Vladimir P. Mićić

KVAZIKONFORMNA PRESLIKAVANJA I KORESPONDENCIJA GRANICA U R^n

Doktorska disertacija

BEOGRAD

1973.

UVODNI DEO

1. Teorija kvazikonformnih preslikavanja predstavlja oblast teorije funkcija kompleksne promenljive koja se u poslednje vreme veoma intenzivno razvija i nalazi široku primenu. Ta su preslikavanja tesno povezana sa suštinskim klasičnim problemima teorije analitičkih funkcija i ne predstavljaju formalnu generalizaciju konformnih preslikavanja, na što bi njihov naziv, eventualno, mogao da asocira, nego su prirodni sastavni deo teorije funkcija.

Teorija kvazikonformnih preslikavanja u ravni blisko je povezana s geometrijskom teorijom funkcija jedne kompleksne promenljive. Osvrnimo se s nekoliko reči na njihov razvoj. Prvi put se preslikavanja, koja su u suštini predstavljala jednu klasu kvazikonformnih preslikavanja, pominju u radu Grotzsch-a /29/ iz 1928. godine. On je rešavao problem o preslikavanju kvadrata na pravougaonik uz uslov da se temena preslikaju u temena i da preslikavanje bude što je mogućno bliže konformnom. S druge strane, nezavisno od Grotzsch-a, Lavrentjev je u radu /32/ 1932. godine došao do pojma kvazikonformnih preslikavanja kao klase preslikavanja koja zadovoljava sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \quad \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \; ; \quad \alpha\gamma - \beta^2 = 1,$$

što ustvari predstavlja uopštenje poznatog Koši-Rimanovog sistema. Dalje se ta teorija intenzivno razvijala kroz radove mnogih istaknutih specijalista za teoriju funkcija kompleksne promenljive, pre svega kroz radove samog Lavrentjeva, zatim Ahlfors-a, Beurling-a, Volkoviskog, Lehto-a, Virtanen-a, Šabata, Gehring-a i dr. Iscrpan pregled rezultata iz ove oblasti može se naći u monografijama Volkoviskog /69/, Kunzi-a /31/, Lehto-a i Virtanen-a /37/, Ahlfors-a /3/ i nizu radova pomenutih i drugih autora. Značajno je pri tome napomenuti da su ova preslikavanja našla veoma široku primenu u rešavanju različitih problema iz dinamike fluida, teorije elastičnosti, matematičke kartografije itd. o čemu se informacije mogu naći u radovima Lavrentjeva /35/, /36/, Meščerjakova /46/ i dr.

Kvazikonformna preslikavanja u prostoru prvi put su posmatrana u radu Lavrentjeva /33/ 1938. godine. Važno je napomenuti da je u tom radu ne samo preneta definicija kvazikonformnog preslikavanja na prostorni slučaj nego su istaknute osnovne karakteristike prostornog slučaja i njegove specifičnosti u odnosu na ravna kvazikonformna preslikavanja. Posle toga dugo vremena su ova preslikavanja ostala po strani. Samo su Markuševič /42/ i Lavrentjev /34/ posvetili neznatnu pažnju njihovom proučavanju. Razlog za to treba tražiti pre svega u nedostatku efikasnog aparata koji bi omogućio njihovo ispitivanje.

Na snažan zamah, koji je teorija kvazikonfomnih preslikavanja u prostoru dobila šezdesetih godina ovog veka, uticala je pre svega baš činjenica što je neposredno pre toga razradjen takav aparat u vidu teorije ekstremalne dužine (po terminologiji Ahlforsa i Beurlinga) odnosno metoda modula porodice krivih u radovima Ahlfors-a i Beurling-a /5/, Fuglede-a /17/ i Šabata /51/. Ovo je omogućilo da se gotovo istovremeno pojavi niz radova koji su udarili temelje teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. To su bili radovi Šabata /62/, Gehring-a /20/, /21/ i Vaisala-e /64/.

Na taj način može se reći da razvitak ove teorije počinje 1960. godine. Otada se ona veoma intenzivno razvija i danas predstavlja značajan deo opšte teorije funkcija. Značaj kvazikonfomnih preslikavanja u prostoru treba pre svega tražiti u činjenici da u slučaju prostornih preslikavanja klasa konformnih preslikavanja predstavlja veoma usku klasu. Podsetimo se da je Liouville još 1850. godine /38/ dokazao teoremu koja se može iskazati i na sledeći način:

T e o r e m a 1 . U euklidskom prostoru R^n, za $n>2$, klasa konformnih preslikavanja se iscrpljuje preslikavanjima koja predstavljaju superpozicije konačnog broja Moebius-ovih transformacija.

Upravo ova činjenica što u prostoru konformna preslikavanja predstavljaju usku, siromašnu klasu prelikavanja, razlog je što se pošlo putem traženja bogatije klase preslikavanja koja će ipak imati upotrebljiva geometrijska svojstva. Na taj način je trivijalnost klase konformnih preslikavanja u prostoru, što predstavlja odredjenu teškoću i pri proučavanju kvazikonformnih preslikavanja, izazvala interes za kvazikonformna preslikavanja, koja su po svojim geometrijskim karakteristikama veoma bliska konformnim preslikavanjima.

Teorija n-dimenzionalnih kvazikonformnih preslikavanja se razvijala pre svega pod uticajem dostignutih rezultata u opštoj teoriji funkcija s jedne strane i pod uticajem teorije kvazikonformnih preslikavanja u ravni. Neposredno posle prvih radova pojavio se niz rezultata koji su predstavljali značajan napredak u teoriji i pokazali u kolikoj meri kvazikonformna preslikavanja u prostoru svojim osobinama prate teoriju konformnih preslikavanja u ravni. Na taj način dolazi se do novih saznanja o suštini odgovarajućih teorema za konformna preslikavanja i pokazuje se da neke osobine tih preslikavanja nisu ustvari posledice njihove konformnosti nego samo kvazikonformnosti. To su rezultati Zoriča /70/, /71/, /72/, /73/, koji je dokazao rezultate analogne poznatim teoremama Koebe-a i Karatheodory-a o graničnoj korespondenciji pri konformnom preslikavanju i teoremu koju je Lavrentjev formulisao i izrekao hipotezu da je tačna, a koja tvrdi da svako lokalno homeomorfno kvazikonformno preslikavanje prostora R^3 na R^3 mora biti homeomorfizam R^3 na sebe. Zatim sledi niz rezultata Ahlfors-a /1/ i Gehring-a /24/, /25/ o problemu proširenja kvazikonformnog preslikavanja s granice na unutrašnjost oblasti, pa rezultati Vaisala-e i Gehring-a /27/ koji rešavaju problem o egzistenciji kvazikonformnog preslikavanja oblasti u n-dimenzionom prostoru na jediničnu loptu, dakle traže uslove pod kojima važi analogon Rimanove teoreme, itd.

U radu /23/ Gehring je dokazao prvu teoremu tipa teoreme Lindelof-a o postojanju granične vrednosti u konusu. Prirodno se nameće pitanje može li se i u kom obliku uopštiti ovaj rezultat ako se pretpostavi samo postojanje granične vrednosti po nekom nizu tačaka. Takvi su rezultati dobijeni u radovima autora /47/, /48/, /49/.

U poslednje vreme pojavile su se dve monografije u kojima su rezimirani rezultati teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. To su monografije Caraman-a /12/ i Vaisala-e /67/ u kojima, pored toga što je dat prikaz dostignutih rezultata u ovoj teoriji, može da se nadje i iscrpna bibliografija.

Dalji razvoj teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru kreće se u više pravaca, od kojih ćemo napomenuti dva. Pored već ranije ispitivanih preslikavanja posmatraju se preslikavanja kod kojih se napušta pretpostavka o homeomorfnosti. U tom pravcu značajne rezultate postigli su Rešetnjak /56/, /57/ koji ovakva preslikavanja zove preslikavanjima s ograničenom deformacijom, kao i grupa finskih matematičara Martio, Rickman, Vaisala /43/, koji ova preslikavanja zovu kvaziregularnim. S druge strane se odgovarajuća problematika prenosi na proizvoljne mnogostrukosti. U ovom pravcu postignuto je tek nekoliko početnih rezultata. Napomenimo od autora koji se bave ovom problematikom Suominen-a /60/, Vaisala-u /68/ i dr.

2. Obeležimo sa R^n n-dimenzioni euklidski prostor a sa $\bar{R}^n$ njegovu kompaktifikaciju tačkom ∞, dakle

$$\bar{R}^n = R^n \cup \{\infty\} .$$

Tačke u prostoru obeležavaćemo velikim štampanim slovima P, Q, ... ili malim slovima x, y, ... U poslednjem slučaju, ako je $x \in R^n$, onda sa x_i pišemo njenu i-tu koordinatu u odnosu na odredjenu ortonormiranu bazu $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Po potrebi ćemo tačke u R^n tretirati kao vektore i u tom slučaju sa $|P|$ odnosno $|x|$ beležimo njihove norme.

Za dati skup $S \subset \bar{R}^n$ obeležavaćemo sa ∂S, $\bar{S}$ i $C(S)$ njegovu granicu, zatvorenje i komplement skupa S u $\bar{R}^n$ respektivno. Razliku skupova S_1 i S_2 beležićemo sa $S_1 \setminus S_2 = S_1 \cap C(S_2)$.

Ako su S_1 i S_2 skupovi iz R^n obeležićemo sa $\rho(S_1, S_2)$ rastojanje izmedju skupova S_1 i S_2, dakle

$$\rho(S_1,S_2)=\inf_{P\in S_1,\,Q\in S_2}\rho(P,Q)$$

Obeležimo dalje sa B^n jediničnu loptu (otvorenu) u R^n

$$B^n=\{x \mid |x|<1\}.$$

Ukoliko je centar lopte u tački T a njen poluprečnik je r, upotrebljavaćemo i oznaku $B^n(T,r)$. Jediničnu sferu beležićemo sa S^{n-1}, dakle

$$S^{n-1}=\{x \mid |x|=1\}$$

a umesto B^n koristićemo i oznaku JS^{n-1}.

Za oblast $D\subset \bar{R}^n$ kažemo da je Žordanova oblast ako je njena granica homeomorfna sa S^{n-1}. Pošto je, s druge strane, S^{n-1} homeomorfna s kompaktifikovanim $(n-1)$-dimenzionim prostorom $\bar{R}^{n-1}$ može se reći da je oblast iz R^n Žordanova ako je ona homeomorfna slika kompaktifikovanog $(n-1)$-dimenzionag euklidskog prostora.

3. Posmatrajmo sada porodicu Γ krivih u ravni, pri čemu za krive $\gamma\in\Gamma$ pretpostavljamo da su rektificibilne u nekoj oblasti D. Posmatrajmo zatim klasu nenegativnih funkcija $\rho(z)$, $z=x+iy$, u oblasti D, takvih da su veličine

$$L_\rho(\Gamma)=\inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma \rho\, dz$$

$$A_\rho(D)=\iint_D \rho^2\,dx\,dy$$

definisane i nisu istovremeno jednake 0 ili ∞. Obeležimo ovu klasu funkcija sa $\mathcal{D}$. Veličina

$$\lambda(\Gamma)=\sup_{\rho\in\mathcal{D}}\frac{L_\rho(\Gamma)^2}{A_\rho(D)}$$

se zove ekstremalna dužina porodice krivih Γ .

Ekstremalna dužina je konformna invarijanta u smislu da, ako se pri konformnom preslikavanju porodica krivih Γ preslikava u porodicu krivih Γ', onda je $\lambda(\Gamma)=\lambda(\Gamma')$.

Ovako su ekstremalnu dužinu prvi definisali Ahlfors i Beurling u /5/. Posle toga ovaj je pojam uopštavan od raznih autora na taj način što su se odricali zahteva o rektificibilnosti krivih iz posmatrane porodice, prenosili odgovarajuće definicije i rezultate u višedimonzione prostore i slično.

Recipročna vrednost ekstremalne dužine $\lambda(\Gamma)$porodice krivih Γ naziva se modul porodice krivih Γ . On je isto tako značajna konformna invarijanta. Osobine modula u najopštijem slučaju proučene su detaljno u radu Fuglede-a /17/ i radovima Vaisala-e /64/, /65/. Navedimo neke od tih osobina, ograničavajući se pri tome na uslove pod kojima će one biti korišćene u daljem izlaganju. Ustvari, odgovarajuće osobine važe pod širim pretpostavkama, o čemu se informacije mogu naći u već pomenutim radovima Fuglede-a i Vaisala-e.

Za porodice krivih Γ_i reći ćemo da su razdvojene ako postoje takvi disjunktni skupovi $S_i \subset R^n$ da iz $\gamma \in \Gamma_i$ sledi da je

$$\int_\gamma h_i \, ds = 0$$

gde je h_i karakteristična funkcija skupa $C(S_i)$. Specijalan slučaj razdvojenih porodica krivih su porodice krivih koje su smeštene u disjunktnim merljivim skupovima. Važe sledeće osobine modula:

1° Ako je $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ onda je $M(\Gamma) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$;

2^o Ako je $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ i ako su porodice krivih Γ_i razdvojene, onda važi jednakost $M(\Gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$.

U opštem slučaju izračunavanje modula neke porodice krivih može predstavljati težak zadatak. U nekim jednostavnijim slučajevima moguéno je neposredno računanje modula. Naprimer, ako je Γ porodica krivih koje spajaju naspramne stranice pravougaonika, onda je modul te porodice jednak količniku dužine tih stranica i dužine drugih dveju stranica pravougaonika. Ako je dat kružni prsten

$$R = \{ z \mid r_1 \leq |z| \leq r_2 \}$$

pa ako sa Γ_s obeležimo porodicu krivih koje spajaju granične krugove a sa Γ_r obeležimo porodicu zatvorenih krivih koje razdvajaju granične krugove, može se dokazati da je

$$mod\, \Gamma_s = mod\, \Gamma_r = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

Nama će u daljem trebati modul porodice krivih koje spajaju segmente oba poluprečnika koji, zajedno s odgovarajućim kružnim lukovima, odredjuju isečak kružnog prstena. Izračunaćemo sad taj modul.

Posmatrajmo isečak kružnog prstena u ravni

$$G = \{ z \mid r_1 \leq |z| \leq r_2 ,\ arg\, z \in [0, \alpha] \}$$

Neka su temena tog isečka tačke A, B, C, D koje odgovaraju kompleksnim brojevima

$$z_1 = r_1 \ ,\ z_2 = r_2 \ ,\ z_3 = r_1 e^{i\alpha} ,\ z_4 = r_2 e^{i\alpha}$$

respektivno. Potražimo modul porodice krivih koje spajaju duži AB i CD. Prema definiciji imamo da je, ako tu porodicu krivih obeležimo sa Γ,

$$\mathrm{mod}\,\Gamma = \frac{1}{\sup\limits_{\rho\in\mathcal{D}}\left([L(\rho)]^2/A(\rho)\right)}$$

Dalje je

$$L(\rho) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma \rho|dz| \leqslant \int_0^\alpha \rho(re^{i\theta})\,r\,d\theta\ , \quad r_1<r<r_2$$

odnosno

$$\frac{L(\rho)}{r} \leqslant \int_0^\alpha \rho(re^{i\theta})\,d\theta\ .$$

Integracijom dobijamo

$$\int_{r_1}^{r_2} L(\rho)\frac{dr}{r} = L(\rho)\ln\frac{r_2}{r_1} \leqslant \int_{r_1}^{r_2}\left(\int_0^\alpha \rho(re^{i\theta})\,d\theta\right)dr$$

što se može, imajući u vidu da je element površine jednak $r\,dr\,d\theta$, pisati u obliku

$$L(\rho)\ln\frac{r_2}{r_1} \leqslant \iint_G \rho\,\frac{1}{r}\cdot r\,dr\,d\theta$$

Primenimo zatim Helderovu nejednakost ($p=q=2$),

$$L(\rho)\ln\frac{r_2}{r_1} \leqslant \left(\iint_G \frac{1}{r^2}\,r\,dr\,d\theta\right)^{1/2}\left(\iint_G \rho^2\,r\,dr\,d\theta\right)^{1/2}$$

pa konačno dobijamo

$$\left(L(\rho)\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \leqslant \alpha\ln\frac{r_2}{r_1}\cdot\iint_G \rho^2\,r\,dr\,d\theta$$

odnosno

$$\frac{(L(\rho))^2}{A(\rho)} \leqslant \frac{\alpha}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ .$$

Na taj način dobijamo da je

$$(1) \qquad \operatorname{mod} \Gamma \geq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

Medjutim, ako za dozvoljenu funkciju izaberemo

$$\rho(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi r} & , \quad z \in G \\ 0 & , \quad z \notin G \end{cases}$$

dobijamo da je

$$A(\rho) = \iint_G \frac{1}{4\pi^2 r^2} \, r \, dr \, d\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2} \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

S druge strane je

$$L(\rho) = \inf_{\gamma} L_{\gamma}(\rho) \quad , \quad L_{\gamma}(\rho) = \int_{\gamma} \frac{1}{2\pi r} |dz| \geq \frac{\alpha}{2\pi}$$

pa, ako je kriva γ data sa $z = re^{i\theta}$ imamo da je

$$L_{\gamma}(\rho) = \frac{\alpha}{2\pi}$$

odnosno

$$L(\rho) = \frac{\alpha}{2\pi} .$$

Prema tome je

$$\operatorname{mod} \Gamma \leq \frac{1}{\frac{\alpha^2}{4\pi^2}} \cdot \frac{\alpha}{4\pi^2} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

što zajedno sa (1) daje

$$(2) \qquad \operatorname{mod} \Gamma = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

Nije teško uočiti da se rezultat ne menja ako se umesto svih rektificibilnih krivih koje spajaju duži AB i CD posmatra porodi- koncentričnih kružnih lukova koji spajaju te duži. Onda je, naprimer, modul porodice koncentričnih polukrugova sadržanih u poluprstenu jednak

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{mod}\, \mathcal{P} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad .$$

Modul porodice krivih u ravni predstavlja, kao što vidimo, izvesnu brojnu karakteristiku te porodice. S druge strane, ako porodica krivih leži u nekoj oblasti, modul u izvesnom smislu može da se posmatra i kao jedna brojna karakteristika te oblasti. Pri tome se, recimo, modul oblasti definiše preko pogodno odabrane porodice krivih, i to na odgovarajući način.

Prstenom u ravni nazivamo dvostruko povezanu oblast koja ima dve komponente komplementa, jednu konačnu i jednu beskonačnu. Modulom prstena u ravni zovemo modul porodice svih zatvorenih krivih koje razdvajaju granične komponente prstena. Ali, ako se uzme u obzir da se svaki prsten u ravni može konformno preslikati na neki kružni prsten i da je modul porodice krivih invarijantan pri konformnom preslikavanju, modul proizvoljnog prstena može se definisati i preko modula njemu odgovarajućeg kružnog prstena (videti, naprimer, /37/). U tom slučaju, ako prstenu R odgovara kružni prsten $a<|w|<b$ pri čemu je $0<a<b<\infty$, što znači da granične komponente nisu degenerisane, onda modulom prstena R zovemo konformnu invarijantu

$$\mathrm{mod}\, R = \ln \frac{b}{a} \quad .$$

Postoji i drugi način definisanja modula prstena u ravni. Neka su C_0 i C_1 komponente komplementa prstena i neka nijedna od njih nije degenerisana. Obeležimo sa $w(z)$ pomenuto konformno preslikavanje prstena R na kružni prsten $a<|w|<b$. Onda je

$$v(z) = \frac{\ln |w(z)/a|}{\ln (b/a)}$$

$$(3) \qquad \operatorname{mod} \mathcal{P} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

Modul porodice krivih u ravni predstavlja, kao što vidimo, izvesnu brojnu karakteristiku te porodice. S druge strane, ako porodica krivih leži u nekoj oblasti, modul u izvesnom smislu može da se posmatra i kao jedna brojna karakteristika te oblasti. Pri tome se, recimo, modul oblasti definiše preko pogodno odabrane porodice krivih, i to na odgovarajući način.

<u>Prstenom</u> u ravni nazivamo dvostruko povezanu oblast koja ima dve komponente komplementa, jednu konačnu i jednu beskonačnu. Modulom prstena u ravni zovemo modul porodice svih zatvorenih krivih koje razdvajaju granične komponente prstena. Ali, ako se uzme u obzir da se svaki prsten u ravni može konformno preslikati na neki kružni prsten i da je modul porodice krivih invarijantan pri konformnom preslikavanju, modul proizvoljnog prstena može se definisati i preko modula njemu odgovarajućeg kružnog prstena (videti, naprimer, /37/). U tom slučaju, ako prstenu R odgovara kružni prsten $a<|w|<b$ pri čemu je $0<a<b<\infty$, što znači da granične komponente nisu degenerisane, onda modulom prstena R zovemo konformnu invarijantu

$$\operatorname{mod} R = \ln \frac{b}{a} .$$

Postoji i drugi način definisanja modula prstena u ravni. Neka su C_0 i C_1 komponente komplementa prstena i neka nijedna od njih nije degenerisana. Obeležimo sa $w(z)$ pomenuto konformno preslikavanje prstena R na kružni prsten $a<|w|<b$. Onda je

$$v(z) = \frac{\ln |w(z)/a|}{\ln(b/a)}$$

harmonijska funkcija u R i uzima vrednost 0 na granici ∂C_0 a vrednost 1 na granici ∂C_1.

Može se pokazati (videti, naprimer, /20/, /21/) da se modul prstena može izraziti preko veličine

$$(4) \qquad C(R) = \int_R |\nabla v|^2 d\sigma = \frac{2\pi}{\mathrm{mod}\, R}$$

koja se naziva konformnim kapacitetom prstena i da je, uz to, na osnovu Dirichlet-ovog principa

$$C(R) = \inf_u \int_R |\nabla u|^2 d\sigma$$

pri čemu se infimum uzima preko svih funkcija koje su diferencijabilne u R i uzimaju vrednost 0 na ∂C_0 i vrednost 1 na ∂C_1. Relacija (4) važi i ako su komplementarne komponente degenerisane pa na ovaj način dolazimo do definicije modula prstena u ravni koja nije izražena preko konformnog preslikavanja oblasti. Ovo je značajno jer omogućuje da se definicija prenese, sa odgovarajućim modifikacijama, u prostor, dok, imajući u vidu već ranije istaknutu činjenicu da u prostoru R^n, za $n \geq 3$, konformna preslikavanja predstavljaju veoma ograničenu klasu preslikavanja koja se iscrpljuje Moebius-ovim transformacijama, vidimo da bi definicija koja bi sadržavala pojam konformnog preslikavanja u prostoru bila praktično neupotrebljiva.

4. Konačnu oblast u kompaktifikovanom n-dimenzionom prostoru čiji se komplement sastoji od dve komponente nazivamo, po analogiji s ravnim slučajem, prstenom u prostoru. U daljem razmatranju biće reči o trodimenzionom prostoru i oblastima u njemu, iako se izlaganja bez suštinskih teškoća mogu preneti na prostore R^n, $n>2$. Kao i u slučaju prstena u ravni obeležimo komponente

komplementa sa C_0 i C_1 , pri čemu komponenta C_1 sadrži beskonačno daleku tačku.

Veličinu $\Gamma(R)$, definisanu sa

$$\Gamma(R) = \inf_{u} \int_{R} |\nabla u|^3 d\omega ,$$

pri čemu se infimum uzima preko svih funkcija $u = u(x), x = (x_1, x_2, x_3)$ koje su neprekidno diferencijabilne u R i imaju granične vrednosti 0 na ∂C_0 i 1 na ∂C_1 , nazivamo konformnim kapacitetom prstena R . Modul prstena definiše se kao

$$\operatorname{mod} R = \left(\frac{4\pi}{\Gamma(R)}\right)^{1/2}$$

na sličan način kako smo to učinili u slučaju prstena u ravni.

5. K v a z i k o n f o r m n a   p r e s l i k a v a n j a   u   p r o s t o r u . Kako je već ranije istaknuto postoji više definicija kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. Mi ćemo se u daljem uglavnom koristiti definicijom koju je dao Gehring u /21/ ali će, potpunosti radi, biti navedeno i nekoliko drugih definicija.

Prvi je kvazikonformna preslikavanja u prostoru posmatrao Lavrentjev u /33/. Njegova definicija obuhvata nešto užu klasu preslikavanja nego definicije koje su joj sledile ali ona ipak u potpunosti odražava geometrijsku suštinu prostornih kvazikonformnih preslikavanja.

D e f i n i c i j a   L . Neka je $f(x)$ difeomorfizam oblasti D i neka je $l(x)$ linearni deo tog difeomorfizma. $l(x)$ je u svakoj tački oblasti D nedegenerisano afino preslikavanje koje sferu s centrom u tački x preslikava u elipsoid s centrom u $f(x)$ i količnikom najveće i najmanje poluose $\mathcal{E}(x) > 1$. Preslikavanje f je K-kvazikonformno ako postoji takva konstanta K, $(1 \leq K < \infty)$ da je $\mathcal{E}(x) \leq K$ u svim tačkama $x \in D$. Preslikavanje je kvazikonformno ako je ono K-kvazikonformno za neko $K \ (1 \leq K < \infty)$

Prema tome, preslikavanje je kvazikonformno u smislu Lavrentjeva ako je ono difeomorfizam prostorne oblasti čiji diferencijal preslikava sfere u elipsoide s ravnomerno ograničenim odnosom najveće i najmanje poluose. Podvucimo još jedamput da u osnovi ove definicije leži geometrijska suština svojstava tih preslikavanja.

Polsle Lavrentjeva nekoliko autora je davalo različite nove definicije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru ali su sve one ustvari karakterisale istu klasu preslikavanja i bile su, u suštini, ekvivalentne definiciji koju je dao Lavrentjev.

Tek je Vaisala u radu /64/ definisao opštiju klasu kvazikonformnih preslikavanja. Svako preslikavanje koje je kvazikonformno prema Lavrentjevu kvazikonformno je i po Vaisali, dok obrnuto ne važi. Njegova definicija glasi

D e f i n i c i j a V. Homeomorfizam $y(x)$ oblasti $D \subset R^n$ je K-kvazikonformno preslikavanje, $1 \leq K < \infty$, ako je za svaku porodicu krivih Γ u oblasti D

$$\frac{1}{K} M(\Gamma) \leq M(\Gamma') \leq K M(\Gamma) \tag{5}$$

gde je Γ' slika porodice Γ pri preslikavanju $y(x)$. Preslikavanje je kvazikonformno ako je K-kvazikonformno za neko K.

Ekvivalentno, ako se uvedu veličine

$$(6) \qquad K_I(f) = \sup \frac{M(\Gamma')}{M(\Gamma)}, \quad K_0(f) = \sup \frac{M(\Gamma)}{M(\Gamma')}$$

gde se supremum uzima po svim porodicama krivih Γ u D, i ako obeležimo sa

$$K(f) = \max(K_I(f), K_0(f)),$$

onda je preslikavanje f K-kvazikonformno ako je $K(f) \leq K < \infty$.

Veličine $K_I(f)$ i $K_0(f)$ zovu se unutrašnja i spoljašnja dilatacija preslikavanja f.

Vidimo da je Vaisala u svojoj definiciji odstupio od zahteva diferencijabilnosti preslikavanja. U istom radu dokazano je da je svako kvazikonformno preslikavanje u klasičnom smislu Lavrentjeva kvazikonformno i u smislu ove definicije pa ova klasa preslikavanja efektivno obujvata kvazikonformna preslikavanja u smislu Lavrentjeva. Vaisala je dao još nekoliko ekvivalentnih definicija u kojima do izražaja dolaze osobine analitičkog karaktera. Dokazano je da je kvazikonformno preslikavanje diferencijabilno gotovo svuda, što pokazuje da klasa preslikavanja kvazikonformnih u klasičnom smislu predstavlja značajnu potklasu kvazikonformnih preslikavanja u ovom smislu.

U radu /21/ Gehring je definisao kvazikonformno preslikavanje koristeći pojam modula prstena u prostoru.

D e f i n i c i j a G . Homeomorfizam $y(x)$ oblasti D je K-kvazikonforman, $1 \leq K < \infty$, ako je za svaki ograničeni prsten R, takav da je $\bar{R} \subset D$,

$$(7) \qquad \frac{1}{K} \operatorname{mod} R \leq \operatorname{mod} R' \leq K \operatorname{mod} R .$$

gde je R' slika prstena R pri preslikavanju $y(x)$. Preslikavanje je kvazikonformno ako je ono K-kvazikonformno za neko K.

Interesantno je istaći da je u tom radu dat i drugi kriterijum kvazikonformnosti, veoma blizak definiciji koju je dao Lavrentjev. Da bi ga mogli izreći potrebno je definisati nekoliko pojmova.

Neka je $0<r<\rho(P,\partial D)$. Obeležimo

$$L(P,r)=\max_{|P-Q|=r}|y(P)-y(Q)|$$

$$l(P,r)=\min_{|P-Q|=r}|y(P)-y(Q)|$$

i neka je

$$H(P)=\limsup_{r\to 0}\frac{L(P,r)}{l(P,r)}. \tag{8}$$

Važi sledeća teorema:

T e o r e m a 2 (videti /21/, str.379). Topološko preslikavanje $y(x)$ oblasti D je kvazikonformno ako i samo ako je $H(x)$ ograničeno u D.

Ovaj kriterijum iskazan je u terminima deformacija, što je u teoriji kvazikonformnih preslikavanja čest slučaj. On predstavlja primer takozvane "metričke" definicije, za razliku od "geometrijske" i "analitičke".

Može se dokazati da su Definicija V i Definicija G ekvivalentne jer preslikavanja koja su kvazikonformna u smislu ove dve definicije prdstavljaju istu klasu preslikavanja. Ustvari, ako je neko preslikavanje K_1-kvazikonformno u smislu prve od ovih definicija, ono je K_2-kvazikonformno u smislu druge od njih, pri čemu ispunjeno $K_1^2 = K_2$.

6. Osobine kvazikonformnih preslikavanja. Kao što je ranije istaknuto, kvazikonformna preslikavanja u prostoru predstavljaju prirodno uopštenje konformnih preslikavanja i zbog toga je njihova teorija oslonjena na teoriju funkcija jedne kompleksne promenljive s jedne strane i na opštu teoriju funkcija s druge strane. Ne ulazeći u dokazivanje ni u detaljnije objašnjavanje navešćemo nekoliko osnovnih rezultata iz teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. U mnogim od tih rezultata lako je prepoznati analogone poznatih stavova iz teorije funkcija jedne kompleksne promenljive, koji se mogu naći u /4/, /42/ i dr.

Osobina 1 (videti /21/). Homeomorfizam $y(x)$ oblasti D je 1-kvazikonformno preslikavanje ako i samo ako je $y(x)$ restrikcija Moebius-ove transformacije na oblast D.

Značaj ove osobine dolazi posebno do izražaja u svetlu citirane Liouville-ove teoreme o klasi konformnih preslikavanja u prostoru.

Osobina 2 (videti /21/). Preslikavanje inverzno K-kvazikonformnom preslikavanju je K-kvazikonformno. Kompozicija K_1-kvazikonformnog i K_2-kvazikonformnog preslikavanja je K_1K_2-kvazikonformno preslikavanje.

Osobina 3 (videti /21/). Ako je $y(x)$ homeomorfizam oblasti D i ako je $H(x)<\infty$ i gotovo svuda je $H=1$, onda je $y(x)$ restrikcija Moebius-ove transformacije na D.

Kao što vidimo ovo je ustvari generalizacija Liouville-ove teoreme. Istaknimo da je to za kvazikonformna preslikavanja u prostoru analogon teoreme Menjšova (videti /45/ ili /63/) koja glasi:

Ako je neprekidna funkcija $w = f(z)$ jednolisna u oblasti D i za svaku tačku $z \in D$, izuzev najviše prebrojivo mnogo njih, preslikava beskonačno mali krug s centrom u toj tački u beskonačno mali krug, onda je ili funkcija $f(z)$ ili njoj konjugovana funkcija $\overline{f(z)}$ analitička svuda u D.

Podsetimo se da za topološko preslikavanje kažemo da je merljivo ako je slika svakog merljivog skupa merljiv skup. O ovoj osbini kvazikonformnih preslikavanja u prostoru govori sledeća osobina :

O s o b i n a 4 (videti /21/) . Neka je $y(x)$ kvazikonformno preslikavanje oblasti $\bar{D}$. Onda je apsolutna vrednost njegovog jakobijana $J(x)>0$ gotovo svuda u D. Pored toga, ako je E merljiv skup u D, onda je i njegova slika merljiv skup i

$$mes\, E' = \int_E J\, d\omega \quad .$$

Sledeća teorema o kompaktnosti, koja predstavlja analogon poznate Vajerštrasove teoreme o nizu holomorfnih funkcija, pokazuje u kolikoj se meri osobine analitičkih funkcija održavaju i kod kvazikonformnih preslikavanja u prostoru, i istovremeno pokazuje da, naprimer, ova osobina u suštini nije posledica analitičnosti funkcije.

O s o b i n a 5 (videti /21/) . Neka je $\{y_n(x)\}$ niz K-kvazikonformnih preslikavanja oblasti $\bar{D}$ koji konvergira uniformno na svakom kompaktnom podskupu oblasti D ka topološkom preslikavanju $y(x)$. Onda je i $y(x)$ K-kvazikonformno preslikavanje.

O s o b i n a 6 (videti /23/). Neka je $\{y_n(x)\}$ niz K-kvazikonformnih preslikavanja oblasti D, neka je

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x)$$

i neka je u D

$$|y(x)| < \infty .$$

Onda je ili $y(x)$ homeomorfizam ili je konstanta.

Ovo je analogon Hurwitz-ove teoreme (videti /4/, str.176) koja glasi:

Ako su funkcije $f_n(z)$ analitičke i različite od nule u oblasti D i ako niz $f_n(z)$ konvergira ka funkciji $f(z)$ uniformno na svakom kompaktnom podskupu oblasti D, onda je funkcija $f(z)$ ili identički jednaka nuli u oblasti D ili nikad nije jednaka nuli u oblasti D.

Ograničićemo se na ovih nekoliko osobina homeomorfnih kvazikonformnih preslikavanja. Na ovom mestu nije bilo reči o graničnoj korespondenciji i problemima proširenja s granice, što će biti predmet detaljnijeg razmatranja u daljem izlaganju.

7. K v a z i r e g u l a r n a p r e s l i k a v a n j a. Ako se pri definisanju kvazikonformnog preslikavanja odreknemo zahteva da to bude homeomorfizam, dolazimo do nove klase preslikavanja, koja se ponekad zovu i kvazikonformne funkcije odnosno preslikavanja s ograničenom deformacijom /51/, /52/ a najčešće kvaziregularna preslikavanja.

Neka je data oblast $G \subset R^n$ i neka je $f: G \to R^n$. Zvaćemo skupom tačaka grananja B_f skup svih tačaka iz G u kojima preslikavanje f nije lokalni homeomorfizam. Preslikavanje f je otvoreno ako je slika svakog otvorenog skupa iz G otvoren skup u R^n. Preslikavanje f je diskretno ako se za svaku tačku $y \in R^n$ skup $f^{-1}(y)$ sastoji od izolovanih tačaka.

D e f i n i c i j a MRV (videti /43/) . Preslikavanje $f: G \to R^n$, koje je različito od konstante, zovemo kvaziregularnim ako zadovoljava sledeće uslove:

1° f čuva orijentaciju, diskretno je i otvoreno;

2° Veličina $H(f,x)$ (videti str.16) je lokalno ograničena u G ;

3° Postoji konstanta $a<\infty$ takva da je za gotovo svako $x \in G \setminus B_f$ ispunjeno $H(f,x) < a$.

Neki od rezultata iz teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru dokazani su i za ovu, opštiju, klasu preslikavanja . Ona obuhvata kvazikonformna preslikavanja ali se ipak u mnogo čemu razlikuje od njih. Očigledno je, naprimer, da se ovde osnovna dvostruka nejednakost

$$\frac{1}{K} M(\Gamma) \leq M(\Gamma') \leq K M(\Gamma)$$

koja karakteriše kvazikonformna preslikavanja, ne može ni posmatrati. Ipak, dokazano je da pod izvesnim ograničenjima druga od ovih nejednakosti važi.

8. Iz dosad izloženog se vidi da teorija kvazikonformnih preslikavanja u prostoru svoj razvitak u znatnoj meri bazira na rezultatima teorije funkcija jedne kompleksne promenljive. Ali,

ovde je potrebno naglasiti da ta prenošenja rezultata nisu neposredna i da poznati rezultati teorije funkcija služe samo kao podsticaj za traženje analognih i u većoj ili manjoj meri odgovarajućih rezultata u teoriji kvazikonformnih preslikavanja. Jasno je da se rezultati o kvazikonformnim preslikavanjima prenose direktno na konformna preslikavanja, koja predstavljaju njihov specijalan slučaj.

9. U ovom radu daje se prilog rešavanju problema granične korespondencije kod kvazikonformnih preslikavanja u n-dimenzionom prostoru. Pri tome je, pre svega, ispitana mogućnost dokazivanja za ova preslikavanja rezultata koji su poznati za konformna preslikavanja i kvazikonformna preslikavanja u ravni, koji se odnose na postojanje granične vrednosti u konusu s vrhom u tački na granici, ukoliko se pretpostavi da granična vrednost postoji po nekom specijalnom nizu tačaka. Na ova ispitivanja naveli su me rezultati Bagemihl-a i Seidel-a /7/ i Gavrilova /18/, /19/ koji su se bavili odgovarajućom problematikom za meromorfne i uopšte - ne meromorfne funkcije. Potom je dokazana i teorema o proširenju proizvoljnog difeomorfizma s granice oblasti na njenu unutrašnjost u obliku kvazikonformnog preslikavanja. Ovo je rezultat u okviru problematike poznate kao Schoenflies-ovi problemi, a rezultati Morsa /51/ te Huebscha i Morsa /30/ su mi dali ideju da se njima i njihovoj primeni u teoriji kvazikonformnih preslikavanja u prostoru posveti pažnja u delu ovog rada.

Prvi rezultat je Teorema 14 (I) za koju se može reći da je, ustvari, uvodni rezultat, jer pokazuje da postoje nizovi tačaka za koje se može tvrditi da postojanje granične vrednosti po njima implicira postojanje granične vrednosti u konusu.

Glavni rezultati ovog rada su Teorema 15 (II) i Teorema 16 (III) kojima se dokazuje da je za postojanje granične vrednosti u konusu dovoljno pretpostaviti postojanje granične vrednosti po nizu tačaka koje teže graničnoj tački tako da je niz njihovih rastojanja od granične tačke tipa konvergentne geometrijske progresije i da je ta procena za "gustinu" niza tačaka najbolja mogućna.

Teoreme 17(IV), 18(V) i 19(VI) predstavljaju uopštenje prethodnih rezultata i daju njihovo mesto u opštoj teoriji granične korespondencije.

Na kraju je dokazana Teorema 28 (VII) koja tvrdi da se svaki difeomorfizam može proširiti do kvazikonformnog preslikavanja sa granice oblasti na njenu unutrašnjost.

Pri dobijanju navedenih rezultata korišćeni su rezultati iz teorije kvazikonfomnih preslikavanja u prostoru i ravni, pre svega rezultati Vaisale, Gehringa i Zoriča, kao i rezultati Morsa i Huebscha o Schoenfliesovim problemima.

Deo ovih rezultata objavljen je u radovima autora /47/, /48/ i /49/.

I. KORESPONDENCIJA GRANICE PRI KVAZIKONFORMNOM PRESLIKAVANJU U PROSTORU

1. Nesumnjivo jedan od osnovnih problema u teoriji kvazikonformnih preslikavanja u prostoru je problem njihove granične korespondencije. To medjutim nije svojstveno samo tim preslikavanjima, jer se isto tvrdjenje može izreći i za teoriju konformnih preslikavanja u ravni, teoriju ravnih kvazikonformnih preslikavanja itd. Ali, u slučaju kvazikonformnih preslikavanja u prostoru, kao i kod svih preslikavanja u višedimenzionim prostorima, ovde se pojavljuju teškoće koje su u suštini povezane s činjenicom da u prostoru ne postoji analogon poznate Rimanove teoreme o konformnom preslikavanju oblasti u ravni.

Problemima granične korespondencije posvećena je pažnja u nizu članaka, počev od radova Gehringa /21/ i Vaisale /64/, kojima je teorija kvazikonformnih preslikavanja u prostoru i zasnovana, preko rezultata Zoriča /70/, /71/, /72/, Gehringa /23/, /24/, /25/, Ahlforsa /1 /, Nakkia /53/, Sedo-Sičeva /59/ i dr.

U okviru ove problematike mogu se uočiti uglavnom tri klase problema. Prvi je pitanje produženja datog kvazikonformnog preslikavanja iz oblasti u kojoj je ono dato na granicu te oblasti i ispitivanje različitih osobina dobijene granične korespondencije. Može se slobodno reći da je ova problematika prilično razradjena i da ona uspešno prati odgovarajuće rezultate dobijene za konformna preslikavanja i kvazikonformna preslikavanja u ravni .

Pri tome, naravno, dolaze do izražaja i sve specifičnosti prostornog slučaja. Drugi tip problema je pitanje postojanja granične vrednosti u nekoj graničnoj tački oblasti pri kvazikonformnom preslikavanju te oblasti. Ovde pre svega treba naglasiti rezultate Zoriča i Gehringa. Interesantno je istaći da je u radu /71/ Zorič, koristeći rezultat koji je dobio za kvazikonformna preslikavanja u prostoru dokazao ekvivalentnost poznatih teorema Koebe-a Caratheodory-a o graničnoj korespondenciji pri konformnim preslikavanjima. Treća klasa problema bavi se pitanjem proširenja kvazikonformnog preslikavanja s granice oblasti na njenu unutrašnjost i ispitivanjem karakteristika takvog proširenja. Rešavanje ovih, Schoenflies-ovih problema dobilo je snažan zamah šezdesetih godina ovog veka u značajnim radovima Mazur-a /44/, Morsa /51/,/52/ i dr., koji su rešavali problem o proširenju proizvoljnog homeomorfizma s granice na njenu unutrašnjost. Primena njihovih rezultata i metoda dala je izvesnih rezultata i u teoriji kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. S druge strane su značajan napredak u ovoj problematici ostvarili Ahlfors, Gehring, Sedo i Sičev, Nakki i dr.

2. Navedimo sad neke od rezultata iz prve klase problema da bi se, bar informativno, stekla slika o rezultatima ove teorije.

Prvu teoremu dokazali su nezavisno Vaisala i Gehring. Ona glasi:

T e o r e m a 3 (videti /64/). Kvazikonformno preslikavanje $y(x)$ jedinične lopte B^3 na sebe može se produžiti do homeomorfizma zatvorenja $\bar{B}^3$ na sebe.

Za oblast G reći ćemo da je lokalno povezana na granici ako za svaku tačku x_0 sa granice i svaku okolinu te tačke U postoji okolina V tačke x_0 takva da se bilo koje dve tačke iz $V \cap G$ mogu spojiti lukom $\gamma \subset U \cap G$.

Teoremu 3 Vaisala je uopštio u /65/ :

T e o r e m a 4 . Neka je $y(x)$ kvazikonformno preslikavanje jedinične lopte B^3 na oblast G i neka je G lokalno povezana na granici. Onda se $y(x)$ može proširiti do homeomorfizma zatvorenja $\bar{B}^3$ na $\bar{G}$.

T e o r e m a 5 . (videti /21/) Ako je $y(x)$ kvazikonformno preslikavanje poluprostora $x_3>0$ na poluprostor $y_3>0$, onda se $y(x)$ može proširiti do homeomorfizma poluprostora $x_3 \geqslant 0$ na $y_3 \geqslant 0$ i indukovano granično preslikavanje je ravno kvazikonformno preslikavanje ravni $x_3=0$ na $y_3=0$.

Navedeni rezultati generališu poznate stavove iz teorije konformnih preslikavanja i ravnih kvazikonformnih preslikavanja. Za konformna preslikavanja to je klasični rezultat Caratheodory-a :

Pri jednolisnom konformnom preslikavanju oblasti G, ograničene zatvorenom Žordanovom krivom, na krug $|\zeta|<1$, preslikavanje zatvorenja $\bar{G}$ na $|\zeta|\leqslant 1$ je uzajamno jednoznačno i neprekidno.

Za kvazikonformna preslikavanja u ravni to je poznati rezultat Mori-a /50/:

T e o r e m a 6 . Svako kvazikonformno preslikavanje kruga na krug može se produžiti do homeomorfizma zatvorenih krugova.

Postoje i brojne generalizacije navedenih rezultata u teoriji konformnih preslikavanja. Odgovarajuću problematiku za kvazikonformna preslikavanja u prostoru obradio je Zorič i Nakki.

3. Granični skupovi i teorema Lindelöf-a. Teorija graničnih skupova analitičkih funkcija, čije začetke nalazimo u radovima matematičara na prelazu iz devetnaestog u dvadeseti vek, predstavlja danas jednu od značajnih oblasti teorije funkcija. Daćemo definiciju graničnog skupa u obliku koji odgovara njegovoj opštoj definiciji a može se neposredno preneti i na slučaj preslikavanja u prostoru.

Definicija 1. Neka je $f(z)$ homeomorfizam povezane (jednostruko ili višestruko) oblasti D i neka je tačka $z_0 \in \overline{D}$. Graničnim skupom $C_D(f, z_0)$ funkcije $f(z)$ u tački z_0 zovemo skup svih tačaka w za koje postoji niz tačaka $\{z_n\}$, $z_n \in D \setminus z_0$ takav da je

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} f(z_n) = w .$$

Teorija graničnih skupova razvila se u više pravaca a brojni rezultati obuhvaćeni su u fundamentalnim radovima iz teorije analitičkih funkcija kao i u nekoliko monografija posvećenih ovoj problematici. To su /14/, /54/, /55/ idr.

Ograničićemo se ovde na izlaganje dva klasična rezultata iz teorije graničnih skupova koji se odnose na postojanje graničnih vrednosti u uglu. Prvi je poznata teorema Fatou-a:

Teorema 7. Ako je funkcija $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitička i ograničena unutar jediničnog kruga $|z| < 1$, onda ona ima u gotovo svim tačkama $z = e^{i\theta}$ odredjene radijalne granične vrednosti

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) .$$

Od mnogobrojnih mogućnosti da se teorema Fatou-a generališe navedimo samo jedan, koji je našao veoma široku primenu u teoriji funkcija. To je rezultat Lindelöf-a:

T e o r e m a 8 (videti /39/) . Neka je $f(z)$ analitička i ograničena u $|z|<1$. Ako $f(z) \to \alpha$ kad $z \to e^{i\theta_0}$ duž neke krive γ koja leži u $|z|<1$ i završava se u tački $e^{i\theta_0}$, onda $f(z) \to \alpha$ kad $z \to e^{i\theta_0}$ unutar proizvoljnog ugla s temenom u $e^{i\theta_0}$, obrazovanog dvema tetivama kruga $|z| = 1$.

U nizu generalizacija ove Lindelofove teoreme navešćemo samo jednu, čije direktno uopštenje predstavlja osnovni rezultat ovog rada. Da bi mogli da je formulišemo potrebni su nam neki pojmovi.

Porodicu funkcija $f \in \mathcal{F}$, analitičkih u oblasti D , zovemo normalnom u smislu Montela ukoliko svaki niz funkcija $\{f_n(z)\}$, $f_n \in \mathcal{F}$, sadrži podniz koji ravnomerno konvergira u oblasti D ka nekoj analitičkoj funkciji ili beskonačnosti.

D e f i n i c i j a 2 (videti /7/) . Neka je $f(z)$ meromorfna funkcija u oblasti $|z|<1$. Obeležimo sa $z' = S(z)$ proizvoljno uzajamno jednoznačno preslikavanje oblasti $|z| < 1$ na sebe. Funkciju $f(z)$ zovemo normalnom u $|z|<1$ ako je porodica funkcija $\{f(S(z))\}$ normalna u $|z|<1$ u smislu Montela, pri čemu je konvergencija definisana u terminima sferne metrike.

Obeležimo sa D jedinični krug $|z|<1$ i neka je u kompleksnoj z -ravni $C=\{z \mid |z|=1\}$. Neka je funkcija $f(z)$ meromorfna u D i neka je $\{z_n\}$ niz tačaka u D koje konvergiraju tački $\zeta \in C$. Pretpostavimo da je $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\alpha$. Bagemihl i Seidel su u /7/ postavili pitanje može li se, naravno pod odredjenim uslovima koji bi se nametnuli na funkciju i niz tačaka, iz postojanja granične vrednosti po nizu tačaka $\{z_n\}$ zaključiti da granična vrednost postoji i po nekom neprekidnom putu koji se završava u ζ ili, eventualno, i više od toga.

Obeležimo sa

$$\rho_n = \rho(z_n, z_{n+1}) = \frac{1}{2}\ln\frac{|\bar{z}_n z_{n+1}-1|+|z_{n+1}-z_n|}{|\bar{z}_n z_{n+1}-1|-|z_{n+1}-z_n|}$$

hiperboličko rastojanje izmedju dveju sukcesivnih tačaka u nizu. Rezultat Bagemihl-a i Seidel-a glasi:

T e o r e m a 9 (videti /7/) . Neka je $\{z_n\}$ niz tačaka u D koji konvergira tački $\zeta \in C$ i takav da $\rho_n \to 0$ kad $n\to\infty$. Neka je $f(z)$ normalna meromorfna funkcija u D za koju je ispunjeno $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\alpha$, gde je α konačno ili beskonačno. Onda $f(z)$ ima ugaonu graničnu vrednost α u tački ζ .

U istom radu dokazano je da se uslov $\rho_n \to 0$ ne može oslabiti na uslov da ρ_n bude ograničeno.

Na kvazikonformna preslikavanja preneto je nekoliko rezultata iz teorije graničnih skupova. Pomenimo pre svega prvi od značajnijih rezultata iz ove problematike koji je dokazao Zorič /70/ i koji predstavlja uopštenje teoreme Koebe-a o korespondenciji dostižnih tačaka pri konformnom preslikavanju. Rezultate koji prenose na kvazikonformna preslikavanja u prostoru teoremu Lindelof-a dokazao je Gehring u /23/. Navedimo ta dva rezultata.

Neka je $y(x)$ homeomorfizam oblasti D i neka je $P \in \partial D$. Reći ćemo da niz tačaka $\{P_n\}$ iz D <u>konvergira u konusu</u> ka P ako P_n konvergira ka P i postoji konstanta a, $1 \leq a < \infty$, takva da je

$$|P_n - P| \leq a\,\rho(P_n, \partial D)$$

za svako n. Obeležimo sa $C_K(P)$ granični skup koji se sastoji od svih tačaka P' za koje postoji niz tačaka $\{P_n\}$ koji konvergira u konusu ka P i pri tome je

$$\lim_{n \to \infty} y(P_n) = P'.$$

Neka je, dalje, γ prost luk čiji je kraj u tački P a inače leži u D. Zvaćemo γ poluzasekom oblasti D iz P. Obeležimo dalje sa $C_\gamma(P)$ granični skup koji se sastoji od svih tačaka P' takvih da postoji niz tačaka $\{P_n\}$ koje konvergiraju ka P duž krive γ i pri tome je

$$\lim_{n \to \infty} y(P_n) = P'.$$

Ako sa $\mathcal{G}$ obeležimo skup svih poluzaseka oblasti D iz P, obeležimo

$$\Pi(P) = \bigcap_{\gamma \in \mathcal{G}} C_\gamma(P).$$

T e o r e m a 10 (videti /23/). Ako je $y(x)$ kvazikonformno preslikavanje sfere $\bar{D}$, onda je

$$\Pi(P) = C_K(P)$$

za sve tačke $P \in \partial D$.

T e o r e m a 11 (videti /23/). Ako je $y(x)$ kvazikonformno preslikavanje sfere D i ako $y(x)$ konvergira ka P' kad x konvergira ka $P \in \partial D$ duž nekog poluzaseka γ oblasti D u tački P, onda $y(x)$ konvergira ka P' kad x konvergira ka P u konusu.

Naš cilj je da uopštimo rezultat Gehringa u smislu u kome su Bagemihl i Seidel generalisali rezultat Lindelof-a.

U daljem izlaganju potrebni su nam neki rezultati iz teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. Oni se odnose na problem deformacije pri takvim preslikavanjima i varijaciju kvazikonformnog preslikavanja na sferi.

T e o r e m a 12 (videti /21/, str.383) . Za svako K, $1 \leq K < \infty$, postoji funkcija deformacije $\theta(t) = \theta_K(t)$ koja je neprekidna i rastuća u intervalu $0 \leq t < 1$, uz to je $\theta(0) = 0$ i ima sledeću osobinu. Ako je $y(x)$ K-kvazikonformno preslikavanje oblasti D na D' i ako je $P \in D$, onda je

$$\frac{|y(Q) - y(P)|}{\rho(y(P), \partial D')} < \theta\left(\frac{|Q-P|}{\rho(P, \partial D)}\right)$$

za sve tačke Q takve da je $|P-Q| < \rho(P, \partial D)$.

Treba napomenuti da funkcija $\theta_K(t)$ zavisi samo od t i od K a ne zavisi od toga koja se oblast preslikava i kojim od K-kvazikonformnih preslikavanja. Mi ćemo ovu teoremu koristiti za takve tačke za koje je $\frac{|P-Q|}{\rho(P, \partial D)} < 1$ iz čega sledi da, ako $\rho(y(P), \partial D') \to 0$ mora i $|y(P) - y(Q)|$ težiti nuli.

T e o r e m a 13 (videti /23/, str.18) . Pretpostavimo da je $y(x)$ K-kvazikonformno preslikavanje polusfere $|x| < c$, $x_3 > 0$, da je Δ sferni poluprsten $0 < a < |x| < b < c$, $x_3 > 0$, i da je Δ'

slika oblasti Δ pri preslikavanju $y(x)$. Onda je

$$\int_a^b [\underset{S}{\operatorname{osc}}\, y(x)]^3 \frac{dr}{r} \leq A\, \operatorname{mes}(\Delta')$$

gde je $S = S(r)$ polusfera $|x| = r$, $x_3 > 0$,

$$\underset{S}{\operatorname{osc}}\, y(x) = \sup_{P,Q \in S} |y(P) - y(Q)|$$

i A je konačna konstanta koja zavisi samo od K.

Neposredna posledica ove teoreme je sledeće tvrdjenje:

Ako su uslovi Teoreme 13 zadovoljeni, onda postoji polusfera $|x| = r_0$, $a < r_0 < b$, $x_3 > 0$, takva da je za nju

$$\underset{S(r_0)}{\operatorname{osc}}\, y(x) \leq \left(\frac{A\, \operatorname{mes}(\Delta')}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{1/3}$$

Imajući u vidu da je kvazikonformno preslikavanje merljivo (osobina 4), odavde zaključujemo da, ako imamo niz oblasti Δ_n takvih da njihova mera teži nuli kad $n \to \infty$, onda i

$$\underset{S(r_n)}{\operatorname{osc}}\, y(x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

U ovom će obliku i biti korišćena Teorema 13.

4. G r a n i č n a   v r e d n o s t   p o   n i z u   t a č a k a   i   k o r e s p o n d e n c i j a   g r a n i c e . Predjimo sad na rešavanje problema koji smo sebi postavili. U cilju jednostavnijeg izlaganja potrebne su nam prvo dve definicije.

D e f i n i c i j a 3 . Monotoni niz pozitivnih brojeva $\{a_n\}$ zovemo "dovoljno gustim" ako on monotono teži nuli sporije od proizvoljne geometrijske progresije q^n, $0 < q < 1$ u smislu da počev od izvesnog n_0, $(\exists a_{k_n})\, q^{n+1} < a_{k_n} < q^n$, što znači da nijedan interval izmedju sukcesivnih članova proizvoljne geometrijske progresije ne ostaje bez članova niza a_n počev od izvesnog $n_0(q)$.

Lako je videti da, ako je niz pozitivnih brojeva "dovoljno gust", onda za svako α, $0<\alpha<1$, imamo da je počev od izvesnog indeksa $n_0(\alpha)$

$$\alpha a_n < a_{n+1} < a_n .$$

D e f i n i c i j a 4 . Za niz tačaka $\{x_n\}$ iz R^3 koji teži tački O reći ćemo da je "dovoljno gust" ako je niz normi $|x_n| = a_n$ "dovoljno gust" niz pozitivnih brojeva.

Dokazaćemo sad prvu od teorema koje na kvazikonformna preslikavanja u prostoru prenose rezultat Bagemihl-a i Seidel-a i istovremeno uopštava Teoremu 11.

T e o r e m a 14 (I) . Neka je $y(x)$ K-kvazikonformno preslikavanje otvorene lopte $\bar{B}^3$ i neka je $\{x_n\}$ niz tačaka koji u konusu $\mathcal{K}$, sadržanom u B^3 i vrhom u tački $P \in \partial B^3$ teži tački P kad $n \to \infty$ i neka je uz to niz tačaka $\{x_n\}$ "dovoljno gust". Ako je

$$\lim_{n\to\infty} y(x_n) = P', \qquad P' \in \partial D',$$

onda je i

$$\lim_{n\to\infty} y(z_n) = P'$$

za svaki niz tačaka $\{z_n\}$, $z_n \in \mathcal{K}$, $z_n \to P$ kad $n \to \infty$.

Dakle, iz postojanja granične vrednosti po dovoljno gustom nizu tačaka može se zaključiti da postoji granična vrednost i u konusu i da su one jednake.

Bez gubljenja opštosti možemo posmatrati preslikavanje poluprostora $x_3>0$ i za tačku P uzeti koordinatni početak jer se prethodnim konformnim preslikavanjem problem formulisan u teoremi može svesti na ovako formalno pojednostavljeni problem.

Formulisaćemo i dokazati jednu lemu koja će nam trebati u daljem izlaganju.

L e m a 1 . Neka je $\{a_n\}$ "dovoljno gust" niz pozitivnih brojeva. Može se odrediti takav pozitivan broj α da je za proizvoljne dve tačke P i Q , koje leže na pravoj koja prolazi kroz vrh konusa sa vrhom u koordinatnom početku i smeštenom u poluprostoru $x_3>0$, a uz to pripadaju i poluprstenu

$$\alpha a_n < |x| < a_n$$

ispunjeno

$$\frac{|P-Q|}{\rho(P,\partial D)} < c < 1 .$$

D o k a z . Tvrdjenje je gotovo očigledno. Obeležimo sa φ najveći od uglova koje izvodnice konusa zaklapaju s x_3- osom. Pošto tačke P i Q pripadaju pomenutom prstenu, za njihovo rastojanje važi

$$|P-Q| < |a_n|(1-\alpha).$$

Uz to imamo da je $\alpha a_n \cos\varphi < \rho(P,\partial D)$ pa možemo pisati

$$\frac{|P-Q|}{\rho(P,\partial D)} < \frac{a_n(1-\alpha)}{\alpha a_n \cos\varphi} = \frac{1-\alpha}{\alpha\cos\varphi} .$$

Pošto je $\{a_n\}$ "dovoljno gust" niz brojeva, mi možemo za α izabrati proizvoljan pozitivan broj koji je manji od 1 . Imajući to u vidu izaberimo da je

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}.$$

Onda dobijamo da je

$$\frac{|P-Q|}{\rho(P,\partial D)} < \frac{1}{2} = \kappa < 1$$

što je i trebalo dokazati.

D o k a z T e o r e m e 14 (I) . Izaberimo α kao u Lemi 1. Posmatrajmo zatim niz oblasti

$$\Delta_n = \{x \mid \alpha a_n < |x| < a_n ,\ x_3 > 0\}$$

Ovo je ustvari niz sfernih poluprstenova koji, kad $n \to \infty$, iscrpljuju oblast $|x| < a_1$, $x_3 > 0$, težeći pri tome tački O . Obeležimo sa Δ_n' sliku oblasti Δ_n pri preslikavanju $y(x)$. Onda, na osnovu posledice Teoreme 13, pošto za meru oblasti Δ_n važi da $mes\ \Delta_n \to 0$ a $y(x)$ je kvazikonformno preslikavanje, imamo da postoji takva polusfera

$$S_n = \{x \mid |x| = r_0(n),\ x_3 > 0\}$$

da, kad $n \to \infty$, bude

$$\sup_{P,Q \in S_n} |y(P) - y(Q)| \to 0 .$$

Posmatrajmo sad proizvoljan niz tačaka u konusu, $\{z_m\}$, $z_n \in K$, pri čemu $z_m \to O$ kad $m \to \infty$. Imajući u vidu da je "okolina" $|x| < a_1$, $x_3 > 0$ tačke O prekrivena oblastima Δ_n , počev od izvesnog m_0 će svaka tačka niza $\{z_m\}$ ležati u nekoj od oblasti iz niza $\{\Delta_n\}$, recimo u Δ_{n_m}. Povucimo poluprave Ox_{n_m} i Oz_m pri čemu smo sa x_{n_m} obeležili tačku koja pripada nizu $\{x_n\}$ a leži u oblasti Δ_{n_m} a sa z_m tačku koja pripada nizu $\{z_m\}$

i leži u Δ_{n_m}. Jasno je da pri tome postoji mogućnost da u neku od oblasti Δ_n ne padne nijedna tačka niza $\{z_m\}$ ili da ih u neku od oblasti padne više od jedne. U oba od tih slučajeva potrebno je izvršiti pogodno prilagodjavanje indeksa. Neka su u_m i v_m tačke u kojima prave Ox_{n_m} i Oz_m seku polusferu S_{n_m}, čije smo postojanje utvrdili na osnovu Teoreme 13. Onda na osnovu dokazane Leme 1 imamo da je

$$\frac{|x_{n_m}-u_m|}{\rho(x_{n_m},\partial D)} < \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{|z_m-v_m|}{\rho(z_m,\partial D)} < \frac{1}{2}\,.$$

Prema pretpostavci Teoreme 14 (I) postoji granična vrednost niza $y(x_n)$ pa je, na osnovu Teoreme $\bar{1}2$, zbog

$$\lim_{n_m\to\infty} \rho(y(x_{n_m}),\partial D') = 0$$

ispunjeno i

$$\lim_{m\to\infty} |y(x_{n_m}) - y(u_m)| = 0$$

pošto je

$$|y(x_{n_m}) - y(u_m)| \leq \Theta_K\left(\tfrac{1}{2}\right) \rho(y(x_{n_m}),\partial D')$$

a $\Theta_K(\frac{1}{2})$ je konačno.

Odavde, uzimajući u obzir Teoremu 13, dobijamo da je

$$\lim_{m\to\infty} y(v_m) = \lim_{m\to\infty} y(u_m) = \lim_{m\to\infty} y(x_{n_m}) = P'.$$

Ako analogan postupak primenimo na nizove $\{z_m\}$ i $\{v_m\}$ dobićemo da je

$$\lim_{m\to\infty} y(z_m) = \lim_{m\to\infty} y(v_m)$$

odnosno

$$\lim_{m\to\infty} y(z_m) = P'.$$

Pošto je $\{z_n\}$ proizvoljan niz tačaka koji, nalazeći se u konusu, teži tački O, zaključujemo da zaista iz postojanja granične vrednosti po "dovoljno gustom" nizu tačaka sledi postojanje granične vrednosti u konusu, što i jeste tvrdjenje naše Teoreme 14 (I).

N a p o m e n a. Videli smo da postoje nizovi tačaka koji teže nekoj graničnoj tački i pri tome se u slučaju kvazikonformnog preslikavanja iz postojanja granične vrednosti po takvom nizu tačaka može zaključiti da granična vrednost postoji u konusu.

S druge strane nije teško videti da postojanje granične vrednosti po nekom nizu tačaka ne mora implicirati postojanje granične vrednosti u konusu ukoliko se ne nametnu neki uslovi na taj niz tačaka. Ustvari, ako se proanaliziraju primeri u kojima pri nekom kvazikonformnom preslikavanju postoji granična vrednost po nekom nizu a granična vrednost u konusu ne postoji, lako je uočiti da se tu uvek radi o nizovima tačaka koje veoma brzo teže graničnoj tački. Primer koji je konstruisao Zorič u /71/ može poslužiti da se dobije takav niz tačaka. Pri tome on teži graničnoj tački brzinom $\exp(-\exp n)$.

Iz izloženog zaključujemo da mora postojati neka granica u pogledu brzine teženja graničnoj tački da bi pri tome iz postojanja granične vrednosti po nizu sledilo postojanje granične vrednosti u konusu. Dokazati ovu pretpostavku, to je naš dalji zadatak.

5. T e o r e m a t i p a t e o r e m e L i n d e l o f - a. Kao što je već istaknuto, cilj nam je da oslabimo

zahtev u pogledu brzine teženja graničnoj tački. Formulisaćemo i dokazti dva pomoćna stava, Lemu 2 i Lemu 3 .

L e m a 2 . Neka je ϱ_0 proizvoljan pozitivan broj, $0<\varrho_0<1$, i neka je $a>0$. Obeležimo sa

$$D_a = \{x \mid \varrho_0^2 a < |x| < a, \ x_3>0\}$$

i neka je $\mathcal{K}_{2\varphi}$ konus s vrhom u koordinatnom početku O , osom Ox_3 sadržan u poluprostoru $x_3>0$ sa uglom pri vrhu jednakim 2φ, pri čemu za ugao φ važi da je $\cos\varphi > 1-\varrho_0^2$. Postoji konstanta $\kappa(\varrho_0,\varphi)$ takva da je za proizvoljne dve tačke P i Q , koje leže na pravoj koja prolazi kroz tačku O i uz to se nalaze u preseku $P,Q \in D_a \cap \mathcal{K}_{2\varphi}$ pri čemu je tačka Q izmedju tačaka P i O , ispunjeno

$$\frac{|P-Q|}{\rho(P,\pi)} \leqslant \kappa < 1$$

gde je π ravan $x_3=0$.

D o k a z . Tvrdjenje se može dokazati slično kao i Lema 1. Pri tome možemo uzeti da je

$$\kappa(\varrho_0,\varphi) = \frac{1-\varrho_0^2}{\cos\varphi}$$

pa dobijamo, pošto količnik $\frac{|P-Q|}{\rho(P,\pi)}$ opada kad $|P-Q|$ opada,

$$\frac{|P-Q|}{\rho(P,\pi)} \leqslant \frac{|P|(1-\varrho_0^2)}{|P| \cos\varphi} = \kappa < 1$$

što je i trebalo dokazati.

Postojanje granične vrednosti u konusu $\mathcal{K}_{2\varphi}$, pri čemu je ugao φ dat sa $\cos\varphi > 1-\varrho_0^2$ nas ne zadovoljava. Zbog toga ćemo dokazati i sledeću Lemu 3.

L e m a 3 . Neka je $0<\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2}$, $0<q<1$, Obeležimo sa $T(\varphi)$ sledeće tvrdjenje:

Za proizvoljno kvazikonformno preslikavanje poluprostora $x_3>0$ postojanje granične vrednosti po nekom nizu tačaka $\{x_n\}$ $x_n\in K_{2\varphi}$, pri čemu je $|x_n|=q^n$, $0<q<1$, implicira postojanje granične vrednosti u konusu $K_{2\varphi}$.

Onda je $T(\varphi_1)$ ekvivalentno sa $T(\varphi_2)$.

D o k a z . Očigledno je da je dovoljno dokazati implikaciju u jednom smeru, ustvari dokazati da $T(\varphi_1)\Longrightarrow T(\varphi_2)$. Pretpostavimo da $T(\varphi_2)$ nije tačno. Onda znači postoji takvo kvazikonformno preslikavanje f poluprostora $x_3>0$ da za konus $K_{2\varphi_2}$ granična vrednost po nizu tačaka $\{x_n\}$, $|x_n|=q^n$, postoji a da granična vrednost u konusu $K_{2\varphi_2}$ ne postoji. Preslikajmo poluprostor $x_3>0$ na sebe tako da se pri tome konus $K_{2\varphi_1}$ preslikava na konus $K_{2\varphi_2}$ i da norme tačaka pri tom preslikavanju ostanu nepromenjene. U tu svrhu obeležimo sa (ρ,θ,ψ) sferne koordinate tačke x . Onda je konus $K_{2\varphi}$ okarakterisan uslovom $0<\psi<\varphi$. Posmatrajmo preslikavanje

$$g(x)=x' \quad , \quad x'=(\rho,\theta,\psi')$$

pri čemu je

$$\psi'=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\varphi_1(\frac{\pi}{2}-\varphi_1)}\psi^2+\frac{\frac{\pi}{2}\varphi_2-\varphi_1^2}{\varphi_1(\frac{\pi}{2}-\varphi_1)}\psi$$

Ovo je očigledno kvazikonformno preslikavanje i uz to imamo da je $|x'|=|x|$. Posmatrajmo zatim preslikavanje $f\circ g$ konusa $K_{2\varphi_1}$. Ono je kvazikonformno, pri njemu granična vrednost po nizu $y_n=g^{-1}(x_n)$, $|y_n|=q^n$, postoji, ali granična vrednost u konusu $K_{2\varphi_1}$ ne postoji. Dakle, iz činjenice da $T(\varphi_2)$ nije tačno sledi da ni tvrdjenje $T(\varphi_1)$ nije tačno. Time je naše tvrdjenje dokazano.

D e f i n i c i j a 5. Za niz tačaka kažemo da je "l-gust" ako $x_n \to O$ i niz njihovih normi $a_n = |x_n|$ zadovoljava uslov

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \qquad 0<l<1.$$

U cilju pojednostavnjivanja izlaganja, imajući pri tome u vidu da se u suštini njihova opštost ne umanjuje, u daljem ćemo posmatrati "q-guste" nizove tačaka koje teže tački O, za koje je $|x_n| = q^n$, $0<q<1$.

Formulisaćemo sad i dokazati jedan od osnovnih rezultata ovog rada. To je

T e o r e m a 15 (II) . Neka je $y(x)$ kvazikonformno preslikavanje oblasti $|x|<R$, $x_3>0$ i neka je $\{x_n\}$ "q-gust" niz tačaka koje su sadržane u konusu $K_{2\varphi}$ sa vrhom u tački O, osom $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3>0$ i uglom pri vrhu jednakim 2φ. Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} y(x_n) = A$$

onda je i

$$\lim_{n\to\infty} y(z_n) = A$$

za proizvoljan niz tačaka $\{z_n\}$, $z_n \in K_{2\varphi}$, $z_n \to O$, t.j. postoji granična vrednost u konusu i ona je jednaka graničnoj vrednosti po nizu x_n.

D o k a z . Uzimajući u obzir Lemu 3 možemo se ograničiti na posmatranje konusa čiji će ugao pri vrhu biti takav da odgovara takvoj vrednosti ϱ_0 u Lemi 2 da je $\varrho_0 < \varrho < 1$. Posmatrajmo zatim niz sfernih poluprstenova

$$\Delta_n = \{ x \mid \varrho_0 \varrho^n < |x| < \varrho^n , x_3 > 0 \} , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Kad $n \to \infty$ oni teže tački O i pri tome iscrpljuju neku "poluokolinu" tačke O . Posmatrajmo, kao i prilikom dokazivanja Teoreme 14 (I) proizvoljan niz tačaka $\{z_m\}$, $z_m \in K_{2\varphi}$, koji konvergira tački O . Počev od izvesnog indeksa m_0 tačka z_m će se nalaziti u nekoj od okolina (oblasti) Δ_n . Neka je prva od takvih oblasti Δ_{n_m} . I ovde, kao i ranije, može se dogoditi da i više tačaka niza $\{z_m\}$ leži u istoj oblasti ili da se u jednoj od oblasti ne nadje nijedna tačka niza $\{z_m\}$, ali se to može , pogodnim biranjem indeksa, svakako svesti u okvire našeg razmatranja.

Na osnovu Teoreme 13 za svaku od oblasti Δ_n postoji polusfera S_n , takva da je na njoj

$$\operatorname*{osc}_{S_n} y(x) \leq M \left[\operatorname{mes}(\Delta_n') \right]^{1/3} .$$

Posmatrajmo poluprave Ox_{n_m-1} i Oz_m i njihove preseke s pomenutom polusferom S_{n_m-1} obeležimo sa u_m i v_m respektivno. Pošto je $\varrho_0 < \varrho$ zaključujemo da je tačka z_m izmedju v_m i O , dok je, očigledno tačka u_m izmedju x_{n_m-1} i O . Ovo je neophodno da se naglasi kako bi se mogla primeniti Teorema 12. Sad, kao i pri dokazivanju Teoreme 14 (I) imamo da je na osnovu Leme 2

$$\frac{|x_{n_m-1} - u_m|}{\rho(x_{n_m-1}, \partial D)} \leq c < 1$$

odnosno

$$\frac{|z_m - v_m|}{\rho(z_m, \partial D)} \leq r < 1 .$$

Primenjujući sad Teoremu 12 zaključujemo da je

$$\frac{|y(x_{n_m-1}) - y(u_m)|}{\rho(y(x_{n_m-1}), \partial D')} \leq \theta(r)$$

odakle sledi da je

$$\lim_{m \to \infty} y(x_{n_m-1}) = \lim_{m \to \infty} y(u_m)$$

na isti način kao i pri dokazivanju Teoreme 14 (I). Sad primenom Teoreme 13 dobijamo

$$\lim_{m \to \infty} y(u_m) = \lim_{m \to \infty} y(v_m)$$

Niz tačaka x_{n_m-1} je podniz niza x_n i zbog toga je

$$\lim_{m \to \infty} y(x_{n_m-1}) = \lim_{n \to \infty} y(x_n)$$

pa na osnovu Teoreme 12 konačno dobijamo da je

$$\lim_{m \to \infty} y(z_m) = A$$

što je i trebalo dokazati.

Na taj način dobili smo oslabljeni zahtev u pogledu brzine teženja nuli niza normi $|x_n|$ niza $\{x_n\}$ po kome treba da postoji granična vrednost da bi to impliciralo da granična vrednost postoji u konusu. Medjutim, postavlja se pitanje da li je to najbolja moguća procena za "gustinu" pomenutog niza tačaka, ili se možda ona može još popraviti a da tvrdjenje Teoreme 15 (II) ostane u važnosti. Odgovor na ovo, svakako veoma značajno pitanje, daje naša sledeća teorema.

T e o r e m a 16 (III). Procena brzine teženja nuli niza normi tačaka $x_n \to 0$, takvih da postojanje granične vrednosti po nizu $\{x_n\}$ implicira postojanje granične vrednosti u konusu, dobijena u Teoremi 15 (II) je najbolja moguća.

D o k a z . Tvrdjenje ove teoreme dokazaćemo na taj način što ćemo konstruisati jedan primer kvazikonformnog preslikavanja koji će pokazati da je dobijena procena za "gustinu" zaista najbolja moguća.

Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. Posmatrajmo u kompleksnoj ζ-ravni, $\zeta=\xi+i\eta$, oblast

$$G=\{(\xi,\eta)\mid -\xi^2<\eta<-\xi^2(1-\xi^{\varepsilon})\ ,\ \xi>0\}$$

Funkcijom

$$w(\zeta)=u+iv=e^{i(\frac{1}{\zeta}-i)}$$

ta se oblast preslikava na oblast Δ u w-ravni, koja se nalazi izmedju dveju spirala koje se namotavaju oko jediničnog kruga $|w|=1$. Napomenimo da za $\varepsilon=0$ to nije slučaj, naime, oblast

$$G_1=\{(\xi,\eta)\mid -\xi^2<\eta<-\lambda\xi^2,\ \xi>0,\ 0<\lambda<1\}$$

se, naprimer, ne preslikava izmedju takvih dveju spirala.

Obeležimo sa $\{w_n\}$ niz tačaka u w-ravni koje leže na u-osi i konvergiraju tački $w=1$ a takve su da se u svakom navoju pomenute spiralne oblasti nalazi po jedna od njih, recimo na sredini odsečka ose $v=0$ koji je sadržan u tom navoju za $u>0$. Neka su ζ_n originali tačaka w_n u ravni ζ. Tačke ζ_n konvergiraju tački 0 i to je niz tačaka po kome postoji granična vrednost, ustvari

$$\lim_{n\to\infty} w(z_n) = 1,$$

ali je očigledno da, pošto je odgovarajući granični element ceo krug $|w|=1$, ne možemo tvrditi da granična vrednost postoji po nekoj putanji koja se završava u tački O, tako da bude pri tome $\lim_{z_\alpha\in\ell} w(z_\alpha)=1$.

Posmatrajmo tačke $z_n=\xi_n+i\eta_n$. Realni delovi tačaka z_n su takvi da je

$$\xi_n+\xi_n^3\left(1-\xi_n^{\varepsilon}+\frac{\xi_n^{2\varepsilon}}{2}\right)=\frac{1}{2n\pi},$$

pa za dovoljno veliko n imamo da je, kad $n\to\infty$,

$$\xi_n=\mathcal{O}\left(\frac{1}{2n\pi}\right).$$

U daljem ćemo za obeležavanje veličina istog reda koristiti simbol $(\approx)$ pošto su izrazi s kojima se susrećemo nezgodni za pisanje u obliku $\mathcal{O}(\lambda)$. Prema tome pišemo $\xi_n(\approx)\frac{1}{2n\pi}$.

Posmatrajmo sad porodicu krivih koje spajaju krive $\eta=-\xi^2$ i $\eta=-\xi^2(1-\xi^{\varepsilon})$, a nalaze se u oblasti G. Jasno je da je reč o rektificibilnim krivim, jer smo takve krive koristili prilikom uvodjenja pojmova u vezi s porodicom krivih i njihovim modulom. U daljem će nam biti potreban modul jedne potporodice ovih krivih i njegovo asimptotsko ponašanje.

Neka je n_0 dovoljno velik prirodan broj i obeležimo sa T_0 tačku na osi $O\eta$ takvu da, ako je P_0 tačka na krivoj $\eta=-\xi^2$ u kojoj tu krivu dodiruje tangenta povučena na nju iz tačke T_0, onda je ispunjeno $T_0P_0=T_0z_0$. Obeležimo zatim sa T_1 tačku na η-osi koja se nalazi izmedju koordinatnog početka i tačke T_0. Zbog konveksnosti krive $\eta=-\xi^2$ duž T_1P_0 je seče. Obeležimo

$$\lim_{n\to\infty} w(\zeta_n) = 1,$$

ali je očigledno da, pošto je odgovarajući granični element ceo krug $|w|=1$, ne možemo tvrditi da granična vrednost postoji po nekoj putanji koja se završava u tački O , tako da bude pri tome $\lim\limits_{\zeta_k\in\ell} w(\zeta_k)=1$.

Posmatrajmo tačke $\zeta_n=\xi_n+i\eta_n$. Realni delovi tačaka ζ_n su takvi da je

$$\xi_n+\xi_n^3\left(1-\xi_n^{\varepsilon}+\frac{\xi_n^{2\varepsilon}}{2}\right)=\frac{1}{2n\pi},$$

pa za dovoljno veliko n imamo da je, kad $n\to\infty$,

$$\xi_n=\mathcal{O}\left(\frac{1}{2n\pi}\right).$$

U daljem ćemo za obeležavanje veličina istog reda koristiti simbol $(\approx)$ pošto su izrazi s kojima se susrećemo nezgodni za pisanje u obliku $\mathcal{O}(\lambda)$. Prema tome pišemo $\xi_n(\approx)\frac{1}{2n\pi}$.

Posmatrajmo sad porodicu krivih koje spajaju krive $\eta=-\xi^2$ i $\eta=-\xi^2(1-\xi^{\varepsilon})$, a nalaze se u oblasti G . Jasno je da je reč o rektificibilnim krivim, jer smo takve krive koristili prilikom uvodjenja pojmova u vezi s porodicom krivih i njihovim modulom. U daljem će nam biti potreban modul jedne potporodice ovih krivih i njegovo asimptotsko ponašanje.

Neka je n_0 dovoljno velik prirodan broj i obeležimo sa T_0 tačku na osi $O\eta$ takvu da, ako je P_0 tačka na krivoj $\eta=-\xi^2$ u kojoj tu krivu dodiruje tangenta povučena na nju iz tačke T_0 , onda je ispunjeno $T_0P_0=T_0\zeta_0$. Obeležimo zatim sa T_1 tačku na η -osi koja se nalazi izmedju koordinatnog početka i tačke T_0 . Zbog konveksnosti krive $\eta=-\xi^2$ duž T_1P_0 je seče. Obeležimo tačku preseka sa P_1 . Neka su γ_1 i γ_2 krugovi s centrom u tački T_1 i poluprečnicima jednakim T_1P_0 i T_1P_1 respektivno. Obeležimo sa S_1 tačku u kojoj krug γ_1 seče krivu $\eta = -\xi^2(1-\xi^\varepsilon)$ a sa Q_1 tačku u kojoj krug γ_2 seče duž T_1S_1. Ponovimo zatim opisani postupak, ali, polazeći od tačke T_1 . Ustvari, neka je T_2 tačka na η-osi izmedju koordinatnog početka i tačke T_1 , odredimo tačku P_2 , krugove γ_{11} i γ_{21} a zatim tačke Q_2 , S_2 kao malopre. Ponavljajući opisani postupak dobićemo niz krivolinijskih četvorouglova $P_{i-1}P_iQ_iS_i$ koji predstavljaju niz isečaka kružnih prstenova. Ako sa G_{n_0} obeležimo presek oblasti G i kruga γ_{n_0} sa centrom u tački T_0 koji prolazi kroz tačku ξ_{n_0} , očigledno je da se pomenuti niz krivolinijskih četvorouglova može upotrebiti da se pomoću njega aproksimira oblast G_{n_0} , naravno, ako se izvrši dovoljno fina podela. Nas medjutim, kako smo već nagovestili, interesuje modul jedne porodice krivih pa ćemo ovaj niz upotrebiti da aproksimiramo modul porodice krivih.

Obeležimo sa Σ_i krivolinijski četvorougao $P_{i-1}P_iQ_iS_i$. Posmatrajmo porodicu krivih σ_i koje u četvorouglu Σ_i spajaju njegove naspramne stranice $P_{i-1}P_i$ i Q_iS_i . Obeležimo sa α_i ugao $P_{i-1}T_iS_i$. Onda, na osnovu ranije dokazanog (videti str.10) imamo da je

$$\operatorname{mod} \sigma_i = \frac{1}{\alpha_i} \ln \frac{P_{i-1}T_i}{P_iT_i}$$

Imajući u vidu da su porodice krivih σ_i razdvojene, na osnovu osobina modula (videti str.8) imamo da je modul njihove unije jednak zbiru modula, dakle

$$\operatorname{mod} \bigcup_i \sigma_i = \sum_i \frac{1}{\alpha_i} \ln \frac{P_{i-1}T_i}{P_iT_i}$$

Pošto je n_0 dovoljno veliko, što znači da su i tačke ζ_n dovoljno blizu koordinatnog početka, imaćemo da je, kad $n \to \infty$, $|\zeta_n| (\approx) \xi_n$. Pretpostavimo da je, kao što je to uobičajeno kod definicije integrala, izvršena dovoljno fina podela. Onda imamo da je

$$\alpha_i (\approx)_1 \sin \alpha_i (\approx) \frac{\xi_i^{2+\varepsilon}}{\xi_i} = \xi_i^{1+\varepsilon}$$

a isto tako i

$$\ln \frac{P_{i-1} T_i}{P_i T_i} (\approx)_1 \frac{\Delta \xi_i}{\xi_i}$$

Na taj način dobijamo da je modul porodice krivih Γ_{n_0}, sadržanih u oblasti G_{n_0} i dobijenih pri opisanom postupku, ustvari modul porodice kružnih lukova koji spajaju krive $\eta = -\xi^2(1-\xi^\varepsilon)$ i $\eta = -\xi^2$ veličina reda

$$\operatorname{mod} \Gamma_{n_0} (\approx) \int_0^{\xi_{n_0}} \frac{d\xi}{\xi^{2+\varepsilon}} ,$$

i da je, recimo, modul porodice pomenutih lukova koji su sadržani u oblasti $G_{n_2} - G_{n_1}$ jednak

$$\operatorname{mod} \Gamma_{n_1}^{n_2} (\approx) \int_{\xi_{n_1}}^{\xi_{n_2}} \frac{d\xi}{\xi^{2+\varepsilon}} .$$

Oblast G može se kvazikonformno preslikati na polukrug u ravni z, $z = x+iy$,

$$D = \{ z \mid |z| < R , y > 0 \}$$

tako da se pri tome kružni luk γ_n kome pripada tačka ζ_n preslikava u polukrug $|z| = r_n$, $y > 0$. Na taj način dobija se da je slika oblasti $G_{n_0}^n$, ustvari dela oblasti G koji je sadržan u krugu γ_{n_0}, ali koji se nalazi izvan kruga γ_n, jedan poluprsten

$$H = \{ z \mid r_n < |z| < R,\ y > 0 \}$$

u ravni z . Obeležimo to preslikavanje sa f .

Pri kvazikonformnom preslikavanju f porodica krivih $\Gamma_{n_0}^{n}$ se preslikava na porodicu krivih sadržanih u poluprstenu H koje spajaju delove prečnika koji, zajedno sa odgovarajućim polukrugovima odredjuju poluprsten. Ustvari, to je porodica polukrugova i modul ove porodice krivih je, kao što smo videli ranije (str.11) jednak

$$mod\,(\Gamma_{n_0}^{n})' = \frac{1}{\pi} \ln \frac{R}{r_n} \quad .$$

Imamo da je modul porodice krivih $\Gamma_{n_0}^{n}$

$$mod\,\Gamma_{n_0}^{n} \,(\approx)\, \frac{1}{\xi_n^{1+\varepsilon}}$$

pa, pošto je modul kvaziinvarijantan pri kvazikonformnom preslikavanju, dobijamo

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{R}{r_n} \,(\approx)_1\, \frac{1}{\xi_n^{1+\varepsilon}}$$

odnosno

$$r_n \,(\approx)\, R\,(e^{-\pi})^{\left(\frac{1}{\xi_n}\right)^{1+\varepsilon}}$$

što konačno daje

$$r_n \,(\approx)\, (q_1)^{\left(\frac{1}{\xi_n}\right)^{1+\varepsilon}} \quad , \; 0 < q_1 < 1 .$$

Obeležimo sa $\{z_n\}$ niz slika tačaka ξ_n pri preslikavanju f . Vidimo da se tačke ξ_n , koje konvergiraju tački O , preslikavaju na niz tačaka z_n takvih da je $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ i pri tome su norme tih tačaka

$$r_n (\approx) \; q_1^{\left(\frac{1}{\xi_n}\right)^{1+\varepsilon}}$$

No, videli smo da je

$$\xi_n (\approx) \frac{1}{2n\pi}$$

pa odavde dobijamo da je

$$r_n (\approx) \; q^{n^{1+\varepsilon}}$$

za neko $0<q<1$.

Posmatrajmo sad preslikavanje oblasti H na oblast Δ koje se dobija kao kompozicija kvazikonformnih preslikavanja f^{-1}, inverznog preslikavanju f i preslikavanja w, $h=w\circ f^{-1}$. Pri preslikavanju h oblast H preslikava se na oblast Δ_{n_0}, koja ustvari predstavlja sliku oblasti G_{n_0} pri preslikavanju w. Niz tačaka z_n nije tangencijalni niz granice $y=0$ oblasti H i prema tome sadržan je u nekom konusu. Na osnovu dosadašnjeg izlaganja zaključujemo da granična vrednost po tom nizu postoji a očigledno je da ne postoji granična vrednost u konusu (ovde je to ugao). Norme tačka niza $\{z_n\}$ su veličine reda

$$|z_n| = r_n (\approx) \; q^{n^{1+\varepsilon}}$$

i postojanje granične vrednosti po njima ne implicira, kao što smo videli, postojanje granične vrednosti u konusu. Pošto je ε proizvoljan pozitivan broj, zaključujemo da je tvrdjenje Teoreme 15 (II) najbolje mogućno. Time je naša teorema dokazana za slučaj preslikavanja u ravni.

Imajući u vidu da postoji bitna razlika izmedju kvazikonformnih preslikavanja u prostoru R^n za $n\geq 3$ ikvazikonformnih preslikavanja u ravni R^2, predjimo sad na konstruisanje odgovarajućeg primera kvazikonformnog preslikavanja u prostoru koje će biti asocirano opisanom preslikavanju u ravni i za koje tvrdjenje teoreme važi. Napominjemo da pri konstruisanju ovog preslikavanja nema principijelnih teškoća i zbog toga ćemo se ograničiti na njegov opis.

Pri preslikavanju w^{-1} uočene tačke w_n imaju za slike netangencijalan niz tačaka ζ_n. Obeležimo sa ζ_n' tačke u kojima simetrala ugla α_n seče krug γ_n. Postoji kvazikonformno preslikavanje λ oblasti G_{n_0} na sebe pri kome se tačke ζ_n preslikavaju u ζ_n'. Na isti način može se postići da se oblast G_{n_0} kvazikonformno preslika na H a da pri tome slike tačaka ζ_n' budu presečne tačke y-ose i polukrugova $|z| = r_n$, $y>0$. Obeležimo te tačke sa z_n'. Jasno je da je $|z_n'| = r_n$.

Pridružimo zatim svakom od kružnih lukova koji spajaju krive $\eta = -\xi^2$ i $\eta = -\xi^2(1-\xi^\varepsilon)$ kalotu sfere s centrom u odgovarajućoj tački na η-osi. Na taj način oblasti G_{n_0} je pridružena oblast $\mathcal{G}$ koja ima oblik kružnog roga. Oblast $\mathcal{G}$ preslikavamo zatim na polulоptu $\mathcal{L}$ tako da u jednoj od njenih ravni simetrije dobijemo našu oblast H. S druge strane ćemo oblast $\mathcal{G}$ preslikati na prostornu spiralnu oblast $\mathcal{D}$ tako da u njenoj ravni simetrije dobijemo našu oblast Δ. Ako pomenuta dva preslikavanja kao i malopre komponujemo, dobićemo prostorno kvazikonformno preslikavanje oblasti $\mathcal{L}$ na oblast $\mathcal{D}$ tako da njegova restrikcija na odgovarajuće ravni daje naše, malopre opisano preslikavanje u ravni. Pri tome imamo da u oblasti $\mathcal{L}$ leži niz tačaka z_n' čije su norme $|z_n'| (\simeq) q^{n^{1+\varepsilon}}$ takav da po njemu postoji granična vrednost. No, s druge strane je očigledno da se o postojanju granične vrednosti u konusu pri preslikavanju ovih prostornih oblasti ne može govoriti. Time je Teorema 16 (III) u potpunosti dokazana.

Istaknimo da Teoreme 15(II) i 16(III) u potpunosti karakterišu nizove tačaka koji imaju osobinu da iz postojanje granične vrednosti po njima, pri odgovarajućoj graničnoj korespondenciji, sledi postojanje granične vrednosti u konusu, uz uslov da se radi o netangencijalnim nizovima, sadržanim u tom konusu.

6. N e k o l i k o   p r i m e n a   p r e t h o d n i h   r e z u l t a t a . Cilj nam je da formulišemo i dokažemo neke rezultate koji se odnose na problematiku tipa teoreme Lindelof-a oslanjaju se na Teoremu 15 (II).

Sličnu problematiku za uopštene meromorfne funkcije, koje predstavljaju kompoziciju kvazikonformnog preslikavanja u ravni i jedne meromorfne funkcije, ispitivao je Gavrilov u /18/, /19/. On je, ustvari, preneo na uopštene meromorfne funkcije neke od rezultata Bagemihl-a i Seidel-a. Značajno je istaći da se i kod Gavrilova, kao i kod Bagemihl-a i Seidel-a pokazuje da se može konstruisati primer preslikavanja za koje granična vrednost postoji po nizu tačaka za koje je niz rastojanja od granične tačke u kojoj se posmatra granična korespondencija, niz pozitivnih brojeva tipa geometrijske progresije,ali da pri tome ne postoji granična vrednost u uglu. Ako, medjutim, uzmemo u obzir da se pri tome radilo o nejednolisnim preslikavanjima i podsetimo se da kvazikonformna preslikavanja koja mi ispitujemo predstavljaju homeomorfizme, pa bi i njima odgovarajuća kvazikonformna preslikavanja u ravni, koja obuhvataju i jednolisna konformna preslika -

vanja, su homeomorfizmi, zaključujemo da pri ovoj graničnoj korespondenciji homeomorfnost uslovljava i brzinu kojom niz tačaka treba da teži graničnoj tački. Imajući sve ovo u vidu zaključujemo da se kao jednostavna posledica Teoreme 15(II), Teoreme 16(III) i rezultata Bagemihl-a i Seidel-a i Gavrilova može formulisati sledeća teorema.

T e o r e m a 17 (IV) . Tvrdjenje Teoreme 15(II) ne može se preneti na kvaziregularna preslikavanja u prostoru.

Dokazaćemo sad da se tvrdjenje Teoreme 15(II) može proširiti na proizvoljan konus s vrhom u posmatranoj graničnoj tački, koji je sadržan unutar posmatrane oblasti.

T e o r e m a 18 (V) . Ako pri kvazikonformnom preslikavanju $y(x)$ oblasti $|x|<R$, $x_3>0$, postoji granična vrednost po nekom netangencijalnom nizu tačaka $\{x_n\}$ koji teži tački O i niz njihovih normi je $|x_n|=q^n$, $0<q<1$, onda granična vrednost postoji u proizvoljnom konusu s vrhom u tački O koji je sadržan u oblasti $|x|<R$, $x_3>0$.

D o k a z . Pošto je niz tačaka $\{x_n\}$ netangencijalan, on je sadržan u nekom konusu $K_{2\varphi}$. Na osnovu Teoreme 15(II) zaključujemo da onda postoji granična vrednost u konusu $K_{2\varphi}$ i pri tome je ispunjeno

$$\lim_{n\to\infty} y(z_n) = \lim_{n\to\infty} y(x_n) = A$$

za svaki niz tačaka z_n sadržan u konusu $K_{2\varphi}$. Ali to onda znači da granična vrednost postoji i po nekom poluzaseku $\hat{S}$ koji se završava u tački $O \in \partial D$, i pri tome je ispunjeno da $y(u_n)$ konvergira ka A kad tačka u_n teži tački O duž poluzaseka γ. Sad na osnovu Teoreme 11 zaključujemo da je u svakom konusu $K_{2\varphi}$ za svaki niz tačaka $\{t_n\}$, $t_n \in K_{2\varphi}$, $t_n \to 0$,

$$\lim_{n \to \infty} y(t_n) = \lim_{n \to \infty} y(x_n) = A$$

što je i trebalo dokazati.

Dokazaćemo sad, primenjujući Teoremu 15(II), i sledeći rezultat.

T e o r e m a 19 (VI) . Neka je $y(x)$ kvazikonformno preslikavanje oblasti $|x| < R$, $x_3 > 0$, i neka pri tome postoji granična vrednost po "q-gustom" netangencijalnom nizu tačaka $\{x_n\}$, $|x_n| = q^n$, $0 < q < 1$, $x_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Onda na svakom poluzaseku γ oblasti koji se završava u tački O postoji niz tačaka $\{z_n^\gamma\}$ koji po tom zaseku teži tački O i po kome je

$$\lim_{n \to \infty} y(z_n^\gamma) = \lim_{n \to \infty} y(x_n) = A$$

D o k a z . Na osnovu Teoreme 15(II) zaključujemo da je u proizvoljnom konusu $K_{2\varphi}$, za svaki niz tačaka $\{z_n\}$, $z_n \in K_{2\varphi}$, $z_n \to 0$, $n \to \infty$,

$$\lim_{n \to \infty} y(z_n) = \lim_{n \to \infty} y(x_n) = A$$

pa se, prema tome, skup $C_K(O)$ sastoji od jedne jedine tačke A. S druge strane imamo da je, prema Teoremi 10

$$C_K(O) = \Pi(O) = A$$

pa se, dakle, skup

$$\Pi(O)=\bigcap_{\gamma} C_{\gamma}(O)$$

sastoji od jedne tačke. Odavde zaključujemo da tačka A mora da pripada svakom od skupova $C_{\gamma}(O)$. Po definiciji skupa $C_{\gamma}(O)$ sledi da mora postojati takav niz tačaka $\{z_n^{\gamma}\}$ na svakom od poluza - seka γ koji se završavaju u tački O da je po njemu

$$\lim_{n\to\infty} y(z_n^{\gamma})=A$$

što je i trebalo dokazati.

7. Kao što se može zapaziti, mi smo se u radu ograničili na "ϱ-guste" nizove tačaka. Medjutim, nije teško videti da se ova restrikcija može lako otkloniti i mogu se posmatrati proizvoljni "ℓ-gusti" nizovi. To bi jedino zahtevalo stalno pozivanje na definiciju limes superiora, znatno bi komplikovalo izlaganje, a u suštini se dobija veoma malo. Zbog toga se mi ovde ograničavamo na konstataciju da sve izložene teoreme ostaju u važnosti ako se umesto "ϱ-gustih" posmatraju "ℓ-gusti" nizovi tačaka po kojima se pretpostavlja da postoji granična vrednost.

8. Istaknimo u vezi s problematikom izloženom u ovoj glavi da ona niukom slučaju nije iscrpljena. Postavlja se pre svega pitanje može li se na kvazikonformna preslikavanja u prostoru preneti još neki od rezultata u vezi s graničnom korespondencijom koji su dobijeni za različite klase funkcija kompleksne promenljive. Takve rezultate treba tražiti medju stavovima koji po svom sadržaju odražavaju geometrijsku suštinu odgovarajuće klase pre - slikavanja.

Bilo bi poželjno da se u formulacijama naših teorema odreknemo uslova da niz po kome postoji granična vrednost bude netangencijalan. Teškoće pri tome su, po našem mišljenju, pre svega tehničke prirode, jer za kvazikonformna preslikavanja u prostoru ne postoji razradjeni aparat koji bi omogućavao primenu različitih analitičkih metoda.

Od interesa je svakako ispitati i da li se može za kvaziregularna preslikavanja dokazati bar neki analogon naše Teoreme 15(II kad već njena direktna generalizacija ne važi.

Granična korespondencija pri kvazikonformnom preslikavanju proizvoljne mnogostrukosti naći će, po našem mišljenju, svoje mesto u okviru ispitivanja topološkog karaktera.

II. PROBLEM PROŠIRENJA KVAZIKONFORMNOG PRESLIKAVANJA S GRANICE

1. Poznato je da unija Žordanove krive u kompleksnoj ravni i njene unutrašnjosti predstavlja zatvorenu oblast koja je topološka slika zatvorenog kruga. Medjutim, odgovarajuće uopštenje u slučaju prostora R^n, $n>2$, u opštem slučaju nije tačno. Poznat je primer takozvanih "rogatih sfera" koji je konstruisao Alexander /6/. Takva sfera predstavlja homeomorfnu sliku sfere u R^3 ali jedna od njenih komplementarnih komponenata nije homeomorfna slika lopte jer nije ni prosto povezana, a kao što znamo, povezanost je topološka invarijanta. Odavde se zaključuje da se ne može svaki homeomorfizam s granice ∂D oblasti proširiti na njenu unutrašnjost.

Problemi koji se pojavljuju pri pokušajima da se dobiju različiti dovoljni uslovi za mogućnost proširenja pri različitim klasama preslikavanja obično se nazivaju Schoenflies-ovim problemima. Prvi ozbiljan napredak u pravcu rešavanja ovog problema za proizvoljan homeomorfizam svakako je rezultat Mazur-a /44/. On je dokazao da je za mogućnost proširenja dovoljno da preslikavanje bude "lepo" u smislu da je linearno u okolini neke tačke iz oblasti

$$\sigma_a = \{x \mid 1-a < |x| < 1+a,\ 0<a<1\}$$

i uz to da se tačke iz σ_a koje su unutrašnje za S^{n-1} preslikavaju unutar slike $f(S^{n-1})$. Mazurov rezultat glasi:

T e o r e m a 20 . Neka je sfera S^{n-1} lepo potopljena u

S^n. Onda su zatvorenja komplementarnih komponenata za $\varphi(S^{n-1})$ homeomorfna n-ćeliji.

Posle Mazura niz autora je uopštio njegov rezultat. To su pre svega Brown /10/, Morse /51/, /52/, Huebsch i Morse /30/ i dr. Navedimo rezultate Morse-a i Huebsch-a i Morse-a. U tom cilju potrebne su nam dve definicije koje su oni dali u /52/ i /30/.

D e f i n i c i j a 5 . Neka je $m \geq 0$ i neka je φ jedan C^m-difeomorfizam oblasti σ_a na neki podskup prostora R^n. Kažemo da preslikavanje σ_a zadovoljava "uslov ljuske" ako preslikava tačke koje su unutrašnje za S^{n-1} u tačke koje su unutrašnje za $\varphi(S^{n-1})$.

D e f i n i c i j a 6 . Homeomorfizam $\varphi : D \to D'$ je C_0^m -difeomorfizam D na D' ako je za neku tačku $P \in D$, $\varphi(P) = P'$ i restrikcija preslikavanja φ na $D \setminus P$ je C^m-difeomorfizam od $D \setminus P$ na $D' \setminus P'$. Tačku P zovemo singularnom.

T e o r e m a 21 . (videti /51/) Dat je C^m-difeomorfizam,

$$\varphi : S^{n-1} \longrightarrow \mathcal{M}_{n-1}$$

sfere S^{n-1} na $\mathcal{M}_{n-1}$ ($m > 0$). Postoji C_0^m -difeomorfizam λ_φ neke otvorene okoline od JS^{n-1} na neku otvorenu okolinu od $J\mathcal{M}_{n-1}$ pri čemu je λ_φ takvo da je restrikcija

$$\lambda_\varphi | S^{n-1} = \varphi .$$

T e o r e m a 22 . (videti /52/) Neka je φ jedan C^m-difeomorfizam ljuske σ_a koji zadovoljava "uslov ljuske". Ako je K pogodno izabran kompaktan podskup od JS^{n-1}, koji, za $m>0$ sadrži pogodno izabranu tačku P, onda postoji homeomorfizam λ_φ od $\sigma_a \cup JS^{n-1}$ koji je proširanje za $\varphi / \sigma_a \setminus K$ i, za $m>0$, uz to je C^m-difeomorfizam od $(\sigma_a \cup JS^{n-1}) \setminus P$. Pri tome je ispunjeno $\lambda_\varphi(JS^{n-1}) = J\varphi(S^{n-1})$.

2. Problem proširenja za kvazikonformna preslikavanja u prostoru prvi je rešavao Ahlfors /1/. On je iskoristio činjenicu da se svako dvodimenziono kvazikonformno preslikavanje može komponovati od konačnog niza preslikavanja s malim deformacijama. Zatim je na kvazikonformno preslikavanje s malim deformacijom primenio diskretan metod i dokazao da se kvazikonformno preslikavanje može proširiti s dve na tri dimenzije. Istovremeno je istaknuto da za slučaj više dimenzija ovo rezonovanje ne važi. Rezultat Ahlforsa glasi:

T e o r e m a 23 . Neka je $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ kvazikonformno preslikavanje ravni $x_3 = 0$ na sebe, normalizovano sa $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$. Postoji kvazikonformno preslikavanje $f(x_1, x_2, x_3)$ poluprostora $x_3 \geq 0$ na sebe, $f = (\varphi_1, \varphi_2, 0)$ za $x_3 = 0$, i pri tome postoji rešenje problema čija maksimalna dilatacija leži ispod neke granice, koja zavisi samo od maksimalne deformacije za preslikavanje φ.

Rezultat Ahlfors-a uopštili su na slučaj preslikavanja u višedimenzionom prostoru Sedo i Sičev u /59/, ali pod uslovom da se radi o preslikavanjima s malom deformacijom. To je bitna restrikcija jer u prostoru R^n, $n>2$, nije poznato da li se pro -

izvoljno kvazikonformno preslikavanje može komponovati od preslikavanja s malom deformacijom. Njihov rezultat glasi:

T e o r e m a 24 . Svako kvazikonformno preslikavanje prostora $\bar{R}^{k-1}$, $k \geq 3$, na sebe, koje je dovoljno blisko konformnom, može se produžiti do kvazikonformnog preslikavanja poluprostora $x_k \geq 0$ prostora $\bar{R}^k$ na sebe.

Značajan prilog ovoj problematici dao je Gehring. Navedimo neke od njegovih rezultata, dokazane u /24/ i /25/.

T e o r e m a 25 . Neka je D Žordanova oblast u Moebiusovom prostoru $\bar{R}^3$ i neka je f kvazikonformno preslikavanje oblasti D na jediničnu loptu B^3 . Onda se f može produžiti do kvazikonformnog preslikavanja prostora $\bar{R}^3$ ako i samo ako je spoljašnjost oblasti D kvazikonformno ekvivalentna sa B^3 .

T e o r e m a 26 . Pretpostavimo da je D oblast u $\bar{R}^n$, da je U okolina granice ∂D i da je f kvazikonformno preslikavanje preseka $D \cap U$ u B^n takvo da $|f(x)| \to 1$ kad $x \to \partial D$ u $D \cap U$. Onda postoji okolina U^* granice ∂D i kvazikonformno preslikavanje f^* oblasti D na B^n takvo da je ispunjeno $f^* = f$ u $D \cap U^*$.

T e o r e m a 27 . Pretpostavimo da je D Žordanova oblast u $\bar{R}^3$ i da za svaku tačku $P \in \partial D$ postoji okolina U_P tačke P i homeomorfizam f_P od $\bar{D} \cap U_P$ u $\bar{B}^3$ takav da je f_P kvazikonforman u $D \cap U_P$ i da je $f_P(\partial D \cap U_P) \subset \partial B^3$. Onda za svaku tačku $Q \in \partial D$ postoji okolina U^* tačke Q i homeomorfizam f^* od

$\bar{D}$ na $\bar{B}^3$ takav da je f_0^* kvazikonforman u D i da je $f^* = f_Q$ u $\bar{D} \cap U^*$.

Kao što vidimo, ovo je, ustvari, lokalizovana verzija prethodne teoreme u .

3. Kvazikonformno proširenje difeomorfizma. Dokazaćemo teoremu o proširenju proizvoljnog difeomorfizma do kvazikonformnog preslikavanja. Pri tome ćemo koristiti rezultate Morse-a i Huebsch-a.

Teorema 28 (VII). Svaki difeomorfizam φ sfere S^{n-1}

$$\varphi : S^{n-1} \to \mathcal{M}_{n-1}$$

može se proširiti do kvazikonformnog preslikavanja zatvorene lopte $\bar{B}^n$,

$$\lambda_\varphi : \bar{B}^n \to \lambda_\varphi(\bar{B}^n)$$

tako da je restrikcija preslikavanja $\lambda_\varphi | S^{n-1} = \varphi$.

Dokaz. U radu /51/ Morse je dokazao da se formulisani problem može "efektivno preslikati" na odgovarajući problem pri kome će biti ispunjena "pretpostavka o ljusci". On pri tome pod "efektivno preslikati" podrazumeva da postoji bar jedan problem za koji je pretpostavka o ljusci zadovoljena, takav da postojanje rešenja u tom slučaju implicira postojanje rešenja formulisanog problema, (videti /51/, &3 i & 4). Prema tome treba dokazati da se difeomorfizam

$$\varphi : \sigma_a \to \Sigma$$

ljuske

$$\sigma_a = \{x \mid 1-a < |x| < 1+a,\ 0 < a < 1\}$$

može produžiti do kvazikonformnog preslikavanja.

Poznato je da je difeomorfizam kompakta kvazikonformno preslikavanje u smislu da, ako je

$$f : D \to D'$$

difeomorfizam oblasti D i ako je D_0 oblast čije je zatvorenje kompaktan podskup oblasti D, onda je restrikcija f/D_0 kvazi - konformno preslikavanje, (videti Vaisala /67/, str. V). Na osnovu toga zaključujemo da, uz eventualno sužavanje ljuske, treba rešiti problem o proširenju kvazikonformnog difeomorfizma sa ljuske σ_ε na $\sigma_\varepsilon \cup JS^{n-1}$. Ovakav su problem za proizvoljni difeo - morfizam rešili u eksplicitnom obliku Huebsch i Morse, i njihov je rezultat citiran kao Teorema 22. Pri tome se proširenje dobija u obliku difeomorfizma s jednom singularnom tačkom. Imajući u vidu da je rešenje problema dato u obliku kompozicije C^m-difeomorfi - zama i C^∞-difeomorfizama koji su uz to i kvazikonformna preslikavanja, a da se singularna tačka pojavljuje pri inverziji u odnosu na pogodno izabranu sferu, što je konformno pa prema tome i kvazikonformno preslikavanje, mi rezultat Huebsch-a i Morse-a možemo izreći i u sledećem obliku:

Neka je φ kvazikonformni difeomorfizam ljuske σ_ε

$$\varphi : \sigma_\varepsilon \to \varphi(\sigma_\varepsilon)$$

On se može produžiti do kvazikonformnog difeomorfizma skupa $(\sigma_\varepsilon \cup JS^{n-1}) \setminus P$,

$$\lambda_\varphi : (\sigma_\varepsilon \cup JS^{n-1}) \setminus P \to \lambda_\varphi((\sigma_\varepsilon \cup JS^{n-1}) \setminus P)$$

pri čemu je P proizvoljna unutrašnja tačka lopte B^n.

Da bi otklonili ovu singularnu tačku, podsetimo se da za kvazikonformna preslikavanja u prostoru jedna singularna tačka uvek predstavlja otklonjiv singularitet. Ustvari, važi i opštije tvrdjenje u pogledu otklonjivosti singularnih tačaka (videti u Vaisala /66/):

Pretpostavimo da je D oblast u $\bar{R}^n$ i da je $E \subset D$ skup koji je zatvoren u odnosu na D pri čemu je $(n-1)$-dimenziona Hausdorfova mera skupa E jednaka nuli. Onda svako kvazikonformno preslikavanje oblasti $D \setminus E$ ima jedinstveno neprekidno proširenje g na celu oblast D. Uz to je preslikavanje kvazikonformno i pri njemu je $K_0(g) = K_0(f)$, $K_I(g) = K_I(f)$.

Prema tome jedna singularna tačka je otklonjiv singularitet pri kvazikonformnom preslikavanju. Na taj način vidimo da se proširenje koje smo ranije dobili može dalje proširiti i na tačku P pa dobijamo kvazikonformno preslikavanje oblasti $G_\delta \cup S^{n-1}$ čija je restrikcija na graničnu sferu S^{n-1} dato preslikavanje φ.

Time je tvrdjenje teoreme dokazano.

Imajući u vidu da je kvazikonformno preslikavanje diferencijabilno samo gotovo svuda, zaključujemo da je uslov o difeomorfnosti datog preslikavanja bitan i da se ovaj način rezonovanja ne može primeniti na proizvoljno kvazikonformno preslikavanje.

4. Što se tiče daljeg razvoja ove problematike, izgleda da će morati da važi opšti stav, dokazan od strane Ahlfors-a u slučaju prostora R^3 i za višedimenzione oblasti i njihova kvazikonformna preslikavanja. U tom pravcu učinjeno je nekoliko početnih koraka. Jedan od njih nesumnjivo je i dokaz teoreme o stabilnosti u Liouville-ovoj teoremi za prostorna kvazikonformna preslikavanja, što je rezultat Bjelinskog u /8/. Očekuje se da će ovaj put dovesti do dokaza teoreme o kompoziciji proizvoljnog kvazikonformnog preslikavanja, a time i dokaza opšte teoreme.

B i b l i o g r a f i j a

1. Ahlfors L., Extension of quasiconformal mappings from two to three dimensions, Proc.Nat.Acad.Sci.USA 51(1964),768-771.

2. Ahlfors L., Quasiconformal mappings and their applications, Lectures on modern mathematics, Vol.II, Wiley 1964.

3. Ahlfors L., Lectures on quasiconformal mappings, Van Nostrand C. 1966.

4. Ahlfors L., Complex Analysis, Mc Graw Hill 1966.

5. Ahlfors L., Beurling A., Conformal invariants and function - theoretic null-sets, Acta Math. 83(1950), 101-129.

6. Alexander J.W., An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected, Proc.Nat. Acad.Sci.USA 10(1924), 8-10.

7. Bagemihl F., Seidel W., Sequential and continuous limits of meromorphic functions, Ann.Acad.Sci.Fenn., Ser.A I , №280, (1960), 1-17.

8. Белинский П.П., Устойчивость в теореме Лиувилля о пространственных квазиконформных отображениях, Некоторые проблемы математики и механики, Ленинград 1970, 88-102 .

9. Beurling A., Ahlfors L., The boundary correspondence under quasiconformal mappings, Acta Math. 96(1956), 125-142.

10. Brown M., A proof of the generalised Schoenflies Theorem, Bull.Amer.Math.Soc. 66(1960), 74-76.

11. Callender E.D., Holder continuity of n-dimensional quasi-conformal mappings, Pacific J.Math. 10(1960), 499-516.

12. Caraman P., Homeomorfisme cvasiconforme n-dimenzionale , Bucuresti 1968.

13. Caratheodory C., Uber die Begrenzung einfach zusammenhangender Gebiete, Math.Ann. 73(1913), 323-370.

14. Collingwood E.F., Lohwater A.J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ.Press 1966.

15. Doob J.L., The boundary values of analytic functions, Trans. Amer.Math.Soc., 34(1932), 153-170.

16. Fatou P., Series trigonometriques et series de Taylor, Acta Math. 30(1906), 335-400.

17. Fuglede B., Extremal lenght and functional completion , Acta Math. 98(1957), 171-219.

18. Гаврилов В.И., Пределы по непрерывным кривым и по последовательностям точек мероморфных и обобщённых мероморфных в единичном круге функций, Вестник МГУ, сер. матем. , №1, 1964., 14-55 .

19. Гаврилов В.И., Пределы по непрерывным кривым и по последовательностям точек нормальных мероморфных и обобщённых мероморфных в единичном круге функций, Вестник МГУ, сер. матем. № 2, 1964, 30-36.

20. Gehring F.W., Symetrization of rings in space, Trans.Amer. Math.Soc., 101(1961), 499-519.

21. Gehring F.W., Rings and quasiconformal mappings in space, Trans.Amer.Math.Soc. 103(1962), 353-393.

22. Gehring F.W., Quasiconformal mappings in space, Bull.Amer. Math.Soc., 69, N°2(1963), 146-164.

23. Gehring F.W., The Caratheodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space, Ann.Acad.Sci.Fenn Ser.AI, 336/11 (1963), 1-21.

24. Gehring F.W., Extension of quasiconformal mappings in three space, Journal D'Analyse Mathematique, 14(1965), 171-182.

25. Gehring F.W., Extension theorems for quasiconformal mappings in n-space, Journal D'Analyse Mathematique, 19(1967),149-169.

26. Gehring F.W., Extension theorems for quasiconformal mappings in n-space, Proceedings of international Congress of Mathematicians, Moscow 1966, Moskva 1968, 313-318.

27. Gehring F.W., Vaisala J., The coefficients of quasiconformality of domains in space, Acta Math. 114(1965), 1-70.

28. Голузин Г.М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва 1966.

29. Grotzsch H., Uber die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und uber eine damit zusammenhangende Erweiterung des Picardschen Satzes, Berichte uber die Verhandlungen der Sachsischen Akad.Wiss., Leipzig, 80(1928),503-507.

30. Huebsch W., Morse M., An explicit solution of the Schoenflies extension theorem, Journal of Math.Soc.Japan, 12, N°3, 1960., 271-289.

31. Kunzi H., Quasikonforme Abbildungen, Springer-Verlag 1960.

32. Lavrentjev M.A., Sur une classe de representations continues C.R.Acad.Sci.Paris, 200(1935), 1010-1012, Matematičeskij sbornik 42(1935), 407-424.

33. Лаврентьев М.А., Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трёхмерных областей, Докл.АН СССР 20,№4, 1938, 241-242.

34. Лаврентьев М.А., Устойчивость в теореме Лиувилля, ДАН СССР 95,№5, 1954., 925-926.

35. Лаврентьев М.А., Теория квазиконформных отображений, Труды 3-го Всесоюз. Матем. съезда, Москва 1956.

36. Лаврентьев М.А., Краевые задачи и квазиконформные отображения, Современные проблемы теории аналитических функций, Москва 1966, 179-183.

37. Lehto O., Virtanen K., Quasikonforme Abbildungen, Springer-Verlag 1965.

38. Liouville J., Extension au cas des trois dimensions de la question du trace geographique, Application de l'analyse a la geometrie G.Monge, Paris, 1850., 609-616.

39. Lindelof E., Sur un principe general de l'analyse et ses applications a la theorie de la representation conforme, Acta Soc.Sci.Fenn. 46, N°4(1915).

40. Loewner C., On the conformal capacity in space, Journ.Math. Mech. 8(1959), 411-414.

41. Маркушевич А.И., О некоторых классах непрерывных отображений, ДАН СССР 28, 1940., 301-304.

42. Маркушевич А.И., Теория аналитических функций, Москва 1967.

43. Martio O., Rickman S., Vaisala J., Definitions for quasiregular mappings, Ann.Acad.Sci.Fenn., Ser. AI, 448(1969), 1-40.

44. Mazur B., On embeddings of spheres, Bull.Amer.Math.Soc. 65(1959), 59-65.

45. Menchoff D., Sur une generalisation d'un theoreme de M.H.Bohr, Matematičeskij sbornik 44(1937), 339-354.

46. Мещеряков Г.А., Теоретические основы математической картографии, Москва 1968.

47. Mićić V.P., O graničnoj korespondenciji pri kvazikonformnom preslikavanju u prostoru, Matem.vesnik 7(22), sv.3(1970), 341-345.

48. Mićić V.P., A theorem of Lindelof type for quasiconformal mappings in space, Matem.vesnik 9(24), sv.1(1972), 3-8.

49. Mićić V.P., On the boundary correspondence under quasiconformal mappings in space, Ann.Univ.Mariae Curie-Sklod., Lublin, XXII,XXIII,XXIV, 17, 1968/1969/1970. Proceedings of the 5th Conference on Analytic Functions, Lublin 1970,125-129.

50. Mori A., On quasi-conformality and pseudo-analyticity, Trans. Amer.Math.Soc. 84(1957), 56-77.

51. Morse M., Differentiable mappings in the Schoenflies theorem, Compositio Math. 14(1960), 83-151.

52. Morse M., A reduction of the Schoenflies extension problem, Bull.Amer.Math.Soc. 66, N°2(1960), 113-115.

53. Nakki R., Boundary behaviour of quasiconformal mappings in n-space, Ann.Acad.Sci.Fenn., Ser. AI, 484(1970), 1-50.

54. Noshiro K., Cluster sets, Springer-Verlag 1960.

55. Привалов И.И., Граничные свойства аналитических функций, Москва 1950.

56. Решетняк Ю.Г., Пространственные отображения с ограниченным искажением, Сиб.мат.журнал 8, 1967,629-658.

57. Решетняк Ю.Г., Теоремы устойчивости для отображений с ограниченным искажением, Сиб.мат.журнал 9, 1968, 667-684.

58. Seidel W., On the cluster values of analytic functions, Trans. Amer.Math.Soc. 34(1932), 1-21.

59. Седо Р.И., Сычев А.В., О продолжении квазиконформных отображений на многомерные пространства большей размерности, ДАН СССР 198, №6,1971, 1278-1279.

60. Suominen K., Quasiconformal maps in manifolds, Ann.Acad.Sci. Fenn. 393(1966),

61. Шабат Б.В., Метод модулей в пространстве, ДАН СССР 130, 1960. 1210-1213.

62. Шабат Б.В., К теории квазиконформных отображений в пространстве, ДАН СССР 132, 1960., 1045-1048.

63. Трохимчук Ю.Ю., Непрерывные отображения и условия моногенности, Москва 1963.

64. Vaisala J., On quasiconformal mappings in space, Ann.Acad. Sci.Fenn. Ser. AI, 298(1961), 1-36.

65. Vaisala J., On quasiconformal mappings of a ball, Ann.Acad. Sci.Fenn. Ser. AI, 304(1961), 1-7.

66. Vaisala J., Removable sets for quasiconformal mappings, Journal of Math.Mech. 19, N°1(1969), 49-51.

67. Vaisala J., Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Springer-Verlag 1971.

68. Vaisala J., Discrete open mappings on manifolds, Ann.Acad. Sci.Fenn. Ser. AI, 392(1966), 1-9.

69. Волковыский Л.И., Квазиконформные отображения, Львов 1954.

70. Зорич В.А., О соответствии границ при Q-квазиконформных отображениях шара, ДАН СССР 145,№1, 1962, 31-34.

71. Зорич В.А., Соответствие границ при Q-квазиконформных отображениях шара, ДАН СССР 145, №6, 1962, 1209-1212.

72. Зорич В.А., Граничные свойства одного класса отображений в пространстве, ДАН СССР 153, 1963, 23-26.

73. Зорич В.А., Теорема М.А.Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства, Математический сборник 74,116 3, 1967.

74. Зорич В.А., О некоторых открытых вопросах теории пространственных квазиконформных отображений, Метрические вопросы теории функций и отображений, Вып. 3, Киев 1971.