Univerzitet u Beogradu

Prirodno-matematički fakultet

Udovičić Enes

GENERALIZACIJA PUISEUX-OVIH REDOVA ZA FUNKCIJE VIŠE KOMPLEKSNIH PROMJENLJIVIH

-doktorska disertacija-

Beograd, decembar 1979.

S A D R Ž A J

Uvod 1

I glava 8

II glava 19

III glava 35

Literatura 53

Indeks 56

U V O D

U matematici i njenim primjenama često je veoma pogodno jednu funkciju prikazati kao sumu (konačnu ili beskonačnu) drugih "bolje poznatih", po pravilu funkcija odredjenog tipa. Pomenimo samo klasične rezultate o razvijanju funkcije u Taylor-ov, Laurent-ov i Fourier-ov red. Ovaj rad je skroman doprinos u rješavanju problema takve vrste. Naime, istražuju se uslovi pod kojima se jedna analitička (višeznačna) funkcija, definisana u oblasti D prostora $\mathbb{C}^n$, može razviti po stepenima druge, odnosno po stepenima drugih konačno mnogo takvih funkcija.

U teoriji funkcija jedne kompleksne promjenljive poznato je da se svaka funkcija F, koja je analitička u probušenom disku $\{0<|z-a|<r\}$ i za koju je a tačka grananja reda $k-1$, može predstaviti u vidu tzv. Puiseux-ovog *) reda

$$F(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu (z-a)^{\nu/k}, \tag{U1}$$

gdje su koeficijenti c_ν kompleksni brojevi. $(U1)$ znači da za svaku holomorfnu granu f funkcije F, izdvojenu u ne-

*) Puiseux V. (1820-1883) - francuski matematičar

koj jednostruko povezanoj oblasti $G \subset \{0<|z-a|<r\}$, postoji u G holomorfna grana h funkcije $(z-a)^{\frac{1}{k}}$, takva da je

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu [h(z)]^\nu \quad (z \in G).$$

Red $(U1)$ se svodi na Laurent-ov prostom smjenom $z-a=\zeta^k$ (vidi [18], str. 188). Cilj ovog rada je dokazivanje sličnih tvrdjenja za analitičke funkcije više kompleksnih promjenljivih. Na žalost, prelaz iz kompleksne ravni u prostor $\mathbb{C}^n \ (n>1)$ nije uopšte jednostavan jer izmedju analize u $\mathbb{C}$ i analize u $\mathbb{C}^n$ postoje kvalitativne razlike.

U prvoj glavi razmatra se oblast holomorfnosti D u $\mathbb{C}^n$ i u toj oblasti analitički skup $A=\{z\in D: g(z)=0\}$, gdje je g holomorfna u D funkcija, takva da $\nabla g=\left(\frac{\partial g}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial g}{\partial z_n}\right)\neq 0$ na A. Pretpostavlja se da je fundamentalna grupa $\pi_1(D\setminus A)$ izomorfna aditivnoj grupi $\mathbb{Z}$ cijelih brojeva, tj. $\pi_1(D\setminus A)\approx \mathbb{Z}$, a zatim uvodi pojam reda grananja "oko" A konačnoznačne analitičke u $D\setminus A$ funkcije F i dokazuje (teorema 1, str. 9) da postoje holomorfne u D funkcije c_ν, takve da je

$$(U2) \qquad F(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu(z)\,[g(z)]^{\frac{\nu}{k}} \quad (z\in D\setminus A),$$

gdje je $k-1$ red grananja.

Primijetimo da je Puiseux-ov razvoj $(U1)$ lokalnog karaktera, a razvoj $(U2)$ globalnog. To se specijalno odnosi i na slučaj $n=1$. Naime, Puiseux-ovi redovi konvergiraju u probušenim diskovima, a u teoremi 1 (u slučaju $n=1$) D može biti proizvoljna jednostruko povezana oblast u $\mathbb{C}$, a A proizvoljna tačka $a\in D$; razvoj $(U2)$ važi svuda u $D\setminus\{a\}$.

U trećem paragrafu I glave definiše se indeks grananja k_F konačnoznačne analitičke funkcije F, definisane u oblasti D za koju je $\pi_1(D) \approx \mathbb{Z}$. U istoj oblasti razmatra se druga konačnoznačna analitička funkcija H s indeksom grananja k_H i dokazuje (teorema 2, str. 16) da, u slučaju kada je D oblast holomorfnosti i k_H/k_F cijeli broj, postoje holomorfne u D funkcije ℓ_ν, takve da je

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \ell_\nu H^\nu$$

svuda u D.

Na kraju I glave dokazuje se (teorema 3, str. 17) jedna varijanta teoreme 1. Naime, za A se uzima proizvoljan analitički skup, ali se zato oblast D "tereti" dodatnim uslovom $H^2(D,\mathbb{Z})=0$.

Druga glava je posvećena problemu razvijanja analitičke funkcije u višestruki red (po stepenima konačno mnogo drugih analitičkih funkcija). Razmatra se oblast holomorfnosti $D \subset \mathbb{C}^n$ i u njoj različiti nerazloživi analitički skupovi $A_i = \{z \in D : g_i(z) = 0\}$, gdje su g_i holomorfne u D funkcije takve da $\nabla g_i \neq 0$ na A_i $(i=1,\dots,m)$. Pretpostavlja se da je fundamentalna grupa $\pi_1(D \setminus A)$ $\left(A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$ izomorfna direktnom proizvodu $\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ m aditivnih grupa $\mathbb{Z}$ cijelih brojeva, tj. $\pi_1(D\setminus A) \approx \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m \times}$; zatim se dokazuje jedna lema (str. 21), koja tvrdi da petlje-generatore $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ grupe $\pi_1(D\setminus A)$ možemo izabrati tako da bude $\Delta_{\alpha_j} \arg g_i = \delta_{ij}\, 2\pi$, gdje je δ_{ij} Kronecker-ov simbol. Za svako $i=1,\ldots,m$ definiše se indeks grananja k_i "oko" skupa A_i konačnoznačne analitičke u $D\setminus A$ funkcije F , a dokazana lema omogućuje da se dokaže (teorema 4, str. 24) egzistencija holomorfnih u D funkcija $c_{\nu_1\ldots\nu_m}$, takvih da je

$$F=\sum_{-\infty}^{\infty} c_{\nu_1\ldots\nu_m}\, g_1^{\frac{\nu_1}{k_1}}\cdots g_m^{\frac{\nu_m}{k_m}}$$

svuda u $D\setminus A$.

U drugom paragrafu II glave definiše se indeks grananja konačnoznačne analitičke funkcije duž petlje u $D\subset \mathbb{C}^m$. (D je oblast u kojoj je definisana razmatrana analitička funkcija.) Pretpostavlja se da je $\pi_1(D)$ slobodna abelova grupa s konačno mnogo generatora $[\alpha_1],\ldots,[\alpha_m]$, tj. $\pi_1(D)\approx \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{m\times}$; zatim se u D razmatra konačnoznačna analitička funkcija F s indeksima grananja k_i duž petlji α_i i konačnoznačne analitičke funkcije H_i ($i=1,\ldots,m$), čiji su indeksi grananja $\varkappa_{ij}$ duž petlji α_j jednaki 1 za $i\neq j$. Dokazuje se (teorema 5, str.30) da, u slučaju kada je D oblast holomorfnosti i $\varkappa_{ii}/k_i$ cijeli brojevi, postoje holomorfne u D funkcije $c_{\nu_1\ldots\nu_m}$, takve da je

$$F=\sum_{0}^{\infty} c_{\nu_1\ldots\nu_m} H_1^{\nu_1}\cdots H_m^{\nu_m}$$

svuda u D .

Na kraju II glave se dokazuje (teorema 6, str. 33) jedna varijanta teoreme 4. Naime, za A_i se uzimaju proizvoljni različiti nerazloživi analitički skupovi po cijenu uslova $H^2(D,\mathbb{Z})=0$ koji se nameće na oblast D.

U trećoj glavi uvodi se pojam uopštenog analitičkog elementa i formuliše proširena teorema o monodromiji, što nam omogućava da dokažemo teoremu 7 (str. 38), koja tvrdi isto što i teorema 1, ali uz druge pretpostavke. Uslov $\pi_1(D\setminus A)\approx\mathbb{Z}$ u teoremi 1 se ispušta i zamjenjuje pretpostavkom da je kompleksna mnogostrukost

$$M=\{(z,w)\in D_*\times\mathbb{C}: w^k=g(z)\},$$

gdje je D_* oblast D bez singularnih tačaka nerazloživog anal.skupa A, jednostruko povezana, tj. $\pi_1(M)=0$.

U drugom paragrafu III glave dokazuje se teorema 8 (str. 39), koja tvrdi isto što i teorema 4, ali uz pretpostavku da je kompleksna mnogostrukost

$$M=\{(z,w)=(z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_m)\in D_*\times\mathbb{C}^m: w_1^{k_1}-g_1(z)=\dots=w_m^{k_m}-g_m(z)=0\},$$

gdje je D_* oblast D bez singularnih tačaka analitičkog skupa $A=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$, jednostruko povezana, tj. $\pi_1(M)=0$.

U trećem paragrafu razmatra se jedna posebna situacija - slučaj dvoznačne analitičke funkcije. Uzima se jednostruko povezana oblast D u $\mathbb{C}^n$ i skup A nula holomorfne u D funkcije g, takve da $\nabla g\neq 0$ na A. Dokazuje se (teorema 9, str. 42) da za svaku dvoznačnu analitičku u $D\setminus A$ funkciju F, koja se grana "oko" A, postoje holomorfne u $D\setminus A$ funkcije a i b, takve da je

$$F = a + b\sqrt{g}$$

svuda u $D\setminus A$.

U posljednja dva paragrafa III glave daju se (algebarskim terminima) neophodni i dovoljni uslovi pod kojima se jedna analititička funkcija može razviti po stepenima druge, odnosno drugih konačno mnogo. Za svaku analitičku u $D\subset \mathbb{C}^n$ funkciju F definiše se homomorfizam h_F grupe $\pi_1(D)$ u grupu permutacija od konačno mnogo ili prebrojivo mnogo elemenata, u zavisnosti od toga da li je F konačnoznačna ili beskonačnoznačna funkcija.

Teorema 10 (str. 45) tvrdi da se funkcija F razlaže po pozitivnim stepenima neke druge analitičke u D funkcije H (tj. $F=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu H^\nu$ u D, gdje su c_ν holomorfne funkcije u D,) ako i samo ako je

$$\ker h_H \subset \ker h_F .$$

($\ker h_F$ - jezgro homomorfizma h_F, $\ker h_H$ - jezgro homomorfizma h_H)

U teoremi 11 (str. 49) se tvrdi da se funkcija F razlaže po pozitivnim stepenima analitičkih u D funkcija $H_1,\dots,H_m$ (tj. $F=\sum_0^{\infty} c_{\nu_1\dots\nu_m} H_1^{\nu_1}\cdots H_m^{\nu_m}$ u D, gdje su $c_{\nu_1\dots\nu_m}$ holomorfne funkcije u D,) ako i samo ako je

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker h_{H_i} \subset \ker h_F .$$

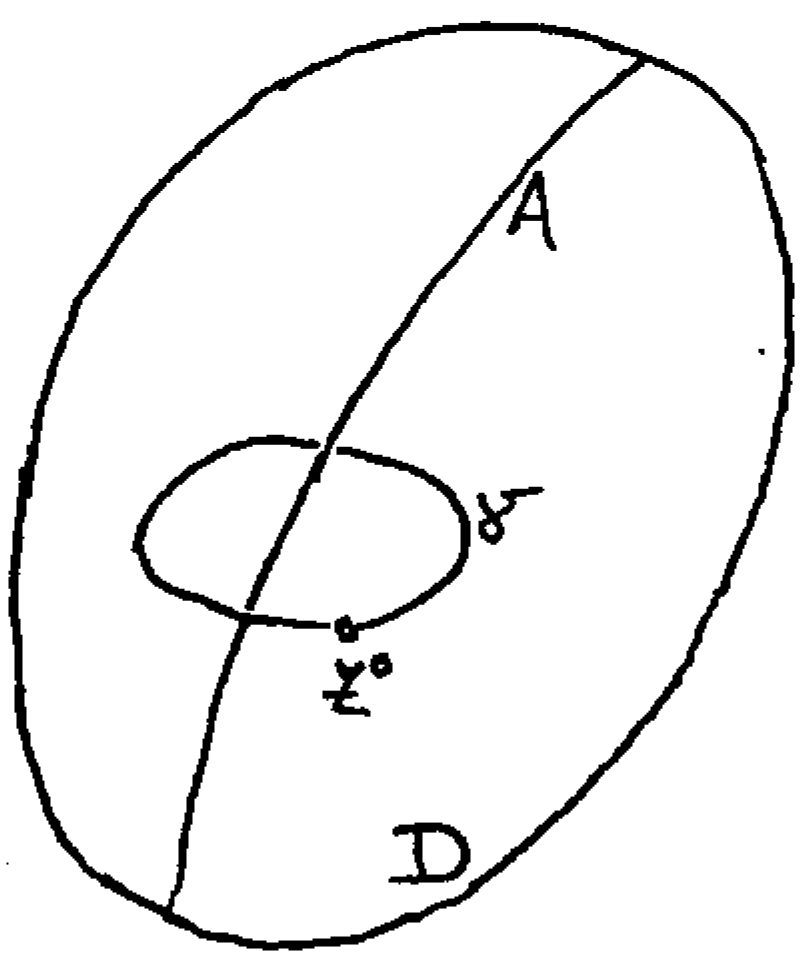
Na kraju istaknimo metod koji je iskorišten u dokazu svih teorema ovog rada (izuzimajući teoremu 9). Naime, u matematici je česta situacija da se neki problem, koji se razmatra u jednom prostoru, prenosi u prostor više dimenzije, gdje se on lakše i prirodnije rješava. Pomenimo samo Desargues-ov stav u geometriji. Ovdje je iskorištena ista ideja. Na primjer, u slučaju teoreme 1, višeznačna analitička u $D \subset \mathbb{C}^m$ funkcija F se prenosi (u radu se koristi izraz "podiže") na jednu kompleksnu podmnogostrukost M oblasti $\tilde{D} = D \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^{m+1}$, gdje ona postaje - - naravno pod odredjenim pretpostavkama - jednoznačna analitička funkcija na M. Novodobijena funkcija se na osnovu izvjesnog rezultata holomorfno proširuje u oblast $\tilde{D}$, razvija u Laurent-ov red po "posljednjoj" promjenljivoj i dobijeni rezultat se preko M vraća u D.

./.

I GLAVA

U ovoj glavi uvodi se pojam reda grananja analitičke funkcije oko skupa, a zatim formuliše i dokazuje osnovni i polazni rezultat ovog rada. Naime, on je osnovni u tom pogledu što se u njegovom dokazu prezentira metod koji se kasnije uspješno primjenjuje i u drugim situacijama.

1. Neka je D oblast u $\mathbb{C}^n$, g - holomorfna funkcija u D i A - skup njenih nula, tj. $A=\{z\in D: g(z)=0\}$. Pretpostavimo da je fundamentalna grupa $\pi_1(D\setminus A)$ izomorfna aditivnoj grupi $\mathbb{Z}$ cijelih brojeva, tj. $\pi_1(D\setminus A)\approx\mathbb{Z}$. (Taj uslov je ispunjen, na primjer, kada je $D=\mathbb{C}^n$ i A kompleksna hiperravan.) Fiksirajmo tačku $z^0\in D\setminus A$ i zatvorenu putanju $\gamma\subset D\setminus A$ s početkom z^0, koja generiše



grupu $\pi_1(D\setminus A)$ (U stvari, njena homotopska klasa $[\gamma]$ generiše grupu $\pi_1(D\setminus A)$.) Neka je, dalje, u oblasti $D\setminus A$ analitička funkcija F zadana ukupnošću svojih kanonskih elemenata (B,f), gdje su B maksimalne kugle u $D\setminus A$ s proizvoljnim centrima, a

f - holomorfne funkcije u tim kuglama. Drugim riječima, $F=\{(B,f)\}$,gdje se svaki element (B,f) analitički produžava duž proizvoljne putanje u $D\setminus A$, a svaki drugi (B',f') dobija se iz fiksiranog (B,f) kao rezultat takvog produženja.

Definicija. Analitički skup $A=\{z\in D: g(z)=0\}$ nazvaćemo skupom grananja reda $k-1\geq 0$ konačnoznačne analitičke u $D\setminus A$ funkcije F (k - cijeli broj), ako analitičko produženje svakog njenog elementa s centrom z^0 duž putanje $k\gamma$ dovodi do tog istog elementa, a produženja duž putanja $l\gamma$, $1\leq l\leq k-1$, ne dovode do polaznog elementa.

Kako se rezultati analitičkih produženja duž homotopnih putanja sa zajedničkim krajevima podudaraju (teorema o monodromiji), to definicija reda grananja ne zavisi od izbora tačke $z^0\in D\setminus A$ i petlje γ .

Teorema 1. Neka je D oblast holomorfnosti u $\mathbb{C}^n$ i A skup nula holomorfne u D funkcije g , takve da je $\pi_1(D\setminus A)\approx\mathbb{Z}$ i $\nabla g\neq 0$ na A . Tada za svaku konačnoznačnu analitičku u $D\setminus A$ funkciju F , za koju je A skup grananja reda $k-1$, postoje holomorfne u D funkcije c_ν takve da je

$$(I1)\qquad F(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu(z)\,[g(z)]^{\nu/k}\quad (z\in D\setminus A),$$

pri čemu $\|c_\nu\|_K^{1/\nu}\to 0$ kada $|\nu|\to\infty$ za svaki kompakt $K\subset D$.

Ovdje $\|\cdot\|_K$ označava normu funkcije na skupu K, tj. $\sup\limits_K |\cdot|$.

Jednakost $(I1)$ znači da za svaku holomorfnu granu f funkcije F, izdvojenu u jednostruko povezanoj oblasti $G \subset D \setminus A$, postoji holomorfna u G grana h funkcije $g^{\frac{1}{k}}$ $(h^k = g$ u $G)$ takva da je

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu(z)\,[h(z)]^\nu \tag{I2}$$

svuda u G. Red $(I2)$ konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima oblasti G.

Dokaz. Po pretpostavci postoji tačka $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ takva da je $\nabla g|_a \neq 0$. Bez umanjenja opštosti možemo smatrati da je $\frac{\partial g}{\partial z_1}\Big|_a \neq 0$. Tada postoji okolina U tačke a (na primjer polidisk) i broj $\varepsilon > 0$ takvi da kriva

$$\{z \in U : |g(z)| = \varepsilon,\ z_2 = a_2, \ldots, z_n = a_n\}$$

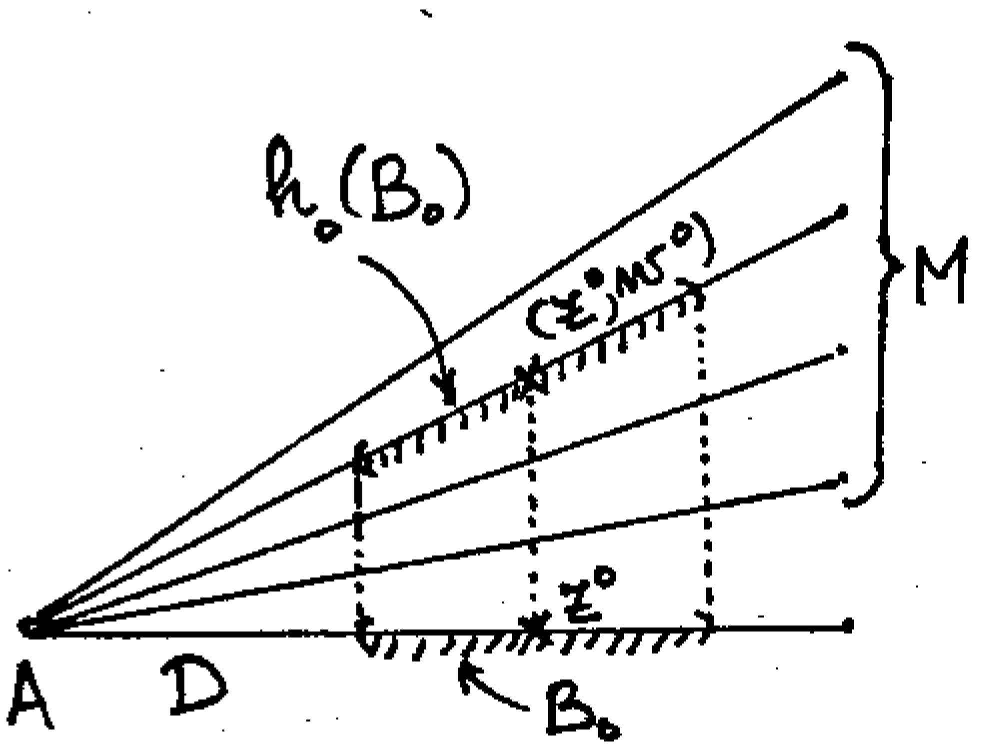
predstavlja zatvorenu putanju-petlju $\gamma \subset D \setminus A$ na kojoj je priraštaj argumenta funkcije g po modulu jednak 2π. Odavde slijedi da je A skup grananja reda $k-1$ analitičke u $D \setminus A$ funkcije $g^{\frac{1}{k}}$ i da homotopska klasa petlje γ generiše grupu $\pi_1(D \setminus A) \approx \mathbb{Z}$.

Razmotrimo oblast $\tilde{D} = D \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}^{n+1}_{z,w}$ i u njoj analitički skup

$$M = \{(z, w) \in \tilde{D} : w^k = g(z)\}.$$

Skup M je kompleksna mnogostrukost u $\tilde{D}$ jer je M zatvoren u $\tilde{D}$ i $\nabla(w^k - g) = (-\nabla g, k w^{k-1}) \neq 0$ svuda (u D, pa i na M). Sem toga, M se može razmatrati i kao k-lisni natkrivajući prostor oblasti $D\setminus A$ s projekcijom $\pi : (z, w) \mapsto z$.

Pod datim uslovima funkcija F se može "podići" na mnogostrukost M tako da novodobijena funkcija $\hat{F}$ bude jednoznačna. To se radi na slijedeći način. Fiksirajmo tačku $(z^0, w^0) \in M$ i neki kanonski element (B_0, f_0) funkcije F s centrom z^0. Označimo sa h_0 holomorfnu granu funkcije $g^{\frac{1}{k}}$, izdvojenu u B_0 uslovom $h_0(z^0) = w^0$, i u tačkama $(z, h_0(z)) \in M$, $z \in B_0$, stavimo



$$\hat{F}(z, h_0(z)) = f_0(z). \tag{I3}$$

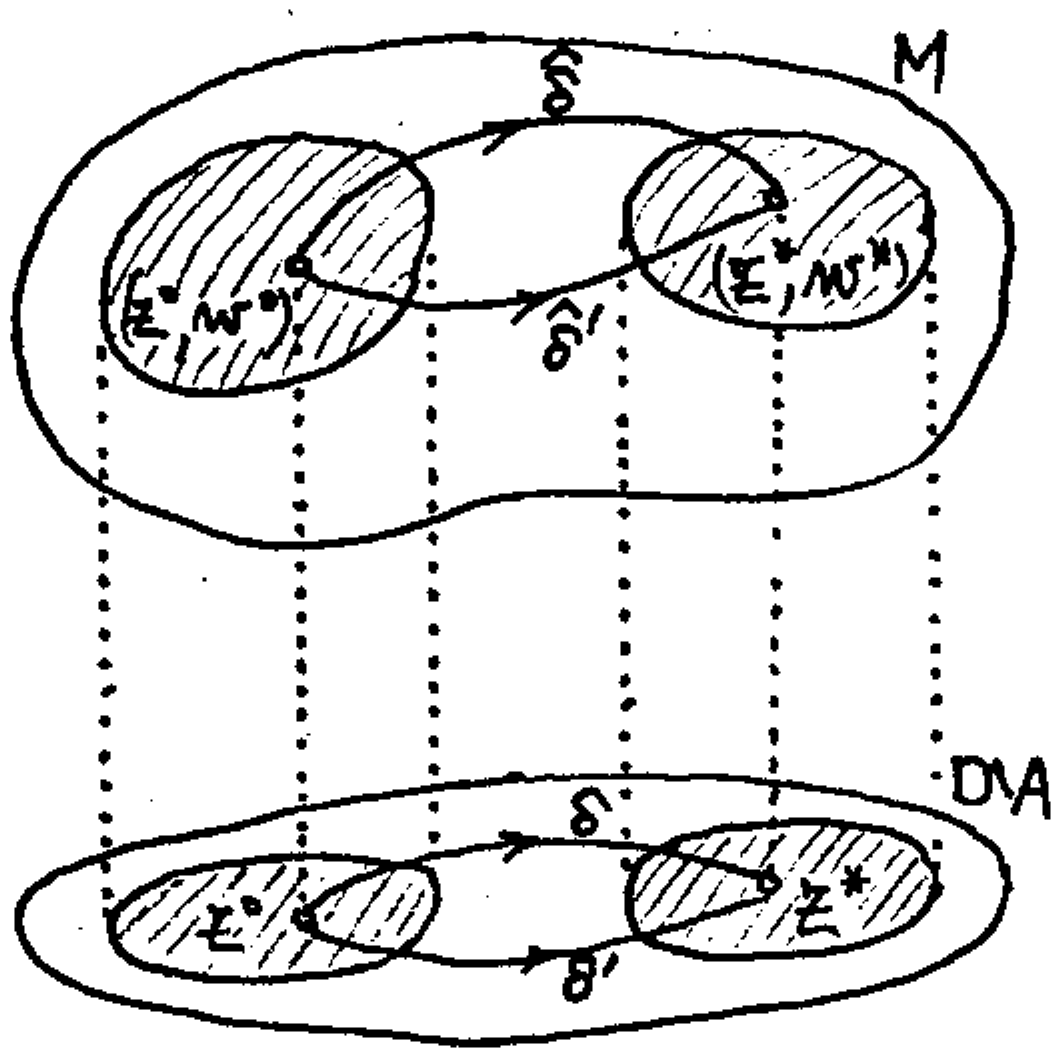
Reći ćemo da je element (B_0, f_0) "podignut" na M ako je u odgovarajućoj oblasti na M funkcija $\hat{F}$ definisana sa (I3). Dalje, neka je $(z^*, w^*) \in M$ – proizvoljna tačka i $\hat{\delta}$ – proizvoljna putanja na M s početkom (z^0, w^0) i krajem (z^*, w^*), čiju ćemo projekciju*) u $D\setminus A$ označiti sa δ.

---

*) Projekcija putanje $\hat{\delta} : [0,1] \to M$ u oblast $D\setminus A$ je putanja $\delta : [0,1] \to D\setminus A$ takva da je $\delta = \pi \circ \hat{\delta}$, gdje je π projekcija $(z, w) \mapsto z$.

Analitičkim produženjem elementa (B_0, f_0) duž putanje δ dobije se neki element (B_*, f_*) s centrom z^*, a produženje elementa (B_0, h_0) duž iste putanje dovodi do nekog elementa (B_*, h_*) funkcije $g^{\frac{1}{k}}$. U tačkama $(z, h_*(z)) \in M$ stavimo $\hat{F}(z, h_*(z)) = f_*(z)$. Kako M natkriva $D \setminus A$ to se svaka putanja u $D \setminus A$ s početkom z^0 na jedinstven način "podiže" na M do neke putanje s početkom (z^0, w^0). Odatle slijedi da se na opisani način svi elementi funkcije F "podižu" na M.

Definicija funkcije $\hat{F}$ u okolini tačke $(z^*, w^*) \in M$ ne zavisi od izbora putanje $\hat{\delta}$ koja spaja (z^0, w^0) sa (z^*, w^*). Zaista, ako je $\hat{\delta}'$ neka druga putanja koja spaja iste tačke onda je $\hat{\delta}^{-1}\hat{\delta}'$ zatvorena putanja na M s početkom (z^*, w^*). Priraštaj argumenta w duž te putanje je multipl od 2π, pa je priraštaj argumenta g duž putanje $\delta^{-1}\delta'$ multipl od $k2\pi$, što znači da je putanja $\delta^{-1}\delta'$ homotopna putanji $lk\gamma$ (l - neki cijeli broj). Medjutim, analitičko produženje duž takvih putanja ne mijenja polazni element, pa je funkcija $\hat{F}$ definisana jednoznačno.



Prema konstrukciji $\hat{F}$ je holomorfna funkcija na kompleksnoj mnogostrukosti $M \subset \tilde{D}$. (Ona je holomorfna u odnosu na lokalne koordinate z na M.)

Sada produžimo $\hat{F}$ u okolinu skupa M. U tom cilju uzmimo proizvoljnu tačku $(z^*, w^*) \in M$ i označimo sa Γ_* otvoreni ugao ravni $\mathbb{C}_w$ veličine $\frac{2\pi}{k}$ čiji je vrh $w=0$, a simetrala sadrži w^*. U tačkama (z, w) iz okoline $B_* \times \Gamma_* \subset \tilde{D}$ tačke (z^*, w^*) stavimo

$$\hat{F}(z, w) = \hat{F}(z, h_*(z)) (= f_*(z)).$$

Očevidno je da je ovako definisana funkcija $\hat{F}$ holomorfna na skupu $M \subset \tilde{D}$. Medjutim, M je kompleksna podmnogostrukost <u>oblasti holomorfnosti</u> $\tilde{D}$, pa se prema Cartan-ovoj teoremi (vidi [6], str. 313 ili [10], str. 130) $\hat{F}$ produžava u $\tilde{D}$ do neke holomorfne funkcije $\tilde{F}(z, w)$.

Za svako fiksirano $z \in D$ to je funkcija jednog kompleksnog argumenta w, holomorfna u prstenu $0 < |w| < +\infty$; njen Laurent-ov razvoj je

$$(I4) \qquad \tilde{F}(z, w) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu(z)\, w^\nu,$$

čiji se koeficijenti računaju po formulama

$$(I5) \qquad c_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{\tilde{F}(z, \zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta \quad (r > 0).$$

c_ν su holomorfne funkcije u D jer se u $(I5)$ može diferencirati po z pod znakom integrala. Da bismo dobili razvoj $(I1)$, u $(I4)$ treba staviti $w = [g(z)]^{\frac{1}{k}}$ jer, prema konstrukciji funkcije $\tilde{F}$, imamo $\tilde{F}(z, [g(z)]^{\frac{1}{k}}) = F(z)$ pri odgovarajućem izboru grana funkcija $g^{\frac{1}{k}}$ i F.

Označimo sa $M(r, K)$ maksimum funkcije $|\tilde{F}|$ na kompaktu $K \times \{|z|=r\}$. Iz $(I5)$ lako dobijemo Cauchy-jeve nejednakosti

$$\|c_\nu\|_K \leq M(r,K) \cdot r^{-\nu}.$$

Kako r možemo izabrati proizvoljno malim i proizvoljno velikim to odavde slijedi da $\|c_\nu\|_K^{\frac{1}{|\nu|}} \to 0 \; (|\nu| \to \infty)$, odakle kao posljedicu dobijemo uniformnu konvergenciju reda $(I2)$ na kompaktnim podskupovima oblasti G . ∎

2. U ovom odjeljku daćemo dva komentara koji se odnose na dokazanu teoremu.

1) Razvoj $(I1)$ možemo zamijeniti konačnim razvojem po pozitivnim stepenima od $g^{\frac{1}{k}}$ ako zahtjev o holomorfnosti koeficijenata c_ν u oblasti D oslabimo i pretpostavimo da su koeficijenti razvoja holomorfni u $D \setminus A$. Zaista, za svako cijelo ν postoje jedinstveni cijeli brojevi λ i μ, $0 \leq \mu \leq k-1$, takvi da je $\nu = k\lambda + \mu$. Otuda $g^{\frac{\nu}{k}} = g^\lambda \cdot g^{\frac{\mu}{k}}$, pa $(I1)$ postaje

$$F = \sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu g^{\frac{\nu}{k}} = \sum_{\mu=0}^{k-1} \Big(\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} c_{k\lambda+\mu} g^\lambda \Big) g^{\frac{\mu}{k}}.$$

Stavljajući $\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} c_{k\lambda+\mu} g^\lambda = b_\mu$ i uzimajući u obzir brzinu kojom c_ν teži nuli kada $|\nu| \to \infty$, dobijemo da su b_μ holomorfne funkcije u $D \setminus A$ i

$$F = \sum_{\mu=0}^{k-1} b_\mu g^{\frac{\mu}{k}}. \tag{I6}$$

2) Ako u dokazu teoreme, umjesto (B_0, f_0), u istoj tački z^0 uzmemo neki drugi element funkcije F onda, kao rezultat njegovog "podizanja" i produženja, na M dobijemo neku drugu funkciju koja se razlikuje od $\hat{F}$. Preciznije, umjesto jedne mnogoznačne (k -značne) analitičke funkcije u $D\setminus A$, na M dobijemo k različitih holomorfnih funkcija. (Na primjer, ako je $D=\mathbb{C}$, $A=\{0\}$ i $F(z)=\sqrt{z}$, onda funkciji F na $M=\{w^2=z\}\setminus\{0\}$ odgovaraju dvije različite funkcije : w i $-w$.) Sve one dovode do različitih razvoja $(I1)$, s različitim koeficijentima c_ν. Ovakva nejedinstvenost je prisutna i u slučaju koeficijenata Puiseux-ovog reda. Naime, u $(U1)$ umjesto c_ν možemo staviti $\varepsilon^\nu c_\nu$, gdje je $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi l}{k}}$ $(l=0,1,\dots,k-1)$. U našem razvoju $(I1)$ osim te nejedinstvenosti imamo još jednu. Naime, produženje funkcije $\hat{F}$ do funkcije $\tilde{F}$ u oblasti $\tilde{D}$ nije jedinstveno.

3. Neka je D oblast u $\mathbb{C}^n$ i F - konačnoznačna analitička funkcija u D. Za svaku zatvorenu putanju $\gamma\subset D$ možemo definisati <u>indeks grananja</u> k_γ funkcije F <u>duž</u> γ kao najmanji cijeli broj $k>0$ takav da je analitičko produženje proizvoljnog elementa funkcije F duž $k\gamma$ sam taj element. Iz teoreme o monodromiji slijedi da k_γ zavisi samo od homotopske klase petlje γ. Ako je $\pi_1(D)\approx\mathbb{Z}$ i ako petlja γ generiše grupu $\pi_1(D)$ (tj. ako njena homotopska klasa $[\gamma]$ generiše grupu $\pi_1(D)$) onda je odgovarajući broj k_γ prirodno nazvati indeksom grananja funkcije F u oblasti D i označiti sa k_F.

Teorema 2. Neka je D oblast holomorfnosti u $\mathbb{C}^n$ takva da je $\pi_1(D) \approx \mathbb{Z}$ i neka su u D zadane dvije konačnoznačne analitičke funkcije H i F s indeksima grananja k_H i k_F. Ako je k_H/k_F cijeli broj i ako funkcija H u svakoj tački $z \in D$ uzima ravno k_H različitih vrijednosti, onda postoje holomorfne u D funkcije c_ν takve da je

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu H^\nu \tag{I 7}$$

svuda u D, pri čemu $\|c_\nu\|_K^{\frac{1}{\nu}} \to 0 \ (\nu \to \infty)$ za svaki kompakt $K \subset D$.

Formulisana teorema je slična teoremi 1. Ovdje ulogu funkcije $g^{\frac{1}{k}}$ igra funkcija H, a umjesto $D \setminus A$ pojavljuje se sama oblast D.

Dokaz. Neka je funkcija H zadana kanonskim analitičkim elementima (B, h), tj. $H = \{(B, h)\}$. Razmotrimo u oblasti holomorfnosti $\tilde{D} = D \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{n+1}_{z,w}$ uniju M svih skupova

$$\hat{B} = \{(z, h(z)) \in \tilde{D} : z \in B\}, \ (B, h) \in H.$$

Ako se uzme obzir definicija analitičke funkcije lako je uvidjeti da je M kompleksna povezana podmnogostrukost oblasti $\tilde{D}$. S druge strane, M je k_H-lisni natkrivajući prostor oblasti D jer, po pretpostavci, funkcija H uzima k_H različitih vrijednosti u svakoj tački iz D. Dalji tok dokaza je kao u teoremi 1. Izdvojimo samo mjesta u kojima se pojavljuje razlika.

1) Dokaz jednoznačnosti funkcije $\hat{F}$ na M oslanja se na to što je k_H/k_F cijeli broj. (U teoremi 1, gdje je $H=g^{\frac{1}{k}}$, taj broj je jednak 1.)

2) Pretpostavka, da u svakoj tački $z \in D$ funkcija H uzima k_H različitih vrijednosti, omogućava produžiti $\hat{F}$ u neku okolinu podmnogostrukosti $M \subset \tilde{D}$.

3) Umjesto Laurent-ovog reda (I4) pojavljuje se Taylor-ov red $\left(\sum_0^\infty\right)$ s holomorfnim u D koeficijentima. ∎

4. U ovom dijelu prikazaćemo jednu varijantu teoreme 1. Naime, za A ćemo uzeti proizvoljan analitički skup, ali ćemo zato više pretpostaviti o oblasti D.

<u>Teorema 3.</u> <u>Neka je D oblast holomorfnosti u $\mathbb{C}^n$ takva da je njena druga kohomološka grupa s cjelobrojnim koeficijentima trivijalna, tj. $H^2(D, \mathbb{Z})=0$. Neka je, dalje, A analitički skup u D kompleksne kodimenzije 1 takav da je $\pi_1(D\setminus A)\approx \mathbb{Z}$. Tada postoji holomorfna u D funkcija g takva, da za svaku konačnoznačnu analitičku u $D\setminus A$ funkciju F imamo razvoj</u>

$$F(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu(z)\,[g(z)]^{\nu/k}\quad (z\in D\setminus A),$$

gdje su c_ν holomorfne funkcije u D, a $(k-1)$- red granja funkcije F oko skupa A.

Dokaz. Kako je A analitički skup kompleksne kodimenzije 1 u oblasti holomorfnosti D i $H^2(D,\mathbb{Z})=0$, to prema poznatom rezultatu (vidi npr. [19], str. 260) postoji holomorfna u D funkcija g takva da je $A=\{z\in D: g(z)=0\}$ i $\nabla g\neq 0$ na A. Preostaje primijeniti teoremu 1. ∎

Napomena. Teorema 3 ostaje na snazi ako uslov $H^2(D,\mathbb{Z})=0$ ispustimo i pretpostavimo da je D Descartes-ov proizvod oblasti $D_\ell\subset\mathbb{C}$ $(\ell=1,\dots,n)$, pri čemu su sve oblasti D_ℓ, izuzev možda jedne, jednostruko povezane (vidi [19], stranice 257 i 260).

./.

II GLAVA

U ovoj glavi razmatra se slučaj kada u oblasti holomorfnosti $D \subset \mathbb{C}^n$ imamo više analitičkih skupova i kada je u dopuni njihove unije zadana konačnoznačna analitička funkcija. Topološki uslov $\pi_1(D \setminus A) \approx \mathbb{Z}$ zamjenjuje se sličnim i precizira pojam indeksa grananja analitičke funkcije oko svakog od tih analitičkih funkcija. Zatim se dokazuje jedna lema koja omogućava uopštenje osnovnog rezultata I glave.

1. Neka je D oblast u $\mathbb{C}^n$ i $g_1, \dots, g_m$ - holomorfne u D funkcije takve da su ispunjeni slijedeći uslovi :

(a) svi $A_i = \{z \in D : g_i(z) = 0\}$ su nerazloživi analitički skupovi,

(b) $\nabla g_i \not\equiv 0$ na A_i za svako i,

(c) $A_i \neq A_j$ za $i \neq j$.

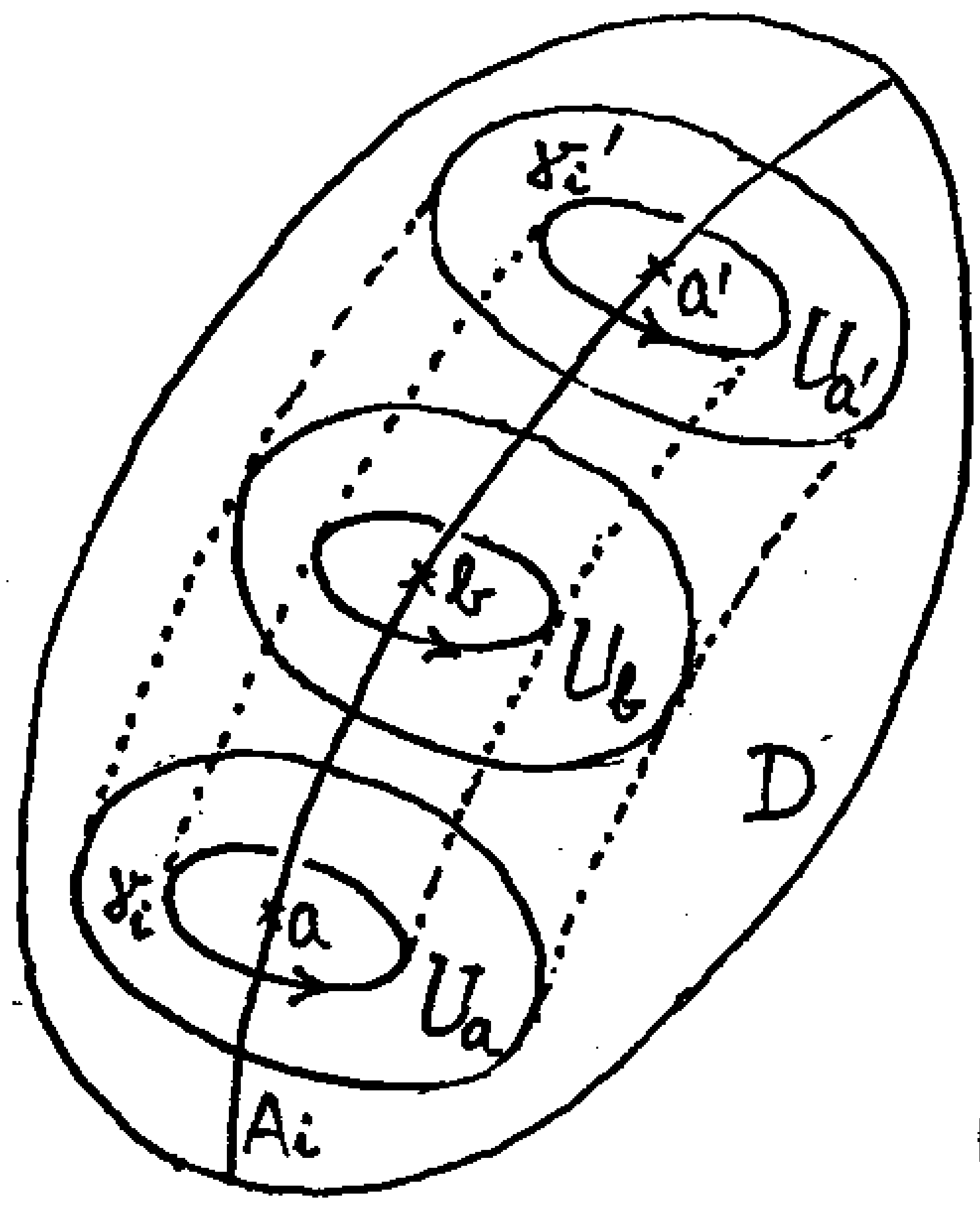
Stavimo $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ i označimo sa A_i^* skup onih regularnih tačaka skupa A koje pripadaju A_i. Neka je $a=(a_1,\dots,a_m)$ proizvoljna tačka skupa A_i^*. Bez umanjenja opštosti možemo smatrati da je $\left.\frac{\partial g_i}{\partial z_1}\right|_a \neq 0$. Tada postoji okolina U_a tačke a (na primjer polikrug) koja ne siječe $A_i \setminus A_i^*$ $(U_a \cap (A_i \setminus A_i^*) = \emptyset)$ i broj $\varepsilon > 0$, takvi da kriva

$$\{z \in U_a : |g_i(z)| = \varepsilon,\ z_2 = a_2, \dots, z_m = a_m\}$$

predstavlja zatvorenu putanju $\gamma_i \subset U_a \setminus A_i$, duž koje je priraštaj argumenta g_i jednak 2π. Kako je a regularna tačka skupa A_i, to za dovoljno malu okolinu U_a odgovarajuća petlja γ_i generiše grupu $\pi_1(U_a \setminus A_i) \approx \mathbb{Z}$.

Neka je u $D \setminus A$ zadana konačnoznačna analitička funkcija F svojim kanonskim elementima (B, f), gdje su B maksimalne kugle u $D \setminus A$ s proizvoljnim centrima, a f holomorfne funkcije u tim kuglama. Fiksirajmo jednu tačku $z^0 \in \gamma_i$. Kako je F konačnoznačna to postoji cijeli broj $l \geqslant 1$, takav da je analitičko produženje proizvoljnog elementa funkcije F s centrom z^0 duž putanje $l\gamma_i$ sam taj element. Najmanji od tih brojeva l nazovimo <u>indeksom grananja</u> funkcije F oko skupa A_i <u>u tački</u> a i označimo sa k_i.

Kako se rezultati analitičkih produženja duž homotopnih putanja (sa zajedničkim krajevima) podudaraju (teorema o monordomiji), to definicija indeksa grananja u tački a ne zavisi od izbora petlje $\gamma_i \subset U_a \setminus A_i$, tačke $z^0 \in \gamma_i$ i polaznih elemenata funkcije F koji se analitički produžavaju. Primijetimo da je indeks grananja isti u svim tačkama skupa A_i^*. Zaista, neka je a' druga tačka skupa A_i^* i γ_i' odgovarajuća petlja u $U_{a'} \setminus A_i$. Kako je A_i nerazloživ analitički skup to je skup A_i^* linijski povezan, pa stoga postoji putanja $\delta \subset A_i^*$ koja spaja tačke a i a'. Lako je uvidjeti da su γ_i i γ_i' homotopne (zatvorene) putanje u $\left(\bigcup_{b \in \delta} U_b\right) \setminus A_i$, pa su indeksi grananja u tačkama a i a' jednaki. Taj, za sve tačke $a \in A_i^*$ zajednički broj k_i, zvaćemo <u>indeksom grananja</u> funkcije F <u>oko skupa</u> A_i.



<u>Lema.</u> Neka je D oblast u $\mathbb{C}^n$ i g_i holomorfne u D funkcije, takve da su $A_i = \{z \in D : g_i(z) = 0\}$ različiti nerazloživi analitički skupovi i $\nabla g_i \neq 0$ na A_i $(i = 1, \dots, m)$. Ako je fundamentalna grupa $\pi_1(D \setminus A)$ $\left(A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$ slobodna abelova grupa sa m generatora, tj. $\pi_1(D \setminus A) \approx \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m \times}$, onda petlje-generatore $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ možemo izabrati tako da je

$$\Delta_{\alpha_j} \arg g_i = \delta_{ij} 2\pi, \tag{II1}$$

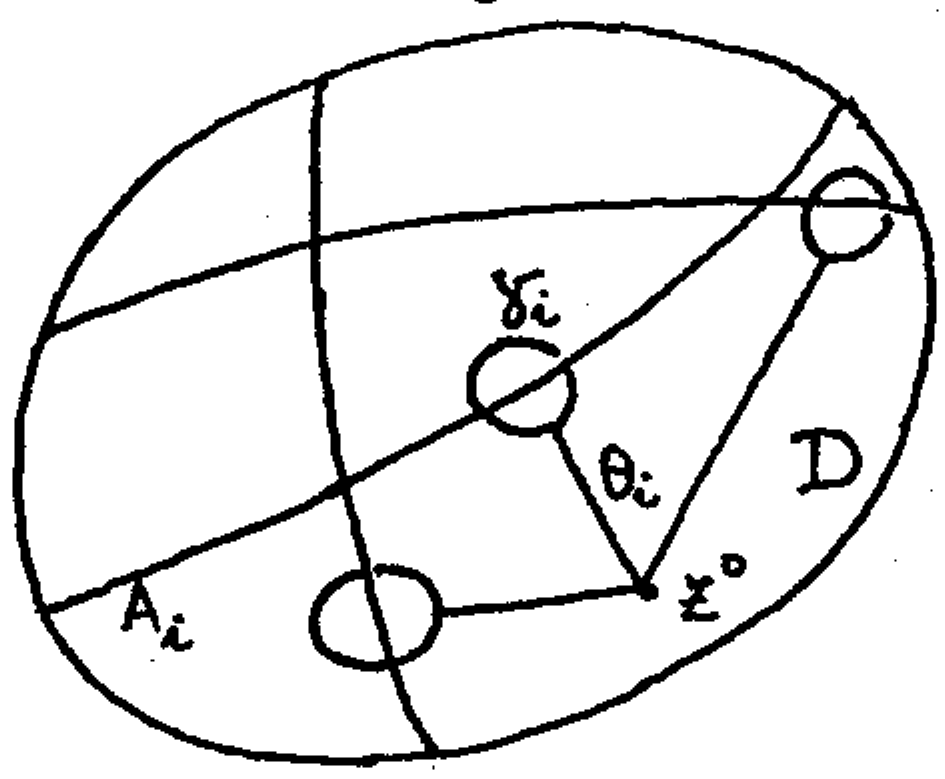
gdje je δ_{ij} Kronecker-ov simbol (tj. $\delta_{ii} = 1$ i $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$).

Ovdje $\Delta_{\alpha_j} \arg g_i$ označava priraštaj argumenta funkcije g_i duž petlje α_j. Napomenimo još to da, radi jednostavnijeg izražavanja, mi govorimo da petlje $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ generišu grupu $\pi_1(D \setminus A)$. U stvari, nju generišu odgovarajuće homotopske klase $[\alpha_1], \dots, [\alpha_m]$.

Dokaz leme. Označimo sa z^0 zajednički početak petlji-generatora $\beta_1, \dots, \beta_m$ grupe $\pi_1(D \setminus A)$. Neka je

$$\Delta_{\beta_j} \arg g_i = p_{ij}\, 2\pi, \tag{II 2}$$

gdje su p_{ij} cijeli brojevi. Sada uzmimo proizvoljnu tačku petlje γ_i, koja se pominje u definiciji indeksa granja, i spojimo je s tačkom z^0 nekom putanjom $\theta_i \subset D \setminus A$. Za zatvorene putanje $\alpha_i = \theta_i^{-1} \gamma_i \theta_i$ s početkom z^0 imamo (vidi konstrukciju petlji γ_i)



$$\Delta_{\alpha_j} \arg g_i = \Delta_{\gamma_j} \arg g_i = \delta_{ij}\, 2\pi, \tag{II 3}$$

što znači da petlje α_i ispunjavaju uslove (II 1). Dokažimo još da petlje $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ generišu grupu $\pi_1(D \setminus A)$. Biće dovoljno dokazati da je svaka homotopska klasa $[\beta_i]$ cjelobrojna linearna kombinacija homotopskih klasa $[\alpha_1], \dots, [\alpha_m]$ (tj. linearna kombinacija sa cijelim koeficijentima).

Kako su $\beta_1, \dots, \beta_m$ petlje-generatori to postoje cijeli brojevi $q_{\ell j}$ takvi da je

$$(\text{II}4)\qquad [\alpha_j]=\sum_{\ell=1}^{m} q_{\ell j}\,[\beta_\ell]\quad (j=1,\dots,m).$$

Odavde slijedi

$$\Delta_{\alpha_j}\arg g_i=\sum_{\ell=1}^{m} q_{\ell j}\,\Delta_{\beta_\ell}\arg g_i\,,$$

odnosno (na osnovu (II2) i (II3))

$$(\text{II}5)\qquad \delta_{ij}=\sum_{\ell=1}^{m} p_{i\ell}\,q_{\ell j}\quad (i,j=1,\dots,m)$$

Ako obrazujemo $m\times m$-matrice $P=(p_{ij})$, $Q=(q_{ij})$ i $E=(\delta_{ij})$ onda (II5) možemo pisati u obliku

$$P\cdot Q=E,$$

odakle se dobije jednakost za determinante tih matrica

$$\det P\cdot\det Q=\det E=1.$$

Kako su elementi matrica P i Q cijeli brojevi to su $\det P$ i $\det Q$ cijeli brojevi, pa iz posljednje jednakosti slijedi da je $|\det Q|=1$, tj. $\det Q=1$ ili -1. Stoga, rješavanjem sistema (II4) po Kramer-ovom pravilu, dobijemo da su homotopske klase $[\beta_1],\dots,[\beta_m]$ cjelobrojne linearne kombinacije klasa $[\alpha_1],\dots,[\alpha_m]$. Odatle slijedi da klase $[\alpha_1],\dots,[\alpha_m]$ zaista generišu grupu $\pi_1(D\setminus A)$. ▌

Napomena 1. U lemi i u teoremi koja slijedi pretpostavlja se da je $\pi_1(D\setminus A)\approx\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{m\times}$. Taj uslov je ispunjen na primjer u slučaju kada je $D = \mathbb{C}^n$ i $A_i = \{z \in \mathbb{C}^n : z_i = 0\}$ $(i = 1, \dots, m\ ;\ m \leq n)$, jer je $\mathbb{C}^n \setminus A = (\mathbb{C}\setminus\{0\})^m \times \mathbb{C}^{n-m}$, $\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \approx \mathbb{Z}$ i $\pi_1(\mathbb{C}) = 0$ (vidi [3], str. 144).

Teorema 4. Neka je D oblast holomorfnosti u $\mathbb{C}^n$, A_i - skupovi nula holomorfnih u D funkcija g_i $(i=1,\dots,m)$ i $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi (a), (b) i (c) i da je $\pi_1(D\setminus A) \approx \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m\times}$. Neka je, dalje, u $D\setminus A$ zadana konačnoznačna analitička funkcija F s indeksima grananja k_i oko skupova A_i $(i = 1, \dots, m)$. Tada postoje holomorfne u D funkcije $c_{\nu_1 \dots \nu_m}$ takve da je

$$F = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{\nu_1 \dots \nu_m}\, g_1^{\frac{\nu_1}{k_1}} \cdots g_m^{\frac{\nu_m}{k_m}} \tag{II 6}$$

svuda u $D\setminus A$, pri čemu $\|c_{\nu_1 \dots \nu_m}\|_K^{\frac{1}{|\nu|}} \to 0$ $(|\nu| = |\nu_1| + \dots + |\nu_m| \to \infty)$ za svaki kompakt $K \subset D$.

Ovdje $\|\cdot\|_K$ označava normu funkcije na skupu K, tj. $\sup_K |\cdot|$, a sumiranje teče po svim indeksima $\nu_1, \dots, \nu_m$. Koristeći multiindekse $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ i $k = (k_1, \dots, k_m)$ i standardnu oznaku $g^{\frac{\nu}{k}} = g_1^{\frac{\nu_1}{k_1}} \cdots g_m^{\frac{\nu_m}{k_m}}$, razvoj (II 6) možemo napisati u sažetijem obliku

$$F = \sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu\, g^{\frac{\nu}{k}}.$$

Jednakost (II 6) znači da za svaku holomorfnu granu f

funkcije F , izdvojenu u jednostruko povezanoj oblasti $G \subset D \setminus A$, postoje holomorfne u G grane h_i funkcija $g_i^{\frac{1}{k_i}}$ $(h_i^{k_i} = g_i \text{ u } D)$ takve da je

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{\nu_1 \ldots \nu_m} h_1^{\nu_1} \cdots h_m^{\nu_m} \tag{II 7}$$

svuda u G . Red (II 7) konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima oblasti G .

Dokaz teoreme. Razmotrimo oblast $\tilde{D} = D \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})^m$ u $\mathbb{C}^{n+m}_{z,w}$, analitički skup u $\tilde{D}$

$$M = \{(z,w) = (z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m) \in \tilde{D} : w_1^{k_1} - g_1(z) = \cdots = w_m^{k_m} - g_m(z) = 0\}$$

i Jacobi-jevu matricu sistema funkcija

$$\varphi_i(z,w) = w_i^{k_i} - g_i(z) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial g_1}{\partial z_1} \cdots -\frac{\partial g_1}{\partial z_n} & k_1 w_1^{k_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\partial g_2}{\partial z_1} \cdots -\frac{\partial g_2}{\partial z_n} & 0 & k_2 w_2^{k_2-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial g_m}{\partial z_1} \cdots -\frac{\partial g_m}{\partial z_n} & 0 & 0 & \cdots & k_m w_m^{k_m-1} \end{pmatrix} \tag{II 8}$$

Kako je rang matrice (II 8) jednak m u svim tačkama skupa M to je M kompleksna podmnogostrukost oblasti $\tilde{D}$ kompleksne dimenzije n . Osim toga, M možemo razmatrati i kao natkrivajući prostor oblasti $D \setminus A$ sa $k_1 \cdots k_m$ listova i projekcijom $\pi : (z,w) \mapsto z$.

Pod datim uslovima funkciju F možemo "podići" na mnogostrukost M tako da novodobijena funkcija $\hat{F}$ bude jednoznačna. To se radi na slijedeći način. Fiksirajmo tačku $(z^0, w^0) = (z_1^0, \dots, z_m^0, w_1^0, \dots, w_m^0) \in M$ i neki kanonski element (B_0, f_0) funkcije F s centrom z^0. Označimo sa h_{0i} holomorfne grane funkcija $g_i^{\frac{1}{k_i}}$, izdvojene u B_0 uslovima $h_{0i}(z^0) = w_i^0$, i u tačkama skupa

$$\hat{B}_0 = \{(z, h_{01}(z), \dots, h_{0m}(z)) : z \in B_0\} \subset M$$

stavimo

$$\hat{f}_0(z, h_{01}(z), \dots, h_{0m}(z)) = f_0(z).$$

Uredjen par $(\hat{B}_0, \hat{f}_0)$ zvaćemo "podignutim" elementom funkcije F. Tačku (z^0, w^0) prirodno je smatrati njegovim centrom. Sada uzmimo proizvoljnu putanju $\hat{\delta} \subset M$ s početkom (z^0, w^0). Njen kraj označimo sa (z, w), a projekciju u $D \setminus A$ sa δ. (Šta je projekcija putanje, rečeno je u fusnoti na str.11) Analitičkim produženjem elementa (B_0, f_0) duž putanje δ dobije se neki element (B, f) s centrom z. "Podizanjem" tog elementa na M na opisani način, dobije se neki element $(\hat{B}, \hat{f})$ s centrom (z, w). Kako M natkriva $D \setminus A$ to se svaka putanja u $D \setminus A$ s početkom z^0 na jedinstven način "podiže" na M do neke putanje s početkom (z^0, w^0). Dakle, u procesu analitičkog produženja elementa $(\hat{B}_0, \hat{f}_0)$ na M, svi elementi funkcije F se "podižu" na M. Lako je uvidjeti da je skup $\hat{F} = \{(\hat{B}, \hat{f})\}$ svih "podignutih" elemenata funkcije F analitička funkcija na kompleksnoj mnogostrukosti M (analitička u odnosu na lokalne koordinate z na M).

Preostalo je još dokazati da je $\hat{F}$ jednoznačna funkcija na M. U tom cilju uzmimo proizvoljnu tačku $(z, w) \in M$ i proizvoljne putanje $\hat{\delta}_1$ i $\hat{\delta}_2$ na M sa zajedničkim početkom (z^0, w^0) i zajedničkim krajem (z, w) i dokažimo da se analitička produženja elementa (B_0, f_0) duž putanja-projekcija δ_1 i δ_2 podudaraju. Drugim riječima, treba dokazati da analitičko produženje duž petlje $\tau = \delta_1^{-1}\delta_2$ ne mijenja polazni element. Zaista, $\hat{\tau} = \hat{\delta}_1^{-1}\hat{\delta}_2$ je zatvorena putanja na M (s početkom (z, w)), pa je

$$\Delta_{\hat{\tau}} \arg w_i = \mu_i 2\pi \ (\mu_i \in \mathbb{Z}),$$

a na osnovu posljednjeg

$$(\text{II}\,9) \quad \Delta_{\tau} \arg g_i = \mu_i k_i 2\pi \ (i = 1, \dots, m)$$

Možemo smatrati da je tačka z zajednički početak petlji-generatora $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ grupe $\pi_1(D \setminus A)$ za koje su ispunjeni uslovi $(\text{II}\,1)$. Kako je z početak petlje $\tau = \delta_1^{-1}\delta_2$ to je

$$(\text{II}\,10) \qquad [\tau] = \sum_{l=1}^{m} t_l [\alpha_l] \ (t_l \in \mathbb{Z}).$$

Iz $(\text{II}\,1)$, $(\text{II}\,9)$ i posljednje jednakosti dobijemo $t_i = \mu_i k_i$, pa je

$$[\tau] = \sum_{l=1}^{m} \mu_l k_l [\alpha_l].$$

Kako su petlje α_ℓ i γ_ℓ homotopne u $D\setminus A$ (kao zatvorene putanje) to iz definicije indeksa grananja slijedi da analitičko produženje funkcije F duž putanje τ ne mijenja polazni element. Znači, dokazali smo da je $\hat{F}$ jednoznačna analitička (tj. holomorfna) funkcija na M (holomorfna u odnosu na lokalne koordinate z na M). Nije teško vidjeti da u $\tilde{D}\subset \mathbb{C}^{n+m}_{z,w}$ postoji neka okolina skupa M u kojoj se $\hat{F}$ može holomorfno dodefinisati. Kako je M (zatvorena) kompleksna podmnogostrukost oblasti holomorfnosti $\tilde{D}$ to se prema Cartan-ovoj teoremi (vidi [6] , str. 313 ili [10], str. 130) $\hat{F}$ produžava do holomorfne u $\tilde{D}=D\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})^m$ funkcije $\tilde{F}(z,w_1,\dots,w_m)$.

Za svako fiksirano $z\in D$ $\tilde{F}$ je holomorfna u $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^m$ funkcija promjenljivih $w_1,\dots,w_m$, pa se može razviti u Laurent-ov red

$$(\text{II}\,11)\quad \tilde{F}(z,w_1,\dots,w_m)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_{\nu_1\dots\nu_m} w_1^{\nu_1}\dots w_m^{\nu_m}\quad (0<|w_i|<\infty).$$

Koeficijenti toga reda računaju se po formulama

$$(\text{II}\,12)\quad c_{\nu_1\dots\nu_m}(z)=\frac{1}{(2\pi i)^m}\int\limits_{\Delta(r)}\frac{\tilde{F}(z,\zeta_1,\dots,\zeta_m)}{\zeta_1^{\nu_1+1}\dots\zeta_m^{\nu_m+1}}\,d\zeta_1\dots d\zeta_m,$$

gdje je $\Delta(r)=\{\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_m):|\zeta_1|=r_1,\dots,|\zeta_m|=r_m\}$ i r_i - proizvoljni pozitivni brojevi. $c_{\nu_1\dots\nu_m}$ su holomorfne funkcije u D jer se u (II12) može diferencirati pod znakom integrala. Da bi dobili razvoj (II6) u (II11) treba staviti $w_i = g_i^{\frac{1}{k_i}}$, jer prema konstrukciji funkcije $\tilde{F}$ imamo

$$\tilde{F}(z, g_1^{\frac{1}{k_1}}, \dots, g_m^{\frac{1}{k_m}}) = F(z)$$

pri odgovarajućem izboru grana funkcija $g_1^{\frac{1}{k_1}}, \dots, g_m^{\frac{1}{k_m}}$ i F.

Stavimo $M(r, K) = \max\limits_{K \times \Delta(r)} |\tilde{F}|$. Iz $(\mathrm{II}\,12)$ lako dobijemo Cauchy-jeve nejednakosti

$$\| c_{\nu_1 \dots \nu_m} \| \leq \frac{M(r,K)}{r_1^{\nu_1} \dots r_m^{\nu_m}} .$$

Kako su pozitivni brojevi r_i proizvoljni i medjusobno nezavisni to odavde slijedi da $\| c_{\nu_1 \dots \nu_m} \|_K^{\frac{1}{|\nu|}} \to 0$ kada $|\nu| = |\nu_1| + \dots + |\nu_m| \to \infty$, odakle kao posljedicu dobijemo uniformnu konvergenciju reda $(\mathrm{II}\,7)$ na kompaktnim podskupovima oblasti G. ∎

Napomena 2. Red $(\mathrm{II}\,6)$ možemo zamijeniti konačnim razvojem po pozitivnim stepenima od $g_1^{\frac{1}{k_1}}, \dots, g_m^{\frac{1}{k_m}}$ ako zahtjev o holomorfnosti koeficijenata $c_{\nu_1 \dots \nu_m}$ oslabimo i pretpostavimo da su koeficijenti razvoja holomorfni u $D \setminus A$. Zaista, za svako cijelo ν_i postoje jedinstveni cijeli brojevi λ_i i μ_i, $0 \leq \mu_i \leq k_i - 1$, takvi da je $\nu_i = k_i \lambda_i + \mu_i$, pa je $g_i^{\frac{\nu_i}{k_i}} = g_i^{\lambda_i} g_i^{\frac{\mu_i}{k_i}}$. Stavljajući $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ i $k\lambda = (k_1\lambda_1, \dots, k_m\lambda_m)$ lako dobijemo da je

$$(\text{II}\,13)\qquad F=\sum_{\mu} b_{\mu}\, g^{\frac{\mu}{k}},$$

gdje su

$$b_{\mu}=\sum_{\lambda} c_{k\lambda+\mu}\, g^{\lambda}$$

holomorfne funkcije u $D\setminus A$. (Holomorfne su zbog brzine kojom koeficijenti $c_{\nu}=c_{\nu_1\ldots\nu_m}$ teže nuli kada $|\nu|\to\infty$). Suma (II 13) je konačna i u njoj sumiranje teče po svim multiindeksima $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_m)$ čije komponente zadovoljavaju uslove $0\leq\mu_i\leq k_i-1$.

2. Neka je D oblast u $\mathbb{C}^n$ i F konačnoznačna analitička funkcija u D. Za svaku petlju $\alpha\subset D$ možemo definisati indeks grananja k funkcije F kao minimum cijelih brojeva $l>0$, takvih da analitičko produženje proizvoljnog elementa funkcije F duž putanje $l\alpha$ dovodi do polaznog elementa. Iz teoreme o monodromiji slijedi da k zavisi samo od homotopske klase petlje α.

Teorema 5. Neka je D oblast holomorfnosti u $\mathbb{C}^n$, takva da je $\pi_1(D)$ slobodna abelova grupa sa konačno mnogo generatora $[\alpha_1],\ldots,[\alpha_m]$, tj. $\pi_1(D)\approx\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{m\times}$. Neka su, dalje, u D zadane konačnoznačne anal. funkcije H_i $(i=1,\ldots,m)$ takve

(α) da su indeksi grananja $\varkappa_{ij}$ funkcija H_i duž petlji α_j jednaki 1 za $i\neq j$,

(β) i da svaka funkcija H_i uzima jedan isti broj vrijednosti u svim tačkama iz D.

Tada za svaku konačnoznačnu analitičku u D funkciju F s indeksima grananja k_i duž petlji α_i, takvim da su $\varkappa_{ii}/k_i$ cijeli brojevi, postoje holomorfne u D funkcije $\mathcal{C}_{\nu_1 \dots \nu_m}$, takve da je

$$(\text{II}\,14) \qquad F = \sum_0^\infty \mathcal{C}_{\nu_1 \dots \nu_m} H_1^{\nu_1} \cdots H_m^{\nu_m}$$

svuda u D, pri čemu $\| \mathcal{C}_{\nu_1 \dots \nu_m} \|_K^{\frac{1}{|\nu|}} \to 0 \quad (|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_m \to \infty)$ za svaki kompakt $K \subset D$.

Formulisana teorema je slična teoremi 4. Ovdje ulogu funkcija $g_i^{\frac{1}{k_i}}$ igraju funkcije H_i, a umjesto $D \setminus A$ pojavljuje se sama oblast D.

Dokaz. Neka se funkcije H_i zadaju kanonskim elementima, tj. $H_i = \{(B, h_i)\}$. Razmotrimo u oblasti holomorfnosti $\tilde{D} = D \times \mathbb{C}^m \subset \mathbb{C}^{n+m}_{z,w}$ uniju M svih skupova

$$\hat{B} = \{ (z, h_1(z), \dots, h_m(z)) \in \tilde{D} : z \in B \}, (B, h_i) \in H_i .$$

Iz konstrukcije slijedi da je M kompleksna podmnogostrukost oblasti $\tilde{D}$ kompleksne dimenzije n. Zaista, skup $\hat{B}$ je biholomorfno ekvivalentan kugli, a z su lokalne koordinate u $\hat{B}$. Pokažimo još da je skup M povezan.
U tom cilju uzmimo dvije proizvoljne tačke na M:

$$p = (z, h_1(z), \dots, h_m(z)) \quad i \quad p^0 = (z^0, h_1^0(z^0), \dots, h_m^0(z^0)).$$

Element $(B_0, h_1^0) \in H_1$ (s centrom z^0) je analitičko produženje elementa $(B, h_1) \in H_1$ (s centrom z) duž neke putanje $\omega_1 \subset D$ čiji je početak z , a kraj z^0. Produženja ostalih elemenata (B, h_i) duž putanje ω_1 dovode do nekih elemenata (B_0, h_i^*) $(i = 2, \ldots, m)$. Iz uslova (α) slijedi da postoje cijeli brojevi l_i , takvi da se elementi (B_0, h_i^0) dobiju analitičkim produženjem elemenata (B_0, h_i^*) duž putanja $l_i \alpha_i$ $(i = 2, \ldots, m)$. Iz svega slijedi da se produženjem elementa (B, h_i) duž putanje $\omega = \omega_1 (l_2 \alpha_2) \cdots (l_m \alpha_m)$ dobiju elementi (B_0, h_i^0) $(i = 1, \ldots, m)$. Primijetimo da produženju sistema elemenata (B, h_i) $(i = 1, \ldots, m)$ duž neke putanje u D odgovara "ljepljenje" oblasti $\hat{B}$ na M. Kako se produženje duž putanje realizuje konačnim brojem neposrednih produženja, to se tačke p i p^0 povezuju konačnim lancem povezanih okolina na M $(\hat{B} = \hat{B}_1, \hat{B}_2, \ldots, \hat{B}_{N-1}, \hat{B}_N = \hat{B}_0 ; \hat{B}_i \cap \hat{B}_{i+1} \neq \emptyset)$. Znači, skup M je linijski povezan.

Iz uslova (β) slijedi da je M konačnolisni natkrivajući prostor oblasti D sa $\varkappa_{11} \cdots \varkappa_{mm}$ listova. Dalje dokaz teče skoro isto kao u prethodno dokazanoj teoremi 4. Izdvojimo samo mjesta u kojima postoji razlika.

1) <u>Jednoznačnost funkcije $\hat{F}$.</u> Iz konstrukcije mnogostrukosti M slijedi da analitičko produženje funkcije H_i duž putanje $\tau = \delta_1^{-1} \delta_2$ ne mijenja polazni element, pa

na osnovu (α) i $(\text{II}\,10)$ dobijemo da je $t_i = \varrho_i x_{ii}$, gdje je $\varrho_i \in \mathbb{Z}$. S druge strane, $x_{ii}/k_i = s_i$ su cijeli brojevi po pretpostavci, pa je $t_i = \varrho_i s_i k_i$ i

$$[\tau] = \sum_{l=1}^{m} \varrho_l s_l k_l [\alpha_l],$$

itd.

2) Uslov (β) omogućava holomorfno dodefinisati funkciju $\hat{F}$ u nekoj okolini podmnogostrukosti $M \subset \tilde{D}$.

3) Umjesto m-tostrukog Laurent-ovog reda $(\text{II}\,11)$ pojavljuje se m-tostruki Taylor-ov red $\left(\sum_0^\infty\right)$ s holomorfnim u D koeficijentima. ▌

3. U ovom paragrafu daćemo jednu varijantu teoreme 4. Naime, za A ćemo uzeti proizvoljan analitički skup sa konačno mnogo komponenti, ali ćemo zato više pretpostaviti o oblasti D.

Teorema 6. Neka je D oblast holomorfnosti u $\mathbb{C}^m$ takva da je njena druga kohomolška grupa s cjelobrojnim koeficijentima trivijalna, tj. $H^2(D, \mathbb{Z}) = 0$. Neka su, dalje, $A_1, \ldots, A_m$ - različiti nerazloživi analitički skupovi u D kompleksne kodimenzije 1 takvi da je $\pi_1(D \setminus A) \approx \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m \times}$ $\left(A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$. Tada postoje holomorfne u D funkcije $g_1, \ldots, g_m$ takve, da za svaku konačnoznačnu analitičku u $D \setminus A$ funkciju F imamo razvoj

$$F=\sum_{-\infty}^{\infty} c_{\nu_1\dots\nu_m}\, g_1^{\frac{\nu_1}{k_1}}\cdots g_m^{\frac{\nu_m}{k_m}} \quad \text{(u tačkama iz } D\setminus A\text{)},$$

gdje su $c_{\nu_1\dots\nu_m}$ holomorfne funkcije u D, a k_i indeksi grananja funkcije F oko skupova A_i $(i=1,\dots,m)$.

Dokaz. Kako je A_i analitički skup kompleksne kodimenzije 1 u oblasti holomorfnosti D i $H^2(D,\mathbb{Z})=0$, to prema poznatom rezultatu (vidi npr. [19], str. 260) postoji holomorfna u D funkcija g_i takva da je $A_i=\{z\in D: g_i(z)=0\}$ i $\nabla g\neq 0$ na A_i $(i=1,\dots,m)$. Preostaje primijeniti teoremu 4. ▌

Napomena 3. Teorema 6 ostaje na snazi ako uslov $H^2(D,\mathbb{Z})=0$ ispustimo i pretpostavimo da je D Descartes-ov proizvod oblasti $D_\ell\subset\mathbb{C}$ $(\ell=1,\dots,n)$ pri čemu su sve oblasti D_ℓ, izuzev možda jedne, jednostruko povezane (vidi [19], str. 257 i 260).

./.

III G L A V A

U ovoj glavi formulišu se i dokazuju rezultati koji su slični rezultatima I i II glave. Topološki uslov koji se ranije nametao na oblast D sada se prenosi na jednu mnogostrukost koju odredjuju funkcije g_i po kojima se razvija data analitička funkcija F. Na kraju se daje neophodan i dovoljan uslov pod kojim se jedna analitička funkcija može razviti po stepenima druge.

1. Neka je D oblast u $\mathbb{C}^n$ i g holomorfna u D funkcija takva da je $A=\{z\in D: g(z)=0\}$ nerazloživ analitički skup u D i $\nabla g \not\equiv 0$ na A. Označimo sa A^* skup regularnih tačaka skupa A, tj. $A^*=\{z\in A: \nabla g|_z \neq 0\}$. Neka je, dalje, u $D\setminus A$ zadana konačnoznačna analitička funkcija F ukupnošću svojih kanonskih elemenata. Na potpuno isti način kao u prvom paragrafu II glave definiše se indeks grananja k funkcije F oko skupa A. Okolinu U_a koja se pojavljuje u definiciji indeksa grananja ovdje ćemo označavati istim simbolom, a umjesto γ_i koristićemo oznaku γ_a.

Razmotrimo oblast $D_* = D\setminus(A\setminus A^*)$ i analitičke skupove

$$M=\{(z,w)\in D_*\times\mathbb{C} : w^k=g(z)\},$$

$$\hat{M}=\{(z,w)\in D\times(\mathbb{C}\setminus\{0\}) : w^k=g(z)\}=M\setminus(A^*\times\{0\}).$$

Kako je $\nabla(w^k-g)=(-\nabla g, kw^{k-1})\neq 0$ na M to je analitički skup M ujedno i kompleksna podmnogostrukost oblasti $D_*\times\mathbb{C}\subset\mathbb{C}^{n+1}$. Drugi analitički skup $\hat{M}$ je k-lisni natkrivajući prostor oblasti $D\setminus A$ i kompleksna podmnogostrukost oblasti $D\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})\subset\mathbb{C}^{n+1}$.

Sada ćemo analitičku funkciju F, definisanu u $D\setminus A$, "podići" na mnogostrukost $\hat{M}$. U tom cilju fiksirajmo tačku $(z^0,w^0)\in\hat{M}$ $(z^0\in\gamma_a)$ i uzmimo neki element (B_0,f_0) funkcije F s centrom z^0. Označimo sa h_0 granu funkcije $g^{\frac{1}{k}}$, izdvojenu u B_0 uslovom $h_0(z^0)=w^0$, i u tačkama skupa

$$\hat{B}_0=\{(z,h_0(z)) : z\in B_0\}\subset\hat{M}$$

stavimo $\hat{f}_0(z,h_0(z))=f_0(z)$. "Podizanjem" elementa (B_0,f_0) na mnogostrukosti $\hat{M}$ smo dobili analitički element $(\hat{B}_0,\hat{f}_0)$ s centrom (z^0,w^0). Uzmimo sada proizvoljnu putanju $\hat{\delta}$ na M s početkom (z^0,w^0); njen kraj označimo sa (z,w), a projekciju u $D\setminus A$ sa δ. Analitičkim produženjem elementa (B_0,f_0) duž putanje δ dobije se neki element $(\mathcal{B},f)$ s centrom z. "Podizanjem" tog elementa na $\hat{M}$ na opisani način, dobije se neki element $(\hat{\mathcal{B}},\hat{f})$ s centrom (z,w). Kako $\hat{M}$ natkriva $D\setminus A$ to se svaka putanja u $D\setminus A$ s početkom z^0 na jedinstven način "podiže" na $\hat{M}$ do neke putanje s početkom (z^0,w^0). Dakle, u procesu analitičkog produženja elementa $(\hat{\mathcal{B}}_0,\hat{f}_0)$ na $\hat{M}$, svi elementi funkcije F se "podižu" na $\hat{M}$. Lako je uvidjeti da je skup $\hat{F}=\{(\hat{\mathcal{B}},\hat{f})\}$ svih "podignutih" elemenata funkcije F analitička funkcija na kompleksnoj mnogostrukosti $\hat{M}$ (analitička u odnosu na lokalne koordinate z na $\hat{M}$). Specijalno, možemo govoriti o analitičkom produženju elemenata funkcije $\hat{F}$ duž putanja na $\hat{M}$.

Razmotrimo otvorene (u M i $\hat{M}$ respektivno) skupove

$$M_a=\{(z,w)\in U_a\times\mathbb{C} : w^k=g(z)\}\subset M,$$

$$\hat{M}_a=\{(z,w)\in U_a\times(\mathbb{C}\setminus\{0\}) : w^k=g(z)\}=M_a\setminus(A^*\times\{0\})\subset\hat{M},$$

$$(a\in A^*)$$

uzmimo neki analitički element $(\hat{\mathcal{B}}_0,\hat{f})$ s centrom $(z^0,w)\in\hat{M}_a$ $(z^0\in\gamma_a)$ i produžimo ga duž putanja u $\hat{M}_a$. Uzimajući u obzir definiciju grananja, lako je uvidjeti da će se kao rezultat tih analitičkih produženja dobiti jednoznačna analitička funkcija $\hat{f}_a$ u $\hat{M}_a$ (vidi dokaz teoreme 1 u I glavi ; ovdje je $\pi_1(U_a\setminus A)\approx\mathbb{Z}$, a γ_a generiše grupu π_1). Kod nas se pojavila trojka $(M_a,\hat{M}_a,\hat{f}_a)$ koju ćemo nazvati <u>uopštenim analitičkim elementom</u> funkcije $\hat{F}$.

Tačku $(a,0) \in M$ prirodno je smatrati centrom tog elementa. Iz teoreme o monodromiji i povezanosti skupa A^* slijedi da u svakoj tački $a \in A^*$ imamo jedan isti (konačan) broj uopštenih elemenata $(M_a, \hat{M}_a, \hat{f}_a)$. Ako elementima $(\hat{B}, \hat{f})$ funkcije $\hat{F}$ dodamo uopštene elemente $(M_a, \hat{M}_a, \hat{f}_a)$ $(a \in A^*)$ onda, očevidno, možemo govoriti o analitičkom produženju duž putanja na M. Na isti način, na koji se dokazuje standardna, može se dokazati i slijedeća :

Teorema o monodromiji. Neka je $\hat{F}_{(z,w)}$ analitički (obični ili uopšteni) element funkcije $\hat{F}$ s centrom $(z,w) \in M$, a $\hat{\delta}_1$ i $\hat{\delta}_2$ putanje na M sa zajedničkim početkom (z,w) i zajedničkim krajem. Ako su putanje $\hat{\delta}_1$ i $\hat{\delta}_2$ homotopne na M onda je rezultat produženja elementa $\hat{F}_{(z,w)}$ duž obe putanje isti.

Teorema 7. Neka je D oblast holomorfnosti u $\mathbb{C}^n$ i g holomorfna u D funkcija takva da je $A = \{z \in D : g(z) = 0\}$ nerazloživ analitički skup i $\nabla g \neq 0$ na A. Neka je, dalje, u $D \setminus A$ zadana konačnoznačna analitička funkcija F s indeksom granenja k oko skupa A. Ako je skup

$$M = \{(z,w) \in D_* \times \mathbb{C} : w^k = g(z)\},$$

gdje je D_* oblast D bez singularnih tačaka skupa A $(D_* = D \setminus (A \setminus A^*))$, jednostruko povezan (tj. $\pi_1(D) = 0$)

onda postoje holomorfne u D funkcije c_ν takve da je

$$F=\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu g^{\frac{\nu}{k}}$$

svuda u $D\setminus A$.

Dokaz. Funkciju F smo podigli na mnogostrukost $\hat{M}$ i dobili analitičku funkciju $\hat{F}$. Dokažimo da je funkcija $\hat{F}$ jednoznačna. U tom cilju elementima funkcije $\hat{F}$ dodajmo uopštene analitičke elemente i označimo sa $\hat{\delta}_1$ i $\hat{\delta}_2$ dvije proizvoljne putanje na $\hat{M}$ sa zajedničkim početkom (z^0, w^0) i zajedničkim krajem. Kako je mnogostrukost M jednostruko povezana, a $\hat{\delta}_1$ i $\hat{\delta}_2$ su putanje na M, to su one homotopne na M. Iz teoreme o monodromiji slijedi da analitička produženja elementa $(\hat{B}_0, \hat{f}_0)$ duž putanja $\hat{\delta}_1$ i $\hat{\delta}_2$ dovode do istog elementa na M, odnosno na $\hat{M}$ (jer je njihov zajednički kraj na $\hat{M}$).

Ostatak dokaza je isti kao u slučaju teoreme 1 u prvoj glavi. ▌

2. U ovom odjeljku razmotrićemo opštiju situaciju – – kada se analitički skup A sastoji iz više komponenti.

Teorema 8. Neka je D oblast holomorfnosti u $\mathbb{C}^n$ i $g_1, \dots, g_m$ holomorfne funkcije u D, takve da su $A_i = \{z\in D : g_i(z)=0\}$ različiti nerazloživi analitički skupovi i $\nabla g_i \neq 0$ na A_i. Neka je, dalje, u $D\setminus A$ $(A=\bigcup_{i=1}^{m} A_i)$ zadana konačnoznačna analitička funkcija F s indeksima grananja k_i oko skupova A_i. Ako je skup

$$M=\{(z,w)=(z_1,\dots,z_m,w_1,\dots,w_m)\in D_*\times\mathbb{C}^m : w_1^{k_1}-g_1(z)=\dots=w_m^{k_m}-g_m(z)=0\},$$

gdje D_* oblast D bez singularnih tačaka skupa A, jednostruko povezan (tj. $\pi_1(D)=0$) onda postoje holomorfne u D funkcije $c_{\nu_1\dots\nu_m}$ takve da je

$$F=\sum_{-\infty}^{\infty} c_{\nu_1\dots\nu_m}\, g_1^{\frac{\nu_1}{k_1}}\cdots g_m^{\frac{\nu_m}{k_m}}$$

svuda u $D\setminus A$.

Dokaz. Razmotrimo Jacobi-jevu matricu sistema funkcija $\varphi_i(z,w)=w_i^{k_i}-g_i(z)$ $(i=1,\dots,m)$

$$(\text{III}\,1)\quad \begin{pmatrix} -\frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \dots & -\frac{\partial g_1}{\partial z_m} & k_1 w_1^{k_1-1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \dots & -\frac{\partial g_2}{\partial z_m} & 0 & k_2 w_2^{k_2-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \dots & -\frac{\partial g_m}{\partial z_m} & 0 & 0 & \dots & k_m w_m^{k_m-1} \end{pmatrix}$$

i primijetimo da je njen rang jednak m u svim tačkama (z,w) skupa M. Zaista, ako je $z\in D\setminus A$ onda je $g_i(z)\neq 0$ za svako i, pa je različit od nule minor koji se sastoji iz posljednjih m stubaca matrice (III 1). U drugom slučaju - kada je z regularna tačka analitičkog skupa A - imamo da, zbog strukture analitičkih skupova (razlaganje analitičkog skupa na rerazložive komponente), tačka z pripada samo jednom od skupova $A_i^* = A_i \cap A^*$ (A^* - skup svih regularnih tačaka skupa A) npr. skupu A_j^* . Imamo, dakle, $g_j(z)=0, g_i(z)\neq 0$ za $i\neq j$ i $\nabla g_j|_z \neq 0$. Odredjenosti radi, možemo smatrati da je $\frac{\partial g_j}{\partial z_1}\neq 0$. U drugom slučaju $(z\in A^*)$ različit od nule je minor koji se formira od prvog stupca matrice $(\text{III}\,1)$ i $m-1$ stubaca koji se dobiju od posljednjih m kada se izbaci $m+j$ -ti.

Kako je rang matrice $(\text{III}\,1)$ jednak m u svim tačkama analitičkog skupa M to je M kompleksna podmnogostrukost oblasti $D_* \times \mathbb{C}^m$ kompleksne dimenzije m . Iz istih razloga i analitički skup

$$\hat{M}=\{(z,w)=(z_1,\dots,z_m,w_1,\dots,w_m)\in D\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})^m : w_1^{k_1}-g_1(z)=\dots=w_m^{k_m}-g_m(z)=0\}\subset M$$

je kompleksna podmnogostrukost oblasti $D\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})^m$ kompleksne dimenzije m . S druge strane, $\hat{M}$ je natkrivajući prostor oblasti $D\setminus A$ sa $k_1\cdots k_m$ listova.

Na potpuno isti način kao u dokazu teoreme 4 (II glava) funkcija F se "podiže" na mnogostrukost $\hat{M}$ pa se dobije neka analitička funkcija $\hat{F}$ na $\hat{M}$ (analitička u odnosu na lokalne koordinate z na $\hat{M}$). Kao u prethodnom odjeljku i ovdje može biti riječi o uopštenim analitičkim elementima funkcije $\hat{F}$ s centrima $(a, w_1, \dots, w_{i-1}, 0, w_{i+1}, \dots, w_m \in M)$ $(a \in A_i^*)$. Ako elementima funkcije $\hat{F}$ dodamo uopštene analitičke elemente onda možemo govoriti o analitičkom produženju duž putanja na M. Kako je mnogostrukost M jednostruko povezana to iz (proširene) teoreme o monodromiji slijedi da je $\hat{F}$ jednoznačna analitička (dakle, holomorfna) funkcija na $\hat{M}$, itd. (vidi dokaz teoreme 4, II glava).▌

3. Ovdje ćemo obraditi jedan poseban slučaj - kada je riječ o dvoznačnoj analitičkoj funkciji.

Teorema 9. Neka je D jednostruko povezana oblast u $\mathbb{C}^n$ i A skup nula holomorfne u D funkcije g, takve da je $\nabla g \neq 0$ u svim regularnim tačkama skupa A. Tada za svaku dvoznačnu analitičku u $D \setminus A$ funkciju F koja se grana "oko" A*), postoje holomorfne u $D \setminus A$ funkcije a i b takve da je

$$F = a + b\sqrt{g}$$

svuda u $D \setminus A$.

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu tačku $z^0 \in D \setminus A$ i oba elementa (B, f_1) i (B, f_2) funkcije F s centrom z^0.

---

*) To znači da je indeks grananja funkcije F u svim regularnim tačkama skupa A jednak 2.

Tada je u kugli B funkcija F rješenje (po w) jednačine

$$(w-f_1)(w-f_2)=0,$$

odnosno

$$w^2-(f_1+f_2)w+f_1f_2=0.$$

Analitičkim produžavanjem funkcija f_1+f_2 i f_1f_2 u oblasti $D\setminus A$ dobiće se, očevidno, jednoznačne analitičke funkcije koje ćemo označiti redom sa c_1 i c_2. Odatle slijedi da je (svuda u $D\setminus A$) funkcija F rješenje jednačine

$$w^2-c_1w+c_2=0,$$

tj.

(III 2) $$F-\frac{c_1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{c_1^2-4c_2}.$$

Uzmimo proizvoljnu petlju δ u $D\setminus A$. Kako je D jednostruko povezana oblast to se petlja δ može izraziti (vidi [13], str. 112) preko prostih petlji*) duž kojih je $|\Delta \arg g|=2\pi$ i duž kojih analitičko produženje funkcije F permutuje elemente. Imajući u vidu da se funkcija $F-\frac{c_1}{2}$ na isti način grana kao i funkcija F i da je indeks grananja jednak 2, iz prethodnog slijedi da analitičko produženje funkcije $F-\frac{c_1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{c_1^2-4c_2}$ permutuje analitičke elemente

*) Vidi dokaz leme u II glavi. Tamo su α_i bile proste petlje.

ako i samo ako je $\Delta_\delta \arg g = 2\pi(2l+1),\ l \in \mathbb{Z}$.
Iz posljednjeg se izvodi zaključak da je

$$\sqrt{\frac{c_1^2 - 4c_2}{g}}$$

jednoznačna analitička (tj. holomorfna) funkcija u $D \setminus A$.
Iz (III 2) slijedi traženi rezultat

$$F = \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_1^2 - 4c_2}{g}}\sqrt{g}\,. \blacksquare$$

4. Neka je F k-značna analitička funkcija u oblasti $D \subset \mathbb{C}^n$ i neka su $F_1 = (B, f_1), \dots, F_k = (B, f_k)$ njeni analitički elementi s istim centrom $z^\circ \in D$. Analitičkim produženjem tih elemenata duž neke petlje δ s početkom z° dobiju se svi elementi funkcije F, ali u drugom poretku, tj. redom $F_{p_1}, \dots, F_{p_k}$, gdje je $(p_1, \dots, p_k) = p$ neka permutacija od k elemenata $1, \dots, k$. Dakle, petlji δ odgovara neka permutacija $(p_1, \dots, p_k)$. Iz teoreme o monodromiji slijedi da homotopnim petljama odgovara ista permutacija, pa se može govoriti o preslikavanju

$$[\delta] \longrightarrow (p_1, \dots, p_k)$$

grupe $\pi_1(D)$ u grupu S_k svih permutacija od k elemenata $1, \dots, k$. To preslikavanje označimo sa h_F i primijetimo da je homomorfizam. Njegovo jezgro označimo standardnom oznakom $\ker h_F$. U slučaju beskonačne analitičke funkcije F (tada je broj analitičkih elemenata u svakoj tački prebrojiv) definiše se homomorfizam h_F grupe $\pi_1(D)$ u grupu S svih permutacija skupa N prirodnih brojeva.

<u>Teorema 10.</u> <u>Neka je D oblast holomorfnosti u C^n, F i H analitičke funkcije u D, a $k(F)$ i $k(H)$ brojevi*) njihovih elemenata u proizvoljnoj tački iz D. Pretpostavimo još da su elementi funkcije H razdvojeni**) u svim tačkama iz D. Da bi se funkcija F razvila po pozitivnim stepenima funkcije H u red s holomorfnim u D koeficijentima (tj. da bi postojale holomorfne u D funkcije c_ν, takve da je</u>

$$(\text{III}\,3) \qquad F=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu H^\nu \text{ u } D),$$

<u>neophodno je i dovoljno da bude</u>

$$(\text{III}\,4) \qquad \ker h_H \subset \ker h_F;$$

<u>pri tome je $k(F) \leq k(H)$.</u>

<u>Dokaz</u>

(I) <u>Neophodnost uslova (III 4).</u> Treba dokazati da (III 3) $\Rightarrow$ (III 4). U tom cilju uzmimo proizvoljni element $[\delta] \in \ker h_H$. Posljednje znači da anali-

---

*) Brojevi $k(F)$ i $k(H)$ mogu biti konačni i beskonačni.

**) Kažemo da su dva elementa (B,h) i (B,h^*) funkcije H (s istim centrom) <u>razdvojena</u> ako je $h(z)\neq h^*(z)$ za svako $z\in B$.

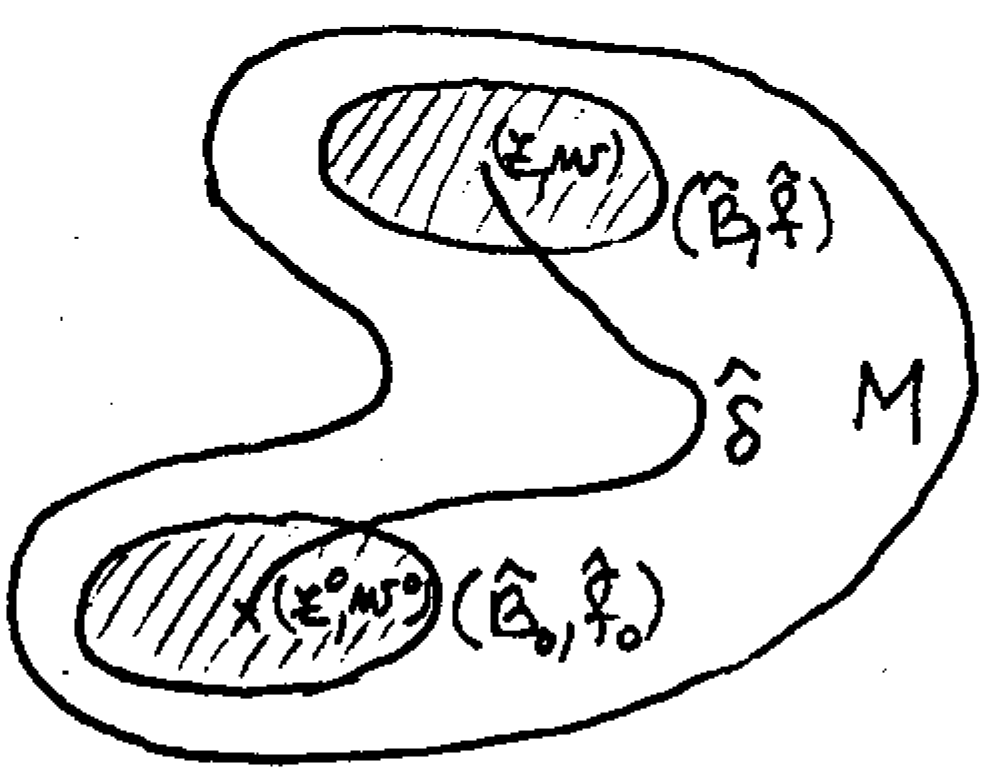
tičko produženje funkcije H duž putanje δ ne permutuje njene elemente, pa na osnovu $(\mathrm{III}\,3)$ zaključujemo da ni analitičko produženje funkcije F duž iste putanje ne permutuje elemente posljednje ; slijedi da $[\delta] \in \mathit{kom}\, h_F$.

(II) <u>Dovoljnost uslova $(\mathrm{III}\,4)$.</u> Treba dokazati da $(\mathrm{III}\,4) \Longrightarrow (\mathrm{III}\,3)$. Neka je funkcija H zadana kanonskim elementima, tj. $H = \{(B, h)\}$. Razmotrimo u oblasti holomorfnosti $\tilde{D} = D \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{m+1}_{z,w}$ uniju M svih skupova $\hat{B} = \{(z, h(z)) \in \tilde{D} : z \in B\}, (B, h) \in H$. Ako se uzme u obzir definicija analitičke funkcije lako je uvidjeti da je M kompleksna povezana podmnogostrukost oblasti $\tilde{D}$. S druge strane, M je natkrivajući prostor oblasti D jer su, po pretpostavci, elementi funkcije H razdvojeni u svim tačkama iz D.

Sada "podignimo" funkciju F na mnogostrukost M U tom cilju fiksirajmo tačku $(z^0, w^0) \in M$ i neki kanonski element (B_0, f_0) funkcije F s centrom z^0. Prema konstrukciji mnogostrukosti M u B_0 postoji holomorfna funkcija h_0 takva da je $(B_0, h_0) \in H$ i $h_0(z^0) = w^0$. U tačkama skupa $\hat{B}_0 = \{(z, h_0(z)) : z \in B_0\}$ stavimo

$$\hat{f}_0(z, h_0(z)) = f_0(z).$$

Uredjen par $(\hat{B}_0, \hat{f}_0)$ je "podignuti" element funkcije F, a tačka (z^0, w^0) njegov centar. Neka je sada $\hat{\delta}$ proizvoljna putanja na M s početkom (z^0, w^0). Njen kraj ozna-



čimo sa (z,w), a projekciju u $D\setminus A$ sa δ. Analitičkim produženjem elementa (B_0,f_0) duž putanje δ dobije se neki element (B,f) s centrom z. "Podizanjem" tog elementa na M na opisani način, dobije se neki element $(\hat B,\hat f)$ s centrom (z,w). Kako M natkriva D to se svaka putanja u D s početkom z^0 na jedinstven način "podiže" na M do neke putanje s početkom (z^0,w^0). Dakle, u procesu analitičkog produženja elementa $(\hat B_0,\hat f_0)$ na M svi elementi funkcije F se "podižu" na M. Lako je uvidjeti da je skup $\hat F=\{(\hat B,\hat f)\}$ svih podignutih elemenata funkcije F analitička funkcija na kompleksnoj mnogostrukosti M (analitička u odnosu na lokalne koordinate z na M).

Dokažimo da je $\hat F$ jednoznačna funkcija na M. Da bismo to dokazali uzmimo proizvoljnu tačku $(z,w)\in M$ i proizvoljne putanje $\hat\delta_1$ i $\hat\delta_2$ na M sa zajedničkim početkom (z^0,w^0) i zajedničkim krajem (z,w) i dokažimo da se analitička produženja elementa (B_0,f_0) duž putanja-projekcija δ_1 i δ_2 podudaraju. Drugim riječima, treba dokazati da analitičko produženje duž petlje $\tau=\delta_1^{-1}\delta_2$ ne mijenja polazni element (B,f). Kako je τ projekcija zatvorene putanje $\hat\tau=\hat\delta_1^{-1}\hat\delta_2$ to iz konstrukcije mnogostrukosti M slijedi da analitičko produženje funkcije H duž putanje τ ne permutuje njene elemente, pa je $[\tau] \in \ker h_H$. Odavde, na osnovu $(\text{III}\,4)$, slijedi da $[\tau] \in \ker h_F$. Posljednje znači da analitičko produženje funkcije F duž putanje τ ne permutuje, odnosno ne mijenja njene elemente ; specijalno, ne mijenja element (B,f). Dakle, $\hat{F}$ je jednoznačna analitička (tj. holomorfna) funkcija na M (holomorfna u odnosu na lokalne koordinate z na M). Dokaz dalje teče kao u teoremi 1 (I glava). Izdvojimo mjesta u kojima postoji razlika.

1) Uslov o razdvojenosti elemenata funkcije H omogućava holomorfno dodefinisati funkciju $\hat{F}$ u nekoj okolini podmnogostrukosti $M \subset \tilde{D}$.

2) Umjesto Laurent-ovog reda $(\text{I}\,4)$ pojavljuje se Taylor-ov red $(\sum_0^\infty)$ s holomorfnim u D koeficijentima.

Preostalo je još da se dokaže da je $k(F) \leq k(H)$ kada je tačno $(\text{III}\,4)$, odnosno $(\text{III}\,3)$. To slijedi iz $(\text{III}\,3)$. Zaista, $(\text{III}\,3)$ znači da za svaku granu f funkcije F, izdvojenu u nekoj jednostruko povezanoj oblasti $G \subset D$, postoji u G grana h funkcije H takva da je

$$F = \sum_0^\infty c_\nu h^\nu$$

u G . Kako različitim granama f odgovaraju različite grane h to funkcija H treba da ima bar toliko grana koliko ima F , tj. $k(H) \geq k(F)$.▌

5. U ovom paragrafu daćemo uopštenje teoreme 10.

Teorema 11. Neka je D oblast holomorfnosti u $\mathbb{C}^m$, $F, H_1, \ldots, H_m$ - analitičke funkcije u D , a $k(F), k(H_1), \ldots, k(H_m)$ - brojevi njihovih elemenata u proizvoljnoj tački iz D . Pretpostavimo još da su elementi svake funkcije H_i $(i=1,\ldots,m)$ razdvojeni u svim tačkama oblasti D . Da bi se funkcija F razvila po pozitivnim stepenima funkcija $H_1, \ldots, H_m$ u red s holomorfnim u D koeficijentima (tj. da bi postojale holomorfne u D funkcije $c_{\nu_1 \ldots \nu_m}$, takve da je

$$(\text{III}\,5) \qquad F = \sum_0^\infty c_{\nu_1 \ldots \nu_m} H_1^{\nu_1} \cdots H_m^{\nu_m} \text{ u } D),$$

neophodno je i dovoljno da bude

$$(\text{III}\,6) \qquad \bigcap_{i=1}^m \ker h_{H_i} \subset \ker h_F ;$$

pri tome je $k(F) \leq k(H_1) \cdots k(H_m)$.

Dokaz

(I) Neophodnost uslova (III 6). Treba dokazati da (III 5) $\Rightarrow$ (III 6) . Ako je $[\delta] \in \bigcap_{i=1}^m \ker h_{H_i}$ onda to znači da analitičko produženje svake funkcije H_i $(i=1,\ldots,m)$ duž putanje δ ne permutuje njene elemente, pa na osnovu (III 5) zaključujemo da se to isto može reći za funkciju F ; slijedi da $[\delta] \in \ker h_F$.

(II) Dovoljnost uslova (III6). Treba dokazati da (III6) $\Longrightarrow$ (III5). Neka se funkcije H_i zadaju kanonskim elementima, tj. $H_i = \{(B, h_i)\}$. U oblasti holomorfnosti $\tilde{D} = D \times \mathbb{C}^m \subset \mathbb{C}^{n+m}_{z,w}$ posmatra se unija M svih skupova

$$\hat{B} = \{(z, h_1(z), \dots, h_m(z)) \in \tilde{D} : z \in B\}, \ (B, h_i) \in H_i .$$

U drugoj glavi (vidi dokaz teoreme 5) je dokazano da je M kompleksna povezana podmnogostrukost oblasti $\tilde{D}$. Sem toga, M je natkrivajući prostor oblasti D zahvaljujući pretpostavci da su elementi svake od funkcija $H_1, \dots, H_m$ razdvojeni.

Na mnogostrukost M "podiže" se funkcija F na način na koji je to uradjeno u dokazu teoreme 4 (II glava). Naime, fiksira se tačka $(z^0, w^0) \in M$ i u njenu okolinu "podigne" neki element (B_0, f_0) s centrom z^0. Zatim se uzme proizvoljna tačka $(z, w) \in M$ i spoji sa (z^0, w^0) proizvoljnom putanjom $\hat{\delta} \subset M$. Projektovanjem putanje $\hat{\delta}$ u oblast D dobije se putanja δ s krajevima z^0 i z. Sada se element (B_0, f_0) analitički produži duž putanje δ i dobije se neki element (B, f) s centrom z. Posljednji se "podiže" na M, pa se dobije analitički element $(\hat{B}, \hat{f})$ na M s centrom (z, w). Ukupnost $\hat{F}$ svih tih elemenata $(\hat{B}, \hat{f})$ je analitička funkcija na mnogostrukosti M (analitička u odnosu na lokalne koordinate z na M).

Dokažimo da je $\hat{F}$ jednoznačna funkcija. U tom cilju uzmimo proizvoljnu tačku $(z,w) \in M$ i proizvoljne putanje $\hat{\delta}_1$ i $\hat{\delta}_2$ na M sa zajedničkim početkom (z^0, w^0) i zajedničkim krajem (z,w) i dokažimo da se analitička produženja elementa (B_0, f_0) duž putanja-projekcija δ_1 i δ_2 podudaraju. Drugim riječima, treba dokazati da analitičko produženje duž petlje $\tau = \delta_1^{-1}\delta_2$ ne mijenja polazni element (B, f). Kako je τ projekcija zatvorene putanje $\hat{\tau} = \hat{\delta}_1^{-1}\hat{\delta}_2$ to iz konstrukcije mnogostrukosti M slijedi da analitičko produženje svake funkcije H_i $(i = 1, \ldots, m)$ duž putanje τ ne permutuje njene elemente, pa je $[\tau] \in \ker h_{H_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Odavde, na osnovu $(\mathrm{III}\,6)$ slijedi da $[\tau] \in \ker h_F$. Posljednje znači da analitičko produženje funkcije F duž putanje τ ne permutuje, odnosno ne mijenja njene elemente ; specijalno, ne mijenja element (B, f). Dakle, $\hat{F}$ je jednoznačna analitička (tj. holomorfna) funkcija na M (holomorfna u odnosu na lokalne koordinate z na M). Dokaz dalje teče kao u teoremi 4 (II glava). Izdvojimo samo mjesta u kojima postoji razlika.

1) Uslov o razdvojenosti elemenata svake funkcije H_i $(i = 1, \ldots, m)$ omogućava holomorfno dodefinisati funkciju $\hat{F}$ u nekoj okolini podmnogostrukosti $M \subset \tilde{D}$.

2) Umjesto m-tostrukog Laurent-ovog reda $(\mathrm{II}\,11)$ po-

javljuje se m-tostruki Taylor-ov red $\left(\sum_0^\infty\right)$ s holomorfnim u D koeficijentima.

Preostalo je još da se dokaže da je $k(F) \leq k(H_1) \cdots k(H_m)$ kada je tačno $(\underline{III}\,5)$, odnosno $(\underline{III}\,6)$. Zaista, $(\underline{III}\,5)$ znači da za svaku granu f funkcije F, izdvojenu u nekoj jednostruko povezanoj oblasti $G \subset D$, postoji u istoj oblasti m-torka $(h_1, \ldots, h_m)$ grana h_i funkcija H_i $(i = 1, \ldots, m)$ takva da je

$$f = \sum_0^\infty c_{\nu_1 \cdots \nu_m} h_1^{\nu_1} \cdots h_m^{\nu_m}$$

u G. Kako različitim granama f odgovaraju različite m-torke $(h_1, \ldots, h_m)$ to tih m-torki treba da bude bar toliko koliko funkcija F ima grana f, tj. $k(H_1) \cdots k(H_m) \geqslant k(F)$. ▌

%

L I T E R A T U R A

[1] Behnke H., Thullen P.: Theorie der Funktonen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebn. d. Math, 51, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

[2] Hu, S.-T.: Elements of Modern Algebra. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1965.

[3] Hu, S.-T.: Homotopy Theory. Academic Press, New York, 1959.

---

[4] Бохнер С., Мартин У.Т.: Функции многих комплексных переменных, Москва, ИИЛ, 1951.

[5] Владимиров В.С.: Методы теории функций многих комплексных переменных, Москва, "Наука", 1964.

[6] Ганнинг Р., Росси Х.: Аналитические функции многих комплексных переменных, Москва, "Мир", 1969.

[7] Мальгранж Б.: Лекции по теории функций нескольких комплексных переменных, Москва, "Наука", 1969.

[8] Милнор Дж.: Особые точки комплексных гиперповерхностей, Москва, "Мир", 1971.

[9] Олейников В.А.: Алгебраические функции с разделенными особенностями, Изв. А. Н. СССР, Сер. Матем., 35 /1971/, 1294-1315.

[10] Рудин У.: Теория функций в поликруге, Москва, "Мир", 1974.

[11] Рыбников К.А.: История математики, Москва, МГУ, 1974.

[12] Удовичич Э.: Аналог рядов Пюизо для функций многих комплексных переменных, Матем. весник, 13 /28/ 1976, 343-348.

[13] Фам Ф.: Введение в топологическое исследование особенностей Ландау, Москва, "Мир", 1970.

[14] Фукс Д.Б., Фоменко А.Т., Гутенмахер В.Л.: Гомотопическая топология, Москва, МГУ, 1969.

[15] Хёрмандер Л.: Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, Москва, "Мир", 1968.

[16] Чеботарев Н.Г.: Теория алгебраических функций, М. Л., Гостехиздат 1948.

[17] Чирка Е.М.: Разложения в ряды и скорость рациональных приближений для голоморфных функций с аналитическими особенностями, Матем. сб., 93 /135/ /1974/, 314-324.

[18] Шабат Б.В.: Введение в комплексный анализ, часть I, Москва, "Наука", 1976.

[19] Шабат Б.В.: Введение в комплексный анализ, часть II, Москва, "Наука", 1976.

[20] Эрве М.: Функции многих комплексных переменных, Москва, "Мир", 1965.

I N D E K S

Analitička funkcija 9

Indeks grananja duž putanje 15,30

Indeks grananja oko skupa 21

Indeks grananja u oblasti 16

Indeks grananja u tački 20

Podignuti analitički element 11

Projekcija putanje 11

Prosta petlja 43

Puiseux-ov red 1

Razdvojenost analitičkih elemenata 45

Red grananja analitičke funkcije 9

Skup grananja analitičke funkcije 9

Teorema o monodromiji 38

Uopšteni analitički element 37