UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

STOJAN RADENOVIĆ

NEKI REZULTATI O UREDJENIM LOKALNO KONVEKSNIM PROSTORIMA

(DOKTORSKA DISERTACIJA)

BEOGRAD
1979.

S A D R Ž A J

PREDGOVOR

Razmatrajući konkretne primere vektorskih prostora funkcija i nizova važnih za analizu, često se koriste pojmovi: nejednakosti, pozitivan, pozitivan operator, ... Mnogi topološki vektorski prostori, koje srećemo u funkcionalnoj analizi poseduju prirodno uredjenje i onda je od interesa ispitivati odnos topologije i tog uredjenja. Tako na primer, važno je znati, kada je pozitivna linearna forma neprekidna ili kada je neprekidna linearna forma jednaka razlici dveju pozitivnih neprekidnih linearnih formi. Dajući odgovor na ta i druga pitanja o odnosu topologije i uredjenja na vektorskom prostoru, nastala je teorija uredjenih normiranih, odnosno, Banahovih prostora, a zatim i teorija uredjenih lokalno konveksnih, odnosno, uredjenih topoloških vektorskih prostora. Prvi radovi iz ove oblasti funkcionalne analize, nastali su 1935-37 godine, dakle, kada je počela da se razvija teorija topoloških vektorskih prostora. Za razvoj teorije uredjenih topoloških vektorskih prostora, zaslužno je dosta matematičara, medju kojima su i: F.Riesz, L.Kantorovič, G.Frendethal, G.Birkhhoff, S.Kakutani, M.Krein, A,Rutman, H. Nakano, J.Namioka, H.Schaefer, N.Kung, Y.Wong i drugi. Detaljniji prikaz hronološkog razvoja ove teorije, dat je u (/37/, b), str.206. i u njenom predgovoru).

Rezultate koje izlažemo u ovoj disertaciji dobili smo razmatranjem odnosa uredjenja i topologije vektorske grupe, odnosno, uredjenja i linearne topologije ili lokalno konveksne topologije na vektorskom prostoru. Možemo da kažemo da su nam radovi /16/, /28/ i /29/ o topološkim vektorskim grupama sa jedne strane, i monografije /1/ i /37/,b) u kojima su izloženi poznati rezultati o topološkim vektorskim prostorima i o uredjenim topološkim vektorskim prostorima sa druge strane, bili inspiracija da se zainteresujemo za ovu oblast funkcionalne analize.

Pored uvodnog dela u kome samo navodimo osnovne pojmove, definicije i poznate rezultate, koje koristimo u nastavku rada, disertacija ima još osam celina.

U prvom delu detaljno izlažemo rezultate, koje smo dobili proučavanjem uredjenih topoloških vektorskih grupa (UTVG), odnosno, uredjenih lokalno konveksnih grupa (ULKG), sa osobinom otvorene rastavljivosti (Definicija 1.1.). Osobina "otvorena rastavljivost" je razmatrana u kategoriji uredjenih lokalno konveksnih prostora (ULKP), u /37/,c) i d)) i u kategoriji normiranih, odnosno, Banahovih prostora u /2/. Napominjemo da nam za sada nije poznat nijedan rad u kome se razmatraju TVG, odnosno, LKG sa konusom, na način kako su proučavani UTVP, odnosno, ULKP u /37/,a) i b). Inače, rezultati koje navodimo u ovom delu uglavnom se prirodno nadovezuju na poznate rezultate o ULKP sa osobinom otvorene rastavljivosti. Istaknimo i činjenicu, da vektorski prostor E UTVG $(E,C,\mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, ne mora biti generisan konusom C, kao u slučaju UTVP sa osobinom otvorene rastavljivosti.

U drugom delu navodimo rezultate, koje smo dobili razmatranjem uredjeno-konveksnih UTVG, odnosno, uredjeno-konveksnih ULKG (Definicija 2.1.). Tvrdjenjem 2.5. dokazujemo da je uredjeno-konveksna UTVG $(E,C,\mathcal{T})$ UTVP, ako i samo ako je $[x,x]$ $\mathcal{T}$-ograničen podskup, za svako $x \in E$, a tvrdjenjem 2.8. da konusi C i $\overline{C}^{\mathcal{T}}$ daju istu pridruženu uredjeno-konveksnu topologiju $\mathcal{T}_F$. Poslednje tvrdjenje je dokazano u /17/ za ULKP, koristeći prednorme, koje definišu datu lokalno konveksnu topologiju. Iz tvrdjenja 2.11. se vidi, da je diskretna ULKG uredjeno-konveksna, ako i samo ako je konus C anti-simetričan. U /17/ je proučavana i najfinija uredjeno-konveksna lokalno konveksna topologija na uredjenom vektorskom prostoru (E,C), pod nazivom lokalno o-konveksna topologija. Naša tvrdjenja 2.19, 2.22, i 2.23. odnose se na karakterizaciju najfinije linearne uredjeno-konveksne topologije, odnosno, najfinije lokalno konveksne grupe, koja je uredjeno-konveksna. Tako tvrdjenjem 2.23. dokazujemo da je $\gamma_F(E,E')$ najjača uredjeno-konveksna LKG na (E,C), koja je saglasna sa razdvojivom dualnošću $\langle E,E'\rangle (E'\subseteq E^{*})$ - za koju pretpostavljamo da postoji neprazna familija saglasnih uredjeno-konveksnih LKG.

Osnovna tvrdjenja trećeg dela sadrže uglavnom rezultate do kojih smo došli proučavanjem linearne uredjeno-ograničene topologije (UTVP $(E,C,\mathcal{T})$ je sa linearnom uredjeno-ograničenom topologijom, tj. $\mathcal{T}=\mathcal{T}^{b}$, ako je svaki uredjeno-bornivorni faden $\mathcal{T}$-topološki). Naime, tvrdjenjem 3.13. smo na primer dokazali da je $\mathcal{T}^{b}$ najfinija telesna linearna topologija na uredjenom vektorskom prostoru (E,C), koji je slab Risov prostor ($E=C-C$ i za svako $u,\ v\in C$ $[0,u]+[0,v]=[0,u+v]$). U /15/,a)) se pretpostavlja da je (E,C) Risov prostor, a u (/37/,b), str.75.) dokazan je odgovarajući rezultat za lokalno konveksnu uredjeno-ograničenu topologiju. Posledicom 3.14. smo pod istim uslovom za uredjeni vektorski prostor (E,C), dobili da je $\mathcal{T}^{b}=\mathcal{T}^{f}_{F}$, odnosno, da je $\mathcal{T}^{b}$ najfinija uredjeno-konveksna topologija na (E,C), dakle, uredjeno-konveksna topologija pridružena najfinijoj linearnoj topologiji $\mathcal{T}^{f}$ na E (oznaka iz /1/). Tvrdjenjima 3.16, 3.20. i 3.22. od kojih smatramo bitnim poslednje, dajemo potreban i dovoljan uslov za otvorenu rastavljivost UTVP $(E,C,\mathcal{T}^{b})$.

U četvrtom delu najpre navodimo neke rezultate, koji se odnose na Risove TVG (Definicija 4.1.), ističući razliku od RTVP, odnosno, RLKP (Primer 4.3. i Tvrdjenje 4.4.). Rezultati ovog dela odnose se na karakterizacije raznih klasa prostora u kategorijama RTVP i RLKP, kao i na ispitivanje njihovih naslednih osobina. Modifikacijom jednog rezultata iz (/37/,b), str.181-182), tvrdjenjem 4.7. dokazujemo, da se svaki topološki telesni faden l-ideala može da produži u topološki telesni faden prostora, a zatim tvrdjenjima 4.8, 4.9. i 4.10. i posledicom 4.11. da se svaki telesni bornivorni, zatvoren telesni bornivorni, lokalno topološki i zatvoren lokalno topološki faden l-ideala, može da produži u isti takav faden prostora. U nastavku dajemo karakterizacije bornoloških, kvazi-bačvastih, $\aleph_0$-kvazi-bačvastih, linearnih uredjeno-$\aleph_0$- bačvastih, lokalno topoloških i ultra-b-bačvastih RTVP. Na osnovu tih karakterizacija, tvrdjenja 4.8, 4.9, 4.10, i posledice 4.11. dokazali smo da je l-ideal bornološkog, kvazi-bačvastog, N_0-kvazi-bačvastog, (DF) -prostora, lokalno topološkog i ultra-b-bačvastog u indukovanoj topologiji, prostor istog tipa (Tvrdjenja: 4.13, 4.15, 4.18. i Posledice: 4.19, 4.20, i 4.28.). U kategoriji TVP (/1/ i /12/,a)) osim za lokalno topološke i ultra-b-bačvaste prostore, odgovarajuća tvrdjenja su tačna, samo za potprostore konačne kodimenzije. Nastavljajući četvrti deo rada, izlažemo rezultate koje smo dobili proučavanjem RLKP. Tako se iz primera 4.29. vidi da telesan omotač jako ograničenog podskupa, odnosno, Banahovog diska u RLKP ne mora biti jako ograničen podskup, odnosno, Banahov disk. Tvrdjenjem 4.30. dajemo potreban i dovoljan uslov, kada je u RLKP telesni omotač jako ograničenog podskupa jako ograničen podskup, a posledicom 4.31. dokazujemo da je to uvek tako u topološkom dualu E' svakog RLKP. Ovaj deo dalje nastavljamo izlaganjem rezultata, koji se odnose na karakterizaciju N_0-kvazi-bačvastih, uredjeno-N_0-kvazi-bačvastih, Risovih (DF)-prostora, Risovih-b-bačvastih, b'-prostora i b-prostora (Definicije: 4.35, 4.44, 4.46.). Karakterizacije ovih klasa prostora u kategoriji RLKP se dobijaju tako što se pojmovi: "b-bačva", "b-disk", "bornivorna-N_0-bačva", zamene sa "telesna-b-bačva", "telesni-b-disk", "telesna bornivorna-N_0--bačva", ... (Tvrdjenja: 4.33, 4.47, 4.48, i 4.49). Ovaj deo završavamo tvrdjenjem 4.50. kojim dokazujemo da se telesna konveksna okolina, telesna b-bačba i telesni-b-disk (modifikacijom rezultata iz /37/,b), str.181-182) l-ideala, mogu da produže u telesnu konveksnu okolinu, telesnu b-bačvu i telesni b-disk prostora, i posledicama 4.51. i 4.52. iz kojih se vidi da je l-ideal svakog Risovog b-bačvastog (b-prostora (DF)-prostora) u indukovanoj topologiji, prostor istog tipa.

Peti deo sadrži rezultate o pridruženom prostoru Risovom LKP, odnosno, Risovom TVP. Koristili smo rezultate iz

/18/, /22/,a) i d), /34/, i /37/,b). Iz (/37/,b), Posledica 15.2.) se zna da je pridružen bornološki prostor datom Risovom LKP, takodje Risov LKP. Tvrdjenjima 5.2.i 5.6, posledicama 5.3. i 5.11. i primerom 5.5. dajemo odgovor na odgovarajuće pitanje i za ostale klase Risovih LKP i Risovih TVP. Tako tvrdjenjem 5.2. dokazujemo da je pridružen kvazi-bačvast (b-bačvast, b-prostor i N_0-kvazi-bačvast)prostor datom Risovom LKP u kategoriji LKP, takodje Risov LKP, a primerom 5.5. da to ne mora biti tako za pridružene bačvaste (N_0-bačvaste i ultra-bornološke) prostore. Tvrdjenjem 5.6. smo dokazali da je u topološkom dualu Risovog LKP pridružen bačvast (N_0-bačvast) prostor datom Risovom LKP, Risov LKP, a tvrdjenjem 5.8. i primerom 4.29, da to ne mora biti tako za ultra-bornološke Risove LKP (telesan omotač Banahovog diska ne mora biti Banahov disk). Pored tvrdjenja 5.13. i 5.15. i posledice 5.14. koja se odnose na pridružene bornološke, kvazi-bačvaste i N_0-kvazi-bačvaste prostore datom Risovom TVP u kategoriji TVP, ističemo i tvrdjenje 5.10. i njegovu posledicu 5.11. Tvrdjenje 5.10. je isto kao u (/34/, Tvrdjenje (I.8.1.) ali je naš dokaz jednostavniji. Iz posledice 5.11. se vidi da topologija pridruženog bačvastog prostora datom LKP indukuje na potprostor prebrojive kodimenzije, topologiju pridruženog bačvastog prostora datog potprostora. Data posledica se ne može dokazati kao u (/34/, Tvrdjenje (I.8.1.)), jer se ne zna da li se bačva potprostora prebrojive kodimenzije može da produži u bačvu prostora, kao u slučaju potprostora konačne kodimenzije.

Klase ULKP, koje razmatramo u šestom delu naše disertacije, definišu se tako što se pojmovi: "bačvast", "kvazi-bačvast", "N_0-bačvast",... iz kategorije LKP, zamene pojmovima: "polu-bačvast", "polu-kvazi-bačvast", "polu-N_0-bačvast", ... Naime, iz /37/,c) se zna da je ULKP (E,C,$\mathcal{T}$) polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast), ako je svaki pozitivan E'_σ-ograničen (E'_β-ograničen) podskup, $\mathcal{T}$-ekvineprekidan, a iz /36/, da je ULKP (E,C,$\mathcal{T}$) P-bornološki, ako je svaki apsolutno konveksan gutajući podskup, koji guta pozitivne $\mathcal{T}$-ograničene podskupove, $\mathcal{T}$--okolina nule. Mi slično definišemo i polu-$\aleph_0$-bačvaste, odnosno, polu-$\aleph_0$-kvazi-bačvaste prostore (Definicije 6.17. i 6.18.). Osnovni rezultati ovog dela odnose se na osobine navedenih klasa prostora, koje nisu date u pomenutim radovima. Definicijom 6.1. i tvrdjenjem 6.2. dajemo jednostavnu dualnu karakterizaciju polu-bačvastih (polu-kvazi-bačvastih) prostora, a tvrdjenjima 6.19. i 6.20. istu za polu-$\aleph_0$-bačvaste (polu-$\aleph_0$-kvazi-bačvaste), odnosno, polu-σ-bačvaste (polu-σ--kvazi-bačvaste) prostore. Pored ostalih tvrdjenja u kojima navodimo odnose i karakterizacije definisanih klasa prostora, ističemo još i tvrdjenja: 6.13, 6.14, 6.15, 6.16, i 6.31. Na osnovu tvrdjenja 6.13. i 6.14. u kojima dajemo odnos slabo i jako ograničenih podskupova prostora E'_σ i F'_σ, gde je F gusta hiper ravan u E, dokazujemo da je potprostor (F, $C\cap F$) u indukovanoj topologiji istog tipa kao prostor (polu-bačvast, polu-kvazi-bačvast), ako je kao potprostor snabdeven jakom topologijom, odnosno, topologijom $\beta^*(F,F')$, gust u prostoru $(E,C,\beta(E,E')$, odnosno, u prostoru $(E,C,\beta^*(E,E'))$. Ne znamo da li je potprostor $(F,C\cap F,\mathcal{T}|F)$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) ako je $(E,C,\beta(E,E')) = L\oplus(F,C\cap F,\beta(F,F'))$ $((E,C,\beta^*(E,E')) = L\oplus(F,C\cap F,\beta^*(F,F')))$ - tvrdjenja 6.15. i 6.16.

U sedmom delu navodimo neka zapažanja o odnosu konvekse bornologije i uredjenja, na proizvoljnom vektorskom prostoru E, koristeći pri tome rezultate iz /4/,a), /7/ i /24/. Pored ostalih tvrdjenja u kojima razmatramo pridružene bornologije $\mathcal{B}_D$, $\mathcal{B}_F$ i $\mathcal{B}_S$, kao i osobine prirodne bornologije $\mathcal{B}_\omega$ na uredjenom vektorskom prostoru (E,C), smatramo da je od interesa tvrdjenje 7.8. i posledica 7.9. Naime, tvrdjenjem 7.8. dokazujemo da svaka konveksna telesna i kompletna bornologija na slabom Risovom prostoru (E,C) ($E = C-C$ i $[o,u] + [o,v] = [o,u+v]$, za svako $u,v \in C$), ima bazu od telesnih Banahovih diskova a posledicom 7.9. da je prostor $(E,C,\mathcal{B}_\omega)$ kompletan, odnosno, Maki-kompletan, ako i samo ako je $[-x,x]$ Banahov disk, za svako $x \in C$. U /7/ je dokazano isto tvrdjenje, ali pod uslovom da je (E,C) Risov prostor. Za dokaz našeg tvrdjenja, iskoristili smo činjenicu da je podskup A uredjenog vektorskog prostora (E,C) telesan, ako je $A = S(A)$, gde je $S(A) = \bigcup \{[-a,a] \; ; \; a \in A \cap C\}$.

Rezultati navedeni u osmom delu kao dodatku, predstavljaju u stvari nastavak našeg proučavanja nekih klasa LKP navedenih u /27/. Na početku najpre navodimo neka tvrdjenja, koja sadrže rezultate o lokalno konveksnim grupama, od kojih ističemo: 8.1, 8.3. i 8.4. Na osnovu tvrdjenja 8.1. čiji je dokaz naveden i u /28/ i prema (/35/,a), Lema 1), tvrdjenjem 8.3. dokazali smo da je i gusta hiper-ravan u svakoj LKG ili ultra-gusta ili skoro zatvorena. U (/28/, str.65.) definisana je klasa $*$-bornoloških LKG i u istom radu je ostavljeno kao otvoreno pitanje, da li je konačno kodimenzioni potprostor $*$-bornološke LKG u indukovanoj topologiji, $*$-bornološka LKG. Iz tvrdjenja 8.4. se vidi, da je odgovor potvrdan. Od tvrdjenja koja se odnose na rezultate o C-refleksivnim prostorima, koje smo definisali u /27/ b-refleksivnim prostorima i topologiji TE′ (proučavani u /4/,b), izdvajamo: 8.17, 8.19. i 8.22. kao i primer 8.18. Tako tvrdjenjem 8.19.dajemo karakterizaciju ultra-bornoloških prostora, preko topologije TE′, a tvrdjenjem 8.17. dokazujemo da je svaki C-refleksivan prostor hipo-Makijev (pogledati /4/,b)), odnosno, primerom 8.18. da postoji hipo-Makijev prostor, koji nije C-refleksivan. Ispitujući dalje nasledne osobine raznih tipova polu-refleksivnih LKP, izdvajamo tvrdjenja 8.26, 8.28. i posledicu 8.29. koja se odnose na konačno kodimenzioni potprostor. Naime, tvrdjenjem 8.26. dokazujemo da potprostor F, normiranog polu-refleksivnog (p-polu-refleksivnog) prostora nije polu-refleksivan (p-polu-refleksivan), ako nije zatvoren, a tvrdjenjem 8.28. da je svaka skoro zatvorena hiper-ravan polu-refleksivnog (p-polu-refleksivnog, β^*-polu-refleksivnog) LKP, u indukovanoj topologiji istog tipa, odnosno, da ultra-gusta hiper ravan polu-refleksivnog (p-polu-refleksivnog, β^*-polu-refleksivnog) prostora u indukovanoj topologiji nije istog tipa. Prema posledici 8.29. gusta hiper ravan polu-refleksivnog normiranog prostora je uvek ultra-gusta (pogledati /35/, a), Lema 1.).

Na kraju, smatramo da treba da istaknemo i veliku upornost našeg mentora Dr Branislava Mirkovića, u nastojanju da nam svojim savetima, prilikom izrade disertacije pomogne, na čemu mu ovom prilikom zahvaljujemo.

0. UVODNI DEO

U ovom delu najpre navodimo poznate algebarske osobine vektorskih prostora koji su snabdeveni relacijom delimičnog uredjenja, odnosno, jednom refleksivnom i tranzitivnom relacijom "$\leqslant$". Inače, koristićemo pojmove i oznake iz /10/ i /37/, a) i b).

Neka je E vektorski prostor nad poljem R realnih brojeva. Podskup A prostora E je uravnotežen, ako je $\lambda A \subseteq A$, kad god je $|\lambda| \leqslant 1$. Presek i unija proizvoljne familije uravnoteženih podskupova je uravnotežen podskup. Presek svih uravnoteženih podskupova koji sadrže dati podskup A, čini uravnoteženi omotač za A, i to je skup $\bigcup\limits_{|\lambda|\leqslant 1} \lambda A$.

Podskup A je konveksan, ako je $\lambda A + \mu A \subseteq A$, za $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ i $\lambda + \mu = 1$. Presek proizvoljne familije konveksnih podskupova je konveksan podskup. Konveksan omotač datog podskupa A je presek svih konveksnih podskupova koji sadrže A, i to je skup svih suma oblika: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ i $x_i \in A$.

Podskup A je apsolutno konveksan, ako je uravnotežen i konveksan. Apsolutno konveksan omotač podskupa A je skup svih suma oblika: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant 1$ i $x_i \in A$.

Kažemo da podskup A guta podskup B, ako postoji $\lambda_0 > 0$, tako da je $B \subseteq \lambda A$, za svako λ za koje je: $|\lambda| \geqslant \lambda_0$. Ako A guta konačne podskupove od E, onda kažemo da je A gutajući.

Pod konusom u vektorskom prostoru E podrazumevamo bilo koji neprazan konveksan podskup C, za koji je $\lambda C \subseteq C$, kad god je $\lambda \geqslant 0$. Tako na primer, $\{0\}$, bilo koji potprostor F i ceo prostor E čine konuse u E.

Jasno je da konus C u E indukuje delimično uredjenje "$\leqslant$" na sledeći način: ako x, $y \in E$, onda je $x \leqslant y$, ako $y - x \in C$. Dobijena relacija "$\leqslant$" je saglasna i sa vektorskom strukturom u E, naime, ako $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ i $\lambda \geqslant 0$, onda je $x + y \geqslant 0$ i $\lambda x \geqslant 0$. Tačno je i obrnuto, svakom delimičnom uredjenju "$\leqslant$"

koje je saglasno sa vektorskom strukturom odgovara konus $C = \{x \mid x \geqslant 0\}$ koji u E indukuje baš dato uredjenje. Dakle, par (E, C) će nam označavati da je E uredjeni vektorski prostor.

Konus C je anti-simetričan, ako je $C \cap (-C) = \{0\}$, odnosno, ako je uredjenje indukovano konusom C anti-simetrično. Lako se dokazuje da su $C - C$ i $C \cap (-C)$ potprostori od E.

Kažemo da je uredjen vektorski prostor (E, C) generisan konusom C, ako je $E = C - C$. Inače, prostor E je generisan konusom C, ako i samo ako je uredjenje indukovano konusom C usmereno (za svaka dva elementa $x, y \in E$ postoji $z \in E$, tako da je $x \leqslant z$ i $y \leqslant z$).

Uredjen vektorski prostor (E, C) je Arhimedov (skoro Arhimedov), ako je $x \leqslant 0$, kad god je $nx \leqslant y$ ($x = 0$, kad god je $-y \leqslant nx \leqslant y$), za sve pozitivne cele brojeve i neko $y \in E$.

Intervalom u uredjenom vektorskom prostoru (E, C) zovemo svaki skup oblika: $[x,y] = \{z \in E: x \leqslant z \leqslant y\} = (x + C) \cap (y - C)$. Očigledno je svaki interval konveksan podskup od E, a ako je oblika $[-x, x]$, on je onda i uravnotežen. Ako je pri tome interval $[-x, x]$ gutajući, onda elemenat $x \in E$ zovemo uredjenom jedinicom u E. Podskup A uredjenog vektorskog prostora (E, C) je uredjeno-ograničen, ako je sadržan u nekom intervalu $[x, y]$.

Podskup A uredjenog vektorskog prostora (E, C) je majoriran (minoriran) u E, ako za svaki elemenat $a \in A$, postoji $x \in E$, tako da je $a \leqslant x$ ($x \leqslant a$). Elemenat $x \in E$ se onda zove gornja (donja) granica skupa A. Ako skup gornjih (donjih) granica skupa A ima najmanji (najveći) elemenat, onda kažemo da A ima supremum (infimum).

Kažemo da uredjen vektorski prostor (E, C) ima osobinu Risove rastavljivosti, ako je $[0, u] + [0, v] = [0, u+v]$, kad god su $u, v \in C$. Ako je E još i generisan konusom C, onda se prostor (E, C) zove slab Risov prostor. Inače, uredjen vektorski prostor (E, C) je Risov, ako je C anti-simetričan konus i ako za bilo koja dva elementa $x, y \in E$, postoji najmanja gornja granica, odnosno, $\sup(x, y)$.

Sada navodimo primere nekih uredjenih vektorskih prostora:

1) (R, R^+) je uredjen vektorski prostor realnih brojeva. Takvo uredjenje se zove obično i ono je indukovano konusom R^+ nenegativnih realnih brojeva.

2) Ako je E vektorski prostor realnih funkcija na proizvoljnom skupu S, onda u E imamo prirodno uredjenje: $f \leq g$, ako i samo ako je $f(x) \leq g(x)$, za svako $x \in S$.

3) Slično se definišu prirodna uredjenja na prostoru ω svih realnih nizova $\{\lambda_n\}$ i njegovim potprostorima:

m: prostor ograničenih realnih nizova;

c: prostor konvergentnih realnih nizova;

c_0: prostor svih nula nizova;

l^p: prostor svih l^p - zbirljivih realnih nizova;

Ako je A neki podskup uredjenog vektorskog prostora (E, C), onda uvodimo oznake (/37/, a)):

$F(A) = (A + C) \cap (A - C) = [A]$;

$D(A) = \{ x \in A : x = \lambda x_1 - (1 - \lambda) x_2, \lambda \in [0, 1] , x_1, x_2 \in A \cap C \}$;

$B(A) = \bigcup \{ [-u, w] : u, w \in A \cap C \}$;

$S(A) = \bigcup \{ [-u, u] : u \in A \cap C \}$;

Kažemo da je podskup A uredjeno-konveksan, ako je $A = F(A)$, o-konveksan, ako je konveksan i uredjeno-konveksan, apsolutno uredjeno-konveksan, ako je $S(A) \subseteq A$, apsolutno dominantan, ako je $A \subseteq S(A)$, telesan, ako je $A = S(A)$, rastavljiv, ako je $A = D(A)$, pozitivno uredjeno-konveksan, ako je $(A - C) \cap C \subseteq A$ i pozitivno dominantan, ako je $A \subseteq A \cap C - C$. $F(A)$ se zove uredjeno-konveksan omotač podskupa A a $D(A)$ njegovo rastavljivo jezgro. Inače, $F(A) = \bigcup \{ [a, b], a \leq b, a, b \in A \}$, a ako je A apsolutno konveksan podskup od E, onda je $D(A) = \Gamma(A \cap C) = \mathrm{Co}(-(A \cap C) \cup (A \cap C))$ (/37/, b)). Ako je $A \subseteq C$, onda je $F(A) = S(A)$, odnosno, za svaki podskup $A \subseteq E$ je: $F(A \cap C) = S(A \cap C) = S(A)$. Ako je (E, C) Risov prostor, onda je podskup $A \subseteq E$ telesan, ako i samo ako zadovoljava sledeću osobinu: $|x| \leqslant |y|$ i $y \in A \Rightarrow x \in A$. Svakom podskupu $A \subseteq E$ možemo pridružiti njegovo telesno jezgro (najveći telesan podskup sadržan u A) i njegov telesan omotač (najmanji telesan podskup koji sadrži A). Tako na primer, ako je (E, C) Risov prostor, onda je telesan omotač skupa A: $S_A = \bigcup \{[-|a|, |a|], a \in A\}$, a telesno jezgro sk (A) $= \bigcup \{[-a, a] : [-a, a] \subseteq A\}$. Ako je A apsolutno uredjeno-konveksan podskup, onda je $sk(A) = S(A)$, a ako je A apsolutno dominantan podskup, onda je $S_A = S(A)$.

Neka je (E, C) uredjen vektorski prostor. Linearna forma f na uredjenom vektorskom prostoru je uredjeno-ograničena, ako je ograničena na uredjeno-ograničenim podskupovima od E i ona je pozitivna, ako je $f(x) \geqslant 0$, za svako $x \in C$. Ako su E^*, E^b i C^* redom algebarski dual, prostor uredjeno-ograničenih linearnih formi i skup pozitivnih linearnih formi, onda je $C^* \subseteq E^b \subseteq E$. C^* je očigledno konus u E^*, tako da je (E^*, C^*) uredjen vektorski prostor. Za svaki potprostor F od E^*, smatraćemo da je uredjen konusom $F \cap C^*$. Za potprostor E^b od E^*, smatramo dakle da je uvek uredjeno-konveksan, jer je $(E^b + C^*) \cap (E^b - C^*) = E^b$. Potprostor $C^* - C^*$ od E^* zove se uredjeni dual od (E, C), i u opštem slučaju je $C^* - C^* \neq E^b$. Interesantni su oni uredjeni vektorski prostori za koje je $C^* - C^* = E^b$. U (/37/, b), str. 10) dokazana je Risova teorema: ako je (E, C) slab Risov prostor, onda je $C^* - C^* = E^b$ i (E^b, C^*) je tada Risov prostor (vektorska rešetka).

Ako je $A \subseteq E$, onda pod polarom skupa A u algebarskom dualu E^* podrazumevamo skup: $A^o = \{f \in E^* : f(a) \leqslant 1,$ za svako $a \in A\}$. Tako dokazujemo da je $C^o = -C^*$. Ostale pojmove i osobine uredjenih vektorskih prostora u ovom delu nećemo navoditi. Opširnije o tome nalazimo u /10/, /21/, /25/, /33/ i /37/, a) i b).

U nastavku ovog dela navodimo osnovne činjenice o topološkim vektorskim prostorima i topološkim vektorskim grupama, koje koristimo u sledećim delovima rada.

Definicije TVP (topoloških vektorskih prostora) i

LKP (lokalno konveksnih prostora) nalazimo u /1/, /14/, /19/, /30/ i /33/ a definicije TVG (topoloških vektorskih grupa) i LKG (lokalno konveksnih grupa) u /16/, /28/ i /29/. Tako na primer, pod parom $(E,\mathcal{T})$ podrazumevamo TVP, ako su preslikavanja: $(x, y)\to x + y$ i $(\lambda, x)\mapsto \lambda x$ prostora $(E,\mathcal{T}) \times (E,\mathcal{T})\to(E,\mathcal{T})$ i $K \times (E,\mathcal{T})\to(E,\mathcal{T})$ neprekidna. Ako je polje K jednako polju R realnih brojeva, onda je $(E,\mathcal{T})$ realan TVP. Inače, smatramo da je K snabdeveno običnom topologijom. Par $(E,\mathcal{T})$ je TVG, ako pretpostavimo da je K snabdeveno diskretnom topologijom. Svaki TVP $(E,\mathcal{T})$ ima osobinu da topologija $\mathcal{T}$ ima bazu okolina nule od zatvorenih uravnoteženih i gutajućih podskupova. Ako $\mathcal{T}$ ima bazu okolina nule od konveksnih podskupova, onda je TVP $(E,\mathcal{T})$ lokalno konveksan prostor. LKG (lokalno konveksna grupa) je TVG koja za bazu okolina nule ima apsolutno konveksne podskupove. Napominjemo da je TVG (LKG) topološki vektorski prostor (lokalno konveksan prostor), ako i samo ako ima bazu okolina nule od gutajućih podskupova.

Pod bačvom u LKP $(E,\mathcal{T})$ podrazumevamo svaki zatvoren apsolutno konveksan gutajući podskup. Podskup $V\subseteq E$ je bačva u LKP $(E,\mathcal{T})$, ako i samo ako je V^{o} (polara u odnosu na dualnost $\langle E, E'\rangle$ - gde je E' topološki dual prostora $(E,\mathcal{T})$) E'_{σ} - ograničen podskup. Podskup $A\subseteq E$ je $\mathcal{T}$-ograničen, ako ga guta svaka okolina nule. Ograničene podskupove pridružene jake topologije $\beta(E, E')$ prostora $(E,\mathcal{T})$, zovemo jako ograničenim. Podskup $A\subseteq E$ je jako ograničen, ako i samo ako ga guta svaka bačva prostora $(E,\mathcal{T})$. Napominjemo da svaka lokalno konveksna topologija $\mathcal{T}$ ima bazu okolina nule od zatvorenih gutajućih i apsolutno konveksnih podskupova, odnosno, od bačvi prostora $(E,\mathcal{T})$. Ako bačva V prostora $(E,\mathcal{T})$ guta sve $\mathcal{T}$-ograničene podskupove, onda je ona bornivorna. Podskup $V\subseteq E$ je bornivorna bačva, ako i samo ako je V^{o} E'_{σ} - - jako ograničen podskup. Topologija $\beta(E, E')$ ($\beta^{*}(E, E')$) ima bazu okolina nule od svih bačvi (bornivornih bačvi) prostora $(E,\mathcal{T})$.

LKP $(E,\mathcal{T})$ je bačvast, ako je svaka bačva $\mathcal{T}$- okolina nule, odnosno, ako i samo ako je $\mathcal{T}=\beta(E, E')$. Prostor $(E,\mathcal{T})$ je kvazi-bačvast, ako je svaka bornivorna bačva $\mathcal{T}$-okolina nule, odnosno, ako i samo ako je $\mathcal{T}=\beta^*(E, E')$. Prostor $(E,\mathcal{T})$ je Makijev, ako je $\mathcal{T}=\tau(E, E')$, gde je $\tau(E, E')$ topologija uniformne konvergencije na familiji svih E'_σ - kompaktnih apsolutno konveksnih podskupova. Apsolutno konveksan podskup $V\subseteq E$ je bornivoran, ako guta sve $\mathcal{T}$-ograničene podkupove i onda kažemo da je prostor $(E,\mathcal{T})$ bornološki, ako je svaki bornivorni apsolutno konveksan podskup $\mathcal{T}$-okolina nule. LKP $(E,\mathcal{T})$ je bornološki, ako i samo ako je $\mathcal{T}=\tau(E, E')$ i $E'=\widetilde{E}'$ ($\widetilde{E}'$ - prostor linearnih formi koje su ograničene na $\mathcal{T}$-ograničenim podskupovima). LKP $(E,\mathcal{T})$ je ultra-bornološki, ako je svaki apsolutno konveksan podskup koji guta Banahove diskove, $\mathcal{T}$-okolina nule. Slično kao za bornološke prostore, imamo da je LKP $(E,\mathcal{T})$ ultra-bornološki, ako i samo ako je $\mathcal{T}=\tau(E, E')$ i $E'=\dot{E}'$ ($\dot{E}'$ - prostor linearnih formi koje su ograničene na Banahovim diskovima prostora $(E,\mathcal{T})$). Inače, $\mathcal{T}$-ograničen apsolutno konveksan podskup A je Banahov disk, ako je E_A (linearni omotač potskupa A) Banahov prostor u norma topologiji. Norma u prostoru E_A je u stvari funkcional Minkovskog: $p_A(x)=\inf\{\lambda>0 : x\in\lambda A\}$ i (E_A, p_A) je normiran prostor, jer je $(E,\mathcal{T})$ razdvojen LKP. Pod $\aleph_0$-bačvom LKP $(E,\mathcal{T})$ podrazumevamo svaku bačvu $V=\bigcap_{n=1}^{+\infty}V_n$, gde je $(V_n)n\in N$ niz zatvorenih apsolutno konveksnih $\mathcal{T}$-okolina nule. Ako je V bornivorna bačva, onda kažemo da je V $\aleph_0$-bornivorna bačva. LKP $(E,\mathcal{T})$ je prostor tipa (DF), ako je $\aleph_0$-kvazibačvast (svaka $\aleph_0$-bornivorna bačva je $\mathcal{T}$-okolina nule) sa fundamentalnim nizom $\mathcal{T}$-ograničenih podskupova.

Navedeni pojmovi i klase prostora se prirodno definišu i u kategoriji TVP (pogledati /1/). Uvodjenjem niza podskupova (fadena) vektorskog prostora E uopštava se pojam konveksnog skupa. Naime, pod fadenom u vektorskom prostoru E podrazumevamo jedan niz $\mathcal{V}=(V_n)$ uravnoteženih gutajućih podskupova za koje je $V_{n+1}+V_{n+1}\subseteq V_n$, za svako $n\in N$.

Ako je $V \subseteq E$ apsolutno konveksan gutajući podskup, onda on generiše prirodni faden $(\frac{1}{2^{n-1}} V)_{n \in N}$. Ako je $(E, \mathcal{T})$ TVP, onda svaka $\mathcal{T}$-okolina nule generiše faden (nije obavezno jedinstven) čiji su članovi V_n $\mathcal{T}$-okoline nule. Za takav faden kažemo da je $\mathcal{T}$-topološki. Zaista, ako je V $\mathcal{T}$-okolina nule TVP $(E, \mathcal{T})$, onda postoji $\mathcal{T}$-okolina nule U, tako da je $U + U \subsetneq V$, ... i onda je $V_1 = V$, $V_2 = U$, itd. Ako su članovi fadena $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in N}$ $\mathcal{T}$-zatvoreni (bornivorni), onda kažemo da je $\mathcal{U}$ zatvoren (bornivoran) faden. TVP $(E, \mathcal{T})$ je onda bačvast (bornološki), ako je svaki zatvoreni (bornivorni) faden $\mathcal{T}$-topološki. Prostor $(E, \mathcal{T})$ je kvazi-bačvast, ako je svaki zatvoreni bornivorni faden $\mathcal{T}$-topološki. Napominjemo da se iz /1/ zna, da na primer bačvast LKP ne mora biti bačvast kao TVP. Slično se dobija i za bornološke i kvazi bačvaste prostore. Opširnije o ovim klasama TVP nalazimo u /1/.

Ako je $(E, \mathcal{T})$ TVP onda sve apsolutno konveksne $\mathcal{T}$-okolina nule čine bazu jedne lokalno konveksne topologije $\mathcal{T}^{o}$ na E. Onda je prostor $(E, \mathcal{T}^{o})$ LKP pridružen TVP $(E, \mathcal{T})$. Topologija $\mathcal{T}^{o}$ je najjača lokalno konveksna topologija slabija od $\mathcal{T}$. Slično se i LKG $(E, \mathcal{T})$ pridružuje lokalno konveksna topologija $loc\mathcal{T}$ (pogledajte /28/), koja za bazu okolina nule ima apsolutno konveksne $\mathcal{T}$-okoline nule. Ta ko na primer, ako je $(E, \mathcal{T})$ diskretna LKG, onda je $loc\mathcal{T} = \mathcal{C}(E, E^{*})$, odnosno, $loc\mathcal{T}$ je najjača lokalno konveksna topologija na E. U /28/ se proučavaju razne klase LKG, slično klasama LKP. Tako na primer, LKG $(E, \mathcal{T})$ je bačvasta, ako je svaki zatvoren apsolutno konveksan podskup od E, čiji je linearni omotač otvoren, $\mathcal{T}$-okolina nule. Dokazano je, da je LKG $(E, \mathcal{T})$ bačvasta, ako i samo ako je LKP $(E, loc\mathcal{T})$ bačvast. LKG $(E, \mathcal{T})$ je Makijeva, ako je $\mathcal{T} = \mathcal{V}(E, E')$ (oznaka u /16/) gde je $\mathcal{V}(E, E')$ topologija uniformne konvergencije na E'_{σ}-kompletnim podskupovima. Diskretna LKG $(E, \mathcal{T})$ je dakle Makijeva, jer je $\mathcal{T} = \mathcal{V}(E, E^{*})$.

Na vektorskom prostoru se pored topoloških struktura uvode i takozvane bornološke strukture. Naime, familija $\mathcal{B}$

podskupova od E čini jednu bornologiju, ako je $\bigcup_{A\in\mathcal{B}} A = E$, zatim ako $A\in\mathcal{B}$, kad god $B\in\mathcal{B}$ i $A\subseteq B$, i ako je konačna unija elemenata familije $\mathcal{B}$ takodje elemenat familije $\mathcal{B}$. Bornologija $\mathcal{B}$ na vektorskom prostoru E je vektorska, ako su preslikavanja: $(E,\mathcal{B}) \times (E,\mathcal{B}) \to (E,\mathcal{B})$ i $K \times (E,\mathcal{B}) \to (E,\mathcal{B})$ definisana kao $(x, y) \to x + y$ i $(\lambda, x) \to \lambda x$, ograničena. Polje K je snabdeveno prirodnom bornologijom. Vektorska bornologija ima bazu ograničenih podskupova od uravnoteženih skupova $B\in\mathcal{B}$. Kažemo da je $\mathcal{B}$ konveksna bornologija na vektorskom prostoru E, ako ima bazu od apsolutno konveksnih podskupova. Opširnije o bornološkim prostorima, odnosno, o konveksnim bornologijama nalazimo u /4/, a) i /24/. Prostor linearnih formi koje su ograničene na elementima bornologije $\mathcal{B}$ zovemo bornološki dual. U /24/ je dat primer konveksne bornologije čiji se bornološki dual svodi na $\{0\}$. Zato su od interesa takozvane t-razdvojene konveksne bornologije, odnosno, one konveksne bornologije na vektorskom prostoru E, za koje je $\langle E, E^{\times}\rangle$ razdvojen dualni par ($E^{\times} = (E,\mathcal{B})^{\times}$ - prostor ograničenih linearnih formi).

1. OSOBINA OTVORENE RASTAVLJIVOSTI UTVG

Ako je (E, C) uredjen vektorski prostor, a $(E, \mathcal{T})$ jedna topološka vektorska grupa (/29/, Definicija 1.), onda trojku $(E, C, \mathcal{T})$ zovemo uredjena topološka vektorska grupa - UTVG. Ako je $(E, \mathcal{T})$ topološki vektorski prostor, lokalno konveksan prostor ili lokalno konveksna grupa, onda ćemo skraćeno pisati UTVP, ULKP ili ULKG. Inače, za konus C u opštem slučaju ništa ne pretpostavljamo, osim da je to neprazan konveksan podskup, za koji je $\lambda C \subseteq C$, kad god je $\lambda > 0$.

U (/10/ i /37/, a), b), c)) proučavaju se ULKP sa osobinom otvorene rastavljivosti. Mi u ovom delu rada definišemo UTVG sa navedenom osobinom i proučavamo ih. Uporedjujemo dobijene rezultate sa poznatim rezultatima, navodeći odgovarajuće sličnosti i razlike. Pri tome imamo u vidu rezultate iz /10/ i /37/.

1.1. D e f i n i c i j a. UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti, ako je $U \cap C - U \cap C$ $\mathcal{T}$- okolina nule, kad god je U $\mathcal{T}$- okolina nule.

U (/10/ i /37/) se odgovarajuća osobina za UTVP i ULKP definiše uz dodatni uslov da je E generisan konusom C, odnosno, da je $E = C - C$. To u stvari znači, ako u našoj definiciji uzmemo da je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVP, da je $E = C - C$, jer je $U \cap C - U \cap C$ gutajuća $\mathcal{T}$- okolina nule. Medjutim, ako je $(E, C, \mathcal{T})$ diskretna UTVG a C pravi potprostor od E, onda je $E \neq C - C$. Prema (/2/, Lema 1.) uredjen Banahov prostor sa zatvorenim konusom C ima osobinu otvorene rastavljivosti, ako i samo ako je $E = C - C$.

Podskup A uredjenog vektorskog prostora (E, C) je pozitivno generisan, ako je $A \subseteq A \cap C - A \cap C$. Sledećim tvrdjenjem dajemo karakterizaciju UTVG sa osobinom otvorene rastavljivosti u terminima pozitivno generisanih podskupova.

1.2. T v r dj e nj e. Za svaku UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je sa osobinama otvorene rastavljivosti;

b) $(E, C, \mathcal{T})$ ima bazu okolina nule od pozitivno generisanih podskupova;

D o k a z. Za svaku $\mathcal{T}$- okolinu nule V postoji simetrična $\mathcal{T}$- okolina nule U, tako da $V \supset U + U = U - U \supset U \cap C - U \cap C$. S obzirom da je $U \cap C \subset U \cap C - U \cap C$, odnosno, $U \cap C - U \cap C \subset (U \cap C - U \cap C) \cap C - (U \cap C - U \cap C) \cap C$ i da je UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda $(E, C, \mathcal{T})$ ima bazu okolina nule od pozitivno generisanih podskupova. To znači da a) $\Rightarrow$ b). Obrnuto, ako je V $\mathcal{T}$- okolina nule, onda postoji pozitivno generisana $\mathcal{T}$- okolina nule U tako da je $V \supset U$, a onda je $V \cap C \supset U \cap C$, odnosno $V \cap C - V \cap C \supset U \cap C - U \cap C \supset U$. Dakle, UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti.

U svakoj UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ skup svih $\mathcal{T}$- topoloških fadena na osnovu (/1/, 1. str. 7) generiše jedan TVP $(E, \bar{\mathcal{T}})$. Lako se proverava da je $\bar{\mathcal{T}}$ najfinija linearna topologija grublja od date topološke vektorske grupe. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi kada je $(E, C, \bar{\mathcal{T}})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti.

1.3. T v r dj e nj e. Neka je $E = C - C$. Ako je UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda je UTVP $(E, C, \bar{\mathcal{T}})$ takodje sa tom osobinom.

D o k a z. Neka je $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$ $\bar{\mathcal{T}}$- topološki faden. To znači da su $(V_n)_{n \in N}$ $\mathcal{T}$- okoline nule, odnosno da su $(V_n \cap C - V_n \cap C)_{n \in N}$ $\mathcal{T}$- okoline nule. S obzirom da je $E = C - C$, onda je $\mathcal{V} \cap C - \mathcal{V} \cap C = (V_n \cap C - V_n \cap C)_{n \in N}$ jedan $\bar{\mathcal{T}}$- topološki faden. Dakle, $(E, C, \bar{\mathcal{T}})$ je UTVP sa osobinom otvorene rastavljivosti.

Za dokaz prethodnog tvrdjenja iskoristili smo sledeću karakterizaciju UTVP sa osobinom otvorene rastavljivosti.

1.4. T v r dj e nj e. Neka je $E = C - C$. Onda su za takav UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ sledeći uslovi ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti;

b) Za svaki $\mathcal{T}$- topološki faden $\mathcal{V}$, faden $\mathcal{V} \cap C - \mathcal{V} \cap C$ je $\mathcal{T}$- topološki;

D o k a z. a)$\Rightarrow$b) je očigledno, jer ako je $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in N}$ $\mathcal{T}$- topološki faden, onda je $(V_n \cap C - V_n \cap C)$ $\mathcal{T}$- okolina nule, za svako $n \in N$, zbog osobine otvorene rastavljivosti prostora $(E, C, \mathcal{T})$. (Bez teškoća dokazujemo da je $\mathcal{V}\cap C - \mathcal{V}\cap C = (V_n \cap C - V_n \cap C)_{n\in N}$ jedan faden). Obrnuto, ako je V $\mathcal{T}$- okolina nule, onda postoji faden $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in N}$, $V_1 = V$ (ne mora biti jedinstven) koji je $\mathcal{T}$- topološki. Onda prema b) sledi da je i $\mathcal{V}\cap C - \mathcal{V}\cap C = (V_n \cap C - V_n \cap C)_{n\in N}$ $\mathcal{T}$ - topološki faden, odnosno, da je $V_1 \cap C - V_1 \cap C = V\cap C - V\cap C$ $\mathcal{T}$ - okolina nule.

1.5. P o s l e d i c a. Ako je $E = C - C$, onda je $(E, C, \mathcal{T}^f)$ sa osobinom otvorene rastavljivosti (/1/, $\mathcal{T}^f$ - najfinija linearna topologija).

D o k a z. Ako u tvrdjenju 1.3. uzmemo diskretnu topološku vektorsku grupu, onda je $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^f$.

Slično dokazujemo i sledeća dva tvrdjenja:

1.6. T v r dj e nj e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVP sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda je i pridruženi ULKP $(E, C, \mathcal{T}^\circ)$ sa istom osobinom. ($(E, \mathcal{T}^\circ)$ ima za bazu okolina nule sve apsolutno konveksne $\mathcal{T}$- okoline nule.

1.7. T v r dj e nj e. Neka je $E = C - C$. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ ULKG sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda je i pridruženi ULKP $(E, C, \mathrm{loc}\mathcal{T})$ sa istom osobinom. ($(E, \mathrm{loc}\mathcal{T})$ ima za bazu okolina nule sve gutajuće apsolutno konveksne $\mathcal{T}$ - okoline nule).

1.8. P o s l e d i c a. Ako je $E = C - C$, onda je $(E, C, \mathcal{T}^c)$ ULKP sa osobinom otvorene rastavljivosti. ($(E, \mathcal{T}^c)$ je prostor E snabdeven najfinijom lokalno konveksnom topologijom - pogledati oznaku u /1/).

Iz sledećeg primera se vidi da obrat tvrdjenja 1.7. ne mora biti tačan.

1.9. P r i m e r. Neka je $C = \{(x, y);\ x>0,\ y>0\} \cup \{(0, 0)\}$ konus u R^2 i neka je $(R^2, C, \mathcal{T})$ ULKG koja za bazu okolina nule ima skupove oblika: $I_\varepsilon = \{(x, 0);\ |x| \leq \varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ (primer objašnjen u /28/). Očigledno je $R^2 = C - C$ i $\mathrm{loc}\mathcal{T} = \mathcal{T}^c$, dakle, $(R^2, C, \mathrm{loc}\mathcal{T})$ je prema prethodnoj posledici sa osobinom otvorene rastavljivosti a $(E, C, \mathcal{T})$ nije sa tom osobinom, jer je za svako $\varepsilon > 0$: $I_\varepsilon \cap C - I_\varepsilon \cap C = \{0\}$. S obzirom da ULKG $(R^2, C, \mathcal{T})$ nije diskretna, onda ona nije sa osobinom otvorene rastavljivosti.

Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVG sa bazom okolina nule $\mathcal{U} = \{U : U = -U\}$, onda iz /29/ znamo da elementi od $\mathcal{U}$ ispunjavaju osobine:

1. $0 \in U$, za svako $U \in \mathcal{U}$;
2. Za svako $U \in \mathcal{U}$ i za svako $\lambda \neq 0$ postoji $V \in \mathcal{U} : V \subset \lambda U$;
3. Za svako $U \in \mathcal{U}$, postoji $V \in \mathcal{U}$ tako da je: $V + V \subset U$;

Ali tačno je i obrnuto: Svaka baza filtra $\mathcal{U}$ sa osobinama 1, 2 i 3 na jedinstven način definiše jednu TVG na (E, C).

Sledećim tvrdjenjem dokazujemo da se jednoj UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ na jedinstven način dodeljuje UTVG $(E, C, \mathcal{T}_D)$ koja za bazu okolina nule ima $\mathcal{U} \cap C - \mathcal{U} \cap C = \{U \cap C - U \cap C, U \in \mathcal{U}\}$.

1.10. T v r dj e nj e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVG sa bazom okolina nule $\mathcal{U}$, onda je $\mathcal{U} \cap C - \mathcal{U} \cap C = \{U \cap C - U \cap C, U \in \mathcal{U}\}$ takodje baza okolina nule neke UTVG.

D o k a z. Dokažimo da je $\mathcal{U} \cap C - \mathcal{U} \cap C$ jedna baza filtra sa osobinama 1, 2 i 3. Ako $U \cap C - U \cap C$, $V \cap C - V \cap C \in \mathcal{U} \cap C - \mathcal{U} \cap C$ za neko $U, V \in \mathcal{U}$ onda postoji $W \in \mathcal{U}$ tako da $U \cap V \supset W$. Dalje sledi da je $U \cap C \supset W \cap C$ i $V \cap C \supset W \cap C$, odnosno, da je $(U \cap C - U \cap C) \cap (V \cap C - V \cap C) \supset W \cap C - W \cap C \in \mathcal{U} \cap C - \mathcal{U} \cap C$. S obzirom da $0 \in U$ za svako $U \in \mathcal{U}$, onda $0 \in U \cap C - U \cap C$. Ako $V \cap C - V \cap C \in \mathcal{U} \cap C - \mathcal{U} \cap C$ za neko $V \in \mathcal{U}$, onda za svako $\lambda \neq 0$ postoji $U \in \mathcal{U}$, tako da je $V \subset \lambda U$. Dalje se dobija da je $V \cap C - V \cap C \subseteq \lambda U \cap C - \lambda U \cap C = \lambda(U \cap C - U \cap C)$. Poslednju jednakost lako dokazujemo jer su skupovi U i $U \cap C - U \cap C$ simetrični a C je conus. Dokažimo i osobinu 3. Ako $V \cap C - V \cap C$ pripada $\mathcal{U} \cap C - \mathcal{U} \cap C$ za neko $V \in \mathcal{U}$, onda postoji $U \in \mathcal{U}$, tako da je $V \supset U + U$. To dalje znači da je $V \cap C - V \cap C \supset (U + U) \cap C - (U + U) \cap C \supset (U \cap C - U \cap C) + (U \cap C - U \cap C)$.

Dobijena UTVG $(E, C, \mathcal{T}_D)$ je očigledno sa osobinom otvorene rastavljivosti, jer ima bazu okolina nule od pozitivno generisanih podskupova (tvrdjenje 1.2.). Očigledno je i $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_D$. Zaista, ako je V jedna $\mathcal{T}$- okolina nule, onda postoji simetrična $\mathcal{T}$- okolina nule U, tako da je $V \supset U + U = U - U \supset U \cap C - U \cap C$. Dakle, UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti, ako i samo ako je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_D$.

Linearno preslikavanje f iz UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ u UTVG $(F, K, \mathcal{P})$ je pozitivno, ako je $f(C) \subseteq K$. (/37/, b), str. 68). Sledećim tvrdjenjem bliže karakterišemo topologiju $\mathcal{T}_D$.

1.11. T v r dj e nj e. Ako je f pozitivno neprekidno linearno preslikavanje iz UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ u UTVG $(F, K, \mathcal{P})$, onda je f neprekidno iz $(E, \mathcal{T}_D)$ u $(F, \mathcal{P}_D)$.

D o k a z. Ako je U jedna simetrična $\mathcal{P}$- okoline nule, onda je $f^{-1}(U \cap K - U \cap K) \supseteq f^{-1}(U) \cap C - f^{-1}(U) \cap C$, odnosno, f je neprekidno iz $(E, \mathcal{T}_D)$ u $(F, \mathcal{P}_D)$. Zaista, neka je $x = y - z$, ako $y, z \in f^{-1}(U) \cap C$. Onda je $f(x) = f(y - z) = f(y) - f(z) \in U \cap f(C) - U \cap f(C) \subseteq U \cap K - U \cap K$, odnosno, $x \in f^{-1}(U \cap K - U \cap K)$.

1.12. P o s l e d i c a. Ako je UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda je f neprekidno iz $(E, \mathcal{T})$ u $(F, \mathcal{P})$, ako i samo ako je neprekidno iz $(E, \mathcal{T})$ u $(F, \mathcal{P}_D)$.

D o k a z. Na osnovu prethodnog tvrdjenja i činjenice da je $\mathcal{P} \leq \mathcal{P}_D$.

Primećujemo da obrat prethodnog tvrdjenja ne mora biti tačan, naime, ako je f neprekidno iz $(E, \mathcal{T}_D)$ u $(F, \mathcal{P}_D)$, ono ne mora biti neprekidno iz $(E, \mathcal{T})$ u $(F, \mathcal{P})$. Dovoljno je u vektorskom prostoru uzeti trivijalni konus $C = \{0\}$ i indiskretnu topologiju $\mathcal{T}$, a u F neku topologiju sa osobinom otvorene rastavljivosti koja nije indiskretna.

Sledećom posledicom tvrdjenja 1.11. se najbolje karakteriše topologija $\mathcal{T}_D$.

1.13. P o s l e d i c a. Topologija $\mathcal{T}_D$ je najslabija od svih topologija sa osobinom otvorene rastavljivosti koje su finije od $\mathcal{T}$, odnosno, $\mathcal{T}_D = \inf\{\mathcal{T}_\alpha \ , \mathcal{T}_\alpha \geq \mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_\alpha$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti, za svako $\alpha\}$.

Napominjemo da ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVG koja za bazu okoline nule ima potprostore, onda i $(E, C, \mathcal{T}_D)$ jeste UTVG sa istom osobinom. Zaista, ako je $\mathcal{U} = \{F_\alpha, \alpha \in I\}$ familija vektorskih potprostora od E, koji čine bazu okolina nule, onda $\mathcal{U} \cap C - \mathcal{U} \cap C = \{F_\alpha \cap C - F_\alpha \cap C, \alpha \in I\} = \{C_\alpha - C_\alpha, \alpha \in I\}$, čini familiju potprostora od E_α, odnosno, od E.

Ako je $(E, \mathcal{T})$ proizvoljna TVG, onda postoji konus u E, za koji je UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti. Ako uzmemo da je $C = E$, onda je za svaku $\mathcal{T}$- okolinu nule U : $U \subseteq U - U = U \cap E - U \cap E$, odnosno $(E, \mathcal{T})$ onda ima bazu okolina nule od pozitivno generisanih podskupova. Ako je $(E, \mathcal{T})$ diskretna TVG, onda je ona sa osobinom otvorene rastavljivosti za svaki konus vektorskog prostora E. Medjutim, indiskretna TVG $(E, C, \mathcal{T})$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti, ako i samo ako je $E = C - C$.

Sada navodimo još neke rezultate koje smo dobili ispitujući odnose topologija $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_D$. Ako je $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familija konusa u vektorskom prostoru E, onda je i $C = \bigcap_\alpha C_\alpha$ takodje konus u E. Neka su $(E, C, \mathcal{T})$, $(E, C_\alpha, \mathcal{T})$, $(E, C, \mathcal{T}_D)$ i $(E, C_\alpha, \mathcal{T}_{D_\alpha})$ odgovarajuće UTVG. Očigledno je $\mathcal{T}_{D_\alpha} \leq \mathcal{T}_D$, za svako $\alpha \in I$. Zbog toga sledi:

1.14. T v r dj e nj e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVG sa osobinom otvorene rastavljivosti (gde je $C = \bigcap_\alpha C_\alpha$), onda je UTVG $(E, C_\alpha, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti za svako $\alpha \in I$.

Sledeći primer pokazuje da obrat prethodnog tvrdjenja nije tačan:

1.15. P r i m e r. Neka je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVG sa osobinom otvorene rastavljivosti koja nije diskretna i za koju je $C \cap (-C) = \{0\}$ (dovoljno je uzeti primer 1.9.). Ako je C konus u nekom vektorskom prostoru E, onda se lako proverava da je i $-C$ takodje konus, a time i $C \cap (-C)$. S obzirom da je $U \cap C - U \cap C = U \cap (-C) - U \cap (-C)$ za svaku simetričnu $\mathcal{T}$- okolinu nule, to konusi C i $-C$ daju istu topologiju $\mathcal{T}_D$. Zbog toga je UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, ako i samo ako je UTVG $(E, -C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti. Primer 1.9. je takav, ali UTVG $(E, \{0\}, \mathcal{T})$ nije sa osobinom otvorene rastavljivosti, jer nije diskretna.

Slično pitanje se postavlja i za UTVG: $(E, \bar{C}, \mathcal{T})$ i $(E, C, \mathcal{T})$. S obzirom da je $C \subsetneq \bar{C}$, za svaku topologiju $\mathcal{T}$, onda je UTVG $(E, \bar{C}, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, ako je $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti. Da obrnuto nije tačno sledi iz jednostavnog primera:

1.16. P r i m e r. Neka je $(E, C, \mathcal{T})$ indiskretna UTVG za svaki konus $C \neq E$. Onda je očigledno $(E, \bar{C}, \mathcal{T}) = (E, E, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, a $(E, C, \mathcal{T})$ nije sa tom osobinom.

U nastavku ovog dela rada navodimo rezultate koje smo dobili ispitujući nasledne osobine UTVG sa osobinom otvorene rastavljivosti. Iz primera koji navodimo se vidi, da ni zatvoren konačno kodimenzioni potprostor UTVG sa osobinom otvorene rastavljivosti nije sa tom osobinom.

1.17. P r i m e r. Neka je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVG iz primera 1.9. Onda je $(R, \{0\}, \mathrm{loc}\mathcal{T})$ UTVG i $(R, \{0\})$ je konačno kodimenzioni potprostor od (R^2, C), gde je $\{0\} = C \cap R$. Potprostor R je očigledno $\mathcal{T}$- zatvoren, a UTVG $(R, \{0\}, \mathrm{loc}\mathcal{T})$ nije sa osobinom otvorene rastavljivosti, jer je $(\mathrm{loc}\mathcal{T})_D$ diskretna topologija u R. To znači da se osobina otvorene rastavljivosti u opštem slučaju ne nasledjuje projektivnom granicom.

Ako potprostor zadovoljava neki dodatni uslov, onda sledi:

1.18. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti a H potprostor od E, onda je H u indukovanoj topologiji sa osobinom otvorene rastavljivosti, ako $H \supseteq C$. (Uredjenje u H je relativno, odnosno, indukovano konusom $H \cap C$).

D o k a z. S obzirom da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_D$, onda za svaku $\mathcal{T}$ - okolinu nule U postoji $\mathcal{T}$ - okolina nule V, tako da je $U \cap C - U \cap C \supseteq V$. Treba dokazati da je $(\mathcal{T} \mid H)_D \leq \mathcal{T} \mid H$, odnosno, da za svaku $\mathcal{T}$ - okolinu nule U postoji $\mathcal{T}$ - okolina nule V tako da je $U \cap H \cap C - U \cap H \cap C \supseteq V \cap H$. Ali, to je tačno jer $H \supseteq C$.

1.19. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVG sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda je $(C - C, C, \mathcal{T}|C - C)$ UTVG sa istom osobinom.

Iz (/37/, b) tvrdjenje 3.17.) se zna da se osobina otvorene rastavljivosti nasledjuje induktivnom granicom u kategoriji ULKP. Mi dokazujemo da je to tačno i za induktivnu granicu u kategoriji UTVP.

1.20. T v r dj e nj e. Neka je (E, C) uredjen vektorski prostor, $(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ UTVP sa osobinom otvorene rastavljivosti, a $f_\alpha : E_\alpha \to E$ pozitivna linearna preslikavanja. Ako je E linearni omotač od $\bigcup_\alpha f_\alpha(E_\alpha)$, onda je induktivna topologija $\mathcal{T}$ na E (/1/, 4, str. 19) sa osobinom otvorene rastavljivosti.

D o k a z. Neka je $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$ jedan $\mathcal{T}$- topološki faden u E. Prema tvrdjenju 1.4. dovoljno je dokazati, da je $\mathcal{V} \cap C - \mathcal{V} \cap C$ $\mathcal{T}$- topološki faden. S obzirom na (/1/, 4, str. 19) $f_\alpha^{-1}(\mathcal{V}) = (f_\alpha^{-1}(V_n))_{n \in N}$ je $\mathcal{T}_\alpha$ - topološki faden, za svako $\alpha \in I$. To dalje znači da je $f_\alpha^{-1}(\mathcal{V}) \cap C_\alpha - f_\alpha^{-1}(\mathcal{V}) \cap C_\alpha$ $= (f_\alpha^{-1}(V_n) \cap C_\alpha - f_\alpha^{-1}(V_n) \cap C_\alpha)_{n \in N}$ $\mathcal{T}_\alpha$- topološki faden, za svako $\alpha \in I$. Iz očigledne inkulzije $f_\alpha^{-1}(V_n) \cap C_\alpha - f_\alpha^{-1}(V_n) \cap C_\alpha \subseteq f_\alpha^{-1}(V_n \cap C - V_n \cap C)$, sledi da je $\mathcal{V} \cap C - \mathcal{V} \cap C$ $\mathcal{T}$ - topološki faden.

1.21. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVP sa osobinom otvorene rastavljivosti a H potprostor, onda je kvocijen prostor E/H sa osobinom otvorene rastavljivosti. (Uredjenje u kvocijentu je indukovano kanoničnom slikom konusa C).

U (/37/, b) Teoreme 3.16. i 3.19.) je dokazano da je: $(\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_D = \bigoplus_\alpha \mathcal{T}_{\alpha D}$ i $(\prod_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_D = \prod_\alpha \mathcal{T}_{\alpha D}$, gde su $(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ i $(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_{\alpha D})$ ULKP i njima pridruženi ULKP sa osobinom otvorene rasta vljivosti. Zbog jednakosti $(\prod_\alpha V_\alpha) \cap C - (\prod_\alpha V_\alpha) \cap C = \prod_\alpha (V_\alpha \cap C - V_\alpha \cap C)$, Teorema 3.19. iz /37/ je preformulacijom za UTVP tačna i dokaz je isti kao za ULKP. Za direktan zbir UTVP sledi:

1.22. T v r dj e nj e. Ako je $\{(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), \alpha \in I\}$

familija UTVP, a $(E, C, \bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)$ njihov direktan zbir u kategoriji TVP (/1/, 4, str. 21), onda je $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_{\alpha D} = (\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_D$. $(C = \bigoplus_\alpha C_\alpha)$.

D o k a z. Prema (/1/, 4, str. 20), topologije $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_{\alpha D}$ i $(\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_D$ su generisane fadenima $(V_n)_{n \in N}$ i $(U_n \cap C - U_n \cap C)_{n \in N}$, gde je $V_n = \sum_{K=1}^{\infty} \{ \bigcup_\alpha (U^\alpha_{2^{n-1}K} \cap C_\alpha - U^\alpha_{2^{n-1}K} \cap C_\alpha) \}$ i $U_n = \sum_{K=1}^{\infty} \{ \bigcup_\alpha U^\alpha_{2^{n-1}K} \}$. Treba dokazati da je $V_n = U_n \cap C - U_n \cap C$, za svako n. Ako $x \in V_n$, onda je $x = \sum_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i}$, $x_i^{\alpha_i} \in U^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \cap C_{\alpha_i} - U^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \cap C_{\alpha_i}$, odnosno $x = \sum_{i=1}^{m} (u_i^{\alpha_i} - v_i^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{m} u_i^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{m} v_i^{\alpha_i}$. To znači da $x \in U_n \cap C - U_n \cap C$, jer $u_i^{\alpha_i}$, $v_i^{\alpha_i} \in U^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \cap C_{\alpha_i}$ i onda $\sum_{i=1}^{m} u_i^{\alpha_i}, \sum_{i=1}^{m} v_i^{\alpha_i} \in U_n \cap C$. Obrnuto, ako $x \in U_n \cap C - U_n \cap C$, onda je $x = u - v$, gde je $u = \sum_{i=1}^{m} u_i^{\alpha_i}$ i $v = \sum_{i=1}^{m} v_i^{\alpha_i}$, $u, v \in C \cap U_n$, odnosno, $x = \sum_{i=1}^{m} (u_i^{\alpha_i} - v_i^{\alpha_i}) \in V_n$. Jasno je da iz uslova $u, v \in C$, sledi $u_i^{\alpha_i}$, $v_i^{\alpha_i} \in C_{\alpha_i}$.

U (/37/, a), Tvrdjenje 1.3.4.) je dokazano da je kompletiranje metrizabilnog ULKP sa osobinom otvorene rastavljivosti ULKP sa tom osobinom. Mi dokazujemo sledeće:

1.23. T v r dj e nje. Ako je f pozitivno neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje iz UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti u proizvoljnu UTVG $(F, K, \mathcal{P})$, onda je $(F, K, \mathcal{P})$ sa osobinom skoro otvorene rastavljivosti (definicija u /37/, b), 3).

D o k a z. Ako je V $\mathcal{P}$- okolina nule, onda je $f^{-1}((U \cap K - U \cap K) \supseteq f^{-1}(V) \cap C - f^{-1}(V) \cap C$. S obzirom da je UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti i da je f skoro otvoreno preslikavanje, onda je $\overline{f(f^{-1}(V \cap K - V \cap K))}$ $\mathcal{P}$- okolina nule, odnosno, $\overline{V \cap K - V \cap K}$ je $\mathcal{P}$- okolina nule, jer je $\overline{V \cap K - V \cap K} \supseteq \overline{f(f^{-1}(V \cap K - V \cap K))}$. To znači da je $(F, K, \mathcal{P})$ sa osobinom skoro otvorene rastavljivosti.

1.24. P o s l e d i c a. Kompletiranje $(\tilde{E}, \overline{C}, \tilde{\mathcal{T}})$ UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti je UTVG sa osobinom skoro otvorene rastavljivosti ($\overline{C}$ je zatvaranje konusa C u topologiji $\tilde{\mathcal{T}}$).

1.25. P o s l e d i c a. Ako je $(F, C \cap F, \mathcal{T}|F)$ UTVG koja je gusta u UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ iako je sa osobinama otvorene rastavljivosti, onda je $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom skoro otvorene rastavljivosti.

S obzirom da LKG ima bazu okolina nule od apsolutno konveksnih podskupova, onda je ona sa osobinom otvorene rastavljivosti, ako i samo ako je za svaku okoliku nule U i $\Gamma(U \cap C) = D(U)$ (rastavljivo jezgro od U) okolina nule. To je zbog inkluzije: $1/2\,(U \cap C - U \cap C) \subseteq \Gamma(U \cap C) \subseteq U \cap C - U \cap C$, kad god je U uravnotežen i konveksan podskup od E. Inače, karakterizacija ULKG sa osobinom otvorene rastavljivosti je slična kao za ULKP u /37/ pa je zato ne navodimo. Koristeći tvrdjenje 1.7. dokazujemo:

1.26. T v r dj e nj e. Neka je $E = C - C$. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ ULKG sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda je $(E, C, \mathcal{T})'$ - topološki dual, uredjeno-konveksan potprostor od E^*.

D o k a z. Prema tvrdjenju 1.7., ULKP $(E, C, \mathrm{loc}\mathcal{T})$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti. Na osnovu /28/ je $(E, C, \mathcal{T})' = (E, C, \mathrm{loc}\mathcal{T})'$, i onda je prema(/37/, b), Posledica 3.12.) $(E, C, \mathcal{T})'$ uredjeno-konveksan prostor od E^* (odnosno, $E' = (E' + \overset{*}{C}) \cap (E' - \overset{*}{C})$).

Primer iz (/37/, b), Primer 3.15.) pokazuje da obrnuto nije tačno u slučaju ULKP, dakle i u slučaju ULKG. Medjutim, za Makijevu lokalno konveksnu grupu $\nu(E, E')$ (oznaka iz /16/) dokazujemo:

1.27. T v r dj e nj e. Neka je $E = C - C$. Ako je topološki dual E' uredjeno-konveksan potprostor od E^*, onda je ULKG $(E, C, \nu(E, E'))$ sa osobinom otvorene rastavljivosti.

D o k a z. Prema /28/ imamo da je $\mathrm{loc}\,\nu(E, E') = \tau(E, E')$ i $\mathrm{loc}\,\nu_D(E, E') = \tau_D(E, E')$. Na osnovu (/37/, b) tvrdjenje 3.14.) i činjenice da je $\nu(E, E')$ najjača lokalno konveksna grupa na E čiji je dual E', sledi da je $\nu(E, E') = \nu_D(E, E')$, odnosno, ULKG $(E, C, \nu(E, E'))$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti.

1.28. P o s l e d i c a. Ako je ULKG $(E, C, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda je i ULKG $(E, C, \nu(E, E'))$ sa istom osobinom.

1.29. P o s l e d i c a. Ako je ULKP $(E, C, \mathrm{loc}\,\mathcal{T}) = (E, C, \tau(E, E'))$ sa osobinama otvorene rastavljivosti, onda je i ULKG $(E, C, \nu(E, E'))$ sa istom osobinom.

Navedenom posledicom dali smo jedan od dovoljnih uslova, kada je tačan obrat tvrdjenja 1.7. (Pogledati primer 1.9.).

2. UREDJENO - KONVEKSNE UTVG

UTVP i ULKP koji za bazu okolina nule imaju uredjeno - konveksne podskupove proučavani su u /2/, /17/, /21/, /33/ i /37/, a) i b). Naročito su poznati rezultati o ULKP pod nazivom lokalno o-konveksni prostori (imaju za bazu okolina nule gutajuće uravnotežene konveksne i uredjeno - konveksne podskupove).

Mi u ovom delu rada proučavamo UTVG i ULKG koje za bazu okolina nule imaju uredjeno - konveksne podskupove. Navodimo i neke rezultate koje smo dobili proučavajući UTVP i ULKP, a koji nisu dati u navedenim radovima.

Iz uvodnog dela znamo da je podskup A uredjenog vektorskog prostora (E, C) uredjeno - konveksan, ako je $A = (A + C) \cap (A - C) = \bigcup \{[a, b],\ a \leq b \text{ i } a, b \in A\} = [A]$.

2.1. D e f i n i c i j a. UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je **uredjeno-konveksna**, ako ima bazu okolina nule od uredjeno - konveksnih podskupova.

Prema (/28/, Tvrdjenje 1.2.d) svaka TVG ima bazu okolina nule od simetričnih podskupova. Zbog toga sledi:

2.2. T v r d j e n j e. UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je uredjeno - konveksna, ako i samo ako ima bazu okolina nule od simetričnih uredjeno - konveksnih podskupova.

D o k a z. Ako je V $\mathcal{T}$- okolina nule, onda postoji uredjeno - konveksna $\mathcal{T}$- okolina nule U, tako da je $V \supseteq U$. S obzirom da TVG ima bazu okolina nule od simetričnih podskupova, onda postoji simetrična $\mathcal{T}$- okolina W, tako da je $U \supseteq W$. Dakle, imamo da je $V \supseteq U = [U] \supseteq [W] = -[W]$, jer je $W = -W$.

2.3. P o s l e d i c a. Ako je ULKG $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno - konveksna, onda ona ima bazu okolina nule od apsolutno konveksnih uredjeno - konveksnih podskupova.

D o k a z. Ako je W apsolutno konveksan podskup od E, onda je i [W] apsolutno konveksan a očigledno i uredjeno - konveksan podskup.

Podskup A uredjenog vektorskog prostora (E, C) je apsolutno uredjeno - konveksan, odnosno (pozitivno uredjeno - konveksan), ako je $[-x, x] \subseteq A$ kad god je $x \in A \cap C$, odnosno ($[0, x] \subseteq A$ kad god je $x \in A \cap C$). S obzirom da je simetričan uredjeno - konveksan podskup apsolutno uredjeno - - konveksan, kao i da je simetričan apsolutno uredjeno - - konveksan pozitivno uredjeno - konveksan podskup, onda je jasno da uredjeno - konveksna UTVG ima bazu okolina nule od simetričnih apsolutno uredjeno - konveksnih podskupova, odnosno, od simetričnih pozitivno uredjeno - konveksnih podskupova.

Za ograničene podskupove uredjeno - konveksnih UTVG važi isto kao za ograničene podskupove UTVP:

2.4. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno - konveksna UTVG, onda je uredjeno - konveksan omotač $[A]$ svakog $\mathcal{T}$-ograničenog podskupa A, $\mathcal{T}$-ograničen podskup.

Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno - konveksan UTVP, onda je očigledno svaki interval $[x, y]$ $\mathcal{T}$-ograničen, jer je $[x, y]$ uredjeno - konveksan omotač skupa $\{x, y\}$. Medjutim u uredjeno - konveksnoj UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ to ne mora biti tako, jer svaka $\mathcal{T}$-okolina nule nije obavezno gutajuća. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi kada je to tako:

2.5. T v r d j e n j e. Uredjeno - konveksna UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je UTVP, ako i samo ako je $[x, x]$ $\mathcal{T}$-ograničen podskup, za svako $x \in E$.

D o k a z. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno - konveksan UTVP, onda je $[x, x]$ $\mathcal{T}$-ograničen podskup, jer je $[x, x]$ uredjeno - konveksan omotač skupa $\{x\}$. Obrnuto, neka je $e \in E$ i neka je V $\mathcal{T}$-okolina nule. Dokažimo da je V gutajući podskup od E. S obzirom da $e \in [e, e]$, onda postoji $\lambda > 0$ tako da je $e \in [e, e] \subseteq \lambda V$, odakle sledi da je okolina V gutajuća.

Za uredjeno - koveksne UTVG tačno je sledeće tvrdjenje koje je tačno i za uredjeno - konveksne UTVP,

2.6. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno -

- konveksna UTVG koja je Hauzdorfova, onda je konus C anti- -simetričan (odnosno $C \cap -C = \{0\}$).

D o k a z. S obzirom da UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ ima bazu okolina nule od uredjeno - konveksnih podskupova, onda za svaku $\mathcal{T}$-okolinu nule $U = [U]$ sledi: $\{0\} \subseteq U$, dakle $[\{0\}] \subseteq U = [U]$, odnosno, $[0, 0] = C \cap -C \subset \cap U = \{0\}$. Interesantno je da obrat prethodnog tvrdjenja nije tačan, jer na primer indiskretna UTVG je uredjeno - konveksna za svaki konus $C \subseteq E$ a nije Hauzdorfova. Inače, sam prostor E je uredjeno - konveksan skup za svaki konus C, jer je $(E + C) \cap (E - C) = E$.

Kao što je UTVG $(E, E, \mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, tako je UTVG $(E, \{0\}, \mathcal{T})$ uredjeno-konveksna, jer je za svaku $\mathcal{T}$-okolinu nule U, $U = (U + \{0\}) \cap (U - \{0\}) = [U]$. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ proizvoljna UTVG, onda se bazi okolina nule $\mathcal{U} = \{U, U = -U\}$ pridružuje $[\mathcal{U}] = \{[U], U \in \mathcal{U}\}$ za koju se slično kao za $\mathcal{U} \cap C - \mathcal{U} \cap C$ dokazuje da odredjuje jedinstvenu UTVG na E koja je uredjeno - konveksna. Zbog inkluzije $U \subseteq [U]$ za svako $U \in \mathcal{U}$, očigledno je dobijena topologija $\mathcal{T}_F \leq \mathcal{T}$. Zbog poslednjeg odnosa, prirodno je postaviti pitanje kada je dobijena topologija $\mathcal{T}_F$ indiskretna, kao i kada je Hauzdorfova.

2.7. T v r d j e n j e. Za svaku UTVG $(E, C, \mathcal{T})$, sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $\overline{C} = E$;

b) $\mathcal{T}_F$ je indiskretna topologija;

D o k a z. Za svaku $\mathcal{T}$-okolinu nule V je: $(V + \overline{C}) \cap (V - \overline{C}) = (V + E) \cap (V - E) = E$. Prema tvrdjenju 2.8. (koje sledi), onda je $\mathcal{T}_F$ indiskretna topologija, što znači da a)$\Rightarrow$b). Ako dokažemo da je $\overline{C}^{\mathcal{T}} = \overline{C}^{\mathcal{T}_F}$ (za svaku UTVG $(E, C, \mathcal{T})$), onda je jasno da b)$\Rightarrow$a). Očigledno je $\overline{C}^{\mathcal{T}} \subseteq \overline{C}^{\mathcal{T}_F}$. Ali, $\overline{C}^{\mathcal{T}_F} = \bigcap(C + [U]) = \bigcap(C + (U + C) \cap (U - C)) \subseteq \bigcap(C + U + C) \subseteq \bigcap(C + U) = \overline{C}^{\mathcal{T}}$.

U navedenim radovima (npr. /17/) dokazuje se koristeći prednorme da je ULKP $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno - konveksan, ako i samo ako je ULKP $(E, \overline{C}, \mathcal{T})$ uredjeno - konveksan. Mi elementarnim putem dokazujemo da je to tačno i za UTVG, odnosno:

2.8. T v r d j e n j e. Za svaku UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je $\mathcal{T}_F = \mathcal{T}_{\bar{F}}$, gde $\mathcal{T}_{\bar{F}}$ ima za bazu okolina nule skupove oblika: $(U + \bar{C}) \cap (U - \bar{C})$, za svako $U \in \mathcal{U}$.

D o k a z. Zbog $(U + \bar{C}) \cap (U - \bar{C}) \supseteq (U + C) \cap (U - C)$ sledi da je $\mathcal{T}_{\bar{F}} \leq \mathcal{T}_F$. Obrnuto, ako je $V \in \mathcal{U}$, onda postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da $V \supseteq U + U$, odnosno, $V + C \supseteq U + U + C \supseteq U + \bar{C}$ i $V - C \supseteq U + U - C \supseteq U - \bar{C}$) ($\bar{C} \subseteq U + C$ za svako $U \in \mathcal{U}$). To dalje znači da je $(V + C) \cap (V - C) \supseteq (U + \bar{C}) \cap (U - \bar{C})$, odnosno, da je $\mathcal{T}_F \leq \mathcal{T}_{\bar{F}}$.

2.9. P o s l e d i c a. UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ (a to znači i ULKG i UTVP) je uredjeno - konveksna, ako i samo ako je UTVG $(E, \bar{C}, \mathcal{T})$ uredjeno - konveksna.

Iz sledećeg tvrdjenja se vidi kada je topologija $\mathcal{T}_F$ Hauzdorfova.

2.10. T v r d j e n j e. Za svaku UTVG $(E, C, \mathcal{T})$, sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) Konus $\bar{C}^{\mathcal{T}}$ je anti-simetričan, odnosno, $\bar{C}^{\mathcal{T}} \cap -\bar{C}^{\mathcal{T}} = \{0\}$;

b) Toplogija $\mathcal{T}_F$ je Hauzdorfova;

D o k a z. Ako $x \in \overline{\{0\}}^{\mathcal{T}_F}$, to znači da $x \in (U + C) \cap (U - C)$ za svaku $\mathcal{T}$-okolinu nule U, odnosno, da je $(x - U) \cap C \neq \emptyset$ i $(x - U) \cap (- C) \neq \emptyset$, dakle, $x \in \bar{C}^{\mathcal{T}} \cap - \bar{C}^{\mathcal{T}} = \bar{C}^{\mathcal{T}_F} \cap - \bar{C}^{\mathcal{T}_F} = \{0\}$. Dakle, $x = 0$, odnosno, topologija $\mathcal{T}_F$ je Hauzdorfova, tj. a)$\Rightarrow$b). Obrnuto neposredno sledi iz tvrdjenja 2.6. i 2.8.

Sledećim tvrdjenjem dajemo odgovor kada je diskretna UTVG uredjeno - konveksna.

2.11. T v r d j e n j e. Za svaku diskretnu UTVG $(E, C, \mathcal{T})$, sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je uredjeno - konveksna;

b) Konus C je anti-simetričan;

D o k a z. S obzirom da je $(\{0\} + C) \cap (\{0\} - C) = C \cap (- C) \subset \{0\}$ jer je $\mathcal{T}$ diskretna, onda je $C \cap (- C) = \{0\}$, odnosno, konus C je anti-simetričan, tj. a)$\Rightarrow$b). Obrnuto, ako je konus C anti-simetričan, onda je očigledno $[\{0\}] = \{0\}$, odnosno, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_F$ i data diskretna UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je onda uredjeno - konveksna, tj. b)$\Rightarrow$a).

2.12. P r i m e r. Neka je $(E, C, \mathcal{T})$ ULKG gde je

$E = R^2$, $C = \{(x, y);\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ a topologija $\mathcal{T}$ ima za bazu okolina nule skupove oblika: $I_\varepsilon = \{(x, 0);\ |x| \leqslant \varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$. Tada je ULKG $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno - koveksna. Zaista, $(I_\varepsilon + C) \cap (I_\varepsilon - C) = \{(x, y);\ x \geqslant -\varepsilon,\ y \geqslant 0\} \cap \{(x, y);\ x \leqslant \varepsilon,\ y \leqslant 0\} = I_\varepsilon$. Dakle, ULKG $(E, C, \mathcal{T})$ ima bazu okolina nule od apsolutno konveksnih uredjeno - konveksnih podskupova.

U odeljku o Risovim LKG dokazujemo da za ULKG $(E, C, \mathcal{T})$ koja je uredjeno - konveksna pridruženi ULKP $(E, C, \mathrm{loc}\,\mathcal{T})$ne mora biti uredjeno - konveksan (Primer 4.4. i Tvrdjenje 4.3.).

U nastavku ovog dela rada navodimo tvrdjenje kojim bliže karakterišemo topologiju $\mathcal{T}_F$.

2.13. T v r d j e n j e. Ako je f neprekidno i pozitivno linearno preslikavanje iz UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ u UTVG $(F, K, \mathcal{P})$, onda je ono neprekidno iz UTVG $(E, C, \mathcal{T}_F)$ u UTVG $(F, K, \mathcal{P}_F)$.

D o k a z. Ako je U $\mathcal{P}$-okolina nule, onda je $f^{-1}([U]) = f^{-1}[(U + K) \cap (U - K)] = f^{-1}(U + K) \cap f^{-1}(U - K) \supseteq (f^{-1}(U) + C) \cap (f^{-1}(U) - C)$, jer ako $x \in f^{-1}(U) + C$, onda $f(x) \in U + f(C) \subseteq U + K$. To znači da je f neprekidno preslikavanje iz UTVG $(E, C, \mathcal{T}_F)$ u UTVG $(F, K, \mathcal{P}_F)$.

2.14. P o s l e d i c a. Ako je UTVG $(F, K, \mathcal{P})$ uredjeno - konveksna, onda je pozitivno linearno preslikavanje iz UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ u UTVG $(F, K, \mathcal{P})$ neprekidno, ako i samo ako je neprekidno iz UTVG $(E, C, \mathcal{T}_F)$ u UTVG $(F, K, \mathcal{P})$.

2.15. P o sl e d i c a. Topologija $\mathcal{T}_F$ je najjača od svih topologija $\mathcal{T}_\alpha$ koje su slabije od $\mathcal{T}$ i za koje je UTVG $(E, C, \mathcal{T}_\alpha)$ uredjeno - konveksna, za svako α, odnosno $\mathcal{T}_F = \sup\{\mathcal{T}_\alpha,\ \alpha \in I,\ \mathcal{T}_\alpha \leq \mathcal{T}$ i UTVG $(E, C, \mathcal{T}_\alpha)$ je uredjeno - konveksna $\}$.

U narednim tvrdjenjima dajemo neke osobine uredjeno - konveksnih UTVP. Faden $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in N}$ u UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ je uredjeno - konveksan, ako su svi članovi U_n uredjeno - konveksni. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi da je u UTVP skup uredjeno - konveksnih topoloških fadena neprazan.

2.16. T v r d j e n j e. Ako je $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in N}$ $\mathcal{T}$-topološki faden UTVP $(E, C, \mathcal{T})$, onda je $[\mathcal{U}] = ([U_n])_{n \in N}$ $\mathcal{T}_F$-topološki (dakle i $\mathcal{T}$-topološki) faden u UTVP $(E, C, \mathcal{T}_F)$.

D o k a z. Zaista, skupovi $[U_n]_{n \in N}$ su gutajuće uravnotežene $\mathcal{T}_F$-okoline nule. Dokažimo da je $[U_{n+1}] + [U_{n+1}] \subseteq [U_n]$ za svako $n \in N$. Ako je $x = u + v$, gde $u, v \in [U_{n+1}]$, onda postoje $a, b, c, d \in U_{n+1}$ i $a \leq b$, $c \leq d$, tako da $u \in [a, b]$ i $v \in [c, d]$. Tada $x \in [a + c, b + d]$, $a + c \leq b + d$ i $a + c \in U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$ i $b + d \in U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$, dakle, $x \in [U_n]$.

2.17. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVP, onda postoji u E skup uredjeno - konveksnih fadena sa osobinama:

i) Za bilo koja dva fadena $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ toga skupa, postoji faden $\mathcal{W}$ takodje iz tog skupa, tako da je $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

ii) Članovi fadena toga skupa čine bazu okolina nule topologije $\mathcal{T}_F$.

D o k a z. Na osnovu prethodnog tvrdjenja u UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ postoji neprazan skup uredjeno - konveksnih $\mathcal{T}$-topoloških fadena. Prema (/1/, l. str. 6) ako su $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in N}$ i $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$ dva fadena datog skupa, onda postoji $\mathcal{T}$-topološki faden $\mathcal{W} = (W_n)_{n \in N}$ koji je sadržen u $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = (U_n \cap V_n)_{n \in N}$. To znači da je i $[W_n] \subseteq V_n \cap U_n$ za svako $n \in N$ jer su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ uredjeno - konveksni fadeni, odnosno, $[\mathcal{W}] = ([W_n])_{n \in N}$ je traženi uredjeno - konveksan faden sadržan u $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. ii) je jasno, jer ako je U jedna $\mathcal{T}_F$-okolina nule, onda postoji $\mathcal{T}$-okolina nule V, tako da $U \supseteq [V]$. Ali, okolina V generiše prema tvrdjenju 2.16. jedan uredjeno - konveksan faden $[\mathcal{V}] = ([V_n])_{n \in N}$, $V_1 = V$ i $U \supseteq [V_1]$.

Sledeće tvrdjenje je obrat prethodnog:

2.18. T v r d j e n j e. Ako neki skup uredjeno - konveksnih fadena u UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ zadovoljava uslov i) prethodnog tvrdjenja, onda taj skup fadena generiše jednu linearnu uredjeno - konveksnu topologiju. Bazu okolina nule čine članovi fadena datog skupa.

D o k a z. Direktno prema (/1/, l. str. 7).

S obzirom da je najfinija linearna topologija $\mathcal{T}^f$ na bilo-kom vektorskom prostoru E Hauzdorfova, onda prema tvrdjenju

2.6. UTVP $(E, C, \mathcal{T}^f)$ ne mora biti uvek uredjeno - konveksan. Naime, dovoljno je uzeti konus koji nije anti-simetričan. Na osnovu prethodnog tvrdjenja i tvrdjenja 2.13. sledi da je topologija $\mathcal{T}^f_F$ najfinija linearna uredjeno - konveksna topologija. Ona je prema tvrdjenju 2.10. Hauzdorfova, ako i samo ako je $\overline{C}^{\mathcal{T}}$ anti-simetričan konus.

Sledećim tvrdjenjem dajemo karakterizaciju najfinije linearne uredjeno - konveksne topologije.

2.19. T v r d j e n j e. Za svaki UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ koji je uredjeno-konveksan, sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $\mathcal{T}$ je najfinija linearna uredjeno - konveksna topologija;

b) Svako pozitivno linearno preslikavanje iz UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ u proizvoljni UTVP $(F, K, \mathcal{P})$ koji je uredjeno - - konveksan, je neprekidno.

D o k a z. Ako je V uravnotežena uredjeno - konveksna $\mathcal{P}$ - okolina nule, onda ona generiše jedan $\mathcal{P}$-topološki faden $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$, $V_1 = V$. S obzirom da je $\mathcal{T}$ najfinija linearna uredjeno - konveksna topologija na (E, C), onda je $f^{-1}(\mathcal{V}) = (f^{-1}(V_n))_{n \in N}$ $\mathcal{T}$-topološki faden, jer je očigledno uredjeno - konveksan. Dakle, f je neprekidno preslikavanje jer je $f^{-1}(V) = f^{-1}(V_n) \supseteq f^{-1}(V_2)$, odnosno a)$\Rightarrow$b). Obrnuto, ako je f neprekidno pozitivno linearno preslikavanje iz uredjeno - konveksnog UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ u proizvoljni uredjeno - - konveksni UTVP $(F, K, \mathcal{P})$, onda se dobija da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}^f_F$, ako umesto $(F, K, \mathcal{P})$ uzmemo $(E, C, \mathcal{T}^f_F)$ a umesto f identično preslikavanje prostora E.

U tvrdjenjima koja slede ispitujemo nasledne osobine uredjeno - konveksnih UTVG, odnosno, UTVP. Jasno je da je UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno - konveksna, ako i samo ako je UTVG $(E, -C, \mathcal{T})$ uredjeno - konveksna. Iz /33/ se zna da je potprostor H uredjeno - konveksnog ULKP $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno - - konveksan ULKP. Za UTVG sledi uopšte tvrdjenje:

2.20. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVG koja je uredjeno - konveksna, a $H \subseteq E$, onda je UTVG $(H, C \cap H, \mathcal{T}|H)$

uredjeno - konveksna.

D o k a z. Ako je $U \mathcal{T}|H$ - okolina nule, onda postoji simetrična uredjeno - konveksna $\mathcal{T}$-okolina nule $V = [V]$, tako da $U \supseteq H \cap V = H \cap (V + C) \cap (V - C) \supseteq H \cap (V + C \cap H) \cap (V - C \cap H)$. To znači da je U jedna $(\mathcal{T}|H)_F$ -okolina nule, odnosno $\mathcal{T}|H \leqslant (\mathcal{T}|H)_F$ i topologija $(\mathcal{T}|H)$ je onda uredjeno - konveksna.

Za sada ne znamo niti da dokažemo, niti da opovrgnemo tvrdjenje da je $\mathcal{T}_F|H = (\mathcal{T}|H)_F$, koje je očigledno opštije od prethodnog. Na osnovu posledice 2.15. je $\mathcal{T}_F|H \leqslant (\mathcal{T}|H)_F$.

Za razliku od UTVP sa osobinom otvorene rastavljivosti, kategorija uredjeno - konveksnih UTVP je invarijantna u odnosu na projektivnu granicu, jer je konačan presek uredjeno - konvesksnih podskupova uredjeno - konveksan. U opštem slučaju sa induktivnom granicom nije tako. Iz /33/ se zna da ni kvocijent prostor uredjeno - konveksnog UTVP ne mora biti uredjeno - konveksan. U /33/ je dokazano da su proizvoljan proizvod i direktna suma uredjeno - konveksnih ULKP uredjeno - konveksni ULKP. U (/37/, b) Teoreme 5.20. i 5.21.) dokazano je opštije: $\prod_\alpha \mathcal{T}_{\alpha F} = (\prod_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_F$ i $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_{\alpha F} = (\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_F$, ali samo za ULKP. Mi dokazujemo da je to tačno i za UTVP. S obzirom da je $[\prod_\alpha V_\alpha] = \prod_\alpha [V_\alpha]$ dokaz za proizvod je isti kao u (/37/, b). Medjutim, dokaz za direktan zbir je različit od odgovarajućeg za ULKP iz /37/, b) jer se u opštem slučaju induktivna granica i direktan zbir u kategoriji TVP razlikuju od istih u kategoriji LKP (pogledati /1/).

2.21. T v r d j e n j e. Ako je $\{(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha); \alpha \in I\}$ familija UTVP a $(E, C, \bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)$ njihov direktan zbir u kategoriji TVP (/1/, 4. str. 21), onda je $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_{\alpha F} = (\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_F$.

D o k a z. Na osnovu (/1/, 4, str. 20) topologije $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_{\alpha F}$ i $(\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_F$ su generisane fadenima $(U_n)_{n \in N}$ i $([V_n])_{n \in N}$, gde je $V_n = \sum_{k=1}^{\infty} \{\bigcup U^\alpha_{2^{n-1}k}\}$ i $U_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \{\bigcup [U^\alpha_{2^{n-1}k}]\}$. Dokažimo da je $[V_n] = U_n$, za svako $n \in N$. Ako $x \in [V_n]$, onda postoje a, b $\in V_n$, $a \leqslant b$, tako da je $a = \sum_{i=1}^{m} x^{\alpha_i}_{2^{n-1}}$, $b = \sum_{i=1}^{m} y^{\alpha_i}_{2^{n-1}}$ i pri tome je $\sum_{i=1}^{m} x^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \leqslant x \leqslant \sum_{i=1}^{m} y^{\alpha_i}_{2^{n-1}}$. To znači da je $\pi_{\alpha_i}(a) \leqslant \pi_{\alpha_i}(x) \leqslant \pi_{\alpha_i}(b)$, odnosno, $x^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \leqslant \pi_{\alpha_i}(x) \leqslant y^{\alpha_i}_{2^{n-1}}$. S obzirom da $x^{\alpha_i}_{2^{n-1}}, y^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \in U^{\alpha_i}_{2^{n-1}}$ i da je $x = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\pi}_{\alpha_i}(x)$, onda $x \in U_n$, jer je $\widetilde{\pi}_{\alpha_i}(x) = x_{\alpha_i} \in [U^{\alpha_i}_{2^{n-1}}]$. Obrnuto, ako $x \in U_n$, onda je $x = \sum_{i=1}^{m} x^{\alpha_i}_{2^{n-1}}$, gde $x^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \in [U^{\alpha_i}_{2^{n-1}}]$. To znači da za svako α_i postoje $v^{\alpha_i}_{2^{n-1}}$, $u^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \in U^{\alpha_i}_{2^{n-1}}$ i $v^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \leqslant u^{\alpha_i}_{2^{n-1}}$ i onda je $a = \sum_{i=1}^{m} v^{\alpha_i}_{2^{n-1}} \leqslant x \leqslant \sum_{i=1}^{m} u^{\alpha_i}_{2^{n-1}} = b$. Očigledno je $a \leqslant b$ i $a, b \in V_n$ i onda $x \in [V_n]$.

Diskretna LKG $\mathcal{V}(E, E^*)$ je uredjeno - konveksna, ako i samo ako je konus $C \subsetneq E$ anti-simetričan (Tvrdjenje 2.11.). Dakle, $\mathcal{V}(E, E^*)$ je najfinija LKG a $\mathcal{V}_F(E, E^*)$ je najfinija uredjeno - konveksna LKG. S obzirom da je $\overline{C}^{\mathcal{V}(E, E^*)} = C$, onda prema tvrdjenju 2.10. ako ULKG $(E, C, \mathcal{V}(E, E^*))$ nije uredjeno - - konveksna, onda topologija $\mathcal{V}_F(E, E^*)$ nije Hauzdorfova. Dakle, ULKG $(E, C, \mathcal{V}_F(E, E^*))$ je Hauzdorfova, ako i samo ako je diskretna. Inače, najfinija uredjeno - konveksna LKG na (E, C), odnosno, $\mathcal{V}_F(E, E^*)$, ima za bazu okolina nule $[\{0\}] = C \cap (-C)$, dakle, jedan potprostor. Sledećim tvrdjenjem dajemo karakterizaciju najfinije uredjeno - konveksne LKG.

2.22. T v r d j e n j e. Za svaku uredjeno - konveksnu ULKG $(E, C, \mathcal{T})$, sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $\mathcal{T}$ je najfinija uredjeno - konveksna LKG;

b) Svako pozitivno linearno preslikavanje iz ULKG $(E, C, \mathcal{T})$ u proizvoljnu ULKG $(F, K, \mathcal{P})$ koja je uredjeno - - konveksna, je neprekidno.

D o k a z. Ako je V uravnotežena, konveksna i uredjeno - konveksna $\mathcal{P}$ - okolina nule, onda je očigledno $f^{-1}(V) = f^{-1}((V + K) \cap (V - K)) \supseteq (f^{-1}(V) + C) \cap (f^{-1}(V) - C) \supset C \cap -C$, odnosno, $f^{-1}(V)$ je $\mathcal{T} = \mathcal{V}_F(E, E^*)$ - okolina nule, tj. a)$\Rightarrow$b). Obrnuto se dobija, ako uzmemo da je $(F, K, \mathcal{P}) = (E, C, \mathcal{V}_F(E, E^*))$ a $f = i_E$ (identično preslikavanje prostora E).

Interesantno je znati da li postoji najfinija uredjeno - konveksna LKG na uredjenom vektorskom prostoru (E, C), koja je saglasna sa datom razdvojivom dualnošću $\langle E, E' \rangle$ (E' je potprostor od E^* koji je $\sigma(E^*, E)$ - gust). U (/17/, str. 574) postoji odgovor za LKP, i to je baš $\mathcal{T}_F(E, E')$ - pridružena uredjeno - konveksna topologija Makijevoj topologiji $\mathcal{T}(E, E')$. Odgovor za LKG je "isti" i dokaz je dosta sličan i zbog toga ga ne navodimo, samo dajemo formulaciju tvrdjenja.

2.23. T v r d j e n j e. Neka je $\langle E, E' \rangle$ razdvojiva dualnost ($E' \subsetneq E^*$). Ako je skup dopustivih uredjeno - konveksnih LKG na (E, C) neprazan, onda je $\mathcal{V}_F(E, E')$ najfinija uredjeno - konveksna LKG na (E, C), koja je dopustiva u odnosu na datu dualnost.

3. TELESNE UTVG

U prvom i drugom delu razmatrali smo UTVG (UTVP i ULKG) koje za bazu okolina nule imaju pozitivno generisane podskupove, odnosno, uredjeno-konveksne podskupove. Osobine "otvorena rastavljivost" i "uredjena-konveksnost" su na neki način suprotne. Ta suprotnost se najbolje vidi kod ULKP iz (/37/, b), Teoreme (3.10) i (5.18)). U (/23/, a) str.107) uveden je pojam telesnog skupa u uredjenim vektorskim prostorima koji nisu obavezno Risovi. U navedenom radu i u (/37/, b)) proučavani su samo ULKP koji imaju bazu okolina nule od telesnih podskupova. Mi definišemo telesne UTVG (UTVP) i proučavamo njihove osobine. Navodimo rezultate koji se razlikuju od odgovarajućih za ULKP i UTVP.

3.1. D e f i n i c i j a. UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je telesna, ako ima bazu okolina nule od telesnih podskupova.

Iz uvodnog dela znamo da je podskup A uredjenog vektorskog prostora (E, C) telesan, ako je $A = S(A)$, gde je $S(A) = \bigcup\{[-a, a] \ ; \ a \in A \cap C\}$. S obzirom da je telesan podskup uravnotežen, onda je jasno da telesna UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ ima bazu okolina nule od uravnoteženih podskupova, dakle, od telesnih i simetričnih podskupova. S obzirom da su u polju realnih brojeva R jedini konusi: $\{0\}$, R^+, R^- i R, onda TVG iz (/28/, primer B, str.43) nije telesna ni za jedan od mogućih konusa, jer bi onda imala bazu okolina nule od uravnoteženih podskupova.

Kao što se u 1. i 2. svakoj UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ pridružuju toplogije $\mathcal{T}_F$ i $\mathcal{T}_D$, koje su uredjeno-konveksne i sa osobinom otvorene rastavljivosti, tako se prostoru $(E, C, \mathcal{T})$ pridružuje topologija $\mathcal{T}_S$, koja je telesna. Naime, ako je $\mathcal{U} = \{U \mid U = -U\}$ baza okolina nule topologije $\mathcal{T}$, onda $S(\mathcal{U}) = \{S(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ čini jednu filtar bazu telesne TVG. S obzirom da su skupovi A i S(A) u opštem slučaju neuporedivi, onda su topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_S$ neuporedive. Sledeće tvrdjenje se dokazuje kao za ULKP u (/37/, b)).

3.2. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVG, onda je tačno sledeće:

a) $\mathcal{T}_F \leq \mathcal{T}_S \leq \mathcal{T}_D$;

b) UTVG $(E, C, \mathcal{T}_S)$ je uredjeno-konveksna sa osobinom otvorene rastavljivosti;

c) $\mathcal{T}_S = (\mathcal{T}_D)_F = (\mathcal{T}_F)_D$;

3.3. P o s l e d i c a. Ako je UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno-konveksna sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda je ona telesna.

D o k a z. Prema prethodnom tvrdjenju c), imamo da je $\mathcal{T}_S = (\mathcal{T}_D)_F = \mathcal{T}_F = \mathcal{T}_D = \mathcal{T}$, dakle, $(E, C, \mathcal{T})$ je telesna UTVG.

3.4. P o s l e d i c a. Diskretna TVG je telesna u odnosu na bilo koji konus, ako i samo ako je uredjeno-konveksna, odnosno, ako i samo ako je konus C anti-simetričan.

D o k a z. Direktna posledica tvrdjenja 2.11. i tvrdjenja 3.2. c).

3.5. P o s l e d i c a. Indiskretna TVG je telesna u odnosu na bilo koji konus, ako i samo ako je sa osobinom otvorene rastavljivosti, odnosno, ako i samo ako je $E = C - C$.

D o k a z. Direktna posledica tvrdjenja 3.2. c) i posledice 1.13.

3.6. P o s l e d i c a. Ako je f pozitivno neprekidno linearno preslikavanje iz UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ u UTVG $(F, K, \mathcal{P})$, onda je f neprekidno iz UTVG $(E, C, \mathcal{T}_S)$ u UTVG $(F, K, \mathcal{P}_S)$.

D o k a z. Na osnovu tvrdjenja 1.11. f je neprekidno linearno preslikavanje iz $(E, C, \mathcal{T}_D)$ u $(F, K, \mathcal{P}_D)$, a prema tvrdjenju 2.13. f je neprekidno iz $(E, C, \mathcal{T}_{DF} = \mathcal{T}_S)$ u $(F, K, \mathcal{P}_{DF} = \mathcal{P}_S)$.

3.7. P o s l e d i c a. UTVG $(E, C, \mathcal{T})$ je telesna, ako i samo ako je $(E, -C, \mathcal{T})$ telesna.

D o k a z. Ako je V simetrična $\mathcal{T}$-okolina nule, onda je $\bigcup\{[-x, x];\ x \in V \cap C\} = \bigcup\{[-y, y];\ y \in V \cap (-C)\}$.

U nastavku rada navodimo neke osobine telesnih UTVP i telesnih fadena u uredjenim vektorskim prostorima. Za faden $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$ kažemo da je telesan faden, ako je $V_n = S(V_n)$, za svako $n \in N$. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi da je skup telesnih fadena u UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ neprazan.

3.8. T v r d j e n j e. Neka je $E = C - C$. Ako je $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in N}$ $\mathcal{T}$-topološki faden u UTVP $(E, C, \mathcal{T})$, onda je $S(\mathcal{U}) = (S(U_n))_{n \in N}$ $\mathcal{T}_S$-topološki faden u UTVP $(E, C, \mathcal{T}_S)$.

D o k a z. S obzirom da je $S(U_n) = \bigcup \{[-x, x] ; x \in U_n \cap C\}$, dakle telesan podskup od E, onda je on očigledno uravnotežen. Kako je za svako $c \in C$, $S(\{c\}) = [-c, c]$, $S(U_n)$ je gutajući podskup u E, jer je $E = C - C$. Ako je $x = a + b$, gde $a \in S(U_{n+1})$ i $b \in S(U_{n+1})$, onda postoje $u \in U_{n+1} \cap C$ i $v \in U_{n+1} \cap C$, tako da $a \in [-u, u]$ i $b \in [-v, v]$, odnosno, $a + b \in [-u, u] + [-v, v] \subseteq [-(u + v), u + v]$. S obzirom da $u + v \in U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$, onda je $x = a + b \in S(U_n)$. Dakle, $S(U_{n+1}) + S(U_{n+1}) \subseteq S(U_n)$.

3.9. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVP, onda postoji u E skup telesnih fadena sa osobinama:

i) Za bilo koja dva fadena $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ toga skupa, postoji faden $\mathcal{W}$ toga skupa, tako da je $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$;

ii) Članovi fadena toga skupa čine bazu okolina nule topologije $\mathcal{T}_S$;

D o k a z. Prema (/1/, 1, str.6) u UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ postoji skup $\mathcal{T}$-topoloških fadena, tako da za svaka dva fadena $\mathcal{U}'$ i $\mathcal{V}'$ postoji $\mathcal{T}$-topološki faden $\mathcal{W}'$, tako da je $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{U}' \cap \mathcal{V}'$. Prema prethodnom tvrdjenju fadeni $S(\mathcal{U}')$, $S(\mathcal{V}')$ i $S(\mathcal{W}')$ su telesni. Time je dokazana egzistencija skupa telesnih fadena. Iz odnosa $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{U}' \cap \mathcal{V}'$, sledi $S(\mathcal{W}') \subseteq S(\mathcal{U}') \cap S(\mathcal{V}')$. To znači da je i) ispunjeno. Ako je U $\mathcal{T}_S$-okolina nule, onda postoji $\mathcal{T}$-okolina nule V, tako da $U \supseteq S(V)$. Na osnovu prethodnog tvrdjenja $\mathcal{T}$-okolina V i $\mathcal{T}_S$-okolina $S(V)$ generišu fadene $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$, $V = V_1$ i $S(\mathcal{V}) = (S(V_n))_{n \in N}$, tako da $U \supseteq S(V_1)$. To znači da članovi fadena dobijenog skupa čine bazu okolina nule topologije $\mathcal{T}_S$.

3.10. P o s l e d i c a. Ako je $\mathcal{F}$ skup fadena u UTVP $(E, C, \mathcal{T})$, koji generiše topologiju $\mathcal{T}$, onda je $S(\mathcal{F})$ skup fadena u E, koji generiše topologiju $\mathcal{T}_S$.

S obzirom da se prema tvrdjenju 3.2. c) topologija $\mathcal{T}_S$ izražava preko topologija $\mathcal{T}_D$ i $\mathcal{T}_F$, sledeća tvrdjenja su direktna posledica tvrdjenja 1.22. i 2.21.

3.11. T v r d j e n j e. Ako je $\{(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha); \alpha \in I\}$ familija UTVP a $(E, C, \prod_\alpha \mathcal{T}_\alpha)$ njihov proizvod, onda je $\prod_\alpha \mathcal{T}_{\alpha s} = (\prod_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_s$.

3.12. T v r d j e n j e. Ako je $\{(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha); \alpha \in I\}$ familija UTVP a $(E, C, \oplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)$ njihov direktan zbir u kategoriji TVP (/1/, 4. str. 21), onda je $\oplus_\alpha \mathcal{T}_{\alpha s} = (\oplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha)_s$.

U /21/, /33/, /37/, b) proučavana je takozvana uredjeno-ograničena lokalno konveksna topologija na proizvoljnom vektorskom prostoru (E, C) u oznaci $(E, C, \mathcal{T}_b)$. Ona za bazu okolina nule ima sve apsolutno konveksne podskupove od E koji gutaju uredjeno-ograničene podskupove (podskupove od E koji su sadržani u nekom intervalu $[x, y]$). Topologija $\mathcal{T}_b$ ne mora biti Hauzdorfova za svaki konus C. Specijalno ako uzmemo da je C = E, onda je $\mathcal{T}_b$ indiskretna lokalno konveksna topologija, dakle nije Hauzdorfova. Tada su uredjeno-ograničeni podskupovi u stvari svi podskupovi od E, dakle i sam prostor E. To je jasno, jer je za svaki konus $C \subseteq E$: $[x, y] = (x + C) \cap (y - C)$.

U /15/ je za Risove vektorske prostore definisana i linearna uredjeno-ograničena topologija na sledeći način: Risov UTVP $(E, C, \mathcal{T})$ je sa linearnom uredjeno-ograničenom topologijom, ako je svaki uredjeno-bornivorni faden $\mathcal{T}$-topološki. To znači da je svaki faden $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$, čiji članovi gutaju uredjeno-ograničene podskupove, $\mathcal{T}$-topološki. Ta topologija je onda očigledno najfinija telesna linearna topologija na (E, C). U /15/ su ispitivane druge osobine te topologije koja je tamo označena sa T^{o}.

U (/37/, b), str.75) je dokazano da je lokalno konveksna uredjeno-ograničena topologija $\mathcal{T}_b$ najfinija lokalno telesna topologija na (E, C), ako je E = C - C i ako je za svaka dva elementa $u, v \in C$: $[o, u] + [o, v] = [o, u + v]$.

Za linearnu uredjeno-ograničenu topologiju (označićemo je sa $\mathcal{T}^b$) mi dokazujemo sledeće:

3.13. T v r d j e n j e. Ako je (E, C) uredjen vektorski prostor tako da je E = C - C i da je za $u, v \in C$: $[o, u] + [o, v] = [o, u + v]$, onda je $\mathcal{T}^b$ najfinija linearna telesna topologija na (E, C).

D o k a z. Najpre ćemo dokazati da je topologija $\mathcal{T}^b$ telesna, naime, ako je V jedna $\mathcal{T}^b$-okolina nule, dokažimo da postoji telesna $\mathcal{T}^b$-okolina nule U, tako da $V \supseteq U$. Jasno je da okolina V generiše jedan (ne mora biti jedinstven) $\mathcal{T}^b$-topološki faden $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in N}$, $V = V_1$. Sada za svako $n \in N$ definišemo niz podskupova $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in N}$ na sledeći način: $U_n = \bigcup\{[-x, x] : x \in V_{n+1}$ i $[0, x] \subseteq V_{n+1}\}$. Jasno je da su svi podskupovi U_n telesni kao unije telesnih podskupova. Da je $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in N}$ telesni faden, treba još dokazati da su U_n gutajući podskupovi, kao i da je $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$. Da bi dokazali da su U_n gutajući, dokažimo da je $U_n \cap C = \{x \in C : [0, x] \subseteq V_{n+1}\}$. Zaista, ako $a \in U_n \cap C$, onda $a \in U_n$ i $a \in C$, odnosno, postoji $x \in C$, tako da je $[0, x] \subseteq V_{n+1}$ i $a \in [-x, x]$. S obzirom da $a \in C$, onda $a \in [-x, x] \cap C$ ili $[0,a] \subseteq [0, x] \subseteq V_{n+1}$, odnosno, $a \in \{x \in C : [0, x] \subseteq V_{n+1}\}$. Obrnuto je očigledno, jer je $[0, x] \subseteq [-x, x]$, za svako $x \in C$. S obzirom da su U_n telesni podskupovi, onda su oni gutajući, ako i samo ako gutaju pozitivne elemente. Tako, ako neko $c \in C$ ne pripada skupu kU_n, za svaki prirodan broj k, onda $\frac{1}{k} c \notin \{x \in C : [0, x] \subset V_{n+1}\}$, odnosno, $[0, c] \not\subseteq k V_{n+1}$, što je suprotno pretpostavci da je $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in N}$ $\mathcal{T}^b$-topološki faden. Dokažimo sada da je $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$, za svako $n \in N$. Ako je $a = u + v \in U_{n+1} + U_{n+1}$, onda postoje $x, y \in V_{n+2}$, $[0, x] \subseteq V_{n+2}$, $[0, y] \subseteq V_{n+2}$ i $u \in [-x, x]$, $v \in [-y, y]$. Dalje je $a = u + v \in [-(x + y), x + y]$, $x + y \in V_{n+2} + V_{n+2} \subseteq V_{n+1}$ i $[0, x + y] \subseteq V_{n+2} + V_{n+2} \subseteq V_{n+1}$. To znači da $a \in U_{n+1}$. Dokažimo još da je $U_n \subseteq V_n$, za svako $n \in N$. Stvarno, ako $u \in U_n$, onda postoji $x \in V_{n+1}$, $[0,x] \subseteq V_{n+1}$ i $u \in [-x, x]$, odakle sledi da je $\frac{u + x}{2} \in [0, x]$ i $\frac{x - u}{2} \in [0, x]$, odnosno, da $\frac{u + x}{2} \in V_{n+1}$ i $\frac{x - u}{2} \in V_{n+1}$. Sada je $u = \frac{x + u}{2} - \frac{x - u}{2} \in V_{n+1} - V_{n+1} = V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$. Dakle, niz $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in N}$ je telesni faden, a to znači da je $\mathcal{T}^b$-topološki i $V = V_1 \supseteq U_1 = U$. Dakle, $\mathcal{T}^b$ je linearna topologija sa bazom okolina nule od telesnih podskupova. S obzirom da su uredjeno-ograničeni podskupovi ograničeni za svaku linearnu telesnu topologiju, kao i da je

$\mathcal{T}^b$ najfinija linearna topologija za koju su uredjeno-ograničeni podskupovi topološki ograničeni, to je $\mathcal{T}^b$ najfinija linearna telesna topologija.

3.14. P o s l e d i c a. Ako je (E, C) uredjen vektorski prostor kao u prethodnom tvrdjenju (dakle, slab Risov prostor - pogledati uvodni deo), onda je $\mathcal{T}_F^f = \mathcal{T}^b$ ($\mathcal{T}^f$ je najfinija linearna topologija na E).

D o k a z. Na osnovu tvrdjenja 3.2. i posledice 1.5. sledi da je $\mathcal{T}_F^f = \mathcal{T}_S^f$. Prema posledici 3.6. i prethodnom tvrdjenju imamo da je $\mathcal{T}_F^f = \mathcal{T}_S^f = \mathcal{T}^b$.

U tvrdjenjima koja slede navodimo neke osobine linearne uredjeno-ograničene topologije $\mathcal{T}^b$, bez nekih pretpostavki za konus C.

3.15. T v r d j e n j e. Ako je $\mathcal{T}^b$ linearna uredjeno-ograničena topologija na uredjenom vektorskom prostoru (E, C), onda je $(\mathcal{T}^b)^o = \mathcal{T}_b$ ($(\mathcal{T}^b)^o$ je lokalno konveksna topologija na (E, C), koja za bazu okolina nule ima apsolutno konveksne $\mathcal{T}^b$-okoline nule).

D o k a z. Ako je U jedna $(\mathcal{T}^b)^o$- okolina nule, onda postoji apsolutno konveksna $\mathcal{T}^b$-okolina nule V, tako da $U \supseteq V$ i da V guta uredjeno-ograničene podskupove. S obzirom na definiciju topologije $\mathcal{T}_b$, onda je V $\mathcal{T}_b$-okolina nule, a to znači da je i U jedna $\mathcal{T}_b$-okolina nule, odnosno, $(\mathcal{T}^b)^o \leq \mathcal{T}_b$. Obrnuto, ako je W jedna apsolutno konveksna $\mathcal{T}_b$-okolina nule, onda je prirodni faden $(\frac{1}{2^{n-1}} W)n \in N$ uredjeno-bornivoran, dakle $\mathcal{T}^b$-topološki. To znači da je W $\mathcal{T}^b$-okolina nule, a s obzirom da je apsolutno konveksna, ona je i $(\mathcal{T}^b)^o$-okolina nule. Dakle, $\mathcal{T}_b \leq (\mathcal{T}^b)^o$ i dokaz je završen.

U (/37/, b), 7. str.68) dat je potreban i dovoljan uslov, kada apsolutno konveksan podskup V guta sve uredjeno-ograničene podskupove uredjenog vektorskog prostora (E, C). Niz $\{x_n\} \subseteq E$ je uredjeno-Makijev nula niz, ako postoji realan niz $0 < \varepsilon_n \downarrow 0$ i uredjeno-ograničen podskup $A \subseteq E$ tako da $x_n \in \varepsilon_n A$, za svako $n \in N$. Sledećim tvrdjenjem dajemo karakterizaciju uredjeno-bornivornih fadena uredjenog vektorskog prostora(E, C).

3.16. T v r d j e n j e. Faden $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ u uredjenom vektorskom prostoru (E, C) je uredjeno-bornivoran, ako i samo ako svako V_n guta uredjeno-Makijeve nula nizove.

D o k a z. Neophodnost je jasna, jer za svaki uredjeno-Makijev nula niz $\{x_k\}$ postoji realan niz $\{\varepsilon_k\}$ i uredjeno-ograničen podskup A, tako da $x_k \in \varepsilon_k A$, za svako $k \in N$. S obzirom da svako V_n guta A, onda postoji $\lambda > 0$, tako da $x_k \in \varepsilon_k \lambda V_n \subseteq \lambda' V_n$, gde je $\lambda \varepsilon_k \leq \lambda'$. S druge strane, ako postoji uredjeno-ograničen podskup A i član V_{n_0} fadena $\mathcal{V}$, tako da $A \not\subseteq k^2 V_{n_0}$, onda postoji niz $x_k \in A$, tako da uredjeno-Makijev nula niz $\{\frac{1}{k} x_k\}$ nije progutan sa V_{n_0}, što je suprotno pretpostavci o fadenu $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$.

Linearno preslikavanje f uredjenog vektorskog prostora (E, C) u TVP (F, $\mathcal{P}$) je uredjeno-ograničeno, ako preslikava uredjeno-ograničene podskupove prostora (E, C) u $\mathcal{P}$-ograničene podskupove TVP (F, $\mathcal{P}$), (/37/, b) str.68).

Sledećim tvrdjenjm i njegovim posledicama karakterišemo linearnu uredjeno-ograničenu topologiju $\mathcal{T}^b$ na uredjenom vektorskom prostoru (E, C).

3.17. T v r d j e n j e. Neka je (E, C, $\mathcal{T}$) UTVP i $\mathcal{T}^b$ linearna uredjeno-ograničena topologija na (E, C). Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) $\mathcal{T} \geqslant \mathcal{T}^b$;

b) svaki faden $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ čiji članovi gutaju uredjeno-Makijeve nula nizove je $\mathcal{T}$-topološki;

c) Svako uredjeno-ograničeno linearno preslikavanje iz (E, C, $\mathcal{T}$) u proizvoljni TVP (F, $\mathcal{P}$) je neprekidno;

D o k a z. a) $\Longrightarrow$ b), jer ako je $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ faden sa navedenom osobinom, onda je prema prethodnom tvrdjenju uredjeno-bornivoran, dakle $\mathcal{T}^b$-topološki faden, odnosno, $\mathcal{T}$-topološki, zbog $\mathcal{T} \geqslant \mathcal{T}^b$. b) $\Rightarrow$ c): Ako je U uravnotežena $\mathcal{P}$-okolina nule, onda ona generiše jedan $\mathcal{P}$-topološki faden $(U_n)n \in N$, tako da je $f^{-1}((U_n)n \in N) = (f^{-1}(U_n))n \in N$ uredjeno-bornivoran faden u (E, C). Prema prethodnom tvrdjenju članovi $f^{-1}(U_n)$

gutaju uredjeno-Makijeve nula nizove, dakle, zbog b) faden $(f^{-1}(U_n))n\in N$ je $\mathcal{T}$-topološki. To znači da je $f^{-1}(U) = f^{-1}(U_1)$ $\mathcal{T}$-okolina nule, odnosno, f je $\mathcal{T}$ - $\mathcal{P}$ neprekidno preslikavanje. c) $\Rightarrow$ a): Identično preslikavanje iz $(E,\mathcal{T})$ u $(E,\mathcal{T}^b)$ je očigledno uredjeno-ograničeno i onda je zbog c) neprekidno, dakle, $\mathcal{T} \geqslant \mathcal{T}^b$.

3.18. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ UTVP, onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) $\mathcal{T} = \mathcal{T}^b$;

b) Svaki faden $\mathcal{V} = (V_n)n\in N$ čiji članovi gutaju uredjeno-Makijeve nule nizove u (E, C) je $\mathcal{T}$-topološki i svaki uredjeno-ograničen podskup je $\mathcal{T}$-ograničen;

c) Svako uredjeno-ograničeno linearno preslikavanje iz $(E, C,\mathcal{T})$ u proizvoljni TVP $(F,\mathcal{P})$ je neprekidno i svaki uredjeno-ograničeni podskup od (E, C) je $\mathcal{T}$-ograničen;

D o k a z. Direktna posledica prethodnog tvrdjenja.

3.19. P o s l e d i c a. Linearna uredjeno-ograničena topologija $\mathcal{T}^b$ je najfinija linearna topologija na (E, C) za koju su uredjeno-Makijevi nula nizovi, topološki nula nizovi.

D o k a z. Ako je V $\mathcal{T}'$-okolina nule neke linearne topologije na (E, C) za koju su uredjeno-Makijevi nula nizovi topološki nula nizovi, onda je generisani $\mathcal{T}'$-topološki faden $\mathcal{V} = (V_n)n\in N$, $V_1 = V$ prema tvrdjenju 3.16. uredjeno-bornivoran, odnosno, $\mathcal{T}^b$-topološki. Dakle, $V = V_1$ je $\mathcal{T}^b$-okolina nule i onda je $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}^b$.

Ako je $(E, C,\mathcal{T})$ bilo koji UTVP, onda su interesantna sledeća dva tvrdjenja:

3.20. T v r d j e n j e. Za svaku linearnu topologiju $\mathcal{T}$ na uredjenom vektorskom prostoru (E, C) je $\mathcal{T}_F \leq \mathcal{T}^b$.

D o k a z. Najpre dokažimo da je $\mathcal{T}^b$ najfinija linearna topologija na (E, C) za koju su uredjeno-ograničeni podskupovi topološki ograničeni, odnosno, $\mathcal{T}^b$-ograničeni. Ako je $\mathcal{T}'$ jedna takva linearna topologija i V jedna njena okolina nule, onda je generisani faden $\mathcal{V} = (V_n)n\in N$ očigledno uredjeno-

-bornivoran, a to znači da je $\mathcal{V}$ jedan $\mathcal{T}^{b}$-topološki faden. Dakle, $V = V_1$ je $\mathcal{T}^{b}$-okolina nule i $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}^{b}$. Na osnovu tvrdjenja 2.4. uredjeno-ograničeni podskupovi su $\mathcal{T}_F$-ograničeni i onda je $\mathcal{T}_F \leq \mathcal{T}^{b}$.

3.21. T v r d j e n j e. Ako je f pozitivno linearno preslikavanje iz uredjenog vektorskog prostora (E, C) u uredjeni vektorski prostor (F, K), onda je f neprekidno iz UTVP $(E, C, \mathcal{T}^{b})$ u UTVP $(F, K, \mathcal{P}^{b})$.

D o k a z. Ako je V jedna $\mathcal{P}^{b}$-okolina nule, onda ona generiše $\mathcal{P}^{b}$-topološki faden $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in N}$, koji je očigledno u (F, K) uredjeno-bornivoran. S obzirom da se pozitivno linearnim preslikavanjem uredjeno-ograničeni podskupovi preslikavaju u uredjeno-ograničene, onda je $f^{-1}(\mathcal{V}) = (f^{-1}(V_n))_{n\in N}$ uredjeno-bornivoran faden u (E, C). Dakle, $f^{-1}(V) = f^{-1}(V_1)$ je $\mathcal{T}^{b}$-okolina nule, odnosno, f je neprekidno preslikavanje iz UTVP $(E, C, \mathcal{T}^{b})$ u UTVP $(F, K, \mathcal{P}^{b})$.

Napominjemo da su poslednja tvrdjenja i njihove posledice formulisana u /17/ i /37/, b) za slučaj ULKP, ali su dokazi za linearnu uredjeno-ograničenu topologiju, koje smo mi dali različiti od odgovarajućih u /17/ i /37/, b). Inače, linearna uredjeno-ograničena topologija, u nama poznatim radovima nije proučavana, osim u /15/, a), kada je (E, C) Risov prostor.

Iz sledećeg tvrdjenja koje dokazujemo najbolje se vidi opravdanost tvrdjenja 3.16. koje smo formulisali slično lemi 7.2. iz (/37/, b) str.68).

3.22. T v r d j e n j e. Za svaki uredjen vektorski prostor (E, C), sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $E = C - C$;

b) Prostor $(E, C, \mathcal{T}^{b})$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti;

D o k a z. b)$\Rightarrow$a) na osnovu činjenice da je za svaku $\mathcal{T}^{b}$-okolinu nule U i $U\cap C - U\cap C$ $\mathcal{T}^{b}$-okolina nule, odnosno, za svako $x \in E$, postoji $\lambda > 0$, tako da $x \in \lambda(U\cap C - U\cap C) = \lambda U\cap C - \lambda U\cap C$, tj.: $x \in C - C$. Obrnuto, a)$\Rightarrow$b), ako je za svaki $\mathcal{T}^{b}$- topološki faden $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$, faden $\mathcal{V} \wedge C - \mathcal{V} \wedge C = (V_n \wedge C - V_n \wedge C) n \in N$ $\mathcal{T}^{b}$-topološki (Tvrdjenje 1.4.). Dovoljno je dokazati da za svako $n \in N$, $V_n \wedge C - V_n \wedge C$ guta uredjeno-ograničene podskupove. Ako to nije tako, onda postoji $x \in C$ i $n_0 \in N$, tako da $[-x, x] \not\subset k^2 (V_{n_0} \wedge C - V_{n_0} \wedge C)$, odnosno, postoji niz $x_k \in [-x, x]$, tako da $\left\{\frac{1}{k} x_k\right\} \notin k (V_{n_0} \wedge C - V_{n_0} \wedge C)$. S obzirom da je $E = C - C$, onda je $x_k = a_k - b_k$, gde $a_k, b_k \in C$ i $\frac{1}{k} a_k - \frac{1}{k} b_k \notin kV_{n_0} \wedge C - kV_{n_0} \wedge C$, što je nemoguće jer su $\left\{\frac{1}{k} a_k\right\}$ i $\left\{\frac{1}{k} b_k\right\}$ pozitivni uredjeno-Makijevi nula nizovi, te ih prema tvrdjenju 3.16. guta svako $V_n \wedge C$.

Napominjemo da je odgovarajuće tvrdjenje za ULKP formulisano i dokazano u (/37/, b) str.67), ali koristeći dualnost.

S obzirom da su najrasprostranjeniji uredjeni vektorski prostori generisani konusom C, odnosno, jednaki C - C (takvi su slabi Risovi prostori i Risovi prostori), onda je sledeća posledica jasna na osnovu prethodnih tvrdjenja i tvrdjenja 3.2.:

3.23. P o s l e d i c a. Ako je (E, C) uredjen vektorski prostor tako da je $E = C - C$, onda je linearna uredjeno-ograničena topologija $\mathcal{T}^{b}$ telesna, ako i samo ako je uredjeno-konveksna.

4. NEKI REZULTATI O RISOVIM TVG

U ovom delu rada pretpostavljamo da je (E, C) Risov uredjen vektorski prostor, odnosno, da je $C \cap (-C) = \{0\}$, kao i da za svaka dva elementa $x, y \in E$ postoji sup (x, y). Potprostor F Risovog prostora (E, C) je Risov, ako za svako $x \in F$ sledi da sup $(x, o) \in F$. Telesan potprostor F Risovog prostora (E, C) zove se l-ideal.

4.1. D e f i n i c i j a. Risovom topološko-vektorskom grupom zovemo Risov prostor (E, C) snabdeven topologijom $\mathcal{T}$ vektorske grupe, koja za bazu okolina nule ima telesne podskupove.

Skraćeno zapisujemo RTVG (Risova topološko-vektorska grupa) ili RLKG (Risova lokalno konveksna grupa). Sledeće tvrdjenje nećemo dokazivati jer se dokazuje slično kao kod RTVP u (/37/, b), str.136).

4.2. T v r d j e n j e. Neka je (E, C) Risov prostor i neka je $(E, \mathcal{T})$ TVG. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je RTVG;

b) Preslikavanje: $(x, y) \longrightarrow$ sup (x, y) je uniformno neprekidno na $E \times E$;

c) Preslikavanje: $x \longrightarrow$ sup $(x, 0)$ je uniformno neprekidno na E;

d) $(E, C, \mathcal{T})$ je uredjeno-konveksna UTVG sa osobinom otvorene rastavljivosti;

e) $(E, C, \mathcal{T})$ je uredjeno-konveksna UTVG i preslikavanje: $x \longrightarrow$ sup $(x, 0)$ je neprekidno u 0;

f) za svaka dva uopštena niza $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ i $\{y_\alpha : \alpha \in D\}$ u E, ako je $|x_\alpha| \leqslant |y_\alpha|$ za svako $\alpha \in D$ i ako $y_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$, onda $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$.

U (/37/, b) str.137) je dokazano da je (E, C) Arhimedov uredjen vektorski prostor, ako je $(E, C, \mathcal{T})$ RTVP. Iz sledećeg primera se vidi da to ne mora biti tačno, ako je $(E, C, \mathcal{T})$ RTVG.

4.3. P r i m e r. Postoji Risov prostor (E, C) koji nije Arhimedov (/37/, b) str.120), a (E, C, d) je RTVG (d-diskretna topologija na E). Na osnovu 1.13. i 2.11. (E, C, d) je uredjeno-konveksna UTVG sa osobinom otvorene rastavljivosti, dakle, prema tvrdjenju 3.2. ona je telesna, odnosno, (E, C, d) je RTVG, jer je (E, C) Risov prostor. Prema (/37/, b), Tvrdjenje (11.2)), na datom Risovom prostoru (E, C) ne postoji vektorska topologija $\mathcal{T}$, tako da je (E, C, $\mathcal{T}$) RTVP. Na osnovu ovog primera sledi direktno dokaz sledećeg tvrdjenja:

4.4. T v r d j e n j e. Ako je (E, C, $\mathcal{T}$) RLKG, onda pridruženi ULKP (E, C, loc$\mathcal{T}$) ne mora biti RLKP. (Dakle, $(\mathrm{loc}\mathcal{T})_S \neq \mathrm{loc}\mathcal{T}$).

Na osnovu poslednjeg primera i tvrdjenja 3.20. sledi da linearna uredjeno-ograničena topologija $\mathcal{T}^6$ ne mora biti uredjeno-konveksna.

U nastavku ovog dela sada navodimo neke rezultate koje smo dobili proučavajući RTV i RLKP.

4.5. T v r d j e n j e. Podskup $U \subsetneq E$ je $\mathcal{T}$-okolina nule u RTVP (E, C, $\mathcal{T}$), ako i samo ako je skU (telesno jezgro od U) $\mathcal{T}$-okolina nule.(Telesno jezgro podskupa $A \subsetneq E$ u Risovom prostoru (E, C) je najveći telesan podskup sadržan u A).

D o k a z. Dovoljnost je jasna jer je $skU \subseteq U$. Ako je U $\mathcal{T}$-okolina nule, onda postoji telesna okolina nule V, tako da $U \supseteq V$. S obzirom na definiciju telesnog jezgra, onda sledi da $U \supseteq skU \supseteq V$, odnosno, skU je $\mathcal{T}$-okolina nule.

4.6. P o s l e d i c a. U RTVP (E, C, $\mathcal{T}$) za svaki $\mathcal{T}$- topološki faden $\mathcal{U} = (U_n)n \in N$ postoji $\mathcal{T}$-topološki telesni faden $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$, tako da $\mathcal{U} \geq \mathcal{V}$.

D o k a z. Na osnovu prethodnog tvrdjenja dovoljno je uzeti $V_n = skU_n$, za svako $n \in N$. Treba samo dokazati da je $skU_{n+1} + skU_{n+1} \subseteq skU_n$, za svako $n \in N$. Iz (/37/, b) str.116) se zna da je $skU_{n+1} = \bigcup \left\{ [-u, u] \; ; [-u, u] \subseteq U_{n+1} \right\}$. Zbog toga za $x = a + b$, gde $a, b \in skU_{n+1}$, postoje $u, v \in C$, tako da $x \in [-u, u] + [-v, v] \subseteq U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$, odnosno, $x \in [-(u + v), u + v] \subseteq U_n$. Dakle, $skU_{n+1} + skU_{n+1} \subseteq skU_n$.

Sledeće tvrdjenje se odnosi na produženje jednog topološkog fadena iz l-ideala u topološki faden prostora:

4.7. T v r d j e n j e. Neka je $(E, C, \mathcal{T})$ RTVP i F njegov l-ideal (telesan potprostor), snabdeven indukovanom topologijom. Ako je $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ topološki telesni faden u $(F, C \wedge F) \mathcal{T}|F)$, onda postoji $\mathcal{T}$-topološki telesni faden $\mathcal{U} = (U_n)n \in N$ u E, tako da je $\mathcal{U} \wedge F = \mathcal{V}$.

D o k a z. Definišimo za svako $n \in N$ podskupove $U_n \subseteq E$ na sledeći način: $U_n = \{x \in E : y \in V_n$ kad god je $0 \leq y \leq |x|$ i $y \in F\}$. Niz $\mathcal{U} = (U_n)n \in N$ je onda $\mathcal{T}$-topološki faden, ako dokažemo da je U_n telesan podskup od E, zatim da je $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$, kao i da je U_n $\mathcal{T}$-okolina nule, za svako $n \in N$, koja u preseku sa F daje okolinu V_n. Dakle, ako je $|a| \leq |b|$ i $b \in U_n$, dokažimo da $a \in U_n$. Prema definiciji podskupa U_n, ako je $y \in F$ i $0 \leq y \leq |a|$, to znači da je $0 \leq y \leq |a| \leq |b|$, odnosno, $y \in V_n$ jer $b \in U_n$. Dokažimo da je $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$, za svako $n \in N$. Neka je $x = a + b$, gde $a \in U_{n+1}$ i $b \in U_{n+1}$. Ako je $y \in F$ i $0 \leq y \leq |x|$, to znači da je $0 \leq y \leq |a + b| \leq |a| + |b|$. S obzirom da je u Risovom prostoru $[0, |a| + |b|] = [0, |a|] + [0, |b|]$, onda je $y = y_1 + y_2$, gde $y_1 \in [0, |a|]$ i $y_2 \in [0, |b|]$. Dakle, $y = y_1 + y_2 \in V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$, odnosno $x = a + b \in U_n$. Treba da dokažemo da je i $V_n = U_n \wedge F$. Ako $a \in V_n$, onda je jasno da $a \in$. Neka je $0 \leq y \leq |a|$ i $y \in F$. Tada je $|y| \leq |a|$ i $a \in V_n$, dakle, $y \in V_n$ jer je V_n telesan podskup od F. Obrnuto, ako $a \in U_n \wedge F$, onda očigledno $a \in V_n$, na osnovu definicije podskupa U_n i činjenice da su U_n i V_n telesni podskupovi. Dokažimo da je U_n $\mathcal{T}$-okolina nule, za svako $n \in N$. Ako U_n nije $\mathcal{T}$-okolina nule, onda za svaku telesnu $\mathcal{T}$-okolinu nule U postoji $x_U \in U$ i $x_U \notin U_n$. To znači, da za svako U postoji $y_U \in F$ i $0 \leq y_U \leq |x_U|$ tako da $y_U \notin V_n$. S obzirom da uopšteni niz $\{x_U, \mathcal{U}, \geq\}$ teži nuli u prostoru $(E, C, \mathcal{T})$, onda prema tvrdjenju 4.2. f) i uopšteni niz $\{y_U, \mathcal{U}, \geq\}$ takodje teži nuli u $(E, C, \mathcal{T})$, dakle, i u $(F, C \wedge F, \mathcal{T}|F)$, što je nemoguće jer $y_U \notin V_n$. Dakle, $\mathcal{U} = (U_n)n \in N$ je $\mathcal{T}$-topološki faden u $(E, C, \mathcal{T})$, tako da je $\mathcal{U} \wedge F = \mathcal{V}$.

Interesantno je u poslednjem tvrdjenju za telesni faden $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ pretpostavljati da je bornivoran, zatvoren, uredjeno-bornivoran, lokalno-topološki, zatvoreni lokalno-topološki itd., ali naravno da nije topološki.

4.8. T v r d j e n j e. Neka je $(E, C, \mathcal{T})$ RTVP i F njegov 1-ideal snabdeven indukovanom topologijom. Ako je $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ bornivoran telesni faden u RTVP $(F, C \wedge F, \mathcal{T}|F)$, onda postoji bornivoran telesni faden $\mathcal{U} = (U_n)n \in N$ u E, tako da je $\mathcal{U} \wedge F = \mathcal{V}$.

D o k a z. Isto kao u prethodnom tvrdjenju definišimo podskupove $U_n \subsetneq E$, za svako $n \in N$. Treba jedino dokazati da je $\mathcal{U} = (U_n)n \in N$ bornivorni faden, odnosno, da je svako U_n bornivoran podskup u prostoru $(E, C, \mathcal{T})$. Ako to nije tako, onda postoji telesan ograničen podskup A od E, tako da $A \not\subset k \cdot U_{n_0}$ za svako $k \in N$ i neko $n_0 \in N$. To znači, postoji niz $x_k \in A$, tako da $\frac{1}{k} a_k \notin U_{n_0}$. Prema definiciji podskupa U_n, postoji niz $b_k \in F$, za koji je $0 \leq b_k \leq \left|\frac{1}{k} a_k\right|$, tako da $b_k \notin V_{n_0}$. Dakle, $0 \leq k \cdot b_k \leq |a_k|$, odnosno, $\{k \cdot b_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq A \wedge F$, jer je A telesan podskup, a F je potprostor. S obzirom da je $A \wedge F$ ograničen podskup od F, onda postoji $\lambda > 0$, tako da je $\{k \cdot b_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq \lambda V_{n_0} \subseteq k \cdot V_{n_0}$, za dovoljno veliko $k \in N$. Poslednja inkluzija je netačna, jer $b_k \notin V_{n_0}$ za svako $k \in N$. Dokazali smo dakle, da je $\mathcal{U} = (U_n)n \in N$ bornivorni faden u $(E, C, \mathcal{T})$.

4.9. T v r d j e n j e. Ako u prethodnom tvrdjenju pretpostavimo da je $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ zatvoren bornivorni faden, onda je $\mathcal{U} = (U_n)n \in N$, takodje zatvoren bornivorni faden.

D o k a z. Dokažimo da je $U_n = \overline{U}_n$, za svako $n \in N$. Ako $x \in \overline{U}_n$, onda postoji uopšteni niz $x_\tau \in U_n$, tako da $x_\tau \xrightarrow{\mathcal{T}} x$. Neka je $y \in F$ i $0 \leq y \leq |x|$. Tada je $0 \leq \inf(y, |x_\tau|) \leq |x_\tau| \in U_n$ i $\inf(y, |x_\tau|) \in F$. S obzirom na definiciju podskupa U_n, sledi $\inf(y, |x_\tau|) \in V_n$. Prema tvrdjenju 4.2. b), sledi da $\inf(y, |x_\tau|) \xrightarrow{\mathcal{T}} \inf(y, |x|) = y \in \overline{V}_n = V_n$. To sada znači da $x \in U_n$ i dokaz je onda završen.

Za faden $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ u TVP $(E, \mathcal{T})$ kažemo da je lokalno topološki, ako svako V_n seče $\mathcal{T}$- ograničene podskupove po okolini nule u indukovanoj topologiji (pogledati /1/).

Sledeće tvrdjenje je slično tvrdjenju 4.8.

4.10. T v r d j e n j e. Ako je u tvrdjenju 4.8. telesni faden $\mathcal{V}=(V_n)n\in N$ lokalno topološki, onda je dobijeni telesni faden $\mathcal{U}=(U_n)n\in N$ lokalno topološki.

D o k a z. Pretpostavimo da za svaku telesnu $\mathcal{T}$-okolina nule U prostora $(E, C, \mathcal{T})$ postoji telesan $\mathcal{T}$-ograničen podskup A, tako da $A\cap U \not\subseteq A\cap U_{n_0}$ za neko $n_0\in N$. To znači, da za svaku okolunu nule U, postoji uopšteni niz $\{x_U, \mathcal{U}, \geq\} \subseteq A\cap U$ i $x_U \notin A\cap U_{n_0}$, odnosno, za svako U, $x_U\notin U_{n_0}$. Dakle, na osnovu definicije podskupa U_{n_0}, postoji uopšteni niz $\{y_U; \mathcal{U}, \geq\}$, tako da $y_U\in F$, $0\leq y_U\leq|x_U|$ i $y_U\notin V_{n_0}$. S obzirom da je U telesan podskup, onda $y_U\in A\cap U\cap F$, odnosno, uopšteni niz $\{y_U; \mathcal{U}, \geq\}$ je ograničen podskup u indukovanoj topologiji u F. S druge strane, faden $\mathcal{V}=(V_n)n\in N$ je bornivoran, dakle, postoji $\lambda>1$, tako da $\frac{1}{\lambda}y_U\in V_{n_0}$, za svako U. S obzirom da $\frac{1}{\lambda}y_U\in F$, $0\leq\frac{1}{\lambda}y_U\leq y_U\leq|x_U|$ i $\frac{1}{\lambda}y_U\in V_{n_0}$, onda $x_U\in U_{n_0}$, suprotno pretpostavci.

4.11. P o s l e d i c a. Ako je u tvrdjenju 4.8. faden $\mathcal{V}=(V_n)n\in N$ zatvoren lokalno topološki, onda je dobijeni faden $\mathcal{U}=(U_n)n\in N$ zatvoren lokalno topološki.

D o k a z. Direktna primena tvrdjenja 4.9. i 4.10.

U nastavku rada dajemo karakterizacije nekih klasa RTVP koje nisu date u /15/, a). Inače, to je jedini nama poznat rad u kome se proučavaju klase RTVP bez lokalne konveksnosti. Slično kao u /37/, b), kažemo da je RTVP $(E, C, \mathcal{T})$ bornološki (kvazi-bačvast, bačvast), ako je $(E, \mathcal{T})$ bornološki (kvazi-bačvast, bačvast) u kategoriji TVP. Sledećim tvrdjenjem dajemo karakterizaciju bornoloških RTVP.

4.12. T v r d j e n j e. Za svaki RTVP sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je bornološki RTVP;

b) Svako pozitivno ograničeno linearno preslikavanje u proizvoljni RTVP $(F, K, \mathcal{P})$ je neprekidno;

c) Svako pozitivno ograničeno linearno preslikavanje u proizvoljni Frešeov RTVP (G, P, t) je neprekidno;

d) Svaki bornivorni faden $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$ u $(E, C, \mathcal{T})$ je $\mathcal{T}$-topološki;

e) Svaki bornivorni telesni faden $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in N}$ u $(E, C, \mathcal{T})$ je $\mathcal{T}$-topološki;

D o k a z. Iz /1/ znamo da je $(E, \mathcal{T})$ bornološki, ako je svako ograničeno linearno preslikavanje u proizvoljni TVP neprekidno. Jasno je da a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$c), zatim c)$\Rightarrow$d) i d)$\Rightarrow$a) na osnovu (/1/, str. 61). d)$\Rightarrow$e) je očigledno. Dokažimo da e)$\Rightarrow$d). Neka je $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$ bornivorni faden u RTVP $(E, C, \mathcal{T})$. S obzirom da svako V_n guta telesne ograničene podskupove od E, onda je sk $V_n \neq \emptyset$ i sk V_n je bornivoran podskup od E. Da je $(\text{sk } V_n)_{n \in N}$ faden u (E, C) dokazujemo kao u posledici 4.6. S obzirom da je faden$(\text{sk } V_n)_{n \in N}$ telesni i bornivoran, onda je jasno da e)$\Rightarrow$d).

Prema tvrdjenjima 4.8. i 4.12. e) direktno sledi:

4.13. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ bornološki RTVP, onda je svaki l-ideal F bornološki RTVP u indukovanoj topologiji.

Karakterizacija kvazi-bačvastih RTVP je slična bornološkim:

4.14. T v r d j e n j e. Za svaki RTVP $(E, C, \mathcal{T})$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je kvazi-bačvast RTVP;

b) Svaki telesni zatvoren bornivorni faden $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$ je $\mathcal{T}$-topološki;

D o k a z. a)$\Rightarrow$b) je očigledno. Dokažimo da b)$\Rightarrow$a). Neka je $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in N}$ zatvoren bornivorni faden u RTVP $(E, C, \mathcal{T})$. Slično kao i u prethodnom tvrdjenju niz $(\text{sk } U_n)_{n \in N}$ je bornivorni faden. S obzirom da je zatvaranje telesnog skupa, telesan skup (/37/, b), str. 138), onda je očigledno $\overline{\text{sk } U_n} \subseteq \text{sk } U_n$, odnosno, $(\text{sk } U_n)_{n \in N}$ je telesni bornivorni faden sadržan u fadenu $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in N}$. Dakle, $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in N}$ je $\mathcal{T}$-topološki faden i dokaz je završen.

Na osnovu poslednjih tvrdjenja i tvrdjenja 4.9. sledi: -

4.15. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ kvazi-bačvast RTVP, onda je svaki l-ideal F kvazi-bačvast RTVP u indukovanoj topologiji.

Dalje definišemo $\aleph_0$-bačvaste i $\aleph_0$-kvazi-bačvaste RTVP. Prostor $(E, C, \mathcal{T})$ je $\aleph_0$-bačvast ($\aleph_0$-kvazi-bačvast) u kategoriji RTVP, ako je $(E, \mathcal{T})$ $\aleph_0$-bačvast ($\aleph_0$-kvazi-bačvast) u kategoriji TVP, odnosno, ako je svaki faden (bornivorni faden) koji je prebrojiv presek $\mathcal{T}$-zatvorenih topoloških fadena, $\mathcal{T}$-topološki. Inače, RTVP $(E, C, \mathcal{T})$ je Risov (DF) prostor, ako je Risov $\aleph_0$-kvazi-bačvast sa fundamentalnim nizom ograničenih podskupova. Svaki faden koji je prebrojiv presek $\mathcal{T}$-zatvorenih topoloških fadena ima oblik: $\mathcal{V} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j)_{n \in N}$, gde su $\mathcal{V}^j = (V_n^j)_{n \in N}$ $\mathcal{T}$-zatvoreni topološki fadeni i slično kao u lokalno konveksnom slučaju, $\mathcal{V}$ zovemo $\aleph_0$-bačva (bornivorna $\aleph_0$-bačva). Ako su $\mathcal{V}^j$ telesni $\mathcal{T}$-zatvoreni topološki fadeni, onda $\mathcal{V}$ zovemo telesna $\aleph_0$-bačva (telesna bornivorna $\aleph_0$-bačva).

4.16. T v r d j e n j e. Za RTVP $(E, C, \mathcal{T})$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je $\aleph_0$-kvazi-bačvast Risov prostor;

b) Svaka telesna bornivorna $\aleph_0$-bačva je $\mathcal{T}$-topološka;

D o k a z. a)$\Rightarrow$b) na osnovu definicije $\aleph_0$-kvazi-bačvastih Risovih prostora. Neka je $\mathcal{V} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j)_{n \in N}$ jedna bornivorna $\aleph_0$-bačva, gde su $\mathcal{V}^j = (V_n^j)_{n \in N}$ $\mathcal{T}$-zatvoreni topološki fadeni. Prema tvrdjenju 4.5. sledi da je za svako j i za svako n $(\mathrm{sk}\ V_n^j)$ $\mathcal{T}$-zatvorena okolina nule, dakle i fadeni $(\mathrm{sk}\ V_n^j)_{n \in N}$ su $\mathcal{T}$-zatvoreni topološki, za svako j. S obzirom da je $\mathrm{sk}(\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j) = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \mathrm{sk}\ V_n^j$ za svako n, onda je $(\bigcap_{j=1}^{+\infty} \mathrm{sk}\ V_n)_{n \in N}$ telesna bornivorna $\aleph_0$-bačva, ako je $\bigcap_{j=1}^{+\infty} \mathrm{sk}\ V_{n+1}^j + \bigcap_{j=1}^{+\infty} \mathrm{sk}\ V_{n+1}^j \subseteq \bigcap_{j=1}^{+\infty} \mathrm{sk}\ V_n^j$. Zaista, ako je $x = a + b$, gde $a, b \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} \mathrm{sk}\ V_{n+1}^j$, onda, $a, b \in \mathrm{sk}\ V_{n+1}^j$ za svako j. Onda kao u tvrdjenju 4.6., $x = a + b \in \mathrm{sk}\ V_n^j$, za svako j, odnosno, $x \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} \mathrm{sk}\ V_n^j$. Bornivorna $\aleph_0$-bačva $\mathcal{V} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j)_{n \in N}$ je dakle $\mathcal{T}$-topološka jer sadrži telesnu bornivornu $\aleph_0$-bačvu: $(\bigcap_{j=1}^{+\infty} \mathrm{sk}\ V_n^j)_{n \in N}$.

4.17. P o s l e d i c a. RTVP $(E, C, \mathcal{T})$ je Risov (DF) prostor, ako i samo ako ima fundamentalni niz ograničenih telesnih podskupova i ako je svaka telesna bornivorna N_0-bačva, $\mathcal{T}$-topološka.

U (/12/, a), Teorema 2.) je dokazano da je konačno kodimenzioni potprotostor N_0-kvazi-bačvastog polu-konveksnog TVP $(E,\mathcal{T})$, N_0-kvazi-bačvast. Iz tvrdjenja koje sledi se vidi da je za Risove N_0-kvazi-bačvaste prostore to tačno za svaki l-ideal, bez pretpostavke o polu-konveksnosti prostora.

4.18. T v r d j e n j e. Neka je $(E, C, \mathcal{T})$ RTVP i F njegov l-ideal snabdeven indukovanom topologijom. Ako je $\mathcal{V} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j)_{n \in N}$ telesna bornivorna N_0-bačva u F, onda u E postoji telesna bornivorna N_0-bačva $\mathcal{U} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} U_n^j)_{n \in N}$, tako da je $\mathcal{U} \cap F = \mathcal{V}$.

D o k a z. Fadeni $\mathcal{V}^j = (V_n^j)_{n \in N}$ su zatvoreni topološki u F za svako j i onda prema tvrdjenjima 4.7. i 4.9. u E postoje telesni zatvoreni topološki fadeni $\mathcal{U}^j = (U_n^j)_{n \in N}$, tako da je $\mathcal{U}^j \cap F = \mathcal{V}^j$. Ako dokažemo da je $\bigcap_{j=1}^{+\infty} U_n^j$ bornivoran podskup od E za svako n, onda je $\mathcal{U} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} U_n^j)_{n \in N}$ telesna bornivorna N_0-bačva u E, koja u preseku sa F daje $\mathcal{V}$. Ako pretpostavimo da za neko n_0 postoji telesan ograničen podskup $A \subseteq E$, tako da $A \not\subseteq k \bigcap_{j=1}^{+\infty} U_n^j$, za svaki prirodan broj k, onda postoji niz $\{x_k\} \subset A$ i prirodan broj j_0, tako da $\frac{1}{k} x_k \notin U_{n_0}^{j_0}$. Dalje se dokazuje kao tvrdjenje 4.8.

4.19. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ N_0-kvazi-bačvast RTVP, onda je svaki l-ideal F N_0-kvazi-bačvast RTVP u indukovanoj topologiji.

D o k a z. Direktna posledica tvrdjenja 4.16. b) i 4.18.

4.20. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ Risov (DF) prostor, onda je svali l-ideal F Risov (DF) prostor u indukovanoj topologiji.

Primećujemo da odgovarajuća karakterizacija kao u tvrdjenjima 4.14. i 4.16. nije tačna za bačvaste i N_0-bačvaste Risove prostore. Ako je $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$ zatvoreni faden u uredjenom vektorskom prostoru (E, C), onda niz $(\mathrm{sk}\ V_n)_{n \in N}$ ne mora biti faden. Ako bi to bilo uvek tako, onda bi najfinija linearna topologija $\mathcal{T}^{\ell}$ na uredjenom vektorskom prostoru (E, C) iz primera 4.3. bila telesna, što nije tačno.

U /15/, a) je proučavana jedna klasa RTVP koja se nalazi izmedju bačbastih Risovih prostora i kvazi-bačvastih Risovih prostora, pod nazivom linearni uredjeno-bačvasti prostori. Mi definišemo jednu klasu RTVP, koja se nalazi izmedju N_0-bačvastih i N_0-kvazi-bačvastih Risovih prostora i koja sadrži linearne uredjeno-bačvaste prostore iz /15/, a).

4.21. D e f i n i c i j a. RTVP (E, C, $\mathcal{T}$) je linearni uredjeno-N_0-bačvast, ako je svaka uredjeno-bornivorna N_0-bačva, $\mathcal{T}$-topološka.

To u stvari znači da je svaki faden $\mathcal{V} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j)_{n \in N}$, gde su $\mathcal{V}^j = (V_n^j)_{n \in N}$ $\mathcal{T}$-zatvoreni topološki fadeni, pri čemu $\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j$ guta uredjeno-ograničene podskupove, za svako n, $\mathcal{T}$-topološki. Jasno je da su N_0-bačvasti Risovi prostori kao i linearni uredjeno-bačvasti prostori, linearni uredjeno-N_0-bačvasti prostori. U kategoriji RTVP taj odnos je sledeći:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{bačvasti RTVP} & \Rightarrow & \text{linearni uredjeno-bačvasti RTVP} & \Rightarrow & \text{kvazi-bačv. RTVP} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
N_0\text{-bačvasti RTVP} & \Rightarrow & \text{lin. uredj.-}N_0\text{-bačv. RTVP} & \Rightarrow & N_0\text{-kvazi-bačv. RTVP}
\end{array}$$

Za linearne uredjeno-N_0-bačvaste RTVP imamo sledeću karakterizaciju:

4.22. T v r d j e n j e. Za svaki RTVP (E, C, $\mathcal{T}$) sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) (E, C, $\mathcal{T}$) je linearni uredjeno-N_0-bačvast prostor;

b) Svaka telesna N_0-bačva je $\mathcal{T}$-topološka;

D o k a z. a)$\Rightarrow$b) jer je svaka telesna N_0-bačva uredjeno-bornivorna. Dokažimo da b)$\Rightarrow$a). Ako je $\mathcal{V} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j)_{m \in N}$ jedna uredjeno-bornivorna N_0-bačva, onda $\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j$ guta uredjeno-ograničene podskupove za svako n. S obzirom da je (E, C, $\mathcal{T}$) Risov prostor, onda i $sk(\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j) = \bigcap_{j=1}^{+\infty} sk\, V_n^j$, guta uredjeno-ograničene podskupove. To znači da je $(\bigcap_{j=1}^{+\infty} sk\, V_n^j)_{n \in N}$ jedna telesna N_0-bačva koja je sadržana u $\mathcal{V}$, a s obzirom da je ona $\mathcal{T}$-topološka, to znači da je i $\mathcal{V}$ $\mathcal{T}$-topološka N_0-bačva.

U nastavku rada kada budemo razmatrali odgovarajuće klase prostora u kategoriji LKP navešćemo primer $\aleph_0$-kvazi-bačvastog RTVP koji nije linearni uredjeno-$\aleph_0$-bačvast RTVP, kao i primer linearnog uredjeno-$\aleph_0$-bačvastog RTVP koji nije $\aleph_0$-bačvast RTVP. Tada ćemo navesti i primer l-ideala linearno uredjenog-$\aleph_0$-bačvastog prostora koji nije linearni uredjeno-$\aleph_0$-bačvast RTVP (Primeri 4.39. i 4.40.).

Risov prostor (E, C) je prebrojivo uredjeno-kompletan, ako svaki majorirani rastući niz ima supremum. Za njegov l-ideal F kažemo da je σ-normalan, ako supremum svakog takvog niza iz F pripada F. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi kada je l-ideal linearno uredjeno-$\aleph_0$-bačvastog prostora, linearno uredjeni-$\aleph_0$-bačvast.

4.23. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ linearni uredjeno-$\aleph_0$-bačvast RTVP koji je preborojivo uredjeno-kompletan, a F σ-normalan l-ideal, onda je $(F, C\cap F, \mathcal{T}|F)$ linearni uredjeno-$\aleph_0$-bačvast prostor.

D o k a z. Na osnovu prethodnog tvrdjenja dovoljno je dokazati da se svaka telesna $\aleph_0$-bačva l-ideala F može produžiti u telesnu $\aleph_0$-bačvu prostora $(E, C, \mathcal{T})$. Neka je $\mathcal{V} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} V_n^j)_{n\in N}$ telesna $\aleph_0$-bačva u F, gde su $\mathcal{V}^j = (V_n^j)_{n\in N}$ zatvoreni telesni topološki fadeni u indukovanoj topologiji. Prema tvrdjenjima 4.7. i 4.9. postoje telesni $\mathcal{T}$-zatvoreni topološki fadeni $\mathcal{U}^j = (U_n^j)_{n\in N}$ tako da je $\mathcal{U}^j \cap F = \mathcal{V}^j$, za svako j. Ako dokažemo da je $(\bigcap_{j=1}^{+\infty} U_n^j)$ gutajući podskup u E, onda je $\mathcal{U} = (\bigcap_{j=1}^{+\infty} U_n^j)_{n\in N}$ telesna $\aleph_0$-bačva u prostoru $(E, C, \mathcal{T})$, tako da je $\mathcal{U}\cap F = \mathcal{V}$. Dovoljno je dokazati da $\bigcap_{j=1}^{+\infty} U_n^j$ guta sve pozitivne elemente iz E, za svako n. Ako to nije tako, onda postoji n_0 tako da za neko $c\in C$ i neko j_0 sledi: $\frac{1}{k} c \notin U_{n_0}^{j_0}$, za svaki prirodan broj k. Prema definiciji podskupova U_n, za svako k postoji $y_k \in F$, tako da je $0 \leq y_k \leq \frac{1}{k}c$ i $y_k \notin V_{n_0}^{j_0}$. S obzirom da je prostor (E, C) prebrojivo uredjeno-kompletan, onda skup $\{ky_k\}_{k=1}^{+\infty}$ ima supremum $y\in E$, koji pripada l-idealu F, jer je on σ-normalan u E. To znači da je $\{ky_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq [0,y] \subseteq F$, a nije progutano sa $V_{n_0}^{j_0}$, što je nemoguće.

Napominjemo da nećemo navoditi ostale osobine ove klase RTVP, jer su dokazi slični sa odgovarajućim u/15/, a) za linearne uredjeno-bačvaste prostore.

U nastavku rada razmatramo dve klase RTVP koje nisu proučavane u navedenim radovima. U kategoriji TVP u /1/ definisani su takozvani lokalno-topološki vektorski prostori, slično b-prostorima u kategoriji LKP iz /22/, b) a u /12/, b) definisani su takodje u kategoriji TVP ultra-b-bačvasti prostori, slično b-bačvastim prostorima iz /22/, b). Kažemo da je RTVP (E, $C,\mathcal{T}$) lokalno-topološki (b-bačvast ili ultra-b-bačvast) ako je TVP ($E,\mathcal{T}$) lokalno-topološki (b-bačvast).

Dajemo karakterizaciju lokalno-topoloških RTVP:

4.24. T v r d j e n j e. Za svaki RTVP (E, $C,\mathcal{T}$) sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) (E, $C,\mathcal{T}$) je lokalno-topološki RTVP;

b) Svako pozitivno lokalno-neprekidno linearno preslikavanje u proizvoljni RTVP (F, $K,\mathcal{P}$) je neprekidno;

c) Svako pozitivno lokalno-neprekidno linearno preslikavanje u proizvoljni Frešeov RTVP (F, $K,\mathcal{P}$) je neprekidno;

d) Svaki lokalno $\mathcal{T}$-topološki faden je $\mathcal{T}$-topološki;

e) Svaki telesni lokalno $\mathcal{T}$-topološki faden je $\mathcal{T}$-topološki;

D o k a z. Očigledno je da a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$c), zatim je a)$\Leftrightarrow$d) na osnovu (/1/, str. 79). Dokažimo da c)$\Rightarrow$e)$\Rightarrow$d). Ako je $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ telesni lokalno $\mathcal{T}$-topološki faden u RTVP (E, $C,\mathcal{T}$), onda je $N = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ l-ideal u E i E/N je Risov vektorski prostor. Prostor E/N se može snabdeti jednom metrizabilnom topologijom koja za bazu okolina nule ima kanonične slike članova fadena $\mathcal{V}$. Kompletiranje tog prostora je Frešeov RTVP, a kanonično preslikavanje $K_{\mathcal{V}}$ (oznaka kao u /1/, str. 13) je pozitivno i očigledno lokalno-neprekidno. Prema tvrdjenju iz (/1/, str. 13) faden $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ je $\mathcal{T}$-topološki. To znači da c)$\Rightarrow$e). Ako je $\mathcal{U} = (U_n)n \in N$ lokalno $\mathcal{T}$-topološki faden u RTVP (E, $\tilde{C},\mathcal{T}$), onda je (sk U_n)$n \in N$ lokalno $\mathcal{T}$-topološki faden.

Zaista za svako n i za svaki telesan $\mathcal{T}$-ograničen podskup A postoji telesna $\mathcal{T}$-okolina nule U, tako da $U_n \cap A \supseteq U \cap A$, odnosno, sk $(U_n \cap A) \supseteq$ sk$(U \cap A)$, ili sk $U_n \cap$ sk$A \supseteq U \cap A$. Dakle, (sk U_n)$n \in N$ je stvarno lokalno $\mathcal{T}$-topološki faden, što znači da e)$\Rightarrow$d).

Iz /12/, b) se zna da je TVP $(E, \mathcal{T})$ ultra-b-bačvast ako je svako zatvoreno lokalno-neprekidno preslikavanje iz $(E, \mathcal{T})$ u proizvoljni TVP $(F, \mathcal{P})$ neprekidno. Za ultra-b-bačvaste RTVP karakterizacija je sledeća:

4.25. T v r d j e n j e. Za svaki RTVP $(E, C, \mathcal{T})$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je ultra-b-bačvast RTVP;

b) Svako zatvoreno pozitivno lokalno-neprekidno linearno preslikavanje u proizvoljni RTVP $(F, K, \mathcal{P})$ je neprekidno;

c) Isto kao pod b) samo što je $(F, K, \mathcal{P})$ Frešeov RTVP;

d) Svaki zatvoren lokalno $\mathcal{T}$-topološki faden je $\mathcal{T}$-topološki;

e) Svaki zatvoren telesni lokalno $\mathcal{T}$-topološki faden je $\mathcal{T}$-topološki;

D o k a z. Kao i u prethodnom tvrdjenju dokazaćemo da c)$\Rightarrow$e)$\Rightarrow$d), jer je prema /12/, b), a)$\Leftrightarrow$d), dok je a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$c) očigledno. Da e)$\Rightarrow$d) sledi kao u prethodnom tvrdjenju uz napomenu da je telesno jezgro zatvorenog podskupa zatvoren podskup. Da je kanonično preslikavanje $K_{\mathcal{V}}$ iz prethodnog tvrdjenja zatvoreno, ako je $\mathcal{V} = (V_n)n \in N$ zatvoren telesan faden, sledi direktno iz (/1/, 8, str. 43) a s obzirom da je pozitivno i lokalno neprekidno, to je jasno da c)$\Rightarrow$e).

Linearno preslikavanje f iz Risovog prostora (E, C) u Risov prostor (F, K) je l-homomorfizam, ako je $f(\sup(x,y)) = \sup(f(x), f(y))$ za svako $x, y \in E$ (/37/, b) str. 132). Sledeće tvrdjenje se odnosi na induktivnu granicu lokalno-topoloških i ultra-b-bačvastih RTVP.

4.26. T v r d j e n j e. Neka je (E, C) Risov prostor i neka je $\mathcal{T}$ induktivna topologija na E u odnosu na familiju

$\{(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha); \alpha \in I\}$ RTVP i l-homomorfizme $f_\alpha : E_\alpha \to E$, tako da je $f_\alpha(E_\alpha)$ l-ideal u E i da je E linearni omotač od $\bigcup_\alpha f_\alpha(E_\alpha)$. Ako su $(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ lokalno-topološki (ultra-b-bačvasti) RTVP, onda je i $(E, C, \mathcal{T})$ lokalno-topološki (ultra-b-bačvasti) RTVP.

D o k a z. Iz /15/ se zna da je induktivna granica RTVP takodje RTVP. Zbog toga, ako je $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in N}$ telesni lokalno-$\mathcal{T}$-topološki faden u $(E, C, \mathcal{T})$, onda je za svako α : $(f_\alpha^{-1}(\mathcal{V}) = (f_\alpha^{-1}(V_n))_{n \in N}$ telesni lokalno $\mathcal{T}_\alpha$-topološki faden, dakle, $\mathcal{T}_\alpha$-topološki. Prema (/1/, 4, str. 19), $\mathcal{V}$ je $\mathcal{T}$-topološki faden i $(E, C, \mathcal{T})$ je onda lokalno-topološki RTVP. Ako je $(V_n)_{n \in N}$ zatvoren faden u $(E, C, \mathcal{T})$, onda je $f_\alpha^{-1}(\mathcal{V})$ zatvoren u $(E_\alpha, C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ i dokaz onda sledi i za ultra-b-bačvaste prostore.

4.27. P o s l e d i c a. Kvocijent prostor po l-idealu i direktan zbir lokalno-topoloških (ultra-b-bačvastih) RTVP je istog tipa.

U kategoriji TVI se ne zna da li je konačno kodimenzioni potprostor lokalno-topološkog prostora, lokalno-topološki. Za lokalno topološke i ultra-b-bačvaste RTVP na osnovu tvrdjenja 4.10. i posledice 4.11. dobijamo:

4.28. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ lokalno-topološki (ultra-b-bačvast) RTVP, onda je svaki l-ideal F lokalno-topološki (ultra-b-bačvast) RTVP u indukovanoj topologiji.

U nastavku ovog dela rada navodimo neke osobine RLKP, koje smo dobili proučavajući neke klase RLKP. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ RLKP, onda topologija $\mathcal{T}$ ima bazu okolina nule od telesnih apsolutno konveksnih podskupova. Polu-norma p na Risovom prostoru (E, C) je Risova polu-norma, ako je $p(x) \leq p(y)$, kad god je $|x| = \sup(-x, x) \leq |y| = \sup(-y, y)$. Topologija $\mathcal{T}$ RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ je onda odredjena jednom familijom Risovih polu-normi. S obzirom da topologija $\mathcal{T}$ RLKP ima bazu okolina nule od telesnih podskupova, onda je telesan omotač ograničenog skupa ograničen skup. Interesantno je postaviti pitanje, da li je to tako i za druge familije ograničenih podskupova. Iz sledećeg primera se vidi da telesan omotač jako ograničenog podskupa (Banahovog diska), nije jako ograničen podskup (Banahov disk).

4.29. P r i m e r. Ako je $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ lokalno konveksna uredjeno-ograničena topologija na Risovom prostoru (E, C), koja nije bačvasta (takva postoji iako je to najfinija telesna lokalno konveksna topologija na (E, C) - primer (16/1), str.187), onda postoji bačva V u prostoru $(E, C, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$, koja nije $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-okolina nule. Ako $x \in C$, onda je telesan omotač $S(\{x\}) = [-x, x]$, dakle, uredjeno-ograničen podskup. Ako za svako $x \in C$ $\{x\}$ je očigledno $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-jako ograničen podskup), bačva V guta uredjeno-ograničen podskup $[-x, x]$, onda je na osnovu definicije topologije $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, V jedna $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-okolina nule. Dakle u RLKP, telesan omotač jako ograničenog skupa ne mora biti jako ograničen. Ako $x \in C$, onda je apsolutno konveksan omotač $\Gamma(\{x\}) = \{\lambda x, |\lambda| \leq 1\} \subseteq [-x, x]$ i onda je $S_{\{x\}} = S_{\Gamma(\{x\})}$, odnosno, $\{x\}$ i $\Gamma(\{x\})$ imaju iste telesne omotače. S obzirom da je $\Gamma(\{x\})$ Banahov disk, onda $[-x, x]$ kao njegov telesni omotač u istom prostoru nije jako ograničen skup, a to znači da nije ni Banahov disk.

Ako je E^b topološki dual prostora u prethodnom primeru, onda je $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \beta^*(E, E^b) = \tau(E, E^b) \neq \beta(E, E^b)$, što znači da jaka topologija pridružena RLKP ne mora biti telesna. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi kada je to tako.

4.30. T v r d j e n j e. Za svaki RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) Jaka topologija $\beta(E, E')$ je telesna;

b) telesan omotač jako ograničenog podskupa prostora $(E, C, \mathcal{T})$ je jako ograničen;

D o k a z. a)$\Rightarrow$b) je jasno jer je telesan omotač ograničenog podskupa u RTVP ograničen podskup. b)$\Rightarrow$a): s obzirom da je po pretpostavci telesan omotač jako ograničenog podskupa jako ograničen podskup, onda familija jako ograničenih podskupova ima fundamentalni sistem od apsolutno konveksnih telesnih podskupova. Prema (/37/, b), Tvrdjenje (10.16.), str.

127) polara telesnog podskupa je telesan podskup i onda je $(E', C', \beta^*(E', E))$ RLKP. Na osnovu (/27/, Tvrdjenje (1.9.)) slabo ograničeni podskupovi prostora E'_σ su $\beta^*(E', E)$ -ograničeni. S obzirom da je $(E', C', \beta^*(E', E))$ RLKP, onda je jaka topologija $\beta(E, E')$ telesna, kao topologija uniformne konvergencije na telesnim ograničenim podskupovima duala E'.

Pod telesnom bačvom u RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ podrazumeva se telesan zatvoren konveksan i gutajući podskup od (E, C) (/37/, b), str. 182). S obzirom da je podskup $A \subseteq E$ u LKP $(E, \mathcal{T})$ jako ograničen, ako i samo ako ga guta svaka bačva, prirodno bi bilo da je u RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ podskup $A \subseteq E$ jako ograničen, ako i samo ako ga guta svaka telesna bačva. Iz prethodnog primera se vidi da to nije tako. Naime $[-x, x]$ je progutano svakom telesnom bačvom, za svako $x \in C$, ali ne mora biti jako ograničen podskup.

4.31. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ RLKP, onda je telesan omotač jako ograničenog skupa u topološkom dualu E'_τ jako ograničen skup.

4.32. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ RLKP, onda je i prostor $(E, C, \beta^*(E, E'))$ RLKP.

U (/37/, b), str. 188) definisana jedna klasa RLKP koja se nalazi izmedju bačvastih RLKP i kvazi-bačvastih RLKP, pod nazivom uredjeno-kvazi-bačvasti RLKP. Inače, ta klasa prostora odgovara $\mathcal{M}$-kvazi-bačvastim prostorima iz /20/, ako se familija $\mathcal{M}$ zameni sa uredjeno-ograničenim podskupovima, naravno pod uslovom da je $(E, \mathcal{T})$ lokalno telesna topologija na Risovom prostoru (E, C). Mi definišemo klasu RLKP, koja se nalazi izmedju N_0-bačvastih i N_0-kvazi-bačvastih RLKP i koja sadrži uredjeno-kvazi-bačvaste RLKP. Navodimo neke osobine N_0-kvazi-bačvastih RLKP.

4.33. T v r d j e n j e. Za svaki RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je N_0-kvazi-bačvast RLKP;

b) Svaka pozitivno bornivorna N_0-bačva je $\mathcal{T}$-okolina nule;

c) Svaka telesna bornivorna $\mathcal{N}_0$-bačva je $\mathcal{T}$-okolina nule;

d) Svaka telesna pozitivno bornivorna $\mathcal{N}_0$-bačva je $\mathcal{T}$-okolina nule;

e) Svaki $\beta(E', E)$ - ograničen podskup oblika $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, gde su A_i $\mathcal{T}$-ekvineprekidni podskupovi, je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan;

f) Svaki pozitivan $\beta(E', E)$-ograničen podskup oblika $\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$, gde su B_i $\mathcal{T}$-ekvineprekidni podskupovi, je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup.

D o k a z. Pod $\mathcal{N}_0$-bačvom podrazumevamo svaku bačvu V oblika $\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$, gde su V_n $\mathcal{T}$-zatvorene okoline nule, a pod telesnom $\mathcal{N}_0$-bačvom, telesnu bačvu oblika $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$, gde su U_n telesne $\mathcal{T}$-zatvorene okoline nule. Na osnovu toga i prema /9/ je a)$\Leftrightarrow$e), dok je e)$\Rightarrow$f) i a)$\Rightarrow$c) očigledno. U RLKP i uopšte u RTVP svaki ograničen skup je sadržan u razlici dva pozitivno ograničena skupa (/33/, str. 297), odnosno $A \subseteq A^+ - A^+ \subseteq 2A$ (za A pretpostavljamo da je apsolutno konveksan telesan ograničen podskup) zato, ako je $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ $\mathcal{N}_0$-bačva koja guta pozitivno ograničene podskupove, onda ona guta i sve ograničene podskupove i zbog toga je $\mathcal{T}$-okolina nule. To znači da a)$\Leftrightarrow$b). Na isti način se dokazuje da je c)$\Leftrightarrow$d). Dokažimo da c)$\Rightarrow$a). Ako je $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ bornivorna $\mathcal{N}_0$-bačva prostora $(E, C, \mathcal{T})$, onda je $skV = \bigcap_{n=1}^{+\infty} skV_n$ telesna $\mathcal{N}_0$-bačva na osnovu tvrdjenja 4.5. i 4.6. Na osnovu definicije telesnog jezgra $\mathcal{N}_0$-bačve V ona je i bornivorna. Dokažimo još da f)$\Rightarrow$e). Zaista ako je $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ $\beta(E', E)$ ograničen podskup, gde su A_i konveksni telesni $\mathcal{T}$-ekvineprekidni podskupovi, onda je prema (/33/, str. 297) $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^+ - \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^+ \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} 2A_i^+ = 2\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^+$. To znači da je $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup, ako je $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^+$ $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup.

4.34. P o s l e d i c a. RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ je Risov (DF) prostor, ako i samo ako je svaka telesna bornivorna $\mathcal{N}_0$-bačva $\mathcal{T}$-okolina nule i ako ima fundamentalni niz od telesnih ograničenih podskupova.

Odgovarajuća karakterizacija za $\mathcal{N}_0$-bačvaste RLKP nije moguća iz istog razloga kao za $\mathcal{N}_0$-bačvaste RTVP.

Sada definišemo uredjene-N_0-kvazi-bačvaste prostore u kategoriji RLKP.

4.35. D e f i n i c i j a. RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ je uredjeno-N_0-kvazi-bačvast, ako je svaka N_0-bačva koja guta uredjeno-ograničene podskupove (uredjeno-bornivorna N_0-bačva) $\mathcal{T}$-okolina nule.

Topološki dual E' snabdeven topologijom uniformne konvergencije na elementima familije uredjeno-ograničenih podskupova RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ je $\sigma_s(E', E)$ (telesna topologija pridružena slaboj topologiji $\sigma(E', E)$).

Karakterizacija ove klase RLKP je slična karakterizaciji N_0-bačvastih i N_0-kvazi-bačvastih LKP iz /9/.

4.36. T v r d j e n j e. Za svaki RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je uredjeno-N_0-kvazi-bačvast;

b) Svaka telesna N_0-bačva je $\mathcal{T}$-okolina nule;

c) Svaki $\sigma_s(E', E)$-ograničen podskup $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, gde su A_i $\mathcal{T}$-ekvineprekidni podskupovi, je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan;

d) Svaki $\sigma_s(E', E)$-ograničen pozitivan podskup $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, gde su A_i $\mathcal{T}$-ekvineprekidni podskupovi, je $\mathcal{T}$-akvineprekidan;

e) Svaki $\sigma(E', E)$-ograničen pozitivan podskup $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, gde su A_i $\mathcal{T}$-ekvineprekidni podskupovi, je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan;

D o k a z. a)$\Rightarrow$b), jer je svaka telesna bačva uredjeno-bornivorna. Topologija $\sigma_s(E', E)$ nije uvek saglasna sa dualnošću $\langle E, E' \rangle$, ali je uvek slabija od jake topologije $\beta(E', E)$, to znači da je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup $\sigma_s(E', E)$-ograničen. Bačva V prostora $(E, C, \mathcal{T})$ je uredjeno-bornivorna, ako i samo ako je V° $\sigma_s(E', E)$-ograničen podskup. Na osnovu toga se dokazuje da je b)$\Leftrightarrow$c). Inače, c)$\Leftrightarrow$d)$\Leftrightarrow$e) dokazujemo kao u prethodnom tvrdjenju za N_0-kvazi-bačvaste prostore. Dokažimo da b)$\Rightarrow$a). Ako je $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ N_0-bačva koja guta uredjeno-ograničene podskupove, onda je $\mathrm{sk}V \neq \emptyset$ i $\mathrm{sk}V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{sk}V_n$. Onda je $\mathrm{sk}V$ telesna N_0-bačva sadržana u N_0-bačvi V, a to znači da je $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ $\mathcal{T}$-okolina nule.

U kategoriji RLKP odnos poznatih klasa je sledeći:

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{lokalno konv. uredjeno-ogr.} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{bornološki} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{bačvasti} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{uredjeno-kvazi-bačv.} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{kvazi-bačvasti} \arrow[d, Rightarrow] \\
\aleph_0\text{-bačvasti} \arrow[r, Rightarrow] & \text{uredjeno-}\aleph_0\text{-kvazi-bačv.} \arrow[r, Rightarrow] & \aleph_0\text{-kvazi-bačvasti}
\end{tikzcd}
$$

U kategoriji LKP svaki $\aleph_0$-bačvast i kvazi-bačvast prostor je bačvast. Za RLKP se dobija:

4.37. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno-$\aleph_0$-kvazi-bačvast i kvazi-bačvast RLKP, onda je on uredjeno-kvazi-bačvast prostor.

D o k a z. Na osnovu (/37/, b), Teorema (16.3), str. 188), dovoljno je dokazati da je svaki $\sigma_S(E', E)$-ograničen podskup $\mathcal{T}$-ekvineprekidan. Iz prethodnog tvrdjenja pod c), sledi da je $(E', C', \sigma_S(E', E))$ sekvencialno kompletan RLKP, dakle, u njemu su familije slabo i jako ograničenih podskupova iste. To znači, ako je A $\sigma_S(E', E)$-ograničen (jako ograničen) podskup, onda je prema (/27/, Tvrdjenje (1.20.)) A jako ograničen podskup u prostoru $(E', C', \sigma(E', E))$ ($\sigma(E', E)$ je slabija topologija od $\sigma_S(E', E)$). Dakle, A je $\beta(E', E)$-ograničen, odnosno, $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup, jer je $(E, C, \mathcal{T})$ kvazi-bačvast RLKP.

Na sličan način dokazujemo:

4.38. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ $\aleph_0$-bačvast i uredjeno-kvazi-bačvast prostor, onda je on bačvast RLKP.

Na osnovu poslednjih tvrdjenja nalazimo primere RLKP koji su $\aleph_0$-kvazi-bačvasti a nisu uredjeno-$\aleph_0$-kvazi-bačvasti, zatim RLKP koji su uredjeno-$\aleph_0$-kvazi-bačvasti a nisu uredjeno-kvazi-bačvasti, odnosno, $\aleph_0$-bačvasti.

4.39. P r i m e r. Neka je E vektorski prostor nizova sa najviše konačno koordinata različitih od 0, snabdeven normom: $\|x\| = \max\{ |x_n| \; ; n \in N\}$. E je onda uredjen prirodnim konusom $C = \{ x \mid x = (x_n),\ x_n \geqslant 0$ za svako $n \in N\}$. Prostor $(E, C, \|\cdot\|)$ je RLKP. On je kvazi-bačvast, dakle i N_0-kvazi-bačvast a nije uredjeno-N_0-kvazi-bačvast, jer nije uredjeno-kvazi-bačvast. Zaista, $V = \{ x \mid x = (x_n) : |x_n| \leqslant \frac{1}{n}$, za svako $n \in N \}$ je konveksan telesan zatvoren i gutajući podskup a nije okolina nule u norma topologiji (/37/, b), str.76). Na osnovu (/1/, Tvrdjenje (6), str. 115) dati normiran RLKP je N_0-kvazi-bačvast i kao RTVP a nije linearni uredjen-N_0-bačvast, jer nije uredjeno-N_0-kvazi-bačvast kao RLKP.

4.40. **P r i m e r.** Svaki RLKP $(E, C, \mathcal{T}_\ell)$ ($\mathcal{T}_\ell$ je lokalno konveksna uredjeno-ograničena topologija) koji nije bačva st RLKP (takav postoji - primer (16.1.) u /37/, b), str. 187) na osnovu prethodnog tvrdjenja nije N_0-bačvast prostor a jeste uredjeno-N_0-kvazi-bačvast RLKP.

Iz poslednja dva primera se vidi da je klasa N_0-bačvastih RLKP prava potklasa uredjeno-N_0-kvazi-bačvastih RLKP, a ova je prava potklasa N_0-kvazi-bačvastih RLKP. Interesantno je znati kada je uredjeno-N_0-kvazi-bačvast prostor, N_0-bačvast, kao i kada je N_0-kvazi-bačvast uredjeno-N_0-kvazi-bačvast prostor.

Za svako $u \in C$ Risovog uredjenog vektorskog prostora (E, C) imamo l-ideal $E_u = \bigcup_{n=1}^{+\infty} n\,[-u, u]$ koji je normiran prostor funkcionalom Minkovskog p_u i uredjen konusom $C_u = C \cap E_u$. Ako je za svako $u \in C$ RLKP (E_u, C_u, p_u) kompletan, onda se dobija:

4.40. **T v r d j e n j e.** Neka je $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno-N_0-kvazi-bačvast RLKP. Ako je za svako $u \in C$ RLKP (E_u, C_u, p_u) kompletan, onda je $(E, C, \mathcal{T})$ N_0-bačvast prostor.

D o k a z. Ako je $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ N_0-bačva u prostoru $(E, C, \mathcal{T})$, onda je $V \cap E_u$ okolina nule u (E_u, C_u, p_u), za svako $u \in C$. To znači da svaka N_0-bačva $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ guta intervale oblika: $[-u, u]$, odnosno, sve urejedno-ograničene podskupove. Dakle, V je $\mathcal{T}$-okolina nule, jer je $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno-N_0-bačvast prostor.

Iz sledećeg tvrdjenja se vidi da su u dualu E' RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ pojmovi: "N_0-bačvast" i "uredjeno-N_0-kvazi-bačvast" ekvivalentni.

4.42. T v r d j e n j e. Za svaki RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ ako je E' topološki dual od $(E, \mathcal{T})$ i $\mathcal{T}'$-lokalno telesna topologija u E', onda je prostor $(E', C', \mathcal{T}')$ $\aleph_0$-bačvast, ako i samo ako je uredjeno-$\aleph_0$-kvazi-bačvast.

D o k a z. Na osnovu prethodnog tvrdjenja dovoljno je dokazati kompletnost prostora (E_u', C_u', p_u'), za svako $u \in C'$. Ako dokažemo da je (E', C') σ-normalan potprostor od E^b, onda tvrdjenje sledi iz (/37/, b), posledica (18.9.), str. 202). Zaista, ako je $0 \leq x_n \uparrow x$, gde $x \in E^b$, treba dokazati da x pripada E'. Niz $\{x_n\}_{n\geq 1}^{+\infty}$ je onda $\sigma_s(E', E)$-ograničen, dakle, prema tvrdjenju 4.36., $\mathcal{T}$-ekvineprekidan. Dalje dokaz ide kao u (/37/, b), Teorema (16.11.), str. 193).

S obzirom da se klasa uredjeno-$\aleph_0$-kvazi-bačvastih prostora nalazi izmedju $\aleph_0$-bačvastih i $\aleph_0$-kvazi-bačvastih RLKP, sledeće tvrdjenje se dokazuje na osnovu (/9/, Tvrdjenje 5.) i činjenice da je kompletiranje RLKP takodje RLKP.

4.43. T v r d j e nj e. Kompletiranje uredjeno-$\aleph_0$-kvazi-bačvastog RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ je $\aleph_0$-bačvast RLKP.

Ako familija uredjeno-ograničenih podskupova ima fundamentalni niz, onda definišemo klasu uredjeno-(DF) prostora na sledeći način:

4.44. D e f i n i c i j a. RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ je uredjeno-(DF) prostor, ako je uredjeno-$\aleph_0$-kvazi-bačvast sa fundamentalnim nizom uredjeno-ograničenih podskupova.

U RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ svaki uredjeno-ograničen podskup je $\mathcal{T}$-ograničen. U RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ koji je uredjeno-(DF) prostor, tačno je i obrnuto.

4.45. T v r d j e n j e. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ uredjeno-(DF) RLKP, onda je $(E, C, \mathcal{T})$ Risov-(DF) prostor (odnosno, $(E, \mathcal{T})$ je LKP tipa - (DF)).

D o k a z. Prostor $(E', C', \sigma_s(E', E))$ je metrizabilan, dakle, bornološki LKP. Da bi dokazali da je $\sigma_s(E', E) = \beta(E', E)$ (jer je uvek $\sigma_s(E', E) \leq \beta(E', E)$), dovoljno je dokazati da je $\sigma_s(E', E)$ - nula niz $(x_n')_{n \in N}$ jako ograničen.

Ali to je tako na osnovu tvrdjenja 4.33. i činjenice da je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup jako ograničen. (Primećujemo da je prethodno tvrdjenje i direktna posledica Teoreme 5. iz /20/).

U /22/, b) proučavane su klase b-prostora (b′-prostora i b-bačvastih). Ako te pojmove definišemo u kategoriji RLKP, onda se dobijaju zanimljive kategorizacije tih prostora, a i neke osobine koje u kategoriji LKP nisu tačne.

4.46. D e f i n i c i j a. RLKP (E, C, $\mathcal{T}$) je Risov b-prostor (Risov b′-prostor, Risov b-bačvast), ako je (E, $\mathcal{T}$) b-prostor (b′-prostor, b-bačvast).

Sledećim tvrdjenjima dajemo karakterizaciju Risovih b-prostora (b′-prostora, b-bačvastih).

4.47. T v r d j e n j e. Za svaki RLKP (E, C, $\mathcal{T}$) sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) (E, C, $\mathcal{T}$) je Risov b-prostor;

b) Svaki telesni b-disk je $\mathcal{T}$-okolina nule;

c) (E, C, $\mathcal{T}$) je Risov b′-prostor i b-bačvast;

4.48. T v r d j e n j e. Za svaki RLKP (E, C, $\mathcal{T}$) sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) (E, C, $\mathcal{T}$) je Risov b-bačvast prostor;

b) Podskup $H \subseteq E'$ je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan, ako i samo ako je $H \mid B$ $\mathcal{T}$-ekvineprekidan, za svaki telesan ograničen disk od E;

c) Podskup $H \subseteq C' \subseteq E'$ je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan, ako i samo ako je $H \mid B$ $\mathcal{T}$-ekvineprekidan, za svaki telesan ograničen disk od E;

d) Svaka odozdo polu-neprekidna polu-norma p na E je neprekidna, ako i samo ako je $p \mid B$ neprekidna, za svaki telesan ograničen disk od E;

e) Svaka odozdo polu-neprekidna Risova polu-norma p na E je neprekidna, ako i samo ako je $p \mid B$ neprekidna, za svaki telesan ograničen disk;

f) Svaka telesna b-bačva je $\mathcal{T}$-okolina nule;

D o k a z. U prvom tvrdjenju a)$\Leftrightarrow$c) na osnovu (/22/, b), Tvrdjenje 1.1.2.), a)$\Leftrightarrow$b) dokazujemo slično kao tvrdjenje 4.24. U tvrdjenju za Risove b-bačvaste prostore a)$\Leftrightarrow$f) slično kao u tvrdjenju 4.25., a)$\Leftrightarrow$b)$\Leftrightarrow$d) sledi iz (/22/, b), Tvrdjenje 1.1.2). d)$\Leftrightarrow$e) na osnovu činjenice da je skup $V = \{x \mid p(x) \leq 1\}$ telesna b-bačva, ako i samo ako je Risova polu-norma p odozdo polu-neprekidna. b)$\Rightarrow$c) je očigledno. Dokažimo da c)$\Rightarrow$b). Neka je $H \subseteq E'$, tako da je $H \mid B$ $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup. To znači da za svaki telesan ograničen disk B postoji $\mathcal{T}$-okolina nule U, tako da je $H \subseteq (U \wedge B)^{\circ} \subseteq [(U \wedge B)^{\circ}]^{+} - [(U \wedge B)^{\circ}]^{+}$. Na osnovu c) skup $[(U \wedge B)^{\circ}]^{+}$ je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan, dakle i H je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan.

Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ RLKP, onda je $\sigma(E, E') \leq \sigma_s(E, E') \leq \mathcal{T}$ dakle, topologija $\sigma_s(E, E')$ je saglasna sa dualnošću $\langle E, E' \rangle$, kad god na Risovom prostoru (E, C) postoji telesna lokalno-konveksna topologija.

Karakterizacija Risovih b'-prostora je na osnovu toga sledeća:

4.49. T v r d j e n j e. Za svaki RLKP $(E, C, \mathcal{T})$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(E, C, \mathcal{T})$ je Risov b'-prostor;

b) $(E, C, \sigma(E, E'))$ je b'-prostor (ne mora biti RLKP);

c) $(E, C, \sigma_s(E, E'))$ je Risov b'-prostor;

d) Risov prostor $(E', C', \beta(E', E))$ je kompletan;

e) Svaka pozitivna linearna forma koja je neprekidna na ograničenim telesnim diskovima, je neprekidna;

D o k a z. a)$\Leftrightarrow$c)$\Leftrightarrow$d) na osnovu (/22/, b), Tvrdjenje 2.1.2.), jer osobina "biti b'-prostor" u kategoriji LKP zavisi samo od dualnog para i a)$\Rightarrow$e) je očigledno. e)$\Rightarrow$a): ako je f linearna forma neprekidna na svim telesnim ograničenim diskovima od E, onda je prema posledici 5.3. $f = g - h$, gde $g, h \in C^{*} \wedge E^{+}$. Iz e) sledi da $g, h \in C'$, odnosno, da je $f = g - h \in C' - C' = E'$, neprekidna linearna forma, što znači da je $(E, C, \mathcal{T})$ Risov b'-prostor.

Sledeće tvrdjenje se dokazuje slično kao tvrdjenje 4.7. za RTVP, odnosno, kao u (/37/, b), Posledica (15.4.)).

4.50. T v r d j e n j e. Neka je $(E, C, \mathcal{T})$ RLKP i F l-ideal u E. Neka je zatim V telesan konveksan podskup od F a $U = \{ x \in E \mid y \in V$, kad god je $0 \leq y \leq |x|$ i $y \in F \}$. Onda je:

a) U telesan konveksan podskup od E i $U \cap F = V$;

b) U je $\mathcal{T}$-okolina nule, ako je V okolina nule u indukovanoj topologiji u F;

c) U je b-bačva, ako je V b-bačva;

d) U je b-disk, ako je V b-disk;

U (/37/, b), Teorema (17.1.)) je dokazano da je U gutajući podskup, ako je V gutajući podskup pod uslovom da je (E, C) prebrojivo uredjeno-kompletan Risov prostor, a F σ-normalan potprostor.

4.51. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ Risov b-prostor (b-bačvast), onda je svaki l-ideal F u indukovanoj topologiji, Risov b-prostor (b-bačvast).

4.52. P o s l e d i c a. Ako je $(E, C, \mathcal{T})$ Risov (DF)-prostor, onda je svaki l-ideal F u indukovanoj topologiji, takodje Risov (DF)-prostor.

5. PROSTOR PRIDRUŽEN RISOVOM LKP

Kategorija TVP sadrži LKP, RTVP i RLKP. Postoji TVP koji nije LKP, kao ni RTVP, odnosno, RLKP. Zatim, lako nalazimo LKP, koji nije RLKP.

Iz (/34/, Definicija I,1.1. i Teorema I.1.2.) se zna, da se svakom lokalnom konveksnom prostoru $(E,\mathfrak{T})$ u kategoriji LKP može pridružiti prostor $(E,\overline{\mathfrak{T}})$, tako da je topologija $\overline{\mathfrak{T}}$ najslabija od svih konveksnih topologija na E, koje su finije od $\mathfrak{T}$, i koje zadovoljavaju neku osobinu, invarijantnu u odnosu na svaku razdvojenu induktivnu granicu i najfiniju lokalnu konveksnu topologiju. Slično tome, u kategoriji TVP se onda svakom prostoru $(E,\mathfrak{P})$ pridružuje prostor $(E,\overline{\mathfrak{P}})$, tako da je topologija $\overline{\mathfrak{P}}$ najslabija od svih linearnih topologija na E, koje su finije od $\mathfrak{P}$ i zadovoljavaju osobinu invarijantnu u odnosu na svaku $*$-induktivnu granicu (induktivna granica u kategoriji TVP, /1/, str.191) i najfiniju linearnu topologiju. Jedna od takvih osobina je na primer "bačvastost". Na osnovu izloženog je očigledno, da se svakom lokalnom konveksnom prostoru $(E,\mathfrak{T})$ pridružuju prostori $(E,\overline{\mathfrak{T}})$ u kategoriji LKP i $(E,\overline{\mathfrak{P}})$ u kategoriji TVP u odnosu na neku osobinu. Iz sledećeg primera se vidi, da je u opštem slučaju $\overline{\mathfrak{T}} \neq \overline{\mathfrak{P}}$.

5.1. **P r i m e r.** Ako je E beskonačne neprebrojive dimenzije, onda je $(E, \tau(E,E^*))$ bačvast prostor u kategoriji LKP a nije bačvast u kategoriji TVP (/1/, str.109.). To znači da je $\tau(E,E^*)=\mathfrak{T}=\overline{\mathfrak{T}}\neq\overline{\mathfrak{P}}$.

Mi u ovom delu rada razmatramo pridružene prostore Risovim LKP i Risovim TVP i dajemo odgovor na neka pitanja, koja se tu prirodno postavljaju. Primećujemo da u kategoriji RLKP, odnosno, RTVP, data osobina treba da bude invarijantna u odnosu na najfiniju lokalno telesnu topologiju, odnosno, najfiniju linearnu telesnu topologiju. Dakle, svakom Risovom lokalno konveksnom prostoru $(E,C,\mathfrak{T})$ možemo u kategoriji RLKP pridružiti prostor $(E, C, R\overline{\mathfrak{T}})$, tako da je $R\overline{\mathfrak{T}}$ najslabija od svih telesnih lokalno konveksnih topologija na E, koje su finije od $\mathcal{T}$ i koje zadovoljavaju osobinu invarijantnu u odnosu na svaku induktivnu granicu i najfiniju lokalno telesnu topologiju. S obzirom da je Risov LKP ujedno i LKP, onda se lokalno telesnoj topologiji $\mathcal{T}$ mogu pridružiti topologije $R\overline{\mathcal{T}}$ i $\overline{\mathcal{T}}$ u odnosu na neku osobinu. Jedna od takvih osobina je "kvazi-bačvastost". U opštem slučaju je očigledno $\overline{\mathcal{T}} \leq R\overline{\mathcal{T}}$. Prirodno je pitanje , kada je $\overline{\mathcal{T}} < R\overline{\mathcal{T}}$ ili $\overline{\mathcal{T}} = R\overline{\mathcal{T}}$. Inače, za osobinu ćemo uzimati slučajeve: Prostor $(E,\mathcal{T})$ je bačvast, $\aleph_0$-bačvast, bornološki,... a topologiju $\overline{\mathcal{T}}$, odnosno, $R\overline{\mathcal{T}}$ ćemo zvati pridružen bačvast prostor u kategoriji LKP, odnosno, pridružen Risov bačvast prostor.... ili pridružen $\aleph_0$-bačvast prostor.

U sledećim tvrdjenjima navodimo rezultate, koje smo dobili ispitujući pridružene kvazi-bačvaste, $\aleph_0$- kvazi-bačvaste, b - bačvaste i b - prostore. U (/37/, b), Teorema 15.1. i Posledica 15.2.) je dokazano, da je pridruženi bormološki prostor Risovog LKP, takodje Risov LKP. Dakle, za tu osobinu je $\overline{\mathcal{T}} = R\overline{\mathcal{T}}$.

5.2. T v r d j e n j e. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ RLKP, onda je pridruženi kvazi-bačvast (b-bačvast, b-prostor i $\aleph_0$-kvazi-bačvast) prostor u kategoriji LKP, takodje RLKP.

D o k a z. Na osnovu /22/,a) i /34/, za svaki ordinalni broj α imamo: $\mathcal{T}_\alpha = (\mathcal{T}_{\alpha-1})_1$, ako α ima prethodnika i $\mathcal{T}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{T}_\beta$, ako je α limit ordinalni broj. Za kvazi-bačvaste prostore je $\mathcal{T}_1 = \beta^*(E, E')$, za b-bačvaste, odnosno, $\aleph_0$-kvazi-bačvaste prostore , $\mathcal{T}_1$ je toplogija generisana svim b-bačvama, odnosno, svim bornivornim $\aleph_0$-bačvama. Prema Posledici 4.32., $(E,C,\mathcal{T}_1)$ je RLKP i za kvazi-bačvaste, b-bačvaste i $\aleph_0$-kvazi-bačvaste prostore. S obzirom da je projektivna granica RLKP, takodje RLKP, onda se dokaz lako sprovodi primenom transfinitne indukcije. Za b-prostore, dokaz je kao u Tvrdjenju 4.24.e), jer svaki b-disk U sadrži telesni b-disk skU.

5.3. P o s l e d i c a. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ RLKP, onda je E^+-vektorski prostor linearnih formi, koje su neprekidne na ograničenim podskupovima od $(E,\mathcal{T})$, l-ideal od E^b i $E^+=C^+-C^+$

(C^+-pozitivne linearne forme, neprekidne na ograničenim podskupovima od $(E,\mathcal{T})$.

D o k a z. Na osnovu prethodnog tvrdjenja, pridruženi b-prostor je RLKP i onda je prema (/37/,b), Posledica 6.5.) i (/22/,b), Tvrdjenje 2.3.1.) E^+ l-ideal od E^b. S obzirom da je RLKP uredjeno-konveksan, onda je na osnovu (/37/,b), Posledica 5.19.) $E^+ = E^+ \wedge C^* - E^+ \wedge C^* = C^+ - C^+$.

Iz (/22/,b), Tvrdjenje 2.3.2.) znamo, da je pridruženi b'-prostor, prostoru $(E,\mathcal{T})$ u kategoriji LKP, sup $(\sigma(E,E^+),\mathcal{T})$. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ RLKP, onda je očigledno pridruženi b'- prostor u kategoriji RLKP, sup $(\sigma_S(E,E^+),\mathcal{T})$. Ako sa $b'\mathcal{T}$ označimo pridruženi b'- prostor, Risovom LKP $(E,C,\mathcal{T})$ u kategoriji LKP, onda se dobija:

5.4. T v r d j e n j e. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ RLKP, onda je $(b'\mathcal{T})_S$ = sup $(\sigma_S(E,E^+),\mathcal{T})$.

D o k a z . S obzirom da je $b'\mathcal{T}$ = sup $(\sigma(E,E^+),\mathcal{T})$, onda je $b'\mathcal{T}$ uredjeno-konveksna topologija, jer je prema (/37/b), Posledica 5.12.) takva $\sigma(E,E')$. Bazu okolina nule topologije $(b'\mathcal{T})_S$ čine skupovi oblika: sk $(U \wedge V)$ = sk $(U) \wedge$ sk (V) = $(\text{sk}U) \wedge V$, a to su tačno okoline nule za sup $(\sigma_S(E,E^+),\mathcal{T})$, jer topologija $\mathcal{T}$ ima bazu okolina nule od telesnih podskupova.

Iz sledećeg primera se vidi, da pridruženi bačvast prostor Risovom LKP u kategoriji LKP, ne mora biti RLKP.

5.5. P r i m e r. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ uredjeno-bornološki RLKP, (najfinija lokalno telesna topologija na (E,C)) iz (/37/,b), Primer 16.1.) koji nije bačvast Risov prostor, onda pridružen bačvast prostor nije RLKP.

D o k a z. Ako je $(E,C,\overline{\mathcal{T}}_\ell)$ pridružen bačvast prostor, datom prostoru u kategoriji LKP, onda je očigledno $\mathcal{T}_\ell \neq \overline{\mathcal{T}}_\ell$, jer prostor $(E,C,\mathcal{T}_\ell)$ nije bačvast. S obzirom da je $\mathcal{T}_\ell$ najfinija lokalno telesna topologija na (E,C), onda je jasno, da prostor $(E,C,\overline{\mathcal{T}}_\ell)$ nije RLKP. Iz datog primera se vidi, da ni pridruženi ultra-bornološki i $\aleph_0$-bačvast prostor, datom prostoru u kategoriji LKP, nisu RLKP. Inače, dati primer u kategoriji RLKP nema pridruženi bačvast ($\aleph_0$-bačvast i ultra-bornološki) prostor, pridružen datom.

Za razliku od prethodnog primera, ako u topološkom dualu E' Risovog LKP $(E,C,\mathcal{T})$ postoji lokalno telesna topologija $\mathcal{T}'$, tako da je $(E',C',\mathcal{T}')$ RLKP, onda se dobija:

5.6. T v r d j e n j e. Ako je $(E',C',\mathcal{T}')$ RLKP u topološkom dualu E', Risovog LKP $(E,C,\mathcal{T})$, onda je pridružen bačvast (N_0-bačvast) prostor u kategoriji LKP, prostoru $(E',C',\mathcal{T}')$, takodje RLKP.

D o k a z. Za pridruženi bačvast prostor, dokaz je isti kao za kvazi-bačvaste prostore, jer je $\mathcal{T}_1=\beta(E',E)$ lokalno telesna topologija. Za pridruženi N_0-bačvast prostor, dokaz sledi na osnovu Tvrdjenja 4.42.

Za pridružen ultra-bornološki prostor, Risovom LKP $(E,C,\mathcal{T})$, interesantna su sledeća dva tvrdjenja.

5.7. T v r d j e n j e. Neka je (E,C) Risov prostor. Ako je $(E,\mathcal{T})$ ultra-bornološki LKP, tako da je telesni omotač Banahovog diska, Banahov disk, onda je $(E,C,\mathcal{T})$ RLKP.

D o k a z. S obzirom da je za svako $x\in C$: $S_{\{x\}}=S_{\Gamma(\{x\})}=[-x,x]$, onda je $[-x,x]$ Banahov disk. Dakle, za svaku $\mathcal{T}$-okolinu nule V, imamo da je skV gutajući podskup. Dalje se dokazuje kao u (/37/,b), Teorema 15.1.) za bornološke prostore.

5.8. T v r d j e n j e. Ako je $(E',C',\mathcal{T}')$ RLKP u topološkom dualu E', Risovog LKP $(E,C,\mathcal{T})$ i ako je telesni omotač $\mathcal{T}'$- Banahovog diska, Banahov disk, onda je pridruženi ultra-bornološki prostor, Risovom LKP $(E',C',\mathcal{T}')$, takodje RLKP.

D o k a z . Ako je $V\subseteq E'$ disk, koji guta Banahove diskove, onda je skV takodje disk, koji guta Banahove diskove. Inače, bitna je pretpostavka, da je telesni omotač Banahovog diska, Banahov disk.

Sledeće tvrdjenje se odnosi na proizvoljnu osobinu u kategoriji TVP, koja je invarijantna u odnosu na svaku razdvojenu $*$- induktivnu granicu i najfiniju linearnu topologiju.

5.9. T v r d j e n j e. Neka su $(E,\mathcal{T})$ i (F,t) TVP i f sirjektivno linearno preslikavanje iz F u E. Ako je f t-$\mathcal{T}$ neprekidno, onda je f i $\bar{t}$-$\bar{\mathcal{T}}$, neprekidno. Dakle, $t=\bar{t}$ u F, ako i samo ako je za svaki TVP $(E,\mathcal{T})$ f t-$\overline{\mathcal{T}}$ neprekidno, ako je t-$\mathcal{T}$ neprekidno.

D o k a z. Ako je f t-$\mathcal{T}$ neprekidno, onda je ono očigledno $\bar{t}$-$\mathcal{T}$ neprekidno. Označimo sa $\mathcal{T}_1$ najfiniju linearnu topologiju na E, za koju je f $\bar{t}$-$\mathcal{T}$ ne prekidno. Prema definiciji pridružene topologije, $\mathcal{T}_1$ je sa datom osobinom i zbog toga je $\mathcal{T}_1 \geq \overline{\mathcal{T}}$, dakle, f je $\bar{t}$-$\overline{\mathcal{T}}$ neprekidno. To znači, ako je $t=\bar{t}$ u F, onda je f t-$\overline{\mathcal{T}}$ neprekidno, ako je t-$\mathcal{T}$ neprekidno. Obrnuto, ako je f t-$\overline{\mathcal{T}}$ neprekidno, kad god je t-$\mathcal{T}$ neprekidno, za svaki TVP $(E,\mathcal{T})$, onda je $t \geq \bar{t}$, ako za $(E,\mathcal{T})$, uzmemo prostor (F,t).

U (/34/, Tvrdjenja I.8.1. i I.8.2.) je dokazano da pridruženi bačvast (N_0-bačvast, N_0-kvazi-bačvast, kvazi-bačvast, σ-bačvast i σ-kvazi-bačvast) prostor i pridruženi bornološki prostor, prostoru $(E,\mathcal{T})$ u kategoriji LKP, indukuje na konačno kodimenzioni potprostor, pridruženi bačvast (N_0-bačvast, N_0-kvazi -bačvast, kvazi-bačvast, σ-bačvast i σ-kvazi-bačvast) prostor i pridruženi bornološki prostor. Oba tvrdjenja dokazujemo "jednostavnije" na sledeći način:

5.10. T v r d j e n j e. Ako je $(E,\mathcal{T})$ LKP i F konačno-kodimenzioni potprostor, onda je $\overline{\mathcal{T}|F} = \overline{\mathcal{T}}|F$. ($\overline{\mathcal{T}}$ - pridružena topologija topologiji $\mathcal{T}$ u odnosu na neku od osobina: "bačvastost", "kvazi-bačvastost", ...).

D o k a z. Neka je $(E,\mathcal{T})$ LKP i $(E,\overline{\mathcal{T}})$ na primer pridružen bačvast prostor u kategoriji LKP. S obzirom da je F konačne kodimenzije u E, onda je očigledno $\overline{\mathcal{T}|F} \leq \overline{\mathcal{T}}|F$. Identično preslikavanje iz $(F,\overline{\mathcal{T}|F})$ u $(E,\mathcal{T})$ je onda neprekidno i prema (/34/, Teorema I.4.1.c)), ono je neprekidno i u $(E,\overline{\mathcal{T}})$. Ali $\overline{\mathcal{T}}|F$ je najslabija topologija na F, za koju je identično preslikavanje neprekidno, dakle, $\overline{\mathcal{T}}|F \leq \overline{\mathcal{T}|F}$.

5.11. P o s l e d i c a. Isto kao prethodno tvrdjenje, osim što je F prebrojive kodimenzije, a osobina je "bačvastost", (Navedena posledica se dokazuje kao tvrdjenje 5.10, ali treba napomenuti da se ne može dokazati kao u (/34/, Tvrdjenja I.8.1. i I.8.2.). Inače, tvrdjenje I.8.1. iz /34/, može se dokazati i direktnom primenom transfinitne indukcije, jer jaka topologija prostora indukuje jaku topologiju konačno kodimenzionog potprostora. Isti je slučaj i sa topologijom $\beta^*(E,E')$).

Isto kao tvrdjenje 5.9. dokazujemo i:

5.12. T v r d j e n j e. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ RLKP a F njegov l-ideal, onda pridružen bornološki (kvazi-bačvast, $\aleph_0$-kvazi-bačvast, b-prostor, b-bačvast) prostor indukuje pridružen bornološki (kvazi-bačvast, $\aleph_0$-kvazi-bačvast, b-prostor, b-bačvast) prostor, prostoru $(F,C\cap F,\mathcal{T}|F)$.

Sledeća tvrdjenja se odnose na RTVP.

5.13. T v r d j e n j e. Neka je (E,C) Risov prostor. Ako je $(E,\mathcal{T})$ bornološki prostor u kategoriji TVP i ako je telesni omotač svakog $\mathcal{T}$-ograničenog podskupa, $\mathcal{T}$-ograničen podskup, onda je $(E,C,\mathcal{T})$ RTVP.

D o k a z . S obzirom da je telesni omotač svakog $\mathcal{T}$-ograničenog potskupa, $\mathcal{T}$-ograničen podskup, onda je svaki uredjeno ograničen podskup $\mathcal{T}$-ograničen. Zaista, ako je A uredjeno ograničen podskup, onda postoji $x\in C$, tako da je $A\subseteq[-x, x]$. Ali, $[-x, x]=S_{\{x\}}$, dakle, $[-x, x]$ je $\mathcal{T}$-ograničen podskup. Ako je zatim V $\mathcal{T}$-okolina nule, onda za svako $x\in C$, imamo da je S_V gutajući podskup. To znači da je $\{S_V \mid V$ je $\mathcal{T}$-okolina nule$\}$ baza okoline nule jedne telesne topologije na (E,C), koja je finija od $\mathcal{T}$. S druge strane, lako proveravamo da ove dve topologije imaju iste ograničene podskupove, dakle, one su jednake, jer je $(E,\mathcal{T})$ bornološki prostor.

5.14. P o s l e d i c a. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ RTVP, onda je pridruženi bornološki prostor $(E,C,\overline{\mathcal{T}})$ u kategoriji TVP, takodje RTVP.

D o k a z. Prostori $(E,C,\mathcal{T})$ i $(E,C,\overline{\mathcal{T}})$ imaju iste ograničene podskupove, i onda je na osnovu prethodnog tvrdjenja $(E,C,\overline{\mathcal{T}})$ RTVP.

Slično kao za LKP, dokazujemo i sledeće tvrdjenje:

5.15. T v r d j e n j e. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ RTVP, onda je pridruženi kvazi-bačvast ($\aleph_0$-kvazi-bačvast) prostor, prostoru $(E,C,\mathcal{T})$ u kategoriji TVP, takodje RTVP.

6. NEKE KLASE ULKP

U ovom delu rada razmatramo neke klase ULKP, koje su slične bačvastim, kvazi-bačvastim,... u kategoriji LKP. Za konus C uredjenog LKP $(E,C,\mathcal{T})$ samo pretpostavljamo da je neprazan konveksan podskup, za koji je $\lambda C \subseteq C$, kad god je $\lambda \geq 0$. Iz uvodnog dela znamo da je topološki dual E', svakog ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ uredjen konusom $C' = -C^{o}$. Definicija polare bilo kog podskupa $A \subseteq E$ u odnosu na dualnost $\langle E,E' \rangle$ je kao u (/33/, str.160.).

U /37/,c), su definisani takozvani polu-bačvasti i polu-kvazi-bačvasti ULKP. Naime, prostor $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast), ako je svaki pozitivan E'_{σ}-ograničen (E'_{β}-ograničen) podskup, $\mathcal{T}$-ekvineprekidan. Svaki bačvast (kvazi-bačvast) ULKP je očigledno polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast). S druge strane, svaki bačvast (kvazi-bačvast prostor) u kategoriji LKP je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) u kategoriji ULKP u odnosu na trivijalni konus $C = \{0\}$. Inače, svaki LKP $(E,\mathcal{T})$ je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) u odnosu na konus $C=E$, jer je tada $C' = \{0\}$.

Narednom definicijom i tvrdjenjem dajemo dualnu karakterizaciju polu-bačvastih i polu-kvazi-bačvastih prostora.

6.1. D e f i n i c i j a. Podskup $V \subseteq E$ je polu-bačva (bornivorna polu-bačva), ako $V \supseteq -C$ i ako je zatvoren konveksan gutajući (bornivoran) podskup.

6.2. T v r d j e n j e. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast), ako i samo ako je svaka polu-bačva (bornivorna polu-bačva), $\mathcal{T}$-okolina nule.

D o k a z. Ako je $A \subseteq C'$, E'_{σ}-ograničen (E'_{β}-ograničen) podskup, onda je $A^{o} \supseteq (-C^{o})^{o} = -C^{oo} = -\overline{C} \supseteq -C$ polu-bačva (bornivorna polu-bačva), dakle, $\mathcal{T}$-okolina nule. To znači da je $A \subseteq A^{oo}$, $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup. Obrnuto, ako je $V \subseteq E$ polu-bačva (bornivorna polu-bačva), onda je $V^{o} \supseteq C' = -C^{o}$ E'_{σ}-ograničenn(E'_{β}-ogra ničen) podskup. S obzirom da je $(E,C,\mathcal{T})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) ULKP, onda je $V=V^{oo}$, $\mathcal{T}$-okolina nule.

U tvrdjenjima koja slede navodimo neke nasledne osobine polu-bačvastih (polu-kvazi-bačvastih) prostora.

6.3. T v r d j e n j e. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast), ako i samo ako je ULKP $(E,-C,\mathcal{T})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast).

D o k a z. Zaista, ako je $A\subseteq -C'=C^{o}$, onda je $-A\subset C'$. Podskup A je E'_{σ} -ograničen (E'_{β} -ograničen), ako i samo ako je podskup $-A$ E'_{σ} -ograničen (E'_{β} -ograničen), odnosno, A je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan, ako i samo ako je $-A$ $\mathcal{T}$-ekvineprekidan.

6.4. T v r d j e n j e. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast), ako i samo ako je ULKP $(E,\overline{C},\mathcal{T})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast).

D o k a z. Prostori $(E,C,\mathcal{T})$ i $(E,\overline{C},\mathcal{T})$ imaju iste polu-bačve (bornivorne polu-bačve).

6.5. T v r d j e n j e. Neka je $(E,C,\mathcal{T})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) ULKP. Ako je f pozitivno neprekidno i skoro-otvoreno preslikavanje u proizvoljni ULKP $(F,K,\mathcal{P})$, onda je prostor $(F,K,\mathcal{P})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast).

D o k a z. Ako je V polu-bačva (bornivorna polu-bačva) u ULKP $(F,K,\mathcal{P})$, onda je $f^{-1}(V)=U$ polu-bačva (bornivorna polu-bačva) u prostoru $(E,C,\mathcal{T})$. S obzirom da je f skoro-otvoreno preslikavanje,onda je $\overline{f(U)}=\overline{f(f^{-1}(V))}\subseteq\overline{V}=V$ i V je $\mathcal{P}$-okolina nule. To znači da je ULKP $(F,K,\mathcal{P})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast).

6.6. P o s l e d i c a. Kompletiranje $(\hat{E},\overline{C},\hat{\mathcal{T}})$ uredjenog LKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) prostor, ako je $(E,C,\mathcal{T})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) prostor ($\overline{C}$ je zatvaranje konusa C u topologiji $\hat{\mathcal{T}}$).

6.7. P o s l e d i c a. Ako je $(F,K,\mathcal{P})$ gust potprostor uredjenog LKP $(E,\overline{K},\mathcal{T})$, onda je ULKP $(E,\overline{K},\mathcal{T})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast), ako je $(F,K,\mathcal{P})$ polu bačvast (polu-kvazi-bačvast) prostor.

D o k a z. Direktna primena prethodnog tvrdjenja, jer je identično preslikavanje skoro otvoreno. Poslednje dve posledice dokazujemo koristeći činjenicu da je $\sigma(\hat{E}',\hat{E})>\sigma(E',E)$, odnosno, $\sigma(E',E) > \sigma(E',F)$.

Za ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ kažemo da je polu-sekvencijalno kompletan, ako je svaki pozitivan Košijev niz konvergentan. Podskup $A \subseteq E$ je polu-jako ograničen, ako ga guta svaka polu-bačva.

6.8. P o s l e d i c a. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) ULKP, onda je prostor $(E',C',\sigma(E',E))$ $((E',C',\beta(E',E)))$ polu-sekvencijalno kompletan.

D o k a z. Ako je $x_n' \in C'$ Košijev niz u prostoru $(E',C',\sigma(E',E))$ $((E',C',\beta(E',E)))$, onda je on $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup i prema (/30/, Posledica na str.155.) E_σ' -konvergentan, odnosno, E_β' -konvergentan.

Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ RLKP, onda se iz /23/,a) zna, da je on polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast), ako i samo ako je uredjeno-kvazi-bačvast (kvazi-bačvast) prostor. Dakle, primer iz /23/,a) je ujedno i primer polu-bačvastog prostora, koji nije bačvast. Iz (/37/,b) Primer 16.1.) se vidi da potprostor polu-bačvastog prostora nije polu-bačvast prostor. Dakle, u opštem slučaju, projektivna granica polu-bačvastih i polu-kvazi-bačvastih prostora nije polu-bačvast, odnosno, polu-kvazi-bačvast prostor. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi, da za induktivnu granicu to nije tako:

6.9. T v r d j e n j e. Ako je $\{(E_\alpha,C_\alpha,\mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ familija polu-bačvastih (polu-kvazi-bačvastih) ULKP i $f_\alpha : E_\alpha \to E$ familija pozitivnih linearnih preslikavanja, tako da je $\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(E_\alpha) = E$, onda je finalna topologija $\mathcal{T}$ na uredjenom vektorskom prostoru (E,C) polu-bačvasta (polu-kvazi-bačvasta).

D o k a z. S obzirom da su preslikavanja f_α pozitivna, onda je inverzna slika polu-bačve (bornivorne polu-bačve) polu-bačva (bornivorna polu-bačva), što znači da je ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast).

6.10. P o s l e d i c a. Kvocijent prostor po zatvorenom potprostoru polu-bačvastog (polu-kvazi-bačvastog) prostora je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) prostor.

6.11. P o s l e d i c a. Direktan zbir proizvoljne familije polu-bačvastih (polu-kvazi-bačvastih) prostora je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) prostor.

Sledeće tvrdjenje se dokazuje slično kao za bačvaste i kvazi-bačvaste LKP:

6.12. T v r d j e n j e. Proizvod proizvoljne familije polu-bačvastih (polu-kvazi-bačvastih) prostora je polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) prostor.

Svaki bačvast (kvazi-bačvast) ULKP je očigledno polu-bačvast (polu-kvazi-bačvast) prostor. Iz primera navedenog u /23/,a) neposredno sledi da u navedenom ULKP postoji bačva koja nije polu-bačva. Kao kod bačvastih i kvazi-bačvastih prostora, tako je i kod polu-bačvastih i polu-kvazi-bačvastuh prostora interesantno znati, da li je potprostor konačne kodimenzije istog tipa.

U tvrdjenjima koja slede, dajemo delimičan odgovor na tako postavljeno pitanje.

6.13. T v r d j e n j e . Ako je $(E,\mathfrak{T})$ LKP a F gusta hiper-ravan, onda prostori $(E', \sigma(E',E))$ i $(E', \sigma(E',F))$ imaju iste ograničene podskupove, ili za svaki $\sigma(E',F)$-ograničen podskup A postoji E'_σ -ograničen podskup B, tako da je $A \subseteq \overline{\Gamma B}^{\sigma(E',F)}$.

6.14. T v r d j e n j e. Ako je $(E,\mathfrak{T})$ LKP a F gusta hiper-ravan, onda prostori $(E', \beta(E',E))$ i $(E', \beta(E',F))$ imaju iste jako ograničene podskupove, ili za svaki $\beta(E',F)$-ograničen podskup A postoji E'_β -ograničen podskup B, tako da je $A \subseteq \overline{\Gamma B}^{\beta(E',F)}$.

D o k a z. Iz /35/,b) znamo da se svaka bačva, odnosno, svaka bornivorna-bačva hiper-ravni produžuje u bačvu, odnosno, bornivornu bačvu prostora. S obzirom da topologija E'_β i E'_{β^*} imaju bazu okolina nule od svih bačvi i svih bornivornih bačvi prostora $(E, \sigma(E,E'))$, onda je jasno da one u potprostoru F indukuju topologije $\beta(F,F')$ i $\beta^*(F,F')$. To znači da je potprostor $(F, \beta(F,F')$ $((F, \beta^*(F,F')))$ ili gust u prostoru $(E, \beta(E,E'))$ $((E, \beta^*(E,E')))$ ili zatvoren. U prvom slučaju se dobija da prostori $(E', \sigma(E',E))$ i $(E', \sigma(E',F))$ imaju iste ograničene (jako-ograničene) podskupove, a u drugom, da za svaki $\sigma(E',F)$-ograničen (jako-ograničen) podskup A postoji E'_σ-ograničen (jako-ograničen) podskup B, tako da je $A \subseteq \overline{\Gamma B}^{\sigma(E,F)}$ ($A \subseteq \overline{\Gamma B}^{\beta(E,F)}$).

6.15. T v r d j e n j e. Neka je $(E,C,\mathcal{T})$ polu-bačvast ULKP i neka je F hiper-ravan u E.

a) Ako je $\overline{F}^{\mathcal{T}} = F$, onda je $(F,p(C),\mathcal{T}|F)$ polu-bačvast ULKP;

b) Ako je potprostor F snabdeven jakom topologijom gust u prostoru $(E,C,\beta(E,E'))$, onda je $(F,C\wedge F,\mathcal{T}|F)$ polu-bačvast ULKP;

(U slučaju pod a) F je uredjen konusom p(C)-projekcijom konusa C na potprostor F, a u drugom konačnim uredjenjem, odnosno, konusom $C\wedge F$. Iz b) neposredno sledi, da je onda i $(F, p(C),\mathcal{T}|F)$ polu-bačvast ULKP, jer je $C\wedge F \subseteq p(C)$,

D o k a z . a) Ako je $\overline{F}^{\mathcal{T}} = F$, onda postoji $x \in E\setminus F$, tako da je $(E,\mathcal{T}) = (F,\mathcal{T}|F)\oplus L$, gde je L linearni omotač od $\{x\}$, snabdeven Euklidovom topologijom. Dalje je $(F,p(C),\mathcal{T}|F) \cong (E,C,\mathcal{T})/_L$, odnosno, prostor $(F,p(C),\mathcal{T}|F)$ je polu-bačvast, jer je takav $(E/_L,C+L,\phi(\mathcal{T}))$, gde je ϕ konačno preslikavanje prostora E u $E/_L$. Ne znamo, da li je pod istim uslovima i prostor $(F,C\wedge F,\mathcal{T}|F)$ polu-bačvast. b) Ako je potprostor $(F, C\wedge F, \beta(F,F'))$ gust u prostoru $(E,C, \beta(E,E')$, onda je na osnovu tvrdjenja 6.13. svaki $\sigma(E',F)$-ograničen podskup i E'_σ-ograničen. Dakle, ako je A pozitivan $\sigma(E',F)$-ograničen podskup, onda je A E'_σ-ograničen, odnosno, $\mathcal{T}$-ekvineprekidan. S obzirom da je $\overline{F}^{\mathcal{T}} = E$, onda je A i $\mathcal{T}/F$-ekvineprekidan podskup. Za sada ne znamo, da li je potprostor $(F,C\wedge F,\mathcal{T}|F)$ polu-bačvast, ako je $(E,C, \beta(E,E')) = L \oplus (F,C\wedge F, \beta(F,F'))$.

Slično kao za polu-bačvaste prostore i na osnovu tvrdjenja 6.14; dokazujemo:

6.16. T v r d j e n j e. Neka je $(E,C,\mathcal{T})$ polu-kvazi-bačvast ULKP i neka je F hiper-ravan u E.

a) Ako je $\overline{F}^{\mathcal{T}} = F$, onda je $(F,p(C),\mathcal{T}|F)$ polu-kvazi-bačvast ULKP;

b) Ako je potprostor F snabdeven topologijom $\beta^*(F,F')$

gust u prostoru $(E, C, \beta^*(E,E'))$, onda je $(F, C\cap F, \mathcal{T}|F)$ polu-kvazi-bačvast ULKP;

Kao N_0-bačvaste, N_0-kvazi-bačvaste, σ-bačvaste i σ-kvazi-bačvaste prostore u kategoriji LKP, tako definišemo i polu-N_0-bačvaste, polu-N_0-kvazi-bačvaste, polu-σ-bačvaste i polu-σ-kvazi-bačvaste u kategoriji ULKP.

6.17. D e f i n i c i j a. Polu-N_0-bačva je polu-bačva, koja je prebrojiv presek, zatvorenih konveksnih okolina nule. Polu-σ-bačva je polu-bačva, koja je prebrojiv presek slabo zatvorenih konveksnih okolina nule. Ako je polu-bačva bornivorna, onda je ona bornivorna polu-N_0-bačva, odnosno, bornivorna polu-σ-bačva.

6.18. D e f i n i c i j a. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-N_0-bačvast (polu-N_0-kvazi-bačvast, polu-σ-bačvast, polu-σ-kvazi-bačvast), ako je svaka polu-N_0-bačva (bornivorna polu-N_0-bačva, polu-σ-bačva, bornivorna polu-σ-bačva), $\mathcal{T}$-okolina nule.

Sledećim tvrdjenjima dajemo dualne karakterizacije definisanih klasa prostora:

6.19. T v r d j e n j e. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-N_0-bačvast (polu-N_0-kvazi-bačvast), ako i samo ako je svaki pozitivan E'_σ-ograničen (E'_β-ograničen) podskup oblika $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, gde su A_i $\mathcal{T}$-ekvineprekidni podskupovi, $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup.

D o k a z. Ako je $A=\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, $A\subseteq C'$, gde su A_i $\mathcal{T}$-ekvineprekidni podskupovi i ako je A $\sigma(E',E)$-ograničen (E'_β-ograničen) podskup, onda je $A^o=\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i^o$ polu-N_0-bačva (bornivorna polu-N_0-bačva), dakle, $\mathcal{T}$-okolina nule. To znači, da je $A\subseteq A^{oo}$ $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup. Obrnuto, ako je $V=\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ polu-N_0-bačva (bornivorna polu-N_0-bačva), onda je $V^o=(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n)^o \supseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n^o$ pozitivan E'_σ-ograničen (E'_β-ograničen) podskup. To znači, da je $\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n^o$ $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup, odnosno, da je $\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n^{oo} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n = V$ $\mathcal{T}$-okolina nule.

6.20. T v r d j e n j e. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-σ-bačvast (polu-σ-kvazi-bačvast), ako i samo ako je svaki pozitivan E'_σ-ograničen (E'_β-ograničen) niz, $\mathcal{T}$-ekvineprekidan.

D o k a z. Isto kao prethodno tvrdjenje, ako umesto A_n uzmemo neko $x_n' \in C \subseteq E'$.

Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ RLKP, onda se na osnovu tvrdjenja 6.19. i 4.36. dobija:

6.21. P o s l e d i c a. RLKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-$\aleph_0$-bačvast (polu-$\aleph_0$-kvazi-bačvast), ako i samo ako je uredjeno-$\aleph_0$-kvazi-bačvast ($\aleph_0$-kvazi-bačvast).

Odnos dobijenih klasa u kategoriji ULKP je dat sledećom tabelom:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{polu-bačvasti} & \Longrightarrow & \text{polu-}\aleph_0\text{-bačvasti} & \Longrightarrow & \text{polu-}\sigma\text{-bačvasti} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{polu-kvazi-bačvasti} & \Longrightarrow & \text{polu-}\aleph_0\text{-kvazi-bačvasti} & \Longrightarrow & \text{polu-}\sigma\text{-kvazi-bačv.}
\end{array}$$

Sledeća dva tvrdjenja su slična kao kod LKP:

6.22. T v r d j e n j e. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-bačvast, ako i samo ako je polu-kvazi-bačvast i polu-σ-bačvast.

6.23. T v r d j e n j e. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je polu-$\aleph_0$-bačvast, ako i samo ako je polu-$\aleph_0$-kvazi-bačvast i polu-σ-bačvast.

D o k a z. Za dokaz oba tvrdjenja ne koristi se činjenica, da je pozitivan $\sigma(E',E)$-ograničen podskup polu-σ-bačvastog prostora $\beta(E',E)$-ograničen. Zaista, ako za pozitivan $\sigma(E', E)$-ograničen podskup A postoji $\sigma(E',E)$-zatvoren apsolutno konveksan gutajući podskup V, tako da $A \not\subseteq n^2 V$, onda postoji niz $a_n \in A$, tako da je $\frac{1}{n} a_n \notin nV$. S obzirom da je prostor $(E,C,\mathcal{T})$ polu-σ-bačvast, onda je niz $\frac{1}{n} a_n$ $\mathcal{T}$-ekvineprekidan, dakle, $\beta(E', E)$-ograničen, odnosno, progutan podskupom V.

Sledećim tvrdjenjem dokazujemo da svaka polu-bačva guta Banahove diskove:

6.24. T v r d j e n j e. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ sekvencijalno kompletan ULKP, onda je svaka polu-bačva bornivorna.

D o k a z. Ako je A konveksan ograničen podskup, onda je E_A Banahov prostor, dakle polu-bačvast u odnosu na konus $C \cap E_A$. Ako je V polu-bačva u prostoru $(E,C,\mathcal{T})$, onda je $V \cap E_A$ polu-bačva u potprostoru $(E_A, C \cap E_A, \|\cdot\|)$, dakle, okolina nule, koja guta jediničnu loptu A.

6.25. P o s l e d i c a. Kompletiranje polu-kvazi-bačvastog (polu-$\aleph_0$-kvazi-bačvastog, polu-σ-kvazi-bačvastog) je polu-bačvast (polu-$\aleph_0$-bačvast, polu-σ-bačvast) prostor.

Naredno tvrdjenje se odnosi na Banah-Štanhauzovu teoremu polu-σ-bačvastih ULKP:

6.26. T v r d j e n j e. Neka je $(E,C,\mathcal{T})$ polu-σ-bačvast ULKP i neka je $\{f_n\} \subseteq C'$ $\sigma(E',E)$-ograničen niz pozitivnih neprekidnih linearnih formi. Ako $f_n \xrightarrow{\sigma(E',E)} f$, onda $f \in C' \subseteq E'$ i dati niz konvergira uniformno na svakom predkompaktnom podskupu od E.

D o k a z. Dati niz je prema tvrdjenju 6.20. $\mathcal{T}$-ekvineprekidan i onda slabo konvergira prema $f \in E'$. S obzirom da je $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, onda je za svako $x \in C$: $f(x) \geq 0$, dakle, $f \in C'$. Drugi deo je jasan, jer su na $\mathcal{T}$-ekvineprekidnom podskupu, topologije E'_σ i E'_p iste.

Napominjemo da se i za polu-$\aleph_0$-bačvaste (polu-$\aleph_0$-kvazi-bačvaste, polu-σ-bačvaste i polu-σ-kvazi-bačvaste) prostore mogu formulisati tvrdjenja slična tvrdjenjima 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10. i 6.11. i da je dokaz isti, kao za polu-bačvaste (polu-kvazi-bačvaste) prostore.

U /36/ je definisana jedna klasa ULKP, slična klasi bornoloških prostora a u kategoriji LKP. Naime , ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je P-bornološki, ako je svaki gutajući pozitivno bornivoran disk, $\mathcal{T}$-okolina nule. U navedenom radu se ne proučava detaljno ta klasa prostora. U nastavku ovog dela navodimo neka zapažanja o toj klasi ULKP. S obzirom na definiciju klase P-bornoloških prostora, sledeća tri tvrdjenja su očigledna:

6.27. T v r d j e n j e. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je P-bornološki, ako i samo ako je ULKP $(E,-C,\mathcal{T})$ P-bornološki.

6.28. T v r d j e n j e. ULKP $(E,E,\mathcal{T})$ je P-bornološki, ako i samo ako je bornološki.

6.29. T v r d j e n j e. ULKP $(E,\{0\},\mathcal{T})$ je P-bornološki, ako i samo ako je $\mathcal{T} = \tau(E,E^*)$ ($\tau(E,E^*)$-najjača lokalno konveksna topologija na E).

Iz navedenih tvrdjenja sledi, da je od interesa razmatrati klasu P-bornoloških prostora, kada je $C \neq \{0\}$ i $C \neq E$.

Klasa P-bornoloških prostora se može okarakterisati slično kao klasa bornoloških prostora u kategoriji LKP. Naime, svakom ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ pridružujemo ULKP $(E,C,\mathcal{T}_1)$, gde topologija $\mathcal{T}_1$ ima za bazu okolinu nule sve gutajuće, pozitivne bornivorne, apsolutno konveksne podskupove od E. Očigledno je $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_1$. Na osnovu toga sledi:

6.30. T v r d j e n j e. Za svaki ULKP $(E,C,\mathcal{T})$, sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(E,C,\mathcal{T})$ je P-bornološki RLKP;

b) Svako pozitivno linearno preslikavanje f iz $(E,C,\mathcal{T})$ u proizvoljni ULKP $(F,K,\mathcal{P})$ je neprekidno, ako je ograničeno na pozitivno ograničenim podskupovima.

D o k a z. Ako je U $\mathcal{P}$-okolina nule, onda je $f^{-1}(U)$ pozitivno bornivoran podskup od E, a ujedno i gutajući, dakle, $\mathcal{T}$-okolina nule. To znači da a) $\Rightarrow$ b). Obrnuto, ako je b) tačno, onda je identično preslikavanje iz $(E,\mathcal{T})$ u $(E,\mathcal{T}_1)$ neprekidno, jer je ograničeno na pozitivno ograničenim podskupovima.

Na osnovu poslednjeg tvrdjenja dobija se slična karakterizacija, kao za bornološke LKP.

6.31. P o s l e d i c a. ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ je P-bornološki, ako i samo ako je $\mathcal{T} = \tau(E,E')$ i $E' = \overline{E'}$ ($\overline{E'}$ je prostor pozitivnih linearnih formi, koje su ograničene na pozitivnim ograničenim podskupovima).

D o k a z. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ P-bornološki ULKP, onda je prema prethodnom tvrdjenju b) $E' = \overline{E'}$, a s obzirom da je P-bornološki prostor i bornološki, onda je $\mathcal{T} = \tau(E,E')$. Obrnuto je očigledno, jer je $\mathcal{T}_1 = \tau(E,\overline{E'}) = \tau(E,E') = \mathcal{T}$, odnosno, prostor $(E,C,\mathcal{T})$ je P-bornološki.

Bez teškoća dokazujemo, da je induktivna granica i direktan zbir proizvoljne familije P-bornoloških prostora, takodje P-bornološki prostor. To znači, da je i kvocijent prostor P-bornološkog prostora, isto P-bornološki prostor. Medjutim, proizvod proizvoljne familije P-bornoloških prostora ne mora biri P-bornološki prostor. (Pogledati tvrdjenje 6.26.)). Za konačno kodimenzioni potprostor F se dobija:

6.32. T v r d j e n j e. Neka je $(E,C,\mathcal{T})$ P-bornološki ULKP i neka je F hiper-ravan u E.

a) Ako je $\bar{F}^{\mathcal{T}} = F$, onda je $(F, p(C), \mathcal{T}|F)$ bornološki ULKP;

b) Ako je $\bar{F}^{\mathcal{T}} = E$, onda je $(F, p(C), \mathcal{T}|F)$ bornološki LKP, a ne znamo da li je P-bornološki ULKP. (I u jednom i u drugom slučaju ne znamo šta je sa ULKP $(F, C\cap F, \mathcal{T}|F)$).

Zna se da je metrizabilan LKP bornološki. Ako je ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ metrizabilan sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda se dobija:

6.33. T v r d j e n j e. Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ metrizabilan ULKP sa osobinom otvorene rastavljivosti, onda je on P-bornološki.

D o k a z. Ako pozitivno-bornivoran disk U od E nije $\mathcal{T}$-okolina nule, onda je za svako $n\in N$: $V_n\cap C - V_n\cap C \not\subset n^2U$, gde je $(V_n)n\in N$ baza okolina nule prostora $(E,C,\mathcal{T})$. To znači, za svako $n\in N$, postoji niz $a_n = x_n - y_n \notin n^2U$, gde $x_n, y_n \in V_n\cap C$. Nizovi: $\frac{1}{n}x_n$ i $\frac{1}{n}y_n$ teže nuli i dakle, guta ih disk U, jer su podskupovi $\{\frac{1}{n}x_n\}$ $n\in N$ i $\{\frac{1}{n}y_n\}$ $n\in N$ pozitivni i $\mathcal{T}$-ograničeni. Disk U, dakle guta i podskup $\{\frac{a_n}{n^2}\}$ $n\in N$, što je suprotno pretpostavci da je $V_n\cap C - V_n\cap C \not\subset n^2U$, za svako $n\in N$.

Da obrat prethodnog tvrdjenja nije tačan, sledi iz narednog tvrdjenja i činjenice da je ULKP $(E,C,\mathcal{T})$ sa osobinom otvorene rastavljivosti, generisan konusom C, odnosno, $E = C-C$.

6.34. T v r d j e n j e. Konačno dimenzioni vektorski prostor, snabdeven Euklidovom topologijom je P-bornološki, za svaki konus.

D o k a z. Ako je $\mathcal{T}$ Euklidova topologija na konačno dimenzionom vektorskom prostoru E, onda je $(E,\mathcal{T})$ razdvojen topološko vektorski prostor i dalje je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$, za svaki konus C (u opštem slučaju je $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_1$), odnosno, $(E, C, \mathcal{T})$ je P-bornološki UKLP. Ako je dim $E \geqslant 2$, onda ULKP $(E, F, \mathcal{T})$ nije sa osobibinom otvorene rastavljivosti, za svaki pravi potprostor F, što znači da obrat prethodnog tvrdjenja nije tačan.

Napominjemo da klasa P-bornoloških UKLP sadrži sve uredjeno-bornološke prostore (za njih je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_b - \mathcal{T}_g$ je lokalno-konveksna topologija na uredjenom vektorskom prostoru (E, C), koja za bazu okolina nule ima uredjeno-bornivorne diskove).

7. KONVEKSNE BORNOLOGIJE SA KONUSOM

Pod trojkom $(E,C,\mathcal{B})$ podrazumevamo uredjen vektorski prostor (E,C) snabdeven konveksnom bornologijom (/4/,a), /7/ i /24/). U /7/ se razmatra odnos konveksne bornologije i uredjenja, naime, razmatra se bornologija, koja za bazu ograničenih podskupova ima telesne i konveksne podskupove. U istom radu se pretpostavlja da je (E,C) Risov prostor.

Mi u ovom delu rada najpre navodimo neke rezultate, koje smo dobili proučavajući takozvanu prirodnu bornologiju $\mathcal{B}_\omega$, na uredjenom vektorskom prostoru (E,C). Za razliku od /7/ ne pretpostavljamo da je (E,C) Risov prostor. Sledeća tvrdjenja navodimo bez dokaza (/7/):

7.1. T v r d j e n j e. Ako je $E=C-C$, gde je C konus u vektorskom prostoru E, onda skupovi oblika $[-x,x]$, $x\in C$, čine bazu jedne konveksne bornologije na (E,C). Ta bornologija je najfinija telesna bornologija na uredjenom vektorskom prostoru (E,C) i označavaćemo je sa $\mathcal{B}_\omega$.

7.2. T v r d j e n j e. Neka je (E,C) uredjen vektorski prostor, tako da je $E=C-C$. Prostor (E,C) je onda Arhimedov, ako i samo ako je konus C b-zatvoren u prirodnoj bornologiji $\mathcal{B}_\omega$.

7.3. T v r d j e n j e. Neka je (E,C) uredjen vektorski prostor, tako da je $E=C-C$. Prostor (E,C) je onda Arhimedov, ako i samo ako je prostor $(E,C,\mathcal{B}_\omega)$ razdvojen (nema ograničenih pravih osim $\{0\}$).

7.4. T v r d j e n j e. Neka je (E,C) uredjen vektorski prostor, tako da je $E=C-C$. Prostor (E,C) onda poseduje uredjenu jedinicu, ako i samo ako je prostor $(E,C,\mathcal{B}_\omega)$ prost (postoji ograničen podskup, koji guta sve ograničene podskupove).

U tvrdjenjima koja slede, navodimo neke nasledne osobine, koje se odnose na prirodnu bornologiju $\mathcal{B}_\omega$.

7.5. T v r d j e n j e. Ako je $E=C-C$ uredjen vektorski prostor i F potprostor, tako da je $F\cap C-F\cap C=F$, onda prirodna bornologija $\mathcal{B}_\omega$ prostora (E,C) indukuje prirodnu bornologiju

D o k a z. Ako je $\mathcal{B}_{\omega F}$ prirodna bornologija potprostora F, onda je ona najjača telesna bornologija na F (pogledati tvrdjenje 7,1.) i očigledno finija od bornologije koju indukuje prirodna bornologija prostora $(E,\mathcal{B}_{\omega})$. Obrnuto, ako je $[-x,x]\cap F$, $x\in C$, ograničen podskup od F u bornologiji koju indukuje prirodna bornologija, onda postoji $z\in F\cap C$, tako da je $[-x,x]\cap F\subseteq[-z,z]$. Zaista, ako $y\in[-x,x]\cap F$, onda $y\in F = F\cap C-F\cap C$, odnosno, postoje $a,b\in F\cap C$, tako da je $y = a-b$. S obzirom da je F generisan konusom $C\cap F$, onda prema (/37/,b), Tvrdjenje 1.2.c), za a i b postoji $z\in F\cap C$, tako da je $a,b\leq z$, odnosno, $y\in[-z,z]$. To znači da prirodna bornologija $\mathcal{B}_{\omega}$ prostora (E,C) indukuje prirodnu bornologiju, potprostora $(F, F\cap C)$.

7.6. T v r d j e n j e. Ako je $E=C-C$ uredjen vektorski prostor i E/F kvocijent prostor, gde je F bilo koji potprostor od E, onda je kvocijent slika prirodne bornologije, prirodna bornologija.

D o k a z. Prostor E/F je očigledno generisan konusom $\phi(C)$, gde je ϕ kanonično preslikavanje i onda je prirodna bornologija $\mathcal{B}_{\omega}$ prostora E/F najjača telesna bornologija na E/F. Ako dokažemo da je $\phi([-x,x])$, za svako $x\in C$, ograničen podskup u prirodnoj bornologiji $\mathcal{B}_{\omega}$ prostora E/F, onda je prema (/4/,a), 1.3.3.) dokaz tvrdjenja završen. Medjutim, $\phi([-x,x]) = \phi((x-C)\cap(C-x))\subseteq(\phi(x)-\phi(C))\cap(\phi(C)-\phi(x)) = [-\phi(x),\phi(x)] = [-z,z]$, $z\in\phi(C)$.

Slično dokazujemo da je prirodna bornologija proizvoda i direktnog zbira proizvoljne familije generisanih uredjenih vektorskih prostora, jednaka proizvodu i direktnom zbiru prirodnih bornologija datih prostora.

Svako pozitivno linearno preslikavanje iz uredjenog vektorskog prostora (E,C) u uredjeni vektorski prostor (F,K), je očigledno ograničeno u odnosu na prirodne bornologije, jer je $f([-x,x])\subseteq[-f(x), f(x)]$. Iz (/24/,a), Primedba, str.11.) se zna, da sekvencijalno M-neprekidno preslikavanje ne mora biti ograničeno. Linearno preslikavanje iz bornološkog prostora $(E,\mathcal{B}_1)$ u bornološki prostor $(F,\mathcal{B}_2)$ je sekvencijalno M- neprekidno, i $\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k|\leq 1$ (pogledati /24/, str.32.). Iz /24/ se zna, da je $\vee A$ ograničen Banahov disk, koji sadrži A. Ako dokažemo da je $\vee A$ telesan podskup, onda $\mathcal{B}$ ima bazu od telesnih kompletirajućih diskova. Dokažimo da je $\vee A = S(\vee A)$. Dakle, ako $x\in \vee A$, onda je $x=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k x_k$, $x_k\in A$, $\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k|\leq 1$. S obzirom da je $A = S(A)$, onda za svako $x_k\in A$, postoji $a_k\in A\cap C$, tako da je $-a_k\leq x_k\leq a_k$. Dalje je $-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k\leq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\leq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k$. S obzirom da je $(E,C,\mathcal{B})$ kompletan bornološki prostor, onda je $x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\in[-a,a]$, gde je $a=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k$ i $a\in\vee A$, što znači da $x\in S(\vee A)$. Obrnuto, ako $x\in S(\vee A)$, onda postoji $a\in\vee A\cap C$, tako da je $x\in[-a,a]$. To znači da je $-\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k a_k\leq x\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k a_k$, gde $a_k\in A$ i $\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k|\leq 1$. Dalje se slično kao u (/7/, Lema) dokazuje da je $x=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k x_k$, gde je $x_k\in A$ i $\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k|\leq 1$, što znači da $x\in\vee A$. Za dokaz, da je $x=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k x_k$, koristimo kao u (/7/, Lema) matematičku indukciju i osobinu Risove rastavljivosti. Inače u (/7/, Tvrdjenje 1, str.4.) se pretpostavlja da je (E,C) Risov prostor.

7.9. P o s l e d i c a. Neka je (E,C) uredjen vektorski prostor generisan konusom C i neka poseduje osobinu Risove rastavljivosti. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) Prostor $(E,C,\mathcal{B}_\omega)$ je kompletan;

b) Prostor $(E,C,\mathcal{B}_\omega)$ je Maki-kompletan;

c) Za svako $x\in C$, $[-x,x]$ je Banahov disk;

D o k a z. Jasno je da a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$c). Ako dokažemo da je $\vee([-x,x])=[-x,x]$, onda je prema prethodnom tvrdjenju, prostor $(E,C,\mathcal{B}_\omega)$ kompletan. Zaista, ako je $a\in\vee([-x,x])$, onda je $a=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k x_k$, gde je $x_k\in[-x,x]$ i $\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k|\leq 1$. Onda je za svako $n\in N$: $\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k x_k\in[-x,x]$, odnosno $a\in[-x,x]$, jer je $s_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$ Koši-Makijev niz (/24/, str,25.) a $[-x,x]$ Banahov disk. Inače iz (/24/, str.33.) se zna, da Maki-kompletan bornološki prostor, ne mora biti kompletan. Iz navedene posledice se vidi, da su ta dva pojma za prirodnu bornologiju $\mathcal{B}_\omega$ ekvivalentna.

U nastavku rada pretpostavljamo da je $(E,C,\mathcal{B})$ uredjen vektorski prostor generisan konusom C i snabdeven jednom konveksnom bornologijom $\mathcal{B}$. Zna se da bornologija $\mathcal{B}$ ima za bazu konveksne uravnotežene podskupove. Kao što se u 1, 2 i 3 ako iz uslova $x_n \xrightarrow[\mathcal{B}_1]{M} 0$, sledi $f(x_n) \xrightarrow[\mathcal{B}_2]{M} 0$ (/24/, Definicija, str. 10.). Iz sledećeg tvrdjenja se dobija:

7.7. T v r d j e n j e. Ako su (E,C) i (F,K) uredjeni vektorski prostori snabdeveni prirodnim bornologijama i ako je f linearno preslikavanje iz E u F, onda su sledeći uslovi ekvivalentni;

a) Preslikavanje f je sekvencijalno M-neprekidno;

b) Preslikavanje f je ograničeno;

D o k a z. b)$\Rightarrow$a) je očigledno. a)$\Rightarrow$b). Ako f nije ograničeno, onda postoji $x \in C$, tako da $f([-x,x]) \not\subset n[-z,z]_{\sqcup}$, za svako $z \in K$ i svaki prirodan broj n. To znači, postoji niz $x_n \in [-x,x]$, tako da $\frac{1}{n}x_n \in \frac{1}{n}[-x,x]$, dakle, $\frac{1}{n}x_n \xrightarrow[n\mathcal{B}_\omega]{M} 0$, a $f(\frac{1}{n}x_n) = \frac{1}{n}f(x_n) \not\xrightarrow{M} 0$. Zaista, ako $\frac{1}{n}f(x_n) \xrightarrow{M} 0$, onda postoji $z' \in K$ i pozitivan opadajući nula niz (ε_n) realnih brojeva, tako da $f(x_n) \in n\varepsilon_n[-z',z'] \subseteq n[-z,z]$, gde je $z = \varepsilon_1 z'$.

Ako je $(E,C,\mathcal{B})$ kompletna konveksna bornologija, onda ona ima bazu ograničenih podskupova od Banahovih diskova. Ako je pri tome i telesna, onda ima bazu ograničenih podskupova od konveksnih telesnih podskupova. Interesantno je znati, da li onda ima bazu ograničenih podskupova od telesnih kompletirajućih diskova, odnosno, od telesnih Banahovih diskova. Ako je (E,C) Risov prostor, onda se iz (/7/, Lema i Tvrdjenje 1.) zna, da je odgovor potvrdan. Mi pretpostavljamo da je (E,C) uredjen vektorski prostor generisan konusom C, koji poseduje osobinu Risove rastavljivosti, odnosno, za svako $x,y \in C: [0,x] + [0,y] = [0,x+y]$. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi, da je odgovor potvrdan i pod navedenim uslovima, za vektorski prostor (E,C).

7.8. T v r d j e n j e. Neka je (E,C) uredjen vektorski prostor generisan konusom C i neka (E,C) poseduje osobinu Risove rastavljivosti. Ako je (E,C) snabdeven jednom kompletnom konveksnom telesnom bornologijom $\mathcal{B}$, onda $\mathcal{B}$ ima bazu od telesnih kompletirajućih diskova.

D o k a z. Neka je A telesan ograničeni disk prostora $(E,C,\mathcal{B})$. $\mathcal{V}$A je skup suma svih redova oblika: $\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k x_k$, gde $x_k \in A$

svakoj topološkoj vektorskoj grupi $(E,\mathcal{T})$ pridružuju topološke vektorske grupe $\mathcal{T}_D, \mathcal{T}_F$ i $\mathcal{T}_S$, tako se svakoj konveksnoj bornologiji $\mathcal{B}$ pridružuju konveksne bornologije $\mathcal{B}_D, \mathcal{B}_F$ i $\mathcal{B}_S$. Naime, ako je B apsolutno konveksan podskup koji pripada bazi ograničenih podskupova bornologije $\mathcal{B}$, onda se njemu pridružuju sledeći podskupovi: $B\cap C - B\cap C$, $(B+C)\cap(B-C) = F(B) = [B]$, $S(B) = \bigcup\{[-b,b] : b\in B\cap C\}$. Zbog toga definišemo:

7.10. **Definicija.** Bornološki prostor $(E,C,\mathcal{B})$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti (uredjeno-konveksan, telesan), ako je $\mathcal{B}=\mathcal{B}_D$ ($\mathcal{B}=\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}_S$).

U sledećim tvrdjenjima najpre dokazujemo, da su $\mathcal{B}_D, \mathcal{B}_F$ i $\mathcal{B}_S$ takodje konveksne bornologije na uredjenom vektorskom prostoru (E,C), ako je $\mathcal{B}$ jedna konveksna bornologija.

7.11. **Tvrdjenje.** Ako je $\mathcal{B}$ konveksna bornologija na uredjenom vektorskom prostoru (E,C), onda su $\mathcal{B}_D, \mathcal{B}_F$ i $\mathcal{B}_S$ takodje konveksne bornologije, koje za bazu ograničenih podskupova imaju podskupove oblika: $B\cap C - B\cap C$, $F(B)$ i $S(B)$, gde B opisuje bazu ograničenih podskupova bornologije $\mathcal{B}$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati, da je a) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}}(B\cap C - B\cap C) = E$, b) Ako B i $B'\in\mathcal{B}_D$, onda postoji $A\in\mathcal{B}_D$ tako da $B + B' \subseteq A$, c) Ako $B\in\mathcal{B}_D$, onda $\lambda B\in\mathcal{B}_D$ za svako $\lambda\in R$, d) Skupovi familije $\mathcal{B}_D$ su uravnoteženi i konveksni. Zaista, ako $x\in E$, onda je $x = c_1 - c_2$, gde $c_1, c_2 \in C$. Ali za c_1, c_2 postoje apsolutno konveksni podskupovi $B_1, B_2\in\mathcal{B}$, tako da $c_1 - c_2 \in B_1\cap C - B_2\cap C \subseteq \Gamma(B_1\cup B_2)\cap C - \Gamma(B_1\cup B_2)\cap C \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}}(B\cap C - B\cap C)$. Ako su $B\cap C - B\cap C$ i $B'\cap C - B'\cap C\in\mathcal{B}_D$ onda postoji $A\cap C - A\cap C\in\mathcal{B}_D$ tako da je $B\cap C - B\cap C + B'\cap C - B'\cap C \subseteq A\cap C - A\cap C$. To je tačno, jer za B i $B'\in\mathcal{B}$, postoji $A\in\mathcal{B}$, tako da $B + B' \subseteq A$. c) je očigledno, jer je $\lambda(B\cap C - B\cap C) = (\lambda B)\cap C - (\lambda B)\cap C$. d) sledi iz činjenice da $B\cap C - B\cap C \in \mathcal{B}_D$, ako i samo ako $\Gamma(B\cap C) = D(B)\in\mathcal{B}_D$. Slično dokazujemo, da su $\mathcal{B}_F$ i $\mathcal{B}_S$ takodje konveksne bornologije.

Iz poslednjeg tvrdjenja se dobija, da je $(E,C,\mathcal{B})$ bornološki prostor sa osobinom otvorene rastavljivosti, ako i samo ako za svaki ograničeni podskup A postoji ograničen podskup B, tako da je $A\subseteq B\cap C - B\cap C$. Bornološki prostor $(E,C,\mathcal{B})$ je uredjeno-konveksan, ako i samo ako za svaki ograničen podskup A, sledi da je i $[A] = (A+C)\cap(A-C)$ ograničen podskup. Kao kod TVG, tako se i kod bornoloških prostora, bornologijama $\mathfrak{B}_D$ i $\mathfrak{B}_F$ pridružuju bornologije $\mathfrak{B}_{DF}$ i $\mathfrak{B}_{FD}$. Iz sledećeg tvrdjenja sledi:

7.12. T v r d j e n j e. Za svaki bornološki prostor $(E,C,\mathfrak{B})$, imamo da je:

a) $\mathfrak{B}_D \leq \mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}_F$; a') $\mathfrak{B}_D \leq \mathfrak{B}_S \leq \mathfrak{B}_F$;

b) $\mathfrak{B}_{DF} = \mathfrak{B}_S = \mathfrak{B}_{FD}$;

D o k a z: Ako $B\in\mathfrak{B}$, onda je očigledno da $B\cap C - B\cap C\in\mathfrak{B}$, odnosno, da je $B \subseteq (B+C)\cap(B-C)$, što znači da je $\mathfrak{B}_D\leq\mathfrak{B}\leq\mathfrak{B}_F$. a') je tačno, jer je $A\cap C - A\cap C \subseteq S(A\cap C) - S(A\cap C)\in\mathfrak{B}_S$ i $S(A)\subseteq F(A)$, za svako $A\in\mathfrak{B}$. Da bi dokazali b), dokažimo najpre činjenicu da je konveksna bornologija $\mathfrak{B}$ telesna, ako i samo ako je uredjeno-konveksna sa osobinom otvorene rastavljivosti. Zaista, ako $B\in\mathfrak{B}$, onda postoji $A\in\mathfrak{B}$, tako da je $B\subseteq S(A) = S(A\cap C)$. To znači da je $A\cap C\in\mathfrak{B}$, jer je $A\cap C\subseteq S(A\cap C)$. Dalje je $A\cap C - A\cap C \subseteq$ $\subseteq (A\cap C - A\cap C)\cap C - (A\cap C - A\cap C)\cap C$, što znači da za $B\in\mathfrak{B}$, postoji $A'\in\mathfrak{B}$, tako da je $A\subseteq A'\cap C - A'\cap C$. U našem slučaju je $A' =$ $= A\cap C - A\cap C$. Da je $\mathfrak{B}$ uredjeno-konveksna bornologija, sledi iz činjenice da je $S(A\cap C) = F(A\cap C)$, za svaki ograničeni podskup $A\in\mathfrak{B}$. Obrnuto sledi iz a), jer je $\mathfrak{B}\leq\mathfrak{B}_S\leq\mathfrak{B}$, odnosno $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_S$. Iz a') se dobija, da je $\mathfrak{B}_{DF}\leq\mathfrak{B}_S\leq\mathfrak{B}_{FD}$. Treba još dokazati da je $\mathfrak{B}_{FD}\leq\mathfrak{B}_{DF}$, odnosno, da je $F(A)\cap C - F(A)\cap C\subseteq F(A\cap C - A\cap C)$, za svaki ograničen disk $A\in\mathfrak{B}$. Ako $a\in F(A)\cap C - F(A)\cap C$, onda je $a = x - y$, gde $x, y\in F(A)\cap C$, odnosno, postoje $u, v\in A\cap C$, tako da $x\in[0,u]$ i $y\in[0,v]$. Dalje je $u, -v\in A\cap C - A\cap C$ i onda $a = x - y\in[-v, u]\subseteq$ $\subseteq F(A\cap C - A\cap C)$.

Slično kao za UTVG u 1, 2 i 3, tako i za konveksne bornologije sledi:

7.13. T v r d j e n j e. Bornologija $\mathfrak{B}_D$ je najslabija od svih konveksnih bornologija, koje su finije od $\mathfrak{B}$ i koje su sa osobinom otvorene rastavljivosti, a bornologija $\mathfrak{B}_F$ je najjača od svih bornologija, koje su slabije od $\mathfrak{B}$ i koje su uredjeno-konveksne.

7.14. T v r d j e n j e. Ako je $(E,C,\mathfrak{B})$ bornološki prostor i ako je f ograničeno pozitivno linearno preslikavanje u proizvoljni prostor $(F,K,\mathcal{B}')$, onda je f $\mathcal{B}_D$-$\mathcal{B}'_D$ ($\mathcal{B}_S$-$\mathcal{B}'_S$, $\mathcal{B}_F$-$\mathcal{B}'_F$) ograničeno.

D o k a z. Ako $A\in\mathcal{B}$, onda je $f(A\cap C - A\cap C) = f(A\cap C) - f(A\cap C) \subseteq f(A)\cap C - f(A)\cap C \subseteq f(A)\cap K - f(A)\cap K \in \mathcal{B}'_D$, $f((A+C)\cap(A-C)) \subseteq (f(A) + K)\cap(f(A) - K) = F(f(A)) \in \mathcal{B}'_F$ i $f(\bigcup\{[-x,x] : x\in A\cap C\}) = \bigcup\{f([-x,x]) : x\in A\cap C\} \subseteq S(f(A))$.

7.15. T v r d j e n j e. Podskup $A\subseteq C$ je $\mathcal{B}$-ograničen, ako i samo ako je $\mathcal{B}_D$-ograničen ($A\subseteq A-A = A\cap C - A\cap C\in\mathcal{B}_D$, odnosno, $A\in\mathcal{B}_D$).

7.16. T v r d j e n j e. Ako je x_n pozitivan niz u bornološkom prostoru $(E,C,\mathcal{B})$, onda $x_n \xrightarrow[n\mathcal{B}]{M} 0$, ako i samo ako $x_n \xrightarrow[n\mathcal{B}_D]{M} 0$.

D o k a z. Ako $x_n \xrightarrow[n\mathcal{B}_D]{M} 0$, onda očigledno $x_n \xrightarrow[n\mathcal{B}]{M} 0$. Obrnuto, ako $x_n \xrightarrow[n\mathcal{B}]{M} 0$, onda postoji ograničen apsolutno konveksan podskup $B\in\mathcal{B}$ i opadajući nula niz ε_n pozitivnih brojeva, tako da $\frac{1}{\varepsilon_n}x_n\in B$. S obzirom da je $x_n\in C$, za svako $n\in N$, onda je $\frac{1}{\varepsilon_n}x_n\in B\cap C\subseteq B\cap C - B\cap C$, što znači da $x_n\in\varepsilon_n(B\cap C - B\cap C)$, odnosno, da $x_n \xrightarrow[n\mathcal{B}_D]{M} 0$.

Iz /4/,a) se zna, da se svakoj konveksnoj bornologiji $\mathcal{B}$ na vektorskom prostoru E, pridružuje lokalno konvensna topologija $T\mathcal{B}$, koja za bazu okolina nule ima sve apsolutno konveksne podskupove od E, koji gutaju $\mathcal{B}$-ograničene podskupove. Ako je prostor $(E,T\mathcal{B})$ razdvojen, onda je bornologija $\mathcal{B}$ t-razdvojena. Ako je $\mathcal{B}$ konveksna bornologija na E, onda imamo i lokalno konveksne topologije: $T\mathcal{B}_D$, $T\mathcal{B}_F$, i $T\mathcal{B}_S$. Iz sledećih tvrdjenja se vidi, kakvi su prostori $(E,C,T\mathcal{B}_D)$ i $(E,C,T\mathcal{B}_S)$, ako je konveksna bornologija, na uredjenom vektorskom prostoru (E,C).

7.17. T v r d j e n j e. Ako je $\mathcal{B}$ konveksna bornologija na uredjenom vektorskom prostoru (E,C), onda je $(E,C,T\mathcal{B}_D)$ ($(E,C,T\mathcal{B}_S)$) LKP sa osobinom otvorene rastavljivosti (telesan).

D o k a z. Bornologija $\mathcal{B}_D$ je sa osobinom otvorene rastavljivosti, odnosno, za svaki $\mathcal{B}_D$-ograničen podskup A, postoji $\mathcal{B}_D$-ograničen podskup B, tako da je $A\subseteq B\cap C - B\cap C$. Ako je V apsolutno konveksna $T\mathcal{B}_D$-okolina nule, onda postoji $\lambda>0$, tako da je $B\subseteq\lambda V$, odnosno, $B\cap C - B\cap C\subseteq\lambda(V\cap C - V\cap C)$, dakle, $B\subseteq\lambda(V\cap C - V\cap C)$, što znači da je $V\cap C - V\cap C$ $T\mathcal{B}_D$-okolina nule. S obzirom da bornologija $\mathcal{B}_s$ ima bazu ograničenih podskupova od telesnih diskova, onda svaka $T\mathcal{B}_s$-okolina nule sadrži telesnu $T\mathcal{B}_s$-okolinu nule. Zaista, ako je U $T\mathcal{B}_s$-okolina nule, onda je $skU \neq \emptyset$, i skU guta $\mathcal{B}_s$-ograničene podskupove, dakle, $skU \subseteq U$ je $T\mathcal{B}_s$-okolina nule.

7.18. P o s l e d i c a. Ako je $\mathcal{B}$ t-razdvojena konveksna bornologija na uredjenom vektorskom prostoru (E,C), koja je sa osobinom otvorene rastavljivosti (telesna), onda je bornološki dual $E^{\times} \subset E^{*}$ uredjeno-konveksan (telesan) potprostor.

D o k a z. S obzirom da je $\mathcal{B}$ t-razdvojena bornologija, onda je prema /4/,a) $(E,\mathcal{B})^{\times} = (E,T\mathcal{B})'$, odnosno, $(E,T\mathcal{B})' = E^{\times}$ je uredjeno-konveksan (telesan) potprostor od E ,jer je $(E,C,T\mathcal{B})$ LKP sa osobinom otvorene rastavljivosti (telesan).

Dakle, ako je $\mathcal{B}$ proizvoljna telesna konveksna bornologija na uredjenom vektorskom prostoru (E,C), onda je njen bornološki dual telesan potprostor od E^b, i zato kažemo da je $\mathcal{B}$ saglasna telesna bornologija u odnosu na dualnost $\langle E,E^{\times}\rangle$. Za konveksne bornologije, pitanje karakterizacije svih saglasnih bornologija u odnosu na dualnost $\langle E,E^{\times}\rangle$, je još uvek otvoreno (/24/, str,159.). Iz sledećeg tvrdjenja se vidi, kada na uredjenom vektorskom prostoru (E,C), postoji konveksna telesna bornologija saglasna sa dualnošću $\langle E,E^{\times}\rangle$, slično kao za konveksne bornologije u /24/.

7.19. T v r d j e n j e. Neka je $\langle E,E^{\times}\rangle$ razdvojena dualnost, gde je $E^{\times}$ telesan potprostor od E^b. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) Na (E,C) postoji telesna konveksna bornologija $\mathcal{B}$, koja je saglasna u odnosu na dualnost $\langle E,E^{\times}\rangle$;

b) LKP $(E,C,\tau(E,E^{\times}))$ je telesan i bornološki;

c) Pridružena slaba bornologija u odnosu na dualnost $\langle E,E^{\times}\rangle$ je saglasna i telesna;

Ako je $(E,C,\mathcal{T})$ bačvast Risov prostor, koji nije bornološki (takav postoji), onda očigledno $\tau(E,E')$ nije bornološki telesan prostor, i na osnovu prethodnog tvrdjenja na (E,C) ne postoji saglasna telesna bornologija u odnosu na dualnost $\langle E, E' \rangle$, iako je E' telesan potprostor od E^b.

8. NEKI REZULTATI O LKP I LKG

U ovom delu navodimo neke rezultate, koje smo dobili proučavajući osnovne osobine lokalno konveksnih grupa, kao i razne tipove polu-refleksivnosti lokalno-konveksnih prostora. Najpre dajemo jednostavniji dokaz tvrdjenja 4.4.2. iz /28/.

8.1. T v r d j e n j e. Ako je A apsolutno konveksan zatvoren skup u LKG (E,t), tada je $\overline{A}^{loct} = \bigcap_{\lambda>1} \lambda A$.

D o k a z. Na osnovu (/14/, vežbanje F, str.125.) $\bigcap_{\lambda>1} \lambda A$ je zatvaranje skupa A u najjačoj lokalno konveksnoj topologiji $\tau(E,E^*)$ na E, dakle, $\overline{A}^{loct} \supseteq \bigcap_{\lambda>1} \lambda A = \overline{A}^{\tau(E,E^*)}$. Dokažimo obrnutu inkluziju. Ako $x \notin \overline{A}^{\tau(E,E^*)}$, onda postoji gutajući apsolutno konveksan podskup $V \subseteq E$, tako da $x \notin A + V$, odnosno, $x \notin A = \overline{A}^t$. To dalje znači da postoji t-okolina nule U, tako da $x \notin A + U$. Prema tvrdjenju 2.4.1, b) iz /28/, sledi da je $V \cup U$ loct-okolina nule, a s obzirom da i $x \notin A + U \cup V$, onda $x \notin \overline{A}^{loct}$, čime je dokaz završen.

Za dokazivanje naslednih osobina u kategoriji LKG ističemo sledeću posledicu prethodnog tvrdjenja.

8.2. P o s l e d i c a. Neka su za LKG (E,t) i potprostor F dati uslovi:

a) $\overline{F}^t = F$; a′) $\overline{F}^t = E$;

b) $\overline{F}^{loct} = F$; b′) $\overline{F}^{loct} = E$;

Onda je a)$\Leftrightarrow$b), za svaki potprostor F od E i a′)$\Leftrightarrow$ b′), ako je F hiper-ravan.

D o k a z. S obzirom da je $\overline{F}^{loct} \supseteq \overline{F}^t \supseteq F$, onda je očigledno da b)$\Rightarrow$a). S druge strane, a)$\Rightarrow$b) na osnovu prethodnog tvrdjenja. Jasno je da a′)$\Rightarrow$b′), jer je uvek $E \supseteq \overline{F}^{loct} \supseteq \overline{F}^t$. Ako iz uslova $E = \overline{F}^{loct}$ ne sledi $E = \overline{F}^t$, onda je $\overline{F}^t = F$, jer je F hiper-ravan. To znači da je prema a)$\Leftrightarrow$b), $\overline{F}^{loct} = F$.

Potprostor F lokalno konveksnog prostora $(E,\mathcal{T})$ je skoro zatvoren, ako je $F \cap A$ zatvoren, za svaki apsolutno konveksan zatvoren i $\mathcal{T}$-ograničen podskup A. Ako za svaki apsolutno konveksan zatvoren $\mathcal{T}$-ograničen podskup A, postoji apsolutno konveksan zatvoren $\mathcal{T}$-ograničen podskup B, tako da je $A \subsetneq \overline{B \cap F}^{\mathcal{T}}$, onda je F ultra-gust. Iz /35/,a) se zna da je hiper ravan F lokalno konveksnog prostora $(E,\mathcal{T})$ ili skoro zatvorena ili ultra-gusta. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi da je to tačno i za LKG.

8.3. T v r d j e n j e. Ako je (E,t) LKG a F hiper-ravan u E, onda je F skoro zatvorena ili ultra-gusta.

D o k a z. Neka je A apsolutno konveksan zatvoren t-ograničen podskup. Ako $A \cap F$ nije t-zatvoren, onda $A \cap F$ nije loct-zatvoren, dakle, prema (/35/,a), Lema 1.) postoji apsolutno konveksan zatvoren i loct-ograničen podskup B, tako da je $A \subsetneq \overline{F \cap B}^{loct} \subsetneq \overline{\overline{B \cap F}^{t}}^{loct} = \bigcap_{\lambda > 1} \lambda \overline{B \cap F}^{t} \subseteq \lambda \overline{B \cap F}^{t} = \overline{(\lambda B) \cap F}^{t}$. S obzirom da je λB t-zatvoren, jer je loct-zatvoren, a na osnovu (/35/, a), Lema 1.) λB je i t-ograničen, sledi da je dokaz tvrdjenja završen.

U (/28/, str.65.) definisana je klasa $\ast$-bornoloških LKG. Naime, LKG (E,t) je $\ast$-bornološka, ako je svaki apsolutno konveksan bornivoran skup T, takav da je L(T) otvoren (linearni omotač od T), t-okolina nule. U istom radu je ostavljeno kao otvoreno pitanje, da li je konačno-kodimenzioni potprostor $\ast$-bornološke LKG, $\ast$-bornološka. Iz sledećeg tvrdjenja se vidi da je odgovor potvrdan.

8.4. T v r d j e n j e. Ako je (E,t) $\ast$-bornološka LKG a F potprostor konačne kodimenzije, onda je F u indukovanoj topologiji, takodje $\ast$-bornološka LKG.

D o k a z. Ako LKG (E,t) pridružimo LKG $(E,\tilde{t})$, koja za bazu okolina nule ima sve apsolutno konveksne t-bornivorne podskupove, onda je ona jedna bornološka LKG (/28/, str. 60.). Kažemo da je $(E,\tilde{t})$ pridružena bornološka LKG, grupi (E, t). Ako sa t_F označimo njenu indukovanu topologiju na F, onda je prema (/28/, Tvrdjenje 3.2.7.) LKG (F,t_F) bornološka. Slično kao za LKP (Tvrdjenje 5.9.) može se dokazati da je $\tilde{t}_F = \widetilde{t_F}$. Prema (/28/, Tvrdjenje 3.3.4.) LKG (E,t) je $\ast$-bornološka, ako i samo ako je $loct = \mathcal{T}(E,E')$ i $E' = \overline{E'}$ ($\overline{E'}$-prostor lokalno ograničenih linearnih formi). S obzirom da je $(E,\widetilde{t})' = (E,\mathrm{loc}\widetilde{t})' = \overline{E'}$ i $(E,t)' = (E,\mathrm{loc}t)' = E'$, onda je $\mathrm{loc}t = \mathrm{loc}\widetilde{t}$. Na osnovu činjenice da je konačno kodimenzioni potprostor bornološkog LKP, bornološki LKP, sledi da je $\mathrm{loc}t_F = (\mathrm{loc}t)_F = \mathcal{T}(F,F')$, odnosno, $\mathrm{loc}\widetilde{t}_F = (\mathrm{loc}\widetilde{t})_F = \mathcal{T}(F,\overline{F'})$. Iz $\mathrm{loc}t = \mathrm{loc}\widetilde{t}$, sledi $F' = \overline{F'}$, tj. $(\mathrm{loc}t)_F = \mathcal{T}(F,F')$ i $F' = \overline{F'}$, dakle, LKG (F,t_F) je $*$ -bornološka.

Neka je (E,t) LKG. Kažemo da je bačva LKG (E,t), jedna b-bačva, ako seče sve ograničene podskupove po t-okolini nule u indukovanoj topologiji. LKG (E,t) je b-bačvasta, ako je svaka b-bačva, t-okolina nule. Sledećim tvrdjenjem dajemo karakterizaciju b-bačvastih LKG, slično kao kvazi-bačvastih u /28/.

8.5. T v r d j e n j e. Za svaku LKG (E,t), sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) (E,t) je b-bačvasta LKG;

b) Svaka otvorena podgrupa je b-bačvasta;

c) Postoji otvorena podgrupa, koja je b-bačvasta;

d) Gutajuća b-bačva je t-okolina nule;

D o k a z. a)$\Rightarrow$b): Ako je F otvorena podgrupa b-bačvaste LKG (E,t), onda je F i zatvorena podgrupa. Za svaku b-bačvu T u podgrupi F, imamo da je $L(T)$ (linearni omotač od T) otvoren potprostor u F, odnosno, $L(T)$ je otvoren potprostor u E i T je onda zatvoren apsolutno konveksan podskup od (E,t). S obzirom da F sadrži povezanu komponentu nule, onda je T b-bačva u LKG (E,t), dakle, t-okolina nule. To znači da je $T = T\cap F$ okolina nule u indukovanoj topologiji. b)$\Rightarrow$c) je očigledno c)$\Rightarrow$d): Neka je T gutajuća b-bačva u LKG (E,t) i neka je F otvorena b-bačvasta podgrupa od (E,t). Podgrupa F je onda i zatvorena i $T\cap F$ je tada zatvoren apsolutno konveksan podskup od F, čiji je linearni omotač $L(T\cap F) = F$, otvoren podskup od F. Očigledno, onda je $T\cap F$ b-bačva u $(F,t|F)$, odnosno, $T\cap F$ je $t|F$-okolina nule. Dakle, postoji t-okolina nule $U\subsetneq E$, tako da $T\supseteq T\cap F\supseteq U\cap F$, odnosno, T je t-okolina nule, jer su U i F t-okoline nule (F je otvorena podgrupa). d)$\Rightarrow$a): Ako je T b-bačva u LKG (E,t), onda je $L(T)$ otvoren potprostor od

(E,t), odnosno, ima komplement M. Dakle, $E(t) = L(T) \oplus M$ i tada je $T + M = p^{-1}(p(T))$. Iz poslednje jednakosti sledi da je $T + M$ zatvoren podskup od (E,t), jer je T zatvoren u potprostoru $L(T)$ i $p(T) = T$. S obzirom da je $L(T + M) = L(T) + L(M) = L(T) + M = E$, onda je $T + M$ bačva u (E,t). Ali $T + M$ je i b-bačva, jer je $T + M \supseteq T$. To znači da je $T + M$ t-okolina nule, odnosno, da je i $T = (T + M) \cap L(T)$, t-okolina nule, jer je $L(T)$, t-okolina nule.

Za prostor $(E,loct)$ se dobija slično kao u /28/, za kvazi-bačvaste LKG.

8.6. T v r d j e n j e. Ako je (E,t) b-bačvasta LKG, onda je $(E,loct)$ b-bačvast LKP.

D o k a z. Zaista, ako je T b-bačva u prostoru $(E, loct)$, onda T seče sve loct-ograničene, dakle, i sve t-ograničene podskupove, po loct-okolini nule u indukovanoj topologiji, odnosno, T seče sve t-ograničene podskupove po t-okolini nule. S obzirom da je (E,t) b-bačvasta LKG, onda je T jedna t-okolina nule. S druge strane, T je bornivorna bačva u prostoru $(E,loct)$, dakle, T je gutajuća b-bačva u (E,t), odnosno, T je gutajuća apsolutno konveksna t-okolina nule. To znači da je T loct-okolina nule i dokaz tvrdjenja je završen.

Ne znamo da li je obrat prethodnog tvrdjenja tačan, ali uz dodatni uslov sledi:

8.7. T v r d j e n j e. Ako je $(E,loct)$ b-bačvast LKP a L povezana otvorena komponenta nule, konačne kodimenzije u E, onda je (E,t) b-bačvasta LKG.

D o k a z. Slično kao (Tvrdjenje 2.2.2. b) u /28/, str.53.).

Sledećim tvrdjenjem dajemo karakterizaciju b-bačvastih LKG slično kao b-bačvastih LKP u /22/, b).

8.8. T v r d j e n j e. Za svaku LKG, sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) (E,t) je b-bačvasta LKG;

b) Podskup $H \subseteq E'$ je t-ekvineprekidan, ako i samo ako je H_A (suženje elemenata podskupa H na svaki ograničeni podskup) t-ekvineprekidan podskup;

U nastavku ovog dela rada navodimo neke rezultate o LKP. Ovaj deo je nastavak naših razmatranja nekih klasa LKP iz /27/. U (/27/, str.26.) definisali smo klasu C-refleksivnih LKP i naveli neke njene osobine. Tako na primer LKP $(E, \mathcal{T})$ je C-refleksivan, ako i samo ako je izomorfan (algebarski i topološki) sa F'_c (F'_c -topološki dual F' nekog LKP $(F,\mathcal{P})$ snabdeven topologijom uniformne konvergencije na familiji $\mathcal{P}$--kompaktnih diskova).

Tvrdjenjima koja slede nadovezujemo se na /27/ u ispitivanju osobina klase C-refleksivnih LKP.

8.9. T v r d j e n j e. Ako je f neprekidno linearno preslikavanje iz LKP $(E,\mathcal{T})$ u LKP $(F,\mathcal{P})$, onda je konjugovano preslikavanje f' neprekidno iz LKP F'_c u LKP E'_c.

D o k a z. Za svaki $\mathcal{T}$-kompaktan disk $K \subsetneq E$ imamo da je $f'^{-1}(K^o) = (f(K))^{\bullet}$, gde su $\circ$ i $\bullet$ polare u odnosu na dualnosti $\langle E,E' \rangle$ i $\langle F,F' \rangle$.

8.10. T v r d j e n j e. Ako je $(E,\mathcal{T})$ C-refleksivan LKP a f skoro-otvoreno i neprekidno linearno preslikavanje u proizvoljni LKP $(F,\mathcal{P})$, onda je prostor $(F,\mathcal{P})$ C-refleksivan.

D o k a z. Ako je K F'_c-kompaktan disk, onda je prema prethodnom tvrdjenju $f'(K)$ E'_c-kompaktan disk, odnosno, $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup. To znači da postoji $\mathcal{T}$-okolina nule V, tako da je $K \subseteq f'^{-1}(f'(K)) \subseteq f'^{-1}(V^o) = (f(V))^{\bullet} = (\overline{f(V)})^{\bullet}$. S obzirom da je f neprekidno skoro-otvoreno preslikavanje, to je $(\overline{f(V)})^{\bullet}$ $\mathcal{P}$-ekvineprekidan podskup i dokaz tvrdjenja je završen.

8.11. P o s l e d i c a. Kompletiranje $\hat{E}$ C-refleksivnog LKP $(E,\mathcal{T})$ je C-refleksivan LKP.

8.12. P o s l e d i c a. Ako je $(F,\mathcal{T})$ C-refleksivan gust potprostor u LKP $(E,\mathcal{P})$, onda je $(E,\mathcal{P})$ C-refleksivan LKP.

8.13. P o s l e d i c a. Ako je $\{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), \alpha \in I\}$ familija C-refleksivnih LKP i $f_\alpha : E_\alpha \to E$ familija linearnih preslikavanja u proizvoljni vektorski prostor E, koji je generisan sa $\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(E_\alpha)$, onda je E snabdeveno finalnom topologijom, C--refleksivan LKP.

D o k a z. Preslikavanja f_α su $\mathcal{T}_\alpha$-$\mathcal{T}$ neprekidna i skoro-otvorena, jer je $f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(U_\alpha)}) \supseteq \overline{U}_\alpha \supseteq U_\alpha$.

8.14. P o s l e d i c a. Induktivna granica i direktan zbir proizvoljne familije C-reflektivnih prostora je C--refleksivan prostor.

8.15. P o s l e d i c a. Kvocijent prostor C-refleksivnog prostora je C-refleksivan prostor.

8.16. T v r d j e n j e. Ako je $\{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), \alpha\in I\}$ proizvoljna familija C-refleksivnih LKP, onda je i proizvod $\prod_{\alpha\in I}(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ C-refleksivan LKP.

D o k a z. Ako je $(E,\mathcal{T}) = \prod_{\alpha\in I}(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$, onda je $E_c' = \bigoplus_{\alpha\in I}(E_\alpha)_c'$. E_c'-kompaktan disk K je onda sadržan u konačnom zbiru $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i$, gde su K_i $(E_{\alpha_i})_c'$-kompaktni diskovi. S obzirom da su $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ C-refleksivni LKP, za svako $\alpha\in I$, onda je $K \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} K_i$ $\mathcal{T}$--ekvineprekidan podskup, odnosno, $(E,\mathcal{T}) = \prod_{\alpha\in I}(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ je C-refleksivan LKP.

U /4/, b) je definisana klasa b-refleksivnih LKP. Naime, LKP $(E,\mathcal{T})$ je b-refleksivan, ako je $(TE')' = E$ (algebarska jednakost), gde je TE' lokalno konveksna topologija u topološkom dualu E', koja za bazu okolina nule ima ekvivorne diskove od E'(diskove koji gutaju $\mathcal{T}$-ekvineprekidne podskupove). Iz /4/,b) se zna da je LKP $(E,\mathcal{T})$ hipo-Makijev, ako je $\widetilde{\widetilde{E}}_\sigma' = TE'$ ($\widetilde{\widetilde{E}}_\sigma'$ je ultra-bornološki prostor pridružen prostoru E_σ'). Iz sledećeg tvrdjenja se vidi da je klasa C-refleksivnih prostora sadržana u klasi hipo-Makijevih prostora.

8.17. T v r d j e n j e. Ako je $(E,\mathcal{T})$ C-refleksivan LKP, onda je on hipo-Makijev.

D o k a z. Lako proveravamo da je za svaki LKP $(E,\mathcal{T})$, $\widetilde{\widetilde{E}}_\sigma' = \widetilde{\widetilde{E}}_\tau' = \widetilde{\widetilde{E}}_\beta'$ $(= \widetilde{\widetilde{E}}_c')$. S obzirom da je svaki $\mathcal{T}$-ekvineprekidan disk E_σ', odnosno, E_p'-relativno kompaktan, onda je on i E_c'-relativno kompaktan. S druge strane, E_c'-kompaktan disk je $\mathcal{T}$--ekvineprekidan, jer je $(E,\mathcal{T})$ C-refleksivan LKP, a to znači da je $\widetilde{\widetilde{E}}_c' = TE'$, odnosno, prostor $(E,\mathcal{T})$ je hipo-Makijev.

Primerom koji sledi, dokazujemo da obrat prethodnog tvrdjenja nije tačan.

8.18. P r i m e r. Ako je $(E,\mathcal{T})$ Banahov prostor beskonačne dimenzije, onda je slab dual E'_σ hipo-Makijev prostor, a nije C-refleksivan.

D o k a z. Da E'_σ nije C-refleksivan, sledi iz (/27/, Primedba 3,21.). S obzirom da prostori E_σ , $(E,\mathcal{T})$ i E_τ imaju isti produžen ultra-bornološki prostor, onda je $E_\tau = \widetilde{\widetilde{E}}_\tau = \widetilde{\widetilde{(E'_\tau)'_\tau}} = T(E'_\tau)'$, jer su E'_τ -ekvineprekidni podskupovi upravo slabo kompaktni diskovi prostora $(E,\mathcal{T})$. Iz jednakosti $E_\tau = T(E'_\tau)'$ sledi da je prostor E'_τ hipo-Makijev, odnosno, da je prostor E'_σ hipo-Makijev, jer osobina "biti hipo-Makijev" za - visi samo od dualnog para.

Nastavljajući ovaj deo, navodimo još neke rezultate, koje smo dobili razmatrajući b-refleksivne LKP i lokalno konveksnu topologiju TE'.

8.19. T v r d j e n j e. LKP $(E,\mathcal{T})$ je ultra-bornološki, ako i samo ako je $\mathcal{T} = TF'$, gde je F' topološki dual nekog LKP $(F,\mathcal{P})$.

D o k a z. Iz /4/,b) se zna da je TF' ultra-bornološki LKP za svaki LKP $(F,\mathcal{P})$. Obrnuto, ako je $(E,\mathcal{T})$ ultra-bornološki LKP, onda je svaki disk koji guta $\mathcal{T}$-kompaktne diskove $\mathcal{T}$-okolina nule. S obzirom da su $\mathcal{T}$-kompaktni diskovi E'_c-ekvineprekidni, onda za LKP $(F,\mathcal{P})$ uzimamo (E',E'_c) i onda je $\mathcal{T} = T(E'_c)'$, čime je dokaz tvrdjenja završen.

8.20. T v r d j e n j e. Ako su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dve lokalno konveksne topologije na E $(\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2)$, dopustive u odnosu na dualnost $\langle E,E'\rangle$, onda je prostor $(E,\mathcal{T}_2)$ b-refleksivan, ako je $(E,\mathcal{T}_1)$ b-refleksivan.

D o k a z. S obzirom da je $\mathcal{T}_1$-ekvineprekidan podskup, $\mathcal{T}_2$-ekvineprekidan, onda je $T(E,\mathcal{T}_1) \geqslant T(E,\mathcal{T}_2)'$. Ako je zatim $(E, \mathcal{T}_1)$ b-refleksivan, onda je i $(E,\mathcal{T}_2)$ očigledno b-refleksivan.

8.21. T v r d j e n j e. Ako je $\{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), \alpha\in I\}$ familija b-refleksivnih LKP, onda je i $(E,\mathcal{T}) = \prod_{\alpha\in I}(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ b-refleksivan LKP.

D o k a z. Za topološki dual $E' = \bigoplus_{\alpha\in I} E'_\alpha$ neposrednim proveravanjem, sledi da je $TE' = \bigoplus_{\alpha\in I} TE'_\alpha$, odnosno, $(TE')' = (\bigoplus_{\alpha\in I} TE'_\alpha)' = \prod_{\alpha\in I}(TE'_\alpha)' = \prod_{\alpha\in I} E_\alpha = E$, što znači da je prostor $(E,\mathcal{T})$ b-refleksivan.

Medjutim, za direktan zbir, kvocijent prostor i gust potprostor se dobija:

8.22. T v r d j e n j e. Ako je $\{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), \alpha\in I\}$ familija Makijevih b-refleksivnih LKP, onda $\bigoplus_{\alpha\in I}(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) = (E,\mathcal{T})$, ne mora biti b-refleksivan LKP.

D o k a z. S obzirom da je $(E_\alpha, \tau(E_\alpha, E'_\alpha))$ b-refleksivan LKP, za svako $\alpha\in I$, onda je prema (/4/,b) Teorema 3.) prostor $(E'_\alpha, \tau(E'_\alpha, E_\alpha))$ ultra-bornološki. Da bi prostor $(E,\mathcal{T}) = (E, \tau(E,E')) = \bigoplus_{\alpha\in I}(E_\alpha, \tau(E_\alpha, E'_\alpha))$ bio b-refleksivan, dovoljno je i potrebno na osnovu (/4/,b) Teorema 3.) da je $\prod_{\alpha\in I}(E'_\alpha, \tau(E'_\alpha, E_\alpha)) = (E', \tau(E',E))$ ultra-bornološki LKP. Ako uzmemo skup I tako, da je njegov kardinalni broj nedostižan, onda navedena direktna suma b-refleksivnih Makijevih LKP nije b-refleksivna.

8.23. T v r d j e n j e. Kvocijent prostor po zatvorenom prostoru b-refleksivnog Makijevog prostora ne mora biti b-refleksivan.

D o k a z. Neka je $(E,\mathcal{T})$ ultra-bornološki LKP i F Makijev potprostor koji nije ultra-bornološki (takav postoji). Na osnovu (/4/,b),Teorema 3.) prostor E'_τ je b-refleksivan a prostor $F'_\tau = E'_\tau/F^o$ nije b-refleksivan. $F'_\tau \cong E'_\tau/F^o$, na osnovu (/33/, str.172.).

8.24. T v r d j e n j e. Ako je $(E,\mathcal{T})$ b-refleksivan LKP, onda je zatvoren potprostor b-refleksivan, a potprostor koji nije zatvoren, nije b-refleksivan.

D o k a z. LKP $(E,\mathcal{T})$ je b-refleksivan, ako i samo ako je $E'_\tau = TE'$. Dakle, za zatvoren prostor treba dokazati da je $TF' = F'_\tau$. Ali to je tačno, jer je prema (/33/, str.172.), $F'_\tau \cong E'_\tau/F^o$ a $TF' \cong TE'/F^o$, neposredno proveravamo. Zaista, $TF' \leqslant TE'/F^o$, jer je TE'/F^o najjača lokalno konveksna topologija na F', za koju je kanonično preslikavanje $i': E' \to F'$ neprekidno, ako je E' snabdeveno topologijom TE'. $TF' \geq TE'/_{F}o$, jer je TE' najjača lokalno konveksna topologija na F', za koju su ekvineprekidni podskupovi od F' ograničeni i svaki ekvineprekidan podskup od $F' \cong E'/_{F}o$ je sadržan u kanoničnoj slici nekog ekvineprekidnog podskupa od E'. Ako je $\overline{F} = E$, onda je očigledno $TE' = TF'$ i $(TE')' = (TF')' = E \neq F$, dakle, potprostor F nije b-refleksivan. Slično se dobija i za proizvoljni potprostor, koji nije zatvoren, jer je gust u svom zatvaranju.

b-refleksivan LKP je očigledno polu-refleksivan. U /4/,b) se navode uslovi kada je polu-refleksivan LKP b-refleksivan. U /27/ smo definisali klasu σ-p-bačvastih prostora, naime, LKP $(E,\mathcal{T})$ je σ-p-bačvast, ako je E'_p-predkompaktan niz, $\mathcal{T}$-ekvineprekidan. Klasa σ-p-bačvastih prostora sa fundamentalnim nizom ograničenih podskupova, sadrži klasu DF-prostora. Sledeće tvrdjenje je opštije od (/4/,b), Tvrdjenje 14.).

8.25. Tvrdjenje. Ako je $(E,\mathcal{T})$ σ-p-bačvast LKP sa fundamentalnim nizom ograničenih podskupova, onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) E je polu-refleksivan;

b) E je b-refleksivan;

c) E'_{τ} je ultra-bornološki;

Dokaz. Ako dokažemo da je $E'_{\beta} = TE'$, onda je očigledno da a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$c)$\Rightarrow$a). S obzirom da topologija TE' ima za bazu sve ekvivorne diskove od E', onda je $E'_{\beta} \leq TE'$. Da bi dokazali obrnuto, dovoljno je dokazati da je svaki nula niz prostora E'_{β}, TE'-ograničen, jer je prostor E'_{β} bornološki. Zaista, ako je x'_n nula niz u prostoru E'_{β}, onda je x'_n nula niz i u prostoru E'_p, dakle, $\{x'_n\}$ $n \in N$ je E'_p-predkompaktan podskup i na osnovu /27/ $\{x'_n\}$ $n \in N$ je $\mathcal{T}$-ekvineprekidan podskup, odnosno, TE'-ograničen. To znači da je $TE' \leq E'_{\beta}$. Dakle, σ-p-bačvast LKP sa fundamentalnim nizom ograničenih podskupova je polu-refleksivan, ako i samo ako je b-refleksivan.

Pored b-refleksivnih, polu-refleksivnih, p-polu-refleksivnih postoje i β^*-polu-refleksivni prostori, koje smo definisali u (/27/, Definicija 6.9.). Prostor $(E,\mathcal{T})$ je β^*-polu-refleksivan, ako je $(E'_{\beta^*})' = E$ (algebarska jednakost), gde je E'_{β^*} topološki dual E', snabdeven topologijom uniformne konvergencije na familiji jako ograničenih podskupova prostora $(E,\mathcal{T})$. Iz /33/, /11/ i /27/ se zna da je zatvoren potprostor polu-refleksivnog (p-polu-refleksivnog i β^*-polu-refleksivnog) prostora, takodje polu-refleksivan (p-polu-refleksivan i β^*-polu-refleksivan) prostor. Za potprostore koji nisu zatvoreni sledi;

8.26. T v r d j e n j e. Neka je $(E,\mathcal{T})$ Banahov polu-refleksivan prostor ($\mathcal{T}$-je norma topologija). Ako je F potprostor koji nije zatvoren, onda F nije polu-refleksivan (p-polu-refleksivan) prostor.

D o k a z. Neka je najpre $F \neq E$ i $\overline{F}^{\mathcal{T}} = E$. Ako pretpostavimo da je F polu-refleksivan (p-polu-refleksivan) prostor, onda je F sekvencijalno kompletan, dakle, zatvoren potprostor, jer je $(E,\mathcal{T})$ Banahov, i onda je $F = \overline{F}^{\mathcal{T}} = E$, što je suprotno pretpostavci.

Ako je F bilo koji potprostor, koji nije zatvoren, onda je F gust potprostor u zatvaranju $\overline{F}^{\mathcal{T}}$, dakle, F nije polu-refleksivan (p-polu-refleksivan) prostor.

8.27. T v r d j e n j e. Neka je $(E,\mathcal{T})$ polu-refleksivan (DF) prostor. Ako je F konačno-kodimenzioni potprostor, koji nije zatvoren, onda F nije polu-refleksivan prostor.

D o k a z. Kao i u prethodnom tvrdjenju, neka je $F \neq E$ i $\overline{F}^{\mathcal{T}} = E$. Ako pretpostavimo da je F polu-refleksivan prostor, onda je na osnovu poznatog tvrdjenja F kvazi-kompletan (DF) prostor, i prema (/8/, Posledica 2, str.96.) F je onda kompletan, dakle, zatvoren potprostor, što je suprotno pretpostavci. Ako je F bilo koji potprostor konačne kodimenzije, koji nije zatvoren, onda je on gust u svom zatvaranju i dakle, nije polu-refleksivan,

Prirodno je postaviti pitanje, da li je potprostor konačne kodimenzije polu-refleksivnog (p-polu-refleksivnog, β^*-polu-refleksivnog) istog tipa kao i prostor. Iz prethodnog tvrdjenja se vidi da je za polu-refleksivne prostore odgovor negativan. U (/35/,a), Lema 1.) je dokazano da je hiper-ravan u svakom LKP $(E,\mathcal{T})$ ultra-gusta ili skoro zatvorena (pogledati napomenu kod tvrdjenja 8.3.), u odnosu na familije ograničenih, jako ograničenih i predkompaktnih podskupova. Za ograničene i predkompaktne podskupove, to je direktno jasno iz (/35/,a), Lema 1.), a za jako ograničene sledi iz činjenice da se svaka bačva hiper-ravni produžuje u bačvu prostora.

8.28. T v r d j e n j e. Neka je $(E,\mathcal{T})$ polu-refleksivan (p-polu-refleksivan, β^*-polu-refleksivan) LKP. Ako je F skoro zatvorena hiper-ravan u E, onda je F polu-refleksivan (p-polu-refleksivan, β^*-polu-refleksivan) potprostor i ako je F ultra-gusta hiper-ravan, onda F nije polu-refleksivan (p-polu-refleksivan, β^*-polu-refleksivan) potprostor.

D o k a z. Ako je $A \subseteq F$ ograničen (predkompaktan, jako ograničen) podskup, skoro zatvorene hiper-ravni F, onda je $\bar{A}^{\mathcal{T}} \wedge F$ $\mathcal{T}$-zatvoren podskup od E, dakle, A je $\sigma(E,E')$-relativno kompaktan podskup, odnosno $\sigma(F,F')$-relativno kompaktan, dakle, F je polu-refleksivan (p-polu-refleksivan, β^*-polu-refleksivan) potprostor. Ako je F ultra-gusta hiper-ravan, onda je $F'_\beta = E'_\beta$ ($F'_p = E'_p$ i $E'_{\beta^*} = F'_{\beta^*}$) i $(F'_\beta)' = E \neq F$ ($(F'_p)' = E \neq F$ i $(F'_{\beta^*})' = E \neq F$), dakle F nije polu-refleksivan (p-polu-refleksivan, β^*-polu-refleksivan) potprostor.

8.29. P o s l e d i c a. Svaka gusta hiper-ravan polu-refleksivnog Banahovog prostora je ultra-gusta.

D o k a z. Direktna primena tvrdjenja 8.26. i 8.28.

8.30. P o s l e d i c a. Ako je $(E,\mathcal{T})$ refleksivan (p-refleksivan, β^*-refleksivan) LKP a F hiper-ravan, onda je F istog tipa kao $(E,\mathcal{T})$, ako je skoro zatvorena, i nije istog tipa, ako je ultra-gusta.

Ovaj deo završavamo jednom karakterizacijom p-refleksivnih (β^*-refleksivnih) LKP, koja je ista sa karakterizacijom refleksivnih LKP u (/26/, Teorema 1.).

8.31. T v r d j e n j e. LKP $(E,\mathcal{T})$ je p-refleksivan (β^*-refleksivan), ako i samo ako je p-bačvast (kvazi-bačvast) i ako je svaki zatvoren predkompaktan (jako ograničen) podskup, zatvoren u proizvoljnoj lokalno konveksnoj topologiji $\mathcal{T}_1$ na E, koja je uporediva sa $\mathcal{T}$.

L I T E R A T U R A

/1/, Adasch.N, Ernst.B. and Keim.D; Topological vector spaces, Springer-Verlog (1978), 639.

/2/, Ando.T; On fundamental properties of a Banach space with a cone, Pacif.J.Math.12, (1962), 1163-69.

/3/, Baker.J.W, Continuity in ordered spaces. Math.Z.104, (1968), 231-246.

/4/, Buchwalter.H; a) Espaces vectoriels bornologiques, Publ.du Dép. de Math. Lyon 2-1, (1965), p. 1-53.
b) Espaces ultra-bornologiqueset b-réflexivité, Publ. du Dép. de Math. Lyon (1971), t. 8-1.

/5/, Duhoux.M, and Lung-FuNg, Decomp. of precomp. operators in ordered locally conv. spaces; J.Lond.Math.soc. (2), 13 (1976), 387-392.

/6/, Ellis.A.J, The duality of port.ordered normed spaces, J.Lond.Math.Soc. 39 (1964), 739-744.

/7/, Grange.M; Sur la bornologie de l'ordre, Publ.du Dép. de Math. Lyon, (1973) t. 10-3.

/8/, Grotendieck.A; Sur les espaces (F) et (DF), Summa bras. Math. 3-6, (1954), 57-122.

/9/, Husain.T; Two new classes of locally convex spaces, Math. Ann. 166, (1966), 289-299.

/10/, Jameson,G; Ordered linear spaces, Springer-Verlag, (1970), 104.

/11/, Jourlin,M, - Bazord J; Sur quelques classes d'espaces loc. convexes, Publ. du Dép. de Math. Lyon, (1971), t. 8-2.

/12/, Kadelburg.Z; a) A remark on hereditary properties of linear topol. spaces, Matematički vesnik, 13 (28), (1976), 285-288.

b) Ultra b-barrelled spaces, U štampi, Matematički vesnik (1979),...

/13/, Kawai.J; Locally convex lattices, J. math. Soc. Japan 9, (1957), 281-314.

/14/, Kelley.J; Namioka.J; and co-authors, Linear topological spaces, Von Nostrand, (1963).

/15/, Keim.D; a) Die Ordnungstopologie und ordnungst.top. auf vektorverbänden, Memoria publicada en Collect. Math. vol. XXII - fasc. 2. (1971).

b) Direkte Summen und Prod. gewisser lokalkonv. vektorverbände, Mem.publ. en Collect. Math. vol. XXI - fasc. 2. (1970).

/16/, Kenderov.P; On topological vector groups, Mat. Sbornik, Tom 81 (123), (1970).

/17/, Kist.Y; Locally o-convex spaces, Duke math. J. 25, (1958), 569-581.

/18/, Komura.Y; On linear topol. spaces, Kumam. J. of Sc; 5A, (1962), 148-157.

/19/, Köthe.G; Topological linear spaces. Springer-Ver. (1969).

/20/, Mirković.B; On locally convexe spaces of the type (DF) defined by an arbitrary family of bound. sets, Mat. vesnik 11 (26), (1974), 127-130.

/21/, Namiaka.J; Partially ordered linear topol. spaces, Mem. Am. math. Soc. 24 (1957).

/22/, Noureddine.K; a) L'espace infratonnelé associé á un espace loc. conv, C.R.Acod. Sc. Paris, 174A, (1972), 1821-1823.

b) Nouvelles classes d'espaces loc. conv, Publ. du Dép. de Math. Lyon (1973), T. 10-3.

c) Sur une propriété de perm. de cert. classes d'espaces local. conv. C.R.Acod. Sc. Paris, t. 277. Série A.-587.

d) Espaces assoc. á un espace local. conv. et espace de fonct. contin. Bull. Soc. Roy. Sc. Liége 42 (1973), 116-124.

/23/, Ng Kung; a) Solid sets in top. ord. vector spaces, Proc. of the London math. Society, XXII, (1971), 106-120.

b) The duality of ord. locally conv. spaces, J. Lond. Math. Soc. (2), 8 (1973), 201-208.

/24/, Nlend.H; Théorie des Bornologies et Applic. Springer--Ver. (1971), 213.

/25/, Peressini.L; On topologies in ordered vect. spaces, Math. Ann. 144 (1961), 199-223.

/26/, Pličko.A.N; Uslovi refleksivnosti i kvazi-refleks. topoloških vektorskih prostora; Ukraj.mat. žurnal, (1975), t. 27, 24-32.

/27/, Radenović.S; O nekim klasama lokalno konveksnih prostora, Magistarski rad, Beograd (1976).

/28/, Radosavljević-Nikolić.M; Lokalno konveksne grupe, Magistarski rad, Beograd (1977).

/29/, Rajkov.D.A; O B-kompletnim topol. vekt. grupama, Stud. Math, t. XXXI (1968), 295-306.

/30/, Robertson.A; Topological vector spaces (1964), Cambr. Un. Press.

/31/, Saxon.S; Every count.-codim. subsp. of a barrelled spaces is barrell. Proceed. of the amer. mat. soc. vol. 29, (1971), 91-96.

/32/, Séminaire Banach, Springer-Verl. (1972), 277.

/33/, Schaefer.H; Topological vector spaces, (1966), Macmillan, New York.

/34/, Schmets.J; Espaces de Fonctions Contin., Springer--Verl. (1976), 519.

/35/, Valdivija.M; a) On subsp. of count.-codim. of a local. conv. space, Journ. für Math. Band 256 (1971).

b) A hereditary prop. in loc. conv. spac. Ann. Inst. Fouriér, Grenoble 21, 2. (1971), 1-2.

/36/, Warner.S; Bornological structures, Illinois J. Math. 4. (1960), 231-45.

/37/, Wong.Y; a) The Topology of unif. converg. on Order-bounded sets, Springer-Verlog, (1976), 531.

b) Partially ordered topol. vect. spaces, Claredon press-Oxford (1973).

c) Open decompositions on ordered convex spaces, Proc. Camb. Phil. Soc. (1973), 74, 49-59.

d) A note on open decompositions, J. London Math. Soc. (2), 6 (1973), 419-420.

e) Order-infrabarrelled Riesz-Spaces, Mat. Ann. 183 (1969), 17-32.