Beitrag

zur

Theorie der Betoneisenträger.

Von

Dr. techn. M. MILANKOVITCH.

WIEN 1905.
VERLAG VON LEHMANN & WENTZEL
(PAUL KREBS)
I. Kärntnerstraße Nr. 30.

53583
ЦЕНТРАЛНА БИБЛИОТЕКА
С. А. Н.
БЕОГРАД

In der Fachwelt der Betoneisen-Konstruktionen können zwei scharf von einander getrennte Schulen unterschieden werden. Die eine umfaßt die Anhänger der doppelten Armierung der Betoneisenträger (Coignet. Pavin de Lafarge, Chaudy, Piketty, Lefort, Bonna, Luipold, Visintini etc.), die andere umfaßt jene Konstrukteure, welche die doppelte Armierung als unrationell vermeiden (Hennebiquc, Sanders, Ast etc.). Verschwindend klein ist die Anzahl der Konstrukteure, die sich der einen und der anderen Art der Armierung bedienen.

Wir wollen diese sonderbare Erscheinung zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen wählen und vor allem die Frage erörtern: Was die Ursache dieser sonderbaren Erscheinung sei und welche von den beiden erwähnten Schulen die richtigere ist?

Es sind vorwiegend Gründe rein praktischer Natur, welche die scharfe Grenze zwischen den beiden Schulen gezogen haben. Die Betoneisen-Konstruktionen sind noch nicht Gemeingut und die Konstrukteure sind auf ihre Patente angewiesen, mit welchen sie in allen Fällen auszukommen trachten. Auch spielen verschiedene Umstände, welche bei der Ausführung der Betoneisen-Konstruktionen zu berücksichtigen sind, bei der Wahl der Armierungsweise eine große Rolle. In den Gegenden, wo das für die Schalung notwendige Holz leicht zu beschaffen ist, werden Monolith-Konstruktionen — solche, wo die ganze Konstruktion in einem betoniert wird — mit Vorliebe angewendet; in den Gegenden, wo das Schalungsholz schwer zu beschaffen ist, werden einige Konstruktionsteile schon in fertigem Zustande versetzt, um das Schalungsholz zu ersetzen und zu ersparen. Daß bei diesen verschiedenen Herstellungsarten die Armaturen auch verschieden sein müssen, ist selbstverständlich.

der doppelt armierten Träger sind nur oberflächlich behandelt worden, so daß in der Praxis, da derselben die Anhaltspunkte fehlen, welche ihr die Theorie verschaffen sollte, die größte Willkürlichkeit herrscht.

Über die wichtigste Frage aus der Baumechanik der Betoneisen-Konstruktionen, über die Frage nämlich, wie der doppelt armierte Träger zu armieren ist, d. h. in welchem Verhältnis die Armatur der Druckseite und die Armatur der Zugseite zu einander stehen sollen, herrschen noch die grundverschiedensten Anschauungen.

Während nach der Ansicht von Lefort die Armaturen der Druck- und Zugseite einander gleich sein sollen, ist Coignet der Ansicht, daß die Druckarmatur die Hälfte der Zugarmatur betragen soll. Andere Fachleute befürworten dagegen eine noch schwächere Armierung der Druckseite.

Wenn man die Voraussetzungen, auf welchen sich die nunmehr fast allgemein akzeptierte Theorie der einfach armierten Betoneisenträger gründet, auch für den doppelt armierten Betoneisenträger als richtig voraussetzt — wie dies auch die meisten Betoneisentheoretiker (Christophe, v. Emperger, Koenen etc.) getan haben — so ist das Problem der Armierung des doppelt armierten Betoneisenträgers ein mathematisch determiniertes und kann demnach auch gelöst werden.

Wir wollen uns in dieser Abhandlung mit der Lösung dieses Problems befassen, welches wir hier vom rein theoretischen Standpunkte betrachten wollen. Über die Anwendung der hier gegebenen Lösung dieses Problemes in der Praxis und über die praktischen Rücksichten, die dabei in Betracht zu ziehen sind, wollen wir an einer anderen Stelle berichten.

Wir werden unsere Untersuchungen nur auf Betoneisenträger von rechteckigem Querschnitt ausdehnen, da die in der Praxis angewendeten Betoneisenträger fast immer von rechteckigem Querschnitte sind, da auch bei Monolith-Konstruktionen, wo der Träger eigentlich einen **T**-förmigen Querschnitt besitzt, die Platte sich, wie wir dies früher gezeigt haben, an der Zugseite des Trägers befindet, wo sie wirkungslos ist, so daß der zur Geltung kommende Trägerquerschnitt auch hier rechteckig ist.

Die Abmessungen des Betonträgers sind gewöhnlich durch praktische Rücksichten gegeben, deshalb nehmen wir an, das der Betonquerschnitt des Trägers gegeben ist, und daß man die Armaturen so zu bestimmen hat, daß der Betoneisenträger ein gegebenes äußeres Moment aufzunehmen imstande ist, dabei aber möglichst ökonomisch armiert ist.

Wie wir schon früher gesagt haben, hat die Armatur der Zugseite die Aufgabe, die in der Zughälfte des Trägerquerschnittes auftretenden Zugspannungen aufzunehmen. Die Zugarmatur muß deshalb so dimensioniert werden, daß sie die Zugspannungen aufzunehmen imstande ist, da sie aber möglichst ökonomisch dimensioniert sein soll, so soll sie diese Forderung gerade noch erfüllen, d. h. die Zugarmatur ist so zu dimensionieren, daß für das gegebene äußere Moment ihre zulässige Zuginanspruchnahme vollkommen ausgenützt ist.

Die Druckarmatur ist dort notwendig, wo der nutzbare Druckquerschnitt des Betons so klein ist, daß ohne eine Armierung desselben, die zulässige Druckinanspruchnahme des Betons überschritten wird. Die Druckarmatur hat demnach die Aufgabe, den Betondruckquerschnitt zu entlasten und man hat sie aus ökonomischen Rücksichten so zu dimensionieren, daß sie die ihr zufallende Aufgabe gerade noch erfüllt, d. h. die Druckarmatur ist so zu dimensionieren, daß für das gegebene äußere Moment die zulässige Druckinanspruchnahme des Betons voll ausgenützt wird.

Eine vollständige Ausnützung der Druckarmatur ist nicht möglich, wie wir dies später zeigen werden.

Demnach formuliert sich das zu behandelnde Problem wie folgt:

Ein Betonträger von gegebenem rechteckigen Querschnitt ist so zu armieren, daß für ein gegebenes äußeres Angriffsmoment die Zugspannung des Eisens und die Druckspannung des Betons die entsprechenden zulässigen Inanspruchnahmen erreichen.

Die Voraussetzungen, auf welchen sich die hier entwickelte Theorie gründet, sollen hier näher präzisiert werden.

Diese Voraussetzungen sind:

1. Der Beton nimmt keine Zugspannungen auf.

2. Die zur Trägerachse senkrechten ebenen Querschnitte bleiben nach der Deformation des Trägers eben.

3. Die Elastizitätsmoduli E_e und E_b des Eisens bezw. des Betons sind in den gegebenen Spannungsgrenzen konstante Zahlen.

4. Das Eisen gleitet nicht im Betonkörper.

5. Es sind im Träger keine Anfangsspannungen vorhanden.

Der Untersuchung legen wir noch folgende Bezeichnungen zugrunde (siehe Fig. 1):

Es bezeichne:

b die Breite des rechteckigen Betonträgerquerschnittes;

h die Höhe desselben;

a die Entfernung des Schwerpunktes der Zugarmatur von der Unterkante des Trägers;

a' die Entfernung des Schwerpunktes der Druckarmatur von der Oberkante des Trägers.

Die Größen b, h, a und a' sind als gegeben zu betrachten und es bezeichne noch:

$h' = h - a$ die nutzbare Höhe des Betonträgers;

$a' = \mu . h'$, so daß auch μ eine feste gegebene Zahl bedeutet.

Es bezeichne ferner:

f_e den zu bestimmenden Querschnitt der Zugarmatur;

f_e' den zu bestimmenden Querschnitt der Druckarmatur;

$n = \frac{E_e}{E_b}$ die Verhältniszahl der Elastizitätsmoduli des Eisens und des Betons, welche Zahl nach der Voraussetzung 3) eine konstante Zahl ist;

M das auf den Querschnitt $A\,B$ wirkende äußere Angriffmoment;

σ_b die an dem oberen Rande des Trägerquerschnittes auftretende Maximaldruckspannung des Betons;

σ_e die Zugspannung der unteren Armatur, welche wir wegen der Kleinheit des Armaturquerschnittes als eine im ganzen Armaturquerschnitt gleichmäßige voraussetzen.

σ_e' die Druckspannung der oberen Armatur, welche wir im ganzen Armaturquerschnitte als eine gleichmäßige voraussetzen;

s_e die zulässige Zugbeanspruchung des Eisens;

s_b die zulässige Druckbeanspruchung des Betons.

Es stelle die Gerade $N\,N'$ die neutrale Achse des Trägerquerschnittes, welche, da wir nur den Fall der geraden Biegung in Betracht ziehen, eine horizontale Gerade ist und es bezeichne

x den Abstand der neutralen Achse von der Oberkante des Trägerquerschnittes.

Auf die Schwächung des Betondruckquerschnittes durch die Druckarmatur soll keine Rücksicht genommen werden, da ja der Querschnitt der Druckarmatur im Vergleiche zum Betondruckquerschnitt immer ein kleiner ist.

Nach der Voraussetzung 2) bleibt der zur Trägerachse senkrechte ebene Querschnitt $A\,B$, nach erfolgter Deformation in die Lage $A'\,B'$ kommend, eben.

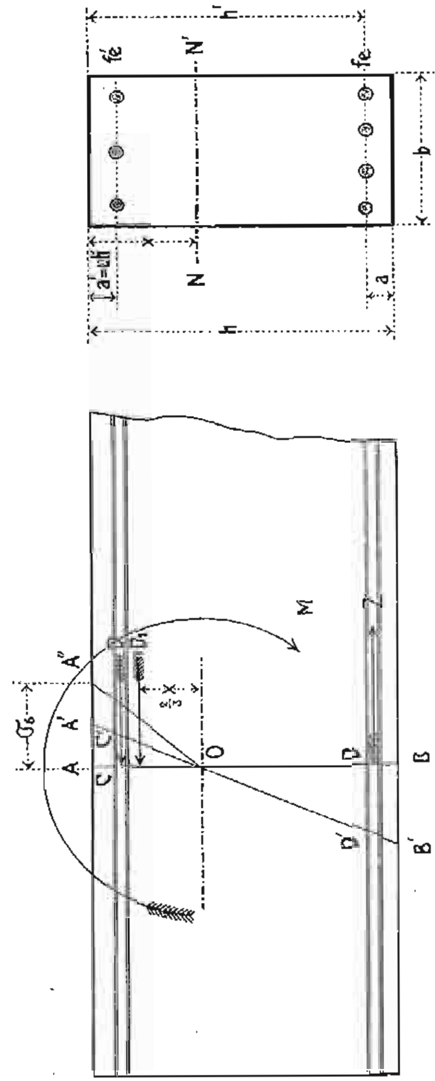

FIG. 1

Deshalb bestehen die Beziehungen:

$$\frac{D\,D'}{A\,A'} = \frac{O\,D}{O\,A} = \frac{h' - x}{x}$$

$$\frac{C\,C'}{A\,A'} = \frac{O\,C}{O\,A} = \frac{x - \mu\,h'}{x}$$

$D\,D'$, $C\,C'$ und $A\,A'$ sind die gleichzeitigen Dehnungen (bezw. Verkürzungen) der Zugarmatur, der Druckarmatur und der Randfaser des Betondruckquerschnittes, und deshalb folgt aus der Voraussetzung 3):

$$\frac{D\,D'}{A\,A'} = \frac{\sigma_e}{E_e} : \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} \cdot \frac{E_b}{E_e} = \frac{1}{n}\,\frac{\sigma_e}{\sigma_b}$$

$$\frac{C\,C'}{A\,A'} = \frac{\sigma_e'}{E_e} : \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_e'}{\sigma_b} \cdot \frac{E_b}{E_e} = \frac{1}{n}\,\frac{\sigma_e'}{\sigma_b}$$

Es bestehen demnach die Gleichungen:

$$\sigma_e = n\,\frac{h' - x}{x}\,\sigma_b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1),$$

$$\sigma_e' = n\,\frac{x - \mu\,h'}{x}\,\sigma_b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2).$$

Die im Querschnitte $A\,B$ wirkenden inneren Kräfte sind:

1. Die Resultante Z der Zugspannungen der Zugarmatur

$$Z = f_e \cdot \sigma_e$$

wirkend in der Schichte $D'\,D$.

2. Die Resultante D der Druckspannungen der Druckarmatur

$$D = f_e'\,\sigma_e'$$

wirkend in der Schichte $C'\,C$.

3. Die Resultante D der Druckspannungen des Betondruckquerschnittes. Da die Spannungen den Verkürzungen proportional sind, so sind diese Druckspannungen in der neutralen Schichte gleich Null und wachsen geradlinig bis zum oberen Rande, wo sie die Größe σ_b erreichen, deshalb ist ihre Resultante gleich

$$D_1 = \frac{1}{2}\,b\,x\,\sigma_b$$

und wirkt in der Höhe des Schwerpunktes des Dreieckes $O\,A\,A''$, ist also um $\frac{2}{3}\,x$ von der neutralen Schicht entfernt.

Nachdem diese drei inneren Kräfte mit dem äußeren Angriffsmoment das Gleichgewicht halten sollen, so muß ihre geometrische Summe gleich Null sein, das heißt:

$$Z - D - D_1 = 0$$

oder

$$f_e\,\sigma_e - f_e'\,\sigma_e' - \frac{1}{2}\,b\,x\,\sigma_b = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad 3).$$

Außerdem muß die Summe der statischen Momente der inneren Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes ihrer Kraftebene gleich dem äußeren Angriffsmoment M sein. Wählen wir den Punkt 0 zum Momentenpunkt, so drückt sich diese Forderung mathematisch aus durch:

$$M = Z\,(h' - x) + D\,(x - \mu\,h') + D_1\,\frac{2}{3}\,x$$

oder

$$M = f_e\,\sigma_e\,(h' - x) + f_e'\,\sigma_e'\,(x - \mu\,h') + \frac{1}{3}\,b\,x^2\,\sigma_b \,. \quad 4).$$

Wir haben uns die Aufgabe gestellt, den Träger derart zu dimensionieren, daß die zulässige Zuginanspruchnahme des Eisens und die zulässige Druckinanspruchnahme des Betons voll ausgenützt werden, d. h. es soll:

$$\sigma_e = s_e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5),$$

$$\sigma_b = s_b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6).$$

Durch Einsetzung der Werte σ_e und σ_b aus den Gleichungen 5) und 6) in die Gleichungen 1) und 2) folgt

$$s_e = n\,\frac{h' - x}{x}\,s_b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7),$$

$$\sigma_e' = n\,\frac{x - \mu\,h'}{x}\,s_b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8).$$

Aus der Gleichung 8) folgt:

$$\sigma_e' < n\,s_b$$

d. h. die Druckspannung der Druckarmatur ist kleiner als die n-fache zulässige Druckinanspruchnahme des Betons. Nachdem für die in der Praxis zulässigen Werte die zulässige Druckinanspruchnahme des Eisens größer ist als die n-fache zulässige Druckinanspruchnahme des Betons, so folgt daraus, daß die Druckarmatur nie bis zur zulässigen Inanspruchnahme beansprucht werden, also nie vollkommen ausgenützt werden kann.

Aus der Gleichung 7) folgt:

$$x = \frac{n\,s_b}{s_e + n\,s_b}\,h' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9).$$

Der Ausdruck $\frac{n\,s_b}{s_e + n\,s_b}$ ist eine konstante Zahl und wenn wir sie mit ν bezeichnen, d. h.:

$$\frac{n\,s_b}{s_e + n\,s_b} = \nu \quad \ldots\ldots \quad 10),$$

so ist

$$x = \nu\,h' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11),$$

d. h.:

Bei dem auf reine Biegung beanspruchten doppelt armierten rechteckigen Betoneisenträger, welcher so armiert ist, daß für ein gegebenes äußeres Biegungsmoment die zulässige Zugbeanspruchung des Eisens und die zulässige Druckbeanspruchung des Betons voll ausgenützt werden, ist das Verhältnis der Entfernung x der neutralen Achse von der Druckkante des Trägers zur Nutzhöhe h' des Trägers eine konstante Zahl ν, die nur von den erwähnten zulässigen Inanspruchnahmen des Eisens und des Betons und deren Elastizitätsmoduli abhängig und vollkommen unabhängig ist von den Abmessungen des Trägers und dem Biegungsmomente desselben.

Schreiten wir nun zur Bestimmung der Querschnitte der Armaturen.

Mit Rücksicht auf die Gleichung 11) lauten die Gleichungen 7) und 8):

$$s_e = n\,\frac{1-\nu}{\nu}\,s_b \quad \ldots\ldots \quad 12),$$

$$\sigma_e' = n\,\frac{\nu-\mu}{\nu}\,s_b \quad \ldots\ldots \quad 13).$$

Werden die nun gewonnenen Werte für x, σ_e, σ_e' aus den Gleichungen 11), 5), 12) und 13) in die Gleichungen 3) und 4) eingesetzt, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$n\,(1-\nu)\,f_e - n\,(\nu-\mu)\,f_e' = \frac{1}{2}\,\nu^2\,b\,h' \quad \ldots \quad 14),$$

$$n\,\frac{(1-\nu)^2}{\nu}\,s_b\,h'\,f_e + n\,\frac{(\nu-\mu)^2}{\nu}\,s_b\,h'\,f_e' =$$

$$= M - \frac{1}{3}\,\nu^2\,s_b\,b\,h'^2 \quad \ldots\ldots \quad 15).$$

Aus diesen zwei Gleichungen können nun die Querschnitte f_e und f_e' bestimmt werden.

Die Nenner-Determinante des obigen Gleichungssystemes ist:

$$N = \begin{vmatrix} n\,(1-\nu) & -n\,(\nu-\mu) \\ n\,\frac{(1-\nu)^2}{\nu}\,s_b\,h' & n\,\frac{(\nu-\mu)^2}{\nu}\,s_b\,h' \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{n^2}{\nu}\,(1-\nu)\,(\nu-\mu)\,s_b\,h' \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1-\nu & \nu-\mu \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{n^3}{\nu}\,(1-\nu)\,(1-\mu)\,(\nu-\mu)\,s_b\,h'.$$

Die Zähler-Determinante für f_e ist:

$$Z_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\,\nu^2\,b\,h' & -n\,(\nu-\mu) \\ M - \frac{1}{3}\,\nu^2\,s_b\,b\,h'^2 & n\,\frac{(\nu-\mu)^2}{\nu}\,s_b\,h' \end{vmatrix} =$$

$$= n\,(\nu-\mu) \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\,\nu\,b\,h' & -1 \\ M - \frac{1}{3}\,\nu^2\,s_b\,b\,h'^2 & \frac{\nu-\mu}{\nu}\,s_b\,h' \end{vmatrix} =$$

$$= n\,(\nu-\mu)\left[M + \frac{1}{6}\,\nu\,(\nu-3\,\mu)\,s_b\,b\,h'^2\right].$$

Die Zähler-Determinante für f_e' ist:

$$Z_2 = \begin{vmatrix} n\,(1-\nu) & \frac{1}{2}\,\nu^2\,b\,h' \\ n\,\frac{(1-\nu)^2}{\nu}\,s_b\,h' & M - \frac{1}{3}\,\nu^2\,s_b\,h'^2 \end{vmatrix} =$$

$$= n\,(1-\nu) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}\,\nu^2\,b\,h' \\ \frac{1-\nu}{\nu}\,s_b\,h' & M - \frac{1}{3}\,\nu^2\,s_b\,b\,h'^2 \end{vmatrix} =$$

$$= n\,(1-\nu)\left[M - \frac{1}{6}\,\nu\,(3-\nu)\,s_b\,b\,h'^2\right],$$

demnach lauten die Ausdrücke für f_e und f_e':

$$f_e = \frac{\nu\left[M + \frac{1}{6}\,\nu\,(\nu - 3\,\mu)\,s_b\,b\,h'^2\right]}{n\,(1-\nu)\,(1-\mu)\,s_b\,h'} \quad . \quad . \quad 16),$$

$$f_e' = \frac{\nu\left[M - \frac{1}{6}\,\nu\,(3 - \nu)\,s_b\,b\,h'^2\right]}{n\,(1-\mu)\,(\nu-\mu)\,s_b\,h'} \quad . \quad . \quad . \quad 17).$$

Diese Gleichungen geben direkt die Querschnitte der beiden Armaturen an und lösen das gestellte Problem.

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt auch die sehr interessante Beziehung:

Bei dem auf reine Biegung beanspruchten doppelt armierten rechteckigen Betoneisenträger, welcher so armiert ist, daß für ein gegebenes äußeres Biegungsmoment die zulässige Zugbeanspruchung des Eisens und die zulässige Druckbeanspruchung des Betons voll ausgenützt werden, sind die Querschnitte der Armaturen lineare Funktionen des äußeren Biegungsmomentes.

Hat man demnach für einen Betoneisenbalken vom gegebenen Querschnitt die Armaturen für zwei verschiedene Biegungsmomente bestimmt, so sind damit die Armaturen für alle Biegungsmomente gegeben. Denn trägt man auf einem orthogonalen Koordinatensystem auf der Abszissenachse die Biegungsmomente auf, auf den entsprechenden Ordinaten die bezüglichen Querschnitte der Zug- und der Druckarmatur, so liegen die Endpunkte dieser Ordinaten auf zwei Geraden, welche wir die konjugierten Armaturlinien nennen wollen. Bestimmt man also von jeder dieser Geraden zwei Punkte, so sind damit diese Geraden gegeben.

Diese konjugierten Armaturlinien geben ein sehr anschauliches Bild über die Art und Weise, wie der Träger armiert werden soll.

Es stellen uns (Fig. 2) die beiden Geraden F_e und F_e' die konjugierten Armaturlinien für einen gegebenen Trägerquerschnitt dar, und zwar sei F_e die Zugarmaturlinie und F_e' die Druckarmaturlinie, das heißt ihre Ordinaten geben die Querschnitte der Armaturen an.

Die beiden Geraden sind in jener gegenseitigen Lage in der Figur eingetragen, wie sie sich für die in der Praxis vorgeschriebenen Werte der zulässigen Inanspruchnahmen und der Elastizitätsmoduli ergeben: Der Schnittpunkt der beiden Geraden liegt über der Abszissenachse und bis zu diesem Punkte entsprechen der Zugarmaturlinie größere Ordinaten als der Druckarmaturlinie.

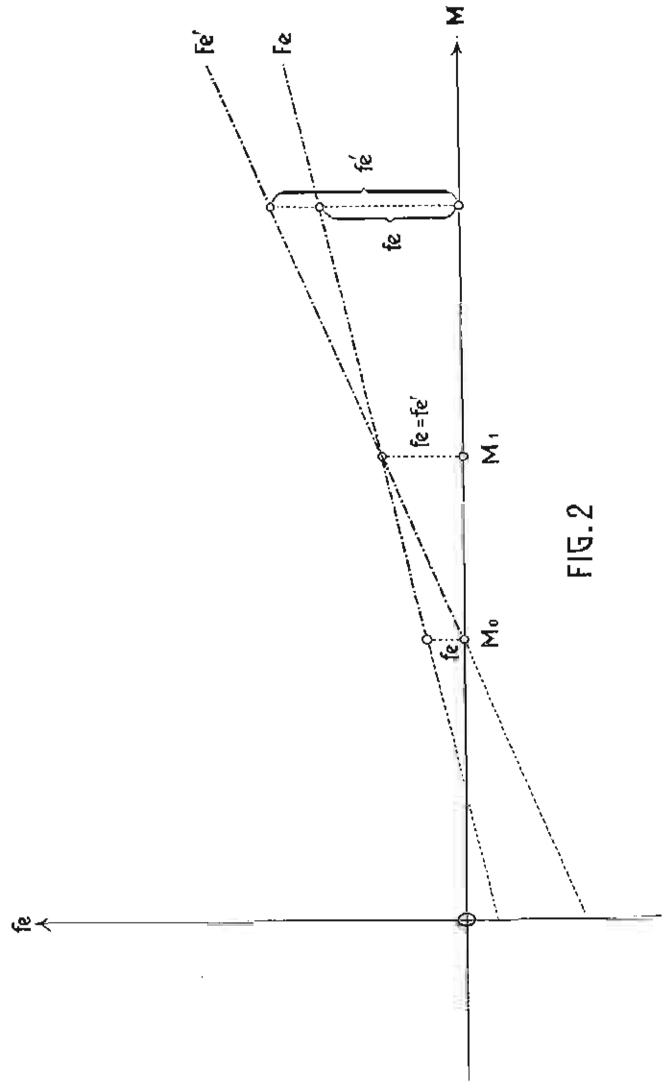

FIG. 2

Diese konjugierten Armaturlinien stellen die vollständige Lösung des Problems der doppelten Armierung dar.

Aus denselben ist zu ersehen, daß bis zu einem Biegungsmomente $\boldsymbol{M}_0$ eine doppelte Armierung des Trägers überflüssig ist. Für das Biegungsmoment $\boldsymbol{M}_0$ ist auch nur noch eine einfache Armierung notwendig.

Das Moment $\boldsymbol{M}_0$ bestimmt sich, indem man in der Gleichung 17) setzt:

$$f_e' = 0,$$

d. h.

$$M_0 = \frac{1}{6} \nu (3 - \nu)\, s_b\, b\, h'^2 \quad \ldots \quad 18).$$

Für Biegungsmomente, welche größer sind als $\boldsymbol{M}_0$, muß der Träger doppelt armiert werden. Die Armaturquerschnitte sollen sich verhalten wie die Ordinaten der konjugierten Armaturlinien.

Für ein Biegungsmoment M_1 sind die Armaturen einander gleich und nur für dieses Biegungsmoment ist die Anwendung **symmetrischer Armaturen**, wie sie **Lefort** vorschlägt, zutreffend.

Das Moment M_1 wird bestimmt aus der Gleichung

$$f_e = f_e',$$

d. h. mit Rücksicht auf die Gleichungen 16) und 17)

$$\frac{M_1 + \frac{1}{6} \nu (\nu - 3\mu)\, s_b\, b\, h'^2}{1 - \nu} = \frac{M_1 - \frac{1}{6} \nu (3 - \nu)\, s_b\, b\, h'^2}{\nu - \mu},$$

woraus

$$M_1 = \frac{1}{6} \nu \frac{(\nu - \mu)(\nu - 3\mu) + (1 - \nu)(3 - \nu)}{(1 - 2\nu + \mu)}\, s_b\, b\, h'^2 \quad . \quad 19).$$

Für Biegungsmomente, welche größer sind als M_1, muß die Druckseite des Trägers stärker armiert werden als die Zugseite.

Bis jetzt haben wir den Fall behandelt, wo der Querschnitt des Betonträgers, d. h. seine Breite $\boldsymbol{b}$ und seine Höhe $\boldsymbol{h}$ gegeben waren.

Jetzt wollen wir zum allgemeinen Fall übergehen.

Denkt man sich die Armaturen des Trägers über seine ganze Querschnittsbreite gleichmäßig verteilt, so bezeichnen

wir mit $\frac{f_e}{b}$ und $\frac{f_e'}{b}$ die spezifischen Armaturen des Trägers pro Längeneinheit der Breite. Es ist einleuchtend, daß, wenn man die Trägerbreite vergrößert, unter Beibehaltung derselben spezifischen Armaturen, daß man in demselben Verhältnisse auch die Tragfähigkeit des Trägers vergrößert hat.

Hat man demnach für einen Träger von der Breite $\boldsymbol{b}$ und der Höhe $\boldsymbol{h}$, die dem Biegungsmomente $\boldsymbol{M}$ entsprechenden Armaturen f_e und f_e' bestimmt, so entsprechen die Armaturen $b_1 \frac{f_e}{b}$ und $b_1 \frac{f_e'}{b}$ dem Träger von derselben Höhe, von der Breite $\boldsymbol{b}_1$ und für ein Biegungsmoment $\frac{b_1}{b} M$.

Demnach lassen sich, wenn die Armaturlinien für einen Trägerquerschnitt bestimmt sind, die Armaturlinien für alle Trägerquerschnitte mit derselben Höhe leicht bestimmen.

Nun nehmen wir die Breite b des Trägerquerschnittes als fest an und seine Höhe $\boldsymbol{h}$ als variabel, untersuchen also den Fall, wie sich die Armaturenquerschnitte ändern, wenn sich die Höhe des Trägers ändert.

Bezeichnet man die Ordinaten f_e der Zugarmaturlinie mit y, die entsprechenden Abszissen $\boldsymbol{M}$ mit x und setzt noch voraus, daß die Druckarmatur immer so gelegt wird, daß μ eine konstante Zahl ist, so kann die Gleichung der Zugarmaturline auch geschrieben werden:

$$y = \frac{x + p_1 h'^2}{q_1 h'} \quad \ldots\ldots \quad 20).$$

wo p_1 und q_1 konstante Zahlen bedeuten.

Suchen wir die Enveloppe dieses Liniensystems, wenn sich $\boldsymbol{h}'$ ändert.

Die Gleichung 20) kann auch geschrieben werden:

$$x - q_1 h' y + p_1 h'^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 21).$$

Durch Differentiation der Gleichung 20) nach dem variablen Parameter h' erhält man die Gleichung:

$$-q_1 y + 2 p_1 h' = 0 \quad \ldots\ldots \quad 22).$$

Durch Elimination von $\boldsymbol{h}'$ aus den Gleichungen 21) und 22) erhält man die Gleichung der Envellope

$$\boldsymbol{y}^2 = \frac{4\,\boldsymbol{p}_1}{\boldsymbol{q}_1^2}\, x \quad \ldots\ldots \quad 23).$$

Ebenso kann die Gleichung der Druckarmaturlinie geschrieben werden

$$y = \frac{x - p_2 h'^2}{q_1 h'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 24).$$

Bei veränderlichem h' umhüllen diese Linien die Envellope:

$$y^2 = -\frac{4 p_2}{q_1^2} x \quad \ldots\ldots\ldots \quad 25).$$

Aus den Gleichungen 23) und 25) folgt demnach:

Die Envellopen der Zugarmaturlinien und der Druckarmaturlinien sind Parabeln, deren Achsen mit der Abszissenachse zusammenfallen, und welche Parabeln die Ordinatenachse berühren.

Diese Ergebnisse, welche die theoretische Lösung des behandelten Problems darstellen, können in der Praxis leicht benützt werden, wo man aber außerdem noch die praktischen Rücksichten nicht außer acht lassen darf.

Wir haben — diese theoretischen Ergebnisse benützend — eine Anzahl von Betoneisen-Konstruktionen ausgeführt und sehr zufriedenstellende Resultate erzielt. Über diese praktischen Ergebnisse wollen wir an einer anderen Stelle berichten.

Verlag von Lehmann & Wentzel (Paul Krebs). — Druck von R. Spies & Co., Wien.