U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

VLADO BAKOVIĆ

LOKALNO KONAČNI I NJIMA BLISKI BESKONAČNODIMENZIONALNI PROSTORI

(Doktorska disertacija)

Beograd, 1975. g.

S A D R Ž A J

U V O D

Poenkare (H. Poincaré, [48]) je, mada ne u sasvim jasnom obliku, dao induktivni prilaz (Ind X) dimenzije prostora. Definiciju dimenzionalne funkcije Ind X dao je Brauer (L. E. Brouwer, [10]). Nezavisno jedan od drugoga Urison (П. С. Урысон, [71]) i Menger (K. Menger, [35] , [36]) su 1921. godine u razmatranje uveli malu induktivnu dimenziju, ind X. Dimenzionalnu funkciju kao funkciju reda pokrivača, dim X, u razmatranje uveo je Lebeg (H. Lebesgue, [28]).

Braur je pokazao invarijantnost dimenzionalne funkcije pri topološkim preslikavanjima i da je Ind $I^n \neq$ Ind I^m za $n \neq m$, gdje je I^n n-dimenzionalni kub. U svojim radovima Urison i Menger riješili su mnoga bitna pitanja teorije dimenzije. Oni su pokazali: teoremu sume, teoremu proizvoda, teoremu monotonosti kao i neke druge. "Najveća zasluga Urisona u teoriji dimenzije je, što je pokazao jednakost osnovnih dimenzionalnih funkcija na klasi separabilnih metričkih prostora" (P. S. Aleksandrov, [3]).

Tumarkin (Л. А. Тумаркин , [70]) je pokazao da se svaki n-dimenzionalni podskup separabilnog metričkog prostora sadrži u kompletnom podskupu iste dimenzije. Menger je formulisao svoj poznati problem: Da li se svaki prostor konačne dimenzije sadrži u kompaktnom prostoru iste dimenzije?

Urison je u svom radu [72] primijetio da se mjesto beskonačne dimenzije može uvesti transfinitna dimenzija, ali za njega, u početku, ona nije bila interesantna. Pri kraju svoga kratkog života on je vladao pojmovima prebrojive i slabo prebrojive dimenzionalnosti, i ako u vezi sa tim pojmovima nije ništa dokazao [3] .

Teorija beskonačnodimenzionalnih prostora počinje radovima Tumarkina i Hurevica (W. Hurewicz, [20]). Tumarkin je postavio sledeći problem: Postoji li beskonačnodimenzionalni kompakt sa osobinom da dimenzija svakog njegovog zatvorenog podskupa je 0 ili beskonačno. Taj problem je riješen 60-ih godina, a riješili su ga: Roberts (J. H. Roberts) i Nagami (K. Nagami) ([45]) za slaboprebrojive kompakte, a Henderson (D. W. Henderson, [18]) u cjelini. On je ujedno pokazao da takvih kompakata ima mnogo, jer oni čine svuda gusti G_δ - skup u skupu svih beskonačnodimenzionalnih kompakata.

Godine 1927. Menger je u radu [36] postavio hipotezu o aksiomatskoj karakterizaciji dimenzionalne funkcije dim X na klasi separabilnih metričkih prostora($\mathcal{M}_S$):

Neka je f(X) realna funkcija odredjena na podskupovima $\{X\}$ nekog prostora i zadovoljava aksiome:

1. Ako je $X' \subset X$, tada je $f(X') \leq f(X)$(monotonosti),

2. Ako je X prebrojiva unija zatvorenih skupova, tada je $f(X) = \sup_i \{f(X_i)\}$ (prebrojive sume),

3. Ako su X i X'homeomorfni, tada je $f(X) = f(X')$(invarijantnosti).

4. Svaki skup X homeomorfan je podskupu kompakta X'tako, da je $f(X) = f(X')$(kompaktifikacije).

5. $f(p) = 0$, $f(J) = 1$, $f(I^n) = n$, gdje je p tačka, J prava, a I^n n-dimenzionalni kub(normiranja).

Za $n \geq 3$ problem je ostao neriješen sve do 1965. godine, kada su Švedov (А. И. Шведов) i Zarelua (А. В. Зарелуа) pokazali da funkcija dim X nije jedinstvena funkcija definisana na sistemu pod-skupova n-dimenzionalnog euklidskog prostora koja zadovoljava aksiome 1-5 (v. [27]).

Aleksandrov je primijetio da sistem aksioma Mengera nije "srećno izabran" pa je predložio novi sistem aksioma ([1]).

Dimenzionalna funkcija, d X, je funkcija odredjena na klasi kompaktnih metričkih prostora, $C_m = \{X\}$, koja zadovoljava aksiome:

1. Vrijednosti funkcije su cijeli brojevi ≥ -1, pri čemu je $d(T^n) = n$, gdje je T^n n-dimenzionalni simpleks (za n=0 T^n je tačka, za n = -1 T^n je prazan skup).

2. Invarijantnosti.

3. Ako je $X = X_1 \cup X_2$, tada je $d\,X = \max\{d\,X_1,\ d\,X_2\}$, gdje su X_1 i X_2 zatvoreni podskupovi prostora X (konačne sume).

4. Svaki metrički kompakt ima takav otvoreni pokrivač, da je za svaki kompakt X' koji je slika prostora X pri svakom ω-preslikavanju $d\,X' \geq d\,X$ (ili ne postoji) (Brauera).

5. Ako je $d\,X = n$ (i X nije jednotačkasti skup), tada postoji zatvorena pregrada X' i $d\,X' \leq n-1$ (Poenkarea).

Aleksandrov je pokazao sledeću teoremu:

Dimenzionalna funkcija na klasi kompaktnih metričkih prostora zadovoljava uslov d X = dim X.

Aleksandrov ([2]) je postavio problem o aksiomatskoj karakterizaciji funkcije dim X na klasi metričkih prostora i na klasi kompaktnih prostora.

Lokucijevskij (O. В. Локуциевский ,[27]) je izmijenio aksiomu Poenkarea i okakterisa funkciju dim X na klasi kompaktnih prostora.

Na klasi metričkih prostora problem je riješio Šćepin (E. В. Щепин ,[56]), dokazujući sledeću teoremu:

Ako funkcija d korespondira svakom metričkom prostoru X ($\dim X < \infty$) cio broj d X i zadovoljava aksiome: normiranja, prebrojive sume, Brauera i Poenkarea, tada je ona jednaka funkciji dim X.

Aksiome Aleksandrova su nezavisne na klasi metričkih prostora i aksioma prebrojive sume ne može se svesti na aksiomu konačne sume ([50]).

U vezi sa aksiomom kompaktifikacije pojavljuje se sledeći problem: Kada prostor X neke klase ima kompaktifikaciju u istoj klasi (Uopšteni problem Mengera)? U vezi s konačnodimenzionalnim prostorima problem je riješen u sladećim slučajevima: dim X = dim βX - Volman (H. Wallman,[77]), Ind X = Ind βX -Vedenisov (Н. В. Веденисов,[75]). U vezi sa savršeno normalnim prostorima ind X = Ind X = Ind βX - Smirnov (Ю. М. Смирнов,[3]). Za neke klase beskonačnodimenzionalnih prostora to je pitanje riješeno. Skljarenko (Е. Г. Скляренко ,[60]) je pokazao da postoji slabo prebrojivodimenzionalni prostor, koji nema kompaktifikacije u toj klasi. Šurle (A. V. Schurle,[57]) je pokazao da slabo prebrojivodimenzionalni prostor tipa G_δ ima kompaktifikaciju u toj klasi. Šmueli (Z. S. Shmuely,[58]) je izdvojio podklasu ω_1 - slabo prebrojivodimenzionalnih prostora koja ispunjava taj uslov. Taj problem za klasu S-slabo beskonačnodimenzionalnih metričkih prostora riješio je Skljarenko, a za normalne prostore Pasinkov (Б. А. Пасынков,[52]). Zarelua je u terminima razbijajućih preslikavanja okarakterisao prostore koji imaju kompaktifikaciju u istoj klasi. Koristeći taj rezultat Luksemburg (Л. А. Люксембург ,[32]) je okarakterisao prostore koji imaju kompaktifikaciju αX , takvu da je $D(\alpha X) = D(X)$, gdje je D(X) dimenzija Hendersona ([17]).

Univerzalni prostor za neku klasu prostora $\mathcal{C} = \{X\}$ je prostor iste klase u koji se može homeomorfno potopiti proizvoljni prostor klase $\mathcal{C}$. U tom slučaju osobine prostora X klase $\mathcal{C}$ mogu se ispitivati kao osobine podskupa univerzalnog prostora. Za eksplicitnu konstrukciju univerzalnog prostora najčešće se koristi prsten neprekidnih funkcija (Hurevic i Nobeling za separabilne metričke prostore ([29]), Nagata (J. Nagata, [46]) i Smirnov ([66]) za slabo prebrojivodimenzionalne, Nagata za prebrojivodimenzionalne ([46]), Nagata ([47]), Pasinkov ([51]) i Zarelua ([74]) za proizvoljne metričke prostore, Vener (B. R. Wenner, [76])za separabilne lokalno konačnodimenzionalne prostore). Teoreme o egzistenciji univerzalnih prostora dokazuju se obično koristeći faktorizacione teoreme Mardešića ([34]) i Pasinkova ([49]), kao i elementarni dokaz tih teorema koje je dao Arhangeljskij (A.B. Архангельский , [5]).

Svaka klasa prostora ne mora imati univerzalni prostor tako na primjer, klasa prostora koji imaju dimenziju ind X nema univerzalni prostor, jer bi univerzalni prostor imao dva suprotna svojstva: a) ind $U < \omega_1$ i b) ind $U \geq \alpha$ za svako $\alpha < \omega_1$. U klasi slabo prebrojivodimenzionalnih prostora sa osobinom Ind $X = \alpha > \omega_0$ nema univerzalnog elementa ([33]).

Nameće se sledeće pitanje:

Da li postoji spoljašnja karakteristika dimenzije prostora?

Dimenzija prostora X (dim $X < \infty$) može se okarakterisati preslikavanjem nekog prostora na taj prostor, ili kao inverzna slika nekog prostora. U vezi sa tim osnovna su sledeća pitanja:

1. Koja preslikavanja smanjuju dimenziju?

2. Koja preslikavanja povećavaju dimenziju?

3. Koje uslove zadovoljava preslikavanje $f: X \to Y$, pri čemu je dim X = dim Y.

Otvorena preslikavanja nam ne karakterišu dimenziju, jer postoji otvoreno preslikavanje $f\colon I \to I^{\infty}$ i ind $f \leq 0$ (Pasinkov, [50]). Zato dimenziju karakterišemo zatvorenim preslikavanjima, uz dodatne uslove na ta preslikavanja.

Dimenzija prostora se karakteriše pomoću preslikavanja u standardne prostore, ili preslikavanjem standardnih prostora, na primjer nuldimenzionalnih, na taj prostor. Prvi radovi karakterizacije dimenzije prostora pomoću preslikavanja su radovi Hurevica ([20], [21]). Hurevic karakteriše dimenziju kompaktnih prostora pomoću preslikavanja u euklidske prostore, kao i ta preslikavanja:

Ako je $f\colon X \to Y$ zatvoreno preslikavanje, tada je $\dim X \leq \dim Y + \dim f$.

Za svaki metrički kompakt i svako k, $0 \leq k \leq n = \dim X$, postoji tako preslikavanje $f\colon X \to R^k$ da je $\dim f \leq n-k$.

Te teoreme za klase metričkih, parakompaktnih i normalnih prostora dokazali su Morita (K. Morita, [40]). Morita i Hanai (S. Hanai) ([41]), Skljarenko ([61]) i drugi (v. I, 2.). Suštinsku novost u karakterizaciji dimenzije pomoću preslikavanja učinio je Katetov (M. Katetov, [24]), uvodeći ravnomjerna nuldimenzionalna preslikavanja Katetov je dokazao osnovnu jednakost teorije dimenzije metričkih prostora, $\dim X = \operatorname{Ind} X$ (v. I, 1.21.). Uopštenje preslikavanja Katetova dali su: Smirnov; Zarelua ([73]) -razbijajuća preslikavanja, koja karakterišu kompaktifikacuju prostora; Pasinkov ([51]) - preslikavanja sa ind $f \leq 0$; Šersnjov (М. Л. Шерснев , [55]) $\operatorname{Dim} f \leq n$ i drugi.

U klasi beskonačnodimenzionalnih prostora interesantna su sledeća pitanja:

1. Na koju klasu prostora se preslikavaju "fini" prostori,

nuldimenzionalni ili neki standardni, pri "finim" preslikavanjima, ord $f < \infty$, ravnomerno nuldimenzionalnim ili nekim drugim?

2. Koja preslikavanja preslikavaju prostor jedne klase, na prostor iste klase?

3. Koja preslikavanja preslikavaju prostor jedne klase, na prostor neke druge klase?

Nagata ([46]) i Smirnov ([67]) karakterišu prebrojivodimenzionalne prostore kao slike nuldimenzionalnih prostora, pri preslikavanjima ord $f < \infty$. Nagata ([46]) i Skljarenko ([59]) prebrojivodimenzionalne kompakte bez izolovanih tačaka kao slike Kantorovog skupa, pri preslikavanju ord $f < \infty$. Skljarenko karakteriše prostore koji nemaju transfinitnu dimenziju Ind X (v. I, 2.23.). Arhangeljskij ([4]) karakteriše slike i inverzne slike prebrojivodimenzionalnih prostora (v. I, 2.22.). Arhangeljskij ([4]) i Nagami ([44]) karakterišu preslikavanja koja preslikavaju ne prebrojivodimenzionalne na prebrojivodimenzionalne prostore, kao preslikavanja koja imaju bar jednu tačku y u kojoj je card $f^{-1}(y) \geq c$.

Faktor preslikavanja (Aleksandrov - Hopf) koriste se za dokazivanje egzistencije univerzalnih prostora konačne dimenzije (Nagata ([42]), Pasinkov ([51]), kao i različitih klasa beskonačnodimenzionalnih prostora (Arhangeljskij ([6]), Pasinkov ([52]) i dr.). Faktor preslikavanja karakterišu i neka bitna svojstva konačnodimenzionalnih prostora (Mardešić ([34]) i Pasinkov ([49])).

Aksiomatika Šćepina ([56]) karakteriše funkciju dim X na klasi konačnodimenzionalnih prostora. Da li ta aksiomatika karakteriše neku klasu beskonačnodimenzionalnih prostora?

Pokazalo se, da nešto izmijenjena aksiomatika Šepina karakteriše klasu lokalno konačnodimenzionalnih prostora, $\mathcal{K}$ (v. II, 1.).

Dalje je pokazano, da je $\mathcal{K}$ minimalna klasa koja zadovoljava aksiome Mengera - Aleksandrova - Šćepina i da nije maksimalna klasa. U tom cilju iz klase beskonačnodimenzionalnih prostora izdvojena je klasa prostora $\widetilde{\mathcal{K}}$.

Za već izdvojene klase prostora može se zapitati: gdje je njihovo mjesto u klasi beskonačnodimenzionalnih prostora i kakva imaju svojstava u odnosu na osnovne teoreme dimenzije: proizvoda, kompaktifikacije, lokalno konačne sume, monotonosti po proizvoljnim skupovima i druge?

Neke kompaktifikacije prostora klase $\mathcal{K}$ i sve sa nuldimenzionalnim deficitom pripadaju klasi prostora sa konačnodimenzionalnim pregradama, $\mathcal{K}_f$. Klasa $\mathcal{K}$ je podklasa klase slabo prebrojivodimenzionalnih prostora i ima osobinu, da svaki njen prostor ima kompaktifikaciju u klasi slabo prebrojivodimenzionalnih prostora. Kako prostori klase $\mathcal{K}_f$ imaju reprezentaciju Skljarenka (II, 2.6.), oni su S-slabo beskonačnodimenzionalni. Ako je deficit kompaktifikacije αX prostora X klase $\mathcal{K}_f$ konačnodimenzionalan, tada kompaktifikacija αX je prostor klase $\mathcal{K}_f$.

Uzimajući za polazni korak klase $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}'$ i lokalnu dimenziju prostora, mogu se iz klase svih beskonačnodimenzionalnih prostora izdvojiti klase prostora $\{\mathcal{K}_\alpha\}$. Ta klasifikacija ima bolje osobine od klasifikacije prostora sa transfinitnim dimenzijama IndX i ind X, Naime, ova se klasifikacija čuva po proizvoljnim podskupovima. Poznato je, da diskretna suma kubova, $\bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$, nema dimenziju Ind X, kao i da dimenzije Ind X i ind X ne zadovoljavaju teoremu sume za dva zatvorena skupa (v. str. 25). Ovako predložena klasifikacija zadovoljava teoreme: lokalno konačne sume(III, 3.4.), monotonosti po proizvoljnim skupovima (III, 3.3.), lokalno svojstvo prenosi se na čitav prostor i druge. Mogu se konstruisati prostori koji pripadaju nekoj klasi $\mathcal{K}_\alpha$ i nemaju dimenziju Ind X. Daju se potrebni uslovi kada prostor X klase $\mathcal{K}_\alpha$ ima dimenziju Ind X (III, 3.2.).

Ova se klasifikacija razlikuje od klasifikacije sa ind X.

Odnosima slike i inverzne slike navedenih klasa prostora, pri konačnodimenzionalnim i konačnostrukim preslikavanjima posvećena je IV glava. Posmatra se lokalno konačnodimenzionalno preslikavanje (IV, 1.4.), pri kojemu je inverzna slika svakoga prostora lokalno konačnodimenzionalan prostor. Ako tako preslikavanje ispunjava uslov (α), tada je i slika u klasi lokalno konačnodimenzionalnih prostora. Kao posledica razmatranja dobija se jedna teorema Katetova (IV, 2.4.). Ispituje se ponašanje i nekih drugih klasa beskonačnodimenzionalnih prostora, pri konačnodimenzionalnim i konačnostrukim preslikavanjima (IV, 2.7. i 2.8.).

Rad je podijeljen u četiri glave.

U I glavi navedene su neke teoreme opšte topologije i teorije dimenzije, koje se koriste pri dokazima u drugim glavama.

U II glavi se ispituje aksiomatika Mengera - Aleksandrova-Šćepina i pitanja u vezi sa tom aksiomatikom.

U III glavi data su svojstva prostora klasa $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_f$. Poslednji paragraf te glave je posvećen klasifikaciji beskonačnodimenzionalnih prostora, dim X = ∞ .

U IV glavi se izučava ponašanje , pri preslikavanju klasa prostora koje se izučavaju u III glavi kao i nekih drugih.

Spisak literature dat je na kraju i citira se odgovarajućim brojem u zagradi, na primjer [30]. Kada se poziva na tvrdjenje iz ovog rada onda se citira: glava, paragraf i redni broj. Na primjer III, 2.3. — glava III, paragraf 2. , tvrdjenje 3.

Ako posebno nije naglašeno, svi prostori u ovom radu su metrički. Baza prostora je otvorena baza. Pokrivači su otvoreni, ako posebno nije naglašeno. Pod preslikavanjem podrazumijevamo neprekidnu funkciju, a pod dimenzijom dimenziju pokrivača, dim X.

Rad je uradjen pod rukovodstvom Dr Dušana Adnadjevića. Koristim ovu priliku da mu se srdačno zahvalim na svestranoj pomoći i korisnim savjetima prilikom izrade rada. Veliku zahvalnost dugujem prof. Ju. M. Smirnovu, pod čijim rukovodstvom sam se počeo baviti ovom problematikom, u toku specijalizacije u Moskvi. Srdačno se zahvaljujem A. V. Zarelui koji mi je dao korisne savjete i sugestije, prilikom moga boravka u Tbilisiju.

G L A V A I

NEKE TEOREME OPŠTE TOPOLOGIJE I TEORIJE DIMENZIJE

1. K o n a č n o d i m e n z i o n a l n i p r o s t o r i

1.1. D e f i n i c i j a. Red pokrivača $\gamma=\{\Gamma\}$ prostora X u tački x, $\mathrm{ord}_x\gamma$, je broj elemenata pokrivača γ kojima pripada tačka x. Red pokrivača γ, $\mathrm{ord}\,\gamma$, je $\sup\{\mathrm{ord}_x\gamma \mid x\in X\}$.

1.2. D e f i n i c i j a. Prostor X ima dimenziju $\leq n$, $\dim X \leq n$, ako u svaki konačni pokrivač α možemo upisati pokrivač β reda $\leq n+1$. Ako ne važi nejednakost $\dim X \leq n-1$, tada je $\dim X = n$. Ako tako n ne postoji, tada je $\dim X = \infty$.

1.3. D e f i n i c i j a. $\mathrm{Ind}\, X = -1$ ako i samo ako je $X = \varnothing$. $\mathrm{Ind}\, X \leq n$ ako za svaki zatvoren skup F i njegovu otvorenu okolinu G postoji takav otvoreni skup V da je $F\subset V\subset \bar{V}\subset G$ i $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Bd}\, V \leq n-1$. Ako tako n ne postoji, tada je $\mathrm{Ind}\, X = \infty$.

1.4. D e f i n i c i j a. $\mathrm{ind}\, X = -1$ ako i samo ako je $X = \varnothing$. $\mathrm{ind}\, X \leq n$ ako za svaku tačku x i svaku njenu otvorenu okolinu O_x postoji takav otvoreni skup G da je $x\in G\subset \bar{G}\subset O_x$ i $\mathrm{ind}\,\mathrm{Bd}\, G \leq n-1$. Ako tako n ne postoji, tada je $\mathrm{ind}\, X = \infty$.

Ove tri dimenzionalne funkcije su najčešće predmet ispitivanja, a njihovu jednakost na klasi separabilnih metričkih prostora pokazali su Urison ([72]) i Menger ([36]). Brzi razvoj teorije dimenzije neseparabilnih metričkih prostora počinje poslije rada Stouna (A. H. Stone, [68]). On je pokazao da važi teorema

1.5. T e o r e m a. Svaki metrički prostor je parakompaktan.

1.6. T e o r e m a. Ako je X_o zatvoreni podskup n-dimenzionalnog normalnog prostora X, tada je dim $X_o \leq n$.

D o k a z. Neka je X_o zatvoreni podskup prostora X i $\gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ otvoreni pokrivač prostora X_o. Postoje takvi otvoreni skupovi $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ u X da je $\Gamma_i \cap X_o = \Gamma_i$, i = 1, ... , k. Sistem skupova $\alpha = \{X \setminus X_o, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ je otvoreni pokrivač prostora X. Kako je dim $X \leq n$ u pokrivač α možemo upisati takav pokrivač $\beta' = \{B'\}$ da je ord $\beta' \leq n+1$. Pokrivač $\beta = \{X_o \cap B' | B' \in \beta'\}$ je otvoreni pokrivač skupa X_o i ord $\beta \leq$ ord $\beta' \leq n+1$, a tada i dim $X_o \leq n$ (v.[3]).

Mogu se pokazati i analogne teoreme o monotonosti funkcija Ind X i ind X po zatvorenim skupovima u klasi normalnih prostora.

1.7. D e f i n i c i j a ([9]). Prostor X je okolinski ekstenzor za klasu prostora $\mathcal{M}$, NES($\mathcal{M}$), ako za svaki prostor $Y \in \mathcal{M}$ za svaki zatvoreni skup $F \subset Y$ i za svako preslikavanje $f: F \to X$ postoji takav otvoreni skup $U \supset F$ i tako preslikavanje $g: U \to X$ da je $g/F = f$.

Prostor X je ekstenzor za klasu $\mathcal{M}$, ES($\mathcal{M}$), ako u prethodnoj definiciji U zamijenimo sa Y.

1.8. T e o r e m a ([9]). Neka je X normalni prostor i F zatvoreni podskup i to takav da je dim $X \setminus F \leq n$. Ako postoji preslikavanje $f: F \to Y$ gdje je Y n-dimenzionalni polijedar, tada f ima ekstenziju na X.

1.9. T e o r e m a ([9]). Konačni simplicijalni polijedar je NES(normalnih).

1. 10. D e f i n i c i j a ([3]). Neka su F_1 i F_2 zatvoreni disjunktni podskupovi prostora X. Zatvoreni skup C je zatvorena pregrada u X izmedju skupova F_1 i F_2, ako je $X \setminus C$ diskoneksan prostor

i postoje takvi skupovi U_1 i U_2 da je $X = U_1 \cup C \cup U_2$ i $F_1 \subseteq U_1, F_2 \subseteq U_2$.

1. 11. T e o r e m a. U normalnom prostoru X sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. $\dim X \leq n$,

2. n-dimenzionalna sfera S^n je ekstenzor za X,

3. Za svaki n+1 par disjunktnih zatvorenih skupova (F_1, F_1'), ... , (F_{n+1}, F_{n+1}') postoje takve odgovarajuće zatvorene pregrade C_i da je $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$.

Usliv 3. naziva se Ejlenberg-Otova karakterizacija dimenzije ([3]). Ekvivalentnost uslova 1. i 3. dokazao je Morita([38]).

1. 12. T e o r e m a(teorema prebrojive sume). Ako je $\{X_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ takav prebrojivi zatvoreni pokrivač prostora X da je $\dim X_i \leq n$, $i = 1, 2, \dots$, tada je $\dim X \leq n$.

D o k a z. Neka je F zatvoreni podskup prostora X i $f\colon F \to S^n$. S^n možemo smatrati da je granica (n+1)-dimenzionalnog kuba. Prema 1.7. postoji ekstenzija $f_1\colon F \cup F_1 \to S^n$, a prema 1.8. postoji ekstenzija nad zatvorenom okolinom U_1 od $F \cup F_1$. Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo takav niz okolina $U_1, U_2, \dots$ skupova $F \cup F_1$, $F \cup F_1 \cup F_2$, ... da je $U_i \subset U_{i+1}$ i niz preslikavanja $g_i\colon U_i \to S^n$, pri čemu je g_{i+1} ekstenzija od g_i. Neka je $g\colon X \to S^n$ definisano sa $g(x) = g_i(x)$ za svako $x \in F_i$. Jasno je, da je g ekstenzija preslikavanja f, te je prema 1.11. $\dim X \leq n$.

1.13. T e o r e m a(monotonosti po otvorenim skupovima). Ako je G otvoreni podskup metričkog prostora X, tada je $\dim G \leq \dim X$.

D o k a z. Neka je G otvoreni podskup metričkog prostora X i $\dim X \leq n$. Kako je svaki otvoreni podskup metričkog prostora tipa F_σ, to je $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ gdje su F_i zatvoreni skupovi u X. Prema 1.5. $\dim F_i \leq n$, a prema 1.12. $\dim G = \dim \bigcup_{n=1}^{\infty} F_i \leq n$.

Iz 1.5. i 1.13. neposredno slijedi da je funkcija dim X monotona po proizvoljnim skupovima metričkog prostora.

1.14. T e o r e m a(Katetov, Morita). <u>Ako je $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ takav zatvoreni lokalno konačni pokrivač da je dim $X_\alpha \leq$ n za svako $\alpha \in A$, tada je dim $X \leq$ n.</u>

Neka je u prostoru X dat skup M i proizvoljni otvoreni pokrivač γ u M. Reći ćemo da γ možemo slično produžiti, ako za svako $\Gamma \in \gamma$ postoji takav otvoreni skup Γ' u X da je: 1. $\Gamma' \cap M = \Gamma$ i 2. Svaki konačni sistem skupova $\{\Gamma\}$ sa praznim presjekom produžuje se u sistem $\{\Gamma'\}$ sa praznim presjekom.

1.15. L e m a(Smirnov,[64]). <u>Ako je X metrički prostor i M njegov proizvoljni podskup, onda svaki otvoreni lokalno konačni (tačkasto konačni, zvjezdasto konačni) pokrivač skupa M možemo slično produžiti u otvoreni lokalno konačni (tačkasto konačni, zvjezdasto konačni) pokrivač neke okoline skupa M.</u>

D o k a z. Za svaku tačku $x \in M$ odredimo realan pozitivan broj $\alpha(x)$ sa $\alpha(x) = \frac{1}{2} \min \{d(x, M \setminus \Gamma),\ d(x, Fx)\}$ gdje je $F_x = \bigcup_{x \in M[\Gamma]} M[\Gamma]$. Neka je $S_x = S_{\alpha(x)}$ sferna okolina tačke x u prostoru X i $\Gamma' = \bigcup_{x \in \Gamma} S_x$. Kako je γ lokalno konačni pokrivač skup F_x je zatvoren(v.[64]str. 272), pa je $\alpha(x)$ odredjeno. Može se pokazati da je pokrivač $\gamma' = \{\Gamma'\}$ okoline $U = \bigcup_{\Gamma' \in \gamma'} \Gamma'$ istog reda kao i pokrivač γ u M.

Normalni prostor čiji je svaki podskup normalan prostor naziva se <u>nasledno normalan</u> prostor. Za nasledno normalne prostore prethodnu lemu dokazao je Čeh(E. Čech,[11]). Svaki metrički prostor je normalan[12],a kako je svaki podskup metričkog prostora metrički, to je svaki metrički prostor nasledno normalan.

1.16. T e o r e m a(Smirnov,[64]). <u>Neka je M podskup nasledno normalnog prostora X. Da bi dimenzija skupa M bila $\leq$ n potrebno</u>

je i dovoljno da u svaki konačni sistem $\omega = \{G_1, \ldots, G_s\}$ otvorenih u X skupova koji pokrivaju M možemo upisati sistem $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ reda $\leq n+1$ otvorenih u X skupova koji pokrivaju skup M.

1.17. T e o r e m a (nejednakost Urisona-Mengera). Ako su P i Q proizvoljni podskupovi metričkog prostora X, tada je $\dim P \cup Q \leq \dim P + \dim Q + 1$.

D o k a z. Neka su P i Q takvi podskupovi metričkog prostora X da je $\dim P \leq p$ i $\dim Q \leq q$. Pretpostavimo da je $X = P \cup Q$. Neka je $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ konačni pokrivač prostora X. Prema 1.16. u pokrivač ω možemo upisati sistem $\alpha = \{G_1, \ldots, G_k\}$ otvorenih u X skupova koji pokrivaju P i $\operatorname{ord} \alpha \leq p+1$. Takodje, u ω možemo upisati sistem $\beta = \{H_1, \ldots, H_r\}$ otvorenih u X skupova koji pokrivaju Q i $\operatorname{ord} \beta \leq q+1$. Sistem $\alpha \cup \beta$ pokriva prostor X, upisan je u ω i $\operatorname{ord} \alpha \cup \beta \leq p+2+q$, te je $\dim P \cup Q \leq \dim P + \dim Q + 1$.

1.18. Kazaćemo da je $\dim_\infty X \leq n$ ako u svaki lokalno konačni pokrivač α prostora X možemo upisati takav pokrivač β da je $\operatorname{ord} \beta \leq n+1$, a da je $\dim X^* \leq n$ ako u svaki zvjezdasto konačni pokrivač α možemo upisati takav pokrivač β da je $\operatorname{ord} \beta \leq n+1$.

1.19. T e o r e m a (Dauker, [12]). Za svaki normalni prostor X važe jednakosti $\dim_\infty X = \dim X^* = \dim X$.

Za dokaz ove jednakosti obično se koriste leme koje su i same od interesa.

1.20. L e m a ([15]). Svaki otvoreni prebrojivi pokrivač, od otvorenih F_σ-skupova normalnog prostora X, ima zvjezdasto konačno otvoreno prebrojivo rafiniranje.

D o k a z. Neka je $\gamma = \{\Gamma_i | i = 1, 2, \ldots\}$ otvoreni F_σ-pokrivač prostora X i $\Gamma_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{i,j}$ gdje su $F_{i,j}$ zatvoreni za svako $i,j = 1, 2, \ldots$ Prema Urisonovoj lemi([15]) postoje takve funkcije $f_{i,j}$:

$X \to I$ da je $f_{i,j}(x) = 0$ za $x \in X \setminus U_i$ i $f_{i,j}(x) = 1$ za $x \in F_{i,j}$. Konstruišimo funkcije $f_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} f_{i,j}(x)$ i $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x)$. Kako je $f_i^{-1}(0) = X \setminus \Gamma_i$ i $\{\Gamma_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ pokrivač prostora X, to je $0 < f(x) \le 1$ za svako x iz X. Sistemi skupova $\{V_k = f^{-1}((\frac{1}{k}, 1])\}$ i $\{F_k = f^{-1}([\frac{1}{k}, 1])\}$ za $k = 1, 2, \dots$ su respektivno otvoreni i zatvoreni pokrivači prostora X. Može se provjeriti da je $\{U_{k,i} = U_j \cap (V_{k+1} \setminus F_{k-1}),\ j \le k,\ k = 1, 2, \dots$ i $F_0 = \emptyset\}$ zvjezdasto konačni otvoreni pokrivač prostora X (v. [12]).

1.21. L e m a ([15]). *U svaki lokalno konačni pokrivač normalnog prostora X možemo upisati σ-diskretni pokrivač* $\gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i$.

Jedna od najznačajnijih teorema teorije dimenzije metričkih prostora je teorema o jednakosti dimenzionalnih funkcija dim X i Ind X na toj klasi prostora.

1.22. T e o r e m a (Katetov, [24]; Morita, [39]). *Za svaki metrički prostor X važi jednakost dim X = Ind X.*

1.23. D e f i n i c i j a ([24]). *Preslikavanje $f\colon X \to Y$ metričkog prostora X na metrički prostor Y je ravnomjerno nuldimenzionalno, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ takav da ako je O otvoren podskup u Y dijametra $< \delta$, $f^{-1}(O)$ se razbija na uniju disjunktnih otvorenih skupova dijametra $< \varepsilon$.*

1.24. T e o r e m a ([24]). *Svaki n-dimenzionalni metrički prostor može se ravnomjerno nuldimenzionalno preslikati u R^n.*

Morita za dokaz teoreme 1.22. koristi normalne familije a Dauker i Hurevic ([14]) sekvencionalnu dimenziju, ds X.

1.25. D e f i n i c i j a ([14]). *Kaže se da je ds X $\le n$ ako postoji takav prebrojivi niz $\{\gamma_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ lokalno konačnih pokrivača da je:*

a) *ord $\gamma_i \le n$, $i = 1, 2, \dots$,*

b) $\delta(\Gamma) \leq \frac{1}{i}$ za svako $\Gamma \in \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots$,

c) $\bar{\gamma}_{i+1} = \{\bar{\Gamma} | \Gamma \in \gamma_{i+1}\}$ je rafiniranje od γ_i, $i = 1, 2, \dots$ ds X = n ako nije ds X $\leq$ n-1. Ako tako n ne postoji, tada je ds X = ∞.

U klasi metričkih prostora ispitivana je metrička dimenzija, μdim X(Jegorov, Katetov, Smirnov) (v. [2] i [58]).

1.26. D e f i n i c i j a([25]). μdim X metričkog prostora X je najmanji takav cio broj $n \geq 0$ da za svako $\varepsilon > 0$ postoji lokalno konačni ε-pokrivač reda n+1. Ako tako n ne postoji, tada je μdim X = ∞.

Važi nejednakost Katetova: μdim X $\leq$ dim X $\leq$ 2 μdim X([25]).

Nejednakost ind X $\neq$ dim X u klasi metričkih prostora pokazao je Roj(P. Roy, [54]) konstruišući takav prostor X da je ind X = 0 i dim X = Ind X = 1.

1.27. T e o r e m a(Katetov, Morita). Metrički prostor X ima dimenziju $\leq$ n ako i samo ako je $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$ gdje je dim $X_i \leq 0$, i = 0, ..., n.

1.28. T e o r e m a(Katetov). Ako su X i Y neprazni metrički prostori, tada je dim $(X \times Y) \leq$ dim X + dim Y.

D o k a z. Neka je dim X $\leq$ n i dim Y $\leq$ m. Ako je jedan od prostora beskonačnodimenzionalan, jednakost je jasna. Neka su oba konačnodimenzionalna. Prema 1.24. postoje ravnomjerno nuldimenzionalna preslikavanja $f: X \to R^n$ i $g: Y \to R^m$. Preslikavanje $F: X \times Y \to R^{n+m}$ definisano sa F(x,y) = (f(x),g(y)) je ravnomjerno nuldimenzionalno, pa je prema 1.24. dim $(X \times Y) \leq m+n =$ dim X + dim Y(v. [24]).

1.29. T e o r e m a(Nagata). dim X $\leq$ n ako i samo ako postoji takva σ-lokalno konačna baza $\mathcal{B} = \{B\}$ da je ord $\{Bd\ B\} \leq$ n. Specijalno, dim X $\leq$ 0 ako ima σ- lokalno konačnu bazu od otvoreno-zatvorenih skupova.

1.30. T e o r e m a(teorema Tumarkina). Neka je M podskup metričkog prostora X. Postoji takav G_δ-skup N da je $M \subset N$ i dim M = dim N. ([70]).

D o k a z. Pretpostavimo da je dim $M \leq 0$. Neka je $\mathcal{U} = \{U_\gamma \mid \gamma \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\}$ σ-lokalno konačna baza i $\mathcal{B} = \{W_\gamma \mid \gamma \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\}$ σ-lokalno konačna otvorena kolekcija čije je zatvaranje upisano u $\mathcal{U}$. Pošto so $\overline{W}_\gamma$ i $X \setminus U_\gamma$ disjunktni zatvoreni skupovi, u X se mogu konstruisati takvi skupovi V_γ da je $\overline{W}_\gamma \subset V_\gamma \subset U_\gamma$ i Bd $V_\gamma \cap M = \varnothing$. Neka je $N = X \setminus \bigcup \{\mathrm{Bd}\, V_\gamma \mid \gamma \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\}$. Skup N je G_δ-skup koji sadrži M. Kako je Bd $V_\gamma \cap N = \varnothing$, to je $\mathcal{N} = \{V_\gamma \cap N \mid \gamma \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\}$ σ-lokalno konačna baza skupa N koja zadovoljava uslove prethodne teoreme za n=0.

Neka je $n > 0$. Prema teoremi 1.27. $M = \bigcup_{i=0}^{n} M_i$ i dim $M_i \leq 0$. Prema dokazanome, za svaki skup M_i postoji takav G_δ-skup N_i da je $M_i \subset N_i$ i dim $N_i \leq 0$, pa je $N = \bigcup_{i=0}^{n} N_i$ n-dimenzionalni G_δ-skup koji sadrži skup M.

1.31. D e f i n i c i j a. Kompaktifikacija prostora X je je uredjeni par (K,c) gdje je K kompaktni prostor a c potapanje prostora X kao svuda gustog podskupa prostora K. $K \setminus c(X)$ nazivamo deficitom prostora X pri kompaktifikaciji cX ([15]).

Skup svih kompaktifikacija je uredjen: $c_2X \leq c_1X$ ako i samo ako postoji tako preslikavanje $f: c_1X \to c_2X$ da je $fc_1 = c_2$. Najveća kompaktifikacija prostora naziva se kompaktifikacija Stouna-Čeha. Lokalno kompaktni prostori imaju kompaktifikaciju sa jednom tačkom -Aleksandrovska kompaktifikacija([3]).

1.32. T e o r e m a([15]). Topološki prostor ima kompaktifikaciju ako i samo ako je prostor Tihonova.

1.33. L e m a. U svaki otvoreni tačkasto konačni pokrivač $\gamma = \{\Gamma_s \mid s \in S\}$ normalnog prostora X možemo upisati takav otvoreni pokri-

<u>vač</u> $\beta = \{B_s \mid s \in S\}$ <u>da je</u> $B_s \subset B_s \subset \Gamma_s$ <u>za svako s iz S(v. [15] str. 207)</u>.

1.34. T e o r e m a. <u>Za normalni prostor X važe jednakosti:</u> <u>dim X = dim βX(Volman, [77]) i Ind X = Ind βX(Vedenisov, [75])</u>.

D o k a z. Označimo sa $O_{\beta}H$ takav najveći otvoreni skup u βX da je $O_{\beta}H \cap X = H$. Neka je dim $\beta X \leq n$ i $\omega_1 = \{H_1, \dots, H_s\}$ otvoreni pokrivač prostora X. Sistem skupova $\omega_2 = \{O_{\beta}H_1, \dots, O_{\beta}H_s\}$ je pokrivač prostora βX(v. [3]). Kako je dim $\beta X \leq n$ u pokrivač ω_2 možemo upisati konačni otvoreni pokrivač $\gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_r\}$ i ord $\gamma \leq n+1$. Sistem skupova $\{X \cap \Gamma_i \mid i = 1, 2, \dots, r\}$ je pokrivač prostora X upisan u ω_1 i reda n+1, pa je dim $X \leq n$.

Neka je dim $X \leq n$ i $\alpha = \{O_1, \dots, O_s\}$ pokrivač prostora βX. U pokrivač α možemo upisati zatvoreni pokrivač $\{F_1, \dots, F_s\}$ prostora βX(v. [33]). Za svako F_k postoji takva okolina V_k da je $F_k \subset [V_k]_{\beta X} \subset O_k$. U otvoreno pokrivač $\{X \cap V_k \mid k = 1, \dots, s\}$ prostora X možemo upisati zatvoreni pokrivač $\nu = \{W_1, \dots, W_s\}$ i ord $\nu \leq n+1$. Sistem skupova $[\nu] = \{[W_i]_{\beta X} \mid i = 1, \dots, s\}$ je pokrivač prostora βX i ord $[\nu] \leq n+1$, te je dim $\beta X \leq n$(v. [3]).

Za dokaz druge jednakosti v. [3] str. 297.

1.35. D e f i n i c i j a(Dauker, [13]). <u>Neka je x elemenat normalnog prostora X. Dimenzija prostora u tački x, loc $\dim_x X$, je takav najmanji broj n da postoji otvorena okolina O_x, pri čemu je dim $\bar{O}_x \leq n$. Lokalna dimenzija prostora X, loc dim X, je takav najmanji broj n da je loc $\dim_x X \leq n$ za svako x iz X. Ako takav broj ne postoji, tada je loc dim X = ∞.</u>

Za metrički prostor X se može uzeti da je dimenzija otvorene okoline $O_x \leq n$.

1.36. T e o r e m a(Dauker, [13]; Nagami, [42]) <u>Ako je X parakompaktni prostor, tada je dim X = loc dim X</u>.

D o k a z. Nejednakost loc dim X $\leq$ dim X slijedi iz monotonosti funkcije dim X po proizvoljnim skupovima(teorema 6.). Neka je loc dim X $\leq$ n. Svaka tačka x prostora X ima takvu otvorenu okolinu O_x da je dim $O_x \leq$ n. U pokrivač $\{O_x | x \in X\}$ možemo upisati lokalno konačni pokrivač $\gamma = \{\Gamma\}$ i smatrati da je $\gamma < \{O_x\}$ (lema 33.). Prema monotonosti funkcije dim X i teoremi 14. biće dim X $\leq$ n.

1.37. D e f i n i c i j a([23]). Neka je ω pokrivač prostora X i f: X$\to$Y preslikavanje. Preslikavanje f je ω-preslikavanje ako svaka tačka y prostora Y ima takvu okolinu O_y da je skup $f^{-1}(O_y)$ sadržan u nekom elementu pokrivača ω.

1.38. D e f i n i c i j a([26]). Neka su $p_0, \dots, p_n$ tačke euklidsckog prostora. Simpleks $(p_0, \dots, p_n)$ je skup takvih tačaka p da je: $p = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n$ gdje je $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ i $\lambda_i \geq 0$ za i = 0, ... , n.

Tačke $p_0, \dots, p_n$ nazivaju se vrhovi simpleksa a $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ baricentričke koordinate tačke p u odnosu na tačke $p_0, \dots, p_n$ Zvijezda vrha p_i, $St(p_i)$, je skup takvih tačaka simpleksa da je $\lambda_i > 0$.

Konačaan sistem simpleksa naziva se kompleks(v. [26],I, 316).

1.39. D e f i n i c i j a([1]). Neka je $\alpha = \{A_1, \dots, A_k\}$ pokrivač prostora X. Svakom skupu A_i koordinirajmo tačku p_i. Kompleks $N(\alpha)$ čiji su vrhovi $p_1, \dots, p_k$ naziva se nervom pokrivača α, pri čemu $(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$ je simpleks kompleksa $N(\alpha)$ ako i samo ako je $A_{i_1} \cap, \dots, \cap A_{i_k} \neq \emptyset$.

Neka je $\omega = \{A_1, \dots, A_k\}$ pokrivač prostora X. Preslikavanje f: X$\to$N(ω) naziva se kanonsko ako je $f^{-1}(St(p_i)) = A_i$, i = 1, .. . , k. Tako preslikavanje je specijalni slučaj ω-preslikavanja.

1.40. T e o r e m a([1]). Neka je ω pokrivač prostora X. Postoji kanonsko preslikavanje prostora X na podkompleks kompleksa N(ω).

1.41. T e o r e m a(Brauer,[10]). Neka je dim X = n. Tada postoji takav konačan pokrivač ω_0 da ne postoji ω_0-preslikavanje prostora X na normalni prostor dimenzije $\leq$ n.

1.42. D e f i n i c i j a. Parcijalno uredjen skup $\mathcal{A}$ je usmjeren ako za svako a, b$\in\mathcal{A}$ postoji tako c da je a$\leq$c i b$\leq$c.

1.43. D e f i n i c i j a. Neka je $\mathcal{A}$ usmjeren skup i $\{X_\alpha\}$ familija skupova na skupu indeksa $\mathcal{A}$. Za svaki par indeksa α, β koji zadovoljava uslov $\alpha \leq \beta$, neka postoje preslikavanja $f_\alpha^\beta: X_\beta \to X_\alpha$ koja zadovoljavaju uslove: ako je $\alpha < \beta < \gamma$, tada je $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma$ i $f_\alpha^\alpha = 1_{X_\alpha}$ za svako $\alpha\in\mathcal{A}$. Familija skupova $\{X_\alpha | \alpha\in\mathcal{A}\}$ sa preslikavanjima f_α^β naziva se inverzni sistem na $\mathcal{A}$.

Neka su preslikavanja $\pi_\beta': \prod X_\alpha \to X_\beta$ projekcije i inv lim X_α = inv lim $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta \mid \alpha, \beta\in\mathcal{A}\}$ skup svih takvih elemenata x iz $\prod X_\alpha$ da je $\pi_\alpha'(x) = f_\alpha^\beta \circ \pi_\beta'(x)$ za $\alpha < \beta$. Skup inv lim X_α topologiziran na sledeći način: $\{\pi_\alpha^{-1}(G) \mid G$ otvoreno u X $, \alpha\in\mathcal{A}\}$ je baza, gdje je $\pi_\alpha = \pi_\alpha'/$inv lim X_α naziva se inverzni limes(inv lim) sistema $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta\}$.

1.44. T e o r e m a([45]). Inverzni limes metričkih prostora na prebrojivom skupu indeksa je metrički prostor.

1.45. T e o r e m a([34]). Ako je metrički prostor X = inv lim $\{X_i, f_j^i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ i dim X_i $\leq$n, tada je dim X $\leq$ n.

1.46. D e f i n i c i j a(Hurevic, [21]). Red preslikavanja f: X$\to$Y, ord f, je sup$\{$ card $f^{-1}(y) \mid y\in Y\}$.

1.47. D e f i n i c i j a(Hurevic,[20]). Dimenzija preslikavanja f: X$\to$Y, dim f, je sup$\{$ dim $f^{-1}(y) \mid y\in Y\}$.

1.48. T e o r e m a(Morita,[40]). Ako je f: X$\to$Y zatvoreno preslikavanje normalnog prostora X na neprazni parakompaktni prostor Y, tada je dim X$\leq$dim Y + dim f.

D o k a z. Dokaz ćemo izvesti u slučalu kada su X i Y separabilni metrički prostori, i to indukcijom po dim f. Neka je dim $f \leq m$ i dim $Y < \infty$. Dokaz je jasan ako je dim $Y = -1$. Pretpostavimo da tvrdjenje teoreme važi u slučaju dim $Y \leq n-1$. Prema pretpostavci je dim $f^{-1}(y) \leq m \leq m+n$. Ako je U otvoren skup u X koji sadrži $f^{-1}(y)$, tada skup $C = f(X \setminus U)$ je otvoren u Y. Skup C ne sadrži tačku y. Kako je dim $Y \leq n$, postoji takva okolina V tačke y u Y da je $C \cap V = \emptyset$ i dim Bd $V \leq n-1$. Kako je $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, to je $f^{-1}(V) \subset U$. Pošto je $f^{-1}(\mathrm{Bd}(f^{-1}(V)) \subset \mathrm{Bd}\, V$ i dim Bd $V \leq n-1$, to je dim $\mathrm{Bd}(f^{-1}V) \leq m+n-1$, pa je dim $X \leq m+n$ (v. [23] str. 128).

1.49. P o s l e d i c a([40]). Ako je u uslovima prethodne teoreme Y metrički prostor, tada važi nejednakost dim $X \leq$ dim f + dim Y. Ako je dim $f = 0$, tada je dim $X \leq$ dim Y.

1.50. T e o r e m a(Morita,[40]). Ako je $f\colon X \to Y$ preslikavanje na, gdje su X i Y normalni prostori i ord $f \leq n+1$, tada je dim $Y \leq$ Ind X + ord f.

1.51. P o s l e d i c a([35]). Ako je u uslovima prethodne teoreme X metrički prostor, tada je dim $Y \leq$ dim X + dim f.

2. B e s k o n a č n o d i m e n z i o n a l n i p r o s t o r i

Definicije 1.3. i 1.4. možemo proširiti na transfinitne brojeve.

2.1. D e f i n i c i j a(Smirnov,[67]). Ind $X = -1$ ako i samo ako je $X = \emptyset$. Neka su za redne brojeve $\alpha < \beta$ odredjene klase normalnih prostora koje zadovoljavaju uslov Ind $X \leq \alpha$ za $\alpha < \beta$. Ind $X \leq \beta$ ako za svaki disjunktni par F_1 i F_2 zatvorenih skupova u X postoji takva pregrada C izmedju F_1 i F_2 da je Ind $C \leq \alpha < \beta$.

2.2. D e f i n i c i j a([23]). ind $X = -1$ ako i samo ako je $X = \emptyset$. Neka su za sve redne brojeve $\alpha < \beta$ odredjene klase regularnih prostora koje zadovoljavaju uslov ind $X \leq \alpha$ za svako $\alpha < \beta$. ind$X \leq \alpha$ ako za svaku tačku x iz X i proizvoljnu njenu okolinu O_x postoji takva okolina V_x da je $x \in V_x \subset \bar{V}_x \subset O_x$ i ind Bd $V_x \leq \alpha$ za neko $\alpha < \beta$.

Ako je odredjena dimenzija Ind X, tada je odredjena i dimenzija Ind F za svaki zatvoreni podskup F prostora X. Takodje, ako je odredjena dimenzija Ind X, odredjena je i dimenzija ind X i važi nejednakost ind $X \leq$ Ind X za proizvoljni prostor X.

2.3. T e o r e m a(Hurevic i Volman, [23]; Tulmin, [69]; Smirnov, [67]). Ako je za regularni (normalni) prostor X odredjena dimenzija ind X (Ind X) i $\omega X \leq \aleph_\alpha$ ($WX \leq \aleph_\alpha$), $\alpha = 0, 1, \ldots$, tada je ind $X \leq \omega_{\alpha+1}$ (Ind $X \leq \omega_{\alpha+1}$).

2.4. D e f i n i c i j a([23]). Normalni prostor X je prebrojivodimenzionalan ako se može predstaviti kao unija prebrojivog broja nuldimenzionalnih prostora X_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Hilbertov kub, $I^\infty = \prod I$, $I = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ nema ni jednu transfinitnu dimenziju, niti je prebrojivodimenzionalan ([23]).

Prethodne tri klasifikacije beskonačnodimenzionalnih prostora se razlikuju. Postoji takav prostor $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$, diskretna suma kubova, koja ima dimenziju ind X i nema dimenziju Ind X. Taj nam odnos karakterišu i sledeće teoreme:

2.5. T e o r e m a(Hurevic i Volman, [23]). Ako je kompletni prostor X prebrojivodimenzionalan, onda on ima dimenziju ind X.

2.6. T e o r e m a(Smirnov, [67]). Ako je za metrički prostor X odredjena dimenzija Ind X, onda je X prebrojivodimenzionalan prostor.

Luksemburg([28]) je konstruisao takav kompaktni prostor X da je ind $X = \omega_0 + 1 <$ Ind $X = \omega_0 + 2$.

Teoremu konačne sume za zatvorene skupove dimenzionalne funkcije Ind X i ind X ne zadovoljavaju: Levšenko([30]) je razložio prostor S^{ω_0+1} na dva zatvorena kompaktna podskupa $S_1^{\omega_0}$ i $S_2^{\omega_0}$, pri čemu je Ind $S^{\omega_0+1} = \omega_0+1$, Ind $S_1^{\omega_0}$ = Ind $S_2^{\omega_0} = \omega_0$; Tulmin([69]) je konstruisao prostor X koji je unija zatvorenih skupova A i B, pri čemu je ind $X = \omega_0$, ind $A < \omega_0$ i ind $B < \omega_0$.

2.7. D e f i n i c i j a([46]). Preslikavanje $f: X \to Y$ je konačnostruko ako je card $f^{-1}(y) < \infty$ za svako y iz Y.

2.8. T e o r e m a(Nagata, [46]). Za metrički prostor X sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) prostor X je prebrojivodimenzionalan,

b) prostor X ima takvu σ-diskretnu bazu $\mathcal{B} = \{B\}$ da je red sistema $\{\mathrm{Bd}\ B \mid B \in \mathcal{B}\}$ konačan u svakoj tački prostora X,

c) postoji zatvoreno konačnostruko preslikavanje metričkog prostora Y, dim Y = 0, na prostor X.

2.9. D e f i n i c i j a. Normalni prostor X je slabo prebrojivodimenzionalan ako se može predstaviti kao prebrojiva unija zatvorenih konačnodimenzionalnih podprostora, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ i dim $X_i < \infty$ za i = 1, 2, ...

Prema teoremi 1.27. svaki slabo prebrojivodimenzionalni prostor je prebrojivodimenzionalan. Obrnuto tvrdjenje ne važi - Smirnov ([66]) je konstruisao prostor $\mathcal{E}$ koji je prebrojivodimenzionalan a nije slabo prebrojivodimenzionalan.

Označimo sa H one tačke Hilbertova kuba I^{∞} čije su sve koordinate, izuzev konačnog broja jednake nuli.

Skljarenko je pokazao da slabo prebrojivodimenzionalni prostor H nema kompaktifikacije u toj klasi prostora([60]). Za klasu slabo prebrojivodimenzionalnih prostora uopšteni Mengerov problem

(v. Uvod) riješio je Šurl([57]).

2.10. T e o r e m a([57]). *Neka je X separabilni, metrizabilni G_δ-prostor. Ako je X slabo prebrojivodimenzionalni prostor, onda on ima slabo prebrojivodimenzionalnu kompaktifikaciju.*

U klasi slabo prebrojivodimenzionalnih prostora postoji univerzalni prostor.

2.11. T e o r e m a([5]). *U klasi slabo prebrojivodimenzionalnih metričkih prostora težine $\leq \tau$ postoji univerzalni prostor.*

Za normalne prostore tu teoremu dokazao je Pasinkov([52]).

Za nas je interesantan slučaj separabilnih metričkih prostora.

2.12. T e o r e m a(Nagata, [40] ; Smirnov, [66]). *Svaki slabo prebrojivodimenzionalni separabilni metrički prostor može se potopiti u H.*

Za dokaz ove teoreme Smirnov je koristio sledeću lemu.

2.13. L e m a(Smirnov, [66] , str. 187). *Neka je X separabilni metrički prostor a A i B takvi zatvoreni podskupovi da je $A \subset B$ i $\dim B \leq k$. Tada postoji tako preslikavanje $f\colon X \to Q^{n(k)}$ da je $f(A) = 0$ a f je homeomorfizam na $B \setminus A$, gdje je $n(k) = 2n + 2$.*

2.14. D e f i n i c i j a. *Neka je Ω dati skup i $N(\Omega)$ skup svih nizova u Ω . Ako su $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ i $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ dva elementa skupa $N(\Omega)$, tada funkcija* $\rho(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{\min\{k \mid \alpha_k \neq \beta_k\}}$ *je metrika u $N(\Omega)$. Metrički prostor $N(\Omega)$ naziva se uopšteni Berov (Baire) nuldimenzionalni prostor.*

Regularni prostor je *jako metrizabilan* ako ima bazu koja je unija prebrojivog broja zvjezdasto konačnih pokrivača.

2.15. T e o r e m a(Nagata, [46]). *U klasi jako metrizabilnih slabo prebrojivodimenzionalnih prostora težine $\leq \tau$ univerzalni* prostor je $N(\tau) \times H$.

2.16. D e f i n i c i j a (Aleksandrov). Prostor X je A-slabo beskonačnodimenzionalan, ako za svaki prebrojivi sistem parova zatvorenih skupova (A_i, B_i), $A_i \cap B_i = \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots$ postoje takve pregrade C_i (izmedju A_i i B_i) da je $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \emptyset$.

2.17. D e f i n i c i j a (Smirnov). Prostor X je slabo beskonačnodimenzionalan ako za svaki proizvoljni sistem parova zatvorenih skupova (A_i, B_i), $A_i \cap B_i = \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots$ postoje takve pregrade C_i (izmedju A_i i B_i) i takav broj N da je $\bigcap_{i=1}^{N} C_i = \emptyset$.

Ako prostor X nije A-slabo (S-slabo) beskonačnodimenzionalan, tada je X A-jako (S-jako) beskonačnodimenzionalan.

2.18. T e o r e m a (Skljarenko, [60]). Prostor X je S-slabo beskonačnodimenzionalan ako i samo ako ima reprezentaciju

$$X = C \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right),$$

gdje je C S-slabo beskonačnodimenzionalni kompaktni prostor, P_n otvoreni konačnodimenzionalni podskupovi, $X \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, a proizvoljni niz (x_i) koji je sadržan u $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ i nema granične tačke u X sadrži se u jednom od P_n, izuzev možda konačnog broja članova.

Takvu reprezentaciju prostora X nazivamo reprezentacija Skljarenka (Smirnov).

D o k a z. Neka je $P_n = \{ U \mid U$ otvoreno u X i $\dim U \leq n \}$ a $C = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Ako C nije kompaktan skup ili svaki niz ne zadovoljava uslove teoreme, postoji takav niz $\{ x_i \mid i = 1, 2, \ldots \}$ $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ i x_n ima takvu okolinu V_{x_n} da je $\dim V_{x_n} \geq n$ za $n = 1, 2, \ldots$ Takav sistem skupova ne može postajati u S-slabo beskonačnodimenzionalnom prostoru ([48]). C je zatvoreno, pa je S-slabo beskonačnodimenzionalno. Ako X ima reprezentaciju Skljarenka, onda je on S-slabo beskonačnodimenzionalan(v. [48] str. 180).

Za nas su posebno interesantni metrički S-slabo beskonačnodimenzionalni prostori pa ćemo navesti neke rezultate Smirnova ([67]) o toj klasi prostora.

Neka funkcija β preslikava skup rednih u skup rednih brojeva uključujući i -1. Funkciju β odredimo indukcijom: $\beta(-1) = \omega_0$ i $\beta(\alpha) = \sup_{\alpha < \alpha'}\{\beta(\alpha')\} + 1$. Funkcija β ima osobinu da je $\beta(\alpha) < \omega_1$, ako je $\alpha < \omega_1$ ([67]).

2.19. T e o r e m a ([67]). <u>Neka je X metrički prostor koji ima reprezentaciju Sljarenka. Ako podprostor C ima dimenziju Ind C, onda prostor X ima dimenziju Ind X i važi nejednakost Ind $X \leq \beta($Ind C$)$</u>.

D o k a z. Dokaz se izvodi indukcijom po Ind C. Ako je Ind C $= -1$, onda je X konačnodimenzionalan prostor, pa je Ind $X \leq \omega_0 = \beta(-1)$. Neka teorema važi za Ind $C < \alpha$. Pretpostavimo da je $X = C \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n)$ i Ind $C = \alpha$. Izaberimo u X proizvoljni par disjunktnih zatvorenih skupova A i B. Postoji pregrada C' koja separira skupove $C \cap A$ i $C \cap B$ u C i Ind $C' < \alpha$. Kako je prostor X nasledno normalan, pregradu C' možemo produžiti u pregradu C_1 izmedju skupova A i B u prostoru X. Pregrada C_1 ima reprezentaciju Skljarenka $C_1 = C' \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} (P_n \cap C_1))$. Prema pretpostsvci je Ind $C_1 < \beta(\alpha)$ pa je Ind $X \leq \beta(\alpha)$.

Koristeći prethodnu teoremu, mogu se pokazati sledeće dvije teoreme:

2.20. T e o r e m a ([67]). <u>Metrički prostor X ima dimenziju Ind X ako i samo ako ima reprezentaciju Skljarenka u kojoj je kompakt C prebrojivodimenzionalan (ima transfinitnu dimenziju Ind C ili ind C)</u>.

2.21. T e o r e m a ([67]). <u>Ako metrički prostor X ima dimenziju Ind X, onda je Ind $X < \omega_1$</u>.

U vezi sa preslikavanjem beskonačnodimenzionalnog prostora neke klase na prostor iste ili neke druge klase, pored ostalih, interesantene su sledeće teoreme:

2.22. T e o r e m a (Nagata,[47]). Kompaktni prostor X bez izolovanih tačaka je prebrojivodimenzionalan ako i samo ako postoji preslikavanje Kantorova skupa na taj kompakt, koje je konačnostruko.

Postoji konačnostruko preslikavanje nuldimenzionalnog prostora na diskretnu sumu kubova, $\bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$ (Skljarenko).

2.23. D e f i n i c i j a ([4]). Preslikavanje je prebrojivodimenzionalno, ako je $\dim f^{-1}(y) < \infty$ za svaku tačku y iz Y.

2.24. T e o r e m a (Arhangeljskij,[4]). Ako je $f\colon X \to Y$ zatvoreno prebrojivodimenzionalno preslikavanje metričkog prostora X na prebrojivodimenzionalni prostor Y, tada je X prebrojivodimenzionalni prostor.

Zatvorena slika prebrojivodimenzionalnog prostora moći $< c$ je prebrojivodimenzionalan prostor.

2.25. T e o r e m a (Skljarenko,[59]). Ako je f preslikavanje Kantorova skupa na prostor X koji nema transfinitnu dimenziju, tada postoji takva tačka y iz Y da je $f^{-1}(y)$ skup moći kontinuma.

G L A V A II

BESKONAČNODIMENZIONALNI PROSTORI I AKSIOMATIKA P. S. ALEKSANDROVA

K. Menger ([36]) je postavio hipotezu o aksiomatskoj karakterizaciji dimenzionalne funkcije dim. P. S. Aleksandrov ([1]) je aksiomatski okarakterisao funkciju dim na klasi kompaktnih prostora, a E. Šćepin ([59]) izmijenio jednu aksiomu Aleksandrova i okarakterisao funkciju dim na klasi konačnodimenzionalnih metričkih prostora.

Cilj ove glave je da se aksiomatika Šćepina proširi na neku podklasu beskonačnodimenzionalnih prostora. Nešto izmijenjena aksiomatika Šćepina - aksiomatika Mengera-Aleksandrova-Šćepina može se proširiti na klasu lokalno konačnodimenzionalnih prostora (teorema 1.7.). Tako izabrana aksiomatika karakteriše klasu lokalno konačnodimenzionalnih prostora u klasi metričkih prostora (teorema 1.9.).

1. Aksiomatika lokalno konačnodimenzionalnih prostora.

Označimo sa $\bar{\mathcal{K}} = \{X\}$ klasu metričkih prostora koja slijedi za svim n-dimenzionalnim klasama $\mathcal{K}_n$, $\mathcal{K}_n = \{X \mid X$ metrički prostor i $\dim X \leq n\}$, n = 1, 2, ... i zadovoljava aksiome Mengera-Aleksandrova-Šćepina. Dakle, svaki konačnodimenzionalni prostor je klase $\bar{\mathcal{K}}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n \subset \bar{\mathcal{K}}$, i postoji bar jedan beskonačnodimenzionalni prostor koji će biti klase $\bar{\mathcal{K}}$.

Neka klasa $\bar{\mathcal{K}} = \{X\}$ sadrži sve konačnodimenzionalne, u smislu dim, metričke prostore i neka je na njoj zadata funkcija φ koja uzima vrijednosti u skupu nenegativnih cijelih brojeva i simbol ω. Neka funkcija φ za koju važi $\varphi X = \dim X$ pri $\dim X < \infty$ zadovoljava sledeće aksiome:

1. Ako su X i X′ homeomorfni, tada je $\varphi X = \varphi X'$ (invarijantnosti)
2. Ako je $X' \subset X$, tada je $\varphi X' \leq \varphi X$ (monotonosti).

3. Ako je $\{X_\alpha\}$ zatvoreni lokalno konačni pokrivač prostora X, tada je $\varphi X = \sup\{\varphi X_\alpha\}$ ((lokalno konačne) sume).

4. Svaki prostor X ima zatvorenu pregradu X' i to takvu da je $\varphi X' < \varphi X$. Specijalno, svaki beskonačnodimenzionalni prostor ima bar jednu konačnodimenzionalnu pregradu(pregrade).

5. Svaki prostor X ima takav pokrivač ω, da pri svakom ω-preslikavanju $f: X \to Y$ je $\varphi Y \geq \varphi X$. Specijalno, svaki beskonačnodimenzionalni prostor ima takav pokrivač ω, da pri svakom ω-preslikavanju njegova slika je beskonačnodimenzionalna (pokrivača).

Taj sistem aksioma nazivamo sistem aksioma Mengera-Aleksandrova-Šćepina. Nezavisnost ovih aksioma dokazao je Šćepin ([56]).

Neke posledice aksioma:

1.1. P o s l e d i c a ([6]). Kompaktni prostor koji je beskonačnodimenzionalan ne pripada klasi $\bar{\mathcal{K}}$.

D o k a z. Neka je ω proizvoljni pokrivač beskonačnodimenzionalnog kompaktnog prostora X. U pokrivač ω možemo upisati konačni pokrivač γ. Postoji γ-preslikavanje f koje preslikava X na nerv $N(\gamma)$ pokrivača γ (I, 1.40.). Tim prije f je ω-preslikavanje prostora X na $N(\gamma)$. Što je suprotno aksiomi 5, jer je $\dim N(\gamma) < \infty$.

Prostor X koji sadrži beskonačnodimenzionalni kompakt X' ne pripada klasi $\bar{\mathcal{K}}$. Stvarno, tada prema aksiomi 2. $X' \in \bar{\mathcal{K}}$, a prema prethodnoj posledici X' ne zadovoljava aksiomu 5.

1.2. P o s l e d i c a. Hilbertov kub ne pripada klasi $\bar{\mathcal{K}}$, jer nema konačnodimenzionalnu pregradu.

1.3. P o s l e d i c a. Svojstvo da prostor X zadovoljava aksiomu 4. nije slabo nasledno.

D o k a z. Neka je x_0 tačka Hilbertova kuba I^∞ a x_1 tačka drugog Hilbertova kuba I^∞ i I jedinični interval. Identifikujmo tačke x_0 i $0 \in I$ a x_1 i $1 \in I$. Prostor $X = (I^\infty \cup I \cup I^\infty)/\approx$ ima konačnodimenzionalnu pregradu. Svaka tačka intervala $\mathring{I}$ je konačnodimenzionalna zatvorena pregrada. Medjutim, prostor I^∞ nema konačnodimenzionalnu pregradu

1.4. P o s l e d i c a. Svojstvo da prostor X zadovoljava aksiomu 5 nije nasledno.

D o k a z. Prostor koji je topološka suma prostora E (primjer 1.6.) i prostora E_1 (primjer 1.11.) zadovoljava aksiomu 5, a njegov podprostor E_1 ne zadovoljava.

Pokažimo da postoji klasa prostora koja sadrži sve konačnodimenzionalne prostore i čiji svaki prostor zadovoljava aksiome 1,2,3,4 i 5.

1.5. D e f i n i c i j a. Prostor X je lokalno konačnodimenzionalan ako svaka tačka x prostora X ima konačnodimenzionalnu okolinu O_x, $\dim O_x < \infty$ (Smirnov).

Klasu lokalno konačnodimenzionalnih prostora označimo sa $\mathcal{K}$.

1.6. P r i m j e r. Neka je $\{(X_n, d_n)\}$ sistem metričkih prostora dimenzije n, n = 0, 1, ... Prostor $X=\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, $X_n \cap X_m = \emptyset$ za $n \neq m$ u kojemu je uvedena metrika sa: $d(x,y) = \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)}$ za $x, y \in X_n$ i $d(x,y) = 1$ za $x \in X_n$, $y \in X_m$ i $n \neq m$, je lokalno konačnodimenzionalan, jer za okolinu proizvoljne tačke možemo uzeti jedan od prostora X_n.

1.7. T e o r e m a ([6]). Svaki prostor klase $\mathcal{K}$ zadovoljava aksiome 1, 2, 3, 4 i 5.

D o k a z. Pošto je funkcija dim topološki invarijantna, aksioma 1 je zadovoljena. Prema monotonosti dim po proizvoljnim skupovima (I, 1.13.) prostor klase $\mathcal{K}$ zadovoljava aksiomu 2.

Pretpostavimo da je $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ lokalno konačni zatvoreni pokrivač prostora X , pri čemu su X_α skupovi klase $\mathcal{K}$. Pošto je $\{X_\alpha\}$ lokalno konačni pokrivač, svaka tačka x prostora X ima okolinu koja se presijeca sa konačnim brojem lemenata pokrivača $\{X_\alpha\}$. Pretpostavimo sada da je $U_{\alpha_i} = O_x \cap X_{\alpha_i} \neq \emptyset$ samo za konačan broj indeksa α, $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Pošto $X_{\alpha_i} \in \mathcal{K}$, postoji okolina V_{α_i} tačke x u X_{α_i} takva da je $x \in V_{\alpha_i} \subset \overline{V}_{\alpha_i} \subset U_{\alpha_i}$ i $\dim \overline{V}_{\alpha_i} \leq n_i < \infty$ za i = 1, ... , k. Skupovi $F_{\alpha_i} = X_{\alpha_i} \setminus V_{\alpha_i}$ su zatvoreni kao i skup $F = (\bigcup_{i=1}^{k} F_i) \cup \{X_\alpha \mid \alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}\}$. Kako je okolina tačke x skup $G = X \setminus F$, u X postoji takva otvorena okolina U da je $x \in U$

$\subset \bar{U} \subset G$. Prema monotonosti dim po proizvoljnim skupovima metričkog prostora važiće nejednakost $\dim U \leq \dim(\bigcup_{i=1}^{k} V_{\alpha_i}) \leq \max\{n_1, \ldots, n_k\} < \infty$.

Pošto svaka tačka $x \in X$ ima konačnodimenzionalnu okolinu O_x, i kako je X regularan prostor, x ima okolinu čije je zatvaranje konačnodimenzionalno, tj. postoji O'_x i $x \in O'_x \subset \bar{O}'_x \subset O_x$ i $\dim \bar{O}'_x < \infty$. Zatvoreni skup $C = \bar{O}'_x \setminus O'_x$ je konačnodimenzionalna zatvorena pregrada u X. Na taj način svaki prostor X klase $\mathcal{K}$ zadovoljava aksiome 1, 2, 3 i 4. Pokažimo da svaki prostor klase $\mathcal{K}$ zadovoljava aksiomu pokrivača.

U slučaju kada je $\dim X < \infty$, dokaz je poznat (v. [1]). Pretpostavimo da je $\dim X = \infty$.

Neka je P_k unija svih otvorenih k-dimenzionalnih skupova prostora X, $P_k = \bigcup\{U \mid U$ otvoreno u X i $\dim U \leq k\}$. Sistem skupova $\{P_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ je prebrojivi otvoreni pokrivač prostora X, jer svaka tačka $x \in X$ ima konačnodimenzionalnu okolinu. Zato što je $\{P_k\}$ prebrojivi i otvoreni F_σ-pokrivač i prostor X normalan, postoji otvoreni zvjezdasto konačni pokrivač $\gamma = \{\Gamma\}$ upisan u $\{P_k\}$ (I, 1.20.). Kako je prostor X normalan, možemo zahtijevati da je i zatvaranje pokrivača γ, $\bar{\gamma} = \{\bar{\Gamma} \mid \Gamma \in \gamma\}$ upisano u pokrivač $\{P_k\}$ (v. [44]).

Izaberimo indukcijom prebrojivi niz elemenata Γ_k pokrivača γ, ali tako da je $\dim \Gamma_k \geq k$ i $\Gamma_k \cap \Gamma_l = \emptyset$ za $k \neq l$ i $k = 0, 1, \ldots$

Uzmimo za Γ_0 proizvoljan, neprazan elemenat pokrivača γ. Pretpostavimo da smo izabrali skupove Γ_k, $k = 0, \ldots, p$ koji zadovoljavaju potrebne uslove. Izaberimo skup Γ_{p+1}. Neka je $X_p = X \setminus St^3(\Gamma_0) \setminus \ldots \setminus St^3(\Gamma_p)$, gdje je $St^3(M)$ trostuka zvijezda skupa M u odnosu na pokrivač γ. Pokažimo da je izdvojeni skup konačnodimenzionalan. Zato što je pokrivač γ zvjezdasto konačan skup $H_p = \bigcup_{i=0}^{p} St^3(\Gamma_i)$ je unija konačnog broja skupova Γ iz γ; a pošto je X metrički prostor, svaki otvoreni skup je tipa F_σ. Medjutim, pošto je X normalan, dovoljno je pokazati da je svaki elemenat Γ pokrivača γ konačnodimenzionalan, a to neposredno slijedi iz upisanosti pokrivača γ u pokrivač $\{P_k\}$ i monotonosti funkcije dim. Sličnim rasudjivanjem pokazujemo da je $\dim X_p = \infty$, jer u suprotnom slučaju je dim $X_p < \infty$, što je suprotno pretpos...ci.

Neka je Γ_{p+1} elemenat pokrivača γ koji se presijeca sa X_p i dim $\Gamma_{p+1} \geq p+1$. Skup sa takvim osobinama postoji, jer u suprotnom slučaju prema teoremi sume za lokalno konačne sisteme (I, 1.14.) slijedilo bi da je dim $X_p \leq$ dim $St(X_p) \leq p+1$, što je suprotno uslovu dim $X_p = \infty$. Pokažimo da se zatvaranje skupa Γ_{p+1} ne presijeca sa zatvaranjem već dobijenih skupova. Za dokaz toga uslova pokažimo sledeće činjenice:

a) $\bar{\Gamma} \subset St(\Gamma)$

b) $St(\Gamma_{p+1}) \cap St(\Gamma_k) = \emptyset$, $k = 0, \dots, p$.

Neka $x \in \bar{\Gamma}$. Kako je γ otvoreni pokrivač postoji $\Gamma' \in \gamma$ i to takav da $x \in \Gamma'$ i kako je Γ' otvoreno, to je $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$ pa je $\bar{\Gamma} \subset \bigcup \{\Gamma' | x \in \bar{\Gamma}$ i $x \in \Gamma', \Gamma' \in \gamma\} = St(\Gamma)$.

Prema definiciji $St(\Gamma_k) = \bigcup\{\Gamma' \in \gamma \,|\, \Gamma' \cap \Gamma_k \neq \emptyset\}$. A, neka je $\gamma' = \{\Gamma\}$, $\gamma'' = \{\Gamma'' \in \gamma \,|\, \Gamma'' \cap St(\Gamma) \neq \emptyset$ i $\Gamma'' \notin \gamma'\}$, $\gamma''' = \{\Gamma''' \in St^3(\Gamma)$ i $\Gamma''' \notin \gamma' \cup \gamma''\}$. Elementi sistema $\gamma' = \{\Gamma\}$ i $\gamma''' = \{\Gamma'''\}$ nemaju zajedničkih tačaka. Prema izboru skupa Γ_{p+1} taj skup se sa $St^3(\Gamma_k)$ može presijecati samo sa elementima sistema γ''' odakle slijedi da je $St(\Gamma_k) \cap St(\Gamma_{p+1}) = \emptyset$. Na taj način smo dokazali uslove a) i b) iz kojih slijedi da je $\bar{\Gamma}_{p+1} \cap \bar{\Gamma}_k = \emptyset$ za $k = 0, \dots, p$.

Pošto je prostor X normalan za svaki skup $\bar{\Gamma}_k$ postoji takva okolina O_k da je $\bar{\Gamma}_k \subset O_k \subset \bar{O}_k \subset St(\Gamma_k)$ za $k = 0, 1, \dots$ Iz uslova $St(\Gamma_k) \cap St(\Gamma_l) = \emptyset$ slijedi da je $\bar{O}_k \cap \bar{O}_l = \emptyset$ za $k \neq l$ i $k = 0, 1, \dots$ Postoji pokrivač $\beta_k = \{B\}$ skupa $\bar{\Gamma}_k$ i to takav da je ord $\beta_k \leq k+1$, $k = 0, 1, \dots$ i u pokrivač β_k ne može se upisati pokrivač manjeg reda.

Elementi pokrivača β_k su otvoreni skupovi u $\bar{\Gamma}_k$. Neka je sada W takav otvoreni skup u X da je $\bar{\Gamma}_k \cap W = B$. Pošto je prostor X normalan, postoji takav skup W da je $W \subset O_k$ i red sistema otvorenih skupova $\omega_k = \{W | W \cap \bar{\Gamma}_k = B, B \in \beta_k\}$ jednak je redu pokrivača β_k (I, 1.15.). Konstruišimo sistem otvorenih skupova ω_k za $k = 0, 1, \dots$ Tada sistem otvorenih skupova

$$\omega = (X \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \bar{\Gamma}_k) \cup (\bigcup_{k=0}^{\infty} \omega_k)$$

je otvoreni pokrivač prostora X. Pokažimo da je ω lokalno konačan.

Označimo sa T_k tijelo sistema ω_k ($T_k = \bigcup\{W \mid W \in \omega_k\}$) a sa $T = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k$. Neka je x proizvoljna tačka prostora X i neka $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{\Gamma}_k$. Tada prema diskretnosti sistema $\{\Gamma_k\}$ postoji tako k_0 da $x \in \overline{\Gamma}_{k_0}$. Kako je ω_{k_0} pokrivač skupa Γ_{k_0}, to postoji elemenat $W \in \omega_{k_0}$ i to takav da $x \in W$. Tada je W okolina tačke x koja se presijeca najviše sa k_0+2 elementa pokrivača ω. Analogno se pokazuje da svaki elemenat skupa T ima okolinu koja se presijeca samo sa konačnim brojem elemenata pokrivača ω. Ako $x \notin T$, tada x ima okolinu koja se presijeca sa jednim elementom pokrivača ω.

Neka je $f\colon X \to Y$ ω-preslikavanje, pri čemu je Y metrizabilan i $\dim Y \leq k$. U pokrivač $\{U(y) \mid y \in Y\}$, gdje je $U(y)$ otvorena okolina tačke y i $f^{-1}(U(y)) \subset W$, $W \in \omega$, možemo upisati pokrivač $\alpha = \{A\}$ takav da je $\operatorname{ord} \alpha \leq k+1$. Prema izboru pokrivača α, važiće da je $f^{-1}(A) \subset W$ za svako $A \in \alpha$ i za neko $W \in \omega$. Sistem otvorenih skupova $\{\overline{\Gamma}_{k+1} \cap f^{-1}(\alpha)\}$ je pokrivač skupa $\overline{\Gamma}_{k+1}$ upisan je u pokrivač β_{k+1} pa ispunjava uslov $\operatorname{ord}\{\overline{\Gamma}_{k+1} \cap f^{-1}(\alpha)\} \leq k+1$, što je suprotno pretpostavci da se u pokrivač β_{k+1} ne može upisati pokrivač manjeg reda od $k+2$. Dakle, treba da je $\dim Y > k$, $k = 0, 1, \ldots$ te je $\dim Y = \infty$.

1.8. D e f i n i c i j a ([6]). <u>Ako je svaka okolina O_{x_0} tačke x_0 beskonačnodimenzionalna, $\dim O_{x_0} = \infty$, onda je $\dim_{x_0} X = \infty$.</u>

Označimo sa $X_\infty = \{x \in X \mid \dim_x X = \infty\}$.

Neka je $\dim X = \infty$. Označimo sa $P_n = \bigcup\{U \mid U$ otvoreno u X i $\dim U \leq n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Tada svaki prostor X ima reprezentaciju

$$X = X_\infty \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right). \qquad (*)$$

1.9. T e o r e m a. <u>Prostor X je klase $\bar{\mathcal{K}}$ ako i samo ako je lokalno konačnodimenzionalan.</u>

D o k a z. Lokalno konačnodimenzionalni prostori pripadaju klasi $\bar{\mathcal{K}}$ (teorema 7.). Dokažimo drugi dio teoreme.

Pretpostavimo suprotno, tj. da X nije lokalno konačnodimenzionalan prostor. Tada prostor X ima reprezentaciju $X = X_\infty \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right)$ pri čemu je $X_\infty \neq \emptyset$. Najprije pretpostavimo da je X_∞ lokalno konačnodimenzionalni podprostor. U tom slučaju je dim $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \infty$ i taj skup je gust u X. Skup X_∞ nije gust u X, jer bi tada svaka tačka prostora X bila tačka skupa X_∞ a kako je X_∞ lokalno konačnodimenzionalan, to bi bio i X lokalno konačnodimenzionalan što je suprotno pretpostavci. Neka je x_o tačka skupa X_∞. Kako tačke skupa X_∞ nijesu izolovane tačke u X, to postoji takav niz $x_1, x_2, \ldots$ da je $\lim x_n = x_o$ i $x_n \notin X_\infty$ za $n = 1, 2, \ldots$ Iz niza $x_1, x_2, \ldots$ možemo izabrati takav podniz $\{x_{n_k}\}$ da je $k \leq \mathrm{loc\ dim}_{x_{n_k}} X < \infty$ i $\lim x_{n_k} = x_o$. Označimo taj podniz sa $\{x_k\}$. Neka je O_{x_1} takva okolina tačke x_1 da je: $1 \leq \dim \bar{O}_{x_1} < \infty$, $\delta(\bar{O}_{x_1}) < 1$ i $\bar{O}_{x_1} \cap X_\infty = \emptyset$. Takva okolina postoji, jer je: $\mathrm{loc\ dim}_{x_1} X < \infty$; skup X_∞ zatvoreno u X; $x_1 \notin X_\infty$ i prostor X je regularan. Pretpostavimo da smo izabrali okoline $O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_k}$. Izaberimo okolinu $O_{x_{k+1}}$ tačke x_{k+1} i to takvu da je: $k+1 \leq \dim \bar{O}_{x_{k+1}} < \infty$, $X_\infty \cap \bar{O}_{x_{k+1}} = \bar{O}_{x_{k+1}} \cap \bar{O}_{x_i} = \emptyset$, $i = 1, \ldots, k$ i $\delta(\bar{O}_{x_{k+1}}) < \frac{1}{k}$. Okolinu $O_{x_{k+1}}$ možemo tako izabrati, jer je: $k+1 < \mathrm{loc\ dim}_{x_{k+1}} X < \infty$; skup $X_\infty \cup (\bigcup_{i=1}^{k} \bar{O}_{x_i})$ je zatvoren u X; $x_{k+1} \notin X_\infty$ i prostor X je regularan. Nastavimo taj postupak do beskonačnosti. Na taj način dobijamo niz okolina $\{O_{x_k} | k = 1, 2, \ldots\}$ tačaka x_k pri čemu je: $\lim \delta(\bar{O}_{x_k}) = 0$ i $k \leq \dim \bar{O}_{x_k} < \infty$. Označimo sa X' podprostor $X' = \{x_o\} \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{O}_{x_k})$.

Neka je $\omega = \{W\}$ proizvoljni pokrivač prostora X'. Pokažimo da postoji ω-preslikavanje prostora X' na konačnodimenzionalni prostor.

Kako je X' metrički prostor, za ω možemo izabrati pokrivač čiji su elementi sfere. Postoji tako W_o da $x_o \in W_o$ i neka je $\varepsilon < \delta(W_o)$. Kako je $\lim x_k = x_o$, postoje takvi brojevi $N_1(\varepsilon)$ i $N_2(\varepsilon)$ da je $d(x_k, x_o) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{N_2(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Tada je $\bar{O}_{x_k} \subset W_o$ za $k > N$. Definišimo preslikavanje f prostora X' na sledeći način: $f(\bar{O}_{x_k}) = \bar{O}_{x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, N$ i $f((\bigcup_{k=N+1}^{\infty} \bar{O}_{x_k}) \cup \{x_o\}) = x_o$. Preslikavanje f je ω-preslikavanje, jer svaka tačka x skupa $\{x_o\} \cup (\bigcup_{k=N+1}^{\infty} \bar{O}_{x_k})$ ima okolinu O_x takvu da je $f^{-1}(O_x) \subset W_o$. Kako je identičko preslikavanje ω-preslikavanje, to je f ω-preslikavanje na skupu $\bigcup_{k=1}^{N} \bar{O}_{x_k}$. Prema tome je $f(X') = \{x_o\} \cup (\bigcup_{k=1}^{N} \bar{O}_{x_k})$ te je $\dim f(X') = \sup\{\dim \bar{O}_{x_k} | k = 1, \ldots, N\}$. Pošto je $X' = \{x_o\} \cup$

$(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bar{O}_{x_k})$, to je dim $X' = \sup\{\dim O_{x_k}\} \geq \sup\{k\} = \infty$.

Prema aksiomi 2 prostor X' treba da pripada klasi $\bar{\mathcal{K}}$. Pošto X' ne zadovoljava aksiomu 5, to X' nije prostor klase $\bar{\mathcal{K}}$ pa X nije prostor klase $\bar{\mathcal{K}}$.

Na sličan način se dokazuje slučaj kada X_∞ nije lokalno konačno-dimenzionalan podprostor, dim $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \infty$ i postoji niz $\{x_n\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ i $\lim x_n = x_0 \in X_\infty$. Ako X_∞ nije lokalno konačnodimenzionalan podprostor i dim $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n < \infty$, tada pretpostavimo da X_∞ kao i svaki njegov podskup sadrži podskupove dimenzije n, $n = 0, 1, \ldots$ Tada se konstruiše sistem okolina $\{O_{x_k}\}$ niza $\{x_k\}$ sa uslovom $\delta(\bar{O}_{x_k}) \to 0$ gdje je $\lim x_k = x_0 \in X_\infty$. Zatim izaberu se konačnodimenzionalni O'_{x_k} u $\bar{O}_{x_k}$ i to takvi da je $k \leq \dim O'_{x_k} < \infty$. Podprostor X', $X' = \{x_0\} \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} O'_{x_k})$, se može za proizvoljni pokrivač ω ω-preslikati na konačnodimenzionalni podprostor.

Lokalno konačnodimenzionalni prostori imaju i sledeće osobine:

1.10. S t a v ([6]). <u>Prostor X je lokalno konačnodimenzionalan ako i samo ako je lokalno konačna unija konačnodimenzionalnih prostora.</u>

D o k a z. Neka je X prostor klase $\mathcal{K}$. Svaka tačka $x \in X$ ima otvorenu konačnodimenzionalnu okolinu O_x. Sistem skupova $\{O_x | x \in X\}$ je otvoreni pokrivač prostora X, a kako je metrički prostor parakompaktan, u taj pokrivač možemo upisati lokalno konačni pokriva $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Prema monotonosti dim, dim $X_\alpha < \infty$ za svako $\alpha \in A$. Na taj način $\{X_\alpha | \alpha \in A\}$ je lokalno konačni pokrivač od konačnodimenzionalnih skupova prostora X.

Pretpostavimo da je $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ lokalno konačni pokrivač prostora X i dim $X_\alpha < \infty$ za svako $\alpha \in A$. Postoji takav otvoreni pokrivač $\mathcal{U} = \{U_\beta | \beta \in B\}$ da se svaki elemenat U_β pokrivača $\mathcal{U}$ presijeca sa konačnim brojem elemenata sistema $\{X_\alpha\}$. Neka je $U_\beta \cap X_\alpha \neq \emptyset$ samo za $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ i dim $X_{\alpha_i} \leq n_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Prema monotonosti dim, dim $(U_\beta \cap X_{\alpha_i}) \leq n_i$. Pošto je $U_\beta = \bigcup_{i=1}^{k}(X_{\alpha_i} \cap U_\beta)$, onda prema nejednakosti Urisona-Mengera (I, 1.17.) važiće nejednakosti dim $U = \dim(\bigcup_{i=1}^{k}(X_{\alpha_i} \cap U_\beta) \leq n_1 + \ldots + n_k + k - 1 < \infty$. Kako je prostor X parakompaktan u pokrivač $\mathcal{U}$ možemo upisati lokalno konačni pokrivač $\mathcal{V} = \{V\}$ i kako je X normalan možemo zahtijevati da je $\bar{\mathcal{V}}=\{\bar{V}\}$ upisano u $\mathcal{U}$. Prema 1.7. i monotonosti dim, X je prostor klase $\mathcal{K}$.

1.11. S t a v ([6]). <u>Lokalno konačnodimenzionalni prostori ne zadovoljavaju lokalno prebrojivu teoremu sume.</u>

Neka je $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$ diskretna suma n-dimenzionalnih kubova, a E_1 Aleksandrovska kompaktifikacija te diskretne sume, $E_1=\{\xi\}\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty} I^n)$. Proizvoljan skup otvoren u I^n za $n = 1, 2, \ldots$ otvoren je i u E_1, a sistem baznih okolina tačke ξ su skupovi oblika $\{\xi\}\cup(\bigcup_{n\geq N}^{\infty} I^n)$. Metriku koja inducira takvu topologiju u E_1 možemo zadati na sledeći način:

Neka je d metrika u euklidskom prostoru. U I^n uvedimo metriku $d_n(x,y)=\frac{1}{n+1}$. U E možemo definisati metriku $D(x,y)$,

$$D(x,y)=\begin{cases} d_n(x,y), & x\in I^n \text{ i } y\in I^n,\\ 1, & x\in I^n \text{ i } y\in I^m,\ n\neq m.\end{cases}$$

$D_1(x,y)$ u prostoru E_1 definišimo sada sa:

$$D_1(x,y)=\begin{cases} d_n(x,y), & x\in I^n \text{ i } y\in I^n,\\ \frac{1}{2^{m-n}}, & x\in I^n,\ y\in I^m \text{ i } m>n,\\ \frac{1}{2^n}, & x\in I^n \text{ i } y=\xi.\end{cases}$$

Nije teško pokazati da je $D_1(x,y)$ metrika koja inducira navedenu topologiju u E_1. Prostor E_1 je prebrojiva unija zatvorenih konačnodimenzionalnih skupova, a svaka okolina O_ξ tačke ξ je beskonačnodimenzionalna, jer sadrži sve kubove I^n, za $n\geq N(O_\xi)$, pa E_1 nije prostor klase $\mathcal{K}$.

2. O p r o b l e m u S m i r n o v a.

Prema posledici 1.1. kompaktni beskonačnodimenzionalni prostori ne pripadaju klasi $\bar{\mathcal{K}}$. Aksiomu 5 ne zadovoljavaju ni beskonačnodimenzionalni prostori u kojima je skup X_∞ neprazan. Shodno tome nameće se pitanje o klasi prostora koju karakterišu aksiome 1, 2, 3 i 4.

U vezi sa tim postoji

P r o b l e m J u. M. S m i r n o v a. <u>Kojim se topološkim</u>

svojstvima može okarakterisati maksimalna klasa, ako po ... i, medju svim klasama koje sadrže sve konačnodimenzionalne prostore i zadovoljavaju aksiome 1, 2, 3 i 4.

Pokažimo sada da postoji klasa prostora koja je različita od klase $\mathcal{K}$ i čiji svaki prostor zadovoljava aksiome 1, 2, 3 i 4.

2.1. D e f i n i c i j a ([6]). Skup A je diskretan u X ako postoji lokalno konačni pokrivač $\gamma = \{\Gamma\}$ i to takav da je $\Gamma \cap A$ konačan skup za svaki elemenat Γ pokrivača γ.

2.2. D e f i n i c i j a ([6]). Klasu takvih metričkih prostora $\{X\}$, koja sadrži sve konačnodimenzionalne prostore i skup X_∞ je diskretan u X, za $\dim X = \infty$, označimo sa $\mathcal{K}'$.

Prostor E_1 iz 1.11. je prostor klase $\mathcal{K}'$.

Sledeće leme karakterišu nam neka unutrašnja svojstva prostora klase $\mathcal{K}'$.

2.3. L e m a ([6]). Skup $X_\infty \subset X$ parakompaktnog prostora X je diskretan ako i samo ako svaka tačka x iz X ima otvorenu okolinu O_x i to takvu da je $O_x \cap X_\infty$ konačan skup.

D o k a z. Neka je X_∞ diskretno u X. Tada postoji takav lokalno konačni pokrivač $\gamma = \{\Gamma\}$ da je $\Gamma \cap X_\infty$ konačan skup za svako $\Gamma \in \gamma$. Svaka tačka $x \in X$ ima okolinu O_x koja se presijeca sa konačnim brojem elemenata $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ pokrivača γ, a kako je $O_x \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$, to je $O_x \cap X_\infty \subset (\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i) \cap X_\infty$ pa je skup $O_x \cap X_\infty$ konačan.

Neka za svako $x \in X$ postoji takva okolina O_x da je $O_x \cap X_\infty$ konačan skup. U pokrivač $\{O_x \mid x \in X\}$ možemo upisati lokalno konačni pokrivač $\gamma = \{\Gamma\}$. Kako je svaki elemenat Γ pokrivača γ sadržan u nekom skupu O_x, to je $X_\infty \cap \Gamma$ konačan skup za svaki elemenat $\Gamma \in \gamma$.

2.4. L e m a ([6]). Ako je skup X_∞ diskretno u X, tada je on zatvoren u X.

D o k a z. Neka je X_∞ diskretno u X. Tada postoji takav lokalno konačni pokrivač $\gamma = \{\Gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ da je $\Gamma_{\alpha_k} = X_\infty \cap \Gamma_\alpha = \{x_1, \dots, x_k\}$

konačan skup. Skup $\Gamma'_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_{\alpha_k}$ je otvoren, a skup $X_\infty = X \setminus \bigcup \{\Gamma'_\alpha \mid \alpha \in A\}$ zatvoren kao komplement otvorenog skupa.

2.5. L e m a ([6]). <u>Ako je X prostor klase $\mathcal{K}'$, postoji bar jedna tačka $x \in X$ i $x \notin X_\infty$.</u>

D o k a z. Pretpostavimo suprotno, da svaka tačka x prostora X je tačka skupa X_∞. Tada prema 2.1. i 2.2. postoji okolina O_x tačke x i to takva da je skup $O_x \cap X_\infty$ konačan pa je $\dim O_x = 0$, što je nemoguće, jer je x tačka skupa X_∞. Dakle, postoji tačka x prostora X koja ne pripada skupu X_∞.

Kako je prostor X regularan a prema 2.4. skup X_∞ je zatvoren, to za svaku tačku $x \notin X_\infty$ postoji okolina O_x i to takva da je $\bar{O}_x \cap X_\infty = \emptyset$. Okolinu O_x možemo izabrati tako da je $\dim \bar{O}_x < \infty$.

2.6. L e m a ([6]). <u>Ako je X konačna unija zatvorenih skupova X_i, $i = 1, \dots, k$, klase $\mathcal{K}'$, tada je $X_\infty = \bigcup_{i=1}^{k} (X_i)_\infty$.</u>

D o k a z . Ako je O_x otvorena okolina tačke x u X, tada skupovi $O_x^i = O_x \cap X_i$ su otvorene okoline tačke x u X_i za $i = 1, \dots, k$. Ako $x \notin (X_i)_\infty$ za $i = 1, \dots, k$, postoji takva okolina U_x^i u X_i, prema 2.5, da je $\dim U_x^i < \infty$ za $i = 1, \dots, k$. Neka je $F_i = X_i \setminus U_x^i$, $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ i $U_x = X \setminus F$. U_x okolina tačke x u X, pa postoji takva otvorena okolina V_x da je $x \in V_x \subset \bar{V}_x \subset U_x$ te iz nejednakosti Urisona-Mengera i monotonosti dim, $\dim \bar{V}_x \leq \dim (\bigcup_{i=1}^{k} U_x^i) \leq \dim U_x^1 + \dots + \dim U_x^k + k-1 < \infty$. Neka $x \in (X_i)_\infty$ za neko $i \in \{1, \dots, k\}$. Kako svaka okolina tačke x u X sadrži kao podskup beskonačnodimenzionalnu okolinu, to je $\dim V_x = \infty$ za svaku okolinu tačke x u X.

2.7. T e o r e m a ([6]). <u>Svaki prostor klase $\mathcal{K}'$ zadovoljava aksiome 1, 2, 3 i 4.</u>

D o k a z. Ako je skup A diskretan u X, u smislu definicije 2.1, tadaje on diskretan i u svakom podprostoru X′ prostora X. Dakle, svaki prostor klase $\mathcal{K}'$ zadovoljava aksiomu 2. Neka je $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ takav zatvoreni, lokalno konačno pokrivač prostora X da je svaki elemenat X_α toga pokrivača klase $\mathcal{K}'$ i neka su U_x^i takve okoline tačke $x \in X$ da je $X_{\alpha_i} \cap U_x^i$ konačan skup. Takve okoline postoje za $i \in \{1, \dots, k\}$, prema 2.3. Označimo sa $F_i = X_{\alpha_i} \setminus U_x^i$ i $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$, a $\Phi = F \cup (\bigcup \{X_\alpha \mid \alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}\})$. Takodje, prema 2.6. Okolina $U_x = X \setminus \Phi$ sadrži konačan broj elemenata skupa X_∞, a prema 2.3. prostor X je klase $\mathcal{K}'$. Na taj način svaki prostor klase $\mathcal{K}'$ zadovoljava aksiomu 3.

Pokažimo sada da zadovoljava i aksiomu 4.

Prema 2.5. postoji tačka x prostora X klase $\mathcal{K}'$ sa konačnodimenzionalnom okolinom O_x. Kako su prostori klase $\mathcal{K}'$ regularni, postoji okolina U_x tačke x i to takva da je $x \in U_x \subset \bar{U}_x \subset O_x$. Pošto je $\dim O_x < \infty$ i $\mathrm{Bd}\, U_x \subset O_x$, to je $\mathrm{Bd}\, U_x$ konačnodimenzionalan zatvoren skup; pošto je $X = U_x \cup \mathrm{Bd}\, U_x \cup (X \setminus \bar{U}_x)$, $U_x \cap (X \setminus \bar{U}_x) = \emptyset$ i $x \in U_x$, $X_\infty \subset X \setminus \bar{U}_x$ iz toga slijedi da konačnodimenzionalni zatvoreni skup $\mathrm{Bd}\, U_x$ razbija prostor X na dva neprazna otvorena skupa.

2.8. S t a v ([6]). <u>Klasa prostora $\mathcal{K}'$ ne zadovoljava aksiomu 5.</u>

D o k a z. Prostor E_1 je prostor klase $\mathcal{K}'$, jer ima samo jednu tačku ξ u kojoj je $\dim_\xi E_1 = \infty$. Prostor E_1 je kompaktan, pa ga prema 1.1. za proizvoljni pokrivač ω možemo ω-preslikati na konačnodimenzionalni polijedar.

2.9 . S t a v ([6]). <u>Klasa prostora $\mathcal{K}'$ ne zadovoljava lokalno prebrojivu teoremu sume.</u>

D o k a z. Posmatrajmo u Hilbertovom kubu prostor $X = \{0\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)$, gdje je $X_n = (\frac{1}{n}, 0, \dots) \times E_1$ - Prostori X_n, n = 1, 2, ... su prostori klase $\mathcal{K}'$, a svaka okolina tačke $q = 0(0, 0, \dots)$ sadrži beskonačno tačaka $\xi_n = \{\xi\} \times (\frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$ u kojima je $\dim_{\xi_n} X = \infty$, što je suprotno definiciji klase $\mathcal{K}'$.

Posmatrajmo klasu prostora koji zadovoljavaju aksiome 1, 2, 3 i 4. U sistemu svih onih podklasa koje sadrže sve konačnodimenzionalne prostore uvedimo relaciju $\prec$ na taj način što će za $\mathcal{K}^* = \{X^*\}$ i $\mathcal{K}^{**} = \{X^{**}\}$ biti $\mathcal{K}^* \prec \mathcal{K}^{**}$ onda i samo onda ako je $\sup \{\dim X_\infty^* \mid X^* \in \mathcal{K}^*\} \leq \sup \{ \dim X_\infty^{**} \mid$

$x^{**} \in \mathcal{K}^{**}\}$. Lako je vidjeti da je relacija $\prec$ linearnog poretka.

Klasa $\mathcal{K}$ je minimalna klasa u odnosu na relaciju $\prec$.

2. 10. D e f i n i c i j a. Klasu takvih metričkih prostora $\{X\}$, koja sadrži sve konačnodimenzionalne prostore i $\dim X_\infty \leq n$, za $\dim X = \infty$, označimo sa $\tilde{\mathcal{K}}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, a klasu kada je X_∞ lokalno konačnodimenzionalno označimo sa $\tilde{\mathcal{K}}$.

2. 11. P r i m j e r. Konstruišimo prostore $\tilde{X}_n \in \tilde{\mathcal{K}}_n$ za $n = 1, 2, \ldots$

Proizvod prostora E_1 i n-dimenzionalnog kuba I^n je prostor, $\tilde{X}_n = E_1 \times I^n$, klase $\tilde{\mathcal{K}}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Proizvod prostora E_1 i E je prostor klase $\tilde{\mathcal{K}}$. U svakom od ovih prostora tačke skupa $(\tilde{X}_n)_\infty$ su samo tačke $\{\xi\} \times I^n$, tj. $(\tilde{X}_n)_\infty = \{\xi\} \times I^n$, $n = 1, 2, \ldots$, a u prostoru $E_1 \times E$ tačke skupa beskonačnedimenzionalnosti su tačke $\{\xi\} \times E$.

Može se pokazati, slično lemama 2.4, 2.5, 2.6. i teoremi 2.7. da u klasama $\tilde{\mathcal{K}}$ i $\tilde{\mathcal{K}}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ važe sledeća tvrdjenja:

2.12. L e m a. Skup $(\tilde{X}_n)_\infty$ $(\tilde{X}_\infty)$ je zatvoren u prostoru $\tilde{X}_n$ $(\tilde{X})$, $n = 1, 2, \ldots$

2.13. L e m a. Ako je $\tilde{X}_n$ $(\tilde{X})$ prostor klase $\tilde{\mathcal{K}}_n$ $(\tilde{\mathcal{K}})$, $n = 1, 2, \ldots$, postoji bar jedna tačka $x \in \tilde{X}_n (x \in \tilde{X})$ i $x \notin (\tilde{X}_n)_\infty$ $(\tilde{X}_\infty)$.

2.14. L e m a. Ako je $\tilde{X}_n$ $(\tilde{X})$ konačna unija zatvorenih skupova $\tilde{X}_{n_i}$ $(\tilde{X}_i)$, $i = 1, \ldots, k$, klase $\tilde{\mathcal{K}}_n$ $(\tilde{\mathcal{K}})$, tada je $(\tilde{X}_{n_i})_\infty = \bigcup_{i=1}^{k} (\tilde{X}_{n_i})_\infty$ $(\tilde{X}_\infty = \bigcup_{i=1}^{k} (\tilde{X}_i)_\infty)$.

2.15. S t a v. Svaki prostor klase $\tilde{\mathcal{K}}_n(\tilde{\mathcal{K}})$, $n = 1, 2, \ldots$, zadovoljava aksiome 1, 2, 3 i 4.

Prema posledici 1.2. Hilbertov kub ne zadovoljava aksiomu 4. Takodje, A-jako beskonačnodimenzionalni prostori ne zadovoljavaju aksiomu 4(v. [29] str. 227).

G L A V A III

OSOBINE LOKALNO KONAČNODIMENZIONALNIH I NJIMA BLISKIH KLASA PROSTORA

Neke klase beskonačnodimenzionalnih prostora imaju osobine konačnodimenzionalnih prostora: kompaktifikacija u istoj klasi; naslednost nekih osobina po proizvoljnim skupovima itd. Izvršićemo i jednu klasifikaciju beskonačnodimenzionalnih prostora u odnosu na dimenziju tačaka beskonačnosti, dim X_∞ , i ispitati osobine klasa prostora koje se dobijaju tom klasifikacijom.

1. P r o s t o r i k l a s a $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_f$.

1.1. D e f i n i c i j a ([7]). Prostor X je prostor klase $\mathcal{K}_f$ ako svaki par zatvorenih i disjunktnih skupova možemo separirati konačnodimenzionalnom zatvorenom pregradom.

Primijetimo da je ta definicija ekvivalentna sa sledećim uslovom:

Neka su F i G zatvoreni i otvoreni skup u X i $F \subset G$. Prostor X je klase $\mathcal{K}_f$ ako postoji takav otvoreni skup u X da je $F \subset U \subset \bar{U} \subset G$ i dim Bd $U < \infty$.

Prostor E_1 (II, 1.4.) je prostor klase $\mathcal{K}_f$.

1.2. L e m a([7]). Svojstvo, da prostor X pripada klasi $\mathcal{K}_f$ nasledno je po zatvorenim skupovima.

D o k a z. Neka je F zatvoreni podskup prostora X a F_1 i F_2

zatvoreni podskupovi skupa F. Skupovi F_1 i F_2 su zatvoreni podskupovi u X kao zatvoreni skupovi zatvorenog podprostora. Kako je X prostor klase $\mathcal{K}_f$ postoji konačnodimenzionalna zatvorena pregrada C' u X izmedju skupova F_1 i F_2 te je $X = U_1' \cup C' \cup U_2'$, U_1' i U_2' otvoreni u X i $U_1' \cap U_2' = \emptyset$. Skupovi $U_1 = U_1' \cap F$ i $U_2 = U_2' \cap F$ su otvoreni u F a $C = C' \cap F$ zatvoreno u F. Kako je $F = U_1 \cup C \cup U_2$ i $\dim C \leq \dim C' < \infty$, to je F podprostor klase $\mathcal{K}_f$.

Svojstvo iz leme 2. nije nasledno po otvorenim skupovima.

Posmatrajmo prostor E_1 - Kako je $\mathrm{Ind}\, E_1 \leq \omega_0$ svaki par disjunktnih zatvorenih skupova separira se konačnodimenzionalnom pregradom. Skup $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$ je otvoreni podskup prostora E_1. Skupovi $F_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_1^n$ i $F_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_2^n$, gdje su I_1^n i I_2^n naspramne strane kuba I^n su zatvoreni u E, a svaka pregrada izmedju ta dva skupa sadrži skup $\bigcup_{n=0}^{\infty} I^n$, pa je $\dim C = \infty$.

1.3. D e f i n i c i j a ([7]). <u>Sistem skupova $\{O_i\}$ naziva se diskretni sistem ako je $\bar{O}_i \cap \bar{O}_j = \emptyset$ za $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots$ i ne postoji niz $\{x_i \in O_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ koji sadrži konvergentan podniz.</u>

1.4. D e f i n i c i j a ([7]). <u>Skup tačaka $\{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ je diskretan niz u X, ako postoji takav diskretni sistem okolina $\{O_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ da je $x_i \in O_i$, $i = 1, 2, \ldots$</u>

1.5. L e m a ([7]). <u>Svaki diskretni niz u prostoru X klase $\mathcal{K}_f$ pripada otvorenom konačnodimenzionalnom skupu izuzev, možda konačnog broja tačaka.</u>

D o k a z. Pretpostsvimo suprotno. Neka je $\{x_1, x_2, \ldots\}$ diskretni niz u X - Postoji takav diskretni sistem okolina $\{O_{x_i} \mid i = 1, 2, \ldots\}$ da je $\dim \bar{O}_{x_i} \geq i$, $i = 1, 2, \ldots$ Neka su F_i i G_i disjunktni zatvoreni skupovi u $\bar{O}_{x_i}$ i to takvi da svaka pregrada C_i izmedju tih skupova u $\bar{O}_{x_i}$ zadovoljava uslove $\dim C_i \geq i-1$. Takva pregrada postoji, jer bi bila dim $\bar{O}_{x_i} < i$. Kako je sistem $\{O_{x_i}\}$ diskretan, skupovi $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ i $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ su zatvoreni u X. Ako je C proizvoljna pregrada u prostoru X izmedju skupova F i G, ona sadrži kao podskupove skupove $C_i' = C \cap \bar{O}_{x_i}$ koji separiraju F_i i G_i u $\bar{O}_{x_i}$. Tada je dim $C \geq i - 1$, $i = 1, 2, \ldots$, te je prema monotonosti funkcije dim X dim $C = \infty$, što je suprotno definiciji klase $\mathcal{K}_f$.

1.6. T e o r e m a ([7]). <u>Svaki prostor X klase $\mathcal{K}_f'$ ima reprezentaciju Skljarenka, $X = C \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)$, gdje je $X_n = \bigcup \{U \mid \dim U \leq n$ i U otvoreno u X$\}$, a C kompakt. Pri tome svaki diskretni niz leži u jednom od X_n izuzev, možda konačnog broja tačaka.</u>

Kako je $X_n = \bigcup \{U \mid \dim U \leq n$ i U otvoreno u X$\}$, to je X_n otvoreno u X. Podprostor metričkog prostora je metrički, pa je X_n parakompaktni podskup i na osnovu teoreme o lokalno konačnoj sumi (I, 1. 15.) dim $X_n \leq n$. Tvrdjenje teoreme proizilaze iz sledećih lema:

1.7. L e m a ([7]). <u>Svaki diskretni niz prostora X leži u jednom od X_n izuzev, možda konačnog broja tačaka.</u>

D o k a z. Pretpostsvimo suprotno. U tom slučaju postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$ i to takav da je loc $\dim_{x_{n_k}} X \geq k$, a tada svaka okolina V_{n_k} tačke x_{n_k} zadovoljava uslov dim $\bar{V}_{n_k} \geq k$. Uzimajući taj podniz, možemo ga izabrati tako da je dim $\bar{V}_{x_i} \geq i$ za svaku okolinu V_{x_i}. Neka je n takav minimalni broj, i simbol ∞ da je dim $\bar{V}_{x_i} \geq n_i$. Pretpostavimo da je $\overline{\lim} \{n_i\} = \infty$, tada postoji takav podniz $\{n_{i_k}\}$ da je $n_{i_k} \geq k$. Za tako izabrani podniz važi dim $\bar{V}_{x_k} \geq k$ za svaku okolinu V_{x_k} tačke x_k.

Neka su F_k i G_k zatvoreni podskupovi skupova $\bar{V}_{x_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ koji se ne mogu separirati u $\bar{V}_{x_k}$ skupom dimenzije $< k - 1$. Skupovi $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ i $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ su zatvoreni u X i ne mogu se separirati sa pregradom konačnodimenzionalnom. Na taj način $\overline{\lim} \{n_i\} = \infty$ u prostoru X je u suprotnosti sa uslovom da je X prostor klase $\mathcal{K}_f$, tj. mora postajati konačan broj m i to takav da je $n_i \leq m$ za svako $i \geq i_o$, pa je $\text{loc dim}_{x_i} X \leq m$ za svako $i \geq i_o$. Prema [13] postoji okolina O_{x_i} tačke x_i takva da je $\dim O_{x_i} \leq m$, pa je x_i tačka skupa X_m za svako $i \geq i_o$.

1.8. L e m a ([7]). <u>Skup C je kompaktan.</u>

D o k a z. Prema reprezentaciji prostora X, $C = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Skup C je zatvoren kao komplement otvorenog skupa. Neka je $\{x_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ proizvoljni niz u skupu C. Tada takav niz sadrži konvergentan podniz, jer ako bi takav niz bio diskretan prema lemi 7. on bi ležao u jednom od X_n, izuzev konačnog broja tačaka, što je suprotno sa definicijom skupa C i uslova $C \cap X_n = \emptyset$ za svako $n = 1, 2, \dots$

1.9. L e m a ([7]). <u>Svaki zatvoreni skup F, koji je disjunktan sa C sadrži se u jednom od skupova X_n.</u>

D o k a z. Pretpostavimo suprotno. U tom slučaju postoji niz $\{x_n\}$ u X tako da $x_n \in F \setminus X_n$, $n = 1, 2, \dots$ Prema definiciji skupa X_n važiće uslov $\text{loc dim}_{x_n} X \geq n$ za $n = 1, 2, \dots$ Kako je svojstvo $X \in \mathcal{K}_f$ nasledno po zatvorenim skupovima i $x_n \in F$ niz $\{x_n\}$ sadrži konvergentan podniz. Neka je $\lim x_{n_k} = x_o$ - Skup F je zatvoren pa $x_o \in F$ a iz $F \cap C = \emptyset$ slijedi da je $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Pretpostavimo da $x_o \in X_{n_o}$. Kako je skup X_{n_o} otvoren $x_{n_k} \in X_{n_o}$ za $n_k \geq k_o$. Taj uslov povlači da je $\text{loc dim}_{x_n} X \leq n_o$ za svako $n_k \geq k_o$, što je suprotno uslovima $\text{loc dim}_{x_n} X > n$ i $\lim\{n_k\} = \infty$. Protivurečnost dokazuje tvrdjenje.

1.10. T e o r e m a ([7]). <u>Presjak klasa $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_f$ je klasa svih konačnodimenzionalnih prostora.</u>

D o k a z. Prema lemi 7. i jednakosti dimenzionalnih funkcija $\dim X$ i $\operatorname{Ind} X$ na klasi metričkih prostora (I, 1.21.) konačnodimenzionalni prostor X je klase $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_f$. Neka je $\dim X = \infty$. Ako prostor X pripada klasi $\mathcal{K}$ prema II, 1.3. postoji diskretni niz zatvorenih skupova $\{F_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ i to takav da je $F_i \cap F_j = \emptyset$ za $i \neq j$ i $\dim F_i \geq i$. Pošto je $\{F_i\}$ diskretni sistem, skup $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ je zatvoren. Neka je x_i tačka skupa F_i, $i = 1, 2, \dots$ i $\mathrm{loc}\dim_{x_i} X \geq i$. Prema izboru sistema $\{F_i\}$ niz $x_1, x_2, \dots$ je diskretan. Ako bi prostor X bio prostor klase $\mathcal{K}_f$, prostor F bio bi takodje u toj klasi, a tada svaki diskretni niz treba da je u otvorenom konačnodimenzionalnom podskupu, što je nemoguće jer je $\mathrm{loc}\dim_{x_i} X \geq i$, $i = 1, 2, \dots$

1.11. L e m a ([7]). <u>Svaki prostor klase $\mathcal{K}$ ima bazu od konačnodimenzionalnih elemenata. Svaki kompaktni podskup prostora X klase $\mathcal{K}$ je konačnodimenzionalan.</u>

D o k a z. Svaka tačka x prostora X ima konačnodimenzionalnu okolinu koja se sadrži u proizvoljnoj okolini te tačke, tj. prostor X ima lokalnu bazu od konačnodimenzionalnih skupova a time i bazu.

Neka je C kompaktni podskup od X. Sistem skupova $\{O_x \mid x \in C\}$ i $\dim O_x < \infty$ je otvoreni pokrivač skupa C. Kako je C kompakt, iz toga pokrivača možemo izvući konačni podpokrivač $\{O_{x_i} \mid i = 1, 2, \dots, k\}$, pri čemu je $\dim O_{x_i} \leq n_i < \infty$. Prema monotonosti dim X i nejednakosti Mengera-Urisona važiće $\dim C = \dim\left(\bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}\right) \leq n_1 + \dots + n_k + k - 1 < \infty$.

1.12. T e o r e m a. <u>Proizvod konačnog broja prostora klase $\mathcal{K}$ je prostor klase $\mathcal{K}$.</u>

Dokaz. Neka su X_i prostori klase $\mathcal{K}$ i $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$. Prostor X je metrički[15]. Ako je $x = (x_1, \dots, x_k)$ tačka prostora X, onda ona ima takvu okolinu O_x da je $O_x = \prod_{i=1}^{k} U_{x_i}$, gdje je U_{x_i} okolina tačke x_i, $i = 1, \dots, k$ i $\dim U_{x_i} \leq n_i < \infty$. Prema teoremi Katetova-Morite (I, 1.27.) $\dim\left(\prod_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \leq \dim U_{x_1} + \dots + \dim U_{x_k} \leq n_1 + \dots + n_k < \infty$.

Proizvod prebrojivog broja prostora klase $\mathcal{K}$ ne mora biti prostor klase $\mathcal{K}$, jer Hilbertov kub $\prod_{i=1}^{\infty} I$ je proizvod prebrojivog broja 1-dimenzionalnih prostora, a svaki otvoreni skup u njemu je beskonačnodimenzionalan kao i njegov podskup $\mathcal{E}$ ([66]).

Neka je $J_n = \left\{ (x_i) \mid 0 \leq x_i \leq \frac{1}{n} \text{ za } i = 1, 2, \dots, n \text{ i } x_i = 0 \text{ za } i > n \right\}$ a $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Prostor $J^* = J \setminus \{q\}$ je lokalno konačnodimenzionalan. Stvarno, neka je x ma koji elemenat različit od q. Kako je J Hauzdorfov prostor, to postoje disjunktne okoline za q i x. Svaka okolina tačke q sadrži sve skupove J_n, izuzev njih konačno mnogo, pa okolina tačke x može sadržati najviše konačan broj skupova J_n te je konačnodimenzionalna.

Koristeći modifikaciju leme Smirnova (I, 2.13.), Vener je pokazao sledeće:

1.13. L e m a (Vener, [76]). <u>Neka je X separabilni metrički prostor i U takav otvoreni skup od X da je dim U $\leq$ k i neka je $\varepsilon > 0$. Ako je $S(k, \varepsilon) = \left\{ (x_1, \dots, x_{2k+2}) \in R^{2k+2} \; 0 \leq x_i \leq \varepsilon \text{ za } i = 1, \dots, 2k+2 \right\}$, tada postoji neprekidno preslikavanje $G: X \to S(k, \varepsilon)$ i to tako da je:</u>

<u>I. $G(x) = 0$ za $x \in X \setminus U$ i</u>

<u>II. restrikcija G na U je homeomorfizam.</u>

1.14. T e o r e m a (Vener, [76]). <u>Ako je X separabilni metrički lokalno konačnodimenzionalni prostor, tada se X može potopiti u J^*.</u>

D o k a z. Neka je X separabilni metrički lokalno konačnodimenzionalni prostor. Prostor X ima prebrojivi pokrivač od konačnodimenzionalnih skupova (1.11.) u koji se može upisati prebrojivi zvjezdasto konačni pokrivač (I, 1.20.) $\left\{ U_k \; k = 1, 2, \dots \right\}$ i dim $U_k \leq n(k) < \infty$. Definišimo sledeće funkcije na skupu pozitivnih cijelih brojeva: $p(k) = \sum_{i=1}^{k} (2n(i) + 2)$, $p(1) = 0$; $r(k) = \max\left\{ j \mid U_j \cap U_k \neq \varnothing \right\}$; $s(k) = p(r(k)+1)$ i $t(k) = \max\left\{ j \mid p(j) < k \right\}$.

Te funkcije zadovoljavaju uslove: (1) za $j < k$ je $p(j) < p(k)$;

(2) za $j < k$ je $t(j) < t(k)$; $t(p(k)) < k \leq t(p(k+1))$ za $k = 1, 2, \dots,$ n i (4) $t(p(k)+j) = k$ za svako $j \leq 2n(k) + 2$.

Za $k = 1, 2, \dots$ postoje neprekidne funkcije $G_k: X \to S((n(k), 1/s(k))$, koje zadovoljavaju uslove I i II prethodne leme, u odnosu na skupove U_k. Za $j = 1, \dots, 2n(k) + 2$ neka je $g_{k,j}$ kompozicija G_k sa j-om projekcijom, tj. za svako $x \in X$ je $G_k(x) = (g_{k,1}(x), \dots, g_{k,2n(k)+2}(x))$. Prema tome kako je odredjena funkcija $g_{k,j}$ ispunjen je uslov: (5) $0 \leq g_{k,j}(x) \leq 1/s(k)$ za $x \in X$ i $k = 1, \dots, 2n(k) + 2$.

Preslikavanje $f: X \to I^\infty$ definisano sa $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ je homeomorfizam, gdje je $f_k = g_{t(k),k-p(t(k))}$ za $k = 1, 2, \dots$ $g_{k,j} = f_{p(k)+j}$, $k = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, 2n(k) + 2$.

Preslikavanje f je neprekidno, jer su neprekidna koordinatna preslikavanja f_i, $i = 1, 2, \dots$

Neka su x i y proizvoljne tačke iz X i $x \in U_k$. Ako $y \in U_k$, tada je $G_k(x) \neq G_k(y)$, jer je G_k homeomorfizam na U_k. Postoji $j \leq 2n(k) + 2$, koje zadovoljava uslove $f_{p(k)+j}(x) = g_{k,j}(x) \neq g_{k,j}(y) = f_{p(k)+j}(y)$ te je $f(x) \neq f(y)$. Dakle, f je jednoznačno preslikavanje.

Može se pokazati da je f otvoreno preslikavanje.

Neka je x proizvoljna tačka iz X i $k_1 < \dots < k_m$ oni indeksi za koje $x \in U_k$. Za koordinatna preslikavanja f_i označimo $t(i)$ sa k a $i - p(k)$ sa j. Tada je $g_{k,j} = f_i$. Ako je $k \neq k_h$ za $h = 1, 2, \dots, m$, tada je $f_i(x) = g_{k,j}(x) = 0$, jer $x \in U_k$ i $G_k(x) = (0, 0, \dots)$ za $x \in X \setminus U_k$. Ako je $k = k_h$ za neko $h \leq m$, tada je
$f_i(x) = g_{k,j}(x) \leq 1/s(k) = 1/p(r(k)+1) = 1/p(k_m + 1)$.

Prema (1) i uslovu $x \in U_k \cap U_{k_m}$ biće $k_m \leq r(k)$. Postoji tako najmanje k da $x \in U_k$, a prema lemi 13. postoji tako j da je $f_{p(k)+j}(x) = g_{k,j}(x) \neq 0$, pa je $f(x) \neq q$. Dakle, $f(x) \in J_{p(k+1)} \setminus \{q\}$ i kako je x proizvpljno izabrana tačka prostora X, to je

$$f(X) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (J_n \setminus \{q\}) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n) \setminus \{q\} = J^*.$$

Primijetimo da J nije homeomorfno sa podskupom Hilbertova kuba, čije tačke imaju konačan broj koordinata različitih od nule. J je kompaktan a J^* njegov otvoren podskup, pa postoji kompletna metrika u J^*. Sada možemo zaključiti lokalno konačnodimenzionalni separabilni prostor ima lokalno konačnodimenzionalnu kompletizaciju.

1.15. P r o b l e m. Da li postoji univerzalni prostor za proizvoljni prostor koji je lokalno konačnodimenzionalan i $\omega(X) \leq \tau$?

Pitanje nije riješeno, no najvjerovatnije za jako metrizabilne prostore da je to $J^* \times B(\tau)$, gdje je $B(\tau)$ Berov prostor.

2. K o m p a k t i f i k a c i j a p r o s t o r a k l a s a $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_f$.

U ovom dijelu se karakteriše kompaktifikacija prostora klasa $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_f$.

2.1. L e m a ([7]). Neka je X proizvoljni prostor i Y njegov podprostor klase $\mathcal{K}_f$. Za svaki zatvoreni skup F i otvoreni skup G u X i $F \subset G \subset X$ postoji otvoreni skup U u X i to takav da je $F \subset U \subset \bar{U} \subset G$ i $\dim (Bd\ U \cap Y) < \infty$.

D o k a z. Neka su F i G respektivno otvoreni i zatvoreni skup u X. Pretpostavimo da su skupovi $F \cap Y$ i $G \cap Y$ neprazni. Kako je prostor X normalan, postoje takvi otvoreni skupovi A i B da je $F \subset A \subset \bar{A} \subset B \subset \bar{B} \subset G$. Skup $\bar{A} \cap Y$ je zatvoren, a skup $B \cap Y$ otvoren u Y. No kako je Y klase $\mathcal{K}_f$, postoji u Y takav otvoren skup C da je

$$\bar{A} \cap Y \subset C \subset \bar{C} \subset Y \cap B \text{ i } \dim Bd_Y C < \infty .$$

Ako je $D = F \cup C$ i $E = Y \setminus \bar{C}$, onda je $\bar{D} = F \cup \bar{C}$ i $\bar{D} \cap E = \emptyset$. Pošto je $Y \setminus C \subset X \setminus A$, $X \setminus A$ zatvoreno u X i $F \subset A$, onda je $F \cap E = \emptyset$.

Takodje, iz $E \subset Y \setminus C$ i kako je $Y \setminus C$ zatvoreno u Y, važiće uslov $E \cap Y \subset Y \setminus C$, a tada i $C \cap E = \emptyset$. Prema prethodnim inkluzijama biće $D \cap E = \emptyset$. Kako je metrički prostor kompletno normalan, postoji u X takav otvoreni skup W da je $D \subset W$ i $W \cap E = \emptyset$ i neka je $U = B \cap W$. Skup U je otvoren u X i $F \subset U \subset \bar{U} \subset G$. Pošto je $\bar{U} \subset W$, to je $\bar{U} \cap E = \emptyset$ i $U \cap Y = C$ i pošto je $C \subset U$, biće $\bar{U} \cap Y = \bar{C} \cap Y$. Iz odredjenosti skupova U i C važe jednakosti

$$\mathrm{Bd}\,(U) \cap Y = \bar{U} \cap Y \setminus U = \bar{C} \cap Y \setminus U \subset \bar{C} \cap Y \setminus C = \mathrm{Bd}_Y C,$$

i prema monotonosti funkcije dim X, $\dim \mathrm{Bd}\, U \cap Y \leq \dim \mathrm{Bd}_Y C < \infty$.

2.2. T e o r e m a ([7]). Ako je X prostor klase $\mathcal{K}_f$, onda svaka kompaktifikacija αX sa n-dimenzionalnim deficitom, za svaki prirodan broj n, je prostor klase $\mathcal{K}_f$.

D o k a z. Neka je X prostor klase $\mathcal{K}_f$ i αX kompaktifikacija prostora X sa n-dimenzionalnim deficitom, $\dim(\alpha X \setminus X) \leq n < \infty$. Neka su F i G respektivno otvoreni i zatvoreni skupovi prostora X. Kako je X prostor klase $\mathcal{K}_f$ i $X \subset \alpha X$ prema lemi 2, postoji takav otvoreni skup U u αX da je $\dim \mathrm{Bd}\, U \cap X \leq n_1 < \infty$. Kako je $\mathrm{Bd}\, U = (\mathrm{Bd}\, U \cap X) \cup (\mathrm{Bd}\, U \cap (\alpha X \setminus X))$, to je prema nejednakosti Mengera-Urisona i monotonosti dim X, $\dim \mathrm{Bd}\, U = \dim (\mathrm{Bd}\, U \cap X) \cup (\mathrm{Bd}\, U \cap (\alpha X \setminus X)) \leq n + n_1 + 1$. Kako su F i G proizvoljno izabrani skupovi u αX, to prostor αX je prostor klase $\mathcal{K}_f$.

2.3. P r i m j e r. Postoji prostor X klase $\mathcal{K}_f$ čija je kompaktifikacija αX sa beskonačnodimenzionalnim deficitom i αX nije prostor klase $\mathcal{K}_f$.

Hilbertov kub I^∞ je separabilni prostor pa postoji prebrojivi, svuda gusti skup u I^∞ i neka je to X. Kako je prostor X metrički i prebrojiv , to je dim X = 0. A pošto je svuda gust u I^∞, to je I^∞ njegova kompaktifikacija. Dakle, imamo $\alpha X \setminus X = I^\infty \setminus \{x_0, \ldots ,$

$x_n,\dots\}$ te je dim $(\alpha X \setminus X) = \infty$ i prostor αX nije klase $\mathcal{K}_f$, jer dvije suprotne strane Hilbertova kuba ne možemo separirati konačnodimenzionalnom pregradom.

2.4. T e o r e m a ([7]). Prostor X klase $\mathcal{K}_f$ ima kompaktifikaciju Čeha sa n-dimenzionalnim deficitom ako i samo ako ima reprezentaciju $X = P \cup C$, gdje je P n-dimenzionalni podprostor a C kompakt.

D o k a z. Ako je X prostor klase $\mathcal{K}_f$, onda ima reprezentaciju $X = C \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)$, gdje je $X_n = \{U \mid \dim U \leq n\}$, a C kompakt. Pretpostavimo da je $X_i = \emptyset$ za $i > n$.

Pretpostavimo da deficit kompaktifikacije βX sadrži $(n+1)$-dimenzionalni kompakt F, tj. neka je $F \subset \beta X \setminus X$ i $\dim F \geq n+1$. Kako je F podskup deficita a C kompakt prostora X, to je $F \cap C = \emptyset$. Kako je βX normalan prostor, postoji takav otvoreni skup V u βX da je $F \subset V \subset \beta X[V] \subset X \setminus C$. Neka je $H = \beta X[V] \cap X$. Kako je H gusto u $\beta X[H]$ biće $\beta H = \beta X[H]$, takodje prema gustini skupa u njegovoj kompaktifikaciji biće $\beta X[H] = \beta X[X[V]] \supset \beta[X \cap V] = \beta X[V] \supset F$. Kako je H podskup normalnog prostora X_n prema teoremi Volmana (I, 1.34.), biće $\dim \beta H \leq n$. Prema prethodnim inkluzijama i monotonosti funkcije dim X $\dim F \leq n$, što je suprotno pretpostavci $\dim F \geq n+1$.

Ako je deficit kompaktifikacije Čeha βX prostora X n-dimenzionalan i ako je $C = \{x \in X \mid \operatorname{loc} \dim_x X \geq n+1\}$ a $P = X \setminus C$, onda iz parakompaktnosti prostora X je $\dim P \leq n$. Kompaktnost skupa C proizilazi iz sledeće leme:

2.5. L e m a (Skljarenko, [62]). Neka je X normalni prostor i X_n skup takvih tačaka u X da je $\operatorname{loc} \dim_x X \geq n$. Ako X_n nije kompaktan skup, tada deficit u kompaktifikaciji Čeha sadrži kompakt dimenzije $\geq n$.

D o k a z. Prema pretpostavci X_n nije kompakt, pa postoji diskretni niz tačaka u X_n, $\{x_k\}$ i neka je $\{O_{x_k}\}$ diskretni sistem okolina (1.3.). Označimo sa: $F_k = \bar{O}_k$, $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, $\Phi_k = \beta X[F_k]$ i $\Phi = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k$.

Iz uslova dim $F_k \geq n$, postoji takvih n ograničenih funkcija $f_{k,i}$, $i = 1, 2, \ldots , n$ da ne postoji drugih n funkcija $g_{k,i}$, $i = 1, \ldots , n$ na F_k koje zadovoljavaju uslove: $|f_{k,i} - g_{k,i}| < 1$ i $\bigcap_{i=1}^{n} g_{k,i}^{-1}(0) = \emptyset$ (v. [29] str. 220). Neka su f_i takve funkcije na F, da je $f_i/F_k = f_{k,i}$. Kako je F zatvoren skup u normalnom prostoru X, f_i možemo produžiti u funkcije na X, a zati na kompaktifikaciju βX toga prostora u funkcije φ_i. Kako je Φ lokalno kompaktni skup, skup $B = \beta X[\Phi] \setminus \Phi$ je sadržan u deficitu $\beta X \setminus X$. Pokažimo da je dim $B \geq n$. Dovoljno je pokazati da je za proizvoljne funkcije h_i definisane na B, koje zadovoljavaju uslov $|\varphi_i - g_i| < 1$ za svako $x \in B$ skup $\bigcap_{i=1}^{n} h_i^{-1}(0)$ neprazan (Levšenko, [29]) - Funkcije h_i imaju takvu ekstenziju g_i na βX da je $|\varphi_i - g_i| < 1$ za svako $x \in X$. Prema odredjenosti funkcija $f_{k,i}$ za svako k skup $C_k = F_k \cap (\bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(0)) \neq \emptyset$. Na osnovu toga skup $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ nije kompaktan skup, pa je $\beta X[C] \cap B \neq \emptyset$. Jasno, da je taj skup podskup skupa $\bigcap_{i=1}^{n} h_i^{-1}(0)$ (v. [62]).

2.6. T e o r e m a ([7]). <u>Svaka kompaktifikacija αX sa nuldimenzionalnim deficitom prostora X klase $\mathcal{K}$ je prostor klase $\mathcal{K}_f$.</u>

D o k a z. Neka je X prostor klase $\mathcal{K}$ i αX kompaktifikacija sa nuldimenzionalnim deficitom, F i G takvi otvoreni i zatvoreni skupovi u αX da je $F \subset G$. Tada za svako $x \in F$ postoji okolina O'_x i to takva da je $x \in O'_x \subset \bar{O}'_x \subset G$. Za tako izabranu okolinu O'_x postoji okolina O_x tačke x da je $x \in O_x \subset \bar{O}_x \subset O'_x$ i Bd $O_x \cap (\alpha X \setminus X) = \emptyset$. Granica nekog skupa je zatvoren skup u tom prostoru, pa je Bd O_x kompaktan podskup prostora X klase $\mathcal{K}$ i prema 1.11. je konačnodimenzionalan. Sistem skupova $\{O_x | x \in F\}$ je pokrivač kompakta F, pa iz njega možemo izabrati konačni pokrivač $\{O_{x_1}, \dots , O_{x_k}\}$. Skup $O = \bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}$ je otvorena okolina skupa F i $F \subset O = \bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \bar{O}_{x_i} \subset G$. Skupove možemo izabrati da su kanonski [3], pa je $\mathrm{Bd}\, O \subset \mathrm{Bd} \bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}$. Prema konstrukciji skupa O i teoremi sume o zatvorenim skupovima (I, 1.14.) je $\dim \mathrm{Bd}\, O \leq \dim (\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Bd}\, O_{x_i}) = \sup \{ \dim \mathrm{Bd}\, O_{x_i}\} < \infty$.

2.7. P r i m j e r. Postoji prostor X klase $\mathcal{K}$ sa 1-dimenzionalnim deficitom čija kompaktifikacija nije prostor klase $\mathcal{K}_f$.

Neka je $Y = E_1 \times I$, gdje je E_1 prostor iz II, 1.4. a I jedinični interval. Prostor $X = Y \setminus \{\xi\} \times I$ je svuda gust u Y, jer su okoline tačke (ξ, i), i tačka iz I, oblika $(\{\xi\} \cup (\bigcup_{n \geq N} I^n)) \times O_i$, O_i otvoreni interval. Kako je $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$, X je lokalno konačnodimenzionalan. Y je kompaktan kao proizvod dva kompaktna prostora. Kako je X gusto u Y, Y je kompaktifikacija od X. Deficit prostora X je homeomorfan sa I, pa je 1-dimenzionalan. Svaka pregrada izmedju skupova $F_1 = E_1 \times \{0\}$ i $F_2 = E_1 \times \{1\}$ je homeomorfna sa E_1, pa je beskonačnodimenzionalna i prostor Y nije klase $\mathcal{K}_f$.

2.8. P r i m j e r. Postoje prostori X_n klase $\mathcal{K}$ koji imaju kompaktifikaciju sa n-dimenzionalnim deficitom, za svaki prirodan broj n, u klasi $\mathcal{K}_f$. Takodje, postoji prostor X' klase $\mathcal{K}$ koji ima kompaktifikaciju sa beskonačnodimenzionalnim deficitom u klasi $\mathcal{K}_f$.

Neka je $X_1 = I^1 \cup \mathrm{Int}\, I^2 \cup I^3 \cup, \dots$, $X_2 = I^1 \cup I^2 \cup \mathrm{Int}\, I^3 \cup \dots$, $X_n = I^1 \cup I^2 \cup \dots \cup \mathrm{Int}\, I^{n+1} \cup \dots$ Kompaktifikacija prostora X_n, $n = 1, 2, \dots$ je prostor E_1, pa su one klase $\mathcal{K}_f$. Takodje, je $\dim (\alpha X_1 \setminus X_1) = \dim (\{\xi\} \cup S^2) = 1$, $\dim (\alpha X_2 \setminus X_2) = \dim (\{\xi\} \cup S^3) = 2$, $\dots$, $\dim (\alpha X_n \setminus X_n) = \dim (\{\xi\} \cup S^{n+1}) = n$.

Prostor $X' = \mathrm{Int}\, I^1 \cup \mathrm{Int}\, I^2 \cup \dots \cup \mathrm{Int}\, I^n \cup \dots$ je prostor klase $\mathcal{K}$ i jedna njegova kompaktifikacija je prostor E_1. Kako je deficit $\alpha X' \setminus X' = S^0 \cup S^1 \cup \dots \cup S^n \cup \dots$, on je beskonačnodimenzionalan. Na taj način konstruisali smo prostore $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ i prostor X' sa traženim svojstvima.

Shodno prethodnim primjerima nameću se sledeći problemi:

2.9. P r o b l e m. Koji prostori klase $\mathcal{K}$ imaju n-dimenzionalni deficit?

2.10. P r o b l e m. Koji prostori klase $\mathcal{K}$ imaju n-dimenzionalni deficit u klasi $\mathcal{K}_f$.

Prema 1.11. nijedan prostor klase $\mathcal{K}$ nema kompaktifikaciju u klasi $\mathcal{K}$. U tom slučaju interesantno je pitanje: Postoji li klasa prostora u kojoj je bar jedna kompaktifikacija prostora klase $\mathcal{K}$? Za opšti slučaj problem je otvoren, a u separabilnom slučaju postoji rešenje.

2.11. L e m a. Svaki lokalno konačnodimenzionalni prostor je slabo prebrojivodimenzionalan.

D o k a z. Neka je $\{O_x | x \in X\}$ takav bazni pokrivač prostora X da je $\dim O_x < \infty$. Postoji takav lokalno konačni pokrivač $\gamma = \{\Gamma\}$ da je $\bar{\gamma} < \{O_x\}$. Skup $X_i = \bigcup\{\bar{\Gamma} | \Gamma \in \gamma \text{ i } \dim \bar{\Gamma} \leq i\}$, $i = 1, 2, \dots$ je zatvoren kao unija lokalno konačnih zatvorenih skupova [63], a prema teoremi o lokalno konačnim zatvorenim sistemima (I, 1.14.) $\dim X_i \leq i$ za $i = 1, 2, \dots$ Pošto je $\gamma = \{\Gamma\}$ pokrivač prostora X, onda je $\{X_i\}$ zatvoreni konačnodimenzionalni pokrivač prostora X.

Razmatrajući problem kompaktifikacije slabo prebrojivodimenzionalnih prostora Šurli ([58]) je uveo u razmatranje ω_1- slabo prebrojivodimenzionalne prostore.

2.12. D e f i n i c i j a ([58]). Prostor X je ω_1-slabo prebrojivodimenzionalan, ako je $X = \bigcup_{0 \leq \xi < \xi_0} P_\xi$, $\xi_0 < \omega_1$ pri čemu su P_ξ otvoreni podskupovi od $X_\xi = X \setminus \bigcup_{0 \leq \eta < \xi} P_\eta$ i $\dim P_\xi = n_\xi < \infty$.

2.13. T e o r e m a ([58]). Prostor X klase $\mathcal{K}$ koji je separabilan ima bar jednu slabo prebrojivodimenzionalnu kompaktifikaciju.

D o k a z. Ako $X \in \mathcal{K}$, tada je $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$ i $\dim P_i = n_i < \infty$. Prostor X možemo potopiti u kompletni prostor Y. Postoji takav otvoreni skup $K \subset Y$ da je $X \subset K$, $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i^*$, P_i^* otvoreno u $K \setminus \bigcup_{k=0}^{i-1} P_k$ i $X \cap P_i^* = P_i$ [58]. Prema teoremi Tumarkina (I, 1.30.) postoji takav G_δ-skup T_i da je $P_i \subset T_i$ i $\dim T_i = n_i$. Neka je $M_i = P_i^* \cap T_i$. Jasno je da skup M_i zadovoljava uslove: $\dim M_i = n_i$, $M_i \cap X = P_i$ i M_i je G_δ u Y. Takodje, su ispunjeni uslovi: $P_i^* \setminus M_i$ je F_σ-skup i $(P_i^* \setminus M_i) \cap X = \emptyset$. Skup $N = \bigcup_{i=0}^{\infty}(P_i^* \setminus M_i)$ je F_σ u Y i $N \cap X = \emptyset$. Neka je $B = \bigcup_{i=0}^{\infty}(P_i^* \setminus N) = \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i$ i $Q_i = P_i^* \setminus N$. Tada je B G_δ-skup u Y, $X \subset B$, $\dim Q_i = n_i$, pa je B traženi slabo prebrojivodimenzionalni G_δ-skup koji sadrži skup X.

Ako je X separabilni prostor, tada prema teoremi Šurla (I, 2.10.) ima slabo prebrojivodimenzionalnu kompaktifikaciju.

3. Klasifikacija beskonačnodimenzionalnih prostora

Poslednji dio ove glave posvećujemo jednoj klasifikaciji beskonačnodimenzionalnih prostora, $\dim X = \infty$, koja se razlikuje od klasifikacija po Ind X i ind X a zasniva na $\operatorname{loc} \dim_x X$ i "veličini" skupa tačaka beskonačnedimenzionalnosti, X_∞, prostora X(II, 2.3.).

3.1. D e f i n i c i j a (v.[17]). Svaki redni broj α može se predstaviti u obliku $\lambda(\alpha) + n(\alpha)$, gdje je $\lambda(\alpha)$ granični broj manji od α a $n(\alpha)$ prirodan broj.

3.2. D e f i n i c i j a. Neka je φX monotono rastuća, topološki invarijantna funkcija koja svakom metričkom prostoru koordinira redni broj φX. Kazaćemo da je $\operatorname{loc} \varphi_x X \leq \alpha$, ako postoji takva otvorena okolina O_x tačke x da je $\varphi O_x \leq \alpha$ i nema okoline O_x' za koju je $\varphi \cdot O_x' \leq \beta < \alpha$.

Označimo sa $X_\alpha = \{x \in X \mid \mathrm{loc}\,\varphi_x X \leq \alpha\}$.

Neka je $X_n = \{x \in X \mid \mathrm{loc\ dim}_x X \leq n\} = \{U \mid \dim U \leq n$ i U otvoreno u $X\}$, a $X_\infty = X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)$.

3.3. D e f i n i c i j a. Neka prostor X ima reprezentaciju $X = X_\infty \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)$, pri čemu je $\dim X_\infty \leq n$. Prostor X je klase $\mathcal{K}_\alpha$, $\alpha = \omega_0 + n$, ako je α najmanji broj koji ispunjava te uslove.

Kako je $\omega_0 + (-1) = \omega_0$, to u slučaju $X_\infty = \emptyset$ i $\dim X = \infty$ $X \in \mathcal{K}_{\omega_0}$.

3.4. D e f i n i c i j a. $\mathrm{loc\ dim}_x X \leq \omega_0 + n$ ako x ima otvorenu okolinu O_x klase $\mathcal{K}_{\omega_0 + n}$ i nema otvorene okoline klase $\mathcal{K}_{\omega_0+m}$ $m < n$.

Označimo sa $X_{\omega_0+n} = \{x \in X \mid \mathrm{loc\ dim}_x X \leq \omega_0 + n\}$.

Neka je sada $\dim X_\infty = \infty$.

3.5. D e f i n i c i j a. Neka prostor X ima reprezentaciju $X = X_{2\omega_0} \cup (\bigcup \{X_\alpha \mid \alpha < 2\omega_0\})$, gdje je $X_\alpha = \{x \in X \mid \mathrm{loc\ dim}_x X \leq \alpha\}$ za $\alpha < 2\omega_0$, a $X_{2\omega_0} \subset X_\infty$, $X_{2\omega_0} = X \setminus (\bigcup \{X_\alpha \mid \alpha < 2\omega_0\})$ i $\dim X_{2\omega_0} \leq n < \infty$. Prostor X je klase $\mathcal{K}_{2\omega_0+n}$, ako je $2\omega_0 + n$ najmanji broj koji zadovoljava te uslove.

Pretpostavimo da smo odredili klase prostora $\mathcal{K}_\delta$ za svako $\delta < \alpha$. Neka prostor X ima reprezentaciju $X = X_{\lambda(\alpha)} \cup (\bigcup \{X_\beta \mid \beta < \lambda(\alpha)\})$, pri čemu je $X_\beta = \{x \in X \mid \mathrm{loc\ dim}_x X \leq \beta\}$, $X_{\lambda(\alpha)} \subset X_\infty$, $X_{\lambda(\alpha)} = X \setminus (\bigcup \{X_\beta \mid \beta < \lambda(\alpha)\})$ i $\dim X_{\lambda(\alpha)} \leq n(\alpha)$. Tada je prostor X klase $\mathcal{K}_\alpha$, ako je α najmanji broj koji zadovoljava te uslove.

Ako je $X_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$, tada je X prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$ i to u slučaju kada je α granični broj.

3.6. L e m a. <u>Ako je X prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$ i Y podprostor prostora X, tada postoji takav broj $\gamma \leq \alpha$ da je Y prostor klase $\mathcal{K}_\gamma$.</u>

D o k a z. Ako je α konačan broj, dokaz je poznat (I, 1.6. i 1.13.). Neka je Y otvoren podprostor u X. Pretpostavimo da tvrdjenje leme važi za $\delta < \alpha$ i pokažimo da važi za $\delta = \alpha$, $\alpha = \lambda(\alpha) + n(\alpha)$.

Pošto $X \in \mathcal{K}_\alpha$, X ima reprezentaciju $X = X_{\lambda(\alpha)} \bigcup (\bigcup \{X_\beta \mid \beta < \lambda(\alpha)\})$. Prostor Y ima tada reprezentaciju

$$Y = (X_{\lambda(\alpha)} \cap Y) \bigcup (\bigcup \{ X_\beta \cap Y \mid \beta < \lambda(\alpha)\}). \qquad (*)$$

Prema pretpostavci $X_\beta \cap Y$ je podskup klase $\mathcal{K}_\gamma$, $\gamma \leq \beta$ za svako $\beta < \lambda(\alpha)$ a prema monotonosti dim X, biće dim $(X_{\lambda(\alpha)} \cap Y) \leq n(\alpha)$. Označimo sa $Y_\nu = \{ y \in Y \mid \mathrm{loc}\ \dim_y Y \leq \nu \}$. Ako $y \in X_\beta$, tada prema definiciji 2. i induktivnoj pretpostavci loc $\dim_y Y \leq$ loc $\dim_y X \leq \beta$. Neka je λ takav minimalni granični broj (uključujući i 0) da je $Y_\lambda = Y \setminus (\bigcup \{ Y_\nu \mid \nu < \lambda \})$ konačnodimenzionalan skup. Prema jednakosti (*) i nejednakosti loc $\dim_y Y \leq$ loc $\dim_y X$ tako λ postoji i $\lambda \leq \lambda(\alpha)$. Ako je k takav minimalni broj da je dim $Y_\lambda \leq k$, tada je $Y \in \mathcal{K}_\gamma$, gdje je $\gamma = \lambda + k$. Kada je $\lambda = \lambda(\alpha)$, tada je $Y_\lambda \subset X_{\lambda(\alpha)}$ pa je dim $Y_\lambda \leq$ dim $X_{\lambda(\alpha)}$ i $\lambda + k \leq \alpha$. Prema dokazanome Y je prostor klase $\mathcal{K}_\gamma$, gdje je $\gamma \leq \alpha$.

Slično se dokazuje lema kada je Y zatvoreni podprostor u X.

3.7. T e o r e m a. <u>Ako je $\{X_\gamma \mid \gamma \in C\}$ zatvoreni lokalno konačni pokrivač prostora X, pri čemu su X_γ prostori klase $\mathcal{K}_\alpha$, tada je X prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$.</u>

D o k a z. Ako je α konačan broj, dokaz je poznat (I, 1.14.). Za $\alpha = \omega_0$ dokaz se izvodi slično dokazu odgovarajućeg dijela teorema II, 1.3. i 2.10. Pretpostavimo da teorema važi za svako $\delta < \alpha$ i pokažimo da važi za $\delta = \alpha$.

Ako $X \in \mathcal{K}_\alpha$, tada on ima reprezentaciju $X_\gamma = X^\gamma_{\lambda(\alpha)} \bigcup (\bigcup \{ X^\gamma_\beta \mid X^\gamma_\beta \in \mathcal{K}_\beta, \ \beta < \lambda(\alpha) \})$. za svako $\gamma \in C$. Ne umanjujući opštost, pretposta-

...imo da prostori X_γ ne pripadaju klasama $\mathcal{K}_\eta$, $\eta < \lambda(\alpha)$. Ako je x proizvoljna tačka prostora X, tada postoji takva okolina O_x tačke x da je $O_x \cap X_{\gamma_i} \neq \emptyset$ samo za konačan broj indeksa $\gamma_i \in \{\gamma_1, \dots, _k\}$. Pretpostavimo da $x \notin X^{\gamma_i}_{\lambda(\alpha)}$. Tada postoji otvorena okolina minimalne klase V_i tačke x u X_{γ_i} za svako $i \in \{1, \dots, k\}$. Skupovi $F_i = X_{\gamma_i} \setminus V_i$ su zatvoreni u X. Kako je unija lokalno konačne familije zatvorenih skupova zatvoren skup, to je zatvoren i skup $\Phi = (\bigcup_{i=1}^{k} F_i) \cup (\bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}\})$, pa je $X \setminus \Phi$ okolina tačke x. Kako je X regularan prostor, postoji takva otvorena okolina tačke x da je $x \in O_x \subset \bar{O}_x \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i$. Kako je V_i klase $\mathcal{K}_{\eta_i}$ i $\eta_i \leq \lambda(\alpha)$, to je prema induktivnoj pretpostavci $\bigcup_{i=1}^{k} V_i$ klase $\mathcal{K}_\eta$, $\eta = \max\{\eta_i\}$ i $\eta < \lambda(\alpha)$, pa je prema lemi 3. i induktivnoj pretpostavci O_x skup klase $\mathcal{K}_\eta$. Na taj način svaka tačka prostora X, koja ne pripada $X^\gamma_{\lambda(\alpha)}$ za neko $\gamma \in C$, ima okolinu klase $< \lambda(\alpha)$. Prema monotonosti po proizvoljnim skupovima (lema 6.), ako neka tačka pripada nekom od skupova $X^\gamma_{\lambda(\alpha)}$, onda je ona tačka skupa $X_{\lambda(\alpha)}$.

Prostor X je nasledno parakompaktan pa u pokrivač $\{O_x \mid x \in X \setminus X_{\lambda(\alpha)}\}$ podprostora $X \setminus X_{\lambda(\alpha)}$ možemo upisati lokalno konačni pokrivač $\omega = \{W\}$. Prema lemi 6. svaki elemenat W pokrivača ω je klase $\mathcal{K}_\beta$, $\beta < \lambda(\alpha)$. Označimo sa $X_\beta = \bigcup\{W \mid W \in \mathcal{K}_\beta\}$, tada je X_β otvoreni podskup klase $\mathcal{K}_\beta$, $\beta < \lambda(\alpha)$. Kako je $X_{\lambda(\alpha)} = \bigcup\{X^\gamma_{\lambda(\alpha)} \mid \gamma \in C\}$, prema teoremi o zatvorenim lokalno konačnim sumama, biće $\dim X_{\lambda(\alpha)} \leq n(\alpha)$. Na taj način prostor X ima reprezentaciju $X = X_{\lambda(\alpha)} \cup (\bigcup\{X_\beta \mid X_\beta \in \mathcal{K}_\beta, \ \beta < \lambda(\alpha)\})$, tj. X je prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$.

Prostori klase $\mathcal{K}_\alpha$ ne zadovoljavaju lokalno prebrojivu teoremu sume, jer prostor iz primjera 2.3. možemo smatrati kao prebrojivu uniju konačnodimenzionalnih prostora, tj. oni su prostori klase $\mathcal{K}_n$, $n < \omega_0$ a prostor Y je prostor klase $\mathcal{K}_{\omega_0+1}$, zato što je

$\dim X_\infty = \dim I = 1$.

Ako su α i β redni brojevi, tada pod njihovim zbirom podrazumijevamo takozvani "prirodni zbir" ($\oplus$) (Tulmin, [69]). Primijetimo da je "prirodni zbir" komutativan i da se poklapa sa običnim zbirim za konačne brojeve.

3.8. T e o r e m a. Ako je jedan od prostora X ili Y lokalno konačnodimenzionalan a drugi je klase $\mathcal{K}_\alpha$, α granični broj i $X_{\lambda(\alpha)}$ odnosno $Y_{\lambda(\alpha)}$ prazan skup, tada je $X \times Y$ prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$. U ostalim slučajevima proizvod prostora X klase $\mathcal{K}_\alpha$ i prostora Y klase $\mathcal{K}_\beta$ je prostor $Z = X \times Y$ klase $\mathcal{K}_{\alpha \oplus \beta}$.

D o k a z. Ako su oba prostora konačnodimenzionalna dokaz je poznat(I, 1.28.). Ako su oba prostora klase $\mathcal{K}$, tada prema 1.12. njihov proizvod je klase $\mathcal{K}$, tj. njihov proizvod je prema definiciji 3. klase $\mathcal{K}_{\omega_0}$. Pretpostavimo da je X klase $\mathcal{K}_{\omega_0+k}$ a Y klase $\mathcal{K}_m$, $m < \infty$. Tada prostor X ima reprezentaciju $X = X_{\omega_0} \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)$, a prostor $Z = X \times Y$ možemo tada predstaviti u obliku $Z = (X_{\omega_0} \times Y) \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \times Y))$. Skupovi $X_n \times Y$ su otvoreni u Z i $\dim X_n \times Y \leq n + m$, a $\dim X_{\omega_0} \times Y \leq k + m$. Tada je jasno, da su tačke beskonačnedimenzionalnosti prostora Z tačke skupa $Z = X_{\omega_0} \times Y$. Prema tome Z ima reprezentaciju $Z = Z_{\omega_0} \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n)$, gdje je $Z_n = X_i \times Y$, $i + m = n$ i Z je prostor klase $\mathcal{K}_{\omega_0+n+m}$.

Uzimajući dokazano za polazni korak indukcije, pokažimo da teorema važi u slučaju kada je X prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$ za proizvoljni ordinal α , a Y proizvoljni konačnodimenzionalni prostor. Pošto $X \in \mathcal{K}_\alpha$, onda X ima reprezentaciju $X = X_{\lambda(\alpha)} \bigcup (\bigcup \{X_\beta \mid \beta < \lambda(\alpha)\})$ a proizvod Z prostora X i Y je oblika $Z = (X_{\lambda(\alpha)} \times Y) \bigcup (\bigcup \{X_\beta \times Y \mid \beta < \lambda(\alpha)\})$. Ako je $z = (x,y)$ tačka skupa $\bigcup \{X_\beta \times Y \mid \beta < \lambda(\alpha)\}$, tada ona ima okolinu $O_z = O_x \times Y$, gdje $O_x \in \mathcal{K}_\beta$, $\beta < \lambda(\alpha)$, pa prema induktivnoj pretpostavci $O_z \in \mathcal{K}_{\beta+m}$, pri čemu je $\beta + m < \lambda(\alpha)$ a $\dim Z_\lambda \leq n(\alpha) + m < \infty$. Dakle, prostor Z ima reprezentaciju $Z_{\lambda(\alpha)} \cup (\bigcup\{Z_\beta \mid \beta < \lambda(\alpha)\})$, pa je prostor Z klase $\mathcal{K}_{\alpha+m}$. U slučaju kada je $X_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$, tada je $Z_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$, pa je Z prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$.

Ako $Y \in \mathcal{K}$ i $X_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$, tada okolina O_z svake tačke prostora $Z = X \times Y$ je oblika $X_\beta \times Y_n$ koja je klase $\mathcal{K}_{\beta+n}$, $\beta + n < \lambda(\alpha)$ te je Z prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$.

Pretpostavimo da teorema važi kada je X klase $\mathcal{K}_\mu$, $\mu < \alpha$ i Y klase $\mathcal{K}_\nu$, $\nu < \gamma$. Dokažimo teoremu za $\mu = \alpha$ i $\nu = \gamma$. U tom slučaju X i Y imaju reprezentaciju $X = X_{\lambda(\alpha)} \cup (\bigcup\{X_\beta \mid X_\beta \in \mathcal{K}_\beta,\ \beta < \lambda(\alpha)\})$ i $Y = Y_{\lambda(\gamma)} \cup (\bigcup\{Y_\delta \mid Y_\delta \in \mathcal{K}_\delta,\ \delta < \lambda(\gamma)\})$. Prostor Z se može predstaviti u obliku $Z = (X_{\lambda(\alpha)} \times Y_{\lambda(\alpha)}) \cup (\bigcup\{X_{\lambda(\alpha)} \times Y_\delta \mid \delta < \lambda(\gamma)\}) \cup (\bigcup\{X_\beta \times Y_{\lambda(\gamma)} \mid \beta < \lambda(\alpha)\}) \cup (\bigcup\{X_\beta \times Y_\delta \mid \beta < \lambda(\alpha),\ \delta < \lambda(\gamma)\})$. Prema induktivnoj pretpostavci prostor $X_{\lambda(\alpha)} \times Y_\delta$ je klase $\mathcal{K}_{\lambda(\alpha)\oplus\delta}$, a prostor $X_\beta \times Y_{\lambda(\gamma)}$ klase $\mathcal{K}_{\beta\oplus\lambda(\gamma)}$ za svako $\beta < (\alpha)$ i $\delta < \lambda(\gamma)$. Kako svaki broj $\xi < \lambda(\alpha) \oplus \lambda(\gamma)$ ima samo konačan broj rastava[69], imamo konačan broj proizvoda $X_\beta \times Y_\delta$ klase $\mathcal{K}_\xi$ za svako $\xi < \lambda(\alpha) \oplus \lambda(\gamma)$. Unija tih skupova je otvoren skup u Z, a prema teoremi 7. takav skup je klase $\mathcal{K}_\xi$. Kako je $Z_\lambda = X_{\lambda(\alpha)} \times Y_{\lambda(\gamma)}$ i $\dim Z_\lambda \leq n(\alpha) + n(\gamma)$, onda prostor Z ima reprezentaciju $Z = Z_\lambda \cup (\bigcup\{R_\xi \mid R_\xi \in \mathcal{K}_\xi,\ \xi < \lambda(\alpha) \oplus \lambda(\gamma)\})$ i klase je $\mathcal{K}_{\alpha\oplus\gamma}$.

3.9. T e o r e m a. <u>Ako je X prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$, α graničan broj i $X_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$, tada za svako $\beta < \alpha$ postoji tačka x čija je okolina klase $\mathcal{K}_\beta$. Ako je $\alpha = \lambda(\alpha) \oplus n(\alpha)$, $n(\alpha) \geq 0$, postoji tačka $x \in X$ čija je svaka okolina klase $\mathcal{K}_\alpha$.</u>

D o k a z. Neka je α granični broj i $X_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Neka je δ takav broj da svaka tačka x iz X ima okolinu O_x klase $\mathcal{K}_\delta$, $\delta \leq \beta < \alpha$. Kako je prostor X parakompaktan, u pokrivač $\{O_x \mid x \in X\}$ možemo upisati lokalno konačni pokrivač γ, $\gamma = \{\Gamma\}$, a kako je X normalan prostor, možemo pretpostaviti da je u pokrivač $\{O_x \mid x \in X\}$ upisano i zatvaranje pokrivača γ, $\bar{\gamma} = \{\Gamma\}$. Pokrivač $\bar{\gamma}$ je lokalno konačan, zatvoren čiji su elementi klase $\mathcal{K}_\beta$, $\beta < \alpha$ te je prema teoremi 7. X prostor klase $\mathcal{K}_\beta$, što je suprotno pretpostavci. Slično se dokazuje drugi dio teoreme.

3.10. P r i m j e d b a. Prostor E, diskrezna suma kubova, nema dimenziju Ind X, mada je klase $\mathcal{K}_{\omega_0}$, pri čemu je $E_{\omega_0} = \emptyset$. Postoji prostor X_1 klase $\mathcal{K}_{\omega_0+1}$ koji nema dimenziju Ind.

Neka je $X_0 = E_1 \times I \setminus (\mathrm{Int}\ (I \times \{\xi\}))$. Svaka pregrada izmedju skupova $F_1 = E_1 \times \{0\}$ i $F_2 = E_1 \times \{1\}$ homeomorfna je skupu E, pa prostor X_0 nema dimenziju Ind. Neka je $X_1 = E_1 \times I^2 \setminus (\mathrm{Int}\ (I^2 \times \{\xi\}))$. Svaka pregrada izmedju skupova $F_1' = E_1 \times A$ i $F_2' = E_1 \times B$, gdje su A i B suprotne strane kuba $I^2 \times \{\xi\}$ nema dimenziju Ind, jer su homeomorfne prostoru X_0 koji nema dimenziju Ind, mada je klase $\mathcal{K}_{\omega_0+1}$.

Slično se može konstruisati prostor klase $\mathcal{K}_{\omega_0+n+1}$ koji nema dimenziju Ind. Treba konstruisati prostor klase $\mathcal{K}_{\omega_0+n}$ koji nema dimenziju Ind, pa se konstruše prostor klase $\mathcal{K}_{\omega_0+n+1}$ tako da ima dva podskupa izmedju kojih je svaka pregrada homeomorfna prostoru klase $\mathcal{K}_{\omega_0+n}$ i koji nema dimenziju Ind.

3.11. T e o r e m a. <u>Prostor X klase $\mathcal{K}_\alpha$ ima dimenziju Ind X $= \alpha$ ako i samo ako izmedju svaka dva zatvorena skupa F_1 i F_2 u prostoru X postoji S-slabo beskonačnodimenzionalna pregrada klase $\mathcal{K}_\beta, \beta < \alpha$.</u>

D o k a z. Ako je prostor X konačnodimenzionalan, tvrdjenje teoreme slijedi iz jednakosti dim X = Ind X. Pretpostavimo da teorema važi za $\delta < \alpha$ i pokažimo da važi za $\delta = \alpha$. Pošto je X prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$, on ima reprezentaciju $X = X_{\lambda(\alpha)} \cup (\bigcup\{X_\beta \mid \beta < \lambda(\alpha)\})$. Pretpostavimo da postoji Ind X, tada za svaki disjunktni par zatvorenih skupova F_1 i F_2 postoji pregrada C koja ih separira i Ind C $<$ Ind X.

Kako postoji Ind C, C je S-slabo beskonačnodimenzionalno (I, 2.20.). Ako bar jedan od skupova F_1 i F_2 se ne presijeca sa $X_{\lambda(\alpha)}$, tvrdjenje slijedi iz induktivne pretpostavke. Pretpostavimo da je $F_1' = F_1 \cap X_{\lambda(\alpha)} \neq \emptyset$ i $F_2' = F_2 \cap X_{\lambda(\alpha)} \neq \emptyset$. Pošto je dim $X_{\lambda(\alpha)} \leq n(\alpha)$, postoji takva pregrada C' izmedju skupova F_1' i F_2' da je dim $C' \leq n(\alpha) - 1$. Kako je X nasledno normalan, pregradu C' možemo produžiti u pregradu C u prostoru X izmedju skupova F_1 i F_2. Prema lemi 6. skup $X_\beta \cap C$ je prostor klase $\mathcal{K}_\beta$ za svako $\beta < \lambda(\alpha)$. Tada C ima reprezentaciju $C = C' \cup (\bigcup \{C_\beta \mid C_\beta \in \mathcal{K}_\beta,\ \beta < \lambda(\alpha)\})$ i pri tome je dim $C' \leq n(\alpha) - 1$ a $C_\beta \in \mathcal{K}_\beta$, pa je C skup klase $\mathcal{K}_\delta$, $\delta < \alpha$.

Neka izmedju svaka dva zatvorena skupa F_1 i F_2 prostor X postoji S-slabo beskonačnodimenzionalna pregrada klase $\mathcal{K}_\delta$, $\delta < \alpha$. Za konačne brojeve teorema je poznata. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $\delta < \alpha$ i pokažimo da važi za $\delta = \alpha$. Ako izmedju svaka dva zatvorena disjunktna skupa postoji S-slabo bekonačnodimenzionalna pregrada, tada ona ima dimenziju Ind i važi nejednakost Ind C < Ind X.

Predložena klasifikacija se razlikuje od klasifikacije po ind X i u konačnodimenzionalnom slučaju. Postoji prostor X i to takav da je ind X = 0 < dim X = 1 (Roj, [54]). Prostor $\mathcal{E}$ Smirnova ne pripada ni jednoj klasi $\mathcal{K}_\alpha$, jer svaka okolina svake tačke je beskonačnodimenzionalna. Mada je ind $\mathcal{E} = \omega_0$.

Prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$ ne mora imati kompaktifikaciju u istoj klasi. Tako kompaktifikacija prostora X_0 (primjedba 10.) klase $\mathcal{K}_{\omega_0}$ je prostor $E_1 \times I$ klase $\mathcal{K}_{\omega_0+1}$.

3.12. D e f i n i c i j a (Zarelua, [74]). <u>Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je razbijajuće, ako svaka tačka x prostora X ima takvu okolinu O_x da postoji oklina O_y tačke $y = f(x)$ i $f^{-1}(O_y)$ je unija dva disjunktna skupa G i H, pri čemu je $x \in G \subset O_x$.</u>

3.13. Za svaki ordinal α, $0 \leq \alpha < \Omega$, mogu se konstruisati kompaktni prostori J^{α} sa kompaktnim podskupovima T^{α} i tačkama p^{α}, $p^{\alpha} \in T^{\alpha}$. Neka je $J^0 = p^0 = T^0$ (tačka). Ako je α konačan ordinal tada je J^{α} α-dimenzionalni kub, T^{α} $(\alpha-1)$-dimenzionalna sfera koja je kombinatorna granica od J^{α}, a p^{α} je elemenat od T^{α}. Ako α nije granični ordinal, tada definišimo

$$J^{\alpha} = J^{\alpha-1} \times J^1,\ T^{\alpha} = (T^{\alpha-1} \times J^1) \cup (J^{\alpha-1} \times T^1) \text{ i } p^{\alpha} = p^{\alpha-1} \times p^1.$$

Ako je α granični ordinal, tada neka je K^{β}, za $\beta < \alpha$, unija J^{β} i poluotvorenih lukova A^{β}, pri čemu je $A^{\beta} \cap J^{\beta} = p^{\beta}$. J^{α} je Aleksandrovska kompaktifikacija disjunktnih unija $\bigcup_{\beta<\alpha} K^{\beta}$, $T^{\alpha} = J^{\alpha} - \bigcup_{\beta<\alpha} (J^{\beta} \setminus T^{\beta})$ a p^{α} je kompaktifikacioni elemenat (Henderson, [19]).

Nije teško primijetiti da je J^{α} prostor klase $\mathcal{K}_{\alpha}$.

U skladu sa prethodnom definicijom i prostorima klase $\mathcal{K}_{\alpha}$, kao i rezultatima Zarelue ([74]) nameću se sledeći problemi:

3.14. P r o b l e m. <u>Da li prostor $X \in \mathcal{K}_{\alpha}$ ima kompaktifikaciju u klasi $\mathcal{K}_{\alpha}$, ako postoji razbijajuće preslikavanje prostora X na kompakt J^{α}?</u>

3.15. P r o b l e m. <u>Koji prostori klase $\mathcal{K}_{\alpha}$ imaju n-dimenzionalni deficit?</u>

G L A V A IV

PRESLIKAVANJA NEKIH KLASA BESKONAČNODIMENZIONALNIH PROSTORA

Beskonačnodimenzionalni prostori čuvaju svoje osobine pri nekim preslikavanjima. U prvom dijelu ćemo pokazati kada je slika ili inverzna slika lokalno konačnodimenzionalnog prostora, pri nekim preslikavanjima lokalno konačnodimenzionalan prostor, a u drugom ćemo posmatrati ponašanje nekih drugih klasa beskonačnodimenzionalnih prostora.

1. Preslikavanja lokalno konačnodimenzionalnih prostora

1.1. T e o r e m a ([7]). Neka je $f\colon X \to Y$ zatvoreno preslikavanje na prostor Y klase $\mathcal{K}$ i $\dim f \leq m$, za svaki prirodan broj m. Tada je X prostor klase $\mathcal{K}$.

D o k a z. Neka je x proizvoljna tačka prostora X i $y \in Y$ i to takva da je $f(x) = y$. Prostor Y ima bazu $\mathcal{B}$ čiji su elementi konačnodimenzionalni skupovi (III, 1.11.). Neka je B takav elemenat baze $\mathcal{B}$ da je $y \in B$ i $\dim B \leq n < \infty$. Kako je preslikavanje f neprekidno, postoji takva okolina U tačke x da je $f(\bar{U}) = f(\bar{U}) \subset B$. Preslikavanje $\varphi = f/\bar{U}$ je zatvoreno i $\dim \varphi \leq \dim f$, jer je $\varphi^{-1}(y) \subset f^{-1}(y)$ pošto je $f^{-1}(f(\bar{U})) \supset \bar{U}$ i $\dim X$ monotona funkcija. Koristeći teoremu Morite (I, 1.48.), može se zaključiti da je $\dim \bar{U} \leq \dim \bar{B} + \dim \varphi \leq m + n < \infty$. Pošto je x proizvoljna tačka prostora X i ima konačnodimenzionalnu okolinu, X je prostor klase $\mathcal{K}$.

1.2. T e o r e m a ([7]). Neka je $f: X \to Y$ zatvoreno preslikavanje prostora klase $\mathcal{K}$ i ord $f \leq k + 1$, za svaki prirodan broj k. Tada je Y prostor klase $\mathcal{K}$.

D o k a z. Neka je y proizvoljna tačka prostora Y i ord $f \leq k + 1$. Pretpostavimo da je $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots , x_{k+1}\}$. Skup $f^{-1}(y)$ je diskretan, pa postoji sistem baznih okolina $\{B_i | i = 1, \dots ,k+1\}$ i to talvih da je $B_i \cap B_j = \emptyset$ i dim $B_i \leq n_i$, $i = 1, \dots , k + 1$. Skup $U = Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i)$ je otvorena okolina tačke y. Pokažimo da je konačnodimenzionalna. Neka je φ restrikcija preslikavanja f na skupu $F = f^{-1}(U) \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i)$. Jasno je da se restrikcijom red preslikavanja ne povećava i da je φ zatvoreno preslikavanje, jer je restrikcija na zatvorenom skupu. Prema kazanome φ je zatvoreno preslikavanje skupa F na skup U i ord $\varphi \leq$ ord $f \leq k + 1$. Sada se nalazimo u uslovima teoreme Morite (I, 1.50.), pa je prema njoj dim $U \leq$ dim $F + k$. Pošto je dim $F = \max\{\dim B_i | i = 1, \dots , k+1\} = \max\{n_i\}$, onda je dim $U < \infty$.

Teoreme 1.1. i 1.2. važe i u slučajevima kada prostori X i Y nijesu samo metrički. Tako naprimjer 1.1. važi u slučaju da je Y normalan prostor a 1.2. ako je X normalan prostor.

1.3. T e o r e m a ([7]). Ako je $\{X_i, f_j^i\}$ prebrojivi spektar prostora klase $\mathcal{K}$ i to takav da su preslikavanja $\{f_i^j | i \leq j, i = 1, 2, \dots\}$ zatvorena i nuldimenzionalna, tada je inverzni limes X prostor klase $\mathcal{K}$.

D o k a z. Kako su X_i, $i = 1, 2, \dots$ metrički prostori, metrički prostor je i $X = \text{inv lim} \{X_i, f_j^i\}$ (I, 1.43.). Pokažimo da svaka tačka $x = (x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ ima konačnodimenzionalnu okolinu.

Neka je x_i i-ta koordinata tačke x. Kako je X_i prostor klase $\mathcal{K}$, postoji konačnodimenzionalna zatvorena okolina F_i tačke x_i,

$\dim F_i \leq n < \infty$. Za svako $j > i$ neka je $F_j = (f_i^j)^{-1}(F_i)$ i neka je $\varphi_j^i = f_i^j/F_i$ – Preslikavanja φ_i^j su zatvorena kao restrikcija zatvorenih preslikavanja na zatvorenim skupovima. Kako je $f_i^j((f_i^j)^{-1})(F_i) = F_i$, preslikavanja φ_i^j su nuldimenzionalna. Pri zatvorenim i nuldimenzionalnim preslikavanjima dim X se ne smanjuje [45], pa je $\dim F_i \leq \dim F_j$ za svako $j > i$. Neka je $F = \text{inv lim}\left\{F_i, \varphi_i^j\right\}$. Tada je F konačnodimenzionalna okolina tačke $x = (x_i)$ (I, 1,45.).

1.4. D e f i n i c i j a ([8]). Preslikavanje $f: X \to Y$ nazivamo lokalno k-dimenzionalnim, $\text{loc dim } f \leq k$, ako je k takav minimalni broj da za svaku tačku y prostora Y postoji otvorena okolina O_y pri čemu je $\dim f^{-1}(O_y) \leq k$. Preslikavanje $f: X \to Y$ je lokalno konačnodimenzionalno, ako svaka tačka y prostora Y ima takvu otvorenu okolinu O_y da je $\dim f^{-1}(O_y) < \infty$, $\text{loc dim } f < \infty$.

1.5. T e o r e m a ([8]). Inverzna slika svakog prostora, pri lokalno konačnodimenzionalnom preslikavanju je prostor klase $\mathcal{X}$.

D o k a z. Neka je $f: X \to Y$ lokalno konačnodimenzionalno preslikavanje na prostor Y. Neka je, dalje, x proizvoljna tačka u X i $y \in Y$ i to taka da je $f(x) = y$. Pošto je f lokalno konačnodimenzionalno, postoji otvorena okolina O_y i broj $n < \infty$ tačke y tako da je $\dim f^{-1}(O_y) \leq n$. Pošto je f preslikavenje, postoji takva okolina O_x tačke x da je $f(O_x) \subset O_y$. Kako za svako preslikavanje f važi inkluzija $O_x \subset f^{-1}(f(O_x))$, biće $O_x \subset f^{-1}(O_y)$. Prema monotonosti dim X po proizvoljnim skupovima i prethodnim inkluzijama, biće $\dim O_x \leq \dim f^{-1}(O_y) \leq n < \infty$, pa svaka tačka u X ima konačnodimenzionalnu okolinu.

1.6. T e o r e m a ([8]). Prostor X ima dimenziju $\leq n$, $\dim X \leq n$, ako i samo ako svako preslikavanje prostora X na proizvoljni prostor Y ispunjava uslov $\text{loc dim } f \leq n$.

D o k a z. Neka je $\dim X \leq n$. Ako je $f\colon X \to Y$ preslikavanje, tada je $f^{-1}(Y) = X$. Kako je Y okolina svake svoje tačke i $\dim f^{-1}(Y) = \dim X$, to je $\operatorname{loc} \dim f \leq n$.

Ako je $\operatorname{loc} \dim f \leq n$, tada svaka tačka y prostora Y ima otvorenu okolinu O_y pri čemu je $\dim f^{-1}(O_y) \leq n$. Kako je f preslikavanje, sistem otvorenih skupova $\alpha = \{f^{-1}(O_y) \mid y \in Y\}$ je otvoreni pokrivač prostora X pa u njega možemo upisati lokalno konačni otvoreni pokrivač $\gamma = \{\Gamma\}$ i smatrati da je zatvaranje toga pokrivača upisano u isti pokrivač. Prema teoremi sume (I, 1.13.), biće $\dim X \leq n$.

1.7. L e m a ([8]). <u>Neka je $f\colon X \to Y$ lokalno konačnodimenzionalno zatvoreno preslikavanje. Ako je bar jedan od prostora kompaktan, tada je X konačnodimenzionalan prostor</u>.

D o k a z. Neka je X kompaktan prostor. Svaka tačka y iz Y ima otvorenu okolinu O_y i to takvu da je $\dim f^{-1}(O_y) < \infty$. Ako je $f(x) = y$, tada x ima okolinu O_x, pri čemu je $f(O_x) \subset O_y$. Iz pokrivača $\{O_x \mid x \in X\}$ možemo izvući konačni podpokrivač $\{O_{x_i} \mid i = 1, \ldots, k\}$, pa je prema nejednakosti Mengera-Urisona $\dim X \leq \dim (\bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}) \leq \dim O_{x_1} + \ldots + \dim O_{x_k} + k - 1 < \infty$. Slično se dokazuje slučaj kada je Y kompaktan prostor gdje se koristi kompaktnost slike i zatvorenost preslikavanja f.

Primijetimo sledeće: Neka je M proizvoljni podskup prostora X i $f\colon X \to Y$ preslikavanje. Ako je $\operatorname{loc} \dim f \leq 0$, tada je $\operatorname{loc} \dim f/M \leq 0$. Ako je y elemenat skupa $f(M)$ onda postoji okolina O_y u Y i to takva da je $\dim f^{-1}(O_y) \leq 0$. Kako je $f^{-1}(O_y) \cap M \subset f^{-1}(O_y)$ to je i $\dim f^{-1}(O_y) \cap M \leq 0$. Pošto to važi za proizvoljnu tačku iz $f(M)$, onda je tvrdjenje dokazano.

1.8. T e o r e m a ([8]). <u>Ako je $f\colon X \to Y$ preslikavanje na i $\operatorname{loc} \dim f \leq 0$, tada je $\dim X \leq \dim Y$</u>.

D o k a z. Neka je sada dim $Y \leq 0$. Svaka tačka y iz Y ima okolinu O_y i to takvu da je dim $f^{-1}(O_y) \leq 0$. Kako je dim $Y \leq 0$, u pokrivač $\{O_y | y \in Y\}$ možemo upisati pokrivač $\gamma = \{\Gamma\}$ i ord$\gamma = 1$. Sistem skupova $\{f^{-1}(\gamma)\}$ je par po par disjunktan, a svaki od tih skupova je nuldimenzionalan, pa se može razbiti na medjusobno disjunktne skupove proizvoljno malog dijametra. Znači da je prema I, 1.28. dim $X \leq 0$.

Neka je dim $Y \leq n$. Tada se Y može predstaviti u obliku $Y = \bigcup_{i=0}^{n} Y_i$, gdje je dim $Y_i \leq 0$, i = 0, ... , n, pa je $X = \bigcup_{i=0}^{n} f^{-1}(Y_i) = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$. Prema prvom dijelu teoreme i prethodnoj primjedbi, biće dim $X_i \leq 0$, a tada je prema nejednakosti Mengara-Urisona dim $X \leq n$.

1.9. P o s l e d i c a(teoreme 8.). <u>Ako je f: X→Y lokalno nuldimenzionalno (ravnomjerno nuldimenzionalno, razbijajuće) preslikavanje gdje je Y prostor klase $\mathcal{K}$, tada je X prostor klase $\mathcal{K}$</u> .

D o k a z. Neka je f: X→Y lokalno nuldimenzionalno preslikavanje na lokalno konačnodimenzionalni prostor Y. Ako je x proizvoljna tačka prostora X, tada prema pretpostavci postoji konačnodimenzionalna okolina O_y tačke y = f(x). Kako je f preslikavanje,postoji takva okolina O_x tačke x da je $f(O_x) \subset O_y$. Prema prethodnoj teoremi i monotonosti funkcije dim X, biće ispunjena nejednakost dim $O_x \leq$ dim $f^{-1}(O_y) \leq$ dim $O_y < \infty$, pa je X prostor klase $\mathcal{K}$.

Slično se dokazuje tvrdjenje, ako je f: X→Y ravnomjerno nuldimenzionalno ili razbijajuće, jer i ta preslikavanja ne povećavaju dimenziju (v. [73] i [24]).

Preslikavanja koja smo do sada razmatrali karakterišu nam prostore klase $\mathcal{K}$ kao sliku prostora klase $\mathcal{K}$ (1.2.) i kao inverznu sliku prostora klase $\mathcal{K}$ (1.1, 1.5. i 1.9.). Da li postoji takva klasa preslikavanja koja preslikava prostor klase $\mathcal{K}$ na prostor klase $\mathcal{K}$, i da je inverzna slika prostora klase $\mathcal{K}$, pri svakom preslikavanju iz te klase prostor klase $\mathcal{K}$?

Neka je sada $f: X \to Y$ preslikavanje na prostor Y. Označimo sa (α) sledeći uslov, koji zadovoljava preslikavanje f:

(α) Ako je $\dim X \leq \dim Y$, tada postoji konačni niz $\{1, \ldots, k\}$ i takav sistem nepraznih skupova Z_{n_i}, $Z_{n_i} \neq \emptyset$ samo za $i \in \{1, \ldots, k\}$, gdje je $Z_i = Y_i \setminus Y_{i-1}$, $Y_{n_i} = \{y \in Y \mid |f^{-1}(y)| \geq n_i\}$, a $\{n_i\}$ konačan niz prirodnih brojeva [16] .

1.10. T e o r e m a ([8]). <u>Svojstvo prostora biti lokalno konačnodimenzionalan zatvoreno je u odnosu na preslikavanja koja su zatvorena, lokalno konačnodimenzionalna i zadovoljavaju uslov (α).</u>

D o k a z. Inverzna slika prostora pri lokalno konačnodimenzionalnom preslikavanju je lokalno konačnodimenzionalan prostor (1.5.). Pokažimo da je slika prostora klase $\mathcal{K}$ pri preslikavanju koje zadovoljava uslov teoreme prostor klase $\mathcal{K}$.

Neka je y proizvoljna tačka prostora Y i O_y takva okolina da je $\dim f^{-1}(O_y) \leq m < \infty$. U slučaju kada je $\dim O_y \leq \dim f^{-1}(O_y)$ za svaku tačku prostora Y, teorema je dokazana. Pretpostavimo da to nije slučaj i neka je y takva tačka da je $\dim O_y > \dim f^{-1}(O_y)$ za svaku okolinu O_y tačke y. Postoji okolina O_y takva da je $\dim f^{-1}(O_y) \leq m < \infty$. Restrikciju $f/f^{-1}(O_y)$ označimo sa h. Preslikavanje $h: f^{-1}(O_y) \to O_y$ je zatvoreno i prema uslovu (α) $Z_{n_i} \subset O_y$ neprazno, samo za konačan niz indeksa $i \in \{1, \ldots, k\}$. Na preslikavanje h možemo primijeniti uopštenu teoremu Frojdentala ([16]) o zatvorenim preslikavanjima koja zadovoljavaju uslov (α), pa je $\dim O_y \leq \dim f^{-1}(O_y) + k-1$, što nam pokazuje da je Y lokalno konačnodimenzionalan prostor.

Razjasnimo odnose izmedju nekih poznatih preslikavanja, sa jedne strane i lokalno k-dimenzionalnih i lokalno konačnodimenzionalnih preslikavanja sa druge strane.

1.11. T e o r e m a. Neka je $f\colon X \to Y$ zatvoreno preslikavanje i $\dim f \leq k$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji takav broj $\delta > 0$ da za svako izabrano y iz Y inverzna slika $f^{-1}(O_{\delta_y})$, sferne okoline O_{δ_y}, ima otvoreni ε-pokrivač reda $\leq k+1$, ako je Y kompakt.

D o k a z. Kako je $\dim f^{-1}(y) \leq k$, taj skup ima $\frac{\varepsilon}{2}$-pokrivač reda $\leq k+1$ koji prema lemi Smirnova (I, 1.14.) možemo produžiti u pkrivač γ_y otvorenog skupa u X istog reda. Ako je Γ_y tijelo toga pokrivača, onda je $\{V_y = Y \setminus f(X \setminus \Gamma_y) \mid y \in Y\}$ otvoreni pokrivač prostora Y iz koga možemo izabrati konačni podpokrivač $\{V_1, \dots, V_k\}$. Neka je δ Lebegov broj pokrivača $\{V_1, \dots, V_k\}$, tada sfere $S_\delta(y)$ su tražene okoline tačaka $y \in Y$.

1.12. T e o r e m a ([8]). Ako je $f\colon X \to Y$ lokalno nuldimenzionalno preslikavanje na kompaktni prostor Y, tada je ono ravnomjerno nuldimenzionalno.

D o k a z. Ako je $f\colon X \to Y$ lokalno nuldimenzionalno preslikavanje, tada svaka tačka $y \in Y$ ima takvu okolinu O_y da je $\dim f^{-1}(O_y) \leq 0$. Iz pokrivača $\{O_y \mid y \in Y\}$ možemo izvući konačni pokrivač $\{O_1, \dots, O_k\}$. Pošto je $\dim f^{-1}(O_i) \leq 0$, $i = 1, \dots, k$, možemo ih razbiti na disjunktne podskupove dijametra manjeg od unaprijed zadatog broja ε. Uzmimo za δ Lebegov broj pokrivača $\{O_1, \dots, O_k\}$. Jasno je da broj δ zadovoljava uslove ravnomjerno nuldimenzionalnog preslikavanja.

1.13. T e o r e m a ([8]). Ako je $f\colon X \to Y$ lokalno nuldimenzionalno preslikavanje, tada je ono i razbijajuće.

D o k a z. Neka je O_x okolina tačke $x \in X$. Postoji taka okolina O_y tačke $y = f(x)$ da je $f^{-1}(O_y)$ dimenzije nula. Ako je O'_x taka okolina tačke x da je $x \in O'_x \subset \bar{O}'_x \subset O_x$ i $f(O'_x) \subset O_y$, tada uzmimo za H =

$f^{-1}(O_y) \setminus O'_x$ i $G = f^{-1}(O_y) \cap O'_x$. Pošto je $\dim f^{-1}(O_y) \leq 0$, skupovi H i G zadovoljavaju uslove razbijajućeg preslikavanja.

Obrnuto tvrdjenje ne važi.

Projekcija hiperbole na jednu od njenih asimptota je razbijajuće preslikavanje, a nije lokalno nuldimenzionalno, šta više ono je lokalno 1-dimenzionalno.

1.14. P r i m j e d b a. Neka je C Kantorov diskontinum na $[0,1]$, a K poznati skup Knastera-Kuratovskog ([26]), $\bar{u}$ projekcija skupa K iz tačke grananja P na skup C. Pošto je $\bar{u}^{-1}(c)$ skup racionalnih ili iracionalnih brojeva na $[0,1]$, to je $\dim \bar{u} = 0$. Okolina svake tačke c iz C je homeomorfna sa C ili sa C bez tačke jednoga kraja, pa je $\operatorname{loc} \dim \bar{u} = 1$. Skup K možemo razložiti na dva podskupa K_1 i K_2, $K_1 \cup K_2 = K$ i $\operatorname{loc} \dim \bar{u}/K_1 = \operatorname{loc} \dim \bar{u}/K_2 = 0$. Preslikavanje $\bar{u}$ nije ravnomjerno nuldimenzionalno niti razbijajuće, jer povećava dimenziju.

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je <u>kompaktno</u>, ako je $f^{-1}(y)$ kompaktan skup za svako y iz Y.

Koristeći lemu III, 1.11. i monotonost funkcije $\dim X$ po proizvoljnim skupovima mogu se pokazati sledeći stavovi:

1.15. S t a v ([8]). <u>Ako je $f\colon X \to Y$ kompaktno preslikavanje prostora klase $\mathcal{K}'$, tada je ono prebrojivodimenzionalno.</u>

1.16. S t a v ([8]). <u>Ako je $f\colon X \to Y$ lokalno konačnodimenzionalno preslikavanje, tada je ono prebrojivodimenzionalno.</u>

Obrnuto tvrdjenje stavu 16. ne važi, ni u klasi kompaktnih prostora.

Neka je $f\colon E_1 \to Y$, gdje je $Y = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ i $\lim y_n = y_0$. Odredimo preslikavanje f na sledeći način: $f(I^n) = y_n$, $n = 1, 2, \dots$ i $f(\xi) = y_0$. Preslikavanje f je prebrojivodimenzionalno, jer je

$f^{-1}(y_n) = I^n$, $n = 1, 2, \dots$ i $f^{-1}(y_o) = \xi$. Kako je svaka okolina O_{y_o} tačke y_o oblika $y_o \cup (\bigcup\{y_n | n \geq N\})$, to je $f^{-1}(O_{y_o}) = f^{-1}(y_o \cup (\bigcup\{y_n | n \geq N\}) = \{\xi\} \cup (\bigcup I^n | n \geq N\})$, to je inverzna slika svake okoline O_{y_o} tačke y_o beskonačnodimenzionalan skup, što je suprotno definiciji lokalno konačnodimenzionalnog preslikavanja.

Kako prebrojivodimenzionalna preslikavanja ne karakterišu lokalno konačnodimenzionalne prostore, tako ni konačnostruka preslikavanja ne karakreišu tu klasu prostora, jer prema Smirnovu i Nagati (I, 2.8.) svaki kompaktni prostor koji ima dimenziju ind X, slika je nuldimenzionalnog prostora. Takav prostor je prebrojivodimenzionalan, pa postoji preslikavanje $f\colon X_o \to \xi$, $\dim X_o = 0$ (I, 2.8.), a ξ nije lokalno konačnodimenzionalan prostor ([66]).

2. Preslikavanja nekih klasa prostora

2.1. D e f i n i c i j a (Henderson, [18]). Ako je α ordinalni broj oblika $\alpha = \lambda(\alpha) + n(\alpha)$, $D(X)$ definišemo kao najmanji ordinalni broj α takav da je $X = \bigcup\{A_\gamma | \gamma \leq \lambda(\alpha)\}$, gdje je:

a) svako A_γ je zatvoreno i konačnodimenzionalno ($\operatorname{Ind} A_\gamma < \infty$),

b) za svako δ $\bigcup\{A_\gamma | \delta \leq \gamma \leq \lambda(\alpha)\}$ je zatvoreno u X,

c) $\lambda(\alpha) \leq \alpha$ i $\operatorname{Ind} A_{\lambda(\alpha)} = n(\alpha)$. Ako je $A_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$, tada definišemo $n(\alpha) = 0$.

d) za svako x iz X postoji najveće γ, tako da $x \in A_\gamma$.

Ako su zadovoljeni uslovi a) - d), kažemo da je $X = \bigcup\{A_\gamma | \gamma \leq \lambda(\alpha)\}$ D-reprezentacija prostora X.

2.2. T e o r e m a ([8]). Neka je $f\colon X \to Y$ zatvoreno, n-dimenzionalno preslikavanje i $D(Y) \leq \alpha$. Tada prostor X ima D-dimen-

<u>ziju i važe jednakosti: $D(X) = D(Y)$, ako je $B_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$ i $D(X) \leq D(Y) + n$, ako je $B_{\lambda(\alpha)} \neq \emptyset$</u>.

D o k a z. Ako je $D(Y) \leq \alpha$, onda ima reprezentaciju $Y = \bigcup\{B_\gamma \mid \gamma \leq \lambda(\alpha)\}$. Neka je $A_\gamma = f^{-1}(B_\gamma)$ za svako γ. Kako je f preslikavanje na, to je $f^{-1}(Y) = X = \bigcup\{f^{-1}(B_\gamma) \mid \gamma \leq \lambda(\alpha)\} = \bigcup\{A_\gamma \mid \gamma \leq \lambda(\alpha)\}$. Pokažimo da je to D(X)-reprezentacija prostora X:

a) Svako A_γ je inverzna slika zatvorenog skupa, pa je i on zatvoren skup. Kako je zatvoreno preslikavanje zatvoreno na inverznoj slici proizvoljnog podskupa od Y, ono je zatvoreno i na A_γ. Dimenzija preslikavanja se ne povećava restrikcijom na neki podskup, pa je restrikcija preslikavanja f na svako A_γ n-dimenzionalno zatvoreno preslikavanje. Na taj način dokaz teoreme smo sveli na teoremu Morite (I, 1.48.), jer imamo preslikavanja $f/A_\gamma : A_\gamma \to B_\gamma$, i kako je $\dim B_\gamma \leq n_\gamma$, to je $\dim A_\gamma \leq n_\gamma + n < \infty$.

b) Kako je skup $\bigcup\{B_\gamma \mid \delta \leq \gamma \leq \lambda(\alpha)\}$ zatvoreno u Y, to je i $\bigcup\{A_\gamma \mid \delta \leq \gamma \leq \lambda(\alpha)\}$ zatvoreno u X kao inverzna slika zatvorenog skupa.

c) Ako je $B_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$, tada je $A_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$. U tom slučaju skupvi A_γ za $\gamma \leq \lambda(\alpha)$ su konačnodimenzionalni, pa je $D(X) = D(Y)$. Prema D(Y)-reprezentaciji $\dim B_{\lambda(\alpha)} \leq n(\alpha)$, pa je prema I, 1.48. $\dim A_{\lambda(\alpha)} \leq n + n(\alpha)$. Jasno je da je uslov d) zadovoljen. Dakle, prema definiciji 1. i dokazanome, biće $D(X) \leq \lambda(\alpha) + n(\alpha) + n$.

Slično se dokazuje i sledeća teorema.

2.3. T e o r e m a (8). <u>Neka je $f: X \to Y$ zatvoreno n-struko preslikavanje na i $D(X) \leq \alpha$. Tada prostor Y ima D-dimenziju i važe nejednakosti: $D(X) = D(Y)$, ako je $A_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$ i $D(Y) = D(X) - k$, ako je $A_{\lambda(\alpha)} \neq \emptyset$</u>.

Primijetimo da je za ove dvije teoreme bitan uslov ograničenosti konačnim brojem.

2.4. T e o r e m a. Neka je $f\colon X \to Y$ zatvoreno k-dimenzionalno preslikavanje na ω_1-slabo beskonačnodimenzionalni prostor Y. Tada je X ω_1-slabo beskonačnodimenzionalan.

D o k a z. Prema III, 2.12. Y ima reprezentaciju $Y = \bigcup_{0 \le \xi < \xi_0} \{B_\xi\}$, gdje B_ξ otvoreni skup u $Y_\xi = Y \setminus \bigcup_{0 \le \eta < \xi} B_\eta$ i $\dim B_\xi \le n_\xi < \infty$.

Neka je $A_\xi = f^{-1}(B_\xi)$ za svako ξ. Kako je f preslikavanje to je $f^{-1}(Y \setminus Y_\xi) = X \setminus f^{-1}(Y_\xi)$, pa je X_ξ zatvoreno i $X_\xi = X \setminus \bigcup_{0 \le \eta < \xi} A_\eta$. Skupovi A_ξ su otvoreni kao inverzna slika otvorenog podskupa u zatvorenom skupu. Restrikcija f/A_ξ ispunjava uslove teoreme Morite, slično kao u dokazu teoreme 2.2, pa prostor X ima ω_1-slabo beskonačnodimenzionalnu reprezentaciju $X = \bigcup \{A_\xi \mid 0 \le \xi < \xi_0 \ , \ \xi_0 < \omega_1\}$.

Može se pokazati teorema slična teoremi 2.3. za klasu ω_1-slabo beskonačnodimenzionalnih prostora.

2.5. T e o r e m a. Neka je $f\colon X \to Y$ zatvoreno k-dimenzionalno preslikavanje na prostor klase $\mathcal{K}_\alpha$. Tada je X prostor klase $\mathcal{K}_{\alpha+k}$, ako je $X_{\lambda(\alpha)} \neq \emptyset$ i prostor iste klase, ako je $X_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$.

2.6. T e o r e m a. Zatvorena k-struka preslikavanja prostor X klase $\mathcal{K}_\alpha$ preslikavaju na prostor Y klase $\mathcal{K}_{\alpha-k-1}$, ako je $X_{\lambda(\alpha)} \neq \emptyset$ i na prostor Y iste klase, ako je $X_{\lambda(\alpha)} = \emptyset$.

2.7. T e o r e m a. Inverzna slika prostora klase $\mathcal{K}_\alpha$ pri lokalno nuldimenzionalnim (ravnomjerno nuldimenzionalnim, razbijajućim) preslikavanjima je prostor klase $\mathcal{K}_\beta$, $\beta \le \alpha$.

L I T E R A T U R A:

[1] Александров П. С., Dimensionstheori, Math. Ann.106,1932,161-238.

[2] Александров П. С., О некоторых старых задачах гомологической теории размерности, Труды международного сим. по топол. и ее прим., Херцег-Нови,1968,38-42.

[3] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности,"Наука", 1973.

[4] Архангельский А.В., О замкнутых отображениях, бикомпактных множеств и одной задачи П. С. Александрова, Матем. сб. 69, 1, 1966, 13-34.

[5] Архангельский А.В., О факторизации отображений по весу и размерности, ДАН СССР 174, 6, 1967, 1243-1246.

[6] Бакович В., Бесконечномерные пространства и аксиоматика П. С. Александрова,Матем. вес.10,Св.4,1973.

[7] Бакович В., О некоторых классах бесконечномерных пространств, Матем. вес. 10,Св.4,1973, 385-390.

[8] Бакович В., Об отображениях локально-конечномерных пространств, Math. Balkanica (u štampi).

[9] Борсук К., Теория ретрактов, "Мир", Москва, 1971.

[10] Brouwer L. E. J., Beweisvder Invarianz der Dimensionenzahl, Math. Ann. 70, 1912, 161-165.

[11] Čech E. Theorie generale de l homologie dans un espace quelconque, Fundam. Math.19,1932,149-183.

[12] Dowker C. H., Mapping theorem for non-compact spaces, Amer. J. Math. 69, 2, 1947, 200-242.

[13] Dowker C. H., Local dimension of normal spaces, Quart. J. Math., ser. 2, 4, 16, 1953, 267-281.

[14] Dowker C. H., Hurewicz W., Dimension of metric spaces, Fundam. Math. 43, 1956, 83-88.

[15] Engelking R. Outlen of General Topology, Nort-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1968.

[16] Freudenthal H., Uber dimensionasethöhende stetige Abbildungen S.-B. Preus. Akad. Wiss. H.5, 1932, 34-38.

[17] Henderson D. W., D-dimension,I. A new transfinite dimension, Pacific J. of Math. 26, 1, 1968, 91-107.

[18] Henderson D. W., An infinite-dimensional compactum with no positive-dimensional compact subsets-a simpler costruction, Amer. J. Math. 89,1,1967, 105-121.

[19] Henderson D. W., A lower bound for transfinite dimension,Fundam. Math. 58, 1968, 167-173.

[20] Hurewicz W., Uber stetinge Bider von Punktmengen, Proc. Acad. Amsterdam, 30, 1927, 163.

[21] Hurewicz W., Uber Abbildungen von endlickdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.34, 1933, 754-765.

[22] Hurewicz W., Normalbereiche und Dimensionstheorie, Math. Ann. 96, 1927, 736-764.

[23] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, ИЛ, 1948.

[24] Катетов М., О размерности несепарабельных пространств, , Чехосл. матем. ж. 2, 4,1952, 333-368

[25] Катетов М., О соотношении между метрической и топологической размерности, Чехос. мат. ж.8,2,1958,163-168.

[26] Куратовский К., Топология, , , "Мир", Москва,1966,1969.

[27] Кузминов В. И., Гомологическая теория размерности, УМН 23,5, 1968, 3-49.

[28] Lebesgue H., Sur la non aplicabilite de deux domaines appartenante deux espaces de n et n+p dimensions, Math. Ann. 70, 1911, 166-168.

[29] Левшенко Б. П., О сильно-бесконечномерных пространств, Вестн. МГУ, сер. матем., 5, 1959, 219-228.

[30] Левшенко Б. П., Пространства трансфинитной размерности, Матем. сб. 67, 2, 1965, 255-266.

[31] Локуциевский О.В., Аксиоматическое определение размерности бикомпактов, ДАН СССР 212, 4, 813-815.

[32] Люксембург Л. А., О бесконечномерных пространствах, имеющих трансфинитную размерность, ДАН СССР 199, 6, 1971, 1243-1246.

[33] Люксембург Л.А., О компактах с несовпадающими трансфинитными размерностями, ДАН СССР 212, 6, 1973, 1297-1300.

[34] Mardešić S., On covering dimension and inverse limets of compact spaces, Ill. J. Math. 4, 2, 1960, 278-291.

[35] Menger K., Uber die Dimensionalität von Punktmengen, I, Monatsh. Math. Phys. 23, 1923, 148-160.

[36] Menger K., Zur Begrundüng einer axsiomatischen Theorie, Monatsh. Math. Phis. 38, 1929, 193-218.

[37] Menger K., Dimensionstheorie, Berlin-Leipzig, B. G. Teubner, 1928.

[38] Morita K., On the dimension normal spaces, I, Japanese J. Math. 20, 1950, 5-36.

[39] Morita K., Normal families and dimension theory in metric spaces, Math. Ann. 128, 4, 1954, 350-362.

[40] Morita K., On closed mappings and dimension, Proc. Japan Acad. 32, 1956, 161-165.

[41] Morita K., Hanai S., Closed mappings and metric spaces, Proc. Japan Acad. 32, 1956, 10-14.

[42] Nagami K., On the dimension of paracompact Hausdorff spaces, Nagoya Math. J. 8, 1955, 69-70.

[43] Nagami K., Closed imsges of countable-dimensional spaces, J. Math. Soc. Japan 19, 1967, 4, 457-459.

[44] Nagami K., Dimension Theory, Academ Press,New York, 1970.

[45] Nagami K., Roberts J. H., A not on countable- dimensional metric spaces, Proc. Japan Acad. 41, 1965, 155-158.

[46] Nagata J., On the countable sum of zero-dimensional metric spaces, Fundam. Math. 48, 1, 1959, 1-14.

[47] Nagata J., A remark of general imbeding theorems in dimensional theory, Proc. Japan Acad. 39,4,1963,197-199.

[48] Nagata J., Modern Dimension Theory, Wiley, New York,1965.

[49] Пасынков Б. А., О спектрах и размерности топологических пространств, Матем. сб. 57, 4,1962, 449-476.

[50] Пасынков Б. А., Нульмерные открытие отображения, повишающие размерность, УМН 18, 5, 1963, 183-190.

[51] Пасынков Б. А., Об универсальных бикомпактах и метрических пространствах даной размерности, Fund. Math. 60.

[52] Пасынков Б. А., Факторизационная теорема для незамкнутых множеств, ДАН СССР 202,6, 1972, 1274-1276.

[53] Poincaré H., Purquio l'espace a trois dimensions, Revue de Metaphysique et de Moral 20, 1912, 448.

[54] Roy P., Nonequality of dimensions for metric spaces, Trans.Amer.Math.Soc.134,1, 1968, 117-132.

[55] Шерснев М. Л., Характеристика размерности метрического пространства при помощи размерностных свойств его отображений в euклидови пространства, Матем.сб 60, 2, 1962, 207-218.

[56] Щепин Е. В., Аксиоматика размерности метрических пространств, Матем. сб. 92, 1, 1973, 135-141.

[57] Schurle A. W., Compactifications of strongli countable dimensional spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 136, 1968, 909-912.

[58] Shmuely Z., On strongly countable-dimensional sets, Duke Math. J. 38, 1971, 169-173.

[59] Скляренко Е. Г., Несколько замечаний о бесконечномерных пространствах, ДАН СССР 126, 6, 1958, 1203-1206.

[60] Скляренко Е. Г., О размерностных свойствах бесконечномерных пространств, ИАН СССР, сер.матем.23, 1959, 197-212.

[61] Скляренко Е. Г., Теорема о отображениях, понижающих размерность, Bull. Acad. Polon.Sci., Ser math.10, 8, 1962, 429-432.

[62] Скляренко Е. Г., Некоторые вопросы теории бикомпактных расширений, ИАН СССР, сер. матем. 26, 1962, 427-451.

[63] Смирнов Ю. М., О метризации топологических пространств, УМН 6, 6, 1951, 100-111.

[64] Смирнов Ю. М., О сильно-паракомпактных пространствах, ИАН СССР, сер. матем. 26, 1956, 253-274.

[65] Смирнов Ю. М., О метрической размерности в смысле П. С. Александрова, ИАН СССР, сер. матем.20, 1956, 679-684.

[66] Смирнов Ю. М., Об универсальных пространствах для некоторых классов пространств, ИАН СССР, сер.мат.23, 1959, 185-196.

[67] Смирнов Ю. М., О трансфинитной размерности, Матем. сб. 58, 4, 1962, 415-422.

[68] Stone A. H., Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 1948, 977-982.

[69] Toulmin C. H., Shuffling ordinals and transfinite dimension, Proc. London Math. Soc. 4, 4, 1954, 177-197.

[70] Тумаркин Л. А., Uber die Dimension nicht abgeschlossener Mengen, Math. Ann. 98, 1928, 637-656.

[71] Урысон П. С., Les multiplicites cantoriennes, C. R. Acad. Sci. Paris 175, 1922, 440-442.

[72] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, Гостехиздат, 1951.

[73] Зарелуа А. В., О теореме Гуревича, Матем.сб.60,1,1963,18-28.

[74] Зарелуа А. В., Универсальный бикомпакт даного веса и даной размерности, ДАН СССР 154,5, 1964, 1015-1018.

[75] Веденисов Н. В., О размерности в смисле Чеха, ИАН СССР, сер. матем. 5, 1941, 211-216.

[76] Wenner B. R., A universal separable metric localy finite-dimensional spaces, Fundam. Math. 80, 3, 1973, 293-286.

[77] Wallman H., Lattices and topological spaces , Math. Ann. 39, 1938, 112-126.

SPISAK POJMOVA