PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITETA U BEOGRADU

MR DIMITRIJE ANDRIJEVIĆ

TOPOLOGIJE GENERISANE UOPŠTENIM OTVORENIM SKUPOVIMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Beograd, 1989.

P R E D G O V O R

Predmet proučavanja ovog rada su topologije generisane uopštenim otvorenim skupovima. Pod klasom uopštenih otvorenih skupova topološkog prostora $(X,\mathcal{T})$ podrazumeva se ma koja klasa podskupova skupa X koja je šira od $\mathcal{T}$ i koja je zatvorena u odnosu na proizvoljnu uniju. Za nas će u ovom radu od posebnog značaja biti klase semi-otvorenih, preotvorenih, semi-preotvorenih i α-skupova.

Pojam semi-otvorenog skupa topološkog prostora uveo je Levine [56] 1963. godine. Nezavisno od njega do istog pojma dolaze Njåstad [69] i Isomichi [49]. Koristeći činjenicu da su osobine semi-otvorenih skupova u mnogo čemu bliske osobinama otvorenih skupova, Crossley i Hildebrand [19] i Das [21] uvode pojmove kao što su semi-okolina tačke, tačka semi-nagomilavanja, semi-zatvorenje skupa, semi-unutrašnjost skupa i dr. zamenjujući u svakoj odgovarajućoj definiciji otvoren skup semi-otvorenim skupom. Pojam semi-topološkog svojstva topološkog prostora uvode Crossley i Hildebrand [20] 1972. godine. Definišu da je svojstvo topološkog prostora semi-topološko ako ga čuvaju semi-homeomorfizmi, tj. bijekcije pri kojima su slike i inverzne slike semi-otvorenih skupova semi-otvoreni skupovi. U [20], [17] i [45] je pokazano da su svojstva prostora da bude Hausdorffov, jako-Hausdorffov, Urysohnov, prve kategorije, separabilan, koneksan i Baireov semi-topološka. Problemom ispitivanja semi-topoloških svojstava bave se i Sivaraj [92], Banerjee - Chhanda Bandyopadhyay [11] a do značajnog rezultata dolazi Janković u [50]. On pokazuje da je svako semi-regularno svojstvo i semi-topološko. Crossley i Hildebrand [19] pokazuju da klasa ekvivalencije $S(\mathcal{T})$ topologija na X koje imaju iste semi-otvorene skupove kao i topologija $\mathcal{T}$ ima najfiniji element $F(\mathcal{T})$. Karakterizacija topologije $F(\mathcal{T})$ kao $\{U - N: U \in \mathcal{T}$ i N je nigde gust u $(X,\mathcal{T})\}$ data u [16] u mnogome je pojednostavila postupak kod dokazivanja da je neko svojstvo semi-topološko. Međutim, na isti način okarakterisana je i topologija α-skupova topološkog prostora koju je uveo Njåstad [69] 1965. godine. Činjenica da su elementi pomenute topologije eksplicitno dati pomoću operatora zatvorenja i unutrašnjosti polaznog prostora omogućuje da se na pravi način opišu semi-topološka svojstva. Do pojma α-skupa dolaze na drugi način i Maheshwari i Tapi [60] zamenjujući u Levineovoj definiciji semi-otvorenog skupa zatvorenje otvorenog skupa njegovim semi-zatvorenjem. I na kraju, 1984. godine u [5] operatori zatvorenja i unutrašnjosti topologije α-skupova iskazani su direktno u funkciji odgovarajućih operatora polazne topologije. To je omogućilo da se dokazi da je neko svojstvo semi-topološko još više uproste.

Pojam preotvorenog skupa topološkog prostora uveli su Mashhour, Abd El-Monsef i El-Deeb [64] 1982. godine. Kao i u slučaju semi-otvorenih skupova, sledeći korak je bio uvođenje i ispitivanje osobina operatora prezatvorenja i preunutrašnjosti što je urađeno u [31] i [67]. Pojam semi-preotvorenog skupa topološkog prostora uveli su Abd El-Monsef, El-Deeb i Mahmoud [1] 1983. godine. Isti pojam uveden je i u radovima [34] i [6]. Operatori semi-prezatvorenja i semi-preunutrašnjosti uvedeni su i ispitivani u radovima [3] i [6]. Pojmovi preotvorenog i semi-preotvorenog skupa prirodno se nadovezuju na pojmove semi-otvorenog skupa i α-skupa. Ove četiri klase danas predstavljaju osnovne klase uopštenih otvorenih skupova a interes za njihovo izučavanje postaje sve veći. Možemo naznačiti dva osnovna pravca istraživanja u vezi sa uopštenim otvorenim skupovima. S jedne strane pomenute četiri klase skupova su omogućile uvođenje niza novih svojstava preslikavanja kao što su semi-neprekidnost [56], semi-otvorenost [12], irezolutnost [20], pre-semi-otvorenost [20], preneprekidnost [64], preotvorenost [64], α-neprekidnost [66], β-neprekidnost [1], pre-irezolutnost [89] i dr. U pomenutim radovima kao i u mnogim drugim proučavaju se međusobni odnosi ovih klasa preslikavanja kao i njihove veze sa drugim klasama koje su bliske klasi neprekidnih preslikavanja. Osnovni cilj je da se odrede dovoljni uslovi za neprekidnost preslikavanja. Drugi pravac istraživanja dovodi u vezu uopštene otvorene skupove sa nekim osnovnim topološkim pojmovima kao što su kompaktnost, H-zatvorenost, parakompaktnost, povezanost i dr. S jedne strane pokušava se da se ovi pojmovi izraze u terminima vezanim za pojedine klase uopštenih otvorenih skupova što često ima za posledicu da se neke poznate teoreme dokažu pod slabijim pretpostavkama. S druge strane uopšteni otvoreni skupovi omogućili su uvođenje nekih novih klasa prostora kao što su semi-kompaktni [26,88], S-zatvoreni [94], s-zatvoreni [23], jako-kompaktni [68], jako-Lindelöfovi [68], α-kompaktni [62], P_1-parakompaktni [67], P_2-parakompaktni [67] i dr. U ovim radovima kao i u mnogim drugim se nastoji da se novouvedeni pojmovi izraze pomoću već postojećih. Tako su na primer Ganster i Reilly [40] pokazali da je topološki prostor P_1-parakompaktan ako i samo ako je parakompaktan i submaksimalan. Što se tiče odnosa uopštenih otvorenih skupova i aksioma separacija, pomenućemo brojne nove aksiome separacije uvedene pomoću klase semi-otvorenih skupova u radovima Dorsetta [24,25,27] i Maheshwarija i Prasada [58,59].

U ovom radu bavimo se sledećim problemom teorije uopštenih otvorenih skupova koji je do sada prošao gotovo neprimećen. Naime Njåstad [69] je pokazao da se topológija α-skupova sastoji iz tačno onih semi-otvorenih skupova čiji je presek sa svakim semi-otvorenim skupom takođe semi-otvoren skup. Lako se vidi da se na ovaj način može od ma koje klase uopštenih otvorenih skupova dobiti jedna nova topologija na datom skupu. Kao što je topologija α-skupova bila ključ za rešavanje problema u vezi sa semi-topološkim svojstvima, prirodno je očekivati da će izučavanje osobina topologija generisanih preotvorenim odnosno semi-preotvorenim skupovima dati podsticaj ispitivanju pretopoloških i semi-pretopoloških svojstava topoloških prostora.

U prvoj glavi su uvedene osnovne definicije i teoreme koje će biti potrebne u daljem radu. Većina rezultata data je bez dokaza a izuzetak je uglavnom u onim slučajevima gde se dokaz razlikuje od ranije datih.

U prvom odeljku druge glave ispitane su osobine i uzajamne veze operatora generisanih klasama semi-otvorenih i preotvorenih skupova. Na taj način razvija se aparat koji će biti osnovno oruđe u ovom radu. Drugi odeljak posvećen je semi-preotvorenim skupovima . Najznačajniji rezultat dat je u teoremi 2.2.41. koja u slučaju neuporedivosti klasa semi-otvorenih i preotvorenih skupova obezbeđuje egzistenciju semi-preotvorenog skupa koji nije ni semi-otvoren ni preotvoren. Preciznije, ako pomenute tri klase označimo sa $SO(\mathcal{T})$, $PO(\mathcal{T})$ i $SPO(\mathcal{T})$, onda je $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$ ili $PO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{T})$. Od ostalih rezultata datih u ovom odeljku pomenimo karakterizaciju ekstremalno diskoneksnih prostora pomoću prezatvorenja i preunutrašnjosti datu u teoremi 2.2.32., kao i karakterizaciju prostora koji sadrže otvoren, gust i nasledno nerastavljiv potprostor pomoću semi-zatvorenja i semi-unutrašnjosti datu u teoremi 2.2.33. U poslednjem odeljku ove glave ispitujemo kada su topologije određene predbazama $PO(\mathcal{T})$, $SO(\mathcal{T})$ i $SPO(\mathcal{T})$ diskretne.

Prvi odeljak treće glave je centralan u radu. U njemu je pokazano da se topologije generisane klasama preotvorenih i semi-preotvorenih skupova poklapaju. Na taj način osobine pomenute topologije, koju označavamo sa $\mathcal{T}_\gamma$, postaju središte našeg interesa. Topologija $\mathcal{T}_\gamma$ je u opštem slučaju finija od topologije α-skupova koju označavamo sa $\mathcal{T}_\alpha$, i teorema 3.1.44. pokazuje da je jednakost pomenutih topologija ekvivalentna uslovu da je dati prostor semi-T_D. Sledeći važan rezultat daje teorema 3.1.29. koja pokazuje da se topologija $\mathcal{T}_\gamma$ ponaša u odnosu na semi-preotvorene skupove isto kao i topologija $\mathcal{T}_\alpha$ u odnosu na semi-otvorene skupove. Mogućnost da se operatori zatvorenja i unutrašnjosti u $\mathcal{T}_\alpha$ eksplicitno izraze pomoću odgovarajućih operatora u $\mathcal{T}$ podstakla je ispitivanje osobina operatora zatvorenja i unutrašnjosti u $\mathcal{T}_\gamma$. Mada u ovom slučaju takvu mogućnost nemamo, veze između odgovarajućih operatora u $\mathcal{T}_\alpha$ i $\mathcal{T}_\gamma$ ustanovljene u 3.1.30. - 3.1.32. imaće mnoge korisne posledice. Na kraju ovog odeljka uveden je skup $B(\mathcal{T})$ preotvorenih, neizolovanih jednočlanih skupova u $\mathcal{T}$ pomoću koga se opisuje "odstupanje" topologije $\mathcal{T}_\gamma$ u odnosu na topologiju $\mathcal{T}_\alpha$. Skup B je osnovni za sve dalje konstrukcije u radu. Određeni elementi skupa B zajedno sa α-skupovima generišu tri topologije na datom prostoru $(X,\mathcal{T})$ bitne za klase uopštenih otvorenih skupova koje se ispituju. Pomenimo i sledeća dva rezultata data u 3.1.57. i 3.1.58. Prvi tvrdi da je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je B otvoreno-zatvoren skup, a drugi da je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je B otvoren skup.

Svaki od preostalih osam odeljaka bavi se po jednim krugom pitanja u vezi sa topologijom $\mathcal{T}_\gamma$. U drugom odeljku je nastavljeno ispitivanje osobina operatora zatvorenja i unutrašnjosti u $\mathcal{T}_\gamma$. Između ostalog utvrđene su njihove veze sa ranije uvedenim operatorima. Treći odeljak posvećen je ponašanju topologije $\mathcal{T}_\gamma$ u odnosu na potprostor, topološku sumu i topološki proizvod dok se u odeljku 3.4. određuju potrebni i dovoljni uslovi da klase $PO(\mathcal{T})$ i $SPO(\mathcal{T})$ budu topologije. U petom odeljku uvedena je klasa $P(\mathcal{T})$ topologija na skupu X koje imaju iste preotvorene skupove kao topologija $\mathcal{T}$. Pokazano je da je ta klasa šira od klase $S(\mathcal{T})$ i dat je niz potrebnih i dovoljnih uslova da dve topologije pripadaju istoj klasi. Kao što smo već pomenuli, Njåstad [69] i Crossley i Hildebrand [19] pokazali su da je topologija $\mathcal{T}_\alpha$ najfiniji element u klasi $S(\mathcal{T})$. Problem postojanja najfinijeg elementa u klasi $P(\mathcal{T})$ je osnovno pitanje sledećeg odeljka. Pomoću topologije $\mathcal{T}_\alpha$ i otvoreno-zatvorenih jednočlanih skupova u $\mathcal{T}_\gamma$ dobija se jedna nova topologija $\mathcal{T}_M$ koja je supremum klase $P(\mathcal{T})$. Primer 19 pokazuje da klasa $P(\mathcal{T})$ ne mora imati najfiniji element. U odeljku 3.7. uvedena je klasa $SPO(\mathcal{T})$ topologija na skupu X koje imaju iste semi-preotvorene skupove kao topologija $\mathcal{T}$. Pokazano je da je ta klasa šira od klase $P(\mathcal{T})$ uvedene u odeljku 3.5. i utvrđeni su potrebni i dovoljni uslovi da dve topologije pripadaju istoj klasi. Pomenimo i teoremu 3.7.21. koja tvrdi da topologija $\mathcal{T}_M$ pripada klasi $SP(\mathcal{T})$. U poslednja dva odeljka ovog rada uvedene su još dve nove topologije $\mathcal{T}_N$ i $\mathcal{T}_R$ koje se nalaze između $\mathcal{T}_\alpha$ i $\mathcal{T}_\gamma$. Topologija $\mathcal{T}_N$ koju generišu α-skupovi i regularno otvoreni jednočlani skupovi u $\mathcal{T}_\gamma$ je analogon za klasu $SP(\mathcal{T})$ topologije $\mathcal{T}_M$ uvedene za klasu $P(\mathcal{T})$. Ona je gornje ograničenje klase $SP(\mathcal{T})$ ali ne mora da joj pripada. Osobine ove topologije opisane su stavovima 3.8.1. - 3.8.15. Na kraju u poslednjem odeljku, pokazano je da klasa $SP(\mathcal{T})$ ima najveći element. To je topologija $\mathcal{T}_R$ čiju bazu čine α-skupovi i svi jednočlani skupovi iz unutrašnjosti skupa B.

Zahvaljujem prof. **Mili Mršević** na korisnim savetima, strpljenju i podršci koju mi je ukazala prilikom izrade ovog rada.

Takođe zahvaljujem i dr Maximilianu Gansteru na inspirativnoj naučnoj saradnji.

S A D R Ž A J

1. UVOD

U prvoj glavi nalaze se osnovni rezultati u vezi sa najvažnijim klasama uopštenih otvorenih skupova. Tako je prvi odeljak posvećen semi-otvorenim skupovima, drugi odeljak preotvorenim a treći α-skupovima. Neki rezultati se koriste neposredno, a neki će poslužiti kao motivacija odnosno putokaz za dalja istraživanja. Poslednji odeljak ove glave posvećen je Hewittovoj reprezentaciji topološkog prostora. U njemu je prikazana jedna metoda koja će u daljem radu biti od velike koristi.

U radu se koriste sledeće oznake. Topološki prostor se označava sa $(X,\mathcal{T})$ odnosno samo sa X ako nije neophodno topologiju posebno isticati. Klasa zatvorenih skupova prostora $(X,\mathcal{T})$ označava se sa $C(\mathcal{T})$ a klasa otvoreno-zatvorenih skupova sa $CO(\mathcal{T})$. Ako je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$, onda se sa clA odnosno intA označava zatvorenje odnosno unutrašnjost skupa A u tom prostoru. Relativno zatvorenje (resp. unutrašnjost) skupa A u odnosu na potprostor $(Y,\mathcal{T}_Y)$ prostora $(X,\mathcal{T})$ označava se sa cl_YA (resp. int_YA). Klasa regularno otvorenih (resp. regularno zatvorenih) skupova prostora $(X,\mathcal{T})$ označava se sa $RO(\mathcal{T})$ (resp. $RC(\mathcal{T})$). Sa $N(\mathcal{T})$ označava se klasa nigde gustih a sa $D(\mathcal{T})$ klasa gustih skupova prostora $(X,\mathcal{T})$. Komplemente gustih skupova, tj. skupove koji imaju praznu unutrašnjost, zvaćemo kogustim skupovima.

Bez posebnog naglašavanja često se koristi sledeći dobro poznati rezultat:

Teorema A. Neka je G otvoren a F zatvoren podskup prostora X. Tada za svaki podskup A važi sledeće:

(1) $\mathrm{cl}A \cap G \subset \mathrm{cl}(A \cap G)$,

(2) $\mathrm{int}(A \cup F) \subset \mathrm{int}A \cup F$.

1.1. Semi-otvoreni skupovi

Pojam semi-otvorenog skupa topološkog prostora uveo je Levine u radu [56]. Nezavisno od njega do istog pojma dolaze Njåstad [69] i Isomichi [49].

Definicija. Podskup A prostora X je semi-otvoren ako postoji otvoren skup U takav da je $U \subset A \subset \mathrm{cl}U$. Klasu semi-otvorenih skupova prostora $(X,\mathcal{T})$ označavaćemo sa $SO(\mathcal{T})$.

Na ovaj način dobijena je jedna klasa skupova prostora $(X,\mathcal{T})$ koja je šira od $\mathcal{T}$. Kolekcija $SO(\mathcal{T})$ nije topologija na X ali je zatvorena u odnosu na uniju. Ovde su citirani rezultati koji se kasnije koriste i koji se mogu naći u radovima [19], [21] i [56].

Teorema 1.1.1. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $A \in SO(\mathcal{T})$.

(b) $A \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$.

(c) $\mathrm{cl}A = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$.

Teorema 1.1.2. Unija proizvoljne familije semi-otvorenih skupova je semi-otvoren skup.

Presek dva semi-otvorena skupa nije u opštem slučaju semi-otvoren. Međutim, važi sledeće:

Teorema 1.1.3. Presek otvorenog i semi-otvorenog skupa je semi-otvoren skup.

<u>Definicija</u>. Podskup A prostora $(X,\mathcal{T})$ je <u>semi-zatvoren</u> ako je $X - A \in SO(\mathcal{T})$. Klasu semi-zatvorenih skupova prostora $(X,\mathcal{T})$ označavaćemo sa $SC(\mathcal{T})$.

Sledeća tri stava su dualna prethodnim.

<u>Teorema 1.1.4.</u> Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $A \in SC(\mathcal{T})$.
(b) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \subset A$.
(c) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{int}A$.

<u>Teorema 1.1.5.</u> Presek proizvoljne familije semi-zatvorenih skupova je semi-zatvoren skup.

<u>Teorema 1.1.6.</u> Unija zatvorenog i semi-zatvorenog skupa je semi-zatvoren skup.

Za podskup A prostora X označićemo sa $\mathrm{scl}A$ <u>semi-zatvorenje</u> skupa A, tj. presek svih semi-zatvorenih skupova u X koji sadrže A.

<u>Teorema 1.1.7.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je $x \in \mathrm{scl}A$ ako i samo ako je $S \cap A \neq \emptyset$ za svaki semi-otvoren skup S koji sadrži x.

<u>Teorema 1.1.8.</u> Neka su A i B podskupovi prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $A \subset \mathrm{scl}A \subset \mathrm{cl}A$,
(2) $\mathrm{scl}A \in SC(\mathcal{T})$,
(3) $A \in SC(\mathcal{T}) \Leftrightarrow A = \mathrm{scl}A$,
(4) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{scl}A \subset \mathrm{scl}B$,
(5) $\mathrm{scl}(\mathrm{scl}A) = \mathrm{scl}A$,
(6) $\mathrm{scl}A \cup \mathrm{scl}B \subset \mathrm{scl}(A \cup B)$,
(7) $\mathrm{scl}(A \cap B) \subset \mathrm{scl}A \cap \mathrm{scl}B$,
(8) $\mathrm{scl}(\emptyset) = \emptyset$.

Za podskup A prostora X označićemo sa $\mathrm{sint}A$ <u>semi-unu-</u>

<u>trašnjost</u> skupa A, tj. uniju svih semi-otvorenih skupova u X koji su sadržani u A.

<u>Teorema 1.1.9.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je $x \in \mathrm{sint}A$ ako i samo ako postoji semi-otvoren skup S takav da je $x \in S \subset A$.

<u>Teorema 1.1.10.</u> Neka su A i B podskupovi prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $\mathrm{int}A \subset \mathrm{sint}A \subset A$,
(2) $\mathrm{sint}A \in SO(\mathcal{T})$,
(3) $A \in SO(\mathcal{T}) \Leftrightarrow A = \mathrm{sint}A$,
(4) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{sint}A \subset \mathrm{sint}B$,
(5) $\mathrm{sint}(\mathrm{sint}A) = \mathrm{sint}A$,
(6) $\mathrm{sint}(A \cap B) \subset \mathrm{sint}A \cap \mathrm{sint}B$,
(7) $\mathrm{sint}A \cup \mathrm{sint}B \subset \mathrm{sint}(A \cup B)$,
(8) $\mathrm{sint}X = X$.

Sledeći stav daje nam vezu između semi-zatvorenja i semi-unutrašnjosti.

<u>Teorema 1.1.11.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $\mathrm{scl}(X - A) = X - \mathrm{sint}A$,
(2) $\mathrm{sint}(X - A) = X - \mathrm{scl}A$.

Odeljak zaključujemo jednom posledicom stavova 1.1.3. i 1.1.6.

<u>Teorema 1.1.12.</u> Neka su A i B podskupovi prostora X. Tada je:

(1) $\mathrm{scl}(\mathrm{cl}A \cup B) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{scl}B$,
(2) $\mathrm{sint}(\mathrm{int}A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{sint}B$.

1.2. Preotvoreni skupovi

Pojam preotvorenog skupa topološkog prostora uveli su Mashhour, Abd El-Monsef i El-Deeb u radu [64]. To je klasa uopštenih otvorenih skupova koja takođe nije zatvorena u odnosu na presek. Većina rezultata koji se citiraju u ovom odeljku može se naći u [64], [67] i [36].

Definicija. Podskup A prostora X je preotvoren ako je $A \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$. Klasu preotvorenih skupova prostora $(X,\mathcal{T})$ označavaćemo sa $PO(\mathcal{T})$.

Teorema 1.2.1. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $A \in PO(\mathcal{T})$.

(b) Postoji $G \in RO(\mathcal{T})$ takav da je $A \subset G \subset \mathrm{cl}A$.

(c) A je presek regularno otvorenog i gustog skupa.

(d) A je presek otvorenog i gustog skupa.

Teorema 1.2.2. Unija proizvoljne familije preotvorenih skupova je preotvoren skup.

Presek dva preotvorena skupa nije u opštem slučaju preotvoren. Međutim, važi sledeće:

Teorema 1.2.3. Presek otvorenog i preotvorenog skupa je preotvoren skup.

Definicija. Podskup A prostora $(X,\mathcal{T})$ je prezatvoren ako je $X - A \in PO(\mathcal{T})$. Klasu prezatvorenih skupova u $(X,\mathcal{T})$ označavaćemo sa $PC(\mathcal{T})$.

Teorema 1.2.4. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $A \in PC(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $\mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset A$.

Sledeća tvrđenja su dualna teoremama 1.2.2. i 1.2.3.

Teorema 1.2.5. Presek proizvoljne familije prezatvorenih skupova je prezatvoren skup.

<u>Teorema 1.2.6.</u> Unija zatvorenog i prezatvorenog skupa je prezatvoren skup.

Za podskup A prostora X označićemo sa pclA <u>prezatvorenje</u> skupa A, tj. presek svih prezatvorenih skupova u X koji sadrže A.

<u>Teorema 1.2.7.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je $x \in \mathrm{pcl}A$ ako i samo ako je $P \cap A \neq \emptyset$ za svaki preotvoren skup P koji sadrži x.

<u>Teorema 1.2.8.</u> Neka su A i B podskupovi prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $A \subset \mathrm{pcl}A \subset \mathrm{cl}A$,

(2) $\mathrm{pcl}A \in PC(\mathcal{T})$,

(3) $A \in PC(\mathcal{T}) \Leftrightarrow A = \mathrm{pcl}A$,

(4) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{pcl}A \subset \mathrm{pcl}B$,

(5) $\mathrm{pcl}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}A$,

(6) $\mathrm{pcl}A \cup \mathrm{pcl}B \subset \mathrm{pcl}(A \cup B)$,

(7) $\mathrm{pcl}(A \cap B) \subset \mathrm{pcl}A \cap \mathrm{pcl}B$,

(8) $\mathrm{pcl}(\emptyset) = \emptyset$.

Za podskup A prostora X označićemo sa pintA <u>preunutrašnjost</u> skupa A, tj. uniju svih preotvorenih skupova u X koji su sadržani u A.

<u>Teorema 1.2.9.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je $x \in \mathrm{pint}A$ ako i samo ako postoji preotvoren skup P takav da je $x \in P \subset A$.

<u>Teorema 1.2.10.</u> Neka su A i B podskupovi prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $\mathrm{int}A \subset \mathrm{pint}A \subset A$,

(2) $\mathrm{pint}A \in PO(\mathcal{T})$,

(3) $A \in PO(\mathcal{T}) \Leftrightarrow A = \mathrm{pint}A$,

(4) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{pint}A \subset \mathrm{pint}B$,

(5) $\mathrm{pint}(\mathrm{pint}A) = \mathrm{pint}A$,
(6) $\mathrm{pint}(A \cap B) \subset \mathrm{pint}A \cap \mathrm{pint}B$,
(7) $\mathrm{pint}A \cup \mathrm{pint}B \subset \mathrm{pint}(A \cup B)$,
(8) $\mathrm{pint}X = X$.

Sledeći stav daje vezu između prezatvorenja i preunutrašnjosti.

<u>Teorema 1.2.11.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $\mathrm{pcl}(X - A) = X - \mathrm{pint}A$,
(2) $\mathrm{pint}(X - A) = X - \mathrm{pcl}A$.

Kao posledicu stavova 1.2.3. i 1.2.6. dobijamo sledeći rezultat:

<u>Teorema 1.2.12.</u> Neka su A i B podskupovi prostora X. Tada je:
(1) $\mathrm{pcl}(\mathrm{cl}A \cup B) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{pcl}B$,
(2) $\mathrm{pint}(\mathrm{int}A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{pint}B$.

Sledeći stav otkriva jednu interesantnu vezu koja postoji među uvedenim klasama skupova.

<u>Teorema 1.2.13.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $PO(\mathcal{T}) \cap SC(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{T})$,
(2) $PC(\mathcal{T}) \cap SO(\mathcal{T}) = RC(\mathcal{T})$.

Na kraju odeljka utvrdićemo jednu osobinu preseka preotvorenog i semi-otvorenog skupa.

<u>Teorema 1.2.14.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor, $A \in PO(\mathcal{T})$ i $B \in SO(\mathcal{T})$. Tada je $A \cap B \in PO(\mathcal{T}_B) \cap SO(\mathcal{T}_A)$.

<u>Dokaz.</u> 1) $A \cap B \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \cap B = \mathrm{int}_B(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \cap B) = \mathrm{int}_B(B \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}B) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \subset \mathrm{int}_B(B \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}B \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) \subset \mathrm{int}_B(B \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}B \cap \mathrm{cl}A)) \subset \mathrm{int}_B(B \cap \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}B \cap A))) = \mathrm{int}_B(B \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}B \cap A)) \subset \mathrm{int}_B(B \cap \mathrm{cl}(B \cap A)) = \mathrm{int}_B \mathrm{cl}_B(A \cap B)$.

2) $A \cap B \subset A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}B) \subset A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \cap \mathrm{int}B) \subset A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A \cap \mathrm{int}B) \subset A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A \cap \mathrm{int}B)) = A \cap \mathrm{cl}(A \cap \mathrm{int}B) \subset$

$A\cap cl(A\cap int((X - A)\cup B)) = A\cap cl(A\cap int((X - A)\cup (A\cap B))) =$
$A\cap cl(int_A(A\cap B)) = cl_A int_A(A\cap B)$.

1.3. Topološki prostor $(X,\mathcal{T}_\alpha)$

Pojam α-skupa topološkog prostora uveo je Njåstad u radu [69] a nezavisno od njega do istog pojma dolaze Maheshwari i Tapi [60]. To je jedna klasa uopštenih otvorenih skupova za koju se pokazuje da obrazuje topologiju širu od polazne. Do iste topologije dolaze na drugi način Crossley i Hildebrand u radu [19]. Većina rezultata izloženih u ovom odeljku može se naći u [69] i [5].

Definicija. Podskup A prostora X je α-skup ako je $A\subset int(cl(intA))$. Klasu svih α-skupova prostora $(X,\mathcal{T})$ označavaćemo sa $\mathcal{T}_\alpha$. Komplemente α-skupova zvaćemo α-zatvorenim skupovima.

Teorema 1.3.1. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ važi sledeće:
(1) $\mathcal{T}_\alpha$ je topologija na X i $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_\alpha$,
(2) A je α-zatvoren ako i samo ako je $cl(int(clA))\subset A$.

Teorema 1.3.2. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:
(a) $A\in\mathcal{T}_\alpha$.
(b) $A\in PO(\mathcal{T})\cap SO(\mathcal{T})$.
(c) Postoji otvoren skup U takav da je $U\subset A\subset int(clU))$.
(d) Postoji otvoren skup U takav da je $U\subset A\subset sclU$.

Sledeći stav sledi neposredno.

Teorema 1.3.3. Neka je x tačka prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:
(a) $\{x\}\in\mathcal{T}$.
(b) $\{x\}\in\mathcal{T}_\alpha$.
(c) $\{x\}\in SO(\mathcal{T})$.

Označimo sa $cl_\alpha A$ i $int_\alpha A$ zatvorenje odnosno unutrašnjost skupa A u prostoru $(X,\mathcal{T}_\alpha)$. Sledeća dva stava, dokazana u [5], daju vezu između ovih operatora i odgovarajućih operatora u $(X,\mathcal{T})$.

Teorema 1.3.4. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $cl_\alpha A = A \cup cl(int(clA))$,
(2) $int_\alpha A = A \cap int(cl(intA))$.

Teorema 1.3.5. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $int_\alpha cl_\alpha A = int_\alpha clA = int(cl_\alpha A) = int(clA)$,
(2) $cl_\alpha int_\alpha A = cl_\alpha intA = cl(int_\alpha A) = cl(intA)$,
(3) $cl_\alpha int_\alpha cl_\alpha A = cl(int(clA))$,
(4) $int_\alpha cl_\alpha int_\alpha A = int(cl(intA))$.

Sledeći važan rezultat koji pokazuje vezu između topologija $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_\alpha$, kao i osobine α-skupova, sledi neposredno iz prethodne teoreme.

Teorema 1.3.6. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ važi sledeće:
(1) $SO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}_\alpha)$,
(2) $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\alpha)$,
(3) $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}_{\alpha\alpha}$,
(4) $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{T}_\alpha)$,
(5) $D(\mathcal{T}) = D(\mathcal{T}_\alpha)$,
(6) $N(\mathcal{T}) = N(\mathcal{T}_\alpha)$.

Relacije (1) i (2) prethodne teoreme omogućuju da se poboljšaju tvrđenja teorema 1.1.3. i 1.2.3., gde umesto otvorenog može stajati α-skup.

Teorema 1.3.7. Presek α-skupa i semi-otvorenog skupa je semi-otvoren skup.

Teorema 1.3.8. Presek α-skupa i preotvorenog skupa je preotvoren skup.

Relacija (4) teoreme 1.3.6. povlači da je $CO(\mathcal{T}) = CO(\mathcal{T}_\alpha)$

i zato važi

Teorema 1.3.9. Prostor $(X,\mathcal{T})$ je povezan ako i samo ako je $(X,\mathcal{T}_\alpha)$ povezan.

Interesantno predstavljanje topologije $\mathcal{T}_\alpha$ pomoću nigde gustih skupova dato je u [69] i [16].

Teorema 1.3.10. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $\mathcal{T}_\alpha = \{U - A : U \in \mathcal{T},\ A \in N(\mathcal{T})\}$,
(2) $C(\mathcal{T}_\alpha) = \{F \cup A : F \in C(\mathcal{T}),\ A \in N(\mathcal{T})\}$.

Definicija. Prostor $(X,\mathcal{T})$ je α-topološki ako je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$.

Teorema 1.3.11. Prostor $(X,\mathcal{T})$ je α-topološki ako i samo ako je $N(\mathcal{T}) \subset C(\mathcal{T})$.

Istaknimo sledeći Njåstadov rezultat u kome je pokazano kako se topologija $\mathcal{T}_\alpha$ dobija pomoću klase semi-otvorenih skupova.

Teorema 1.3.12. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_\alpha = \{A : A \cap B \in SO(\mathcal{T})$ za svaki semi-otvoren skup $B\}$.

Kao neposrednu posledicu dobijamo sledeći stav:

Teorema 1.3.13. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:
(a) $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha$.
(b) $SO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{U})$.

Definicija. Topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ na skupu X su SO-ekvivalentne ako je $SO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{U})$. Na ovaj način je uvedena jedna relacija ekvivalencije i označimo sa $S(\mathcal{T})$ klasu ekvivalencije elementa $\mathcal{T}$, tj. $S(\mathcal{T}) = \{\mathcal{U} : SO(\mathcal{U}) = SO(\mathcal{T})\}$.

Teorema 1.3.14. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_\alpha$ najveći element u klasi $S(\mathcal{T})$.

Teorema 1.3.15. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\alpha$. Tada je $\mathcal{U} \in S(\mathcal{T})$.

Na kraju odeljka razmatraćemo neka pitanja u vezi sa semi-otvorenim skupovima. Sledeći stav biće veoma koristan.

Teorema 1.3.16. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $\mathrm{scl}A \cap G \subset \mathrm{cl}_\alpha(A \cap G)$ za svako $G \in SO(\mathcal{T})$,

(2) $\mathrm{scl}A \cap G \subset \mathrm{scl}(A \cap G)$ za svako $G \in \mathcal{T}_\alpha$.

Dokaz. (1) Pretpostavimo da je $x \in \mathrm{scl}A \cap G$ i neka je U α-skup koji sadrži x. Tada je na osnovu 1.3.7. $U \cap G$ semi-otvoren skup koji sadrži x pa je $(U \cap G) \cap A \neq \emptyset$ na osnovu 1.1.7. i zato $x \in \mathrm{cl}_\alpha(A \cap G)$. Relacija (2) se dokazuje na sličan način.

Sledeći stav je dualan prethodnom.

Teorema 1.3.17. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $\mathrm{int}_\alpha(A \cup F) \subset \mathrm{sint}A \cup F$ za svako $F \in SC(\mathcal{T})$,

(2) $\mathrm{sint}(A \cup F) \subset \mathrm{sint}A \cup F$ za svako $F \in C(\mathcal{T}_\alpha)$.

Tri stava koja slede bave se ponašanjem semi-otvorenih skupova u odnosu na potprostor.

Teorema 1.3.18. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor, $A \subset Y \subset X$ i $A \in SO(\mathcal{T})$. Tada je $A \in SO(\mathcal{T}_Y)$.

Dokaz. $A \subset Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) = Y \cap \mathrm{cl}(Y \cap \mathrm{int}A) \subset Y \cap \mathrm{cl}(Y \cap \mathrm{int}(A \cup (X - Y))) = \mathrm{cl}_Y(Y \cap \mathrm{int}(A \cup (X - Y))) = \mathrm{cl}_Y \mathrm{int}_Y A$.

Teorema 1.3.19. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \subset Y \in SO(\mathcal{T})$. Tada je $\mathrm{cl}_Y \mathrm{int}_Y A = Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$.

Dokaz. Kako $Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset \mathrm{cl}_Y \mathrm{int}_Y A$ sledi na osnovu prethodnog stava, to nam ostaje da dokažemo obratnu inkluziju. Budući da je $X - Y \in SC(\mathcal{T})$, na osnovu 1.3.17. i 1.1.1. dobijamo da je $\mathrm{cl}_Y \mathrm{int}_Y A = Y \cap \mathrm{cl}(Y \cap \mathrm{int}(A \cup (X - Y))) \subset Y \cap \mathrm{cl}(Y \cap (\mathrm{sint}A \cup (X - Y))) = Y \cap \mathrm{cl}(Y \cap \mathrm{sint}A) \subset Y \cap \mathrm{cl}Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{sint}A) = Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{sint}A)) = Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$ što je i trebalo dokazati.

Posledica 1.3.20. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \subset Y \in SO(\mathcal{T})$. Tada je $A \in SO(\mathcal{T}_Y)$ ako i samo ako je $A \in SO(\mathcal{T})$.

Podsetimo da je prostor $(X,\mathcal{T})$ ekstremalno diskoneksan ako je $\mathrm{cl}U \in \mathcal{T}$ za svako $U \in \mathcal{T}$. Interesantne karakterizacije ekstremalno diskoneksnih prostora koje su dobili Njåstad [69] i Janković [51] iskazane su u sledećem stavu.

Teorema 1.3.21. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) Prostor $(X,\mathcal{T})$ je ekstremalno diskoneksan.
(b) $\mathcal{T}_\alpha = SO(\mathcal{T})$.
(c) $SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$.

Odeljak zaključujemo poznatim Njåstadovim rezultatom koji sledi neposredno iz 1.3.12. i prethodnog stava.

Teorema 1.3.22. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $SO(\mathcal{T})$ topologija na X ako i samo ako je $(X,\mathcal{T})$ ekstremalno diskoneksan.

1.4. Hewittova reprezentacija

Najpre ćemo se podsetiti nekih definicija. Prostor $(X,\mathcal{T})$ je rastavljiv [14] ako postoji skup D takav da su D i X − D gusti. U suprotnom kažemo da je $(X,\mathcal{T})$ nerastavljiv. Podskup A prostora $(X,\mathcal{T})$ je rastavljiv ako je potprostor $(A,\mathcal{T}_A)$ rastavljiv. Klasu rastavljivih prostora izučavao je Hewitt u radu [47]. Lako se vidi da je svaki otvoren podskup rastavljivog prostora takođe rastavljiv. Prostor $(X,\mathcal{T})$ je nasledno nerastavljiv ako ne sadrži neprazan rastavljiv podskup. I na kraju, prostor $(X,\mathcal{T})$ je submaksimalan ako je $D(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. Sledeću karakterizaciju submaksimalnih prostora dobili su Reilly i Vamanamurthy u [91].

Teorema 1.4.1. Prostor $(X,\mathcal{T})$ je submaksimalan ako i samo ako je $PO(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

Iz definicije neposredno sledi da je svaki submaksimalan prostor nerastavljiv. Važi i jači stav.

Teorema 1.4.2. Svaki submaksimalan prostor je nasledno nerastavljiv.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je potprostor submaksimalnog prostora submaksimalan i zato pretpostavimo da je D gust u potprostoru Y submaksimalnog prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $Y \subset \mathrm{cl}D$ pa je $D \cup (X - Y) \in D(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$ i stoga $D \in \mathcal{T}_Y$. Otuda je Y submaksimalan.

Sledeći Hewittov rezultat se pokazuje kao korisno sredstvo za rešavanje problema u vezi sa uopštenim otvorenim skupovima.

Teorema 1.4.3. Svaki topološki prostor X može se predstaviti kao disjunktna unija $X = F \cup G$ pri čemu je F zatvoren i rastavljiv a G otvoren i nasledno nerastavljiv. Prostor X je rastavljiv ako i samo ako je $G = \emptyset$ a nasledno nerastavljiv ako i samo ako je $F = \emptyset$.

Lako se vidi da je reprezentacija prostora data u prethodnoj teoremi jedinstvena i zato ćemo je, sledeći Ganstera [36], zvati Hewittovom reprezentacijom prostora X.

Sledeću teoremu dokazao je El'kin u [32].

Teorema 1.4.4. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) Prostor $(X,\mathcal{T})$ sadrži otvoren, gust i nasledno nerastavljiv potprostor.

(b) Svaki neprazan, otvoren podskup od X je nerastavljiv.

(c) intD je gust za svaki gust skup D.

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b): Neka je G otvoren, gust i nasledno nerastavljiv potprostor od X i neka je $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}$. Pretpostavimo da je $\mathrm{int}D = \emptyset$ za neki $\mathcal{T}_U$-gust skup D. Sledi da je $\mathrm{cl}((U\cap G)\cap D) = \mathrm{cl}(G\cap D) \supset G\cap \mathrm{cl}D \supset G\cap U$ i $\mathrm{cl}((U\cap G) - D) \supset (U\cap G) - \mathrm{int}D = U\cap G$ pa je $U\cap G$ rastavljiv što je suprotno pretpostavci. Otuda je $\mathrm{int}D \neq \emptyset$ za svaki $\mathcal{T}_U$-gust skup D te je U nerastavljiv.

(b) $\Rightarrow$ (c): Primetimo najpre da je $\mathrm{int}D \neq \emptyset$ za svaki gust skup D jer je X nerastavljiv. Neka je $U = X - \mathrm{cl}(\mathrm{int}D)$. Tada je $\mathrm{cl}(D \cap U) \supset U$ i $\mathrm{cl}(U - D) \supset U - \mathrm{int}D = U$ pa je U rastavljiv. Otuda je na osnovu pretpostavke $U = \emptyset$, tj. $\mathrm{int}D$ je gust.

(c) $\Rightarrow$ (a): Neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora X. Pretpostavimo da je $\mathrm{int}F \neq \emptyset$ i neka je D gust u $\mathrm{int}F$. Otuda je $D \cup (X - \mathrm{int}F) = D \cup \mathrm{cl}G$ gust u X pa je $\mathrm{int}(D \cup \mathrm{cl}G)$ gust na osnovu pretpostavke. Kako je $\mathrm{int}(D \cup \mathrm{cl}G) \subset \mathrm{int}D \cup \mathrm{cl}G$, to je $\mathrm{int}D \neq \emptyset$ pa je $\mathrm{int}F$ nerastavljiv što je kontradikcija jer je $\mathrm{int}F$ otvoren podskup rastavljivog prostora F. Otuda je $\mathrm{int}F = \emptyset$, tj. $\mathrm{cl}G = X$ pa je G traženi potprostor.

Još jednu karakterizaciju klase prostora određene prethodnom teoremom dao je Ganster u [36]. Ispostavilo se da je pomenuta klasa na neki način dualna klasi ekstremalno diskoneksnih prostora (videti 1.3.21.).

Teorema 1.4.5. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) Prostor $(X,\mathcal{T})$ sadrži otvoren, gust i nasledno nerastavljiv potprostor.

(b) $PO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{T})$.

(c) $\mathcal{T}_\alpha = PO(\mathcal{T})$.

(d) $(X,\mathcal{T}_\alpha)$ je submaksimalan.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Neka je $A \in PO(\mathcal{T})$. Tada je $A = G \cap D$ gde je $G \in \mathcal{T}$ i $D \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ na osnovu 1.2.1. Primenom El'kinove teoreme sledi da je $\mathrm{int}D$ gust pa je $A \subset G \subset \mathrm{cl}G = \mathrm{cl}(G \cap \mathrm{int}D) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$ i zato $A \in SO(\mathcal{T})$.

(b) $\Rightarrow$ (c) sledi neposredno iz $\mathcal{T}_\alpha = PO(\mathcal{T}) \cap SO(\mathcal{T})$ (videti 1.3.2.).

(c) $\Rightarrow$ (d): Na osnovu 1.3.6. i pretpostavke imamo da je $PO(\mathcal{T}_\alpha) = PO(\mathcal{T}) = \mathcal{T}_\alpha$ pa je $(X,\mathcal{T}_\alpha)$ submaksimalan na osnovu 1.4.1.

(d) $\Rightarrow$ (a): Neka je $D \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$. Tada je $D \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\alpha)$ na osnovu 1.3.6. pa je $D \in \mathcal{T}_\alpha$ na osnovu pretpostavke i zato $\mathrm{cl}(\mathrm{int}D) = \mathrm{cl}D = X$. Sada tvrđenje sledi na osnovu El'kinove teoreme.

Sada na osnovu 1.4.1., 1.4.2. i 1.4.5. dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 1.4.6. Prostor $(X,\mathcal{T})$ je submaksimalan ako i samo ako je nasledno nerastavljiv i α-topološki.

Odeljak ćemo završiti sa dva jednostavna primera.

Primer 1. Neka je $X = \{a,b,c,d\}$ i $\mathcal{T} = \{\phi,X,a,b,ab\}$. Tada je $PO(\mathcal{T}) = \mathcal{T}_\alpha = \{\phi,X,a,b,ab,abc,abd\}$ pa je svaki otvoren podskup prostora X nerastavljiv. S druge strane, $A = \{c,d\}$ je antidiskretan potprostor od X i prema tome rastavljiv. Otuda X nije nasledno nerastavljiv.

Primer 2. Neka je $X = \{a,b,c\}$ i $\mathcal{T} = \{\phi,X,a,ab\}$. Tada je $SO(\mathcal{T}) = \mathcal{T}_\alpha = \{\phi,X,a,ab,ac\}$ pa X nije α-topološki i prema tome nije submaksimalan. S druge strane, $\mathcal{T}_{ab} = \{\phi,a,ab\}$, $\mathcal{T}_{ac} = \{\phi,a,ac\}$, $\mathcal{T}_{bc} = \{\phi,b,bc\}$ pa je X nasledno nerastavljiv.

2. SEMI-PREOTVORENI SKUPOVI

2.1. Osobine nekih topoloških operatora

U prvom odeljku druge glave nastavlja se sa ispitivanjem osobina i uzajamnih veza operatora semi-zatvorenja, semi-unutrašnjosti, prezatvorenja i preunutrašnjosti. Operatorski aparat koji se na taj način razvija biće od suštinskog značaja za dalja istraživanja. Većina izloženih rezultata nalazi se u [6]. Na početku se pomenuti operatori izražavaju pomoću operatora zatvorenja i unutrašnjosti.

Teorema 2.1.1. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $\mathrm{scl}A = A\cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$, $\mathrm{sint}A = A\cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$,

(2) $\mathrm{pcl}A = A\cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$, $\mathrm{pint}A = A\cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$.

Dokaz. (1) Primetimo najpre da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A\cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A\cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \subset A\cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$. Otuda sledi da je $A\cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$ semi-zatvoren skup pa je $\mathrm{scl}A \subset A\cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$. S druge strane, $\mathrm{scl}A$ je semi-zatvoren skup pa je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{scl}A)) \subset \mathrm{scl}A$ i zato $A\cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{scl}A$. Druga relacija je dualna.

(2) Primetimo najpre da je $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A\cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A))) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}A\cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset A\cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$. Otuda sledi da je $A\cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$ prezatvoren skup pa je $\mathrm{pcl}A \subset A\cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$. S druge strane, $\mathrm{pcl}A$ je prezatvoren skup pa je $\mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{pcl}A))$

$\subset$ pclA i zato $A \cup cl(intA) \subset pclA$. Druga relacija je dualna.

Posledica 2.1.2. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $A \in PO(\mathcal{T}) \Leftrightarrow sclA = int(clA)$,
(2) $A \in PC(\mathcal{T}) \Leftrightarrow sintA = cl(intA)$,
(3) $A \in SO(\mathcal{T}) \Leftrightarrow pclA = cl(intA)$,
(4) $A \in SC(\mathcal{T}) \Leftrightarrow pintA = int(clA)$.

Sledeći stav daje veze između operatora koje će se često koristiti.

Teorema 2.1.3. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $pint(clA) = int(clA) = int(sclA)$,
(2) $pcl(intA) = cl(intA) = cl(sintA)$,
(3) $int(pclA) = int(cl(intA)) = scl(intA)$,
(4) $cl(pintA) = cl(int(clA)) = sint(clA)$.

Dokaz. (1) Na osnovu 2.1.1. neposredno sledi da je $pint(clA) = clA \cap int(cl(clA)) = int(clA)$. Takođe na osnovu 2.1.1. je $int(sclA) = int(A \cup int(clA)) \supset int(clA) \supset int(sclA)$ pa važi i druga relacija.

(4) Na osnovu 2.1.1. neposredno sledi da je $sint(clA) = clA \cap cl(int(clA)) = cl(int(clA))$. Ponovo na osnovu 2.1.1. je $cl(pintA) = cl(A \cap int(clA)) \supset clA \cap int(clA) = int(clA)$ i zato $cl(pintA) \supset cl(int(clA)) \supset cl(A \cap int(clA)) = cl(pintA)$.

Relacije (2) i (3) dokazuju se na sličan način.

Sledeći stav je neposredna posledica stavova 2.1.1. i 2.1.3.

Teorema 2.1.4. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $sint(sclA) = sclA \cap cl(int(clA))$,
(2) $scl(sintA) = sintA \cup int(cl(intA))$.

Prethodni stav i stavovi 1.1.3. odnosno 1.1.6. sada daju:

Posledica 2.1.5. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $scl(sint(sclA)) = sint(sclA)$,

(2) $\mathrm{sint}(\mathrm{scl}(\mathrm{sint}A)) = \mathrm{scl}(\mathrm{sint}A)$.

Kao sledeća posledica stava 2.1.4. dobija se jedna interesantna karakterizacija klase semi-otvorenih skupova.

Posledica 2.1.6. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $A \cup \mathrm{sint}(\mathrm{scl}A) = \mathrm{scl}A$, $A \cap \mathrm{scl}(\mathrm{sint}A) = \mathrm{sint}A$,

(2) $A \in SO(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $A \subset \mathrm{scl}(\mathrm{sint}A)$.

Dokaz. (1) Na osnovu 2.1.4. i 1.3.4. je $A \cup \mathrm{sint}(\mathrm{scl}A) = A \cup (\mathrm{scl}A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) = \mathrm{scl}A \cap \mathrm{cl}_\alpha A = \mathrm{scl}A$. Druga relacija se dokazuje na sličan način.

Tvrđenje (2) sledi neposredno iz (1).

Slične veze važe i za operatore prezatvorenja i preunutrašnjosti. Sledeći stav sledi iz 2.1.1.

Teorema 2.1.7. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $\mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A) = \mathrm{pint}A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$,

(2) $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$.

Posledica 2.1.8. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $A \cup \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A) = \mathrm{pcl}A$,

(2) $A \cup \mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}A \cap \mathrm{scl}A$,

(3) $A \cap \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A) = \mathrm{pint}A \cup \mathrm{sint}A$,

(4) $A \cap \mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pint}A$.

Posledica 2.1.9. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $A \in PO(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $A \subset \mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A)$.

Posledica 2.1.10. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) \subset \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A)$,

(2) $\mathrm{pcl}(\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A)) = \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A)$,

(3) $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A)) = \mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A)$.

Dokaz. (1) Na osnovu 2.1.7. i 2.1.1. je $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = (A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = (A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \cup (\mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \subset \mathrm{pint}A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) = \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A)$.

Relacije (2) i (3) slede neposredno iz (1).

Sledeći primer pokazuje da u (1) ne važi jednakost u opštem slučaju.

Primer 3. Neka je $A = (0,1) \subset R$ gde je R skup realnih brojeva sa standardnom topologijom. Tada je $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) = (0,1)$ i $\mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A) = [0,1]$.

Posledica 2.1.11. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) \subset \mathrm{sint}(\mathrm{scl}A)$,
(2) $\mathrm{scl}(\mathrm{sint}A) \subset \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A)$.

Dokaz. (1) Na osnovu 2.1.7. i 2.1.4. je $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = (A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = (A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \cup (\mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \subset (A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = (A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = \mathrm{scl}A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = \mathrm{sint}(\mathrm{scl}A)$.

Relacija (2) se dokazuje na sličan način.

Sledeći primer pokazuje da u gornjim relacijama ne važe jednakosti u opštem slučaju.

Primer 4. Neka je Q skup svih racionalnih brojeva u R. Tada je $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}Q) = \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}Q) = Q$, $\mathrm{scl}(\mathrm{sint}Q) = \emptyset$ i $\mathrm{sint}(\mathrm{scl}Q) = R$.

Odeljak zaključujemo rezultatima dobijenim kombinovanom primenom uvedenih operatora.

Teorema 2.1.12. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $\mathrm{sint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}(\mathrm{sint}A) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$,
(2) $\mathrm{pint}(\mathrm{scl}A) = \mathrm{scl}(\mathrm{pint}A) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$.

Dokaz. (1) Na osnovu 2.1.2. je $\mathrm{pcl}(\mathrm{sint}A) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{sint}A)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$. S druge strane, na osnovu 2.1.2. i 2.1.3. sledi da je $\mathrm{sint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{pcl}A)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$.

Tvrđenje (2) se dokazuje na sličan način.

Posledica 2.1.13. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $A \in SO(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \mathrm{pcl}A \in SO(\mathcal{T})$,

(2) $A \in PO(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \mathrm{scl}A \in PO(\mathcal{T})$.

Teorema 2.1.14. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $\mathrm{pcl}(\mathrm{scl}A) = \mathrm{cl}_{\alpha}A$,
(2) $\mathrm{scl}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}A \cup \mathrm{scl}A$,
(3) $\mathrm{pint}(\mathrm{sint}A) = \mathrm{int}_{\alpha}A$,
(4) $\mathrm{sint}(\mathrm{pint}A) = \mathrm{pint}A \cap \mathrm{sint}A$.

Dokaz. (1) Na osnovu 2.1.1. i 2.1.3. je $\mathrm{pcl}(\mathrm{scl}A) = \mathrm{scl}A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{scl}A)) = A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = \mathrm{cl}_{\alpha}A$.

(2) Koristeći iste stavove dobijamo da je $\mathrm{scl}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{pcl}A)) = \mathrm{pcl}A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{pcl}A \cup \mathrm{scl}A$.

Relacije (3) i (4) se dokazuju na sličan način.

Posledica 2.1.15. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $\mathrm{scl}(\mathrm{pcl}A) \subset \mathrm{pcl}(\mathrm{scl}A)$,
(2) $\mathrm{pint}(\mathrm{sint}A) \subset \mathrm{sint}(\mathrm{pint}A)$.

Pokazaćemo na jednom primeru da u relaciji (1) ne važi jednakost u opštem slučaju. Isto važi i za relaciju (2).

Primer 5. Neka je $A = (0,1) \cap Q$. Tada je $\mathrm{scl}(\mathrm{pcl}A) = (0,1)$ i $\mathrm{pcl}(\mathrm{scl}A) = [0,1]$.

2.2. Semi-preotvoreni skupovi

Centralni odeljak druge glave posvećen je klasi semi-preotvorenih skupova. To je jedna klasa uopštenih otvorenih skupova prostora $(X,\mathcal{T})$ koja je šira i od $SO(\mathcal{T})$ i od $PO(\mathcal{T})$. Pojam semi-preotvorenog skupa uveli su Abd El-Monsef, El-Deeb i Mahmoud u radu [1]. Isti pojam uveden je i u radovima [34] i [6]. Definiciju i naziv pomenute klase skupova uzimamo iz rada [6].

Definicija. Podskup A prostora X je semi-preotvoren ako postoji preotvoren skup P takav da je $P \subset A \subset \mathrm{cl}P$. Klasu semi-preotvorenih skupova prostora $(X,\mathcal{T})$ označavaćemo sa $SPO(\mathcal{T})$.

Teorema 2.2.1. Za podskup A prostora $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $A \in SPO(\mathcal{T})$.

(b) $A \subset cl(int(clA))$.

(c) Postoji otvoren skup U takav da je $clA = clU$.

(d) $clA \in RC(\mathcal{T})$.

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b): Neka je $A \in SPO(\mathcal{T})$. Tada je $P \subset A \subset clP$ za neki preotvoren skup P. Sledi da je $clA = clP$ i zato $cl(int(clA)) = cl(int(clP)) = clP$. Otuda je $A \subset cl(int(clA))$.

(b)$\Rightarrow$(c): Za $U = int(clA)$ iz (b) neposredno sledi da je $A \subset clU$ i zato $clA = clU$.

(c)$\Rightarrow$(d) sledi neposredno.

(d)$\Rightarrow$(a): Pretpostavimo da je $clA = cl(int(clA))$ i stavimo $P = pintA$. Sada na osnovu 2.1.3. sledi da je $A \subset clA = cl(int(clA)) = cl(pintA) = clP$ pa je $A \in SPO(\mathcal{T})$.

Iskaz (b) prethodnog stava je u [1] definicija pomenute klase skupova koju autori nazivaju klasom β-otvorenih skupova. Termin slabo otvoreni skupovi koriste autori u [34] a definišu ih pomoću iskaza (c).

Sledeći stav sledi neposredno.

Teorema 2.2.2. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T}) \subset SPO(\mathcal{T})$.

Pokažimo da u gornjoj relaciji ne važi jednakost u opštem slučaju.

Primer 6. Neka je R skup realnih brojeva sa standardnom topologijom i neka je $A = [0,1) \cap Q$ gde je Q skup svih racionalnih brojeva u R. Tada je A semi-preotvoren a nije ni semi-otvoren ni preotvoren skup.

Sledeći stav daje karakterizaciju semi-preotvorenih skupova pomoću semi-otvorenih skupova.

Teorema 2.2.3. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $A \in SPO(\mathcal{T})$.

(b) $A \subset sint(sclA)$.

(c) $sclA \in SO(\mathcal{T})$.

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b) sledi neposredno iz 2.1.4. i 2.2.1.

(b)$\Rightarrow$(c): Na osnovu 2.1.5. i pretpostavke sledi da je $sclA \subset scl(sint(sclA)) = sint(sclA)$ i stoga je $sclA \in SO(\mathcal{T})$.

(c)$\Rightarrow$(a): Na osnovu pretpostavke i 2.1.3. sledi da je $A \subset sclA \subset cl(int(sclA)) = cl(int(clA))$ i zato $A \in SPO(\mathcal{T})$.

Sledeća dva stava su analogoni poznatih stavova koji važe za semi-otvorene i preotvorene skupove.

Teorema 2.2.4. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $\{A_i : i \in I\} \subset SPO(\mathcal{T})$. Tada je $\cup A_i \in SPO(\mathcal{T})$.

Dokaz. $\cup A_i \subset \cup cl(int(clA_i)) \subset cl(\cup int(clA_i)) \subset cl(int(\cup clA_i)) \subset cl(int(cl(\cup A_i)))$.

Teorema 2.2.5. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor, $A \in SPO(\mathcal{T})$ i $U \in \mathcal{T}$. Tada je $A \cap U \in SPO(\mathcal{T})$.

Dokaz. $A \cap U \subset cl(int(clA)) \cap U \subset cl(int(clA) \cap U) = cl(int(clA \cap U)) \subset cl(int(cl(A \cap U)))$.

Presek dva semi-preotvorena skupa ne mora biti semi-preotvoren skup, baš kao što analogno tvrđenje ne važi ni u slučaju semi-otvorenih odnosno preotvorenih skupova. Međutim, presek semi-otvorenog i preotvorenog skupa je semi-preotvoren skup.

Teorema 2.2.6. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor, $A \in SO(\mathcal{T})$ i $B \in PO(\mathcal{T})$. Tada je $A \cap B \in SPO(\mathcal{T})$.

Dokaz. $A \cap B \subset cl(intA) \cap int(clB) \subset cl(intA \cap int(clB)) = cl(int(intA \cap clB)) \subset cl(int(cl(intA \cap B))) \subset cl(int(cl(A \cap B)))$.

Ovo tvrđenje omogućava još jednu karakterizaciju klase semi-preotvorenih skupova.

Teorema 2.2.7. Za podskup A prostora $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $A \in SPO(\mathcal{T})$.

(b) A je presek semi-otvorenog i gustog skupa.

(c) A je presek semi-otvorenog i preotvorenog skupa.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Neka je $A \in SPO(\mathcal{T})$. Tada je na osnovu 2.2.1. clA regularno zatvoren i stoga semi-otvoren. Stavimo $D = A \cup (X - clA)$. Tada je D gust i $A = clA \cap D$.

(b) $\Rightarrow$ (c) je očigledno.

(c) $\Rightarrow$ (a) sledi iz prethodne teoreme.

Sledeći rezultat sledi neposredno.

Teorema 2.2.8. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $A \in SO(\mathcal{T})$.

(b) $A \in SPO(\mathcal{T})$ i $int(clA) \subset cl(intA)$.

Teorema 2.2.9. Neka su A i B semi-otvoreni podskupovi prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $A \cap B \in SO(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $A \cap B \in SPO(\mathcal{T})$.

Dokaz. Neka je $A \cap B \in SPO(\mathcal{T})$. Na osnovu prethodne teoreme dovoljno je dokazati da je $int(cl(A \cap B)) \subset cl(int(A \cap B))$. Kako je $B \in SO(\mathcal{T})$, to je $intA \cap clB' = intA \cap cl(intB) \subset cl(int(A \cap B))$ i zato $cl(intA \cap clB) \subset cl(int(A \cap B))$. Koristeći sada uslov da je $A \in SO(\mathcal{T})$, dobijamo na kraju $int(cl(A \cap B)) \subset int(clA) \cap int(clB) \subset cl(intA) \cap int(clB) \subset cl(intA \cap int(clB)) \subset cl(intA \cap clB) \subset cl(int(A \cap B))$.

Definicija. Podskup A prostora X je semi-prezatvoren ako je $X - A$ semi-preotvoren. Klasu semi-prezatvorenih skupova u $(X,\mathcal{T})$ označavaćemo sa $SPC(\mathcal{T})$.

Sledeća tri stava slede neposredno.

Teorema 2.2.10. Za podskup A prostora $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $A \in SPC(\mathcal{T})$.

(b) $int(cl(intA)) \subset A$.

(c) $intA \in RO(\mathcal{T})$.

Teorema 2.2.11. Presek proizvoljne familije semi-prezatvorenih skupova je semi-prezatvoren skup.

Teorema 2.2.12. Unija zatvorenog i semi-prezatvorenog skupa je semi-prezatvoren skup.

Sledeći rezultat sledi neposredno iz 1.3.5.

Teorema 2.2.13. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_\alpha)$.

Sada možemo poboljšati rezultate stavova 2.2.5. i 2.2.12.

Teorema 2.2.14. Presek α-skupa i semi-preotvorenog skupa je semi-preotvoren skup.

Teorema 2.2.15. Unija α-zatvorenog i semi-prezatvorenog skupa je semi-prezatvoren skup.

Ako je A podskup prostora X, označimo sa spclA semi-prezatvorenje skupa A, tj. presek svih semi-prezatvorenih skupova u X koji sadrže A. Sledeća dva stava su dokazana u [3].

Teorema 2.2.16. Neka je A podskup prostora X. Tada je $x \in \mathrm{spcl}A$ ako i samo ako je $U \cap A \neq \emptyset$ za svaki semi-preotvoren skup U koji sadrži x.

Teorema 2.2.17. Neka su A i B podskupovi prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $A \subset \mathrm{spcl}A \subset \mathrm{cl}A$,
(2) $\mathrm{spcl}A \in SPC(\mathcal{T})$,
(3) $A \in SPC(\mathcal{T}) \Leftrightarrow A = \mathrm{spcl}A$,
(4) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{spcl}A \subset \mathrm{spcl}B$,
(5) $\mathrm{spcl}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spcl}A$,
(6) $\mathrm{spcl}A \cup \mathrm{spcl}B \subset \mathrm{spcl}(A \cup B)$,
(7) $\mathrm{spcl}(A \cap B) \subset \mathrm{spcl}A \cap \mathrm{spcl}B$,
(8) $\mathrm{spcl}(\emptyset) = \emptyset$.

Ako je A podskup prostora X, označimo sa spintA <u>semi-preunutrašnjost</u> skupa A, tj. uniju svih semi-preotvorenih skupova u X koji su sadržani u A. Sledeća četiri stava su dokazana u [3].

<u>Teorema 2.2.18.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je $x \in$ spintA ako i samo ako postoji semi-preotvoren skup U takav da je $x \in U \subset A$.

<u>Teorema 2.2.19.</u> Neka su A i B podskupovi prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $\mathrm{int}A \subset \mathrm{spint}A \subset A$,

(2) $\mathrm{spint}A \in SPO(\mathcal{T})$,

(3) $A \in SPO(\mathcal{T}) \Leftrightarrow A = \mathrm{spint}A$,

(4) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{spint}A \subset \mathrm{spint}B$,

(5) $\mathrm{spint}(\mathrm{spint}A) = \mathrm{spint}A$,

(6) $\mathrm{spint}(A \cap B) \subset \mathrm{spint}A \cap \mathrm{spint}B$,

(7) $\mathrm{spint}A \cup \mathrm{spint}B \subset \mathrm{spint}(A \cup B)$,

(8) $\mathrm{spint}X = X$.

<u>Teorema 2.2.20.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $\mathrm{spcl}(X - A) = X - \mathrm{spint}A$,

(2) $\mathrm{spint}(X - A) = X - \mathrm{spcl}A$.

<u>Teorema 2.2.21.</u> Neka su A i B podskupovi prostora X. Tada je:

(1) $\mathrm{spcl}(\mathrm{cl}A \cup B) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{spcl}B$,

(2) $\mathrm{spint}(\mathrm{int}A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{spint}B$.

Sada slede nekoliko stavova dokazanih u [6]. Operatori semi-prezatvorenja i semi-preunutrašnjosti izražavaju se pomoću operatora zatvorenja i unutrašnjosti (2.2.22.), semi-zatvorenja i semi-unutrašnjosti (2.2.24.). Daju se veze operatora semi-prezatvorenja i semi-preunutrašnjosti sa ranije uvedenim operatorima. Istaknimo da operatori spcl i spint međusobno komutiraju dok za ostale parove to ne mora da važi.

<u>Teorema 2.2.22.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $\mathrm{spcl}A = A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$,

(2) $\mathrm{spint}A = A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))$.

Dokaz. (1) Primetimo najpre da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))))) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)))) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) \subset A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$. Otuda je $A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$ semi-prezatvoren skup pa je $\mathrm{spcl}A \subset A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$. S druge strane, $\mathrm{spcl}A$ je semi-prezatvoren skup pa je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{spcl}A))) \subset \mathrm{spcl}A$ i zato $A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) \subset \mathrm{spcl}A$.

Relacija (2) je dualna.

<u>Posledica 2.2.23.</u> Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $A \in \mathcal{T}_\alpha \Leftrightarrow \mathrm{spcl}A = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$,

(2) $A \in C(\mathcal{T}_\alpha) \Leftrightarrow \mathrm{spint}A = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))$.

<u>Posledica 2.2.24.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $\mathrm{spcl}A = A \cup \mathrm{scl}(\mathrm{sint}A)$,

(2) $\mathrm{spint}A = A \cap \mathrm{sint}(\mathrm{scl}A)$.

Dokaz. (1) Na osnovu 2.1.4. i 2.2.22. sledi da je $A \cup \mathrm{scl}(\mathrm{sint}A) = A \cup (\mathrm{sint}A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))) = \mathrm{spcl}A$.

Relacija (2) je dualna.

<u>Teorema 2.2.25.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je $\mathrm{spint}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spcl}(\mathrm{spint}A)$.

Dokaz. Na osnovu 2.2.22. dobijamo da je $\mathrm{spint}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spcl}A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{spcl}A))) = (A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))) \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = (A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) = \mathrm{spint}A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{spint}A))) = \mathrm{spcl}(\mathrm{spint}A)$.

<u>Posledica 2.2.26.</u> Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $A \cup \mathrm{spint}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spcl}A$,

(2) $A \cap \mathrm{spint}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spint}A$.

Stav 2.2.25. pokazao je da operatori spcl i spint međusobno komutiraju. Sledeći stav pokazuje da oni komutiraju i sa ostalim operatorima. Dokaz izostavljamo jer se u njemu koriste već više puta primenjivane metode.

Teorema 2.2.27. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $\mathrm{int}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spcl}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$,

(2) $\mathrm{cl}(\mathrm{spint}A) = \mathrm{spint}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))$,

(3) $\mathrm{sint}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spcl}(\mathrm{sint}A) = \mathrm{scl}(\mathrm{sint}A)$,

(4) $\mathrm{scl}(\mathrm{spint}A) = \mathrm{spint}(\mathrm{scl}A) = \mathrm{sint}(\mathrm{scl}A)$,

(5) $\mathrm{pint}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spcl}(\mathrm{pint}A) = \mathrm{pint}A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$,

(6) $\mathrm{pcl}(\mathrm{spint}A) = \mathrm{spint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))$.

Posledica 2.2.28. Neka je A podskup prostora X. Tada je $\mathrm{scl}(\mathrm{sint}A) \subset \mathrm{spint}(\mathrm{spcl}A) \subset \mathrm{sint}(\mathrm{scl}A)$.

Sledeći stavovi daju nove karakterizacije ekstremalno diskoneksnih prostora kao i prostora koji sadrže otvoren, gust i nasledno nerastavljiv potprostor (videti 1.3.21. i 1.4.5.).

Teorema 2.2.29. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $SPO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T})$.

Dokaz. Neka je $SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$ i $A \in SPO(\mathcal{T})$. Tada je na osnovu 2.2.3. $\mathrm{scl}A \in SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$ i zato $A \in PO(\mathcal{T})$ na osnovu 2.1.13. Obratno tvrđenje sledi neposredno.

Teorema 2.2.30. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $PO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T})$.

Dokaz. Neka je $PO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{T})$ i $A \in SPO(\mathcal{T})$. Tada postoji preotvoren skup G takav da je $G \subset A \subset \mathrm{cl}G$. Na osnovu pretpostavke je $G \in SO(\mathcal{T})$ i zato $A \subset \mathrm{cl}G = \mathrm{cl}(\mathrm{int}G) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$. Otuda je $A \in SO(\mathcal{T})$. Obratno tvrđenje sledi neposredno.

Ove dve teoreme i 1.4.1. sada daju:

Posledica 2.2.31. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $SPO(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ ako i samo ako je $(X,\mathcal{T})$ submaksimalan i ekstremalno diskoneksan.

Teorema 2.2.32. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$.

(b) $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A)$ za svaki podskup A.

(c) $\mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$ za svaki podskup A.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Na osnovu 2.2.29. je $SPO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T})$ pa iz 2.2.25. sledi da je $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}A) = \mathrm{spint}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spcl}(\mathrm{spint}A) = \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}A)$ za svaki podskup A.

(b) $\Rightarrow$ (c): Neka je A proizvoljan podskup. Primenom (b) na $\mathrm{int}A$ dobijamo da je $\mathrm{pint}(\mathrm{pcl}(\mathrm{int}A)) = \mathrm{pcl}(\mathrm{pint}(\mathrm{int}A))$ i zato $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$ na osnovu 2.1.3. Otuda je $\mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) je očigledno.

Teorema 2.2.33. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $PO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{T})$.

(b) $\mathrm{sint}(\mathrm{scl}A) = \mathrm{scl}(\mathrm{sint}A)$ za svaki podskup A.

(c) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$ za svaki podskup A.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Primenom 2.2.30. i 2.2.25. dobijamo da je $\mathrm{sint}(\mathrm{scl}A) = \mathrm{spint}(\mathrm{spcl}A) = \mathrm{spcl}(\mathrm{spint}A) = \mathrm{scl}(\mathrm{sint}A)$ za svaki podskup A.

(b) $\Rightarrow$ (c): Neka je A proizvoljan podskup. Na osnovu (b) i 2.1.3. je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{int}(\mathrm{scl}A) = \mathrm{int}(\mathrm{sint}(\mathrm{scl}A)) = \mathrm{int}(\mathrm{scl}(\mathrm{sint}A)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{sint}A)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) sledi neposredno.

Videli smo da je $SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T}) \subset SPO(\mathcal{T})$ i prirodno se postavlja pitanje kada u toj relaciji važi jednakost. Taj problem se razmatra do kraja odeljka.

Teorema 2.2.34. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$.

(b) Za svaki preotvoren skup G: $\mathrm{cl}G \in \mathcal{T}$ ili $G \in SO(\mathcal{T})$.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Neka je $G \in PO(\mathcal{T})$ i pretpostavimo da $\mathrm{cl}G$ nije otvoren. Stavimo $H = G \cup (\mathrm{cl}G - \mathrm{int}(\mathrm{cl}G))$. Tada je $H \in SPO(\mathcal{T}) - PO(\mathcal{T})$ i zato $H \in SO(\mathcal{T})$ na osnovu pretpostavke. Otuda je $G = H \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}G)$ semi-otvoren skup.

(b) $\Rightarrow$ (a): Neka je $A \in SPO(\mathcal{T})$. Tada je $G \subset A \subset \mathrm{cl}G$ za neki preotvoren skup G. Ako je $\mathrm{cl}G \in \mathcal{T}$, onda je $A \subset \mathrm{cl}G = \mathrm{int}(\mathrm{cl}G) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$ pa je A preotvoren. U drugom slučaju, ako je $G \in SO(\mathcal{T})$, onda je $A \subset clG = cl(intG) \subset cl(intA)$ pa je A semi-otvoren. Otuda je $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$.

<u>Posledica 2.2.35.</u> Neka je prostor $(X,\mathcal{T})$ rastavljiv. Tada je $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $(X,\mathcal{T})$ ekstremalno diskoneksan.

<u>Dokaz</u>. Neka je $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$ i pretpostavimo da postoji otvoren skup U takav da $clU \notin \mathcal{T}$. Budući da je X rastavljiv, $X = D \cup E$ gde je $clD = clE = X$ i $D \cap E = \emptyset$. Otuda je specijalno $intD = \emptyset$. Neka je sada $G = U \cap D$. Tada je G neprazan i preotvoren. Kako $clG = clU \notin \mathcal{T}$, to na osnovu prethodne teoreme sledi da je $G \in SO(\mathcal{T})$ i zato $intG \neq \emptyset$, kontradikcija. Stoga je $(X,\mathcal{T})$ ekstremalno diskoneksan. Obratno tvrđenje sledi iz 2.2.29.

<u>Teorema 2.2.36.</u> Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$ i neka je $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$. Tada je $cl(int(clA)) = int(clA) \cup cl(intA)$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $x \in cl(int(clA)) - int(clA)$ i stavimo $B = pintA \cup \{x\}$. Na osnovu 2.1.3. je $clB = cl(pintA) \cup cl\{x\} = cl(int(clA))$ pa je $B \in SPO(\mathcal{T})$. S druge strane, $int(clB) = int(clA)$ ne sadrži tačku x i zato $B \notin PO(\mathcal{T})$. Otuda je $B \in SO(\mathcal{T})$ na osnovu pretpostavke. Pošto $x \notin intB$, sledi da je $intB = intA$ i stoga $B \subset cl(intB) = cl(intA)$. Sledi $x \in cl(intA)$.

<u>Teorema 2.2.37.</u> Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$ i neka je $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$. Tada je $int(clA) \subset cl(intA)$ ili $cl(intA) \subset int(clA)$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $B = pcl(pintA)$. Na osnovu 2.1.7. sledi da je $B = pintA \cup cl(intA)$ pa je $B \in SPO(\mathcal{T})$. Pretpostavimo najpre da je $B \in PO(\mathcal{T})$. Sada na osnovu 2.1.3. sledi da je $B \subset int(clB) = int(cl(pcl(pintA))) = int(cl(pintA)) = int(cl(int(clA))) = int(clA)$ i stoga $cl(intA) \subset int(clA)$. U drugom slučaju, ako je $B \in SO(\mathcal{T})$, onda primenom 2.1.3. dobijamo da je $B \subset cl(intB) = cl(int(pcl(pintA))) = cl(int(cl(int(pintA)))) = cl(intA)$. Otuda je $pintA \subset cl(intA)$ pa je $cl(pintA) = cl(int(clA)) \subset cl(intA)$ i zato $int(clA) \subset cl(intA)$.

Sledeća teorema je neposredna posledica stavova 2.2.36.

i 2.2.37.

Teorema 2.2.38. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$.

(b) Za svaki podskup A: $cl(int(clA)) = int(clA)$ ili $cl(int(clA)) = cl(intA)$.

(c) Za svaki podskup B: $int(cl(intB)) = cl(intB)$ ili $int(cl(intB)) = int(clB)$.

Posledica 2.2.39. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor, $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$ i $B \in PO(\mathcal{T}) - SO(\mathcal{T})$. Tada su clB i $cl(intB)$ otvoreni skupovi.

Dokaz. Primenom 2.2.38.(b) na B dobijamo da je $clB = int(clB)$ ili $clB = cl(intB)$. Kako B nije semi-otvoren, ne može biti $clB = cl(intB)$, pa je clB otvoren skup. Primenom 2.2.38.(c) na B dobijamo da je $int(cl(intB)) = cl(intB)$ ili $int(cl(intB)) = int(clB) = clB$. Ponovo, kako B nije semi-otvoren, ne važi druga mogućnost, pa je $cl(intB)$ otvoren skup.

Sledeća lema se lako dokazuje.

Lema 2.2.40. Neka su A i B podskupovi prostora X takvi da je $clA \cap B = A \cap clB = \emptyset$. Tada je $int(A \cup B) = intA \cup intB$.

Sledećim stavom iskazan je glavni rezultat u vezi sa problemom koji razmatramo.

Teorema 2.2.41. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$.

(b) $SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$ ili $PO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{T})$.

Dokaz. (b) $\Rightarrow$ (a) sledi neposredno iz 2.2.29. i 2.2.30.

(a) $\Rightarrow$ (b): Pretpostavimo da postoje skupovi A i B takvi da je $A \in SO(\mathcal{T}) - PO(\mathcal{T})$ i $B \in PO(\mathcal{T}) - SO(\mathcal{T})$. Razmatraćemo tri slučaja:

(i) $B \subset A$: Tada je $clB \subset clA$ i zato $clB \subset int(clA)$ na osnovu 2.2.39. Neka je $S = (A - clB) \cup B$. Tada je $S \in SPO(\mathcal{T}) =$

$SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$. Kako je $cl(A - clB) \cap clB \subset (clA - int(clB)) \cap clB = (clA - clB) \cap clB = \emptyset$, na osnovu prethodne leme sledi da je $intS = int(A - clB) \cup intB = (intA - clB) \cup intB$. Otuda je $cl(intS) = cl((intA - clB) \cup intB) \subset (cl(intA) - int(clB)) \cup cl(intB) = (clA - clB) \cup cl(intB)$. Za proizvoljno $p \in B - cl(intB)$ je $p \in S$ i $p \notin cl(intS)$ pa $S \notin SO(\mathcal{T})$ i stoga $S \in PO(\mathcal{T})$. S druge strane, zbog $clS = cl(A - clB) \cup clB \subset (clA - clB) \cup clB = clA \cup clB = clA$, dobijamo da je $int(clS) \subset int(clA)$ i stoga $S = (A - clB) \cup B \subset int(clA)$. Poslednja relacija i $clB \subset int(clA)$ daju da je $A \subset int(clA)$, kontradikcija.

(ii) $A \subset B$: Tada je $clA = cl(intA) \subset cl(intB)$. Neka je $S = (B - cl(intB)) \cup A$. Tada je $S \in SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$. Kako je $cl(intB)$ otvoren na osnovu 2.2.39., to je $cl(B - cl(intB)) \cap clA \subset (clB - cl(intB)) \cap clA = \emptyset$ i zato $intS = int(B - cl(intB)) \cup intA = intA$ na osnovu prethodne leme. Otuda je $cl(intS) = cl(intA) = clA$. Za proizvoljno $p \in B - cl(intB)$ je $p \in S$ i $p \notin cl(intS)$ pa $S \notin SO(\mathcal{T})$ i stoga $S \in PO(\mathcal{T})$. S druge strane, na osnovu 2.2.39. je $clS = cl(B - cl(intB)) \cup clA \subset (clB - cl(intB)) \cup clA$. Budući da su $clB - cl(intB)$ i clA zatvoreni i disjunktni, na osnovu prethodne leme sledi da je $int(clS) \subset int(clB - cl(intB)) \cup int(clA) = (clB - cl(intB)) \cup int(clA)$ i zato $S = (B - cl(intB)) \cup A \subset int(clS) \subset (clB - cl(intB)) \cup int(clA)$. Poslednja relacija i $clA \subset cl(intB)$ daju da je $A \subset int(clA)$, kontradikcija.

(iii) $A \not\subset B$ i $B \not\subset A$: Tada je $A \cup B \in SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$. Pretpostavimo da je $A \cup B \in SO(\mathcal{T})$. Tada je $A \cup B \subset cl(int(A \cup B)) \subset cl(int(clA \cup B)) \subset cl(clA \cup intB) = clA \cup cl(intB)$. Sledi da je $B - cl(intB) \subset clA$ pri čemu je $B - cl(intB) \in PO(\mathcal{T}) - SO(\mathcal{T})$ i $clA \in SO(\mathcal{T}) - PO(\mathcal{T})$ a to je kontradikcija na osnovu (i). Otuda je $A \cup B \in PO(\mathcal{T}) - SO(\mathcal{T})$ pa je $A \subset A \cup B$ kontradikcija na osnovu (ii).

<u>Posledica 2.2.42.</u> Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}) \cup PO(\mathcal{T})$.

(b) $int(clA) \subset cl(intA)$ za svaki podskup A ili $cl(intA) \subset int(clA)$ za svaki podskup A.

<u>Dokaz</u>. (b) $\Rightarrow$ (a) sledi neposredno iz prethodne teoreme. (a) $\Rightarrow$ (b): Na osnovu prethodne teoreme razmatraćemo dva

slučaja. (i) $SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$: Tada je na osnovu 2.2.32. $cl(intA) \subset int(clA)$ za svaki podskup A. (ii) $PO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{T})$: Tada je na osnovu 2.2.33. $int(clA) \subset cl(intA)$ za svaki podskup A.

2.3. Uopšteni otvoreni skupovi kao predbaza topologije

U prostoru $(X,\mathcal{T})$ označićemo sa $\mathcal{T}^p$, $\mathcal{T}^s$ i $\mathcal{T}^{sp}$ topologije na skupu X čije su predbaze klase $PO(\mathcal{T})$, $SO(\mathcal{T})$ i $SPO(\mathcal{T})$ redom. Postavlja se pitanje kada su ove topologije diskretne i tom problemu biće posvećen poslednji odeljak druge glave. Za topologiju $\mathcal{T}^p$ problem je rešio Ganster u [36]. Pokazao je da je $\mathcal{T}^p$ diskretna ako i samo ako u Hewittovoj reprezentaciji $X = F \cup G$, F i $\{x\}$ su otvoreni skupovi za svako $x \in G$. Ovde je pokazano da za neizolovanu tačku x prostora $(X,\mathcal{T})$, $\{x\} \in \mathcal{T}^s$ ako i samo ako postoji regularno otvoren skup V takav da je $x \in clV - V$. Takođe je pokazano da je $\mathcal{T}^{sp}$ diskretna ako i samo ako za svaku neizolovanu tačku $x \in clG$, gde je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora $(X,\mathcal{T})$, postoji regularno otvoren skup V takav da je $x \in clV - V$. Sledeće dve teoreme su osnovne za dobijanje navedenih rezultata.

Teorema 2.3.1. Neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora $(X,\mathcal{T})$ i neka je $x \in clG$ neizolovana tačka. Tada $\{x\} \notin \mathcal{T}^p$.

Dokaz. G je otvoren, gust i nasledno nerastavljiv u clG pa je $PO(\mathcal{T}_{clG}) = (\mathcal{T}_{clG})_\alpha$ na osnovu 1.4.5. Pretpostavimo da je $\{x\} \in \mathcal{T}^p$. To znači da je $\{x\} = P_1 \cap \ldots \cap P_k$ gde je $P_i \in PO(\mathcal{T})$ za svako $i \in \{1,\ldots,k\}$. Kako je na osnovu 1.2.14. $P_i \cap clG \in PO(\mathcal{T}_{clG})$ za svako i, to je $\{x\} \in (\mathcal{T}_{clG})_\alpha \subset SO(\mathcal{T}_{clG})$. Otuda je na osnovu 1.3.20. $\{x\} \in SO(\mathcal{T})$ i stoga $\{x\} \in \mathcal{T}$ što je suprotno pretpostavci. Prema tome $\{x\} \notin \mathcal{T}^p$.

Teorema 2.3.2. Neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora $(X,\mathcal{T})$ i neka je $x \in intF$. Tada je $\{x\} \in \mathcal{T}^p$.

Dokaz. Budući da je F rastavljiv i zatvoren, postoje skupovi E_1 i E_2 takvi da je $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = F$ i $clE_1 = clE_2 = F$. Bez ograničavanja opštosti možemo pretpostaviti da je $x \in E_1$.

Kako su $G \cup E_1$ i $G \cup E_2 \cup \{x\}$ gusti, to je $(G \cup E_1) \cap (G \cup E_2 \cup \{x\}) = G \cup \{x\} \in \mathcal{T}^p$. Sledi da je $\{x\} = (G \cup \{x\}) \cap \mathrm{int}F \in \mathcal{T}^p$.

Sledeći stav sledi neposredno iz prethodna dva.

Teorema 2.3.3. Neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{T}^p$ diskretna topologija ako i samo ako je $F \in \mathcal{T}$ i $\{x\} \in \mathcal{T}$ za svako $x \in G$.

U sledećem stavu se nalazi odgovor na pitanje kada je topologija $\mathcal{T}^s$ diskretna.

Teorema 2.3.4. Neka je x neizolovana tačka prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $\{x\} \in \mathcal{T}^s$ ako i samo ako postoji regularno otvoren skup V takav da je $x \in \mathrm{cl}V - V$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\{x\}$ nije otvoren i neka je $\{x\} \in \mathcal{T}^s$. To znači da je $\{x\} = S_1 \cap \ldots \cap S_k$ gde je $S_i \in SO(\mathcal{T})$ za svako $i \in \{1,\ldots,k\}$. Pretpostavimo da je $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}S_i) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}S_i))$ za svako i. Tada je $\{x\} = \mathrm{int}_\alpha S_1 \cap \ldots \cap \mathrm{int}_\alpha S_k$ pa je $\{x\} \in \mathcal{T}_\alpha$ i zato $\{x\} \in \mathcal{T}$ što je suprotno pretpostavci. Otuda sledi da $x \notin \mathrm{int}(\mathrm{cl}S_j)$ za neko j. Tada je $V = \mathrm{int}(\mathrm{cl}S_j)$ regularno otvoren i $x \in \mathrm{cl}V - V$.

Obratno, neka je $x \in \mathrm{cl}V - V$ za neko $V \in RO(\mathcal{T})$. Tada su skupovi $S_1 = V \cup \{x\}$ i $S_2 = (X - \mathrm{cl}V) \cup \{x\}$ semi-otvoreni i $S_1 \cap S_2 = \{x\}$ pa je $\{x\} \in \mathcal{T}^s$.

Da bismo isti problem rešili i u slučaju topologije $\mathcal{T}^{sp}$, dokažimo najpre sledeći stav.

Teorema 2.3.5. Neka je x tačka prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $\{x\} \in \mathcal{T}^{sp}$ ako i samo ako je $\{x\} \in \mathcal{T}^s \cup \mathcal{T}^p$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{x\} \in \mathcal{T}^{sp}$. To znači da je $\{x\} = A_1 \cap \ldots \cap A_k$ gde je $A_i \in SPO(\mathcal{T})$ za svako $i \in \{1,\ldots,k\}$. Pretpostavimo sada da $x \notin \mathrm{int}(\mathrm{cl}A_j)$ za neko j. Tada je $x \in \mathrm{cl}V - V$ gde je $V = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A_j) \in RO(\mathcal{T})$. Otuda je $\{x\} \in \mathcal{T}^s$ na osnovu prethodne teoreme. U drugom slučaju, neka je $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}A_i)$ za svako i. Tada je $x \in A_i \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A_i) = \mathrm{pint}A_i$ za svako i pa je $\{x\} \in \mathcal{T}^p$.

Obratno tvrđenje sledi neposredno.

<u>Teorema 2.3.6.</u> Neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{T}^{sp}$ diskretna topologija ako i samo ako za svaku neizolovanu tačku $x \in clG$ postoji regularno otvoren skup V takav da je $x \in clV - V$.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je $\mathcal{T}^{sp}$ diskretna topologija i neka je $x \in clG$ neizolovana tačka. Tada na osnovu 2.3.1. $\{x\} \notin \mathcal{T}^{p}$ pa je $\{x\} \in \mathcal{T}^{s}$ na osnovu prethodne teoreme. Otuda je na osnovu 2.3.4. $x \in clV - V$ za neko $V \in RO(\mathcal{T})$.

Obratno, neka je x neizolovana tačka. Ako je $x \in clG$, onda je na osnovu pretpostavke $x \in clV - V$ za neko $V \in RO(\mathcal{T})$ pa je $\{x\} \in \mathcal{T}^{s} \subset \mathcal{T}^{sp}$ na osnovu 2.3.4. U drugom slučaju, ako $x \notin clG$, onda je $x \in intF$ pa je $\{x\} \in \mathcal{T}^{p} \subset \mathcal{T}^{sp}$ na osnovu 2.3.2. Otuda je topologija $\mathcal{T}^{sp}$ diskretna.

Sledeći primer pokazuje da postoji prostor $(X,\mathcal{T})$ takav da je topologija $\mathcal{T}^{sp}$ diskretna, a topologije $\mathcal{T}^{s}$ i $\mathcal{T}^{p}$ nisu diskretne.

<u>Primer 7</u>. Neka je $X = \{a,b,c,d\}$ i $\mathcal{T} = \{\emptyset,X,a,bc,abc\}$. Tada je $SO(\mathcal{T}) = \{\emptyset,X,a,bc,ad,abc,bcd\}$, $PO(\mathcal{T}) = \{\emptyset,X,a,b,c,ab,ac,bc,abc,abd,acd\}$ i $SPO(\mathcal{T}) = \{\emptyset,X,a,b,c,ab,ac,ad,bc,bd,cd,abc,abd,acd,bcd\}$. Sledi da je $\mathcal{T}^{sp}$ diskretna topologija, $\mathcal{T}^{s} = \{\emptyset,X,a,d,bc,ad,abc,bcd\}$ i $\mathcal{T}^{p} = \{\emptyset,X,a,b,c,ab,ac,bc,ad,abc,abd,acd\}$.

Odeljak zaključujemo stavom koji daje potrebne i dovoljne uslove pod kojima je $\mathcal{T}^{sp} = \mathcal{T}^{p}$.

<u>Teorema 2.3.7.</u> Neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $\mathcal{T}^{sp} = \mathcal{T}^{p}$.

(b) $\mathcal{T}^{s} \subset \mathcal{T}^{p}$.

(c) clG je otvoren i ekstremalno diskoneksan.

<u>Dokaz</u>. (a) $\Rightarrow$ (b) je očigledno.

(b) $\Rightarrow$ (c): Pretpostavimo da clG nije otvoren i neka je $x \in clG - int(clG)$. Tada je $\{x\} \in \mathcal{T}^{s}$ na osnovu 2.3.4. i zato $\{x\} \in \mathcal{T}^{p}$ a to je nemoguće zbog 2.3.1. Odatle sledi da je $clG \in \mathcal{T}$ pa se operatori zatvorenja i unutrašnjosti u potprostoru clG poklapaju sa odgovarajućim operatorima u $(X,\mathcal{T})$ za svako $A \subset \mathrm{cl}G$. Primenjujući sada na isti način stavove 2.3.4. i 2.3.1., dobijamo da je $\mathrm{cl}G$ ekstremalno diskoneksan.

(c) $\Rightarrow$ (a): Pretpostavimo da je $A \in SPO(\mathcal{T})$. Kako je $\mathrm{cl}G$ otvoren i ekstremalno diskoneksan, to je $A \cap \mathrm{cl}G \in PO(\mathcal{T}_{\mathrm{cl}G})$ na osnovu 2.2.29. Otuda je $A \cap \mathrm{cl}G \in PO(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}^p$. S druge strane, na osnovu 2.3.2. sledi da je $A \cap \mathrm{int}F \in \mathcal{T}^p$. Otuda je $A = (A \cap \mathrm{cl}G) \cup (A \cap \mathrm{int}F) \in \mathcal{T}^p$ i zato $\mathcal{T}^{sp} = \mathcal{T}^p$.

3. TOPOLOŠKI PROSTOR $(X,\mathcal{T}_\gamma)$

3.1. Osnovne osobine

Kao što smo već videli, Njåstad je u radu [69] pokazao da topologiju $\mathcal{T}_\alpha$ obrazuju tačno oni semi-otvoreni skupovi A za koje je $A\cap B \in SO(\mathcal{T})$ za svako $B \in SO(\mathcal{T})$. Lako se vidi da na ovaj način svaka klasa uopštenih otvorenih skupova generiše neku topologiju na datom skupu. Od posebnog značaja biće topologija $\mathcal{T}_\gamma$, tj. topologija generisana klasom preotvorenih skupova. Ona je uvedena u radu [7] a neke njene osobine ispitivane su u [8] i [9]. Među brojnim rezultatima koje ćemo izložiti u ovom odeljku istaknimo sledeća dva. S jedne strane pokazaćemo da je topologija $\mathcal{T}_\gamma$ jednaka topologiji koju generiše klasa semi-preotvorenih skupova. S druge strane pokazaćemo da se topologija $\mathcal{T}_\gamma$ ponaša u odnosu na klasu semi-preotvorenih skupova isto kao i topologija $\mathcal{T}_\alpha$ u odnosu na klasu semi-otvorenih skupova. Preciznije, važi sledeća ekvivalencija: $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma \Leftrightarrow SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$.

<u>Definicija</u>. Podskup A prostora $(X,\mathcal{T})$ je <u>γ-skup</u> ako je $A\cap B \in PO(\mathcal{T})$ za svako $B \in PO(\mathcal{T})$. Klasu svih γ-skupova u $(X,\mathcal{T})$ označavaćemo sa $\mathcal{T}_\gamma$.

<u>Teorema 3.1.1.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_\gamma$ topo-

logija na X takva da je $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}_\gamma$.

Dokaz. Na osnovu definicije neposredno sledi da je $\mathcal{T}_\gamma$ topologija na X. Drugi deo stava sledi iz 1.3.8.

Sledeća dva stava slede neposredno.

Teorema 3.1.2. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_\gamma \subset PO(\mathcal{T})$.

Teorema 3.1.3. Podskup A prostora $(X,\mathcal{T})$ je zatvoren u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je $A \cup B \in PC(\mathcal{T})$ za svako $B \in PC(\mathcal{T})$.

Zatvorenje i unutrašnjost skupa A u prostoru $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ označavaćemo sa $cl_\gamma A$ odnosno $int_\gamma A$. Sledeći stavovi dovode u vezu ove operatore sa odgovarajućim operatorima u $(X,\mathcal{T})$.

Teorema 3.1.4. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $int_\gamma clA = int(clA)$,

(2) $cl_\gamma intA = cl(intA)$.

Dokaz. (1) Na osnovu 3.1.2. i 2.1.3. je $int_\gamma clA \subset pint(clA) = int(clA) \subset int_\gamma clA$.

Relacija (2) se dokazuje na sličan način.

Teorema 3.1.5. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $int(cl(intA)) \subset int_\gamma cl_\gamma A \subset int(clA)$,

(2) $cl(intA) \subset cl_\gamma int_\gamma A \subset cl(int(clA))$.

Dokaz. (1) Na osnovu 2.1.3. i 3.1.2. je $int(cl(intA)) = int(pclA) \subset int_\gamma cl_\gamma A$ dok druga inkluzija sledi neposredno iz prethodnog stava.

Relacija (2) se dokazuje na sličan način.

Posledica 3.1.6. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $int(cl(intA)) \subset int_\gamma cl_\gamma int_\gamma A \subset int(clA)$,

(2) $cl(intA) \subset cl_\gamma int_\gamma cl_\gamma A \subset cl(int(clA))$.

Dobijeni rezultati omogućuju da se uspostave veze između nekih značajnih klasa skupova u $(X,\mathcal{T})$ i $(X,\mathcal{T}_\gamma)$.

Teorema 3.1.7. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:

(1) $PO(\mathcal{T}_\gamma) \subset PO(\mathcal{T})$,
(2) $SPO(\mathcal{T}_\gamma) \subset SPO(\mathcal{T})$,
(3) $D(\mathcal{T}_\gamma) \subset D(\mathcal{T})$,
(4) $SO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{T}_\gamma)$,
(5) $RO(\mathcal{T}) \subset RO(\mathcal{T}_\gamma)$,
(6) $N(\mathcal{T}) \subset N(\mathcal{T}_\gamma)$.

Dokaz. Dokazaćemo samo relaciju (5) jer ostale slede neposredno. Neka je $U \in RO(\mathcal{T})$, tj. $U = int(clU)$. Tada je na osnovu 3.1.4. $int_\gamma cl_\gamma U = int_\gamma cl_\gamma int(clU) = int_\gamma cl(int(clU)) = int(cl(int(clU))) = int(clU) = U$ pa je $U \in RO(\mathcal{T}_\gamma)$.

Sledeći primeri pokazuju da ni u jednoj od gornjih relacija ne važi jednakost u opštem slučaju.

Primer 8. Neka je $X = \{a,b,c\}$ i $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, ab\}$. Tada je $SO(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$, $PO(\mathcal{T}) = \{\emptyset, X, a, b, ab, ac, bc\}$, $\mathcal{T}_\gamma = PO(\mathcal{T}_\gamma) = \{\emptyset, X, a, b, ab\}$ i $SO(\mathcal{T}_\gamma) = \{\emptyset, X, a, b, ab, ac, bc\}$. Prema tome u relacijama (1) i (4) ne važi jednakost u opštem slučaju.

Primer 9. Neka je X skup koji se sastoji iz bar dve tačke i neka je $\mathcal{A}$ antidiskretna topologija na njemu. Tada je $\mathcal{A}_\gamma = PO(\mathcal{A}) = 2^X$, $RO(\mathcal{A}) = \{\emptyset, X\}$ i $RO(\mathcal{A}_\gamma) = 2^X$. S druge strane, za proizvoljno $x \in X$ je $\{x\} \in D(\mathcal{A})$ i $\{x\} \notin D(\mathcal{A}_\gamma)$. Prema tome u relacijama (3) i (5) ne važi jednakost u opštem slučaju.

Primer 10. Neka je X beskonačan skup i fiksirajmo tačku $p \in X$. Tada je $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U\colon p \in U \text{ i } X - U \text{ je konačan}\}$ topologija na X. Nije teško videti da je $SPO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}) = \{\emptyset\} \cup \{S\colon p \in S \text{ ili je } S \text{ beskonačan}\}$, $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T} \cup \{\{p\}\}$ i $SPO(\mathcal{T}_\gamma) = PO(\mathcal{T}_\gamma) = \mathcal{T}_{\gamma\gamma} = \{\emptyset\} \cup \{S\colon p \in S\}$. S druge strane, za $A = X - \{p\}$ je $A \in N(\mathcal{T}_\gamma)$ i $A \notin N(\mathcal{T})$. Prema tome u relacijama (2) i (6) ne važi jednakost u opštem slučaju.

Primedba. U slučaju prostora $(X, \mathcal{T}_\alpha)$ videli smo da u svih šest odgovarajućih relacija važi jednakost (stavovi 1.3.6. i 2.2.13.).

Teorema 3.1.8. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor takav da je $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ ekstremalno diskoneksan. Tada je i $(X,\mathcal{T})$ ekstremalno diskoneksan.

Dokaz. Pretpostavimo da je $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ ekstremalno diskoneksan. Tada je $SO(\mathcal{T}_\gamma) \subset PO(\mathcal{T}_\gamma)$ na osnovu 1.3.21. pa je $SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$ na osnovu 3.1.7. Otuda je $(X,\mathcal{T})$ ekstremalno diskoneksan.

Primer 8 pokazuje da obratno tvrđenje ne važi u opštem slučaju.

Sledeći, u daljem često korišćeni rezultat, sledi neposredno.

Teorema 3.1.9. Neka je x tačka prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $\{x\} \in \mathcal{T}_\gamma$.

(b) $\{x\} \in PO(\mathcal{T})$.

(c) $\{x\} \in SPO(\mathcal{T})$.

Sledeći stav pokazuje da topologija $\mathcal{T}_\gamma$ poseduje jedno interesantno separaciono svojstvo. Podsetimo da je prostor $(X,\mathcal{T})$ $T_{1/2}$-prostor ako je za svako $x \in X$, $\{x\}$ otvoren ili zatvoren skup [30].

Teorema 3.1.10. Prostor $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ je $T_{1/2}$-prostor.

Dokaz. Pretpostavimo da $\{x\}$ nije γ-skup. To znači na osnovu prethodnog stava da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) = \emptyset$ pa je na osnovu 1.3.1. $\{x\} \in C(\mathcal{T}_\alpha)$ i zato $\{x\} \in C(\mathcal{T}_\gamma)$.

Posledica 3.1.11. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada:

(1) $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ je T_D-prostor,

(2) $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ je T_o-prostor.

Iz $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\alpha)$ sledi da je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_{\alpha\gamma}$ za svaki prostor $(X,\mathcal{T})$. S druge strane, $\mathcal{T}_\gamma \subset \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$ je očigledno, a iz primera 10 može se zaključiti da jednakost ne važi u opštem slučaju. Ipak važi sledeće:

Teorema 3.1.12. Neka je $\mathcal{T}$ topologija na konačnom skupu X. Tada je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $A \in N(\mathcal{T}_\gamma)$. To znači da $\{a\} \notin \mathcal{T}_\gamma$ za svako $a \in A$ pa je $A \in C(\mathcal{T}_\gamma)$ na osnovu 3.1.10. Otuda je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$ na osnovu 1.3.11.

<u>Teorema 3.1.13.</u> Neka je $\mathcal{T}$ topologija na konačnom skupu X. Tada je prostor $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ submaksimalan.

<u>Dokaz</u>. Neka je $A \in PO(\mathcal{T}_\gamma)$ i $A \neq \emptyset$. Ako je $\mathrm{int}_\gamma A = \emptyset$, onda je $A \in C(\mathcal{T}_\gamma)$ na osnovu 3.1.10. pa je $A \in \mathcal{T}_\gamma$, kontradikcija. Otuda je $G = \mathrm{int}_\gamma A \neq \emptyset$. Sada je $F = A - G$ zatvoren i nigde gust u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ pa dobijamo da je $A = F \cup G \subset \mathrm{int}_\gamma \mathrm{cl}_\gamma(F \cup G) = \mathrm{int}_\gamma(F \cup \mathrm{cl}_\gamma G) \subset \mathrm{int}_\gamma F \cup \mathrm{cl}_\gamma G = \mathrm{cl}_\gamma G = \mathrm{cl}_\gamma \mathrm{int}_\gamma A$. Sledi da je $A \in SO(\mathcal{T}_\gamma)$ i prema tome $PO(\mathcal{T}_\gamma) \subset SO(\mathcal{T}_\gamma)$. Sada tvrđenje sledi na osnovu 1.4.5. i 3.1.12.

<u>Posledica 3.1.14.</u> Neka je $\mathcal{T}$ topologija na konačnom skupu X. Tada je $PO(\mathcal{T}_\gamma) = \mathcal{T}_\gamma$.

Sledeći primer pokazuje da za beskonačne prostore ne važi jednakost u opštem slučaju.

<u>Primer 11</u>. Neka je $\mathcal{T}$ kofinitna topologija na beskonačnom skupu X. Tada je $PO(\mathcal{T}) = \{\emptyset\} \cup \{A\colon A \text{ je beskonačan}\}$. Neka je sada $A \in PO(\mathcal{T}) - \mathcal{T}$. To znači da je $X - A$ beskonačan pa je $B = (X - A) \cup \{a\} \in PO(\mathcal{T})$ za svako $a \in A$. Otuda je $A \cap B = \{a\} \notin PO(\mathcal{T})$ i zato $A \notin \mathcal{T}_\gamma$. Prema tome $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\gamma$ i stoga $\mathcal{T}_\gamma \neq PO(\mathcal{T}_\gamma)$.

Sledeći stavovi opisuju ponašanje preotvorenih skupova u odnosu na potprostor.

<u>Teorema 3.1.15.</u> Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $\mathrm{pcl}A \cap G \subset \mathrm{cl}_\gamma(A \cap G)$ za svako $G \in PO(\mathcal{T})$,

(2) $\mathrm{pcl}A \cap G \subset \mathrm{pcl}(A \cap G)$ za svako $G \in \mathcal{T}_\gamma$.

<u>Dokaz</u>. (1) Pretpostavimo da je $x \in \mathrm{pcl}A \cap G$ i neka je U γ-skup koji sadrži x. Tada je $U \cap G$ preotvoren skup koji sadrži x pa je $(U \cap G) \cap A \neq \emptyset$ na osnovu 1.2.7. i zato $x \in \mathrm{cl}_\gamma(A \cap G)$.

Relacija (2) se dokazuje na sličan način.

Sledeći stav je dualan prethodnom.

<u>Teorema 3.1.16.</u> Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $\mathrm{int}_\gamma(A\cup F) \subset \mathrm{pint}A \cup F$ za svako $F \in PC(\mathcal{T})$,

(2) $\mathrm{pint}(A\cup F) \subset \mathrm{pint}A \cup F$ za svako $F \in C(\mathcal{T}_\gamma)$.

<u>Teorema 3.1.17.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor, $A \subset Y \subset X$ i $A \in PO(\mathcal{T})$. Tada je $A \in PO(\mathcal{T}_Y)$.

<u>Dokaz</u>. $A \subset Y\cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \subset Y\cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A\cup(X - Y)) = Y\cap \mathrm{int}((Y\cap \mathrm{cl}A)\cup(X - Y)) = Y\cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}_Y A\cup(X - Y)) = \mathrm{int}_Y \mathrm{cl}_Y A$.

<u>Teorema 3.1.18.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \subset Y \in PO(\mathcal{T})$. Tada je $\mathrm{int}_Y \mathrm{cl}_Y = Y\cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$.

<u>Dokaz</u>. Kako $Y\cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{int}_Y \mathrm{cl}_Y A$ sledi iz prethodnog stava, to nam ostaje da dokažemo obratnu inkluziju. Budući da je $X - Y \in PC(\mathcal{T})$, koristeći 3.1.16. i 2.1.3. dobijamo da je $\mathrm{int}_Y \mathrm{cl}_Y A = Y\cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A\cup(X - Y)) \subset Y\cap(\mathrm{pint}(\mathrm{cl}A)\cup(X - Y)) = Y\cap (\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)\cup(X - Y)) = Y\cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$ što je i trebalo dokazati.

<u>Posledica 3.1.19.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \subset Y \in PO(\mathcal{T})$. Tada je $A \in PO(\mathcal{T}_Y)$ ako i samo ako je $A \in PO(\mathcal{T})$.

Kao što smo već naglasili, polazeći od ma koje klase uopštenih otvorenih skupova može se dobiti jedna nova topologija na način kako smo topologiju $\mathcal{T}_\gamma$ dobili pomoću klase $PO(\mathcal{T})$. Sada ćemo to uraditi sa klasom $SPO(\mathcal{T})$.

<u>Definicija</u>. Podskup A prostora $(X,\mathcal{T})$ je <u>δ-skup</u> ako je $A\cap B \in SPO(\mathcal{T})$ za svako $B \in SPO(\mathcal{T})$. Klasu svih δ-skupova u $(X,\mathcal{T})$ označićemo sa $\mathcal{T}_\delta$.

Lako se vidi da je $\mathcal{T}_\delta$ topologija na skupu X. Štaviše, važi sledeći stav:

<u>Teorema 3.1.20.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_\delta$.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{T}_\gamma$ i neka je $B \in SPO(\mathcal{T})$. Tada je na osnovu 2.2.7. $B = C\cap D$ gde je $C \in PO(\mathcal{T})$ i $D \in SO(\mathcal{T})$. Odatle sledi da je $A\cap C \in PO(\mathcal{T})$ pa je $A\cap B = A\cap C\cap D \in SPO(\mathcal{T})$ na osnovu 2.2.6. i zato $A \in \mathcal{T}_\delta$.

Obratno, pretpostavimo da je $A \in \mathcal{T}_\delta$ i $A \notin \mathcal{T}_\gamma$. Za $x \in$

$A - \mathrm{int}_\gamma A \subset A - \mathrm{int}_\alpha A$ sledi da $\{x\} \notin SPO(\mathcal{T})$ na osnovu 3.1.9. i $x \notin \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$ na osnovu 1.3.4. Sada iz 2.1.3. sledi da je $x \in X - \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X - A))) = \mathrm{cl}(\mathrm{pint}(X - A))$ i zato $\{x\} \cup \mathrm{pint}(X - A) \in SPO(\mathcal{T})$. Otuda je $A \cap (\{x\} \cup \mathrm{pint}(X - A)) = \{x\} \in SPO(\mathcal{T})$, kontradikcija.

Dobijeni rezultat je izuzetno važan za dalja ispitivanja. Najpre ćemo ispitati ponašanje semi-preotvorenih skupova u odnosu na potprostor. Imajući u vidu prethodni stav, sledeća dva se dokazuju na sličan način kao i stavovi 3.1.15. odnosno 3.1.16.

<u>Teorema 3.1.21.</u> Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $\mathrm{spcl}A \cap G \subset \mathrm{cl}_\gamma(A \cap G)$ za svako $G \in SPO(\mathcal{T})$,

(2) $\mathrm{spcl}A \cap G \subset \mathrm{spcl}(A \cap G)$ za svako $G \in \mathcal{T}_\gamma$.

<u>Teorema 3.1.22.</u> Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $\mathrm{int}_\gamma(A \cup F) \subset \mathrm{spint}A \cup F$ za svako $F \in SPC(\mathcal{T})$,

(2) $\mathrm{spint}(A \cup F) \subset \mathrm{spint}A \cup F$ za svako $F \in C(\mathcal{T}_\gamma)$.

<u>Teorema 3.1.23.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor, $A \subset Y \subset X$ i $A \in SPO(\mathcal{T})$. Tada je $A \in SPO(\mathcal{T}_Y)$.

<u>Dokaz.</u> $A \subset Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{cl}Y \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \subset Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{cl}Y \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A \cup (X - Y))) \subset Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(Y \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A \cup (X - Y)))) = Y \cap \mathrm{cl}(Y \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A \cup (X - Y))) = \mathrm{cl}_Y(Y \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A \cup (X - Y))) = \mathrm{cl}_Y(Y \cap \mathrm{int}((Y \cap \mathrm{cl}A) \cup (X - Y))) = \mathrm{cl}_Y(Y \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}_Y A \cup (X - Y))) = \mathrm{cl}_Y \mathrm{int}_Y \mathrm{cl}_Y A$.

<u>Teorema 3.1.24.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \subset Y \in SPO(\mathcal{T})$. Tada je $\mathrm{cl}_Y \mathrm{int}_Y \mathrm{cl}_Y A = Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))$.

<u>Dokaz.</u> Kako $Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \subset \mathrm{cl}_Y \mathrm{int}_Y \mathrm{cl}_Y A$ sledi na osnovu prethodnog stava, to nam ostaje da dokažemo obratnu inkluziju. Budući da je $X - Y \in SPC(\mathcal{T})$, koristeći 3.1.22. i 2.2.27. dobijamo da je $\mathrm{cl}_Y \mathrm{int}_Y \mathrm{cl}_Y A = Y \cap \mathrm{cl}(Y \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A \cup (X - Y))) \subset Y \cap \mathrm{cl}(Y \cap (\mathrm{spint}(\mathrm{cl}A) \cup (X - Y))) = Y \cap \mathrm{cl}(Y \cap \mathrm{spint}(\mathrm{cl}A)) \subset Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{spint}(\mathrm{cl}A)) = Y \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))$ što je i trebalo dokazati.

Posledica 3.1.25. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \subset Y \in SPO(\mathcal{T})$. Tada je $A \in SPO(\mathcal{T}_Y)$ ako i samo ako je $A \in SPO(\mathcal{T})$.

Videli smo u 1.3.13. da je $SO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{U})$ ako i samo ako je $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha$ pri čemu su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X (Njåstad). Postavlja se pitanje da li odgovarajuća ekvivalencija važi za klasu $PO(\mathcal{T})$ i topologiju $\mathcal{T}_\gamma$ odnosno za klasu $SPO(\mathcal{T})$ i topologiju $\mathcal{T}_\mathcal{J} = \mathcal{T}_\gamma$. Odgovor je u prvom slučaju negativan a u drugom pozitivan. Sledeći stav sledi neposredno iz definicije γ-skupova.

Teorema 3.1.26. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X takve da je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{U})$. Tada je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$.

Pokažimo na jednom primeru da obratno tvrđenje ne važi u opštem slučaju.

Primer 12. Neka je $X = \{a,b,c\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, ab\}$ i $\mathcal{U} = \{\emptyset, X, a, b, ab\}$. Tada je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma = \mathcal{U} = PO(\mathcal{U})$ i $PO(\mathcal{T}) = \{\emptyset, X, a, b, ab, ac, bc\}$.

Sledeći stav sledi neposredno iz 3.1.20.

Teorema 3.1.27. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X takve da je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$. Tada je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$.

Da bismo dokazali obratno tvrđenje, dokažimo najpre sledeći stav.

Teorema 3.1.28. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X takve da je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$. Tada je $N(\mathcal{T}) = N(\mathcal{U})$.

Dokaz. Sa $cl_\mathcal{U}A$ i $int_\mathcal{U}A$ označićemo zatvorenje odnosno unutrašnjost skupa A u prostoru $(X,\mathcal{U})$. Neka je $A \in N(\mathcal{T})$ i pretpostavimo da je $int_\mathcal{U} cl_\mathcal{U} A \neq \emptyset$. Za $x \in pint_\mathcal{U} A = A \cap int_\mathcal{U} cl_\mathcal{U} A$ sledi da je $A - \{x\} \in N(\mathcal{T})$ i zato $A - \{x\} \in C(\mathcal{T}_\alpha)$. Otuda je $(X - A) \cup \{x\} \in \mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$ i zato $((X - A) \cup \{x\}) \cap pint_\mathcal{U} A = \{x\} \in PO(\mathcal{U})$. Otuda je na osnovu 3.1.9. $\{x\} \in \mathcal{U}_\gamma = \mathcal{T}_\gamma$ pa je $\{x\} \in PO(\mathcal{T})$ što je suprotno pretpostavci da je $A \in N(\mathcal{T})$. Prema tome je $A \in N(\mathcal{U})$ i stoga $N(\mathcal{T}) \subset N(\mathcal{U})$. Obratna inkluzija se analogno dokazuje.

Teorema 3.1.29. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X. Tada je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ ako i samo ako je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$ i neka je $A \in SPO(\mathcal{T})$. Označimo $C = A - cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$. Tada je $C \in N(\mathcal{U})$ i zato $C \in N(\mathcal{T})$ na osnovu prethodne teoreme. S druge strane, $cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ je zatvoren u odnosu na $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_\gamma = \mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}\mathcal{T}$ pa je zato $C \in SPO(\mathcal{T})$. Sledi da je $C = \phi$, tj. $A \in SPO(\mathcal{U})$ i stoga $SPO(\mathcal{T}) \subset SPO(\mathcal{U})$. Obratna inkluzija se analogno dokazuje.

U nastavku izlaganja ispituju se neke osobine operatora zatvorenja i unutrašnjosti u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$. Sledeći stav dovodi u vezu operatore zatvorenja u prostorima $(X,\mathcal{T}_\alpha)$ i $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ i važan je u daljim ispitivanjima.

Teorema 3.1.30. Neka je A podskup prostora X. Tada je $cl_\alpha A = cl_\gamma A \cup int(clA)$.

Dokaz. Primetimo najpre da je $int(int(clA) - A) = int(clA) - clA = \phi$. To znači da je $int(clA) - A$ prezatvoren pa je $cl_\gamma A \cup (int(clA) - A) = cl_\gamma A \cup int(clA)$ prezatvoren na osnovu 3.1.3. Sada je $sclA = A \cup int(clA) \subset cl_\gamma A \cup int(clA)$ i zato $pcl(sclA) \subset cl_\gamma A \cup int(clA)$. Otuda je $cl_\alpha A \subset cl_\gamma A \cup int(clA)$ na osnovu 2.1.14. Obratna inkluzija sledi neposredno.

Posledica 3.1.31. Neka je A podskup prostora X. Tada je $cl_\alpha A = cl_\gamma A \cup sclA$.

Dualno dobijamo sledeći stav:

Teorema 3.1.32. Neka je A podskup prostora X. Tada je $int_\alpha A = int_\gamma A \cap cl(intA) = int_\gamma A \cap sintA$.

Dobijeni rezultati imaju brojne posledice. Sledeći stav ćemo često koristiti.

Teorema 3.1.33. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:

(1) $int_\alpha A = int_\gamma A$ za svako $A \in SO(\mathcal{T})$,

(2) $cl_\alpha A = cl_\gamma A$ za svako $A \in SC(\mathcal{T})$,

(3) $int_\alpha A = sintA$ za svako $A \in \mathcal{T}_\gamma$,

(4) $cl_\alpha A = sclA$ za svako $A \in C(\mathcal{T}_\gamma)$.

Klase $\mathcal{T}_\gamma$ i $SO(\mathcal{T})$ u opštem slučaju nisu uporedive a sledeća dva stava razmatraju slučajeve kada one to jesu.

Teorema 3.1.34. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $SO(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_\gamma$.

(b) $(X,\mathcal{T})$ je ekstremalno diskoneksan.

Dokaz. Na osnovu 1.3.21., $(X,\mathcal{T})$ je ekstremalno diskoneksan ako i samo ako je $int_\alpha A = sintA$ za svaki podskup A. Otuda tvrđenje sledi iz 3.1.32.

Teorema 3.1.35. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $\mathcal{T}_\gamma \subset SO(\mathcal{T})$.

(b) $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_\alpha$.

Interesantnu posledicu teoreme 3.1.30. daje i sledeći stav.

Teorema 3.1.36. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \in PO(\mathcal{T}) \cap C(\mathcal{T}_\gamma)$. Tada je $clA \in \mathcal{T}$.

Dokaz. Na osnovu 3.1.30. i uslova teoreme sledi da je $clA = cl_\alpha A = cl_\gamma A \cup int(clA) = A \cup int(clA) = int(clA)$ i stoga je $clA \in \mathcal{T}$.

Sledeći stav je dualan prethodnom.

Teorema 3.1.37. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \in PC(\mathcal{T}) \cap \mathcal{T}_\gamma$. Tada je $intA \in C(\mathcal{T})$.

Posledica 3.1.38. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$. Tada su clA i $intA$ otvoreno-zatvoreni u $(X,\mathcal{T})$.

Sledeća dva stava su važna za dalja razmatranja.

Teorema 3.1.39. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor, $G \in \mathcal{T}_\gamma$ i

$x \in G - cl(intG)$. Tada je $\{x\} \in PO(\mathcal{T}) - \mathcal{T}$.

Dokaz. Označimo skup $G - cl(intG)$ sa B. Tada je $B \in \mathcal{T}_\gamma$ i $intB = \emptyset$ pa je $(X - B) \cup \{x\} \in PO(\mathcal{T})$. Sledi da je $B \cap ((X - B) \cup \{x\}) = \{x\} \in PO(\mathcal{T})$. S druge strane, $\{x\} \notin \mathcal{T}$ sledi neposredno.

Teorema 3.1.40. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$ i $x \in int(clA) - cl_\gamma A$. Tada je $\{x\} \in PO(\mathcal{T}) - \mathcal{T}$.

Dokaz. Neka je $G = int_\gamma(X - A)$. Tada je $int(clA) - cl_\gamma A = int(cl(X - (X - A))) - cl_\gamma(X - (X - A)) = int(X - int(X - A)) - (X - int_\gamma(X - A)) = (X - cl(int(X - A))) - (X - G) = G - cl(int(X - A)) = G - cl(intG)$ pa tvrđenje sledi iz prethodnog stava.

Kao posledica dobija se jedno interesantno predstavljanje γ-skupova.

Teorema 3.1.41. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $A \in \mathcal{T}_\gamma$ ako i samo ako je $A = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_\alpha$ i $\{h\} \in PO(\mathcal{T}) - \mathcal{T}$ za svako $h \in H$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{T}_\gamma$ i neka je $G = int_\alpha A$. Tada je na osnovu 3.1.33. $G = sintA = A \cap cl(intA)$. S druge strane, za svako $h \in H = A - G = A - cl(intA)$ sledi da je $\{h\} \in PO(\mathcal{T}) - \mathcal{T}$ na osnovu 3.1.39. i otuda se dobija traženo predstavljanje. Obratno tvrđenje sledi neposredno.

U primeru 9 videli smo da je za antidiskretnu topologiju $\mathcal{A}$ na skupu X topologija $\mathcal{A}_\gamma$ diskretna. Dakle od povezanog prostora dobili smo nepovezan. Pokazaćemo da je to jedini takav slučaj, tj. da se u svim ostalim slučajevima povezanost čuva.

Teorema 3.1.42. Neka je $(X,\mathcal{T})$ povezan prostor koji nije antidiskretan. Tada je i prostor $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ povezan.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $A \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ takav da je $\emptyset \neq A \neq X$. Tada na osnovu pretpostavke i 3.1.38. sledi da je $clA = X$ i $intA = \emptyset$. Otuda je na osnovu 3.1.39. i 3.1.40. $\{x\} \in PO(\mathcal{T})$ za svako $x \in X$, tj. $\mathcal{T}_\gamma$ je diskretna topologija. Neka je sada $U \in \mathcal{T}$ i $\emptyset \neq U \neq X$. Tada je $U \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ i zato $U \in CO(\mathcal{T})$ što je suprotno pretpostavci. Prema tome prostor $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ je povezan.

U nastavku izlaganja ispitaćemo pod kojim uslovima u relacijama (1) - (6) teoreme 3.1.7. važe jednakosti. Većina rezultata je izložena u [9]. Podsetimo da je prostor X semi-T_D-prostor ako je $cl\{x\} - \{x\}$ semi-zatvoren za svako $x \in X$. Sledeći stav dokazali su Janković i Reilly u [53].

Teorema 3.1.43. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $(X,\mathcal{T})$ je semi-T_D-prostor.
(b) $(X,\mathcal{T}_\alpha)$ je T_D-prostor.
(c) Za svako $x \in X$, $\{x\}$ je ili otvoren ili nigde gust.

Teorema 3.1.44. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $(X,\mathcal{T})$ je semi-T_D-prostor.
(b) $D(\mathcal{T}) = D(\mathcal{T}_\gamma)$.
(c) $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_\alpha$.
(d) $SO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}_\gamma)$.
(e) $(X,\mathcal{T}_\alpha)$ je $T_{1/2}$-prostor.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Na osnovu 3.1.7. dovoljno je dokazati da je $D(\mathcal{T}) \subset D(\mathcal{T}_\gamma)$ i zato pretpostavimo da je $A \in D(\mathcal{T})$ i $x \in X - cl_\gamma A$. Tada je $A \cup \{x\} \in PO(\mathcal{T})$ pa je $(X - cl_\gamma A) \cap (A \cup \{x\}) = \{x\} \in PO(\mathcal{T})$. Sada na osnovu prethodne teoreme sledi da je $\{x\} \in \mathcal{T}$ pa je zato $x \in A$ što je suprotno pretpostavci. Otuda je $A \in D(\mathcal{T}_\gamma)$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Neka je $A \in \mathcal{T}_\gamma$ i $x \in A - cl(intA)$. Tada je na osnovu 3.1.39. $\{x\} \in \mathcal{T}_\gamma$. S druge strane, $\{x\}$ je kogust u $(X,\mathcal{T})$ pa je na osnovu pretpostavke kogust i u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$, kontradikcija. Otuda je $A \in SO(\mathcal{T})$ i zato $A \in \mathcal{T}_\alpha$.

(c) $\Rightarrow$ (d) sledi neposredno iz pretpostavke i 1.3.6.

(d) $\Rightarrow$ (e): Pretpostavimo da $\{x\} \notin \mathcal{T}_\alpha$. Tada $\{x\} \notin SO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{T}_\gamma)$ i zato $\{x\} \notin \mathcal{T}_\gamma$. Sledi da $\{x\} \notin PO(\mathcal{T})$ pa je $int(cl\{x\}) = \phi$. Otuda je $\{x\} \in C(\mathcal{T}_\alpha)$ te je $(X,\mathcal{T}_\alpha)$ $T_{1/2}$-prostor.

(e) $\Rightarrow$ (a): Svaki $T_{1/2}$-prostor je i T_D-prostor pa tvrđenje sledi iz prethodne teoreme.

Posledica 3.1.45. Neka je $(X,\mathcal{T})$ T_1-prostor. Tada je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_\alpha$.

Posledica 3.1.46. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $\mathcal{T}_{\gamma\gamma} = \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$,
(2) $\mathcal{T}_{\gamma\gamma\gamma} = \mathcal{T}_{\gamma\gamma}$.

Dokaz. (1) Na osnovu 3.1.10. $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ je $T_{1/2}$-prostor pa samim tim i semi-T_D-prostor. Otuda je $\mathcal{T}_{\gamma\gamma} = \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$ primenom 3.1.44.

(2) Iz (1) i 1.3.6. dobijamo da je $\mathcal{T}_{\gamma\gamma\gamma} = \mathcal{T}_{\gamma\gamma\alpha} = \mathcal{T}_{\gamma\alpha\alpha} = \mathcal{T}_{\gamma\alpha} = \mathcal{T}_{\gamma\gamma}$.

Teorema 3.1.47. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je $int_\gamma cl_\gamma A = int(cl_\gamma A)$ za svaki podskup A.

Dokaz. Pretpostavimo da je $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{T}_\gamma)$ i neka je A proizvoljni podskup prostora X. Tada je $int_\gamma cl_\gamma A \in RO(\mathcal{T}_\gamma) = RO(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$ pa je $int_\gamma cl_\gamma A \subset int(cl_\gamma A)$. Obratna inkluzija sledi neposredno.

Da bismo dokazali obratno tvrđenje, na osnovu 3.1.7. dovoljno je dokazati da je $RO(\mathcal{T}_\gamma) \subset RO(\mathcal{T})$ i zato pretpostavimo da je $A \in RO(\mathcal{T}_\gamma)$. To znači da je $A = int_\gamma cl_\gamma A = int(cl_\gamma A)$ pa je $A \in RO(\mathcal{T})$ na osnovu 2.2.10.

Teorema 3.1.48. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je $cl_\gamma A \in \mathcal{T}_\gamma$ za svako $A \in D(\mathcal{T})$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$ i neka je $A \in D(\mathcal{T})$. Tada je $A \cup \{x\} \in PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$ za svako $x \in cl_\gamma A$ pa je zato $cl_\gamma A = \bigcup \{A \cup \{x\}: x \in cl_\gamma A\} \in PO(\mathcal{T}_\gamma)$. Otuda je $cl_\gamma A \in \mathcal{T}_\gamma$.

Da bismo dokazali obratno tvrđenje, na osnovu 3.1.7. dovoljno je dokazati da je $PO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T}_\gamma)$ i zato pretpostavimo da je $A \in PO(\mathcal{T})$. Tada je na osnovu 1.2.1. $A = G \cap D$ gde je G otvoren a D gust u $(X,\mathcal{T})$. Otuda je $cl_\gamma D \in \mathcal{T}_\gamma$ pa je $A = G \cap D \subset G \cap cl_\gamma D = int_\gamma (G \cap cl_\gamma D) \subset int_\gamma cl_\gamma (G \cap D) = int_\gamma cl_\gamma A$ i zato $A \in PO(\mathcal{T}_\gamma)$.

Teorema 3.1.49. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $N(\mathcal{T}) = N(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je $\mathcal{T}_{\gamma\alpha} = \mathcal{T}_\gamma$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $N(\mathcal{T}) = N(\mathcal{T}_\gamma)$ i neka je $A \in \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$. Tada je na osnovu 1.3.10. $A = U - C$ gde je $U \in \mathcal{T}_\gamma$ a $C \in N(\mathcal{T}_\gamma) = N(\mathcal{T})$. Otuda sledi da je C α-zatvoren pa je zato $A \in \mathcal{T}_\gamma$.

Obratno tvrđenje sledi iz 3.1.28. i 3.1.46.

Sledeći rezultat je neposredna posledica stavova 3.1.29., 3.1.46. i 3.1.49.

Teorema 3.1.50. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_\gamma)$.

(b) $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_{\gamma\gamma}$.

(c) $N(\mathcal{T}) = N(\mathcal{T}_\gamma)$.

Posledica 3.1.51. Neka je $\mathcal{T}$ topologija na konačnom skupu X. Tada je $SO(\mathcal{T}_\gamma) = SPO(\mathcal{T})$.

Dokaz. Na osnovu 3.1.14. sledi da je $PO(\mathcal{T}_\gamma) = \mathcal{T}_\gamma$ pa je $PO(\mathcal{T}_\gamma) \subset SO(\mathcal{T}_\gamma)$ i zato $SO(\mathcal{T}_\gamma) = SPO(\mathcal{T}_\gamma)$ na osnovu 2.2.30. Sada tvrđenje sledi iz prethodne teoreme i 3.1.12.

U prethodnim razmatranjima videli smo da značajnu ulogu ima skup koji se sastoji iz neizolovanih, preotvorenih jednočlanih skupova datog prostora. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ neka je dakle $B = B(\mathcal{T}) = \{x \in X: \{x\} \in PO(\mathcal{T}) - \mathcal{T}\}$. U nastavku izlaganja utvrdićemo neke osobine skupa B da bismo pomoću njega dobili nove karakterizacije uslova $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$ i $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_\gamma)$ čime ćemo i završiti ovaj odeljak. Primetimo najpre da tvrđenja 2.3.1. i 3.1.41. možemo sada formulisati na sledeći način:

Teorema 3.1.52. Neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora X. Tada je $B \subset \mathrm{int}F$.

Teorema 3.1.53. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $A \in \mathcal{T}_\gamma$ ako i samo ako je $A = G \cup H$ pri čemu je $G \in \mathcal{T}_\alpha$ i $H \subset B$.

Sledeće tvrđenje sledi neposredno iz 3.1.44. i prethodne teoreme.

Teorema 3.1.54. Prostor X je semi-T_D ako i samo ako je $B = \emptyset$.

Važno svojstvo skupa B iskazano je sledećim stavom.

Teorema 3.1.55. Neka je X prostor. Tada je $cl_\gamma B = clB$.

Dokaz. Na osnovu 3.1.40. sledi da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}B) - \mathrm{cl}_\gamma B \subset B$ pa je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}B) \subset \mathrm{cl}_\gamma B$. Sada na osnovu 3.1.30. dobijamo da je $\mathrm{cl}B = \mathrm{cl}_\alpha B = \mathrm{cl}_\gamma B \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}B) = \mathrm{cl}_\gamma B$ što je i trebalo dokazati.

Teorema 3.1.56. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je $B \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$ i neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora X. Kako je F zatvoren i rastavljiv, to postoje skupovi E_1 i E_2 takvi da je $F = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ i $\mathrm{cl}E_1 = \mathrm{cl}E_2 = F$. S druge strane, na osnovu 3.1.52. je $B \subset \mathrm{int}F$. Neka je sada $B_1 = B \cap E_1$ i $B_2 = B \cap E_2$. Tada je $\mathrm{int}B_1 = \mathrm{int}B_2 = \emptyset$, tj. skupovi $X - B_1$ i $X - B_2$ su gusti pa su skupovi $\mathrm{cl}_\gamma(X - B_1)$ i $\mathrm{cl}_\gamma(X - B_2)$ otvoreno-zatvoreni u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ na osnovu 3.1.48. Otuda sledi da su skupovi $B_1 = \mathrm{int}_\gamma B_1$ i $B_2 = \mathrm{int}_\gamma B_2$ otvoreno-zatvoreni u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ pa je $B = B_1 \cup B_2 \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$.

Obratno, pretpostavimo da je $B \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ i neka je A gust u $(X,\mathcal{T})$. Na osnovu 3.1.40. sledi da je $X - \mathrm{cl}_\gamma A \subset B$ pa je $\mathrm{cl}_\gamma(X - \mathrm{cl}_\gamma A) = X - \mathrm{int}_\gamma \mathrm{cl}_\gamma A \subset B$ na osnovu pretpostavke. Otuda je $\mathrm{cl}_\gamma A - \mathrm{int}_\gamma \mathrm{cl}_\gamma A \subset B$ pa je zato $\mathrm{cl}_\gamma A \in \mathcal{T}_\gamma$. Sada iz 3.1.48. sledi da je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$.

Sledeći stav se dobija kao neposredna posledica prethodna dva.

Teorema 3.1.57. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je $B \in CO(\mathcal{T})$.

Teorema 3.1.58. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je $B \in \mathcal{T}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_\gamma)$ i neka je $x \in B - \mathrm{int}B$. Kako je $\{x\} \in \mathcal{T}_\gamma$, to $x \notin \mathrm{cl}_\gamma \mathrm{int}B = \mathrm{cl}(\mathrm{int}B)$. S druge strane je $\mathrm{spcl}B = \mathrm{spcl}_\gamma B = B \cup \mathrm{int}_\gamma \mathrm{cl}_\gamma \mathrm{int}_\gamma B = B \cup \mathrm{int}_\gamma \mathrm{cl}_\gamma B = \mathrm{int}_\gamma \mathrm{cl}_\gamma B = \mathrm{int}(\mathrm{cl}B)$, pa je zato $\mathrm{int}(\mathrm{spcl}B) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}B)$. Otuda je na osnovu 2.2.27. $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}B)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}B)$ što daje $\mathrm{cl}(\mathrm{int}B) = \mathrm{cl}B$. Sledi da je $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{int}B)$, kontradikcija. Prema tome je $B \in \mathcal{T}$.

Obratno, pretpostavimo da je $B \in \mathcal{T}$ i neka je $A \in N(\mathcal{T}_\gamma) - N(\mathcal{T})$. Za $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_\gamma A$ sledi na osnovu 3.1.40. da je $x \in B \in \mathcal{T}$ pa je $B \cap A \neq \emptyset$ i zato $\mathrm{int}_\gamma A \neq \emptyset$ što je suprotno pretpostavci. Otuda je $N(\mathcal{T}) = N(\mathcal{T}_\gamma)$ pa tvrđenje sledi iz 3.1.50.

Posledica 3.1.59. Neka je $\mathcal{T}$ topologija na konačnom skupu X. Tada je $B \in \mathcal{T}$.

Posledica 3.1.60. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$.

(b) $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_\gamma)$ i $B \in PC(\mathcal{T})$.

3.2. Zatvorenje i unutrašnjost u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$

U ovom odeljku nastavljamo sa ispitivanjem osobina operatora zatvorenja i unutrašnjosti u prostoru $(X,\mathcal{T}_\gamma)$. Utvrđujemo između ostalog njihove veze sa ranije uvedenim operatorima. Stav koji sledi je izvesno poboljšanje rezultata datog u 3.1.31.

Teorema 3.2.1. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $cl(int(clA)) = cl_\gamma pintA \cup int(clA)$,

(2) $cl_\alpha A = cl_\gamma pintA \cup sclA$.

Dokaz. (1) Primenjujući 3.1.31. na pintA dobijamo da je $cl_\alpha pintA = cl_\gamma pintA \cup scl(pintA)$ pa je $cl_\alpha pintA = cl_\gamma pintA \cup int(clA)$ na osnovu 2.1.12. S druge strane, na osnovu 1.3.4. i 2.1.3. sledi da je $cl_\alpha pintA = pintA \cup cl(int(cl(pintA))) = pintA \cup cl(int(clA)) = cl(int(clA))$ pa važi (1).

Relacija (2) sledi neposredno iz (1) i 1.3.4.

Sledeći stav je dualan prethodnom.

Teorema 3.2.2. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $int(cl(intA)) = int_\gamma pclA \cap cl(intA)$,

(2) $int_\alpha A = int_\gamma pclA \cap sintA$.

Veze operatora zatvorenja i unutrašnjosti u prostoru $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ sa operatorima pcl i pint iskazane su u sledećem stavu i njegovim posledicama.

Teorema 3.2.3. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $\mathrm{pint}(\mathrm{cl}_\gamma A) = \mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$,
(2) $\mathrm{cl}_\gamma \mathrm{pint}A = \mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))$,
(3) $\mathrm{pcl}(\mathrm{int}_\gamma A) = \mathrm{int}_\gamma A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$,
(4) $\mathrm{int}_\gamma \mathrm{pcl}A = \mathrm{int}_\gamma A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$.

Dokaz. (1) Iz 2.1.1. neposredno sledi da je $\mathrm{pint}(\mathrm{cl}_\gamma A) = \mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{cl}_\gamma A)) = \mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$.

(2) Primetimo najpre da je $\mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}_\gamma(A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = \mathrm{cl}_\gamma \mathrm{pint}A$. Sada na osnovu 3.2.1. dobijamo da je $\mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = \mathrm{cl}_\gamma A \cap (\mathrm{cl}_\gamma \mathrm{pint}A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = \mathrm{cl}_\gamma \mathrm{pint}A \cup (\mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = \mathrm{cl}_\gamma \mathrm{pint}A$.

Relacije (3) i (4) su dualne.

Posledica 3.2.4. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $A \cap \mathrm{pint}(\mathrm{cl}_\gamma A) = \mathrm{pint}A$,
(2) $A \cap \mathrm{cl}_\gamma \mathrm{pint}A = \mathrm{spint}A$,
(3) $A \cap \mathrm{pcl}(\mathrm{int}_\gamma A) = \mathrm{int}_\gamma A \cup \mathrm{sint}A$,
(4) $A \cap \mathrm{int}_\gamma \mathrm{pcl}A = \mathrm{int}_\gamma A$.

Posledica 3.2.5. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $A \cup \mathrm{pint}(\mathrm{cl}_\gamma A) = \mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{scl}A$,
(2) $A \cup \mathrm{cl}_\gamma \mathrm{pint}A = \mathrm{cl}_\gamma A$,
(3) $A \cup \mathrm{pcl}(\mathrm{int}_\gamma A) = \mathrm{pcl}A$,
(4) $A \cup \mathrm{int}_\gamma \mathrm{pcl}A = \mathrm{spcl}A$.

Posledica 3.2.6. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:
(1) $A \in \mathcal{T}_\gamma \Leftrightarrow A \subset \mathrm{int}_\gamma \mathrm{pcl}A$,
(2) $A \in PO(\mathcal{T}) \Leftrightarrow A \subset \mathrm{pint}(\mathrm{cl}_\gamma A)$,
(3) $A \in SPO(\mathcal{T}) \Leftrightarrow A \subset \mathrm{cl}_\gamma \mathrm{pint}A$.

Poslednja relacija prethodnog stava daće još jednu karakterizaciju klase semi-preotvorenih skupova.

Posledica 3.2.7. Podskup A prostora X je semi-preotvoren ako i samo ako je $\mathrm{cl}_\gamma \mathrm{pint}A = \mathrm{cl}_\gamma A$.

Za dokazivanje jedne interesantne karakterizacije klase ekstremalno diskoneksnih prostora koristimo sledeći stav:

Teorema 3.2.8. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $cl_\gamma A \in PO(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $clA \in \mathcal{T}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $cl_\gamma A \in PO(\mathcal{T})$. Tada na osnovu 3.2.3. dobijamo da je $cl_\gamma A = pint(cl_\gamma A) = cl_\gamma A \cap int(clA)$ pa je zato $cl_\gamma A \subset int(clA)$. Otuda je $cl_\alpha A = int(clA)$ na osnovu 3.1.30. Sledi da je $A \in PO(\mathcal{T})$ te je $cl_\alpha A = clA$ i prema tome $clA \in \mathcal{T}$.

Obratno tvrđenje sledi neposredno iz 3.2.3.

Teorema 3.2.9. Prostor $(X,\mathcal{T})$ je ekstremalno diskoneksan ako i samo ako je $cl_\gamma A \in PO(\mathcal{T})$ za svako $A \in PO(\mathcal{T})$.

Dokaz. Pretpostavimo da je prostor $(X,\mathcal{T})$ ekstremalno diskoneksan i neka je $A \in PO(\mathcal{T})$. Tada je $clA = cl(int(clA)) \in \mathcal{T}$ pa je $cl_\gamma A \in PO(\mathcal{T})$ na osnovu prethodnog stava.

Obratno tvrđenje sledi neposredno iz prethodnog stava.

U stavu 2.2.27. videli smo da operatori spcl i spint komutiraju sa ostalim operatorima. Pokazaćemo da oni komutiraju i sa operatorima zatvorenja i unutrašnjosti u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$.

Teorema 3.2.10. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $cl_\gamma spintA = spint(cl_\gamma A) = cl_\gamma A \cap cl(int(clA))$,

(2) $int_\gamma spclA = spcl(int_\gamma A) = int_\gamma A \cup int(cl(intA))$.

Dokaz. (1) Iz 2.2.22. neposredno sledi da je $spint(cl_\gamma A) = cl_\gamma A \cap cl(int(cl(cl_\gamma A))) = cl_\gamma A \cap cl(int(clA))$. S druge strane, na osnovu 3.2.3. dobijamo da je $cl_\gamma spintA = cl_\gamma(A \cap cl(int(clA))) \subset cl_\gamma A \cap cl(int(clA)) = cl_\gamma pintA \subset cl_\gamma spintA$ pa važi i druga jednakost.

Tvrđenje (2) je dualno.

Posledica 3.2.11. Podskup A prostora X je semi-preotvoren ako i samo ako je $cl_\gamma A$ semi-preotvoren.

Sada ćemo ispitati veze operatora u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ sa operatorima scl i sint.

Teorema 3.2.12. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $cl_\gamma sclA = scl(cl_\gamma A) = cl_\alpha A$,
(2) $int_\gamma sintA = sint(int_\gamma A) = int_\alpha A$.

Dokaz. (1) Primenjujući 3.1.31. na $cl_\gamma A$ odnosno $sclA$ dobijamo da je $cl_\alpha A = cl_\alpha cl_\gamma A = cl_\gamma A \cup scl(cl_\gamma A) = scl(cl_\gamma A)$ i $cl_\alpha A = cl_\alpha sclA = cl_\gamma sclA \cup sclA = cl_\gamma sclA$.

Tvrđenje (2) je dualno.

Teorema 3.2.13. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $cl_\gamma sintA = cl(intA)$,
(2) $sint(cl_\gamma A) = cl(int(cl_\gamma A))$,
(3) $int_\gamma sclA = int(clA)$,
(4) $scl(int_\gamma A) = int(cl(int_\gamma A))$.

Dokaz. (1) Na osnovu 2.1.12. i 2.1.3. dobijamo da je $cl(intA) = pcl(sintA) \subset cl_\gamma sintA \subset cl(sintA) = cl(intA)$.

(2) Budući da je $cl_\gamma A \in PC(\mathcal{T})$, to je $cl(int(cl_\gamma A)) \subset cl_\gamma A$ i zato $sint(cl_\gamma A) = cl_\gamma A \cap cl(int(cl_\gamma A)) = cl(int(cl_\gamma A))$.

Relacije (3) i (4) se dokazuju na sličan način.

Posledica 3.2.14. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $cl_\gamma A = clA$ za svako $A \in SO(\mathcal{T})$,
(2) $int_\gamma A = intA$ za svako $A \in SC(\mathcal{T})$.

Sledeći primer pokazuje da se operatori zatvorenja u $(X,\mathcal{T})$ i $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ ne moraju podudarati na klasi γ-skupova.

Primer 13. Neka je $X = \{a,b,c\}$ i $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, ab\}$. Tada je $\{a\} \in \mathcal{T}_\gamma$, međutim $cl\{a\} = X$ i $cl_\gamma\{a\} = \{a,c\}$.

U nastavku izlaganja preciznije ćemo odrediti skupove koji nastaju naizmeničnom primenom operatora zatvorenja i unutrašnjosti u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$. Sledeći rezultat je neposredna posledica stavova 3.1.30. i 3.1.32.

Teorema 3.2.15. Neka je A podskup prostora X. Tada je:
(1) $cl(int_\gamma A) = cl_\gamma int_\gamma A \cup int(cl(int_\gamma A))$,
(2) $int(cl_\gamma A) = int_\gamma cl_\gamma A \cap cl(int(cl_\gamma A))$.

Teorema 3.2.16. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $cl_\gamma int_\gamma A = cl_\gamma A \cap cl(int_\gamma A)$,

(2) $cl_\gamma int_\gamma cl_\gamma A = cl_\gamma A \cap cl(int_\gamma cl_\gamma A)$.

Dokaz. (1) Pretpostavimo da je $x \in cl_\gamma A \cap cl(int_\gamma A)$ i neka $x \notin cl_\gamma int_\gamma A$. Tada na osnovu prethodne teoreme sledi da je $x \in int(cl(int_\gamma A))$ pa je zato $\{x\} \in PO(\mathcal{T})$ na osnovu 3.1.40. Otuda je $\{x\} \in \mathcal{T}_\gamma$ i zato $x \in int_\gamma A$ što je suprotno pretpostavci. Prema tome $cl_\gamma A \cap cl(int_\gamma A) \subset cl_\gamma int_\gamma A$ dok obratna inkluzija sledi neposredno.

Tvrđenje (2) sledi neposredno iz (1).

Posledica 3.2.17. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $A \in SO(\mathcal{T}_\gamma) \Leftrightarrow A \subset cl(int_\gamma A)$,

(2) $A \in SPO(\mathcal{T}_\gamma) \Leftrightarrow A \subset cl(int_\gamma cl_\gamma A)$.

Dualno stavu 3.2.16. dobijamo:

Teorema 3.2.18. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $int_\gamma cl_\gamma A = int_\gamma A \cup int(cl_\gamma A)$,

(2) $int_\gamma cl_\gamma int_\gamma A = int_\gamma A \cup int(cl_\gamma int_\gamma A)$.

Posledica 3.2.19. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $A \in PO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je $int_\gamma cl_\gamma A = A \cup int(cl_\gamma A)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in PO(\mathcal{T}_\gamma)$. Tada je $A \cup int(cl_\gamma A) \subset int_\gamma cl_\gamma A$. S druge strane, na osnovu prethodne teoreme sledi da je $int_\gamma cl_\gamma A = int_\gamma A \cup int(cl_\gamma A) \subset A \cup int(cl_\gamma A)$.

Obratno tvrđenje sledi neposredno.

Na sličan način dobija se i sledeći rezultat.

Posledica 3.2.20. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $A \in \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$ ako i samo ako je $int_\gamma cl_\gamma int_\gamma A = A \cup int(cl_\gamma int_\gamma A)$.

Kao dalju posledicu stavova 3.2.16. i 3.2.18. dobijamo sledeći stav:

Teorema 3.2.21. Neka je A podskup prostora X. Tada je:

(1) $cl_\gamma int_\gamma cl_\gamma A = cl_\gamma int_\gamma A \cup cl(int(cl_\gamma A))$,
(2) $int_\gamma cl_\gamma int_\gamma A = int_\gamma cl_\gamma A \cap int(cl(int_\gamma A))$.

Jasno je da presek dveju klasa uopštenih otvorenih skupova daje ponovo neku klasu uopštenih otvorenih skupova. Na osnovu 3.1.7. neposredno sledi da je klasa $PO(\mathcal{T}) \cap SO(\mathcal{T}_\gamma)$ šira od klase $PO(\mathcal{T}_\gamma) \cap SO(\mathcal{T}_\gamma) = \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$. Primer 13 pokazuje da te dve klase nisu jednake u opštem slučaju. Dovoljno je primetiti da je $\{a,c\} \in PO(\mathcal{T}) \cap SO(\mathcal{T}_\gamma)$ dok $\{a,c\} \notin \mathcal{T}_\gamma$. Poslednji rezultat u ovom odeljku daje jednu karakterizaciju elemenata pomenute klase.

Teorema 3.2.22. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $A \in PO(\mathcal{T}) \cap SO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako je $A \subset int(cl(int_\gamma A))$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in PO(\mathcal{T}) \cap SO(\mathcal{T}_\gamma)$. Tada je $clA = cl(int_\gamma A)$ na osnovu 3.2.17. pa je $A \subset int(clA) = int(cl(int_\gamma A))$.

Obratno tvrđenje sledi neposredno iz 3.2.17.

3.3. Topologija $\mathcal{T}_\gamma$ i neke topološke operacije

U ovom odeljku ispitaćemo kako se topologija $\mathcal{T}_\gamma$ ponaša u odnosu na potprostor, topološku sumu i topološki proizvod.

Neka je Y proizvoljan podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Postavlja se pitanje u kakvom se međusobnom odnosu nalaze topologije $(\mathcal{T}_Y)_\gamma$ i $(\mathcal{T}_\gamma)_Y$ koje se mogu uvesti na tom skupu. Analogno pitanje za topologiju $\mathcal{T}_\alpha$ razmatrano je u [5] i dobijen je sledeći rezultat:

Teorema 3.3.1. Neka je Y podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $(\mathcal{T}_Y)_\alpha \subset (\mathcal{T}_\alpha)_Y$,
(2) $(\mathcal{T}_Y)_\alpha = (\mathcal{T}_\alpha)_Y$ za $Y \in PO(\mathcal{T})$.

Pokazaćemo da analogan rezultat važi i za topologiju $\mathcal{T}_\gamma$. Dokažimo najpre jednu lemu.

Lema 3.3.2. Neka je Y podskup prostora $(X,\mathcal{T})$ i neka je $\{x\} \in PO(\mathcal{T}_Y)$. Tada je $\{x\} \in (\mathcal{T}_\gamma)_Y$.

Dokaz. Ako $int(cl\{x\}) \neq \emptyset$, onda je $\{x\} \in \mathcal{T}_\gamma$ i zato $\{x\} \in (\mathcal{T}_\gamma)_Y$. Pretpostavimo da je $int(cl\{x\}) = \emptyset$. Kako je $\{x\} \in PO(\mathcal{T}_Y)$, to je $\{x\} \subset int_Y cl_Y\{x\} = Y \cap int(cl(\{x\} \cup (X - Y))$ i zato $\{x\} \cup (X - clY) \subset int(cl\{x\} \cup (X - Y)) \subset cl\{x\} \cup (X - clY)$. Iz $int(cl\{x\}) = \emptyset$ sledi da Y nije gust u X kao i da je $int(cl\{x\} \cup (X - Y)) \cap int(clY) = \emptyset$. Odatle sledi da $x \notin int(clY)$ i zato $cl\{x\} \cap int(clY) = \emptyset$. S druge strane je $int(cl\{x\} \cup (X - Y)) \cap cl(int(clY)) = \emptyset$ i zato $x \notin cl(int(clY))$. Neka je sada $G = \{x\} \cup (X - clY)$. Kako je $x \in X - int(clY) = cl(X - clY)$, to je $G \in SO(\mathcal{T})$. S druge strane je $int(clG) = int(cl\{x\} \cup cl(X - clY)) = int(cl\{x\} \cup (X - int(clY))) = int(X - int(clY)) = X - cl(int(clY)) \supset \{x\} \cup (X - clY) = G$ pa je $G \in PO(\mathcal{T})$. Otuda je $G \in \mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}_\gamma$ i zato $\{x\} = G \cap Y \in (\mathcal{T}_\gamma)_Y$.

Teorema 3.3.3. Neka je Y podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $(\mathcal{T}_Y)_\gamma \subset (\mathcal{T}_\gamma)_Y$.

Dokaz. Neka je $A \in (\mathcal{T}_Y)_\gamma$. Na osnovu 3.1.41. sledi da je $A = G \cup H$ gde je $G \in (\mathcal{T}_Y)_\alpha$ i $\{h\} \in PO(\mathcal{T}_Y)$ za svako $h \in H$. Sada iz 3.3.1. sledi da je $G \in (\mathcal{T}_\alpha)_Y \subset (\mathcal{T}_\gamma)_Y$ pa je $A \in (\mathcal{T}_\gamma)_Y$ na osnovu prethodne leme.

Teorema 3.3.4. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $Y \in PO(\mathcal{T})$. Tada je $(\mathcal{T}_Y)_\gamma = (\mathcal{T}_\gamma)_Y$.

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme ostaje nam da dokažemo da je $(\mathcal{T}_\gamma)_Y \subset (\mathcal{T}_Y)_\gamma$. Pretpostavimo da je $A \in (\mathcal{T}_\gamma)_Y$ i neka je $B \in PO(\mathcal{T}_Y)$. Tada je $A = G \cap Y$ za neko $G \in \mathcal{T}_\gamma$ a $B \in PO(\mathcal{T})$ na osnovu 3.1.19. Otuda je $A \cap B = G \cap Y \cap B = G \cap B \in PO(\mathcal{T})$ i zato $A \cap B \in PO(\mathcal{T}_Y)$. Sledi da je $A \in (\mathcal{T}_Y)_\gamma$ što je i trebalo dokazati.

Neka je $\{(X_i,\mathcal{T}_i): i \in I\}$ kolekcija uzajamno disjunktnih prostora i neka je $(\oplus X_i, \oplus \mathcal{T}_i)$ njihova topološka suma. Postavlja se pitanje međusobnog odnosa topologija $(\oplus \mathcal{T}_i)_\gamma$ i $\oplus(\mathcal{T}_i)_\gamma$ na $\oplus X_i$. Analogno pitanje za topologiju $\mathcal{T}_\alpha$ razmatrano je u [5] i dobijen je sledeći rezultat:

Teorema 3.3.5. $(\oplus \mathcal{T}_i)_\alpha = \oplus(\mathcal{T}_i)_\alpha$.

Pokazaćemo da jednakost važi i u slučaju topologije $\mathcal{T}_\gamma$.

<u>Teorema 3.3.6.</u> $(\oplus\mathcal{T}_i)_\gamma = \oplus(\mathcal{T}_i)_\gamma$.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo najpre da je $A \in \oplus(\mathcal{T}_i)_\gamma$. To znači da je $A \cap X_i \in (\mathcal{T}_i)_\gamma$ za svako $i \in I$ pa je na osnovu 3.1.41. $A \cap X_i = G_i \cup H_i$ pri čemu je $G_i \in (\mathcal{T}_i)_\alpha$ i $\{h\} \in PO(\mathcal{T}_i)$ za svako $h \in H_i$ i svako $i \in I$. Kako su X_i otvoreno-zatvoreni u $\oplus X_i$, to je $\{h\} \in PO(\oplus\mathcal{T}_i)$ za svako $h \in H_i$ i svako $i \in I$. S druge strane je $G_i \in \oplus(\mathcal{T}_i)_\alpha$ pa je $G_i \in (\oplus\mathcal{T}_i)_\alpha$ na osnovu 3.3.5. Otuda je $A \cap X_i \in (\oplus\mathcal{T}_i)_\gamma$ za svako $i \in I$ pa je $A = \bigcup(A \cap X_i) \in (\oplus\mathcal{T}_i)_\gamma$.

Obratno, neka je $A \in (\oplus\mathcal{T}_i)_\gamma$. Na osnovu 3.1.41. sledi da je $A = G \cup H$ gde je $G \in (\oplus\mathcal{T}_i)_\alpha$ i $\{h\} \in PO(\oplus\mathcal{T}_i)$ za svako $h \in H$. Iz 3.3.5. dobijamo da je $G \in \oplus(\mathcal{T}_i)_\alpha$ pa je $G \cap X_i \in (\mathcal{T}_i)_\alpha$ za svako $i \in I$. S druge strane je $\{h\} \in PO(\mathcal{T}_i)$ za svako $h \in H \cap X_i$ i svako $i \in I$. Sledi da je $A \cap X_i = (G \cup H) \cap X_i = (G \cap X_i) \cup (H \cap X_i) \in (\mathcal{T}_i)_\gamma$ za svako $i \in I$ pa je zato $A \in \oplus(\mathcal{T}_i)_\gamma$.

Neka je $\{(X_i,\mathcal{T}_i): i \in I\}$ kolekcija nepraznih prostora i neka je $(\prod X_i, \prod\mathcal{T}_i)$ njihov topološki proizvod. U radu [5] je pokazano da je $\prod(\mathcal{T}_i)_\alpha \subset (\prod\mathcal{T}_i)_\alpha$ a sledeći primer pokazuje da su topologije $\prod(\mathcal{T}_i)_\gamma$ i $(\prod\mathcal{T}_i)_\gamma$ u opštem slučaju neuporedive.

<u>Primer 14</u>. Neka je $X = \{a,b,c\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset,X,a,ab,ac\}$ i $Y = \{d,e,f\}$, $\mathcal{U} = \{\emptyset,Y,de\}$. Tada je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}$ i $\mathcal{U}_\gamma = \{\emptyset,Y,d,e,de\}$. Za $A = \{(a,d),(b,d)\} = \{a,b\} \times \{d\}$ neposredno sledi da je $A \in \mathcal{T}_\gamma \times \mathcal{U}_\gamma$. Kako je $\mathrm{int}A = \mathrm{int}\{a,b\} \times \mathrm{int}\{d\} = \{a,b\} \times \emptyset = \emptyset$, to je i $\mathrm{int}_\alpha A = \emptyset$. S druge strane, za tačku $(b,d) \in A$ dobijamo da je
$\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{(b,d)\}) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\{b\} \times \{d\})) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}\{b\}) \times \mathrm{int}(\mathrm{cl}\{d\}) = \emptyset \times Y = \emptyset$ pa $\{(b,d)\} \notin PO(\mathcal{T} \times \mathcal{U})$. Otuda $A \notin (\mathcal{T} \times \mathcal{U})_\gamma$ na osnovu 3.1.41.

Neka je sada $B = \{(a,d),(a,e),(b,f)\}$. Odatle neposredno sledi da je $\mathrm{int}B = \{(a,d),(a,e)\} = \{a\} \times \{d,e\}$ i zato $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}B)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\{a\} \times \{d,e\})) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}\{a\} \times \mathrm{cl}\{d,e\}) = \mathrm{int}(X \times Y) = X \times Y$ pa je $B \in (\mathcal{T} \times \mathcal{U})_\alpha \subset (\mathcal{T} \times \mathcal{U})_\gamma$. S druge strane, $B \notin \mathcal{T}_\gamma \times \mathcal{U}_\gamma$.

3.4. Klase PO($\mathcal{T}$) i SPO($\mathcal{T}$) kao topologije

U ovom odeljku odredićemo potrebne i dovoljne uslove da klase PO($\mathcal{T}$) i SPO($\mathcal{T}$) prostora $(X,\mathcal{T})$ budu topologije na skupu X. Podsetimo da je odgovarajući problem za klasu SO($\mathcal{T}$) rešio Njåstad u [69] (videti 1.3.22.). U slučaju klase PO($\mathcal{T}$) rešenja tog problema data su u [8] i [36]. Dok se u [8] koristi operatorski metod razvijen u odeljku 2.1., rešenje dato u [36] zasniva se na Hewittovoj reprezentaciji topološkog prostora. Najpre ćemo izložiti prvo rešenje iskazano u teoremi 3.4.4. Za to su nam potrebna sledeća tri tvrđenja:

Teorema 3.4.1. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je klasa PO($\mathcal{T}$) topologija na skupu X ako i samo ako je PO($\mathcal{T}$) = $\mathcal{T}_\gamma$.

Lema 3.4.2. Neka je A semi-prezatvoren podskup prostora X takav da je $cl_\alpha A$ = sclA i int(cl(intA)) = cl(intA)$\cap$int(clA). Tada je A prezatvoren skup.

Dokaz. Na osnovu 2.1.14. sledi da je pcl(sclA) = $cl_\alpha A$ = sclA pa je pclA $\subset$ sclA. Dokazaćemo da je cl(intA) $\subset$ A i zato neka je $x \in$ cl(intA). Otuda na osnovu 2.1.1. dobijamo da je $x \in$ pclA $\subset$ sclA = A$\cup$int(clA). Ako je $x \in$ int(clA), onda je $x \in$ cl(intA)$\cap$int(clA) = int(cl(intA)) i zato $x \in$ A na osnovu 2.2.10. U drugom slučaju, ako $x \notin$ int(clA), onda $x \in$ A sledi neposredno. Prema tome A je prezatvoren skup.

Jednakost $cl_\alpha A$ = pclA$\cup$sclA ne povlači u opštem slučaju jednakost cl(int(clA)) = int(clA)$\cup$cl(intA) dok obratna implikacija važi uvek. Međutim, važi sledeće:

Lema 3.4.3. Neka je X prostor. Tada je $cl_\alpha A$ = pclA$\cup$sclA za svaki podskup A ako i samo ako je cl(int(clA)) = int(clA)$\cup$cl(intA) za svako A.

Dokaz. Neka je A proizvoljan podskup prostora X. Primenjujući prvu relaciju na pintA dobijamo da je cl_αpintA = pcl(pintA)$\cup$scl(pintA). Sada na osnovu stavova 2.1.3., 2.1.7. i 2.1.12. sledi da je cl(int(clA)) = pintA$\cup$cl(intA)$\cup$ int(clA) = cl(intA)$\cup$int(clA).

Obratno tvrđenje sledi neposredno.

<u>Teorema 3.4.4.</u> Klasa $PO(\mathcal{T})$ prostora $(X,\mathcal{T})$ je topologija na skupu X ako i samo ako su zadovoljena sledeća dva uslova:

(1) Presek svaka dva preotvorena skupa je semi-preotvoren skup,

(2) $cl_\alpha A = pclA \cup sclA$ za svaki podskup A.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je $PO(\mathcal{T})$ topologija na X. Tada je na osnovu 3.4.1. $PO(\mathcal{T}) = \mathcal{T}_\gamma$, tj. $pclA = cl_\gamma A$ za svaki podskup A. Sada iz 3.1.31. sledi da je $cl_\alpha A = cl_\gamma A \cup sclA = pclA \cup sclA$ te je zadovoljen drugi uslov teoreme. Prvi uslov sledi neposredno.

Obratno, pretpostavimo da su zadovoljena oba uslova teoreme. Dokazaćemo da je unija ma koja dva prezatvorena skupa takođe prezatvoren skup i zato neka su A i B prezatvoreni skupovi. Tada je $A \cup B \in SPC(\mathcal{T})$ na osnovu (1). S druge strane, na osnovu (2) sledi da je $cl_\alpha A = pclA \cup sclA = sclA$ i $cl_\alpha B = sclB$. Otuda je $cl_\alpha(A \cup B) = cl_\alpha A \cup cl_\alpha B = sclA \cup sclB \subset scl(A \cup B)$ i zato $cl_\alpha(A \cup B) = scl(A \cup B)$. Primenjujući lemu 3.4.3. na skup $X - (A \cup B)$ dobijamo da je $cl(int(cl(X - (A \cup B)))) = int(cl(X - (A \cup B))) \cup cl(int(X - (A \cup B)))$ i otuda je $int(cl(int(A \cup B))) = cl(int(A \cup B)) \cap int(cl(A \cup B))$. Sada skup $A \cup B$ zadovoljava uslove leme 3.4.2. pa je $A \cup B \in PC(\mathcal{T})$. Sledi da je $PO(\mathcal{T})$ topologija na X.

<u>Primedba</u>. Na osnovu 2.1.14. relaciju u uslovu (2) prethodne teoreme možemo zameniti relacijom $pcl(sclA) = scl(pclA)$.

Sledeća dva primera pokazuju da su uslovi u prethodnoj teoremi nezavisni.

<u>Primer 15</u>. Neka je $X = \{a,b,c\}$ i $\mathcal{T} = \{\phi, X, ab\}$. Tada je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha = SO(\mathcal{T})$, $PO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}) = \{\phi, X, a, b, ab, ac, bc\}$ i $\mathcal{T}_\gamma = \{\phi, X, a, b, ab\}$. Iz $\mathcal{T}_\alpha = SO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{T})$ sledi da je $sclA \cup pclA = sclA = cl_\alpha A$ za svaki podskup A te je zadovoljen uslov (2). S druge strane, $\{a,c\} \cap \{b,c\} = \{c\} \notin SPO(\mathcal{T})$.

<u>Primer 16</u>. Neka je $X = \{a,b,c,d\}$ i $\mathcal{T} = \{\phi, X, a, bc, abc\}$. Tada je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$, $SO(\mathcal{T}) = \{\phi, X, a, bc, ad, abc, bcd\}$, $PO(\mathcal{T}) = \{\phi, X, a, b, c, ab, ac, bc, abc, abd, acd\}$ i $\mathcal{T}_\gamma = \{\phi, X, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$. Tada je $\{a,b,d\} \cap \{a,c,d\} = \{a,d\} \in SO(\mathcal{T})$ pa je zadovoljen uslov (1). S druge strane, $cl_\alpha\{b\} = \{b,c,d\}$, $pcl\{b\} = \{b\}$, $scl\{b\} = \{b,c\}$ i

zato $cl_\alpha\{b\} \neq pcl\{b\} \cup scl\{b\}$.

Gansterovo rešenje problema izloženo u [36], a koje se zasniva na Hewittovoj reprezentaciji prostora, može se iskazati i preko skupa B definisanog u prvom odeljku ove glave. Skup B se sastoji iz neizolovanih, preotvorenih jednočlanih skupova.

<u>Teorema 3.4.5.</u> Neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $PO(\mathcal{T})$ topologija na X ako i samo ako je $clG \in \mathcal{T}$ i $intF = B$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $PO(\mathcal{T})$ topologija na X. Kako je F zatvoren i rastavljiv, to postoje skupovi E_1 i E_2 takvi da je $E_1 \cup E_2 = F$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ i $clE_1 = clE_2 = F$. Neka je $y \in F$, recimo $y \in E_1$. Tada su skupovi $G \cup E_1$ i $G \cup E_2 \cup \{y\}$ gusti pa je na osnovu pretpostavke $(G \cup E_1) \cap (G \cup E_2 \cup \{y\}) = G \cup \{y\} \in PO(\mathcal{T})$. Otuda je $clG = \bigcup\{G \cup \{y\} : y \in clG - G\}$ preotvoren i zato $clG \in \mathcal{T}$. Što se tiče druge relacije, na osnovu 3.1.52. dovoljno je dokazati da je $intF \subset B$ i zato neka je $x \in intF$. Tada je, kao što smo već utvrdili, $G \cup \{x\} \in PO(\mathcal{T})$ pa je $\{x\} = (G \cup \{x\}) \cap intF \in PO(\mathcal{T})$. S druge strane, $\{x\} \notin \mathcal{T}$ jer je F rastavljiv i zato $x \in B$.

Obratno, pretpostavimo da je $clG \in \mathcal{T}$, $intF = B$ i neka je $A \in PO(\mathcal{T})$. Kako je G otvoren, gust i nasledno nerastavljiv u clG, to je na osnovu 1.4.5. $A \cap clG$ α-skup u clG. Na osnovu pretpostavke clG je otvoreno-zatvoren pa je $A \cap clG \in \mathcal{T}_\alpha$. S druge strane, iz $intF = B$ sledi da je $A \cap intF \in \mathcal{T}_\gamma$ pa je $A = (A \cap clG) \cup (A \cap intF) \in \mathcal{T}_\gamma$. Prema tome $PO(\mathcal{T}) = \mathcal{T}_\gamma$, tj. $PO(\mathcal{T})$ je topologija na X.

Rezultati kojima zaključujemo ovaj odeljak daju odgovor na pitanje kada je klasa semi-preotvorenih skupova topologija.

<u>Teorema 3.4.6.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $SPO(\mathcal{T})$ topologija na X ako i samo ako su $SO(\mathcal{T})$ i $PO(\mathcal{T})$ topologije na X.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je $SPO(\mathcal{T})$ topologija na X. Tada je $SO(\mathcal{T})$ topologija na X na osnovu 2.2.9. pa je X ekstremalno diskoneksan na osnovu 1.3.22. Sada iz 1.3.21. i 2.2.29. sledi da je i $PO(\mathcal{T})$ topologija.

Obratno, budući da je $SO(\mathcal{T})$ topologija, prostor $(X,\mathcal{T})$ je ekstremalno diskoneksan pa je na osnovu 1.3.21. i 2.2.29. $SPO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T})$. Sledi da je $SPO(\mathcal{T})$ topologija na X.

Posledica 3.4.7. Neka je $X = F \cup G$ Hewittova reprezentacija prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $SPO(\mathcal{T})$ topologija na X ako i samo ako je prostor $(X,\mathcal{T})$ ekstremalno diskoneksan i $\mathrm{int}F = B$.

3.5. PO-ekvivalentne topologije

Njåstad je u radu [69] uveo pojam SO-ekvivalentnih topologija na datom skupu definišući da su topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ SO-ekvivalentne ako imaju iste klase semi-otvorenih skupova. U odeljku 1.3. klasa svih topologija koje su SO-ekvivalentne datoj topologiji $\mathcal{T}$ označena je sa $S(\mathcal{T})$. Ako se umesto semi-otvorenih posmatraju preotvoreni skupovi, dolazi se na prirodan način do jednog novog pojma.

Definicija. Topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ na skupu X su PO-ekvivalentne ako je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{U})$. Na ovaj način uvedena je jedna relacija ekvivalencije i označimo sa $P(\mathcal{T})$ klasu ekvivalencije elementa $\mathcal{T}$, tj. $P(\mathcal{T}) = \{\mathcal{U} : PO(\mathcal{U}) = PO(\mathcal{T})\}$.

Iz stavova 1.3.13. i 1.3.6. neposredno sledi da je klasa $P(\mathcal{T})$ šira od klase $S(\mathcal{T})$. Sledeći stav se takođe lako dokazuje.

Teorema 3.5.1. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i neka je $\mathcal{U}$ topologija na X koja je PO-ekvivalentna topologiji $\mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$.

U stavu 1.3.15. videli smo da za topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ na skupu X iz uslova $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\alpha$ sledi $\mathcal{U} \in S(\mathcal{T})$. S druge strane, lako se vidi da iz $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$ ne mora da sledi $\mathcal{U} \in P(\mathcal{T})$. Dovoljno je primetiti da je za antidiskretnu topologiju $\mathcal{A}$ topologija $\mathcal{A}_\gamma$ diskretna. Zato je naš sledeći zadatak ispitivanje osobina topologije $\mathcal{U}$ koja se nalazi između topologija $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_\gamma$. Prvi rezultati su uopštenja stavova 3.1.4. - 3.1.7. Zatvorenje i unutrašnjost skupa A u prostoru $(X,\mathcal{U})$ označavaćemo sa $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$ odnosno $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A$.

<u>Teorema 3.5.2.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i neka je $\mathcal{U}$ topologija na X takva da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Tada je:

(1) $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}G = \mathrm{cl}G$ za svako $G \in \mathcal{T}$,

(2) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}F = \mathrm{int}F$ za svako $F \in C(\mathcal{T})$.

<u>Dokaz.</u> (1) Na osnovu 3.1.4. sledi da je $\mathrm{cl}G = \mathrm{cl}_{\gamma}G \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}G \subset \mathrm{cl}G$.

Relacija (2) je dualna.

<u>Posledica 3.5.3.</u> Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$ i neka je $\mathcal{U}$ topologija na X takva da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Tada je:

(1) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$,

(2) $\mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A$,

(3) $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))$,

(4) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) \subset \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A$.

<u>Posledica 3.5.4.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i neka je $\mathcal{U}$ topologija na X takva da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Tada je:

(1) $PO(\mathcal{U}) \subset PO(\mathcal{T})$,

(2) $SPO(\mathcal{U}) \subset SPO(\mathcal{T})$,

(3) $D(\mathcal{U}) \subset D(\mathcal{T})$,

(4) $SO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{U})$,

(5) $\mathcal{T}_{\alpha} \subset \mathcal{U}_{\alpha}$,

(6) $RO(\mathcal{T}) \subset RO(\mathcal{U})$,

(7) $N(\mathcal{T}) \subset N(\mathcal{U})$.

Rezultat koji sledi pokazuje stepen jednakosti dve topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ pod pretpostavkom $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Naime jednakost jedne (odnosno odgovarajuće dve) klase podskupova u $(X,\mathcal{T})$ i $(X,\mathcal{U})$ razmatranih u prethodnom stavu povlači jednakost ostalih klasa.

<u>Teorema 3.5.5.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{U})$ i $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{U})$.

(b) $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ i $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{U})$.

(c) Prostori $(X,\mathcal{T})$ i $(X,\mathcal{U})$ imaju iste guste skupove.

(d) Prostori $(X,\mathcal{T})$ i $(X,\mathcal{U})$ imaju iste koguste skupove.

(e) $SO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{U})$.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b) sledi neposredno iz 3.1.26. i 3.1.29.

(b) $\Rightarrow$ (c): Na osnovu prethodnog stava dovoljno je dokazati da je $D(\mathcal{T}) \subset D(\mathcal{U})$ i zato pretpostavimo da je $A \in D(\mathcal{T})$. Tada je $A \in SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ pa je $cl_{\mathcal{U}}A \in RC(\mathcal{U}) = RC(\mathcal{T})$ i zato $cl_{\mathcal{U}}A = X$, tj. $A \in D(\mathcal{U})$.

(c) $\Rightarrow$ (d) sledi neposredno.

(d) $\Rightarrow$ (e): Na osnovu prethodnog stava dovoljno je dokazati da je $SO(\mathcal{U}) \subset SO(\mathcal{T})$ i zato pretpostavimo da je $A \in SO(\mathcal{U})$. Sada iz prethodnog stava sledi da je $A \in SPO(\mathcal{T})$ te nam je na osnovu 2.2.8. ostalo da dokažemo da je $int(clA) \subset cl(intA)$. Kako je $A \in SO(\mathcal{U})$, to je $int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A \subset cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}A$ i zato $int_{\mathcal{U}}(cl_{\mathcal{U}}A - int_{\mathcal{U}}A) = \phi$. Pretpostavimo sada da postoji neprazan skup $G \in \mathcal{T}$ takav da je $G \subset clA - intA$. Označimo $U_1 = G - cl_{\mathcal{U}}A \in \mathcal{U}$ i $U_2 = G \cap int_{\mathcal{U}}A \in \mathcal{U}$. Tada je $intU_1 = G - clA = \phi$, $intU_2 = G \cap intA = \phi$ i zato $U_1 = U_2 = \phi$ na osnovu (d). Sledi da je $G \subset cl_{\mathcal{U}}A - int_{\mathcal{U}}A$, kontradikcija. Otuda je $G = \phi$ i zato $int(clA - intA) = \phi$, tj. $int(clA) \subset cl(intA)$.

(e) $\Rightarrow$ (a) sledi iz 1.3.13. i 1.3.6.

Sledeća tri stava daju potrebne i dovoljne uslove da topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ budu PO-ekvivalentne pod pretpostavkom $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$.

Teorema 3.5.6. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{U})$.

(b) $cl_{\mathcal{U}}A \in \mathcal{U}$ za svako $A \in D(\mathcal{T})$.

(c) $int(clA) \cap cl_{\mathcal{U}}A \in \mathcal{U}$ za svaki podskup A.

(d) $int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A = int(clA) \cap cl_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.

(e) $int_{\mathcal{U}}F = pintF$ za svako $F \in C(\mathcal{U})$.

(f) $int(clA) - cl_{\mathcal{U}}A \in CO(\mathcal{U})$ za svaki podskup A.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Pretpostavimo da je $A \in D(\mathcal{T})$. Tada je $A \cup \{x\} \in PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{U})$ za svako $x \in cl_{\mathcal{U}}A$ pa je zato $cl_{\mathcal{U}}A = \cup\{A \cup \{x\} : x \in cl_{\mathcal{U}}A\} \in PO(\mathcal{U})$. Sledi da je $cl_{\mathcal{U}}A \in \mathcal{U}$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Kako je $A \cup (X - clA) \in D(\mathcal{T})$, to je na osnovu pretpostavke $cl_{\mathcal{U}}(A \cup (X - clA)) \in \mathcal{U}$. S druge strane je $int(clA) \cap cl_{\mathcal{U}}A = int(clA) \cap (cl_{\mathcal{U}}A \cup (X - int(clA))) = int(clA) \cap (cl_{\mathcal{U}}A \cup cl(X - clA)) = int(clA) \cap (cl_{\mathcal{U}}A \cup cl_{\mathcal{U}}(X - clA)) = int(clA) \cap cl_{\mathcal{U}}(A \cup (X - clA))$ i zato $int(clA) \cap cl_{\mathcal{U}}A \in \mathcal{U}$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Na osnovu pretpostavke je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \subset \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$, dok obratna inkluzija sledi iz 3.5.3.

(d) $\Rightarrow$ (e): Neka je $F \in C(\mathcal{U})$. Tada je na osnovu pretpostavke $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}F = \mathrm{int}(\mathrm{cl}F) \cap F = \mathrm{pint}F$.

(e) $\Rightarrow$ (f): Za $F = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cup (X - \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \in C(\mathcal{U})$ sledi na osnovu (e) da je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}F = \mathrm{pint}F$. S druge strane, $F \in D(\mathcal{T})$ pa je $F \in PO(\mathcal{T})$ i zato $F \in \mathcal{U}$. Otuda je $X - F = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \in CO(\mathcal{U})$.

(f) $\Rightarrow$ (a): Na osnovu 3.5.4. dovoljno je dokazati da je $PO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{U})$ i zato pretpostavimo da je $A \in PO(\mathcal{T})$. Tada je $A \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - (\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A) \in \mathcal{U}$ na osnovu (f) te je $A \subset \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$, tj. $A \in PO(\mathcal{U})$.

<u>Teorema 3.5.7.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{U})$.

(b) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{pint}A$ za svako $A \in SC(\mathcal{U})$.

(c) $\mathrm{pint}A \subset \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.

<u>Dokaz</u>. (a) $\Rightarrow$ (b): Neka je $A \in SC(\mathcal{U})$. Tada je $\mathrm{pint}A = \mathrm{pint}_{\mathcal{U}}A = A \cap \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = A \cap \mathrm{int}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{int}_{\mathcal{U}}A$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Za proizvoljan podskup A na osnovu pretpostavke sledi da je $\mathrm{pint}A \subset \mathrm{pint}(\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A) = \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$.

(c) $\Rightarrow$ (a) sledi neposredno.

Sledeći stav je dualan.

<u>Teorema 3.5.8.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{U})$.

(b) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A \in C(\mathcal{U})$ za svaki $\mathcal{T}$-kogust skup A.

(c) $\mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \cup \mathrm{int}_{\mathcal{U}}A \in C(\mathcal{U})$ za svaki podskup A.

(d) $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \cup \mathrm{int}_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.

(e) $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}G = \mathrm{pcl}G$ za svako $G \in \mathcal{U}$.

(f) $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{pcl}A$ za svako $A \in SO(\mathcal{U})$.

(g) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \in CO(\mathcal{U})$ za svaki podskup A.

(h) $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A \subset \mathrm{pcl}A$ za svaki podskup A.

Na kraju odeljka razmatraćemo opšti slučaj, tj. više nećemo pretpostavljati da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Pokazaćemo da neki od rezultata i dalje važe. Dokažimo najpre sledeći stav:

Teorema 3.5.9. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X. Tada je $PO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{U})$ ako i samo ako je $cl_{\mathcal{U}}A \cap int(clA) \subset int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.

Dokaz. Pretpostavimo da je $PO(\mathcal{T}) \subset PO(\mathcal{U})$ i neka je A proizvoljan podskup. Tada je na osnovu 2.1.3. $int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A = pint_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A \supset pint(cl_{\mathcal{U}}A) = cl_{\mathcal{U}}A \cap int(cl(cl_{\mathcal{U}}A)) \supset cl_{\mathcal{U}}A \cap int(clA)$.

Obratno tvrđenje sledi neposredno.

Teorema 3.5.10. Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $PO(\mathcal{T}_1) = PO(\mathcal{T}_2)$.

(b) $cl_iA \cap int_jcl_jA \subset int_icl_iA$ za svako A i $i,j = 1,2$.

(c) $cl_1A \cap int_2cl_2A = cl_2A \cap int_1cl_1A$ za svako A.

(d) $int_iF = pint_jF$ za svako $F \in C(\mathcal{T}_i)$ i $i,j = 1,2$.

(e) $int_iA = pint_jA$ za svako $A \in SC(\mathcal{T}_i)$ i $i,j = 1,2$.

(f) $pint_jA \subset int_icl_iA$ za svako A i $i,j = 1,2$.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b) sledi na osnovu prethodnog stava.

(b) $\Rightarrow$ (c): Na osnovu pretpostavke je $cl_iA \cap int_jcl_jA \subset int_icl_iA$ pa je $cl_iA \cap int_jcl_jA \subset int_icl_iA \cap int_jcl_jA$ i zato $cl_iA \cap int_jcl_jA = int_icl_iA \cap int_jcl_jA$ za svako A i $i,j = 1,2$. Otuda je $cl_1A \cap int_2cl_2A = cl_2A \cap int_1cl_1A$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Neka je $F \in C(\mathcal{T}_1)$. Primenjujući (c) dobijamo da je $pint_2F = F \cap int_2cl_2F = cl_2F \cap int_1F$ i zato $pint_2F = int_1F$. Druga relacija se analogno dokazuje.

(d) $\Rightarrow$ (f): Na osnovu (d) neposredno sledi da je $pint_jA \subset pint_jcl_iA = int_icl_iA$ za svako A i $i,j = 1,2$.

(f) $\Rightarrow$ (a): Neka je $A \in PO(\mathcal{T}_j)$. Tada je $A = pint_jA \subset int_icl_iA$ i zato $A \in PO(\mathcal{T}_i)$. Otuda je $PO(\mathcal{T}_1) = PO(\mathcal{T}_2)$.

(a) $\Rightarrow$ (e): Neka je $A \in SC(\mathcal{T}_i)$. Tada je $pint_jA = pint_iA = A \cap int_icl_iA = A \cap int_iA = int_iA$.

(e) $\Rightarrow$ (d) sledi neposredno.

Sledeći stav je dualan.

Teorema 3.5.11. Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $PO(\mathcal{T}_1) = PO(\mathcal{T}_2)$.
(b) $cl_i int_i A \subset int_i A \cup cl_j int_j A$ za svako A i $i,j = 1,2$.
(c) $int_1 A \cup cl_2 int_2 A = int_2 A \cup cl_1 int_1 A$ za svako A.
(d) $cl_i G = pcl_j G$ za svako $G \in \mathcal{T}_i$ i $i,j = 1,2$.
(e) $cl_i A = pcl_j A$ za svako $A \in SO(\mathcal{T}_i)$ i $i,j = 1,2$.
(f) $cl_i int_i A \subset pcl_j A$ za svako A i $i,j = 1,2$.

Odeljak završavamo jednom interesantnom posledicom.

Posledica 3.5.12. Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dve PO-ekvivalentne topologije na skupu X. Tada je $cl_1 int_1 A - int_1 cl_1 A = cl_2 int_2 A - int_2 cl_2 A$ za svaki podskup A.

Dokaz. Neka je $x \in cl_1 int_1 A - int_1 cl_1 A$. Kako $x \notin int_1 A$, to na osnovu 3.5.11.(c) sledi da je $x \in cl_2 int_2 A$. S druge strane, na osnovu 3.5.10.(c) dobijamo da $x \notin int_2 cl_2 A$. Otuda je $cl_1 int_1 A - int_1 cl_1 A \subset cl_2 int_2 A - int_2 cl_2 A$. Obratna inkluzija se analogno dokazuje.

3.6. Topološki prostor $(X,\mathcal{T}_M)$

U ovom odeljku rešavaćemo problem najveće topologije u klasi $P(\mathcal{T})$. Podsetimo da je $\mathcal{T}_\alpha$ najveća topologija u klasi $S(\mathcal{T})$ (teorema 1.3.14.) pa se prirodno postavlja pitanje da li i klasa $P(\mathcal{T})$ mora imati najveći element. Pokazaćemo da je odgovor u opštem slučaju negativan. U tom cilju definiše se nova topologija, označena sa $\mathcal{T}_M$, koja je supremum svih topologija iz klase $P(\mathcal{T})$ ali ne mora pripadati $P(\mathcal{T})$ (posledica 3.6.16. i primer 19). U definiciji topologije $\mathcal{T}_M$ bitnu ulogu igraju α-skupovi i otvoreno-zatvoreni skupovi topologije $\mathcal{T}_\gamma$.

Na početku ćemo razmatrati dva najjednostavnija slučaja. Pretpostavimo najpre da je $(X,\mathcal{T})$ semi-T_D-prostor. To znači, na osnovu 3.1.44., da je $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}_\gamma$ pa je $\mathcal{T}_\alpha$ najveći element u $P(\mathcal{T})$. Sledeći primer pokazuje da obratno tvrđenje ne važi u opštem slučaju.

Primer 17. Neka je $X = \{a,b,c\}$ i $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, ab\}$. Tada je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$, $PO(\mathcal{T}) = \{\emptyset, X, a, b, ab, ac, bc\}$ i $\mathcal{T}_\gamma = \{\emptyset, X, a, b, ab\}$ pa $(X,\mathcal{T})$ nije semi-T_D-prostor. S druge strane, lako se vidi da je $\mathcal{T}_\alpha$ najveći element u $P(\mathcal{T})$.

U drugom slučaju, ako je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$, onda je $\mathcal{T}_\gamma$ najveća topologija u $P(\mathcal{T})$. Sledeći primer pokazuje da najveća topologija u nekoj PO-klasi ne mora biti ni $\mathcal{T}_\alpha$ ni $\mathcal{T}_\gamma$.

Primer 18. Neka je $X = \{a,b,c,d,e\}$ i $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, ab, cd, cde, abcd\}$. Tada je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$, $PO(\mathcal{T}) = \{\emptyset, X, a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd, ce, de, abc, abd, acd, bcd, cde, ace, ade, bce, bde, abcd, abce, abde, acde, bcde\}$ i $\mathcal{T}_\gamma = \{\emptyset, X, a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd, abc, abd, acd, bcd, cde, abcd, acde, bcde\} = PO(\mathcal{T}_\gamma)$. Neka je sada $\mathcal{U} = \{\emptyset, X, a, b, ab, cd, acd, bcd, cde, abcd, acde, bcde\}$. Nije teško proveriti da je $\mathcal{U}$ najfinija topologija u klasi $P(\mathcal{T})$.

U nastavku izlaganja pokazaćemo jedan način za dobijanje PO-ekvivalentnih topologija. Dokažimo najpre jednu lemu.

Lema 3.6.1. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor, $A \in \mathcal{T}_\gamma$ i $D \in D(\mathcal{T})$. Tada je $A \cap cl(A \cap D) = A \cap int(cl(A \cap D))$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in A \cap cl(A \cap D)$ i neka je $S = A \cap (D \cup \{x\})$. Tada je $S \in PO(\mathcal{T})$, $clS = cl(A \cap D)$ i zato $x \in S \subset int(clS) = int(cl(A \cap D))$. Otuda je $x \in A \cap int(cl(A \cap D))$.

Teorema 3.6.2. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$. Ako sa $\mathcal{U}$ označimo topologiju čija je predbaza $\mathcal{T} \cup \{A, X - A\}$, onda je $PO(\mathcal{U}) = PO(\mathcal{T})$.

Dokaz. Primetimo najpre da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$ i neka je D gust u $(X,\mathcal{T})$. Na osnovu 3.5.6. dovoljno je dokazati da je $cl_{\mathcal{U}} D \in \mathcal{U}$ i zato neka je $x \in cl_{\mathcal{U}} D$. Ne ograničavajući opštost možemo pretpostaviti da je $x \in A$. Kako je $A \in \mathcal{U}$, to na osnovu definicije topologije $\mathcal{U}$ dobijamo da je $A \cap cl_{\mathcal{U}} D = A \cap cl_{\mathcal{U}}(A \cap D) = A \cap cl(A \cap D)$ pa je $A \cap cl_{\mathcal{U}} D \in \mathcal{U}$ na osnovu prethodne leme. Sledi da je $x \in int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}} D$ i zato je $cl_{\mathcal{U}} D \in \mathcal{U}$.

Posledica 3.6.3. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor takav da je $\mathcal{T}$

najveća topologija u klasi $P(\mathcal{T})$. Tada je $CO(\mathcal{T}_\gamma) \subset \mathcal{T}$.

Sada uvodimo topologiju $\mathcal{T}_M$ na X koja se nalazi između $\mathcal{T}_\alpha$ i $\mathcal{T}_\gamma$. Neka je B skup preotvorenih, neizolovanih jednočlanih skupova u $(X,\mathcal{T})$ i neka je $B_M = \{x \in B: \{x\} \in CO(\mathcal{T}_\gamma)\}$. Tada je familija $\mathcal{T}_\alpha \cup \{\{x\}: x \in B_M\}$ baza topologije koju ćemo označiti sa $\mathcal{T}_M$. Sledeći stav sledi neposredno.

<u>Teorema 3.6.4.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $U \in \mathcal{T}_M$ ako i samo ako je $U = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_\alpha$ i $H \subset B_M$.

<u>Posledica 3.6.5.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_\alpha \Leftrightarrow B_M = \emptyset$,
(2) $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_\gamma \Leftrightarrow B_M = B$.

<u>Teorema 3.6.6.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$. Tada je $A \in \mathcal{T}_M$.

<u>Dokaz</u>. Na osnovu 3.1.38. sledi da je $\mathrm{int}A \in CO(\mathcal{T})$ pa je $A - \mathrm{int}A \subset B$ na osnovu 3.1.39. S druge strane, iz pretpostavke sledi da je $A - \mathrm{int}A \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ pa je zato $A - \mathrm{int}A \subset B_M$. Sada iz 3.6.4. sledi da je $A \in \mathcal{T}_M$.

<u>Posledica 3.6.7.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $A \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ takav da je $\mathrm{int}A = \emptyset$. Tada je $A \subset B_M$.

<u>Posledica 3.6.8.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $CO(\mathcal{T}_M) = CO(\mathcal{T}_\gamma)$.

<u>Teorema 3.6.9.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i neka je $\mathcal{U}$ topologija na skupu X takva da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$ i $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{U})$. Tada je $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_M$.

<u>Dokaz</u>. Primetimo najpre da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$ i neka je $A \in \mathcal{U}$. Tada je na osnovu 3.1.33. $\mathrm{sint}A = A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \in \mathcal{T}_\alpha$. S druge strane, iz 3.5.8. sledi da je $K = A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \in CO(\mathcal{U})$ pa je zato $K \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$. Kako je $\mathrm{int}K = \emptyset$, to primenom 3.6.7. sledi da je $K \subset B_M$. Otuda je $A = (A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) \cup K \in \mathcal{T}_M$ na osnovu 3.6.4.

Sledeća dva rezultata rešavaju problem najfinije topologije u datoj PO-klasi. Najpre ćemo pokazati da ako klasa $P(\mathcal{T})$ ima najveći element, onda je on upravo topologija $\mathcal{T}_M$. Zatim sledi primer prostora čija PO-klasa nema najveći element.

<u>Teorema 3.6.10.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i pretpostavimo da klasa $P(\mathcal{T})$ ima najveći element, recimo $\mathcal{U}$. Tada je $\mathcal{U} = \mathcal{T}_M$.

<u>Dokaz</u>. Posledica 3.6.3 daje $CO(\mathcal{T}_\gamma) = CO(\mathcal{U}_\gamma) \subset \mathcal{U}$ te je $K \in \mathcal{U}$ za svako $K \subset B_M$. S druge strane, $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{U}$ sledi neposredno pa je $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{U}$ na osnovu 3.6.4. Obratna inkluzija sledi iz prethodne teoreme.

<u>Primer 19</u>. Neka je $X = Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Označimo $\mathcal{A} = \{A \subset X\colon z \in A$ ako i samo ako $-z \in A\}$ i neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{G \in \mathcal{A} : 0 \notin G$ ili je $X - G$ konačan$\}$. Nije teško utvrditi da važi sledeće:

(1) $\mathcal{T}$ je topologija na X,

(2) $PO(\mathcal{T}) = \{\emptyset,X\} \cup \{A \subset X\colon 0 \notin A$ ili je $\mathrm{cl}A$ otvoren$\}$,

(3) $\mathcal{T}_\gamma = \{\emptyset,X\} \cup \{A \subset X\colon 0 \notin A$ ili je $X - A$ konačan$\}$,

(4) $PO(\mathcal{T}_\gamma) = \mathcal{T}_\gamma$.

Neka je sada $S = \{0,1,2,\ldots\}$. Tada je $S \in PO(\mathcal{T}) - PO(\mathcal{T}_\gamma)$ pa topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_\gamma$ nisu PO-ekvivalentne. S druge strane, $\{z\} \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ za svako $z \neq 0$ te je $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_\gamma$. Prema tome klasa $P(\mathcal{T})$ nema najveći element.

Vidimo dakle da topologija $\mathcal{T}_M$ ne pripada u opštem slučaju klasi $P(\mathcal{T})$. Ipak, dokazaćemo da je $\mathcal{T}_M$ supremum te klase. Dokažimo najpre dve leme.

<u>Lema 3.6.11.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ dve PO-ekvivalentne topologije na skupu X i neka je $A \in \mathcal{U}$. Tada je $\mathrm{cl}_\gamma A = \mathrm{pcl}A$.

<u>Dokaz</u>. Na osnovu pretpostavke je $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$ pa je $\mathrm{cl}_\gamma A \subset \mathrm{cl}_\mathcal{U} A = A \cup \mathrm{cl}_\mathcal{U}\mathrm{int}_\mathcal{U} A = \mathrm{pcl}_\mathcal{U} A = \mathrm{pcl}A \subset \mathrm{cl}_\gamma A$ i otuda sledi tvrđenje.

Druga lema sledi neposredno iz 3.1.40.

<u>Lema 3.6.12.</u> Neka je x tačka prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je $\mathrm{cl}\{y\} = \mathrm{cl}\{x\}$ za svako $y \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) - \mathrm{cl}_\gamma\{x\}$.

Sledeći stav je osnovni za ispitivanje PO-ekvivalentnih topologija, tj. njihovog odnosa prema topologiji $\mathcal{T}_M$.

Teorema 3.6.13. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ dve PO-ekvivalentne topologije na skupu X. Tada je $A - cl(intA) \subset B_M$ za svako $A \in \mathcal{U}$.

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{U}$. Na osnovu leme 3.6.11. sledi da je $cl_\gamma A = A \cup cl(intA)$ pa je $int(clA) - cl(intA) = (int(clA) - cl_\gamma A) \cup (A - cl(intA))$ te se na osnovu 3.1.40. i 3.1.39. skup $int(clA) - cl(intA)$ sastoji iz γ-otvorenih jednočlanih skupova. Neka je sada $x \in A - cl(intA)$ i pretpostavimo da $\{x\} \notin C(\mathcal{T}_\gamma)$. Tada je $int(cl\{x\}) \subset int(clA) - cl(intA)$ pa je $int(cl\{x\}) \subset B$ i zato $int(cl\{x\}) \cap cl_\gamma\{x\} = \{x\}$. S druge strane je $cl\{x\} = int(cl\{x\}) \cup cl_\gamma\{x\}$ na osnovu 3.1.30. Kako je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{U})$ pa otuda $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$, to na osnovu 3.2.3. dobijamo da je $int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\} \cap cl_\gamma\{x\} = pint_{\mathcal{U}} cl_\gamma\{x\} = pint(cl_\gamma\{x\}) = int(cl\{x\}) \cap cl_\gamma\{x\} = \{x\}$. Naš cilj će sada biti da dokažemo da je $int(cl\{x\}) = int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\}$. Neka je zato $U = int_{\mathcal{U}} int(cl\{x\})$. Kako $int(cl\{x\}) \notin C(\mathcal{T})$, to $int(cl\{x\}) \notin PC(\mathcal{T}) = PC(\mathcal{U})$ i zato $U \neq \phi$. S druge strane, iz $clU = cl\{x\} \notin \mathcal{T}$ sledi na osnovu 3.1.36. da $U \notin C(\mathcal{T}_\gamma)$ i zato $U \notin C(\mathcal{U})$. Otuda sledi da $U \notin PC(\mathcal{U}) = PC(\mathcal{T})$ te je $intU \neq \phi$. Sada iz leme 3.6.12. sledi da je $intU = int(cl\{x\})$ i zato $U = int(cl\{x\})$, tj. $int(cl\{x\}) \in \mathcal{U}$. Otuda iz iste leme primenjene na prostor $(X,\mathcal{U})$ sledi da je $int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\} \subset int(cl\{x\})$. Neka je sada $G = int(int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\})$. Kako $int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\} \notin C(\mathcal{U})$, to $int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\} \notin PC(\mathcal{U}) = PC(\mathcal{T})$ i zato $G \neq \phi$. Otuda je na osnovu prethodne leme $G = int(cl\{x\})$ i prema tome $int(cl\{x\}) = int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\}$. Sledi da je $int(cl\{x\}) \subset cl_{\mathcal{U}} A - cl(intA) = cl_\gamma A - cl(intA) = (A \cup cl(intA)) - cl(intA) = A - cl(intA)$ što je kontradikcija. Prema tome je $\{x\} \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ i zato $A - cl(intA) \subset B_M$.

Kao prvu posledicu dobijamo sledeći stav:

Teorema 3.6.14. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i neka je $\mathcal{U}$ topologija na X takva da je $PO(\mathcal{U}) = PO(\mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_M$.

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{U}$. Kako je $A = sintA \cup (A - cl(intA))$, to tvrđenje sledi iz 3.1.33., 3.6.13. i 3.6.4.

Vidimo dakle da stav 3.6.9. važi i bez uslova $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$. Drugim rečima $\mathcal{T}_M$ je gornje ograničenje klase $P(\mathcal{T})$.

Posledica 3.6.15. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ dve PO-ekvivalentne topologije na skupu X. Tada je $\mathcal{T}_M = \mathcal{U}_M$.

Dokaz. Na osnovu 3.6.14. sledi da je $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{T}_M$ pa je zato $\mathcal{U}_M \subset \mathcal{T}_M$. Obratna inkluzija se analogno dokazuje.

Posledica 3.6.16. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_M = \sup P(\mathcal{T})$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{M}$ gornje ograničenje klase $P(\mathcal{T})$ i neka je $\{x\} \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$. Tada je $\{x\} \in \mathcal{M}$ jer bismo u suprotnom imali na osnovu 3.6.2. topologiju generisanu sa $\mathcal{T} \cup \{\{x\}, X - \{x\}\}$ koja ima iste preotvorene skupove kao $\mathcal{T}$ a nije grublja od $\mathcal{M}$. S druge strane, $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{M}$ sledi neposredno te je $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{M}$.

Posledica 3.6.17. Neka je $\mathcal{T}$ topologija na konačnom skupu X. Tada je $\mathcal{T}_M$ najveći element u klasi $P(\mathcal{T})$.

Posledica 3.6.18. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}$ najveća topologija u klasi $P(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$ i $CO(\mathcal{T}_\gamma) \subset \mathcal{T}$.

3.7. SPO-ekvivalentne topologije

Definicija. Topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ na skupu X su SPO-ekvivalentne ako imaju iste semi-preotvorene skupove. Na ovaj način uvedena je jedna relacija ekvivalencije i označimo sa $SP(\mathcal{T})$ klasu ekvivalencije elementa $\mathcal{T}$, tj. $SP(\mathcal{T}) = \{\mathcal{U} : SPO(\mathcal{U}) = SPO(\mathcal{T})\}$.

Sledeći stav sledi neposredno iz 3.1.27.

Teorema 3.7.1. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i neka je $\mathcal{U}$ topologija na X takva da je $SPO(\mathcal{U}) = SPO(\mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$.

Slično kao za PO-ekvivalentne topologije, daju se karakterizacije SPO-ekvivalentnih topologija. Dok su otvoreno-zatvoreni skupovi topologije $\mathcal{T}_\gamma$ imali bitnu ulogu u karakterizaciji klase $P(\mathcal{T})$, ovde je to klasa regularno otvorenih skupova u $\mathcal{T}_\gamma$. Kao i u slučaju PO-ekvivalentnih topologija, uslov $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$ omogućava razne karakterizacije SPO-ekvivalentnih topologija.

Videli smo u 3.1.28. da iz uslova $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ sledi $N(\mathcal{T}) = N(\mathcal{U})$. Skup realnih brojeva sa standardnom, odnosno Sorgenfreyovom topologijom, pokazuje da obratno ne važi u opštem slučaju.

<u>Teorema 3.7.2.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$. Tada je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ ako i samo ako je $N(\mathcal{T}) = N(\mathcal{U})$.

<u>Dokaz.</u> Pretpostavimo da je $N(\mathcal{T}) = N(\mathcal{U})$ i neka je $A \in SPO(\mathcal{T})$. Tada za $C = A - cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ sledi da je $C \in N(\mathcal{U})$ pa je na osnovu pretpostavke $C \in N(\mathcal{T})$. S druge strane, $cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ je zatvoren u odnosu na $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_\delta$ i zato $C \in SPO(\mathcal{T})$. Otuda je $C = \emptyset$ te je $A \in SPO(\mathcal{U})$. Obratna inkluzija sledi iz 3.5.4.

<u>Lema 3.7.3.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$ i neka je $C = int(clA) - cl_{\mathcal{U}}A$ gde je A proizvoljan podskup prostora X. Tada je $int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}C = int(clA) - cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$.

<u>Dokaz.</u> Primetimo najpre da je $cl_{\mathcal{U}}C \subset cl(int(clA)) - int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ i zato $int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}C \subset int(clA) - cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$. S druge strane je $cl_{\mathcal{U}}C = cl_{\mathcal{U}}(int(clA) \cap (X - cl_{\mathcal{U}}A)) \supset int(clA) \cap cl_{\mathcal{U}}(X - cl_{\mathcal{U}}A) = int(clA) \cap (X - int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A) = int(clA) - int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ pa je $int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}C \supset int(clA) - cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$.

<u>Teorema 3.7.4.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$.
(b) $pintA \subset cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.
(c) $cl_{\mathcal{U}}pintA = cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.
(d) $spintA \subset cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.
(e) $cl_{\mathcal{U}}spintA = cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.
(f) $cl_{\mathcal{U}}A \cap int(clA) \subset cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.
(g) $cl_{\mathcal{U}}A \cap cl(int(clA)) = cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.

(h) $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}F = \mathrm{spint}F$ za svako $F \in C(\mathcal{U})$.

(i) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \in RO(\mathcal{U})$ za svaki podskup A.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (e): Iz 2.2.27. sledi da je $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{spint}A = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{spint}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.

(e) $\Rightarrow$ (d) sledi neposredno.

(d) $\Rightarrow$ (b) sledi neposredno.

(b) $\Rightarrow$ (c): Iz $\mathrm{pint}A \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$ sledi da je $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{pint}A \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$. S druge strane, na osnovu 2.1.3. i 3.5.4. sledi da je $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{pint}_{\mathcal{U}}A \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{pint}A$.

(c) $\Rightarrow$ (g): Iz 3.2.1. i pretpostavke dobija se $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cap (\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \cup \mathrm{cl}_{\mathcal{T}}\mathrm{pint}A) \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cap (\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \cup \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{pint}A) = (\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \cup \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{pint}A \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}(A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)) \cup \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{pint}A = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{pint}A = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$. Obratna inkluzija sledi neposredno iz 3.5.3.

(g) $\Rightarrow$ (a) sledi neposredno.

(g) $\Rightarrow$ (h): Na osnovu pretpostavke sledi da je $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}F = F \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}F)) = \mathrm{spint}F$ za svako $F \in C(\mathcal{U})$.

(h) $\Rightarrow$ (d): Na osnovu pretpostavke sledi da je $\mathrm{spint}A \subset \mathrm{spint}(\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A) = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$.

(g) $\Rightarrow$ (i): Iz prethodne leme je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}C = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - (\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = C$ pa je $C \in RO(\mathcal{U})$.

(i) $\Rightarrow$ (f): Na osnovu pretpostavke je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$ i zato $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$.

(f) $\Rightarrow$ (b) sledi neposredno.

Sledeći stav je dualan.

Teorema 3.7.5. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$.

(b) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A \subset \mathrm{pcl}A$ za svaki podskup A.

(c) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{pcl}A$ za svaki podskup A.

(d) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A \subset \mathrm{spcl}A$ za svaki podskup A.

(e) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{spcl}A$ za svaki podskup A.

(f) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A \subset \mathrm{int}_{\mathcal{U}}A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$ za svaki podskup A.

(g) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{int}_{\mathcal{U}}A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$ za svaki podskup A.

(h) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}G = \mathrm{spcl}G$ za svako $G \in \mathcal{U}$.
(i) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \in RO(\mathcal{U})$ za svaki podskup A.

Teorema 3.7.6. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$.
(b) $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \in RC(\mathcal{U})$ za svako $A \in D(\mathcal{T})$.
(c) $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}A \in RO(\mathcal{U})$ za svaki $\mathcal{T}$-kogust skup A.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Neka je $A \in D(\mathcal{T})$. Tada je $A \in SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ i zato $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \in RC(\mathcal{U})$ na osnovu 2.2.1.

(b) $\Rightarrow$ (c) sledi neposredno.

(c) $\Rightarrow$ (a): Skup $C = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$ je $\mathcal{U}$-otvoren i $\mathcal{T}$-kogust pa je na osnovu pretpostavke $C \in RO(\mathcal{U})$. Otuda je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ na osnovu 3.7.4.(i).

Teorema 3.7.7. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$. Tada je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ ako i samo ako je $PO(\mathcal{T}) \subset SPO(\mathcal{U})$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $PO(\mathcal{T}) \subset SPO(\mathcal{U})$ i neka je A proizvoljni podskup. Tada je $\mathrm{pint}A \subset \mathrm{spint}_{\mathcal{U}}A \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A$ pa je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ na osnovu 3.7.4.(b).

Obratno tvrđenje sledi neposredno.

Sledeći rezultat je takođe jedna posledica stava 3.7.4.

Teorema 3.7.8. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$ i $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$. Tada je $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}_\alpha}A = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cap \mathrm{cl}_\alpha A$ za za svaki podskup A.

Dokaz. Za proizvoljan podskup A, tvrđenje 3.7.4.(g) daje $\mathrm{cl}_{\mathcal{U}_\alpha}A = A \cup \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = A \cup (\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) = \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A \cap \mathrm{cl}_\alpha A$.

Posledica 3.7.9. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$ i $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$. Tada je $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\alpha$.

U nastavku ispitujemo karakterizacije SPO-ekvivalentnih topologija bez dodatog uslova $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_\gamma$. Neki od prethodnih rezultata i dalje važe, posebno ekvivalentnost iskaza 3.5.5.(b) i (e). Dokažimo najpre sledeći stav:

Teorema 3.7.10. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X. Tada je $SPO(\mathcal{T}) \subset SPO(\mathcal{U})$ ako i samo ako je $cl_{\mathcal{U}}A \cap cl(int(clA)) \subset cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$ za svaki podskup A.

Dokaz. Pretpostavimo da je $SPO(\mathcal{T}) \subset SPO(\mathcal{U})$ i neka je A proizvoljan podskup. Tada iz 2.2.27. sledi $cl_{\mathcal{U}}A \cap cl(int(clA)) \subset cl_{\mathcal{U}}A \cap cl(int(cl(cl_{\mathcal{U}}A))) = spint(cl_{\mathcal{U}}A) \subset spint_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A = cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$.

Obratno tvrđenje sledi neposredno.

Teorema 3.7.11. Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}_1) = SPO(\mathcal{T}_2)$.

(b) $cl_iA \cap cl_jint_jcl_jA \subset cl_iint_icl_iA$ za svako A i $i,j = 1,2$.

(c) $cl_1A \cap cl_2int_2cl_2A = cl_2A \cap cl_1int_1cl_1A$ za svako A.

(d) $cl_iint_iF = spint_jF$ za svako $F \in C(\mathcal{T}_i)$ i $i,j = 1,2$.

(e) $spint_jA \subset cl_iint_icl_iA$ za svako A i $i,j = 1,2$.

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b) sledi iz prethodnog stava.

(b)$\Rightarrow$(c): Na osnovu (b) je $cl_iA \cap cl_jint_jcl_jA \subset cl_iint_icl_iA$ pa je $cl_iA \cap cl_jint_jcl_jA \subset cl_iint_icl_iA \cap cl_jint_jcl_jA$ i zato $cl_iA \cap cl_jint_jcl_jA = cl_iint_icl_iA \cap cl_jint_jcl_jA$ za svako A i $i,j = 1,2$. Otuda je $cl_1A \cap cl_2int_2cl_2A = cl_2A \cap cl_1int_1cl_1A$.

(c)$\Rightarrow$(d): Neka je $F \in C(\mathcal{T}_1)$. Tada je $spint_2F = cl_2F \cap cl_1int_1F$ na osnovu (c). S druge strane je $cl_1int_1F \subset F$ i zato $spint_2F = cl_1int_1F$. Druga relacija se analogno dokazuje.

(d)$\Rightarrow$(e): Iz (d) neposredno sledi da je $spint_jA \subset spint_jcl_iA = cl_iint_icl_iA$ za svako A i $i,j = 1,2$.

(e)$\Rightarrow$(a): Neka je $A \in SPO(\mathcal{T}_j)$. Tada je $A = spint_jA \subset cl_iint_icl_iA$ i zato $A \in SPO(\mathcal{T}_i)$. Otuda je $SPO(\mathcal{T}_1) = SPO(\mathcal{T}_2)$.

Sledeći stav je dualan.

Teorema 3.7.12. Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $SPO(\mathcal{T}_1) = SPO(\mathcal{T}_2)$.

(b) $int_icl_iint_iA \subset int_iA \cup int_jcl_jint_jA$ za svako A i $i,j = 1,2$.

(c) $int_1A \cup int_2cl_2int_2A = int_2A \cup int_1cl_1int_1A$ za svako A.

(d) $int_icl_iG = spcl_jG$ za svako $G \in \mathcal{T}_i$ i $i,j = 1,2$.

(e) $\mathrm{int}_i\mathrm{cl}_i\mathrm{int}_i A \subset \mathrm{spcl}_j A$ za svako A i $i,j = 1,2$.

Ako su dve topologije na nekom skupu PO-ekvivalentne, onda su one na osnovu 3.1.26. i 3.1.29. i SPO-ekvivalentne. Sledeći stav daje uslov pod kojim važi i obratno tvrđenje.

Teorema 3.7.13. Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X. Tada je $PO(\mathcal{T}_1) = PO(\mathcal{T}_2)$ ako i samo ako je $SPO(\mathcal{T}_1) = SPO(\mathcal{T}_2)$ i $\mathrm{cl}_i\mathrm{int}_i\mathrm{cl}_i A \cap \mathrm{int}_j\mathrm{cl}_j A \subset \mathrm{int}_i\mathrm{cl}_i A$ za svako A i $i,j = 1,2$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $PO(\mathcal{T}_1) = PO(\mathcal{T}_2)$. Tada se iz 3.5.10.(b) dobija da je $\mathrm{cl}_i\mathrm{int}_i\mathrm{cl}_i A \cap \mathrm{int}_j\mathrm{cl}_j A \subset \mathrm{cl}_i A \cap \mathrm{int}_j\mathrm{cl}_j A \subset \mathrm{int}_i\mathrm{cl}_i A$ za svako A i $i,j = 1,2$.

Obratno, pretpostavimo da je $SPO(\mathcal{T}_1) = SPO(\mathcal{T}_2)$ i $\mathrm{cl}_i\mathrm{int}_i\mathrm{cl}_i A \cap \mathrm{int}_j\mathrm{cl}_j A \subset \mathrm{int}_i\mathrm{cl}_i A$ za svako A i $i,j = 1,2$. Tada iz 3.7.11.(b) sledi da je $\mathrm{cl}_i A \cap \mathrm{int}_j\mathrm{cl}_j A \subset \mathrm{cl}_i\mathrm{int}_i\mathrm{cl}_i A$ i zato $\mathrm{cl}_i A \cap \mathrm{int}_j\mathrm{cl}_j A \subset \mathrm{int}_i\mathrm{cl}_i A$ za svako A i $i,j = 1,2$. Otuda je $PO(\mathcal{T}_1) = PO(\mathcal{T}_2)$ na osnovu 3.5.10.(b).

Posledica 3.7.14. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $PO(\mathcal{T}) = PO(\mathcal{T}_\gamma)$ ako i samo ako su zadovoljena sledeća dva uslova:

(1) $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_\gamma)$,

(2) $\mathrm{cl}_\gamma\mathrm{int}_\gamma\mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{int}_\gamma\mathrm{cl}_\gamma A$ za svaki podskup A.

Primeri 8 i 10 iz odeljka 3.1. pokazuju da su gornji uslovi nezavisni. Naime, nije teško utvrditi da prvi primer zadovoljava uslov (1) a ne zadovoljava uslov (2) dok kod drugog primera imamo suprotan slučaj.

Sledeći stav daje još neke karakterizacije uslova (2).

Teorema 3.7.15. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $\mathrm{cl}_\gamma\mathrm{int}_\gamma\mathrm{cl}_\gamma A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{int}_\gamma\mathrm{cl}_\gamma A$ za svaki podskup A.

(b) $\mathrm{int}_\gamma\mathrm{cl}_\gamma A \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ za svako $A \in D(\mathcal{T})$.

(c) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_\gamma\mathrm{int}_\gamma\mathrm{cl}_\gamma A = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{int}_\gamma\mathrm{cl}_\gamma A$ za svaki podskup A.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b) sledi neposredno.

(b) $\Rightarrow$ (c): Neka je A proizvoljni podskup. Tada je D =

$A\cup(X - clA) \in D(\mathcal{T})$ pa je $int_\gamma cl_\gamma D \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ na osnovu pretpostavke. Kako je $cl_\gamma D = cl_\gamma A\cup(X - int(clA))$, to je $int_\gamma cl_\gamma D \supset int_\gamma cl_\gamma A\cup(X - cl(int(clA)))$ i zato $int_\gamma cl_\gamma D \supset cl_\gamma int_\gamma cl_\gamma A\cup (X - int(clA))$. S druge strane je $int_\gamma cl_\gamma D \subset int_\gamma cl_\gamma A\cup(X - int(clA))$ pa je $cl_\gamma int_\gamma cl_\gamma A\cup(X - int(clA)) = int_\gamma cl_\gamma A\cup(X - int(clA))$. Otuda je $int(clA) - cl_\gamma int_\gamma cl_\gamma A = int(clA) - int_\gamma cl_\gamma A$.

(c) $\Rightarrow$ (a) sledi neposredno.

Sledeći stav je dualan.

Teorema 3.7.16. Za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) $int_\gamma cl_\gamma int_\gamma A\cup cl(intA) = cl_\gamma int_\gamma A$ za svaki podskup A.

(b) $cl_\gamma int_\gamma A \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ za svaki $\mathcal{T}$-kogust skup A.

(c) $int_\gamma cl_\gamma int_\gamma A - cl(intA) = cl_\gamma int_\gamma A - cl(intA)$ za svaki podskup A.

Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X. Dokazali smo u odeljku 3.5. da je pod pretpostavkom $\mathcal{T}\subset\mathcal{U}\subset\mathcal{T}_\gamma$ uslov $SO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{U})$ ekvivalentan uslovima $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ i $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{U})$. U nastavku izlaganja utvrdićemo da pretpostavka $\mathcal{T}\subset\mathcal{U}\subset\mathcal{T}_\gamma$ nije neophodna. U tom cilju dokazaćemo najpre sledeći stav:

Teorema 3.7.17. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na X takve da je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ i $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{U})$. Tada prostori $(X,\mathcal{T})$ i $(X,\mathcal{U})$ imaju iste koguste skupove.

Dokaz. Pretpostavimo da je $intA = \emptyset$. Odatle je $A \in SPC(\mathcal{T}) = SPC(\mathcal{U})$ pa je $int_\mathcal{U} A \in RO(\mathcal{U}) = RO(\mathcal{T})$. Otuda je $int_\mathcal{U} A \in \mathcal{T}$ i zato $int_\mathcal{U} A = \emptyset$, tj. A je $\mathcal{U}$-kogust. Obratna inkluzija se analogno dokazuje.

Primetimo da obratno tvrđenje ne važi u opštem slučaju. Kao primer može poslužiti skup realnih brojeva sa standardnom i Sorgenfreyovom topologijom.

Teorema 3.7.18. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X. Tada je $SO(\mathcal{T}) = SO(\mathcal{U})$ ako i samo ako je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ i $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{U})$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$, $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{U})$ i neka je $A \in SO(\mathcal{U})$. Kako je $int(A - cl(intA)) = \emptyset$. to je $int_{\mathcal{U}}(A - cl(intA)) = \emptyset$ na osnovu prethodnog stava. Otuda je $int_{\mathcal{U}}A \subset cl_{\mathcal{U}}cl(intA)$ pa je $A \subset cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}A \subset cl_{\mathcal{U}}cl(intA)$. S druge strane je $cl(intA) \in RC(\mathcal{T}) = RC(\mathcal{U})$ i zato $A \subset cl(intA)$, tj. $A \in SO(\mathcal{T})$. Analogno se dokazuje i da je $SO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{U})$.

Obratno tvrđenje sledi iz 1.3.13., 1.3.6. i 2.2.13.

Sa $\mathcal{T}_s$ ćemo označiti topologiju semiregularizacije prostora $(X,\mathcal{T})$, tj. topologiju čija je baza $RO(\mathcal{T})$. Poznato je da je $\mathcal{T}_{ss} = \mathcal{T}_s$ kao i da je $RO(\mathcal{T}) = RO(\mathcal{U})$ ako i samo ako je $\mathcal{T}_s = \mathcal{U}_s$ [14]. Imajući u vidu stavove 1.3.13. i 3.1.29. možemo prethodnu teoremu formulisati na sledeći način:

Teorema 3.7.19. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X. Tada je $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha$ ako i samo ako je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$ i $\mathcal{T}_s = \mathcal{U}_s$.

Posledica 3.7.20. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_{s\alpha} = \mathcal{T}_\alpha$ ako i samo ako je $\mathcal{T}_{s\gamma} = \mathcal{T}_\gamma$.

Pokažimo na kraju ovog dela izlaganja da su uslovi $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$ i $\mathcal{T}_s = \mathcal{U}_s$ nezavisni.

Primer 20. Neka je $X = \{a,b,c\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset,X,ab\}$ i $\mathcal{U} = \{\emptyset, X,a,b,ab\}$. Tada je $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma = \mathcal{U}$, $\mathcal{T}_s = \mathcal{A}$ i $\mathcal{U}_s = \mathcal{U}$.

Primer 21. Neka je $X = \{a,b,c\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset,X,ab\}$ i $\mathcal{V} = \{\emptyset, X,a\}$. Tada je $\mathcal{T}_s = \mathcal{V}_s = \mathcal{A}$ i $\mathcal{T}_\gamma \neq \mathcal{V}_\gamma$.

Do kraja odeljka utvrdićemo još neke osobine topologije $\mathcal{T}_M$ definisane u prethodnom odeljku.

Teorema 3.7.21. Topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_M$ na skupu X su SPO-ekvivalentne.

Dokaz. Na osnovu 3.7.2. i 3.5.4. dovoljno je dokazati da je $N(\mathcal{T}_M) \subset N(\mathcal{T})$ i zato neka je $int_M cl_M A = \emptyset$ pri čemu indeks M označava standardne operatore u $(X,\mathcal{T}_M)$. Pretpostavimo da je $int(clA) \neq \emptyset$ i neka je $x \in C = int(clA) - cl_M A$. Kako je $intC = \emptyset$

i $C \in \mathcal{T}_M$, to je $\{x\} \in CO(\mathcal{T}_\gamma)$ na osnovu 3.6.4. Otuda je $cl\{x\} \in CO(\mathcal{T})$ primenom 3.1.38., pa je $cl\{x\} \cap A \neq \emptyset$ i zato $int_M A \neq \emptyset$, kontradikcija. Prema tome $A \in N(\mathcal{T})$.

Posledica 3.7.22. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $\mathcal{T}_{M\gamma} = \mathcal{T}_\gamma$,
(2) $\mathcal{T}_{M\alpha} = \mathcal{T}_M$,
(3) $\mathcal{T}_{MM} = \mathcal{T}_M$.

Dokaz. Relacija (1) sledi neposredno iz prethodnog stava i 3.1.29., a relacija (2) iz prethodnog stava i 3.7.9. Dokažimo relaciju (3) i zato neka je $A \in \mathcal{T}_{MM}$. Tada je $A = G \cup H$ pri čemu je $G \in \mathcal{T}_{M\alpha}$ i $\{h\} \in CO(\mathcal{T}_{M\gamma})$ za svako $h \in H$. Otuda je $A \in \mathcal{T}_M$ na osnovu (1) i (2).

3.8. Topološki prostor $(X,\mathcal{T}_N)$

U ovom odeljku uvodimo jednu novu topologiju na datom skupu i ispitujemo njene osobine. Dok je topologija $\mathcal{T}_M$ generisana elementima klase $CO(\mathcal{T}_\gamma)$, ovde će to biti elementi klase $RO(\mathcal{T}_\gamma)$. Uvedimo za prostor $(X,\mathcal{T})$ sledeću oznaku: $B_N = \{x \in B: \{x\} \in RO(\mathcal{T}_\gamma)\}$. Tada je familija $\mathcal{T}_\alpha \cup \{\{x\}: x \in B_N\}$ baza topologije koju ćemo označiti sa $\mathcal{T}_N$. Sledeći stav sledi neposredno.

Teorema 3.8.1. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $U \in \mathcal{T}_N$ ako i samo ako je $U = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_\alpha$ i $H \subset B_N$.

Posledica 3.8.2. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_\alpha \Leftrightarrow B_N = \emptyset$,
(2) $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_\gamma \Leftrightarrow B_N = B$.
(3) $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}_N$.

Sledeći stav tvrdi da je topologija $\mathcal{T}_N$ gornje ograničenje klase $SP(\mathcal{T})$.

Teorema 3.8.3. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i neka je $\mathcal{U}$ topologija na skupu X takva da je $SPO(\mathcal{U}) = SPO(\mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_N$.

Dokaz. Kako je $SPO(\mathcal{U}) = SPO(\mathcal{T})$, to na osnovu 3.7.12.(c) za $A \in \mathcal{U}$ sledi da je $A \cup int(cl(intA)) = int_{\mathcal{U}}A \cup int(cl(intA)) = intA \cup int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}int_{\mathcal{U}}A = intA \cup int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A = int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A$. S druge strane je $\mathcal{U}_{\gamma} = \mathcal{T}_{\gamma}$ pa je $cl_{\mathcal{U}}A = cl_{\gamma}A$ i zato $int_{\gamma}cl_{\gamma}A = int_{\gamma}cl_{\mathcal{U}}A = int_{\mathcal{U}}cl_{\mathcal{U}}A = A \cup int(cl(intA))$. Iz 3.1.33. sledi da je $A \cap cl(intA) \in \mathcal{T}_{\alpha}$ a na osnovu 3.1.39. je $\{x\} \in \mathcal{T}_{\gamma}$ za svako $x \in A - cl(intA)$. Kako je $int_{\gamma}cl_{\gamma}(A - cl(intA)) \subset int_{\gamma}(cl_{\gamma}A - int(cl(intA))) = int_{\gamma}cl_{\gamma}A - cl(intA) = (A \cup int(cl(intA))) - cl(intA) = A - cl(intA)$, to je $A - cl(intA) \in SC(\mathcal{T}_{\gamma})$ pa je $A - cl(intA) \in RO(\mathcal{T}_{\gamma})$. Otuda je $\{x\} \in RO(\mathcal{T}_{\gamma})$ za svako $x \in A - cl(intA)$ pa je $A = (A \cap cl(intA)) \cup (A - cl(intA)) \in \mathcal{T}_N$.

Posledica 3.8.4. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ dve SPO-ekvivalentne topologije na skupu X. Tada je $\mathcal{T}_N = \mathcal{U}_N$.

Dokaz. Na osnovu prethodnog stava sledi da je $\mathcal{U}_{\alpha} \subset \mathcal{T}_N$ pa je zato $\mathcal{U}_N \subset \mathcal{T}_N$. Obratna inkluzija se analogno dokazuje.

Posledica 3.8.5. Neka je $\mathcal{T}$ topologija na konačnom skupu X. Tada je $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_{\gamma}$.

Da se topologije $\mathcal{T}_N$ i $\mathcal{T}_{\gamma}$ ne moraju podudarati u opštem slučaju pokazuje sledeći primer.

Primer 22. Neka je X beskonačan skup, $p \in X$ i $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U: p \in U$ i $X - U$ je konačan$\}$. Tada je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\alpha}$ i $\mathcal{T}_{\gamma} = \mathcal{T} \cup \{\{p\}\}$. Otuda je $B = \{p\} \notin RO(\mathcal{T}_{\gamma})$ te je $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}$.

Veze između operatora zatvorenja i unutrašnjosti topologija $\mathcal{T}_N$ i $\mathcal{T}_{\gamma}$ date su u sledećem tvrđenju. Za operatore topologije $\mathcal{T}_N$ koriste se oznake cl_N i int_N.

Teorema 3.8.6. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $int_{\gamma}cl_{\gamma}A = int_N cl_{\gamma}A$,
(2) $cl_{\gamma}int_{\gamma}A = cl_N int_{\gamma}A$,
(3) $int_N cl_N A = int_{\gamma}cl_N A$,
(4) $cl_N int_N A = cl_{\gamma}int_N A$.

Dokaz. Primetimo najpre da za $G \in RO(\mathcal{T}_\gamma)$ sledi da je $G - cl(intG) \in RO(\mathcal{T}_\gamma)$ i stoga $G - cl(intG) \subset B_N$. Otuda je $G \in \mathcal{T}_N$ i zato $RO(\mathcal{T}_\gamma) \subset \mathcal{T}_N$.

(1) $int_\gamma cl_\gamma A \in RO(\mathcal{T}_\gamma) \subset \mathcal{T}_N$ pa je $int_\gamma cl_\gamma A \subset int_N cl_\gamma A$. Obratna inkluzija sledi neposredno. Relacija (2) se analogno dokazuje.

(3) $cl_N A \in C(\mathcal{T}_\gamma)$ pa je $int_\gamma cl_N A \in RO(\mathcal{T}_\gamma) \subset \mathcal{T}_N$ i zato $int_\gamma cl_N A \subset int_N cl_N A$. Obratna inkluzija sledi neposredno. Relacija (4) se analogno dokazuje.

Posledica 3.8.7. Neka je A podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada je:

(1) $int_\gamma cl_\gamma A \subset int_N cl_N A$,
(2) $cl_\gamma int_\gamma cl_\gamma A \subset cl_N int_N cl_N A$,
(3) $cl_N int_N A \subset cl_\gamma int_\gamma A$,
(4) $int_N cl_N int_N A \subset int_\gamma cl_\gamma int_\gamma A$.

Posledica 3.8.8. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $PO(\mathcal{T}_\gamma) \subset PO(\mathcal{T}_N) \subset PO(\mathcal{T})$,
(2) $SPO(\mathcal{T}_\gamma) \subset SPO(\mathcal{T}_N) \subset SPO(\mathcal{T})$,
(3) $SO(\mathcal{T}) \subset SO(\mathcal{T}_N) \subset SO(\mathcal{T}_\gamma)$,
(4) $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}_{N\alpha} \subset \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$.

Videli smo u 3.6.8. da prostori $(X,\mathcal{T}_M)$ i $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ imaju iste otvoreno-zatvorene skupove pa se, s obzirom na definiciju topologije $\mathcal{T}_N$, sledeći rezultat i mogao očekivati.

Teorema 3.8.9. Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $RO(\mathcal{T}_N) = RO(\mathcal{T}_\gamma)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in RO(\mathcal{T}_N)$. Tada je na osnovu 3.8.7. $int_\gamma cl_\gamma A \subset int_N cl_N A = A$ pa je $A \in SC(\mathcal{T}_\gamma)$. S druge strane je $A \in \mathcal{T}_\gamma$ i zato $A \in RO(\mathcal{T}_\gamma)$. Obratno, pretpostavimo da je $A \in RO(\mathcal{T}_\gamma) \subset \mathcal{T}_N$. Iz 3.8.6. sledi $cl_N A = cl_\gamma A$ pa je $int_N cl_N A = int_N cl_\gamma A = int_\gamma cl_\gamma A = A$ i zato $A \in RO(\mathcal{T}_N)$.

Veze između topologija dobijenih sukcesivnom primenom operacija α, γ i N date su u sledećim iskazima. Primetimo da se topologija $\mathcal{T}_N$ ponaša kao i $\mathcal{T}_\gamma$, tj. uvek važi $\mathcal{T}_{NNN} = \mathcal{T}_{NN}$. Sledeći rezultat sledi neposredno iz 3.7.18. i prethodnog stava.

<u>Teorema 3.8.10.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_{N\gamma} = \mathcal{T}_{\gamma\gamma}$ ako i samo ako je $\mathcal{T}_{N\alpha} = \mathcal{T}_{\gamma\gamma}$.

<u>Teorema 3.8.11.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $\mathcal{T}_\gamma \subset \mathcal{T}_{N\gamma} \subset \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$,
(2) $\mathcal{T}_{N\gamma\alpha} = \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$,
(3) $RO(\mathcal{T}_N) = RO(\mathcal{T}_{N\gamma})$.

<u>Dokaz</u>. (1) Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{T}_\gamma$. Tada je na osnovu 3.1.41. $A = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_\alpha$ i $\{h\} \in PO(\mathcal{T})$ za svako $h \in H$. Sledi da je $\{h\} \in \mathcal{T}_\gamma$ i zato $\{h\} \in PO(\mathcal{T}_N)$ za svako $h \in H$ na osnovu 3.8.8. S druge strane je $G \in \mathcal{T}_N$ i zato $A \in \mathcal{T}_{N\gamma}$. Otuda je $\mathcal{T}_\gamma \subset \mathcal{T}_{N\gamma}$. Da bismo dokazali drugu inkluziju, pretpostavimo da je $A \in \mathcal{T}_{N\gamma}$. To znači da je $A = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_{N\alpha}$ i $\{h\} \in PO(\mathcal{T}_N)$ za svako $h \in H$. Otuda je na osnovu 3.8.8. $G \in \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$ i $\{h\} \in PO(\mathcal{T})$ za svako $h \in H$ i zato $A \in \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$. Prema tome $\mathcal{T}_{N\gamma} \subset \mathcal{T}_{\gamma\alpha}$.

Relacija (2) sledi neposredno iz (1) i 1.3.15. a relacija (3) iz (2) i 3.8.9.

<u>Teorema 3.8.12.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $\mathcal{T}_{NN} = \mathcal{T}_{N\alpha}$,
(2) $\mathcal{T}_{NNN} = \mathcal{T}_{NN}$.

<u>Dokaz</u>. (1) Neka je $A \in \mathcal{T}_{NN}$. To znači da je $A = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_{N\alpha}$ i $\{h\} \in RO(\mathcal{T}_{N\gamma})$ za svako $h \in H$. Kako je na osnovu prethodnog stava $RO(\mathcal{T}_{N\gamma}) \subset \mathcal{T}_N$, to je $A \in \mathcal{T}_{N\alpha}$. Stoga je $\mathcal{T}_{NN} \subset \mathcal{T}_{N\alpha}$ dok obratna inkluzija sledi neposredno.

(2) Na osnovu (1) i 1.3.6. dobijamo da je $\mathcal{T}_{NNN} = \mathcal{T}_{NN\alpha} = \mathcal{T}_{N\alpha\alpha} = \mathcal{T}_{N\alpha} = \mathcal{T}_{NN}$.

<u>Teorema 3.8.13.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_N)$ ako i samo ako je $\mathcal{T}_{N\alpha} = \mathcal{T}_N$.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_N)$. Otuda je $\mathcal{T}_{N\alpha} = \mathcal{T}_N$ na osnovu 3.7.9.

Obratno, neka je $\mathcal{T}_{N\alpha} = \mathcal{T}_N$ i pretpostavimo da je $A \in \mathcal{T}_{N\gamma}$. To znači da je $A = U \cup H$ gde je $U \in \mathcal{T}_{N\alpha} = \mathcal{T}_N$ i $\{h\} \in PO(\mathcal{T}_N)$ za svako $h \in H$. Otuda je $A = (G \cup K) \cup H = G \cup (K \cup H)$ gde je $G \in \mathcal{T}_\alpha$,

$\{k\} \in RO(\mathcal{T}_\gamma)$ za svako $k \in K$ i $\{h\} \in PO(\mathcal{T}_N)$ za svako $h \in H$. Sledi da je $A \in \mathcal{T}_\gamma$ i stoga $\mathcal{T}_{N\gamma} \subset \mathcal{T}_\gamma$. Obratna inkluzija sledi iz 3.8.11. i zato $SPO(\mathcal{T}_N) = SPO(\mathcal{T})$ na osnovu 3.1.29.

Da topologija $\mathcal{T}_N$ ne mora pripadati klasi $SP(\mathcal{T})$ pokazuje sledeći primer.

<u>Primer 23</u>. Neka su p i q dve proizvoljne tačke beskonačnog skupa X. Tada je $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U\colon \{p,q\} \subset U$ i $X - U$ je konačan$\}$ topologija na X. Nije teško utvrditi da važi sledeće:

(1) $PO(\mathcal{T}) = \{\emptyset\} \cup \{P\colon P$ je beskonačan$\} \cup \{Q\colon Q \cap \{p,q\} \neq \emptyset\} = SPO(\mathcal{T})$,

(2) $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T} \cup \{\{p\},\{q\},\{p,q\}\}$,

(3) $\mathcal{T}_{\gamma\gamma} = \{\emptyset\} \cup \{\{p\},\{q\}\} \cup \{U\colon \{p,q\} \subset U\} = PO(\mathcal{T}_\gamma)$,

(4) $SPO(\mathcal{T}_\gamma) = SO(\mathcal{T}_\gamma) = \{\emptyset\} \cup \{S\colon S \cap \{p,q\} \neq \emptyset\}$.

Otuda sledi da su $\{p\}$ i $\{q\}$ regularno otvoreni u $(X,\mathcal{T}_\gamma)$ pa je $B = \{p,q\} = B_N$ i zato $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_\gamma$. Prema tome $SPO(\mathcal{T}_N) \neq SPO(\mathcal{T})$.

Na kraju odeljka utvrdićemo neke veze između topologija $\mathcal{T}_M$ i $\mathcal{T}_N$.

<u>Teorema 3.8.14.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:

(1) $\mathcal{T}_{NM} = \mathcal{T}_{NN}$,

(2) $\mathcal{T}_{MN} = \mathcal{T}_N$.

<u>Dokaz</u>. Relacija (1) sledi iz $\mathcal{T}_{N\alpha} \subset \mathcal{T}_{NM} \subset \mathcal{T}_{NN} = \mathcal{T}_{N\alpha}$.

Da bismo dokazali relaciju (2), pretpostavimo da je $A \in \mathcal{T}_{MN}$. To znači da je $A = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_{M\alpha}$ i $\{h\} \in RO(\mathcal{T}_{M\gamma})$ za svako $h \in H$. Iz 3.7.22. sledi da je $G \in \mathcal{T}_M$ i $\{h\} \in RO(\mathcal{T}_\gamma)$ za svako $h \in H$ pa je $A \in \mathcal{T}_N$ i zato $\mathcal{T}_{MN} \subset \mathcal{T}_N$. Obratna inkluzija se na sličan način dokazuje.

<u>Teorema 3.8.15.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_N$ ako i samo ako je $PO(\mathcal{T}_M) = PO(\mathcal{T}_N)$.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je $PO(\mathcal{T}_M) = PO(\mathcal{T}_N)$. Tada je na osnovu 3.6.15. $\mathcal{T}_{MM} = \mathcal{T}_{NM}$ i zato $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_{NM}$ na osnovu 3.7.22. Otuda je $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_N$.

3.9. Topološki prostor $(X,\mathcal{T}_R)$

U ovom odeljku uvodimo za dati prostor $(X,\mathcal{T})$ još jednu novu topologiju na skupu X. Između ostalog dokazaćemo da je ta topologija najveći element u klasi $SP(\mathcal{T})$.

Označimo sa $\mathcal{T}_R$ topologiju koju generiše baza $\mathcal{T}_\alpha \cup \{\{x\}: x \in \mathrm{int}B\}$. Zatvorenje i unutrašnjost skupa A u prostoru $(X,\mathcal{T}_R)$ označavaćemo sa $\mathrm{cl}_R A$ odnosno $\mathrm{int}_R A$. Sledeći stav sledi neposredno.

<u>Teorema 3.9.1.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $U \in \mathcal{T}_R$ ako i samo ako je $U = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_\alpha$ i $H \subset \mathrm{int}B$.

<u>Posledica 3.9.2.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $\mathcal{T}_R = \mathcal{T}_\alpha \Leftrightarrow \mathrm{int}B = \emptyset$,
(2) $\mathcal{T}_R = \mathcal{T}_\gamma \Leftrightarrow B \in \mathcal{T}$.

Sledeći stav omogućuje da se preciznije odredi mesto topologije $\mathcal{T}_R$ u odnosu na ranije uvedene topologije $\mathcal{T}_M$ i $\mathcal{T}_N$.

<u>Teorema 3.9.3.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $B_M \subset \mathrm{int}B \subset B_N$.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je $x \in B_M$. Tada je $\mathrm{cl}\{x\} \in CO(\mathcal{T})$ na osnovu 3.1.38. pa je $x \in \mathrm{cl}\{x\} \subset B$ primenom 3.1.40. i zato $x \in \mathrm{int}B$. Da bismo dokazali drugu inkluziju, pretpostavimo da je $y \in \mathrm{int}B$. Iz 3.2.18. sledi da je $\mathrm{int}_\gamma \mathrm{cl}_\gamma\{y\} = \mathrm{int}(\mathrm{cl}_\gamma\{y\}) \cup \{y\}$. Kako je $\mathrm{int}_\gamma \mathrm{cl}_\gamma\{y\} \cap B = \{y\}$, to je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}_\gamma\{y\}) \cap \mathrm{int}B \subset \{y\} \notin \mathcal{T}$ i zato $\mathrm{int}(\mathrm{cl}_\gamma\{y\}) = \emptyset$. Otuda je $\{y\} \in RO(\mathcal{T}_\gamma)$ i prema tome $\mathrm{int}B \subset B_N$.

<u>Posledica 3.9.4.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}_R \subset \mathcal{T}_N$.

Da bismo dokazali da su topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_R$ SPO-ekvivalentne, dokazujemo najpre sledeći stav:

<u>Teorema 3.9.5.</u> Neka je A proizvoljan podskup prostora $(X,\mathcal{T})$. Tada su skupovi $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_R A$ i $\mathrm{int}_R A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$ sadržani u $\mathrm{int}B$.

<u>Dokaz</u>. Za $C = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_R A$ je $\mathrm{int}C = \phi$ i $C \in \mathcal{T}_R$. Otuda je $C \subset \mathrm{int}B$ na osnovu 3.9.1. Na isti način dokazuje se i da je $\mathrm{int}_R A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset \mathrm{int}B$.

<u>Teorema 3.9.6.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{T}_R)$.

<u>Dokaz</u>. Na osnovu 3.5.4. i 3.7.2. dovoljno je dokazati da je $N(\mathcal{T}_R) \subset N(\mathcal{T})$ i zato pretpostavimo da je $\mathrm{int}_R \mathrm{cl}_R A = \phi$ i $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) \neq \phi$. Neka je $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}A) - \mathrm{cl}_R A$. Tada je iz prethodnog stava $x \in \mathrm{int}B$ i zato $\mathrm{int}B \cap A \neq \phi$. Otuda je $\mathrm{int}_R A \neq \phi$, kontradikcija. Prema tome $A \in N(\mathcal{T})$.

<u>Posledica 3.9.7.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $\mathcal{T}_{R\alpha} = \mathcal{T}_R$,
(2) $\mathcal{T}_{R\gamma} = \mathcal{T}_\gamma$.

<u>Dokaz</u>. Relacija (1) sledi iz 3.7.9. a relacija (2) iz 3.1.29.

<u>Posledica 3.9.8.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:
(1) $B(\mathcal{T}_R) = B - \mathrm{int}B$,
(2) $\mathcal{T}_{RR} = \mathcal{T}_R$.

<u>Dokaz</u>. (1) Pretpostavimo da je $x \in B(\mathcal{T}_R)$. To znači da je $\{x\} \in \mathcal{T}_{R\gamma} - \mathcal{T}_R$ i zato $\{x\} \in \mathcal{T}_\gamma - \mathcal{T}_R$ na osnovu 3.9.7. Otuda je $x \in B - \mathrm{int}B$. Obratna inkluzija dokazuje se na isti način.

(2) Neka je $A \in \mathcal{T}_{RR}$. Tada je $A = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_{R\alpha}$ i $H \subset \mathrm{int}_R B(\mathcal{T}_R)$. Na osnovu (1) i 3.9.1. sledi da je $\mathrm{int}_R B(\mathcal{T}_R) = \phi$ pa primenom 3.9.7. dobijamo da je $A \in \mathcal{T}_R$.

U daljem toku izlaganja ispitaćemo dejstvo SPO-ekvivalentnih topologija na skup B. Sledeće tvrđenje igra posebnu ulogu.

<u>Teorema 3.9.9.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $\mathcal{U}$ topologija na X takva da je $SPO(\mathcal{U}) = SPO(\mathcal{T})$. Tada je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}} B \subset \mathrm{int}B$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $x \in \mathrm{int}_{\mathcal{U}} B - \mathrm{int}B$. Tada je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}B) - \mathrm{cl}(\mathrm{int}B)$ a kako $x \notin \mathrm{int}B$, to je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) - B \neq \phi$. Sada dobijamo da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) - p\mathrm{cl}B = \mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) - (B \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}B)) = (\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) - B) - \mathrm{cl}(\mathrm{int}B) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) - B$. Otuda je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) - B \in PO(\mathcal{T}) \subset SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ i zato $p\mathrm{int}_{\mathcal{U}}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) - B) \neq o$.

Neka je $y \in P_y = \mathrm{pint}_{\mathcal{U}}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) - B)$. Sledi $y \notin B$, $y \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\})$ i zato $y \in \mathrm{cl}_{\gamma}\{x\}$ na osnovu 3.1.40., i prema tome $y \in \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\{x\}$. Odatle je $y \in \mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\mathrm{int}_{\mathcal{U}}B \subset \mathrm{pcl}_{\mathcal{U}}B$ i zato $P_y \cap B \neq \phi$, kontradikcija. Prema tome $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}B \subset \mathrm{int}B$.

<u>Posledica 3.9.10.</u> Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dve SPO-ekvivalentne topologije na skupu X. Tada je $\mathrm{int}_i B(\mathcal{T}_j) \subset \mathrm{int}_j B(\mathcal{T}_j)$ za $i,j = 1,2$.

<u>Posledica 3.9.11.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$ i $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$. Tada je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}B = \mathrm{int}B$.

<u>Teorema 3.9.12.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X takve da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Tada je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}B = \mathrm{int}B$ ako i samo ako je $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_R$.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}B = \mathrm{int}B$ i neka je $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\gamma}$. Tada je $A \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \in \mathcal{T}_{\alpha}$ i $A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset B$. S druge strane je $A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \in \mathcal{U}$ i zato $A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A) \subset \mathrm{int}_{\mathcal{U}}B = \mathrm{int}B$. Otuda je $A \in \mathcal{T}_R$ na osnovu 3.9.1.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_R$ i primetimo da je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}B - \mathrm{cl}(\mathrm{int}B) = \mathrm{int}_{\mathcal{U}}B - \mathrm{int}B$. Neka je sada $x \in G = \mathrm{int}_{\mathcal{U}}B - \mathrm{int}B \in \mathcal{U} \subset \mathcal{T}_R$. Kako je $\mathrm{int}G = \phi$, to je $\mathrm{int}_{\alpha}G = \phi$ i zato $x \in \mathrm{int}B$, kontradikcija. Otuda je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}B \subset \mathrm{int}B$ dok obratna inkluzija sledi neposredno.

Sada ćemo preći na rešavanje našeg glavnog problema. Dokazaćemo naime da je $\mathcal{T}_R$ najfinija topologija u klasi $SP(\mathcal{T})$. Najpre sledi jedna lema.

<u>Lema 3.9.13.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ topologije na skupu X takve da je $SPO(\mathcal{T}) = SPO(\mathcal{U})$ i neka je $A \in \mathcal{U}$. Tada je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\{x\} \cap \mathrm{cl}_{\gamma}\{x\} = \{x\}$ za svako $x \in A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$.

<u>Dokaz</u>. Kako je $A \in \mathcal{U}$, to je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = \mathrm{spcl}A = A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$ na osnovu 3.7.12.(d). S druge strane je $A \in \mathcal{U}_{\gamma} = \mathcal{T}_{\gamma}$ i zato $\mathrm{int}_{\alpha}A = \mathrm{sint}A$ pa je $A - \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) = A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$. Za $x \in A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$ je $\mathrm{cl}_{\gamma}\{x\} \subset \mathrm{cl}_{\gamma}A - \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$ i $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\{x\} \subset \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}A = A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))$. Neka je sada $y \in \mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\{x\} \cap \mathrm{cl}_{\gamma}\{x\}$. Tada je $y \in A - \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)) = A - \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$ pa je $y \in B$ i zato $y = x$. Prema tome je $\mathrm{int}_{\mathcal{U}}\mathrm{cl}_{\mathcal{U}}\{x\} \cap \mathrm{cl}_{\gamma}\{x\} = \{x\}$.

<u>Teorema 3.9.14.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor i $\mathcal{U}$ topologija na X takva da je $SPO(\mathcal{U}) = SPO(\mathcal{T})$. Tada je $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_R$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $A \in \mathcal{U}$ i $x \in A - cl(intA)$. Budući da je $A \cap cl(intA) \in \mathcal{T}_\alpha$, dovoljno je dokazati da je $x \in intB$. Na osnovu prethodne leme je $int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\} \cap cl_{\mathcal{T}}\{x\} = \{x\}$. Kako je $cl_{\mathcal{U}}\{y\} = cl_{\mathcal{U}}\{x\}$ za svako $y \in int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\}$, to je $cl_{\mathcal{T}}\{y\} = \{y\} \cup F$ gde je $F = cl_{\mathcal{T}}\{x\} - \{x\}$. Pretpostavimo najpre da je $int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\} \cap intA \neq \emptyset$ i neka je $y \in int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\} \cap intA$. Odatle je $cl_{\mathcal{T}}\{y\} \subset cl(intA)$ pa je $F \subset cl(intA)$. S druge strane je $int(cl\{x\}) \subset int(clA) - cl(intA)$ i zato $int(cl\{x\}) \cap F = \emptyset$. Otuda je $int(cl\{x\}) \cap cl_{\mathcal{T}}\{x\} = \{x\}$ pa je $int(cl\{x\}) \subset B$ i zato $x \in intB$. U suprotnom, ako je $int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\} \cap intA = \emptyset$, onda je $\{y\} \notin \mathcal{T}$ za svako $y \in int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\}$ pa je $int_{\mathcal{U}} cl_{\mathcal{U}}\{x\} \subset B$ na osnovu prethodne leme. Otuda je $x \in int_{\mathcal{U}} B$ i zato $x \in intB$ na osnovu 3.9.9.

Primenom teoreme 3.9.6. dobija se

<u>Posledica 3.9.15.</u> Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ dve SPO-ekvivalentne topologije na skupu X. Tada je $\mathcal{T}_R = \mathcal{U}_R$.

<u>Posledica 3.9.16.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}_R$ najveći element u klasi $SP(\mathcal{T})$.

<u>Posledica 3.9.17.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je $\mathcal{T}$ najveća topologija u klasi $SP(\mathcal{T})$ ako i samo ako je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$ i $intB = \emptyset$.

Odeljak završavamo još nekim vezama između topologija $\mathcal{T}_R$, $\mathcal{T}_N$ i $\mathcal{T}_M$.

<u>Teorema 3.9.18.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:

(1) $\mathcal{T}_{NR} = \mathcal{T}_{NN}$,

(2) $\mathcal{T}_{RN} = \mathcal{T}_N$.

<u>Dokaz</u>. Relacija (1) sledi iz $\mathcal{T}_{N\alpha} \subset \mathcal{T}_{NR} \subset \mathcal{T}_{NN} = \mathcal{T}_{N\alpha}$ a relacija (2) iz 3.9.6. i 3.8.4.

<u>Teorema 3.9.19.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:

(1) $\mathcal{T}_{RM} = \mathcal{T}_R$,

(2) $\mathcal{T}_{MR} = \mathcal{T}_R$,

(3) $\mathcal{T}_R$ je najveća topologija u svojoj PO-klasi.

<u>Dokaz</u>. (1) Neka je $A \in \mathcal{T}_{RM}$. To znači da je $A = G \cup H$ gde je $G \in \mathcal{T}_{R\alpha}$ i $\{h\} \in CO(\mathcal{T}_{R\gamma})$ za svako $h \in H$ pa je $A \in \mathcal{T}_R$ na osnovu 3.9.7. Obratna inkluzija sledi neposredno.

Relacija (2) sledi iz 3.7.21. i 3.9.15. dok relacija (3) sledi neposredno iz (1).

<u>Teorema 3.9.20.</u> Neka je $(X,\mathcal{T})$ prostor. Tada je:

(1) $\mathcal{T}_R = \mathcal{T}_N \Leftrightarrow SPO(\mathcal{T}_R) = SPO(\mathcal{T}_N)$,

(2) $\mathcal{T}_R = \mathcal{T}_M \Leftrightarrow PO(\mathcal{T}_R) = PO(\mathcal{T}_M)$.

L I T E R A T U R A

[1] M.E. Abd El-Monsef, S.N. El-Deeb and R.A. Mahmoud, β-open sets and β-continuous mappings, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. 12 (1) (1983), 77-90.

[2] M.E. Abd El-Monsef and A.M. Kozae, Some generalized forms of compactness and closedness, Delta J. Sci. 9 (2) (1985), 257-269.

[3] M.E. Abd El-Monsef, R.A. Mahmoud and E.R. Lashin, β-closure and β-interior, Journal of the Faculty of Education 10 (1986), 235-245.

[4] D.R. Anderson and J.A. Jensen, Semi-continuity on topological spaces, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 42 (1967), 782-783.

[5] D. Andrijević, Some properties of the topology of α-sets, Mat. Vesnik 36 (1984), 1-10.

[6] D. Andrijević, Semi-preopen sets, Mat. Vesnik 38 (1986), 24-32.

[7] D. Andrijević, On the topology generated by preopen sets, Mat. Vesnik 39 (1987), 367-376.

[8] D. Andrijević, A note on preopen sets, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 18 (1988), 195-201.

[9] D. Andrijević and M. Ganster, A note on the topology generated by preopen sets, Mat. Vesnik 39 (1987), 115-119.

[10] R.H. Atia, S.N. El-Deeb and I.A. Hasanein, A note on strong compactness and S-closedness, Mat. Vesnik 6 (19) 34 (1982), 23-28.

[11] N.D. Banerjee - Chhanda Bandyopadhyay, Semi-closed sets and the associated topology, Math. Slovaca 33 (2) (1983), 225-229.

[12] N. Biswas, On some mappings in topological spaces, Bull. Calcutta Math. Soc. 61 (1969), 127-135.

[13] N. Biswas, On characterizations of semi-continuous functions, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 48 (1970), 399-402.

[14] N. Bourbaki, General Topology, Part 1, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.

[15] D.E. Cameron, Properties of S-closed spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 581-586.

[16] S.G. Crossley, A note on semi-topological classes, Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 416-420.

[17] S.G. Crossley, A note on semi-topological properties, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 409-412.

[18] S.G. Crossley, On semi-open set structure, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 93 (1979), 166-174.

[19] S.G. Crossley and S.K. Hildebrand, Semi-closure, The Texas Journal of Science 22 (1971), 99-112.

[20] S.G. Crossley and S.K. Hildebrand, Semi-topological properties, Fund. Math. 74 (1972), 233-254.

[21] P. Das, Note on some applications of semi-open sets, Progress of Mathematics 7 (1973), 33-44.

[22] G. Di Maio, S-closed spaces, S-sets and S-continuous functions, Atti Accad. Sci. Torino 118 (1984), 125-134.

[23] G. Di Maio and T. Noiri, On s-closed spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 18 (3) (1987), 226-233.

[24] C. Dorsett, Semi-T_2, semi-R_1 and semi-R_0 topological spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 92 (1978), 143-150.

[25] C. Dorsett, Semi compactness, semi separation axioms, and product spaces, Bull. Malaysian Math. Soc. (2) 4 (1981), 21-28.

[26] C. Dorsett, Semi convergence and semi compactnes, Indian J. Mech. Math. 19 (1) (1982), 11-17.

[27] C. Dorsett, Semi-regular spaces, Soochow J. Math. 8 (1982), 45-53.

[28] C. Dorsett, Characterizations of spaces using convergence and semi convergence of filters, Indian J. Math. 26 (1984), 75-84.

[29] C. Dorsett, Semi topological properties, completely Hausdorff spaces and generalized completely Hausdorff spaces, Bull. Malaysian Math. Soc. (9) 2 (1986), 71-80.

[30] W. Dunham, $T_{1/2}$-spaces, Kyungpook Math. J. 17 (2) (1977), 161-169.

[31] S.N. El-Deeb, I.A. Hasanein, A.S. Mashhour and T. Noiri, On P-regular spaces, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie 27 (75) (1983), 311-315.

[32] A.G. El′kin, Ultrafilters and undecomposable spaces, Vestnik Mosk. Univ. Mat. 24, 5 (1969), 51-56.

[33] R. Engelking, General Topology, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa 1977.

[34] U.V. Fatteh, Darshan Singh, A note on D-spaces, Bull. Calcutta Math. Soc. 75 (1983), 363-368.

[35] G. Freud, Ein Beitrag zu dem Satze von Cantor und Bendixon, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 9 (1958), 333-336.

[36] M. Ganster, Preopen sets and resolvable spaces, Kyungpook Math. J. 27 (2) (1987), 135-143.

[37] M. Ganster, Some remarks on strongly compact spaces and semi compact spaces, submitted.

[38] M. Ganster, A note on strongly Lindelöf spaces, submitted.

[39] M. Ganster, M. Mršević and I.L. Reilly, On a question of Noiri, Q and A in General Topology 6 (1988), 125-127.

[40] M. Ganster and I.L. Reilly, On some strong forms of paracompactness, Q and A in General Topology 5 (1987), 303-310.

[41] M. Ganster and I.L. Reilly, A decomposition of continuity, to appear.

[42] M. Ganster and I.L. Reilly, Locally closed sets and LC-continuous functions, submitted.

[43] M. Ganster and I.L. Reilly, A note on S-closed spaces, submitted.

[44] T.R. Hamlett, Semi-continuous functions, Math. Chronicle 4 (1976), 101-107.

[45] T.R. Hamlett, The property of being a Baire space is semi-topological, Math. Chronicle 5 (1977), 166-167.

[46] F. Hanna and C. Dorsett, Semi compactness, Q and A in General Topology 2 (1984), 38-47.

[47] E. Hewitt, A problem of set theoretic topology, Duke Math. J. 10 (1943), 309-333.

[48] T. Husain, Almost continuous mappings, Prace Mat. 10 (1966), 1-7.

[49] Y. Isomichi, New concepts in the theory of topological space - supercondensed set, subcondensed set and condensed set, Pacific J. Math. 38 (1971), 657-668.

[50] D.S. Janković, On topological properties defined by semiregularization topologies, Bull. Un. Mat. Ital. A (6) 2 (1983), 373-380.

[51] D.S. Janković, On locally irreducible spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 97 (1983), 59-72.

[52] D.S. Janković, A note on mappings of extremally disconnected spaces, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 46 (1985), 83-92.

[53] D.S. Janković and I.L. Reilly, On semi-separation properties, Indian J. Pure Appl. Math. 16 (1985), 957-964.

[54] D.S. Janković, I.L. Reilly and M.K. Vamanamurthy, On strongly compact topological spaces, to appear.

[55] N. Levine, A decomposition of continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthley 68 (1961), 44-46.

[56] N. Levine, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthley 70 (1963), 36-41.

[57] G. Lo Faro, Su alcune proprietà degli insiemi α-aperti, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 29 (1980), 242-250.

[58] S.N. Maheshwari and R. Prasad, On s-regular spaces, Glasnik Mat. 10 (30) (1970), 347-350.

[59] S.N. Maheshwari and R. Prasad, Some new separation axioms, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 89 (1975), 395-402.

[60] S.N. Maheshwari and U. Tapi, On feebly R_o spaces, Ann. Univ. Timisoara S. Sti. Mat. 16 (1978), 173-177.

[61] S.N. Maheshwari and S.S. Thakur, On α-irresolute mappings, Tamkang J. Math. 11 (1980), 209-214.

[62] S.N. Maheshwari and S.S. Thakur, On α-compact spaces, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 13 (1985), 341-347.

[63] S.N. Maheshwari and S.S. Thakur, α-continuous mappings, Jour. of Indian Academy of Math. 7 (1985), 46-50.

[64]. A.S. Mashhour, M.E. Abd El-Monsef and S.N. El-Deeb, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt 53 (1982), 47-53.

[65] A.S. Mashhour, I.A. Hasanein and S.N. El-Deeb, A note on semi-continuity and precontinuity, Indian J. Pure Appl. Math. 13 (1982), 1119-1123.

[66] A.S. Mashhour, I.A. Hasanein and S.N. El-Deeb, α-continuous and α-open mappings, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 41 (1983), 213-218.

[67] A.S. Mashhour, M.E. Abd El-Monsef and I.A. Hasanein, On pretopological spaces, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie 28 (76) (1984), 39-45.

[68] A.S. Mashhour, M.E. Abd El-Monsef, I.A. Hasanein and T. Noiri, Strongly compact spaces, Delta J. Sci. 8 (1) (1984), 30-46.

[69] O.Njåstad, On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math. 15 (1965), 961-970.

[70] T. Noiri, On semi-continuous mappings, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 54 (1973), 210-214.

[71] T. Noiri, A generalization of closed mappings, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 54 (1973), 412-415.

[72] T. Noiri, A note on semi-continuous mappings, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 55 (1973), 400-403.

[73] T. Noiri, Remarks on semi-open mappings, Bull. Calcutta Math. Soc. 65 (1973), 197-201.

[74] T. Noiri, On weakly continuous mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 46 (1974), 120-124.

[75] T. Noiri, On semi-T_2 spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 90 (1976), 215-220.

[76] T. Noiri, On S-closed spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 91 (1977), 189-194.

[77] T. Noiri, On S-closed subspaces, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 64 (1978), 157-162.

[78] T. Noiri, A note on s-regular spaces, Glasnik Mat. 13 (33) (1978), 107-110.

[79] T. Noiri, Semi-continuity and weak-continuity, Czech. Math. J. 31 (106) (1981), 314-321.

[80] T. Noiri, A function which preserves connected spaces, Časopis Pěst. Mat. 107 (1982), 393-396.

[81] T. Noiri, Almost-open functions, Indian J. Pure Appl. Math. 25 (1983), 73-79.

[82] T. Noiri, On α-continuous functions, Časopis Pěst. Mat. 109 (1984), 118-126.

[83] T. Noiri, Weakly α-continuous functions, Internat. J. Math. and Math. Sci. 10 (1987), 483-490.

[84] T. Noiri and B. Ahmad, A note on semi-open functions, Mathematics Seminar Notes 10 (1982), 437-441.

[85] T. Noiri and B. Ahmad, On semi-weakly continuous mappings, Kyungpook Math. J. 25 (2) (1985), 123-126.

[86] T. Noiri, A.S. Mashhour, I.A. Hasanein and S.N. El-Deeb, A note on S-closed subspaces, Mathematics Seminar Notes 10 (1982), 431-435.

[87] V. Pipitone - G. Russo, Spazi semiconnessi e spazi semi-aperti, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 24 (1975), 273-285.

[88] R. Prasad and R.S. Yadav, On s-compact spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 24 (1982), 209-214.

[89] I.L. Reilly and M.K. Vamanamurthy, On α-continuity in topological spaces, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 45 (1985), 27-32.

[90] I.L. Reilly and M.K. Vamanamurthy, On α-sets in topological spaces, Tamkang J. Math. 16 (1985), 7-11.

[91] I.L. Reilly and M.K. Vamanamurthy, On some questions concerning preopen sets, to appear.

[92] D. Sivaraj, Semi-topological properties, Mat. Vesnik 35 (1983), 163-169.

[93] T. Thompson, S-closed spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 60 (1976), 335-338.

[94] T. Thompson, Semi-continuous and irresolute images of S-closed spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977), 359-362.

[95] T. Thompson, Characterizations of irreducible spaces, Kyungpook Math. J. 21 (1981), 191-194.

[96] J. Tong, A decomposition of continuity, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 48 (1986), 11-15.