UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Mr Svetislav M. Minčić

GENERALISANI RIMANOVI PROSTORI

DOKTORSKA DISERTACIJA

NIŠ, 1975

S A D R Ž A J

Strana

O. UVOD

o.1.Kako su na razvoj matematičke oblasti u koju spada ovaj rad veliku ulogu odigrali radovi A.Einstein-a,to ćemo se,najpre, ukratko osvrnuti na njegov udeo,zadržavajući se samo na matematičkoj strani problema.

U radu [1] iz 1905 g. A.Einstein postavlja osnovu svoje Specijalne teorije relativnosti (STR),u kojoj umesto trodimenzionog euklidskog prostora posmatra četvorodimenzioni prostorno-vremenski kontinuum,odn. "prostor-vreme", pri čemu se metrička forma zamenjuje "intervalom"

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{0.1}$$

gde je c brzina svetlosti,a t vreme.

Ustvari,umesto euklidskog prostora E_3,razmatranja se vrše u pseudoeuklidskom prostoru,odn. u prostoru Minkovskog M_4,za koji je (0.1) ustvari kvadrat diferencijala luka.

O.2.Specijalna teorija relativnosti je ustanovila vezu između prostora i vremena,ali u njoj se ne razmatra zavisnost geometrije prostor-vremena od rasporeda materije,prostorno-vremenski kontinuum se smatra homogenim u tom smislu da su koeficijenti kvadratne forme (0.1) konstante u određenom sistemu koordinata.

Pošto ga STR nije zadovoljavala u svakom pogledu,Einstein nastavlja proučavanje problema prostora i vremena i 1916 g. objavljuje svoju Opštu teoriju relativnosti (OTR) u radu [2]. U OTR metričke osobine prostora (koji je opet četvorodimenzioni prostorno-vremenski kontinuum) zavise od rasporeda masa.Umesto (0.1),u OTR važi

(0.2) $$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j \qquad (g_{ij} = g_{ji})$$

gde su g_{ij} funkcije tačke u prostoru. Dakle, prostor OTR je četvorodimenzioni Rimanov prostor R_4. Veličine g_{ij} $(i,j=1,\dots,4)$ nazivaju se p o t e n c i j a l i m a g r a v i t a c i o n o g p o lj a . Kristofelovi simboli $\left\{ {i \atop jk} \right\}$, koji se na poznati način način izražavaju pomoću g_{ij}, igraju u OTR ulogu veličina koje određuju j a č i n u g r a v i t a c i o n o g p o lj a. Pošto g_{ij} zavise od rasporeda masa, OTR je, pre svega, teorija gravitacije.

0.3. Einstein se nije zadovoljio ni svojom Opštom teorijom relativnosti, pa je počev od 1923 g. do kraja života (1955) radio na pronalaženju J e d i n s t v e n e t e o r i j e p o lj a (JTP), koja bi obuhvatila gravitaciono i elektromagnetno polje. On je najpre u [3] umesto Rimanovog prostora, gde se polazi od g_{ij} uzeo kao osnovu prostor (simetrične) afine koneksije, uvodeći koeficijente Γ^i_{jk} nezavisno od g_{ij} . Dalje, uvodeći razne varijante svoje jedinstvene teorije, on 1945 g. u [4] i 1946 u [5] koristi kompleksan osnovni tenzor g_{ij}, čiji je realni deo simetričan, a imaginarni antisimetričan po i, j.

Počev od 1950 g. [6] Einstein koristi realan nesimetričan osnovni tenzor u radovima u vezi sa JTP. Njegov poslednji rad [8], štampan 1955 g., takođe se odnosi na ovu problematiku.

Dok se u Rimanovom prostoru (prostoru OTR) koeficijenti koneksije izražavaju eksplicitno pomoću g_{ij} i tada se zovu Kristofelovi simboli, u Einstein-ovim radovima iz oblasti JTP (1950-1955) veza između ovih veličina je data implicitno jednačinama

(0.3) $$g_{\underset{+-}{ij}} \equiv g_{ij,m} - \Gamma^p_{im} g_{pj} - \Gamma^p_{mj} g_{ip} \overset{d}{=} 0,$$

što predstavlja sistem od $4^3=64$ jednačine sa 64 nepoznate, jer indeksi uzimaju vrednosti 1,...,4.

Napomenimo još da se u JTP simetrični deo $g_{\underline{ij}}$ tenzora g_{ij} odnosi na gravitaciju, a antisimetrični $g_{\underset{\vee}{ij}}$ na elektromagnetizam. Isto važi za $\Gamma^i_{\underline{jk}}$ i $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$.

0.4. Problematikom prostora sa nesimetričnim osnovnim tenzorom, odn. nesimetričnom koneksijom se počev od 1951 g. dosta bavio L.P.Eisenhart u radovima [9]-[15]. U [9] definiše g e n e r a l i s a n i R i m a n o v p r o s t o r od N dimenzija (GR_N) kao "prostor koordinata x^i sa kojim asociran nesimetričan tenzor g_{ij} ", dok se koneksija uvodi pomoću

$$\Gamma_{ijk} \overset{d}{=} \frac{1}{2}(g_{kj,i}+g_{ik,j}-g_{ij,k}), \qquad \Gamma^k_{ij} \overset{d}{=} g^{\underline{kp}}\Gamma_{ijp} \tag{0.4,5}$$

U [10] Eisenhart dobija dva tenzora krivine za GR_N. U daljim radovima vrši razmatranja i u prostoru koji zadovoljava uslov (0.3 ([11]-[13]), odn. uslov ([14], [15]):

$$g_{\underset{++}{ij};m} \equiv g_{ij,m} - \Gamma^p_{im}\, g_{pj} - \Gamma^p_{jm}\, g_{ip} \overset{d}{=} 0 . \tag{0.6}$$

0.5. Osim pomenutih radova L.P.Eisenhart-a, generalisani Rimanovi prostori ispitivani su i u radovima [16], [17], [20], [32], [33]

No i pored toga, mnoga pitanja su ostala nerazjašnjena i mnogi problemi otvoreni.

Ovaj rad je posvećen sistematskom ispitivanju prostora GR_N. Veći deo sprovedenih istraživanja se odnosi i na opštije prostore -na prostore nesimetrične afine koneksije (L_N). Stoga su u celom radu ispitivanja vršena prvo za L_N, a zatim su date specifičnosti za GR_N.

Rad se sastoji iz 10 paragrafa, od kojih §1-3 čine Glavu I, §4-6 čine Glavu II, a §7-10 glavu III. Ukratko ćemo izložiti sadržaj svakog paragrafa.

U §1 su date osnovne definicije irelacije koje se odnose na generalisani Rimanov prostor GR_N i prostor nesimetrične afine koneksije L_N, uglavnom prema radovima [9], [10], [16], [17]. Pri tome, u teoremi 1.1. dokazujemo osobinu (1.14) generalisanih Kristofelovih simbola 2. vrste, koja je analogna poznatoj osobini u Rimanovom prostoru, a odnosi se na Γ^{i}_{ik}.

U §2 se najpre za prostor L_N, s obzirom na nesimetriju koneksije, daju formulama (2.1) definicije dveju vrsta kovarijantnog izvoda pa se zatim dokazuje da je simetrični deo $g_{\underline{ij}}$ odn. $g^{\underline{ij}}$ osnovnog tenzora g_{ij}, odn. u obliku g^{ij} prostora GR_N kovarijantno konstantan u odnosu na obe vrste diferenciranja (2.1). Isto važi za Kronekerov simbol δ^{i}_{j} (teor. 2.1-3).

Dalje se definišu dve vrste vrste apsolutnog izvoda i, u vezi s tim, dve vrste paralelnog pomeranja. Dato je jedno geometrijsko tumačenje obeju vrsta paralelnog pomeranja, kao i vektora torzije $L^{i}_{\underset{\vee}{jk}}$ koneksije L^{i}_{jk} (F. Graif [24]).

U §3 se najpre daju uvodni pojmovi u vezi sa potprostorom prostora L_N, a zatim uvodi pojam indukovane koneksije potprostora i u vezi s tim dokazuje teor. 3.1. Proizilazi da ako je prostor bez torzije, biće i svaki njegov potprostor bez torzije.

Prelazeći na potprostor prostora GR_N, najpre preciziramo osnovne relacije, a zatim dokazujemo da važi isti odnos paralelizma vektora u GR_N i njegovom potprostoru (teor. 3.2, 3), kako je to poznato u R_N. Pri tome se posmatraju obe vrste paralelizma.

§4 se odnosi na identitete Ričijevog tipa. Naime, u L_N postoji 10 različitih mogućnosti za formiranje razlike

$$a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v \underset{\kappa}{|} m \underset{\varrho}{|} n} - a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v \underset{\sigma}{|} n \underset{\tau}{|} m} \qquad (\kappa, \varrho, \sigma, \tau = 1, 2),$$

gde $\underset{1}{|}$, $\underset{2}{|}$ označavaju dve vrste kovarijantnog izvoda prema (2.1). Na osnovu toga se dobija 10 identiteta,koje zovemo identitetima Ričijevog tipa prostora L_N, a dati su jednačinama (4.1,8,10,22, 25,29,33,36,40,43).Pri izvođenju je primenjen metod potpune indukcije obzirom na broj indeksa tenzora $a^{\cdots}_{\cdots}$. U dobijenim identitetima , osim ranije poznata dva (4.2,9) (rad [10]), pojavljuje se i treći tenzor krivine $\underset{3}{R}$ (4.46),kao i 15 veličina koje imaju oblik i ulogu tenzora krivine,ali nisu tenzori,pa ih zovemo"pseudotenzorima krivine" prostora L_N, a dati su jednačinama (4.11,12, 23,24,26,27,30,31,34,35,37,38,41,42,44).Napomenimo da U.P.Singh [34] dobija $\underset{3}{R}$ za jednu specijalnu nesimetričnu koneksiju,koja je na određeni način pridružena prostoru R_N, a uvedena je od strane M.Prvanović [18]. Dalje uvodimo 3. i 4. vrstu kovarijantnog izvoda (4.47) tako što kod 3.vrste sa kontravarijantnim indeksima postupamo kao kod 1.vrste,a sa kovarijantnim kao kod druge vrste kovarijantnog izvoda;kod 4.vrste postupamo sa indeksima obrnuto no kod 3.vrste.Samo jedan od 10 mogućih identiteta u ovom slučaju,dat sa (4.51), interesantan je u pogledu dobijanja novih tenzora,jer se tu pojavljuje novi tenzor krivine $\underset{4}{R}$ (4.52).

U §5 se najpre za dati prostor L_N nesimetrične koneksije L^i_{jk} uvodi pojam pridruženog prostora $\overset{0}{L}_N$ simetrične koneksije $L^i_{\underline{jk}}$ (simetrični deo od L^i_{jk}).

Jednačinama (5.4-7) se uspostavljaju veze između tenzora krivine $\underset{1}{R}$, $\underset{2}{R}$, $\underset{3}{R}$, $\underset{4}{R}$ prostora L_N i tenzora krivine R pridruženog prostora $\overset{0}{L}_N$, a jednačinama (5.8-22) se isti problem rešava za pseudotenzore krivine $\underset{1}{A},\dots,\underset{15}{A}$.

U §6 se određenim kombinacijama identiteta Ričijevog tipa iz §4 dobijaju složeni identiteti u kojima se pojavljuju novi tenzori krivine $\underset{1}{\widetilde{R}},\dots,\underset{8}{\widetilde{R}}$,nastali izvesnim kombinacijama pseudotenzora krivine.Od svih tih identiteta izdvajamo njih devet (6.9, 14,28′,29,32,56,65,83,95),u kojima se javljaju tenzori $\underset{1}{\tilde{R}},\dots,\underset{8}{\tilde{R}}$ (izuzev (6.28′)gde se pojavljuje kombinacija $\underset{2}{R}$ i $\underset{3}{R}$) dati jednačinama (6.7,15,16,33,66,67,84,85).

Ovde dobijamo i više veza među tenzorima i pseudotenzorima krivine prostora L_N,koje su date jednačinama (6.4,7,8,′ 15,16,19, 30,33,44,50,57,58,66,67,74,75,79,84,85,91.96,97).

Dobijene su i interesantne relacije (6.12,24,47,53,61,62,72) među veličinama $a^{\dots}_{\dots\langle\langle mn\rangle\rangle}$, $a^{\dots}_{\dots\langle\langle mn\rangle\rangle}$, $a^{\dots}_{\dots\langle\langle mn\rangle\rangle}$, $a^{\dots}_{\dots\langle\langle mn\rangle\rangle}$, datim jednačinama (4.14,28,32,39),a koje nisu tenzori.Pri tome se dobija nov tenzor $a^{\dots}_{\dots\{mn\}}$ (6.12),koji se takođe pojavljuje u nekima od navedenih složenih identiteta.

U §7 dokazujemo da su od 12 dobijenih tenzora krivine $\underset{1}{R},\dots$ $\dots,\underset{4}{R}$, $\underset{1}{\tilde{R}},\dots,\underset{8}{\tilde{R}}$ prostora L_N ukupno 5 nezavisnih a da se ostali mogu izraziti kao linearne kombinacije tih 5 tenzora i R . Jednačinama (7.17-23) izražavamo tenzore $\underset{1}{\tilde{R}},\underset{3}{\tilde{R}},\dots,\underset{8}{\tilde{R}}$ pomoću $R,\underset{1}{R},\dots$ $\dots,\underset{4}{R},\underset{2}{\tilde{R}}$.

§8 se odnosi na osobine simetrije tenzora $\underset{1}{R},\underset{2}{R},\underset{3}{R},\underset{4}{R},\underset{2}{\tilde{R}}$ (ostali, kao linearne kombinacije navedenih,ne ispituju se posebno).Jednačinama (8.2,9,10,18,28,37,46,47,50,59) su izražene osobine simetrije koje su iste kao i odgovarajuće osobine simetrije u prostoru simetrične koneksije $\overset{0}{L}_N$, odn. u prostoru R_N.Pored toga,jednačinama (8.6-8,22-25,29-32,38,41-43,48,49) uopštene su poznate osobine ciklične simetrije tenzora R u $\overset{0}{L}_N$, odn. R_N.

U §9 izlažu se geometrijske interpretacije tenzora i pseudotenzora krivine prostora L_N. Posmatrajući jednu,ustvari prvu, vrstu paralelnog pomeranja vektora duž određene konture (§2), F.Graif [26] dobija izraz za priraštaj Δv^i vektora v^i izražen pomoću $\underset{1}{R}$. Time je dobijena geometrijska interpretacija tenzora $\underset{1}{R}$.

Menjajući vrstu paralelnog pomeranja (t.j. koristeći 2.vrstu umesto 1.) duž iste konture , dobijamo (§9.1.2) geometrijsku interpretaciju tenzora $\underset{2}{R}$. M.Prvanović (nepublikovano), osim navedenih interpretacija tenzora $\underset{1}{R}$ i $\underset{2}{R}$,dobija i geometrijske interpretacije tenzora $\underset{3}{R}$ i $\underset{4}{R}$ na taj način što duž dveju naspramnih strana pomenute konture uzima jednu,a duž drugih dveju strana-drugu vrstu paralelnog pomeranja vektora v^i.Odatle dobijamo ideju da duž četiri strane konture posmaramo 2^4=16 mogućnosti obilaska konture,kombinujući pri tome duž pojedinih strana 1. odn. 2. vrstu pomeranja vektora v^i. Na taj način dobijamo geometrijske interpretacije (9.4,7,8,9,14,22,27,33,37,38,43,46,48,50,53.55) tenzora $\underset{1}{R},\underset{2}{R},\underset{3}{R},\underset{4}{R}$,kao i pseudotenzora parnog indeksa $\underset{2}{A},\dots,\underset{14}{A}$.

Ponavljajući prethodni postupak za kovarijantni vektor v_j, dobijamo geometrijske interpretacije tenzora $\underset{1}{R},\dots,\underset{4}{R}$ (ponovo), kao i pseudotenzora neparnog indeksa $\underset{1}{A},\dots,\underset{15}{A}$. Sve je to izraženo jednačinama (9.60,64,68,72,75,79,80-83,85,87-91).

One od napred navedenih jednačina za v^i, odn. v_j, koje sadrže tenzor torzije (sve sem prve četiri u oba slučaja) daju istovremeno i geometrijsku interpretaciju tenzora torzije.

Na kraju, formirajući algebarske zbirove dvaju ili više totalnih priraštaja vektora v^i ili v_j iz prethodnih slučajeva,dobijamo geometrijske interpretacije izvedenih tenzora krivine $\underset{1}{\tilde{R}},\dots$ $\dots,\underset{8}{\tilde{R}}$ (9.97,98,103-107,112,114,116,118,120).

§10 je posvećen Einstein-ovoj jedinstvenoj teoriji polja (JTP)[6]-[8]. Najpre se obrazlaže zašto se prostori GR_N i JTP mogu posmatrati kao specijalni slučajevi prostora L_N, zatim se izlažu neke osnovne relacije u JTP (10.2-5) i,na kraju,jednačinama (10.6,15) uspostavlja se direktna veza između GR_N i JTP,koristeći pri tome Eisenhart-ov rad [11].Iz pomenutih veza sledi da se iz određenih jednačina prostora GR_N mogu dobiti odgovarajuće jednačine JTP i obrnuto.

0.6. Na kraju,čast mi je da zahvalim prof. D^r Milevi Prvanović na velikoj i svesrdnoj pomoći u toku izrade ovoga rada.Ona mi je skrenula pažnju na neke elemente problematike koju tretira ovaj rad,pratila ceo tok izrade,ekspeditivno procenjivala rezultate do kojih sam dolazio.Posebno ističem pomoć koju mi je pružila u vezi sa geometrijskim interpretacijama tenzora krivine (§9).

Takođe dugujem zahvalnost:

- Građevinskom fakultetu u Nišu i Republičkoj zajednici za naučni rad SR Srbije na materijalnoj pomoći za izradu rada,

- Matematičkom institutu u Beogradu, koji mi je veoma mnogo pomogao u pogledu korišćenja literature.

Svetislav M. Minčić

GLAVA I

NEKI ELEMENTI GEOMETRIJE GENERALISANIH RIMANOVIH PROSTORA I PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

1.DEFINICIJE I UVODNE RELACIJE

1.1.Generalisani Rimanov prostor (GR_N)

Prema Eisenhartu [9] Generalisani Rimanov prostor je N-dimenziona diferencijabilna mnogostrukost,u kojoj je uveden nesimetričan osnovni tenzor $g_{ij}(x^1,\ldots,x^N)$,t.j.takav da je u opštem slučaju

$$g_{ij} \neq g_{ji} \,, \tag{1.1}$$

pri čemu je $det(g_{ij}) = g \neq 0$.

Takav N-dimenzioni prostor obeležavaćemo GR_N,dok ćemo običan Rimanov prostor obeležavati R_N.

Osnovne definicije i relacije koje se odnose na GR_N date su u [9], [10], [16], [17],što ćemo navesti ukratko,pri čemu istovremeno dajemo i neke svoje priloge.

Zbog (1.1),može se definisati simetrični deo tenzora g_{ij}

$$g_{\underline{ij}} \overset{d}{=} \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) \tag{1.2}$$

i antisimetrični deo

(1.3)
$$g_{\underset{\vee}{ij}} \overset{d}{=} \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})$$

pri čemu " $\overset{d}{=}$ " znači "jednako po definiciji".

S p u š t a n j e i d i z a n j e i n d e k s a definiše se pomoću tenzora $g_{\underline{ij}}$ i $g^{\underline{ij}}$,gde je $g^{\underline{ij}}$ definisan pomoću

(1.4)
$$g_{\underline{ij}}\, g^{\underline{jk}} = \delta_i^k$$

a δ_i^k je Kronekerov simbol.Pošto je,prema (1.4),matrica $\| g^{\underline{ij}} \|$ inverzna matrici $\| g_{\underline{ij}} \|$,nužno je da bude zadovoljen i uslov

$$\underline{g} = det(g_{\underline{ij}}) \neq 0.$$

Ako zarezom označimo obično parcijalno diferenciranje,na pr.

$$g_{ij,k} \overset{d}{=} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

mogu se na sledeći način definisati g e n e r a l i s a n i K r i s t o f e l o v i s i m b o l i 1.odnosno 2.vrste:

(1.5)
$$\Gamma_{ijk} \overset{d}{=} \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{ji,k} - g_{jk,i}),$$

(1.6)
$$\Gamma^i_{jk} \overset{d}{=} g^{\underline{ip}}\,\Gamma_{pjk} = \frac{1}{2} g^{\underline{ip}}(g_{pk,j} + g_{jp,k} - g_{jk,p}).$$

Onda je

(1.7)
$$\Gamma^p_{jk}\, g_{\underline{ip}} = \Gamma_{sjk}\, g^{\underline{ps}}\, g_{\underline{ip}} = \Gamma_{ijk},$$

(1.8a,b)
$$\Gamma_{ijk} \neq \Gamma_{ikj}, \quad \Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}.$$

Polazeći od zakona transformacije tenzora g_{ij} pri prelasku sa sistema koordinata x^i na sistem $x^{i'}$ i uvodeći oznake

(1.9a,b,c) $$x^i_{i'} \overset{d}{=} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \quad x^{i'}_i \overset{d}{=} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad x^i_{j'k'} \overset{d}{=} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}},$$

dokazuje se [20] da važe sledeći zakoni transformacije generalisanih Kristofelovih simbola

(1.10) $$\Gamma_{i'j'k'} = \Gamma_{ijk}\, x^i_{i'} x^j_{j'} x^k_{k'} + g_{\underline{ij}}\, x^i_{i'} x^j_{j'k'},$$

(1.11) $$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk}\, x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'} + x^{i'}_i x^i_{j'k'}.$$

Polazeći od (1.5), lako se dokazuju relacije

(1.12a,b) $$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = g_{\underline{ij},k}, \quad \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} = g_{\underline{ik},j},$$

(1.12c) $$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} = g_{\underline{ik},j} + g_{\underline{ji},k} - g_{\underline{jk},i}.$$

S k a l a r n i p r o i z v o d i n o r m a l n o s t dva vektora definiše se pomoću $g_{\underline{ij}}$, onako kako je to uobičajeno u Rimanovom prostoru.

Za i n t e z i t e t v e k t o r a u^i imamo

(1.13) $$(u)^2 = g_{ij} u^i u^j = g_{\underline{ij}} u^i u^j.$$

Sada ćemo dokazati da za generalisani Kristofelov simbol 2. vrste važi osobina poznata iz običnog Rimanovog prostora.

T e o r e m a 1.1. Ako je $\underline{g} = det(g_{\underline{ij}})$, onda u GR_N važi

$$\Gamma^{i}_{ik} = \Gamma^{i}_{ki} = \left(\ln\sqrt{|\underline{g}|}\right)_{,k} \tag{1.14}$$

Dokaz.Ako pođemo od osobine poznate iz teorije običnog Rimanovog prostora (v.na pr.[21],§21,jedn.(9)):

$$\underline{g}_{,k} = \underline{g}\, g^{\underline{ij}} g_{\underline{ij},k}$$

i iskoristimo (1.12a),dobijamo

$$\underline{g}_{,k} = \underline{g}\, g^{\underline{ij}}(\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik}) = \underline{g}(\Gamma^{j}_{jk}+\Gamma^{i}_{ik}),$$

t.j.

$$\frac{\underline{g}_{,k}}{2\underline{g}} = \Gamma^{i}_{ik}.$$

Na osnovu (1.12b)dobijamo

$$\frac{\underline{g}_{,k}}{2\underline{g}} = \Gamma^{i}_{ki}.$$

Iz poslednje dve jednakosti sledi (1.14).

P o s l e d i c a . Iz (1.14)sledi da je $\Gamma^{i}_{ik} = \Gamma^{i}_{ki}$ -kao parcijalni izvod skalara -vektor i da je

$$\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{ik}} = 0. \tag{1.15}$$

1.2. P r o s t o r n e s i m e t r i č n e a f i n e k o n e k s i j e (L_N)

Ako umesto tenzora g_{ij} na N-dimenzionoj mnogostrukosti na početku zadamo veličine $L^{i}_{jk}(x^1,\dots,x^N)$, takve da zadovoljavaju zakon transformacije prema (1.11)

$$L^{i'}_{j'k'} = L^{i}_{jk}\, x^{i'}_{i} x^{j}_{j'} x^{k}_{k'} + x^{i'}_{i} x^{i}_{j'k'}, \tag{1.16}$$

i da u opštem slučaju važi relacija oblika (1.8b)(nesimetrija), dobijamo p r o s t o r n e s i m e t r i č n e a f i n e k o n e k s i j e ([22], §89, [36], gl.I), koji ćemo označavati L_N. Očigledno da je GR_N specijalni slučaj prostora L_N. Veličine L^i_{jk} su k o e f i c i j e n t i k o n e k s i j e prostora L_N. Iz (1.16) vidimo da za simetrični deo $L^i_{\underline{jk}}$ ($\Gamma^i_{\underline{jk}}$) važi isti zakon transformacije (1.16) i da se antisimetrični deo $L^i_{\underset{\vee}{jk}}$ ($\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$) transformiše kao tenzor. To je t e n z o r t o r z i j e prostora $L_N(GR_N)$.

2. KOVARIJANTNO I APSOLUTNO DIFERENCIRANJE I PARALELIZAM U L_N (GR_N)

2.1. K o v a r i j a n t n i i z v o d i

Zbog nesimetričnosti koeficijenata koneksije, moguće je u $L_N(GR_N)$ definisati d v e v r s t e k o v a r i j a n t n o g i z v o d a tenzora. Na pr. za tenzor $a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v}$ definišemo: k o v a r i j a n t n i i z v o d 1. v r s t e

(2.1a)
$$a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v \underset{1}{|} m} \overset{d}{=}$$
$$\overset{d}{=} a^{\dots}_{\dots,m} + \sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{pm} a^{r_1 \dots r_{\alpha-1} p r_{\alpha+1} \dots r_u}_{t_1 \dots t_v} - \sum_{\beta=1}^{v} L^{p}_{t_\beta m} a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_{\beta-1} p t_{\beta+1} \dots t_v}$$

i k o v a r i j a n t n i i z v o d 2. v r s t e

(2.1b)
$$a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v \underset{2}{|} m} \overset{d}{=}$$
$$\overset{d}{=} a^{\dots}_{\dots,m} + \sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{mp} a^{r_1 \dots r_{\alpha-1} p r_{\alpha+1} \dots r_u}_{t_1 \dots t_v} - \sum_{\beta=1}^{v} L^{p}_{m t_\beta} a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_{\beta-1} p t_{\beta+1} \dots t_v} .$$

Postupkom koji je sličan onome u Rimanovom prostoru, može se dokazati da je kovarijantni izvod tenzora takođe tenzor i da važe poznata pravila za kovarijantno diferenciranje.

Ma da se u većini radova iz navedenog spiska literature koristi nesimetrična koneksija,ipak se,sa retkim izuzecima,koristi samo jedna vrsta diferenciranja,i to prva,prema (2.1a)(izuzev Raševskog,koji u [22] koristi samo drugu vrstu).Dve vrste diferenciranja koristi A.Einstein[7](u vezi sa jedinstvenom teorijom polja), M.Prvanović [18], [19](za specijalne nesimetrične koneksije,pridružene na određeni način običnom Rimanovom prostoru),M.Pastori [25], F.Graif [26],E.Brinis [27](poslednja tri autora u vezi sa JTP).

Dok osnovni tenzor g_{ij} nije konstantan u odnosu na kovarijantno diferenciranje (2.1),dotle to jesu $g_{\underline{ij}}$ i $g^{\underline{ij}}$ .Naime,dokazaćemo sledeće tri teoreme.

T e o r e m a 2.1. Tenzor $g_{\underline{ij}}$ je kovarijantno konstantan u odnosu na obe vrste diferenciranja (2.1),t.j. važi

$$(2.2a,b) \qquad g_{\underline{ij}\underset{1}{|}m} = 0 \, , \quad g_{\underline{ij}\underset{2}{|}m} = 0 \, .$$

Dokaz.a)Polazeći od definicije 1.vrste kovarijantnog izvoda i koristeći (1.7) i (1.12a),dobijamo

$$g_{\underline{ij}\underset{1}{|}m} = g_{\underline{ij},m} - \Gamma^{p}_{im} g_{\underline{pj}} - \Gamma^{p}_{jm} g_{\underline{ip}} = g_{\underline{ij},m} - \Gamma_{jim} - \Gamma_{ijm} = 0 \, ,$$

t.j.važi (2.2a).

b)Analogno,polazeći od 2.vrste izvoda i koristeći (1.7) i (1.12b)dobijamo (2.2b).

T e o r e m a 2.2. Za Kronekerov simbol važi

$$(2.3a,b) \qquad \delta^{i}_{j\underset{1}{|}m} = 0 \, , \quad \delta^{i}_{j\underset{2}{|}m} = 0 \, .$$

Dokaz se dobija koristeći definiciju δ -simbola i kovarijantnog izvoda (2.1).

T e o r e m a 2.3. Za $g^{\underline{ij}}$ važi

$$g^{\underline{ij}}{}_{\underset{1}{|}m} = 0, \quad g^{\underline{ij}}{}_{\underset{2}{|}m} = 0. \tag{2.4a,b}$$

Dokaz se dobija polazeći od definicije (1.4) i koristeći pravilo za izvod proizvoda i prethodnu teoremu.

2.2. A p s o l u t n i i z v o d i i p a r a l e l n o p o m e r a n j e

2.2.1. Posmatrajmo krivu C definisanu u L_N jednačinama

$$x^i = x^i(t), \tag{2.5}$$

pri čemu je u tačkama te krive definisano tenzorsko polje, na pr. a^i_j.

Mogu se definisati d v e v r s t e a p s o l u t n o g i zv o d a tenzorskog polja a^i_j po parametru t duž krive C u L_N:

$$\frac{\underset{1}{D} a^i_j}{Dt} \overset{d}{=} a^i_{j\underset{1}{|}m} \frac{dx^m}{dt} = \frac{da^i_j}{dt} + L^i_{pm} a^p_j \frac{dx^m}{dt} - L^p_{jm} a^i_p \frac{dx^m}{dt}, \tag{2.6a}$$

$$\frac{\underset{2}{D} a^i_j}{Dt} \overset{d}{=} a^i_{j\underset{2}{|}m} \frac{dx^m}{dt} = \frac{da^i_j}{dt} + L^i_{mp} a^p_j \frac{dx^m}{dt} - L^p_{mj} a^i_p \frac{dx^m}{dt} \tag{2.6b}$$

i d v e v r s t e a p s o l u t n o g d i f e r e n c i j a l a:

$$\underset{1}{D} a^i_j \overset{d}{=} a^i_{j\underset{1}{|}m} dx^m, \tag{2.7a}$$

$$\underset{2}{D} a^i_j \overset{d}{=} a^i_{j\underset{2}{|}m} dx^m. \tag{2.7b}$$

Na osnovu toga definišemo d v e v r s t e p a r a l e l i z m a tenzorskog polja u L_N. Kažemo da je tenzorsko polje a^i_j p a r a l e l n o p o l j e 1. v r s t e odn. da tenzor a^i_j vrši paralelno pomeranje 1. vrste (kratko:pomeranje 1. vrste) duž C ako i samo ako je njegov apsolutni izvod 1.vrste duž C nula;analogno se definiše p a r a l e l n o p o l j e 2. v r s t e, odn.paralelno pomeranje (kratko:pomeranje) 2.vrste.Ako za paralelno pomeranje vrste θ (θ=1,2) tenzora a^i_j uvedemo oznaku $a^i_j \underset{\theta}{\|}$ imamo

$$a^i_j \underset{\theta}{\|} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \frac{\underset{\theta}{D} a^i_j}{Dt} = 0 \quad (\theta = 1, 2), \tag{2.8}$$

odakle

(2.8'a) $$a^{i}_{j}\underset{1}{\|} \iff \underset{1}{d}a^{i}_{j} = -L^{i}_{pm}a^{p}_{j}dx^{m} + L^{p}_{jm}a^{i}_{p}dx^{m},$$

(2.8'b) $$a^{i}_{j}\underset{2}{\|} \iff \underset{2}{d}a^{i}_{j} = -L^{i}_{mp}a^{p}_{j}dx^{m} + L^{p}_{mj}a^{i}_{p}dx^{m}.$$

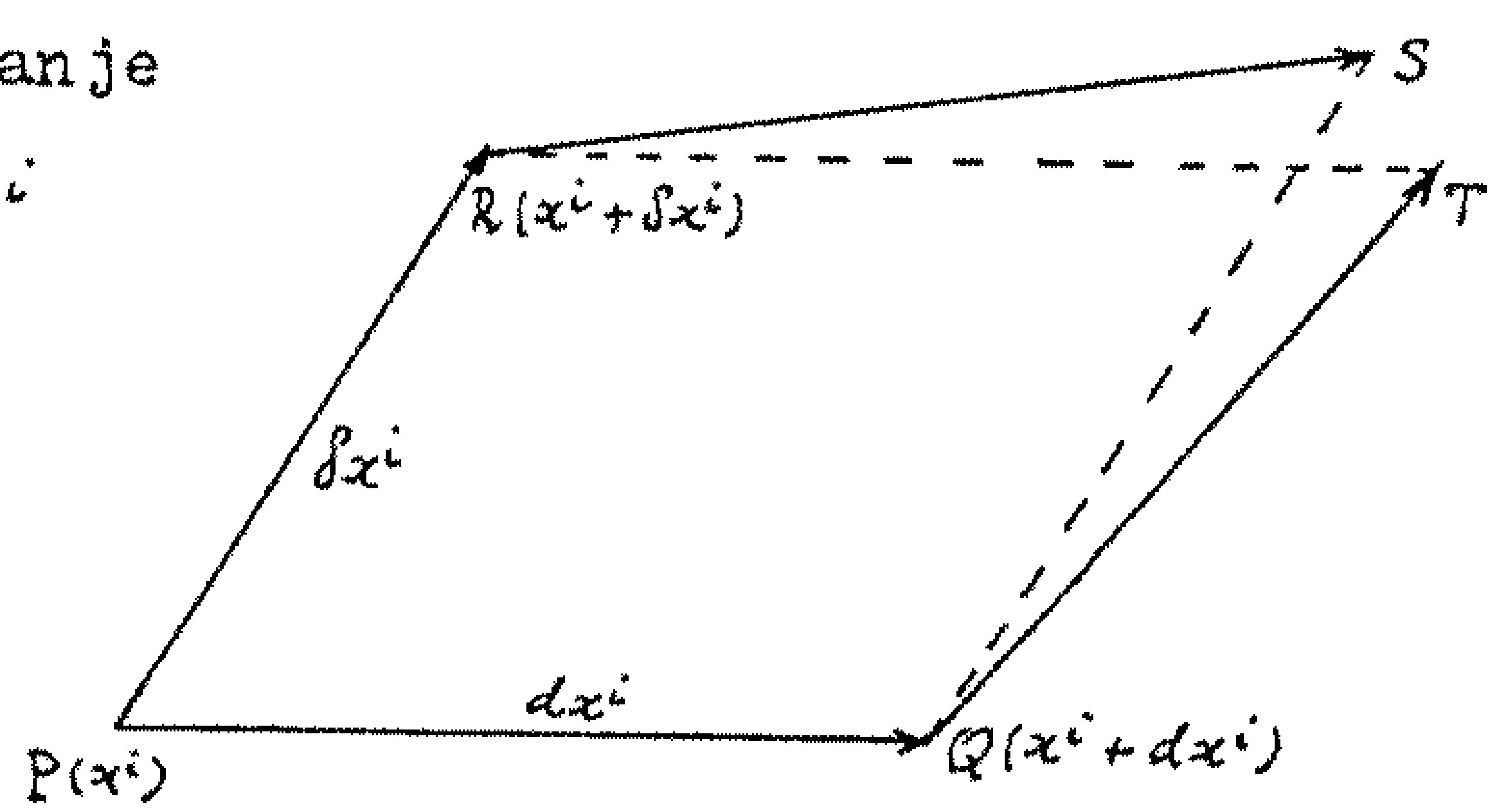
2.2.2.Uzimajući u obzir definicije skalarnog proizvoda dva vektora u GR_N pomoću $g_{\underline{ij}}$,a s obzirom na konstantnost $g_{\underline{ij}}$ u odnosu na obe vrste kovarijantnog (prema tome i apsolutnog) diferenciranja,lako se dokazuju teoreme o održanju skalarnog proizvoda dva vektora koji se paralelno pomeraju, o održanju ugla među njima,kao i o održanju intenziteta vektora , datog pomoću (1.13).

2.3. Jedno geometrijsko tumačenje torzije i dveju vrsta paralelnog pomeranja

Prema F.Graiff [24],može se dati sledeće geometrijsko tumačenje dveju vrsta paralelnog pomeranja i torzije u L_N.

Posmatrajmo u L_N jedan površinski element određen sa dva infinitezimalna vektora dx^i i δx^i,koji polaze iz iste tačke $P(x^i)$. Tada su krajevi tih vektora $Q(x^i+dx^i)$,$R(x^i+\delta x^i)$.

Izvršimo paralelno pomeranje iste,na pr.1.vrste vektora dx^i duž δx^i ,kao i obrnuto.Neka je u prvom slučaju krajnja tačka pomerenog vektora S, a u drugom T.Za koordinate tih tačaka dobijamo:



Sl.1.

(2.9) $$\underset{S}{x^i} = x^i + dx^i + \delta(x^i+dx^i) = x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i$$

(2.10) $$x^i = x^i + \delta x^i + d(x^i+\delta x^i) = x^i + \delta x^i + dx^i + d\,\delta x^i \, .$$

Ako δdx^i, $d\delta x^i$ izračunamo s obzirom na (2.8'a), dobijamo

(2.11a,b) $\underset{1}{\delta} dx^i = -L^i_{pm} dx^p \delta x^m \,, \quad \underset{1}{d} \delta x^i = -L^i_{pm} \delta x^p dx^m \,.$

Iz (2.9-11) dobija se u ovom slučaju

(2.12) $\underset{T}{x^i} - \underset{S}{x^i} = \underset{1}{d} \delta x^i - \underset{1}{\delta} dx^i = 2 L^i_{\underset{\vee}{pm}} dx^p \delta x^m \,,$

što znači da se tačke S i T ne poklapaju u slučaju $L^i_{\underset{\vee}{pm}} \neq 0$, t.j. kad postoji torzija.

Ako se vrši paralelno pomeranje 2.vrste, dobiće se analogan rezultat, samo što će u (2.12) na desnoj strani biti $L^i_{\underset{\vee}{mp}}$ umesto $L^i_{\underset{\vee}{pm}}$.

Međutim, ako se izvrši pomeranje 1.vrste vektora dx^i duž δx^i, a pomeranje 2.vrste vektora δx^i duž dx^i ili pak obrnuto, dobiće se ista vrednost za δdx^i i $d\delta x^i$, pa je tada $\underset{T}{x^i} = \underset{S}{x^i}$, t.j. četvorougao se zatvara. Dakle važi:

T e o r e m a 2.4. (F.Graiff[24]). Neka je u L_N površinski element određen vektorima dx^i i δx^i, koji polaze iz iste tačke $P(x^i)$. Ako se dx^i pomera duž δx^i po jednoj od dve vrste paralelnog pomeranja, a δx^i duž dx^i po drugoj, krajnje tačke dobijenih vektora se poklapaju, t.j. dobija se zatvoreni paralelogram u L_N. U slučaju primene samo pomeranja 1.vrste razlika koordinata krajnjih tačaka pomerenih vektora data je pomoću (2.12), a u slučaju pomeranja 2.vrste treba u (2.12) staviti $L^i_{\underset{\vee}{mp}}$ umesto L^i_{pm}, t.j. menja se znak posmatrane razlike.

Može se smatrati da se paralelno pomeranje 1.vrste vrši po jednoj, pozitivnoj strani, a paralelno pomeranje 2.vrste po drugoj, negativnoj strani površinskog elementa. Dakle, da bi se u posmatranom slučaju dobio zatvoreni četvorougao, treba vektor dx^i pomerati po jednoj, a vektor δx^i po drugoj strani površinskog elementa.

3. POTPROSTORI PROSTORA L_N i GR_N

3.1. P o t p r o s t o r $L_M \subset L_N$

Neka su u L_N koordinate x^i $(i=1,\dots,N)$. Jednačine

$$x^i = x^i(u^1,\dots,u^M)\ (M<N), \tag{3.1}$$

pod uslovom da je rang matrice $\left\| \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right\|$ jednak M, određuju p o t p r o s t o r L_M prostora L_N, što pišemo $L_M \subset L_N$.

Napomenimo da će ovde, kao i dalje, ukoliko nije drugačije rečeno, grčki indeksi uzimati vrednosti $1,\dots,M$ i odnositi se na potprostor L_M, a latinski će uzimati vrednosti $1,\dots,N$ i odnositi se na prostor L_N.

Kao što je poznato, sistem

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = x^i_{,\alpha} = x^i_\alpha \tag{3.2}$$

je kontravarijantni vektor u odnosu na L_N, a kovarijantni vektor u odnosu na L_M.

Pomoću koneksije L^i_{jk} prostora L_N može se u $L_M \subset L_N$ definisati i n d u k o v a n a k o n e k s i j a $\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma}$, tako da zadovoljava jednačinu

$$\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma} x^i_\alpha = L^i_{jk} x^j_\beta x^k_\gamma + x^i_{\beta\gamma}, \tag{3.3}$$

gde je

$$x^i_{\beta\gamma} \overset{d}{=} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}. \tag{3.4}$$

Međutim, da bi sistem $\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ predstavljao koeficijente koneksije, treba da zadovoljava zakon transformacije (1.16). To se utvrđuje sledećom teoremom.

T e o r e m a 3.1. Neka su L^i_{jk} koeficijenti koneksije prostora L_N, a veličine $\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ definisane u $L_M \subset L_N$, zadovoljavaju (3.3). Tada su i $\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma}$ koeficijenti koneksije za L_M.

Dokaz. Ako pođemo od (3.3) i sa koordinata u^{α} pređemo na koordinate $u^{\alpha'}$ (u L_M) imaćemo (koristeći oznake prema (1.9) i (3.4)):

$$\bar{L}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} x^i_{\alpha'} = L^i_{jk} x^j_{\beta'} x^k_{\gamma'} + x^i_{\beta'\gamma'} = L^i_{jk} x^j_{\beta} x^k_{\gamma} u^{\beta}_{\beta'} u^{\gamma}_{\gamma'} + (x^i_{\beta} u^{\beta}_{\beta'})_{,\gamma'} \quad ,$$

što na osnovu (3.3) postaje:

$$\bar{L}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} x^i_{\alpha} u^{\alpha}_{\alpha'} = (\bar{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} x^i_{\alpha} - x^i_{\beta\gamma}) u^{\beta}_{\beta'} u^{\gamma}_{\gamma'} + x^i_{\beta\gamma} u^{\beta}_{\beta'} u^{\gamma}_{\gamma'} + x^i_{\beta} u^{\beta}_{\beta'\gamma'} \quad ,$$

odnosno

$$\bar{L}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} u^{\alpha}_{\alpha'} = \bar{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} u^{\beta}_{\beta'} u^{\gamma}_{\gamma'} + u^{\alpha}_{\beta'\gamma'} \quad ,$$

odakle sledi relacija oblika (1.16), čime je teorema dokazana.

P o s l e d i c a . Iz (3.3) za torziju $L^i_{\underset{\vee}{jk}}$ i i n d u k o v a n u t o r z i j u $\bar{L}^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta\gamma}}$ dobijamo

$$\bar{L}^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta\gamma}} x^i_{\alpha} = L^i_{\underset{\vee}{jk}} x^j_{\beta} x^k_{\gamma} \quad , \tag{3.5}$$

odakle je

$$L^i_{\underset{\vee}{jk}} = 0 \implies \bar{L}^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta\gamma}} = 0 , \tag{3.6}$$

t.j. ako je prostor L_N bez torzije, biće i svaki njegov potprostor bez torzije.

3.2. P o t p r o s t o r $GR_M \subset GR_N$

3.2.1. Ako su u GR_N koordinate x^i onda jednačine (3.1), pod uslovima navedenim na početku § 3.1., određuju $GR_M \subset GR_N$. Kao što je poznato [16], između osnovnog tenzora g_{ij} prostora i osnovnog tenzora $\bar{g}_{\alpha\beta}$ njegovog potprostora postoji veza

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{ij} x^i_{\alpha} x^j_{\beta} \quad , \tag{3.7}$$

odakle je

(3.8a,b) $$\bar{g}_{\underline{\alpha\beta}} = g_{\underline{ij}}\, x^i_\alpha x^j_\beta \;, \qquad \bar{g}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = g_{\underset{\vee}{ij}}\, x^i_\alpha x^j_\beta \;.$$

Iz (3.8b) je

(3.9) $$g_{\underset{\vee}{ij}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = 0 \;,$$

t.j. ako je osnovni tenzor prostora GR_N simetričan, biće simetričan i osnovni tenzor svakog njegovog potprostora.

Ako $\bar{g}^{\underline{\alpha\beta}}$ odredimo prema jednačini koja odgovara (1.4), a zatim generalisane Kristofelove simbole za GR_N i GR_M formiramo prema jednačinama (1.5,6), važi (3.3), t.j. ovako dobijena koneksija $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ potprostora GR_M je indukovana za koneksiju Γ^i_{jk} prostora GR_N.

3.2.2. Odnos paralelizma u GR_N i njegovom potprostoru

Posmatrajmo krivu C u $GR_M \subset GR_N$ i vektorsko polje duž C, tako da su njegove kontravarijantne komponente v^i u GR_N, a $\bar{v}^\alpha$ u GR_M. Tada je

(3.10) $$v^i = \bar{v}^\alpha x^i_\alpha \;.$$

Kako se paralelno pomeranje vektora karakteriše preko apsolutnog izvoda, to ćemo naći apsolutne izvode po luku za v^i odn. $\bar{v}^\alpha$ i uspostaviti vezu među njima.

Prema (2.6) je

(3.11) $$\underset{\substack{1\\2}}{p}{}^\alpha = \frac{d\bar{v}^\alpha}{ds} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\underset{\mu\kappa}{\kappa\mu}}\, \bar{v}^\kappa \frac{du^\mu}{ds} \;,$$

(3.12) $$\underset{\substack{1\\2}}{q}{}^i = \frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{\underset{mp}{pm}}\, v^p \frac{dx^m}{ds} \;,$$

pri čemu, uzimajući u (3.11) na levoj strani $\underset{1}{p}{}^\alpha$ na desnoj treba uzeti $\bar{\Gamma}^\alpha_{\kappa\mu}$, a uzimajući na levoj $\underset{2}{p}{}^\alpha$, na desnoj treba uzeti $\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\kappa}$. Analogno za (3.12).

Na osnovu (3.10), (3.1) i (3.12):

$$\underset{1}{q}^i = \frac{d}{ds}(\bar{v}^\alpha x^i_\alpha) + \Gamma^i_{pm}\bar{v}^\alpha x^p_\alpha x^m_\mu \frac{du^\mu}{ds} =$$

$$= \frac{d\bar{v}^\alpha}{ds}x^i_\alpha + \bar{v}^\alpha x^i_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{ds} + \Gamma^i_{pm}\bar{v}^\alpha x^p_\alpha x^m_\mu \frac{du^\mu}{ds},$$

t.j.

(3.13a) $$\underset{1}{q}^i = \frac{d\bar{v}^\alpha}{ds}x^i_\alpha + \bar{v}^\alpha\frac{du^\mu}{ds}\left(x^i_{\alpha\mu} + \Gamma^i_{pm}x^p_\alpha x^m_\mu\right).$$

Analogno se dobija

(3.13b) $$\underset{2}{q}^i = \frac{d\bar{v}^\alpha}{ds}x^i_\alpha + \bar{v}^\alpha\frac{du^\mu}{ds}\left(x^i_{\alpha\mu} + \Gamma^i_{mp}x^p_\alpha x^m_\mu\right).$$

Množenjem levih i desnih strana jednačina (3.13) sa $\underline{g_{ij}}x^j_\beta$ i uzimajući u obzir (3.8), dobijamo

(3.14) $$\underline{g_{ij}}\underset{\substack{1\\2}}{q}^i x^j_\beta = \underline{\bar{g}_{\alpha\beta}}\frac{d\bar{v}^\alpha}{ds} + \underline{g_{ij}}\bar{v}^\alpha x^j_\beta\frac{du^\mu}{ds}\left(x^i_{\alpha\mu} + \Gamma^i_{\substack{pm\\mp}}x^p_\alpha x^m_\mu\right).$$

Da bi transformisali desnu stranu u prethodnoj jednačini, pođimo od (3.7), koristeći izraze za $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ preko $\bar{g}_{\alpha\beta}$ prema (1.5). Na taj način dobijamo

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\big(g_{ij,k}x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma + g_{ij}x^i_{\alpha\beta}x^j_\gamma + g_{ij}x^i_\alpha x^j_{\gamma\beta} +$$

$$+ g_{ij,k}x^i_\beta x^j_\alpha x^k_\gamma + g_{ij}x^i_{\beta\gamma}x^j_\alpha + g_{ij}x^i_\beta x^j_{\alpha\gamma} -$$

$$- g_{ij,k}x^i_\beta x^j_\gamma x^k_\alpha - g_{ij}x^i_{\beta\alpha}x^j_\gamma - g_{ij}x^i_\beta x^j_{\gamma\alpha}\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(g_{ik,j} + g_{ji,k} - g_{jk,i}\right)x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma + \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})x^i_\alpha x^j_{\beta\gamma} =$$

$$= \Gamma_{ijk}x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma + \underline{g_{ij}}x^i_\alpha x^j_{\beta\gamma},$$

odnosno

(3.15) $$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = g_{\underline{ip}}\, x^i_\alpha \left(x^p_{\beta\gamma} + \Gamma^p_{jk}\, x^j_\beta\, x^k_\gamma \right)$$

na osnovu čega jednačina (3.14) postaje

$$g_{\underline{ij}}\, \underset{\substack{1\\2}}{\xi}{}^i x^j_\beta = \bar{g}_{\underline{\alpha\beta}} \frac{d\bar{v}^\alpha}{ds} + \bar{v}^\alpha \frac{du^\mu}{ds} \overline{\Gamma}_{\substack{\beta\alpha\mu\\ \beta\mu\alpha}} = \bar{g}_{\underline{\alpha\beta}} \left(\frac{d\bar{v}^\alpha}{ds} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\substack{\pi\mu\\ \mu\pi}}\, \bar{v}^\pi \frac{du^\mu}{ds} \right),$$

a prema (3.11):

(3.16) $$g_{\underline{ij}}\, \underset{\theta}{\xi}{}^i x^j_\beta = \bar{g}_{\underline{\alpha\beta}}\, \underset{\theta}{p}{}^\alpha \qquad (\theta = 1, 2).$$

Odavde vidimo da je

(3.17) $$g_{\underline{ij}}\, \underset{\theta}{\xi}{}^i x^j_\beta = 0 \iff \underset{\theta}{p}{}^\alpha = 0,$$

pa važi

T e o r e m a 3.2. Ako kriva C leži u potprostoru GR_M prostora GR_N, onda je potreban i dovoljan uslov paralelizma 1. odn. 2.vrste vektora duž krive C u potprostoru to da je njegov apsolutni izvod odgovarajuće vrste,kao vektor u prostoru,normalan na potprostor.

U $GR_N(GR_M)$ se mogu definisati geodezijske linije na isti način kako se to čini u običnom Rimanovom prostoru. Pri tome se dobija ista geodezijska linija pomoću obe vrste diferenciranja, t.j. torzija koneksije nema uticaja. U slučaju geodezijske linije uzmimo $\bar{v}^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}$, $v^i = \frac{dx^i}{ds}$, pa iz (3.11,12):

$$\underset{1}{p}{}^\alpha = \frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + \overline{\Gamma}^\alpha_{\pi\mu} \frac{du^\pi}{ds} \frac{du^\mu}{ds} = \underset{2}{p}{}^\alpha, \quad \underset{1}{\xi}{}^i = \underset{2}{\xi}{}^i .$$

U tom slučaju,kao posledicu teor.3.2. i definišući glavne normale na način analogan onome u Rimanovom prostoru,imamo sledeću teoremu.

T e o r e m a 3.3. Ako je neka kriva geodezijska linija u GR_N, biće geodezijska linija i u $GR_M \subset GR_N$. Obrnuto,ako je kriva geodezijska linija potprostora GR_M, biće njene glavne normale, posmatrane kao vektori u GR_N, normalne na GR_M.

Teoreme 3.2,3 predstavljaju generalizaciju poznatih teorema za Rimanov prostor ([21] ,str. 149-150, [29] , §52).

GLAVA II

I D E N T I T E T I R I Č I J E V O G T I P A, T E N Z O R I I P S E U D O T E N Z O R I K R I V I N E U P R O S T O R I M A N E S I M E T R I Č N E A F I N E K O N E K S I J E

4. IDENTITETI RIČIJEVOG TIPA U L_N

4.0. U v o d n e n a p o m e n e

Poznato je da u Rimanovom prostoru (i u svakom prostoru simetrične afine koneksije) postoji jedan Ričijev identitet, koji se odnosi na alternirani kovarijantni izvod II reda. U slučaju nesimetrične koneksije postoji 10 mogućnosti za formiranje razlike

$$(4.0) \qquad a^{i_1\ldots i_u}_{j_1\ldots j_v \underset{r}{|} m \underset{s}{|} n} - a^{i_1\ldots i_u}_{j_1\ldots j_v \underset{b}{|} n \underset{c}{|} m} \qquad (r,s,b,c = 1,2) ,$$

gde $\underset{1}{|}$, $\underset{2}{|}$ označavaju dve vrste kovarijantnog izvoda prema (2.1), pa se na osnovu toga dobija 10 identiteta Ričijevog tipa [30].

Ričijev identitet se u literaturi obično izvodi posmatrajući tenzor sa nekim određenim brojem indeksa, obično vektor, pa smo i mi u [30] izložili dokaze za tenzor a^{ij}_{kl}, a na osnovu toga izveli zaključke za opšte slučajeve. Ovde pomenute identitete dokazujemo metodom potpune indukcije. Uvodimo i neke izmene formalne prirode u odnosu na [30].

Osim toga, ovde definišemo 3. i 4. vrstu kovarijantnog diferenciranja i pomoću njih dobijamo jedan nov identitet, pri čemu se pojavljuje još jedan tenzor krivine $(\underset{4}{R})$.

4.1. Identiteti dobijeni pomoću 1. i 2. vrste kovarijantnog diferenciranja

Teorema 4.1. U prostoru L_N važi 1. identitet Ričijevog tipa

$$(4.1)\qquad a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{1}{|}mn} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{1}{|}nm} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{1}{R}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\dots}_{\dots} - \sum_{\beta=1}^{v}\underset{1}{R}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\dots}_{\dots} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{1}{|}p},$$

gde je

$$(4.2)\qquad \underset{1}{R}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{p}_{jm}L^{i}_{pn} - L^{p}_{jn}L^{i}_{pm}$$

tenzor krivine 1. vrste prostora L_N, dok je

$$(4.3)\qquad \binom{p}{r_\alpha}a^{\dots}_{\dots} \overset{d}{=} a^{r_1\dots r_{\alpha-1}\,p\,r_{\alpha+1}\dots r_u}_{t_1\dots t_v},$$

$$(4.4)\qquad \binom{t_\beta}{p}a^{\dots}_{\dots} \overset{d}{=} a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_{\beta-1}\,p\,t_{\beta+1}\dots t_v}.$$

Dokaz. Može se neposredno pokazati da (4.1) važi za u=1, v=1, t.j. za tenzor a^{i}_{k}. Pretpostavimo da (4.1) važi, pa dokažimo da važi za tenzor $b^{r_1\dots r_u r_{u+1}}_{t_1\dots t_v t_{v+1}}$.

Posmatrajmo tenzor

$$(4.5)\qquad a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v} \overset{d}{=} b^{r_1\dots r_u r_{u+1}}_{t_1\dots t_v t_{v+1}}\,c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}}.$$

Primenom (4.1) na tenzor $a^{\dots}_{\dots}$ (4.5) imamo

$$(4.6)\qquad a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{1}{|}mn} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{1}{|}nm} = \sum_{\alpha=1}^{u}\underset{1}{R}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}b^{\dots}_{\dots}\,c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}} -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{v}\underset{1}{R}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}b^{\dots}_{\dots}\,c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\left(b^{\dots}_{\dots\underset{1}{|}p}\,c^{\dots}_{\dots} + b^{\dots}_{\dots}\,c^{\dots}_{\dots\underset{1}{|}p}\right).$$

S druge strane je

$$a^{\cdots}_{\cdots|mn} - a^{\cdots}_{\cdots|nm} = \left(b^{r_1\cdots r_{u+1}}_{t_1\cdots t_{v+1}}\, c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}}\right)_{\underset{1}{|}mn} - \left(b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{\cdots}_{\cdots}\right)_{\underset{1}{|}nm} =$$

$$= \left(b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm}\right)c^{\cdots}_{\cdots} + b^{\cdots}_{\cdots}\left(c^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - c^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm}\right).$$

Ako u poslednjoj zagradi na $c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}}$ primenimo odgovarajući identitet prema (4.1), poslednja jednačina postaje

$$(4.7)\quad a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}mn} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}nm} = \left(b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm}\right)c^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+ b^{\cdots}_{\cdots}\left(\underset{1}{R}{}^{t_{v+1}}{}_{pmn}\, c^{p}_{r_{u+1}} - \underset{1}{R}{}^{p}{}_{r_{u+1}mn}\, c^{t_{v+1}}_{p} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, c^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\right).$$

Izjednačujući desne strane u (4.6,7), dobijamo

$$\left(b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm}\right)c^{\cdots}_{\cdots} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{1}{R}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha} b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}} + \underset{1}{R}{}^{p}{}_{r_{u+1}mn}\, c^{t_{v+1}}_{p}\, b -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{v} \underset{1}{R}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p} b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}} - \underset{1}{R}{}^{t_{v+1}}{}_{pmn}\, c^{p}_{r_{u+1}}\, b^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$- 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\, c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}}.$$

Odgovarajućim izmenama nemih indeksa dobijamo

$$\left(b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm}\right)c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}} = \left[\sum_{\alpha=1}^{u+1} \underset{1}{R}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha} b^{\cdots}_{\cdots} -\right.$$

$$\left. - \sum_{\beta=1}^{v+1} \underset{1}{R}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p} b^{\cdots}_{\cdots} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\right] c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}},$$

pa, pošto je $c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}}$ proizvoljan tenzor, vidimo da (4.1) važi i za tenzor $b^{r_1\cdots r_{u+1}}_{t_1\cdots t_{v+1}}$, čime je teorema dokazana.

T e o r e m a 4.2. U L_N važi 2. i d e n t i t e t R i - č i j e v o g t i p a

$$(4.8) \qquad a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v|mn \atop 2} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v|nm \atop 2} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{2}{R}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\dots}_{\dots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{2}{R}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\dots}_{\dots} + 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}a^{\dots}_{\dots|p \atop 2}$$

gde je

$$(4.9) \qquad \underset{2}{R}^{i}{}_{jmn} \stackrel{d}{=} L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{mj}L^{i}_{np} - L^{p}_{nj}L^{i}_{mp}$$

t e n z o r k r iv i n e 2. v r s t e prostora L_N.

Dokaz na isti način kao kod prethodne teoreme.

T e o r e m a 4.3. U prostoru L_N važi 3. i d e n t i t e t R i č i j e v o g t i p a

$$(4.10) \qquad a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v|m|n \atop 1\ 2} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v|n|m \atop 1\ 2} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{1}{A}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\dots}_{\dots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{2}{A}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\dots}_{\dots} +$$

$$+ 4a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\langle \underset{\smile}{mn}\rangle} + 4a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\langle\langle \underset{\smile}{mn}\rangle\rangle} + 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v|p \atop 1}$$

gde smo stavili

$$(4.11) \qquad \underset{1}{A}^{i}{}_{jmn} \stackrel{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{p}_{jm}L^{i}_{np} - L^{p}_{jn}L^{i}_{mp}$$

$$(4.12) \qquad \underset{2}{A}^{i}{}_{jmn} \stackrel{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{p}_{mj}L^{i}_{pn} - L^{p}_{nj}L^{i}_{pm}$$

$$(4.13) \qquad a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\langle mn\rangle} \stackrel{d}{=} \sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{\underset{\smile}{pm}}\binom{p}{r_\alpha}a^{\dots}_{\dots,n} - \sum_{\beta=1}^{v} L^{p}_{\underset{\smile}{t_\beta m}}\binom{t_\beta}{p}a^{\dots}_{\dots,n} ,$$

$$(4.14) \qquad a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\langle\langle mn\rangle\rangle} \stackrel{d}{=} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha<\beta)}}^{u-1} \sum_{\beta=2}^{u} L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}}L^{r_\beta}_{\underset{\smile}{ns}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{t_\beta}a^{\dots}_{\dots} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{u} \sum_{\beta=1}^{v} L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}}L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s}a^{\dots}_{\dots} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha<\beta)}}^{v-1} \sum_{\beta=2}^{v} L^{p}_{[\underset{\smile}{t_\alpha m}}L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}]}\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s}a^{\dots}_{\dots} ,$$

$$(4.15)\qquad L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}}L^{r_\beta}_{\underset{\smile}{ns}]} \overset{d}{=} \frac{1}{2}\left(L^{r_\alpha}_{pm}L^{r_\beta}_{ns} - L^{r_\alpha}_{mp}L^{r_\beta}_{sn}\right) ,$$

$$(4.16)\qquad \binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots} \overset{d}{=} a^{r_1\cdots r_{\alpha-1}\, p\, r_{\alpha+1}\cdots r_u}_{t_1\cdots t_{\beta-1}\, s\, t_{\beta+1}\cdots t_v} .$$

U slučaju vektora izraz (4.14) je nula. Za slučaj tenzora identitet (4.10) se svodi na

$$(4.17)\qquad a^i_{j\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^i_{j\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} = \underset{1}{A}{}^i{}_{pmn}\, a^p_j - \underset{2}{A}{}^p{}_{jmn}\, a^i_p +$$
$$+4\left(L^i_{\underset{\smile}{pm}} a^p_{j,n} - L^p_{\underset{\smile}{jm}} a^i_{p,n}\right)_{\underset{\smile}{mn}} + 4\left(-L^i_{[\underset{\smile}{pm}}L^s_{\underset{\smile}{nj}]}\, a^p_s\right)_{\underset{\smile}{mn}} + 2L^p_{\underset{\smile}{mn}}\, a^i_{j\underset{1}{|}p} ,$$

gde $(\quad)_{\underset{\smile}{mn}}$ znači antisimetrični deo izraza u zagradi.

Dokaz teoreme. Primenićemo metod potpune indukcije.

Može se neposredno proveriti da (4.17) važi. Pretpostavimo da (4.10) važi, pa dokažimo da važi za proizvoljan tenzor $b^{r_1\cdots r_u r_{u+1}}_{t_1\cdots t_v t_{v+1}}$.

Primenom (4.10) na tenzor $a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v}$, dat pomoću (4.5), dobijamo

$$(4.18)\qquad a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} = \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{1}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha} b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}} -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v} \underset{2}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p} b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}} + 4\left(b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{\cdots}_{\cdots}\right)_{\langle \underset{\smile}{mn}\rangle} +$$
$$+4\left(b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{\cdots}_{\cdots}\right)_{\langle\langle \underset{\smile}{mn}\rangle\rangle} + 2L^p_{\underset{\smile}{mn}}\left(b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\, c^{\cdots}_{\cdots} + b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\right) .$$

Na osnovu (4.13,14) imamo

$$(4.19)\qquad \left(b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{\cdots}_{\cdots}\right)_{\langle mn\rangle} = \sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{\underset{\smile}{pm}}\binom{p}{r_\alpha}\left(b^{\cdots}_{\cdots,n}\, c^{\cdots}_{\cdots} + b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{\cdots}_{\cdots,n}\right) -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v} L^{p}_{\underset{\smile}{t_\beta m}}\binom{t_\beta}{p}\left(b^{\cdots}_{\cdots,n}\, c^{\cdots}_{\cdots} + b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{\cdots}_{\cdots,n}\right) ,$$

$$(4.20)\qquad \left(b^{\cdots}_{\cdots}\, c^{\cdots}_{\cdots}\right)_{\langle\langle mn\rangle\rangle} = c^{\cdots}_{\cdots}\Bigg[\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u} L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}}L^{r_\beta}_{\underset{\smile}{ns}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta} b^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v} L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}}L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s} b^{\cdots}_{\cdots} + \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=2}^{v} L^{p}_{[\underset{\smile}{t_\alpha m}}L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}]}\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s} b^{\cdots}_{\cdots} .$$

S druge strane, na osnovu (4.5) i (2.1) je

$$a^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{m}|\underset{2}{n}} - a^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{n}|\underset{2}{m}} = (b^{\cdots}_{\cdots} c^{\cdots}_{\cdots})_{|\underset{1}{m}|\underset{2}{n}} - (b^{\cdots}_{\cdots} c^{\cdots}_{\cdots})_{|\underset{1}{n}|\underset{2}{m}} = \tag{4.21}$$

$$= 2\left(b^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{m}|\underset{2}{n}} c^{\cdots}_{\cdots} + b^{\cdots}_{\cdots} c^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{m}|\underset{2}{n}} + b^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{m}} c^{\cdots}_{\cdots|\underset{2}{n}} + b^{\cdots}_{\cdots|\underset{2}{n}} c^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{m}}\right)_{\underbrace{mn}} =$$

$$= \left(b^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{m}|\underset{2}{n}} - b^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{n}|\underset{2}{m}}\right) c^{\cdots}_{\cdots} + \left(c^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{m}|\underset{2}{n}} - c^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{n}|\underset{2}{m}}\right) b^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+ 2\Big\{\Big[b^{\cdots}_{\cdots,m} + \sum_{\alpha=1}^{u+1} L^{r_\alpha}_{pm}\binom{p}{r_\alpha} b^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v+1} L^{p}_{t_\beta m}\binom{t_\beta}{p} b^{\cdots}_{\cdots}\Big]\cdot\Big[c^{\cdots}_{\cdots,n} +$$

$$+ L^{t_{v+1}}_{ns} c^{s}_{r_{u+1}} - L^{s}_{n r_{u+1}} c^{t_{v+1}}_{s}\Big] + \Big[b^{\cdots}_{\cdots,n} + \sum_{\alpha=1}^{u+1} L^{r_\alpha}_{np}\binom{p}{r_\alpha} b^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{v+1} L^{p}_{n t_\beta}\binom{t_\beta}{p} b^{\cdots}_{\cdots}\Big]\cdot\Big[c^{\cdots}_{\cdots,m} + L^{t_{v+1}}_{sm} c^{s}_{r_{u+1}} - L^{s}_{r_{u+1} m} c^{t_{v+1}}_{s}\Big]\Big\}_{\underbrace{mn}} .$$

Ako izraz u drugoj zagradi na desnoj strani poslednje jednačine zamenimo prema (4.17), a izraze (4.19,20) zamenimo u (4.18), pa izjednačimo desne strane jednačina (4.18,21), posle dužeg sređivanja dobija se

$$c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}}\left(b^{r_1\cdots r_{u+1}}_{t_1\cdots t_{v+1}|\underset{1}{m}|\underset{2}{n}} - b^{r_1\cdots r_{u+1}}_{t_1\cdots t_{v+1}|\underset{1}{n}|\underset{2}{m}}\right) =$$

$$= c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{u} \underset{1}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha} b^{\cdots}_{\cdots} + \underset{1}{A}{}^{r_{u+1}}{}_{pmn}\binom{p}{r_{u+1}} b^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{v} \underset{2}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p} b^{\cdots}_{\cdots} - \underset{2}{A}{}^{p}{}_{t_{v+1} mn}\binom{t_{v+1}}{p} b^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+ 4\Big[\sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{\underbrace{pm}}\binom{p}{r_\alpha} b^{\cdots}_{\cdots,n} + L^{r_{u+1}}_{\underbrace{pm}}\binom{p}{r_{u+1}} b^{\cdots}_{\cdots,n} -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{v} L^{p}_{\underbrace{t_\beta m}}\binom{t_\beta}{p} b^{\cdots}_{\cdots,n} - L^{p}_{\underbrace{t_{v+1} m}}\binom{t_{v+1}}{p} b^{\cdots}_{\cdots,n}\Big]_{\underbrace{mn}} +$$

$$+4\Big[\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u} L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}} L^{r_\beta}_{\underset{\smile}{ns}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta}b^{\cdots}_{\cdots}+\sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}} L^{r_{u+1}}_{\underset{\smile}{ns}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_{u+1}}b^{\cdots}_{\cdots}-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v} L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}} L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s}b^{\cdots}_{\cdots}-\sum_{\alpha=1}^{u+1} L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}} L^{s}_{\underset{\smile}{nt_{v+1}}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_{v+1}}{s}b^{\cdots}_{\cdots}-$$

$$-\sum_{\beta=1}^{v} L^{r_{u+1}}_{[\underset{\smile}{pm}} L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}]}\binom{p}{r_{u+1}}\binom{t_\beta}{s}b^{\cdots}_{\cdots}+\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=2}^{v} L^{p}_{[\underset{\smile}{t_\alpha m}} L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}]}\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s}b^{\cdots}_{\cdots}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{v} L^{p}_{[\underset{\smile}{t_\alpha m}} L^{s}_{\underset{\smile}{nt_{v+1}}]}\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_{v+1}}{s}b^{\cdots}_{\cdots}\Big]_{\underset{\vee}{mn}}+2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\, b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}$$

Uzimajući u obzir da je $c^{t_{v+1}}_{r_{u+1}}$ proizvoljan tenzor, poslednja jednačina, zbog (4.13,14), postaje

$$b^{r_1\cdots r_{u+1}}_{t_1\cdots t_{v+1}\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n}-b^{r_1\cdots r_{u+1}}_{t_1\cdots t_{v+1}\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m}=\sum_{\alpha=1}^{u+1}\underset{1}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}b^{\cdots}_{\cdots}-$$

$$-\sum_{\beta=1}^{v+1}\underset{2}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}b^{\cdots}_{\cdots}+4b^{\cdots}_{\cdots\langle \underset{\smile}{mn}\rangle}+4b^{\cdots}_{\cdots\langle\langle \underset{\smile}{mn}\rangle\rangle}+2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\, b^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p},$$

t.j. (4.10) važi i za tenzor $b^{r_1\cdots r_{u+1}}_{t_1\cdots t_{v+1}}$, čime je teorema dokazana.

Analogno se mogu dokazati i naredne teoreme (4.4-4.10).

T e o r e m a 4.4. Primenom dveju vrsta kovarijantnog diferenciranja obrnutim redom nego u prethodnoj teoremi, dobija se 4. i d e n t i t e t R i č i j e v o g t i p a u L_N

(4.22) $$a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n}-a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{u}\underset{3}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots}-\sum_{\beta=1}^{v}\underset{4}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots}-$$

$$-4a^{\cdots}_{\cdots\langle \underset{\smile}{mn}\rangle}-4a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle \underset{\smile}{mn}\rangle\rangle}-2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p},$$

gde je

$$(4.23)\qquad \underset{3}{A}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{mj}L^{i}_{pn} - L^{p}_{nj}L^{i}_{pm}\ ,$$

$$(4.24)\qquad \underset{4}{A}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{jm}L^{i}_{np} - L^{p}_{jn}L^{i}_{mp}\ .$$

T e o r e m a 4.5. U L_N važi 5. i d e n t i t e t R i - č i j e v o g t i p a

$$(4.25)\qquad a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}mn} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}nm} =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{u} \underset{5}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{6}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+4a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\langle \underline{mn}\rangle} + 4a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\langle\langle \underline{mn}\rangle\rangle} - L^{p}_{mn}\left(a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\right),$$

gde smo uveli oznake

$$(4.26)\qquad \underset{5}{A}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{jm}L^{i}_{pn} - L^{p}_{nj}L^{i}_{mp}\ ,$$

$$(4.27)\qquad \underset{6}{A}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{mj}L^{i}_{np} - L^{p}_{jn}L^{i}_{pm}\ ,$$

$$(4.28)\qquad a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\langle\langle mn\rangle\rangle} \overset{d}{=} \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u} L^{r_\alpha}_{[\underbrace{pm}}L^{r_\beta}_{\underbrace{sn}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta}a^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v} L^{r_\alpha}_{[\underbrace{pm}}L^{s}_{\underbrace{t_\beta n}]}\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots} + \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=2}^{v} L^{p}_{[\underbrace{t_\alpha m}}L^{s}_{\underbrace{t_\beta n}]}\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots}\ .$$

T e o r e m a 4.6. U L_N važi 6. i d e n t i t e t R i - č i j e v o g t i p a

$$(4.29)\qquad a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}mn} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{7}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{8}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+2a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\langle mn\rangle} + 2a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\langle\langle mn\rangle\rangle}\ ,$$

gde je

$$(4.30)\qquad \underset{7}{A}{}^{i}{}_{jmn} \stackrel{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{p}_{jm} L^{i}_{pn} - L^{p}_{jn} L^{i}_{mp} \,,$$

$$(4.31)\qquad \underset{8}{A}{}^{i}{}_{jmn} \stackrel{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{p}_{mj} L^{i}_{pn} - L^{p}_{jn} L^{i}_{pm}$$

$$(4.32)\qquad a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v \langle\langle mn \rangle\rangle} \stackrel{d}{=} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha<\beta)}}^{u-1} \sum_{\beta=2}^{u} \Big(L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pm}} L^{r_\beta}_{sn} + L^{r_\alpha}_{pn} L^{r_\beta}_{\underset{\vee}{sm}}\Big) \binom{p}{r_\alpha} \binom{s}{r_\beta} a^{\dots}_{\dots} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{u} \sum_{\beta=1}^{v} \Big(L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pm}} L^{s}_{t_\beta n} + L^{r_\alpha}_{pn} L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta n}}\Big) \binom{p}{r_\alpha} \binom{t_\beta}{s} a^{\dots}_{\dots} +$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha<\beta)}}^{v-1} \sum_{\beta=2}^{v} \Big(L^{p}_{\underset{\vee}{t_\alpha m}} L^{s}_{t_\beta n} + L^{p}_{t_\alpha n} L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta m}}\Big) \binom{t_\alpha}{p} \binom{t_\beta}{s} a^{\dots}_{\dots} \,.$$

T e o r e m a 4 . 7. U L_N važi 7. i d e n t i t e t R i- č i j e v o g t i p a

$$(4.33)\qquad a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v \underset{1}{|} mn} - a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v \underset{2}{|} n \underset{1}{|} m} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{9}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\dots}_{\dots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{10}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\dots}_{\dots} +$$

$$+ 2 a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v \langle nm \rangle} + 2 a^{r_1 \dots r_u}_{t_1 \dots t_v \langle\langle nm \rangle\rangle} - \Big(L^{p}_{mn} a^{\dots}_{\dots \underset{1}{|} p} - L^{p}_{nm} a^{\dots}_{\dots \underset{2}{|} p}\Big) \,,$$

gde smo stavili

$$(4.34)\qquad \underset{9}{A}{}^{i}{}_{jmn} \stackrel{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{jm} L^{i}_{pn} - L^{p}_{nj} L^{i}_{pm} \,,$$

$$(4.35)\qquad \underset{10}{A}{}^{i}{}_{jmn} \stackrel{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{jm} L^{i}_{np} - L^{p}_{jn} L^{i}_{pm}$$

T e o r e m a 4 . 8. U L_N važi 8. i d e n t i t e t R i- č i j e v o g t i p a

$$(4.36) \qquad a^{r_1 \cdots r_u}_{t_1 \cdots t_v \underset{2}{|} mn} - a^{r_1 \cdots r_u}_{t_1 \cdots t_v \underset{1}{|} n \underset{2}{|} m} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{11}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{12}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$-2a^{\cdots}_{\cdots\langle nm\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle} + L^p_{mn} a^{\cdots}_{\cdots \underset{1}{|} p} - L^p_{nm} a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} p} ,$$

gde je

$$(4.37) \qquad \underset{11}{A}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj} L^i_{np} - L^p_{jn} L^i_{mp} ,$$

$$(4.38) \qquad \underset{12}{A}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{mp} ,$$

$$(4.39) \qquad a^{r_1 \cdots r_u}_{t_1 \cdots t_v \langle\langle mn\rangle\rangle} \overset{d}{=} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha<\beta)}}^{u-1} \sum_{\beta=2}^{u} \Big(L^{r_\alpha}_{mp} L^{r_\beta}_{\underset{\vee}{ns}} + L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{np}} L^{r_\beta}_{ms} \Big) \binom{p}{r_\alpha} \binom{s}{r_\beta} a^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{u} \sum_{\beta=1}^{v} \Big(L^{r_\alpha}_{mp} L^{s}_{\underset{\vee}{nt_\beta}} + L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{np}} L^{s}_{mt_\beta} \Big) \binom{p}{r_\alpha} \binom{t_\beta}{s} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha<\beta)}}^{v-1} \sum_{\beta=2}^{v} \Big(L^{p}_{mt_\alpha} L^{s}_{\underset{\vee}{nt_\beta}} + L^{p}_{\underset{\vee}{nt_\alpha}} L^{s}_{mt_\beta} \Big) \binom{t_\alpha}{p} \binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots} .$$

T e o r e m a 4 . 9 . U prostoru L_N važi 9. i d e n t i t e t R i č i j e v o g t i p a

$$(4.40) \qquad a^{r_1 \cdots r_u}_{t_1 \cdots t_v \underset{2}{|} mn} - a^{r_1 \cdots r_u}_{t_1 \cdots t_v \underset{2}{|} n \underset{1}{|} m} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{13}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{14}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$-2a^{\cdots}_{\cdots\langle mn\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} ,$$

gde je

$$(4.41) \qquad \underset{13}{A}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{pm} ,$$

$$(4.42) \qquad \underset{14}{A}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{mp} .$$

T e o r e m a 4 . 10 . U L_N važi 10. i d e n t i t e t R i č i j e v o g t i p a

(4.43) $$a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v|m|n \atop 1\;2} - a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v|n|m \atop 2\;1} =$$
$$\sum_{\alpha=1}^{u} \underset{15}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{15}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$- L^{p}_{\underset{\smile}{nm}} \left(a^{\cdots}_{\cdots \underset{1}{|} p} - a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} p} \right),$$

gde smo stavili

(4.44) $$\underset{15}{A}{}^{i}{}_{jmn} \stackrel{d}{=} L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{jm} L^{i}_{np} - L^{p}_{nj} L^{i}_{pm} .$$

Jednačina (4.43) može se napisati u drugačijem obliku. Naime, ako prema jednačini (2.1) izračunamo razliku u poslednjem članu u (4.43), dobijamo d r u g i o b l i k 10. i d e n t i t e t a R i č i j e v o g t i p a

(4.45) $$a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v|m|n \atop 1\;2} - a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v|n|m \atop 2\;1} =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{3}{R}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{3}{R}{}^{p}{}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} ,$$

gde je

(4.46) $$\underset{3}{R}{}^{i}{}_{jmn} \stackrel{d}{=} \underset{15}{A}{}^{i}{}_{jmn} + L^{p}_{\underset{\smile}{nm}} (L^{i}_{pj} - L^{i}_{jp})$$

t e n z o r k r i v i n e 3. v r s t e prostora L_N.

N a p o m e n a . Veličine $\underset{t}{A}{}^{i}{}_{jmn}$ (t=1,...,15), koje se pojavljuju u teoremama 4.3.-4.10., nisu tenzori. Na pr. za specijalni slučaj jednačine (4.29) dobijamo

$$a_{k \underset{1}{|} mn} - a_{k \underset{1}{|} n \underset{2}{|} m} = - \underset{8}{A}{}^{p}{}_{kmn} a_p - 2 L^{p}_{\underset{\smile}{km}} a_{p,n}$$

odakle se vidi da $\underset{t}{A}{}^{i}{}_{jmn}$ nije tenzor, pošto $a_{p,n} = \frac{\partial a_p}{\partial x^n}$ to nije.

Veličine $\underset{t}{A}{}^{i}{}_{jmn}$ (t=1,...,15) date jednačinama (4.11,12,23, 24,26,27,30,31,34,35,37,38,41,42,44) zovemo p s e u d o t e n z o r i m a k r i v i n e prostora L_N redom 1.,...,15. vrste.

4.2. Identiteti dobijeni pomoću 3. i 4. vrste kovarijantnog diferenciranja

Ako pri formiranju kovarijantnog izvoda tenzora sa kontravarijantnim indeksima postupimo kao u slučaju 1. vrste diferenciranja, t.j. prema (2.1a), a sa kovarijantnim indeksima prema (2.1b), t.j. kao u slučaju 2. vrste kovarijantnog diferenciranja-dobijamo kovarijantni izvod 3. vrste. Postupimo li obrnuto, t.j. ako kovarijantni izvod tenzora formiramo tako što sa kontrvarijantnim indeksima postupimo prema (2.1b), a sa kovarijantnim prema (2.1a)- dobijamo kovarijantni izvod 4. vrste. Dakle

$$(4.47a)\quad a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{3}{|}m}=a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v,m}+\sum_{\alpha=1}^{u}L^{r_\alpha}_{pm}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots}-\sum_{\beta=1}^{v}L^{p}_{mt_\beta}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots},$$

$$(4.47b)\quad a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{4}{|}m}=a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v,m}+\sum_{\alpha=1}^{u}L^{r_\alpha}_{mp}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots}-\sum_{\beta=1}^{v}L^{p}_{t_\beta m}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots}.$$

Iz (4.47) je očigledno

$$(4.48a\text{-}d)\quad a^i_{\underset{3}{|}m}=a^i_{\underset{1}{|}m},\quad a_{k\underset{3}{|}m}=a_{k\underset{2}{|}m};\quad a^i_{\underset{4}{|}m}=a^i_{\underset{2}{|}m},\quad a_{k\underset{4}{|}m}=a_{k\underset{1}{|}m}.$$

Mogu se, dalje, na osnovu (4.47) posmatrati razlike

$$(4.49)\qquad a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{\kappa}{|}m\underset{\varsigma}{|}n}-a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{\delta}{|}n\underset{\tau}{|}m}\qquad(\kappa,\varsigma,\delta,\tau=3,4)$$

i dobiti novih 10 identiteta Ričijevog tipa za L_N. Međutim, pokazuje se da se u tim identitetima pojavljuju isti tenzori odn. pseudotenzori krivine kao u slučaju 1. i 2. vrste diferenciranja, samo u drugim kombinacijama, sa jednim izuzetkom, koji obuhvata sledeća teorema.

T e o r e m a 4 . 11 . U L_N važi 11. i d e n t i t e t R i č i j e v o g t i p a

$$(4.50)\qquad a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v \underset{3}{|} m \underset{4}{|} n} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v \underset{4}{|} n \underset{3}{|} m} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{15}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\dots}_{\dots} + \sum_{\beta=1}^{v} \underset{15}{A}{}^{p}{}_{t_\beta nm} \binom{t_\beta}{p} a^{\dots}_{\dots} - L^{p}_{mn}\left(a^{\dots}_{\dots \underset{3}{|} p} - a^{\dots}_{\dots \underset{4}{|} p}\right).$$

Dokaz teoreme se može izvesti analogno prethodnim slučajevima.

Jednačina (4.50) može se napisati u drugom ubliku. Naime, ako izračunamo razliku u poslednjoj zagradi prema (4.47), dobijamo

$$(4.51)\qquad a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v \underset{3}{|} m \underset{4}{|} n} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v \underset{4}{|} n \underset{3}{|} m} = \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{4}{R}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\dots}_{\dots} + \sum_{\beta=1}^{v} \underset{3}{R}{}^{p}{}_{t_\beta nm} \binom{t_\beta}{p} a^{\dots}_{\dots},$$

gde smo stavili

$$(4.52)\qquad \underset{4}{R}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} \underset{15}{A}{}^{i}{}_{jmn} + L^{p}_{mn}\left(L^{i}_{pj} - L^{i}_{jp}\right).$$

Jednačina (4.52) predstavlja d r u g i o b l i k 11. i d e n t i t e t a R i č i j e v o g t i p a. Veličina data sa (4.52) je tenzor i zovemo je t e n z o r o m k r i v i n e 4. v r s t e prostora L_N.

5. VEZE IZMEĐU TENZORA I PSEUDOTENZORA KRIVINE PROSTORA L_N I TENZORA KRIVINE PRIDRUŽENOG PROSTORA SIMETRIČNE KONEKSIJE

5.0. U v o d n e n a p o m e n e

Ovo pitanje smo (osim za $\underset{4}{R}$)obradili u [31]. Kao što smo zaklju čili na kraju §1 ovoga rada, simetrični deo $L^{i}_{\underline{jk}}$ koeficijenata koneksije prostora L_N transformiše se po istom zakonu

(1.16),po kome se transformišu L^i_{jk} , dok se antisimetrični deo $L^i_{\underset{\vee}{jk}}$ transformiše kao tenzor,to je tenzor torzije prostora L_N .

Prema tome,veličine $L^i_{\underline{jk}}$ mogu se posmatrati kao koeficijenti simeteične afine koneksije.Ako,dalje,posmatramo isti skup tačaka kao u slučaju L_N,ali umesto L^i_{jk} kao koeficijente koneksije koristimo $L^i_{\underline{jk}}$, dobijamo prostor simetrične koneksije $\overset{0}{L}_N$, za koji ćemo reći da je p r i d r u ž e n prostoru L_N.

5.1. T e n z o r i $\underset{1}{R}$, $\underset{2}{R}$, $\underset{3}{R}$, $\underset{4}{R}$

Zamenjujući u (4.2) L^i_{jk} sa

(5.1) $$L^i_{jk} = L^i_{\underline{jk}} + L^i_{\underset{\vee}{jk}}$$

dobijamo

(5.2) $$\begin{aligned}\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} &+ \left(L^i_{\underset{\vee}{jm},n} + L^i_{\underline{pn}} L^p_{\underset{\vee}{jm}} - L^p_{\underline{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}} - L^p_{\underline{mn}} L^i_{\underset{\vee}{jp}}\right) - \\ &- \left(L^i_{\underset{\vee}{jn},m} + L^i_{\underline{pm}} L^p_{\underset{\vee}{jn}} - L^p_{\underline{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} - L^p_{\underline{nm}} L^i_{\underset{\vee}{jp}}\right) + L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}} ,\end{aligned}$$

gde je $R^i{}_{jmn}$ tenzor krivine pridruženog prostora $\overset{0}{L}_N$, t.j.

(5.3) $$R^i{}_{jmn} = L^i_{\underline{jm},n} - L^i_{\underline{jn},m} + L^p_{\underline{jm}} L^i_{\underline{pn}} - L^p_{\underline{jn}} L^i_{\underline{pm}} .$$

Ako tačkom i zarezom (;)označimo kovarijantni izvod u odnosu na $L^i_{\underline{jk}}$, jednačina (5.2) postaje

(5.4) $$\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + L^i_{\underset{\vee}{jm};n} - L^i_{\underset{\vee}{jn};m} + L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}} ,$$

t.j. uspostavili smo vezu između $\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn}$ i $R^i{}_{jmn}$.

Polazeći od tenzora krivine 2.vrste,na isti način dobijamo

(5.5) $$\underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + L^i_{\underset{\vee}{mj};n} - L^i_{\underset{\vee}{nj};m} + L^p_{\underset{\vee}{mj}} L^i_{\underset{\vee}{np}} - L^p_{\underset{\vee}{nj}} L^i_{\underset{\vee}{mp}} .$$

Za tenzore krivine 3. i 4. vrste (4.46,52) imamo

$$(5.6)\quad \underset{3}{R}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}$$

$$(5.7)\quad \underset{4}{R}{}^{i}{}_{jmn} = \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad -2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}\,.$$

5.2. Pseudotenzori $\underset{1}{A},\ldots,\underset{15}{A}$

Za pseudotenzore krivine $\underset{t}{A}{}^{i}{}_{jmn}$ ($t=1,\ldots,15$) iz §4, kao u prethodnim slučajevima, imamo

$$(5.8)\quad \underset{1}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{jn};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}} + 2L^{p}_{\underline{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - 2L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}}$$

$$(5.9)\quad \underset{2}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{jn};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underline{pn}} - 2L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underline{pm}}$$

$$(5.10)\quad \underset{3}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} + 2L^{p}_{\underline{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - 2L^{p}_{\underline{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}}\,,$$

$$(5.11)\quad \underset{4}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underline{np}} - 2L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underline{mp}}\,,$$

$$(5.12)\quad \underset{5}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}} + 2L^{p}_{\underline{jm}} L^{i}_{pn} - 2L^{p}_{\underline{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}} + 2L^{p}_{\underline{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}$$

$$(5.13)\quad \underset{6}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underline{np}} - 2L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underline{pm}} + 2L^{p}_{\underline{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}\,,$$

$$(5.14)\quad \underset{7}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{jn};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}} - 2L^{p}_{\underline{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}}\,,$$

$$(5.15)\quad \underset{8}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{jn};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underline{pn}}\,,$$

$$(5.16)\quad \underset{9}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} + 2L^{p}_{\underline{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} + 2L^{p}_{\underline{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}$$

$$(5.17)\quad \underset{10}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} - 2L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underline{pm}} + 2L^{p}_{\underline{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}\,,$$

$$(5.18)\quad \underset{11}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}} + 2L^{p}_{\underline{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - 2L^{p}_{\underline{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}\,,$$

$$(5.19)\quad \underset{12}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{jn};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}} + 2L^{p}_{\underline{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{pj}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underline{mp}}\,,$$

$$(5.20)\quad \underset{13}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{mj}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} - 2L^{p}_{\underline{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}}\,,$$

$$(5.21)\quad \underset{14}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{mp}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underline{np}}\,,$$

$$(5.22)\quad \underset{15}{A}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} + 2L^{p}_{\underline{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}$$

Iz navedenih izraza se vidi da veličine $\underset{t}{A}{}^{i}{}_{jmn}$ (t=1,...,15) nisu tenzori, jer je $L^{i}_{\underset{\vee}{jk}}$ tenzor, a $L^{i}_{\underline{jk}}$ nije tenzor. Takođe, iz odgovarajućih izraza, vidimo da su $\underset{t}{R}{}^{i}{}_{jmn}$ (t=1,...,4) tenzori.

6. SLOŽENI IDENTITETI RIČIJEVOG TIPA I IZVEDENI TENZORI KRIVINE U L_N

6.0. U ovom § ćemo izvesnim kombinacijama identiteta Ričijevog tipa iz §4 dobiti (složene) identitete u kojima se pojapljuju samo tenzori krivine (a ne i pseudotenzori), kako ranije izvedeni $\underset{1}{R}, \underset{2}{R}, \underset{3}{R}, \underset{4}{R}$ tako i novi $\underset{1}{\tilde{R}}, \ldots\ldots, \underset{8}{\tilde{R}}$, koji su izvedeni pomoću pseudotenzora krivine $\underset{1}{A}, \ldots, \underset{15}{A}$.

6.1. Uzmemo li zbir jednačina (4.1) i (4.8), što ćemo označavati simbolički (4.1+8), dobijamo

$$(6.1)\qquad \underset{1}{\mathcal{L}} \equiv a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}nm} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{u}(\underset{1}{R}+\underset{2}{R})^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}(\underset{1}{R}+\underset{2}{R})^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} - 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\left(a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\right),$$

gde smo označili

$$(6.2)\qquad (\underset{1}{R}+\underset{2}{R})^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} \underset{1}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn}\,.$$

Međutim, leva strana u (6.1) može se posmatrati i kao $2(4.25)_{\underset{\vee}{mn}}$, t.j. kao dvostruki antisimetrični deo jednačine (4.25) po indeksima m,n (analogno ćemo označavati i u drugim slučajevima). Dakle

$$(6.3)\qquad \underset{1}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha} 2\underset{5}{A}{}^{r_\alpha}{}_{p\underset{\vee}{mn}}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta} 2\underset{6}{A}{}^{p}{}_{t_\beta\underset{\vee}{mn}}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} - 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\left(a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\right).$$

Iz (6.1,3) dobijamo da je antisimetrični deo pseudotenzora $\underset{5}{A}, \underset{6}{A}$ – tenzor:

(6.4) $$\underset{5}{A}{}^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} = \underset{6}{A}{}^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} = \frac{1}{2}(\underset{1}{R}+\underset{2}{R})^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} .$$

6.2. Iz (4.10+22) dobijamo

(6.5) $$\underset{2}{\mathcal{L}} \equiv a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{u}(\underset{1}{A}+\underset{3}{A})^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}(\underset{2}{A}+\underset{4}{A})^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}(a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}).$$

Pošto levu stranu u (6.5) možemo posmatrati i kao $2(4.43)_{\underset{\vee}{mn}}$, dobijamo

(6.6) $$\underset{2}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u} 2\underset{15}{A}{}^{r_\alpha}{}_{p\underset{\vee}{mn}}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} 2\underset{15}{A}{}^{p}{}_{t_\beta\underset{\vee}{mn}}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}(a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}) .$$

Upoređivanjem (6.5,6) vidimo da je

(6.7) $$\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} \overset{d}{=} \frac{1}{2}(\underset{1}{A}+\underset{3}{A})^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{2}{A}+\underset{4}{A})^{i}{}_{jmn} = \underset{15}{A}{}^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}}$$

tenzor.

Na osnovu (5.8,10) odn.(5.9,11) ili (5.22) dobijamo

(6.8) $$\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} - L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} + L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} .$$

Dakle, (6.5) se može napisati u obliku

(6.9)
(I) $$\underset{2}{\mathcal{L}} \equiv a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{u} 2\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} 2\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}(a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}) .$$

Iz (6.4,8):

(6.8′) $$\frac{1}{2}\left(\underset{1}{R}+\underset{2}{R}\right)^{i}{}_{jmn}+\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn}=2R^{i}{}_{jmn}\,.$$

6.3. Pomoću (4.29+40) se dobija

(6.10) $$\underset{3}{\mathcal{L}}\equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}mn}-a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m}+a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}mn}-a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m}=$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{u}\left(\underset{7}{A}+\underset{13}{A}\right)^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots}-\sum_{\beta=1}^{v}\left(\underset{8}{A}+\underset{14}{A}\right)^{p}{}_{t_\beta mn}a^{\cdots}_{\cdots}+2\left(a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle}+a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle}\right).$$
Kako se $\underset{3}{\mathcal{L}}$ može dobiti i pomoću (4.33+36), to je

(6.11) $$\underset{3}{\mathcal{L}}\equiv\sum_{\alpha=1}^{u}\left(\underset{9}{A}+\underset{11}{A}\right)^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots}-\sum_{\beta=1}^{v}\left(\underset{10}{A}+\underset{12}{A}\right)^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots}+2\left(a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle}+a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle}\right)$$

Na osnovu (4.32,39) je

$$a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle}+a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle}=\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u}\left(L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pm}}L^{r_\beta}_{sn}+L^{r_\alpha}_{pn}L^{r_\beta}_{\underset{\vee}{sm}}+L^{r_\alpha}_{np}L^{r_\beta}_{\underset{\vee}{ms}}+L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{mp}}L^{r_\beta}_{ns}\right)\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta}a^{\cdots}_{\cdots}-$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v}\left(L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pm}}L^{s}_{t_\beta n}+L^{r_\alpha}_{pn}L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta m}}+L^{r_\alpha}_{np}L^{s}_{\underset{\vee}{mt_\beta}}+L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{mp}}L^{s}_{nt_\beta}\right)\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots}+$$
$$+\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=2}^{v}\left(L^{p}_{\underset{\vee}{t_\alpha m}}L^{s}_{t_\beta n}+L^{p}_{t_\alpha n}L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta m}}+L^{p}_{nt_\alpha}L^{s}_{\underset{\vee}{mt_\beta}}+L^{p}_{\underset{\vee}{mt_\alpha}}L^{s}_{nt_\beta}\right)\binom{p}{t_\alpha}\binom{s}{t_\beta}a^{\cdots}_{\cdots}\,,$$
što se može napisati

(6.12) $$a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}}\overset{d}{=}a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle}+a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle}=\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u}2\left(L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pm}}L^{r_\beta}_{sn}+L^{r_\alpha}_{pn}L^{r_\beta}_{\underset{\vee}{sm}}\right)\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta}a^{\cdots}_{\cdots}-$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v}2\left(L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pm}}L^{s}_{t_\beta n}+L^{r_\alpha}_{pn}L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta m}}\right)\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots}+\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=2}^{v}2\left(L^{p}_{\underset{\vee}{t_\alpha m}}L^{s}_{t_\beta n}+L^{p}_{t_\alpha n}L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta m}}\right)\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots}\,,$$
odakle vidimo da je izraz $a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle}+a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle}=a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}}$ tenzor, mada sabirci koji ga čine to nisu. Takođe vidimo da je taj tenzor simetričan po indeksima po indeksima m,n , t.j.

(6.13) $$a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}}=a^{\cdots}_{\cdots\{nm\}}\,.$$

Na osnovu(6.10,11,13) je

(6.14) (II) $$\underset{3}{\mathcal{L}}\equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}mn}-a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m}+a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}mn}-a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m}=$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{u}2\underset{2}{\widetilde{R}}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots}-\sum_{\beta=1}^{v}2\underset{3}{\widetilde{R}}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots}+2a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}}\,,$$

gde su veličine

$$\underset{2}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{2}\left(\underset{7}{A} + \underset{13}{A}\right)^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{2}\left(\underset{9}{A} + \underset{11}{A}\right)^{i}{}_{jmn} , \tag{6.15}$$

$$\underset{3}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{2}\left(\underset{8}{A} + \underset{14}{A}\right)^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{2}\left(\underset{10}{A} + \underset{12}{A}\right)^{i}{}_{jmn} \tag{6.16}$$

tenzori dobijeni iz pseudotenzora krivine, dok je tenzor $a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}}$ dat pomoću (6.12).

Na osnovu (5.14,20),(5.15,21) odn.(5.16,18),(5.17,19) dobijamo

$$\underset{2}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{p}_{\underset{\smile}{jm}} L^{i}_{\underset{\smile}{pn}} + L^{p}_{\underset{\smile}{jn}} L^{i}_{\underset{\smile}{pm}} , \tag{6.17}$$

$$\underset{3}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} - L^{p}_{\underset{\smile}{jm}} L^{i}_{\underset{\smile}{pn}} - L^{p}_{\underset{\smile}{jn}} L^{i}_{\underset{\smile}{pm}} . \tag{6.18}$$

Iz (6.17,18):

$$\frac{1}{2}\left(\underset{2}{\widetilde{R}} + \underset{3}{\widetilde{R}}\right)^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} . \tag{6.19}$$

6.4.1. Ako saberemo (4.36) i (4.43), u(4.40) promenimo mesta indeksima m,n pa to oduzmemo od navedenog zbira, što označujemo simbolički $(4.36+43-40_{nm})$, dobijamo

$$\underset{4}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v \underset{2}{|} mn} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v \underset{1}{|} n \underset{2}{|} m} + a^{\cdots}_{\cdots \underset{1}{|} m \underset{2}{|} n} - a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} n \underset{1}{|} m} - a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} nm} + a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} m \underset{1}{|} n} = \tag{6.20}$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{u}\left[\left(\underset{11}{A} + \underset{15}{A}\right)^{r_\alpha}{}_{pmn} - \underset{13}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pnm}\right]\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\left[\left(\underset{12}{A} + \underset{15}{A}\right)^{p}{}_{t_\beta mn} - \underset{14}{A}{}^{p}{}_{t_\beta nm}\right]\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}} a^{\cdots}_{\cdots \underset{1}{|} p} .$$

Ako se koristi drugi oblik 10. identiteta Ričijevog tipa (4.45), dobijamo $(4.36+45-40_{nm})$, odakle

$$\underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left[\left(\underset{11}{A} + \underset{3}{R}\right)^{r_\alpha}{}_{pmn} - \underset{13}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pnm}\right]\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \tag{6.20'}$$
$$- \sum_{\beta=1}^{v}\left[\left(\underset{12}{A} + \underset{3}{R}\right)^{p}{}_{t_\beta mn} - \underset{14}{A}{}^{p}{}_{t_\beta nm}\right]\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} + L^{p}_{mn} a^{\cdots}_{\cdots \underset{1}{|} p} - L^{p}_{nm} a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} p} ,$$

odakle sledi da izrazi uz $\sum\limits_{\alpha}$ i $\sum\limits_{\beta}$ nisu tenzori, jer izraz koji čine poslednja dva sabirka u (6.20′) nije tenzor.

6.4.2. Međutim, u (6.20), na levoj strani, postoji ukupno 6 načina (broj permutacija od 3 elementa) kombinovanja članova sa znakom + i onih sa znakom − . Dakle, osim (6.20), postoji još 5 mogućnosti.

Posmatrajući, dakle, $(4.36\text{-}36_{nm}+22)$, dobijamo

$$(6.21)\qquad \underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big(\underset{11}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} + \underset{3}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} - \underset{11}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big)\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v}\Big(\underset{12}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn} + \underset{4}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn} - \underset{12}{A}{}^{p}{}_{t_\beta nm}\Big)\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\ .$$

6.4.3. Treća mogućnost da se dobije $\underset{4}{\mathcal{L}}$ je $(4.40+10-40_{nm})$, odakle

$$(6.22)\qquad \underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big[\big(\underset{1}{A} + \underset{13}{A}\big)^{r_\alpha}{}_{pmn} - \underset{13}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big]\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v}\Big[\big(\underset{2}{A} + \underset{14}{A}\big)^{p}{}_{t_\beta mn} - \underset{14}{A}{}^{p}{}_{t_\beta nm}\Big]\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\ ,$$

jer je na osnovu (4.14,39)

$$(6.23)\qquad a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle \underset{\smile}{mn}\rangle\rangle} + a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle \underset{\smile}{nm}\rangle\rangle} = 0\ .$$

Naime, $\quad a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle} + a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} =$

$$= \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u}\Big(L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}}L^{r_\beta}_{\underset{\smile}{ns}]} + L^{r_\alpha}_{np}L^{r_\beta}_{\underset{\smile}{ms}} + L^{r_\alpha}_{\underset{\smile}{mp}}L^{r_\beta}_{ns}\Big)\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta} a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v}\Big(L^{r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}}L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}]} + L^{r_\alpha}_{np}L^{s}_{\underset{\smile}{mt_\beta}} + L^{r_\alpha}_{\underset{\smile}{mp}}L^{s}_{nt_\beta}\Big)\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots} +$$
$$+\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=2}^{v}\Big(L^{p}_{[\underset{\smile}{t_\alpha m}}L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}]} + L^{p}_{nt_\alpha}L^{s}_{\underset{\smile}{mt_\beta}} + L^{p}_{\underset{\smile}{mt_\alpha}}L^{s}_{nt_\beta}\Big)\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots}\ ,$$

odakle se vidi da je veličina

$$(6.24)\qquad a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle} + a_{\langle\langle nm\rangle\rangle} = \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u}\Big(L^{r_\alpha}_{mp}L^{r_\beta}_{\underset{\smile}{ns}} + L^{r_\alpha}_{np}L^{r_\beta}_{\underset{\smile}{ms}}\Big)\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta} a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v}\Big(L^{r_\alpha}_{mp}L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}} + L^{r_\alpha}_{np}L^{s}_{\underset{\smile}{mt_\beta}}\Big)\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots} +$$
$$+\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=2}^{v}\Big(L^{p}_{mt_\alpha}L^{s}_{\underset{\smile}{nt_\beta}} + L^{p}_{nt_\alpha}L^{s}_{\underset{\smile}{mt_\beta}}\Big)\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots}$$

simetrična po m,n,pa važi (6,23).

6.4.4. $\underset{4}{\mathcal{L}}$ u (6.20) se može dobiti iz (4.40-36_{nm}-43_{nm}):

$$(6.25)\qquad \underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big[\underset{13}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} - (\underset{11}{A}+\underset{15}{A})^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big]\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v}\Big[\underset{14}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn} - (\underset{12}{A}+\underset{15}{A})^{p}{}_{t_\beta nm}\Big]\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\,.$$

Ako iskoristimo drugi oblik 10.identiteta Ričijevog tipa, dobijamo (4.40-36_{nm}-45_{nm}),odakle

$$(6.25')\qquad \underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big[\underset{13}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pmn} - (\underset{3}{R}+\underset{11}{A})^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big]\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v}\Big[\underset{14}{A}{}^{p}{}_{t_\beta mn} - (\underset{3}{R}+\underset{12}{A})^{p}{}_{t_\beta nm}\Big]\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + L^{p}_{mn}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p} - L^{p}_{nm}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\,,$$

odakle sledi da izrazi uz $\sum\limits_{\alpha}$ i $\sum\limits_{\beta}$ nisu tenzori.

Sabiranjem (6.20') i (6.25'):

$$2\underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big[(\underset{11}{A}+\underset{3}{R}+\underset{13}{A})^{r_\alpha}{}_{pmn} - (\underset{11}{A}+\underset{3}{R}+\underset{13}{A})^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big]\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v}\Big[(\underset{12}{A}+\underset{3}{R}+\underset{14}{A})^{p}{}_{t_\beta mn} - (\underset{12}{A}+\underset{3}{R}+\underset{14}{A})^{p}{}_{t_\beta nm}\Big]\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} +$$
$$+2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} + 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\,,$$

t.j.

$$(6.26)\qquad \underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}(\underset{11}{A}+\underset{13}{A}+\underset{3}{R})^{r_\alpha}{}_{p\underset{\smile}{mn}}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v}(\underset{12}{A}+\underset{14}{A}+\underset{3}{R})^{p}{}_{t_\beta\underset{\smile}{mn}}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\big(a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\big)\,.$$

6.4.5. $\underset{4}{\mathcal{L}}$ u (6.20) se može dobiti iz (4.8+10+22),pa:

$$(6.27)\qquad \underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}(\underset{1}{A}+\underset{3}{A}+\underset{2}{R})^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v}(\underset{2}{A}+\underset{4}{A}+\underset{2}{R})^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\,.$$

6.4.6. Posmatrajući,na kraju, $\underset{4}{\mathcal{L}}$ kao (4.8+43−43$_{nm}$),imamo

$$(6.28)\quad \underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left(\underset{2}{R}^{r_\alpha}{}_{pmn} + 2\underset{15}{A}^{r_\alpha}{}_{p\underset{\vee}{mn}}\right)\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{v}\left(\underset{2}{R}^{p}{}_{t_\beta mn} + 2\underset{15}{A}^{p}{}_{t_\beta \underset{\vee}{mn}}\right)\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\,.$$

Koristeći 2.oblik 10.identiteta Ričijevog tipa,dobijamo (4.8+45−45$_{nm}$),odakle

$$(6.28')\quad \underset{4}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left(\underset{2}{R}^{r_\alpha}{}_{pmn} + 2\underset{3}{R}^{r_\alpha}{}_{p\underset{\vee}{mn}}\right)\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{v}\left(\underset{2}{R}^{p}{}_{t_\beta mn} + 2\underset{3}{R}^{p}{}_{t_\beta \underset{\vee}{mn}}\right)\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\,.$$

6.4.7. Prema (6.20−22,25,27,28) imamo

$$(6.29)\quad \underset{4}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v|m\underset{2}{|}n} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}nm} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} =$$

$$(\mathrm{IV})\quad = \sum_{\alpha=1}^{u}\left(\underset{2}{R} + 2\underset{1}{\widetilde{R}}\right)^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\left(\underset{2}{R} + 2\underset{1}{\widetilde{R}}\right)^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\,,$$

jer je (uzimajući u obzir (6.7)):

$$(6.30)\quad \underset{1}{A}^{i}{}_{jmn} + 2\underset{13}{A}^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} = \underset{13}{A}^{i}{}_{jmn} - \left(\underset{11}{A} + \underset{15}{A}\right)^{i}{}_{jnm} = \left(\underset{11}{A} + \underset{15}{A}\right)^{i}{}_{jmn} - \underset{13}{A}^{i}{}_{jnm} =$$

$$= \left(\underset{1}{A} + \underset{3}{A} + \underset{2}{R}\right)^{i}{}_{jmn} = \left(\underset{12}{A} + \underset{15}{A}\right)^{i}{}_{jmn} - \underset{14}{A}^{i}{}_{jnm} = 2\underset{11}{A}^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} + \underset{3}{A}^{i}{}_{jmn} =$$

$$= \underset{4}{A}^{i}{}_{jmn} + 2\underset{12}{A}^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} = \underset{2}{A}^{i}{}_{jmn} + 2\underset{14}{A}^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} = \underset{2}{R}^{i}{}_{jmn} + 2\underset{15}{A}^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} =$$

$$= \underset{14}{A}^{i}{}_{jmn} - \left(\underset{12}{A} + \underset{15}{A}\right)^{i}{}_{jnm} = \left(\underset{2}{R} + \underset{2}{A} + \underset{4}{A}\right)^{i}{}_{jmn} = \left(\underset{2}{R} + 2\underset{1}{\widetilde{R}}\right)^{i}{}_{jmn}\,.$$

Iz (6.8) i (5.5) se dobija

$$(6.31)\quad \left(\underset{2}{R} + 2\underset{1}{\widetilde{R}}\right)^{i}{}_{j} = R^{i}{}_{jmn} + \tfrac{1}{3}\left(L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{mj}}L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}}L^{i}_{\underset{\vee}{pm}}\right).$$

Na osnovu (6.26) imamo

$$(6.32)\quad \underset{4}{\mathcal{L}} \equiv a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}nm} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} =$$

$$(V)\qquad = \sum_{\alpha=1}^{u} 3\underset{4}{\widetilde{R}}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} 3\underset{4}{\widetilde{R}}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\left(a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\right),$$

gde je

$$(6.33)\qquad \underset{4}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{3}\left(\underset{3}{R} + \underset{11}{A} + \underset{13}{A}\right)^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} = \frac{1}{3}\left(\underset{3}{R} + \underset{12}{A} + \underset{14}{A}\right)^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}}$$

tenzor.Odavde vidimo da su veličine

$$(6.34)\qquad \left(\underset{11}{A} + \underset{13}{A}\right)^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} = \left(\underset{12}{A} + \underset{14}{A}\right)^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} = 3\underset{4}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} - \underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}}$$

takođe tenzori.

Na osnovu (5.6)i (5.18,20),odn.(5.6) i (5.19),(5.21) sledi

$$(6.35)\quad \underset{4}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{3}\left(L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} + L^{p}_{\underset{\vee}{mj}}L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{nj}}L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}\right).$$

Pomoću (6.34,35) i (5.6) dobijamo

$$(6.36)\quad \left(\underset{11}{A} + \underset{13}{A}\right)^{i}{}_{jmn} = \left(\underset{12}{A} + \underset{14}{A}\right)^{i}{}_{j\underset{\vee}{mn}} = 2R + L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m}\,.$$

6.4.8. Posmatrajući identitete (6.28′,29,32),ako ih napišemo za vektor a^{i} , dobijamo

$$(6.37)\qquad \underset{4}{\mathcal{L}} = \left(\underset{2}{R}{}^{i}{}_{pmn} + 2\underset{3}{R}{}^{i}{}_{p\underset{\vee}{mn}}\right)a^{p} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}a^{i}{}_{\underset{2}{|}p}\,,$$

$$(6.38)\qquad \underset{4}{\mathcal{L}} = \left(\underset{2}{R} + 2\underset{1}{\widetilde{R}}\right)^{i}{}_{pmn}a^{p} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}a^{i}{}_{\underset{1}{|}p}\,,$$

$$(6.39)\qquad \underset{4}{\mathcal{L}} = 3\underset{4}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{pmn}a^{p} + L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\left(a^{i}{}_{\underset{1}{|}p} + a^{i}{}_{\underset{2}{|}p}\right).$$

6.4.8.1. Oduzimanjem (6.37) od (6.38):

$$\left(2\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{pmn} - 2\underset{3}{R}{}^{i}{}_{p\underset{\vee}{mn}}\right)a^{p} + 2L^{s}_{\underset{\vee}{mn}}\left(L^{i}_{ps}a^{p} - L^{i}_{sp}a^{p}\right) = 0,$$

t.j.

$$\left(2\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{pmn}-2\underset{3}{R}{}^{i}{}_{p\underset{\smile}{mn}}+4L^{s}_{\underset{\smile}{mn}}L^{i}_{\underset{\smile}{ps}}\right)a^{p}=0,$$

pa kako je a^p proizvoljan vektor,iz prethodne jednačine sledi

$$\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn}-\underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}=2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}L^{i}_{\underset{\smile}{pj}}\,, \tag{6.40}$$

što se može i direktno proveriti pomoću odgovarajućih izraza za $\underset{1}{\widetilde{R}}$ i $\underset{3}{R}$.

6.4.8.2.Oduzimanjem (6.37) od (6.39):

$$\left[\left(3\underset{4}{\widetilde{R}}-\underset{2}{R}\right)^{i}{}_{pmn}-2\underset{3}{R}{}^{i}{}_{p\underset{\smile}{mn}}\right]a^{p}+L^{s}_{\underset{\smile}{mn}}\left(L^{i}_{ps}a^{p}-L^{i}_{sp}a^{p}\right)=0,$$

t.j.

$$\left[\left(3\underset{4}{\widetilde{R}}-\underset{2}{R}\right)^{i}{}_{pmn}-2\underset{3}{R}{}^{i}{}_{p\underset{\smile}{mn}}+2L^{s}_{\underset{\smile}{mn}}L^{i}_{\underset{\smile}{ps}}\right]a^{p}=0,$$

odakle

$$\left(3\underset{4}{\widetilde{R}}-\underset{2}{R}\right)^{i}{}_{jmn}-2\underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}=2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}L^{i}_{\underset{\smile}{pj}}\,. \tag{6.41}$$

6.4.8.3. Na isti način,oduzimanjem (6.39) od (6.38):

$$\left(\underset{2}{R}+2\underset{1}{\widetilde{R}}-3\underset{4}{\widetilde{R}}\right)^{i}{}_{pmn}a^{p}+L^{s}_{\underset{\smile}{mn}}\left(a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}s}-a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}s}\right)=0,$$

odakle

$$\left(\underset{2}{R}+2\underset{1}{\widetilde{R}}-3\underset{4}{\widetilde{R}}\right)^{i}{}_{jmn}=2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}L^{i}_{\underset{\smile}{pj}}\,, \tag{6.42}$$

što se takođe može i direktno proveriti.

6.4.8.4. Iz (6.40-42) je

$$\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn}-\underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}=\left(3\underset{4}{\widetilde{R}}-\underset{2}{R}\right)^{i}{}_{jmn}-2\underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}=\left(\underset{2}{R}+2\underset{1}{\widetilde{R}}-3\underset{4}{\widetilde{R}}\right)^{i}{}_{jmn}\,. \tag{6.43}$$

Iz (6.43),koristeći sve tri mogućnosti izjednačavanja pojedinih delova,dobijamo uvek

$$\underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}=\left(3\underset{4}{\widetilde{R}}-\underset{2}{R}-\underset{1}{\widetilde{R}}\right)^{i}{}_{jmn}\,, \tag{6.44}$$

pa je ovo jedina nova veza među tenzorima koji se pojavljuju u (6.43) odn. (6.44).

6.5.0. Napravimo li kombinaciju (4.25-29+36) dobijamo

$$(6.45)\quad \underset{5}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v|\underset{1}{mn}} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v|\underset{2}{nm}} - a^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{mn}} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + a^{\cdots}_{\cdots|\underset{2}{mn}} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m}\,.$$

6.5.1. Prema (4.25-29+36),iz (6.45) sledi

$$(6.46)\quad \underset{5}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\big(\underset{5}{A}-\underset{7}{A}+\underset{11}{A}\big)^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\big(\underset{6}{A}-\underset{8}{A}+\underset{12}{A}\big)^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+\,4a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle \underline{mn}\rangle\!\rangle} - 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle mn\rangle\!\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle mn\rangle\!\rangle} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\,a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\,.$$

Na osnovu (4.28,32,39)je

$$(4.47)\qquad 4a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle \underline{mn}\rangle\!\rangle} - 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle mn\rangle\!\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle mn\rangle\!\rangle} = 0\,,$$

pa (6.46) postaje

$$(6.48)\quad \underset{5}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\big(\underset{5}{A}-\underset{7}{A}+\underset{11}{A}\big)^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\big(\underset{6}{A}-\underset{8}{A}+\underset{12}{A}\big)\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\,a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\,.$$

6.5.2. Posmatrajući (6.45) kao (4.8), imamo

$$(6.49)\quad \underset{5}{\mathcal{L}} = a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v|\underset{2}{mn}} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v|\underset{2}{nm}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\underset{2}{R}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$-\sum_{\beta=1}^{v}\underset{2}{R}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\,a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\,.$$

Nema drugih mogućnosti da se (6.45) posmatra kao kombinacija identiteta Ričijevig tipa iz §4.

6.5.3. Upoređujući (6.48,49),dobijamo

$$(6.50)\qquad \big(\underset{5}{A}-\underset{7}{A}+\underset{11}{A}\big)^{i}{}_{jmn} = \big(\underset{6}{A}-\underset{8}{A}+\underset{12}{A}\big)^{i}{}_{jmn} = \underset{2}{R}^{i}{}_{jmn}\,,$$

gde je $\underset{2}{R}$ tenzor krivine 2.vrste (4.9) prostora L_N. Jednačina (6.50) predstavlja novu vezu među pseudotenzorima koji u nju ulaze i daje kombinaciju pseudotenzora krivine koja je tenzor.

6.6.0. Posmatrajmo sada kombinaciju (4.25+36+40) identiteta Ričijevog tipa. Imamo

$$(6.51)\quad \underset{6}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v|\underset{1}{mn}} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v|\underset{2}{nm}} + a^{\cdots}_{\cdots|\underset{2}{mn}} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + a^{\cdots}_{\cdots|\underset{1}{mn}} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m}\,.$$

6.6.1. Iz (4.25+36+40) se dobija

$$(6.52)\quad \underset{6}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left(\underset{5}{A}+\underset{11}{A}+\underset{13}{A}\right)^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\left(\underset{6}{A}+\underset{12}{A}+\underset{14}{A}\right)^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+4a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle \underline{mn}\rangle\!\rangle} + 4a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle \underline{mn}\rangle\!\rangle} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\ .$$

Na osnovu (4.28,39) imamo

$$4a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle \underline{mn}\rangle\!\rangle} + 4a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle \underline{mn}\rangle\!\rangle} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u}\left(4L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pm}}L^{r_\beta}_{\underset{\vee}{sn}} + 4L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pn}}L^{r_\beta}_{\underset{\vee}{sm}}\right)\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta}a^{\cdots}_{\cdots} -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v}\left(4L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pm}}L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta n}} + 4L^{r_\alpha}_{\underset{\vee}{pn}}L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta m}}\right)\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=1}^{v}\left(4L^{p}_{\underset{\vee}{t_\alpha m}}L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta n}} + 4L^{p}_{\underset{\vee}{t_\alpha n}}L^{s}_{\underset{\vee}{t_\beta m}}\right)\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots}\ ,$$

pa odavde i iz (6.12) vidimo da je

$$(6.53)\quad 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle \underline{mn}\rangle\!\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle mn\rangle\!\rangle} = a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle mn\rangle\!\rangle} + a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle nm\rangle\!\rangle} = a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}} = a^{\cdots}_{\cdots\{nm\}}\ ,$$

gde je tenzor $a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}}$ dat pomoću (6.12).

6.6.2. Izraz za $\underset{6}{\mathcal{L}}$ u (6.51) se može dobiti iz (4.29+8+40), pa

$$(6.54)\quad \underset{6}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left(\underset{2}{R}+\underset{7}{A}+\underset{13}{A}\right)^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\left(\underset{2}{R}+\underset{8}{A}+\underset{14}{A}\right)^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle mn\rangle\!\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle nm\rangle\!\rangle} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\ .$$

6.6.3. Iz kombinacije (4.33+8+36) sledi

$$(6.55)\quad \underset{6}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left(\underset{2}{R}+\underset{9}{A}+\underset{11}{A}\right)^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\left(\underset{2}{R}+\underset{10}{A}+\underset{12}{A}\right)^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle mn\rangle\!\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\!\langle nm\rangle\!\rangle} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\ .$$

Drugih mogućnosti za $\underset{6}{\mathcal{L}}$, različitih od navedenih, nema.

6.6.4. Na osnovu (6.52,54,55), a uzimajući u obzir (6.53), imamo

$$(6.56)\quad \underset{6}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v \underset{1}{|} mn} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v \underset{2}{|} nm} + a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} mn} - a^{\cdots}_{\cdots \underset{1}{|} n \underset{2}{|} m} + a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} mn} - a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} n \underset{1}{|} m} =$$

$$(\mathrm{VI})\quad = \sum_{\alpha=1}^{u} (\underset{2}{R} + 2\underset{2}{\tilde{R}})^{r_\alpha}{}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} (\underset{2}{R} + 2\underset{3}{\tilde{R}})^{p}{}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} + 2a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}} a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} p}$$

gde je tenzor $a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}}$ dat pomoću (6.12), a uzimajući u obzir (6.15,16), imamo tenzore

$$(6.57)\quad (\underset{5}{A} + \underset{11}{A} + \underset{13}{A})^{i}{}_{jmn} = (\underset{2}{R} + \underset{7}{A} + \underset{13}{A})^{i}{}_{jmn} =$$

$$= (\underset{2}{R} + \underset{9}{A} + \underset{11}{A})^{i}{}_{jmn} = (\underset{2}{R} + 2\underset{2}{\tilde{R}})^{i}{}_{jmn},$$

$$(6.58)\quad (\underset{6}{A} + \underset{12}{A} + \underset{14}{A})^{i}{}_{jmn} = (\underset{2}{R} + \underset{8}{A} + \underset{14}{A})^{i}{}_{jmn} =$$

$$= (\underset{2}{R} + \underset{10}{A} + \underset{12}{A})^{i}{}_{jmn} = (\underset{2}{R} + 2\underset{3}{\tilde{R}})^{i}{}_{jmn}.$$

6.7.0. Napravimo kombinaciju ($4.10\text{-}29\text{-}40_{nm}$). Dobićemo

$$(6.59)\quad \underset{7}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v \underset{1}{|} m \underset{2}{|} n} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v \underset{1}{|} n \underset{2}{|} m} - a^{\cdots}_{\cdots \underset{1}{|} mn} + a^{\cdots}_{\cdots \underset{1}{|} n \underset{2}{|} m} - a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} nm} + a^{\cdots}_{\cdots \underset{2}{|} m \underset{1}{|} n}.$$

6.7.1.Iz ($4.10\text{-}29\text{-}40_{nm}$), a s obzirom na (4.13),dobijamo

$$(6.60)\quad \underset{7}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u} \Big[(\underset{1}{A} - \underset{7}{A})^{r_\alpha}{}_{pmn} - \underset{13}{A}^{r_\alpha}{}_{pnm} \Big] \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \Big[(\underset{2}{A} - \underset{8}{A})^{p}{}_{t_\beta mn} - \underset{14}{A}^{p}{}_{t_\beta nm} \Big] \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} +$$

$$+ 4a^{\cdots}_{\cdots\langle \underset{\vee}{mn} \rangle} - 2a^{\cdots}_{\cdots\langle mn \rangle} - 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn \rangle\rangle} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}} a^{\cdots}_{\cdots \underset{1}{|} p}.$$

Na osnovu (4.14,32,39) i uzimajući u obzir (6.12) imamo

$$(6.61)\quad 2a^{\cdots}_{\cdots\langle \underset{\vee}{mn} \rangle} - a^{\cdots}_{\cdots\langle mn \rangle} - a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn \rangle\rangle} = -a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}},$$

gde je tenzor $a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}}$ dat pomoću (6.12).Napomenimo da na osnovu (6.12) i (6.61) imamo

$$2a^{\cdots}_{\cdots\langle \underset{\vee}{mn} \rangle} - a^{\cdots}_{\cdots\langle mn \rangle} - a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn \rangle\rangle} = -a^{\cdots}_{\cdots\langle mn \rangle} - a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm \rangle\rangle},$$

t.j.

$$(6.62)\quad a^{\cdots}_{\cdots\langle \underset{\vee}{mn} \rangle} = a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle \underset{\vee}{mn} \rangle\rangle}.$$

6.7.2. Sledeća moguća kombinacija je da se (6.59) posmatra kao $4(-36)_{nm}-29-43_{nm}$, t.j. kao $-(4.29+36_{nm}+43_{nm})$. Tako imamo

$$
(6.63)\quad \underset{7}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left[-\underset{7}{A}^{r_\alpha}{}_{pmn} - (\underset{11}{A}+\underset{15}{A})^{r_\alpha}{}_{pnm}\right]\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} -
$$

$$
- \sum_{\beta=1}^{v}\left[-\underset{8}{A}^{p}{}_{t_\beta mn} - (\underset{12}{A}+\underset{15}{A})^{p}{}_{t_\beta nm}\right]\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle} - 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} + 2\underset{\vee}{L}^{p}_{mn}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\,.
$$

Ako umesto (6.43) koristimo (6.45), dobijamo $-(4.29+36_{nm}+45_{nm})$, pa, uzimajući u obzir (6.12), imamo

$$
(6.64)\quad \underset{7}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left[-\underset{7}{A}^{r_\alpha}{}_{pmn} - (\underset{11}{A}+\underset{3}{R})^{r_\alpha}{}_{pnm}\right]\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} -
$$

$$
- \sum_{\beta=1}^{v}\left[-\underset{8}{A}^{p}{}_{t_\beta mn} - (\underset{12}{A}+\underset{3}{R})^{p}{}_{t_\beta nm}\right]\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - 2a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}} + L^{p}_{mn}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p} - L^{p}_{nm}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\,,
$$

odakle se vidi da izrazi u uglastim zagradama nisu tenzori, jer zbir poslednja dva sabirka to nije.

6.7.3. Na osnovu (6.60,63) i uzimajući u obzir (6.61,12), dobijamo

$$
(6.65)\quad \underset{7}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}nm} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} =
$$

$$
(\mathrm{VII})\quad = \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{5}{\widetilde{R}}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{6}{\widetilde{R}}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} - 2a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}} + 2a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p}\,\underset{\vee}{L}^{p}_{mn}\,,
$$

gde su $\underset{5}{\widetilde{R}}$ i $\underset{6}{\widetilde{R}}$ tenzori:

$$
(6.66)\quad \underset{5}{\widetilde{R}}^{i}{}_{jmn} = (\underset{1}{A}-\underset{7}{A})^{i}{}_{jmn} - \underset{13}{A}^{i}{}_{jnm} = -\underset{7}{A}^{i}{}_{jmn} - (\underset{11}{A}+\underset{15}{A})^{i}{}_{jnm}\,,
$$

$$
(6.67)\quad \underset{6}{\widetilde{R}}^{i}{}_{jmn} = (\underset{2}{A}-\underset{8}{A})^{i}{}_{jmn} - \underset{14}{A}^{i}{}_{jnm} = -\underset{8}{A}^{i}{}_{jmn} - (\underset{12}{A}+\underset{15}{A})^{i}{}_{jnm}\,.
$$

Koristeći odgovarajuće vrednosti za pseudotenzore krivine iz §5, na osnovu (5.8,14,20) ili (5.14,18,22) iz (6.66) dobijamo

$$
(6.68)\quad \underset{5}{\widetilde{R}}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + \underset{\vee}{L}^{i}_{mj;n} - \underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m} + 3\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}\underset{\vee}{L}^{i}_{np} + \underset{\vee}{L}^{p}_{jn}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp}\,,
$$

a na osnovu (5.9,15,21) ili (5.15,19,22), zamenom u (6.67), sledi

$$(6.69)\qquad \underset{6}{\tilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{mj};n} - L^{i}_{\underset{\vee}{nj};m} - L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}} + 3L^{p}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} .$$

6.8.0. Posmatrajmo, dalje, kombinaciju ($4.10+29_{nm}+40$) identiteta Ričijevog tipa. Dobijamo

$$(6.70)\quad \underset{8}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} .$$

6.8.1. Iz ($4.10+29_{nm}+40$) sledi

$$(6.71)\quad \underset{8}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big[(\underset{1}{A}+\underset{13}{A})^{r_\alpha}{}_{pmn} + \underset{7}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big]\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\Big[(\underset{2}{A}+\underset{14}{A})^{p}{}_{t_\beta mn} + \underset{8}{A}{}^{p}{}_{t_\beta nm}\Big]\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} +$$
$$+4a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle \underset{\vee}{mn}\rangle\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} .$$

Obzirom na (6.62,12) imamo tenzor

$$(6.72)\qquad 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle \underset{\vee}{mn}\rangle\rangle} + a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} + a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} =$$
$$= a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle} - a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} + a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} + a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} = a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}} .$$

6.8.2. Jednačina (6.70) se može dobiti i kombinacijom ($4.29_{nm}+$ $+36+43$), a to se svodi na slučaj iz §6.7.2, jer je sada $\underset{8}{\mathcal{L}} = -\underset{7}{\mathcal{L}}_{nm}$ (t.j. $\underset{8}{\mathcal{L}}$ se navedenom kombinacijom može dobiti iz $\underset{7}{\mathcal{L}}$, kada se u $\underset{7}{\mathcal{L}}$ razmene mesta indeksima m,n i promeni znak). Na taj način, prema (6.65), dobijamo

$$(6.73)\qquad \underset{8}{\mathcal{L}} = -\underset{7}{\mathcal{L}}_{nm} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big(-\underset{5}{\tilde{R}}{}^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big)\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-\sum_{\beta=1}^{v}\Big(-\underset{6}{\tilde{R}}{}^{p}{}_{t_\beta nm}\Big)\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + 2a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} ,$$

pri čemu smo uzeli u obzir da je $a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}} = a^{\cdots}_{\cdots\{nm\}}$.

6.8.3. U (6.70) se prvi i četvrti sabirak poništavaju, međutim, članovi koji preostanu ne mogu se dobiti nekom kombinacijom identiteta Ričijevog tipa.

6.8.4. Uzimajući u obzir (6.72) i upoređujući (6.71,73), dobijamo

(6.74) $$(\underset{1}{A}+\underset{13}{A})^i{}_{jmn} + \underset{7}{A}^i{}_{jnm} = -\underset{5}{\widetilde{R}}^i{}_{jnm}$$

(6.75) $$(\underset{2}{A}+\underset{14}{A})^i{}_{jmn} + \underset{8}{A}^i{}_{jnm} = -\underset{6}{\widetilde{R}}^i{}_{jnm},$$

gde su tenzori $\underset{5}{\widetilde{R}}$, $\underset{6}{\widetilde{R}}$ dati pomoću (6.68,69). Upoređivanjem (6.74) sa (6.66) odn. (6.75) sa (6.67) dobijamo

$$\underset{1}{A}^i{}_{jmn} = -\underset{1}{A}^i{}_{jnm}, \quad \underset{2}{A}^i{}_{jmn} = -\underset{2}{A}^i{}_{jnm},$$

što se može i neposredno proveriti.

6.9.0. Iz kombinacije $(4.22+40_{nm}-40)$ sledi

(6.76) $$\underset{9}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} + a^{\dots}_{\dots\underset{2}{|}nm} - a^{\dots}_{\dots\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} - a^{\dots}_{\dots\underset{2}{|}mn} + a^{\dots}_{\dots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m}.$$

6.9.1. Iz prethodne kombinacije je

(6.77) $$\underset{9}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big(\underset{3}{A}^{r_\alpha}{}_{pmn} - 2\underset{13}{A}^{r_\alpha}{}_{p\underset{\smile}{mn}}\Big)\binom{p}{r_\alpha}a^{\dots}_{\dots} - \sum_{\beta=1}^{v}\Big(\underset{4}{A}^{p}{}_{t_\beta mn} - 2\underset{14}{A}^{p}{}_{t_\beta\underset{\smile}{mn}}\Big)\binom{t_\beta}{p}a^{\dots}_{\dots} -$$
$$- 4a^{\dots}_{\dots\langle\underset{\smile}{mn}\rangle} - 4a^{\dots}_{\dots\langle\underset{\smile}{nm}\rangle} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}a^{\dots}_{\dots\underset{2}{|}p}.$$

6.9.2. Pošto u (6.76) imamo poništavanje četiri člana, to se gornja kombinacija svodi na $-(4.8)$, pa je

(6.78) $$\underset{9}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big(-\underset{2}{R}^{r_\alpha}{}_{pmn}\Big)\binom{p}{r_\alpha}a^{\dots}_{\dots} - \sum_{\beta=1}^{v}\Big(-\underset{2}{R}^{p}{}_{t_\beta nm}\Big)\binom{t_\beta}{p}a^{\dots}_{\dots} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}a^{\dots}_{\dots\underset{2}{|}p}.$$

6.9.3. Drugih mogućih kombinacija nema, pa, uzimajući u obzir (6.62), iz (6.77,78) dobijamo

(6.79) $$2\underset{13}{A}^i{}_{j\underset{\smile}{mn}} - \underset{3}{A}^i{}_{jmn} = 2\underset{14}{A}^i{}_{j\underset{\smile}{mn}} - \underset{4}{A}^i{}_{jmn} = \underset{2}{R}^i{}_{jmn},$$

gde je $\underset{2}{R}$ tenzor krivine 2.vrste.

6.10.0. Iz kombinacije $(4.22+29+40_{nm})$ dobijamo

(6.80) $$\underset{10}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} + a^{\dots}_{\dots\underset{1}{|}mn} - a^{\dots}_{\dots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + a^{\dots}_{\dots\underset{2}{|}nm} - a^{\dots}_{\dots\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n}.$$

6.10.1. Najpre je

(6.81) $$\underset{10}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big[(\underset{3}{A}+\underset{7}{A})^{r_\alpha}{}_{pmn} + \underset{13}{A}^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big]\binom{p}{r_\alpha}a^{\dots}_{\dots} - \sum_{\beta=1}^{v}\Big[(\underset{4}{A}+\underset{8}{A})^{p}{}_{t_\beta mn} + \underset{14}{A}^{p}{}_{t_\beta nm}\Big]\binom{t_\beta}{p}a^{\dots}_{\dots} -$$

$$-4a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle \underset{\smile}{mn}\rangle\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\,.$$

6.10.2. Pošto se (6.80) dobija i iz $(4.33+40_{nm}-43_{nm})$ to je

$$(6.82)\quad \underset{10}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left[\underset{9}{A}^{r_\alpha}{}_{pmn} + (\underset{13}{A}-\underset{15}{A})^{r_\alpha}{}_{pnm}\right]\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\left[\underset{10}{A}^{p}{}_{t_\beta mn} + (\underset{14}{A}-\underset{15}{A})^{p}{}_{t_\beta nm}\right]\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} +$$
$$+ 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} + 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\,.$$

U slučaju da umesto (4.43) koristimo (4.45), uz $\sum\limits_{\alpha}$ i $\sum\limits_{\beta}$ ne dobijaju se tenzori.

6.10.3. Ako uzmemo u obzir (6.61,12), iz (6.80-82) imamo

$$(6.83)\ (\mathrm{VIII})\quad \underset{10}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}mn} - a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}nm} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{u}\underset{7}{\widetilde{R}}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\underset{8}{\widetilde{R}}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} + 2a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\,,$$

gde su

$$(6.84)\quad \underset{7}{\widetilde{R}}^{i}{}_{jmn} = (\underset{3}{A}+\underset{7}{A})^{i}{}_{jmn} + \underset{13}{A}^{i}{}_{jnm} = \underset{9}{A}^{i}{}_{jmn} + (\underset{13}{A}-\underset{15}{A})^{i}{}_{jnm}\,,$$

$$(6.85)\quad \underset{8}{\widetilde{R}}^{i}{}_{jmn} = (\underset{4}{A}+\underset{8}{A})^{i}{}_{jmn} + \underset{14}{A}^{i}{}_{jnm} = \underset{10}{A}^{i}{}_{jmn} + (\underset{14}{A}-\underset{15}{A})^{i}{}_{jnm}$$

tenzori.

Zamenom odgovarajućih vrednosti pseudotenzora iz § 5, dobijamo

$$(6.86)\quad \underset{7}{\widetilde{R}}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\smile}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\smile}{jn};m} + L^{p}_{\underset{\smile}{jm}}L^{i}_{\underset{\smile}{pn}} + 3L^{p}_{\underset{\smile}{jn}}L^{i}_{\underset{\smile}{pm}}$$

$$(6.87)\quad \underset{8}{\widetilde{R}}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\smile}{jm};n} - L^{i}_{\underset{\smile}{jn};m} - 3L^{p}_{\underset{\smile}{jm}}L^{i}_{\underset{\smile}{pn}} - L^{p}_{\underset{\smile}{jn}}L^{i}_{\underset{\smile}{pm}}\,.$$

6.11.0. Ako napravimo kombinaciju $(4.10-36+36_{nm})$, imamo

$$(6.88)\quad \underset{11}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}mn} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}nm} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n}\,.$$

6.11.1. Iz navedene kombinacije je

$$(6.89)\quad \underset{11}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\left(\underset{1}{A}^{r_\alpha}{}_{pmn} - 2\underset{11}{A}^{r_\alpha}{}_{p\underset{\smile}{mn}}\right)\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\left(\underset{2}{A}^{p}{}_{t_\beta mn} - 2\underset{12}{A}^{p}{}_{t_\beta\underset{\smile}{mn}}\right)\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} +$$
$$+ 4a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle\underset{\smile}{mn}\rangle\rangle} + 4a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle\underset{\smile}{nm}\rangle\rangle} + 2L^{p}_{\underset{\smile}{nm}}\, a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\,.$$

6.11.2. Ako (6.88) posmatramo kao $-(4.8)$, imamo

$$(6.90)\quad \underset{11}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big(-\underset{2}{R}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\Big)\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\Big(-\underset{2}{R}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\Big)\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\ ,$$

gde je $\underset{2}{R}$ tenzor krivine (4.9).

6.11.3. Uzmemo li u obzir (6.62), na osnovu (6.89,90) sledi

$$(6.91)\quad 2\underset{11}{A}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}} - \underset{1}{A}{}^{i}{}_{jmn} = 2\underset{12}{A}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}} - \underset{2}{A}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn}\ ,$$

t.j. dobija se nova veza, analogna (6.79).

6.12.0. Iz $(4.22\text{-}29_{nm}\text{-}40)$ imamo

$$(6.92)\quad \underset{12}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}mn} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m}\ .$$

6.12.1. Iz posmatrane kombinacije direktno

$$(6.93)\quad \underset{12}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big[(\underset{3}{A}-\underset{13}{A})^{r_\alpha}{}_{pmn} - \underset{7}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big]\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\Big[(\underset{4}{A}-\underset{14}{A})^{p}{}_{t_\beta mn} - \underset{8}{A}{}^{p}{}_{t_\beta nm}\Big]\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$- 4a^{\cdots}_{\cdots\langle\underset{\smile}{mn}\rangle} - 2a^{\cdots}_{\cdots\langle nm\rangle} - 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\ .$$

6.12.2. Međutim, $\underset{12}{\mathcal{L}}$ se može dobiti pomoću $(4.43\text{-}40\text{-}33_{nm})$:

$$(6.94)\quad \underset{12}{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{u}\Big[(\underset{15}{A}-\underset{13}{A})^{r_\alpha}{}_{pmn} - \underset{9}{A}{}^{r_\alpha}{}_{pnm}\Big]\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\Big[(\underset{15}{A}-\underset{14}{A})^{p}{}_{t_\beta mn} - \underset{10}{A}{}^{p}{}_{t_\beta nm}\Big]\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} -$$
$$-2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle mn\rangle\rangle} - 2a^{\cdots}_{\cdots\langle\langle nm\rangle\rangle} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\ .$$

Ako umesto (4.43) koristimo (4.45) uz $\sum_\alpha$ i $\sum_\beta$ ne dobijaju se tenzori.

6.12.3. Ako uzmemo u obzir (6.70) i (6.12) iz (6.92-94) imamo

$$(6.95)\quad \underset{12}{\mathcal{L}} \equiv a^{r_1\cdots r_u}_{t_1\cdots t_v\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm} + a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}mn} =$$

$$\text{(IX)}\quad = \sum_{\alpha=1}^{u}\underset{8}{\widetilde{R}}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\underset{7}{\widetilde{R}}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} - 2a^{\cdots}_{\cdots\{mn\}} - 2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}$$

jer je na osnovu odgovarajućih vrednosti za pseudotenzore iz §5

$$(6.96)\quad \underset{3}{A}{}^{i}{}_{jmn} - \underset{7}{A}{}^{i}{}_{jnm} - \underset{13}{A}{}^{i}{}_{jmn} = (\underset{15}{A}-\underset{13}{A})^{i}{}_{jmn} - \underset{9}{A}{}^{i}{}_{jnm} = \underset{8}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn}\ ,$$

$$(6.97)\quad (\underset{4}{A}-\underset{14}{A})^{i}{}_{jmn} - \underset{8}{A}{}^{i}{}_{jnm} = (\underset{15}{A}-\underset{14}{A})^{i}{}_{jmn} - \underset{10}{A}{}^{i}{}_{jnm} = \underset{7}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn}\ ,$$

gde su tenzori $\underset{7}{\widetilde{R}}$, $\underset{8}{\widehat{R}}$ dati jednačinama (6.86,87).

6.13. Iz izloženog vidimo da navedenim kombinacijama identiteta iz § 4 dobijamo identitete u kojima se pojavljuju novi tenzori $\underset{1}{\widetilde{R}}, \ldots, \underset{8}{\widetilde{R}}$, nastali izvesnim kombinacijama pseudotenzora krivine .

Od svih pomenutih identiteta izdvajamo njih devet: (6.9, 14,28′,29,32,56,65,83,95), u kojima se pojavljuju tenzori $\underset{1}{\widetilde{R}}, \ldots \underset{8}{\widetilde{R}}$, (izuzev (6.28′) gde se pojavljuje kombinacija $\underset{2}{R}$ i $\underset{3}{R}$) i zovemo ih s l o ž e n i m i d e n t i t e t i m a R i č i j e v o g t i p a (I-IX), a tenzore $\underset{1}{\widetilde{R}}, \ldots, \underset{8}{\widetilde{R}}$, date respektivno jednačinama (6.7,15,16,33,66,67,84,85), odn. (6.8,17,18,35,68,69, 86,87), izvedene pomoću pseudotenzora krivine $\underset{1}{A}, \ldots, \underset{15}{A}$ iz § 4, zovemo i z v e d e n i m t e n z o r i m a k r i v i n e prostora L_N i to 1.,..,8. vrste.

GLAVA III

I S P I T I V A NJ E T E N Z O R A K R I V I N E P R O S T O R A L_N (GR_N). G E O M E T R I J S K E I N T E R P R E T A C I J E T E N Z O R A I P S E- U D O T E N Z O R A K R I V I N E . P R O S T O R J E D I N S T V E N E T E O R I J E P O LJ A

7. MEĐUSOBNO NEZAVISNI TENZORI KRIVINE

Da bi ispitali koliko ima nezavisnih među 12 tenzora krivine $\underset{1}{R},\dots,\underset{4}{R}$, $\underset{1}{\widetilde{R}},\dots,\underset{8}{\widetilde{R}}$, prostora L_N, uvedimo, radi kratkoće, oznake

(7.1a-c) $\mathcal{A} \overset{d}{=} L^i_{\underset{\smile}{jm};n}\,, \quad \mathcal{B} \overset{d}{=} L^p_{\underset{\smile}{jm}} L^i_{\underset{\smile}{pn}}\,, \quad \mathcal{C} \overset{d}{=} L^p_{\underset{\smile}{mn}} L^i_{\underset{\smile}{pj}}\,,$

(7.2a,b) $\mathcal{A}' \overset{d}{=} L^i_{\underset{\smile}{jn};m}\,, \quad \mathcal{B}' \overset{d}{=} L^p_{\underset{\smile}{jn}} L^i_{\underset{\smile}{pm}}\,,$

t.j. sa $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ smo označili vrednosti $\mathcal{A}$ odn. $\mathcal{B}$, kada indeksi m,n razmene mesta. Kao i ranije, tačka i zarez (;) označava kovarijantni izvod u odnosu na simetričnu koneksiju $L^i_{\underset{\smile}{jk}}$.

Na taj način, koristeći jednačine (5.4-7) i (6.8,17,18,35, 68,69,86,87), dobijamo (izostavljajući indekse kod $R^i{}_{jmn}$ i t.d.):

(7.3) $\underset{1}{R} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}'\,,$

(7.4) $\underset{2}{R} = R - \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}'\,,$

(7.5) $\underset{3}{R} = R + \mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' - 2\mathcal{C}\,,$

(7.6) $\underset{4}{R} = R + \mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' + 2\mathcal{C}\,,$

(7.7) $\underset{1}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{B} + \mathcal{B}'$

(7.8) $\underset{2}{\widetilde{R}} = R + \mathcal{B} + \mathcal{B}'$

$$(7.9)\qquad \underset{3}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{B} - \mathcal{B}' ,$$

$$(7.10)\qquad \underset{4}{\widetilde{R}} = R + \tfrac{1}{3}\left(-\mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' - 2\mathcal{C}\right) ,$$

$$(7.11)\qquad \underset{5}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{A} + \mathcal{A}' - 3\mathcal{B} - \mathcal{B}' ,$$

$$(7.12)\qquad \underset{6}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B} + 3\mathcal{B}' ,$$

$$(7.13)\qquad \underset{7}{\widetilde{R}} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} + 3\mathcal{B}'$$

$$(7.14)\qquad \underset{8}{\widetilde{R}} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' - 3\mathcal{B} - \mathcal{B}' .$$

Iz pet nezavisnih jednačina (7.3-6) i (7.8) (jedn. (7.7) nije nezavisna od jednačina (7.3-6), pa ne može da se uzme umesto (7.8)),nalazimo $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{A}', \mathcal{B}'$. Dakle:

$$(7.15a\text{-}c)\quad \mathcal{A} = \tfrac{1}{4}\left(2\underset{1}{R} + \underset{3}{R} + \underset{4}{R}\right) - R ,\quad \mathcal{B} = \tfrac{1}{4}\left(\underset{1}{R} + \underset{2}{R} + 2\underset{2}{\widetilde{R}}\right) - R ,\quad \mathcal{C} = \tfrac{1}{4}\left(\underset{4}{R} - \underset{3}{R}\right) ,$$

$$(7.16a,b)\quad \mathcal{A}' = \tfrac{1}{4}\left(2\underset{2}{R} + \underset{3}{R} + \underset{4}{R}\right) - R ,\quad \mathcal{B}' = \tfrac{1}{4}\left(2\underset{2}{\widetilde{R}} - \underset{1}{R} - \underset{2}{R}\right) .$$

Dakle,tenzori $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{B}'$ izražavaju se kao linearne kombinacije 5 tenzora krivine $\underset{1}{R},\dots,\underset{4}{R},\underset{2}{\widetilde{R}}$ prostora L_N i tenzora krivine R prostora $\overset{0}{L}_N$. To znači da se, na osnovu (7.7),(7.9-14) tenzori $\underset{1}{\widetilde{R}}, \underset{3}{\widetilde{R}},\dots,\underset{8}{\widetilde{R}}$ mogu izraziti pomoću R i napred navedenih 5 tenzora krivine,koji su nezavisni.

Zamenom vrednosti (7.15,16) u odgovarajuće jednačine (7.7), (7.9-14) dobijamo

$$(7.17)\qquad \underset{1}{\widetilde{R}} = 2R - \tfrac{1}{2}\left(\underset{1}{R} + \underset{2}{R}\right) ,$$

$$(7.18)\qquad \underset{3}{\widetilde{R}} = 2R - \underset{2}{\widetilde{R}}$$

$$(7.19)\qquad \underset{4}{\widetilde{R}} = \tfrac{1}{6}\left(-2\underset{1}{R} + \underset{3}{R} - \underset{4}{R} + 8R\right)$$

$$(7.20)\qquad \underset{5}{\widetilde{R}} = 4R - \underset{1}{R} - \tfrac{1}{2}\underset{2}{R} - \tfrac{3}{2}\underset{2}{\widetilde{R}} ,$$

$$(7.21)\qquad \underset{6}{\widetilde{R}} = -\underset{1}{R} + 2\underset{2}{\widetilde{R}} ,$$

$$(7.22,23)\qquad \underset{7}{\widetilde{R}} = -\underset{2}{R} + 2\underset{2}{\widetilde{R}} ,\quad \underset{8}{\widetilde{R}} = 4R - \underset{2}{R} - 2\underset{2}{\widetilde{R}} .$$

8. OSOBINE SIMETRIJE TENZORA KRIVINE

8.1. Prostor L_N

Posmatraćemo samo tenzore $\underset{1}{R},\dots,\underset{4}{R}$ iz § 4 i $\underset{2}{\widetilde{R}}$ iz § 6, pomoću kojih (i R) se ostali tenzori krivine izražavaju kao linearne kombinacije (§ 7).

Na osnovu (5.4,5) i zbog

$$R^i{}_{jmn} = -R^i{}_{jnm}, \tag{8.1}$$

je

$$\underset{p}{R}{}^i{}_{jmn} = -\underset{p}{R}{}^i{}_{jnm}, \quad p=1,2, \tag{8.2}$$

a na osnovu (5.6,7) i (6.17) je

$$\underset{q}{R}{}^i{}_{jmn} \neq \pm \underset{q}{R}{}^i{}_{jnm}, \quad q=3,4, \tag{8.3}$$

$$\underset{2}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} \neq \pm \underset{2}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jnm}. \tag{8.4}$$

Kako su tenzori krivine u L_N generalizacija tenzora krivine $R^i{}_{jmn}$ i na ovaj se svode u slučaju simetrične koneksije, to treba za posmatrane tenzore ispitati samo još t.zv. cikličnu simetriju u odnosu na donje indekse.

Ako uvedemo oznaku

$$\underset{jmn}{Cikl}\, R^i{}_{jmn} \overset{d}{=} R^i{}_{jmn} + R^i{}_{mnj} + R^i{}_{njm} \tag{8.5}$$

i analogno za druge slučajeve, imamo, kao što je poznato iz Rimanove geometrije i geometrije simetrične afine koneksije ([21], str.158, jedn. (7))

$$\underset{jmn}{Cikl}\, R^i{}_{jmn} = 0, \tag{8.5'}$$

a prema (4.1):

$$\underset{jmn}{Cikl}\, \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} = 2\underset{jmn}{Cikl}\left(L^i_{\underset{\vee}{jm},n} + L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{pn}\right), \tag{8.6}$$

odn. prema (5.4)

$$(8.6') \qquad \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\; \underset{1}{R}{}^{i}{}_{jmn} = 2\,\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\left(L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{pn}}\right).$$

Na isti način, prema (4.9) je

$$(8.7) \qquad \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\; \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} = -2\,\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\left(L^{i}_{\underset{\vee}{jm},n} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{np}\right),$$

a prema (5.5):

$$(8.7') \qquad \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\; \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} = -2\,\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\left(L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}}\right).$$

Na osnovu (4.46) se dobija

$$(8.8) \qquad \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\; \underset{3}{R}{}^{i}{}_{jmn} = 4\,\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\; L^{p}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{np}},$$

a na osnovu (5.6) se dobija isto.

Pomoću (4.52) ili (5.7), odn. (6.17) i (8.5') dobijamo

$$(8.9) \qquad \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\; \underset{4}{R}{}^{i}{}_{jmn} = 0,$$

$$(8.10) \qquad \mathrm{Cikl}\; \underset{2}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = 0,$$

t.j. $\underset{4}{R}$ i $\underset{2}{\widetilde{R}}$ poseduju cikličnu simetriju oblika (8.5').

8.2. P r o s t o r GR_N

8.2.0. Kao što smo naveli još u §1, u slučaju prostora GR_N imamo

$$(8.11) \qquad \Gamma_{ijk} \overset{d}{=} \frac{1}{2}\left(g_{ik,j} + g_{ji,k} - g_{jk,i}\right),$$

$$(8.12) \qquad \Gamma^{i}_{jk} \overset{d}{=} g^{\underline{ip}}\Gamma_{pjk} = \frac{1}{2} g^{\underline{ip}}\left(g_{pk,j} + g_{jp,k} - g_{jk,p}\right),$$

t.j. sada su koeficijenti koneksije Γ^{i}_{jk} (umesto L^{i}_{jk}).

U GR_N možemo definisati i k o v a r i j a n t n e t e n z o r e k r i v i n e

$$(8.13a) \qquad \underset{t}{R}{}_{ijmn} \overset{d}{=} g_{\underline{is}}\, \underset{t}{R}{}^{s}{}_{jmn} \qquad (t = 1, \dots, 4),$$

$$(8.13b) \qquad \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} \overset{d}{=} g_{\underline{is}}\, \underset{2}{\widetilde{R}}{}^{s}{}_{jmn} ,$$

pri čemu do sada posmatrane tenzore krivine sa jednim kontravarijantnim indeksom zovemo m e š o v i t i m t e n z o r i m a k r i v i n e prostora GR_N(odn.L_N) .

Prema (1.7) je

$$(8.14) \qquad \Gamma_{ijm,n} = (g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{jm})_{,n} = g_{\underline{is},n}\Gamma^{s}_{jm} + g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{jm,n} ,$$

pa odavde,s obzirom na (1.12a,b)

$$(8.15a) \qquad g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{jm,n} = \Gamma_{ijm,n} - \Gamma^{s}_{jm}(\Gamma_{isn} + \Gamma_{sin}) ,$$

$$(8.15b) \qquad g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{jm,n} = \Gamma_{ijm,n} - \Gamma^{s}_{jm}(\Gamma_{ins} + \Gamma_{sni}) .$$

8.2.1. Tenzor $\underset{1}{R}_{ijmn}$.

Iz (8.13a,15) i (4.2) je

$$\underset{1}{R}_{ijmn} = g_{\underline{is}}\underset{1}{R}{}^{s}{}_{jmn} = g_{\underline{is}}(\Gamma^{s}_{jm,n} - \Gamma^{s}_{jn,m} + \Gamma^{p}_{jm}\Gamma^{s}_{pn} - \Gamma^{p}_{jn}\Gamma^{s}_{pm}) =$$

$$= g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{jm,n} - g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{jn,m} + \Gamma^{p}_{jm}\Gamma_{ipn} - \Gamma^{p}_{jn}\Gamma_{ipm} =$$

$$= \Gamma_{ijm,n} - \Gamma^{s}_{jm}(\Gamma_{isn} + \Gamma_{sin}) - \Gamma_{ijn,m} + \Gamma^{s}_{jn}(\Gamma_{ism} + \Gamma_{sim}) +$$

$$+ \Gamma^{p}_{jm}\Gamma_{ipn} - \Gamma^{p}_{jn}\Gamma_{ipm} ,$$

odnosno

$$(8.16) \qquad \underset{1}{R}_{ijmn} = \Gamma_{ijm,n} - \Gamma_{ijn,m} + \Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{jn} - \Gamma_{pin}\Gamma^{p}_{jm}$$

Pošto je zbog (1.6,7):

$$(8.17) \qquad \begin{aligned} &\Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{jn} - \Gamma_{pin}\Gamma^{p}_{jm} = \Gamma_{pim}g^{\underline{ps}}\Gamma_{sjn} - \Gamma_{pin}g^{\underline{ps}}\Gamma_{sjm} = \\ &= g^{\underline{ps}}(\Gamma_{pim}\Gamma_{sjn} - \Gamma_{pin}\Gamma_{sjm}) = \Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{jn} - \Gamma_{pjm}\Gamma^{p}_{in} , \end{aligned}$$

to,koristeći (8.11), jedn. (8.16) postaje

$$(8.16') \quad \underset{1}{R}{}^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{2}(g_{im,jn} - g_{in,jm} + g_{jn,im} - g_{jm,in}) + \Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{jn} - \Gamma_{pjm}\Gamma^{p}_{in} =$$

$$= \frac{1}{2}(g_{im,jn} - g_{in,jm} + g_{jn,im} - g_{jm,in}) + g^{\underline{ps}}(\Gamma_{pim}\Gamma_{sjn} - \Gamma_{pin}\Gamma_{sjn}$$

Odavde vidimo da važi

$$(8.18a,b) \qquad \underset{1}{R}_{ijmn} = -\underset{1}{R}_{jimn}, \quad \underset{1}{R}_{ijmn} = -\underset{1}{R}_{ijnm}.$$

Ispitajmo sada cikličnu simetriju tenzora $\underset{1}{R}_{ijmn}$. Tu imamo 4 mogućnosti cikliranja po 3 indeksa.

Na osnovu (8.6) je

$$(8.19) \quad \underset{jmn}{Cikl}\ \underset{1}{R}_{ijmn} = \underset{jmn}{Cikl}(g_{\underline{ip}}\underset{1}{R}{}^{p}{}_{jmn}) = g_{\underline{ip}}\underset{jmn}{Cikl}\ \underset{1}{R}{}^{p}{}_{jmn} =$$

$$= 2g_{\underline{ip}}\underset{jmn}{Cikl}(\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jm},n} + \Gamma^{s}_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^{p}_{sn}).$$

Prema (8.15) je

$$(8.20a) \qquad g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{\underline{jm},n} = \Gamma_{i\underline{jm},n} - \Gamma^{s}_{\underline{jm}}(\Gamma_{isn} + \Gamma_{sin}),$$

$$(8.20b) \qquad g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{\underline{jm},n} = \Gamma_{i\underline{jm},n} - \Gamma^{s}_{\underline{jm}}(\Gamma_{ins} + \Gamma_{sni}),$$

$$(8.21a) \qquad g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{jm},n} = \Gamma_{i\underset{\vee}{jm},n} - \Gamma^{s}_{\underset{\vee}{jm}}(\Gamma_{isn} + \Gamma_{sin}),$$

$$(8.21b) \qquad g_{\underline{is}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{jm},n} = \Gamma_{i\underset{\vee}{jm},n} - \Gamma^{s}_{\underset{\vee}{jm}}(\Gamma_{ins} + \Gamma_{sni}).$$

Na osnovu (8.21a) jednačina (8.19) postaje

$$\underset{jmn}{Cikl}\ \underset{1}{R}_{ijmn} = 2\,\underset{jmn}{Cikl}\left[\Gamma_{i\underset{\vee}{jm},n} - \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jm}}(\Gamma_{ipn} + \Gamma_{pin}) + \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma_{ipn}\right],$$

odnosno

$$(8.22) \quad \underset{jmn}{Cikl}\ \underset{1}{R}_{ijmn} = 2\,\underset{jmn}{Cikl}\left(\Gamma_{i\underset{\vee}{jm},n} - \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma_{pin}\right).$$

Prema (18.16') je

$$\operatorname*{Cikl}_{jmn}\underset{1}{R}_{ijmn}=\tfrac{1}{2}\left(g_{im,jn}-g_{in,jm}+g_{jn,im}-g_{jm,in}+g_{in,mj}-\right.$$

$$\left.-g_{ij,mn}+g_{mj,in}-g_{mn,ij}+g_{ij,nm}-g_{im,nj}+g_{nm,ij}-g_{nj,im}\right)+$$

$$+\Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{jn}-\Gamma_{pin}\Gamma^{p}_{jm}+\Gamma_{pin}\Gamma^{p}_{mj}-\Gamma_{pij}\Gamma^{p}_{mn}+\Gamma_{pij}\Gamma^{p}_{nm}-\Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{nj}\ ,$$

t.j.

(8.22′) $$\operatorname*{Cikl}_{jmn}\underset{1}{R}_{ijmn}=\operatorname*{Cikl}_{jmn}\left(g_{mj,in}+2\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{mj}}\Gamma_{pin}\right).$$

Na isti način se dobija

(8.23) $$\operatorname*{Cikl}_{ijm}\underset{1}{R}_{ijmn}=\operatorname*{Cikl}_{ijm}\left(g_{\underset{\vee}{mj},in}+2\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{mj}}\Gamma_{pin}\right).$$

Na osnovu (8.18) i (8.22′,23) dobijamo

$$\operatorname*{Cikl}_{imn}\underset{1}{R}_{ijmn}=\operatorname*{Cikl}_{imn}\left(-\underset{1}{R}_{jimn}\right)=-\operatorname*{Cikl}_{imn}\left(g_{\underset{\vee}{mi},jn}+2\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{mi}}\Gamma_{pjn}\right),$$

t.j.

(8.24) $$\operatorname*{Cikl}_{imn}\underset{1}{R}_{ijmn}=\operatorname*{Cikl}_{imn}\left(g_{\underset{\vee}{im},jn}+2\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{im}}\Gamma_{pjn}\right)$$

i analogno

(8.25) $$\operatorname*{Cikl}_{ijn}\underset{1}{R}_{ijmn}=\operatorname*{Cikl}_{ijn}\left(g_{\underset{\vee}{jn},im}+2\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma_{pim}\right).$$

Nema simetrije u odnosu na parove indeksa:ij,mn.

8.2.2. Tenzor $\underset{2}{R}_{ijmn}$.

Na osnovu (8.13a,15) i (4.9) je

$$\underset{2}{R}_{ijmn}=g_{\underline{is}}\underset{2}{R}^{s}{}_{jmn}=g_{\underline{is}}\left(\Gamma^{s}_{mj,n}-\Gamma^{s}_{nj,m}+\Gamma^{p}_{mj}\Gamma^{s}_{np}-\Gamma^{p}_{nj}\Gamma^{s}_{mp}\right)=$$

$$=\Gamma_{imj,n}-\Gamma^{s}_{mj}\left(\Gamma_{ins}+\Gamma_{sni}\right)-\Gamma_{inj,m}+\Gamma^{s}_{nj}\left(\Gamma_{ims}+\Gamma_{smi}\right)+$$

$$+\Gamma^{p}_{mj}\Gamma_{inp}-\Gamma^{p}_{nj}\Gamma_{imp}\ ,$$

t.j.

(8.26) $$\underset{2}{R}_{ijmn}=\Gamma_{imj,n}-\Gamma_{inj,m}+\Gamma_{pmi}\Gamma^{p}_{nj}-\Gamma_{pni}\Gamma^{p}_{mj}\ .$$

Zbog (8.11) i

$$(8.27)\quad \Gamma_{pmi}\Gamma^{p}_{nj} - \Gamma_{pni}\Gamma^{p}_{mj} = g^{\underline{ps}}\left(\Gamma_{pmi}\Gamma_{snj} - \Gamma_{pmj}\Gamma_{sni}\right) = \Gamma_{pmi}\Gamma^{p}_{nj} - \Gamma_{pmj}\Gamma^{p}_{ni}\,,$$

jedn.(8.26) postaje

$$(8.26')\quad \underset{2}{R}_{ijmn} = \frac{1}{2}\left(g_{mi,jn} - g_{ni,jm} + g_{nj,im} - g_{mj,in}\right) + g^{\underline{ps}}\left(\Gamma_{pmi}\Gamma_{snj} - \Gamma_{pmj}\Gamma_{sni}\right.$$

Odavde sledi

$$(8.28a,b)\qquad \underset{2}{R}_{ijmn} = -\underset{2}{R}_{jimn}\,,\quad \underset{2}{R}_{ijmn} = -\underset{2}{R}_{ijnm}\,.$$

Sada treba ispitati cikličnu simetriju tenzora $\underset{2}{R}_{ijmn}$.
Na osnovu (18.26') je

$$(8.29)\qquad \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{2}{R}_{ijmn} = \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\left(g_{jm,in} + 2\Gamma^{p}_{jm}\Gamma_{pni}\right),$$

$$(8.30)\qquad \underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{2}{R}_{ijmn} = \underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\left(g_{jm,in} + 2\Gamma^{p}_{jm}\Gamma_{pni}\right).$$

Koristeći (8.28),iz (8.29,30) dobijamo

$$(8.31)\qquad \underset{imn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{2}{R}_{ijmn} = \underset{imn}{\mathrm{Cikl}}\left(g_{mi,jn} + 2\Gamma^{p}_{mi}\Gamma_{pnj}\right),$$

$$(8.32)\qquad \underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{2}{R}_{ijmn} = \underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\left(g_{nj,im} + 2\Gamma^{p}_{nj}\Gamma_{pmi}\right).$$

Nema simetrije u odnosu na parove indeksa: ij,mn.

8.2.3. Tenzor $\underset{3}{R}_{ijmn}$.

Na osnovu (8.13a,15) i (4.46) je

$$\underset{3}{R}_{ijmn} = g_{\underline{is}}\underset{3}{R}^{s}{}_{jmn} = g_{\underline{is}}\left(\Gamma^{s}_{jm,n} - \Gamma^{s}_{nj,m} + \Gamma^{p}_{jm}\Gamma^{s}_{np} - \Gamma^{p}_{nj}\Gamma^{s}_{pm} + 2\Gamma^{p}_{nm}\Gamma^{s}_{pj}\right.$$

$$= \Gamma_{ijm,n} - \Gamma^{s}_{jm}\left(\Gamma_{ins} + \Gamma_{sni}\right) - \Gamma_{inj,m} + \Gamma^{s}_{nj}\left(\Gamma_{ism} + \Gamma_{sim}\right) +$$

$$+ \Gamma^{p}_{jm}\Gamma_{inp} - \Gamma^{p}_{nj}\Gamma_{ipm} + 2\Gamma^{p}_{nm}\Gamma_{ipj}\,,$$

odnosno

$$(8.33)\quad \underset{3}{R}_{ijmn}=\Gamma_{ijm,n}-\Gamma_{inj,m}+\Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{nj}-\Gamma_{pni}\Gamma^{p}_{jm}+2\Gamma^{p}_{nm}\Gamma_{i\underbrace{pj}} .$$

Na osnovu (8.11) i

$$(8.34)\quad \Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{nj}-\Gamma_{pni}\Gamma^{p}_{jm}=g^{\underline{ps}}\left(\Gamma_{pim}\Gamma_{snj}-\Gamma_{pni}\Gamma_{sjm}\right)=\Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{nj}-\Gamma_{pjm}\Gamma^{p}_{ni}$$

$$(8.35)\quad 2\Gamma^{p}_{nm}\Gamma_{i\underbrace{pj}}=\Gamma^{p}_{nm}(\Gamma_{ipj}-\Gamma_{ijp})=$$

$$=\Gamma^{p}_{nm}(g_{ij,p}+g_{pi,j}-g_{pj,i}-g_{ip,j}-g_{ji,p}+g_{jp,i})=-2\Gamma^{p}_{nm}\Gamma_{j\underbrace{pi}}$$

jednačina (8.33) postaje

$$(8.36)\quad \underset{3}{R}_{ijmn}=\tfrac{1}{2}(g_{im,jn}+g_{ji,mn}-g_{jm,in}-g_{ij,nm}-g_{ni,jm}+$$
$$+g_{nj,im})+\Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{nj}-\Gamma_{pni}\Gamma^{p}_{jm}+\Gamma^{p}_{nm}(\Gamma_{ipj}-\Gamma_{ijp}),$$

odnosno

$$(8.36')\quad \underset{3}{R}_{ijmn}=\tfrac{1}{2}(g_{im,jn}+g_{ji,mn}-g_{jm,in}-g_{ij,nm}-g_{ni,jm}+g_{nj,im})+$$
$$+g^{\underline{ps}}(\Gamma_{pim}\Gamma_{snj}-\Gamma_{pni}\Gamma_{sjm})+\Gamma^{p}_{nm}(g_{ij,p}-g_{ji,p}+g_{jp,i}-g_{ip,j}+g_{pi,j}-g_{pj,i}),$$

odakle je

$$(8.37a,b)\quad \underset{3}{R}_{ijmn}=-\underset{3}{R}_{jimn},\quad \underset{3}{R}_{ijmn}\neq\pm\underset{3}{R}_{ijnm} .$$

Ispitajmo cikličnu simetriju tenzora $\underset{3}{R}_{ijmn}$.

Prema (8.8) je

$$\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{3}{R}_{ijmn}=\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\left(g_{\underline{ip}}\underset{3}{R}^{p}{}_{jmn}\right)=g_{\underline{ip}}\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{3}{R}^{p}{}_{jmn}=4g_{\underline{ip}}\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,L^{s}_{\underbrace{jm}}L^{p}_{\underbrace{ns}} ,$$

$$(8.38)\quad \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{3}{R}_{ijmn}=4\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,L^{p}_{\underbrace{jm}}L_{in\underbrace{p}} .$$

Na osnovu (8.36) je dalje

$$\underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{3}{R}_{ijmn}=2g_{\underbrace{im},jn}+2g_{\underbrace{ji},mn}+2g_{\underbrace{mj},in}+\Gamma^{p}_{nj}(\Gamma_{pim}-\Gamma_{mip})+$$
$$+\Gamma^{p}_{ni}(\Gamma_{jpm}-\Gamma_{pjm})+\Gamma^{p}_{nm}(\Gamma_{ipj}-\Gamma_{pij})+\Gamma^{p}_{nm}(\Gamma_{pji}-\Gamma_{ijp})+$$

$$+\Gamma^{p}_{ni}\left(\Gamma_{pmj}-\Gamma_{jmp}\right)+\Gamma^{p}_{nj}\left(\Gamma_{mpi}-\Gamma_{mpi}\right)=$$

$$=2g_{\underset{\vee}{im},jn}+2g_{\underset{\vee}{ji},mn}+2g_{\underset{\vee}{mj},in}+\Gamma^{p}_{nj}\left(\Gamma_{pim}-\Gamma_{mip}\right)+$$

$$+\Gamma^{p}_{nj}\left(\Gamma_{pim}+\Gamma_{mpi}-\Gamma_{mip}-\Gamma_{pmi}\right)+\Gamma^{p}_{ni}\left(\Gamma_{pmj}+\Gamma_{jpm}-\Gamma_{pjm}-\Gamma_{jmp}\right)+$$

$$+\Gamma^{p}_{nm}\left(\Gamma_{pji}+\Gamma_{ipj}-\Gamma_{pji}-\Gamma_{ijp}\right),$$

t.j.

$$(8.39)\qquad \underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{3}{R}_{ijmn}=2\,\underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\left[g_{\underset{\vee}{ji},mn}+\Gamma^{p}_{ni}\left(\Gamma_{j\underset{\vee}{pm}}+\Gamma_{p\underset{\vee}{mj}}\right)\right].$$

No,kako je na osnovu (8.11)

$$2\Gamma_{i\underset{\vee}{jk}}=\Gamma_{ijk}-\Gamma_{ikj}=g_{\underset{\vee}{ik},j}+g_{\underset{\vee}{ji},k}-g_{\underset{\vee}{jk},i}\ ,$$

to vidimo da je tenzor $\Gamma_{i\underset{\vee}{jk}}$ antisimetričan po svakom paru indeksa,t.j.

$$(8.40)\qquad \Gamma_{i\underset{\vee}{jk}}=-\Gamma_{j\underset{\vee}{ik}}=-\Gamma_{i\underset{\vee}{kj}}=-\Gamma_{k\underset{\vee}{ji}}\ ,$$

na osnovu čega (8.39) postaje

$$(8.41)\qquad \underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{3}{R}_{ijmn}=2\,\underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\left(g_{\underset{\vee}{ji},mn}+2\Gamma^{p}_{ni}\Gamma_{j\underset{\vee}{pm}}\right).$$

Dalje je

$$\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{3}{R}_{ijmn}=2\,\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\ g_{\underset{\vee}{ji},mn}+\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\ \Gamma^{p}_{jm}\left(\Gamma_{pin}-\Gamma_{pni}+\Gamma_{npi}-\Gamma_{nip}\right)=$$

$$=2\,\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\left[g_{\underset{\vee}{ji},mn}+\Gamma^{p}_{jm}\left(\Gamma_{p\underset{\vee}{in}}+\Gamma_{n\underset{\vee}{pi}}\right)\right],$$

pa na osnovu (8.40)

$$(8.42)\qquad \underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{3}{R}_{ijmn}=2\,\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\left(g_{\underset{\vee}{ji},mn}+2\Gamma^{p}_{jm}\Gamma_{p\underset{\vee}{in}}\right).$$

Na osnovu (8.37a,38) sledi

$$(8.43)\qquad \underset{imn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{3}{R}_{ijmn}=\underset{imn}{\mathrm{Cikl}}\left(-\underset{3}{R}_{jimn}\right)=4\,\underset{imn}{\mathrm{Cikl}}\ L^{p}_{\underset{\vee}{im}}L_{j\underset{\vee}{pn}}\ .$$

8.2.4. Tenzor $\underset{4}{R}_{ijmn}$.

Pomoću (8.13a,15) iz (4.52) dobijamo

$$\underset{4}{R}_{ijmn}=g_{\underline{is}}\underset{4}{R}^{s}{}_{jmn}=g_{\underline{is}}\left(\Gamma^{s}_{jm,n}-\Gamma^{s}_{nj,m}+\Gamma^{p}_{jm}\Gamma^{s}_{np}-\Gamma^{p}_{nj}\Gamma^{s}_{pm}+2\Gamma^{p}_{mn}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pj}}\right),$$

t.j.

$$\underset{4}{R}_{ijmn}=\Gamma_{ijm,n}-\Gamma_{inj,m}+\Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{nj}-\Gamma_{pni}\Gamma^{p}_{jm}+2\Gamma^{p}_{mn}\Gamma_{\underset{\vee}{ipj}}. \tag{8.44}$$

Postupkom kao u slučaju $\underset{3}{R}$ dobijamo

$$\underset{4}{R}_{ijmn}=\frac{1}{2}\left(g_{im,jn}+g_{ji,mn}-g_{jm,in}-g_{ij,nm}-g_{ni,jm}+g_{nj,im}\right)+$$
$$+\Gamma_{pim}\Gamma^{p}_{nj}-\Gamma_{pni}\Gamma^{p}_{jm}+\Gamma^{p}_{mn}\left(\Gamma_{ipj}-\Gamma_{ijp}\right), \tag{8.45}$$

odnosno

$$\underset{4}{R}_{ijmn}=\frac{1}{2}\left(g_{im,jn}+g_{ji,mn}-g_{jm,in}-g_{ij,nm}-g_{ni,jm}+g_{nj,im}\right)+$$
$$+g^{\underline{ps}}\left(\Gamma_{pim}\Gamma_{snj}-\Gamma_{pni}\Gamma_{sjm}\right)+\Gamma^{p}_{nm}\left(g_{ij,p}-g_{ji,p}+g_{jp,i}-g_{ip,j}+g_{pi,j}-g_{pj,i}\right. \tag{8.45'}$$

odakle je

$$\underset{4}{R}_{ijmn}=-\underset{4}{R}_{jimn},\qquad \underset{4}{R}_{ijmn}\neq\pm\underset{4}{R}_{ijnm}. \tag{8.46a,b}$$

Treba, dalje, ispitati cikličnu simetriju za $\underset{4}{R}_{ijmn}$. Pre svega, zbog (8.9) je

$$\underset{jmn}{Cikl}\,\underset{4}{R}_{ijmn}=\underset{jmn}{Cikl}\left(g_{\underline{is}}\underset{4}{R}^{s}{}_{jmn}\right)=g_{\underline{is}}\,\underset{jmn}{Cikl}\,\underset{4}{R}^{s}{}_{jmn}=0,$$

t.j.

$$\underset{jmn}{Cikl}\,\underset{4}{R}_{ijmn}=0. \tag{8.47}$$

Dalje, na osnovu (8.45), imamo

$$\underset{ijm}{Cikl}\,\underset{4}{R}_{ijmn}=2\,\underset{ijm}{Cikl}\,g_{\underset{\vee}{ji},mn}+\Gamma^{p}_{nj}\left(\Gamma_{pim}-\Gamma_{pmi}\right)+\Gamma^{p}_{jn}\left(\Gamma_{mpi}-\Gamma_{mip}\right)+$$
$$+\Gamma^{p}_{ni}\left(\Gamma_{pmj}-\Gamma_{pjm}\right)+\Gamma^{p}_{in}\left(\Gamma_{jpm}-\Gamma_{jmp}\right)+\Gamma^{p}_{nm}\left(\Gamma_{pji}-\Gamma_{pij}\right)+\Gamma^{p}_{mn}\left(\Gamma_{ipj}-\Gamma_{ijp}\right),$$

odakle sređivanjem:

$$(8.48)\qquad \underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{4}{R}_{ijmn} = 2\,\underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\left(g_{\underset{\vee}{ji},mn} + 2\Gamma_{p\underset{\vee}{ji}}\Gamma^{p}_{\underline{mn}}\right).$$

Analogno prethodnom slučaju:

$$\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{4}{R}_{ijmn} = 2\,\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\, g_{\underset{\vee}{ji},mn} + \Gamma^{p}_{jm}(\Gamma_{pin} - \Gamma_{pni}) + \Gamma^{p}_{mj}(\Gamma_{npi} - \Gamma_{nip}) +$$
$$+ \Gamma^{p}_{mn}(\Gamma_{ipj} - \Gamma_{ijp}) + \Gamma^{p}_{nm}(\Gamma_{pji} - \Gamma_{pij}) + \Gamma^{p}_{im}(\Gamma_{pnj} - \Gamma_{pjn}) + \Gamma^{p}_{mi}(\Gamma_{jpn} - \Gamma_{jnp}),$$

t.j.

$$(8.49)\qquad \underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{4}{R}_{ijmn} = 2\,\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\left(g_{\underset{\vee}{ji},mn} + 2\Gamma^{p}_{\underline{mn}}\Gamma_{p\underset{\vee}{ji}}\right).$$

Na kraju,na osnovu (8.46a,47) je

$$(8.50)\qquad \underset{imn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{4}{R}_{ijmn} = -\underset{imn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{4}{R}_{jimn} = 0.$$

Na osn. (8.47,50) vidimo da ciklična simetrija kod $\underset{4}{R}_{ijmn}$ postoji u odnosu na indekse imn, jmn, dok ne postoji za ijn, ijm.

8.2.5. Tenzor $\underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn}$.

Kako je na osnovu (6.17)

$$(8.51)\qquad \underset{2}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}}L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} + L^{p}_{\underset{\vee}{jn}}L^{i}_{\underset{\vee}{pm}},$$

to dobijamo

$$(8.52)\qquad \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = g_{\underline{is}}\underset{2}{\widetilde{R}}{}^{s}{}_{jmn} = R_{ijmn} + L^{p}_{\underset{\vee}{jm}}L_{i\underset{\vee}{pn}} + L^{p}_{\underset{\vee}{jn}}L_{i\underset{\vee}{pm}},$$

odnosno

$$(8.52')\qquad \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = R_{ijmn} + g^{\underline{ps}}\left(L_{p\underset{\vee}{jm}}L_{i\underset{\vee}{sn}} + L_{p\underset{\vee}{jn}}L_{i\underset{\vee}{sm}}\right).$$

Odmah je očigledno da je izraz u zagradi simetričan po indeksima m,n, a na osnovu (8.40) sledi njegova simetrija i po i,j, pa kako je tenzor R_{ijmn} antisimetričan po navedenim parovima, to sledi da za $\underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn}$ važi

(8.53a,b) $$\underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} \neq \pm \underset{2}{\widetilde{R}}_{jimn}\ , \quad \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} \neq \pm \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijnm}.$$

Treba ispitati još cikličnu simetriju.

Na osnovu (8.10) je

(8.54) $$\underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = 0\ .$$

Uzimajući u obzir (videti [21],str. 159) da je

(8.55) $$\underset{\alpha\beta\gamma}{\mathrm{Cikl}}\ R_{ijmn} = 0\ , \quad \{\alpha,\beta,\gamma\} \subset \{i,j,m,n\}\ ,$$

na osn. (8.52′) je

$$\underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = g^{ps}\big(L_{p\underset{\smile}{jm}}L_{i\underset{\smile}{sn}} + L_{p\underset{\smile}{jn}}L_{i\underset{\smile}{sm}} + L_{p\underset{\smile}{mi}}L_{j\underset{\smile}{sn}} + L_{p\underset{\smile}{mn}}L_{j\underset{\smile}{si}} + L_{p\underset{\smile}{ij}}L_{m\underset{\smile}{sn}} + L_{p\underset{\smile}{in}}L_{m\underset{\smile}{sj}}\big),$$

pa,zbog (8.40),imamo

(8.56) $$\underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = 0\ .$$

Na isti način kao u prethodnom slučaju:

$$\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = g^{ps}\big(L_{p\underset{\smile}{jm}}L_{i\underset{\smile}{sn}} + L_{p\underset{\smile}{jn}}L_{i\underset{\smile}{sm}} + L_{p\underset{\smile}{nm}}L_{j\underset{\smile}{si}} + L_{p\underset{\smile}{ni}}L_{j\underset{\smile}{sm}} + L_{p\underset{\smile}{im}}L_{n\underset{\smile}{sj}} + L_{p\underset{\smile}{ij}}L_{n\underset{\smile}{sm}}\big),$$

t.j.

(8.57) $$\underset{ijn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = 0\ .$$

Dalje je

$$\underset{imn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = g^{ps}\big(L_{p\underset{\smile}{jm}}L_{i\underset{\smile}{sn}} + L_{p\underset{\smile}{jn}}L_{i\underset{\smile}{sm}} + L_{p\underset{\smile}{jn}}L_{m\underset{\smile}{si}} + L_{p\underset{\smile}{ji}}L_{m\underset{\smile}{sn}} + L_{p\underset{\smile}{ji}}L_{n\underset{\smile}{sm}} + L_{p\underset{\smile}{jm}}L_{n\underset{\smile}{si}}\big),$$

(8.58) $\underset{imn}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = 0 .$

Dakle, za tenzor $\underset{2}{\widetilde{R}}$ važi ciklična simetrija u odnosu na bilo koju trojku indeksa, pa možemo napisati

(8.59) $\underset{\alpha\beta\gamma}{\mathrm{Cikl}}\ \underset{2}{\widetilde{R}}_{ijmn} = 0 , \quad \{\alpha,\beta,\gamma\} \subset \{i,j,m,n\} .$

8.3. Z a k lj u č a k

Iz izloženog u ovom paragrafu vidimo da se osobine simetrije tenzora krivine u L_N izražene jednačinama (8.2,10,18,28,37, 46,47,50,59) poklapaju sa odgovarajućim osobinama simetrije za prostor $\overset{0}{L}_N$ odn. R_N. Jednačine (8.6,7,8,22-25,29-32,38,41-43,48,49) predstavljaju generalizacije poznatih relacija (8.5′) odn. (8.55) ciklične simetrije u $\overset{0}{L}_N$, odn. R_N.

9. GEOMETRIJSKE INTERPRETACIJE TENZORA I PSEUDOTENZORA KRIVINE PROSTORA L_N

9.0. U v o d

U §2 definisali smo dve vrste paralelnog pomeranja tenzora. Prema teor. 2.4.,ako je u L_N dat površinski element određen vektorima dx^i i δx^i , koji polaze iz iste tačke $P(x^i)$,pa se dx^i pomera duž δx^i po jednoj od dve vrste paralelnog pomeranja, a δx^i duž dx^i po drugoj - krajnje tačke dobijenih vektora se poklapaju,t.j. dobija se zatvoreni paralelogram u L_N.

Posmatrajući jednu (ustvari prvu) vrstu paralelnog pomeranja vektora F.Graiff[26] je dobila izraz za priraštaj ΔV^i vektora V^i pri obilasku cele konture napred navedenog paralelograma,izražen pomoću tenzora $\underset{1}{R}$. Ona to radi u prostoru JTP,međutim, rezultat važi u L_N, pa ćemo ga mi tako i formulisati i dokazati u §9.1.1. Osim toga, menjajući vrstu paralelnog pomeranja za kontravarijantni vektor v^i i kovarijantni v_j, dobićemo geometrijske interpretacije i drugih tenzora i pseudotenzora krivine prostora L_N.

9.1. Tenzori $\underset{1}{R}, \underset{2}{R}, \underset{3}{R}, \underset{4}{R}$ i pseudotenzori parnog indeksa

9.1.0. Uvod

Neka je u L_N dat površinski element određen vektorima dx^i i δx^i, koji polaze iz iste tačke $P(x^i)$. Pretpostavimo da dx^i vrši duž δx^i paralelno pomeranje 1. vrste (§2), a δx^i duž dx^i paralelno pomeranje 2. vrste. Na slici je to prikazano odgovarajućim brojem u zagradi. U tom slučaju se dobija zatvoreni paralelogram PQSR (sl.2).

9.1.1. Interpretacija tenzora $\underset{1}{R}$ (F. Graif [26])

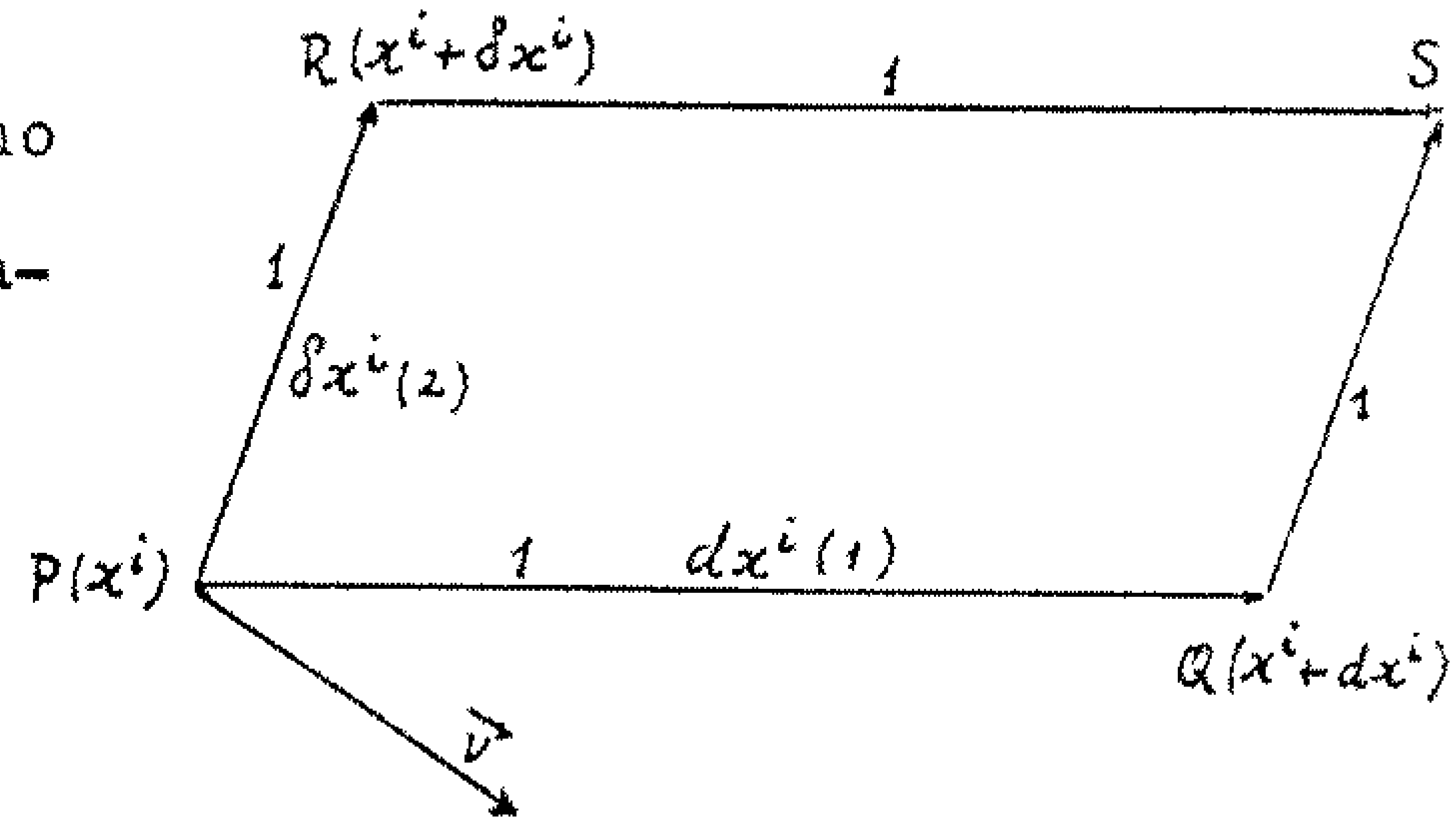
Neka vektor $\vec{v} = v^i$ vrši paralelno pomeranje 1. vrste duž posmatrane konture.

Ako se vektor $\vec{v}$ paralelno pomera duž konture PQS, on u tački S postaje

$$\vec{v}(S) = \vec{v} + d\vec{v} + \delta(\vec{v} + d\vec{v}) \,,$$

sa priraštajem

$$\underset{1}{D}\vec{v} = d\vec{v} + \delta\vec{v} + \delta d\vec{v} \,.$$



Sl.2

Analogno, duž PRS je priraštaj

$$\underset{2}{D}\vec{v} = \delta\vec{v} + d\vec{v} + d\delta\vec{v} \quad ,$$

tako da je duž zatvorene konture PRSQP totalni priraštaj

(9.1) $\underset{1}{\Delta}\vec{v} = \underset{2}{D}\vec{v} - \underset{1}{D}\vec{v} = d\delta\vec{v} - \delta d\vec{v} = d\underset{1}{\delta}\vec{v} - \delta\underset{1}{d}\vec{v}$.

Pretpostavimo da je vektor $\vec{v}$ dat svojim kontravarijantnim komponentama v^i. Prema (2.8′) tada je

$$\delta\underset{1}{d}v^i = \delta(-L^i_{pm}v^p dx^m) = -L^i_{pm,n}v^p dx^m\delta x^n - L^i_{pm}\underset{1}{\delta}v^p dx^m - L^i_{pm}v^p\underset{1}{\delta}dx^m =$$

$$= -L^i_{pm,n}v^p dx^m\delta x^n + L^i_{pm}L^p_{sn}v^s\delta x^n dx^m + L^i_{pm}v^p L^m_{sn}dx^s\delta x^n,$$

odakle, promenama nekih nemih indeksa, dobijamo

(9.2) $$\delta\underset{1}{d}v^i = \left(-L^i_{pm,n} + L^s_{pn}L^i_{sm} + L^s_{mn}L^i_{ps}\right)v^p dx^m\delta x^n,$$

Analogno je

$$d\underset{1}{\delta}v^i = d(-L^i_{pm}v^p\delta x^m) = -L^i_{pm,n}v^p dx^n\delta x^m -$$

$$-L^i_{pm}\underset{1}{d}v^p\delta x^m - L^i_{pm}v^p\underset{2}{d}\delta x^m =$$

$$= -L^i_{pm,n}v^p dx^n\delta x^m + L^i_{pm}L^p_{sn}v^s dx^n\delta x^m + L^i_{pm}L^m_{ns}v^p dx^n\delta x^s,$$

odakle

(9.3) $$d\underset{1}{\delta}v^i = \left(-L^i_{pn,m} + L^s_{pm}L^i_{sn} + L^s_{mn}L^i_{ps}\right)v^p dx^m\delta x^n.$$

Iz (9.1-3) je

(9.4) $$\underset{1}{\Delta}v^i = d\underset{1}{\delta}v^i - \delta\underset{1}{d}v^i = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn}v^j dx^m\delta x^n,$$

gde je $\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn}$ tenzor krivine 1.vrste (4.2) prostora L_N.

9.1.2. Interpretacija tenzora $\underset{2}{R}$

Pod uslovima prethodnog slučaja, pri paralelnom pomeranju 2. vrste vektora v^i, a prema (2.8'), imamo

$$\delta \underset{2}{d} v^i = \delta(-L^i_{mp} v^p dx^m) =$$

$$= -\delta L^i_{mp} v^p dx^m - L^i_{mp} \underset{2}{\delta} v^p dx^m - L^i_{mp} v^p \underset{1}{\delta} dx^m =$$

$$= -L^i_{mp,n} v^p dx^m \delta x^n + L^i_{mp} L^p_{ns} v^s dx^m \delta x^n + L^i_{mp} L^m_{sn} v^p dx^s \delta x^n,$$

t.j.

$$\delta \underset{2}{d} v^i = (-L^i_{mp,n} + L^s_{np} L^i_{ms} + L^s_{mn} L^i_{sp}) v^p dx^m \delta x^n . \tag{9.5}$$

Dalje je

$$d \underset{2}{\delta} v^i = d(-L^i_{mp} v^p \delta x^m) =$$

$$= -L^i_{mp,n} v^p dx^n \delta x^m - L^i_{mp} \underset{2}{d} v^p \delta x^m - L^i_{mp} v^p \underset{2}{d} \delta x^m =$$

$$= -L^i_{mp,n} v^p \delta x^m dx^n + L^i_{mp} L^p_{ns} v^s \delta x^m dx^n + L^i_{mp} L^m_{ns} v^p \delta x^s dx^n,$$

odnosno

$$d \underset{2}{\delta} v^i = (-L^i_{np,m} + L^s_{mp} L^i_{ns} + L^s_{mn} L^i_{sp}) v^p dx^m \delta x^n . \tag{9.6}$$

Prema (9.5,6) je

$$\underset{2}{\Delta} v^i = d \underset{2}{\delta} v^i - \delta \underset{2}{d} v^i = (L^i_{mp,n} - L^i_{np,m} + L^s_{mp} L^i_{ns} - L^s_{np} L^i_{ms}) v^p dx^m \delta x^n,$$

$$\underset{2}{\Delta} v^i = \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} v^j dx^m \delta x^n , \tag{9.7}$$

gde je $\underset{2}{R}$ tenzor krivine 2. vrste (4.9) prostora L_N.

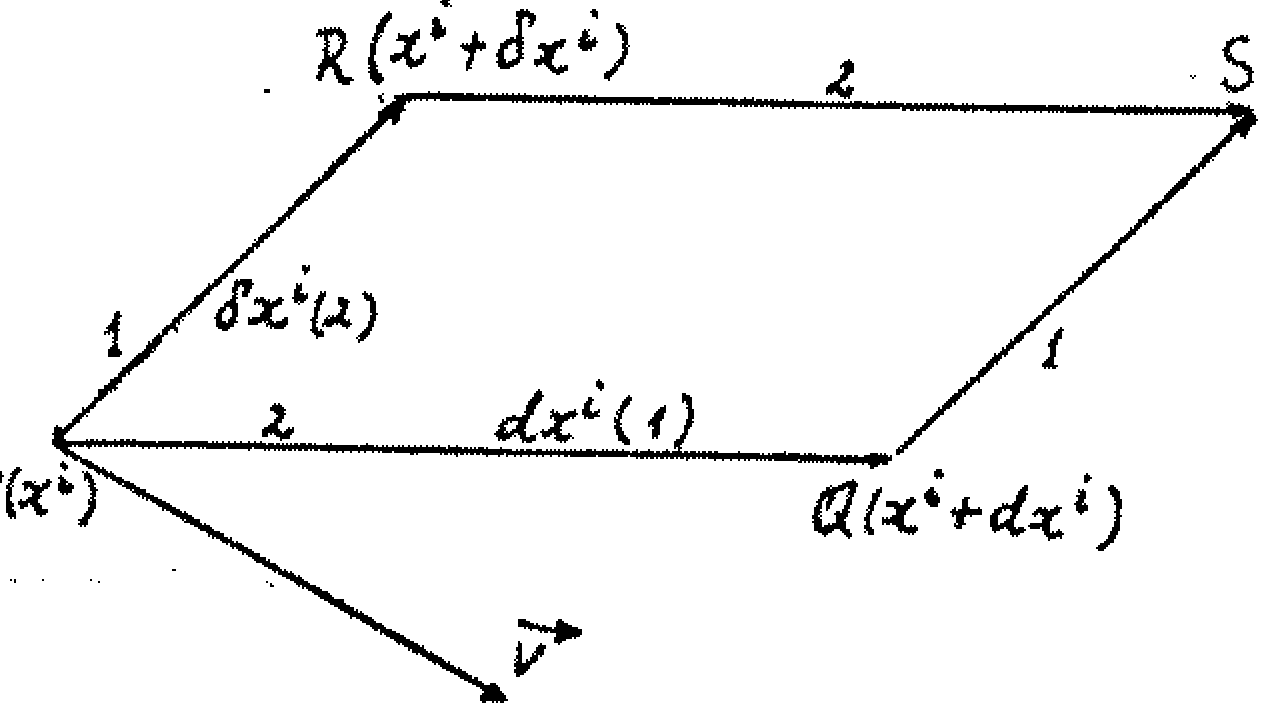
9.1.3. Interpretacija tenzora $\underset{3}{R}$ (M.Prvanović,1974, nepublikovano)

Pretpostavimo sada da vektor $\vec{v}=(v^i)$ vrši paralelno pomeranje 1.vrste duž strana PR i QS, a pomeranje 2.vrste duž drugih dveju strana posmatrane konture (sl.3).

Sada je

$$\underset{1}{D}v^i=\underset{2}{d}v^i+\underset{QS}{\delta}(v^i+\underset{2}{d}v^i)=\underset{1}{\delta}v^i+\underset{2}{d}v^i+\underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i,$$

$$\underset{2}{D}v^i=\underset{1}{\delta}v^i+\underset{RS}{d}(v^i+\underset{1}{\delta}v^i)=\underset{1}{\delta}v^i+\underset{2}{d}v^i+\underset{RS}{d}\underset{1}{\delta}v^i,$$



Sl.3

gde smo napr. sa $\underset{QS}{\delta}$ naznačili činjenicu da se diferencijal uzima duž strane QS.

Dakle:

$$\underset{3}{\Delta}v^i=\underset{RS}{d}\underset{1}{\delta}v^i-\underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i=\underset{RS}{d}(-L^i_{pm}v^p\delta x^m)-\underset{QS}{\delta}(-L^i_{mp}v^p dx^m)=$$

$$=-(L^i_{pn,m}-L^i_{mp,n}+L^s_{pn}L^i_{ms}-L^s_{mp}L^i_{sn}+2L^s_{mn}L^i_{\underset{\vee}{sp}})v^p dx^m\delta x^n,$$

t.j.

$$\underset{3}{\Delta}v^i=-\underset{3}{R}{}^i{}_{jnm}v^j dx^m\delta x^n, \tag{9.8}$$

gde je $\underset{3}{R}$ tenzor krivine (4.46) 3.vrste prostora L_N.

9.1.4. Interpretacija tenzora $\underset{4}{R}$ (M.Prvanović,1974, nepublikovano)

Ako pri obilaženju posmatrane konture sa vektorom v^i postupimo obrnuto nego u prethodnom slučaju, t.j. duž strana PR i QS vršimo paralelno pomeranje 2.vrste, a duž drugih dveju stra- paralelno pomeranje 1.vrste, dobićemo

$$\underset{1}{D}v^i=\underset{1}{d}v^i+\underset{QS}{\delta}(v^i+\underset{1}{d}v^i)=\underset{1}{d}v^i+\underset{2}{\delta}v^i+\underset{QS}{\delta}\underset{1}{d}v^i,$$

$$\underset{2}{D}v^i=\underset{2}{\delta}v^i+\underset{RS}{d}(v^i+\underset{2}{\delta}v^i)=\underset{2}{\delta}v^i+\underset{1}{d}v^i+\underset{RS}{d}\underset{2}{\delta}v^i,$$

odakle

$$\underset{4}{\Delta} V^i = \underset{2}{D} V^i - \underset{1}{D} V^i = \underset{RS}{d}\, \underset{2}{\delta} V^i - \underset{QS}{\delta}\, \underset{1}{d} V^i =$$

$$= \underset{RS}{d}\left(-L^i_{mp} V^p \delta x^m\right) - \underset{QS}{\delta}\left(-L^i_{pm} V^p dx^m\right) =$$

$$= \left(L^i_{pm,n} - L^i_{np,m} + L^s_{pm} L^i_{ns} - L^s_{np} L^i_{sm} + 2 L^s_{mn} L^i_{\underset{\vee}{sp}}\right) V^p dx^m \delta x^n ,$$

t.j.

(9.9) $$\underset{4}{\Delta} V^i = \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} V^j dx^m \delta x^n .$$

9.1.5. Interpretacija pseudotenzora $\underset{10}{A}$

9.1.5.0. Do sada obrađeni slučajevi navode nas na misao da sistematski ispitamo razne slučajeve, koji nastaju kada se menja vrsta paralelnog pomeranja vektora v^i duž pojedinih strana posmatrane konture PQSR. Ima ukupno $2^4=16$ slučajeva (4 strane, a 2 vrste paralelnog pomeranja). Te slučajeve možemo prikazati sledećom tabelom:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
PQ	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
QS	1	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
RS	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	1	1	2
PR	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1

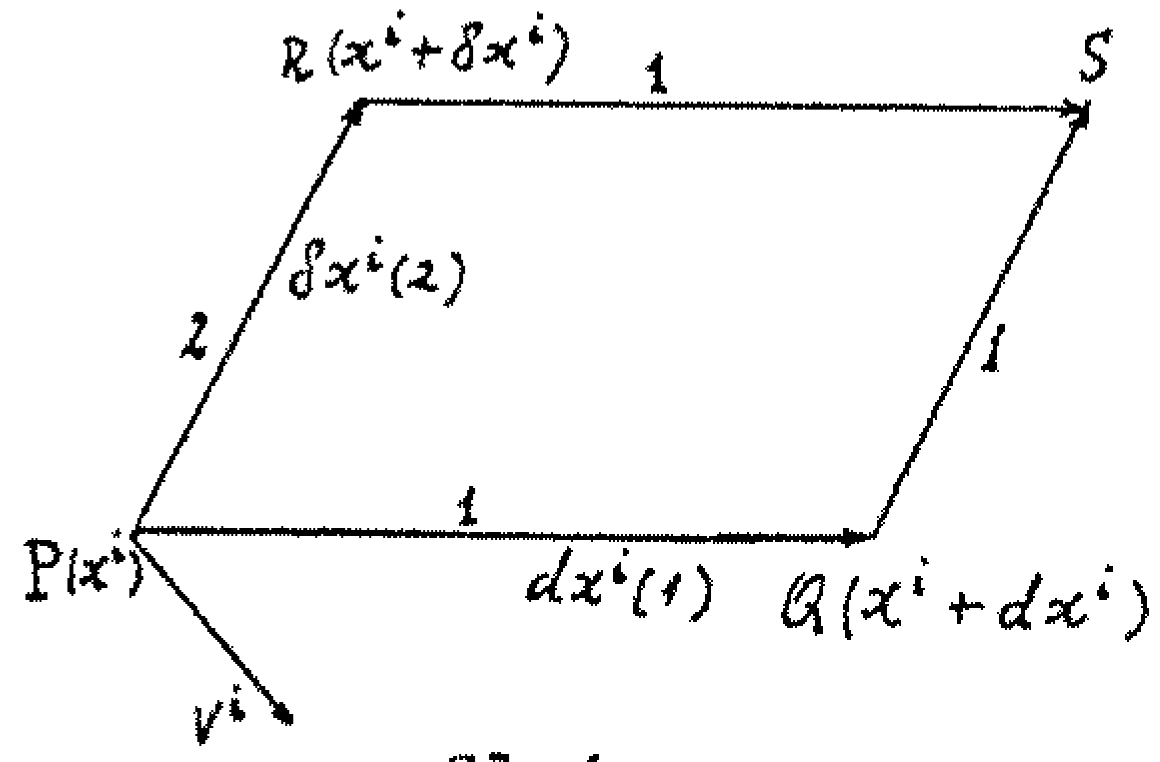
U ovoj tabeli pojedine kolone odgovaraju određenim slučajevima od 16 navedenih. Broj na određenom mestu u koloni odgovara vrsti paralelnog pomeranja vektora v^i duž odgovarajuće strane konture.

Prva 4 slučaja smo već obradili, a dalje ispitujemo slučajeve 5-16.

9.1.5.1. Neka v^i vrši pomeranje druge vrste samo duž strane PR, a pomeranje prve vrste duž ostalih stra na konture (sl.4). Tada je

$$\underset{1}{D} v^i = \underset{1}{d} v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{1}{d} v^i) =$$
$$= \underset{1}{d} v^i + \underset{1}{\delta} v^i + \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i ,$$

$$\underset{2}{D} v^i = \underset{2}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{2}{\delta} v^i) =$$
$$= \underset{2}{\delta} v^i + \underset{1}{d} v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i ,$$



Sl.4

$$(9.10)\quad \underset{5}{\Delta} v^i = \underset{2}{D} v^i - \underset{1}{D} v^i = \underset{2}{\delta} v^i - \underset{1}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i - \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i .$$

Prema (2.8′) je

$$(9.11)\quad \underset{2}{\delta} v^i - \underset{1}{\delta} v^i = -L^i_{mp} v^p \delta x^m + L^i_{pm} v^p \delta x^m = 2L^i_{\underset{\vee}{pm}} v^p \delta x^m ,$$

$$\underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i = \underset{RS}{d}(-L^i_{mp} v^p \delta x^m) = -L^i_{mp,n} v^p \delta x^m dx^n +$$
$$+ L^i_{mp} L^p_{sn} v^s \delta x^m dx^n + L^i_{mp} L^m_{ns} v^p dx^n \delta x^s ,$$

odakle promenom nekih nemih indeksa

$$(9.12)\quad \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i = (-L^i_{np,m} + L^s_{pm} L^i_{ns} + L^s_{mn} L^i_{sp}) v^p dx^m \delta x^n ,$$

a na isti način

$$\underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i = \underset{QS}{\delta}(-L^i_{pm} v^p dx^m) = -L^i_{pm,n} v^p dx^m \delta x^n +$$
$$+ L^i_{pm} L^p_{sn} v^s dx^m \delta x^n + L^i_{pm} L^m_{sn} v^p dx^s \delta x^n ,$$

t.j.

$$(9.13)\quad \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i = (-L^i_{pm,n} + L^s_{pn} L^i_{sm} + L^s_{mn} L^i_{ps}) v^p dx^m \delta x^n .$$

Prema (9.10-13) imamo

$$\underset{5}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{pm}} v^p \delta x^m + (L^i_{pm,n} - L^i_{np,m} + L^s_{pm} L^i_{ns} - L^s_{pn} L^i_{sm} +$$
$$+ 2L^s_{mn} L^i_{\underset{\vee}{sp}}) v^p dx^m \delta x^n ,$$

$$(9.14)\quad \underset{5}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}} v^j \delta x^m + (\underset{10}{A}{}^i{}_{jmn} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\vee}{pj}}) v^j dx^m \delta x^n ,$$

gde je pseudotenzor krivine $\underset{10}{A}$ dat jednačinom (4.35).

Izraz u zagradi u (9.14) nije tenzor, jer prema (5.17) taj izraz (zamenom indeksa p sa j) glasi

$$(9.15)\quad \underset{10}{A}{}^{i}{}_{jmn} + 2L^{p}_{mn}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}} = R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} + L^{i}_{\underset{\vee}{jn};m} -$$

$$- L^{p}_{\underset{\vee}{jm}}L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}}L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} - 2L^{p}_{\underline{mn}}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}} - 2L^{p}_{\underset{\vee}{jn}}L^{i}_{\underline{pm}} + 2L^{p}_{mn}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}} =$$

$$= R^{i}{}_{jmn} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} + L^{i}_{\underset{\vee}{jn};m} - L^{p}_{\underset{\vee}{jm}}L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - L^{p}_{\underset{\vee}{jn}}L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}} - 2L^{p}_{\underset{\vee}{jn}}L^{i}_{\underline{pm}} ,$$

gde $L^{i}_{\underline{pm}}$ nije tenzor.

Ako pored oznaka (7.1,2) za tenzore $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{A}', \mathcal{B}'$, uvedemo još sledeće oznake

$$(9.16a\text{-}c)\quad \mathcal{D} \overset{d}{=} L^{p}_{\underline{\underline{mn}}}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}} ,\ \mathcal{E} \overset{d}{=} L^{p}_{\underline{jm}}L^{i}_{\underset{\vee}{pn}} ,\quad \mathcal{F} \overset{d}{=} L^{p}_{\underset{\vee}{jm}}L^{i}_{\underline{pn}} ,$$

$$(9.17a,b)\qquad \mathcal{E}' \overset{d}{=} L^{p}_{\underline{jn}}L^{i}_{\underset{\vee}{pm}} ,\quad \mathcal{F}' \overset{d}{=} L^{p}_{\underset{\vee}{jn}}L^{i}_{\underline{pm}} ,$$

odakle se vidi da $\mathcal{D}, \dots, \mathcal{F}'$ nisu tenzori, onda se (9.15) može napisati u obliku

$$(9.15')\quad \underset{10}{A}{}^{i}{}_{jmn} + 2L^{p}_{mn}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}} = R + \mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} - \mathcal{B}' + 2\mathcal{C} - 2\mathcal{F}' ,$$

gde samo $\mathcal{F}'$ nije tenzor.

9.1.6. Interpretacija pseudotenzora $\underset{8}{A}$

Posmatrajmo sada slučaj 6. prema napred navedenoj tabeli, t.j. slučaj kada v^{i} vrši pomeranje 2.vrste duž strane RS, a pomeranje 1.vrste duž ostalih strana konture. Imamo

$$\underset{1}{D}v^{i} = \underset{1}{d}v^{i} + \underset{QS}{\delta}(v^{i} + \underset{1}{d}v^{i}) = \underset{1}{d}v^{i} + \underset{1}{\delta}v^{i} + \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d}v^{i} ,$$

$$\underset{2}{D}v^{i} = \underset{1}{\delta}v^{i} + \underset{RS}{d}(v^{i} + \underset{1}{\delta}v^{i}) = \underset{1}{\delta}v^{i} + \underset{2}{d}v^{i} + \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta}v^{i} ,$$

$$(9.18)\qquad \underset{6}{\Delta}v^{i} = \underset{2}{D}v^{i} - \underset{1}{D}v^{i} = \underset{2}{d}v^{i} - \underset{1}{d}v^{i} + \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta}v^{i} - \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d}v^{i} ,$$

Prema (2.8′) je

$$(9.19)\qquad \underset{2}{d}v^i - \underset{1}{d}v^i = -L^i_{mp}v^p dx^m + L^i_{pm}v^p dx^m = 2L^i_{\underset{\vee}{pm}}v^p dx^m,$$

$$\underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta}v^i = \underset{RS}{d}(-L^i_{pm}v^p\delta x^m) = -L^i_{pm,n}v^p\delta x^m dx^n +$$
$$+ L^i_{pm}L^p_{ns}v^s dx^n\delta x^m + L^i_{pm}L^m_{ns}v^p dx^n\delta x^s,$$

t.j.

$$(9.20)\qquad \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta}v^i = (-L^i_{jn,m} + L^p_{mj}L^i_{pn} + L^p_{mn}L^i_{jp})v^j dx^m\delta x^n$$

i dalje

$$\underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d}v^i = \underset{QS}{\delta}(-L^i_{jm}v^j dx^m) = -L^i_{jm,n}v^j dx^m\delta x^n +$$
$$+ L^i_{jm}L^j_{pn}v^p dx^m\delta x^n + L^i_{jm}L^m_{pn}v^j dx^p\delta x^n,$$

$$(9.21)\qquad \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d}v^i = (-L^i_{jm,n} + L^p_{jn}L^i_{pm} + L^p_{mn}L^i_{jp})v^j dx^m\delta x^n.$$

Na osnovu (9.18–21) sledi

$$\underset{6}{\Delta}v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{pm}}v^p dx^m + (L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj}L^i_{pn} - L^p_{jn}L^i_{pm})v^j dx^m\delta x^n,$$

odnosno

$$(9.22)\qquad \underset{6}{\Delta}v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}}v^j dx^m + \underset{8}{A}{}^i{}_{jmn}v^j dx^m\delta x^n,$$

gde je $\underset{8}{A}$ pseudotenzor krivine (4.31).

9.1.7. Interpretacija pseudotenzora $\underset{6}{A}$

Razmotrimo slučaj kada v^i vrši pomeranje 1.vrste duž strana PQ i QS, a pomeranje 2.vrste duž strana RS i PR. Tada je

$$\underset{1}{D}v^i = \underset{1}{d}v^i + \delta(v^i + \underset{1}{d}v^i) = \underset{1}{d}v^i + \underset{1}{\delta}v^i + \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d}v^i,$$

$$\underset{2}{D}v^i = \underset{2}{\delta}v^i + d(v^i + \underset{2}{\delta}v^i) = \underset{2}{\delta}v^i + \underset{2}{d}v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta}v^i,$$

$$(9.23)\qquad \underset{7}{\Delta}v^i = \underset{2}{D}v^i - \underset{1}{D}v^i = \underset{2}{d}v^i - \underset{1}{d}v^i + \underset{2}{\delta}v^i - \underset{1}{\delta}v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta}v^i - \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d}v^i,$$

(9.24) $$\underset{2}{d} v^i - \underset{1}{d} v^i + \underset{2}{\delta} v^i - \underset{1}{\delta} v^i =$$

$$= 2L^i_{\underset{\vee}{pm}} v^p dx^m + 2L^i_{\underset{\vee}{pm}} v^p \delta x^m ,$$

$$\underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i = \underset{RS}{d}\left(-L^i_{mj} v^j \delta x^m\right) = -L^i_{mj,n} v^j dx^n \delta x^m +$$

$$+ L^i_{mj} L^j_{np} v^p dx^n \delta x^m + L^i_{mj} L^m_{np} v^j dx^n \delta x^p ,$$

(9.25) $$\underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i = \left(-L^i_{nj,m} + L^p_{mj} L^i_{np} + L^p_{mn} L^i_{pj}\right) v^j dx^m \delta x^n ,$$

$$\underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i = \underset{QS}{\delta}\left(-L^i_{jm} v^j dx^m\right) = -L^i_{jm,n} v^j dx^m \delta x^n +$$

$$+ L^i_{jm} L^j_{pn} v^p dx^m \delta x^n + L^i_{jm} L^m_{pn} v^j dx^p \delta x^n ,$$

(9.26) $$\underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i = \left(-L^i_{jm,n} + L^p_{jn} L^i_{pm} + L^p_{mn} L^i_{jp}\right) v^j dx^m \delta x^n .$$

Prema (9.23-26) dobijamo

(9.27') $$\underset{7}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{pm}} v^p (dx^m + \delta x^m) + \left(L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + \right.$$

$$\left. + L^p_{mj} L^i_{np} - L^p_{jn} L^i_{pm} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\vee}{pj}}\right) v^j dx^m \delta x^n ,$$

odnosno

(9.27) $$\underset{7}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}} v^j (dx^m + \delta x^m) + \left(\underset{6}{A}{}^i{}_{jmn} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\vee}{pj}}\right) v^j dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{6}{A}$ pseudotenzor krivine (4.27). Izraz u poslednjoj zagradi u (9.27) nije tenzor, jer je

(9.28) $$\underset{6}{A}{}^i{}_{jmn} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\vee}{pj}} = R + \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}' + 2\mathcal{C} - 2(\mathcal{F} + \mathcal{F}') ,$$

gde su izrazi $\mathcal{A}, \ldots, \mathcal{F}'$ dati jednačinama (7.1,2) i (9.16,17).

9.1.8. II interpretacija pseudotenzora $\underset{8}{A}$

Pretpostavimo da vektor v^i vrši pomeranje 2. vrste duž strane QS, a pomeranje 1. vrste duž ostalih strana. Tada je

$$\underset{1}{D} v^i = \underset{1}{d} v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{1}{d} v^i) = \underset{1}{d} v^i + \underset{2}{\delta} v^i + \underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v^i ,$$

$$\underset{2}{D} v^i = \underset{1}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{1}{\delta} v^i) = \underset{1}{\delta} v^i + \underset{1}{d} v^i + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v^i ,$$

(9.29) $$\underset{8}{\Delta} v^i = \underset{2}{D} v^i - \underset{1}{D} v^i = \underset{1}{\delta} v^i - \underset{2}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v^i - \underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v^i ,$$

(9.30) $$\underset{1}{\delta} v^i - \underset{2}{\delta} v^i = 2 L^i_{\underset{\vee}{mp}} v^p \delta x^m ,$$

(9.31) $$\underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v^i = \underset{RS}{d}(-L^i_{jm} v^j \delta x^m) = (-L^i_{jn,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} + L^p_{mn} L^i_{jp}) v^j dx^m \delta x^n ,$$

$$\underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v^i = \underset{QS}{\delta}(-L^i_{pm} v^p dx^m) =$$

$$= -L^i_{jm,n} v^j dx^m \delta x^n + L^i_{jm} L^j_{np} v^p dx^m \delta x^n + L^i_{jm} L^m_{pn} v^j dx^p \delta x^n ,$$

t.j.

(9.32) $$\underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v^i = (-L^i_{jm,n} + L^p_{nj} L^i_{pm} + L^p_{mn} L^i_{jp}) v^j dx^m \delta x^n .$$

Na osnovu (9.29-32) sledi

$$\underset{8}{\Delta} v^i = 2 L^i_{\underset{\vee}{mj}} v^j \delta x^m + (L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{pm}) v^j dx^m \delta x^n ,$$

odnosno

(9.33) $$\underset{8}{\Delta} v^i = 2 L^i_{\underset{\vee}{mj}} v^j \delta x^m - \underset{8}{A}{}^i{}_{jnm} v^j dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{8}{A}$ pseudotenzor krivine (4.31).

9.1.9. Interpretacija pseudotenzora $\underset{2}{A}$

U ovom slučaju, prema napred navedenoj tabeli, vektor v^i vrši pomeranje 1. vrste duž strana PQ i PR, a pomeranje 2. vrste duž drugih dveju strana. Tada je

$$\underset{1}{D} v^i = \underset{1}{d} v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{1}{d} v^i) = \underset{1}{d} v^i + \underset{2}{\delta} v^i + \underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v^i$$

$$\underset{2}{D} v^i = \underset{1}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{1}{\delta} v^i) = \underset{1}{\delta} v^i + \underset{2}{d} v^i + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v^i$$

(9.34) $$\underset{9}{\Delta} v^i = \underset{1}{\delta} v^i - \underset{2}{\delta} v^i + \underset{2}{d} v^i - \underset{1}{d} v^i + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v^i - \underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v^i$$

Na osnovu (9.19,30) i

$$(9.35)\quad \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v^i = (-L^i_{jn,m} + L^p_{mj}L^i_{pn} + L^p_{mn}L^i_{jp})\, v^j dx^m \delta x^n ,$$

$$(9.36)\quad \underset{RS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i = (-L^i_{jm,n} + L^p_{nj}L^i_{pm} + L^p_{mn}L^i_{jp})\, v^j dx^m dx^n$$

jednačina (9.34) postaje

$$\underset{9}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{mj}}\, v^j \delta x^m + 2L^i_{\underset{\vee}{jm}}\, v^j dx^m +$$

$$+ (L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj}L^i_{pn} - L^p_{nj}L^i_{pm})\, v^j dx^m \delta x^n ,$$

t.j.

$$(9.37)\quad \underset{9}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}}\, v^j (dx^m - \delta x^m) + \underset{2}{A}{}^i{}_{jmn}\, v^j dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{2}{A}$ pseudotenzor krivine (4.12).

9.1.10. Interpretacija pseudotenzora $\underset{12}{A}$

Posmatrajmo slučaj kada vektor v^i vrši pomeranje 1.vrste duž strane PQ, a pomeranje 2.vrste duž ostalih strana.

$$\underset{1}{D} v^i = \underset{1}{d} v^i + \underset{RS}{\delta}(v^i + \underset{1}{d} v^i) = \underset{1}{d} v^i + \underset{2}{\delta} v^i + \underset{RS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i ,$$

$$\underset{2}{D} v^i = \underset{2}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{2}{\delta} v^i) = \underset{2}{\delta} v^i + \underset{2}{d} v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i ,$$

$$\underset{10}{\Delta} v^i = \underset{2}{d} v^i - \underset{1}{d} v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i - \underset{RS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i ,$$

pa na osnovu (9.19,25,36):

$$\underset{10}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}}\, v^j dx^m +$$

$$+ (L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj}L^i_{np} - L^p_{nj}L^i_{pm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{pj}})\, v^j dx^m \delta x^n ,$$

t.j.

$$(9.38)\quad \underset{10}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}}\, v^j dx^m + (-\underset{12}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{pj}})\, v^j dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{12}{A}$ pseudotenzor krivine (4.38).

Analogno prethodnim slučajevima, dobija se

$$(9.39)\quad -\underset{12}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{pj}} = \mathcal{R} + \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B} + \mathcal{B}' + 2\mathcal{C} - 2\mathcal{F} ,$$

odakle se vidi da izraz u zagradi u (9.38) nije tenzor.

9.1.11. II interpretacija pseudotenzora $\underset{10}{A}$

Pretpostavimo, sada, da v^i vrši pomeranje 2. vrste duž strane PQ, a pomeranje 1. vrste duž ostalih strana.

$$\underset{1}{D}v^i = \underset{2}{d}v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{2}{d}v^i) = \underset{2}{d}v^i + \underset{1}{\delta}v^i + \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i ,$$

$$\underset{2}{D}v^i = \underset{1}{\delta}v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{1}{\delta}v^i) = \underset{1}{\delta}v^i + \underset{1}{d}v^i + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta}v^i ,$$

(9.40) $$\underset{11}{\Delta}v^i = \underset{1}{d}v^i - \underset{2}{d}v^i + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta}v^i - \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i$$

Kako je

$$\underset{RS}{d}\underset{1}{\delta}v^i = \underset{RS}{d}(-L^i_{jm}v^j\delta x^m) =$$

$$= -L^i_{jm,n}v^j dx^n\delta x^m + L^i_{jm}L^j_{pn}v^p dx^n\delta x^m + L^i_{jm}L^m_{np}v^j dx^n\delta x^p ,$$

t.j.

(9.41) $$\underset{RS}{d}\underset{1}{\delta}v^i = (-L^i_{jn,m} + L^p_{jm}L^i_{pn} + L^p_{mn}L^i_{jp})v^j dx^m\delta x^n ,$$

$$\underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i = \underset{QS}{\delta}(-L^i_{mj}v^j dx^m) = -L^i_{mj,n}v^j dx^m\delta x^n +$$

$$+ L^i_{mj}L^j_{pn}v^p dx^m\delta x^n + L^i_{mj}L^m_{pn}v^j dx^p\delta x^n ,$$

(9.42) $$\underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i = (-L^i_{mj,n} + L^p_{jn}L^i_{mp} + L^p_{mn}L^i_{pj})v^j dx^m\delta x^n ,$$

to (9.40) postaje

$$\underset{11}{\Delta}v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{mp}}v^p dx^m + (L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm}L^i_{pn} -$$

$$- L^p_{jn}L^i_{mp} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{jp}})v^j dx^m\delta x^n ,$$

t.j.

(9.43) $$\underset{11}{\Delta}v^i = 2L^i_{\underset{\vee}{mj}}v^j dx^m + (-\underset{10}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{jp}})v^j dx^m\delta x^n ,$$

gde je $\underset{10}{A}$ pseudotenzor krivine (4.35).

Na osnovu (5.17),(7.1,2),(9.16,17) izraz u zagradi u (9.43) postaje

$$(9.44)\quad -\underset{10}{A}{}^{i}{}_{jnm} + 2L^{p}_{mn}L^{i}_{\underset{\vee}{jp}} = -\underset{10}{A}{}^{i}{}_{jnm} + 2L^{p}_{\underset{\vee}{mn}}L^{i}_{\underset{\vee}{jp}} + 2L^{p}_{\underline{mn}}L^{i}_{\underset{\vee}{jp}} =$$
$$= \mathcal{R} - \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} + \mathcal{B}' - 2\mathcal{C} + 2\mathcal{F}\ ,$$

gde $\mathcal{F}$ (9.16c) nije tenzor.

9.1.12. Interpretacija pseudotenzora $\underset{4}{A}$

Razmotrimo slučaj kada v^i vrši pomeranje prve vrste duž strana QS i RS, a pomeranje druge vrste duž drugih dveju strana.

Tada je

$$\underset{1}{D}v^i = \underset{2}{d}v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{2}{d}v^i) = \underset{2}{d}v^i + \underset{1}{\delta}v^i + \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i\ ,$$
$$\underset{2}{D}v^i = \underset{2}{\delta}v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{2}{\delta}v^i) = \underset{2}{\delta}v^i + \underset{1}{d}v^i + \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta}v^i\ ,$$
$$(9.45)\quad \underset{12}{\Delta}v^i = \underset{1}{d}v^i - \underset{2}{d}v^i + \underset{2}{\delta}v^i - \underset{1}{\delta}v^i + \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta}v^i - \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i\ .$$

Na osnovu (9.11,19,12,42) jednačina (9.45) postaje

$$\underset{12}{\Delta}v^i = 2L^{i}_{\underset{\vee}{jm}}v^j\delta x^m - 2L^{i}_{\underset{\vee}{jm}}v^j dx^m + (L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{jm}L^{i}_{np} - L^{p}_{jn}L^{i}_{mp})v^j dx^m \delta x^n,$$

t.j.

$$(9.46)\quad \underset{12}{\Delta}v^i = 2L^{i}_{\underset{\vee}{jm}}v^j(\delta x^m - dx^m) + \underset{4}{A}{}^{i}{}_{jmn}v^j dx^m \delta x^n\ ,$$

gde je $\underset{4}{A}$ pseudotenzor (4.24).

9.1.13. Interpretacija pseudotenzora $\underset{14}{A}$

Pretpostavimo da vektor v^i vrši pomeranje 1.vrste samo duž strane QS,a pomeranje 2.vrste duž ostalih strana konture.

U tom slučaju je

$$\underset{1}{D}v^i = \underset{2}{d}v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{2}{d}v^i) = \underset{2}{d}v^i + \underset{1}{\delta}v^i + \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i\ ,$$
$$\underset{2}{D}v^i = \underset{2}{\delta}v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{2}{\delta}v^i) = \underset{2}{\delta}v^i + \underset{2}{d}v^i + \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta}v^i\ ,$$
$$(9.47)\quad \underset{13}{\Delta}v^i = \underset{2}{\delta}v^i - \underset{1}{\delta}v^i + \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta}v^i - \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d}v^i\ .$$

Iz (9.11,25,42) i (9.47) dobijamo

$$\underset{13}{\Delta} v^i = 2L^{\;\,i}_{\underset{\vee}{jm}} v^j \delta x^m + (L^{\;\,i}_{mj,n} - L^{\;\,i}_{nj,m} + L^{\;\,p}_{mj}L^{\;\,i}_{np} - L^{\;\,p}_{jn}L^{\;\,i}_{mp}) v^j dx^m \delta x^n ,$$

odnosno

$$(9.48) \quad \underset{13}{\Delta} v^i = 2L^{\;\,i}_{\underset{\vee}{jm}} v^j \delta x^m - \underset{14}{A}{}^i{}_{jnm} v^j dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{14}{A}$ pseudotenzor krivine (4.42).

9.1.14. II interpretacija pseudotenzora $\underset{6}{A}$

Ako v^i vrši pomeranje 1.vrste duž strana PR i RS, a pomeranje 2.vrste duž drugih dveju strana konture, imamo

$$\underset{1}{D} v^i = \underset{2}{d} v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{2}{d} v^i) = \underset{2}{d} v^i + \underset{2}{\delta} v^i + \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d} v^i ,$$

$$\underset{2}{D} v^i = \underset{1}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{1}{\delta} v^i) = \underset{1}{\delta} v^i + \underset{1}{d} v^i + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v^i ,$$

$$(9.49) \quad \underset{14}{\Delta} v^i = \underset{1}{d} v^i - \underset{2}{d} v^i + \underset{1}{\delta} v^i - \underset{2}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v^i - \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d} v^i .$$

Na osnovu (9.11,19,3,5) jednačina (9.49) postaje

$$(9.50) \quad \underset{14}{\Delta} v^i = 2L^{\;\,i}_{\underset{\vee}{mj}} v^j (dx^m + \delta x^m) + (-\underset{6}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^{\;\,p}_{mn} L^{\;\,i}_{\underset{\vee}{jp}}) v^j dx^m \delta x^n .$$

Prema oznakama (7.1,2),(9.16,17),a uzimajući u obzir (5.13), dobijamo

$$(9.51) \quad -\underset{6}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^{\;\,p}_{mn} L^{\;\,i}_{jp} = R - \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}' - 2\mathcal{C} + 2(\mathcal{F} + \mathcal{F}') ,$$

što pokazuje da izraz u zagradi u (9.50) nije tenzor (jer $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ to nisu).

9.1.15. II interpretacija pseudotenzora $\underset{14}{A}$

Pretpostavimo li sada da v^i vrši pomeranje 1.vrste duž RS, a pomeranje 2.vrste duž ostalih strana konture, imaćemo

$$\underset{1}{D} v^i = \underset{2}{d} v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{2}{d} v^i) = \underset{2}{d} v^i + \underset{2}{\delta} v^i + \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d} v^i ,$$

$$\underset{2}{D} v^i = \underset{2}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{2}{\delta} v^i) = \underset{2}{\delta} v^i + \underset{1}{d} v^i + \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta} v^i ,$$

(9.52) $$\underset{15}{\Delta} v^i = \underset{1}{d} v^i - \underset{2}{d} v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i - \underset{QS}{\delta}\,\underset{2}{d} v^i .$$

Koristeći (9.19,12,5), jednačinu (9.52) možemo napisati

$$\underset{15}{\Delta} v^i = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v^j dx^m + \left(L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{jm} L^{i}_{np} - L^{p}_{nj} L^{i}_{mp}\right) v^j dx^m \delta x^n ,$$

t.j.

(9.53) $$\underset{15}{\Delta} v^i = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v^j dx^m + \underset{14}{A}{}^{i}{}_{jmn} v^j dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{14}{A}$ pseudotenzor (4.42).

9.1.16. II interpretacija pseudotenzora $\underset{12}{A}$

Pretpostavimo, na kraju, da v^i duž strane PR posmatrane konture vrši pomeranje 1. vrste, a duž ostalih strana pomeranje 2. vrste, pa imamo

$$\underset{1}{D} v^i = \underset{2}{d} v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{2}{d} v^i) = \underset{2}{d} v^i + \underset{2}{\delta} v^i + \underset{QS}{\delta}\,\underset{2}{d} v^i ,$$

$$\underset{2}{D} v^i = \underset{1}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{1}{\delta} v^i) = \underset{1}{\delta} v^i + \underset{2}{d} v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v^i ,$$

(9.54) $$\underset{16}{\Delta} v^i = \underset{1}{\delta} v^i - \underset{2}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v^i - \underset{QS}{\delta}\,\underset{2}{d} v^i .$$

Obzirom na (9.11,20,5), poslednja jednačina postaje

$$\underset{16}{\Delta} v^i = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v^j \delta x^m + \left(L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{p}_{mj} L^{i}_{pn} - L^{p}_{nj} L^{i}_{mp} + 2L^{p}_{mn} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}\right) v^j dx^m \delta x^n$$

odnosno

(9.55) $$\underset{14}{\Delta} v^i = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v^j \delta x^m + \left(\underset{12}{A}{}^{i}{}_{jmn} + 2L^{p}_{mn} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}}\right) v^j dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{12}{A}$ pseudotenzor (4.38).

Prema (5.19),(7.1,2),(9.16,17) imamo

(9.56) $$\underset{12}{A}{}^{i}{}_{jmn} + 2L^{p}_{mn} L^{i}_{\underset{\vee}{jp}} = R - \mathcal{A} - \mathcal{A}' - \mathcal{B} - \mathcal{B}' - 2\mathcal{C} + 2\mathcal{F}' ,$$

t.j. izraz u zagradi u (9.55) nije tenzor.

9.1.17. Zaključak

Jednačine (9.4,7,8,9,14,22,27,33,37,38,43,46,48,50,53,55) daju geometrijske interpretacije tenzora odnosno pseudotenzora krivine koji u tim jednačinama figurišu, t.j. tenzora $\underset{1}{R}$, $\underset{2}{R}$, $\underset{3}{R}$, $\underset{4}{R}$ i pseudotenzora parnog indeksa, t.j. $\underset{2}{A}, \ldots, \underset{14}{A}$. One od tih jednačina koje sadrže tenzor torzije L^{i}_{jk} (sve sem prve četiri), daju istovremeno i geometrijske interpretacije tenzora torzije prostora L_N.

Kao što smo rekli u §2.3, paralelno pomeranje 1.vrste se može posmatrati kao pomeranje po jednoj, pozitivnoj, strani površinskog elementa, a pomeranje 2.vrste kao pomeranje po drugoj, negativnoj, strani. U tom slučaju, na pr. za vrednost $\underset{6}{\Delta} V^{i}$ (9.22) možemo reći da je dobijena tako što vektor v^i vrši paralelno pomeranje po negativnoj strani posmatranog površinskog elementa, određenog vektorima dx^i i δx^i, kada se to pomeranje vrši duž strane RS, a po pozitivnoj strani - kada se to pomeranje vrši duž ostalih strana konture.

9.2. Tenzori $\underset{1}{R}$, $\underset{2}{R}$, $\underset{3}{R}$, $\underset{4}{R}$ i pseudotenzori neparnog indeksa

9.2.0. Uvod

Ono što je urađeno u § 9.1. za vektor v^i koji je dat u kontravarijantnom obliku, sada ćemo izvesti za vektor v_i koji je dat u kovarijantnom obliku. To je potrebno zbog toga što su nam se u § 9.1. pojavili samo pseudotenzori sa parnim indeksom, pa je logično očekivati da će se oni sa neparnim indeksom pojaviti pri korišćenju kovarijantnog vektora.

9.2.1. II interpretacija tenzora $\underset{1}{R}$

Posmatrajmo paralelno pomeranje kovarijantnog vektora v_j duž konture i pod ostalim uslovima kao u §9.1.1. Imaćemo (sl.2):

$$\underset{1}{D} v_j = \underset{1}{d} v_j + \underset{QS}{\delta}(v_j + \underset{1}{d} v_j) = \underset{1}{d} v_j + \underset{1}{\delta} v_j + \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v_j ,$$

$$\underset{2}{D} v_j = \underset{1}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}(v_j + \underset{1}{\delta} v_j) = \underset{1}{\delta} v_j + \underset{1}{d} v_j + \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v_j ,$$

odakle je

$$(9.57) \qquad \underset{1}{\Delta} v_j = \underset{2}{D} v_j - \underset{1}{D} v_j = \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v_j .$$

Kako je prema (2.8'):

$$\underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v_j = \underset{RS}{d}(L^i_{jm} v_i \delta x^m) =$$

$$= L^i_{jm,n} v_i dx^n \delta x^m + L^i_{jm} L^p_{in} v_p dx^n \delta x^m - L^i_{jm} L^m_{np} v_i dx^n \delta x^p ,$$

to izmenama nekih nemih indeksa imamo

$$(9.58) \qquad \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v_j = (L^i_{jn,m} + L^p_{jn} L^i_{pm} - L^p_{mn} L^i_{jp}) v_i dx^m \delta x^n$$

i dalje

$$\underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v_j = \underset{QS}{\delta}(L^i_{jm} v_i dx^m) =$$

$$= L^i_{jm,n} v_i dx^m \delta x^n + L^i_{jm} L^p_{in} v_p dx^m \delta x^n - L^i_{jm} L^m_{pn} v_i dx^p \delta x^n ,$$

odakle se, takođe izmenama nekih nemih indeksa, dobija

$$(9.59) \qquad \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v_j = (L^i_{jm,n} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{mn} L^i_{jp}) v_i dx^m \delta x^n ,$$

a na osnovu (9.57-59) sledi

$$(9.60) \qquad \underset{1}{\Delta} v_j = -\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} v_i dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{1}{R}$ tenzor krivine 1.vrste prostora L_N.

9.2.2. II interpretacija tenzora $\underset{2}{R}$

Radeći kao u § 9.1.2., ali koristeći v_j umesto v^i, dobijamo

$$(9.61)\qquad \underset{2}{\Delta} v_j = \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\,\underset{2}{d} v_j ,$$

pa prema (2.8')

$$\underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v_j = \underset{RS}{d}(L^{i}_{mj} v_i \delta x^m) =$$

$$= L^{i}_{mj,n} v_i dx^n \delta x^m + L^{i}_{mj} L^{p}_{ni} v_p dx^n \delta x^m - L^{i}_{mj} L^{m}_{np} v_i dx^n \delta x^p ,$$

odakle izmenama nemih indeksa

$$(9.62)\qquad \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v_j = (L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{nj} L^{i}_{mp} - L^{p}_{mn} L^{i}_{pj}) v_i dx^m \delta x^n .$$

Dalje je

$$\underset{QS}{\delta}\,\underset{2}{d} v_j = \underset{QS}{\delta}(L^{i}_{mj} v_i dx^m) =$$

$$= L^{i}_{mj,n} v_i dx^m \delta x^n + L^{i}_{mj} L^{p}_{ni} v_p dx^m \delta x^n - L^{i}_{mj} L^{m}_{pn} v_i dx^p \delta x^n ,$$

odnosno

$$(9.63)\qquad \underset{QS}{\delta}\,\underset{2}{d} v_j = (L^{i}_{mj,n} + L^{p}_{mj} L^{i}_{np} - L^{p}_{mn} L^{i}_{pj}) v_i dx^m \delta x^n .$$

Na osnovu (9.61-63) dobijamo

$$(9.64)\qquad \underset{2}{\Delta} v_j = -\underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} v_i dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{2}{R}$ tenzor krivine 2.vrste prostora L_N.

9.2.3. II interpretacija tenzora $\underset{3}{R}$

Analogno onome u § 9.1.3., dobijamo prema sl.3:

$$\underset{1}{D} v_j = \underset{2}{d} v_j + \underset{QS}{\delta}(v_j + \underset{2}{d} v_j) = \underset{2}{d} v_j + \underset{1}{\delta} v_j + \underset{QS}{\delta}\,\underset{2}{d} v_j ,$$

$$\underset{2}{D} v_j = \underset{1}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}(v_j + \underset{1}{\delta} v_j) = \underset{1}{\delta} v_j + \underset{2}{d} v_j + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v_j ,$$

pa odavde

$$(9.65) \qquad \underset{3}{\Delta} v_j = \underset{2}{D} v_j - \underset{1}{D} v_j = \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d} v_j .$$

Prema (2.8′) je

$$\underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v_j = \underset{RS}{d}(L^{\;i}_{j\;m} v_i \delta x^m) =$$

$$= L^{\;i}_{j\;m,n} v_i dx^n \delta x^m + L^{\;i}_{j\;m} L^{\;p}_{n\;i} v_p dx^n \delta x^m - L^{\;i}_{j\;m} L^{\;m}_{n\;p} v_i dx^n \delta x^p ,$$

odakle

$$(9.66) \quad \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v_j = (L^{\;i}_{j\;n,m} + L^{\;p}_{j\;n} L^{\;i}_{m\;p} - L^{\;p}_{m\;n} L^{\;i}_{j\;p}) v_i dx^m \delta x^n .$$

Dalje je

$$\underset{QS}{\delta}\underset{2}{d} v_j = \underset{QS}{\delta}(L^{\;i}_{m\;j} v_i dx^m) =$$

$$= L^{\;i}_{m\;j,n} v_i dx^m \delta x^n + L^{\;i}_{m\;j} L^{\;p}_{i\;n} v_p dx^m \delta x^n - L^{\;i}_{m\;j} L^{\;m}_{p\;n} v_i dx^p \delta x^n ,$$

t.j.

$$(9.67) \quad \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d} v_j = (L^{\;i}_{m\;j,n} + L^{\;p}_{m\;j} L^{\;i}_{p\;n} - L^{\;p}_{m\;n} L^{\;i}_{p\;j}) v_i dx^m \delta x^n .$$

Zamenom (9.66,67) u (9.65) dobijamo

$$\underset{3}{\Delta} v_j = (L^{\;i}_{j\;n,m} - L^{\;i}_{m\;j,n} + L^{\;p}_{j\;n} L^{\;i}_{m\;p} - L^{\;p}_{m\;j} L^{\;i}_{p\;n} + 2 L^{\;p}_{m\;n} L^{\;i}_{\underset{\vee}{pj}}) v_i dx^m \delta x^n ,$$

odakle je

$$(9.68) \qquad \underset{3}{\Delta} v_j = \underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\;nm} v_i dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{3}{R}$ tenzor krivine 3.vrste (4.46).

9.2.4. II interpretacija tenzora $\underset{4}{R}$

Posmatrajmo sada slučaj kada vektor v_j vrši pomeranje 1.vrste duž strana PQ i RS, a pomeranje 2.vrste duž drugih dveju strana posmatrane konture. Tada je

$$\underset{1}{D} v_j = \underset{1}{d} v_j + \underset{QS}{\delta}(v_j + \underset{1}{d} v_j) = \underset{1}{d} v_j + \underset{2}{\delta} v_j + \underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v_j ,$$

$$\underset{2}{D} v_j = \underset{2}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}(v_j + \underset{2}{\delta} v_j) = \underset{2}{\delta} v_j + \underset{1}{d} v_j + \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta} v_j ,$$

pa dobijamo

$$(9.69)\qquad \underset{4}{\Delta} v_j = \underset{2}{D} v_j - \underset{1}{D} v_j = \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v_j .$$

Kako je na osnovu (2.8')

$$\underset{RS}{d}\underset{2}{\delta} v_j = \underset{RS}{d}(L^i_{mj} v_i \delta x^m) =$$

$$= L^i_{mj,n} v_i dx^n \delta x^m + L^i_{mj} L^p_{in} v_p dx^n \delta x^m - L^i_{mj} L^m_{np} v_i dx^n \delta x^p ,$$

odakle, izmenama nemih indeksa, sledi

$$(9.70)\qquad \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta} v_j = (L^i_{nj,m} + L^p_{nj} L^i_{pm} - L^p_{mn} L^i_{pj}) v_i dx^m \delta x^n .$$

Dalje je

$$\underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v_j = \underset{QS}{\delta}(L^i_{jm} v_i dx^m) =$$

$$= L^i_{jm,n} v_i dx^m \delta x^n + L^i_{jm} L^p_{ni} v_p dx^m \delta x^n - L^i_{jm} L^m_{pn} v_i dx^p \delta x^n ,$$

t.j.

$$(9.71)\qquad \underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v_j = (L^i_{jm,n} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{mn} L^i_{jp}) v_i dx^m \delta x^n .$$

Na osnovu (9.70,71) jednačina (9.69) postaje

$$\underset{4}{\Delta} v_j = -(L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{pm} + 2L^p_{mn} L^i_{\check{pj}}) v_i dx^m \delta x^n ,$$

odnosno

(9.72) $$\underset{4}{\Delta} v_j = - \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} v_i \, dx^m \delta x^n .$$

9.2.5. Interpretacija pseudotenzora $\underset{9}{A}$

Sada je na redu slučaj kada v_j vrši pomeranje 2.vrste duž strane PR, a pomeranje 1.vrste duž ostalih strana konture. Prema sl.4 dobijamo

$$\underset{1}{D} v_j = \underset{1}{d} v_j + \underset{QS}{\delta}(v_j + \underset{1}{d} v_j) = \underset{1}{d} v_j + \underset{1}{\delta} v_j + \underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v_j ,$$

$$\underset{2}{D} v_j = \underset{2}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}(v_j + \underset{2}{\delta} v_j) = \underset{2}{\delta} v_j + \underset{1}{d} v_j + \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta} v_j ,$$

odakle je

(9.73) $$\underset{5}{\Delta} v_j = \underset{2}{D} v_j - \underset{1}{D} v_j = \underset{2}{\delta} v_j - \underset{1}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\underset{1}{d} v_j .$$

Kako je prema (2.8′)

(9.74) $$\underset{2}{\delta} v_j - \underset{1}{\delta} v_j = L^i_{mj} v_i \delta x^m - L^i_{jm} v_i \delta x^m = 2 L^i_{\underset{\vee}{mj}} v_i \delta x^m ,$$

to odavde i iz (9.70,59) jednačina (9.73) postaje

$$\underset{5}{\Delta} v_j = 2 L^i_{\underset{\vee}{mj}} v_i \delta x^m -$$

$$-\left(L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{pm} + 2 L^p_{mn} L^i_{\underset{\vee}{pj}}\right) v_i \, dx^m \delta x^n ,$$

odnosno

(9.75) $$\underset{5}{\Delta} v_j = 2 L^i_{\underset{\vee}{mj}} v_i \delta x^m - \left(\underset{9}{A}{}^i{}_{jmn} + 2 L^p_{mn} L^i_{\underset{\vee}{pj}}\right) v_i \, dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{9}{A}$ pseudotenzor krivine (4.34) prostora L_N.

Kako je prema (5.16),(7.1,2) i (9.16,17)

(9.76) $$\underset{9}{A}{}^i{}_{jmn} + 2 L^p_{mn} L^i_{\underset{\vee}{pj}} = R + \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B} + \mathcal{B}' + 2\mathcal{C} - 2\mathcal{E} ,$$

to izraz u zagradi u (9.75) nije tenzor.

9.2.6. Interpretacija pseudotenzora $\underset{7}{A}$

Razmotrimo slučaj kada v_j vrši pomeranje 2.vrste duž strane RS a pomeranje 1.vrste duž ostalih strana konture. Tada je

$$(9.77) \qquad \underset{6}{\Delta} v_j = \underset{2}{d} v_j - \underset{1}{d} v_j + \underset{RS}{d}\, \underset{1}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\, \underset{1}{d} v_j \, ,$$

$$(9.78) \qquad \underset{2}{d} v_j - \underset{1}{d} v_j = 2 L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v_i \, dx^m \, ,$$

pa odavde i na osnovu (9.66,59) jednačina (9.77) postaje

$$\underset{6}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v_i \, dx^m - (L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{p}_{jm} L^{i}_{pn} - L^{p}_{jn} L^{i}_{mp}) v_i \, dx^m \delta x^n \, ,$$

t.j.

$$(9.79) \qquad \underset{6}{\Delta} V_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} V_i \, dx^m - \underset{7}{A}{}^{i}{}_{jmn} V_i \, dx^m \delta x^n \, ,$$

gde je $\underset{7}{A}$ pseudotenzor krivine 7.vrste (4.30) prostora L_N.

9.2.7. Interpretacija pseudotenzora $\underset{5}{A}$

Ako pretpostavimo da v_j vrši pomeranje 1.vrste duž strana PQ i QS, a pomeranje 2.vrste duž ostale dve strane, imaćemo

$$\underset{7}{\Delta} v_j = \underset{2}{d} v_j - \underset{1}{d} v_j + \underset{2}{\delta} v_j - \underset{1}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}\, \underset{2}{\delta} v_j - \underset{QS}{d}\, \underset{1}{d} v_j \, ,$$

pa na osnovu (9.74,78,62,59) dobijamo

$$\underset{7}{\Delta} v_j = 2 L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v_i (dx^m + \delta x^m) -$$

$$- (L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{jm} L^{i}_{pn} - L^{p}_{nj} L^{i}_{mp} + 2L^{p}_{mn} L^{i}_{\underset{\vee}{pj}}) v_i \, dx^m \delta x^n \, ,$$

t.j.

$$(9.80) \qquad \underset{7}{\Delta} V_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} V_i (dx^m + \delta x^m) - (\underset{5}{A}{}^{i}{}_{jmn} + 2L^{p}_{mn} L^{i}_{\underset{\vee}{pj}}) V_i \, dx^m \delta x^n \, ,$$

gde je $\underset{5}{A}$ pseudotenzor krivine (4.26).

Pomoću (5.12),(7.1,2),(9.16,17) dobijamo

$$\underset{5}{A}{}^{i}{}_{jmn}+2L^{p}_{mn}L^{i}_{\underset{\smile}{pj}} = \mathcal{R}+\mathcal{A}+\mathcal{A}'+\mathcal{B}-\mathcal{B}'+2\mathcal{C}+2\mathcal{E}+2\mathcal{E}'$$

gde $\mathcal{E}+\mathcal{E}'$ nije tenzor.

9.2.8.II interpretacija pseudotenzora $\underset{7}{A}$

Ako vektor v_j vrši pomeranje 2.vrste duž QS, a pomeranje 1.vrste duž ostalih strana konture,dobijamo

$$\underset{8}{\Delta} v_j = \underset{1}{\delta} v_j - \underset{2}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v_j ,$$

odakle na osnovu (9.74,58,71) dobijamo

$$\underset{8}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\smile}{jm}} v_i \delta x^m + (L^{i}_{jn,m} - L^{i}_{jm,n} + L^{p}_{jn}L^{i}_{pm} - L^{p}_{jm}L^{i}_{np}) v_i dx^m \delta x^n ,$$

odnosno

$$(9.81)\qquad \underset{8}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\smile}{jm}} v_i \delta x^m + \underset{7}{A}{}^{i}{}_{jnm} v_i dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{7}{A}$ pseudotenzor krivine (4.30).

9.2.9. Interpretacija pseudotenzora $\underset{1}{A}$

Pretpostavljajući da v_j vrši pomeranje 1.vrste duž strana PQ i PR,a pomeranje 2.vrste duž drugih dveju strana,dobijamo

$$\underset{9}{\Delta} v_j = \underset{1}{\delta} v_j - \underset{2}{\delta} v_j + \underset{2}{d} v_j - \underset{1}{d} v_j + \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v_j ,$$

odakle,koristeći (9.74,78,66,71),imamo

$$\underset{9}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\smile}{mj}} v_i (dx^m - \delta x^m) - (L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{p}_{jm}L^{i}_{np} - L^{p}_{jn}L^{i}_{mp}) v_i dx^m \delta x^n ,$$

t.j.

$$(9.82)\qquad \underset{9}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\smile}{mj}} v_i (dx^m - \delta x^m) - \underset{1}{A}{}^{i}{}_{jmn} v_i dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{1}{A}$ pseudotenzor krivine (4.11) prostora L_N.

9.2.10. Interpretacija pseudotenzora $\underset{11}{A}$

Razmotrimo slučaj kada vektor v_j vrši paralelno pomeranje 1.vrste duž strane PQ, a paralelno pomeranje 2.vrste duž ostalih strana konture. Tada je

$$\underset{10}{\Delta} v_j = \underset{2}{d} v_j - \underset{1}{d} v_j + \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v_j$$

odakle na osnovu (9.78,62,71) dobijamo

$$\underset{10}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\vee}{mj}} v_i dx^m +$$
$$+(L^i_{nj,m} - L^i_{jm,n} + L^p_{nj}L^i_{mp} - L^p_{jm}L^i_{np} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{jp}})v_i dx^m \delta x^n ,$$

t.j.

$$(9.83)\quad \underset{10}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\vee}{mj}} v_i dx^m + (\underset{11}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{jp}})v_i dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{11}{A}$ pseudotenzor krivine (4.37) prostora L_N. Za izraz u zagradi poslednje jednačine na osnovu (5.18),(7.1,2),(9.16,17) dobijamo

$$(9.84)\quad \underset{11}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{jp}} = -\mathcal{R} - \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} + \mathcal{B}' - 2\mathcal{C} - 2\mathcal{E}' ,$$

t.j. nije tenzor (zbog $\mathcal{E}'$).

9.2.11. II interpretacija pseudotenzora $\underset{9}{A}$

Pretpostavimo da v_j vrši pomeranje 2.vrste duž PQ, a pomeranje 1.vrste duž ostalih strana konture,pa imamo

$$\underset{11}{\Delta} v_j = \underset{1}{d} v_j - \underset{2}{d} v_j + \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\,\underset{2}{d} v_j .$$

Odavde,pomoću (9.78,58,67) dobijamo

$$\underset{11}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}} v_i dx^m +$$
$$+(L^i_{jn,m} - L^i_{mj,n} + L^p_{jn}L^i_{pm} - L^p_{mj}L^i_{pn} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{pj}})v_i dx^m \delta x^n ,$$

odnosno

$$(9.85)\quad \underset{11}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{jm}} v_i dx^m + (\underset{9}{A}{}^{i}{}_{jnm} + 2L^{p}_{mn} L^{i}_{\underset{\vee}{pj}}) v_j dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{9}{A}$ pseudotenzor krivine (4.34).

Na osnovu (5.16),(7.1,2) i (9.16,17) dobijamo

$$(9.86)\quad \underset{9}{A}{}^{i}{}_{jnm} + 2L^{p}_{mn} L^{i}_{\underset{\vee}{pj}} = -R + \mathcal{R} + \mathcal{R}' + B + B' + 2C + 2\mathcal{E}' ,$$

gde $\mathcal{E}'$ nije tenzor,pa i ceo izraz u zagradi u (9.85) to nije.

9.2.12. Interpretacija pseudotenzora $\underset{3}{A}$

Ako v_j vrši pomeranje 1.vrste duž strana QS i RS, a pomeranje 2.vrste duž drugih dveju strana, imamo

$$\underset{12}{\Delta} v_j = \underset{2}{\delta} v_j - \underset{1}{\delta} v_j + \underset{1}{d} v_j - \underset{2}{d} v_j + \underset{RS}{d}\, \underset{2}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\, \underset{2}{d} v_j .$$

Pomoću (9.74,78,70,67) dobijamo

$$\underset{12}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v_i (\delta x^m - dx^m) - (L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{p}_{mj} L^{i}_{pn} - L^{p}_{nj} L^{i}_{pm}) v_i dx^m \delta x^n ,$$

t.j.

$$(9.87)\quad \underset{12}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v_i (\delta x^m - dx^m) - \underset{3}{A}{}^{i}{}_{jmn} v_i dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{3}{A}$ pseudotenzor krivine (4.23).

9.2.13. Interpretacija pseudotenzora $\underset{13}{A}$

Pretpostavimo li da v_j vrši pomeranje 1.vrste samo duž strane QS, a pomeranje 1.vrste duž ostalih strana konture,dobićemo

$$\underset{13}{\Delta} v_j = \underset{2}{\delta} v_j - \underset{1}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}\, \underset{2}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\, \underset{2}{d} v_j ,$$

pa na osnovu (9.74,62,67) prethodna jednačina postaje

$$\underset{13}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{mj}} v_i \delta x^m + (L^{i}_{nj,m} - L^{i}_{mj,n} + L^{p}_{nj} L^{i}_{mp} - L^{p}_{mj} L^{i}_{pn}) v_i dx^m \delta x^n ,$$

t.j.

(9.88) $\underset{13}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\vee}{mj}} v_i \delta x^m + \underset{13}{A}{}^i{}_{jnm} v_i dx^m \delta x^n$,

gde je $\underset{13}{A}$ pseudotenzor krivine (4.41).

9.2.14. II interpretacija pseudotenzora $\underset{5}{A}$

Ako pretpostavimo da v_j vrši pomeranje 1.vrste duž strana PR i RS, a pomeranje 2.vrste duž drugih dveju strana, dobićemo

$$\underset{14}{\Delta} v_j = \underset{1}{d} v_j - \underset{2}{d} v_j + \underset{1}{\delta} v_j - \underset{2}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}\underset{1}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d} v_j .$$

Na osnovu (9.74,78,58,63) prethodna jednačina postaje

$$\underset{14}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}} v_i (dx^m + \delta x^m) +$$

$$+ \left(L^i_{jn,m} - L^i_{\underset{\vee}{mj},n} + L^p_{jn}L^i_{pm} - L^p_{mj}L^i_{np} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{pj}}\right) v_i dx^m \delta x^n ,$$

odnosno

(9.89) $\underset{14}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}} v_i (dx^m + \delta x^m) + (\underset{5}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{pj}}) v_i dx^m \delta x^n$,

gde je $\underset{5}{A}$ pseudotenzor krivine (4.26).

Na osnovu (5.12),(7.1,2),(9.16,17) dobijamo

(9.89') $\underset{5}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underset{\vee}{pj}} = -R + \mathcal{R} + \mathcal{R}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' + 2\mathcal{C} + 2\mathcal{E} + 2\mathcal{E}'$,

t.j. izraz u drugoj zagradi u (9.89) nije tenzor.

9.2.15. II interpretacija pseudotenzora $\underset{13}{A}$

Pod uslovom da vektor v_j vrši pomeranje 1.vrste duž RS, a pomeranje 2.vrste duž ostalih strana, biće

$$\underset{15}{\Delta} v_j = \underset{1}{d} v_j - \underset{2}{d} v_j + \underset{RS}{d}\underset{2}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\underset{2}{d} v_j ,$$

a na osnovu (9.78,70,63) ova jednačina postaje

$$\underset{15}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\vee}{jm}} v_i dx^m - (L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj}L^i_{np} - L^p_{nj}L^i_{pm}) v_i dx^m \delta x^n ,$$

t.j.

(9.90) $\underset{15}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{jm}} v_i dx^m - \underset{13}{A}{}^{i}{}_{jmn} v_i dx^m \delta x^n$,

gde je $\underset{13}{A}$ pseudotenzor krivine (4.41).

9.2.16. II interpretacija pseudotenzora $\underset{11}{A}$

Pretpostavimo li, na kraju, da v_j vrši pomeranje 1. vrste duž PR, a pomeranje 2. vrste duž ostalih strana konture, dobijamo

$$\underset{16}{\Delta} v_j = \underset{1}{\delta} v_j - \underset{2}{\delta} v_j + \underset{RS}{d}\,\underset{1}{\delta} v_j - \underset{QS}{\delta}\,\underset{2}{d} v_j ,$$

odakle zbog (9.74,66,63) sledi

$$\underset{16}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{jm}} v_i \delta x^m +$$

$$+ \left(L^{i}_{jn,m} - L^{i}_{mj,n} + L^{p}_{jn}L^{i}_{mp} - L^{p}_{mj}L^{i}_{np} + 2L^{p}_{mn}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}}\right) v_i dx^m \delta x^n ,$$

odnosno

(9.91) $\underset{16}{\Delta} v_j = 2L^{i}_{\underset{\vee}{jm}} v_i \delta x^m - \left(\underset{11}{A}{}^{i}{}_{jmn} - 2L^{p}_{mn}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}}\right) v_i dx^m \delta x^n$,

gde je $\underset{11}{A}$ pseudotenzor krivine (4.37).

Pomoću (5.18),(7.1,2) i (9.16,17) se dobija

(9.92) $\underset{11}{A}{}^{i}{}_{jmn} - 2L^{p}_{mn}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}} = R - \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} + \mathcal{B}' - 2\mathcal{C} - 2\mathcal{E}$,

t.j. izraz u zagradi u (9.91) nije tenzor (zbog $\mathcal{E}$)

9.2.17. Interpretacija pseudotenzora $\underset{15}{A}$

Kako je prema (4.46)

$$\underset{15}{A}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{3}{R}{}^{i}{}_{jmn} + 2L^{p}_{nm}L^{i}_{\underset{\vee}{jp}} ,$$

to se jednačina (9.68) može napisati u obliku

(9.68') $\underset{3}{\Delta} v_j = \left(\underset{15}{A}{}^{i}{}_{jmn} + 2L^{p}_{nm}L^{i}_{\underset{\vee}{pj}}\right) v_i dx^m \delta x^n$.

9.2.18. Zaključak

I ovde važi analogno onome što je rečeno u 9.1.17. u pogledu geometrijskih interpretacija tenzora krivine i torzije i pseudotenzora krivine prostora L_N.

9.3. I z v e d e n i   t e n z o r i   k r i v i n e

9.3.1. Interpretacija tenzora $\underset{1}{\widetilde{R}}$

Ako saberemo jednačine (9.82) i (9.87), što označavamo (9.82+87) i analogno u drugim slučajevima, dobijamo

$$(9.93)\qquad (\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})V_j = -(\underset{1}{A}+\underset{3}{A})^i{}_{jmn}V_i\, dx^m \delta x^n,$$

gde smo stavili

$$(9.94a,b)\quad (\underset{1}{A}+\underset{3}{A})^i{}_{jmn} = \underset{1}{A}{}^i{}_{jmn}+\underset{3}{A}{}^i{}_{jmn},\ (\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})V_j = \underset{9}{\Delta}V_j+\underset{12}{\Delta}V_j$$

i analogno u drugim slučajevima.

Iz (9.37+46) je

$$(9.95)\qquad (\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})V^i = (\underset{2}{A}+\underset{4}{A})^i{}_{jmn}V^j dx^m \delta x^n .$$

Kako je prema (6.7)

$$(9.96)\qquad 2\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = (\underset{1}{A}+\underset{3}{A})^i{}_{jmn} = (\underset{2}{A}+\underset{4}{A})^i{}_{jmn},$$

to jednačine (9.95,93) postaju respektivno

$$(9.97)\quad (\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})V^i = 2\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn}V^j dx^m \delta x^n,$$

$$(9.98)\quad (\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})V_j = -2\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn}V_i\, dx^m \delta x^n,$$

gde je $\underset{1}{\widetilde{R}}$ izvedeni tenzor krivine 1.vrste prostora L_N, dat pomoću (6.7), odnosno (6.8).

9.3.2. Interpretacija tenzora $\underset{2}{\widetilde{R}}$

Iz (9.79+90), odnosno (9.81+88) i (9.83+85) imamo

$$(9.99)\qquad (\underset{6}{\Delta}+\underset{15}{\Delta})V_j = -(\underset{7}{A}+\underset{13}{A})^i{}_{jnm}V_i\, dx^m \delta x^n,$$

$$(9.100)\qquad (\underset{8}{\Delta}+\underset{13}{\Delta})V_j = (\underset{7}{A}+\underset{13}{A})^i{}_{jnm}V_i\, dx^m \delta x^n,$$

(9.101) $$(\underset{10}{\Delta}+\underset{11}{\Delta})V_j = (\underset{9}{A}+\underset{11}{A})^i{}_{jnm}\, V_i\, dx^m \delta x^n .$$

Kako je na osnovu(6.15)

(9.102) $$2\underset{2}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = (\underset{7}{A}+\underset{13}{A})^i{}_{jmn} = (\underset{9}{A}+\underset{11}{A})^i{}_{jmn} ,$$

to jednačine (9.99-101) postaju

(9.103) $$(\underset{6}{\Delta}+\underset{15}{\Delta})V_j = -2\underset{2}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn}\, V_i\, dx^m \delta x^n ,$$

(9.104) $$(\underset{8}{\Delta}+\underset{13}{\Delta})V_j = 2\underset{2}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jnm}\, V_i\, dx^m \delta x^n ,$$

(9.105) $$(\underset{10}{\Delta}+\underset{11}{\Delta})V_j = 2\underset{2}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jnm}\, V_i\, dx^m \delta x^n ,$$

gde je $\underset{2}{\widetilde{R}}$ izvedeni tenzor krivine 2.vrste prostora L_N,dat sa (6.15),odnosno (6.17).

9.3.3. Interpretacija tenzora $\underset{3}{\widetilde{R}}$

Na osnovu (9.22+53) i (9.14+55) imamo

(9.106) $$(\underset{6}{\Delta}+\underset{15}{\Delta})V^i = 2\underset{3}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn}\, V^j\, dx^m \delta x^n ,$$

(9.107) $$(\underset{5}{\Delta}+\underset{16}{\Delta})V^i = 2\underset{3}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn}\, V^j\, dx^m \delta x^n ,$$

gde na osnovu (6.16,18) za izvedeni tenzor $\underset{3}{\widetilde{R}}$ imamo

(9.108) $$2\underset{3}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = (\underset{8}{A}+\underset{14}{A})^i{}_{jmn} = (\underset{10}{A}+\underset{12}{A})^i{}_{jmn} = 2\left(R^i{}_{jmn} - L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}}\right).$$

9.3.4. Interpretacija tenzora $\underset{4}{\widetilde{R}}$

Da bi dobili odgovarajuću relaciju u koju ulazi $\underset{4}{\widetilde{R}}$, postupamo na sledeći način. Pre svega,prema (6.33) je

(9.109) $$3\underset{4}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = (\underset{3}{R}+\underset{11}{A}+\underset{13}{A})^i{}_{j\underset{\vee}{mn}} .$$

Koristeći odgovarajuće vrednosti za priraštaje vektora v_j iz §9.2, imamo

(9.110) $$(\underset{10}{\Delta}+\underset{16}{\Delta})V_j+(\underset{13}{\Delta}+\underset{15}{\Delta})V_j+(\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})V_j=$$
$$=-2\left(\underset{11}{A}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}+\underset{13}{A}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}+\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn}\right)V_i\,dx^m\delta x^n .$$

S druge strane, na osnovu (7.5), zbog (7.1,2), biće

$$\underset{3}{R}{}^{i}{}_{jnm}=-\mathcal{R}+\mathcal{R}'+\mathcal{R}-\mathcal{B}'+\mathcal{B}+2\mathcal{C}\ ,$$

pa na osnovu (7.5) dobijamo

$$\underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}=\mathcal{R}-\mathcal{B}+\mathcal{B}'-2\mathcal{C}$$

i, dalje, zbog (7.7)

(9.111) $$\underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}=\underset{1}{\widetilde{R}}-2\mathcal{C}=\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn}-2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}L^{i}_{\underset{\smile}{pj}}\ .$$

Ako odavde $\underset{1}{\widetilde{R}}$ zamenimo u (9.110) i koristimo (9.109), imaćemo

$$(\underset{10}{\Delta}+\underset{16}{\Delta}+\underset{13}{\Delta}+\underset{15}{\Delta}+\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})V_j=$$
$$=-2\left(\underset{11}{A}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}+\underset{13}{A}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}+\underset{3}{R}{}^{i}{}_{j\underset{\smile}{mn}}+2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}L^{i}_{\underset{\smile}{pj}}\right)V_i\,dx^m\delta x^n ,$$

t.j.

(9.112) $$(\underset{9}{\Delta}+\underset{10}{\Delta}+\underset{12}{\Delta}+\underset{13}{\Delta}+\underset{15}{\Delta}+\underset{16}{\Delta})V_j=-2\left(3\underset{4}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn}+2L^{p}_{\underset{\smile}{mn}}L^{i}_{\underset{\smile}{pj}}\right)V_i\,dx^m\delta x^n ,$$

što predstavlja traženu relaciju za $\underset{4}{\widetilde{R}}$.

9.3.5. Interpretacija tenzora $\underset{5}{\widetilde{R}}$

Na osnovu (9.79-82-88) dobijamo

$$(\underset{6}{\Delta}-\underset{9}{\Delta}-\underset{13}{\Delta})V_j=\left[(\underset{1}{A}-\underset{7}{A})^{i}{}_{jmn}-\underset{13}{A}{}^{i}{}_{jnm}\right]V_i\,dx^m\delta x^n ,$$

odakle zbog (6.66)

$$(9.113)\qquad \underset{5}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = (\underset{1}{A} - \underset{7}{A})^{i}{}_{jmn} - \underset{13}{A}{}^{i}{}_{jnm}$$

dobijamo

$$(9.114)\qquad (\underset{6}{\Delta} - \underset{9}{\Delta} - \underset{13}{\Delta})V_j = \underset{5}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} V_i dx^m \delta x^n .$$

9.3.6. Interpretacija tenzora $\underset{6}{\widetilde{R}}$

Da bi dobili traženu relaciju za $\underset{6}{\widetilde{R}}$ postupamo analogno prethodnom slučaju. Naime, preko (9.37+48-2) dobijamo

$$(\underset{9}{\Delta} + \underset{13}{\Delta} - \underset{6}{\Delta})V^i = [(\underset{2}{A} - \underset{8}{A})^{i}{}_{jmn} - \underset{14}{A}{}^{i}{}_{jnm}]V^j dx^m \delta x^n ,$$

pa kako je na osnovu (6.67)

$$(9.115)\qquad \underset{6}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = (\underset{2}{A} - \underset{8}{A})^{i}{}_{jmn} - \underset{14}{A}{}^{i}{}_{jnm} ,$$

to prethodna jednačina postaje

$$(9.116)\qquad (\underset{9}{\Delta} + \underset{13}{\Delta} - \underset{6}{\Delta})V^i = \underset{6}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} V^j dx^m \delta x^n ,$$

što predstavlja traženu relaciju za $\underset{6}{\widetilde{R}}$.

9.3.7. Interpretacija tenzora $\underset{7}{\widetilde{R}}$

Pošto je prema (6.84)

$$(9.117)\qquad \underset{7}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = (\underset{3}{A} + \underset{7}{A})^{i}{}_{jmn} + \underset{13}{A}{}^{i}{}_{jnm} ,$$

to kombinacijom (9.88-79-87) dobijamo

$$(\underset{13}{\Delta} - \underset{6}{\Delta} - \underset{12}{\Delta})V_j = [(\underset{3}{A} + \underset{7}{A})^{i}{}_{jmn} + \underset{13}{A}{}^{i}{}_{jnm}]V_i dx^m \delta x^n$$

i konačno

$$(9.118)\qquad (\underset{13}{\Delta} - \underset{6}{\Delta} - \underset{12}{\Delta})V_j = \underset{7}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} V_i dx^m \delta x^n .$$

9.3.8. Interpretacija tenzora $\underset{8}{\widetilde{R}}$

Na kraju, uzimajući u obzir da je na osnovu (6.85)

$$(9.119)\qquad \underset{8}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = (\underset{4}{A} + \underset{8}{A})^{i}{}_{jmn} + \underset{14}{A}{}^{i}{}_{jnm} ,$$

kombinacijom (9.22+46-48) dobijamo

$$(9.120)\qquad (\underset{6}{\Delta} + \underset{12}{\Delta} - \underset{13}{\Delta}) V^{i} = \underset{8}{\widetilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} V^{j} dx^{m} \delta x^{n} ,$$

t.j. traženu relaciju za $\underset{8}{\widetilde{R}}$.

9.3.9. Zaključak

Jednačine (9.97,98) daju dve geometrijske interpretacije tenzora $\underset{1}{\widetilde{R}}$, jednačine (9.103-105) - tri geometrijske interpretacije tenzora $\underset{2}{\widetilde{R}}$, jednačine (9.106,107) daju dve interpretacije tenzora $\underset{3}{\widetilde{R}}$, dok jednačine (9.112,114,116,118,120) daju geometrijske interpretacije respektivno izvedenih tenzora krivine $\underset{4}{\widetilde{R}}$, ... , $\underset{8}{\widetilde{R}}$ prostora I_N.

Kao što vidimo, jednačine koje daju geometrijske interpretacije odgovarajućih izvedenih tenzora krivine, sadrže na levoj strani algebarske zbirove dvaju ili više totalnih priraštaja vektora koji se paralelno pomera duž konture.

Svaki od tih zbirova može se geometrijski interpretirati. Na primer, možemo reći da je prema (9.118) dat totalni priraštaj vektora v_j koji tri puta obiđe posmatranu konturu i to prvi put smerom PRSQP, pri čemu se duž pojedinih strana vektor v_j pomera paralelno prema slučaju 9.2.13. (v. tabelu u § 9.1.5.), a drugi i treći put suprotnim smerom, prema slučajevima 9.2.6. i 9.2.12.

10. PROSTOR JEDINSTVENE TEORIJE POLJA (JTP)

10.0. Uvodne napomene

Kao što smo naveli još u Uvodu, A. Einstein u svojim radovima o Jedinstvenoj teoriji polja (JTP) uzima kao osnovu sledeću vezu između osnovnog tenzora g_{ij} i koneksije, koju sada, za razliku od koneksije Γ^i_{jk} prostora GR_N, odnosno koneksije L^i_{jk} prostora L_N obeležavamo sa E^i_{jk} i zovemo **Einstein-ovom koneksijom**:

$$(10.1) \qquad g_{\underset{+}{i}\underset{-}{j}} \equiv g_{ij,m} - E^p_{im} g_{pj} - E^p_{mj} g_{ip} \overset{d}{=} 0,$$

što predstavlja sistem od $N^3=4^3=64$ jednačine sa 64 nepoznate E^i_{jk}, jer indeksi uzimaju vrednosti 1,2,3,4. Jednačina (10.1) zamenjuje jednačinu kojom se eksplicitno (generalisani) Kristofelovi simboli izražavaju pomoću g_{ij} (Eisenhart-ove jednačine (0.45) ili (1.5,6) kod nas). Time se razlikuju prostori JTP i GR_N (u slučaju istog broja dimenzija).

Međutim, prostori GR_N i JTP su specijalni slučajevi prostora L_N nesimetrične afine koneksije. U tim specijalnim slučajevima je uvođenjem osnovnog tenzora g_{ij} nesimetrična koneksija zadata na određeni način, a takođe je obogaćena struktura prostora L_N (metričke osobine, gravitacija, elektromagnetizam). To znači da sve što se u ovom radu odnosi na prostor L_N (veći deo rada), važi kako za GR_N, tako i za JTP.

Leva strana u (10.1) ima oblik kovarijantnog izvoda, samo što je član koji odgovara indeksu i formiran prema 1. vrsti kovarijantnog izvoda, a član koji odgovara indeksu j - prema drugoj vrsti. To se obično označuje znacima: + odnosno - ispod odgovarajućeg indeksa.

10.1. N e k e o s n o v n e r e l a c i j e u JTP

T e o r e m a 10.1. U JTP važe relacije

(10.2a,b) $$g_{ij|_1 m} = 2E^{p}_{\underset{\vee}{mj}}\, g_{ip}\,, \quad g_{ij|_2 m} = 2E^{p}_{\underset{\vee}{im}}\, g_{pj}\,,$$

(10.3a,b) $$g_{ij|_1 m} + g_{im|_1 j} = 0\,, \quad g_{ij|_2 m} + g_{mj|_2 i} = 0\,,$$

(10.4a,b) $$\underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\, g_{\underline{ij}|_1 m} = 0\,, \quad \underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\, g_{\underline{ij}|_2 m} = 0\,,$$

(10.5a,b) $$\delta^{i}_{j|_1 m} = \delta^{i}_{j|_2 m} = 0\,,$$

pri čemu su kovarijantni izvodi uzeti u odnosu na Einstein-ovu koneksiju E^{i}_{jk}.

Dokaz. Jednačine (10.2) se dobijaju polazeći od (10.1), a (10.3) slede iz (10.2). Da bi dokazali (10.4a), imamo

$$g_{\underline{ij}|_1 m} = \tfrac{1}{2}\left(g_{ij|_1 m} + g_{ji|_1 m}\right) = E^{p}_{\underset{\vee}{mj}}\, g_{ip} + E^{p}_{\underset{\vee}{mi}}\, g_{jp}\,,$$

$$\underset{ijm}{\mathrm{Cikl}}\, g_{\underline{ij}|_1 m} = g_{\underline{ij}|_1 m} + g_{\underline{jm}|_1 i} + g_{\underline{mi}|_1 j} =$$

$$= E^{p}_{\underset{\vee}{mj}}\, g_{ip} + E^{p}_{\underset{\vee}{mi}}\, g_{jp} + E^{p}_{\underset{\vee}{im}}\, g_{jp} + E^{p}_{\underset{\vee}{ij}}\, g_{mp} + E^{p}_{\underset{\vee}{ji}}\, g_{mp} + E^{p}_{\underset{\vee}{jm}}\, g_{ip} = 0\,,$$

a analogno se dokazuje i (10.4b)

Relacije (10.5) se dokazuju polazeći od definicije δ-simbola i kovarijantnog izvoda 1. odn. 2. vrste.

10.2. V e z e i z m e đ u GR_N i JTP

Koeficijenti Einstein-ove koneksije E^{i}_{jk} su jednačinom (10.1) određeni implicitno pomoću g_{ij}. Da bi našli eksplicitnu vezu, koristimo rad Eisenhart-a [11]. Naime, važi

T e o r e m a 10.2. Neka su Γ^{i}_{jk} koeficijenti (1.6) prostora GR_N formirani pomoću osnovnog tenzora g_{ij} prostora JTP. Tada za koeficijente E^{i}_{jk} Einstein-ove koneksije (t.j. one koja zadovoljava uslov (10.1)) imamo

$$(10.6)\quad E^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{\underline{jk}} + \frac{1}{3}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jk}} + \frac{1}{3}g^{si}\left(\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{sj}}\, g_{\underset{\vee}{kp}} + \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{sk}}\, g_{\underset{\vee}{jp}}\right).$$

Dokaz. Pre svega, polazeći od zakona transformacije koeficijenata koneksije, dokazujemo da za dve koneksije E^{i}_{jk} i Γ^{i}_{jk}, definisane na istoj mnogostrukosti, važi

$$(10.7)\qquad E^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} + a^{i}_{jk}\,,$$

gde je a^{i}_{jk} tenzor. Na osnovu (10.1) je

$$g_{ij,k} = E^{p}_{ik}\, g_{pj} + E^{p}_{kj}\, g_{ip}\,,$$

odakle zamenom izvoda u

$$2\Gamma_{ijk} = 2g_{\underline{ip}}\Gamma^{p}_{jk} = g_{ik,j} + g_{ji,k} - g_{jk,i}$$

dobijamo

$$E^{p}_{ij}\, g_{pk} + E^{p}_{jk}\, g_{ip} + E^{p}_{jk}\, g_{pi} + E^{p}_{ki}\, g_{jp} -$$

$$-E^{p}_{ji}\, g_{pk} - E^{p}_{ik}\, g_{jp} - 2\Gamma^{p}_{jk}\, g_{\underline{ip}} = 0\,,$$

pa odavde, uzimajući u obzir (10.7), sledi

$$(10.8)\qquad E^{p}_{\underset{\vee}{ij}}\, g_{pk} + E^{p}_{\underset{\vee}{ki}}\, g_{jp} + a^{p}_{jk}\, g_{\underline{ip}} = 0\,.$$

Razmenom indeksa j,k:

$$E^{p}_{\underset{\vee}{ik}}\, g_{pj} + E^{p}_{\underset{\vee}{ji}}\, g_{kp} + a^{p}_{kj}\, g_{\underline{ip}} = 0\,.$$

Poluzbir poslednje dve jednačine glasi

$$(10.9)\qquad E^{p}_{\underset{\vee}{ij}}\, g_{\underset{\vee}{pk}} + E^{p}_{\underset{\vee}{ik}}\, g_{\underset{\vee}{pj}} + a^{p}_{\underline{jk}}\, g_{\underline{ip}} = 0\,,$$

a polurazlika

$$(10.10)\qquad E^{p}_{\underset{\vee}{ij}}\, g_{\underline{pk}} + E^{p}_{\underset{\vee}{ki}}\, g_{\underline{jp}} + a^{p}_{\underset{\vee}{jk}}\, g_{\underline{ip}} = 0\,.$$

Ako dva puta izvršimo cikličnu permutaciju indeksa i,j,k dobijamo iz poslednje jednačine

$$E^{p}_{\underset{\vee}{jk}}\, g_{\underline{pi}} + E^{p}_{\underset{\vee}{ij}}\, g_{\underline{kp}} + a^{p}_{\underset{\vee}{ki}}\, g_{\underline{jp}} = 0 ,$$

$$E^{p}_{\underset{\vee}{ki}}\, g_{\underline{pj}} + E^{p}_{\underset{\vee}{jk}}\, g_{\underline{ip}} + a^{p}_{\underset{\vee}{ij}}\, g_{\underline{kp}} = 0 ,$$

pa sabiranjem tri poslednje jednačine :

$$(10.11)\quad \left(2E^{p}_{\underset{\vee}{ij}} + a^{p}_{\underset{\vee}{ij}}\right) g_{\underline{pk}} + \left(2E^{p}_{\underset{\vee}{jk}} + a^{p}_{\underset{\vee}{jk}}\right) g_{\underline{pi}} + \left(2E^{p}_{\underset{\vee}{ki}} + a^{p}_{\underset{\vee}{ki}}\right) g_{\underline{pj}} = 0 .$$

Ova jednačina je zadovoljena za

$$(10.12)\qquad 2E^{i}_{\underset{\vee}{jk}} + a^{i}_{\underset{\vee}{jk}} = 0 ,$$

što zajedno sa (10.7) daje

$$(10.13)\qquad a^{i}_{\underset{\vee}{jk}} = -\frac{2}{3}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jk}} ,$$

odnosno

$$(10.14a)\qquad E^{i}_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{3}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jk}} .$$

Zamenom (10.14a) u (10.9):

$$a^{p}_{\underline{jk}}\, g_{\underline{ip}} = \frac{1}{3}\left(\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{ij}}\, g_{\underset{\vee}{kp}} + \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{ik}}\, g_{\underset{\vee}{jp}}\right),$$

odakle množenjem sa $g^{\underline{is}}$:

$$a^{s}_{\underline{jk}} = \frac{1}{3} g^{\underline{is}}\left(\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{ij}}\, g_{\underset{\vee}{kp}} + \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{ik}}\, g_{\underset{\vee}{jp}}\right),$$

odnosno

$$(10.13b)\qquad a^{i}_{\underline{jk}} = \frac{1}{3} g^{\underline{si}}\left(\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{sj}}\, g_{\underset{\vee}{kp}} + \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{sk}}\, g_{\underset{\vee}{jp}}\right),$$

pa na osnovu (10.7):

$$(10.14b)\quad E^{i}_{\underline{jk}} = \Gamma^{i}_{\underline{jk}} + a^{i}_{\underline{jk}} = \Gamma^{i}_{\underline{jk}} + \frac{1}{3} g^{\underline{si}}\left(\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{sj}}\, g_{\underset{\vee}{kp}} + \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{sk}}\, g_{\underset{\vee}{jp}}\right).$$

Konačno,na osnovu (10.14a,b) sledi (10.6).

Sada se lako dobija relacija koja je obrnuta onoj iz (10.6),t.j. važi:

T e o r e m a 10.3. Koeficijenti koneksije Γ^{i}_{jk} prostora GR_N, definisani sa (1.5,6),izražavaju se pomoću koeficijenata E^{i}_{jk} Einstein-ove koneksije iz (10.1) relacijom

$$\Gamma^{i}_{jk} = E^{i}_{\underline{jk}} + 3E^{i}_{\underset{\vee}{jk}} - g^{\underline{si}}\left(E^{p}_{\underset{\vee}{sj}}\, g_{\underset{\vee}{kp}} + E^{p}_{\underset{\vee}{sk}}\, g_{\underset{\vee}{jp}}\right). \tag{10.15}$$

Dokaz. Iz (10.14a) je

$$\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jk}} = 3E^{i}_{\underset{\vee}{jk}}, \tag{10.16a}$$

a odavde i iz (10.14b):

$$\Gamma^{i}_{\underline{jk}} = E^{i}_{\underline{jk}} - g^{\underline{si}}\left(E^{p}_{\underset{\vee}{sj}}\, g_{\underset{\vee}{kp}} + E^{p}_{\underset{\vee}{sk}}\, g_{\underset{\vee}{jp}}\right). \tag{10.16b}$$

Dakle,iz poslednje dve jednačine sledi (10.15).

Relacije (10.6,15) mogu služiti da se iz određenih jednačina prostora GR_N dobiju jednačine odgovarajućeg prostora JTP i obrnuto.

LITERATURA

[1] Einstein A.,Zur Elektrodynamik bewegter Korper,Annalen der Physik,17,891,1905.

[2] -----------,Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie,Ann.der Physik,49,769,1916.

[3] ----------,The theory of the affine field.Nature,1923,112, 448-9.

[4] ----------,Generalization of the relativistic theory of gravitation.Ann.math.,46,1945,578-84.

[5] ---------- and Straus E.,------------------------------II, Ann.math.,47,1946,731-41.

[6] ----------,On generalized theory of gravitation,Prilog II u knjizi:The meaning of relativity,3rd edit.,Princeton,1950.

[7] ----------,Generalization of theory of gravitation,Prilog IIu knjizi: The meaning of relativity,4th edit.,Princeton,1953.

[8] ----------,Relativistic theory of the non-symmetric field, Prilog II u knjizi: The meaning of relativity,5th edit.,Princeton,1955.

[9] Eisenhart L.P.,Generalized Riemann spaces,Proc.Nat.Acad.Sci. USA,vol.37,1951,311,315.

[10] ------------------------------,Part II,vol.38,1952,505-508.

[11] ----------,Generalized Riemann spaces and general relativity, Proc.Nat.Acad.Sci.USA,vol.39,1953,No 6,546-51.

[12] -------------------------------- II,1954,40,No 6,463-66.

[13] ----------,Generalized spaces of general relativity,Proc.Nat. Acad.Sci.USA,vol.45,1959,1759-62.

[14] ----------,Generalized Riemannian geometry,Proc.Nat.Acad.Sci. USA,vol.48,1962,No 9,1529-31.

[15] --------------------------------II,vol.49,1963,18-19.

[16] Mishra R.S.,Subspaces of a generalized Riemannian space,Bulletin de l'Acad.Roy.Belgique,1954,1058-71.

[17] Prvanović M.,Equations de Gauss d'un sous-espace plongé dans l'espace Riemannien généralisé,Bull.de l'Acad.Roy.Belgique, 1955,615-21.

[18] ----------,Relative Frenet formulas for curves in a subspace of a Riem.space,Tensor (NS),vol.9,No 3,1959,190-204.

[19] ----------,Une connexion non-symétrique associés à l'espace Riemannien,Publications de L'Inst.math.,Beograd,T.10(24), 1970,53-64.

[20] Singh K.D.,On generalized Riemann spaces,Riv.Math.Univ.di Parma,7 (1956),125-38.

[21] Anđelić T.P.,Tenzorski račun,III izd.,Beograd,1973.

[22] Raševskij P.K.,Rimanova geometrija i tenzornyj analiz,M.1967.

[23] Bompiani E.,Significato del tensore di torsione di una connessione affine,Boll.dell'Unione math.Italiana (3),6,1951,273-76.

[24] Graiff F.,Sulla posibilità di construire parallelogrami chiusi in alcune varieta a torsione,Boll.d.Un.mat.Ital.,ser.III,7, 1952,132-135.

[25] Pastori M.,Sullo spazio della recente teoria unitaria di Einstein,Convegno internaz. di geom. difer.1953,Roma 1954,107-13.

[26] Graiff F,Formule di comutazione e trasporto ciclico nei recenti spazi di Einstein,Rendiconti Istituto lombardo sci. e lettere, cl.sci.mat.e natur.,Milano,1954,87,No 1,105-10.

[27] Brinis E.,Qualche illustrazione geometrica dello spazio unitario di Einstein,Rendiconti Ist.lombardo sci.e lett.,cl.sci.mat. e natur.,Milano,1955,88,No 2,531-38.

[28] Weatherburn C.E.,Riemannian geometry and tensor calculus,Cambridge U.P.,1950.

[29] Eisenhart L.P.,Riemannian Geometry,Princeton U.P.,1949.

[30] Minčić S.,Ricci identities in the space of non-symmetric affine connexion,Matem.vesnik,10(25),sv.2,1973,Beograd,161-72.

[31] ----------,O tenzorah i psevdotenzorah krivizny prostranstva nesimmetričnoj affinnoj svjaznosti,saopšteno na 5.balkanskom matemat.kongresu,Beograd,24-30.6.1974,Mathematica balkanica, 4.76(1974)427-430.

[32] Saxena S.C.-Behari R.,Some properties of generalized Riemann spaces,Proc.nat.Inst.of sci.India,1960,A 26,No 2,95-103.

[33] ----------,Some properties and applications of Eisenhart's generalized Riemann space,Proc.nat.Inst.of sci.India,Part A, 26,1960,Supp.2^{nd},48-57.

[34] Singh U.P.,On relative curvature tensors in the subspace of a Riemannian space,Revue de la fac. des sc.D'Istambul,vol.33, 1968,69-75.

[35] Shouten J.A.,Ricci calculus,Springer-Verlag,Berlin,1954.

[36] Eisenhart L.P.,Non-Riemannian geometry,New York,1927.