

gokw. 6/1 M42.

**UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO—MATEMATIČKI FAKULTET**

Trajče D. Angelov

PRILOG TEORIJI ZVEZDANIH OMOTAČA^v

—doktorska disertacija—

BEOGRAD, 1980.

Sa stipendijom Republičke zajednice za nauku SR Srbije, boravio sam u toku 1977/78 godine na Astronomskoj opservatoriji Ondřejov (Čehoslovačka). Tada je započet ovaj rad, pod rukovodstvom Dr Svatopluka Křiža - sada profesor astrofizike na Karlovom Univerzitetu u Pragu.

Numerički deo rada završen je na Odseku za matematičke, mehaničke i astronomske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu.

Zahvaljujem se Dr S.Křižu na korisnim savetima u toku rada na ovom zadatku, i radnoj grupi za dvojne zvezde na Opservatoriji Ondřejov - za saradnju u toku realizacije mog programa.

Beograd, 1980.

Autor

S A D R Ź A J

	Str.
UVOD	1
GLAVA 1. ZVEZDE SA OMOTAČEM	3
1.1. Formiranje omotača u dvojnim sistemima	3
1.2. Formiranje omotača oko pojedinačnih zvezda	6
1.3. Formulacija zadatka	8
 GLAVA 2. OMOTAČ KAO NEPREKIDNA SREDINA	 11
2.1. Jednačine hidrodinamike	11
2.2. Potpun sistem jednačina kretanja u cilindričnim koordinatama	 16
2.3. Jednodimenzioni tretman	21
2.4. Granični i početni uslovi	23
 GLAVA 3. TURBULENTNO KRETANJE	 26
3.1. Model turbulencije	26
3.2. Jednačine kretanja za srednje veličine	28
3.3. Bezdimenzioni oblik jednačina u Lagrangeevim koordinatama (m,t)	 43
 GLAVA 4. NUMERIČKA INTEGRACIJA	 49
4.1. Metod razlika	49
4.2. Rešavanje jednačina u nejavnom obliku	56
4.3. Jednačine kretanja u formi metoda razlika	61
4.4. Kriterijum stabilnosti rešenja	70

	Str.
GLAVA 5. RAZVOJ OMOTAČA	79
5.1. Konkretna varijanta razvoja	79
5.2. Karakteristike u orbitalnoj ravni i Z-struktura	80
5.3. Zaključak	85
LITERATURA	97

U V O D

Veliki broj zvezda karakteriše se emisionim spektrom koji govori o postojanju veće mase gasa iznad njihove fotosfere; otud i naziv, zvezde sa proširenom atmosferom ili omotačem. Iako je na postojanje ovih zvezda prvi put detaljnije skrenuta pažnja pre skoro 40 godina, (Struve, 1942), i danas su razlike - između zvezda sa proširenom atmosferom i zvezda sa omotačem, nedovoljno definisane. Ipak, sledeći kriterijum za klasifikaciju (Boyarchuk, 1973) može se usvojiti za početni: ako u spektru zvezde, različite grupe linija karakterišu različitu gustinu gasa, radi se o zvezdi sa omotačem; ako spektralne karakteristike daju podatak o glatkim promenama uslova u spoljašnim slojevima atmosfere, zvezda ima proširenu atmosferu. Osim toga, gustina mase u omotaču (za razliku od gustine u proširenoj atmosferi) sporije opada sa rastojanjem a moguće je i malo povećanje gustine na određenoj daljini od fotosfere.

Obiman posmatrački materijal i brojni radovi u poslednjih desetak godina razmatraju, uglavnom, probleme formiranja omotača. Pitanje razvoja zvezdanih omotača tretirano je kvalitativno ili sa pretpostavkama koje omogućavaju neka analitička rešenja. Osnovni problem sastoji se u nalaženju dovoljno efektivnog mehanizma za prenos uglovnog momenta, koji će obezbediti održavanje omotača oko zvezde u odsustvu procesa koji ga formiraju. Analizirana je efektivnost nekoliko mehanizama (npr. Limber i Marlborough, 1968) a detaljnije razmatrana je jedna uprošćena varijanta zvezdanog vetra (Limber, 1967) za slučaj omotača Be zvezda i turbulentni mehanizam akrecije na crnu jamu

ili protonsku zvezdu u dvojnim sistemima (Shakura, Sunyaev; 1973). U oba slučaja, faza formiranja omotača nije razdvojena od faze razvoja, tretman je jednodimenzioni i stacionarni, sa poljem zračenja crnog tela. U prvom radu diskutuju se neka analitička rešenja, u drugom - uticaj turbulencije razmatra se prostom, zamenom molekularnog koeficijenta viskoznosti turbulentnim i još, zanemaruje se radijalna komponenta brzine.

U ovom radu biće razmatrani neki elementi razvoja zvezdanih omotača. Radi sticanja celovitije predstave o problemima proučavanja zvezda sa omotačem, u Glavi 1. nabrojani su važniji rezultati koji se odnose na fazu formiranja omotača. Zatim se formuliše zadatak ovog rada koji tretira razvoj nezavisno od faze formiranja. Predlaže se hidrodinamički model, pa je u drugoj glavi ispisan potpun sistem jednačina kretanja u cilindričnim koordinatama sa aksijalnom simetrijom. Kao mehanizam za prenos uglovnog momenta razmatra se turbulentno trenje slojeva omotača a jednačine turbulentnog kretanja izvode se u trećoj glavi. Ovakav model numerički se ispituje za standardnu Be zvezdu. U četvrtoj glavi konstruiše se šema za numeričku integraciju i diskutuje dobijeni kriterijum za stabilnost i konvergenciju rešenja. U poslednjoj glavi dati su neki rezultati izračunavanja na osnovu kojih može da se izvede zaključak o razvoju omotača. U spisak literature navedeni su, uglavnom, izvorni radovi po pojedinim pitanjima.

GLAVA 1. ZVEZDE SA OMOTAČEM

Najizrazitiji predstavnici zvezda sa omotačem su zvezde sa brзом rotacijom (posebno, Be zvezde) i komponente u bliskim (spektroskopskim) dvojnim sistemima. Uslovi u kojima se posmatra zvezda sa proširenim omotačem i mehanizmi formiranja omotača, različiti su. U prvom slučaju zvezda sama stvara, "sopstvenim materijalom", prošireni omotač iznad svoje fotosfere, u drugom - glavni "krivac" za formiranje omotača oko jedne komponente sistema je druga komponenta. Potpuno opisivanje procesa formiranja, u oba slučaja, je vrlo težak zadatak. U ovoj glavi biće izneti osnovni rezultati teorije o mogućnostima za formiranje omotača i teškoće u interpretaciji posmatračkog materijala, u smislu jednoznačnog određivanja stanja materije u zvezdanim omotačima. Na kraju, formuliše se zadatak o razvoju omotača.

1.1. Formiranje omotača u dvojnim sistemima

U bliskim dvojnim sistemima okozvezdana materija ima tri komponente: struja gasa između komponentata, omotač oko jedne komponente i (eventualno) omotač gasa oko celog sistema. Omotač nastaje u toku obmena mase između komponentata i njegova gustina zavisi, prvenstveno, od gustine u struji.

Zapremina omotača u Algol-tip sistemima je reda 10^5 cm^3 . Procenjena srednja gustina je $\sim 10^{13}$ elektrona/ cm^3 i, ako je jonizacija potpuna, masa takvog omotača je $10^{-9} - 10^{-8} M_{\odot}$ (Koch, 1972).

U dugoperiodičnim sistemima omotač je masivniji. Ukupna

zapremina, $\sim 10^{43} \text{ cm}^3$, sa srednjom gustinom $10^{11} \text{ čest./cm}^3$, za masu omotača (ako su čestice atomi vodonika) daje vrednost $10^{-3} M_{\odot}$. U vrlo masivnom omotaču, masa je reda veličine mase centralne zvezde - npr. kod β Lyrae (Woolf, 1965). No, tu su problemi razdvajanja omotača oko jedne komponente od omotača oko celog sistema (na osnovu polarizacionih merenja, Shulov (1967) određuje masu $10^{-7} M_{\odot}$, za omotač u β Lyrae, što je nekoliko reda manje od procene Woolfa).

U opštem slučaju - za proizvoljan sistem, masa omotača oko jedne njegove komponente može da se proceni iz poznatih dinamičkih karakteristika sistema, gustine i stepena jonizacije materije u njemu. Radijus omotača iznosi nekoliko radijusa centralne zvezde a srednja gustina je kao u struji ili nešto niža ($10^{12} - 10^{13} \text{ čest/cm}^3$).

U određivanju temperature ima mnogo teškoća. Brzina gasa u struji (nekoliko stotina km/s u blizini omotača) za temperaturu daje vrednost različitu od one koja se dobija sa poznatim stepenom jonizacije. Merenja pokazuju da je obmen mase između komponentata sa različitim intenzitetom u toku vremena, što dovodi do promene u vrednosti temperature kretanja. (Heiser, 1961). Za jonizacionu temperaturu u struji može se reći da je po vrednosti približna jonizacionoj temperaturi u atmosferi komponente koja gubi masu. Hutchings i Wright (1971), za temperaturu ekscitacije u omotaču oko sekundarne komponente u VV Cephei, dobijaju vrednosti između 16 000K i 7000K - idući prema periferiji omotača. Najviše problema ima u određivanju temperature omotača oko eruptivne komponente. U datoj fazi obmena mase, mnogi autori iz-

računavaju temperaturu koja odgovara samo uskoj oblasti na periferiji omotača, gde se sudaraju gas iz struje i formirani omotač i gde je temperatura znatno povišena - zbog formiranja toplotnog udarnog talasa. Tako, Warner i Nather (1971), temperaturu omotača za U Geminorum procenjuju na 50000K a Smak(1971) za istu oblast tog sistema dobija znatno niže vrednosti (od 7000K do 10000K). Problema u određivanju temperature ima i kod dugoperiodičnih sistema. Za omotač u SX Cassiopeiae, na primer, Günter(1959) određuje temperaturu jonizacije od 11500K, što je prevelika vrednost (efektivna temperatura centralne zvezde je 8400K).

Teorijska analiza uslova za formiranje omotača u dvojnim sistemima zasniva se na proučavanje strujanja gasa između komponentata. Pri tome, koriste se dva tipa modela: modeli trajektorija čestica - ograničeni problem tri tela (npr. Plavec and Křiž,1965; Kruszewski,1966) i hidrodinamički modeli (Prendergast,1960; Biermann,1971; Prendergast and Tamm, 1974; Flannery,1975). U oba tipa analize radi se o numeričkom rešavanju diferencijalnih jednačina kojima se opisuje odgovarajući model. Neki elementi problema, proučavani su i analitičkim metodama (npr. Sobouti,1970; Lubow and Shu,1975, 1976).

Stabilnost omotača zavisi - između ostalog, od karaktera mehanizma prenosa materije. Posmatrački materijal, pre svega emisija u spektru i kriva sjaja - kao i neki teorijski modeli o mogućim nestabilnostima i uticaja omotača na krivu sjaja centralne zvezde (Delplace,1971; Křiž,1974), daju mogućnost za razmatranje tri tipa nestabilnosti: kratkoperi-

odične (fluktuacije oko srednjeg u toku nekoliko orbitalnih perioda), promene koje dovode do nestabilnosti u celom sistemu i dugoperiodične promene koje bi mogle da utiču na razvoj sistema u vremenskoj skali evolucije zvezda. U svakom slučaju, napitanje o stabilnosti omotača ne postoji definitivni odgovor.

1.2. Formiranje omotača oko pojedinačne zvezde

Omotač oko pojedinačne zvezde može da se formira, izbacivanjem gasa, usled velike rotacione brzine zvezde i/ili zbog radijalnih nestabilnosti u njenom površinskom sloju (Huang Su-Shu, 1976).

Izbacivanje gasa u čisto tangencijalnom smeru moguće je samo kod zvezda sa izuzetno brzom rotacijom. Struve (1931) prvi pokušava da objasni emisione linije u spektru nekih Be zvezda postojanjem gasovitog omotača oko njih i pretpostavlja da on nastaje izbacivanjem gasa sa čisto tangencijalnim brzinama. Slettebak (1966) objavljuje rezultate posmatranja o velikim ekvatorskim brzinama rotacije, za zvezde spektralnog tipa od O9.5-F0 i klase sjaja IV-V. Brzine su, ipak, ispod kritične vrednosti na ekvatoru, što nije dovoljno za izbacivanje gasa. Osim toga i vremenska skala procesa ne ide u prilog ove pretpostavke. Naime, tangencijalno izbacivanje mase je spor proces i - u nedostatku efektivnog mehanizma za kočenje ili ubrzavanje rotacije, treba očekivati da čestice gasa napuštaju površinu zvezde neprekidno, sa skoro konstantnom brzinom. Sa druge strane, posmatrani intenzitet emisije iz omotača (Vojkhanskaya, 1976) varira u vremenskoj ska-

li od nekoliko časova pa i minuta. Tako brze promene ne mogu da budu posledica relativno sporog i neprekidnog procesa formiranja - izbacivanje gasa sa čisto tangencijalnim brzinama nije pogodan model.

Za formiranje omotača u čisto radijalnim brzinama potrebno je da se ispuni neki od sledećih uslova: 1. Visoka temperatura i pritisak u odgovarajućem sloju - kao u Sunčevoj koroni u slučaju Sunčevog vetra (Parker, 1963); 2. Topla i raširena fotosfera - kao u slučaju eksplozije Nove (npr. McLaughlin, 1950; Pottasch, 1959); 3. Nestabilnost zračenja (Lucy and Solomon, 1970). Radijalno izbacivanje gasa moguće je i u slučaju magnetne nestabilnosti i turbulencije u spoljašnjim slojevima zvezde ili u prostom procesu evaporacije sa površine.

Svaka od ovih mogućnosti, u realnim uslovima, predstavlja idealizaciju modela. Zvezdani vetar, kao i nestabilnost magnetnog polja na primer, ne mogu da obezbede čistu radijalnu struju gasa u dužem vremenskom intervalu i na dovoljno velikoj daljini od površine zvezde. Treba očekivati da su u struji gasa zastupljene obe komponente brzine: radijalna i tangencijalna. Fizički uslovi u omotaču zvezda analizirani su, uglavnom, izračunavanjem teorijskih profila emisionih linija (npr. Marlborough, 1970; Huang, 1973; Križ, 1973, 1976).

Od posebnog je značaja pitanje održavanja omotača. Realno, masa gasa koja napušta površinu zvezde ima početni uglovni moment rotacije. Prema tome, diskusija o načinu održavanja omotača svodi se na analizu mogućih mehanizama za prenos momenta između slojeva omotača i, između zvezde i omotača.

Privlačna je teorija prenosa magnetnim poljem (Lüst and Schlüter, 1955; Mestel, 1959; Hazlehurst, 1967) jer, takav model omogućava formiranje omotača i oko ne obavezno brzo rotirajućih zvezda. Međutim, posmatranja pokazuju da omotač imaju samo zvezde sa brzom rotacijom, nezavisno od prisustva i jačine magnetnog polja. U studiji Limbera i Marlborougha (1968), analiziraju se mogući mehanizmi prenosa uglovnog momenta i diskutuje se njihova efektivnost u korelaciji sa vremenskom skalom formiranja i održavanja omotača. Problem je vrlo složen jer svaki mehanizam posebno (centrifugalni, magnetno polje, zračenje, viskozno trenje), pokazuje se nedovoljno snažnim.

U modelu omotača treba izdvojiti bar dve faze: prva - formiranje omotača, kada u njemu dominira struja gasa u smeru od zvezde i druga - razvoj formiranog omotača, kada treba očekivati da neke čestice iz omotača padaju na zvezdu (ili se bar kreću prema zvezdi). Realno, gasoviti omotač je sredina sa nestacionarnim kretanjem koje, u konačnoj fazi (ako postoji), dostiže neko kvazi stacionarno stanje.

1.3. Formulacija zadatka

Posmatrački materijal i teorijski modeli, za formiranje omotača oko pojedinačne zvezde i u dvojnim sistemima i za izračunavanje profila emisijih linija, ukazuju da omotač nema sfernu simetriju - radi se o gasovitom disku ili obruču, relativno male debljine oko ekvatorske ravni zvezde. Razmatramo li Be zvezde, kao izraziti primer zvezda sa proširenim omotačem, model formiranja jako se komplikuje. Naime, to

su zvezde sa brzom rotacijom a, osim toga, sve - ili gotovo sve, Be zvezde pripadaju dvojnim sistemima (Križ and Harnanec, 1975). U navedenoj studiji daju se i zaključci, na osnovu posmatranja, iz kojih sledi da obmen materije između komponenata ne odvija se neprekidno i sa istim intenzitetom - postoji periodično slabljenje, sa nedovoljno jasno definisanom vremenskom skalom, kada je moguće da struja gasa vrlo malo utiče na promenu karakteristika omotača. Posmatramo li omotač u toku jednog takvog vremenskog intervala, možemo formulirati zadatak o njegovom razvoju u odsustvu najefektivnog mehanizma kojim se, u omotač, dovodi nova količina gasa. Ovako uprošćena slika stvarnog stanja omogućava da se razdvoje faze formiranja i razvoja omotača i savladaju brojne teškoće sa graničnim i početnim uslovima. Simetrija omotača, sa matematičkog stanovišta zahteva nestacionaran tretman u cilindričnim koordinatama. Konstruišimo cilindrični koordinatni sistem (r, φ, z) sa početkom u centru zvezde, r -osom u njenoj ekvatorskoj ravni i z -osom koja se poklapa sa osom rotacije zvezde. Realno, zadatak je četiri-dimenzionalni, s obzirom na objektivne teškoće u konstrukciji i realizaciji metoda za numeričku integraciju, ne daje mogućnost za uspešno rešavanje. Reduciranjem prostorne zavisnosti u ravnansku, eliminišu se problemi te vrste. Pored koordinate r - koja u svakom slučaju ostaje, treba se odlučiti za još jednu (φ ili z). Zanemarivanje raspodele po azimutu skoro da nema smisla pri proučavanju početne faze formiranja omotača. Međutim, u fazi razvoja, nemoguće je realno zadati početne i granične uslove u zavisnost od φ , u odsustvu onih procesa koji određuju takvu zavisnost. U toj fazi, u prvoj aproksi-

maciji, može se pretpostaviti da ostatočna zavisnost parametara omotača po azimutu, postoji samo u relativno uskoj oblasti po r - na periferiji, da ona slabo utiče na razvoj unutrašnjih slojeva omotača i da sa vremenom isčezava i u toj oblasti. Sa druge strane, karakteristike omotača po visini (koordinata z) nisu poznate ni u fazi formiranja omotača. Zbog toga, predlažemo simetriju (r, z) .

Kao mehanizam razvoja, razmatraće se prenos uglovnog momenta rotacije turbulentnim trenjem susednih slojeva omotača. Magnetno polje nećemo razmatrati. Naime, uvodeći u model razvoja i uticaj magnetnog polja, zamrznutog u plazmi omotača, moramo se vezati za njegove karakteristike u struji gasa između komponenata ili u površinskim slojevima centralne zvezde. Osim toga, na osnovu posmatranja se može zaključiti da, postojanje omotača nije uslovljeno magnetnim poljem. Posmatraćemo omotač sa masom koja je mnogo manja od mase centralne zvezde pa, u tom smislu, zanemarićemo sopstvenu gravitaciju gasa u njemu. Takođe, u energetskej ravnoteži omotača, nećemo javno izračunavati doprinos toplotnog provođenja. Pretpostavićemo još, da se gas u omotaču sastoji od jonizovanog vodonika u idealnom stanju, a udeo zračenja zvezde u ukupnom pritisku nećemo računati.

Pod svim tim uslovima, omotač ćemo tretirati hidrodinamički, kao sredina sa turbulentnim kretanjem, u cilindričnoj konfiguraciji sa aksijalnom simetrijom.

GLAVA 2. OMOTAČ KAO NEPREKIDNA SREDINA

U formulaciji zadatka predložen je hidrodinamički model omotača. U ovoj glavi, polazeći od jednačina hidrodinamike za proizvoljan, ortogonalan sistem krivolinijskih koordinata, daju se jednačine ravnoteže u cilindričnim koordinatama sa aksijalnom simetrijom. Zatim, daje se potpun sistem jednačina kretanja u jednodimenzionom tretmanu, sa graničnim i početnim uslovima.

2.1. Jednačine hidrodinamike

Termin "jednačine kretanja" koristićemo za označavanje svih jednačina potpunog sistema kojima se opisuje ponašanje date sredine; u ovom zadatku mogu se podeliti u dve grupe: 1. Jednačine ravnoteže različitih veličina (mase, količine kretanja - ili brzine, i energije) i 2. Jednačina stanja, izrazi za koeficijente prenosa, tenzora napona i energije zračenja kao i formule za izvedene veličine iz ove grupe. Osnovni sistem čini prva grupa jednačina a dodatne formule i relacije iz druge grupe zavise od detalja konkretne formulacije zadatka.

Razmotrimo prvo jednačine ravnoteže. To su dobro poznate jednačine klasične dinamike gasova, koje se mogu naći u svakom udžbeniku iz te oblasti. Pođimo od nešto opštija razmatranja da bi u jednačinama, na prirodan način, uveli članove koji karakterišu kretanje u astrofizičkim uslovima.

Osnovna jednačina sistema izražava zakon održanja mase -

ravnotežu mase (jednačina neprekidnosti) koja, pri kretanju bilo kakve sredine, zadržava isti oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (2.1)$$

Iskoristimo je za izvođenje jednačina ravnoteže ostalih veličina.

Neka ξ bude neka skalarna veličina (po jedinici mase) čija se ravnoteža traži. Ukupna vrednost ξ_u u sredini zapremine V je $\xi_u = \int_V \xi \rho dV$. Promena ξ_u u vremenu, ako su granice zapremine fiksirani, u opštem slučaju jednaka je zbiru nekih zapreminskih integrala (rezultantni integral označimo sa I_V) i nekih površinskih integrala (ukupne veličine I_S) po površi S koja obuhvata posmatranu zapreminu. Integral I_V određuje veličinu dejstva zapreminskih faktora koji menjaju ξ a I_S definiše dejstvo površinskih faktora i fluks veličine $\rho \xi$ kroz površ S .

Ako sa A označimo meru, po jedinici zapremine, za ukupno dejstvo zapreminskih faktora, onda je $I_V = \int_V A dV$. Neka, po analogiji, \mathcal{A} označava meru - po jedinici površine, za dejstvo svih površinskih faktora. U opštem slučaju \mathcal{A} je tenzorska veličina a ako je ξ komponenta brzine, \mathcal{A} se formalno tretira kao vektor. Osim toga, radi jednostavnije diskusije, ukupni fluks veličine $\rho \xi$ kroz S razdvojimo na dve komponente: konvektivni fluks - $\rho \xi \vec{v}$ i fluks svih ostalih mehanizama prenosa - \vec{F} (Ako je vektor ukupnog fluksa suprotno orijentisan u odnosu na spoljašnu normalu na površ S , on povećava vrednost ξ_u u toku vremena). Na taj način, za I_S može se pisati $I_S = - \int_S (\rho \xi \vec{v} + \vec{F} + \mathcal{A}) d\vec{S}$.
Za ravnotežu ξ_u sada imamo relaciju $\frac{d}{dt} \int_V \xi \rho dV = I_V + I_S$

odnosno,

$$\int_V \frac{d}{dt} (\rho \xi) dV = \int_V A dV - \int_S (\rho \xi \vec{v} + \vec{F} + A) d\vec{S}. \quad (2.2)$$

Primenom Gaussove teoreme na površinski integral u (2.2), zbog proizvoljnosti zapremine V dobija se

$$\frac{d}{dt} (\rho \xi) + \operatorname{div}(\rho \xi \vec{v}) = A - \operatorname{div} \vec{F} - \operatorname{Div} A \quad (2.3)$$

(operator Div označava divergenciju tenzorske veličine). Ako izvršimo parcijalno diferenciranje prvog člana na levoj strani (2.3) i od dobijene jednačine oduzmemo jednačinu neprekidnosti (2.1), prethodno pomnoženu sa ξ , dobija se

$$\rho \frac{d\xi}{dt} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \xi = A - \operatorname{div} \vec{F} - \operatorname{Div} A \quad (2.4)$$

što predstavlja jednačinu ravnoteže za proizvoljnu veličinu ξ .

a) Ravnoteža za brzinu. Neka je v_i algebarska vrednost projekcije brzine na osu q^i ortogonalnog sistema koordinata i neka je u jednačini (2.4), $\xi \equiv v_i$. U tom slučaju, veličina A je i -komponenta gustine zapreminskih sila. Za sredinu u gravitacionom polju, $A_i = -\rho (\nabla \mathcal{V})_i$ gde je \mathcal{V} funkcija gravitacionog potencijala. Kako se v_i prenosi isključivo konvekcijom, $\vec{F} = 0$ a $\operatorname{Div} A$ u (2.4) je i -komponenta gustine površinskih sila. Za viskoznu sredinu

$$(\operatorname{Div} A)_i = -(\nabla P)_i + (\operatorname{Div} \mathcal{N})_i \quad (2.5)$$

gde je P -pritisk, \mathcal{N} -tenzor napona. U vektorskom obliku, jednačina ravnoteže za brzinu \vec{v} je

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\rho \nabla \Psi - \nabla P + \text{Div} \mathcal{N} \quad (2.6)$$

b) Ravnoteža energije. U ovom slučaju veličina ξ iz (2.4) je ukupna energija po lgr mase sredine: unutrašnja energija (ε), kinetička energija ($v^2/2$) i potencijalna energija u gravitacionom polju (Ψ). U odsustvu elektromagnetnog polja

$$\xi = \varepsilon + \frac{v^2}{2} + \Psi. \quad (2.7)$$

Ako ne postoje nuklearne reakcije, drugih izvora navedenih vidova energije nema, pa je $\dot{A} = 0$. Na način kako je uvedena, veličina \vec{F} predstavlja fluks svih vidova energije, umanjen za vrednost konvektivnog fluksa:

$$\vec{F} = \rho \varepsilon \vec{v} + \rho \frac{v^2}{2} \vec{v} + \rho \Psi \vec{v} + \vec{F}_T + \vec{F}_R - \vec{F}_c \quad (2.8)$$

gde su: \vec{F}_T - fluks energije usled toplotnog kretanja čestica, \vec{F}_R - fluks energije koja se prenosi zračenjem, \vec{F}_c - konvektivni fluks. Pošto je $\vec{F}_c = \vec{v} \cdot \rho \xi$ izraz za \vec{F} iz (2.8), sa ξ iz (2.7), postaje

$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_R \quad (2.9)$$

Veličina \mathcal{A} iz (2.4), u ovom slučaju, predstavlja rad sile pritiska i rad viskoznih sila na površinu razmatrane zapremine:

$$\mathcal{A} = P \vec{v} - \mathcal{N} \vec{v}. \quad (2.10)$$

Stavljajući rezultate iz (2.7), (2.9) i (2.10) u (2.4),

dobija se jednačina ravnoteže za energiju

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \gamma \right) + \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \gamma \right) = -\operatorname{div}(\vec{E}_T + \vec{E}_n) - \operatorname{div}(P\vec{v} - N\vec{v}) \quad (2.11)$$

Poslednja jednačina može da se transformiše u nekoliko oblika. Pomnožimo (2.6) skalarno sa \vec{v} , s leva i rezultat oduzmimo od (2.11). U dobijenoj jednačini uvrstimo $\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla \frac{v^2}{2}$ i razvoj za $\operatorname{div} P\vec{v}$. Ona postaje

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \varepsilon = -\operatorname{div}(\vec{E}_T + \vec{E}_n) - P \nabla \cdot \vec{v} + \operatorname{div} N\vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{Div} N. \quad (2.12)$$

Ako u poslednjoj jednačini, energiju izrazimo pomoću entalpije $I = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$ a $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ zamenimo iz jednačine neprekidnosti (2.1), jednačina (2.12) posle malih transformacija dobija oblik

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial I}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) I &= \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) P + \\ &+ \operatorname{div} N\vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{Div} N - \operatorname{div}(\vec{E}_T + \vec{E}_n). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Konačno, napišimo jednačinu ravnoteže za entalpiju kretanja, $I_0 = I + \frac{v^2}{2} + \gamma$. Izrazimo I pomoću I_0 , uvrstimo u (2.13), a $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ zamenimo iz jednačine ravnoteže (2.6). Iskoristimo li jednostavne odnose pomoću kojih smo dobili oblik (2.12), jednačina (2.13) transformiše se u

$$\rho \frac{\partial I_0}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) I_0 = \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} N\vec{v} - \operatorname{div}(\vec{E}_T + \vec{E}_n). \quad (2.14)$$

Na taj način, u zavisnost od konkretnih potreba, jednačina energije može da se koristi u jednom od oblika (2.11) - (2.14).

2.2. Potpun sistem jednačina kretanja u cilindričnim koordinatama

Napišimo jednačine ravnoteže u razvijenom, javnom, obliku u cilindričnim koordinatama. U tom cilju, iskoristimo izraze za komponente gradijenta i divergenciju u sistemu ortogonalnih krivolinijskih koordinata ξ^i . Za skalarnu funkciju f i vektorsku funkciju \vec{g} ,

$$(\nabla f)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial \xi^i}, \quad (2.15)$$

$$(\nabla \cdot \vec{g}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (h_i h_{jk} g_i), \quad (2.16)$$

gde su h_i koeficijenti Laméa:

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi^i} \right)^2 \quad (2.17)$$

x, y, z - Dekartove koordinate. Osim toga projekcija brzine, $v_{\xi^i} (\equiv v_i)$, na odgovarajuću koordinatnu osu ξ^i je

$$v_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}^i}, \quad (2.18)$$

projekcija ubrzanja

$$a_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{\partial T}{\partial \xi^i} \right), \quad (2.19)$$

sa

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2); \quad \dot{\xi}^i \equiv \frac{d \xi^i}{dt}. \quad (2.20)$$

Jednačine (2.15) - (2.20), za slučaj aksijalne simetrije, ($\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$), omogućavaju da se napiše javni oblik jednačina

ravnoteže. Za cilindrični sistem $\xi^1 = r$; $\xi^2 = \varphi$; $\xi^3 = z$ a prema (2.17) $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$. Jednačina neprekidnosti (2.1) postaje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) = 0 \quad (2.21)$$

a skalarne jednačine iz (2.6) su

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) v_r - \rho \frac{v_\varphi^2}{r} = -\rho \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} + (\text{Div} N)_r \quad (2.22)$$

$$\rho \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) v_\varphi + \rho \frac{v_r v_\varphi}{r} = (\text{Div} N)_\varphi \quad (2.23)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) v_z = -\rho \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} + (\text{Div} N)_z \quad (2.24)$$

Ako u ravnotežnu jednačinu energije, recimo oblik (2.12), označimo $q_r = \text{div}(\vec{E}_T + \vec{E}_r)$ a za $\vec{v} \cdot \nabla$ iskoristimo rezultat sumiranja po i u jednačini (2.16), dobija se

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \varepsilon = -P \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \text{div} N \vec{v} - \vec{v} \cdot \text{Div} N - q_r \quad (2.25)$$

U jednačinama (2.21) - (2.25) operator $(\vec{v} \cdot \nabla) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ od proizvoljne skalarne funkcije.

Osnovni sistem jednačina treba dopuniti izrazima za γ , P , ε , q_r i $(\text{Div} N)_i$. Iz formulacije zadatka sledi

$$\gamma = \frac{G M_*}{R} ; P = \frac{\kappa \rho T}{\mu m_H} ; \varepsilon = \frac{1}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (2.26)$$

gde je R - rastojanje od centra zvezde, m_H - masa atoma vodonika, μ - srednja molekulska težina ($\mu = 0.5$), $\Gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}$. Komponente divergencije simetričnog tenzora napona u ortogonalnim krivolinijskim koordinatama (Djačenko, Imšenik; 1963)

su

$$(\text{Div} N)_k = \frac{1}{h_k} \left[\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3 h_k}{h_i} N_{ik} \right) - N_{ii} \frac{\partial h_{ki}}{\partial \xi^i} \right], \quad (2.27)$$

a komponente N - sa izotropnim koeficijentom viskoznosti η , mogu se izraziti pomoću v_i i njihovih izvoda (Djačenko, Imšenik; 1963), na sledeći način:

$$N_{ik} = \eta \left\{ \frac{1}{h_k} \frac{\partial v_i}{\partial \xi^k} + \frac{1}{h_i} \frac{\partial v_k}{\partial \xi^i} - \frac{1}{h_i h_k} \left(v_i \frac{\partial h_i}{\partial \xi^k} + v_k \frac{\partial h_k}{\partial \xi^i} \right) + \right. \\ \left. + 2\delta_{ik} \frac{v_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \xi^\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \left[\frac{v_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial \ln(h_1 h_2 h_3)}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{v_\alpha}{h_\alpha} \right) \right] \right\}. \quad (2.28)$$

U (2.27) vrši se sumiranje po i , u (2.28) po α ; član u srednjoj zagradi u (2.28) javlja se zbog sažimanja gasa. Disipacija energije usled viskoznosti, poslednja dva člana u (2.25), može da se pretstavi u obliku

$$\text{div} N \vec{v} - \vec{v} \text{Div} N = N_{ik} \frac{h_k}{h_i} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{v_k}{h_k} \right) + \frac{v_k}{h_k} N_{ii} \frac{\partial h_{ki}}{\partial \xi^k}. \quad (2.29)$$

Za cilindričnu konfiguraciju sa aksijalnom simetrijom, iz (2.27) sledi

$$(\text{Div} N)_r = \frac{\partial N_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial N_{rz}}{\partial z} + \frac{N_{rr} - N_{\varphi\varphi}}{r};$$

$$(\text{Div} N)_\varphi = \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial N_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2N_{r\varphi}}{r} \quad (2.30)$$

$$(\text{Div} N)_z = \frac{\partial N_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial N_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial N_{rz}}{r}$$

a izraz (2.28) za komponente N_{ik} daje

$$\begin{aligned}
N_{rr} &= \eta \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) \right] \\
N_{zz} &= \eta \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) \right] \\
N_{\varphi\varphi} &= \eta \left[2 \frac{v_r}{r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) \right] \\
N_{rz} &= \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right); \quad N_{r\varphi} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right); \quad N_{z\varphi} = \eta \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Takođe, iz formule (2.29), dobija se

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} N \vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{Div} N &= N_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + N_{\varphi\varphi} \frac{v_r}{r} + N_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\
&+ N_{rz} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + N_{r\varphi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) + N_{z\varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Za diskusiju ostaje još difuzni član u jednačini energije (2.25). Ako ne razmatramo toplotno provođenje u omotaču ($\vec{F}_T \equiv 0$), $q_r = \operatorname{div} \vec{F}_r$. Zapravo, priroda zračenja omotača najveći je problem. U jednačini ravnoteže za brzinu \vec{v} , možda se i može zanemariti pritisak zračenja - u poređenje sa dinamičkim pritiskom (kao posledica toga, ne razmatramo energiju zračenja u izrazu za ukupnu gustinu energije), ali - zbog velike brzine fotona, količina energije prenošena zračenjem nije zanemarljiva. U opštem slučaju, za nalaženje \vec{F}_r potrebno je izračunati intenzitet zračenja u datom pravcu iz jednačine prenosa, sa poznatom optičkom debljinom τ (odnosno, poznatim srednjim koeficijentom apsorpcije κ) u omotaču. Broj jednačina ravnoteže time se povećava a rešenje jednačine prenosa je od samostalnog interesa. Pošto je naš osnovni zadatak dinamika omotača, uticaj zračenja raz-

matračemo u prostom obliku. Pretpostavka o lokalno termodinamičkoj ravnoteži ($\tau \gg 1$) daje mogućnost za korišćenje difuzne aproksimacije

$$q = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) \quad , \quad \alpha = \frac{16}{3} \frac{\sigma_{SB} T^3}{\kappa_0} \quad (2.33)$$

(σ_{SB} je Stefan - Boltzmannova konstanta), koja se koristi pri izračunavanju modela zvezda. Vrednost q iz (2.33) je nesigurna, zbog nepoznavanja koeficijenta neprozračnosti. Osim toga, nelinearnost koeficijenta difuzije (α), zahteva poseban tretman jednačine energije u šemi za numeričku integraciju - što samo usložnjava postupak rešavanja zadatka, ne povećavajući njegovu tačnost. U drugoj aproksimaciji, $\tau \ll 1$, za izračunavanje člana q može da se koristi adaptirana kriva zračenja optički tanke plazme (Cox and Tucker; 1969 ili Dalgarno and Mc Cray, 1972). Realno, omotač se ne ponaša kao prozračna sredina a korišćenje aproksimacije $\tau \ll 1$ dovodi do brzog hlađenja (karakteristično vreme zračenja je mnogo manje od hidrodinamičkog), što stvara velike numeričke probleme. U takvim uslovima, sa željom da u dinamici omotača vodimo računa o nekim efektima zračenja, za fluks zračenja predlažemo prostu aproksimaciju crnog tela. U tom slučaju veličina $\text{div} \vec{F}_r / \rho$ pretstavlja količinu izračene energije po lgr u jedinici vremena, pa je

$$q = \sigma_{SB} T^4. \quad (2.34)$$

Jednačine (2.21) - (2.25), (2.26), (2.30) - (2.32) i (2.34), sa poznatim koeficijentom viskoznosti, čine potpun sistem jednačina kretanja.

2.3. Jednodimenzioni tretman

U formulaciji zadatka (odjeljak 1.3.) navedeni su razlozi za izbor aksijalne simetrije problema. U takvoj postavci, kada se želi proučavatai kasnija (ne mora biti i konačna) evolucija omotača, faza formiranja ne igra bitnu ulogu. U svakom slučaju, posledice mehanizama formiranja navode na zaključak da su karakteristike omotača pretežno izražene u ekvatorskoj (orbitalnoj) ravni odnosno, u njenoj okolini (Prendergast and Tamm, 1974; Flannery, 1975). Mala debljina u z -pravcu ukazuje na odnos $z < r$, možda i $z \ll r$, za svako r . Takva konfiguracija omotača - njegova diskoobrazna forma, omogućava još jedno uprošćenje: dodatnom pretpostavkom $v_z \ll v_r$ (realno, $v_r < v_\varphi$), problem se svodi na jednu prostornu dimenziju (struktura diska u z -pravcu može posebno da se diskutuje). Mala vrednost brzine v_z približno daje hidrostatičku ravnotežu diska u oblast van ravni rotacije kao i izotermičnost u z -pravcu (sile koje deluju po z -osi ne omogućavaju širenje diska a time ni njegovo hlađenje u tom pravcu).

Iskoristimo ovu redukciju zadatka i transformišimo jednačine ravnoteže, svodeći ih na zavisnost (r, t) . Pre svega funkcija gravitacionog potencijala Ψ , jednačina (2.26), može da se razvije u Taylorov red u okolini ravni rotacije ($z = 0$):

$$\Psi(r, z) \approx \Psi(r, 0) + A(r) \frac{z^2}{2}, \quad (2.35)$$

$$A(r) = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)_{z=0} = - \frac{GM_*}{r^3} \quad (2.36)$$

Hidrostaticka ravnoteža duž z -pravca ($v_z \approx 0$), $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ i $T(z) = \text{const}$, omogućavaju lako rešenje jednačine ravnoteže (2.24). Za jednačinu stanja iskoristimo (2.26), za $\Psi(r, z)$ razvoj (2.35) i uslov $\rho(r, z) = \rho(r, 0)$ za $z = 0$. Za raspodelu gustine duž z -ose dobija se

$$\rho(r, z) = \rho(r, 0) \exp\left(-\frac{1}{2} (z/L)^2\right), \quad (2.37)$$

$$L = \left(\frac{kT}{A(\mu m_H)}\right)^{1/2}, \quad (2.38)$$

gde je L skala visine u disku. Ukupna gustina σ , u preseku $r = \text{const}$, dobija se integracijom (2.37),

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r, z) dz. \quad (2.39)$$

Iskoristimo (2.39) i (2.35), sve navedene pretpostavke i $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, kao još jedna njihova posledica. Integracijom jednačina ravnoteže (2.21) - (2.25) po z dobija se rezultat

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \sigma + \sigma \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_z}{r} \right) = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_z - \frac{v_z^2}{r} = -\frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} - \frac{P}{2\sigma A} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\sigma} (\text{Div} N)_z \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_\varphi + \frac{v_z v_\varphi}{r} = \frac{1}{\sigma} (\text{Div} N)_\varphi \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \varepsilon = -\frac{P}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\sigma} [\text{div} N \vec{v} - \vec{v} \cdot \text{Div} N] - Q \quad (2.43)$$

sa $(\vec{v} \cdot \nabla) = v_z \frac{\partial}{\partial z}$. Na osnovu (2.39), (2.26), (2.30) - (2.32) i (2.34) sledi

$$P = \frac{kT}{(\mu m_H)} \sigma ; \quad \varepsilon = \frac{1}{\Gamma-1} \frac{P}{\sigma} ; \quad T(r, 0) = -\frac{G M_*}{r} ; \quad Q = \frac{2\sigma c \Gamma^4}{\sigma} \quad (2.44)$$

(faktorom 2 u izrazu za Q obuhvaćeno je zračenje sa obe strane površine diska),

$$\begin{aligned}(\operatorname{Div} N)_r &= \frac{\partial N_{rr}}{\partial r} + \frac{N_{rr} - N_{\varphi\varphi}}{r}, \\(\operatorname{Div} N)_\varphi &= \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2N_{r\varphi}}{r}\end{aligned}\quad (2.45)$$

$$\operatorname{div} N \vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{Div} N = N_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + N_{\varphi\varphi} \frac{v_r}{r} + N_{r\varphi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

$$\begin{aligned}N_{rr} &= \eta \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \right] \\N_{\varphi\varphi} &= \eta \left[2 \frac{v_r}{r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \right] \\N_{r\varphi} &= \eta \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right]\end{aligned}\quad (2.46)$$

Ako je ν kinematički koeficijent viskoznosti, $\eta = \epsilon \nu$.

Sistem (2.40) - (2.46) predstavlja potpun sistem jednačina kretanja u Eulerovim koordinatama (r, t) .

2.4. Granični i početni uslovi

Jednačine (2.40) - (2.43) razmatraju se u oblast promenljivih (r, t) , sa zadanim graničnim i početnim uslovima. Iz formulacije zadatka sledi da je unutrašnja granica oмотача - površina zvezde sa $r = r_*$, nepodvižna a spoljašna granica, $r = R(t)$, slobodna. Na nepokretnoj granici - u zadacima strujanja viskoznog fluida, poznat je zahtev klasične hidrodinamike za ukupnu brzinu, $\vec{v} = 0$. U našem zadatku koristimo termin "nepodvižna granica" u smislu $r_* = \text{const}$ iako tačke površi zvezde kreću se Keplerovskom brzinom v_φ .

Pošto je, za čestice iz omotača, orbita sa $r = r_*$ stabilna, granični uslov bi trebao da bude: $v_r = 0$, $v_\varphi = v_\varphi(r_*)$. Treba očekivati da će tako strog uslov izazvati pojavu uskog pograničnog sloja oko fotosfere zvezde (razmatranje procesa u njemu je van okvira formulacije zadatka). Zato, predlažemo blažu formu uslova $\vec{v} = 0$, tj.

$$v_r = 0 ; \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 ; r = r_*, \quad (2.47)$$

gde je ω uglovna brzina rotacije ($v_\varphi = \omega r$). Spoljašna granica omotača je granica sa vakuumom. Ako zahtevamo da je pritisak na njoj jednak nuli, za ograničenje dejstva viskozni sila dovoljno je staviti $N_{rr} = N_{r\varphi} = 0$ ili, na osnovu (2.46),

$$2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} = 0 ; \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} = 0 ; r = R(t). \quad (2.48)$$

Početni uslovi, jednim delom, proističu iz formulacije zadatka. Neka, u početnom trenutku, ne postoji radijalno kretanje omotača. Čestice se kreću po Keplerovskim orbitama sa brzinom $v_\varphi(r, 0)$, koju možemo odrediti iz jednačine ravnoteže (2.41) za $t = 0$:

$$v_r(r, 0) = 0 ; \frac{v_\varphi^2(r, 0)}{r} = \frac{\partial T(r)}{\partial r} + \frac{P(r, 0)}{2\epsilon A} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P(r, 0)}{\partial r}. \quad (2.49)$$

Raspodela $P(r, 0)$ određuje se iz jednačine stanja, prema zadanim profilima gustine i temperature. Poslednje dve raspodele, u principu, moguće je zadati sasvim proizvoljno. Na primer, $\epsilon(r, 0) = \text{const}$ i $T(r, 0) = 0$, bili bi najprostiji

uslovi za gustinu i temperaturu (time bi se i uslov (2.49) pojednostavio). Međutim, nesumnjivo, gornji uslovi za homogen i hladan omotač u početnom trenutku daleko su od realnosti. Osim toga, zbog $T(r,0)$, trebalo bi modifikovati koeficijent viskoznosti η , sa ciljem da se u ranijim trenucima razvoja omotača oslobađa bar minimum energije viskoznoeg trenja. Zato ćemo, za gustinu i temperaturu u početnom trenutku, predložiti raspodele

$$\epsilon(r,0) = \epsilon_* \left(\frac{r_*}{r}\right)^k ; T(r,0) = T_* \mathcal{D}, \quad (2.50)$$

gde su ϵ_* , T_* - gustina i temperatura na površini zvezde, $k > 1$ a

$$\mathcal{D} = 0.5 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r}\right)^2} \right] \quad (2.51)$$

je faktor dilucije. Naravno, početni uslovi na granicama treba da su usaglašeni sa graničnim uslovima.

GLAVA 3. TURBULENTNO KRETANJE

U prethodnoj glavi bila je data matematička formulacija za deo zadatka. Ostaje da se razmotri turbulentni mehanizam prenosa uglovnog momenta, kao uslov za evoluciju omotača zvezde. U ovoj glavi, polazeći od osnovnih jednačina neprekidne sredine i modela turbulencije u omotaču, izvode se jednačine kretanja za srednje veličine (pokazuje se da je moguće eliminisati pulsacionu komponentu fizičkih veličina). Na kraju daje se potpun sistem jednačina u Lagrangeevim koordinatama (masa, vreme), u bezdimenzionom obliku.

3.1. Model turbulencije

Ako u jednoj sredini postoje kretanja različitih razmera, za njeno stanje kaže se da je turbulentno. Pri tome, ako između turbulentnih ćelija ne postoji energetska zavisnost, pobuđeno kretanje određenog razmera će se izgubiti (linearnost). Ako su pak kretanja nelinearna, energija iz krupnih ćelija prenosi se na kretanje u najmanjim razmerima gde se vrši disipacija u toplotnu energiju.

Postoje dva osnovna tipa turbulencije: rotorski i akustički. Kod turbulencije prvog tipa, za kretanje svih razmera važi $\text{rot } \vec{v} \neq 0$, dok je kretanje u akustičkoj turbulenciji talasne prirode (potencijalnog tipa), pa je $\text{rot } \vec{v} = 0$. Step en nelinearnosti turbulencije akustičkog tipa određuje se veličinom odnosa v_ℓ/v_s , gde je v_ℓ brzina kretanja sredine

u krupnoj ćeliji karakteristične dužine l , v_s - lokalna brzina zvuka. Ako je $v_l \ll v_s$, talasi imaju linearni karakter i akustička turbulencija se ne razvija.

Posmatranja i analiza spektra zračenja ukazuju na postojanje turbulencije u atmosferama mnogih zvezda kao i u međuzvezdanoj sredini. Karakteristike turbulentnog kretanja nisu potpuno poznate. Naime, konstruisati teoriju turbulencije vrlo je teško, pogotovo za nelinearne pulsacije (npr. Rotta, 1951; Frost, 1960; Ievlev, 1970; Kolmogorov, 1972). U astrofizici, ispitivanje karakteristika turbulencije u atmosferama zvezda svodi se na određivanje veličine turbulentne ćelije na osnovu zavisnosti između ekvivalentne širine i poluširine spektralne linije (npr. Greenstein, 1960). Ipak, turbulentno kretanje iskorišćeno je kao mehanizam akrecije na crnu jamu (ili protonsku zvezdu) u dvojnim sistemima, zajedno sa drugim faktorima koji regulišu snagu akrecije (Shakura, Sunyaev; 1973).

U takvoj situaciji, kada postoje dokazi o turbulenciji kod zvezda a ne postoji potpuna teorija turbulentnog kretanja, za omotač zvezda usvojićemo sledeći model akustičke turbulencije:

$$v_T = \alpha v_s \quad (\alpha < 1); \quad L = \nu \frac{v_s}{v_\nu} \quad (L < r); \quad \nu < \nu_T, \quad (3.1)$$

gde je v_T - turbulentna brzina, v_s - izotermička brzina zvuka, L - maksimalna dužina turbulentne ćelije (skala visine u omotaču); ν, ν_T - molekularni i turbulentni kinematički koeficijent viskoznosti.

Jedini "samo-regulator" modela (3.1) je koeficijent α koji određuje stepen nelinearnosti turbulentnih pulsacija. Uslov $\alpha < 1$ govori da je turbulencija podzvučna, sve vreme i za svako r u omotaču. Ako je na nekom mestu i u nekom trenutku $v_T > v_S$, u tom delu omotača transformiše se veća količina energije turbulencije u toplotnu - povećava se v_S odnosno, smanjuje α . Realno, α je funkcija rastojanja u omotaču koja, u pograničnim oblastima, treba da dâ vrednosti:

$$\alpha \ll 1 \quad (r \gtrsim r_*) ; \quad \alpha \lesssim 1 \quad (r \gg r_*). \quad (3.2)$$

U nemogućnosti da se koristi bar neka poluempirijska formula za $\alpha(r)$ kao i zbog velike proizvoljnosti u zadavanju takve funkcije, tretiraćemo $\alpha = \text{const}$. Odnos $L < r$ nije apriorna pretpostavka već posledica usvajanja L (j-na (2.38)) za dužinu ćelije. Uslov $v < v_T$ u modelu, ispunjava se u svakoj tački u omotaču i posledica je izbora $\alpha = \text{const}$. Realno, kako sledi iz (3.2), u blizini površine zvezde turbulencija se sporo generiše i moguće je $v > v_T$. Odnos $v < v_T$ praktično zahteva $\alpha \lesssim 1$ u celom omotaču.

3.2. Jednačine kretanja za srednje veličine

Primenimo jednačine (2.40) - (2.46) osnovnog sistema za rešenje zadatka, dopunjene modelom (3.1), na turbulentno kretanje i usvojimo oznake $u \equiv v_r$, $v \equiv v_\varphi$, $p \equiv p_\varphi$. Osnovni cilj je da se, usrednjavanjem polaznih jednačina po jednom periodu pulsacija, dobiju jednačine ravnoteže za srednje

vrednosti fizičkih veličina. U tom cilju, svaku nepoznatu funkciju f pretstavimo kao zbir njene srednje vrednosti i pulsacione komponente:

$$f = \langle f \rangle + f' . \quad (3.3)$$

Pri tome važi $\langle u \rangle < \langle v \rangle$, što je realno za polje brzina u omotaču.

a) Ravnoteža mase. Jednačina kontinuiteta (2.40) može da se napiše u sažetijem obliku:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \epsilon u}{\partial r} = 0 . \quad (3.4)$$

Primenivši (3.3) na veličine ϵ i (ϵu) , jednačina (3.4) posle usrednjavanja ($\langle f' \rangle = 0$) postaje

$$\frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \langle \epsilon u \rangle}{\partial r} = 0 . \quad (3.5)$$

b) Ravnoteža Ψ -komponente brzine. Jednačina (2.42) može da se transformiše u oblik jednačine ravnoteže za moment rotacije $\tau_\varphi = r v_\varphi$. Sa usvojenim oznakama i pomoću izraza (2.45) za $(\text{Div } N)_\varphi$, imamo

$$\epsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial r^2 N_{r\varphi}}{\partial r} . \quad (3.6)$$

Leva strana poslednje jednačine, \mathcal{L}_v , može da se napiše kao

$$\mathcal{L}_v = \frac{\partial \epsilon p}{\partial t} - p \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial p}{\partial r}$$

ili - posle zamene $(\partial \epsilon / \partial t)$ iz (3.4),

$$\mathcal{L}_v = \frac{\partial \epsilon p}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \epsilon u p}{\partial r}. \quad (3.7)$$

Primenivši (3.3) na količine (ϵp) i $(\epsilon u p)$, posle usrednjavanja, (3.7) postaje,

$$\langle \mathcal{L}_v \rangle = \frac{\partial \langle \epsilon p \rangle}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \langle \epsilon u p \rangle}{\partial r}. \quad (3.8)$$

Za transformaciju i analizu pojedinih članova korišćićemo izraz za srednju vrednost proizvoda

$$\langle f \cdot g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle + \langle f' g' \rangle \quad (3.9)$$

i razvoj za pulsacionu komponentu proizvoda

$$(fg)' = \langle f \rangle g' + f' \langle g \rangle + f' g' - \langle f' g' \rangle. \quad (3.10)$$

Primenimo (3.9) na $\langle \epsilon p \rangle$. U razvoju dobija se član $\langle \epsilon' v' \rangle$, što pretstavlja veličinu turbulentne difuzije mase u pravcu φ -ose. Smatrajmo da je turbulentna difuzija bilo koje veličine u tom pravcu zanemarljivo mala. Ako time ne činimo grubu grešku, u ovom slučaju možemo se zadovoljiti aproksimacijom

$$\langle \epsilon p \rangle \approx \langle \epsilon \rangle \langle p \rangle \quad (3.11)$$

Ako razvoj (3.9) primenimo na $\langle (\epsilon u) p \rangle$, pa dobijeni rezultat zajedno sa (3.11) zamenimo u (3.8), razvijemo izvod po vremenu i zamenimo $(\partial \langle \epsilon \rangle / \partial t)$ iz (3.5), jednačina (3.8) posle sređivanja članova postaje

$$\langle \mathcal{L}_v \rangle = \langle \epsilon \rangle \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial t} + \langle \epsilon u \rangle \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \langle (\epsilon u)' p' \rangle}{\partial r}. \quad (3.12)$$

Izraz $\kappa \langle (\delta u)' v' \rangle = \kappa^2 \langle (\delta u)' v' \rangle$ sadrži članove koji nisu istog reda. Ako razvoj (3.10) pomnožimo sa κ' , potom usrednjimo i rezultat iskoristimo za razvoj člana kojeg razmatramo, biće

$$\langle (\delta u)' v' \rangle = \langle \delta \rangle \langle u' v' \rangle + \langle u \rangle \langle \delta' v' \rangle + \langle \delta' u' v' \rangle. \quad (3.13)$$

Treći član poslednje jednačine je najmanji. Rezultat poređenja drugog člana sa prvim može da se napiše u obliku

$$\beta_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \cdot \frac{\langle u \rangle}{\langle v \rangle} \cdot \frac{\sqrt{\langle \delta'^2 \rangle} / \langle \delta \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / \langle v \rangle}, \quad (3.14)$$

gde su κ_1 i κ_2 koeficijenti korelacije za veličine (δ', v') odnosno (u', v') . Ako je $\kappa_1 \approx \kappa_2$ i treći činilac $\lesssim 1$, proizilazi da je β_1 dovoljno manje od jedinice i

$$\langle (\delta u)' v' \rangle \approx \langle \delta \rangle \langle u' v' \rangle. \quad (3.15)$$

Usrednjena desna strana jednačine (3.6) pretstavljena je preko srednje vrednosti komponente tenzora napona $N_{r\varphi}$. Na osnovu (2.46) i (3.9),

$$\begin{aligned} \langle N_{r\varphi} \rangle &= \langle \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \rangle = \\ &= \langle \eta \rangle \left\langle \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right\rangle + \langle \eta' \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)' \rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Procenimo odnos drugog i prvog člana na desnoj strani (3.16); osnovna pretpostavka je da postoji korelacija između pulsacionih veličina η' i $\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)'$ sa koeficijentom korelacije κ . Pošto je srednja kvadratna vrednost pulsacionog

člana u maloj zagradi reda $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / L$, a izraz $\langle \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \rangle$ ponaša se dominantno kao njegov glavni član $(\partial \langle v \rangle / \partial r)$, za procenu imamo

$$\beta_2 = \frac{\langle \eta' (\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r})' \rangle}{\langle \eta \rangle \langle \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \rangle} \approx K \frac{\sqrt{\langle \eta'^2 \rangle}}{\langle \eta \rangle} \cdot \frac{\sqrt{\langle v'^2 \rangle}}{L \partial \langle v \rangle / \partial r}. \quad (3.17)$$

Možemo zahtevati da $\sqrt{\langle v'^2 \rangle}$ bude reda $(L \partial \langle v \rangle / \partial r)$ a po definiciji $K \lesssim 1$. Osim toga, $\sqrt{\langle \eta'^2 \rangle} \ll \langle \eta \rangle$, što sve zajedno daje $\beta_2 \ll 1$ tj.

$$\langle N_{\eta\varphi} \rangle \approx \langle \eta \rangle \left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial r} - \frac{\langle v \rangle}{r} \right) \quad (3.18)$$

Pomoću (3.12), (3.15) i (3.18) rezultat usrednjavanja jednačine (3.6) može da se pretstavi u obliku

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \langle \epsilon u \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial r} &= \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left[\langle \eta \rangle \left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial r} - \frac{\langle v \rangle}{r} \right) - \langle \epsilon \rangle \langle u'v' \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Zbog načina kako se javlja turbulentni član $\langle u'v' \rangle$ u (3.19) a u cilju zatvaranja sistema jednačina, označimo

$$-\langle u'v' \rangle = \nu_T \left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial r} - \frac{\langle v \rangle}{r} \right). \quad (3.20)$$

Sa ovim rezultatom i sa $\langle \eta \rangle = \langle \epsilon \rangle \nu$, izraz u srednjoj zagradi u (3.19) može da se tretira kao puni iznos $\nu\varphi$ -komponente tenzora napona za turbulentno kretanje:

$$\langle W_{\eta\varphi} \rangle = \langle \epsilon \rangle (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial r} - \frac{\langle v \rangle}{r} \right). \quad (3.21)$$

Konačno, jednačina (3.19) dobija oblik

$$\langle \epsilon \rangle \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial t} + \langle \epsilon u \rangle \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \langle W_{r\varphi} \rangle] \quad (3.22)$$

i to je jednačina ravnoteže za srednju vrednost momenta rotacije.

c) Ravnoteža n -komponente brzine. Ako označimo

$$a = \epsilon \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{P}{2A} \frac{\partial A}{\partial r} \quad (3.23)$$

gde su pritisak P , γ i A dati u (2.44) i (2.36), jednačina ravnoteže (2.41) može da se napiše kao

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial r} = a + \epsilon \frac{v^2}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} + (\text{Div } N)_r \quad (3.24)$$

U jednačini (3.22) ne pojavljuje se prosto $\langle u \rangle$, već količina $\langle \epsilon u \rangle$. Ako se želi javno izračunavanje $\langle u \rangle$, potrebno je $\langle \epsilon u \rangle$ razviti i sistem diferencijalnih jednačina zatvoriti nekom formulom za pulsacione veličine iz razvoja $\langle \epsilon u \rangle$. Takav pristup otežava tretman turbulentnog kretanja i povećava broj neodređenih parametara modela. Druga mogućnost je izračunavanje celog člana $\langle \epsilon u \rangle$, što zahteva određene transformacije jednačine (3.24).

Posmatrajmo prvo levu stranu jednačine, \mathcal{L}_u . U prvom koraku, iskoristimo jednačinu neprekidnosti (3.4) i slično kao za (3.7) napišimo \mathcal{L}_u u obliku

$$\mathcal{L}_u = \frac{\partial \epsilon u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\epsilon u)u]. \quad (3.25)$$

Dalje, posmatrajmo (ϵu) kao $\langle \epsilon \rangle [(\epsilon u)/\langle \epsilon \rangle]$, razvijmo

izvod po vremenu, pretstavimo $\langle \epsilon u \rangle$ i $\langle \epsilon u \cdot u \rangle$ u oblik (3.3) i usrednjimo (3.25). Dobija se

$$\langle \dot{\mathcal{L}}_u \rangle = \langle \epsilon \rangle \frac{\partial \langle \epsilon u \rangle / \langle \epsilon \rangle}{\partial t} + \frac{\langle \epsilon u \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hbar \langle \epsilon u \rangle u}{\partial r}. \quad (3.26)$$

Ako iskoristimo jednačinu (3.5) i razvoj za $\langle (\epsilon u) u \rangle$ prema (3.9), (3.26) postaje

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathcal{L}}_u \rangle = & \langle \epsilon \rangle \frac{\partial \langle \epsilon u \rangle / \langle \epsilon \rangle}{\partial t} - \frac{\langle \epsilon u \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hbar \langle \epsilon u \rangle}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hbar \langle \epsilon u \rangle u}{\partial r} + \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hbar \langle (\epsilon u)' u' \rangle}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Razvijmo treći član na desnoj strani poslednje jednačine, računajući $(\partial \langle u \rangle / \partial r)$ iz razvoja za $\langle \epsilon u \rangle$ posle diferenciranja. Dobija se

$$\frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hbar \langle \epsilon u \rangle u}{\partial r} = \langle \epsilon u \rangle \frac{\partial \langle \epsilon u \rangle / \langle \epsilon \rangle}{\partial r} - \langle \epsilon u \rangle \frac{\partial \langle \epsilon u' \rangle / \langle \epsilon \rangle}{\partial r}. \quad (3.28)$$

Zamenom (3.28) u (3.26), za $\langle \dot{\mathcal{L}}_u \rangle$ imamo

$$\langle \dot{\mathcal{L}}_u \rangle = \langle \epsilon \rangle \frac{\partial \langle \epsilon u \rangle / \langle \epsilon \rangle}{\partial t} + \langle \epsilon u \rangle \frac{\partial \langle \epsilon u \rangle / \langle \epsilon \rangle}{\partial r} + \langle \mathcal{P} \rangle, \quad (3.29)$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hbar \langle (\epsilon u)' u' \rangle}{\partial r} - \frac{\langle \epsilon u \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hbar \langle \epsilon u \rangle}{\partial r} - \langle \epsilon u \rangle \frac{\partial \langle \epsilon u' \rangle / \langle \epsilon \rangle}{\partial r}. \quad (3.30)$$

Usrednjimo članove na desnoj strani osnovne jednačine (3.24). Za prvi i treći član direktno se dobija

$$\langle a \rangle - \frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial r} = \langle \epsilon \rangle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r} - \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{2A} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial r}. \quad (3.31)$$

U drugom članu na desnoj strani (3.24), pretstavimo ϵ i v u oblik (3.3), izvršimo množenje ϵv^2 i usrednjimo rezultat.

Dobija se

$$\langle \delta v^2 \rangle = \langle \delta \rangle \langle v \rangle^2 + \langle \delta \rangle \langle v'^2 \rangle + 2 \langle v \rangle \langle \delta' v' \rangle + \langle \delta' v'^2 \rangle. \quad (3.32)$$

Procenimo red veličine članova na desnoj strani poslednje jednačine: najmanji je poslednji član, odnos drugog i prvog je $\langle v'^2 \rangle / \langle v \rangle^2 \ll 1$ a odnos trećeg i prvog člana takođe je $\ll 1$, zbog zanemarivanja turbulentne difuzije mase $\langle \delta' v' \rangle$. Rezultat (3.32) svodi se efektivno na

$$\langle \delta v^2 \rangle \approx \langle \delta \rangle \langle v \rangle^2 \quad (3.33)$$

Za analizu ostaje poslednji član u (3.24) koji, na osnovu (2.45), je funkcija komponentata N_{rr} i $N_{\varphi\varphi}$ datih u (2.46). Usrednjimo prvo N_{rr} . Pišući $\eta = \delta v$ i

$$\delta \frac{\partial u}{\partial r} = \langle \delta \rangle \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} + \frac{\delta u}{\langle \delta \rangle} \frac{\partial \langle \delta \rangle}{\partial r} - u \frac{\partial \delta}{\partial r}, \quad (3.34)$$

dobija se

$$\langle N_{rr} \rangle = \langle \eta \rangle \left[\frac{4}{3} \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{r} \right] + \langle N_{\alpha} \rangle. \quad (3.35)$$

Na sličan način transformiše se i $N_{\varphi\varphi}$, tj.

$$\langle N_{\varphi\varphi} \rangle = \langle \eta \rangle \left[\frac{4}{3} \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{r} \right] + \langle N_{\beta} \rangle \quad (3.36)$$

gde su

$$\langle N_{\alpha} \rangle = \frac{4}{3} v \left[\frac{\langle \delta u \rangle}{\langle \delta \rangle} \frac{\partial \langle \delta \rangle}{\partial r} - \langle u \frac{\partial \delta}{\partial r} \rangle \right],$$

$$\langle N_{\beta} \rangle = \frac{2}{3} v \left[\langle u \frac{\partial \delta}{\partial r} \rangle - \frac{\langle \delta u \rangle}{\langle \delta \rangle} \frac{\partial \langle \delta \rangle}{\partial r} \right]. \quad (3.37)$$

Vidi se da su izrazi u (3.37) istog reda po veličini: procenimo npr. $\langle N'_\alpha \rangle$.

Iz jednačine kontinuiteta (3.4) sledi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} = - \frac{\mathcal{E}}{r} \frac{\partial ru}{\partial r}. \quad (3.38)$$

Zahtevajmo da je

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\langle \mathcal{E} \rangle}{dt} = - \frac{\langle \mathcal{E} \rangle}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} \quad (3.39)$$

odnosno,

$$u \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} = - \frac{\langle \mathcal{E} \rangle}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (3.40)$$

Iskoristimo još jednačinu (3.5) za $(\partial \langle \mathcal{E} \rangle / \partial t)$ i razvoj za $\langle \mathcal{E} u \rangle$ i $\langle u \partial \mathcal{E} / \partial r \rangle$ prema (3.9). Poгле izvesnih transformacija izraz za $\langle N'_\alpha \rangle$ može da se napiše kao

$$\langle N'_\alpha \rangle = \frac{4}{3} \frac{v}{r} \frac{\partial r \langle \mathcal{E}' u' \rangle}{\partial r} \left[\frac{\frac{\partial \langle \mathcal{E} \rangle}{\partial r} / \langle \mathcal{E} \rangle}{\frac{\partial r \langle \mathcal{E}' u' \rangle}{\partial r} / (r \langle \mathcal{E}' u' \rangle)} - 1 \right]. \quad (3.41)$$

Ako se brojilac i imenilac u prvom članu u srednjoj zagradi ponašaju približno na isti način,

$$\langle N'_\beta \rangle \sim \langle N'_\alpha \rangle \approx 0. \quad (3.42)$$

Konačno,

$$\langle (\text{Div } N)_r \rangle \approx \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r \langle N_{rr} \rangle}{\partial r} - \langle N_{\varphi\varphi} \rangle \right]. \quad (3.43)$$

Razmotrimo sada ostatak $\langle \mathcal{R} \rangle$ jednačine (3.24), dat u (3.30). Razvijmo $\langle (\mathcal{E} u)' u' \rangle$ po analogiji sa (3.13) i pri-

hvatimo procenu

$$\frac{\langle u \rangle \langle \delta' u' \rangle}{\langle \delta \rangle \langle u' u' \rangle} \approx K \frac{\langle u \rangle}{\langle v \rangle} \frac{\sqrt{\langle \delta'^2 \rangle} / \langle \delta \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / \langle v \rangle} \ll 1, \quad (3.44)$$

sa $K < 1$, $\langle u \rangle < \langle v \rangle$ i trećim faktorom ~ 1 (za dobru korelaciju (δ' , u'), može biti i $K \ll 1$). Sa tim rezultatom,

$$\langle R \rangle \approx \frac{1}{n} \frac{\partial n \langle \delta \rangle \langle u' u' \rangle}{\partial n} - \frac{\langle \delta u \rangle}{n \langle \delta \rangle} \frac{\partial n \langle \delta u \rangle}{\partial n} - \langle \delta u \rangle \frac{\partial \langle \delta' u' \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial n}, \quad (3.45)$$

pri čemu treći član na desnoj strani je

$$\frac{\langle \delta u \rangle}{\langle \delta \rangle} \frac{\partial \langle \delta' u' \rangle}{\partial n} \left[1 - \frac{\frac{\partial \langle \delta \rangle}{\partial n} / \langle \delta \rangle}{\frac{\partial \langle \delta' u' \rangle}{\partial n} / \langle \delta' u' \rangle} \right] \approx 0. \quad (3.46)$$

Ako razvijemo $\langle \delta u \rangle$, posle prostih transformacija, za odnos drugog i prvog člana u (3.45) imamo

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta u \rangle}{\langle \delta \rangle} \frac{\partial n \langle \delta u \rangle / \partial n}{\partial n \langle \delta \rangle \langle u' u' \rangle / \partial n} &\sim \frac{\langle u \rangle^2}{\langle u'^2 \rangle} + 2 \frac{\langle u \rangle \langle \delta' u' \rangle}{\langle \delta \rangle \langle u' u' \rangle} + \\ &+ \frac{\langle \delta' u' \rangle}{\langle \delta \rangle} \frac{\langle \delta' u' \rangle}{\langle \delta \rangle \langle u' u' \rangle}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Treći član na desnoj strani može da se napiše u oblik

$$\frac{\langle u \rangle \langle \delta' u' \rangle}{\langle \delta \rangle \langle u' u' \rangle} \cdot \frac{\langle \delta' u' \rangle}{\langle \delta \rangle \langle u \rangle} \ll 1, \quad (3.48)$$

jer je prvi faktor $\ll 1$ (j-na (3.44)) a drugi ~ 1 . Na osnovu (3.44) i drugi član u (3.47) je $\ll 1$, pa za procenu ostaje još prvi član. Zbog malosti brzine u , treba očekivati da bude $\langle u^2 \rangle \gtrsim \langle u'^2 \rangle$. Za $u = \langle u \rangle + u'$ imamo $\langle u^2 \rangle = \langle u \rangle^2 + \langle u'^2 \rangle$ odnosno,

$$\frac{\langle u \rangle^2}{\langle u'^2 \rangle} = \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle u'^2 \rangle} - 1 < 1. \quad (3.49)$$

Sa ovim procenama, iako dosta grubo, prihvatimo da je odnos (3.47) dovoljno manji od jedinice i da je

$$\langle R \rangle \approx \frac{1}{r} \frac{\partial r \langle \delta \rangle \langle u'u' \rangle}{\partial r}. \quad (3.50)$$

Po analogiji sa (3.20) i (3.21) označimo

$$-\langle u'u' \rangle = v_T \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{r} \right), \quad (3.51)$$

$$\langle W_{rr} \rangle = -\langle \delta \rangle (v + v_T) \langle u'u' \rangle / v_T. \quad (3.52)$$

Za slučaj $v \ll v_T$ svuda u omotaču,

$$\begin{aligned} \langle W_{rr} \rangle - \langle N_{\varphi\varphi} \rangle &= \langle \delta \rangle v_T \left\{ \frac{4}{3} \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{v}{v_T} \right] + \right. \\ &\left. - \frac{2}{3} \frac{\langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{r} \left[1 - \frac{v}{v_T} \right] \right\} \approx \langle W_{rr} \rangle \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ako iskoristimo (3.31), (3.33), (3.43), (3.50) - (3.52), za usrednjenu jednačinu (3.24) može da se napiše

$$\begin{aligned} \langle \delta \rangle \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial t} + \langle \delta u \rangle \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} &= \\ = \langle a \rangle - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial r} + \langle \delta \rangle \frac{\langle v \rangle^2}{r} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial r \langle W_{rr} \rangle}{\partial r} - \langle N_{\varphi\varphi} \rangle \right\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

što predstavlja jednačinu ravnoteže za veličinu $\langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle$.

d) Ravnoteža energije. Za nalizu pogodniji je oblik (2.14), koji u cilindričnom sistemu sa aksijalnom simetrijom (u disk-aproksimaciji omotača) a s obzirom na diskusiju difuznog člana (odjeljak 3.2.) daje

$$\epsilon \frac{\partial I_0}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial I_0}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} (u N_{rz} + v N_{r\varphi}) - q, \quad (3.55)$$

$$I_0 = \epsilon + \frac{P}{\epsilon} + \frac{u^2 + v^2}{2} + T(r). \quad (3.56)$$

Slično kao za prethodne dve jednačine ravnoteže, leva strana \mathcal{L}_0 jednačine (3.55) posle usrednjavanja može da se napiše kao

$$\langle \mathcal{L}_0 \rangle = \langle \epsilon \rangle \frac{\partial \langle I_0 \rangle}{\partial t} + \langle \epsilon u \rangle \frac{\partial \langle I_0 \rangle}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \langle (\epsilon u)' I_0' \rangle - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial t}. \quad (3.57)$$

Pri tome, korišćene su procene prihvaćene u jednačinama ravnoteže za u i v (odnosno ρ) i relacija $\langle P/\epsilon \rangle = \langle P \rangle / \langle \epsilon \rangle$ koja neposredno sledi iz rezultata $\langle P \rangle = (k/\mu^m_H) \langle \epsilon \rangle \langle T \rangle$ - što se lako može pokazati (to je omogućilo korišćenje aproksimacije $\langle \epsilon I_0 \rangle \approx \langle \epsilon \rangle \langle I_0 \rangle$).

Srednja vrednost u poslednjem članu (3.57) može da se razvije na već poznati način (j-na (3.13)):

$$\langle (\epsilon u)' I_0' \rangle = \langle \epsilon \rangle \langle u' I_0' \rangle + \langle u \rangle \langle \epsilon' I_0' \rangle + \langle \epsilon' u' I_0' \rangle. \quad (3.58)$$

Treći član je najmanji a odnos drugog i prvog je < 1 (na osnovu (3.44)), pri čemu pretpostavlja se približna jednakost koeficijenata korelacije $K_1(\epsilon', I_0')$ i $K_2(u', I_0')$. Tako, dosta grubo,

$$\langle (\epsilon u)' I_0' \rangle \approx \langle \epsilon \rangle \langle u' I_0' \rangle. \quad (3.59)$$

Osim toga ($\langle u \rangle / \langle v \rangle < 1$),

$$\langle u' I_0' \rangle \approx \langle u' I' \rangle + \langle v \rangle \langle u' v' \rangle. \quad (3.60)$$

Na desnoj strani (3.55) - u izrazu $\mathcal{D}_0 = u N_{rz} + v N_{rz}$, zamenimo N_{rz} i N_{rz} njihovim javnim izrazima, izvršimo uprednjavanje po analogiji sa (3.16) i iskoristimo rezultat $\sqrt{\langle \eta'^2 \rangle} / \langle \eta \rangle \ll 1$. Posle sređivanja članova imamo

$$\langle \mathcal{D}_0 \rangle \approx \langle \eta \rangle \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\langle v \rangle^2 + \frac{\langle u \rangle^2}{3}) + (\langle v'^2 \rangle + \frac{\langle u'^2 \rangle}{3}) \right] + \frac{1}{r} \left[(\langle v \rangle^2 + \frac{2}{3} \langle u \rangle^2) + (\langle v'^2 \rangle + \frac{2}{3} \langle u'^2 \rangle) \right] \right\}. \quad (3.61)$$

Odnos izraza u malim zagradama, u prvoj srednjoj zagradi je, reda $\langle v_i'^2 \rangle / \langle v \rangle^2 \ll 1$. Ista procena važi i za odnos odgovarajućih članova u drugoj srednjoj zagradi, pa se može smatrati da je $\langle \mathcal{D}_0 \rangle$ funkcija samo osnovnih srednjih veličina. Zbog $\langle u \rangle / \langle v \rangle < 1$ i članovi sa $\langle u \rangle^2$ su zanemarljivi po veličini. Tako, za (3.61) može da se prihvati

$$\langle \mathcal{D}_0 \rangle \approx \langle \eta \rangle \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \langle v \rangle^2}{\partial r} - \frac{1}{r} \langle v \rangle^2 \right]. \quad (3.62)$$

Pošto zračenje omotača razmatramo u najprostijem obliku, nećemo analizirati uticaj turbulencije na zračenje: $\langle q \rangle$ računaćemo iz (2.44), sa $\langle T \rangle$.

Koristeći rezultate (3.57), (3.60), (3.59) i (3.62), usrednjena jednačina energije (3.55) može da se napiše kao

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle \frac{\partial \langle I_0 \rangle}{\partial t} + \langle \delta u \rangle \frac{\partial \langle I_0 \rangle}{\partial r} - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial t} + \langle q_r \rangle = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \langle \theta \rangle \left[\langle v \rangle \left[v \left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial r} - \frac{\langle v \rangle}{r} \right) - \langle u'v' \rangle \right] - \langle u'I' \rangle \right] \right\}. \quad (3.63) \end{aligned}$$

Član u srednjoj zagradi na desnoj strani (pogledati (3.20))

i (3.21)) je $\langle W_{rz} \rangle / \langle \delta \rangle$. Ako uvedemo koeficijent turbulentnog provođenja λ_T , relacijom

$$-\langle u' \mathcal{I}' \rangle = \lambda_T \frac{\partial \langle \mathcal{I} \rangle}{\partial r} \quad (3.64)$$

i označimo

$$\langle q_r^* \rangle = \langle v \rangle \langle W_{rz} \rangle + \lambda_T \langle \delta \rangle \frac{\partial \langle \mathcal{I} \rangle}{\partial r}, \quad (3.65)$$

jednačina (3.63) postaje

$$\langle \delta \rangle \frac{\partial \langle \mathcal{I}_0 \rangle}{\partial t} + \langle \delta u \rangle \frac{\partial \langle \mathcal{I}_0 \rangle}{\partial r} = \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \langle q_r^* \rangle}{\partial r} - \langle q_r \rangle. \quad (3.66)$$

Procenimo drugi član na desnoj strani (3.65) u odnosu na prvi. Pišući za $\langle W_{rz} \rangle$ rezultat (3.21) imamo

$$\langle q_r^* \rangle / \langle \delta \rangle = \langle v \rangle \langle W_{rz} \rangle [1 + \beta] \quad (3.67)$$

gde je

$$\beta = \frac{\lambda_T}{r \langle v \rangle (\nu + \nu_T)} \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{I} \rangle / \partial r}{\partial \langle \omega \rangle / \partial r}, \quad \langle \omega \rangle = \langle v \rangle / r. \quad (3.68)$$

Sa jednačinom stanja idealnog gasa ($\Gamma = \frac{5}{3}$, $\langle \mathcal{I} \rangle = \frac{5}{2} \frac{k}{\mu m_H} \langle T \rangle$) i maksimalnom dužinom turbulentne ćelije L ($\langle \omega \rangle = \sqrt{kT / \mu m_H} / L$) imamo $[\partial \langle \mathcal{I} \rangle / \partial r] / [\partial \langle \omega \rangle / \partial r] \sim L \sqrt{kT / \mu m_H}$ odnosno,

$$\beta \sim \frac{1}{Pr} \cdot \frac{(L/r)^2}{1 + \nu/\nu_T} \quad (3.69)$$

($Pr = \nu_T / \lambda_T$ je turbulentni broj Prandtla). Vidi se, da za $Pr > L/r$, $\beta \ll 1$ - uticaj turbulentnog provođenja je mali (u formulaciji zadatka, toplotno provođenje ne razmatra se

javno).

Jednačina (3.66) može da se transformiše u oblik za direktno izračunavanje temperature. Zamenimo I_0 iz (3.56) i usrednjimo; diferencirajmo parcijalno $\langle P \rangle / \langle \delta \rangle$ i iskoristimo (3.5); od tako dobijene jednačine oduzmimo jednačinu ravnoteže (3.54) pomnoženu sa $\langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle$ i (3.22) pomnoženu sa $\langle v \rangle$. Dobija se

$$\langle \delta \rangle \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial t} + \langle \delta u \rangle \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial r} = - \frac{\langle P \rangle}{r} \frac{\partial r \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} + \langle S \rangle - \langle q \rangle \quad (3.70)$$

gde je viskozni član

$$\langle S \rangle = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial r \langle v \rangle \langle W_{\eta \varphi} \rangle}{\partial r} - \frac{\langle v \rangle}{r} \frac{\partial r^2 \langle W_{\eta \varphi} \rangle}{\partial r} - \frac{\langle \delta u \rangle}{\langle \delta \rangle} \frac{\partial r \langle W_{\eta r} \rangle}{\partial r} \right\}. \quad (3.71)$$

Procenimo uticaj pojedinih članova u $\langle S \rangle$, na količinu oslobođene toplotne energije. Ako iskoristimo razvoj

$$\frac{\langle \delta u \rangle}{\langle \delta \rangle} \frac{\partial r \langle W_{\eta r} \rangle}{\partial r} = \frac{\partial r [\langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle] \langle W_{\eta r} \rangle}{\partial r} - r \langle W_{\eta r} \rangle \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r},$$

prvi i treći član u (3.71) daju

$$r \langle W_{\eta r} \rangle \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} + \frac{\partial r \langle S_{\alpha} \rangle}{\partial r},$$

gde je

$$\langle S_{\alpha} \rangle = \langle \eta \rangle \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [\langle v \rangle^2 - \frac{4}{3} \langle u \rangle^2] - \frac{1}{r} [\langle v \rangle^2 - \frac{2}{3} \langle u \rangle^2] \right\} \approx \langle v \rangle \langle W_{\eta \varphi} \rangle.$$

Sa ovim rezultatom i razvijenim parcijalnim izvodima u (3.71) za $\langle S \rangle$ dobija se izraz sa kojim jednačina (3.70) postaje

$$\begin{aligned} \langle \delta \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle \delta u \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} + (\Gamma - 1) \langle \delta \rangle \langle T \rangle \frac{1}{r} \frac{\partial r \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} = \\ = (\Gamma - 1) \frac{\mu m_H}{r} \left\{ \langle W_{\eta r} \rangle \frac{\partial \langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle}{\partial r} + r \langle W_{\eta \varphi} \rangle \frac{\partial \langle v \rangle / r}{\partial r} - \langle \delta \rangle \langle Q \rangle \right\}. \quad (3.72) \end{aligned}$$

Lako se pokazuje da granični i početni uslovi (2.47) - (2.51) zadržavaju isti oblik posle usrednjavanja, sa $\langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle$ umesto u i sa srednjim vrednostima ostalih funkcija.

3.3. Bezdimenzioni oblik jednačina kretanja u Lagrangeevim koordinatama (m, t)

Izbor mase kao jedne nezavisno promenjlive - umesto radijusa r , nameće se iz same formulacije zadatka: ispituje se ponašanje omotača određene mase. Osim toga, granični uslovi realizuju se lakše i prirodnije u funkciji od mase.

Za prelaz sa Eulerovih koordinata (r, t) na Lagrangeeve (m, t_L) , potrebno je transformisati operatore izvoda po (r, t) . U tom cilju koristićemo izraz za masu u cilindričnim koordinatama i činjenicu $t = t_L$. U aksijalnoj simetriji

$$m = \int_{r_*}^r \delta(x, t) x dx ; t_L = t, \quad (3.73)$$

gde je r_* - radijus zvezde, $m (\equiv m/2\pi)$ - masa po jednom radijanu. Posmatrajući (r, t) kao funkcije od (m, t_L) imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_L} \frac{\partial t_L}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t_L} \frac{\partial t_L}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Veze (3.73) direktno daju

$$\frac{\partial t_L}{\partial t} = 1 ; \frac{\partial t_L}{\partial r} = 0 ; \frac{\partial m}{\partial r} = r\delta \quad (3.75)$$

i još, ako iskoristimo jednačinu neprekidnosti (3.4),

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \int_{r_*}^r \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \times dy. = - [ru(r,t)\epsilon(r,t) - r_*u(r_*,t)\epsilon(r_*,t)].$$

Za granični uslov (2.47), $M(r_*,t) = 0$, dobija se

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - ru\epsilon. \quad (3.76)$$

Izraz (3.74), pomoću (3.75) i (3.76), postaje

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= - ru\epsilon \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial t_L}, \\ \frac{\partial}{\partial r} &= r\epsilon \frac{\partial}{\partial m}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Operatori izvoda iz (3.77) primenjeni na srednju vrednost neke funkcije, posle pisanja ϵ i (ϵu) kao $f = \langle f \rangle + f'$ i usrednjavanja, ostaju u istom obliku sa $\langle \epsilon \rangle$ i $\langle \epsilon u \rangle$; iskoristimo ih i pretstavimo jednačine ravnoteže u Lagrangeevim koordinatama. Uvedimo najpre oznaku $\langle u \rangle \equiv \langle \epsilon u \rangle / \langle \epsilon \rangle$ i za svaku funkciju umesto $\langle f \rangle$ pišimo prosto f . Tada se prva jednačina u (3.77) transformiše u

$$\frac{\partial}{\partial t} = - r \langle \epsilon \rangle \langle u \rangle \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial t_L}$$

odnosno, pomoću usrednjene druge jednačine u (3.77):

$$\frac{\partial}{\partial t} = - u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t_L}. \quad (3.78)$$

Za $\partial/\partial t_L$ najčešće se koristi oznaka d/dt (potpuni, materijalni tj. hidrodinamički izvod po vremenu). Sa stanovišta Lagrangeevih promenljivih (m, t_L) , operator $\partial/\partial t_L$ pretstavlja

samo parcijalni izvod po vremenu. Na kraju, usvojimo $v \ll v_T$ svuda u omotaču. Sa ovim napomenama jednačine (3.5), (3.22), (3.54) i (3.72) dobijaju oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) = \frac{\partial u}{\partial m} \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial r^2 W_{r\varphi}}{\partial m} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A - r \frac{\partial P}{\partial m} + \frac{v^2}{r} + \frac{\partial r W_{r\varphi}}{\partial m} \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\Gamma - 1) \epsilon T \frac{\partial u}{\partial m} = (\Gamma - 1) \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{r \epsilon}{c} \left[W_{r\varphi} \frac{\partial u}{\partial m} + r W_{r\varphi} \frac{\partial v/r}{\partial m} \right] - D T^4 \right\} \quad (3.82)$$

Sistem treba dopuniti jednačinama za r i φ :

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u \quad ; \quad r \frac{\partial \varphi}{\partial t} = v, \quad (3.83)$$

pri čemu

$$W_{r\varphi} = \frac{2}{3} \eta \left(2 r \epsilon \frac{\partial u}{\partial m} - \frac{u}{r} \right) ; \quad W_{r\varphi} = \eta \left(r \epsilon \frac{\partial v}{\partial m} - \frac{v}{r} \right) ; \quad (3.84)$$

$$\eta = 6 \nu_T = 6 \nu_T L ; \quad \nu_T = d \nu_S (d \lesssim 1) ; \quad L = r \frac{\nu_S}{v} ; \quad v_T \gg v.$$

$$A = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r} - \frac{P}{2 \epsilon A} \frac{\partial A}{\partial r} ; \quad \mathcal{F} = - \frac{G M_*}{r} ; \quad A = - \frac{G M_*}{r^3} ; \quad \rho = r v ; \quad (3.85)$$

$$P = c \epsilon T ; \quad c = \frac{k}{\mu m_H} ; \quad D = 2 \epsilon_{SB} / c.$$

Sistem (3.79) - (3.85) jednačina turbulentnog kretanja rešava se sa graničnim uslovima

$$\mu = 0 ; \frac{\partial \omega}{\partial m} = 0 ; m = 0$$

$$2r^2 \epsilon \frac{\partial u}{\partial m} - \mu = 0 ; r^2 \epsilon \frac{\partial v}{\partial m} - v = 0 ; m = \mathcal{M} \quad (3.86)$$

i početnim uslovima

$$\mu = 0 ; v^2 = r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{P}{\epsilon} \frac{r}{2A} \frac{\partial A}{\partial r} + r^2 \frac{\partial P}{\partial m}$$

$$\epsilon = \epsilon_* \left(\frac{r_*}{r} \right)^k ; T = 0.5 T_* \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r} \right)^2} \right] \quad (3.87)$$

u oblasti $0 < m < \mathcal{M}$, $t > 0$; \mathcal{M} - masa omotača u jednom radijanu.

Ako se pod rešenjem podrazumeva i numerički rezultat, neophodno je odabrati sistem jedinica za merenje fizičkih veličina. Zadatak se pojednostavljuje tretiranjem jednačina u bezdimenzionim promenljivima. Postupak bezdimenzionisanja svodi se na pisanje svake promenjlive f u obliku $f = \tilde{f} f_0$, gde je \tilde{f} bezdimenziona funkcija a $f_0 = \text{const}$ jedinica za merenje f . Izbor svih f_0 može se izvršiti apriori što, u opštem slučaju, dovodi do pojavljivanja bezdimenzionih konstanti u jednačinama. Drugi način (koji ćemo koristiti) je izražavanje nekih f_0 pomoću drugih, unapred datih. Takav postupak omogućava brže izvršavanje programa na elektronskom računaru jer sistem nije opterećen dodatnim konstantama a osim toga, f_0 definišu se na osnovu strukture jednačina.

Pokazuje se da u skupu svih jedinica za merenje, samo četiri su nezavisne; neka su to

$$\epsilon_0, T_0, t_0, r_0. \quad (3.88)$$

Za merenje ostalih veličina usvojimo sledeće jedinice:

v_0 - za sve vrste brzina (u i v ; v_S, v_T); m_0 - za masu;

φ_0 - za azimutalni ugao; η_0 - za dinamički koeficijent viskoznosti; P_0 - za pritisak i komponente tenzora napona;

t_0 - za moment rotacije. Neka t_0 predstavlja 2π -deo perioda Keplerovog kružnog kretanja na rastojanju r_0 od centra zvezde ($r_0 \gg r_*$). Tada je

$$v_0 = \frac{r_0}{t_0} = \sqrt{\frac{GM_*}{r_0}}; \quad p_0 = r_0 v_0 = r_0^2/t_0; \quad \varphi_0 = 1; \quad (3.89)$$

$$m_0 = G_0 r_0^2; \quad \eta_0 = G_0 r_0 v_0 = G_0 r_0^2/t_0; \quad P_0 = G_0 v_0^2 = G_0 r_0^2/t_0^2;$$

Iskoristimo (3.88) i (3.89) i smenu $f = f_0 \tilde{f}$ za svaku promenjivu u jednačinama kretanja. Posle izvršenih transformacija, sistem (3.79) - (3.85), granični i početni uslovi (3.86) i (3.87) ostaju neizmenjeni, sa \tilde{f}_i, C_0, D_0 umesto f_i, C, D , pri čemu je

$$C_0 = \frac{\sqrt{KT_0/(Mm_H)}}{v_0}; \quad D_0 = D \frac{t_0 T_0^3}{G_0}. \quad (3.90)$$

$$\tilde{A} = -\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{3}{2} \frac{\tilde{P}}{\tilde{r} \tilde{G}};$$

$$\tilde{v}_S = C_0 \sqrt{\tilde{T}}; \quad \tilde{P} = C_0^2 \tilde{G} \tilde{T}. \quad (3.91)$$

Za definitivnu formulaciju konkretne varijante zadatka o evoluciji omotača određene mase M , oko zvezde sa poznatim r_*, M_*, G_* i T_* , potrebno je zadati brojne vrednosti za jedinice (3.88). Odaberimo standardnu Be zvezdu: neka je

$$\mu_* = 10\mu_\odot = 1.989 \cdot 10^{34} \text{ gr}; \quad R_* = 7R_\odot = 48.719 \cdot 10^{10} \text{ cm};$$

$$\mu = \delta \mu_* \quad (\delta \ll 1); \quad \epsilon_* = 200 \text{ gr/cm}^2; \quad T_* = 2 \cdot 10^4 \text{ K}, \quad (3.92)$$

$$R_0 = R_*; \quad t_0 = \sqrt{\frac{R_0^3}{G\mu_*}}; \quad \epsilon_0 = \epsilon_*; \quad T_0 = T_*;$$

(sa $\epsilon_0 = 200 \text{ gr/cm}^3$, iz (2.39) dobija se $\varrho = 0.67 \cdot 10^{-8} \text{ gr/cm}^3$ - vrednost koja može da se prihvati za oblast blizu površine zvezde). Sa ovim vrednostima, ostale jedinice (3.89) i konstante C_0 i D_0 su:

$$V_0 = 521.83 \cdot 10^5 \text{ cm/s}; \quad p_0 = 2.54 \cdot 10^{19} \text{ cm}^2/\text{s}; \quad m_0 = 47.47 \cdot 10^{24} \text{ gr.}$$

$$\eta_0 = 5.08 \cdot 10^{21} \text{ gr/s}; \quad P_0 = 54.46 \cdot 10^{16} \text{ dyn/cm} \quad (3.93)$$

$$C_0 = 3.48 \cdot 10^{-2}; \quad D_0 = 2.57 \cdot 10^2;$$

a u početnoj raspodeli gustine stavimo $k = 6$. Dopunska jednačina (3.83) zahteva početne uslove za ν i φ ; njih ćemo ispisati u Glavi 4. u toku realizacije metoda za numeričku integraciju.

GLAVA 4. NUMERIČKA INTEGRACIJA

U ovoj glavi razmatraće se problematika numeričke integracije dobijenog sistema nestacionarnih, nelinearnih, parcijalnih diferencijalnih jednačina sa zadanim graničnim i početnim uslovima. Daje se algoritam rešavanja metodom razlika, za jednačine problema u javnom i nejavnom obliku. U oba slučaja predložena šema je centrirana (ima dvostruku tačnost u prostoru i vremenu). Na kraju, ispituju se uslovi za stabilnost šeme i daje se kriterijum za konvergenciju rešenja.

4.1. Metod razlika

Za približno rešenje zadatka, kada je potrebno izvršiti integraciju sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina, koriste se razni metodi (metod karakteristika, metod krupnih čestica, varijacioni metod itd) - u zavisnost od prirode problema. Za široku klasu zadataka iz oblasti dinamike gasova, u najširoj upotrebi su metodi razlika. Sa stanovišta idejne konstrukcije, svaki metod može da ima potreban stepen univerzalnosti a u konkretnoj realizaciji ima samo određeni stepen primenljivosti. Unutar toga, algoritmu rešavanja treba posvetiti puno pažnje, u smislu optimizacije svih elemenata izračunavanja: konstrukcija numeričke ćelije, brzina prenošenja i preradivanja informacija itd. U vezi s tim treba izabrati i tip promenljivih.

U omotaču zvezde, u kasnijoj fazi razvoja, moguće je kretanje masa gasa u opštem smeru prema zvezdi i od zvezde; u toku vremena širenje nekih oblasti omotača može preći u sažimanje i obrnuto. U takvim uslovima, pogodan je tretman jednačina u sistemu koordinata Lagrangea - zadane tačke vezuju se za elemente mase i kreću se zajedno sa njima. Međutim, u složenijim zadacima, slobodna Lagrangeeva ćelija deformiše se u toku kretanja što može drastično da smanji tačnost aproksimacija.

U formulaciji našeg zadatka, masa omotača je stacionaran parametar. Prednost tretmana jednačina u Lagrangeevim koordinatama (m, t) , odeljak 3.3, u odnosu na tretman u Eulerovim koordinatama (odeljak 3.2) vidi se, pre svega, u jednostavnijem načinu njihovog zapisivanja. Osim toga, što je od praktičnog značaja, realizacija uslova na spoljašnjoj granici mnogo je jednostavnija. Na kraju, u promenljivima (m, t) - u slučaju kada se ne razmatraju svi procesi disipacije, za kontrolu ostaje samo front udarnog talasa (koji se premešta po masi) ali ne i linije (površni) kontaktnih prekidova koji se premeštaju u prostoru.

Zbog svega toga, realizaciju metoda razlika sprovedemo za jednačine problema u Lagrangeevim koordinatama (m, t) .

Idejna osnova svakog metoda razlika sastoji se u zameni, na neki način, neprekidne sredine diskretnom: oblast promene argumenta zamenjuje se skupom tačaka u toj oblasti (ćelija ili rešetka), nepoznate funkcije - tablicama a diferencijalne jednačine - algebarskim odnosima između vrednosti funkcija u susednim tačkama. Za jednodimenzioni slu-

čaj šema se konstruiše relativno prosto.

Neka nezavisno promenljiva, masa - m , uzima vrednosti iz intervala $[0, M]$, gde je M masa omotača. Posmatrani interval podelimo na $(I-1)$ elemenata Δm_i i formirajmo I -dimenzioni vektor $\{m_i\}$, kojim se određuje vrednost promenljive m samo u numerisanim tačkama ($1 \leq i \leq I$). Granice elemenata Δm_i nazivaju se čvorovi ćelije a element $\Delta m_i \equiv h_i = m_{i+1} - m_i$ je korak ćelije (interval po masi). Pri tome, $m_i = \sum_{k=1}^{i-1} h_{k}$; ($m_i = M$ za $i=I$). Na taj način, proizvoljnu funkciju $f(m)$ možemo aproksimirati vektorom $\{f_i\}$, definisanim nad skupom čvorova $\omega_h \equiv \{m_i\}$: $f_i = f(m_i)$. Ćelija šeme za metod razlika konstruiše se apriori: zadaje se dužina ćelije i broj intervala. Ako se funkcija $f(m)$ za neke vrednosti m menja brzo, odgovarajuće intervale h_i treba zgusnuti da bi se postigla bolja aproksimacija f_i . Suprotno tome - u oblasti sporih, monotonih promena $f(m)$, intervale h_i treba razrediti, čime se postiže veća brzina izračunavanja. Međutim, to se odnosi na slučaj kada postoje apriorne procene o ponašanju $f(m)$. U opštem slučaju, ako takvih procena nema ili, ako se realno postojeći pikovi rešenja $f(m)$ kreću duž ćelije u toku vremena - a zakon kretanja nije poznat, ćeliju treba podeliti ravnomerno na intervale dužine $h_i = h$, za svako i , pri čemu je $h = M / (I-1)$. Za konkretnu realizaciju metoda, zbog jasnijeg obeležavanja vrednosti nekih veličina, u definiciji ćelije uvedimo i vektor, čije komponente $\{m_{i+1/2}\}$ imaju polucelu numeraciju: $m_{i+1/2} = m_i + 0.5h$, $1 \leq i \leq I-1$.

Po analogiji sa ćelijom po masi, definišimo ćeliju po pro-

menjljivoj t : $\omega_\tau \equiv \{t^m\}$, $m=0,1,\dots$; $\tau_n = t^{n+1} - t^n$,
 gde je t^n n -ti vremenski sloj, τ_n - korak po vremenu, čija
 veličina zavisi od rednog broja sloja. Takođe, po analo-
 giji, definišimo "poluceli" vremenski sloj $t^{m+1/2} = t^m + 0.5\tau_n$.
 Proizvod ćelija ω_h i ω_τ daje prostorno-vremensku ćeliju

$$\omega = \omega_h \times \omega_\tau = \{(m_i, t^n), (m_{i+1/2}, t^{m+1/2})\}$$

Neka je stanje nekog sistema određeno vektorom $f(m,t)$,
 u oblast prostora $\mathcal{U}(m)$ uključujući i njegovu granicu \mathcal{T} .
 Neka u trenutku $t = 0$ poznajemo vrednosti $\vec{f} = \vec{f}^0$ u celoj
 oblasti \mathcal{U} i neka je još poznato \vec{f} u svim tačkama \mathcal{T} za sva-
 ko $t \geq 0$. Zadatak određivanja stanja sistema u oblast \mathcal{U} sa
 granicom \mathcal{T} , u bilo kom trenutku $t > 0$, sastoji se u nalaže-
 nju vrednosti $f(m,t)$ rešavanjem sistema

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \mathcal{L}(\vec{f}), \quad (4.1)$$

sa zadanim početnim i graničnim uslovima. U opštem slučaju
 \mathcal{L} je nelinearan operator i za naš sistem jednačina sa par-
 cijalnim izvodima pretstavljen je prostornim (po masi) ope-
 ratorima prvog i drugog izvoda. Realizacija određenog me-
 toda razlika za jednačinu (4.1) sastoji se u zameni \mathcal{L} iz
 oblasti \mathcal{U} (sa \mathcal{T}) nekim analogonom \mathcal{L}_h u oblast diskretne
 ćelije ω_h . Za tu transformaciju postoje nekoliko mogućnos-
 ti.

U klasičnoj analizi, izvod neke funkcije neprekidnog ar-
 gumenta određuje se na sledeći način:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{f(m + \Delta m, t) - f(m, t)}{\Delta m}. \quad (4.2)$$

Za funkciju diskretnog argumenta m_i , na fiksiranoj ćeliji ω_h , potrebno je koristiti konačne razlike, pa relacija (4.2) gubi smisao. Neka su m_{i-1} , m_i , m_{i+1} tri susedna čvora ćelije ω_h sa konstantnim korakom h . Za aproksimaciju izvoda (4.2) u čvoru m_i (na vremenskom sloju t^n) moguća su dva, formalno ravnopravna, odnosa:

$$\frac{\partial^+}{\partial m} = \frac{f(m_{i+1}, t^n) - f(m_i, t^n)}{m_{i+1} - m_i} = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{h} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^-}{\partial m} = \frac{f(m_i, t^n) - f(m_{i-1}, t^n)}{m_i - m_{i-1}} = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{h} \quad (4.4)$$

Izraz (4.3) je aproksimacija desnog izvoda, (4.4) - aproksimacija za levi izvod. Pomoću njih možemo napisati izraz za centralni (dvostrani) izvod:

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{f(m_{i+1}, t^n) - f(m_{i-1}, t^n)}{m_{i+1} - m_{i-1}} = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2h} = 0.5 \left(\frac{\partial^+}{\partial m} + \frac{\partial^-}{\partial m} \right). \quad (4.5)$$

Aproksimacija za drugi izvod određuje se na sledeći način.

Pošto je $\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial f}{\partial m} \right)$, to je

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} = \frac{1}{h} \left[\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{h} - \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{h} \right] = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{h^2}. \quad (4.6)$$

Lako je videti da se izraz (4.6) ne menja kada se desna razlika prvih izvoda zameni levom.

Prelaz sa \mathcal{L} na \mathcal{L}_h ne može da se izvrši potpuno tačno. Stepenn pogrešnosti može da se oceni izračunavanjem razlike (ε) između rezultata dejstva \mathcal{L} i \mathcal{L}_h na \vec{f} . Kaže se da je aproksimacija \mathcal{L}_h u tački m_i reda $n > 0$, ako važi

$$\varepsilon(m_i) = \mathcal{L}_h \vec{f}_h - (\mathcal{L} \vec{f})_h = \mathcal{O}(h^3). \quad (4.7)$$

Rezultat $(\mathcal{L} \vec{f})_h$ može se dobiti iz razvoja rešenja f u trenutku t^n , u Taylorov red u okolini m_i :

$$f(m_i \pm h, t^n) = f(m_i, t^n) \pm h \frac{\partial f}{\partial m} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} + \mathcal{O}(h^3). \quad (4.8)$$

Ako poslednju jednačinu zamenimo u (4.7) a za $\mathcal{L}_h \vec{f}_h$ iskoristimo redom (4.3) - (4.6), za pogrešnost aproksimacije u svakom konkretnom slučaju dobija se

$$\varepsilon_+ = f_{im}^+ - \frac{\partial f}{\partial m} \Big|_+ = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h)$$

$$\varepsilon_- = f_{im}^- - \frac{\partial f}{\partial m} \Big|_- = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h) \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_m = f_m - \frac{\partial f}{\partial m} = \mathcal{O}(h^2)$$

$$\varepsilon_{mm} = f_{mm} - \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} = \mathcal{O}(h^2)$$

Vidi se da je jednostrani izvod (levi i desni) dat u prvoj aproksimaciji a centralni izvod i drugi izvod dati su aproksimacijom drugog reda. Treba napomenuti da je prvi izvod u polucelim tačkama $m_{i+1/2}$ - centralni (što se lako vidi), pa je dat aproksimacijom drugog reda.

Razmotrimo sada mogućnosti za aproksimaciju vremenskog izvoda. U tom cilju vratimo se jednačini (4.1). Integracija u vremenskom koraku $\tau = t^{n+1} - t^n$ daje vezu između vektora stanja na dva susedna sloja:

$$\vec{f}^{m+1} = \vec{f}^m + \int_{t^m}^{t^{m+1}} \mathcal{L}(\vec{f}_*) dt \quad (4.10)$$

pri čemu stanje sistema na sloju t^m je poznato. Integral u poslednjoj jednačini ne može se direktno izračunati jer vrednosti $\vec{f}_* = \vec{f}(m, t_*)$, za $t^m \leq t_* \leq t^{m+1}$, nisu poznate. Za dovoljno mali interval τ , podintegralna funkcija može da se razvije u red Taylora, sa konačnim brojem članova, u okolini sloja t^m :

$$\mathcal{L}(\vec{f}_*) = \sum_{n=0}^{p-1} \left. \frac{\partial^n \mathcal{L}(\vec{f})}{\partial t^n} \right|_{t^m} \frac{(\Delta t_*)^n}{n!} + \mathcal{O}[(\Delta t_*)^p] \quad (4.11)$$

gde je $\Delta t_* = t_* - t^m$. Zamenom (4.11) u (4.10) i integracijom dobija se

$$\vec{f}^{m+1} = \vec{f}^m + \sum_{n=1}^p \left. \frac{\partial^{n-1} \mathcal{L}(\vec{f})}{\partial t^{n-1}} \right|_{t^m} \frac{\tau^n}{n!} + \mathcal{O}(\tau^{p+1}). \quad (4.12)$$

Algoritam za aproksimaciju članova trećeg i višeg reda u (4.12) vrlo je teško realizovati. Po analogiji sa prostornim izvodima, zadržaćemo samo članove do drugog reda

$$\vec{f}^{m+1} = \vec{f}^m + \mathcal{L}(\vec{f}^m)\tau + \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{f})}{\partial t} \right]_{t^m} \frac{\tau^2}{2} + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (4.13)$$

Osnovni zadatak u rešavanju jednačine (4.13) je aproksimacija izvoda u srednjoj zagradi. On se može izraziti pomoću vrednosti \vec{f} na prethodnom sloju t^{m-1} ili na sledećem t^{m+1} a može se iskoristiti i poluceli sloj $t^{m+1/2}$. Od izbora sloja zavisice red aproksimacije, varijanta metoda (javni ili nejavni oblik) i konkretni algoritam. Zamenom

$\mathcal{L}(\vec{f})$ iz (4.1), vodeći računa o navedenim mogućnostima za izbor vremenskog sloja, jednačina (4.13) postaje

$$\vec{f}(m_i, t^m \pm \tau) = \vec{f}(m_i, t^m) \pm \tau \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (4.14)$$

Lako se može pokazati, slično kao za prostorne izvode, da je vremenski izvod na polucelom sloju dat aproksimacijom drugog reda.

4.2. Rešavanje jednačina u nejavnom obliku

U prostorno-jednodimenzionim zadacima sa početnim i graničnim uslovima, gde se razmatraju procesi prenosa, potrebno je rešiti jednačine tipa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a_0 \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} + a_1 \frac{\partial f}{\partial m} + a_2 f + a_3, \quad a_0 > 0 \quad (4.15)$$

gde su u opštem slučaju, $a_i = a_i(m)$. Razmotrimo tipičan slučaj jednačine (4.15),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial m} \theta \frac{\partial f}{\partial m}, \quad \theta = \theta(m) > 0. \quad (4.16)$$

Metodom razlika aproksimirajmo (4.16), u tački (m_i, t^m) , iskoristivši šemu sa dvostrukom tačnošću (centrirana šema po prostornom i vremenskom delu). Za aproksimaciju drugog izvoda po vremenu (j-na (4.14)), iskoristimo poluceli sloj $t^{m+1/2}$. Dobija se

$$f_i^{m+1} = f_i^m + \tau \left[\frac{\partial}{\partial m} \theta \frac{\partial f}{\partial m} \right]_i^{m+1/2}. \quad (4.17)$$

Ako je vremenski interval τ dovoljno mali, tako da unutar

njega f se menja sporo, za nalaženje $f_i^{m+1/2}$ možemo iskoristiti linearnu interpolaciju

$$f_i^{m+1/2} = 0.5 (f_i^m + f_i^{m+1}). \quad (4.18)$$

Razvijmo izvod u (4.17) i zamenimo rezultat (4.18). Posle sređivanja članova, za aproksimaciju (4.16) dobija se oblik

$$d_i f_{i+1} + \beta_i f_i + \gamma_i f_{i-1} = S_i, \quad (4.19)$$

gde su vrednosti f_x na vremenskom sloju t^{m+1} a koeficijenti su

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{\tau}{2h^2} \Theta_{i+1/2} \\ \gamma_i &= \frac{\tau}{2h^2} \Theta_{i-1/2} \\ \beta_i &= -(1 + d_i + \gamma_i) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$S_i = - [d_i f_{i+1}^m + (1 - d_i - \gamma_i) f_i^m + \gamma_i f_{i-1}^m]$$

Jednačina (4.19) pretstavlja sistem linearnih algebarskih jednačina (Θ ne zavisi od f), za sve unutrašnje tačke prostorne ćelije ($1 < i < I$) sa zadanim graničnim uslovima u tačkama m_1 i m_I . Za nalaženje rešenja može se primeniti standardni metod rešavanja linearnih sistema. Međutim, sistem (4.19) može da sadrži veliki broj jednačina (npr. više od 1000) i treba ga rešavati na svakom vremenskom sloju. Matrični metod je neefektivan jer - i pored postojanja razradenih algoritama za inverziju matrice sistema, taj proces

zahteva veliku brzinu i memoriju računске mašine. U praksi koristi se i sledeća metodika: zadaje se neko rešenje $f(1)$ jednačine (4.19) koje zadovoljava levi granični uslov i neko rešenje $f(2)$ homogenog sistema ($\delta_i = 0$) koje takođe zadovoljava levi granični uslov; zatim, traži se linearna kombinacija $f(1)$ i $f(2)$ koja zadovoljava desni granični uslov. Osnovna teškoća sastoji se u postizanju visoke tačnosti rezultata. U opštem slučaju, $f(1)$ i $f(2)$ brzo rastu sa povećanjem numeracije čvora pa rezultat treba dobiti iz razlike velikih i po vrednosti bliskih brojeva.

Metodiku rešavanja koju ćemo ukratko opisati, i kasnije koristiti, u upotrebi je skoro 30 godina (Bruce, 1953). Iako je ideja univerzalna, realizacija zavisi ne samo od konkretne funkcije Θ , koja je u našem problemu i funkcija vremena, već i od vrste graničnih uslova. U literaturi (npr. Richtmyer, 1960; Samarski, 1971; Potter, 1973) metodološka demonstracija postupka izlaže se za određene granične uslove. Nije teško izvršiti uopštenje, pa ćemo to ovde uraditi.

Za široku klasu zadataka, opšti diferencijalni oblik graničnih uslova je

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial f}{\partial m} + b_1 f &= C_1, \quad m=0 \\ a_2 \frac{\partial f}{\partial m} + b_2 f &= C_2, \quad m=M \end{aligned} \quad (4.21)$$

gde su a_i, b_i, c_i - poznate veličine. Za aproksimaciju iz-

voda $\partial f / \partial m$ na levoj granici iskoristimo desni izvod a na desnoj granici - levi izvod. U formi razlika, posle nez-
natnih transformacija, za $a_1 \neq \hbar b_1$ i $a_2 \neq -\hbar b_2$, granični
uslovi se mogu dovesti na oblik

$$f_i = F_1 f_{i+1} + F_2, \quad i=1 \quad (4.22)$$

$$f_i = G_1 f_{i-1} + G_2, \quad i=I$$

gde su

$$F_1 = \frac{a_1}{a_1 - \hbar b_1} ; \quad F_2 = - \frac{\hbar c_1}{a_1 - \hbar b_1} ; \quad (4.23)$$

$$G_1 = \frac{a_2}{a_2 + \hbar b_2} ; \quad G_2 = \frac{\hbar c_2}{a_2 + \hbar b_2} ;$$

Zadatak je formulisan: traže se rešenja f_i jednačine
(4.19) sa graničnim uslovima (4.22). Potražimo skup veli-
čina x_i i y_i takvih, da važi

$$f_{i+1} = x_i f_i + y_i \quad (4.24)$$

za svaki element iz skupa rešenja. Na taj način, znajući re-
šenje u tački i , može se dobiti rešenje u tački $(i+1)$. Ako
je algoritam (4.24) neprotivrečan, on mora da važi za bilo
koju tačku i . Zamenimo li ga u osnovnu jednačinu (4.19),
dobija se

$$f_i = - \frac{\gamma_i}{\alpha_i x_i + \beta_i} f_{i-1} + \frac{\delta_i - \alpha_i y_i}{\alpha_i x_i + \beta_i} \quad (4.25)$$

odnosno, veza između rešenja u tačkama $i, i-1$, analogno
(4.24):

$$f_i = x_{i-1} f_{i-1} + y_{i-1}. \quad (4.26)$$

Granični uslovi (4.22) takođe su dati relacijama tog oblika, pa se može zaključiti da veza (4.24) važi za svaku tačku (i) i za proizvoljnu funkciju f . Iz (4.25) i (4.26) direktno slede rekurentne formule za izračunavanje x_{i-1}, y_{i-1} u unutrašnjim tačkama ćelije:

$$x_{i-1} = - \frac{\gamma_i}{\alpha_i x_i + \beta_i}; \quad y_{i-1} = \frac{\delta_i - \alpha_i \gamma_i}{\alpha_i x_i + \beta_i}. \quad (4.27)$$

Relacije (4.24), (4.27) i (4.22) omogućavaju dobijanje rešenja u svim tačkama prostorne ćelije, na datom vremenskom sloju, prema sledećoj proceduri:

a) Poređenjem rešenja (4.24) za tačku $i = I-1$ sa desnim graničnim uslovom (4.22) dobijaju se koeficijenti

$$x_{I-1} = G_1; \quad y_{I-1} = G_2. \quad (4.28)$$

b) Rešavaju se sistemi (4.27) u smeru $i = I-1, \dots, 2$ i redom dobijaju se koeficijenti

$$x_{I-2} = X(x_{I-1}), \quad y_{I-2} = Y(x_{I-1}, y_{I-1}), \dots, \quad x_1 = X(x_2), \quad y_1 = Y(x_2, y_2).$$

c) Rešavanjem sistema od dve jednačine: (4.24) za $i=1$ i levog graničnog uslova (4.22), dobija se vrednost nepoznate funkcije u tački $i=1$:

$$f_1 = \frac{F_1 y_1 + F_2}{1 - F_1 x_1}. \quad (4.29)$$

d) Ostale vrednosti f_i dobijaju se direktno iz (4.24), re-

štraničen u smjeru $i = 1, 2, \dots, M-1$.

Navedeni postupak primenjuje se na svakom vremenskom sloju. Granični uslovi obično se zadaju tako, što je poznata vrednost funkcije na granicama ($F_1 = G_1 = 0$) ili je njena izvod jednak nuli ($F_2 = G_2 = 0$; $F_1 = G_1 = 1$). Jednačina (4.22) daje širu mogućnost za granične uslove a relacije (4.23) i (4.29) iz navedene procedure omogućavaju rešenje zadatka sa takvim uslovima. Uz male izmene, postupak se može primeniti i na rešavanje nejavnih jednačina sa više promenljivih kao i na sistem nelinearnih jednačina.

4.3. Jednačine kretanja u formi metoda razlika

Potpun sistem jednačina turbulentnog kretanja dat je u odeljku 3.3. Jednačine ravnoteže mogu da se posmatraju iz dva dela: neviskozni i viskozni. Neviskozni deo sistema aproksimiramo u javnom a viskozne članove u nejavnom obliku. Naime, u uslovima kada difuzija u ćeliji može da bude velika, kriterijum stabilnosti rešenja zahteva vrlo mali korak u vremenu (odeljak 4.4), što smanjuje efektivnost metoda. Nejavne šeme lišene su tog nedostatka. U osnovnoj šemi koristimo poluceli interval po prostoru (sa numeracijom $i_j = i - 1/2$) i poluceli sloj po vremenu (numeracija: $n = n - 1/2$). Sistem jednačina (3.79) - (3.85) rešavamo u oblasti $\Omega = \{0 < m < M, t > 0\}$ na prostorno-vremenskoj ćeliji

$$\omega = \{(m_i, t^n), (m_{i+1/2}, t^n)\}, \quad h = \frac{M}{I-1}, \quad m_1 = 0, \quad m_I = M \quad (4.30)$$

$$m_{i+1} = m_i + h, \quad m_{i+1/2} = m_i + h/2, \quad m_i = m_{i-1} + 0.5h$$

$$t^{n+1} = t^n + \tau, \quad t^{n+1/2} = t^n + \tau/2, \quad t^n = t^{n-1} + 0.5\tau$$

$$i = 1, 2, \dots, I; \quad n = 1, 2, \dots$$

Za aproksimaciju sa centralnim naslikama korišćićemo rezultate odeljka (4.1) i (4.2). Naposmato funkcije podelimo u dve grupe: $\vec{q} = \{\rho, p, \psi\}$ i $\vec{q} = \{\xi, \tau, P, \eta\}$. Veličine iz prve grupe izračunavaćemo u tačkama numeracije $i, n = \vec{q}(m_i, t^n)$ a veličine iz druge grupe u tačkama numeracije $j, n = \vec{q}(m_j, t^n)$. Brzina u , računavaćemo u čvorovima prostorne ćelije, na polucelom vremenskom sloju $- u(m_i, t^{n+1/2})$. Ovakav način izračunavanja, za naš zadatak omogućava realizaciju šeme sa dvostrukom tačnošću.

Jednačina ravnoteže (3.81), za μ -komponentu brzine, sa W_{nr} i \mathcal{A} iz (3.84) i (3.85) u razvijenom obliku izgleda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{3}{2} c_0^2 \frac{T}{\rho} - \rho \frac{\partial(c_0^2 \delta T)}{\partial m} + \frac{v^2}{\rho} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial m} (\eta \xi r^2 \frac{\partial u}{\partial m}) - \frac{2}{3} \frac{\partial \eta u}{\partial m}. \quad (4.31)$$

Aproksimacija daje rezultat

$$u_i^{k+1} - u_i^k = \tau \mathcal{J}_i^m + \frac{4}{3} \tau \left[\frac{\partial}{\partial m} (\eta \xi r^2 \frac{\partial u}{\partial m}) \right]_i^m - \frac{2}{3} \tau \left[\frac{\partial}{\partial m} (\eta u) \right]_i^m, \quad (4.32)$$

$$\mathcal{J}_i^m = \left[-\frac{1}{\rho^2} + \frac{3}{2} c_0^2 \frac{T}{\rho} - \rho \frac{\partial(c_0^2 \delta T)}{\partial m} + \frac{v^2}{\rho} \right]_i^m. \quad (4.33)$$

Ako u^m izrazimo pomoću vrednosti na dva susedna sloja k i $k+1$, $u^m = 0.5(u^k + u^{k+1})$, i zamenimo u (4.32) dobija se

$$u_i^{k+1} - \frac{\tau}{3} F_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\tau}{3} F_i^k + \tau \mathcal{J}_i^m \quad (4.34)$$

gde je

$$F_i = 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial m} [(\eta \xi r^2)^m \frac{\partial u}{\partial m}] \right\}_i - \left\{ \frac{\partial}{\partial m} [\eta^m u] \right\}_i \quad (4.35)$$

Za aproksimaciju \bar{f}_i , posle odgovarajućeg grupisanja članova i korišćenja interpolovane vrednosti $u_j = 0.5(u_{i-1} + u_i)$ imamo

$$\begin{aligned} \bar{f}_i = & \frac{2}{h^2} \left\{ (\eta \delta r^2)_{i+1}^m - \frac{h}{4} \eta_{i+1}^m \right\} u_{i+1} + \\ & - \frac{2}{h^2} \left\{ (\eta \delta r^2)_i^m + (\eta \delta r^2)_{i+1}^m + \frac{h}{4} (\eta_{i+1}^m - \eta_i^m) \right\} u_i + \\ & + \frac{2}{h^2} \left\{ (\eta \delta r^2)_i^m + \frac{h}{4} \eta_i^m \right\} u_{i-1} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Zamenimo dobijeni izraz u (4.34); grupišimo članove uz iste vrednosti brzine i iskoristimo interpolaciju za r_j . Posle prostih transformacija, (4.34) može da se pretstavi u oblik identičan sa (4.19), za $\frac{1}{4} \equiv \alpha$:

$$A_i u_{i+1} + B_i u_i + C_i u_{i-1} = D_i \dots \quad (4.37)$$

Redni broj sloja za brzinu je $(K+1)$ a koeficijenti su:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\tau}{6h^2} \eta_{i+1} [\delta_{i+1} (r_i + r_{i+1})^2 - h] \\ C_i &= \frac{\tau}{6h^2} \eta_i [\delta_i (r_{i-1} + r_i)^2 - h] \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$B_i = - \left[1 + A_i + C_i + \frac{\tau}{3h} (\eta_{i+1} - \eta_i) \right]$$

$$D_i = - \left[A_i u_{i+1}^K + (B_i + 2) u_i^K + C_i u_{i-1}^K + \tau J_i^m \right]$$

Sve funkcije u izrazima za A_i , C_i , B_i su na vremenskom sloju m a član J_i^m dat je aproksimacijom izraza (4.33):

$$\dot{\gamma}_i = -\left(\frac{1}{r_i}\right)^2 + \frac{3}{4}c_0^2 \frac{T_i + T_{i+1}}{r_i} - c_0^2 r_i \frac{\epsilon_{i+1} T_{i+1} - \epsilon_i T_i}{h} + \frac{v_i^2}{r_i}. \quad (4.39)$$

Veličine u (4.39) su takođe poznate, uzete sa vremenskog sloja n .

Jednačina kontinuiteta (3.79), u aproksimaciji metodom razlike, direktno postaje

$$\left(\frac{1}{\epsilon}\right)_i^m - \left(\frac{1}{\epsilon}\right)_i^{m-1} = \tau \left[\frac{d(ru)}{dm} \right]_i^m. \quad (4.40)$$

Zapravo, (3.79) - kao i njen analogon (4.40), u Lagrange-ovim koordinatama (m, t) predstavlja zakon održanja zapremine jer po definiciji masa ostaje nepromenjena. Ako u (3.79) zamenimo $u = dr/dt$ i izvršimo integraciju po vremenu dobija se

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dm}, \quad (4.41)$$

tj. zakon održanja zapremine u diferencijalnom obliku. Aproksimacija (4.41) na prostornoj ćeliji direktno daje relaciju za izračunavanje gustine

$$\epsilon_i = \frac{2h}{r_i^2 - r_{i-1}^2}, \quad (4.42)$$

koja važi na svakom vremenskom sloju n . Oblik (4.42) je praktičniji za izračunavanje od oblika (4.40) u kome, na desnoj strani, treba koristiti interpolaciju sa R na sloju K što usporava izračunavanja i čini ih manje tačnim.

Jednačina (3.83) za promenu radijusa jednostavno se

aproksimirana u oblik

$$\pi_i^m = \pi_i^{m-1} + \tau \Delta_i^k. \quad (4.43)$$

Razmotrimo sada jednačinu ravnoteže za V -komponentu brzine, koja u formi (3.80) daje zakon promene momenta rotacije. Iskoristimo li (3.84) sa W_{rz} i (4.41) za gustinu, (3.80) može da se napiše kao

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\gamma \sigma r^2 \frac{\partial p}{\partial m} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial m} (\gamma p). \quad (4.44)$$

Njena aproksimacija je

$$p_i^m - p_i^{m-1} = \tau \left\{ \frac{\partial}{\partial m} \left[\gamma \sigma r^2 \frac{\partial p}{\partial m} \right] \right\}_i^k - 2\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial m} [\gamma p] \right\}_i^k. \quad (4.45)$$

Izrazi u srednjim zagradama predstavljani su funkcijama koje se izračunavaju na sloju celobrojne numeracije m ; u (4.45) možemo ih posmatrati kao interpolovane vrednosti na sloju t^k . Pri tome, interpolacija se odnosi na izraze u zagradama u celini i ne može se tretirati kao proizvod interpolacionih vrednosti pojedinačnih funkcija. Izvršivši tu transformaciju, za (4.45) se dobija oblik

$$p_i^m - U_i^m = p_i^{m-1} + U_i^{m-1}. \quad (4.46)$$

$$U_i^m = \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial m} \left[\gamma \sigma r^2 \frac{\partial p}{\partial m} \right] \right\}_i^k - \tau \left\{ \frac{\partial}{\partial m} [\gamma p] \right\}_i^k. \quad (4.47)$$

Ako u drugom članu izraza za U_i^m , p_i^m posmatramo kao rezultat interpolacije, aproksimacija za (4.47) je

$$\begin{aligned}
U_i = & \left\{ \frac{\tau}{2h^2} (\eta \epsilon r^2)_{j+1} - \frac{\tau}{2h} \eta_{j+1} \right\} p_{i+1} + \\
& - \left\{ \frac{\tau}{2h^2} [(\eta \epsilon r^2)_{j+1} + (\eta \epsilon r^2)_j] + \frac{\tau}{2h} [\eta_{j+1} - \eta_j] \right\} p_i + \\
& + \left\{ \frac{\tau}{2h^2} (\eta \epsilon r^2)_j + \frac{\tau}{2h} \eta_j \right\} p_{i-1} .
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Zamenimo poslednji rezultat u (4.46), stavimo $h_j = 0.5(h_{i-1} + h_i)$ i grupišimo članove uz iste vrednosti p_k . Za (4.46) dobija se oblik

$$a_i p_{i+1} + b_i p_i + c_i p_{i-1} = d_i . \tag{4.49}$$

Nepoznata vrednost uglovnog momenta u susednim tačkama $i+1, i, i-1$ data je na sloju t^m , koeficijenti a_i, b_i, c_i - na istom vremenskom sloju a d_i na poznatom sloju t^{m-1} :

$$\begin{aligned}
-a_i &= \frac{\tau}{8h^2} \eta_{j+1} [\epsilon_{j+1} (r_i + r_{i+1})^2 - 4h] \\
-c_i &= \frac{\tau}{8h^2} \eta_j [\epsilon_j (r_{i-1} + r_i)^2 + 4h]
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$b_i = - \left[1 + a_i + c_i + \frac{\tau}{h} (\eta_{j+1} - \eta_j) \right]$$

$$d_i = - \left[a_i p_{i+1} + (2 + b_i) p_i + c_i p_{i-1} \right]$$

Jednačina (3.83) za promenu ugla φ , u aproksimaciji direktno daje

$$\varphi_i^m = \varphi_i^{m-1} + \tau \left(\frac{\rho}{r^2} \right)_i^k , \tag{4.51}$$

gde je $(\rho/r^2)_i^k$ interpolovana vrednost između slojeva

$$t^m \pm t^{m-1},$$

Izvršimo sada aproksimaciju jednačine za ravnotežu energije. Pišući javni oblik izvoda $(\delta(v/r)/\delta m, v = \rho/r)$ i računajući W_{rr} i W_{rv} iz (3.84), posle izvesnih transformacija (3.82) postaje

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{\delta t} = & -(\Gamma-1)\sigma T \frac{\delta ru}{\delta m} + \frac{\Gamma-1}{C_0} \eta \left\{ \frac{2}{3} \left[2\sigma r^2 \frac{\delta u}{\delta m} - u \right] \frac{\delta u}{\delta m} + \right. \\ & \left. + \sigma \left[\frac{\delta \rho}{\delta m} - \frac{\rho}{r^2} \frac{\delta r^2}{\delta m} \right]^2 \right\} - D_0 (\Gamma-1) \frac{T^4}{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Prvi član na desnoj strani, posle zamene $\delta(ru)/\delta m$ iz (3.79), u aproksimaciji postaje

$$\frac{\Gamma-1}{2} \left[(\sigma T)_{\dot{z}}^{m-1} + (\sigma T)_{\dot{z}}^m \right] \left(\frac{1}{\sigma_{\dot{z}}} - \frac{1}{\sigma_{\dot{z}}^{m-1}} \right) / \tau.$$

Vrednost člana zračenja i viskoznog člana uzimaćemo sa poznatog vremenskog sloja, sa centriranim izvedom po masi.

Posle sređivanja, za aproksimaciju (4.52) dobija se oblik

$$T_{\dot{z}}^m = \frac{b}{a} T_{\dot{z}}^{m-1} + \tau c \left\{ \eta_{\dot{z}}^{m-1} (d_{rr} + d_{rv}) - d (T_{\dot{z}}^{m-1})^4 / \sigma_{\dot{z}}^{m-1} \right\} \quad (4.53)$$

gde su

$$a = 1 + 0.5(\Gamma-1) \left(1 - \frac{\sigma_{\dot{z}}^m}{\sigma_{\dot{z}}^{m-1}} \right);$$

$$b = 1 + 0.5(\Gamma-1) \left(1 - \frac{\sigma_{\dot{z}}^{m-1}}{\sigma_{\dot{z}}^m} \right); \quad (4.54)$$

$$c = \frac{\Gamma-1}{a C_0}; \quad d = C_0 D_0;$$

$$d_{nr} = \frac{1}{2} \left[\sigma_j (r_{i-1} + r_i)^2 (u_i - u_{i-1}) / h + \right. \\ \left. - (u_{i-1} + u_i) \right] (u_i - u_{i-1}) / h ; \dots$$

(4.55)

$$d_{np} = \sigma_j \left(\frac{r_i^2 + r_{i-1}^2}{2hr_i^2} p_i \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right)^2 \frac{p_{i-1}}{p_i} \right]^2,$$

pri čemu je d_{np} na poznatom sloju t^{n-1} a d_{nr} računa se pomoću veličina sa sloja t^{n-1} odnosno t^k .

Granični uslovi (3.86) lako se napišu u formi razlika. Zadržavajući oblik (4.22), posle izvesnih transformacija imamo:

$$t \geq 0, \quad i = 1; \\ f_i = F_{1f} f_{i+1} + F_{2f}, \quad f = u, p; \\ F_{1u} = F_{2u} = 0, \quad F_{1p} = r_i / r_{i+1}, \quad F_{2p} = 0,$$

(4.56)

za levu granicu i

$$t \geq 0, \quad i = I; \\ f_i = G_{1f} f_{i-1} + G_{2f}, \quad f = u, p; \\ G_{1u} = \left\{ 1 - 0.25 \left[1 - \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right] \right\}^{-1}, \quad G_{2u} = 0, \\ G_{1p} = \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right)^2, \quad G_{2p} = 0,$$

(4.57)

za desnu granicu.

Početni uslovi (3.87), formalno, dobijaju oblik

$$u_i = 0; \quad p_i = r_i \sqrt{r_i (r_i \frac{p_{i+1} - p_i}{h} - A_i)}; \quad A_i = \frac{1}{r_i} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{p}{\sigma} \right)_i - \frac{1}{r_i} \right];$$

$$\sigma_j = \sigma_* \left(\frac{r_*}{r_j} \right)^k; \quad T_j = 0.5 T_* \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r_j} \right)^2} \right]; \quad (4.58)$$

$$t = 0; \quad i = 2, \dots, I-1; \quad j = \frac{3}{2}, \dots, I-1/2;$$

Algoritmiska realizacija graničnih uslova (4.56) i (4.57) u trenutku $t = 0$ i početnih uslova (4.53), podrazumeva poznavanje vrednosti r_{i0} , za svako i , u početnom trenutku. Ako iskoristimo izraz za masu u cilindričnim koordinatama, za izračunavanje mase omotača M (po jednom radijumu) imamo

$$M = \int_{r_{i0}}^{r_0} \epsilon r dr, \quad r_0 = \beta r_{i0}, \quad \beta > 1, \quad (4.59)$$

gde je r_0 spoljašni radijus omotača u početnom trenutku. Iskoristimo li u (4.59) raspodelu za gustinu u početnom trenutku, jednačina (3.87),

$$M = \frac{\epsilon_0 r_{i0}^2}{k-2} (1 - \beta^{2-k}), \quad k > 2. \quad (4.60)$$

Na sličan način izračunajmo vrednost konstantnog intervala mase (h), u funkciji od r_{i0} :

$$h = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \epsilon r dr = \frac{\epsilon_0 r_{i-1}^2}{k-2} \cdot \frac{r_i^{k-2} - r_{i-1}^{k-2}}{(r_i r_{i-1})^{k-2}}. \quad (4.61)$$

Kako je $h = M/(k-1)$, iz poslednje dve jednačine dobija se, u bezdimenzionom obliku, rekurentna formula

$$r_i^{k-2} = \frac{r_{i-1}^{k-2}}{1 - \frac{\beta^{k-2} - 1}{(k-1)\beta^{k-2}} \cdot r_{i-1}^{k-2}}, \quad i = 2, \dots, I, \frac{1}{\beta} = 0. \quad (4.62)$$

Za centriranje vremenskog dela šeme potpunog sistema jednačina, potrebno je izračunati pomoćnu vrednost brzine

μ_{λ}^k ($k=1,2$). Rasvijmo μ_{λ}^k u okolini $\mu_{\lambda}^{(0)}$. U običnoj tačnosti,

$$\mu_{\lambda}^k = \mu_{\lambda}^{(0)} + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{\lambda}^{(0)}, \quad (4.63)$$

pri čemu se $\partial \mu / \partial t$ računa iz jednačine ravnoteže (3.81), sa centriranim prostornim izvodima.

Algoritam rešavanja zadatka je sledeći. Početni korak po vremenu je za $n=1$ (za $n=0$ poznate su sve funkcije iz početnih uslove). Izračuna se μ_{λ}^k iz (4.63) pa se redom rešavaju jednačine (4.43), (4.42), (4.49), (4.51), (4.53) i (4.37), sa odgovarajućim graničnim uslovima. Postupak se ponavlja za svako $n > 1$, s tim što se počinje sa jednačinom (4.43). Na taj način, već za $m=2$ postiže se potpuno centriranje po vremenu. Zapravo i za $m=1$ sve nepoznate funkcije računaju se prema šemi sa dvostrukom tačnošću po t , ali koriste se μ_{λ}^k u običnoj tačnosti.

4.4. Kriterijum stabilnosti rešenja

Svaka konkretna šema za metod razlika potrebno je da ispunjava nekoliko zahteva (korektnost aproksimacija, praktičnost, efektivnost). Ovde ćemo razmotriti uslove za stabilnost šeme, čije neispunjavanje onemogućava njenu primenu. Pod stabilnošću šeme obično se podrazumeva stabilnost rešenja u toku vremena odnosno, konvergencija. U teoriji stabilnosti (npr. Samarski, Gulin; 1973) dokazuje se da je šema potpuno stabilna, ako je stabilna u odnosu na početne uslove (leva strana sistema).

Neka je ξ^m rešenje na vremenskom sloju t^m , ($n \geq 1$) sa početnim uslovom ξ^0 . Ako je $\|\cdot\|$ neka norma u prostoru funkcije ξ , uslov stabilnosti u odnosu na početne uslove može jednostavno da se formuliše u obliku

$$\|\xi^m\| \leq N \|\xi^0\|, \quad (4.64)$$

gde je N neka konstanta za procenu stepena stabilnosti. Oblik konstante N može biti različit, što zavisi od konkretnih jednačina i tipa stabilnosti. U slučaju linearnih jednačina hiperboličkog tipa (kod nelinearnih jednačina dinamike gasova to je slučaj linearne aproksimacije bez disipativnih procesa), $N = 1$. Ako je uslov (4.64), sa $N = 1$, ispunjen a važi još i

$$\|\xi^{m+1}\| \leq \|\xi^m\|, \quad (4.65)$$

za svako $n \geq 1$, kaže se da je stabilnost u odnosu na početne uslove ravnomerna. Strogo ispitivanje stabilnosti šema za sistem nelinearnih jednačina vrlo je teško izvršiti (autoru nije poznato da je ispitana stabilnost za opšti slučaj) izuzev za neke specijalne slučajeve, pa i onda samo kvalitativno (npr. Godunov, 1976). Za sada, stabilnost nelinearnih šema ispituje se samo za slučaj akustičke - linearne aproksimacije.

Od metoda za ispitivanje stabilnosti najčešće se koriste spektralni i energetski. Stabilnost šeme realizovana u odeljku 4.3. ispitaćemo pomoću spektralnog metoda, koji se zasniva na mogućnosti pretstavljanja rešenja diferencijalne

jednačine (ili sistema jednačina) u oblik Fourierovog integrala.

Neka se traži rešenje $f(m, t)$ neke linearne diferencijalne jednačine prvog reda, sa zadanim početnim uslovom. Ako $f(m, t)$ ispunjava uslove da može biti predstavljena u oblik

$$f(m, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\psi, t) e^{i\psi m} d\psi, \quad (4.66)$$

zamenom u početnu jednačinu dobija se diferencijalna jednačina za $g(\psi, t)$ čije je rešenje oblika

$$g(\psi, t) = g(\psi, 0) e^{-iA\psi t} \quad (4.67)$$

Koeficijent A (u opštem slučaju $A \neq 1$) je iz osnovne diferencijalne jednačine a $g(\psi, 0)$ određuje se iz početnog uslova. Na taj način, rešenje (4.66) može da se pretstavi u oblik

$$f(m, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\psi, 0) e^{i\psi(m - At)} d\psi \quad (4.68)$$

odnosno, kao superpozicija Fourierovih harmonika ukazanog tipa. Analogija za slučaj diskretnih vrednosti $f_s^l = f(m_s, t^l)$ funkcije $f(m, t)$, za šemu iz odeljka 4.3, je očigledna. Harmonici iz (4.68) sada su tipa:

$$f_s^l = \hat{f}(\psi) q_\psi^l \xi^s ; \quad l = m, k ; \quad s = i, j ; \quad (4.69)$$

$$q_\psi = e^{i\psi(\psi)} ; \quad \xi = e^{i\psi} ; \quad (4.70)$$

i je imaginarna jedinica, Ψ - proizvoljan realan broj, $|\Psi| = 1$; $\hat{q}(\Psi)$ se određuje iz početnih uslova; $q(\Psi)$ tj. $q_r(\Psi)$ u opštem slučaju je kompleksna funkcija ($|q_r|$ može da ima proizvoljne vrednosti) koju treba odrediti tako, da (4.69) zadovoljava jednačinu za $\frac{d^2 \psi}{dt^2}$, iz šeme koja se ispituje. Ako je $|q_r| > 1$, harmonik (4.69) neograničeno raste u toku vremena i u superpoziciji čini da opšte rešenje bude nestabilno; i obrnuto - ako je za proizvoljno Ψ , $|q_r| \leq 1$, harmonik (4.69) je ograničen, pa ako to važi za svaki harmonik u superpoziciji, opšte rešenje konvergira u vremenu. Zapravo, ispitivanje stabilnosti svodi se na ispitivanje vrednosti $|q_r|$, pri čemu uslov $|q_r| > 1$ je dovoljan za nestabilnost a $|q_r| \leq 1$ je samo potreban uslov za stabilnost rešenja.

Ispitajmo stabilnost šeme data jednačinama (4.43), (4.42), (4.49), (4.51), (4.53) i (4.37). Hiperbolički deo sistema dat je u javnom obliku, viskozni deo aproksimiran je u javnom obliku. Ispitajmo prvo deo sistema koji odgovara jednačinama idealne dinamike gasova. Članovi centrifugalne i gravitacione sile u konačnom rezultatu ulaze kao konstanta pomnožena sa vremenskim korakom τ , pa nećemo ih razmatrati. Osim toga jednačine za n i Ψ mogu se smatrati dopunskim a gustina izračunava se samo pomoću n . Konačno, za ispitivanje stabilnosti hiperboličkog dela predložene šeme ostaju odgovarajući delovi jednačina ravnoteže za n i T . Ispitivanje ćemo vršiti za slučaj linearne aproksimacije polaznih jednačina u diferencijalnom obliku. Pri tome, jednostavnosti radi, jednačinu za temperaturu prepisimo u ob-

lik jednačine ravnoteže za pritisak, sa jednačinom stanja za idealan gas. Imamo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial P}{\partial m} \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\Gamma \epsilon P \frac{\partial u}{\partial m}$$

Svaku funkciju u (4.71) pretstavimo u oblik $f(m, t) = f_0 + \tilde{f}(m, t)$, gde je f_0 neporemećeni parametar gasa ($f_0 = \text{const}$) a za \tilde{f} važi $|\tilde{f}/f_0| \ll 1$. Zamenom u (4.71) i zanemarivanjem članova drugog i višeg reda (članovi sa \tilde{f}^n , $n \geq 2$), dobija se linearan sistem jednačina za varijacije \tilde{f} :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\kappa_0 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial m} \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\Gamma \epsilon_0 P_0 \kappa_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial m}$$

Javna šema za (4.72), centrirana po prostornom i vremenskom delu je

$$u_i^{k+1} - u_i^k = -\frac{\tau \kappa_0}{h} (P_{i+1}^m - P_i^m) \quad (4.73)$$

$$P_i^{m+1} - P_i^m = -\frac{\tau \kappa_0 a_0}{h} (u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1})$$

pri čemu je svuda, umesto \tilde{f} , pisano prosto f ; $a_0 = \epsilon_0 c_0$ je masena brzina zvuka, $c_0 = \sqrt{\Gamma P_0 / \epsilon_0}$ - adijabatska brzina zvuka. Lako se može pokazati da se sistem (4.73) dobija i direktno iz jednačina šeme (4.32) i (4.53), posle linearizacije. Pretstavimo varijacije \tilde{u}, \tilde{P} u oblik (4.69) i zamenimo u (4.73). Posle skraćivanja sa $q^k \xi^s$ i sređivanja

članova, dobija se homogeni sistem algebarskih jednačina za nepoznate \hat{u} , \hat{P} :

$$(q-1)\hat{u} + \frac{\tau r_0}{h} (\xi-1)\hat{P} = 0 \quad (4.74)$$

$$\frac{\tau r_0 a_0^2}{h} q \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \hat{u} + (q-1)\hat{P} = 0$$

Uslov da (4.74) ima netrivialna rešenja (determinanta sistema jednaka nuli) daje kvadratnu jednačinu

$$q^2 - 2\{1 - 2\gamma^2 \sin^2 \psi/2\}q + 1 = 0 \quad (4.75)$$

sa

$$\gamma = \tau r_0 a_0 / h, \quad (4.76)$$

čije rešenje je

$$q_{1,2} = 1 - 2\gamma \sin \psi/2 \left\{ \gamma \sin \psi/2 \pm \sqrt{\gamma^2 \sin^2 \psi/2 - 1} \right\}. \quad (4.77)$$

Za $\gamma = 1$, (4.77) može da se napiše kao

$$q_{1,2} = 1 - 2 \sin^2 \psi/2 \pm i \sin \psi, \quad (4.78)$$

pa je $|q| = |q_1 \cdot q_2| = 1$. Za $\gamma > 1$, postoji bar jedno ψ (npr. $\psi = \pi$) za koje je podkorena veličina u (4.77) realna i $|q_+| > 1$; za $\gamma < 1$ sledi i $|q| < 1$. Zaključujemo da je za stabilnost šeme (4.73), potreban uslov $|q| \leq 1$ ispunjen za $\gamma \leq 1$, pa (4.76) daje uslov za konvergenciju preko kriterijuma za izbor koraka integracije u vremenu:

$$\tau_1 \leq \frac{h}{r_0 a_0}. \quad (4.79)$$

Uslov (4.79) nije ništa drugo do uslov Couranta za stabilnost rešenja, zapisan u redukovanom cilindričnom sistemu - u Lagrangeovim koordinatama (m, t) .

Razmotrimo sada stabilnost šeme za disipativni deo sistema. Prema vrsti procesa i njega možemo razdvojiti na dva dela. Prvi deo čine viskozni članovi sistema, drugi deo - član zračenja u jednačini energije. Viskozni član u njoj je drugog reda u odnosu na član sa pritiskom (hiperbolički deo) pa u linearnoj aproksimaciji je zanemarljiv. Za razmatranje viskoznog dela sistema ostaje odgovarajući član u jednačini ravnoteže za radijalnu brzinu i cela jednačina za moment rotacije. Šema aproksimacija je analogna, isto važi i za analizu uslova stabilnosti.

Posmatrajmo glavni deo diferencijalne jednačine (3.80) tj, član sa drugim izvodom na desnoj strani. Posle linearizacije, pišući \bar{p} umesto \bar{q} , dobija se

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \epsilon_0 r_0^2 \eta_0 \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial p}{\partial m} \right), \quad \eta_0 = \epsilon_0 \gamma_T. \quad (4.80)$$

Ispitajmo stabilnost dveju šema: javne i nejavne (efektivna izračunavanja vršena su prema nejavnoj šemi). U javnoj aproksimaciji, šema sa centralnim prostornim izvodima za (4.80) je

$$p_i^{n+1} - p_i^n = \gamma (p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n), \quad (4.81)$$

$$\gamma = \frac{\tau \epsilon_0 r_0^2 \eta_0}{h^2}. \quad (4.82)$$

Zamenivši $p_i^l = \hat{p} q_r^l \zeta^s$ u (4.81), sa $\hat{p} = 1$ - zbog jednostavnosti, dobija se rešenje za q_r u obliku

$$q_r = 1 - 4\gamma \sin^2 \varphi/2. \quad (4.83)$$

Vidi se da je $|q_r| \leq 1$ za $0 < \gamma \leq 1/2$, pa iz (4.82) dobijamo kriterijum stabilnosti za šemu (4.81) u obliku

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\epsilon_0 k_0^2 \eta_0}. \quad (4.84)$$

Uslov (4.84), za manje intervale h (što je cilj kod svake šeme zbog povećanja tačnosti) a veliko η_0 (tj. ν_T , što je slučaj u ovom zadatku) u mnogome usporava proces konvergencije, zbog male vrednosti τ . Isti je zaključak i za analognu šemu viskoznoeg člana u jednačini za μ , (3.81). Razlika je samo u vrednosti za γ : $\gamma_\mu = (4/3)\gamma_p$, što daje nešto veće ograničenje za τ u odnosu na uslov (4.84). To je bio osnovni razlog zbog čega je predložena nejavna šema (odjeljak 4.3), lišena tog nedostatka.

Nejavna šema za jednačinu (4.80), koja se direktno dobija i iz šeme (4.49) posle linearizacije, je sledeća:

$$p_i^{n+1} - p_i^n = \gamma (p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}) + \gamma (p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n), \quad (4.85)$$

$$\gamma = \frac{\tau \epsilon_0 k_0^2 \eta_0}{2h^2}. \quad (4.86)$$

Odgovarajuća jednačina za q_r je

$$q_r = \frac{1 - 4\gamma \sin^2 \varphi/2}{1 + 4\gamma \sin^2 \varphi/2}, \quad (4.87)$$

odakle se vidi da je $|\eta| \leq 1$ za proizvoljno ψ i ξ - šema (4.85) je bezuslovno stabilna. Nije teško pokazati da isti zaključak o stabilnosti važi i za viskozni deo šeme u jednačini ravnoteže za radijalnu brzinu.

Ostaje još da se odredi karakteristično vreme hlađenja omotača zračenjem. U tom cilju iskoristimo jednačinu energije (3.82) u bezdimenzionom obliku, samo sa članom zračenja na desnoj strani. Sa veličinama iz (3.92) i (3.93), za vreme hlađenja dobija se

$$\tau_2 = \tau_0 \frac{\epsilon}{T^3}, \quad \tau_0 = \frac{1}{(F-1)D_0} = 0.58 \cdot 10^{-2}. \quad (4.88)$$

Vidimo da za stabilnost predložene šeme u celini, odgovorni su procesi zračenja i idealne dinamike gasova. Za obezbeđivanje konvergencije rešenja, korak po vremenu τ - na svakom sloju, treba birati tako da bude manji ili jednak manjoj vrednosti iz (4.79) i (4.88). Ako osnovne vrednosti n_0, a_0 , označimo sa n, a , potreban kriterijum za stabilnost rešenja je

$$\tau = \alpha_0 \min(\tau_1, \tau_2), \quad \alpha_0 \leq 1, \quad (4.89)$$

pri čemu se τ_1 i τ_2 izračunavaju u svakoj tački:

$$\tau_1 = \min\left(\frac{h}{n_i a_i}\right); \quad \tau_2 = \tau_0 \min\left(\frac{\epsilon_i}{T_i^3}\right). \quad (4.90)$$

Možemo zaključiti da predložena šema aproksimacija, sa kriterijumom (4.89), je stabilna u linearnoj aproksimaciji pa treba očekivati da će isto važiti i za nelinearan slučaj.

GLAVA 5. RAZVOJ OMOTAČA

U ovoj glavi daju se neki rezultati izračunavanja. Diskutuju se lokalne i integralne karakteristike omotača kao i njegova Z-struktura. Izvodi se zaključak o načinu razvoja omotača.

5.1. Konkretna varijanta razvoja

Jednačine turbulentnog kretanja za srednje veličine, izvedene u Gl.3, rešavane su metodom razlika. Numerička ćelija koja obuhvata masu omotača od $1.5 \times 10^{-7} M_{\odot}$ (u (3.92), $\delta = 1.5 \times 10^{-8}$) podeljena je bila na (I-1) ravnomernih intervala po masi ($I = 400$, $h = 0.611 \times 10^{-3}$) što za početnu vrednost spoljašnjeg radijusa omotača daje $r_p = 2.5 r_{*}$ (u (4.59), $\beta = 2.5$). Korišćena je šema data jednačinama (4.63), (4.43), (4.42), (4.49), (4.51), (4.53), (4.37), sa graničnim i početnim uslovima (4.56), (4.57) i (4.62).

U početku, vršena su paralelna izračunavanja za dve vrednosti α iz modela turbulencije (3.1): $\alpha = 0.1$ i $\alpha = 0.01$. Pokazalo se da $\alpha = 0.01$ daje vrlo spor razvoj turbulencije - što zahteva veliki utrošak mašinskog vremena. Naime, neka je karakteristično vreme za uspostavljanje turbulencije - τ_T , (v_S/v_T) reda veličine veće od vremena razvoja rotorske turbulencije ($\tau \sim L/v_T$). Za slučaj Keplerovog kružnog kretanja, iz (3.1) tada se dobija - u bezdimenzionom obliku, $\tau_T \approx \alpha^{-2.7} \sqrt{3}$. Vidi se, da za pulsacije bliske linearnim ($\alpha \ll 1$), $\tau_T \gg 1$ a za

visok stepen nelinearnosti ($\alpha \sim 1$), $\tau_T \sim \sqrt{R^3}$. Tako je, $\tau_T(\alpha = 0.01) = 10^2 \tau_T(\alpha = 0.1)$, pa su izračunavanja nastavljena samo za $\alpha = 0.1$.

Takođe, izvršena su testiranja za dve vrednosti K iz početne raspodele za gustinu: $K = 4$ i $K = 6$. Prva vrednost daje kompaktniji omotač u početnoj fazi razvoja a druga je realnija - s obzirom na veliku vrednost α , pa je usvojeno $K=6$.

Vremenski korak integracije biran je na osnovu kriterijuma (4.89) sa $\alpha_0 = 0.9$. Razvoj je numerički praćen u toku nešto više od dve periode Keplerovog kružnog kretanja na $r = \frac{1}{2} R$, što je zahtevalo integraciju na oko 6000 vremenskih slojeva. Pokazalo se da je, za svaki sloj, hidrodinamički korak (τ_A) kraći od karakterističnog vremena hlađenja omotača (τ_2).

5.2. Karakteristike u orbitalnoj ravni i Z-struktura

Pokušajmo da pratimo razvoj omotača preko promene njegovih lokalnih parametara. Na Sl.5.1. data je promena veličine $\langle \delta u \rangle / \langle \delta \rangle \equiv v_{r,c}$ u toku vremena; sa Π je označen početni period Keplerovog kružnog kretanja površinskog sloja centralne zvezde. Razvoj $v_{r,c}(t)$ za dati sloj mase, ukazuje na karakter radijalnog kretanja u različitim oblastima omotača. U blizini zvezde, oblast sa oko 20% ukupne mase omotača, sve vreme kreće se u smeru prema zvezdi (negativna $v_{r,c}$). Pri tome, brzina u toku vremena raste po apsolutnoj vrednosti, ubrzanje menja znak i posle $t = 0.70 \Pi$ cela oblast nastavlja kretanje sa neprekidnim smanjenjem $|v_{r,c}|$. Minimum br-

zine sve je dublji što je sloj udaljeniji od površine zvezde i pomera se po masi u toku vremena, u smeru od zvezde ($|v_r|_{max} \approx 7.3$ km/s). U kasnijim trenucima polje brzina u toj oblasti karakteriše se skoro zajedničkom vrednošću za sve slojeve, $|v_r| \approx 0.26$ km/s.

Sledeća, centralna, oblast omotača koja obuhvata oko 50% njegove ukupne mase, karakteriše se radijalnim kretanjem koje menja smer u toku vremena. U najranijim trenucima razvoja, do $t = 0.30 \square$, masa cele oblasti kreće se u smeru od zvezde, sa brzinom koja raste brže za niže slojeve (maksimalna brzina iznosi 5.5 km/s). Od tog trenutka kretanje se usporava i u toku sledećih $0.55 \square$ taj proces zahvata celu oblast. Za različite slojeve, brzina menja smer u raznim trenucima vremena ali od $t = 1.4 \square$ cela oblast nastavlja kretanje u smeru prema površini zvezde (najdublji minimumi v_r u celom omotaču, pripadaju slojevima ove oblasti). U trenucima kada kretanje u prvoj oblasti poprima stacionaran karakter, veći deo centralne oblasti karakteriše se kvaziperiodičnom promenom brzine. Ipak, u toku vremena, postoji tendencija ka smanjenju amplitude oscilovanja brzine a u kasnijim trenucima razvoja, niži slojevi iz ove oblasti karakterišu se usporenim kretanjem u smeru ka zvezdi, sa izlazom na stacionarno stanje.

Krajnja spoljašna oblast omotača, sa oko 30% njegove mase, takode se karakteriše oscilatornim kretanjem u radijalnom pravcu. U ranijoj etapi razvoja kretanje je prema zvezdi i u trenucima kada oblast neposredno uz fotosferu zvezde nastavlja kretanje u tom smeru sa sve većom $|v_r|$, periferni slojevi

omotača prolaze kroz lokalni minimum \mathcal{V}_r , usporavaju se i vrlo brzo prelaze na kretanje u smeru od zvezde: u promeni radijalne brzine dominiraju pozitivne vrednosti.

Razvoj dinamičkog stanja omotača prikazan je i na Sl.5.2; funkcija \mathcal{V}_r u zavisnost od mase slojeva omotača, data je za 12 trenutaka vremena. Radijalna brzina u oblast blizu površine zvezde je negativna a u slojevima prema periferiji ima pulsacioni karakter sa dominantnom pozitivnom vrednošću.

Promena $\mathcal{V}_r(m, t)$ ukazuje na kaskadni karakter sažimanja u omotaču (na S.5.2. mogu se razdvojiti dve faze razvoja \mathcal{V}_r). U ranijim trenucima relativno sažimanje ($\partial \mathcal{V}_r / \partial m < 0$) kao i širenje ($\partial \mathcal{V}_r / \partial m > 0$) je dosta regularno. Unutrašnji slojevi počinju da se sažimaju sa brzinom koja raste u toku vremena i taj proces zahvata sve veću masu omotača. Istovremeno, sa porastom maksimuma brzine sažimanja i njegovim pomeranjem po masi, raste i brzina širenja spoljašnih delova omotača čiji se maksimum pomera prema periferiji. Izvesno zasićenje nastupa za $t = 1.40 \square$ (oko $\eta = 9$) kada je relativnim sažimanjem zahvaćeno oko 0.3 mase omotača. Centralni deo, oblast sa oko 15% mase omotača, tada ima konstantnu brzinu $|\mathcal{V}_r| = 2.4 \text{ km/s}$ (tok $\mathcal{V}_r(m)$ za $\eta = 9$ dat je isprekidanom linijom). No, takvo stanje ne traje dugo. Maksimalna vrednost $|\mathcal{V}_r|$ ostaje konstantna u toku $\Delta t = 2.5 \approx 0.4 \square$ i trenutak $t = 11 \approx 1.80 \square$, možemo smatrati za kraj prve faze sažimanja. U toku poslednjih 0.4 \square u ovoj fazi, proces sažimanja nije lokalizovan po masi (skoro ujednačenim ritmom zahvata više slojeve) a promena \mathcal{V}_r u centralnim oblastima omotača postaje manje regularna.

Posle $t = 1.80 \square$ sažimanje ne prestaje: sa povećanom brzinom zahvata sve veći deo mase i za $t = 2.07 \square$ (kraj izračunavanja) postoji izraziti pik, $v_r = -13$ km/s. Radijalna brzina spoljašnjih slojeva oscilira između pozitivnih i negativnih vrednosti i taj tip nestabilnosti, posle prve faze sažimanja, pomera se po masi u smeru od površine zvezde. Relativno sažimanje kojim je zahvaćeno oko 15% mase omotača u njegovoj perifernoj oblasti pomera se, takođe, u smeru od zvezde. Lokalni minimum v_r , po apsolutnoj vrednosti, nešto je manji od glavnog minimuma za iste slojeve u najranijim trenucima razvoja i opada u toku vremena: za $v = 13$ iznosi samo 10% njegove vrednosti.

U toku izračunavanja, za svaki trenutak razvoja, izdvajani su ekstremumi radijalne brzine, nezavisno od toga kom sloju mase pripadaju; rezultat je dat na Sl.5.3. Generalno, oblast pozitivnih vrednosti pripada spoljašnjim slojevima omotača, negativne brzine odnose se na unutrašnje slojeve. Vidi se izvesna simetrija u polju ekstremnih vrednosti brzine. U toku razvoja, za svaki trenutak, postoje oblasti sa kretanjem prema zvezdi i od zvezde. Ubrzanje u jednom i drugom smeru, menja se na sličan način. Do trenutka $t = 0.80 \square$, ubrzano sažimanje sa $|v_r|_{\max}$ unutrašnje oblasti, praćeno je ubrzanim širenjem spoljašne oblasti omotača. U svakom trenutku, maksimum apsolutne vrednosti negativne brzine prevazilazi vrednost maksimuma brzine širenja. Posle $t = 0.80 \square$, kretanje u smeru od zvezde se usporava i teži ka stacionarnom režimu. Za to vreme, u toku $\Delta t = 0.4 \square$, kretanje prema zvezdi stabilizuje se,

sa konstantnom maksimalnom brzinom $|v_r| = 10.4 \text{ km/s}$, da bi posle $t = 1.75 \text{ } \mu\text{s}$ (u trenucima kada je širenje sa konstantnom maksimalnom brzinom $v_r = 4 \text{ km/s}$), sažimanje ušlo u drugu fazu, sa povećanom brzinom.

Na Sl.5.4. data je promena radijalne brzine spoljašne granice omotača. Na početku razvoja granica se kreće prema površini zvezde kao posledica početnih uslova, kada je u celom omotaču - uključujući i granice, $v_r = 0$. Tek od trenutka $t = 0.32 \text{ } \mu\text{s}$, kada je $v_r = -0.4 \text{ km/s}$ sažimanje se usporava i od $t = 0.47 \text{ } \mu\text{s}$ - kada v_r prolazi kroz nulu, kretanje menja smer. U toku sledećih $\Delta t = 1.28 \text{ } \mu\text{s}$, nema neočekivanih promena: kretanje granice nastavlja se u smeru od zvezde. Pri kraju prve faze sažimanja unutrašnjih slojeva, brzina granice blago opada a sa početkom druge faze, njeno ubrzanje teži nuli: od trenutka $t = 1.85 \text{ } \mu\text{s}$, granica se udaljava od zvezde konstantnom brzinom $v_r = 6.4 \text{ km/s}$.

Na S.5.5. data je vrednost ugla rotacije slojeva omotača, za nekoliko trenutaka razvoja (u početku, za sve slojeve, $\psi = 0$). Raspodela azimutalnog ugla, po masi i u toku vremena, daje sliku rotacije omotača oko zvezde. Promena u raspodeli $\psi(m)$ nije izražena do $t = 0.02 \text{ } \mu\text{s}$, izuzev za krajne spoljašne oblasti. Na Sl.5.6. data je situacija u trenutku $t = 2.07 \text{ } \mu\text{s}$.

Od ostalih parametara omotača razmotrimo promenu gustine i pritiska. Na Sl.5.7. zapaža se neznatno povećanje gustine u centralnoj oblasti omotača. Možemo reći da se sekundarni maksimum $\rho(m)$, razvučen po masi, održava u toku vremena. U odnosu na početnu raspodelu, gustina brže raste u oblast ne-

posredno iznad fotosfere zvezde i sporije opada na periferiji omotača. Rezultat je u saglasnosti sa promenom $V_{\text{rot}}(m, t)$. Na Sl.5.8. data je funkcija $\xi(t)$ za neke slojeve unutrašnje oblasti omotača a Sl.5.9. predstavlja promenu veličine $\xi(t) \sim P(m)$, u toku razvoja omotača. Kao i gustina, pritisak brzo opada u smeru od zvezde.

Omotač u Z-pravcu (po visini) je izotermičan, u hidrostatičkoj ravnoteži, pa Z-struktura je data raspodelom za gustinu iz (2.37) i skalom visine (2.38). U Tabl.5.1 date su vrednosti L/\mathcal{L} i $\rho(\mathcal{L}, 0)/\rho_0$ u zavisnost od položaja (po masi) pojedinih slojeva u omotaču. ($L_0 = \mathcal{L}_0$, $\rho_0 = 5_0/L_0 = 4.12 \times 10^{-10} \text{ gr/cm}^3$). Sa poznatim vrednostima L i $\rho(\mathcal{L}, 0)$ može se naći vrednost $\rho(\mathcal{L})$ za dato \mathcal{L} , iz (2.37). Iz tablice se vidi da, prema očekivanju, gustina brzo opada u smeru od zvezde, sa sekundarnim maksimumom u centralnoj oblasti omotača a da je $L \ll \mathcal{L}$ za svako \mathcal{L} (u modelu (3.1) zahtevano je samo $L < \mathcal{L}$).

5.3. Zaključak

Prostorna i vremenska struktura zvezdanih omotača, nesumnjivo je od velikog interesa. Rezultati numeričke realizacije procesa razvoja, ukazuju na neke osobine omotača.

Pre svega, omotač se tretira kao neprekidna sredina sa nestacionarnim turbulentnim kretanjem. Izračunavanja su vršena u toku dve periode rotacije centralne zvezde. Osnovni cilj zadatka je bio da se ispita ponašanje omotača u odsustvu mehanizama koji ga formiraju. Zato i nije bilo važno dali se radi o pojedinačnoj zvezdi sa omotačem ili o komponenti

dvojnog sistema. U tom smislu izabrani su početni i granični uslovi, pomoću kojih je faza razvoja razdvojena od faze formiranja. Naravno, radi se o uprošćenoj slici stvarnog stanja čiji razvoj zavisi i od predistorije omotača. U svakom slučaju, takav tretman ne bi trebalo da se proširi na duži vremenski interval.

Pokazalo se da je omotač (bar jedan deo) relativno stabilna konfiguracija. Razvoj je praćen sažimanjem unutrašnjih njegovih slojeva i dominantnim širenjem spoljašnjih. Proces sažimanja zahvata prvo slojeve nablizi zvezdi i prenosi se prema centralnoj oblasti omotača. Sažimanje (i širenje) je nelinearno, sa različitim intenzitetom u toku vremena, za različite delove omotača. U toku razvoja, postoji tendencija za isključivanje turbulentnog trenja, opet u smeru od zvezde. Na Sl.5.10 prikazan je tok uglovne brzine rotacije za dva trenutka: $t = 0$ i $t = 2.07\pi$. Uočava se preraspodela uglovne brzine i izlaz razvoja na stanje sa $\omega = \text{const}$. U toku vremena sve veća masa (u smeru od zvezde) teži ka ovom stanju i posle $\Delta t = 2\pi$, oko 30% ukupne mase omotača karakteriše se skoro konstantnom uglovnom brzinom. Iz (3.84) vidi se da je tada $W_{h\varphi} \approx 0$. Za istu oblast omotača, Sl.5.2, tada je i $\partial v_h / \partial m \approx 0$, $v_h \rightarrow 0$, što je u punoj saglasnosti sa $\omega = \text{const}$. Isključivanje mehanizma turbulentnog trenja u datoj oblasti dovodi do posledice $\mathcal{P}_\varphi = \text{const}$. Na taj način, za $\Delta t = 2\pi$, raspodela uglovnog momenta od približno Keplerovske ($\mathcal{P}_\varphi \sim r^{1/2}$) u početnom trenutku, prelazi u oblik $\mathcal{P}_\varphi \sim r^2$. Zapravo, $\omega = \text{const}$ je karakteristika rotacije krutog tela. Možemo da procenimo vreme, potrebno da kretanje poprimi takav karakter.

Neka je turbulencija jedini mehanizam koji vrši preraspodelu parametara diferencijalne rotacije, koja se vrši sa Keplerovskom uglovnom brzinom $\omega = \sqrt{GM_*/rc^3}$. Veličine koje treba razmatrati su: $\partial\omega/\partial r$, ϱ , η , τ_K , gde je τ_K karakteristično vreme za uspostavljanje rotacije krutog tela. Sastavimo dimenzionu matricu navedenih veličina i rešimo odgovarajuće jednačine koje iz nje slede. Lako se dobija rezultat

$$\tau_K = (\eta/\varrho)^{-1/3} (\partial\omega/\partial r)^{-2/3}$$

Kinematički turbulentni koeficijent viskoznosti ν_T , veličina (η/ϱ) , za omotače zvezda nije poznat. U teoriji turbulentnog kretanja ν_T se određuje iz uslova da Reynoldsov broj bude između 30 i 50. U omotaču, Re nije poznat, a pretpostavlja se da je $Re \gg 1$. Za izračunavanje τ_K iskoristimo ν_T iz (3.84). Ako još položaj sloja u omotaču računamo u jedinicama r_* ($r = \beta r_*$) i za prosečnu temperaturu prihvatimo $T = 10^4 K$, za τ_K dobija se vrednost

$$\tau_K = 10^{-2} \frac{\beta^{7/6}}{\alpha^{1/3}} \text{ god.}$$

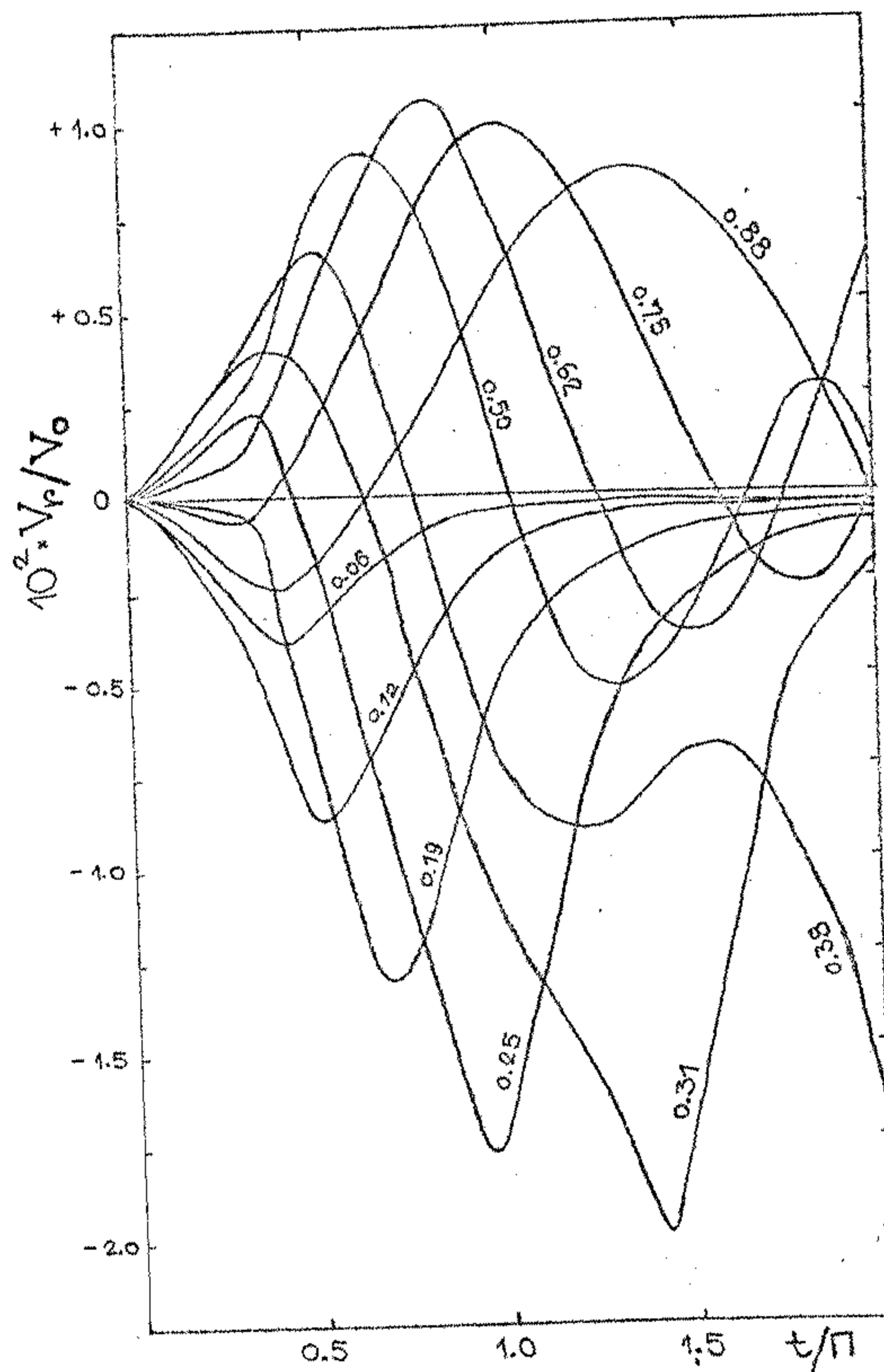
Poslednji rezultat ukazuje na dve činjenice:

1. Konstantna uglovna brzina uspostavlja se prvo u oblast omotača blizu površine zvezde i za sloj na rastojanju r od centra zvezde $\tau_K \sim r^{7/6}$.
2. Stepennelinearnosti pulsacija takođe utiče na brzinu dostizanja stanja sa $\omega = \text{const}$. Prema očekivanju, odeljak 5.1., veće α daje brži razvoj. Najniži slojevi omotača, za $\alpha = 0.1$, dostižu stanje sa $\omega = \text{const}$ posle $\Delta t = 11 \Pi$, od trenutka uključenja mehanizma turbulencije. Naši rezultati

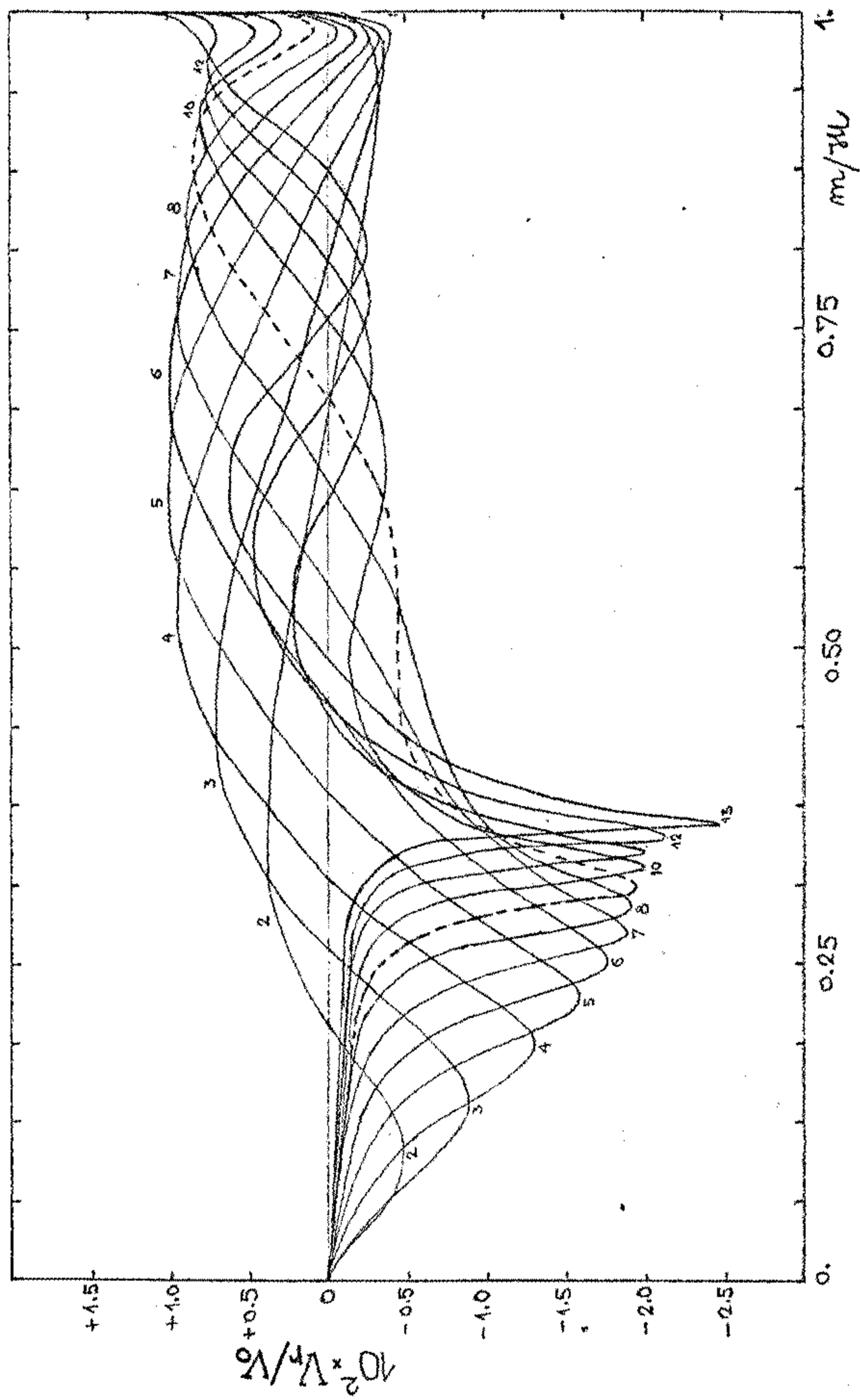
pokazuju da će stanje sa rotacijom krutog tela za niže slojeve, iako je konvergencija posle $t = 2\pi$ izuzetno spora, biti dostignuto mnogo brže. Razlog za to pre svega je grubna aproksimacija $\forall_T \gg \forall$ sa kojom su vršena izračunavanja. Najmanje uslova za njeno ispunjavanje ima u blizini zvezde a usvojena je za ceo omotač da bi se ubrzala konvergencija rešenja.

O turbulentnim osobinama omotača ne može se govoriti samo na osnovu predloženog modela akustičke turbulencije i dobijenih rezultata. Za to, potrebno je razmatrati jednačinu energije turbulentnih pulsacija, da bi se - između ostalog, mogao analizirati teorijski spektar turbulentne energije.

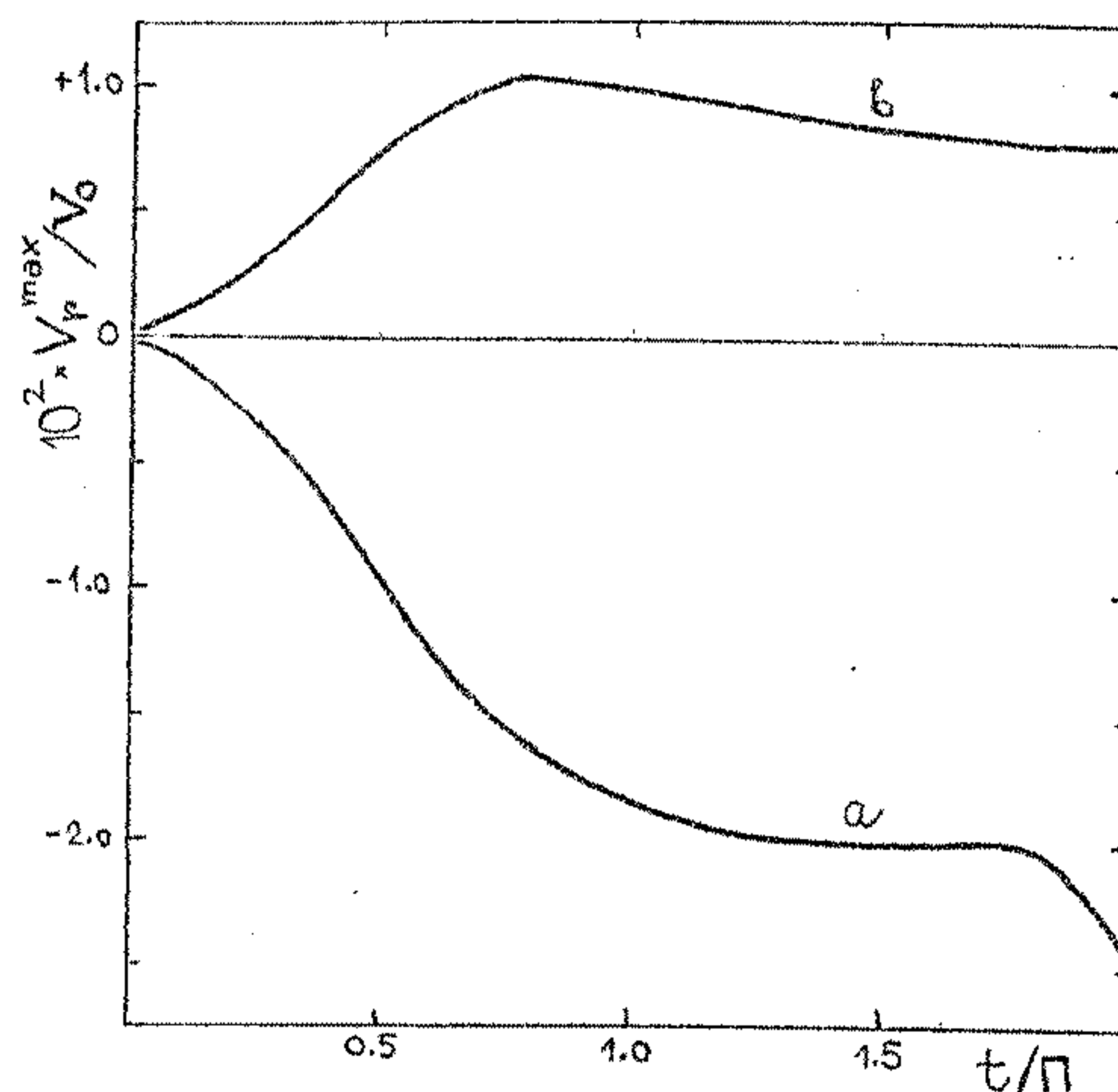
Dinamika omotača bila je praćena sa najjednostavnijim izrazom za član zračenja. Realno, u toku vremena, u blizini zvezde stvaraju se uslovi za LFDR ali na periferiji omotača neće biti postignuti. Iz tih razloga nismo hteli da analiziramo zračenje omotača. Osim toga, nije bilo razmatrano zračenje centralne zvezde čiji pritisak može da izmeni vremensku skalu sažimanja. Pored nabrojanih elemenata za širu formulaciju zadatka, osnovni cilj budućih teorijskih ispitivanja zvezdanih omotača trebalo bi da bude postavljanje i realizacija kinetičkog modela procesa u omotaču. Za početak, jednodimenzioni, nestacionaran tretman turbulencije u omotaču, omogućava da se dobijeni rezultati koriste kao početni u široj formulaciji problema.



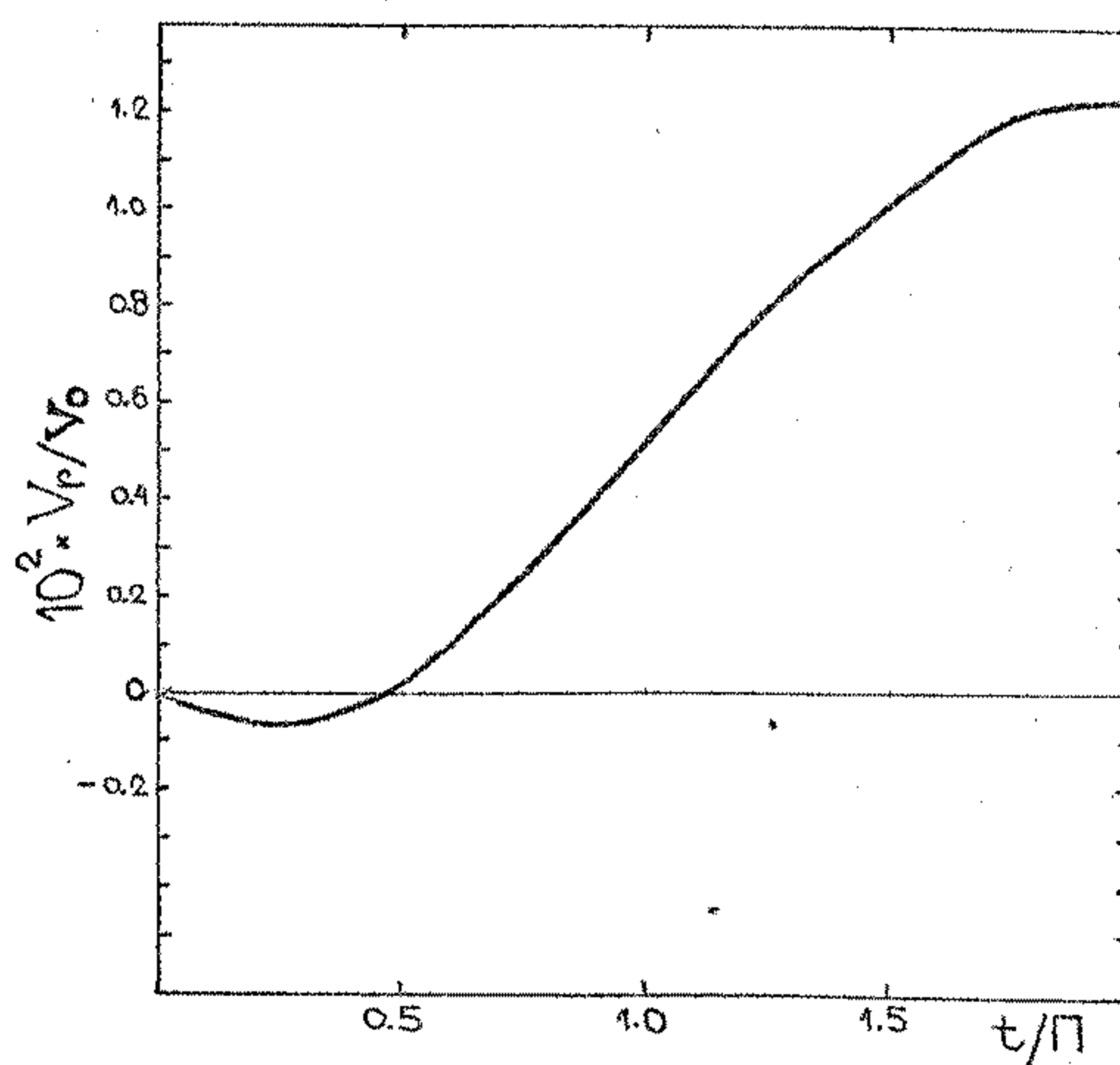
Sl.5.1. $V_r(t)$ za nekoliko slojeva. Brojem je označena relativna masena koordinata sloja ($m/8L$).



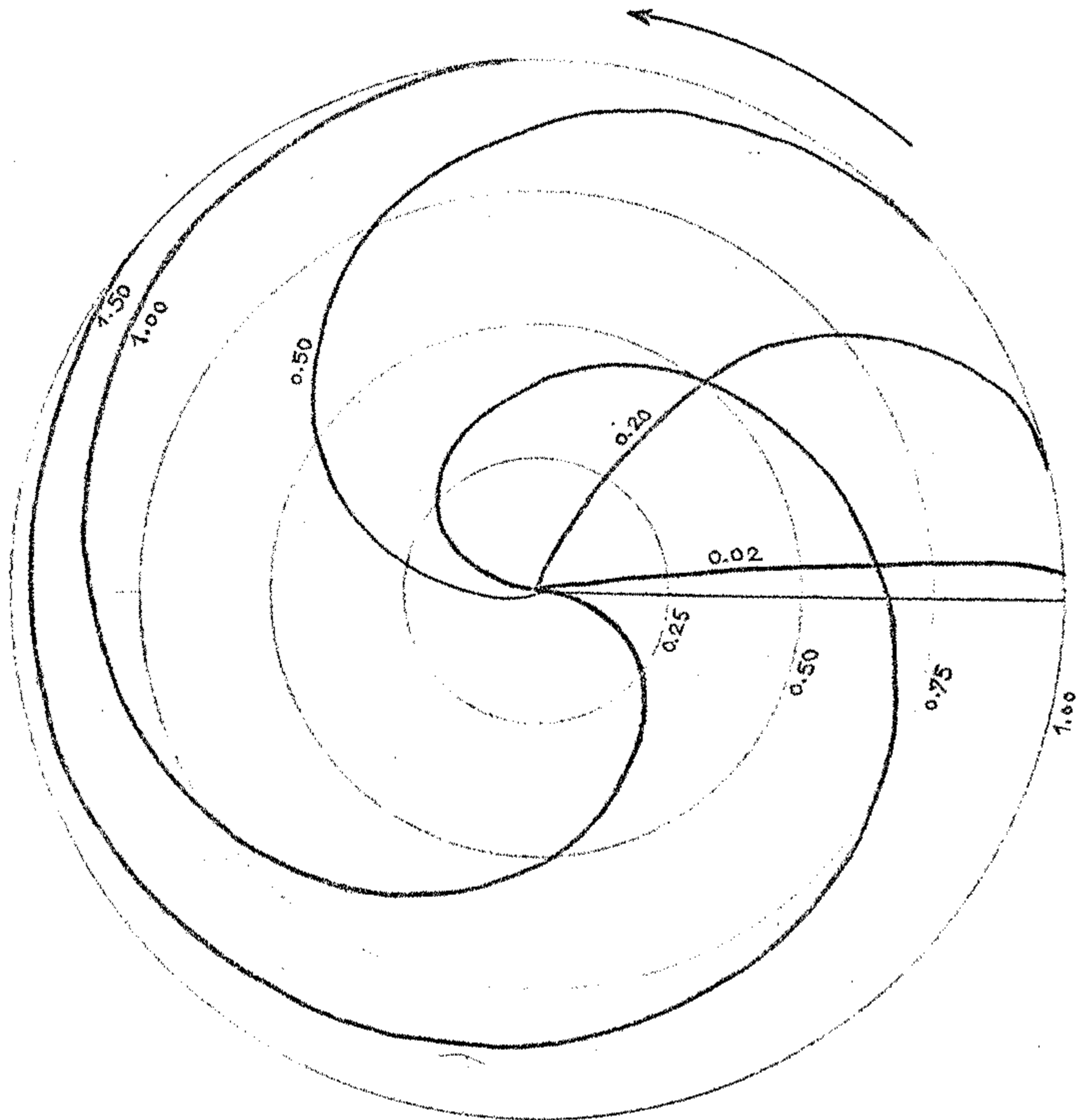
Sl.5.2. Razvoj $\nu_n(m)$. Numeracija $n = 2 - 13$ odnosi se na relativne trenutke ($n = 2\pi \frac{r}{\lambda}$).



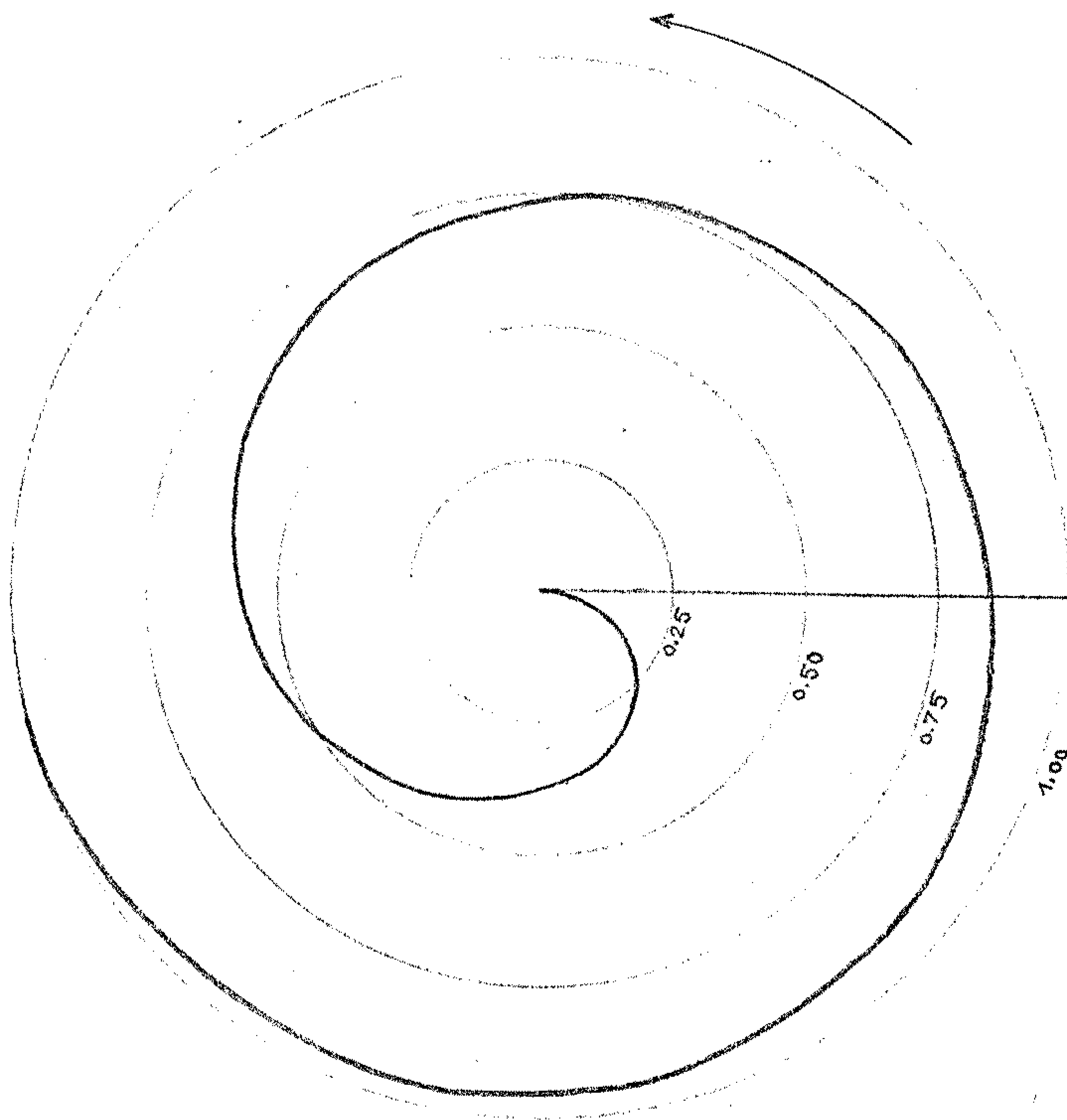
Sl.5.3. Razvoj ekstremuma radijalne brzine, u omotaču bez spoljašnje granice: a) kretanje prema zvezdi; b) kretanje od zvezde.



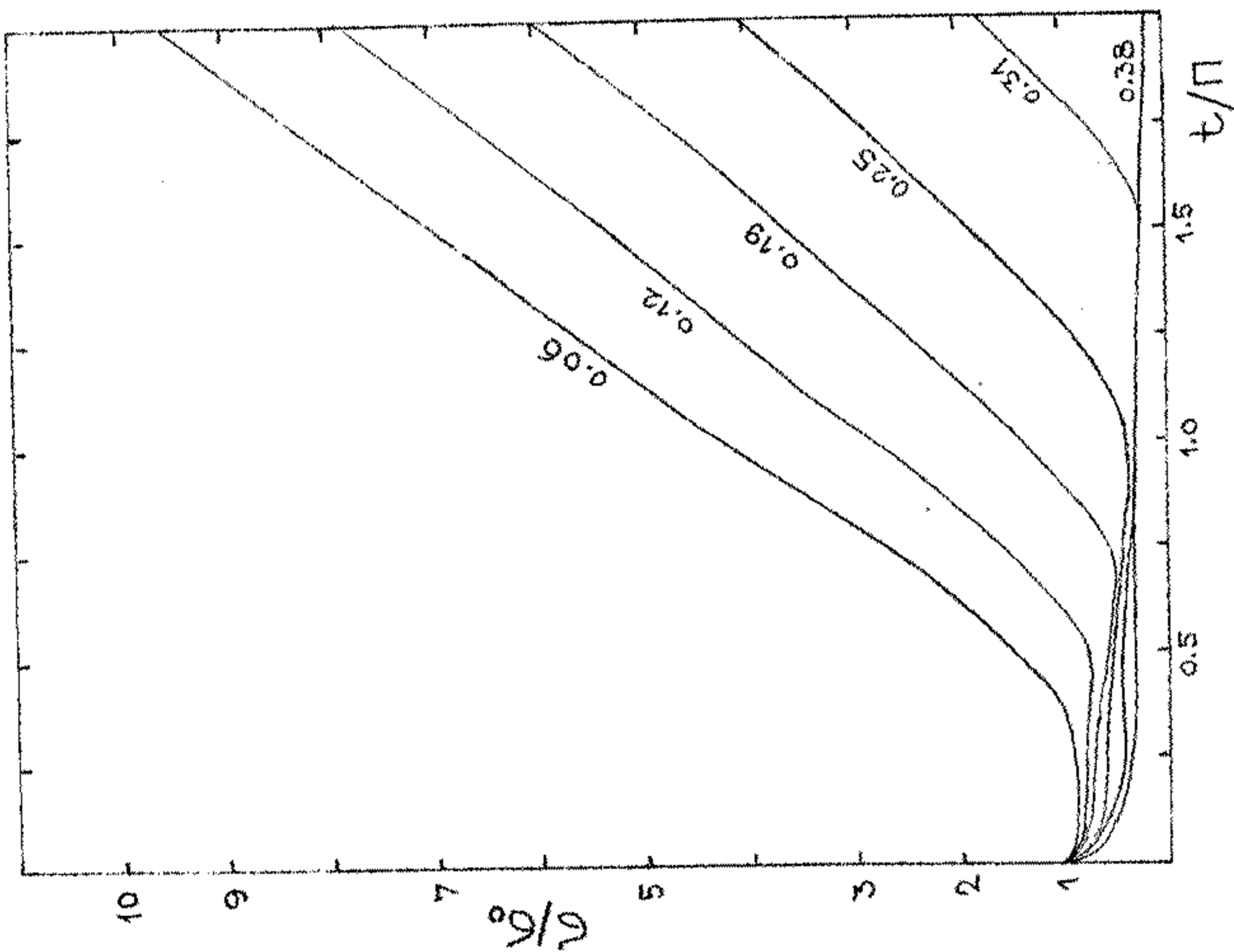
Sl.5.4. Radijalno kretanje spoljašnje granice omotača.



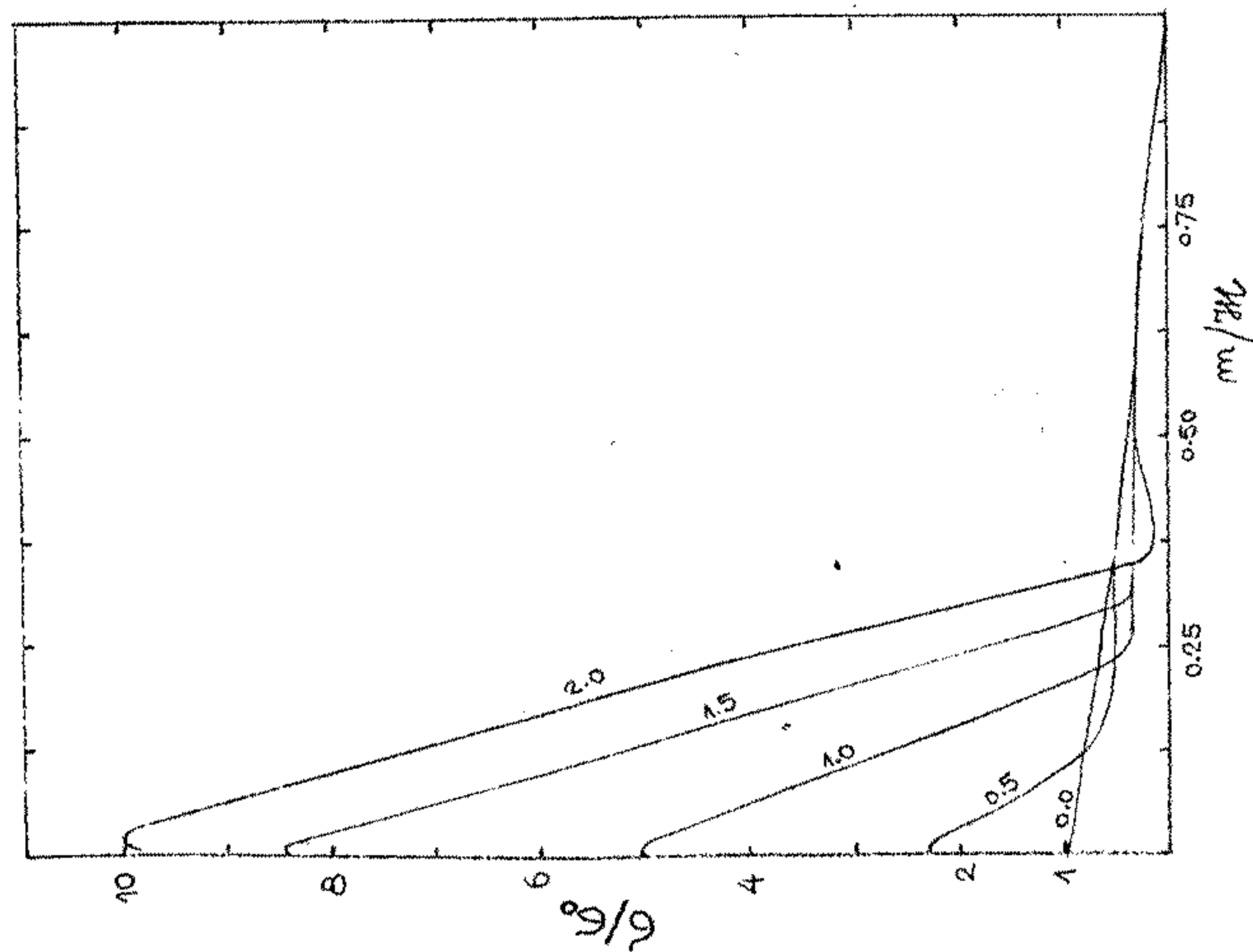
Sl.5.5. Razvoj $\Psi(m)$; $n = t/\pi$;
strelica ukazuje na smer rotacije.



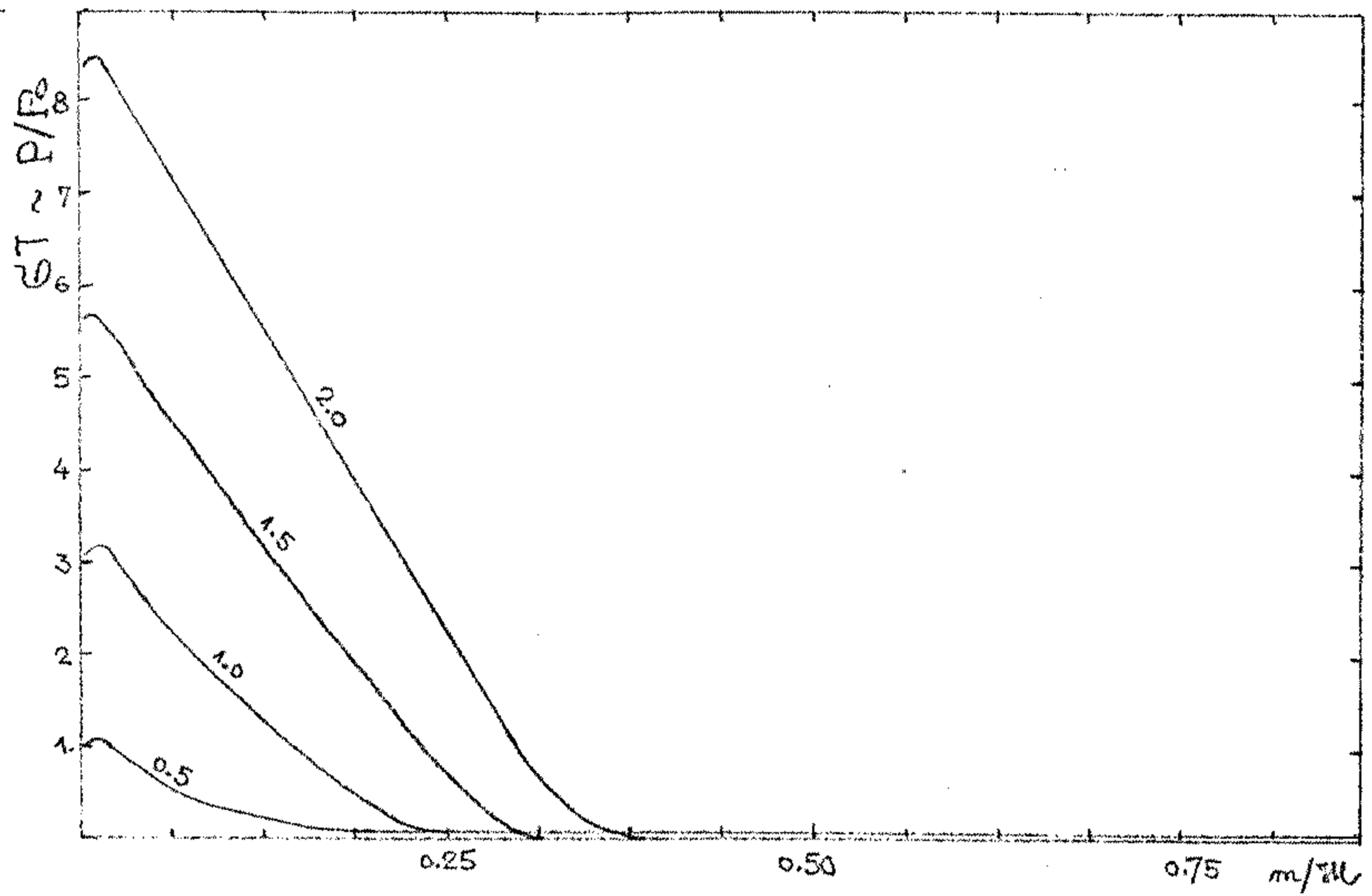
Sl.5.6. $\Psi(m)$ za $t = 2.07\pi$; rotacija je u označenom smeru.



Sl.5.8. $\sigma(t)$ za unutrašnje slojeve omotača ($n = m/w$)



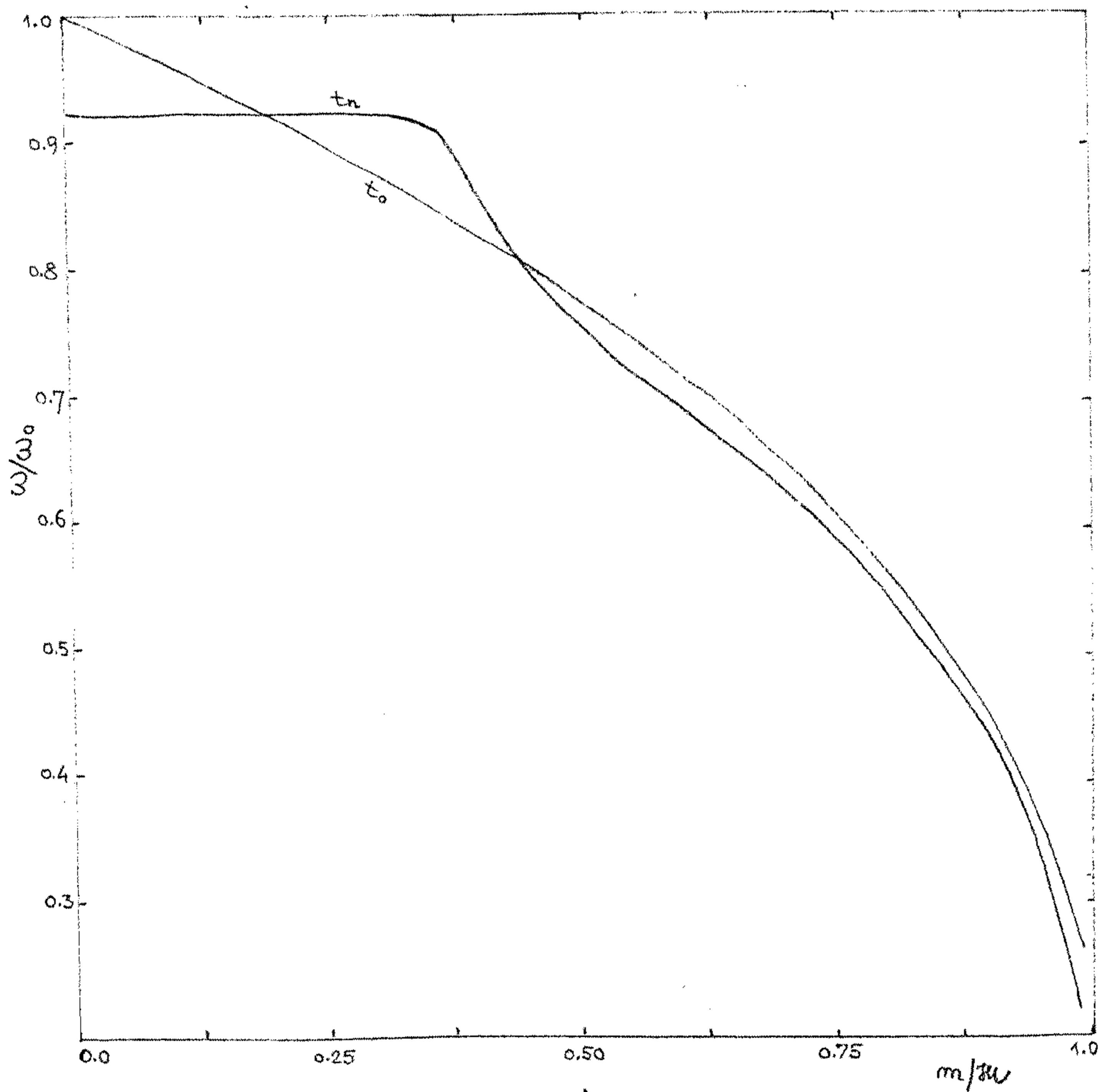
Sl.5.7. $\sigma(m)$ za nekoliko trenutaka razvoja ($n = t/\pi$)



Sl.5.9. Razvoj $\sigma_T \sim P(m)$; $n = t/\pi$.

Tabl.5.1

m/μ	L/r (%)	$\sigma(r,0)/\rho_0$
0.025	3.0	199.26
0.125	2.9	153.28
0.250	2.6	84.79
0.375	1.9	3.94
0.500	2.0	5.80
0.625	2.0	4.90
0.750	2.0	2.74
0.875	1.7	1.12
1.000	1.1	0.05



Sl.5.10. Ugaona brzina ω (m) za $t_0 = 0$ i $t_n = 2.07 \Pi$.

LITERATURA

- Biermann, P., 1971, *Astr. and Ap.*, 10, 205.
- Boyarchuk, A.A., 1973, u *IAU Symp.* 51, 81.
- Bruce, G.H., 1953, *Trans.Amer.Inst.Mining and Met.Engnrs*, 198,79.
- Cox, D.P. and Tucker, W.H., 1969, *Ap.J.*, 157, 1157.
- Dalgarno, A. and Mc Cray, R., 1972, *Ann.Rev. Astr. and Ap.*, 10,375.
- Delplace, A.M., 1971, *Astr. and Ap.*, 10, 246.
- Djačenko, V.F., Imšenik, V.S., 1963, *Ž.vičislit.matem. i matem.fiz.*, 3, 915.
- Flannery, P.B., 1975, *Ap.J.*, 201,661.
- Frost, V.A., 1960, *DAN SSSR*, Tom 133, N^o4.
- Godunov, S.K. (red.), 1976, "Čislencoe rešenje mnogomernih zadač gazovoi dinamiki", Moskva.
- Greenstein, J.L. (ed), 1960, *Stellar Atmospheres*.
- Günter, O., 1959, *Astr.Nachr.*, 285, 97 i 105.
- Hazlehurst, J., 1967, *Z.Ap.*, 65, 311.
- Heiser, A.M., 1961, *Ap.J.*, 134, 568.
- Huang, Su-Shu, 1973, *Ap.J.*, 183,541.
- Huang, Su-Shu, 1976, *Publ.Astr.Soc.Pac.*, 88, 448.
- Hutchings, J.B. and Wright, K.O., 1971, *Mont.Not.*, 155, 203.
- Ievlev, V.M., 1970, *Izv. AN SSSR, MŽG*, N^o1.
- Koch, R.H., 1972, *Astr.J.*, 77,500.
- Kolmogorov, A.N., 1972, *Izv. AN SSSR*, Tom 6, N^o1-2.
- Križ, S., 1973, *BAC*, 25, 143.
- Križ, S., 1974, *BAC*, Vol.25, N^o1.
- Križ, S. and Harmanec, P., 1975, *BAC*, 26,65.
- Križ, S., 1976, u "Be and Shell Stars", *IAU Symp.* 70, 323.

- Kruszewski, A., 1966, Acta Astr., 14, 231.
- Limber, D.N., 1967, Ap.J., 148, 141.
- Limber, D.N. and Marlborough, J.M., 1968, Ap.J., 152, 181.
- Lubow and Shu, 1975, Ap.J., 198, 383.
- Lubow and Shu, 1976, Ap.J., 207, 153.
- Lucy, L.B. and Solomon, P.M., 1970, Ap.J., 159, 879.
- Lüst, R. and Schlüter, A., 1955, Z.Ap., 38, 190.
- Marlborough, J.M., 1970, Ap.J., 159, 575.
- Mc Laughlin, D.B., 1950, Pop.Astr., 58, 50.
- Mestel, L., 1959, Mont.Not., 119, 249.
- Parker, E.N., 1963, Interplanetary Dynamical Processes, New York.
- Plavec, M. and Križ, S., 1965, BAC, Vol.16, N^o5.
- Pottasch, S., 1959, Ann. Ap., 22, 297.
- Potter, D., 1973, Computational Physics, Interscience Publ.
- Prendergast, K., 1960, Ap.J., 132, 162.
- Prendergast, K. and Taam, R., 1974, Ap.J., 189, 125.
- Richtmyer, R.D., 1960, "Raznostnie metodi rešenja kraevih zadač," M.
- Rotta, J., 1951, Z.Phys., 129, 6.
- Rotta, J., 1951, Z.Phys., 131, 1.
- Samarski, A.A., 1971, "Vvedenie v teoriju raznostnih shem", Mos.
- Samarski, A.A., Gulin, A.V., 1973, "Ustoičivost raznost.shem," Mos.
- Shakura, N.I., Sunyaev, R.A., 1973, Astr. and Ap., 24, 337.
- Shulov, O.S., 1967, Astrofizika 3, 233.
- Slettebak, A., 1966, Ap.J., 145, 126.
- Smak, J., 1971, Acta Astr., 22, 1.
- Sobouti, Y., 1970, Astr. and Ap., 5, 149.
- Struve, O., 1931, Ap.J., 73, 94.

Struve, O., 1942, Ap.J., 95, 134.

Vojkhanskaya, N.F., 1976, u "Be and Shell Stars", IAU Symp.70, 327.

Warner, B. and Nather, R.E., 1971, Mont.Not., 152, 219.

Wolf, N.J., 1965, Ap.J., 141, 155.

