ISPITAVANJA
O KLIMI PLANETE MARSA

NAPISAO

Dr. MILUTIN MILANKOVIĆ

(Preštampano iz 213. knjige »Rada Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti«.)

ZAGREB
TISAK DIONIČKE TISKARE
1916.

Ispitivanja o klimi planete Marsa.

Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 2. jula 1916.

NAPISAO DR. MILUTIN MILANKOVIĆ.

Uvod.

Pitanje o klimi planete Marsa interesuje već odavna naučni i nenaučni svijet. Daljina te planete od Sunca, koja je preko jedan i pô puta veća od daljine Zemlje od Sunca, čini, da zrake Sunca ulazeći u Marsovu atmosferu nemaju ni polovinu onoga intensiteta, što ga imaju pri ulazu u atmosferu naše zemlje. Kada bi prema tome atmosferske prilike na Marsu bile jednake onima na Zemlji, to bi na njemu vladala znatno hladnija klima nego na Zemlji. No Marsova se atmosfera u mnogom čemu razlikuje od atmosfere naše zemlje, pa nam gornje umovanje ne daje nikakova oslonca za rasuđivanje Marsove klime. Zato ono ne može zadovoljiti nas, a još manje one naučnike, koji su naklonjeni da vjeruju, da je na Marsu razvijen bujan organski život. Ti su naučnici zato zastupali mišljenje, da Marsova atmosfera ima takove osobine, koje čine, da je njena temperatura viša nego što bi to sljedovalo iz daljine Marsa od Sunca. Mogućnost takovih osobina Marsove atmosfere, koje Nijemci nazivaju „Glashauswirkung" ili „Treibhauswirkung", a Englezi „greenhouse-effect", nije isključena, ali sam ja prije tri godine dokazao u jednoj radnji[1], da i najpovoljniji sutjecaj prilikâ ne bi mogao izvesti onaj efekat, što su ga očekivali privrženici hipoteze organskoga života na Marsu. Ta moja radnja nije ipak mogla definitivno riješiti pitanje o mogućnosti života na Marsu, jer mi u njoj nije bilo moguće odrediti gornje granice temperatura Marsove površine i donjih slojeva njegove atmosfere. U ovoj ću pak radnji pokušati, da služeći se zakonima matematičke fizike odredim ne samo te granice, nego i da izvedem jednačine dnevnoga i godišnjeg toka temperatura na Marsu. Teorijska razmatranja, koja slijede, mogu se primijeniti i na klimatske prilike naše zemlje, pa je na taj način moguće ogledati praktičnu valjanost tih teorija. Ja ću saopćenje tih rezultata, koji se tiču klime Zemlje, izvršiti u zasebnoj radnji, jer je teorijsko ispitivanje zemaljske klime problem komplikovaniji od ispitivanja Marsove klime, a to s ovih razloga: Marsova atmosfera odlikuje se osobitom čistoćom, a oblaci, koji mnogo smetaju primjeni matematičkih teorija na atmosferu Zemlje, ondje se pojavljuju veoma rijetko. I sama površina Marsa, koja je već gotovo sasvim iznivelisana, olakšava u velikoj mjeri upotrebu fizikalnih zakona, jer će na Marsu biti lokalni utjecaji na klimu sasvim neznatni. Plitkoća Marsovih mora čini, da i morske struje nemaju osjetnoga utjecaja na klimu, a na posljetku: i manja masa Marsove atmosfere znatno oslabljuje efekat vazdušnih struja. Mars nam dakle predstavlja idealan objekat za primjenu zakona matematičke fizike.

[1] Milankovitch, Ueber die Verringerung der Wärmeabgabe durch die Marsatmosphäre. Annalen der Physik. Vierte Folge. Band 44 (1914.)

Zato su svi slijedeći fizikalni zakoni i zaključci, izvedeni iz njih, ostvareni u velikoj mjeri u Marsovoj atmosferi, i jedini nedostatak, koji ćemo osjetiti primjenjujući te zakone, u tome je, što dovoljno ne poznajemo brojne vrijednosti nekih konstanata, koje karakterizuju Marsovu atmosferu. Jer, i ako znamo n. pr., da se Marsova atmosfera podaje isto tako zakonima gravitacije, kao i zemaljska, i da za nju vrijede barometrijski obrasci istoga oblika kao i za atmosferu Zemlje: to nam nije poznata gustina atmosfere na površini Marsa i barometrička konstanta.

Zbog toga ću u ovom saopćenju odijeliti čisto teorijski dio od njegove praktične primjene. Prvi dio, teorijski, opisat će matematičkim jezikom zakone, koji regulišu termičke prilike u atmosferi i na površini Marsa, i u tima će izrazima figurisati konstante Marsove atmosfere samo sa svojim označenjima. U drugom dijelu, praktičnom, pokušat ću, da iz dosadanjih opažanja odredim brojne vrijednosti tih konstanata, da bih tako mogao naprijed izvedenu teoriju upotrijebiti toliko, da dadem i brojnu sliku klimatskih prilika na Marsu.

Prvi dio.

Fizikalni zakoni, koji regulišu termičke pojave u atmosferi i na površini Marsa.

§ 1. Diferencijalne jednačine pojava radijacije u planetskim atmosferama.

Pretpostavljamo — kao i u naprijed spomenutoj radnji i kako je to Emden[1] učinio u svojoj radnji o stacionarnom stanju radijacije u atmosferi Zemlje —, da se fizikalne osobine planetskih atmosfera mijenjaju kontinuirano u pravcu normalnom na površinu planete, t. j. da su one kontinuirane funkcije udaljenosti x od površine planete.

Uočimo dakle jedan elemenat planetske površine, koji možemo zbog velikoga radiusa planete smatrati ravnim. Na taj elemenat naslanja se kontinuirana planetska atmosfera, koje gustina biva sa udaljenošću x od planetske površine sve manja tako, da je u beskonačnosti nestane. U tu atmosferu neka prodire pod kutom incidencije z sunčana radijacija, koje intenzitet u udaljenosti x, a u momentu t, označujemo sa $I(x, t)$. Pri tome zamišljamo, da smo sunčanu radijaciju još prije ulaza njezina u planetsku atmosferu umanjili za sve njene gubitke, koje joj nastaju od refleksije na molekilima atmosfere, na oblacima i na samoj površini planete. Poradi tih refleksija neka se vraća dio A sunčane radijacije neupotrebljen u interplanetarni prostor.

Uočimo sada neki, kojigod, beskonačno tanak sloj atmosfere, koji je paralelan sa planetskom površinom; zvat ćemo ga ukratko sloj S_x. Udaljenost toga sloja od planetske površine neka bude x, a debljina dx. Pri prolazu kroz taj sloj neka od radijacije $I(x, t)$ bude apsorbovan dio $I(x, t)\, a_1(x) \sec z\, dx$, t. j. neka $a_1(x)$ predstavlja absorpcionu sposobnost atmosferskoga sloja debljine jedan na mjestu x za sunčanu radijaciju. Onda postoji jednačina

[1] Emden, Über das Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. Ein Beitrag zur Theorie der oberen Inversion. Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. B. Akademie der Wissenschaften zu München. 1913.

$$(1) \qquad dI(x, t) = a_1(x)\, I(x, t) \sec z\, dx.$$

Integracija ove jednačine, ako se refrakcija sunčanih zraka ne uzme u obzir i ako se stavi

$$(2) \qquad I(\infty, t) = (1-A)\, I_m(t),$$

gdje je dakle $I_m(t)$ intenzitet sunčane radijacije prije ulaza u atmosferu, daje

$$(3) \qquad I(x, t) = (1-A)\, I_m(t)\, e^{-\sec z \int_x^\infty a_1(x)\, dx}.$$

Označuje li I_0 solarnu konstantu, a srednju udaljenost Zemlje od Sunca, a ρ udaljenost uočene planete od Sunca, to je

$$(4) \qquad I_m(t) = \frac{a^2}{\rho^2} I_0.$$

Površinu planete dostiže radijacija

$$(5) \qquad I(0, t) = (1-A)\, I_m(t)\, e^{-\sec z \int_0^\infty a_1(x) dx}.$$

Pri normalnom prolazu kroz atmosferu stigao bi na površinu planete od radijacije $(1-A)\, I_m(t)$ samo dio

$$(1-A)\, I_m(t)\, e^{-\int_0^\infty a_1(x) dx},$$

pa se zato veličina

$$(6) \qquad e^{-\int_0^\infty a_1(x)\, dx} = p_m$$

naziva transmisioni koeficijenat atmosfere, ako se u ovoj uzme u obzir samo apsorpcija. Iz gornjih jednačina sljeduje

$$(7) \qquad I(0, t) = (1-A)\, p_m^{\sec z}\, I_m(t),$$

t. j. jedinica površine planete prima toplotnu množinu

$$W(0, t) = (1-A)\, p_m^{\sec z} \cos z\, I_m(t). \tag{8}$$

Veličina $I_m(t) \cos z$ predstavlja toplotnu množinu, koja pada na jedinicu površine prije ulaza u atmosferu i koju ćemo označiti sa $W_m(t)$; zato je

$$W(0, t) = (1-A)\, p_m^{\sec z}\, W_m(t). \tag{9}$$

Ovu radijaciju potpuno apsorbuje, prema učinjenim pretpostavkama, planetska površina.

Osim te radijacije stiže na površinu planete još tamna radijacija same atmosfere. Označimo intenzitet te radijacije, uperene prema površini planete, na mjestu x, a u vremenu t, sa $O(x, t)$. Te radijacije nestaje u beskonačnosti sasvim, pa je zato

$$O(\infty, t) = 0, \tag{10}$$

dok je njen intenzitet na površini planete jednak $O(0, t)$. Površina planete apsorbuje dakle u jedinici vremena radijaciju $(1-A)\, p_m^{\sec}\, W_m(t) + O(0, t)$; označimo li sa $E(t)$ toplotnu emisiju jedinice površine planete, a zanemarimo li one toplotne množine, koje se kondukcijom tla dovode k površini planete ili odvode od nje i koje su kod ohlađenih planeta neznatne, to će se na površini planete ukazati ona temperatura, pri kojoj je emitovana toplota jednaka apsorbovanoj. Zato postoji jednačina

$$E(t) = (1-A)\, p_m^{\sec z}\, W_m(t) + O(0, t). \tag{11}$$

Osim spomenutih radijacija prolazi kroz atmosferu još jedna, koja je uperena od površine planete prema interplanetarnom prostoru i koju ćemo na mjestu x, a u vremenu t, označiti sa $U(x, t)$. Ta se radijacija sastoji od tamne radijacije površine planete i one tamne atmosferne radijacije, koja je uperena prema interplanetarnom prostoru. Na samoj površini planete nestaje ove druge komponente radijacije $U(x, t)$, pa je zato

$$U(0, t) = E(t). \tag{12}$$

Označuje li $a_2(x)$ apsorpcionu sposobnost atmosferskoga sloja debljine jedan, a na mjestu x, za tamne radijacije $O(x, t)$ i $U(x, t)$, to će elementarni sloj S_x apsorbovati u jedinici svoga presjeka

i u jedinici vremena od tih radijacija iznose $O(x, t)\, a_2(x)\, dx$ odnosno $U(x, t)\, a_2(x)\, dx$, dok će od sunčane radijacije, koja prolazi koso kroz taj sloj, biti apsorbovan dio $I(x, t)\, a_1(x)\, dx$. Taj sloj neka kroz jedinice svojih dviju graničnih površina u jedinici vremena emitira toplotne množine $\varepsilon(x, t)\, dx$, to će u njemu u jedinici vremena zaostati toplotna množina

$$dQ = [a_1(x) I(x, t) + a_2(x) O(x, t) + a_2(x, t) U(x, t) - 2\varepsilon(x, t)]\, dx, \tag{13}$$

koja će se upotrijebiti za povišenje njegove temperature $u(x, t)$. Označimo sa c specifičnu toplotu toga sloja — t. j. onu toplotnu množinu, koja može jedinici njegove mase povisiti temperaturu za jedan stupanj —, a sa dm onu masu, koja je sadržana u jedinici presjeka toga sloja, to će postojati jednačina

$$dQ = c\, \frac{du(x, t)}{dt}\, dm. \tag{14}$$

Pri tome držimo atmosferski pritisak u sloju nepromijenjen i isključujemo svako pretvaranje toplote u mehanički rad, s jednom riječi: isključujemo sve struje u atmosferi.

Označimo sa $\rho(x)$ gustinu atmosfere na mjestu x, to je

$$dm = \rho(x)\, dx, \tag{15}$$

pa zato

$$dQ = c\rho(x)\, \frac{du(x, t)}{dt}\, dx, \tag{16}$$

tako da jednačina (13) dobije oblik

$$2\varepsilon(x, t) + c\rho(x)\, \frac{du(x, t)}{dt} = \tag{17}$$
$$= a_1(x)\, I(x, t) + a_2(x)\, O(x, t) + a_2(x)\, U(x, t).$$

Još dvije diferencijalne jednačine dobijemo ovim razmatranjem.

Pri prolazu radijacije $O(x, t)$ kroz sloj S_x ta se radijacija umanjuje za iznos $a_2(x)\, O(x, t)\, dx$, t. j. u pravcu $+x$ uvećava se za iznos $a_2(x)\, O(x, t)\, dx$. Osim toga se ta radijacija u pravcu prema površini planete uvećava za iznos $\varepsilon(x, t)\, dx$, t. j. u pravcu $+x$ umanjuje se za iznos $\varepsilon(x, t)\, dx$. Zato je

$$\frac{dO(x, t)}{dx} = a_2(x)\, O(x, t) - \varepsilon(x, t). \tag{18}$$

Pri prolazu radijacije $U(x, t)$ kroz sloj S_x ona se za iznos $a_2(x)\, U(x,t)\, dx$ umanjuje, a za iznos se $\varepsilon(x, t)\, dx$ uvećava. Zato je

$$\frac{dU(x, t)}{dx} = -a_2(x)\, U(x, t) + \varepsilon(x, t). \tag{19}$$

Stavimo li sada

$$O(x, t) + U(x, t) = Y(x, t), \tag{20}$$

$$O(x, t) - U(x, t) = Z(x, t), \tag{21}$$

to dobijemo, ako saberemo jednačine (18) i (19),

$$\frac{dY(x, t)}{dx} = a_2(x)\, Z(x, t); \tag{22}$$

ako li ih odbijemo jednu od druge, dobijemo:

$$\frac{dZ(x, t)}{dx} = a_2(x)\, Y(x, t) - 2\varepsilon(x, t). \tag{23}$$

Iz (17) i (20) sljeduje povrh toga

$$2\varepsilon(x, t) + c\rho(x)\frac{du(x, t)}{dt} = a_1(x)\, I(x, t) + a_2(x)\, Y(x, t). \tag{24}$$

Ove tri diferencijalne jednačine regulišu pojavu radijacije u atmosferi planete. Jednačinu (23) možemo zamijeniti i ovom, koja sljeduje iz (23) i (24):

$$\frac{dZ(x, t)}{dx} = c\rho(x)\frac{du(x, t)}{dt} - a_1(x)\, I(x, t). \tag{25}$$

Analitičku vezu između veličina $\varepsilon(x, t)$ i $u(x, t)$ dobijemo upotrebom Kirchhoffova i Stefanova zakona. Po prvom je

emisija nekoga tijela radijacije neke valovne (talasne) dužine jednaka apsorpcionoj sposobnosti toga tijela za takovu radijaciju, pomnoženoj emisijom savršeno crna tijela. Po drugom je zakonu emisija savršeno crna tijela jednaka jednoj konstanti σ pomnoženoj četvrtom potencijom njegove apsolutne temperature Θ. Pretpostavimo li, kako se to u takovim slučajevima obično i čini, da Kirchhoffov zakon vrijedi i za složene radijacije, i uzmemo li u obzir, da atmosfera emitira tamne radijacije, za koje smo uveli apsorpcionu sposobnost $a_2(x)$, to dobijemo jednačinu

$$\varepsilon(x, t) = a_2(x)\,\sigma\,\Theta^4. \tag{26}$$

Mjerimo li temperaturu u u Celsiusovim stepenima, to je

$$\Theta = 273 + u,$$

pa zato

$$\varepsilon(x, t) = a_2(x)\,.\,\sigma[273 + u(x, t)]^4. \tag{27}$$

Stavimo li ovu vrijednost u (24), to nam integracija simultanih parcijalnih diferencijalnih jednačina (22), (24) i (25) daje temperaturu $u(x, t)$ kao funkciju udaljenosti x i vremena t.

Pri tome valja u obzir uzeti ovaj granični uslov: Iz (11) i (12) sljeduje

$$U(0, t) - O(0, t) = (1-A)\, p_m^{\sec z}\, W_m(t),$$

pa je zato zbog (21)

$$Z(0, t) = -(1-A)\, p_m^{\sec z}\, W_m(t). \tag{28}$$

O ostalima graničnima uslovima govorit ćemo kasnije.

§ 2. Diferencijalne jednačine pojava radijacije u Marsovoj atmosferi.

Osobine Marsove atmosfere, koje smo u uvodu spomenuli, dopuštaju neka uprošćenja prethodnih diferencijalnih jednačina; zato i možemo jednačine integrirati.

Prozirnost Marsove atmosfere čini, da se sunčana radijacija vrlo malo u njoj apsorbuje. I sama zemaljska atmosfera apsorbuje, kada nema oblaka i mnogo vodene pare, pri normalnom prolazu jedva deseti dio sunčane radijacije; Marsova atmosfera apsorbuje po svoj prilici još i manje; zato je za nju

$$(29) \qquad 0{\cdot}90 < p_m < 1{\cdot}00.$$

Prethodne diferencijalne jednačine postaju integrabilne, ako se stavi

$$(30) \qquad p_m = 1,$$

i mi ćemo tu pretpostavku učiniti. Onda je zbog (6)

$$(31) \qquad a_1(x) = 0,$$

pa jednačine (22), (24) i (25) dobiju ovaj jednostavni oblik:

$$(32) \qquad \frac{dY(x, t)}{dx} = a_2(x)\, Z(x, t)$$

$$(33) \qquad \frac{dZ(x, t)}{dx} = c\rho(x)\frac{du(x, t)}{dt}$$

$$(34) \qquad 2\varepsilon(x, t) + c\rho(x)\frac{du(x, t)}{dt} = a_2(x)\, Y(x, t).$$

Granični uslov (28) redukuje se na

$$(35) \qquad Z(0, t) = -(1-A)\, W_m(t).$$

§ 3. Integracija diferencijalnih jednačina § 2. za slučaj stacionarnoga stanja radijacije.

Za naša dalja ispitivanja osobito je važan slučaj stacionarnoga stanja radijacije. Taj slučaj ne nastupa doduše u prirodi u potpunom smislu riječi, jer se insolacija planetskih površina mijenja bez prestanka zbog rotacije i revolucije planete; ali kada se radi o tome, da se odrede srednje godišnje temperature paralelnih krugova planete, onda se pretpostavlja, da su ti krugovi izloženi srednjoj godišnjoj radijaciji, a ta se tek sekularno mijenja,

i to vrlo neznatno. Opravdanost ovoga načina računanja dokazao sam u drugoj svojoj jednoj radnji.[1]

Stacionarno stanje karakterizovano je time, da se temperatura $u(x, t)$ ne mijenja s vremenom, te je zato

$$(36) \qquad \frac{du(x, t)}{dt} = 0,$$

pa diferencijalne jednačine (32) do (34) dobivaju ovaj oblik:

$$(37) \qquad \frac{dY(x)}{dx} = a_2(x)\, Z(x)$$

$$(38) \qquad \frac{dZ(x)}{dx} = 0$$

$$(39) \qquad 2\varepsilon(x) = a_2(x)\, Y(x).$$

Iz (38) sljeduje

$$(40) \qquad Z(x) = C,$$

gdje C označuje jednu konstantu.

Granični uslov (35) dobije u stacionarnom stanju radijacije oblik

$$(41) \qquad Z(0) = -(1-A)\, W_m,$$

gdje W_m označuje stacionarnu radijaciju; zato je

$$(42) \qquad Z(x) = -(1-A)\, W_m,$$

pa jednačina (37) daje

$$(43) \qquad \frac{dY(x)}{dx} = -a_2(x)\,(1-A)\, W_m.$$

Iz jednačina (10) i (20) izlazi

$$(44) \qquad U(\infty) = Y(\infty).$$

[1] Milanković, O primjeni matematičke teorije sprovođenja topline na probleme kosmičke fizike. „Rad Jugoslav. akad.", knjiga 200. (1913.).

Pri tome predstavlja $U(\infty)$ onu radijaciju, koja kroz granicu atmosfere odlazi u interplanetarni prostor, pa ona mora, u stacionarnom stanju i ako se iz unutrašnjosti planete ne odašiljaju kroz njenu površinu nikakove znatne toplotne množine (a taj je slučaj kod Marsa), biti jednaka radijaciji $(1-A)\,W_m$, koja ulazi u atmosferu. Zato je

$$Y(\infty) = (1-A)\,W_m. \tag{45}$$

Integracija izraza (43) između granica x i ∞ daje, ako se gornja jednačina uzme u obzir,

$$Y(x) = (1-A)\,W_m + (1-A)\,W_m \int_x^\infty a_2(x)\,dx, \tag{46}$$

pa je zato zbog (39) i (27)

$$\sigma[273+u(x)]^4 = \frac{1}{2}(1-A)\,W_m + \frac{1}{2}(1-A)\,W_m \int_x^\infty a_2(x)\,dx. \tag{47}$$

Ova nam jednačina daje temperaturu atmosfere kao funkciju visine x.

Na gornjoj granici atmosfere, t. j. za $x = \infty$, data je ta temperatura izrazom

$$\sigma[273+u(\infty)]^4 = \frac{1}{2}(1-A)\,W_m, \tag{48}$$

dok je na samoj površini planete ta temperatura data jednačinom

$$\sigma[273+u(0)]^4 = \frac{1}{2}(1-A)\,W_m\left[1 + \int_0^\infty a_2(x)\,dx\right]. \tag{49}$$

Analogno izrazu (6) predstavlja nam izraz

$$e^{-\int_0^\infty a_2(x)\,dx} = p'_m \tag{50}$$

transmisioni koeficijenat atmosfere za radijaciju planetske površine, jer, označimo li intenzitet radijacije planetske površine na mjestu x sa $E(x)$, to je

$$dE(x) = -\,a_2(x)\,E(x)\,dx,$$

pa nam integracija ove jednačine daje

$$E(x) = E(0)\,e^{-\int_0^x a_2(x)\,dx},$$

t. j. granicu atmosfere dostiže samo dio

$$E(\infty) = E(0)\,e^{-\int_0^\infty a_2(x)\,dx}.$$

Iz (50) sljeduje

$$\int_0^\infty a_2(x)\,dx = -\log\mathrm{nat}\,p'_m, \tag{51}$$

dakle je

$$\sigma[273+u(0)]^4 = \frac{1-\log\mathrm{nat}\,p'_m}{2}(1-A)\,W_m. \tag{52}$$

Iz (20) i (21) sljeduje

$$O(0,t) = \frac{1}{2}\Big[Y(0,t) + Z(0,t)\Big], \tag{53}$$

t. j. u našem slučaju zbog (41), (46) i (51):

$$O(0) = \frac{1}{2}(1-A)\,W_m \int_0^\infty a_2(x)\,dx = \frac{1}{2}(1-A)\,W_m \log\mathrm{nat}\,p'_m, \tag{54}$$

pa nam zato jednačina (11) daje ovu emisiju planetske površine:

$$E_0 = \frac{2-\log\mathrm{nat}\,p'_m}{2}(1-A)\,W_m. \tag{55}$$

Upotrijebimo li i za planetsku površinu kombinovani Kirchhoffov i Stefanov zakon, to je

$$E_0 = (1-R_1)\,\sigma\,\Theta^4, \tag{56}$$

gdje R_1 označuje refleksionu sposobnost, a Θ apsolutnu temperaturu površine planete. Tako dobijemo jednačinu

$$(1-R)\,\sigma\,\Theta^4 = \frac{2-\operatorname{lognat} p'_m}{2}\,(1-A)\,W_m, \tag{57}$$

koja nam daje temperaturu površine planete.

Jednačina (47) daje nam temperaturu atmosfere kao funkciju visine, ako nam je data funkcija $a_2(x)$. Prema Beerovu je zakonu apsorpcija elementarnoga sloja proporcionalna njegovoj gustini, t. j.

$$a_2(x) = k\,\rho(x), \tag{58}$$

pri čemu se konstanta k naziva apsorpcioni koeficijenat atmosfere. Gustina atmosfere data nam je barometarskom jednačinom, koja uz poznate pretpostavke daje

$$\rho(x) = \rho_0\, e^{-c'x}, \tag{59}$$

gdje ρ_0 označuje gustinu atmosfere na samoj površini planete, a veličina

$$\frac{1}{c'} = H \tag{60}$$

predstavlja virtuelnu visinu atmosfere. Značenje te visine ovo je: Totalna masa atmosfere, koja leži nad jedinicom planetske površine, predstavljena je izrazom

$$M = \int_0^\infty \rho(x)\,dx = \rho_0 \int_0^\infty e^{-\frac{x}{H}}\,dx = \rho_0 H. \tag{61}$$

Kada bi prema tome bila atmosfera zgusnuta tako, da ima svagdje gustinu ρ_0, onda bi imala visinu H.

Iz (58) i (59) sljeduje

$$a_2(x) = k\,\rho_0\, e^{-c'x}, \tag{62}$$

pa nam zato jednačina (47) daje

$$\sigma\,[273+u(x)]^4 = \frac{1}{2}\,(1-A)\,W_m \left\{1 + \frac{1}{c}\,k\,\rho_0\, e^{-c'x}\right\}. \tag{63}$$

Iz (50) i (62) sljeduje, da je u ovom slučaju transmisioni koeficijenat dat izrazom

$$p'_m = e^{-\frac{k\rho_0}{c}} \tag{64}$$

Pitajmo sada, kakav bismo raspored temperature imali u atmosferi, kada bi ona imala svagdje gustinu ρ_0, a visinu H! Njen transmisioni koeficijenat bio bi dat izrazom

$$p'_m = e^{-\int_0^H a_2(x)dx};$$

no kako je sada $a_2(x) = k\rho_0$, to bi bilo

$$p'_m = e^{-\int_0^H k\rho_0 dx} = e^{-k\rho_0 H} = e^{-\frac{k\rho_0}{c}}. \tag{64*}$$

Transmisioni koeficijenat bio bi dakle isti kao i u pređašnjem slučaju.

Mjesto uslova (10) dobili bismo

$$O(H) = 0, \tag{65}$$

a mjesto uslova (45)

$$Y(H) = (1-A)\,W_m. \tag{66}$$

Uslov (41) ostao bi nepromijenjen.

Uzmemo li sve ovo u obzir, to bismo integracijom jednačine (43), koja sada dobije oblik

dobili:
$$\frac{dY(x)}{dx} = -k\rho_0(1-A)W_m,$$

$$(67)\qquad Y(x) = (1-A)W_m + (1-A)W_m k\rho_0(H-x).$$

Zbog jednačina (39) i (27) imamo dakle

$$(68)\qquad \sigma[273+u(x)]^4 = \frac{1}{2}(1-A)W_m\left\{1+k\rho_0(H-x)\right\},$$

koja nam jednačina daje zavisnost temperature o visini.

Na gornjoj granici atmosfere, t. j. za $x = H$, bila bi temperatura u data izrazom

$$(69)\qquad \sigma[273+u(H)]^4 = \frac{1}{2}(1-A)W_m,$$

a na donoj granici, t. j. za $x = 0$, izrazom

$$\sigma[273+u(0)]^4 = \frac{1}{2}(1-A)W_m\left\{1+k\rho_0 H\right\}$$

ili, zbog (64*),

$$(70)\qquad \sigma[273+u(0)]^4 = \frac{1-\log\operatorname{nat}p'_m}{2}(1-A)W_m.$$

Ove vrijednosti podudaraju se potpuno sa vrijednostima iz (48) i (52).

Gradijent temperature $\frac{\partial u(0)}{\partial x}$ na površini planete dat je pri rasporedu temperature (63) jednačinom

$$4\sigma[273+u(0)]^3\frac{\partial u(0)}{\partial x} = -\frac{1}{2}(1-A)W_m k\rho_0$$

i jednačinom (52), a pri rasporedu temperature (68) istim takovim jednačinama.

Time dakle, što je atmosfera stisnuta od beskonačne visine na virtuelnu visinu H, nijesu se promijenile temperature njenih obiju graničnih površina ni gradijent temperature na površini planete.

§ 4. Integracija diferencijalnih jednačina § 2. za slučaj varijabilnoga stanja radijacije.

Planetna insolacija $W_m(t)$ periodična je funkcija sa periodom T, gdje T označuje godinu planete; zato možemo funkciju $W_m(t)$ razviti u Fourierov red oblika

$$(71)\qquad W_m(t) = a_0 + a_1\cos\frac{2\pi}{T}t + a_2\cos\frac{4\pi}{T}t + a_3\cos\frac{6\pi}{T}t + \dots + b_1\sin\frac{2\pi}{T}t + b_2\sin\frac{4\pi}{T}t + b_3\sin\frac{4\pi}{T}t + \dots$$

Uzet ćemo u prvi mah, da se gornji red ograničuje samo na svoja prva dva člana, t. j. da je

$$(72)\qquad W_m(t) = a_0 + a_1\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

pa ćemo se kasnije pozabaviti gornjim, općim slučajem.

U ovome slučaju varijabilne radijacije dade se izvršiti integracija diferencijalnih jednačina paragrafa 2., ako temperatura u osciluje malenim amplitudama oko jedne srednje vrijednosti, tako da je

$$(73)\qquad u = u_0 + \Delta u,$$

gdje je u_0 konstantno, a Δu maleno. Taj će slučaj nastati onda, ako i radijacija $W_m(t)$ bude oscilovala malim amplitudama oko svoje srednje vrijednosti a_0, t. j. ako a_1 bude maleno.

Sada dobije jednačina (27) ovaj oblik

$$(74)\qquad \varepsilon(x,t) = a_2(x)\sigma(273+u_0+\Delta u)^4,$$

koji možemo razviti u binomski red zanemarujući više potencije veličine Δu. Zato je

$$\sigma(273+u_0+\Delta u)^4 = \sigma[(273+u_0)^4 + 4(273+u_0)^3\Delta u] =$$
$$= \sigma(273+u_0)^4 - 4\sigma(273+u_0)^3 u_0 + 4\sigma(273+u_0)^3 u.$$

Stavimo li kratkoće radi

$$(75)\qquad \begin{cases} \sigma(273+u_0)^4 - 4\sigma(273+u_0)^3 u_0 = h\,v_0 \\ 4\sigma(273+u_0)^3 = h, \end{cases}$$

onda je

$$(76)\qquad \varepsilon(x, t) = a_2(x)\,h\,[u(x, t) + v_0],$$

Još jedan uslov za integrabilitet spomenutih diferencijalnih jednačina je

$$(77)\qquad \rho(x) = \rho_0 .$$

Taj je uslov ispunjen onda, ako se ograničimo na ispitivanje temperaturnih promjena u donjem sloju atmosfere.

Sada dobiju jednačine (32) do (34) zbog (58) i gornjih dviju jednačina ove oblike

$$(78)\qquad \frac{d\,Y(x, t)}{dx} = k\rho_0\, Z(x, t),$$

$$(79)\qquad \frac{d\,Z(x, t)}{dx} = c\rho_0\, \frac{du(x, t)}{dt},$$

$$(80)\qquad \frac{du(x, t)}{dt} + 2\,\frac{kh}{c}\,[u(x, t) + v_0] = \frac{k}{c}\, Y(x, t),$$

a granični uslov (35) dobije ovaj oblik:

$$(81)\qquad Z(0, t) = -(1-A)\,a_0 - (1-A)\,a_1 \cos\frac{2\pi}{T}\,t.$$

Valja dakle naći integrale diferencijalnih jednačina (78) do (80), koji zadovoljavaju uslove (81) i one uslove na gornjoj granici atmosfere, o kojima ćemo još govoriti.

Da odijelimo funkcije $u(x, t)$, $Y(x, t)$ i $Z(x, t)$ jednu od druge, diferencirajmo (80) po x, pa stavimo u rezultat izraz (78). Onda dobijemo

$$(82)\qquad \frac{d^2 u(x, t)}{dx\,dt} + 2\,\frac{kh}{c}\,\frac{du(x, t)}{dx} = \frac{k^2\rho_0}{c}\, Z(x, t).$$

Ponovna diferencijacija po x i primjena jednačine (79) daje

$$(83)\qquad \frac{d^3 u(x, t)}{dx^2 dt} + \frac{2kh}{c}\,\frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = k^2\rho_0^2\,\frac{du(x, t)}{dt}.$$

Stavimo li sada

$$(84)\qquad u(x, t) = e^{\alpha t + \beta x},$$

gdje su α i β dvije konstante, koje valja još odrediti, to je

$$(85)\qquad \begin{cases} \dfrac{du(x, t)}{dt} = \alpha\, e^{\alpha t + \beta x} \\[2ex] \dfrac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = \beta^2 e^{\alpha t + \beta x} \\[2ex] \dfrac{d^3 u(x, t)}{dx^2 dt} = \alpha\beta^2 e^{\alpha t + \beta x} \end{cases}$$

pa će (84) predstavljati jedan partikularan integral jednačine (83), ako bude zadovoljena jednačina

$$(86)\qquad \alpha\beta^2 + 2\,\frac{kh}{c}\,\beta^2 = k^2\rho_0^2\,\alpha.$$

Partikularni integral (84) vrijedi dakle za svaki par vrijednosti α i β, koji zadovoljava uslov (86), te možemo kombinovati dva ili više takovih integrala i dodati im još kojugod linearnu funkciju od t. Jer ako su

$$u(x, t) = e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} \qquad u(x, t) = e^{\alpha_2 t + \beta_2 x}$$

partikularni integrali jednačine (83), onda je — kao što se može lako uvidjeti — i izraz

$$(87)\qquad u(x, t) = C_1\, e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} + C_2\, e^{\alpha_2 t + \beta_2 x} + C_3 x + C_4,$$

gdje su C_1, C_2, C_3 i C_4 kojegod konstante, jedan integral jednačine (83).

Tome integralu odgovara ovaj integral jednačine (79):

$$(88)\qquad Z(x, t) = C_1 c\rho_0\,\frac{\alpha_1}{\beta_1}\, e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} + C_2 c\rho_0\,\frac{\alpha_2}{\beta_2}\, e^{\alpha_2 t + \beta_2 x} + C_5,$$

pri čemu bi C_5 moglo biti i funkcija vremena t.

Tome integralu odgovara opet ovaj integral jednačine (78):

$$Y(x,t) = C_1 k c \rho_0^2 \frac{\alpha_1}{\beta_1^2} e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} + C_2 k c \rho_0^2 \frac{\alpha_2}{\beta_2^2} e^{\alpha_2 t + \beta_2 x} + C_5 k \rho_0 x + C_6, \tag{89}$$

pri čemu bi C_6 moglo biti funkcija od t.

Stavimo li vrijednosti (87) i (88) u (82), to dobijemo

$$C_5 = 2 \frac{h}{k\rho_0} C_3, \tag{90}$$

a stavimo li vrijednosti (87) i (89) u (80), dobijemo

$$C_6 = 2h(v_0 + C_4). \tag{91}$$

Zato veličine C_5 i C_6 ne zavise o vremenu.

Pita se, je li moguće veličinama α, β i C dati takove vrijednosti, da gornji integrali zadovoljavaju granične uslove.

Veličine $u(x, t)$, $Z(x, t)$ i $Y(x, t)$ treba da budu periodične funkcije vremena, a to će biti onda, ako veličine α_1 i α_2 budu imaginarne. Stavimo dakle

$$\begin{cases} \alpha_1 = + iN, \\ \alpha_2 = - iN, \end{cases} \tag{92}$$

gdje N označuje jedan realan broj a i imaginarnu jedinicu, to je prema (86)

$$\begin{cases} \beta_1 = k\rho_0 \sqrt{\dfrac{icN}{icN + 2kh}} \\ \beta_2 = k\rho_0 \sqrt{\dfrac{icN}{icN + 2kh}}. \end{cases} \tag{93}$$

Veličine β_1 i β_2 kompleksni su brojevi, i to konjugirano kompleksni, jer drugi dobijemo iz prvoga, ako u ovom i zamijenimo sa $-i$. Zato je

$$\begin{cases} \beta_1 = R + iP \\ \beta_2 = R - iP. \end{cases} \tag{94}$$

Kvadriranjem izraza (93) i (94) dobijemo

$$k^2\rho_0^2 \frac{icN}{icN + 2kh} = R^2 - P^2 + i2PR.$$

U ovoj jednačini moraju biti realni i imaginarni dijelovi na objema stranama međusobno jednaki. Zato je

$$k^2\rho_0^2 cN = cN(R^2 - P^2) + 4khPR$$
$$cNPR = kh(R^2 - P^2),$$

odakle sljeduje, ako kratkoće radi stavimo

$$\frac{k^2\rho_0^2}{2} \frac{c^2N^2}{c^2N^2 + 4k^2h^2} = M^2, \tag{95}$$

$$R^2 - P^2 = 2M^2 \tag{96}$$

$$PR = 2\frac{kh}{cN} M^2, \tag{97}$$

t. j.

$$R^2 = M^2 \left\{ 1 + \sqrt{\frac{c^2N^2 + 4k^2h^2}{c^2N^2}} \right\}.$$

U ovom smo izrazu stavili pred korijen znak $+$, jer je samo onda R realna veličina. Uzmemo li ponovno u obzir (95), to dobijemo

$$\left| \begin{array}{l} R = \pm \sqrt{\dfrac{k\rho_0}{\sqrt{2}} M + M^2} \\ P = \pm \sqrt{\dfrac{k\rho_0}{\sqrt{2}} M - M^2}. \end{array} \right. \tag{98}$$

Stavimo li još kratkoće radi

$$C_1 c\rho_0 \frac{\alpha_1}{\beta_1} = C_1', \quad C_2 c\rho_0 \frac{\alpha_2}{\beta_2} = C_2'; \tag{99}$$

to je s obzirom na prethodne jednačine

$$Z(x,t) = e^{Rx}\left\{C_1' e^{i(Nt+Px)} + C_2' e^{-i(Nt+Px)}\right\} + \frac{2h}{k\rho_0} C_3.$$

Upotrijebimo li E u l e r o v e obrasce

$$e^{i(Nt+Px)} = \cos(Nt+Px) + i\sin(Nt+Px)$$
$$e^{-i(Nt+Px)} = \cos(Nt+Px) - i\sin(Nt+Px),$$

to dobijemo

$$(100) \qquad Z(x,t) = e^{Rx}\left\{(C_1'+C_2')\cos(Nt+Px) + i(C_1'-C_2')\sin(Nt+Px)\right\} + \frac{2h}{k\rho_0} C_3.$$

Ovaj će izraz zadovoljiti uslov (81), ako stavimo

$$(101) \qquad C_1' + C_2' = -(1-A)a_1$$

$$(102) \qquad N = \frac{2\pi}{T}$$

$$(103) \qquad C_1' - C_2' = 0$$

$$(104) \qquad \frac{2h}{k\rho_0} C_3 = -(1-A)a_0;$$

a da $Z(x,t)$ ne bi sa x raslo u beskonačnost, potrebno je, da R bude negativno. No onda je zbog (97) — jer su k, h, c, N i M^2 sami pozitivni brojevi — i P negativno. Zato valja u (98) uzeti pred korijenima negativne znakove. Na taj način dobijemo

$$(105) \qquad Z(x,t) = -(1-A)a_0 - (1-A)a_1 e^{-x\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M + M^2}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - x\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M - M^2}\right).$$

Primijenimo li na (87) i (89) E u l e r o v e obrasce, to dobijemo

$$u(x,t) = e^{Rx}\left\{(C_1+C_2)\cos(Nt+Px) + i(C_1-C_2)\sin(Nt+Px)\right\} + C_3x + C_4$$

$$Y(x,t) = kc\rho_0^2 e^{Rx}\left\{\left(C_1\frac{\alpha_1}{\beta_1^2} + C_2\frac{\alpha_2}{\beta_2^2}\right)\cos(Nt+Px) + i\left(C_1\frac{\alpha_1}{\beta_1^2} - C_2\frac{\alpha_2}{\beta_2^2}\right)\sin(Nt+Px)\right\} + C_5k\rho_0x + C_6.$$

No kako iz jednačina (101), (103), (99), (92) i (94) sljeduje

$$C_1+C_2 = -(1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) = -(1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\frac{2P}{N}$$

$$i(C_1-C_2) = -(1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\, i\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) = -(1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\frac{2R}{N}$$

$$C_1\frac{\alpha_1}{\beta_1^2} + C_2\frac{\alpha_2}{\beta_2^2} = -(1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right) = -(1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\frac{2R}{R^2+P^2}$$

$$i\left(C_1\frac{\alpha_1}{\beta_1^2} - C_2\frac{\alpha_2}{\beta_2^2}\right) = -(1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\, i\left(\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\beta_2}\right) = -(1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\frac{2R}{R^2+P^2};$$

to je

$$(106) \qquad u(x,t) = -(1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\frac{2}{N}e^{Rx}\left\{P\cos(Nt+Px) + R\sin(Nt+Px)\right\} + C_3x + C_4;$$

$$(107) \qquad Y(x,t) = -(1-A)a_1kc\frac{2e^{Rx}}{R^2+P^2}\left\{R\cos(Nt+Px) + P\sin(Nt+Px)\right\} + C_5k\rho_0x + C_6.$$

Kako je R broj negativan, to u gornja dva izraza nestaje prvih članova desne strane za $x = \infty$. Članovi

$$C_3x = -(1-A)a_0\frac{k\rho_0}{2h}x, \quad C_5k\rho_0x = -(1-A)a_0k\rho_0x$$

postali bi beskonačni onda, kada bi gustina atmosfere bila do u beskonačnost ista. Mi smo varijaciju te gustine sa visinom samo za donje slojeve zanemarili; nje u beskonačnosti nestaje. Kako je

$$\lim_{x=\infty} x\rho(x) = \rho_0 \lim_{x=\infty} x e^{-cx} = \frac{\rho_0}{c},$$

to se u gornjim članovima za $x = \infty$ veličine $\rho_0 x$ približavaju granici $\frac{\rho_0}{c}$. Zato je

$$(108) \qquad u(\infty, t) = C_4 - (1-A)\frac{a_0}{2h}\frac{k\rho_0}{c};$$

$$(109) \qquad Y(\infty, t) = C_6 - (1-A)\, a_0 \frac{k\rho_0}{c}.$$

Iz jednačina (10) sljeduje

$$(110) \qquad Y(\infty, t) = - Z(\infty, t),$$

pa je zato prema (105) i (109)

$$(111) \qquad C_6 = +(1-A)\, a_0 + (1-A)\, a_0 \frac{k\rho_0}{c}.$$

Jednačinama (90), (91), (104) i (111) određene su još zaostale konstante C_3, C_4, C_5 i C_6, pa zato dobijemo, uzevši još u obzir (98) i (102),

$$(112) \qquad u(x, t) =$$

$$= (1-A)\, a_1 \frac{1}{c\rho_0}\frac{T}{\pi} e^{-x\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M + M^2}} \left\{ \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M - M^2} \,.\right.$$

$$. \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - x\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M - M^2}\right) + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M + M^2} \,.$$

$$\left. . \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - x\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M - M^2}\right)\right\} - (1-A)\frac{a_0}{2h}k\rho_0 x + (1-A)\frac{a_0}{2h} - v_0 +$$

$$+ (1-A)\frac{a_0}{2h}\frac{k\rho_0}{c}$$

$$(113) \qquad Y(x, t) =$$

$$(1-A)\, a_1 \frac{\sqrt{2}\, c}{\rho_0} e^{-x\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M + M^2}} \left\{ \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M + M^2}\right.$$

$$. \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - x\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M - M^2}\right) + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M - M^2} \,.$$

$$\left. . \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - x\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M - M^2}\right)\right\} - (1-A)\, a_0 k\rho_0 x + (1-A)\, a_0 +$$

$$+ (1-A)\, a_0 \frac{k\rho_0}{c}.$$

Za $a_1 = 0$, t. j. za stacionarno stanje radijacije, dobili bismo

$$u(x,t) = -(1-A)\frac{a_0}{2h}k\rho_0 x + (1-A)\frac{a_0}{2h} - v_0 + (1-A)\frac{a_0}{2h}\frac{k\rho_0}{c}.$$

Ovu bismo jednačinu dobili i iz jednačina (76), (77), (58), (27) i (63), kada bismo izraz e^{-cx} razvili u red i uzeli u obzir samo prva dva člana, pošto pretpostavljamo, da je x maleno.

Temperatura donjega sloja atmosfere, koju u stvari tražimo, data je prema (112) izrazom

$$(114) \qquad u(0, t) = (1-A)\frac{a_0}{2h} - v_0 + (1-A)\frac{a_0}{2h}\frac{k\rho_0}{c} +$$

$$+ (1-A)\frac{a_0}{c\rho_0}\frac{T}{2\pi}\left\{\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M - M^2}\cos\frac{2\pi}{T}t + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M + M^2}\sin\frac{2\pi}{T}t\right\}.$$

Iz (12), (20) i (21) sljeduje

$$(115) \qquad E(t) = \frac{1}{2}\Big[Y(0, t) - Z(0, t)\Big],$$

pa je zato emisija planetske površine s obzirom na (113) i (105) data izrazom

$$(116) \qquad E(t) = (1-A)\, a_0 + (1-A)\frac{a_0}{2}\frac{k\rho_0}{c} +$$

$$+ (1-A)\frac{a_1}{2}\frac{\sqrt{2}\, c}{\rho_0}\left\{\left[\frac{\rho_0}{\sqrt{2}\, c} + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M + M^2}\right]\cos\frac{2\pi}{T}t + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M - M^2}\sin\frac{2\pi}{T}t\right\}.$$

Ekstremi veličine $u(0, t)$ nastupaju u vremenima t_1, pri čemu su t_1 korijeni jednačine

$$(117)\qquad -\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M-M^2}\,\sin\frac{2\pi}{T}t_1 + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M+M^2}\,\cos\frac{2\pi}{T}t_1 = 0$$

ili

$$(118)\qquad \operatorname{tang}\frac{2\pi}{T}t_1 = \sqrt{\frac{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M+M^2}{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M-M^2}}.$$

Upotrijebimo li jednačinu (95), dobijemo

$$(119)\qquad \operatorname{tang}\frac{2\pi}{T}t_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{c^2N^2+4k^2h^2}+cN}{\sqrt{c^2N^2+4k^2h^2}+cN}}.$$

Ekstremi veličine Et nastupaju u vremenima t_2, pri čemu su t_2 korijeni jednačine

$$(120)\qquad \operatorname{tang}\frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M-M^2}}{\frac{\rho_0}{\sqrt{2}\,c}+\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M+M^2}}.$$

ili, zbog (95), jednačine

$$(121)\qquad \operatorname{tang}\frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{kc\sqrt{cN\sqrt{c^2N^2+4k^2h^2}-c^2N^2}}{\sqrt{c^2N^2+4k^2h^2+kc\sqrt{cN\sqrt{c^2N^2+4k^2h^2}+c^2N^2}}}.$$

Iz gornjih jednačina sljeduje, da ekstremi insolacije, temperature planetske površine i temperature donjih slojeva atmosfere nastaju u razna vremena, pa te veličine, oscilujući sa istom periodom, imaju različite faze. Konvekcija u atmosferi, koju nijesmo u prethodnim ispitivanjima uzeli u obzir, umanjit će diferenciju veličina t_1 i t_2.

Da odredimo veličine Maximum $u(0, t)$ i Minimum $(u\,0, t_1)$, kvadrirajmo jednačinu (117), pa dobijemo

$$\left(\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M-M^2\right)\left(1-\cos^2\frac{2\pi}{T}t_1\right) - 2\sqrt{\frac{k^2\rho_0^2}{2}M^2-M^4}\,\sin\frac{2\pi}{T}t_1\cos\frac{2\pi}{T}t_1 + \left(\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M+M^2\right)\left(1-\sin^2\frac{2\pi}{T}t_1\right) = 0.$$

Zato je

$$\left\{\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M-M^2}\,\cos\frac{2\pi}{T}t_1 + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M+M^2}\,\sin\frac{2\pi}{T}t_1\right\}^2 = \sqrt{2}\,k\rho_0 M,$$

t. j.

$$\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M-M^2}\,\cos\frac{2\pi}{T}t_1 + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}}M+M^2}\,\sin\frac{2\pi}{T}t_1 = \pm\sqrt[4]{2}\,\sqrt{k\rho_0 M}.$$

Te vrijednosti, stavljene u (114), daju ove ekstreme veličine $u(0, t)$:

$$(122)\qquad \text{Maximum } u(0, t) = (1-A)\frac{a_0}{2h} - v_0 + (1-A)\frac{a_0}{2h}\frac{k\rho_0}{c} + (1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\frac{T}{2\pi}\sqrt[4]{2}\sqrt{k\rho_0 M}$$

$$(123)\qquad \text{Minimum } u(0, t) = (1-A)\frac{a_0}{2h} - v_0 + (1-A)\frac{a_0}{2h}\frac{k\rho_0}{c} - (1-A)\frac{a_1}{c\rho_0}\frac{T}{2\pi}\sqrt[4]{2}\sqrt{k\rho_0 M}.$$

Na isti način mogu se odrediti ekstremi veličine $E(t)$ ili ekstremi temperature planetske površine.

Mi smo do sada pretpostavili, da je insolacija planete data izrazom (72); ako je ona kojagod funkcija, razvijena u Fourierov red oblika (71), onda dobijemo, kako je lako uvidjeti, mjesto gornjih izraza ove:

$$(124) \qquad u(0, t) = (1-A)\frac{a_0}{2h} - v_0 + (1-A)\frac{a_0}{2h}\frac{k\rho_0}{c} +$$

$$+ (1-A)\frac{1}{c\rho^0}\frac{T}{2\pi}\sum_n \left\{ \frac{a_n}{n}\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}} M_n - M_n^2}\cos\frac{2n\pi}{T}t + \right.$$

$$\left. + \frac{a_n}{n}\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}} M_n + M_n^2}\sin\frac{2n\pi}{T}t \right\} + (1-A)\frac{1}{c\rho_0}\frac{T}{2\pi}\cdot$$

$$\cdot\sum_n \left\{ \frac{b_n}{n}\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}} M_n - M_n^2}\sin\frac{2n\pi}{T}t - \frac{b_n}{n}\sqrt{\frac{k\rho_0}{n} M_n + M_n^2}\cos\frac{2n\pi}{T}t \right\},$$

$$(125) \qquad E(t) = (1-A)\,a_0 + (1-A)\frac{a_0}{2}\frac{k\rho_0}{c} +$$

$$+ (1-A)\frac{\sqrt{2}\,c}{2\rho_0}\sum_n \left\{ a_n\left[\frac{\rho_0}{\sqrt{2}\,c} + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}} M_n + M_n^2}\right]\cos\frac{2n\pi}{T}t + \right.$$

$$\left. + a_n\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}} M_n - M_n^2}\sin\frac{2n\pi}{T}t \right\} + (1-A)\frac{\sqrt{2}\,c}{2\rho_0}\sum_n \left\{ b_n\left[\frac{\rho_0}{\sqrt{2}\,c} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}} M_n + M_n^2}\right]\sin\frac{2n\pi}{T}t - b_n\sqrt{\frac{k\rho_0}{\sqrt{2}} M_n - M_n^2}\cos\frac{2n\pi}{T}t \right\}.$$

Pri tome je

$$(126) \qquad M_n^2 = \frac{k^2\rho_0^2}{2}\frac{n^2\pi^2c^2}{n^2\pi^2c^2 + k^2h^2T^2}$$

Drugi dio,

Nacrt Marsove klime.

Iz prethodnih ispitivanja izlazi, da poznavanje numeričkih vrijednosti konstanata Marsove atmosfere omogućuje računsku odredbu glavnih osobina solarne klime na Marsu. Ta se računska klima ne će — s razloga navedenih u uvodu ove radnje — mnogo razlikovati od faktične Marsove klime.

Pristupimo dakle konstrukciji te klime na Marsu!

Što se tiče pomenutih konstanata Marsove atmosfere, to ih možemo podijeliti na dvije kategorije. U prvu pripadaju one konstante, o veličini kojih smo dovoljno izviješteni na temelju

teleskopskih posmatranja Marsove površine. Drugu kategoriju sačinavaju one konstante, o kojima nam dosadanja posmatranja Marsa nijesu dala još dovoljne informacije. Prvoj kategoriji pripadaju veličine A, p_m i m'_m, kao što ćemo odmah pokazati.

Numeričku vrijednost Marsova albeda poznajemo daleko bolje nego albedo Zemlje, jer je prva vrijednost određena direktnim opažanjima, a o drugoj postoje samo jako nesložna nagađanja. Po albedu možemo odrediti veličinu A na ovaj način: Albedo Marsa čini 0·22[1], pa ta veličina predstavlja efekat refleksije sunčane svjetlosti u Marsovoj atmosferi i na Marsovoj površini. Kako je Marsova površina slična površini zemlje, to se može uzeti, da ona reflektuje dio 0·13[2], a atmosfera dio 0·9 svjetlosti Sunca.

Veličina A predstavlja efekat refleksije totalne sunčane radijacije u Marsovoj atmosferi i na Marsovoj površini. Označimo li prvu refleksiju sa R_2, a drugu sa R_1, to je

$$(127) \qquad A = R_1 + R_2.$$

Sposobnost R_1 refleksije Marsove površine ne će se mnogo razlikovati od sposobnosti refleksije zemaljske površine za totalnu radijaciju Sunca, pa je zato[3]

$$(128) \qquad R_1 = 0{\cdot}08.$$

Sposobnost R_2 refleksije čini po prilici polovinu refleksivne sposobnosti Marsove atmosfere za svijetle zrake[4]. Zato je

$$(129) \qquad R_2 = 0{\cdot}04,$$

t. j.

$$(130) \qquad A = 0{\cdot}12.$$

I o numeričkoj vrijednosti veličine p_m informirani smo dosta dobro. Ona stoji po svoj prilici među granicama označenim u nejednakosti (29), pa zato ne ćemo mnogo griješiti, ako prihvatimo vrijednost (30).

[1] Müller, Photometrie der Gestirne, Leipzig 1897. str. 373.
[2] Arrhenius, Das Schicksal der Planeten, Leipzig 1911. str. 9.
[3] Abbot and Fowle, Annals of the astrophysical Observatory of the Smitsonian Institution. Vol. II. Washington 1908.
[4] Vidi gore citiranu radnju Arrhenisovu str. 9.

Numeričku vrijednost veličine p'_m možemo na ovaj način približno odrediti: Na Marsovoj površini jako udaraju u oči savršeno bijele kalote, koje pokrivaju polarne krajeve te planete. One mijenjaju u godini svoju veličinu tako, da se kalota one hemisfere, koja ulazi u ljetno polugodište, osjetno smanjuje. Na južnoj hemisferi, na kojoj se ljetna sezona podudara sa prolazom Marsa kroz perihel i koja, prema tome, ima veoma toplo ljeto, gdjekojih godina nestaje polarne kalote sasvim. Većina naučenjaka suglasni su u tome, da te kalote jesu, kao i na našoj zemlji, sniježna polja ili, još vjerojatnije, polja jaka mraza, jer Marsova atmosfera nije tako obilna vodenom parom kao atmosfera Zemlje. Po toj pojavi može se s pravom zaključivati, da atmosferski sloj, koji leži nad južnim polom, za ljetnoga solsticija zagrijevaju sunčane zrake na temperaturu, koja je samo neznatno viša od 0^0 C ili 273^0 u apsolutnoj mjeri.

Insolacija Marsovih polova za vrijeme ljetnih solsticija gotovo je stacionarna, jer se visina sunca nad horizontom mijenja u to doba samo neosjetno. Zato možemo za odredbu temperatura donjega sloja atmosfere i površine planetske upotrijebiti jednačine (52) i (57), ako u njima za W_m stavimo solsticijalnu insolaciju uočenoga pola.

Insolacija južnoga Marsova pola za ljetnoga Marsova solsticija predstavljena je izrazom

$$W'_{TS} = \frac{I_0}{a'^2}(1 + 2e \sin \Pi) \sin \varepsilon, \tag{131}$$

gdje I_0 označuje solarnu konstantu, a' veliku poluos Marsova puta mjerenu u velikim poluosima puta zemaljskoga, e ekscentricitet Marsova puta, Π dužinu perihela, mjerenu od proljetne tačke Marsa, a ε nagib Marsove rotacione osi. Vrijednostima

$$I_0 = 2\,\frac{\text{gram-kalorije}}{\text{cm}^2 \times \text{minuta}} \tag{132}$$

$$\left|\begin{aligned} a' &= 1{\cdot}5237 \\ e &= 0{\cdot}0933 \\ \varepsilon &= 25^0 13' \\ \Pi &= 290^0 28' \end{aligned}\right. \tag{133}$$

dobijemo

$$W'_{TS} = 0{\cdot}4312\,\frac{\text{gram-kalorije}}{\text{cm}^2 \times \text{minuta}}. \tag{134}$$

Kako je

$$\sigma = 0{\cdot}76 \times 10^{-10}\,\frac{\text{gram-kalorije}}{\text{cm}^2 \times \text{minuta}}, \tag{135}$$

to vrijednostima $u(0) = 0$, (130), (134) i (135) dobijemo s pomoću jednačine (52):

$$p'_m = 0{\cdot}30. \tag{136}$$

Gornjim vrijednostima dobijemo s pomoću jednačine (57) za temperaturu tla na južnom polu za ljetnog solsticija vrijednost od 32^0 C. Ova velika razlika između temperature tla i donjega sloja atmosfere nije neočekivana. Velika prozirnost Marsove atmosfere za sunčane zrake čini, da je Marsova klima veoma slična visinskoj klimi naše zemlje, koja se takođe odlikuje visokim temperaturama tla, a niskim temperaturama vazduha. Tako su, primjera radi, opažanja na Pic du Midi-u konstatovala razlike od punih 39^0 C između temperature tla i vazduha.[1]

U ostalom, vjerojatno je, da će faktična razlika između temperature tla i donjeg sloja atmosfere biti manja nego gornja izračunata vrijednost, jer vertikalne konvekcione struje u atmosferi, koje nijesmo u gornjim računima uzeli u obzir, umanjuju tu diferenciju, pa temperaturu tla snižavaju, a temperature donjih slojeva atmosfere povisiju. S toga bi razloga i jedan transmisioni koeficijenat nešto viši od 0·30 mogao izazvati nestajanje južne polarne kape Marsove. Takav bi viši transmisioni koeficijenat pretpostavljao i manju sadržinu plinova (vodene pare i ugljene kiseline), koji apsorbuju tamne radijacije, što prolaze kroz Marsovu atmosferu, pa bi bolje odgovarao novijim — no još uvijek veoma nepouzdanim — konstatacijama vodene pare u toj atmosferi. Mi pored svega toga ne ćemo mijenjati izračunatu vrijednost (136), jer bi to mijenjanje bilo ipak neko nagađanje, nego ćemo se zadovoljiti time, da konstatujemo, da je faktična vrijednost veličine p'_m vjerojatno nešto viša. Uzmemo li povrh svega

[1] Hann, Handbuch der Klimatologie. I Bd. Stuttgart 1908. str. 207.

toga u obzir, da je stvarna vrijednost veličine p_m nešto niža nego vrijednost (30) i da nijesmo uzeli u obzir, da isparivanje Marsovih oborina, po svoj prilici neznatnih, takođe snizuje temperaturu Marsove površine: to možemo očekivati, da će temperature na Marsu, koje ćemo sada s pomoću gornjih numeričkih vrijednosti izračunati, biti nešto više nego faktične temperature. One nam dakle predstavljaju dosta pouzdane gornje granice; a te su, kao što smo u uvodu spomenuli, glavna svrha ove naše radnje.

S pomoću jednačina (52) i (57) i gornjih brojeva možemo sada izračunati srednje godišnje temperature paralela Marsove površine i donjega atmosferskog sloja, ako na mjesto veličine W_m stavimo srednje godišnje toplotne množine, što ih Marsove paralele primaju od sunca.

Izračunavanje tih toplotnih množina bilo je predmet jedne naše druge radnje.[1] Mi smo u njoj označili sa W_e i W_k one toplotne množine, što ih prima uočena paralela za ljetne odnosno za zimske polugodine i izveli obrasce za izračunavanje tih veličina. S pomoću tih obrazaca izračunate su za svaki deseti stupanj geografičke širine na Marsu veličine W_e, W_h i $W_T = W_a + W_h$ i saopćene u tablici I. Pri tome su jedinice toplote i vremena odabrane tako, da je stavljeno $I_0 = 1$, $T = 1$, gdje T označuje dužinu Marsove godine. Zato ćemo dobiti srednju godišnju toplotnu množinu, koju prima jedinica površine na uočenoj paraleli u jedinici vremena, ako veličine W_T tablice I. pomnožimo sa I_0.

Stavimo li dakle u jednačinama (52) i (57)

$$W_m = W_T I_0, \tag{137}$$

to dobijemo srednje godišnje temperature Marsovih paralela složene u tablici II.

---

[1] Милaнковић, О распореду сунчеве радијације на површини земље. „Глас Српске Краљевске Академије", књ. XCI. (1913.).

Tablica I.

φ	W_e	W_h	W_T
0°	0·0656	0·0656	0·1312
10°	0·0699	0·0596	0·1295
20°	0·0721	0·0521	0·1242
30°	0·0724	0·0431	0·1155
40°	0·0709	0·0333	0·1042
50°	0·0678	0·0228	0·0906
60°	0·0635	0·0127	0·0762
70°	0·0603	0·0051	0·0654
80°	0·0590	0·0012	0·0602
90°	0·0587	0·0000	0·0587

Tablica II.

Srednje godišnje temperature na Marsu.

Geografička širina	Temperatura (°C) tla	Temperatura (°C) atmosfere
0°	— 3°	—32°
10°	— 4°	—33°
20°	— 7°	—36°
30°	—12°	—40°
40°	—18°	—46°
50°	—27°	—54°
60°	—38°	—63°
70°	—46°	—71°
80°	—51°	—75°
90°	—52°	—76°

Iz gornjih temperatura dobijemo srednju temperaturu čitave Marsove površine:

$$u_m = -17^0\,\mathrm{C} \tag{138}$$

i srednju temperaturu donjega sloja njegove atmosfere

$$u'_m = -45^0\,\mathrm{C}. \tag{139}$$

Temperature Marsovih mora ne će se mnogo razlikovati od temperatura tla, pa će zato te temperature i u samom tropskom pojasu biti niže od 0° C. Da se pored svega toga ta mora ne smrzavaju, po Arrheniusu je uzrok u tome, što ona imaju u sebi veliku sadržinu soli[1]. Tako se koncentrirani rastvor kuhinjske soli smrzava tek kod — 22° C.

Dnevni i godišnji tok temperature oscilovat će s velikim amplitudama oko vrijednosti unesenih u tablicu II. Poslije silno hladne noći bit će sunčani, relativno topli dan. Sliku toga toka mogli bismo dobiti na osnovu teorije izvedene u § 4. ove radnje, kada bismo poznavali numeričke vrijednosti konstanata k, ρ_0 i c. No o tim vrijednostima nijesmo dovoljno obaviješteni. Lowell je doduše pokušao, da ih odredi na osnovu nekih pretpostavaka[2], no ove mi se ne čine dovoljno opravdane, a da bih mogao Lowellove vrijednosti upotrijebiti.

[1] Arrhenius, Das Werden der Welten. Leipzig 1913. str. 54.

[2] Lowell P., A general method for evaluating the surface-temperatures of the planets; whith special reference to the temperature of Mars; Philosophical Magazine 1907.