (x+y)dx - (x-y)dy$; ako je c elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

REŠENJE: $\oint = -2\pi ab$.

PRIMENA KRIVOLINIJSKOG INTEGRALA

1. Koristeći Grinovu formulu vidimo da je površina ravne oblasti D koja je ograničena krivom c data formulom

$P = \frac{1}{2} \oint x\, dy - y\, dx.$

2. Površina omotača cilindrične površi čije su izvodnice paralelne z-osi a generatrisa mu je kriva c

u ravni xOy data je formulom

$$P = \int_C z\, ds.$$

ZADACI:

Izračunati površinu ograničenu krivim linijama:

12.1o8. $x = a\cos t;\ \ y = b\sin t$

REŠENJE:

$$P = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint a\cos t(b\cos t)dt - b\sin t(-a\sin t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t+\sin^2 t)dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}ab\, t\Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

12.1o9. $x = a(t-\sin t);\ y = a(1-\cos t)\quad (o \le t \le 2\pi)$

REŠENJE: $P = 3\pi a^2$.

12.11o. $x = a\cos^3 t;\ y = a\sin^3 t\quad (o \le t \le 2\pi)$

REŠENJE: $P = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\, dt =$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

Naći površinu sledećih površi:

12.111. Omotača cilindra $x^2+y^2 = 1$ izmedju ravni $z = 4y$ i ravni $z = 2y$.

REŠENJE: $P = \int_C z\, ds = 8.$

12.112. Kružnog cilindra $x^2+y^2 = R^2$ izmedju ravni $z = o$ i površi $z = R + \frac{x^2}{R}$

REŠENJE: $P = 3\pi R^2$.

12.113. Paraboličnog cilindra $y^2 = 2px$ izmedju ravni $z = o;\ z = y$ i $x = \frac{8}{9}p$.

REŠENJE:

$$P = \int_C z\, ds = \int_0^{\frac{8}{9}p} y\sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_0^{\frac{8}{9}p} y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{8}{9}p}\sqrt{2px+p^2}\, dx = \frac{98}{81}p^2.$$

d. POVRŠINSKI INTEGRALI

UVOD

1. Površinski integral prve vrste: Ako je S glatka dvostrana površ definisana jednačinama:

$$x = x(u,v);\ y = y(u,v);\ z = z(u,v)\quad [(u,v)\in D]$$

a $f(x,y,z)$ funkcija definisana i neprekidna na površi S onda je:

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D [f(x(u,v);\ y(u,v),\ z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

gde je:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

2. Ako jednačina površi S ima oblik $z = z(x,y)$ $[(x,y)\in D]$ gde je $z(x,y)$ jednoznačna diferencijalna funkcija, onda je

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

gde je $\quad p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$

Gornji integrali ne zavise od izbora strane površi S.

3. Površinski integral druge vrste: Ako je S glatka dvostrana površ, na kojoj je izabrana jedna od dveju strana, odredjena smerom normale $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ a $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ tri funkcije definisane i neprekidne na površi S onda je

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

Pri prelazu na drugu stranu površi ovaj integral dobija suprotan znak.

4. Stocesova formula: Ako su $P = P(x,y,z)$; $Q = (x,y,z)$ i $R = R(x,y,z)$ diferencijalne funkcije, a c prosta zatvorena glatka kriva koja ograničava glatku dvostranu površ S, onda važi sledeća Stocesova formula:

$$\oint\limits_{c} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, kosinusi pravca normale površi S, orijentisane na onu stranu, u odnosu na koju se obilazak konture c vrši suprotno kretanju kazaljke na časovniku.

5. Formula Ostrogradskog: Ako je S deo po deo glatka površ , koja ograničava oblast V, a $P=P(x,y,z)$ $Q = Q(x,y,z)$ $R = R(x,y,z)$ neprekidne funkcije

zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti V+S, onda važi formula Ostrogradskog:

$$\iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi pravca spoljne normale površi S.

ZADACI:

Izračunati sledeće površinske integrale:

12.114. $\iint\limits_{S}(6x + 4y + 3z)\,dS$, ako je S deo ravni $x+2y+3z = 6$ koja pripada prvom oktantu.

REŠENJE: Kako je $z = \frac{1}{3}(6-x-2y)$, to je

$$dS = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy.$$

Otuda se dobija da je

$$\iint\limits_{S}(6x+4y+3z)\,dS = \frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3 dy \int_0^{6-2y}(5x+2y+6)\,dx =$$

$$= 2\sqrt{14}\int_0^3 (y^2-10y+21)\,dy = 54\sqrt{14}.$$

12.115. $\iint\limits_{S}\frac{dS}{(1+x+z)^2}$, ako je S deo ravni $x+y+z = 1$, koji pripada prvom oktantu

REŠENJE: $I = \sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$

12.116. $\iint (x^2+y^2)dS$; ako je S sfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$

REŠENJE: Iz jednačine $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ dobijamo:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z};\quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z}.$$

Tada je:

$$\iint_S (x^2+y^2)\, dS = 2\iint_D (x^2+y^2)\frac{\sqrt{z^2+x^2+y^2}}{|z|}dx\, dy =$$

$$= 2a\iint \frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\, dx\, dy =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\, r\, dr = \frac{8}{3}\pi a^4.$$

12.117. $\iint_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$; ako je S deo cilindra $x^2+y^2=R^2$ ograničen ravnima: $x=0$; $z=0$; $y=0$; $z = m$.

REŠENJE: Kako je $x^2+y^2 = R^2$ to je $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$;

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \text{ i}$$

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\, dz\, dy = \sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}\, dz\, dy =$$

$$= \frac{R\, dz\, dy}{\sqrt{R^2-y^2}}$$

Tada je:

$$\iint_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} = \iint_D \frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R\, dy\, dz}{\sqrt{R^2-y^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ \text{arc tg}\ \frac{m}{R}.$$

12.118. $\iint_S (y+z+\sqrt{a^2-x^2})\, dS$ ako je S deo cilindra $x^2+y^2 = a^2$, izmedju ravni $z = 0$; $z = h$.

REŠENJE:

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} \quad \text{gde je: } dS = a\frac{dx\, dz}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\iint_{S_1} = a\iint_D \frac{z\, dx\, dz}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{i}$$

$$\iint_{S_2} = a\iint_D \left(2+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) dx\, dz.$$

Tada se dobija:

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 2a\int_0^h dz\int_{-a}^{a}\left(1+\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right) dx =$$

$$= 2a\int_0^h (2a+\pi z)\, dz = ah\,(4a+\pi h).$$

12.119. $\iint_S \frac{dS}{x+\frac{y^2}{2}+z}$; ako je S deo cilindra $x = 2-\frac{y^2}{2}$ ograničen ravnima $x = 0$; $z = 0$; $z=1$.

REŠENJE:

$$\iint_S = \iint_D \frac{\sqrt{1+y^2}}{z+z^2}\, dy\, dz = \int_{-2}^{2}\sqrt{1+y^2}\, dy\int_0^1\frac{dz}{z^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{arc tg}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[y\sqrt{1+y^2}+\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right]\Big|_{-2}^{2}.$$

12.120. $\iint_S x(y^2+z^2)dS$ ako je površ S data jednačinom $x = \sqrt{9-y^2-z^2}$.

REŠENJE: $I = \frac{243}{2}\pi$.

12.121. $\iint (y^2+z^2)\, dS$ ako je površ S data jednačinom $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$

REŠENJE: $I = \frac{4a^4\pi}{3}$.

12.122. $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+z)^2}$; ako je S sfera $x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0$.

REŠENJE: Kako je $dS = \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$, to je

$$\iint\limits_S \frac{dS}{(1+z)^2} = \iint\limits_D \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-r^2}}} \cdot \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Ako stavimo smenu $1-r^2 = t^2$ dobijamo konačno:

$$\iint\limits_S = 2\pi \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = 2\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \pi.$$

12.123. $\iint\limits_S \frac{dS}{\sqrt{1+z}}$; po površi $x^2+y^2+z^2 = a^2;\ z \geq 0$

REŠENJE:

$$\iint\limits_S \frac{dS}{\sqrt{1+z}} = \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{a^2-x^2-y^2}}} \cdot \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{a^2-r^2}}} \cdot \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

Ako se uvede smena $a^2-r^2 = t^2$ dobija se

$$\iint\limits_S = 2a\pi \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2a\int_1^{\sqrt{1+a}} du = 4a\pi(\sqrt{1+a}-1).$$

12.124. $\iint\limits_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dS$; gde je S polovina sfere $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

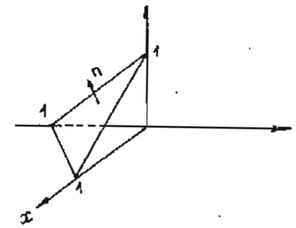
REŠENJE: $I = \pi R^3$.

12.125. $\iint\limits_S x^2y^2\,dS$; ako je S polovina sfere $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

REŠENJE: $I = \frac{2\pi R^6}{15}$

Izračunati sledeće površinske integrale:

12.126. $\iint\limits_S z\,dx\,dy + x\,dx\,dz + y\,dy\,dz$; ako je S gornji deo ravni $x - y + z = 1$ isečen koordinatnim ravnima



REŠENJE: Potrebno je izračunati tri integrala. Tako imamo da je:

$$I_1 = \iint\limits_S z\,dx\,dy = \iint\limits_D (1+y-x)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (1+y-x)\,dy = -\frac{1}{6}.$$

$$I_2 = \iint\limits_S x\,dx\,dz = -\iint\limits_D x\,dx\,dz = -\int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} dz = -\frac{1}{6}$$

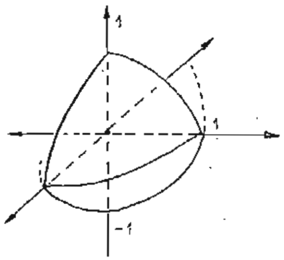
jer normala površi zaklapa tup ugao sa ravni xOz.

$$I_3 = \iint\limits_S y\,dy\,dz = \iint\limits_D y\,dy\,dz = \int_{-1}^0 y\,dy \int_0^{1+y} dz = -\frac{1}{6}.$$

Tada je konačno $\iint = I_1+I_2+I_3 = -\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$

(vidi sliku).

12.127. $\iint\limits_S x\,y\,z\,dx\,dy$; po spoljnoj strani sfere $x^2+y^2+z^2 = 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0$.



REŠENJE: $\iint\limits_S xy\, z\, dx\, dy = \iint\limits_{S_1} x\, y\, z\, dx\, dy - \iint\limits_{S_2} x\, y\, z\, dx\, dy = 2 \iint\limits_{S_1} x\, y\, z\, dx\, dy$

jer je u osmom oktantu $z < o$.

Tada je $\iint\limits_S x\, y\, z\, dx\, dy = 2 \iint\limits_D xy \sqrt{1-(x^2+y^2)}\, dx\, dy =$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2}\, dr = \frac{2}{15}.$$

12.128. $\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2 + y^2}\, dx\, dy$; ako je S donja strana kruga $x^2 + y^2 \leq a^2$.

REŠENJE: $\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2} dx\, dy = - \iint\limits_D \sqrt[4]{x^2+y^2}\, dx\, dy =$

$$= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt[4]{r^2}\; r\, dr = - 2\pi \left. \frac{r^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right|_0^a = - \frac{4}{5} \pi\, a^{5/2}.$$

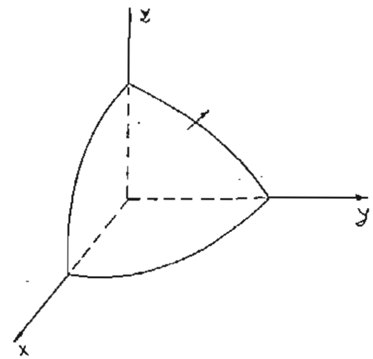
12.129. $\iint\limits_S 2\, dx\, dy + y\, dx\, dz - x^2 z\, dy\, dz$; ako je S spoljna strana onog dela elipsoida $4\, x^2 + y^2 + 4\, z^2 = 1$ koji pripada prvom oktantu.

REŠENJE: $I = \frac{4}{3} (\pi - \frac{1}{5})$.

12.130. $\oint\!\!\oint y\, dx\, dz$; ako je S unutrašnja strana tetraedra koji odredjuju ravni: $x+y+z = 1$; $x = o$; $y = o$; $z = o$.

REŠENJE: $I = - \frac{1}{6}$.

12.131. $\iint\limits_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dx\, dz + z^2\, dx\, dy$; ako je S spoljna strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, koja pripada prvom oktantu /vidi crtež/



REŠENJE:

$J = \frac{3\pi a^4}{8}$.

12.132 $\iint\limits_S x\, dy\, dz + y\, dx\, dz + z\, dx\, dy$ po spoljnoj strani sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

REŠENJE: Dati interval predstavlja zbir tri integrala. Prvi od njih je

$$\iint\limits_S x\, dx\, dz = 2 \iint\limits_D \sqrt{a^2-z^2-y^2}\, dy\, dz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\; r\, dr =$$

$$= - 2\pi \int_0^a (a^2-r^2)^{1/2}\, d\, (a^2-r^2) = - 4\pi \left. (a^2-r^2)^{3/2} \right|_0^a =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}$$

Usled simetrije i ostala dva integrala imaju istu vrednost pa je konačno

$= 4 \quad a^3$

12.133. $\iint y\,z\,dy\,dz + x\,z\,dz\,dx + x\,y\,dx\,dy$; gde je S spoljna strana tetraedra koji je odredjen ravnima $x = o$; $y = o$; $z = o$; $x + y + z = a$.

REŠENJE: $I = \frac{a^4}{8}$.

12.134. $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dx\,dz + (x-y)\,dx\,dy$ ako je S spoljna strana površi $x^2 + y^2 = z^2$ $(o \leq z \leq h)$.

REŠENJE: $I = o$.

Koristeći Stocesovu formulu izračunati sledeće krivolinijske integrale:

12.135. $\oint y\,dx + z\,dy + x\,dz$; ako je c krug odredjen jednačinama: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x + y + z = o$.

REŠENJE:

$$\oint = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} [\cos\alpha\,(-1) - \cos\beta(+1) + \cos\gamma(-1)]\ dS =$$

$$= -\iint\limits_{(S)} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,dS = -\iint\limits_{D} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}\,dx\,dy =$$

$$= -3\iint\limits_{D} dx\,dy = -6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{\frac{a}{\sqrt{2+\sin^2\varphi}}} r\,dr =$$

$$= -3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (r^2)\Big|_{0}^{\frac{a}{\sqrt{2+\sin^2 x}}} = -3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\,d\varphi}{2\sin 2\varphi} = 3a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{2+\sin 2\varphi} =$$

$$= -3a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{d}{1+u^2}}{2 + 2\frac{u}{1+u^2}} = -\frac{3}{2}a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2+u+1} =$$

$$= -\frac{3}{2}a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= -\sqrt{3}\,a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = -\sqrt{3}\,a^2 \operatorname{arc\,tg} t \Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= -\sqrt{3}\,a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -a^2\pi\sqrt{3}.$$

12.136. $\oint\limits_c (y-z)dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$; ako je c luk elipse odredjene jednačinama:

$x^2 + y^2 = a^2$; $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ $(a > o;\ h > o)$ koji je orijentisan u smeru suprotnom od smera kazaljke na časovniku, posmatrano sa pozitivnog smera ose Ox.

REŠENJE: $\oint (y-z)dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz =$

$$= \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS =$$

$$= -2\iint\limits_{S} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,dS =$$

$$= -2\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} \left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,dx\,dy =$$

$$= -\frac{2}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} (h+a)\,dx\,dy = -2\,a\pi\,(a+h).$$

12.137. $\oint\limits_c e^x dx + z(x^2+y^2)^{3/2}\,dy + y\,z^3\,dz$ gde je c linija odredjena presekom površi

$z = \sqrt{x^2+y^2}$; $x = o$; $x = 2$; $y = o$; $y = 1$.

12.138. $\int\limits_c (y^2 + z^2)\, dx + (z^2+x^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$; ako je c kriva $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$; $x^2 + y^2 = 2bx$; $z \geqslant 0$.

REŠENJE: $I = 2\pi ab^2$.

12.139. Neka je c zatvorena kontura koja pripada ravni

$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$

i ograničava površinu S pri čemu su $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$ kosinusi pravca normale. Naći:

$$\oint\limits_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

ako se kretanje vrši u pozitivnom smeru konture c.

REŠENJE: $I = \oint\limits_c (z \cos\beta - y \cos\gamma)\, dx +$

$+ (x \cos\gamma - z \cos\alpha) dy + (y \cos\alpha - x \cos\beta)\, dz =$

$$= \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\cos\beta - y\cos\gamma & x\cos\gamma - z\cos\alpha & y\cos\alpha - x\cos\beta \end{vmatrix} dS =$$

$$= 2 \iint\limits_S (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\, dS = 2\,S.$$

12.140. Transformisati površinski integral

$$\iint\limits_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dx\, dz + z^2\, dx\, dy,$$

ako je S zatvorena površ, y trojni uzet po oblasti koju ograničava ta površ

REŠENJE:

$$I = 2 \iiint\limits_V (x + y + z)\, dx\, dy\, dz.$$

12.141. Izračunati površinski integral

$$\oiint y^2 z\, dx\, dy + x z\, dy\, dz + x^2 y\, dx\, dz$$

gde je S spoljna strana površi koju obrazuju površi: $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ u prvom oktantu primenom formule Ostrogradskog.

REŠENJE: Kako je $P = xz$; $Q = x^2 y$; $R = y^2 z$ to je

$\dfrac{\partial P}{\partial x} = z$; $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = x^2$; $\dfrac{\partial R}{\partial z} = y^2$, pa je:

$$\oiint\limits_S = \iiint\limits_V (z+x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_0^{x^2+y^2} (z+x^2+y^2)\, dz =$$

$$= \iint\limits_D dx\, dy \left[\frac{1}{2} z^2 + z(x^2+y^2)\right]\Big|_0^{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{3}{2} \iint\limits_D (x^2+y^2)^2\, dx\, dy = \frac{3}{2} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 r^5\, dr = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{8}.$$

S a d r ž a j

Dragan Trifunović

1. MATEMATIČKA LOGIKA I/1-I/35

Dragan Trifunović

2. TEORIJA SKUPOVA II/1-II/52

Žarko Mijajlović

3. OPŠTE OSOBINE FUNKCIJA III/1-III/23

Šćepan Ušćumlić

3. POJAM FUNKCIJE REALNE PROMENLJIVE III/24-III/77

Žarko Mijajlović

4. R E L A C I J E IV/1-IV/23

Gojko Kalajdžić

5. GRUPOID.PODGRUPA.GRUPA.PRSTEN (KOLO). TELO (POLJE).BULOVSKA ALGEBRA. VEKTORSKI PROSTOR. V/1-V/128

Gojko Kalajdžić

6. LINEARNI ALGEBARSKI OBLICI VI/1-VI/120

Gojko Kalajdžić

7. KVADRATNI ALGEBARSKI OBLICI VII/1-VII/13

Zoran Šami

8. N I Z O V I VIII/1-VIII/41

Nada Djuranović

9. I Z V O D I IX/1-IX/52

Vladimir Savić

10. NEODREDJENI INTEGRALI X/1-X/41

Miloš Čanak

11. ODREDJENI INTEGRALI XI/1-XI/17

Miloš Čanak

12. POOPŠTENJE INTEGRALA XII/1-XII/45