REPETITORIJ

DIFERENCIJALNOGA I INTEGRALNOGA RAČUNA.

SLOŽIO:

PROFESOR Dr. MARIJE KISELJAK.

ZAGREB 1925.

TISAK HRVATSKOG ŠTAMPARSKOG ZAVODA, DIONIČARSKO DRUŠTVO.
CENTRALA: ZAGREB 1925. PODRUŽNICA: OSIJEK

PREDGOVOR.

Godine 1920. izašao je prvi svezak moga „Udžbenika više matematike" pod naslovom: Uvod u višu matematiku (algebarska analiza). Preostalih osam svezaka (koji su već i u čistopisu bili dovršeni) imalo je izaći u kraćim razmacima vremena, no doskora su štamparske cijene naglo poskočile, pa su moji tadanji nakladnici i uz najbolju volju morali da odustanu od nakane, da uz te prilike štampaju tako opsežno djelo.

Štamparske se prilike nisu nikako htjele popraviti, pa sam se morao odreći nade, da bi knjiga mogla biti doštampana. No osjećao sam, da postoji u nas — dakako u užem krugu — potreba takove knjige, a vrlo mi je često takova želja i izravno do znanja stavljena. Došao sam tako na pomisao, da dam knjigu litografirati, no jer bi štampano djelo iznosilo svega oko 1400 stranica velikoga oktava, to bi za litografirano djelo trebalo kakvih 4000 stranica, pa bi onda opet cijena tako velike knjige sprečavala njezinu prodaju i obarala svaku kalkulaciju rentabiliteta, na koji nakladnik ima bezuslovno pravo. Nije mi preostalo drugo, nego da „Udžbenik" sa svim na široko izvedenim dokazima i tumačenjima preradim u „Repetitorij", u kojem su izostavljeni dokazi (a kako ih malo ljudi zaista i čita!), a gdje se polaže glavna važnost na potpunost i korektnost formula, preciznost definicija, ispravnost poučaka i jasnoću uputa za uporabu tih formula, definicija i poučaka. Došavši s gotovim prijedlogom do ravnateljstva Hrvatskoga štamparskoga zavoda u Zagrebu naišao sam na potpuno razumijevanje i na veliku susretljivost, što ovdje vrlo rado ističem, dajući time izražaja svojoj usrdnoj hvali. Štamparski je zavod preuzevši izdanje te knjige učinio veliku uslugu našim studentima tehničarima i filozofima — matematičarima, a i svim drugim licima, koja će knjigu upotrebljavati.

Evo historijata te knjige. Ona nije nikakav torzo, već potpuni, zaokruženi repetitorij velikog kolegija diferencijalnoga i integralnoga računa, o čemu se može svako uvjeriti, pročita li samo „Kazalo". Spomenuti prvi svezak mog „Udžbenika" doseže baš do pred ulaz u diferencijalni račun, pa će svakome dobro doći kao uvod u ovaj moj „Repetitorij". Nadam se, da će taj pokušaj — učinjen bez ikakvih pretenzija — ispuniti bar nekako onu prazninu, koju svi osjećamo.

U Zagrebu, mjeseca juna 1925.

Dr. M. KISELJAK.

KAZALO.

I. POGLAVLJE.

DIFERENCIJALNI RAČUN.

§ 1. *Osnove diferencijalnoga računa.*

§ 2. *Računske primjene derivacija.*

§ 3. *Derivacije i diferencijali funkcija dviju i više varijabla.*

§ 4. *Primjene diferencijalnoga računa na geometriju.*

II. POGLAVLJE.

INTEGRALNI RAČUN.

§ 5. *Neodredjeni integrali.*

§ 6. *Odredjeni integrali.*

§ 7. *Višestruki integrali.*

III. POGLAVLJE.

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE.

I. poglavlje.

Diferencijalni račun.

§ 1. Osnove diferencijalnoga računa.

A. Pojam derivacije. Funkcija $y=f(x)$ neka je u konačnom zatvorenom intervalu jednoznačna (uniformna) i neprekinuta (kontinuirana), dakle i konačna. Neka su ξ i x_1 dvije različite vrijednosti argumenta x, a $\eta=f(\xi)$ i $y_1=f(x_1)$ pripadne vrijednosti varijable y. Diferencija $x_1-\xi=\Delta x$ naziva se prirastom varijable, a diferencija $y_1-\eta=\Delta y$ prirastom funkcije. Kvocijent

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-\eta}{x_1-\xi}=\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi}=\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \qquad (1)$$

naziva se kvocijentom diferencija.

1. definicija: Postoji li kod graničnoga prelaza $\Delta x\to 0$ limes kvocijenta (1), bit će to neka funkcija od ξ, a nazivamo ju

<u>derivacijom</u> <u>funkcije</u> $y=f(x)$ u točki $x=\xi$. Nju označujemo oznakom $f'(\xi)$, dakle je ta definicija izrečena formulom

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}=\lim_{x_1\to\xi}\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \qquad (2)$$

<u>2. definicija</u>: Ima li uniformna kontinuirana funkcija $y=f(x)$ u <u>svakoj</u> točki intervala $a\leq x\leq b$ odredenu konačnu derivaciju, a skup svih tih vrijednosti derivacija tvori neku novu uniformnu funkciju varijable x, koju nazivamo <u>izvedenom</u> <u>funkcijom</u> ili uopće <u>derivacijom</u> funkcije $y=f(x)$, a označujemo je s y' ili $f'(x)$. Dakle je

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}. \qquad (3)$$

<u>1. poučka</u>: Kontinuitet funkcije u nekoj točki potreban je, ali nije dovoljan uvjet za egzistenciju derivacije u toj točki.

To se vidi iz primjera $y=x\cdot\sin\frac{1}{x}$ za $x=0$ ili $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ za $x=0$. Ima pače i kontinuiranih funkcija, koje nemaju derivacije ni u kojoj točki; prvi primjer te vrsti našao je <u>Weierstrass</u> god 1872.

<u>2. poučka</u>: Ima li funkcija $y=f(x)$ u točki $x=\xi$ derivaciju, ona je u toj točki i neprekinuta.

<u>B. Geometrijsko značenje derivacije.</u>

Točkama $M(\xi,\eta)$ i $P(x_1,y_1)$ na <u>krivulji</u> $y=f(x)$ odredena je izvjesna sekanta te krivulje. Označimo li sa σ kut, što ga ona zatvara s osi x, bit će koeficijent smjera te sekante

$$\operatorname{tg}\sigma=\frac{y_1-\eta}{x_1-\xi}=\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (4)$$

Izvesti granični prelaz $\Delta x\to 0$ znači pomaknuti na krivulji točku P <u>neposredno</u> do točke M; granični položaj sekante je pri tome <u>tangenta</u> u točki M. Označimo li sa τ kut, što ga ta tangenta zatvara s osi x imamo:

$$\operatorname{tg}\tau = f'(\xi) \qquad (5)$$

dakle:

<u>3. poučka</u>: Derivacija $f'(\xi)$ u točki $x=\xi$ jednaka je koeficijentu smjera $\operatorname{tg}\tau$ tangente povučene na krivulju $y=f(x)$ u točki s apscisom $x=\xi$.

<u>C. Opća pravila za deriviranje.</u>

<u>4. poučka</u>: Derivacija sume ili diferencije dviju funkcija jednaka je sumi ili diferenciji derivacija tih funkcija, t.j. iz $y=\varphi(x)\pm\psi(x)$ slijedi

$$y'=\varphi'(x)\pm\psi'(x). \qquad (6)$$

<u>5. poučka</u>: Algebarska suma raznih funkcija derivira se član po član, t.j. iz $y=\varrho(x)\pm\sigma(x)\pm\tau(x)\pm\ldots\pm\omega(x)$ slijedi

$$y'=\varrho'(x)\pm\sigma'(x)\pm\tau'(x)\pm\ldots\pm\omega'(x) \qquad (6a)$$

(Peta je poučka samo posvepćenje četvrte)

<u>6. poučka</u>: Produkt $y=\varphi(x).\psi(x)$ derivira se po formuli

$$y'=\psi(x).\varphi'(x)+\varphi(x).\psi'(x) \qquad (7)$$

<u>7. poučka</u>: Derivacija produkta $y=\varrho(x).\sigma(x).\tau(x)\ldots\omega(x)$ dobije se po formuli

$$y'=\varrho'(x).\sigma(x).\tau(x)\ldots\omega(x)+\sigma'(x).\varrho(x).\tau(x)\ldots\omega(x)+\tau'(x).\varrho(x).\sigma(x)\ldots\omega(x)+\ldots+\omega'(x).\varrho(x).\sigma(x)\tau(x)\ldots \qquad (7a)$$

(Ta je poučka samo posvepćenje šeste poučke)

<u>8. poučka</u>: Kvocijent $y=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ derivira se po formuli

$$y'=\frac{\psi(x).\varphi'(x)-\varphi(x).\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}. \qquad (8)$$

<u>9. poučka</u>: Ako je $y=f(u)$ neka funkcija varijable u, koja nije nezavisna varijabla već i sama neka funkcija $u=\varphi(x)$ nezavisne varijable x, nazivamo y <u>složenom</u> funkcijom varijable x, pa ju deriviramo po formuli

$$y'=f'(u).\varphi'(x) \qquad (9)$$

10. poučka: Derivacija funkcije $x=\varphi(y)$, koja je inverzna funkciji $y=f(x)$, jednaka je recipročnoj vrijednosti derivacije $f'(x)$, t.j.

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'\{\varphi(y)\}}. \qquad (10)$$

11. poučka: Funkcijin se konstantni faktor kod deriviranja ne mijenja, t.j. iz $y=a.f(x)$ slijedi $y'=a.f'(x)$.

D. Posebna pravila za deriviranje.

12. poučka: Derivacija makar koje konstante je nula.

13. poučka: Derivacija varijable, po kojoj se derivira, jednaka je jedinici.

14. poučka: Svaka se potencija derivira po formuli:

$$y=x^n \quad ; \quad y'=n\cdot x^{n-1} \qquad (11)$$

15. poučka: Za deriviranje goniometričkih funkcija vrijede formule:

$$\begin{array}{ll} y=\sin x & y'=\cos x \\ y=\cos x & y'=-\sin x \\ y=\operatorname{tg} x & y'=\frac{1}{\cos^2 x} \\ y=\cot x & y'=-\frac{1}{\sin^2 x} \end{array} \qquad (12)$$

16. poučka: Ciklometričke se funkcije deriviraju po formulama:

$$\begin{array}{ll} y=\arcsin x & y'=+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y=\arccos x & y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y=\operatorname{arc\,tg} x & y'=\frac{1}{1+x^2} \\ y=\operatorname{arc\,cot} x & y'=-\frac{1}{1+x^2} \end{array} \qquad (13)$$

17. poučka: Prirodni se logaritam $y=\ln x$ derivira po formuli

$$y'=\frac{1}{x} \qquad (14)$$

a opći logaritam $y=\log_a x$ uzet po makar kojoj bazi a derivira se po formuli

$$y'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e \qquad (14a)$$

18. poučka: Derivacija eksponencijalne funkcije $y=a^x$ jednaka je toj funkciji pomnoženoj s prirodnim logaritmom baze, t.j.

$$y'=a^x\cdot\ln a\,;\qquad(15)$$

posebice za $y=e^x$ imamo $y'=e^x$.

19. poučka: Složena funkcija $y=u^v$, gdje je $u=\varphi(x)$ i $v=\psi(x)$, derivira se po formuli

$$y'=u^v\cdot\left(\frac{vu'}{u}+v'\cdot\ln u\right).\qquad(16)$$

20. poučka: Produkt $y=r^m\cdot s^n\cdot t^p$, gdje su $r=\varphi(x)$, $s=\psi(x)$, $t=\chi(x)$ neke funkcije varijable x, a eksponenti m, n, p makar koje realne konstante, derivira se po formuli

$$y'=r^m\cdot s^n\cdot t^p\left\{m\cdot\frac{r'}{r}+n\cdot\frac{s'}{s}+p\cdot\frac{t'}{t}\right\}\qquad(17)$$

koju dobijemo logaritmičkim deriviranjem.

21. poučka: Za deriviranje hiperboličkih funkcija vrijede formule

$$\begin{array}{ll}
y=\operatorname{sh}x & y'=\operatorname{ch}x\\
y=\operatorname{ch}x & y'=\operatorname{sh}x\\
y=\operatorname{th}x & y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}\\
y=\operatorname{cth}x & y'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2x}
\end{array}\qquad(18)$$

22. poučka: Inverzne se hiperbolične funkcije (area-funkcije) deriviraju po formulama:

$$\begin{array}{ll}
y=\operatorname{ar\,sh}x & y'=+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\
y=\operatorname{ar\,ch}x & y'=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\
y=\operatorname{ar\,th}x & y'=\dfrac{1}{1-x^2},\ (|x|<1)\\
y=\operatorname{ar\,cth}x & y'=\dfrac{1}{1-x^2},\ (|x|>1)
\end{array}\qquad(19)$$

E. Diferencijal i diferencijalni kvocijent.

3. definicija: Za svaku varijablu, koja se neograničeno približava nuli, kažemo,

da postaje beskonačno malena. Kad prirast Δx varijable postaje beskonačno malen, nazivamo ga diferencijalom dx varijable. Dakle su oznake $\Delta x \to 0$ i dx ekvivalentne.

4. definicija: Za svaku varijablu, koja neograničeno raste, kažemo, da postaje beskonačno velika.

5. definicija: Kad prirast Δy funkcije postaje beskonačno malen, nazivamo ga diferencijalom dy funkcije. Kvocijent

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (20)$$

nazivamo diferencijalnim kvocijentom.

23. poučka: Limes kvocijenta diferencija jednak je diferencijalnom kvocijentu, dakle je diferencijalni kvocijent jednak derivaciji, t.j. $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

24. poučka: Diferencijal funkcije jednak je njezinoj derivaciji pomnoženoj sa diferencijalom varijable, t.j.

$$dy = f'(x) . dx \qquad (21)$$

Pripomena. Približna relacija

$$\Delta y \doteq y' . \Delta x \qquad (22)$$

vrlo je korisna kod procjena pogrješaka. Kod toga razlikujemo:

a) apsolutnu pogrješku $|\Delta y|$

b) relativnu pogrješku $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ i

c) percentualnu pogrješku $100 . \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \%$.

F. Rolle-ov teorem i poučka o srednjoj vrijednosti.

25. poučka: Postane li neka funkcija $y = f(x)$, koja ima u svakoj točki intervala $a \le x \le b$ određenu konačnu derivaciju, za vrijednosti $x = a$ i $x = b$ jednaka nuli, postoji neka vrijednost $x = x_0$ između a i b ($a < x_0 < b$), za koju je derivacija jednaka nuli, t.j. $f'(x_0) = 0$. (Rolle, 1690)

26. poučka: Ima li funkcija $f(x)$ određenu konačnu derivaciju u svakoj točki intervala

$a \leqq x \leqq b$, postoji neka vrijednost $x = x_0$ u tom intervalu, za koju je

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (23)$$

To je poučka o srednjoj vrijednosti, a može se pisati i u obliku

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a + \vartheta h) \qquad (23a)$$

gdje je ϑ neki pozitivni pravi razlomak

27. poučka: Neka su $f(x)$ i $\varphi(x)$ funkcije, koje u svakoj točki intervala $a \leqq x \leqq b$ imadu konačne određene derivacije; neka $\varphi(b) - \varphi(a)$ nije jednako nuli, a osim toga neka $\varphi'(x)$ nije jednako nuli ni za koju točku u intervalu od a do b. Uz ta ograničenja vrijedi proširena poučka o srednjoj vrijednosti:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} \qquad (24)$$

gdje je x_0 neka točka iz zadanog intervala.

G. Derivacije višega reda.

6. definicija: Drugu derivaciju ili derivaciju drugoga reda neke u izvjesnomu intervalu od a do b neprekinute jednoznačne funkcije $y = f(x)$, koja ima u tom intervalu neprekinutu jednoznačnu derivaciju $y' = f'(x)$, definiramo, ako uopće postoji, jednadžbom

$$f''(x) = y'' = \frac{d f'(x)}{dx} \qquad (25)$$

Uz iste stege definiramo uopće n-tu derivaciju ili derivaciju n-toga reda jednadžbom

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d f^{(n-1)}(x)}{dx} \qquad (25a)$$

7. definicija: Prirast drugoga reda $\Delta^2 f(x)$ neke funkcije $y = f(x)$ određen je formulom

$$\Delta^2 f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2 f(x + \Delta x) + f(x), \qquad (26)$$

a uopće prirast n-toga reda $\Delta^n f(x)$ formulom

$$\Delta^n f(x) = f(x + n \cdot \Delta x) - \binom{n}{1} f\{x + (n-1)\Delta x\} + \binom{n}{2} f\{x + (n-2)\Delta x\} - + \ldots$$
$$- + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} f(x + \Delta x) + (-1)^n f(x). \qquad (26a)$$

<u>8. definicija</u>: <u>Drugi diferencijal</u> ili <u>diferencijal drugoga reda</u> funkcije $y=f(x)$ definiran je relacijom

$$d^2y=d(dy), \qquad (27)$$

a <u>n-ti diferencijal ili diferencijal n-toga reda</u> relacijom

$$d^ny=d(d^{n-1}y). \qquad (27a)$$

<u>28. poučka</u>: Diferencijal n-toga reda neke funkcije $y=f(x)$ jednak je derivaciji n-toga reda te funkcije pomnoženoj s n-tom potencijom diferencijala varijable x:

$$d^ny=f^{(n)}(x)\cdot dx^n. \qquad (28)$$

Pri tome pišemo dx^n mjesto $(dx)^n$, što valja dobro razlikovati od $d(x^n)=n.x^{n-1}.dx$

<u>9. definicija</u>: Izraz $\frac{d^ny}{dx^n}$ nazivamo <u>n-tim diferencijalnim kvocijentom</u> ili <u>diferencijalnim kvocijentom n-toga reda</u>.

<u>29. poučka</u>: Derivacija n-toga reda neke funkcije jednaka je njezinom diferencijalnom kvocijentu n-toga reda.

<u>30. poučka</u>: Za derivacije višega reda vrijedi ova <u>poučka o srednjoj vrijednosti</u>:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}=f^{(n)}(x+n.\Theta.\Delta x), \qquad (29)$$

gdje je Θ opet pozitivni pravi razlomak, a $\Delta x^n=(\Delta x)^n$

<u>31. poučka</u>: Derivacija n-toga reda je limes kvocijenta diferencija istoga reda t.j.

$$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}. \qquad (30)$$

<u>H. Redovi Taylora i Mac Laurina.</u>

<u>32. poučka</u>: Uniformna funkcija $y=f(x)$ neka ima u nekom intervalu $a\leq x\leq b$ derivacije prvoga, drugoga itd. redom sve do $(n+1)$-oga reda; posljednja derivacija neka

ima za svaku točku intervala odredenu konačnu vrijednost, iz čega svega slijedi, da su $f(x)$ i sve njezine derivacije do uključivo n-toga reda u tom intervalu kontinuirane. Za takovu funkciju vrijedi Taylorov razvoj ili Taylorova (1715) formula:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$
$$\dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + O_n, \qquad (31)$$

gdje je ostatak O_n odredjen izrazom

$$O_n = \frac{h^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-p+1}}{p} \cdot f^{(n+1)}(x+\theta h) \qquad (32)$$

Ovdje nam p znači neki pozitivni cio broj, a θ opći pozitivni pravi razlomak. Taj razvoj vrijedi za svako x i svako $x+h$ koji leže u zadanom intervalu od a do b. Uzmemo li u (32) posebice $p = n+1$ imamo Lagrange-ov oblik ostatka

$$O_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x+\theta h), \qquad (32a)$$

a za $p=1$ dobijemo Cauchy-jev oblik

$$O_n = \frac{h^{n+1}}{n!} \cdot (1-\theta)^n \cdot f^{(n+1)}(x+\theta h). \qquad (32b)$$

33. poučka: Ako uz stege gornje poučke pripada i točka $x=0$ zadanom intervalu, dobijemo Mac Laurinov razvoj ili Mac Laurinovu (1742.) formulu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$
$$\dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + O_n \qquad (33)$$

koja vrijedi za svako x iz intervala od a do b. Pri tome glasi opći oblik ostatka

$$O_n = \frac{x^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-p+1}}{p} \cdot f^{(n+1)}(\theta x), \qquad (34)$$

a posebice po Lagrange-u

$$\mathcal{O}_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\Theta x), \qquad (34a)$$

odnosno po <u>Cauchy-ju</u>

$$\mathcal{O}_n = \frac{x^{n+1}}{n!} \cdot (1-\Theta)^n f^{(n+1)}(\Theta x). \qquad (34b)$$

<u>34. poučka:</u> Ima li zadana funkcija $y=f(x)$ u intervalu od a do b derivacije počevši od prvoga pa redom sve do makar kako visokoga reda (što znači ujedno, da su funkcija i sve njezine derivacije neprekinute), pa ako je povrh toga ispunjen i uvjet $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{O}_n = 0$, možemo funkciju razviti u <u>konvergentni</u> beskonačni red

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots \qquad (35)$$

koji se zove <u>Taylorov red.</u> Taj razvoj vrijedi za sve x i $x+h$, koji leže u intervalu od a do b, ako je uvjet $\mathcal{O}_n \to 0$ ispunjen za svaki pozitivni pravi razlomak Θ i za svako x iz zadanog intervala.

<u>35. poučka:</u> Ako uz stege gornje poučke pripada i točka $x=0$ zadanom intervalu, dobijemo <u>Mac Laurinov red:</u>

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots \qquad (36)$$

<u>Pripomena:</u> Uvrstimo li u (31) mjesto x vrijednost x_0, a mjesto h vrijednost $x-x_0$, imamo ovaj oblik <u>Taylorova</u> razvoja:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots + \mathcal{O}_n, \qquad (37)$$

a za <u>Lagrange-ov</u> ostatak oblik

$$\mathcal{O}_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}\{x_0 + \Theta\cdot(x-x_0)\}, \qquad (38)$$

odnosno za <u>Cauchy-ev</u> ostatak

$$\mathcal{O}_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \cdot (1-\Theta)^n f^{(n+1)}\{x_0 + \Theta\cdot(x-x_0)\}. \qquad (38a)$$

§ 2. Računske primjene derivacija.

A. Neodređeni oblici. a). Kad u funkciji $\mathcal{F}(x)$ zadanoj u obliku kvocijenta

$$\mathcal{F}(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \qquad (1)$$

postanu za neko izvjesno $x=a$ istodobno i brojnik i nazivnik jednaki nuli, prima ona prvi neodređeni oblik $\mathcal{F}(a) = \frac{0}{0}$.

1. definicija: Postoji li limes

$$\lim_{x\to a} \mathcal{F}(x) = A,$$

to je $\mathcal{F}(a) = A$.

1. poučka (L'Hospital, 1696): Prima li kvocijent (1) neodređeni oblik $\frac{0}{0}$, neka se derivira posebice brojnik, a posebice nazivnik; tražena vrijednost $\mathcal{F}(a)$, ako taj limes uopće postoji, dobije se iz

$$\mathcal{F}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (2)$$

2. poučka: Imadu li funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ derivacije sve do n-toga reda, pa jesu li te funkcije i sve njihove derivacije sve do $(n-1)$-oga reda jednake nuli za $x=a$; jesu li nadalje funkcije $f^{(n)}(x)$ i $\varphi^{(n)}(x)$ kontinuirane za $x=a$, vrijede formule

$$\mathcal{F}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}. \qquad (3)$$

b). Postane li u funkciji (1) za $x=a$ istodobno i brojnik i nazivnik beskonačno veliki, prima ona drugi neodređeni oblik $\mathcal{F}(a) = \frac{\infty}{\infty}$.

3. poučka: Prva i druga poučka (t. j. L'Hospitalovo pravilo) vrijede i za drugi neodređeni oblik.

Pripomena: Gornje poučke ne vrijede samo za granični prelaz $x\to a$, nego i za $x\to\infty$.

c). Funkcija
$$F(x) = f(x) \cdot \varphi(x), \qquad (4)$$

u kojoj je $f(a)=0$ i $\varphi(a)=\infty$, prima za $x=a$ treći neodređeni oblik $F(a)=0 \cdot \infty$.

4. poučka: Treći neodređeni oblik se rješava po L'Hospitalovu pravilu, nakon što smo funkciju (4) pretvorili u oblik

$$F(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\ ; \qquad (4a)$$

time smo naime dobili iz trećega prvi neodređeni oblik.

d). Funkcija
$$F(x) = f(x) - \varphi(x) \qquad (5)$$

u kojoj su i $f(a)=\infty$ i $\varphi(a)=\infty$, prima za $x=a$ četvrti neodređeni oblik $F(a)=\infty-\infty$.

5. poučka: Četvrti neodređeni oblik rješava se po L'Hospitalovu pravilu, nakon što funkciju (5) pretvorili u oblik

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}\ ; \qquad (5a)$$

time smo naime dobili iz četvrtoga prvi neodređeni oblik.

e) Funkcija

$$F(x) = \left[f(x)\right]^{\varphi(x)} \qquad (6)$$

prima za $x=a$ peti, šesti, odnosno sedmi neodređeni oblik $F(a)=0^0$, $F(a)=\infty^0$, $F(a)=1^\infty$, ako je

$\alpha)$	$f(a)=0$	$\varphi(a)=0$
$\beta)$	$f(a)=\infty$	$\varphi(a)=0$
$\gamma)$	$f(a)=1$	$\varphi(a)=\infty$.

6. poučka: Peti do sedmi neodređeni oblik rješavaju se po L'Hospitalovom pravilu, nakon što smo jednadžbu (6) logaritmirali

$$\ln F(x) = \varphi(x) \cdot \ln f(x); \qquad (6a)$$

time smo naime te oblike pretvorili u treći neodređeni oblik.

B. Beskonačno malene i beskonačno velike veličine.

2. definicija: Za linearnu funkciju $f(x)=x-a$ kažemo, da postaje kod graničnoga prelaza $x\to a$ beskonačno malena prvoga reda. Za koju drugu funkciju $\varphi(x)$, kojoj je vrijednost u točki $x=a$ jednaka nuli, kažemo, da postaje za $x=a$ beskonačno malena

α) prvoga reda, ako je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ konačna od nule različita veličina

β) reda višega od prvoga, ako je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$

γ) reda nižega od prvoga, ako je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$.

Možemo isporedivati i mjeriti beskonačno malene veličine reda višega od prvoga; tome služi:

3. definicija: Za funkciju $f(x)=(x-a)^n$, gdje je n neki pozitivni cio broj, kažemo,

da kod graničnoga prelaza $x\to a$ postaje beskonačno malena n-toga reda. Ako je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ konačna od nule različna veličina, kažemo, da i funkcija $\varphi(x)$ postaje za $x\to a$ beskonačno malena n-toga reda, ili da je točka $x=a$ nul-točka n-toga reda funkcije $\varphi(x)$.

4. definicija: Za funkciju $f(x)=(x-a)^\nu$, gdje je ν neki pozitivni broj (cio ili razlomljen, racionalan ili iracionalan), kažemo, da kod graničnoga prelasa $x\to a$ postaje beskonačno malena ν-toga reda. Isto vrijedi i za funkciju $\varphi(x)$, ako je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ konačna, od nule različita veličina. — Na osnovi te definicije možemo mjeriti i beskonačno malene veličine reda nižega od prvoga ili kojima red nije pozitivan cio broj.

5. definicija: Za funkciju $f(x)=\frac{1}{x-a}$ kažemo, da za $x\to a$ postaje beskonačno velika prvoga reda ili da je točka $x=a$ za tu funkciju pol prvoga reda.

6. definicija: Postane li funkcija $y=f(x)$ kod graničnoga prelaza $x\to a$ beskonačno velika, kažemo, da je točka $x=a$ za tu funkciju pol ν-toga reda, ako je ista točka za funkciju $\frac{1}{f(x)}$ nul-točka ν-toga reda.

Važniji primjeri. α) Eksponencijalna funkcija a^x s bazom $a>1$ ima za $x\to\infty$ pol beskonačno velikog reda.

β). Funkcija a^{-x} ima za $x\to\infty$ nul-točku beskonačno velikog reda.

γ). Logaritam $\ln x$ ima za $x\to\infty$ pol beskonačno malenoga reda. To isto vrijedi i za $x\to+0$.

δ.) Funkcija $-\frac{1}{\ln x}$ ima za $x\to+0$ nul-točku beskonačno malenoga reda.

C. Ekstremne vrijednosti.

7. poučka: Ima li funkcija $y=f(x)$ u svakoj točki intervala $a\leq x\leq b$ derivaciju jednaku nuli, funkcija je između a i b konstantna.

8. poučka: Raste li monotono funkcija $y=f(x)$ u intervalu od a do b, pa ima li u svakoj točki toga intervala određenu konačnu derivaciju, ta je derivacija pozitivna u cijelome intervalu izuzev možda neke pojedine točke, u kojima može derivacija biti i jednaka nuli.

9. poučka (obrat od 8. poučke): Ima li funkcija $f(x)$ pozitivnu derivaciju u svakoj točki intervala od a do b, funkcija raste monotono u tom intervalu.

10. poučka: Pada li monotono funkcija $y=f(x)$ u intervalu od a do b, pa ima li u svakoj točki toga intervala određenu konačnu derivaciju, ta je derivacija negativna u cijelome intervalu, izuzev možda neke pojedine točke, u kojima može derivacija biti i jednaka nuli.

11. poučka (obrat 10 poučke): Ima li funk-

cija $f(x)$ negativnu derivaciju u svakoj toči,, ki intervala od a do b, funkcija pada mo,, notono u tom intervalu.

12. poučka: Postoji li u ekstremnoj vri,, jednosti određena derivacija, jednaka je nuli.

Ima li funkcija $f(x)$ u cijelom intervalu od $c-h$ do $c+h$, gdje je $h>0$, određenu derivaci,, ju, pa ako je

$$f'(x) \begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0 \end{matrix} \quad \text{za} \quad x \begin{matrix} <c \\ =c \\ >c \end{matrix} ,$$

imamo u točki $x=c$ maksimum, ako je pako

$$f'(x) \begin{matrix} <0 \\ =0 \\ >0 \end{matrix} \quad \text{za} \quad x \begin{matrix} <c \\ =c \\ >c \end{matrix} ,$$

imamo minimum. No ako je

$$\operatorname{sgn} f'(c-\varepsilon) = \operatorname{sgn} f'(c+\varepsilon),$$

gdje je ε makar kako malen pozitivan broj, nemamo u točki $x=c$ ekstremne vrijednosti.

13. poučka: Ako je druga derivacija jed,, noznačna i neprekinuta za $x=c$, postoji mak,, simum funkcije $y=f(x)$ u toj točki, ako je $f'(c)=0$ i $f''(c)<0$, a minimum za $f'(c)=0$ i $f''(c)>0$.

14. poučka: Funkcija $f(x)$ imat će uvi,, jek onda ekstremnu vrijednost za $x=c$, kad je prva od nule različita derivacija u toj točki takoga reda n, pa će biti $f(c)$ maksimum za $f^{(n)}(c)<0$, a minimum za $f^{(n)}(c)>0$; ta poučka vrijedi uz pomi,, ljaj. da je $f^{(n)}(x)$, a po tome i $f(x)$ i sve njezine derivacije od prvoga do $(n-1)$-oga reda, neprekinuta i jednoznačna za $x=c$.

D. Razvijanje funkcija u redove.

15. poučka: Za prirodnu eksponenci,, jalnu funkciju glasi razvoj u beskonačan konvergentan red

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad (7)$$

a vrijedi za *svako* x. Za makar koju drugu eksponencijalnu funkciju glasi razvoj:

$$a^x = 1 + \frac{x.\ln a}{1!} + \frac{(x.\ln a)^2}{2!} + \frac{(x.\ln a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x.\ln a)^n}{n!} + \dots \qquad (7a)$$

16. poučka: Za *goniometričke* funkcije glase redovi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \qquad (8)$$

i

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad (8a)$$

koji vrijede za *svako* x.

17. poučka: Za *hiperbolične* funkcije glase redovi

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \qquad (9)$$

i

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad (9a)$$

a vrijede također za *svako* x:

18. poučka: *Binomni* red glasi

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \dots + \binom{m}{n}x^n + \dots; \qquad (10)$$

taj red:

α) konvergira apsolutno za $|x|<1$ i svako m
„ „ „ $x=-1$ „ $m \geq 0$
„ „ „ $x=+1$ „ $m \geq 0$
β) „ relativno „ $x=+1$ „ $-1<m<0$
γ) divergira „ $|x|>1$ „ svako m
„ „ $x=-1$ „ $m<0$
„ „ $x=+1$ „ $m \leq -1$

Posebni slučajevi.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \dots \qquad |x|<1 \qquad (10a)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + - \dots \qquad |x|<1 \qquad (10b)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + - \dots \qquad |x| \leq 1 \qquad (10c)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 + \dots \qquad -1<x\leq+1 \qquad (10d)$$

19. poučka: *Logaritamski* red glasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots; \qquad (11)$$

on konvergira samo za $-1<x\leq 1$.

Iz reda (11) slijede i redovi

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right), \tag{12}$$

$$\ln y = 2\left\{\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \dots\right\}, \tag{12a}$$

$$\ln(a+b) = \ln a + 2\left\{\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \dots\right\}, \tag{12b}$$

koji su korisni kod izračunavanja logaritama.

20. poučka: Red potencija

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{13}$$

može se „derivirati „član po član"; taj derivirani red predočuje derivaciju $f'(x)$ zadane funkcije, a interval mu je konvergencije isti kao i u zadanome redu (13).

§3. Derivacije i diferencijali funkcija dviju i više varijabla.

A. Parcijalne derivacije, parcijalni i totalni diferencijali. Kod funkcija od više varijabla, na pr.

$$z = f(x, y, u), \tag{1}$$

razlikujemo parcijalne priraste funkcije s obzirom na pojedine varijable:

$$\begin{aligned} \Delta_x z &= f(x+\Delta x, y, u) - f(x, y, u) \\ \Delta_y z &= f(x, y+\Delta y, u) - f(x, y, u) \\ \Delta_u z &= f(x, y, u+\Delta u) - f(x, y, u) \end{aligned} \tag{2}$$

i parcijalne kvocijente diferencija:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta_y z}{\Delta y}, \quad \frac{\Delta_u z}{\Delta u}. \tag{3}$$

1. definicija: Postoji li kod graničnoga prelaza $\Delta x \to 0$ limes prvoga kvocijenta (3), nazivamo ga parcijalnom derivacijom

funkcije (1) po varijabli x, a označujemo ga sa $f'_x(x,y,u)$ ili samo f'_x. Na isti način dolazimo i do parcijalnih derivacija po ostalim varijablama, pa imamo

$$f'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, u) - f(x,y,u)}{\Delta x},$$

$$f'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, u) - f(x,y,u)}{\Delta y}, \quad (4)$$

$$f'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(x,y,u+\Delta u) - f(x,y,u)}{\Delta u}$$

<u>2. definicija</u>: Beskonačno malene veličine $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ i $\Delta u \to 0$ zovu se (§1,3 def.) diferencijali dx, dy, du varijabla, a beskonačno malene veličine $\Delta_x z \to 0$, $\Delta_y z \to 0$, $\Delta_u z \to 0$ zovu se <u>parcijalni diferencijali</u> funkcije z po odnosnoj varijabli; označujemo ih sa $\partial_x z$, $\partial_y z$, $\partial_u z$.

<u>1. poučka</u>: Parcijalni diferencijal funkcije po nekoj izvjesnoj varijabli jednak je parcijalnoj derivaciji funkcije po toj varijabli pomnoženoj sa diferencijalom te varijable:

$$\partial_x z = f'_x \cdot dx, \quad \partial_y z = f'_y \cdot dy, \quad \partial_u z = f'_u \cdot du \quad (5)$$

<u>3. definicija</u>: Postoje li kod navedenih graničnih prelaza limesi kvocijentā (3), nazivamo ih <u>parcijalnim diferencijalnim kvocijentima</u>, pa pišemo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial u}. \quad (6)$$

<u>2. poučka</u>: Parcijalni diferencijalni kvocijenti jednaki su odnosnim parcijalnim derivacijama, t.j.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = f'_u. \quad (7)$$

Mijenjajući <u>istodobno</u> sve tri varijable u funkciji (1) dolazimo do <u>totalnoga prirasta</u>

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y, u+\Delta u) - f(x,y,u) \quad (8)$$

4. definicija: Beskonačno malena veličina $\Delta z \to 0$ zove se totalnim diferencijalom dz funkcije z.

3. poučka: Totalni diferencijal jednak je sumi svih parcijalnih diferencijala, t.j.

$$dz = f'_x(x,y,u).dx + f'_y(x,y,u).dy + f'_u(x,y,u).du \quad (9)$$

ili

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot du \quad (9a)$$

B. Derivacije i diferencijali višega reda

5. definicija: Druge i više parcijalne derivacije, odnosno parcijalne diferencijalne kvocijente funkcije (1) definiramo, ako uopće postoje, jednadžbama

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ;\ f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ ;\ \ldots\ldots$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\ ;\ f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y.\partial x}\ ,\ \ldots\ldots$$

$$f'''_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \quad \text{itd.} \quad (10)$$

6. definicija: Parcijalne diferencijale drugoga i višega reda definiramo jednadžbama

$$\partial^2_{xx} f(x,y,u) = f''_{xx}\cdot dx^2$$
$$\partial^2_{xy} f(x,y,u) = f''_{xy}\cdot dx.dy$$
$$\partial^3_{xyu} f(x,y,u) = f'''_{xyu}\cdot dx.dy.du \quad (11)$$
$$\partial^3_{xyy} f(x,y,u) = f'''_{xyy}\cdot dx.dy^2 \quad \text{itd}$$

4. poučka: Druga parcijalna derivacija f''_{xy} funkcije (1), uzeta prvi puta po varijabli x, a drugi put po varijabli y, jednaka je drugoj parcijalnoj derivaciji f''_{yx} iste funkcije, uzetoj prvi put po varijabli y, a drugi put po varijabli x, dakle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y.\partial x}\ ; \quad (12)$$

to vrijedi uz pomisljaj, da prve derivacije f'_x i f'_y i druge derivacije f''_{xy} i f''_{yx} postoje, pa da su neprekinute.

<u>5. poučka</u> (posveopćenje 4. poučke): Poredak deriviranja funkcije dviju varijabla ili njih više nema utjecaja na vrijednost dobivene parcijalne derivacije n-toga reda, ako uopće postoje i ako su kontinuirane sve parcijalne derivacije prvoga do n-toga reda, koje dolaze u obzir.

Po (9) je totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x, y)$

$$dz = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy,$$

dakle uopće oblika

$$P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy \qquad (13)$$

jer su parcijalne derivacije f'_x i f'_y opet izvjesne funkcije varijabla x i y. No svaki izraz (13) <u>nije</u> totalni diferencijal neke funkcije $f(x, y)$. O tom nas upućuje

<u>6. poučka</u>: Da izraz (13) bude totalni diferencijal neke funkcije $f(x, y)$, treba da je ispunjen uvjet

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (14)$$

<u>7. poučka</u>: Drugi, treći, uopće n-ti <u>totalni diferencijal</u> funkcije $z = f(x, y)$ dviju <u>među sobom nezavisnih varijabla</u> x i y glasi:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \cdot dx^3 + 3 \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \cdot dx^2 dy + 3 \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \cdot dx \cdot dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \cdot dy^3 \qquad (15)$$

$$d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \cdot dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} \cdot dx^{n-1} \cdot dy + \binom{n}{2} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} \cdot dx^{n-2} \cdot dy^2 + \binom{n}{3} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-3} \partial y^3} \cdot dx^{n-3} \cdot dy^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} \frac{\partial^n z}{\partial x \cdot \partial y^{n-1}} \cdot dx \cdot dy^{n-1} + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} \cdot dy^n$$

Te se sve formule mogu ukratko <u>simbolički</u> ovako napisati:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^{(n)} z. \qquad (15a)$$

<u>Pripomena</u>: Gornja formula vrijedi i sa

funkcije triju ili više varijabla, pa imamo primjerice

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial u}\cdot du\right)^{(n)} z .$$

C. Deriviranje složenih funkcija.

ako je $z = f(x, y, u)$, a ujedno

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad u = \chi(t), \tag{16}$$

onda je z složena funkcija varijable t, t.j.

$$z = f\{\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\}. \tag{16a}$$

8. poučka: Za totalni diferencijal složene funkcije vrijedi formula:

$$dz = f'_x\cdot\varphi'(t)\cdot dt + f'_y\cdot\psi'(t)\,dt + f'_u\cdot\chi'(t)\cdot dt \tag{17}$$

a za totalni diferencijalni kvocijent

$$\frac{dz}{dt} = f'_x\cdot\varphi'(t) + f'_y\cdot\psi'(t) + f'_u\cdot\chi'(t) \tag{17a}$$

7. definicija: Algebarska homogena funkcija n-toga stepena definirana je relacijom

$$f(xt, yt, ut, \ldots, \omega t) = t^n\cdot f(x, y, u, \ldots, \omega). \tag{18}$$

9. poučka (Eulerova): Kod algebarskih homogenih funkcija vrijedi relacija

$$x\cdot f'_x + y\cdot f'_y + u\cdot f'_u + \ldots + \omega\cdot f'_\omega = n\cdot f. \tag{19}$$

10. poučka: Drugi se totalni diferencijal složene funkcije (16a) računa iz simbolične jednadžbe

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot du\right)^{(2)} z + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot d^2y + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot d^2u . \tag{20}$$

11. poučka: Za deriviranje specijalne složene funkcije $z = u\cdot v$, gdje je $u = \varphi(x)$ i $v = \psi(x)$, imamo Leibnitz-ovu formulu:

$$z^{(n)} = \frac{d^n z}{dx^n} = uv^{(n)} + \binom{n}{1}u'v^{(n-1)} + \binom{n}{2}u''v^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)}v , \tag{21}$$

koju možemo simbolički pisati u obliku

$$z^{(n)} = (u + v)^{(n)}. \tag{21a}$$

D. Deriviranje neravnitih funkcija. a) Jednadžbom $f(x,y)=0$ zadano je y kao neravnita (implicitna) funkcija varijable x.

12. poučka: Prva derivacija implicitne funkcije $f(x,y)=0$ nađe se iz jednadžbe

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}; \qquad (22)$$

druga će se derivacija izračunati iz jednadžbe

$$f_{xx}'' + 2f_{xy}'' \cdot \frac{dy}{dx} + f_{yy}'' \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f_y' \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \qquad (23)$$

u koju se za $\frac{dy}{dx}$ uvrsti vrijednost (22) itd.

b) Jednadžbom

$$F(x,y,z)=0 \qquad (24)$$

zadano je z kao implicitna funkcija varijabla x i y.

13. poučka: Totalni diferencijal će naći će se iz (24) po formuli

$$dz = -\frac{F_x' dx + F_y' dy}{F_z'} \qquad (25)$$

c) I jednadžbama $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ zadano je y kao implicitna funkcija varijable x.

14. poučka: Derivacija $y'=\frac{dy}{dx}$ gornje funkcije računa se iz formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (26)$$

E. Taylorova poučka za funkcije dviju varijabla.

15. poučka: Taylorov razvoj za funkciju $z=f(x,y)$ glasi:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = {} & f(x,y) + \frac{h}{1!} f_x'(x,y) + \frac{k}{1!} f_y'(x,y) + \\ & + \frac{1}{2!}\left[h^2 f_{xx}''(x,y) + 2hk f_{xy}''(x,y) + k^2 f_{yy}''(x,y)\right] + \\ & + \frac{1}{3!}\left[h^3 f_{xxx}'''(x,y) + 3h^2k f_{xxy}'''(x,y) + 3hk^2 f_{xyy}'''(x,y) + k^3 f_{yyy}'''(x,y)\right] + \\ & + \cdots\cdots + \\ & + \frac{1}{n!}\left[h^n f_{x^n}^{(n)}(x,y) + \binom{n}{1} h^{n-1}k f_{x^{n-1}y}^{(n)}(x,y) + \binom{n}{2} h^{n-2}k^2 f_{x^{n-2}y^2}^{(n)}(x,y) + \cdots \right. \\ & \left. + \cdots + k^n f_{y^n}^{(n)}(x,y)\right] + O_n, \qquad (27) \end{aligned}$$

gdje je Lagrange-ov oblik ostatka

$$\mathcal{O}_n = \frac{1}{(n+1)!}\Big[h^{n+1}\cdot f^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x+\Theta h, y+\Theta k)+\binom{n+1}{1}h^n k\cdot f^{(n+1)}_{x^n y}(x+\Theta h, y+\Theta k) \tag{27a}$$

$$+\binom{n+1}{2}h^{n-1}k^2\cdot f^{(n+1)}_{x^{n-1}y^2}(x+\Theta h, y+\Theta k)+\dots+k^{n+1}\cdot f^{(n+1)}_{y^{n+1}}(x+\Theta h, y+\Theta k)\Big];$$

taj razvoj vrijedi u okolici $(x+h, y+k)$ svake točke (x, y) za koju su funkcija i njesine parcijalne derivacije sve do $(n+1)$-oga reda jednoznačne i neprekinute. Ako je $\lim_{n\to\infty}\mathcal{O}_n=0$, pa ako su sve parcijalne derivacije počevši od prvoga pa redom sve do makar kako visokoga reda jednoznačne i neprekinute, dobijemo tako beskonačan red (Taylorov red), u koji se može razviti zadana funkcija. Uzmemo li u gornjim formulama $x=0$ i $y=0$, dobijemo Mac-Laurinovu poučku, odnosno Mac-Laurinov red. To se sve može posveopćiti i za slučaj triju ili više varijabla.

F. Ekstremne vrijednosti.

8. definicija: Funkcija $z=f(x, y)$ ima za $x=x_0$, $y=y_0$ maksimum odnosno minimum, ako postoji neki pozitivni broj ε tako, da je

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)<0 \quad \text{odnosno} >0$$

za svaki par vrijednosti h i k, koje udovoljavaju relacijama $|h|<\varepsilon$ i $|k|<\varepsilon$.

16. poučka: Funkcija $z=f(x, y)$ ima u točki (x_0, y_0) ekstremnu vrijednost, ako su ispunjena ova tri uvjeta:

$$\alpha)\qquad f'_x(x_0, y_0)=0 \tag{28}$$

$$\beta)\qquad f'_y(x_0, y_0)=0 \tag{28a}$$

$$\gamma)\qquad f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot f''_{yy}(x_0, y_0)-f''^{\,2}_{xy}(x_0, y_0)>0; \tag{28b}$$

ta će ekstremna vrijednost biti maksimum, ako je $f''_{xx}<0$, a minimum, ako je $f''_{xx}>0$.

17. poučka (posveopćenje 16. poučke): Funkcija

$$y=f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

ima u točki $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$ ekstremnu vrijednost, ako je

α) u toj točki totalni diferencijal

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n$$

jednak nuli

β.) u toj točki drugi totalni diferencijal

$$d^2y = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\cdot dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\cdot dx_n^2 +$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\cdot dx_1 dx_2 + \dots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\cdot dx_{n-1}\cdot dx_n$$

uvijek istoga predznaka, u kojemgod ga smjeru uzeli. Ta je ekstremna vrijednost maksimum, ako je $d^2y<0$, a minimum, ako je $d^2y>0$.

18. poučka: Implicitna funkcija $F(x,y)=0$ može imati ekstremnu vrijednost samo u točki (x_0,y_0), za koju je $F(x_0,y_0)=0$ i $F'_x(x_0,y_0)=0$. Ako je

$$\operatorname{sgn} F''_{xx}(x_0,y_0) = \operatorname{sgn} F'_y(x_0,y_0),$$

imamo maksimum, a u protivnom slučaju minimum.

19. poučka: Ekstremne vrijednosti funkcije

$$z = F(x,y,u,t) \qquad (29)$$

sa sporednim uvjetima

$$\varphi(x,y,u,t)=0 \qquad (29a)$$
$$\psi(x,y,u,t)=0$$

naći će se tako, da se traže obične ekstremne vrijednosti funkcije

$$\Phi(x,y,u,t) = F(x,y,u,t) + \lambda\cdot\varphi(x,y,u,t) + \mu\cdot\psi(x,y,u,t), \quad (30)$$

gdje su λ i μ parametri. Analogno će se postupati kod ekstremnih vrijednosti funkcije od n varijabla sa m (gdje mora biti $m<n$) sporednih uvjeta.

G. Izmjena varijabla.

α.) Zadano je $y=f(x)$; ovamo uvodimo novu nezavisnu varijablu t s jednadžbom $x=\varphi(t)$; neka se nađu relacije između derivacija $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ i novih derivacija $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots$

20. poučka: Diferencijalni kvocijenti funkcije y po varijabli t mogu se izračiti s pomoću diferencijalnih kvocijenata funkcije y po x na osnovi formula

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad (31)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (31a)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 3\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}\,; \qquad (31b)$$

obratne relacije glase:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (32)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \qquad (32a)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^3x}{dt^3}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt} - 3\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5} \qquad (32b)$$

β) Zadana je funkcija $y = f(x)$; ovamo uvodi- mo nove varijable u i t s pomoću jednačaba

$$x = \varphi(u,t) \qquad y = \psi(u,t)\,; \qquad (33)$$

time smo dobili neku funkcijonalnu relaciju iz- među u i t, u kojoj ćemo smatrati t nezavisnom va- rijablom, a u funkcijom.

21. poučka: Između derivacija $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ i derivacija $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots$ postoje relacije:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}}{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}} \qquad (33a)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}\right)\cdot\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}\right]}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}\right)^3} \qquad (33b)$$

$$- \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}\right)\cdot\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}\right]}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}\right)^3}$$

γ) Zadana je funkcija $z = f(x,y)$, a u nju uvo- dimo nove varijable u i t s pomoću jednadžbi (33).

22. poučka: Između derivacija $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \ldots$ i derivacija $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$ postoje relaci

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \qquad (34)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (34a)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial t} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \qquad (34b)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (34c)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t.\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t.\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t.\partial u} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial t} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}. \qquad (34d)$$

8.) Zadana je funkcija $z = F(x, y)$, u koju uvodimo nove veličine u, v, t s jednadžbama

$$x = f(u, v, t) \qquad y = \varphi(u, v, t) \qquad z = \psi(u, v, t); \quad (35)$$

sad ćemo smatrati, da su v i t nezavisne varijable, a u funkcija.

23. poučka: Između derivacija $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$ i derivacija $\frac{\partial u}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ldots$ postoje relacije

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right) \qquad (35a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right) \qquad (35b)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial u.\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} =$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u.\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right] +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u.\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right)\cdot\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right)\cdot\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]$$
$$(35c)$$

§4. Primjene diferencijalnoga računa na geometriju.

A. Tangente i normale krivulja u ravnini

Krivulja u ravnini može biti zadana u pravokutnim koordinatama eksplicitnom jednadžbom

$$y=f(x) \qquad (1)$$

ili implicitnom jednadžbom

$$F(x,y)=0 \qquad (2)$$

ili parametričkim jednadžbama

$$x=\varphi(t) \qquad y=\psi(t)\ ; \qquad (3)$$

te tri mogućnosti nazvat ćemo redom prvim, drugim odnosno trećim slučajem.

1. poučka: Jednadžba tangente u točki (x_0,y_0) glasi u prvom slučaju

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0), \qquad (4)$$

u drugom slučaju

$$(x-x_0)\cdot F'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)\cdot F'_y(x_0,y_0)=0, \qquad (4a)$$

a u trećem

$$[x-\varphi(t_0)]\cdot\psi'(t_0)-[y-\psi(t_0)]\cdot\varphi'(t_0)=0 \qquad (4b)$$

gdje je t_0 ona posebna vrijednost parametra t, kojoj odgovaraju točkine koordinate $x_0=\varphi(t_0)$ i $y=\psi(t_0)$

2. poučka: Jednadžba normale u točki (x_0,y_0) glasi u prvom slučaju

$$x-x_0+f'(x_0)\cdot(y-y_0)=0 \qquad (5)$$

u drugom slučaju

$$(x-x_0)\cdot F'_y(x_0,y_0)-(y-y_0)\cdot F'_x(x_0,y_0)=0 \qquad (5a)$$

a u trećem

$$[x-\varphi(t_0)]\cdot\varphi'(t_0)+[y-\psi(t_0)]\cdot\psi'(t_0)=0 \qquad (5b)$$

1. definicija: Dužina mjerena na tangenti od dirališta do njezinoga sjecišta s osi x zove se ukratko „tangenta" pa se bilježi sa T. Odrezak normale od njezinoga

sjecišta s krivuljom do njezinoga sjecišta s osi x zove se ukratko „normala". a bilježi se sa N. Projekcije „tangente" i „normale" na os x zove se „subtangenta" i „subnormala", a bilježe se sa St i Sn. Ove se četiri veličine uzimaju po apsolutnim vrijednostima (bez obzira na predznak).

3. poučka: Za te četiri veličine vrijede formule

$$T = \left|\frac{y}{y'}\cdot\sqrt{1+y'^2}\right|, \qquad (6)$$

$$N = \left|y\cdot\sqrt{1+y'^2}\right|, \qquad (6a)$$

$$St = \left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad (6b)$$

$$Sn = |y\cdot y'|. \qquad (6c)$$

2. definicija: Na luku $\widehat{MN}$ krivulje odabrat ćemo izvjesni broj n točaka; po dvije susjedne točke spojit ćemo pravocrtnim

dužinama, pa ćemo tako luk $\widehat{MN}$ nadomjestiti nekom razlomljenom crtom, koja je sastavljena od samih tetiva; dužina te razlomljene crte jednaka je sumi duži na svih tetiva, iz kojih je sastavljena. Postoji li određeni limes te dužine, kad broj tetiva raste preko svake mjere ($n\to\infty$) i kad se dužina svake pojedine tetive neograničeno približava nuli, zove se taj limes dužinom luka $\widehat{MN}$.

4. poučka: Diferencijal luka dl računa se iz formule

$$dl = \sqrt{1+y'^2}\cdot dx \qquad (7)$$

ili

$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}, \qquad (7a)$$

dok je

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1+y'^2}. \qquad (7b)$$

Pripomena. Uporabom jednadžbe (7b) dobijemo iz (6) i (6a)

$$T = \left| \frac{y}{y'} \cdot \frac{dl}{dx} \right| = \left| y \cdot \frac{dl}{dy} \right| \tag{8}$$

i

$$N = \left| y \cdot \frac{dl}{dx} \right| \tag{8a}$$

B. Asimptote.

3. definicija: Pravac neki zove se asimptotom izvjesne krivulje, koja se proteže u beskonačnost, ako je limes udaljenosti između točke na krivulji i tog pravca jednak nuli, kad se točka primiče u beskonačnost po toj grani krivulje.

5. poučka: Krivulja $y=f(x)$, koja se jednom svojom granom proteže u beskonačnost, imat će za tu svoju granu asimptotu $y=ax+b$, kad za $x\to\infty$ postoje određeni konačni limesi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \tag{9}$$

i

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-ax] = b \tag{10}$$

(Ta poučka ne obazire se na asimptote, koje su paralelne osi y)

6. poučka: Postoji li za $x\to\infty$ ili $x\to-\infty$ granični položaj tangente, on je ujedno položaj asimptote.

Na osnovi te poučke možemo definirati asimptotu kao granični položaj tangente ili kraće rekavši kao tangentu u beskonačno udaljenoj točki. No ima i krivulja, koje imadu asimptotu, a da tangenta nema graničnoga položaja.

Određivanje asimptota zadane krivulje.

I. Asimptote usporedne s osi y (ili s osi x)

a) Krivulja je zadana eksplicitno. Taj je slučaj osobito jednostavan, jer se može izravno odrediti, postaje li y beskonačno veliko za koje $x=a$. Položaj grana krivulje prema asimptoti ustanovit će se po predznacima funkcije $f(x)$ kod graničnih prelaza

$x\to a+0$ i $x\to a-0$. Analogno se postupa kod određivanja asimptota paralelnih s osi x, ako možemo jednadžbu krivulje predočiti u obliku $x=g(y)$.

β). Zadana je *implicitna* jednadžba (2) neke *algebarske* krivulje. Tu ćemo jednadžbu poredati po potencijama od y:

$$y^n\cdot f_n(x)+y^{n-1}\cdot f_{n-1}(x)+\dots+y\cdot f_1(x)+f_0(x)=0. \qquad (11)$$

ako su $x_1, x_2, \dots, x_n$ rješenja algebarske jednadžbe $f_n(x)=0$, onda su $x=x_1$, $x=x_2, \dots, x=x_n$ jednadžbe traženih asimptota. Da se ispita položaj krivulje prema tim asimptotama, uvest će se transformacija koordinata:

$$x=\xi \qquad y=\frac{1}{\eta}\,; \qquad (12)$$

u transformiranoj krivulji je koeficijent smjera tangente za točku $(a,0)$, koja odgovara točki (a,∞) zadane krivulje

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=a}=-\frac{f_n'(a)}{f_{n-1}(a)}\,; \qquad (13)$$

to služi izravno za određivanje položaja krivulje prema asimptoti $x=a$.

Na isti će se način naći i asimptote usporedne s osi x, ako se jednadžba (1) ili (2) piše u obliku

$$x^n\cdot\varphi_n(y)+x^{n-1}\cdot\varphi_{n-1}(y)+\dots+x\cdot\varphi_1(y)+\varphi_0(y)=0. \qquad (14)$$

II. Asimptote u općenitom položaju određuju se uopće na osnovi jednačaba (9) i (10). Jednadžbe *algebarskih* krivulja pisat ćemo u obliku

$$f(x,y)\equiv f_n(x,y)+f_{n-1}(x,y)+\dots+f_1(x,y)+f_0(x,y)=0, \qquad (15)$$

gdje je $f_i(x,y)$ *homogena* funkcija i-toga stepena. Iz jednadžbe $f_n(x,y)=0$, odnosno $f_n(1,\frac{y}{x})=0$ odredit će se najprije $a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$, a iza toga će se odrediti b iz formule

$$b=-\frac{f_{n-1}(1,a)}{f_n'(1,a)}\,; \qquad (16)$$

ta će formula zatajiti, kad brojnik i nazivnik postanu jednaki nuli, a to znači, da ima više među sobom paralelnih asimptota smjera $a = tg\,\alpha$.

C. Polarne koordinate. Krivulja je zadana jednadžbom

$$r = f(\varphi). \qquad (17)$$

Na radiju vektoru r neka je pozitivan onaj smjer, koji vodi od ishodišta do točke na krivulji, a na tangenti neka je pozitivan onaj smjer, koji odgovara uvećanju amplitude φ. Kut mjeren od pozitivnog smjera radija vektora do pozitivnoga smjera tangente označit ćemo sa v, pri čemu neka je pozitivni smjer vrtnje onaj, koji je protivan smjeru kretanja kazaljka na uri. Znači li nam opet α kut priklona tangente prema osi x, imamo ove jednadžbe.

$$\alpha = \varphi + v \,, \qquad (18)$$

$$tg\,v = \frac{r}{r'} \,, \qquad (19)$$

$$\sin v = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \,, \quad \cos v = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} . \qquad (20)$$

Za diferencijal luka imamo formulu

$$dl = \sqrt{r^2 + r'^2} \,.\, d\varphi \qquad (21)$$

a odatle

$$\sin v = r : \frac{dl}{d\varphi} \qquad \cos v = r' : \frac{dl}{d\varphi} \qquad (21a)$$

4. definicija: Dužina mjerena na tangenti od dirališta do njezinoga sjecišta s okomicom na radij vektor povučenom kroz ishodište zove se „polarna tangenta", pa se bilježi sa Pt. Odrezak normale od njezinoga sjecišta s krivuljom do njezinog sjecišta s prijašnjom okomicom zove se „polarna normala", a bilježi se sa Pn. Projekcije polarne tangente i polarne normale na okomicu zovu se „polarna subtangenta" i „polarna subnormala", a bilježe se sa Pst i Psn.

7. poučka: Za te četiri veličine vrijede formule

$$P_t = \frac{r}{|r'|}\cdot\sqrt{r^2+r'^2} = \frac{r}{|r'|}\cdot\frac{dl}{d\varphi}, \qquad (22)$$

$$P_n = \sqrt{r^2+r'^2} = \frac{dl}{d\varphi}, \qquad (22a)$$

$$P_{st} = \frac{r^2}{|r'|}, \qquad (22b)$$

$$P_{sn} = |r'| \qquad (22c)$$

Smjerovi asimptota će se tako naći, da se odrede one vrijednosti φ_0 amplitude, za koje radij vektor postaje beskonačno velik. Postoji li za takovo φ_0 asimptota, odredit će se nje-zina udaljenost d od usporednog (beskonač-no velikog) radija vektora iz jednadžbe

$$d = \lim_{\varphi\to\varphi_0} r.\sin(\varphi-\varphi_0). \qquad (23)$$

D. Oblik krivulje u okolini neke toč-ke. Singularne točke.

8. poučka: Ako je druga derivacija $y'' = f''(x)$ pozitivna, pokazuje krivulja svo-

ju konveksnu stranu, a ako je druga deriva-cija (za koju pomišljamo, da je jednoznačna i neprekinuta) negativna, pokazuje krivulja svoju konkavnu stranu, kad je gledamo u smjeru pozitivne y-osi.

5. definicija. Točka krivulje, u kojoj pre-lazi konkavitet u konveksitet (ili obrnuto), zo-ve se točka infleksije, a tangenta u toj točki tangenta infleksije. Za tangentu infleksije kažemo, da ima s krivuljom tri zajedničke točke, koje su jedna drugoj beskonačno blizu.

9. poučka: Da imamo u točki $P(x_0, y_0)$ infleksiju, mora biti $f''(x_0)=0$, a povrh toga prva u toj točki od nule različita derivacija lihoga (prvoga, trećega, ...) reda. Ako je pako prva od nule različita derivacija $f^{(n)}(x_0)$ takoga reda, nema infleksije; za $f^{(n)}(x)>0$ pokazuje krivulja svoju konveksnu stranu, a za $f^{(n)}(x_0)<0$ svoju konkavnu stranu (gledana u smjeru pozitiv-ne y-osi)

Za krivulje zadane implicitnom jed„ nadžbom $F(x,y)=0$ naći će se točke infleksije i koeficijenti smjera tangenata infleksije rješenjem jednačaba

$$F(x,y)=0 \quad F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot y'=0$$
$$F''_{xx}+2F''_{xy}\cdot y'+F''_{yy}\cdot y'^2=0, \qquad (24)$$

a za parametrički zadane krivulje tražit će se među rješenjima jednadžbe

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}=0 \qquad (25)$$

one vrijednosti parametra t, za koje imamo točke infleksije.

<u>6. definicija</u>: Sve točke na krivulji, koje imadu <u>jednu određenu</u> tangentu, zo„ vu se <u>regularne</u> točke, a točke, koje imadu više tangenata ili u kojima je tangenta neodređena, zovu se <u>singularne točke</u>.

<u>10. poučka</u>: Koordinate singularnih to„

čaka krivulje $F(x,y)=0$ naći će se tako, da se simultano riješe jednadžbe

$$F(x,y)=0 \qquad F'_x(x,y)=0 \qquad F'_y(x,y)=0 \qquad (26)$$

<u>Pripomena</u>: Eksplicitnom jednadžbom $y=f(x)$ zadana krivulja nema singularnih točaka.

<u>7. definicija</u>: U singularnoj točki je $F'_x=0$ i $F'_y=0$. Ne iščezavaju li u toj točki sve tri par„ cijalne derivacije drugog reda, imamo <u>dvo„ struku</u> točku. Ako je $F''_{xx}=F''_{xy}=F''_{yy}=0$, imamo <u>trostruku</u> točku, kad ne iščezavaju i sve par„ cijalne derivacije trećega reda; inače je to <u>četverostruka</u> točka i t. d.

<u>8. definicija</u>: Dvostruka točka s dvjema različitim realnim tangentama nazivamo <u>čvorom</u>, s jednom dvostrukom realnom tan„ gentom <u>šiljkom</u>, a s dvjema imaginarnim tangentama (dakle bez realne tangente) <u>izoli„ ranom točkom</u>.

11. poučka: Pojedine vrste dvostruke točke (x_0, y_0) raspoznajemo po predznaku izraza

$$\mathcal{D}(x_0, y_0) = F''^{2}_{xy} - F''_{xx} \cdot F''_{yy}, \qquad (27)$$

pa imamo za

$\mathcal{D} > 0$ čvor

$\mathcal{D} = 0$ šiljak

$\mathcal{D} < 0$ izoliranu točku.

Pripomena. Kod transcendentnih krivulja mogu se pojaviti i drugi singulariteti osim ovdje navedenih.

E. Polumjer krivine; evolute i evolvente.

9. definicija: Srednjom krivinom κ krivulje $y = f(x)$ duž luka Δl nazivamo vrijednost kvocijenta $\kappa = \frac{\Delta\alpha}{\Delta l}$, gdje je $\Delta\alpha$ kut, što ga među sobom zatvaraju bilo obje tangente, bilo obje normale na krajevima luka Δl.

Kod kružnice je srednja krivina κ konstantna i po svojoj apsolutnoj vrijednos-

ti jednaka recipročnoj vrijednosti polumjera ρ.

10. definicija: Postoji li za granični prelaz $\Delta x \to 0$ (dakle i $\Delta l \to 0$) limes kvocijenta κ, nazivamo ga krivinom krivulje u izvjesnoj točki, a bilježimo ga sa K, dakle je

$$K = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \qquad (28)$$

12. poučka: Krivina će se naći iz formule

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (29)$$

11. definicija: Zamislimo li konstruiranu kružnicu, koja: 1) prolazi točkom krivulje $P(x, y)$, 2) ima u toj točki s krivuljom $y = f(x)$ zajedničku tangentu, pa leži na onoj strani te tangente, na kojoj leži i krivulja, 3) ima duž cijele svoje periferije krivinu $K = \kappa = \pm\frac{1}{\rho}$, što je ima i krivulja u točki P; Ta se kružnica zove kružnica krivine u točki P;

njezin polumjer

$$\rho = \frac{(+\sqrt{1+y'^2})^3}{|y''|} \qquad (30)$$

zove se polumjer krivine krivulje u točki P, a njezino središte $T(\xi,\eta)$ središte krivine za točku P.

13. poučka: Za koordinate središta krivine vrijede formule

$$\xi = x - y' \cdot \frac{1+y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \qquad (31)$$

14. poučka: Za krivulje zadane implicitnom jednadžbom $F(x,y)=0$ imamo formule

$$\rho = \frac{(F_x'^2 + F_y'^2)^{\frac{3}{2}}}{F''_{xx} \cdot F_y'^2 - 2F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} \cdot F_x'^2} \qquad (32)$$

$$\xi = x - F'_x \cdot \frac{F_x'^2 + F_y'^2}{F''_{xx} \cdot F_y'^2 - 2F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} \cdot F_x'^2} \qquad (32a)$$

$$\eta = y - F'_y \cdot \frac{F_x'^2 + F_y'^2}{F''_{xx} \cdot F_y'^2 - 2F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} \cdot F_x'^2} \, . \qquad (32b)$$

15. poučka: Kod parametrički zadanih krivulja vrijede formule:

$$\rho = \frac{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}{\varphi'(t).\psi''(t) - \psi'(t).\varphi''(t)} \, , \qquad (33)$$

$$\xi = \varphi(t) - \psi'(t) \cdot \frac{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}{\varphi'(t).\psi''(t) - \psi'(t).\varphi''(t)} \, , \qquad (33a)$$

$$\eta = \psi(t) + \varphi'(t) \cdot \frac{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}{\varphi'(t).\psi''(t) - \psi'(t).\varphi''(t)} \, . \qquad (33b)$$

16. poučka: U polarnim koordinatama glase te formule ovako:

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \, , \qquad (34)$$

$$\xi = \frac{r.\cos\varphi.(r'^2 - rr'') - r'.\sin\varphi.(r^2 + r'^2)}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \, , \qquad (34a)$$

$$\eta = \frac{r.\sin\varphi.(r'^2 - rr'') + r'.\cos\varphi.(r^2 + r'^2)}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \, . \qquad (34b)$$

17. poučka: Središte krivine je granični položaj sjecišta dviju normala, kad se obje točke na krivulji, kojima su te normale

povučene, neograničeno približe jedna drugoj.

Pripomena: Kružnica krivine dira krivulju, ali je i siječe (kao i tangenta infleksije). Izuzetak čine točke, u kojima krivina imade ekstremnu vrijednost; te točke nazivamo tjemenima.

12. definicija: Geometrijsko mjesto središta krivine za svaku točku neke zadane krivulje zove se evoluta te krivulje. Odmatajući niti napete oko evolute dobije se opet zadana krivulja, koja se zove evolventa svoje evolute.

18. poučka: Normala evolvente je tangenta u pripadnoj točki evolute.

19. poučka: Diferencijal luka evolute po apsolutnoj je vrijednosti jednak diferencijalu polumjera krivine u pripadnoj točki evolvente.

Pripomena: Točka evolute, koja odgovara tjemenu evolvente, bit će šiljak. Ima li evolventa točku infleksije, proteže se evoluta dvjema granama u beskonačnost; asimptota

tih dviju grana evolute je evolventina normala u točki infleksije.

F. Tangente i normale prostornih krivulja. Prostorna krivulja može biti zadana:

α.) parametričkim jednadžbama

$$x=\varphi(t) \qquad y=\psi(t) \qquad z=\chi(t); \tag{35}$$

b.) projekcijskim jednadžbama

$$f_1(x,y)=0 \qquad f_2(x,z)=0 \tag{36}$$

c) općim jednadžbama

$$F(x,y,z)=0 \qquad G(x,y,z)=0 \tag{37}$$

kao prodor dviju površina.

13. definicija: Do pojma tangente prostorne krivulje dolazimo graničnim prelazom iz sekante baš kao kod krivulja u ravnini. Kuteve, što ih tangenta zatvara sa smjerovima koordinatnih osi, označit ćemo redom s α, β, γ.

Kod krivulje zadane jednadžbama (35) imamo relaciju

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \varphi'(t_0) : \psi'(t_0) : \chi'(t_0), \tag{38}$$

ako smo položili tangentu točkom (x_0, y_0, z_0), koja odgovara vrijednosti parametra $t=t_0$.

20. poučka: Jednadžba tangente prostorne krivulje u točki (x_0, y_0, z_0) glasi:

a) za parametričke jednadžbe

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\chi'(t_0)} \; ; \qquad (39)$$

b) za projekcijske jednadžbe

$$x-x_0 = \frac{y-y_0}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=x_0}} \; ; \qquad (39a)$$

c) za opće jednadžbe

$$\frac{x-x_0}{F'_y \cdot G'_z - F'_z \cdot G'_y} = \frac{y-y_0}{F'_z \cdot G'_x - F'_x \cdot G'_z} = \frac{z-z_0}{F'_x \cdot G'_y - F'_y \cdot G'_x} \; ; \qquad (39b)$$

u sve izraze u nazivniku treba uvrstiti

$x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$

14. definicija: Postanu li za koju vrijednost $t=t_0$ sva tri nazivnika u (39) jednaka nuli, nazivamo takovu točku singularnom točkom.

15. definicija: Ravnina položena točkom (x_0, y_0, z_0) prostorne krivulje okomito na njezinu tangentu zove se normalna ravnina.

21. poučka: Jednadžba normalne ravnine glasi

a) $(x-x_0)\cdot\varphi'(t_0)+(y-y_0)\cdot\psi'(t_0)+(z-z_0)\cdot\chi'(t_0)=0 \qquad (40)$

b) $x-x_0+(y-y_0)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}+(z-z_0)\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=x_0}=0 \qquad (40a)$

c) $(x-x_0)\cdot(F'_y \cdot G'_z - F'_z \cdot G'_y)+(y-y_0)\cdot(F'_z \cdot G'_x - F'_x \cdot G'_z)+$
$+(z-z_0)\cdot(F'_x \cdot G'_y - F'_y \cdot G'_x)=0 \qquad (40b)$

22. poučka: Diferencijal luka prostorne krivulje izražava se ovako:

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \qquad (41)$$

ili

$$dl=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\cdot dt. \qquad (41a)$$

Često je vrlo zgodno, da se kao parametar t uzme dužina luka l; jednadžbe krivulje glase dakle

$$x=\varphi(l) \qquad y=\psi(l) \qquad z=\chi(l). \qquad (42)$$

U tom posebnom slučaju imamo

$$[\varphi'(l)]^2+[\psi'(l)]^2+[\chi'(l)]^2=1. \qquad (43)$$

$$\frac{dx}{dl}=\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dl}=\cos\beta, \quad \frac{dz}{dl}=\cos\gamma. \qquad (44)$$

16. definicija: Svaka ravnina položena kroz krivuljinu tangentu zove se tangencijalna ravnina krivulje u točki (x_0, y_0, z_0). Tangencijalna ravnina ima s krivuljom barem tri zajedničke točke, i to dvije u diralištu tangente i neku treću točku, u kojoj ravnina siječe krivulju. Graničnim prelazom, kod kojega se ta treća točka pomakne beskonačno blizu prvim dvjema, dobijemo granični položaj tangencijalne ravnine; ta osobita tangencijalna ravnina zove se ravnina oskulacije.

23. poučka: Jednadžba ravnine oskulacije u točki (x_0, y_0, z_0) glasi

$$(x-x_0)\cdot[\psi'(t_0)\cdot\chi''(t_0)-\psi''(t_0)\cdot\chi'(t_0)]+(y-y_0)\cdot[\chi'(t_0)\cdot\varphi''(t_0)-\chi''(t_0)\cdot\varphi'(t_0)]$$
$$+(z-z_0)\cdot[\varphi'(t_0)\cdot\psi''(t_0)-\varphi''(t_0)\cdot\psi'(t_0)]=0 \qquad (45)$$

17. definicija: Pravac, duž kojega ravnina oskulacije siječe normalnu ravninu, zove se glavnom normalom krivulje u točki (x_0, y_0, z_0). Kutove, što ih glavna normala zatvara sa smjerovima koordinatnih, označit ćemo redom s λ, μ, ν.

24. poučka: Jednadžba glavne normale glasi

$$\frac{x-x_0}{\varphi''(l_0)}=\frac{y-y_0}{\psi''(l_0)}=\frac{z-z_0}{\chi''(l_0)} \qquad (46)$$

vrijedi dakle i razmjer

$$\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu=\varphi''(l_0):\psi''(l_0):\chi''(l_0). \qquad (47)$$

18. definicija: Ravnina položena u točki (x_0, y_0, z_0) okomito na glavnu normalu

zove se ravnina rektifikacije.

25. poučka: Jednadžba ravnine rektifikacije glasi

$$(x-x_0)\cdot\varphi''(t_0)+(y-y_0)\cdot\psi''(t_0)+(z-z_0)\cdot\chi''(t_0)=0 \quad (48)$$

19. definicija: Pravac, u kojemu se sijeku normalna ravnina i ravnina rektifikacije, zove se binormala krivulje u točki (x_0, y_0, z_0). Kutove, što ih binormala zatvara sa smjerovima koordinatnih osi, označit ćemo redom sa $\delta, \varepsilon, \vartheta$.

26. poučka: Jednadžba binormale glasi

$$\frac{x-x_0}{\psi'(t_0)\cdot\chi''(t_0)-\psi''(t_0)\cdot\chi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\chi'(t_0)\cdot\varphi''(t_0)-\chi''(t_0)\cdot\varphi'(t_0)}=$$

$$=\frac{z-z_0}{\varphi'(t_0)\cdot\psi''(t_0)-\varphi''(t_0)\cdot\psi'(t_0)}, \quad (49)$$

vrijedi dakle i razmjer

$$\cos\delta:\cos\varepsilon:\cos\vartheta=\left[\psi'(t_0)\cdot\chi''(t_0)-\psi''(t_0)\cdot\chi'(t_0)\right]:$$

$$:\left[\chi'(t_0)\cdot\varphi''(t_0)-\chi''(t_0)\cdot\varphi'(t_0)\right]:\left[\varphi'(t_0)\cdot\psi''(t_0)-\varphi''(t_0)\cdot\psi'(t_0)\right]. \quad (50)$$

20. definicija: Tangenta, glavna normala

i binormala, koje su sve tri jedna na drugoj okomite, tvore fundamentalni triedar krivulje u točki (x_0, y_0, z_0). Kod mnogih je istraživanja zgodno, da se bridovi fundamentalnog triedra uzmu za koordinatne osi.

27. poučka: U okolici neke točke leži krivulja sva s jedne strane ravnine rektifikacije, dok prodire u toj točki kroz ravninu oskulacije i kroz normalnu ravninu. Projekcija krivulje na ravninu oskulacije naliči običnoj paraboli, na normalnu ravninu naliči semikubnoj (Neilovoj) paraboli, a na ravninu rektifikacije kubnoj paraboli.

G. Krivina prostornih krivulja.

21. definicija: Uzmemo li kuglu $x^2+y^2+z^2=1$, pa povučemo li iz njezinoga središta same polupravke usporedne tangentama zadane krivulje, probadat će te polupravke kuglu duž neke krivulje, koju nazi-

vamo <u>tangentinom sfernom indikatriksom</u> zadane krivulje. Analogna konstrukcija izvedena za binormalu, odnosno za glavnu normalu, daje <u>binormalinu sfernu indikatriksu</u>, odnosno <u>sfernu indikatriksu glavne normale</u>. Lukove tih indikatriksa označujemo redom sa m, n, o.

<u>22. definicija</u>: Omjer među lukom tangentine sferne indikatrikse i pripadnim lukom zadane krivulje zove se <u>srednjom fleksijom</u> F toga luka, dakle je

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta l} \qquad (51)$$

<u>23. definicija</u>: <u>Fleksijom</u> f zadane krivulje u točki (x_0, y_0, z_0) nazivamo limes kvocijenta (51) kod graničnoga prelaza $\Delta l \to 0$, dakle je

$$f = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl}. \qquad (52)$$

<u>28. poučka</u>: Za fleksiju f vrijede formule

$$f = \sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{dl}\right)^2}, \qquad (53)$$

$$f = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dl^2}\right)^2} \qquad (54)$$

ili

$$f = \sqrt{[\varphi''(l_0)]^2 + [\psi''(l_0)]^2 + [\chi''(l_0)]^2}. \qquad (54a)$$

<u>Pripomena</u>: Kod tih drugih korjena uzima se uvijek predznak +, t.j. <u>fleksija je uvijek pozitivna</u>.

<u>24. definicija</u>: Recipročna vrijednost fleksije naziva se <u>polumjerom fleksije</u> ρ, dakle je

$$\rho = \frac{1}{f}. \qquad (55)$$

<u>25. definicija</u>: Omjer među lukom binormaline sferne indikatrikse i pripadnim lukom zadane krivulje zove se <u>srednjom torzijom</u> T toga luka, dakle je

$$T = \frac{\Delta n}{\Delta l} \tag{56}$$

26. definicija: Torzijom ϖ zadane krivulje u nekoj točki nazivamo limes kvocijenta (56) kod graničnoga prelaza $\Delta l \to 0$, dakle je

$$\varpi = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta l} = \frac{dn}{dl} \tag{57}$$

29. poučka: Za torziju ϖ vrijedi formula:

$$\varpi = \pm \sqrt{\left(\frac{d\cos\delta}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\varepsilon}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\vartheta}{dl}\right)^2}\ ; \tag{58}$$

kod na lijevo zavijenih krivulja je torzija pozitivna, a kod na desno zavijenih negativna. Predznak torzije može se odrediti iz jednadžbe

$$\varpi . f^2 = - \begin{vmatrix} \frac{dx}{dl} & \frac{dy}{dl} & \frac{dz}{dl} \\ \frac{d^2x}{dl^2} & \frac{d^2y}{dl^2} & \frac{d^2z}{dl^2} \\ \frac{d^3x}{dl^3} & \frac{d^3y}{dl^3} & \frac{d^3z}{dl^3} \end{vmatrix} \tag{59}$$

27. definicija: Recipročna apsolutna vrijednost torzije naziva se polumjerom torzije τ, dakle je

$$\tau = \frac{1}{|\varpi|} . \tag{60}$$

28. definicija: Omjer među lukom sferne indikatrikse glavne normale i pripadnim lukom zadane krivulje zove se srednjom cijelom krivinom K toga luka, dakle je

$$K = \frac{\Delta o}{\Delta l} \tag{61}$$

29. definicija: Cijelom krivinom k zadane krivulje u nekoj točki nazivamo limes kvocijenta (61) kod graničnoga prelaza $\Delta l \to 0$, dakle je

$$k = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta o}{\Delta l} = \frac{do}{dl} . \tag{62}$$

30. poučka: Za cijelu krivinu k vrijedi formula

$$k = \sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{dl}\right)^2}\ ; \tag{63}$$

Predznak drugoga korjena je uvijek pozitivan.

30. definicija: Recipročna vrijednost cijele krivine naziva se polumjerom κ cijele krivine, dakle je

$$\kappa = \frac{1}{R}. \qquad (64)$$

31. poučka: Za teoriju prostornih krivulja od osnovne su važnosti Frenet-ove formule (tri skupine, svaka od tri formula):

$$\frac{d\cos\alpha}{dl} = \frac{\cos\lambda}{\rho}, \quad \frac{d\cos\beta}{dl} = \frac{\cos\mu}{\rho}, \quad \frac{d\cos\gamma}{dl} = \frac{\cos\nu}{\rho}; \qquad (65)$$

$$\frac{d\cos\delta}{dl} = \frac{\cos\lambda}{\tau}, \quad \frac{d\cos\varepsilon}{dl} = \frac{\cos\mu}{\tau}, \quad \frac{d\cos\vartheta}{dl} = \frac{\cos\nu}{\tau}; \qquad (65a)$$

$$\frac{d\cos\lambda}{dl} = -\frac{\cos\alpha}{\rho} - \frac{\cos\delta}{\tau}, \quad \frac{d\cos\mu}{dl} = -\frac{\cos\beta}{\rho} - \frac{\cos\varepsilon}{\tau}$$

$$\frac{d\cos\nu}{dl} = -\frac{\cos\gamma}{\rho} - \frac{\cos\vartheta}{\tau}. \qquad (65b)$$

32. poučka: Kvadrat cijele krivine jednak je sumi kvadrata fleksije i torzije, t. j.

$$R^2 = f^2 + \varpi^2 \qquad (66)$$

ili

$$\frac{1}{\kappa^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2} \qquad (66a)$$

31. definicija: Središte krivine prostorne krivulje je točka na pozitivnom smjeru glavne normale (t. j. u ravnini oskulacije na konkavnoj strani krivulje) udaljena od $P(x_0, y_0, z_0)$ za polumjer fleksije ρ.

33. poučka: Koordinati ξ, η, ζ središta krivine određene su jednadžbama:

$$\xi = x_0 + \rho\cos\lambda \quad \eta = y_0 + \rho\cos\mu \quad \zeta = z_0 + \rho\cos\nu. \qquad (67)$$

H. Površine u prostoru.

32. definicija: Na nekoj površini

$$z = f(x, y) \qquad (68)$$

nacrtamo krivulju, koja prolazi kroz njezinu točku $P(x_0, y_0, z_0)$, pa konstruiramo tangentu krivulje u točki P. Taj pravac nazivamo ujedno i <u>tangentom površine</u> u točki P.

<u>34. poučka</u>: Uz pomišljaj, da parcijalne derivacije f'_x i f'_y postoje, i da su neprekinute, geometrijsko je mjesto svih tangenata površine (68) u točki P neka ravnina, koja se zove <u>tangencijalnom ravninom</u>.

<u>35. poučka</u>: Jednadžba tangencijalne ravnine u točki P glasi:

$$z-z_0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \qquad (69)$$

Ako je površina zadana jednadžbom

$$F(x,y,z)=0 \qquad (70)$$

tangencijalna joj je ravnina

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+$$
$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0 \qquad (71)$$

<u>33. definicija</u>: Ako su u (71) sve tri parcijalne derivacije F'_x F'_y F'_z jednake nuli, zove se točka $P(x_0,y_0,z_0)$ <u>singularnom točkom</u> zadane površine.

<u>36. poučka</u>: U točki P povučena okomica na tangencijalnu ravninu zove se <u>normalom</u> površine, a jednadžba je njezina za površinu (70)

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}\,; \qquad (72)$$

dok za površinu (68) glasi jednadžba normale

$$\frac{x-x_0}{-f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{-f'_y(x_0,y_0)} = z-z_0 \qquad (72a)$$

<u>37. poučka</u>: Označimo li sa $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ kutove, što ih normala zatvara sa smjerovima koordinatnih osi, vrijede relacije

$$\cos\omega_1 = \frac{-f'_x}{+\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}\,; \quad \cos\omega_2 = \frac{-f'_y}{+\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}\,;$$

$$\cos\omega_3 = \frac{1}{+\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+1}}\,. \qquad (73)$$

Ovdje je zgodno, da se uvedu slijedeće kratice:

$$f'_x = p \qquad f'_y = q \qquad f''_{xx} = r \qquad f''_{xy} = s \qquad f''_{yy} = t. \qquad (74)$$

38. poučka: Oblik površine u okolici točke $P(x_0, y_0, z_0)$ zavisi od predznaka izraza

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(x_0, y_0, z_0) = s^2 - rt\ ; \qquad (75)$$

ako je $\mathcal{D} < 0$, ima tangencijalna ravnina s površinom samo jednu zajedničku točku, pa površina (u okolini te točke) leži sva s jedne strane tangencijalne ravnine. Ako je $\mathcal{D} = 0$, ima tangencijalna ravnina s površinom zajedničku crtu, koja u općem slučaju ima u diralištu šiljak, a površina ili leži sva s jedne strane tangencijalne ravnine ili prodire tangencijalnu ravninu duž dodirne crte. Ako je $\mathcal{D} > 0$, ima tangencijalna ravnina s površinom zajedničku krivulju, koja ima u diralištu čvor, a površina leži dijelom iznad, a dijelom ispod tangencijalne ravnine.

39. poučka: Položimo li točkom P na površini (68) makar kakovu krivulju, koja leži sva na toj površini, bit će polumjer ϱ fleksije te krivulje u točki P

$$\varrho = \frac{\cos\nu - p.\cos\lambda - q.\cos\mu}{r.\cos^2\alpha + 2s.\cos\alpha\cos\beta + t.\cos^2\beta}\ ; \qquad (76)$$

vidimo dakle, da ϱ zavisi: 1) od p, q, r, s, t, i 2) od $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu$. Prve su veličine uvjetovane oblikom površine i položajem točke P na njoj, a druge položajem tangente i glavne normale krivulje, dakle ravninom oskulacije. Specijalni oblik same krivulje ne dolazi u obzir, pa je zato fleksija prostorne krivulje na zadanoj površini jednaka (u istoj točki) krivini presjeka površine sa ravninom oskulacije.

Ta je poučka od vrijednosti, jer svodi promatranje fleksije prostornih krivulja na promatranje krivine ravnih krivulja.

<u>34. definicija</u>: Položit ćemo kroz točku P ravninu, koja siječe površinu (68); kut, što ga normala površine u točki P zatvara s tom ravninom, označit ćemo s Θ. Krivulju, koja nastaje kao presjek površine s tom ravninom za $\Theta = 0$ ili π, nazivamo <u>normalnim presjekom</u>, a za $0 < \Theta < \pi$ <u>kosim presjekom</u>.

<u>40. poučka</u>: Za polumjer ϱ krivine kosoga presjeka vrijedi osnovna jednadžba

$$\frac{\cos\Theta}{\varrho} = \frac{r.\cos^2\alpha + 2s.\cos\alpha.\cos\beta + t.\cos^2\beta}{+\sqrt{p^2+q^2+1}}. \quad (77)$$

<u>41. poučka</u>: Središte krivine kosoga presjeka je projekcija (na ravninu tog kosog presjeka) središta krivine normalnoga presjeka (<u>Meusnier</u>, 1785). Označimo li sa R polumjer krivine normalnoga presjeka, to formula za <u>Meusnierov</u> teorem glasi

$$\varrho = R.|\cos\Theta|. \quad (78)$$

<u>42. poučka</u>: Za polumjer R krivine normalnoga presjeka vrijedi jednadžba

$$\frac{1}{R} = \frac{r.\cos^2\alpha + 2s.\cos\alpha.\cos\beta + t.\cos^2\beta}{+\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad (79)$$

ako je R pozitivno, znači da normalni presjek leži iznad tangencijalne ravnine, dok negativno R pripada normalnom presjeku, koji leži ispod tangencijalne ravnine.

Okrećemo li ravninu normalnoga presjeka oko normale kao osi, $\frac{1}{R}$ mijenja svoje vrijednosti (osim u iznimnim slučajevima, n. pr. kod <u>kugle</u>) primajući pri tome neki maksimum $\frac{1}{R_1}$ i neki minimum $\frac{1}{R_2}$.

<u>35. definicija</u>: Obje ekstremne vrijednosti polumjera krivine R nazivamo <u>glavnim polumjerima krivine</u>, a pripadne normalne presjeke <u>glavnim presjecima</u>.

<u>43. poučka</u>: Ako je $D < 0$, ne mijenja

$\frac{1}{R}$ svog predznaka. Kad se ravnina normalnoga presjeka okreće oko normale. Ako je $D=0$, ne mijenja $\frac{1}{R}$ svog predznaka, ali R postane za neki izvjesni smjer beskonačno veliko. Ako je $D>0$, mijenja $\frac{1}{R}$ svoj predznak prolazeći <u>dva</u> puta preko ništice, dakle je za dva smjera R beskonačno veliko.

<u>44. poučka</u>: Zakrenemo li koordinatni sustav tako, da ravnina Π_1 postane paralelna s tangencijalnom ravninom, a ravnina Π_2 paralelna s ravninom glavnoga presjeka polumjera krivine R_1 dobijemo jednadžbe

$$R_1 = \frac{1}{r} \qquad R_2 = \frac{1}{t} . \tag{80}$$

<u>45. poučka</u>: Polumjer krivine Rma kojega normalnog presjeka nađe se iz polumjera krivine R_1 i R_2 obaju glavnih presjeka po formuli

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}, \tag{81}$$

gdje je ω kut, što ga ravnina normalnoga presjeka zatvara s ravninom glavnog presjeka polumjera R_1 (<u>Euler</u>, 1760).

<u>46. poučka</u>: Oba glavna presjeka su jedan na drugome okomiti.

<u>36. definicija</u>: <u>Totalnom krivinom</u> T površine u nekoj točki nazivamo izraz

$$T = \frac{1}{R_1 \cdot R_2}, \tag{82}$$

a <u>srednjom krivinom</u> S izraz

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{83}$$

<u>47. poučka</u>: Totalna i srednja krivina određene su izrazima

$$T = \frac{rt - s^2}{(p^2+q^2+1)^2} \tag{84}$$

i

$$S = \frac{r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)}{2\left(\sqrt{p^2+q^2+1}\right)^3} \tag{85}$$

<u>37. definicija</u>: Točka, u kojoj je $\mathcal{D}<0$, dakle i $\operatorname{sgn} R_1 = \operatorname{sgn} R_2$, zove se <u>eliptičkom točkom</u>, a napose za $R_1 = R_2$ <u>kružnom točkom</u>. Za $\mathcal{D}=0$ imamo <u>paraboličnu</u> točku, a za $\mathcal{D}>0$, dakle i $\operatorname{sgn} R_1 = -\operatorname{sgn} R_2$, <u>hiperboličnu</u> točku.

<u>48. poučka</u>: U eliptičkoj je točki totalna krivina pozitivna, u hiperboličnoj negativna, a u paraboličnoj je jednaka nuli.

<u>38. definicija</u>: U tangencijalnoj ravnini uzet ćemo pravokutni koordinatni sustav (ξ, η) tako, da se ξ-os podudara s tangentom, koja određuje glavni presjek polumjera krivine R_1, a η-os s tangentom, koja određuje drugi glavni presjek. Za <u>eliptičnu</u> točku konstruirat ćemo u tom koordinatnom sustavu <u>elipsu</u>

$$\frac{\xi^2}{|R_1|} + \frac{\eta}{|R_2|} = 1, \qquad (86)$$

koja se zove <u>Dupinova (1813) indikatriks</u>

točke na površini. Za <u>hiperboličnu</u> točku sastoji se Dupinova indikatriks iz obiju <u>hiperbola</u>

$$\frac{\xi^2}{R_1} + \frac{\eta^2}{R_2} = 1 \quad \text{i} \quad -\frac{\xi^2}{R_1} - \frac{\eta^2}{R_2} = 1 \qquad (87)$$

U <u>paraboličnoj</u> točki uzimamo kao Dupinovu indikatriks <u>parabolu</u> (degeneriranu)

$$\frac{\xi^2}{|R_1|} = 1, \qquad (88)$$

koja se raspada u par usporednih pravaca

$$\xi = +\sqrt{|R_1|} \quad \text{i} \quad \xi = -\sqrt{|R_2|} \qquad (88a)$$

<u>49. poučka:</u> Označimo li sa ρ radij vektor točke na Dupinovoj indikatriksi, imamo za <u>eliptičnu</u> točku $\rho^2 = |R|$, t. j. kvadrat radija vektora jednak je apsolutnoj vrijednosti polumjera krivine pripadnoga normalnog presjeka. U <u>hiperboličnoj</u> točki imamo za prvu hiperbolu (87) $\rho^2 = R$, a za

drugu $\varrho^2 = -R$, dakle jednoj hiperboli pri„padaju pozitivni, a drugoj negativni po„lumjeri krivine. U paraboličnoj točki je opet $\varrho^2 = |R|$.

50. poučka: U hiperboličnoj točki rav„nine glavnih presjeka raspolavljaju oba kuta, što ih tvore ravnine onih normalnih presjeka, na kojima je krivina jednaka nuli.

Pripomena: Dupinova indikatriks je apro„ksimativno slična krivulji, što je dobijemo, ako površinu presiječemo ravninom, koja je paralelna s tangencijalnom ravninom, a od nje samo neznatno udaljena.

II. poglavlje.

Integralni račun.

§5. Neodređeni integrali.

A. Integriranje i integral. Osnovna je za„daća integralnoga računa ova: Zadana je u konačnom intervalu $a \leq x \leq b$ jednoznačna, neprekinuta i po odsječcima monotona funkci„ja $f(x)$, neka se u istomu intervalu nađe funk„cija $F(x)$, kojoj je zadana funkcija $f(x)$ deriva„cija, za koju dakle vrijedi relacija

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \qquad (1)$$

Pređemo li od diferencijalnoga kvocijenta (1) do diferencijala, imamo

$$d\,F(x) = f(x).dx\,; \qquad (1a)$$

prema tome je osnovna zadaća integralnoga računa, da iz diferencijala $dF(x)$ nađe samu funkciju $F(x)$, koja se zove <u>integral</u> zadane **funkcije** $f(x)$; sam se račun zove <u>integracija</u> ili <u>integriranje</u>. Postoji li uopće funkcija $F(x)$, koja rješava osnovni zadatak, bit će ona u zadanom intervalu svakako jednoznačna i neprekinuta. **Svako** rješenje jednadžbe (1a) piše se u obliku

$$F(x) = \int f(x).dx, \qquad (2)$$

dakle je i

$$F(x) = \int d\,F(x) \qquad (2a)$$

<u>1. poučka</u>: Postoji li uopće neki integral $F(x)$ diferencijala $f(x).dx$, to je i svaka druga funkcija $F(x)+K$, koja se od tog integrala razlikuje samo za neku <u>aditivnu konstantu</u> K, također integral zadanoga diferencijala; osim funkija tog oblika nema **nikakovih** drugih integrala zadanog diferencijala.

Vidimo dakle, da je osnovna zadaća integralnoga računa u toliko neodređena, što u rješenju imademo uvijek <u>konstantu integracije</u> K, koja je posve neodređena, pa se zato ti integrali zovu <u>neodređeni</u> integrali. Mjesto jednadžbe (2) valja dakle zapravo pisati:

$$\int f(x).dx = F(x) + K. \qquad (2b)$$

Iz (1) i (2) slijedi:

$$\frac{d}{dx}\int f(x).dx = f(x), \qquad (3)$$

a to znači, da je diferencijalni kvocijent nekog integrala jednak zadanoj funkciji $f(x)$, koja se zove <u>integrand</u>, dakle slijedi odatle

<u>2. poučka</u>: Derivacija integrala jednaka je integrandu.

Uz jednadžbu (3) vrijedi i jednadžba

$$\int F'(x).dx = F(x) + K, \qquad (3a)$$

dakle su deriviranje i integriranje inverzne operacije, koje se među sobom poništavaju.

3. poučka: Uvijek postoji neodređeni integral neprekinute, jednoznačne i po odsjecima monotone funkcije.

Pripomena: U 3. poučci navedene funkcije nisu jedine, koje možemo integrirati.

B. Osnovni integrali.

4. poučka: Iz formula §-a 1.D. slijede ove integralne formule:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \gtrless -1) \tag{4}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \tag{5}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \tag{6}$$

$$\int a^x\,dx = a^x \cdot \frac{1}{\ln a} \tag{6a}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \tag{7}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \tag{7a}$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x \tag{8}$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x \tag{8a}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \tag{9a}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x \tag{10a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x \quad (|x| \leqq 1) \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,cot} x \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{ar\,sh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{ar\,ch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar\,th} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \ (|x|<1) \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar\,cth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \ (|x|>1) \tag{15a}$$

C. Opća pravila za integriranje.

5. poučka: Integral algebarskoga zbroja funkcija jednak je algebarskome zbroju integrala pojedinih pribrojnika, t. j.

$$\int\{f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\ldots\pm f_m(x)\}dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm\int f_m(x)\cdot dx \qquad (16)$$

6. poučka: Integral produkta konstante i funkcije jednak je produktu te konstante i integrala zadane funkcije, t. j.

$$\int a.f(x).dx=a.\int f(x).dx, \qquad (17)$$

dakle konstantni faktori integrala mogu prelaziti pred znak integrala i obrnuto: integral se množi konstantom tako, da mu integrand pomnožimo tom konstantom.

D. Supstitucije nove varijable u integral.

Metoda supstitucije nastoji, da uvrštavanjem

nove varijable svede zadani integral na jedan od osnovnih integrala. Da se izračuna integral

$$J=\int f(x).dx$$

uvodi se zgodno odabranom supstitucijom

$$x=\varphi(t)$$

nova varijabla t. Supstitucija vodi do cilja, ako se integral

$$J=\int f[\varphi(t)].\varphi'(t).dt$$

može izračunati.

Nekoliko važnijih integrala dobivenih supstitucijom.

$$\int(ax+b)^m.dx=\frac{1}{a.(m+1)}.(ax+b)^{m+1} \qquad (m\neq-1)$$

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} \qquad (\text{supstitucija } x=at)$$

$$\int\frac{x\,dx}{a^2\pm x^2}=\pm\ln\sqrt{a^2\pm x^2} \qquad (\text{supst. } a^2\pm x^2=t)$$

$$\int tg\,x\cdot dx = -\ln|\cos x| \qquad (\text{supst. } \cos x = t)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\cdot\cos x} = \ln|tg\,x|$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\cdot\arcsin\frac{a}{x} \qquad (\text{supst. } \frac{a}{x}=t)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2\pm x^2} \qquad (\text{supst. } a^2\pm x^2=t^2)$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right| \qquad (\text{supst. } \frac{ax+b}{cx+d}=t)$$

$$\int \sin^n x\cdot\cos x\cdot dx = \frac{1}{n+1}\cdot\sin^{n+1}x.$$

$$\int \cos^2 x\cdot dx = \frac{1}{2}(x+\sin x\cdot\cos x)$$

$$\int \sin^2 x\cdot dx = \frac{1}{2}(x-\sin x\cdot\cos x)$$

$$\int \sin^{2n+1}x\cdot dx = -\cos x+\binom{n}{1}\cdot\frac{\cos^3 x}{3}-\binom{n}{2}\cdot\frac{\cos^5 x}{5}+\binom{n}{3}\cdot\frac{\cos^7 x}{7}- \dots \mp\binom{n}{1}\cdot\frac{\cos^{2n-1}x}{2n-1}\pm\frac{\cos^{2n+1}x}{2n+1}$$

$$\int \cos^{2n+1}x\cdot dx = \sin x-\binom{n}{1}\cdot\frac{\sin^3 x}{3}+\binom{n}{2}\cdot\frac{\sin^5 x}{5}-\binom{n}{3}\cdot\frac{\sin^7 x}{7}+ \dots \pm\binom{n}{1}\cdot\frac{\sin^{2n-1}x}{2n-1}\mp\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}.$$

$$\int \frac{tg^n x\cdot dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{n+1}\cdot tg^{n+1}x.$$

$$\int tg^{2m}x\cdot dx = \frac{tg^{2m-1}x}{2m-1}-\frac{tg^{2m-3}x}{2m-3}+\dots\pm\frac{tg^3 x}{3}\mp tg\,x\pm x.$$

$$\int tg^{2m+1}x\cdot dx = \frac{tg^{2m}x}{2m}-\frac{tg^{2(m-1)}x}{2(m-1)}+\dots\pm\frac{tg^4 x}{4}\mp\frac{tg^2 x}{2}\pm\ln\cos x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2m}x} = tg\,x+\frac{1}{3}\cdot\binom{m-1}{1}tg^3 x+\frac{1}{5}\cdot\binom{m-1}{2}tg^5 x+\frac{1}{7}\cdot\binom{m-1}{3}tg^7 x+ \dots +\frac{1}{2m-3}\cdot\binom{m-1}{m-2}tg^{2m-3}x+\frac{1}{2m-1}\cdot tg^{2m-1}x.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2m}x} = -\cot x-\frac{1}{3}\cdot\binom{m-1}{1}\cot^3 x-\frac{1}{5}\binom{m-1}{2}\cot^5 x-\frac{1}{7}\binom{m-1}{3}\cot^7 x- \dots -\frac{1}{2m-3}\cdot\binom{m-1}{m-2}\cot^{2m-3}x-\frac{1}{2m-1}\cdot\cot^{2m-1}x.$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\cdot dx = \frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (\text{supst. } x=a\sin t)$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\arcsin x-\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \frac{1}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}} \qquad (a^2-4b<0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \frac{1}{\sqrt{a^2-4b}} \cdot \ln \left| \frac{x+\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}}{x+\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}} \right| \qquad (a^2-4b>0)$$

$$\int \sqrt{a^2 \pm x^2} \cdot x . dx = \pm \frac{1}{3}(a^2 \pm x^2)^{\frac{3}{2}} \qquad (\text{supst. } a^2 \pm x^2 = t^2)$$

E. Parcijalna integracija. Ako su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ izvjesne funkcije varijable x, dobivamo iz diferencijalne formule

$$d(uv) = u . dv + v . du$$

osnovnu formulu za parcijalnu integraciju

$$\int u . dv = u . v - \int v . du , \qquad (18)$$

kojom nastojimo svesti izračunavanje integrala $\int u . dv$ na izračunavanje lakšega integrala $\int v . du$

Nekoliko važnijih integrala dobivenih parcijalnom integracijom.

$$\int \ln x . dx = x(\ln x - 1)$$

$$\int x^m . \ln x . dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right) \qquad (m \neq -1)$$

$$\int x . e^x . dx = e^x . (x-1)$$

$$\int x . \cos x . dx = x . \sin x + \cos x$$

$$\int \arcsin x . dx = x . \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \operatorname{arctg} x . dx = x . \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$\int \ln^m x . dx = x \{ \ln^m x - m . \ln^{m-1} x + m(m-1) . \ln^{m-2} x - + \ldots$$
$$\ldots \pm m(m-1)(m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot \ln x \mp m! \}$$

$$\int e^x . x^m . dx = e^x \{ x^m - m x^{m-1} + m(m-1) x^{m-2} - + \ldots$$
$$+ (-1)^{m-1} . m . (m-1) . (m-2) \ldots 3 . 2 . x + (-1)^m . m! \}$$

$$\int x^m . \cos x . dx = x^m . \sin x + m . x^{m-1} . \cos x - m(m-1) . x^{m-2} \sin x - + \ldots$$
$$\ldots \pm m(m-1)(m-2) \ldots 3 . 2 \, x \cdot {\sin x \atop \cos x} \pm m! \, {\cos \atop \sin} x .$$

$$\int x^m . \sin x . dx = -x^m . \cos x + m . x^{m-1} . \sin x + m(m-1) . x^{m-2} . \cos x - - + \ldots$$
$$\ldots \pm m(m-1)(m-2) \ldots 3 . 2 \, x \cdot {\cos \atop \sin} x \pm m! \, {\cos \atop \sin} x .$$

$$\int x^m . \ln^n x . dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \left[\ln^n x - \frac{n}{m+1} \cdot \ln^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} \ln^{n-2} x - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \pm \frac{n(n-1)(n-2) \ldots 3 . 2}{(m+1)^{n-1}} \cdot \ln x \mp \frac{n!}{(m+1)^n} \right]$$

$$\int \cos^{2n}x.dx = \frac{1}{2n}\cdot\cos^{2n-1}x.\sin x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\cdot\cos^{2n-3}x.\sin x + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)}\cdot\cos^{2n-5}x.\sin x + \dots + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots5.3}{2n(2n-2)(2n-4)\dots4.2}\cdot\cos x.\sin x + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots5.3.1}{2n(2n-2)(2n-4)\dots4.2}\,x.$$

$$\int \sin^{2n}x.dx = -\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}x.\cos x - \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\cdot\sin^{2n-3}x.\cos x - \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)}\cdot\sin^{2n-5}x.\cos x - \dots - \frac{(2n-1)(2n-3)\dots5.3}{2n(2n-2)(2n-4)\dots4.2}\cdot\sin x.\cos x + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots5.3.1}{2n(2n-2)(2n-4)\dots4.2}\,x.$$

$$\int\frac{dx}{\cos^{2m+1}x} = \frac{\sin x}{2m.\cos^{2m}x} + \frac{(2m-1)\sin x}{2m(2m-2).\cos^{2m-2}x} + \frac{(2m-1)(2m-3)\sin x}{2m(2m-2)(2m-4)\cos^{2m-4}x} + \dots + \frac{(2m-1)(2m-3)\dots5.3.\sin x}{2m(2m-2)\dots4.2.\cos^2 x} + \frac{(2m-1)(2m-3)\dots5.3.1}{2m(2m-2)\dots4.2}\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int\frac{dx}{\sin^{2m+1}x} = -\frac{\cos x}{2m.\sin^{2m}x} - \frac{(2m-1).\cos x}{2m(2m-2).\sin^{2m-2}x} - \frac{(2m-1)(2m-3).\cos x}{2m(2m-2)(2m-4).\sin^{2m-4}x} - \dots - \frac{(2m-1)(2m-3)\dots5.3.\cos x}{2m(2m-2)\dots4.2.\sin^2 x} + \frac{(2m-1)(2m-3)\dots5.3.1}{2m(2m-2)\dots4.2}\ln tg\frac{x}{2}.$$

$$\int e^x.\cos x.dx = \frac{1}{2}\cdot e^x(\sin x + \cos x)$$

$$\int e^x.\sin x.dx = \frac{1}{2}\cdot e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\int \sin^m x.\cos^n x.dx = \frac{\sin^{m+1}x.\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x.\cos^{n-2}x.dx$$

$$\int \sin^m x.\cos^n x.dx = -\frac{\sin^{m-1}x.\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x.\cos^n x.dx$$

$$\int tg^m x.dx = \frac{1}{m-1}\cdot tg^{m-1}x - \int tg^{m-2}x.dx$$

$$\int cot^m x.dx = -\frac{1}{m-1}\cdot cot^{m-1}x - \int cot^{m-2}x.dx$$

$$\int\frac{x^m.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m+2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2(m-1)}{m}\int\frac{x^{m-2}.dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int x^m.\sqrt{a^2-x^2}.dx = \frac{x^{m+1}}{m+2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m.dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{x^m.\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2(m-1).x^{m-1}} + \frac{m-2}{a^2(m-1)}\cdot\int\frac{dx}{x^{m-2}.\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int\frac{x^m.dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\cdot\sqrt{x^2\pm a^2} \mp \frac{a^2(m-1)}{m}\cdot\int\frac{x^{m-2}.dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

F. Integrali racijonalnih funkcija. Rastvorba u parcijalne razlomke.

7. poučka: Cijela racijonalna funkcija

$$\mathcal{F}(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

može se uvijek rastaviti u produkt realnih faktora prvoga i drugoga reda po formuli

$$\mathcal{F}(x)=a_n\cdot(x-\alpha_1)^{\beta_1}\cdot(x-\alpha_2)^{\beta_2}\dots(x-\alpha_k)^{\beta_k}\cdot$$
$$\cdot(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{\varepsilon_1}\cdot(x^2+\gamma_2 x+\delta_2)^{\varepsilon_2}\dots(x^2+\gamma_\ell x+\delta_\ell)^{\varepsilon_\ell}, \qquad (19)$$

gdje je

$$\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_k+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\dots+2\varepsilon_\ell=n; \qquad (19a)$$

brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jesu realni korjeni algebarske jednadžbe $\mathcal{F}(x)=0$, brojevi $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ znače multiplicitet svakog od tih realnih korjena. Budući da imaginarni korjeni u algebarskoj jednadžbi s realnim koeficijentima dolaze uvijek u parovima među sobom konjugiranih kompleksnih brojeva, to takova dva korjena $x_1=p+qi$ i $x_2=p-qi$ davaju u rastvorbi (19)

dva linearna faktora

$$[x-(p+qi)]\cdot[x-(p-qi)]=x^2-2px+(p^2+q^2)=x^2+\gamma x+\delta,$$

čiji je produkt kvadratni realni faktor $x^2+\gamma x+\delta$. Brojevi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\ell$ znače konačno multiplicitete pripadnih kompleksnih korjena.

Traži se integral $\int f(x)\,dx$ racijonalne razlomljene funkcije $f(x)=\frac{g(x)}{\mathcal{F}(x)}$, gdje su $g(x)$ i $\mathcal{F}(x)$ cijele racijonalne funkcije, dakle polinomi stepena m i n. Ako je $m \geq n$, podijelit će se brojnik s nazivnikom, pa će biti

$$\frac{g(x)}{\mathcal{F}(x)}=q(x)+\frac{\mathcal{H}(x)}{\mathcal{F}(x)},$$

gdje je $q(x)$ polinom stepena $m-n$, a ostatak $\mathcal{H}(x)$ je najviše stepena $n-1$. Sad se dakle radi o integraciji prave razlomljene racijonalne funkcije $\frac{\mathcal{H}(x)}{\mathcal{F}(x)}$. Podijelimo li konačno brojnik i nazivnik s a_n, t.j. s koeficijentom najvišega člana u nazivniku, imamo u integralu izraz

$$\frac{H(x)}{F(x)} = \frac{c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\dots+c_1x+c_0}{x^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\dots+b_1x+b_0}; \qquad (20)$$

tu pomišljamo, da brojnik i nazivnik nemaju zajedničkog faktora, da je dakle razlomak (20) reduciran na svoj najjednostavniji oblik. Konačno ćemo nazivnik u (20) rastvoriti po formuli (19) u realne faktore.

8. poučka: Svaka prava razlomljena racijonalna funkcija (20) može se rastvoriti u sumu „parcijalnih razlomaka":

$$\begin{aligned}\frac{H(x)}{F(x)} = {} & \frac{A}{(x-\alpha_1)^{\beta_1}} + \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^{\beta_1-1}} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^{\beta_1-2}} + \dots + \frac{A_{\beta_1-1}}{x-\alpha_1} + \\ & + \frac{B}{(x-\alpha_2)^{\beta_2}} + \frac{B_1}{(x-\alpha_2)^{\beta_2-1}} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^{\beta_2-2}} + \dots + \frac{B_{\beta_2-2}}{x-\alpha_2} + \\ & + \dots \\ & + \frac{Px+Q}{(x^2+\gamma_1x+\delta_1)^{\varepsilon_1}} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+\gamma_1x+\delta_1)^{\varepsilon_1-1}} + \dots + \frac{P_{\varepsilon_1-1}x+Q_{\varepsilon_1-1}}{x^2+\gamma_1x+\delta_1} + \\ & + \frac{Rx+S}{(x^2+\gamma_2x+\delta_2)^{\varepsilon_2}} + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+\gamma_2x+\delta_2)^{\varepsilon_2-1}} + \dots + \frac{R_{\varepsilon_2-1}x+S_{\varepsilon_2-1}}{x^2+\gamma_2+\delta_2} + \\ & + \dots;\end{aligned} \qquad (21)$$

brojevi $A, A_1, A_2, \dots, B, B_1, B_2, \dots, P, P_1, \dots, Q, Q_1, \dots$ jesu realne konstante, koje odredjujemo metodom neodredjenih koeficijenata, ako pomnožimo (21) s $F(x)$, pa postavimo, da su koeficijenti jednako visokih potencija od x s jedne i druge strane znaka jednakosti medju sobom jednaki.

Znat ćemo dakle izračunati integral svake racijonalne funkcije, ako poznamo integrale

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^\beta}\,dx \quad i \quad \int \frac{Px+Q}{(x^2+\gamma x+\delta)^\varepsilon}\,dx \qquad (22)$$

Prvi od tih integrala rješava se supstitucijom $x-\alpha=t$, dakle

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^\beta} = -\frac{1}{(\beta-1)(x-\alpha)^{\beta-1}} \quad (\beta>1) \qquad (23)$$

i

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|. \qquad (23a)$$

Drugi integral (22) rastavljamo u integrale oblika

$$\int\frac{x\,.\,dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\varepsilon}} \quad i \quad \int\frac{dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\varepsilon}}\,, \qquad (24)$$

gdje je svakako $\gamma^2-4\delta<0$, jer jednadžba $x^2+\gamma x+\delta=0$ nema realnih korjena. U prvi integral (24) uvrstimo

$$x=\frac{2x+\gamma}{2}-\frac{\gamma}{2}$$

pa imamo

$$\int\frac{x\,.\,dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\varepsilon}}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+\gamma)\,.\,dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\varepsilon}}-\frac{\gamma}{2}\int\frac{dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\varepsilon}} \qquad (25)$$

Prvi integral s desna u (25) rješava se supstitucijom $x^2+\gamma x+\delta=t$, dakle je

$$\int\frac{(2x+\gamma)\,.\,dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\varepsilon}}=-\frac{1}{(\varepsilon-1)(x^2+\gamma x+\delta)^{\varepsilon-1}} \qquad (\varepsilon>1) \qquad (26)$$

i $$\int\frac{(2x+\gamma)\,dx}{x^2+\gamma x+\delta}=\ln|x^2+\gamma x+\delta|\,. \qquad (26a)$$

Drugi integral s desna u (25) jednak je drugom integralu (24), a tu se kvadratni izraz u nazivniku ovako transformira:

$$x^2+\gamma x+\delta=\left(x+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\delta-\frac{\gamma^2}{4}=\left(\delta-\frac{\gamma^2}{4}\right).\left[\left(\frac{2x+\gamma}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}}\right)^2+1\right];$$

supstitucijom $t=\dfrac{2x+\gamma}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}}$ dobijemo

$$\int\frac{dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\varepsilon}}=\left(\frac{2}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}}\right)^{2\varepsilon-1}\cdot\int\frac{dt}{(t^2+1)^{\varepsilon}}\,. \qquad (27)$$

Za $\varepsilon=1$ imamo

$$\int\frac{dx}{x^2+\gamma x+\delta}=\frac{2}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+\gamma}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}}\,, \qquad (27a)$$

a za $\varepsilon>1$ uvest ćemo u (27) supstituciju $z=\operatorname{arc\,tg} t$, pa imamo

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^{\varepsilon}}=\int\cos^{2\varepsilon-2}z\,.\,dz\,, \qquad (27b)$$

a taj će se integral riješiti parcijalnom integracijom po gore navedenoj formuli u E.

Vidimo dakle, da se svi integrali racionalnih funkcija izražavaju elementarnim funkcijama, i to racionalnim funkcijama, prirodnim logaritmom i ciklometričkim funkcijama.

9. Integrali algebarskih funkcija. Malo ima iracijonalnih funkcija, koje možemo integrirati; u njima dolaze samo korjeni iz linearnih i kvadratnih funkcija. Evo najvažnijih tipova:

I. Integrali oblika

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)\cdot dx, \qquad (28)$$

gdje je R neka racijonalna funkcija varijable x i m-toga korjena iz linearno-razlomljene funkcije, rješavaju se supstitucijom

$$\frac{ax+b}{\alpha x+\beta} = t^m \qquad (29)$$

dakle

$$x = \frac{\beta t^m - b}{a - \alpha t^m}, \quad dx = m\cdot\frac{a\beta - b\alpha}{(a-\alpha t^m)^2}\cdot t^{m-1}\,dt, \qquad (29a)$$

koja pretvara integral (28) u integral racijonalne funkcije varijable t.

Ovamo ulaze i integrali oblika

$$\int R\left\{x, \left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right\}\cdot dx, \qquad (30)$$

gdje su $p, p_1, p_2, \ldots, p_k, q, q_1, q_2, \ldots, q_k$ cijeli (pozitivni ili negativni) brojevi. I ovdje vrijedi supstitucija (29), ako se za m uzme najmanji zajednički višekratnik apsolutnih vrijednosti svih brojeva q.

Važniji posebni slučajevi integrala (28) jesu ovi:

a) $a=1,\ b=0,\ \alpha=0,\ \beta=1$, dakle

$$\int R(x, \sqrt[m]{x})\cdot dx, \qquad x = t^m.$$

b) $\alpha=0,\ \beta=1$

$$\int R(x, \sqrt[m]{ax+b})\cdot dx, \qquad ax+b = t^m.$$

II. Integrali binomnih diferencijala.

$$\int x^m\cdot(a+bx^n)^p\cdot dx, \qquad (31)$$

gdje su a i b od nule različiti, a eksponenti m, n i p makar kakvi racijonalni brojevi, rješavaju se elementarnim metodama samo u nekim slučajevima. Supstitucija

$$x^n = t \qquad x = t^{\frac{1}{n}} \qquad dx = \frac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1}\cdot dt \tag{32}$$

pretvara integral (31) u

$$J = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot(a+bt)^p\cdot dt. \tag{33}$$

a) ako je p cio broj riješit će se integral (33) ovako: Razlomak $\frac{m+1}{n}$ svest ćemo na najjednostavniji oblik $\frac{r}{s}$, gdje su r i s cijeli brojevi bez zajedničke mjere, pa ćemo uvrstiti u (33)

$$t = z^s \qquad dt = s\cdot z^{s-1}\cdot dz, \tag{34}$$

što daje

$$J = \frac{s}{n}\int z^{r-1}(a+bz^s)^p\cdot dz \tag{34a}$$

a to je integral racionalne funkcije varijable z.

b.) ako je $\frac{m+1}{n}$ cio broj, a $p=\frac{r}{s}$ razlomak, uzet će se

$$a+bt = z^s \qquad t = \frac{z^s-a}{b} \qquad dt = \frac{s}{b}\cdot z^{s-1}\cdot dz,$$

pa imamo integral racionalne funkcije

$$J = \frac{s}{b.n}\cdot\int\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot z^{r+s-1}\cdot dz \tag{35}$$

c.) Ako je $\frac{m+1}{n}+p$ cio broj, a $p=\frac{r}{s}$ razlomak, pisat ćemo mjesto (33)

$$J = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\cdot\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p\cdot dt. \tag{36}$$

Supstitucija

$$\frac{a+bt}{t} = z^s \qquad t = \frac{a}{z^s-b} \qquad dt = -\frac{a.s.z^{s-1}.dz}{(z^s-b)^2} \tag{36a}$$

pretvara (36) u racijonalni integral

$$J = -\frac{a.s}{n}\int\left(\frac{a}{z^s-b}\right)^{\frac{m+1}{n}+p-1}\cdot\frac{z^{r+s-1}}{(z^s-b)^2}\cdot dz. \tag{36b}$$

III. Kod integrala racijonalnih funkcija varijable x i drugoga korjena iz kvadratnog izraza te varijable

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right).dx \tag{37}$$

valja paziti na predznak kvadratnog člana u korjenu.

a.) Ako je $a>0$, postavit će se

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}.\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \sqrt{a}.\sqrt{x^2+px+q}$$

Supstitucija

$$\sqrt{x^2+px+q} = x-t \qquad (38)$$

daje

$$x=\frac{t^2-q}{2t+p}, \; dx=2\frac{t^2+pt+q}{(2t+p)^2}dt, \; \sqrt{x^2+px+q}=-\frac{t^2+pt+q}{2t+p},$$

te pretvara (37) u integral racijonalne funkcije varijable t.

b.) Ako je $a<0$, postavit će se

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}.\sqrt{-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}} = \sqrt{-a}.\sqrt{-(x^2-px-q)}. \qquad (39)$$

Diskriminanta p^2-4q kvadratne jednadžbe

$$x^2-px-q=0 \qquad (39a)$$

mora biti positivna, jer inače ne bi bio irraz (39) nikada realan. Dakle ima jednadžba (39a.) dva različita realna korjena $x_1=\alpha$ i $x_2=\beta$ ($\alpha<\beta$, a radi realiteta korjena mora biti i $\alpha\leqq x\leqq\beta$). Supstitucija

$$x-\alpha=(\beta-x).t^2 \qquad (40)$$

daje

$$\sqrt{-x^2+px+q} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (\beta-x).t,$$

$$x=\frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2}, \; dx=2(\beta-\alpha).\frac{t.dt}{(1+t^2)^2}, \; \sqrt{-x^2+px+q}=(\beta-\alpha).\frac{t}{1+t^2},$$

a to pretvara (37) u integral racijonalne funkcije.

IV. Integrali oblika

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{\alpha x+\beta}).dx \qquad (41)$$

pretvaraju se supstitucijom

$$ax+b=t^2 \qquad (41a)$$

u integrale

$$\frac{2}{a}\int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t, \sqrt{\frac{\alpha}{a}(t^2-b)+\beta}\right).t.dt$$

koji su III. oblika.

H. Integrali transcendentnih funkcija.

Malo ima općih oblika integrala transcendentnih funkcija, koje znamo integrirati; ovdje se navode samo najvažniji.

I. Integrali racijonalnih funkcija sinusa i cosinusa

$$\int R(\sin x, \cos x) \cdot dx \qquad (42)$$

rješavaju se supstitucijom

$$tg \frac{x}{2} = t \qquad (42a)$$

koja daje

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \; x = 2.\operatorname{arc} tg t, \; dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

pa transformira (42) u integral racijonalne funkcije varijable t.

Pripomene. a.) Tangens i cotangens su racijonalne funkcije sinusa i cosinusa, dakle i za integrale racijonalnih funkcija makar kojih goniometričkih funkcija vrijedi supstitucija (42a).

b.) Kod racijonalnih takih funkcija od $\sin x$ i $\cos x$ može se postaviti

$$tg x = t, \; x = \operatorname{arc} tg t, \; dx = \frac{dt}{1+t^2}, \; \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

c) U integralima

$$\int R(\sin^2 x, \cos x).\sin x. dx \quad i \quad \int R(\sin x, \cos^2 x). \cos x. dx$$

uzet će se $\cos x = t$, odnosno $\sin x = t$.

d.) Kod integrala

$$\int R(tg x). dx$$

uzet će se $tg x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

II. Kod integrala oblika

$$\int \cos(ax+\alpha). \cos(bx+\beta). dx \qquad (43)$$

upotrijebit će se formula

$$\cos\sigma. \cos\tau = \frac{1}{2}\left[\cos(\sigma+\tau) + \cos(\sigma-\tau)\right].$$

To vrijedi i za slične integrale.

III. Integrali racijonalnih funkcija eksponencijalne funkcije

$$\int R(e^{mx}). dx \qquad (44)$$

pretvaraju se supstitucijom

$$e^{mx} = t \qquad x = \frac{\ln t}{m} \qquad dx = \frac{dt}{mt} \qquad (44a)$$

u integrale racijonalnih funkcija varijable t.

§6. Određeni integrali.

A. Pojam određenog integrala. Zadana je u konačnom zatvorenom intervalu $a \leqq x \leqq b$ kontinuirana funkcija $f(x)$. Na osi x razdijelit ćemo interval među dvjema susjednim cijelim brojevima u dvije polovice, a te ćemo nove intervale opet raspolovití i t.d.; primijenimo li taj postupak q puta sa redom, bit će dužina svakoga intervala $\frac{1}{2^q}$, a $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ neka su tom diobom dobivene točke, koje leže između a i b. Označit ćemo sa m_0 najmanju vrijednost funkcije $f(x)$ u intervalu $a \leqq x \leqq x_1$, sa m_1 najmanju vrijednost u intervalu $x_1 \leqq x \leqq x_2$ i t.d; konačno sa m_k njezinu najmanju vrijednost u intervalu $x_k \leqq x \leqq b$. Suma

$$S = m_0(x_1-a) + m_1(x_2-x_1) + \dots + m_k(b-x_k) \qquad (1)$$

je svakako prema gore ograničena; ako je

naime M maksimum funkcije u cijelom intervalu $a \leqq x \leqq b$, bit će

$$m_0 \leqq M, \quad m_1 \leqq M, \dots, m_k \leqq M,$$

dakle i $S \leqq M(x_1-a) + M(x_2-x_1) + \dots + M(b-x_k)$, t.j.

$$S \leqq M.(b-a). \qquad (2)$$

Raspolovimo li još jednom sve intervale, bit će dužina svakog od njih $\frac{1}{2^{q+1}}$; suma (1) pretvorit će se u neku sličnu sumu S'. Ako je ξ_h polovište intervala $x_h \leqq x \leqq x_{h+1}$, μ minimum funkcije između x_h i ξ_h, a μ' minimum njezin između ξ_h i x_{h+1}, odgovarat će općem članu $m_h(x_{h+1}-x_h)$ u prijašnjoj sumi (1) sada članovi

$$\mu(\xi_h - x_h) + \mu'(x_{h+1} - \xi_h)$$

u novoj sumi S'. No jer je uopće $\mu \geqq m_h$ i $\mu' \geqq m_h$, bit će svakako

$$S' \geqq S \qquad (3)$$

Raspolavljamo li dakle intervale sve dalje i dalje, tvorit će pripadne sume slijed

$$S, S', S'', S''', \ldots\ldots, S^{(n)}, \ldots\ldots,$$

koji radi (3) monotono raste, a koji je radi (2) prema gore ograničen. Postoji dakle određeni konačni broj Σ tako, da je

$$\Sigma = \lim_{n\to\infty} S^{(n)} \tag{4}$$

1. definicija: Broj Σ definiran jednadžbom (4) zove se određeni integral funkcije $f(x)$ uzet od a do b, a bilježi se oznakom

$$\Sigma = \int_a^b f(x).dx \tag{5}$$

Brojevi a i b zovu se donja i gornja granica integracije, a interval $a \leqq x \leqq b$ zove se intervalom integracije.

1. poučka: Ako je $a<c<b$, vrijedi formula

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx. \tag{6}$$

Pripomena. Ako je $a<c<d<e<\ldots<l<b$, dobit ćemo opetovanom aplikacijom formule (6)

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^d + \int_d^e + \ldots + \int_l^b. \tag{6a}$$

2. poučka: Ako je m minimum, a M maksimum funkcije u intervalu od a do b, vrijedi relacija

$$m.(b-a) \leqq \int_a^b f(x).dx \leqq M.(b-a) \tag{7}$$

Pripomena. Formulu (7) možemo pisati

$$\int_a^b f(x).dx = \mu.(b-a), \tag{8}$$

gdje je μ izvjestan broj između m i M. No jer je funkcija neprekinuta, prima u intervalu od a do b sve vrijednosti između m i M, dakle za neko posebno $x=\xi$ i vrijednost μ, pa imamo

$$\int_a^b f(x).dx = (b-a).f(\xi), \quad (a \leqq \xi \leqq b). \tag{9}$$

3. poučka: Na osi x uzet ćemo između a i b sasvim po volji nekoliko točaka $x_1, x_2, \ldots x_k$, a u svakomu od tih intervala $a \leqq x \leqq x_1$, $x_1 \leqq x \leqq x_2, \ldots, x_k \leqq x \leqq b$ po volji po jednu točku

$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$. Suma

$$\sigma = (x_1 - a)\cdot f(\xi_0) + (x_2 - x_1)\cdot f(\xi_1) + \ldots + (b - x_k) f(\xi_k) \qquad (10)$$

ima za limes integral (5), kad broj k djelišta raste u beskonačnost tako, da se dužina svakog djelomičnog intervala neograničeno približava nuli.

Pripomene. a.) Gornjom poučkom, dakle zapravo jednadžbom

$$\lim_{k \to \infty} \sigma = \int_a^b f(x)\cdot dx \qquad (11)$$

definiran je određeni integral na mnogo općenitiji način nego li jednadžbom (5).

b.) Ne smije se zaboraviti, da u 3. poučci pomišljamo, da je funkcija $f(x)$ neprekinuta u konačnom zatvorenom intervalu $a \leq x \leq b$; kasnije će se vidjeti, da se pojam određenog integrala može proširiti i preko tih stega.

c.) Dužine $x_{k+1} - x_k$ djelomičnih intervala možemo označiti sa Δx_k; prema tome je suma (10) oblika

$$\sigma = \sum f(\xi_k)\cdot \Delta x_k \; ; \qquad (12)$$

graničnim prelazom dobivamo odatle integral (11) pri čemu se konačne diferencije Δx_k pretvaraju u diferencijale dx, a konačna suma Σ u beskonačnu sumu $\int$, čiji su članovi sve sami diferencijali $f(x)\cdot dx$.

d.) Znak $\int$ nastao je iz slova S (suma), a uveo ga je Leibniz g. 1675

Geometrijsko značenje određenoga integrala. Nacrtamo li sliku neprekinute funkcije $y = f(x)$ u pravokutnim koordinatama, vidimo, da nam pojedini sumandi u (10) znače ploštine pravokutnika, kojima su base djelomični intervali $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, a visine vrijednosti $f(\xi_k)$. Ploštinom P ravnoga lika, koji je omeđen odreskom $a \leq x \leq b$ osi apscisa, onim dvjema ordinatama, koji pripadaju krajevima toga odreska, te lukom krivulje, koji leži među tim dvjema ordinatama, definiramo limes sume ploština svih opisanih pravokutnika, kad svaka osnovica postane beskonačno malena. Po trećoj je poučci dakle

$$P=\int_a^b f(x)\cdot dx\,, \qquad (13)$$

a to je geometrijsko značenje određenoga integrala. Ploštine likova iznad osi x su pozitivne, a onih ispod osi x su negativne.

B. Glavne poučke o određenim integralima.

4. poučka:

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx \qquad (14)$$

5. poučka:

$$\int_a^a f(x)\cdot dx = 0$$

6. poučka: Poučka prva ovoga paragrafa vrijedi i za opći pojam određenoga integrala, kako je definiran 3. poučkom.

7. poučka: Druga poučka vrijedi i za opći pojam određenoga integrala. To je prva integralna poučka o srednjoj vrijednosti.

8. poučka: Ako je u cijelom intervalu $a \leq x \leq b$ uvijek $f(x)>0$, bit će

$$\int_a^b f(x)\cdot dx > 0\,. \qquad (16)$$

9. poučka: Ako u intervalu od a do b vrijedi uvijek

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x)\,,$$

ima to za posljedicu relaciju

$$\int_a^b \varphi(x) dx < \int_a^b f(x)\cdot dx < \int_a^b \psi(x)\cdot dx \quad (a<b) \qquad (17)$$

10. poučka: Integral like funkcije uzet između granica, koje se razlikuju samo po predznaku, jednak je nuli, t.j.

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\cdot dx = 0 \qquad (18)$$

ako je $f(-x) = -f(x)$.

11. poučka: Za taku funkciju vrijedi formula

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\cdot dx = 2\int_0^a f(x)\cdot dx\,, \qquad (19)$$

gdje je dakle $f(-x) = f(x)$.

<u>12. poučka:</u> Određeni je integral <u>nepre-kinuta</u> funkcija svoje gornje granice, dakle je funkcija

$$\mathcal{F}(z)=\int_a^z f(x).dx \qquad (20)$$

kontinuirana.

<u>Pripomena:</u> Određeni je integral i neprekinuta funkcija svoje donje granice.

<u>13. poučka:</u>

$$\frac{d}{dz}\int_a^z f(x).dx=\frac{d\mathcal{F}(z)}{dz}=\mathcal{F}'(z)=f(z). \qquad (21)$$

<u>Pripomena.</u> Neposredno iz (21) slijedi

$$d\int_a^z f(x).dx=f(z).dz\ ;$$

vidimo dakle, da se operacije diferenciranja i integriranja među sobom poništavaju.

<u>14.(osnovna) poučka:</u> Vrijednost određenoga integrala dobije se tako, da se od vrijednosti neodređenoga integrala za gornju granicu integracije odbije vrijednost njegova za donju granicu, dakle je

$$\int_a^b f(x).dx=\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a) \qquad (22)$$

gdje je

$$\mathcal{F}(x)=\int f(x).dx.$$

<u>15. poučka:</u> Svaka u nekom zatvorenom intervalu neprekinuta funkcija $f(z)$ je derivacija neke <u>neprekinute</u> funkcije $\mathcal{F}(z)$.

<u>Pripomena.</u> Po toj poučci ima svaka neprekinuta funkcija svoj integral (koji je pače i sam neprekinuta funkcija) dok svaka neprekinuta funkcija ne mora imati derivacije, a ako je ima, ta derivacija ne mora biti neprekinuta funkcija.

<u>16. poučka:</u> Neka su funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ neprekinute u zatvorenom intervalu $a\leqq x\leqq b$, a osim toga neka je $\psi(x)$ istoga predznaka duž cijeloga intervala; m neka je minimum, a M maksimum funkcije $\varphi(x)$ u tom intervalu. Onda je

$$\int_a^b \varphi(x).\psi(x).dx=\mu.\int_a^b\psi(x).dx\ . \quad (m\leqq\mu\leqq M) \qquad (23)$$

Jer je $\varphi(x)$ neprekinuto, postoji neko ξ između a i b tako, da je $\mu=\varphi(\xi)$, pa možemo (23) pisati u obliku

$$\int_a^b \varphi(x).\psi(x).dx=\varphi(\xi).\int_a^b \psi(x).dx \qquad (a\leq\xi\leq b) \qquad (24)$$

To je <u>druga integralna poučka o srednjoj vrijednosti</u>.

<u>17. poučka:</u> Uvedemo li u integral $\int_a^b f(x)dx$ novu varijablu z jednadžbom $x=\varphi(z)$, koja inverzijom daje $z=\psi(x)$, bit će $dx=\varphi'(z).dz$ i $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$ pa imamo

$$\int_a^b f(x).dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(z)].\varphi'(z).dz. \qquad (25)$$

Jednadžbu supstitucije $x=\varphi(z)$ valja tako odabrati, da je $\varphi(z)$ i $\varphi'(z)$ jednoznačno i neprekinuto od α do β.

<u>C. Izračunavanje nekih određenih integrala</u>

<u>18. poučka</u> (Wallisova formula, 1655): Iz integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x.dx$$

slijedi

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty} \frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdots\frac{2n.2n}{(2n-1)(2n+1)}. \qquad (26)$$

<u>19. poučka</u> (Stirlingova formula, 1730): Faktorijele možemo približno izračunati iz izraza

$$n!=n^n.e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.\sqrt{2\pi n}, \quad (0<\theta<1) \qquad (27)$$

što možemo pisati i ovako

$$n^n.e^{-n}.\sqrt{2\pi.n}<n!<n^n.e^{-n+\frac{1}{12n}}.\sqrt{2\pi.n} \qquad (28)$$

<u>D. Proširenje pojma integrala</u>. Ponajprije promatramo integral, kome interval integracije nije konačan.

<u>2. definicija:</u> Postoji li

$$\lim_{z\to\infty}\int_a^z f(x).dx=\lim_{z\to+\infty}\Big[\Phi(x)\Big]_a^z=\lim_{z\to+\infty}\Phi(z)-\Phi(a), \qquad (29)$$

gdje je $\Phi(x)=\int f(x).dx$,

označujemo taj limes kraće sa

$$\int_0^\infty f(x).dx \qquad (30)$$

pa kažemo, da je integral (30) <u>konvergentan</u>. Ne postoji li limes (29), integral (30) je <u>divergentan</u>.

<u>3. definicija</u>: Integral (30) je <u>apsolutno konvergentan</u>, ako je konvergentan i integral

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\cdot dx\ ; \qquad (31)$$

integral je <u>relativno</u> konvergentan, ako je on konvergentan, a ujedno integral (31) divergentan.

<u>Primjedbe</u>. a) Integral

$$J = \int_{-\infty}^{b} f(x).dx \qquad (32)$$

izračunat ćemo po 2. definiciji, ako pišemo

$$J = -\int_b^{-\infty} f(x).dx$$

te ovamo supstituiramo $x=-t$, $dx=-dt$, dakle je

$$J = \int_{-b} f(-t).dt$$

b.) Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx \qquad (33)$$

rastavit ćemo u dva integrala:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \int_{-\infty}^{a} f(x).dx + \int_a^{\infty} f(x).dx, \qquad (34)$$

pa smo tako sveli taj slučaj na integrale (30) i (32). Redovno će biti najzgodnije, da se uzme $a=0$.

<u>20. poučka</u>: <u>Opći uvjet za konvergenciju</u> integrala (30) glasi ovako: K svakomu po volji zadanom, makar kako malenom pozitivnom broju ε mora postojati izvjesni broj ξ tako, da je za <u>svako</u> z iz intervala $\xi \leq z \leq +\infty$

$$\left| \int_{\xi}^{z} f(x).dx \right| < \varepsilon . \qquad (35)$$

Ne može li se k broju ε naći neko ξ, koje udovoljava uvjetu (35), integral (30) je divergentan.

<u>21. poučka</u>: <u>Fresnelovi</u> su integrali

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 . dx \quad i \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 . dx$$

<u>relativno konvergentni</u>; njihova je zajednička vrijednost $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

<u>22. poučka</u>: Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot dx$$

je relativno konvergentan, a numerička mu je vrijednost $\frac{\pi}{2}$.

<u>23. poučka</u>: Integral

$$\int_a^\infty f(x) \cdot dx \qquad (a \geq 0)$$

bit će konvergentan, ako za <u>svako</u> $x \geq a$ vrijedi relacija

$$0 \leqq x^n \cdot f(x) \leqq A \tag{36}$$

gdje je <u>konačni</u> broj A pozitivan ili nula, a $n > 1$. Vrijedi li pako relacija

$$x \cdot f(x) \geqq A, \tag{36a}$$

integral je divergentan.

<u>Primjene</u>. a.) Ako je $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ racionalna razlomljena funkcija, gdje je nazivnik $Q(x)$ polinom stepena m, bit će ispunjen uvjet (36), čim je brojnik $P(x)$ polinom <u>najviše</u> stepena $m-2$.

b.) Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{n-1} \cdot dx \qquad (n > 0)$$

je <u>konvergentan</u>; ako je posebice n pozitivan cio broj > 1, imamo

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{n-1} \cdot dx = (n-1)! \tag{37}$$

c.) Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{38}$$

je konvergentan.

<u>24. poučka</u>: Ako je funkcija $f(x)$ u intervalu $a \leqq x < +\infty$ pozitivna i konačna, te monotono pada, pa ako je integral

$$\int_a^\infty f(x) \cdot dx$$

konvergentan, onda je <u>konvergentna</u> i beskonačna suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\xi + n) = f(\xi) + f(\xi+1) + f(\xi+2) + \ldots,$$

gdje je ξ ma koji <u>cio</u> broj $\geq a$. Ako je pako integral divergentan, i suma je divergentna.

Sad ćemo promatrati integrale, u kojima integrand nije neprekinut, pa neka je najprije <u>integrand diskontinuiran na gornjoj granici</u> integracije.

4. definicija: Postoji li odredjen konačan limes

$$\lim_{\beta\to+0}\int_a^{b-\beta} f(x).dx = \lim_{\beta\to+0}\Phi(b-\beta)-\Phi(a), \qquad (39)$$

označujemo ga kraće sa $\int_a^b f(x).dx$, pa kažemo, da je taj integral konvergentan.

Pripomene: a.) Integral, kome je integrand diskontinuiran na donjoj granici integracije, definiramo jednadžbom

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_{a+\alpha}^{b} f(x).dx = \Phi(b)-\lim_{\alpha\to+0}\Phi(a+\alpha)=\int_a^b f(x).dx \qquad (40)$$

b.) Ako je funkcija $f(x)$ prekinuta za koju vrijednost $x=c$ u intervalu $a\leqq x\leqq b$, postavljamo

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\gamma\to+0}\int_a^{c-\gamma} f(x).dx + \lim_{\delta\to+0}\int_{c+\delta}^{b} f(x).dx, \qquad (41)$$

gdje se γ i δ neograničeno približavaju nuli preko pozitivnih vrijednosti, i to jedno od drugoga neravisno.

c.) Ima li u intervalu od a do b više točaka diskontinuiteta, rastavit će se inter-

val od a do b baš tim točkama u djelomične intervale, pa će se postupati po formuli (41).

25. poučka: Neka integrand $f(x)$ ima diskontinuitet $x=d$ u intervalu $a\leqq x\leqq b$. Vrijedi li za svako x iz tog intervala relacija

$$(d-x).f(x)>A>0, \qquad (42)$$

integral je divergentan. Vrijedi li pako relacija

$$0<(d-x)^n.f(x)<A \qquad (42a)$$

za pozitivno $n<1$, integral je konvergentan.

Pripomene. a.) Integral

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{(x-c)^n} \qquad (a\leqq c\leqq b)$$

bit će konvergentan, kad je $n<1$ i $\varphi(c)\neq 0$.

b.) Integral racijonalne funkcije, kojoj je nazivnik jednak nuli za koju točku intervala integracije, je divergentan, jer je svako $n\geqq 1$.

c.) Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (k^2<1)$$

je konvergentan.

E. Integracija beskonačnih redova.

<u>26. poučka</u>: U intervalu $A \le x \le B$ <u>uniformno konvergentan</u> red

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots \qquad (43)$$

može se integrirati „član po član" unutar granica, koje su konačne i sadržane u intervalu njegove uniformne konvergencije, dakle je red

$$\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\dots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\dots \qquad (43a)$$

$$(A\le a<b\le B)$$

konvergentan i predočuje u intervalu od a do b funkciju

$$\int_a^b S(x)\,dx \qquad (43b)$$

<u>27. poučka</u>: Red (43a) je uniformno konvergentan za svako b iz intervala od A do B.

<u>Pripomene.</u> a.) Ako je red (43) uniformno konvergentan u intervalu $A<x<B$, ali nije i na granicama intervala A ili B, no ako razvoj (43a) konvergira za $a=A$ ili $b=B$, predočuje on i za tu vrijednost funkciju (43b) (Abel)

b.) Integracijom dobijemo ove redove

$$\arcsin z = z+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7}+\dots \qquad (44)$$

$$+\dots+\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2\cdot 4\dots 2n}\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\dots \qquad (|z|\le 1)$$

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}+\dots \qquad (44a)$$

$$\operatorname{arc\,tg} z = z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-+\dots+(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\dots \qquad (45)$$

$$(-1<z\le +1)$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\dots \qquad (45a)$$

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}\right)+\dots \qquad (45b)$$

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\dots\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\dots\right) \qquad (45c)$$

$$\operatorname{ar\,th} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq z < +1) \tag{46}$$

$$\operatorname{ar\,sh} z = z - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^7}{7} + - \dots \quad (|z| \leq 1) \tag{47}$$

Integracijom redova dolazimo do važnih <u>transcendentnih funkcija</u>.

<u>5. definicija</u>: Funkcija „<u>integralni sinus</u>" definirana je jednadžbom

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin x}{x}\cdot dx. \tag{48}$$

<u>28. poučka</u>: Za svako konačno x vrijedi razvoj

$$Si(x) = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + - \dots \tag{49}$$

koji nam ujedno pokazuje, da je $Si(x)$ lika funkcija.

<u>6. definicija</u>: Funkcija „<u>integralni cosinus</u>" definirana je jednadžbom

$$Ci(z) = -\int_z^\infty \frac{\cos x}{x}\cdot dx \tag{50}$$

<u>29. poučka</u>: Sa $Ci(z)$ u tijesnoj je vezi funkcija

za koju vidimo iz razvoja (51) da je taka funkcija.

<u>7. definicija</u>: Funkcija

$$li(z) = \int_0^z \frac{dx}{\ln x} \tag{52}$$

zove se „<u>integralni logaritam</u>". Supstitucijom $x = e^y$ prelazi ta funkcija u „<u>integralnu eksponencijalnu funkciju</u>"

$$Ei(u) = \int_{-\infty}^u \frac{e^y}{y}\cdot dy, \tag{53}$$

gdje je $u = \ln z$; vrijedi dakle relacija

$$Ei(\ln z) = li(z) \quad \text{ili} \quad Ei(u) = li(e^u). \tag{54}$$

<u>30. poučka</u>: Sa $li(z)$ i $Ei(z)$ u tijesnoj je vezi funkcija

$$\int_0^z \frac{e^x - 1}{x}\cdot dx = z + \frac{z^2}{2.2!} + \frac{z^3}{3.3!} + \frac{z^4}{4.4!} + \dots; \tag{55}$$

taj razvoj konvergira za svako konačno z.

8. definicija: Jednadžbom

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}.dx \qquad (56)$$

definirana je funkcija, koja se zove Kramp-Laplace-ovom transcendentom; ona je od velike važnosti u računu vjerojatnosti.

31. poučka: Za svako konačno z vrijedi razvoj

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z-\frac{z^3}{3.1!}+\frac{z^5}{5.2!}-\frac{z^7}{7.3!}+\frac{z^9}{9.4!}-+\dots\right). \quad (57)$$

9. definicija: Integralom

$$\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (k^2<1,\ |z|\leq 1). \ (58)$$

definirana je funkcija varijable z i parametra k. To je Legendre-ov eliptički normalni integral prve vrsti. Supstitucijom $x=\sin\psi$ $\varphi=\arcsin z$ pretvara se u

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=F(k,\varphi) \quad (k^2<1,\ 0\leq\varphi\leq\tfrac{\pi}{2}); \ (59)$$

k je modul, a φ je amplituda eliptičkog integrala.

32. poučka: Označimo li

$$J_{2m}=\int_0^{\varphi}\sin^{2m}\psi.d\psi=\frac{1.3.5\dots(2m-1)}{2.4.6\dots 2m}\varphi-$$

$$-\cos\varphi\left[\frac{\sin^{2m-1}\varphi}{2m}+\frac{(2m-1)\sin^{2m-3}\varphi}{2m(2m-2)}+\frac{(2m-1)(2m-3)\sin^{2m-5}\varphi}{2m(2m-2)(2m-4)}+\right.$$

$$\left.\dots+\frac{(2m-1)(2m-3)\dots 5.3.\sin\varphi}{2m.(2m-2)\dots 4.2}\right], \qquad (60)$$

imamo razvoj

$$F(k,\varphi)=J_0+\tfrac{1}{2}k^2J_2+\frac{1.3}{2.4}\cdot k^4J_4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot k^6J_6+\dots \quad (61)$$

Za $z=1$, t.j. $\varphi=\frac{\pi}{2}$ imamo potpuni eliptični integral prve vrsti $F(k)$, za koji vrijedi razvoj

$$F(k)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot k^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot k^6+\dots\right) \quad (61a)$$

10. definicija: Integral

$$\int_0^z\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\cdot dx \quad (k^2<1,\ |z|\leq 1) \quad (62)$$

zove se Legendre-ov eliptički normalni integral druge vrsti, a supstitucijom $x = \sin y$ prelazi u

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 y} \cdot dy = E(k,\varphi) \cdot \left(k^2 < 1,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (63)$$

33. poučka: Vrijedi razvoj

$$E(k,\varphi) = J_0 - \frac{1}{2} k^2 J_2 - \frac{1}{2.4} k^4 J_4 - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot k^6 J_6 - \ldots; \quad (64)$$

potpuni je eliptični integral druge vrsti

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} \cdot k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} \cdot k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} \cdot k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2} \cdot k^8 - \ldots\right), \quad (64a)$$

F. Deriviranje integrala.

34. poučka: Ako je $f(x,\alpha)$ neprekinuta funkcija, čija varijabla x i α za $a \leq x \leq b$ i za $\lambda \leq \alpha \leq \mu$, onda je

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha) . dx$$

neprekinuta funkcija varijable α u intervalu $\lambda \leq \alpha \leq \mu$.

35. poučka: Ima li funkcija $f(x,\alpha)$ neprekinutu prvu parcijalnu derivaciju $f'_\alpha = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$, vrijedi zakon

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \cdot dx . \quad (65)$$

Pripomene. a.) Formula (65), koju je poznavao već Leibniz, kazuje nam, da možemo (uz stege 35. poučke) derivirati pod znakom integrala.

b) Aplikacijom 35. poučke možemo izračunati neke određene integrale, kako se vidi iz ovih primjera:

α) Iz

$$\Phi(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{1+\alpha^2 x^2}$$

slijedi posebice za $\alpha = 1$

$$\int_0^b \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} b - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{1+b^2}$$

β) Iz

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} . dx$$

dobijemo

$$\int_0^\infty x^n . e^{-\alpha x} . dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Posebice za $\alpha = 1$ slijedi

$$\int_0^\infty x^n \cdot e^{-x} \cdot dx = n! \qquad (66)$$

Integralom (66) definirana funkcija varijable n zove se Γ-funkcija ili Eulerova funkcija druge vrsti, pa imamo oznaku

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n \cdot e^{-x} \cdot dx \; ; \qquad (66a)$$

Kad je n positivan cio broj, imamo $\Gamma(n+1) = n!$

8). Iz $\quad \Phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} \quad (\alpha > 0)$

dobijemo $\quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n} \cdot \frac{1}{\alpha^n\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\pi}{2}$

G. Približna integracija. Dužinu $b-a$ intervala integracije razdijelit ćemo u n dijelova, pa ćemo uvesti oznaku

$$h = \frac{b-a}{n}. \qquad (67)$$

Nadalje znače nam

$$y_0 = f(a) \quad y_1 = f(a+h) \quad y_2 = f(a+2h), \ldots,$$

$$y_{n-1} = f(a+[n-1]h), \quad y_n = f(b).$$

36. poučka: Trapezna formula za približnu integraciju glasi

$$\int_a^b f(x).dx \doteq \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}) + y_n\right]. \quad (67a)$$

37. poučka: Razdijelimo li interval od a do b u taki broj $2n$ dijelova, tako da je sada

$$h = \frac{b-a}{2n}, \qquad (68)$$

imamo tangentnu formulu za približnu integraciju

$$\int_a^b f(x).dx \doteq 2h(y_1+y_3+y_5+\ldots+y_{2n-1}). \qquad (68a)$$

38. poučka: Uporabom oznake (68) imamo Parmentier-ovu formulu

$$\int_a^b f(x).dx \doteq \frac{h}{2}\left[y_0 + 3y_1 + 4(y_3+y_5+\ldots+y_{2n-3}) + 3y_{2n-1} + y_{2n}\right], \quad (69)$$

koju možemo (bez obzira na pogriješke višega reda) transformirati u

$$\int_a^b f(x).dx \doteq \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1 + 4(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}) + y_{2n-1} + y_{2n}\right], \quad (69a)$$

<u>39. poučka</u>: Za približnu integraciju vrijedi uz oznaku (68) <u>Simpsonovo (1743) pravilo</u>

$$\int_a^b f(x).dx \doteq \frac{h}{3}\left[y_0+4(y_1+y_3+y_5+\dots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})+y_{2n}\right] \tag{70}$$

<u>Pripomena</u>. Označimo li sa A približnu vrijednost integrala po tangentnoj formuli (68a) a sa B njegovu približnu vrijednost po Parmentier-ovoj formuli (69), onda je njihova aritmetična sredina

$$\frac{A+B}{2}=h\left[\frac{y_0+y_{2n}}{4}-\frac{y_1+y_{2n-1}}{4}+2(y_1+y_3+\dots+y_{2n-1})\right] \tag{71}$$

<u>bolja</u> aproksimacija, nego li samo A ili B. To je <u>Poncelet-ova</u> formula. <u>Apsolutna vrijednost pogrješke</u> određuje se iz

$$\left|\int_a^b f(x).dx-\frac{A+B}{2}\right|<\frac{h}{4}\cdot\left|y_1+y_{2n-1}-y_0-y_{2n}\right|. \tag{72}$$

§7. Višestruki integrali.

<u>A. Dvostruki integral.</u> Neka je zadana <u>neprekinuta funkcija</u>

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

dviju varijabla x i y; neka x prima sve vrijednosti zatvorenoga intervala $a\leq x\leq b$, a y sve vrijednosti zatvorenoga intervala $c\leq y\leq d$, dakle je područje varijabiliteta funkcije (1) neki pravokutnik, kojemu su stranice paralelne s osima x i y. Na kojoj točki (x_0,y_0) toga pravokutnika pripada izvjesna vrijednost $z_0=f(x_0,y_0)$ zadane funkcije. Intervale od a do b i od c do d razdijelit ćemo kao kod 1. definicije §-a 6.A. točkama $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_{r-1}$, odnosno $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, y_{s-1}$, u djelomične intervale, a to znači, da smo zadani pravokutnik rastavili u izvjesni broj $(=r.s)$ manjih pravokutnika. U pravokutniku sa stranicama x_m-x_{m-1} i y_n-y_{n-1} odabrat ćemo točku $P(\xi_m,\eta_n)$, gdje je dakle

$$x_{m-1} \leqq \xi_m \leqq x_m \quad , \quad y_{n-1} \leqq \eta_n \leqq y_n ,$$

pa ćemo sastaviti produkt

$$(x_m - x_{m-1})(y_n - y_{n-1}) \cdot f(\xi_m, \eta_n) . \qquad (2)$$

Suma svih tih produkata (2) za svaki pravokutnik, koji je sadržan u zadanom pravokutniku $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq x \leqq d$, glasi

$$S_{r,s} = \sum_{m=1,\, n=1}^{m=r,\, n=s} (x_m - x_{m-1})(y_n - y_{n-1}) \cdot f(\xi_m, \eta_n), \qquad (3)$$

gdje je
$$x_0 = a, \; x_r = b, \; y_0 = c, \; y_s = d .$$

Označimo li kako obično

$$x_m - x_{m-1} = \Delta x_m \quad , \quad y_n - y_{n-1} = \Delta y_n ,$$

možemo pisati

$$S_{r,s} = \sum_{m=1,\, n=1}^{r,s} f(\xi_m, \eta_n) \cdot \Delta x_m \cdot \Delta y_n ; \qquad (3a)$$

u toj sumi variraju dvije kazaljke, možemo je dakle pisati kao <u>dvostruku</u> sumu

$$S_{r,s} = \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{s} f(\xi_m, \eta_n) \cdot \Delta x_m \cdot \Delta y_n . \qquad (3b)$$

Uvedemo li oznaku

$$\Delta p_{m,n} = \Delta x_m \cdot \Delta y_n ,$$

gdje nam dakle $\Delta p_{m,n}$ znači plośtinu pravokutnika sa stranicama Δx_m i Δy_n, imamo

$$S_{r,s} = \sum_{m=1,\, n=1}^{r,s} f(\xi_m, \eta_n) \cdot \Delta p_{m,n} . \qquad (3c)$$

Označimo li sa $M_{m,n}$ maksimum funkcije (1) u pravokutniku plośtine $\Delta p_{m,n}$, a sa $m_{m,n}$ odnosni minimum, imamo

$$\sum_{m=1,\, n=1}^{r,s} m_{m,n} \cdot \Delta x_m \cdot \Delta y_n \leqq S_{r,s} \leqq \sum_{m=1,\, n=1}^{r,s} M_{m,n} \cdot \Delta x_m \cdot \Delta y_n , \qquad (4)$$

što ćemo kraće pisati

$$S'_{r,s} \leqq S_{r,s} \leqq S''_{r,s} . \qquad (4a)$$

Kod graničnog prelaza $r \to \infty$, $s \to \infty$ izvedenoga tako, da sve intervale dalje i dalje raspolavljamo, imamo

$$\lim S'_{r,s} = \lim S_{r,s} = \lim S''_{r,s} . \qquad (5)$$

<u>1. poučka</u>: Kad u sumi (3) broj djelo...

mičnih pravokutnika raste u beskonačnost ta,, ko, da osnovnica i visina svakog pravokutnika postanu beskonačno malene, približava se vri,, jednost sume (3) nekom izvjesnom limesu, koji ne ovisi o načinu graničnog prelasa $r\to\infty, s\to\infty$.

<u>1. definicija</u>: Limes, čija je egzistencija gornjom poučkom utvrđena, zove se <u>dvostru,, kim integralom</u> funkcije (1), pa ga označu,, jemo

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y).dx.dy = \lim_{r\to\infty,\, s\to\infty}\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s} f(\xi_m,\eta_n).\Delta x_m.\Delta y_n \tag{6}$$

<u>Pripomene</u>. a) Granice integracije označene kod prvoga znaka integracije tiču se vari,, jable, kojoj diferencijal dolazi prvi po redu u integralu, dakle će se u (6) integrirati po varijabli x od a do b, a po varijabli y od c do d.

b.) Mjesto oznake (6) može se upotrijebi,, ti i oznaka

$$\iint_P f(x,y).dx.dy,$$

gdje P znači pravokutnik $a\le x\le b$, $c\le y\le d$; in,, tegracija se dakle proteže preko svih beskonač,, no malenih pravokutnika plošine $dx.dy$, koji leže u pravokutniku P.

c.) Razdijelimo li pravokutnik P u sumu samih pravokutnika $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_k$, vrijedi pravilo

$$\iint_P f(x,y).dx.dy = \iint_{P_1} + \iint_{P_2} + \dots + \iint_{P_k}.$$

Neka je zadana u koordinatnoj ravnini (x y) zatvorena krivulja K bez dvostrukih toča,, ka, koja leži sva u konačnome i koja dijeli cijelu ravninu u dva dijela: u unutarnji i u vanjski dio. Plošinu ravnoga lika omeđe,, noga tom krivuljom možemo definirati po §-u 6.A. jednostavnim određenim integrali,, ma, a možemo je geometrijski definirati ova,, ko: Plošina svakoga poligona, koji se sas,, vim nalazi u K, manja je od ploštine svakoga, koji sadržaje K; kod svih krivulja K, koje udovoljavaju izvjesnom vrlo općenitom zahtjevu, postoji <u>odredjen</u> broj, koji je veći od ploštine makar kojega poligona sadržanoga u K, a manji od ploštine makar kojega poligona, u kojem se K nalazi. Taj se broj naziva <u>ploštinom</u> lika zatvorenoga krivuljom K, a označit ćemo ga sa P_K. Broj P_K postoji uvijek, kad se k svakom zadanom makar kako malenom pozitivnom broju ε može naći neki krivulji K upisan poligon ploštine P_u i neki toj krivulji opisani poligon ploštine P_o tako, da je

$$P_o - P_u < \varepsilon .$$

Za svaku točku unutar K i na krivulji K neka je definirana neprekinuta funkcija (1). Ravni lik zatvoren krivuljom K razdijelit ćemo u izvjesni broj n <u>makar kakovih</u> malih likova, kojima su ploštine $\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots$

$\ldots \Delta p_n$. <u>Svaki</u> od tih malih likova neka se posvema nalazi u nekom kvadratu stranice δ, dakle je

$$\Delta p_i \leq \delta^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

U svakom od tih malih likova odabrat ćemo neku točku ξ_i, η_i, pa ćemo sastaviti sumu

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) . \Delta p_i \qquad (7)$$

<u>2. poučka</u>: Kod graničnoga prelaza $n \to \infty$, $\delta \to 0$ približava se suma (7) nekom izvjesnom limesu

$$T = \lim_{n \to \infty} T_n ,$$

koji ne ovisi o načinu graničnoga prelaza, ako samo <u>svaki</u> pojedini lik postane beskonačno malen.

<u>2. definicija</u>: Limes T zove se <u>dvostrukim integralom</u> funkcije (1) uzetom na ploštini P_K, pa se bilježi oznakama

$$T = \iint_{P_K} f(x, y) . dx . dy = \int_{P_K} f(x, y) . dp \qquad (8)$$

Pripomene: a.) Prva poučka je specijalni slučaj druge poučke, a prva definicija specijalni slučaj druge.

b.) Prva oznaka u (8) odgovara specijalnoj rastvorbi ploštine P_K ekvidistantnim paralelama, gdje je dakle element ploštine $dx.dy$, a druga oznaka odgovara makar kojoj rastvorbi s elementom ploštine dp. U prvom slučaju rastvaramo područje integracije u beskonačno uske pruge paralelne osi y, a te pruge onda dalje u pravokutnike. Da dobijemo integral funkcije (1) duž jedne pruge, moramo integrirati (= sumirati!) elemente $f(x,y).dx.dy$ po varijabli y, a da dobijemo integral (8), moramo integrirati sve tako dobivene integrale za pojedine pruge, moramo dakle integrirati elemente $dx.\int f(x,y).dy$ po varijabli x.

Geometrijsko značenje dvostrukoga integrala. Zamislimo li konstruiranu površinu, koja je geometrijska slika funkcije (1), vidimo, da svaki pojedini sumand u (6), t. j. izraz

$$f(\xi_m,\eta_n).\Delta x_m.\Delta y_n$$

znači volumen neke prizme, kojoj je ploština osnovke $\Delta x_m.\Delta y_n$, a visina $f(\xi_n,\eta_n)$.

Kao volumen V tijela, koje je omeđeno ravninom (x,y), površinom (1) i valjkom okomitom na ravninu (x,y) s provodnicom krivuljom K ploštine P_K definiramo limes sume volumena svih prizma kod graničnoga prelaza $\Delta x\to 0$ i $\Delta y\to 0$, dakle je

$$V=\iint_{P_K} f(x,y).dx.dy\,. \qquad (9)$$

a to je geometrijsko značenje dvostrukoga integrala.

Pripomene. a.) Izračunavanje volumena tijela nazivamo kubaturom, dakle dvostruki integral rješava problem kubature, baš kako jednostruki integral rješava problem kvadrature.

b.) Uzmemo li $f(x,y)=1$, znači nam integral $\iint_{PK} dx.dy$ volumen valjka okomita na π_1; gornja baza nalazi se u ravnini $z=1$, a donja u ravnini $z=0$. No jer je volumen valjka jednak ploštini baze pomnoženoj s visinom, a budući da je ovdje visina $=1$, to nam gornji integral znači i ploštinu PK ravnoga lika omeđena krivuljom K. Do toga shvaćanja dolazimo i izravno iz definicije integrala, koji je ovdje limes sume $\Sigma \Delta x.\Delta y$; sumiramo li naime sve „elementarne paralelograme" $\Delta x.\Delta y$ nakon izvedenoga graničnog prelaza dobijemo ploštinu područja integracije.

3. poučka: Ako je $f(x,y)$ jednoznačna i neprekinuta funkcija u pravokutniku $a\leq x\leq b$, $c\leq y\leq d$, vrijedi jednadžba

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y).dx.dy=\int_c^d\int_a^b f(x,y).dy.dx \tag{10}$$

4. poučka: Neka je M maksimum, a m minimum jednoznačne i neprekinute funkcije $z=f(x,y)$ za cijelo područje ploštine PK, omeđeno krivuljom K. Poučka o srednjoj vrijednosti za dvostruke integrale glasi

$$m.PK\leq\iint_{PK} f(x,y).dx.dy\leq M.PK. \tag{11}$$

Budući da je $f(x,y)$ neprekinuto, primat će u području PK svaku vrijednost između m i M, dakle će za neku posebnu vrijednost $x=\xi$, $y=\eta$ toga područja biti

$$\iint_{PK} f(x,y).dx.dy=PK.f(\xi,\eta) \tag{11a}$$

B. Izračunavanje dvostrukih integrala.

5. poučka: Dvostruki integral

$$J=\int_a^b\int_c^d f(x,y).dx.dy \tag{12}$$

izračunat će se dvjema jednostavnim integracijama, a svejedno je, kojim redom te dvije integracije izvodimo, jer je

$$J = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y).dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y).dx; \qquad (13)$$

možemo dakle u (12) izmijeniti poredak integracije.

Pripomene: a.) Po 5. poučci je

$$\int_a^b \int_c^d f(x).g(y).dx.dy = \int_a^b f(x).dx \int_c^d g(y).dy, \qquad (14)$$

možemo dakle taj dvostruki integral shvatiti kao produkt dvaju jednostavnih integrala, a i obrnuto, produkt dvaju jednostavnih integrala možemo predočiti kao dvostruki integral.

b.) U integralima (13) izvodi se najprije unutarnja kvadratura, dakle će se u prvom od tih integrala izračunati prije svega $\int_c^d f(x,y).dy$

smatrajući pri tome x konstantom, a iza toga će se izvesti druga integracija (po varijabli x).

c.) Pišemo li u formuli (13) mjesto y parametar α, imamo

$$\int_c^d d\alpha . \int_a^b f(x,\alpha).dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\alpha).d\alpha,$$

a to nam kazuje, da se integral neprekinute funkcije smije integrirati po parametru α ispod znaka integracije. Upotrijebimo li oznaku $\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha).d\alpha$ imamo

$$\int_c^d \Phi(\alpha).d\alpha = \int_a^b dx . \int_c^d f(x,\alpha).d\alpha. \qquad (15)$$

Radi li se o izračunavanju integrala

$$\iint_{P_K} f(x,y).dx.dy$$

postupat će se ovako: Krivulja K, koja zatvara područje integracije, projicirat će se na os x; ta njezina projekcija bit će točno jednaka odsječku osi x od a do b. Svaki pravac $x=c$, gdje je $a<c<b$, sjeći će krivulju K u dvjema točkama, prva ima ordinatu $g_1(x)$, a druga $g_2(x)$. Kako će se sad integral izračunati, kazuje nam

6. poučka:

$$\iint_{Pk} f(x,y).dx.dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y).dy. \qquad (16)$$

Pripomene. a.) Da smo krivulju K projicirali na os y, dobili bismo analognu formulu

$$\iint_{Pk} f(x,y).dx.dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y).dx. \qquad (17)$$

b.) Jednadžbe (16) i (17) izračunavaju opći dvostruki integral dvjema jednostavnim integracijama.

c.) Poredba jednadžbe (13) s jednadžbama (16) i (17) kazuje nam, da se poredak integracije može naprosto izmijeniti samo kod konstantnih granica integracije; kod varijablih granica integracije valja kod izmjene poretka integracije voditi računa i o promjenama granica integracije.

Pojam dvostrukoga integrala valja proširiti i za slučaj, da je funkcija negdje u području integracije ili na njegovoj granici prekinuta, a i za slučaj, da se područje integracije proteže u beskonačnost.

I. Biva li integrand beskonačno velik u nekoj točki područja integracije ili na nekoj crti u području integracije, izlučit ćemo mjesta diskontinuiteta iz područja integracije nekom zatvorenom krivuljom K', koja omeđuje lik ploštine pk. U preostalom području integracije $Pk-pk$ integrand je neprekinut, pa integral

$$\iint_{Pk-pk} f(x,y).dx.dy \qquad (18)$$

ima smisla.

3. definicija: Postoji li određen konačan limes integrala (18) kod graničnoga

prelaza $pk \to 0$, nazivamo taj limes vrijednošću zadanoga integrala, pa pišemo

$$\iint_{Pk} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{pk \to 0} \iint_{Pk-pk} f(x,y)\,dx\,dy; \qquad (19)$$

limes (19) ne smije nikako ovisiti ni o obliku krivulje K', koja zatvara pk, ni o načinu graničnoga prelasa $pk \to 0$.

II. Proteže li se područje integracije u beskonačnost, rastavit ćemo ga u dva dijela, od kojih leži jedan sav u konačnome, a drugi se proteže u beskonačnost; ploština drugoga neka je pk. I u ovome slučaju definiramo integral točno po 3. definiciji

Pripomena. Integriranje po parametru na osnovi formule (15) služi kod izračunavanja nekih važnijih integrala.

a.) Iz $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin bx\,dx \; \frac{b}{\alpha^2+b^2}$ slijedi

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad (b>0). \qquad (20)$$

b.) Iz $\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha\,d\alpha = 1$ slijedi

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (21)$$

Transformacija varijabla. U dvostruki integral

$$\iint_{Pk} f(x,y)\,dx\,dy$$

imadu se jednadžbama

$$x = \varphi(u,v) \qquad y = \psi(u,v) \qquad (22)$$

uvesti mjesto varijabla x i y nove varijable u i v. Jednadžbe (22) neka utvrđuju izmjenično-jednoznačnu relaciju između veličina (x,y) i veličina (u,v). Za funkcije φ i ψ pomišljamo, da su neprekinute, pa da u području integracije imadu neprekinute derivacije $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial v}$. Konačno tražimo, da je izraz

$$D = \varphi'_u \cdot \psi'_v - \varphi'_v \cdot \psi'_u \qquad (23)$$

u cijelom području integracije od nule

različit, što radi njegovog kontinuiteta znači, da ne mijenja svog predznaka.

Z. poučka. Transformacija (22) provodi se po formuli

$$\iint_{Pk} f(x,y).dx.dy = \iint_{Pk'} f\{\varphi(u,v),\psi(u,v)\}.|D|.du.dv, \quad (24)$$

gdje oznaka Pk' ima značiti, da smo i u granicama integrala, koje određuju područje integracije, izveli transformaciju (22).

C. Trostruki i višestruki integrali. Neka je u prostoru zadana zatvorena površina P, koja omeđuje neko tijelo T; površina neka leži sva u konačnome, pa neka dijeli cijeli prostor u dva dijela: u unutarnji i u izvanji prostor. Dvije točke unutarnjega prostora ili dvije točke izvanjega prostora mogu se uvijek spojiti poligonalnom crtom, koja nema ni koje točke zajedničke s površinom, a točka izvanjega prostora može se

spojiti s točkom unutarnjega prostora samo s pomoću poligonalne crte, koja bar u jednoj točki probada površinu. Svaki poliedar, koji se posvema nalazi u tijelu T, ima neki volumen, koji se može elementarnim stereometrijskim metodama izračunati; isto tako ima izvjesni volumen i svaki poliedar, u kojemu je tijelo T posve sadržano.

Postoji li broj, manji od volumena V_o makar kojega poliedra, koji sadržaje u sebi tijelo T, a veći od volumena V_u makar kojega poliedra, koji se posvema nalazi u tijelu T, nazivamo taj broj volumenom V tijela T, omeđena površinom P. Broj V će uvijek postojati, kad se k svakom zadanom makar kako malenom pozitivnom broju ε može naći neki opisani poliedar volumena V_o i neki upisani poliedar volumena V_u tako, da je

$$V_o - V_u < \varepsilon .$$

Neka je zadano neko tijelo T volumena V; površina P, koja omeđuje to tijelo, neka ima gore navedena svojstva. Neka je zadana funkcija

$$u = f(x, y, z) \qquad (25)$$

triju varijabla x, y, z; neka je ta funkcija kontinuirana za svaku točku, koja pripada tijelu T ili baš samoj površini P.

Tijelo T razdijelit ćemo makar kako u malene dijelove $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ s volumenima $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$, a u svakom od tih dijelova odabrat ćemo neku točku $(\xi_k; \eta_k, \zeta_k)$.

<u>8. poučka</u>. Suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) . \Delta V_k \qquad (26)$$

približava se nekom određenom limesu S, kad n raste u beskonačnost tako, da se svaki pojedini volumen V_k neograničeno približava nuli

<u>4. definicija</u>: Limes S zove se <u>trostrukim integralom</u> funkcije (25) uzetom preko volumena V, pa se bilježi oznakom

$$S = \iiint_V f(x, y, z) . dx . dy . dz . \qquad (27)$$

<u>Izračunavanje trostrukog integrala</u> najjednostavnije je onda, kad je područje integracije pravokutni paralelepiped, kojemu su pobočke usporedne s koordinatnim ravninama; u tom je slučaju osobito lako odrediti granice integrala (27), jer su konstantne, pa imamo

$$J = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) . dx . dy . dz . \qquad (28)$$

Taj se integral rješava trima kvadraturama, a smije se izvrnuti poredak integracije. Vrijedi dakle formula

$$J = \int_a^b dx . \int_c^d dy . \int_e^f f(x, y, z) . dz \qquad (28a)$$

i onih preostalih još 5 formula, koje nastaju iz (28) permutiranjem poretka integracije

Za slučaj, da je područje integracije makar koje tijelo T volumena V, imamo

$$\iiint_V f(x,y,z).dx.dy.dz = \int_a^b dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z).dz. \qquad (29)$$

Pripomene. a.) Integral

$$\iiint_V dx.dy.dz \qquad (30)$$

znači volumen V tijela T.

b.) Izmjena varijabla s pomoću jednačaba

$$x=\varphi(u,v,w) \qquad y=\psi(u,v,w) \qquad z=\chi(u,v,w) \qquad (31)$$

izvest će se u integralu (27) po formuli

$$\iiint_V f(x,y,z).dx.dy.dz = \iiint_{V'} f(\varphi,\psi,\chi).|\Delta|.du.dv.dw, \qquad (32)$$

gdje je sada

$$\Delta = \varphi'_u(\psi'_v \chi'_w - \chi'_v \psi'_w) + \psi'_u(\chi'_v \varphi'_w - \varphi'_v \chi'_w) + \chi'_u(\varphi'_v \psi'_w - \psi'_v \varphi'_w). \qquad (33)$$

c.) Kako smo došli do dvostrukih i trostrukih integrala, dolazimo i do n-terostrukih. Iz neprekinute funkcije od n varijabla

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Konstruiramo u nekom „području" Π sumu

$$S = \sum_{k,l,\dots,s} f(\xi_k^{(1)}, \xi_l^{(2)}, \dots, \xi_s^{(n)}).\Delta x_1.\Delta x_2 \dots \Delta x_n; \qquad (34)$$

limes te sume za granični prelaz $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, $\Delta x_3 \to 0$, ..., $\Delta x_n \to 0$ nazivamo n-terostrukim integralom uzetom preko područja Π i označujemo sa

$$J = \iiint \dots \int_\Pi f(x_1, x_2, \dots, x_n).dx_1.dx_2 \dots dx_n. \qquad (35)$$

Za te integrale vrijede poučke analogne onima za dvostruke i trostruke.

D. Integrali totalnih diferencijala.

Zadan je neki izraz

$$P(x,y).dx + Q(x,y).dy; \qquad (36)$$

ako je ispunjen uvjet (§3. poučka 6.)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (36a)$$

izraz (36) je totalni diferencijal dz neke funkcije $z=f(x,y)$. Slijedeća poučka kazuje, kako će se ta funkcija naći.

9. poučka: Totalni diferencijal (36), kod kojega je dakle ispunjen uvjet (36a), integrira se po formuli

$$z = \int_a^x P(x,y).dx + \int_c^y Q(a,y).dy + K \qquad (37)$$

U slučaju, da izraz (36) *nije* totalni diferencijal, može postojati neka funkcija $\mu(x,y)$, koju nazivamo *Eulerovim multiplikatorom* ili *faktorom integracije*, a koja ima svojstvo, da je izraz

$$\mu(x,y).P(x,y).dx + \mu(x,y).Q(x,y).dy \qquad (38)$$

totalni diferencijal.

10. poučka: Funkcija $\mu(x,y)$ bit će onda faktor integracije izraza (36), kad ispunja uvjet

$$P.\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} - Q.\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = Q'_x - P'_y. \qquad (39)$$

Pripomena. Teorija parcijalnih diferencijalnih jednačaba dokazuje, da faktor integracije zaista uvijek postoji.

11. poučka: Ako izraz (36) postaje množenjem s faktorom integracije $\mu(x,y)$ totalni diferencijal dz neke funkcije $z=f(x,y)$, onda je i svaka funkcija oblika $\mu(x,y).\varphi(z)$ faktor integracije izraza (36).

12. poučka: Da neki zadani izraz

$$P(x,y,u).dx + Q(x,y,u).dy + R(x,y,u).du \qquad (40)$$

bude *totalni* diferencijal dz neke funkcije $z=f(x,y,u)$, moraju biti ispunjeni uvjeti

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial u}. \qquad (41)$$

13. poučka: Totalni diferencijal (40), kod kojega su dakle ispunjeni uvjeti (41), integrira se po formuli

$$Z=\int_a^x P(x,y,u).dx+\int_c^y Q(a,y,u).du+\int_e^u R(a,c,u).du+K \qquad (42)$$

E. Krivocrtni integrali. Neka je zadan izraz

$$P(x,y).dx+Q(x,y).dy \qquad (43)$$

koji ne treba da bude totalni diferencijal; u ravnini s pravokutnim koordinatama (x,y) zadana je neka krivulja K po svojim parametričkim jednadžbama

$$x=\varphi(t) \qquad y=\psi(t), \qquad (44)$$

a na njoj dvije točke $M_0(x_0,y_0)$ i $M(X,Y)$, koje odgovaraju posebnim vrijednostima parametra $t=t_0$ i $t=T$. Luk M_0M krivulje K razdijelit ćemo po volji odabranim točkama na njemu $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, ..., $M_{r-1}(x_{r-1},y_{r-1})$

u r dijelova, a na svakomu djelu odabrat ćemo neku točku (ξ_i,η_i). O funkcija φ i ψ pomišljamo, da su u intervalu $t_0\leqq t\leqq T$ neprekinute s neprekinutim derivacijama, a o funkcijama P i Q, da su neprekinute duž krivulje K, t.j. da je za svaku točku (ξ,η) na krivulji K

$$|P(\xi+h,\eta+k)-P(\xi,\eta)|<\varepsilon$$
$$\text{i} \quad |Q(\xi+h,\eta+k)-Q(\xi,\eta)|<\varepsilon,$$

ako je samo $|h|<\vartheta$ i $|k|<\vartheta$, gdje je ε makar kako maleni pozitivni broj, a ϑ neki njemu pripadajući pozitivni broj.

14. poučka: Suma

$$S_r=\sum_{m=0}^{r-1}\left[P(\xi_m,\eta_m).(x_{m+1}-x_m)+Q(\xi_m,\eta_m).(y_{m+1}-y_m)\right] \qquad (45)$$

ima kod graničnoga prelaza $r\to\infty$, $|x_{m+1}-x_m|\to 0$, $|y_{m+1}-y_m|\to 0$ određen, konačan limes S.

5. definicija: Limes S zove se

Krivocrtnim integralom izraza (43) uzetim duž krivulje K od M_0 do M, a bilježi se oznakom

$$S=\int_{(M_0)}^{(M)}\left[P(x,y).dx+Q(x,y).dy\right]. \qquad (46)$$

15. poučka: Krivocrtni integral (46) pretvara se u obični jednostruki određeni integral po formuli

$$\int_{(M_0)}^{(M)}\left[P(x,y).dx+Q(x,y).dy\right]=\int_{t_0}^{T}\left[P(\varphi,\psi).\varphi'(t)+Q(\varphi,\psi).\psi'(t)\right].dt \qquad (47)$$

16. poučka: Vrijednost krivocrtnog integrala uzetog duž zadane zatvorene krivulje ne zavisi o početnoj točki puta integracije.

17. poučka: Krivocrtni integral duž zatvorene krivulje K može se pretvoriti u dvostruki integral po Green-Riemannovoj formuli

$$\int_{(K)}\left[P(x,y).dx+Q(x,y).dy\right]=\iint_{PK}(Q'_x-P'_y).dx.dy; \quad (48)$$

područje PK dvostrukoga integrala je ploština ravnoga lika zatvorena krivuljom K, a oznaka $\int_{(K)}$ znači, da se uzima krivocrtni integral duž cijele zatvorene krivulje K.

18. poučka: Krivocrtni integral totalnoga diferencijala duž zatvorene krivulje K jednak je nuli (Cauchy-eva integralna poučka.

19. poučka: Krivocrtni integral totalnoga diferencijala zavisi samo od početne i konačne točke puta integracije, a ne zavisi o obliku njegovu.

Pripomene. a.) Apsolutne vrijednosti integrala

$$\int_{(K)}y.dx \quad i \quad \int_{(K)}x.dy \qquad (49)$$

uzeti duž zatvorene krivulje K znače ploštinu PK ravnoga lika omeđena tom krivuljom.

b.) Isto znači i krivocrtni integral

$$\frac{1}{2}\int_{(K)}(x.dy-y.dx). \qquad (50)$$

c.) Ako su $a=\varphi(t_0)$ i $b=\varphi(T)$ apscise točaka M_0 i M, imamo

$$\int_{(M_0)}^{(M)} y\,dx = \int_a^b y_1\,dx$$

d.) Green-Riemannovoj formuli možemo dati drugi oblik, uvedemo li kut β, što ga positivni smjer normale na K zatvara s positivnim smjerom osi x. Positivan smjer tangente neka je onaj, koji odgovara positivnom diferencijalu luka dl, a positivan smjer normale neka je onaj, koji nastaje zakretom positivnoga smjera tangente za $+\frac{\pi}{2}$. Tako dobijemo iz (48)

$$\int_{(K)} (P.\sin\beta - Q.\cos\beta).dl = \iint_{PR} (Q'_x - P'_y).dx.dy. \quad (51)$$

Ako je zadana prostorna krivulja K jednadžbama

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t) \quad (52)$$

i na njoj dvije točke M_0 i M, razdijelit ćemo opet luk $M_0 M$ u r dijelova i promatrat ćemo sumu

$$S_r = \sum_{m=0}^{r-1} \Big[P(\xi_m, \eta_m, \zeta_m).(x_{m+1}-x_m) + Q(\xi_m,\eta_m,\zeta_m).(y_{m+1}-y_m) + R(\xi_m,\eta_m,\zeta_m).(z_{m+1}-z_m)\Big] \quad (53)$$

za zadani neki izraz

$$P(x,y,z).dx + Q(x,y,z).dy + R(x,y,z).dz. \quad (54)$$

<u>20. poučka</u>: Suma S_r ima kod graničnoga prelaza $r\to\infty$, $|x_{m+1}-x_m|\to 0$, $|y_{m+1}-y_m|\to 0$, $|z_{m+1}-z_m|\to 0$ određeni konačni limes S.

<u>6. definicija</u>: Limes S zove se <u>krivocrtnim integralom</u> izraza (54) uzetim duž <u>prostorne</u> krivulje K od M_0 do M, a bilježi se oznakom

$$S = \int_{(M_0)}^{(M)} \Big[P(x,y,z).dx + Q(x,y,z).dy + R(x,y,z).dz\Big]. \quad (55)$$

<u>21. poučka</u>: Krivocrtni integral (55) pretvara se u običan jednostruki integral formulom:

$$\int_{(m_0)}^{(m)} [P(x,y,z).dx + Q(x,y,z).dy + R(x,y,z).dz] = \\ = \int_{t_0}^{T} [P(\varphi,\psi,\chi).\varphi'(t) + Q(\varphi,\psi,\chi).\psi' + R(\varphi,\psi,\chi).\chi'(t)].dt \tag{56}$$

Pripomena: I ovdje vrijede poučke ana„logne 16. i 19. poučci.

F. Integrali na površinama. Neka je u prostornim pravokutnim koordinatama zadana površina

$$z = \Phi(x,y); \tag{57}$$

funkcija z neka je jednoznačna i neprekinuta. U ravnini π_1 zadana je zatvorena krivulja K jednadžbom

$$\mathcal{F}(x,y) = 0. \tag{58}$$

Valjak, kojemu je K provodnica, a izvodnica usporedna osi z, prodire površinu (57) u neko j prostornoj krivulji L. Ta je krivulja zatvorena i omeđuje na površini (57) izvjesni dio njezin, čija je projekcija na π_1 ravni lik

omeđen sa K, a ploštine PR. Razdijelimo li taj ravni lik u malene likove ploština ΔP_1, $\Delta P_2, \ldots, \Delta P_n$, gdje je

$$P_R = \sum_{k=1}^{n} \Delta P_k,$$

pa podignemo li opet uspravne valjke nad svakim likom ploštine ΔP_k, razdijelili smo i dio površine (57) omeđen krivuljom L u same malene dijelove. Odaberemo li na svakom takovom dijelu površine točku (ξ_k, η_k, ζ_k), pa konstruiramo li tangencijalnu ravninu u toj točki, to valjak baze ΔP_k određuje na tangencijalnoj ravnini kroz (ξ_k, η_k, ζ_k) neki ravni lik ploštine ΔQ_k, čija je baš projekcija na π_1 lik ploštine ΔP_k. Označimo li sa ω_3 kut priklona tangencijalne ravnine prama π_1, odnosno kut normale na površini sa smjerom osi z, imamo

$$\Delta Q_k = \frac{\Delta P_k}{\cos\omega_3}. \tag{59}$$

Uzmemo li napose za likove u Π_1 pravokutnike stranica Δx_m i Δy_m, to je $\Delta Pk = \Delta x_m \cdot \Delta y_n$. Dakle suma

$$\sum_{(m)} \sum_{(n)} \frac{\Delta x_m \cdot \Delta y_n}{\cos \omega_3} \qquad (60)$$

znači ploštinu poliedarske mreže, koja nadomješta zadanu površinu (57) unutar krivulje $\mathcal{L}$, a sastavljena je od samih dijelova tangencijalnih ravnina. Izvedemo li granični prelaz $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, pretvara se (60) u dvostruki integral

$$\iint_{Pk} \frac{dx \cdot dy}{\cos \omega_3}\,; \qquad (61)$$

Kod toga pomišljamo, da je ω_3 neprekinuta funkcija varijabla x i y, i da je $\cos \omega_3 \neq 0$.

7. definicija: Integral (61) znači ploštinu Π onoga dijela površine (57), koji je omeđen krivuljom $\mathcal{L}$. Iz 17. poučke §-a 4. slijedi

$$\Pi = \iint_{Pk} \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + 1}\; . \, dx . dy \qquad (62)$$

Neka je zadana funkcija

$$u = f(x, y, z), \qquad (63)$$

koja je neprekinuta za svaku točku, koja leži na površini (57) unutar krivulje $\mathcal{L}$. Taj ćemo dio površine (s ploštinom Π) razdijeliti u manje dijelove, kojima su ploštine $\Delta\Pi_1, \Delta\Pi_2, \ldots, \Delta\Pi_r$ tako, da je $\sum_{n=1}^{r} \Delta\Pi_n = \Pi$. Na svakom takovom dijelu površine odabrat ćemo neku točku (ξ_n, η_n, ζ_n), pa ćemo promatrati sumu

$$S_r = \sum_{n=1}^{r} f(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) . \Delta\Pi_n \, . \qquad (64)$$

22. poučka: Suma (64) ima kod graničnoga prelaza $r \to \infty$, $\Delta\Pi_n \to 0$ određen konačan limes S.

8. definicija: Limes S zove se integralom na površini (57), a bilježi se oznakom

$$\iint_{(\Pi)} f(x, y, z) . d\Pi \, . \qquad (65)$$

<u>23. poučka</u>: Integral na površini pretvara se u dvostruki integral formulom

$$\iint_{(\Pi)} f(x,y,z).d\Pi = \iint_{Pk} f[x,y,\Phi(x,y)].\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+1}.dx.dy \qquad (66)$$

Neka je zadana <u>zatvorena</u> površina Π, koja omeđuje tijelo T volumena V i neka funkcija $R(x,y,z)$, koja je neprekinuta u i na tijelu T; istog svojstva neka je i R'_z.

<u>24. poučka</u>: Integral na <u>zatvorenoj</u> površini pretvara se u trostruki integral (Gauss, 1813) formulom

$$\iint_{(\Pi)} R.\cos\omega_3.d\Pi = \iiint_V R'_z.dx.dy.dz \qquad (67)$$

<u>25. poučka (Green-a i Ostrogradskoga, 1828)</u>:

$$\iint_{(\Pi)} (P.\cos\omega_1 + Q.\cos\omega_2 + R.\cos\omega_3).d\Pi =$$

$$= \iiint_T (P'_x + Q'_y + R'_z).dx.dy.dz\,, \qquad (68)$$

gdje su funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ i P'_x, Q'_y, R'_z neprekinute u i na tijelu T, a ω_1, ω_2 i ω_3 su kutovi, što ih prema izvanjoj strani površine Π uperena normala zatvara s osima x, odnosno y i z.

<u>Pripomene</u>. a.) Integrali

$$\iint_{(\Pi)} x.\cos\omega_1.d\pi = \iint_{(\Pi)} y.\cos\omega_2.d\Pi = \iint_{(\Pi)} z.\cos\omega_3.d\Pi = V \qquad (69)$$

na <u>zatvorenoj</u> površini Π znače volumen tijela, koje je tom površinom omeđeno.

b.) Integral

$$\iint_{(\Pi)} (P.\cos\omega_1 + Q.\cos\omega_2 + R.\cos\omega_3).d\Pi$$

na <u>zatvorenoj</u> površini Π jednak je nuli, kad je ispunjen uvjet

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \qquad (70)$$

Neka su $\varphi(x,y,z)$ i $\psi(x,y,z)$ funkcije, koje su neprekinute, a kojima su i prve i druge parcijalne derivacije neprekinute. Površina Π neka je opet <u>zatvorena</u>. Uvest ćemo ovdje <u>kratice</u>

$$\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} + \varphi''_{zz} = \Delta\varphi \tag{71}$$

i

$$\varphi'_x \cdot \cos\omega_1 + \varphi'_y \cdot \cos\omega_2 + \varphi'_z \cdot \cos\omega_3 = \frac{d\varphi}{dn}. \tag{71a}$$

<u>26. poučka</u> (opća <u>Greenova</u> poučka)

$$\iint_{(\Pi)} \left(\varphi \cdot \frac{d\psi}{dn} - \psi \cdot \frac{d\varphi}{dn}\right) \cdot d\Pi = \iiint_{V} (\varphi . \Delta\psi - \psi . \Delta\varphi) . dx . dy . dz \tag{72}$$

<u>Pripomena</u>. Uzmemo li $\varphi = 1$, imamo

$$\iint_{(\Pi)} \frac{d\psi}{dn} \cdot d\Pi = \iiint_{V} \Delta\psi . dx . dy . dz \tag{73}$$

Neka je $\mathcal{L}$ zatvorena krivulja (prostorna) na površini (57), a Π ploština onoga dijela te površine, koji je omeđen krivuljom $\mathcal{L}$. Pretvaranje integrala na površini u krivocrtni integral uči nas

<u>27. poučka</u> (<u>Ampère</u>-a i <u>Stokes</u>-a):

$$\iint_{(\Pi)} \left[(R'_y - Q'_z) . \cos\omega_1 + (P'_z - R'_x) . \cos\omega_2 + (Q'_x - P'_y) . \cos\omega_3\right] . d\Pi = \int_{(\mathcal{L})} (P . dx + Q . dy + R . dz). \tag{74}$$

§8. Fourierovi redovi.

A. Trigonometrijski redovi.

1. definicija: Beskonačan red oblika

$$A_0+(A_1\cos x+B_1\sin x)+(A_2\cos 2x+B_2\sin 2x)+\dots$$
$$+\dots+(A_n\cos nx+B_n\sin nx)+\dots \qquad (1)$$

zove se trigonometrijskim redom.

Konvergira li red (1) za neko izvjesno $x=\xi$, to on konvergira i za svako $x=\xi+2k\pi$ (k cio broj), dakle je funkcija predočena redom (1) periodična s periodom 2π.

Uz pomišljaj, da je funkcija $f(x)$ u intervalu od 0 do 2π predočena uniformno konvergentnim trigonometrijskim redom, da vrijedi dakle jednadžba

$$f(x)=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\dots+A_n\cos nx+\dots$$
$$+B_1\sin x+B_2\sin 2x+\dots+B_n\sin nx+\dots, \qquad (2)$$

možemo lako izračunati koeficijente reda (2). To kazuje

1. poučka: Uz pomišljaj, da integrali (3)-(5) uopće postoje, vrijede formule

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \qquad (3)$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx, \qquad (4)$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\cdot dx. \qquad (5)$$

2. definicija: Koeficijenti (3)-(5) trigonometrijskoga reda zovu se Fourier-ovi koeficijenti, a trigonometrijski red

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cdot\cos nx+B_n\cdot\sin nx), \qquad (6)$$

u kojem koeficijenti imadu vrijednosti (3)-(5), zove se Fourier-ovim redom (Fourier 1807, a osobito 1822. u Théorie analytique de la chaleur)

2. poučka (Dirichlet, 1829.): Ako je periodična funkcija $f(x)$ periode 2π u nekom intervalu dužine 2π jednoznačna, konačna, po odsjecima monotona i po odsjecima neprekinuta, njezin je Fourierov red konvergentan za svako konačno x. Za svako x, u kojemu je $f(x)$ neprekinuto, suma je Fourierova reda jednaka $f(x)$, a za neko $x=\xi$, u kojem je $f(x)$ diskontinuirano, suma je reda jednaka aritmetičkoj sredini obaju limesa

$$\lim_{x\to\xi+0} f(x) \quad i \quad \lim_{x\to\xi-0} f(x). \qquad (7)$$

Pripomene. a.) Uvjeti te poučke zovu se Dirichletovi uvjeti; oni su dovoljni, ali nisu nužni, t.j. ima funkcija, koje im ne udovoljavaju, a mogu se ipak razviti u Fourierov red.

b.) Dirichletovi uvjeti znače između ostaloga, da točke diskontinuiteta leže jedne

od drugih u konačnim udaljenostima, a ti diskontinuiteti da su samo skokovi.

c.) Dirichletovim uvjetima udovoljavaju i neke prekinute funkcije; te se dakle prekinute funkcije mogu razviti u redove, kojima su svi članovi neprekinute funkcije.

d.) Iz Fourierovih redova dobivamo neke važne numeričke redove, tako primjerice

$$\frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots, \qquad (8)$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\dots \qquad (9)$$

e.) Ako je funkcija $f(x)$ zadana u intervalu od α do $\alpha+2\pi$, razvit ćemo je u Fourierov red po formulama (2)-(5), samo ćemo u integralima uzeti kao granice integracije vrijednosti α i $\alpha+2\pi$.

3. poučka: Ako zadana funkcija $f(x)$ ima periodu $2l$ (gdje je l makar koji konačni pozitivni broj), a inače ispu-

nja Dirichletove uvjete, razvit će se u Fourierov red po formulama

$$f(x)=A_0+A_1\cdot\cos\frac{\pi x}{l}+A_2\cdot\cos\frac{2\pi x}{l}+\dots+A_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}+\dots$$
$$+B_1\cdot\sin\frac{\pi x}{l}+B_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\dots+B_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}+\dots \qquad (10)$$

$$A_0=\frac{1}{2l}\int_0^{2l}f(x).dx \qquad A_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x).\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx \qquad (11)$$

$$B_n=\frac{1}{l}\int_0^{l}f(x).\sin\frac{n\pi}{x}\cdot dx \qquad (12)$$

4. poučka: Svaka se taka funkcija periode 2π, koja ispunja Dirichletove uvjete, može razviti u Fourierov red cosinusa

$$f(x)=A_0+A_1\cdot\cos x+A_2\cdot\cos 2x+\dots+A_n\cdot\cos nx+\dots, \qquad (13)$$

gdje je
$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x).dx \qquad A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x).\cos nx.dx \qquad (14)$$

5. poučka: Svaka funkcija $f(x)$, koja u intervalu $0\leq x\leq l$ ispunja Dirichletove uvjete,

može se razviti u Fourierov red cosinusa,

$$f(x)=A_0+A_1\cdot\cos\frac{\pi x}{l}+A_2\cos\frac{2\pi x}{l}+\dots+A_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}+\dots, \qquad (15)$$

gdje je
$$A_0=\frac{1}{l}\int_0^{l}f(x).dx, \qquad A_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x).\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx. \qquad (16)$$

6. poučka: Svaka se liha funkcija periode 2π, koja ispunja Dirichletove uvjete, može razviti u Fourierov red sinusa

$$f(x)=B_1\cdot\sin x+B_2\sin 2x+\dots+B_n\cdot\sin nx+\dots, \qquad (17)$$

gdje je
$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x).\sin nx.dx. \qquad (18)$$

7. poučka: Svaka funkcija $f(x)$, koja u intervalu $0\leq x\leq l$ ispunja Dirichletove uvjete, može se razviti u Fourierov red sinusa

$$f(x)=B_1\cdot\sin\frac{\pi x}{l}+B_2\cdot\sin\frac{2\pi x}{l}+\dots+B_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}+\dots, \qquad (19)$$

gdje je
$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x).\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx; \qquad (20)$$

na krajevima intervala, t.j. za $x=0$ i $x=l$

predočuje (19) samo onda funkciju $f(x)$, ako je $f(0)=f(l)=0$.

Pripomena. I specijalni Fourierovi redovi (13) i (17) davaju neke važne numeričke redove, primjerice

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \qquad (21)$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \dots \qquad (22)$$

B. Fourierovi integrali.

8. poučka: Zadana funkcija $f(x)$, koja je u intervalu od $-\infty$ do $+\infty$ neprekinuta i jednoznačna, koja nema beskonačno mnogo maksima i minima, pa koja se može duž cijeloga intervala integrirati, može se predočiti Fourierovim integralom

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(z).\cos u(z-x).dz \qquad (23)$$

Pripomene. a.) Kao što se iz općeg Fourierovog reda dobije opća Fourierova integralna formula (23), tako se iz specijalnih redova sinusa i cosinusa dobiju specijalne Fourierove integralne formule

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin ux.du \int_0^{\infty} f(z).\sin uz.dz \qquad (24)$$

i

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos ux.du \int_0^{\infty} f(z).\cos uz.dz. \qquad (25)$$

b.) Uporabom gornjih formula dobiju se primjerice vrijednosti:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}.dx = \frac{\pi}{2}\ ; \quad \int_0^{\infty} \sin x^2.dx = \int_0^{\infty} \cos x^2.dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

§9. Geometrijske primjene integralnoga računa.

A. Rektifikacija krivulja.

1. poučka: Dužina l luka krivulje $y=f(x)$ u pravokutnim koordinatama mjerena od točke s apscisom $x=a$ do točke s apscisom $x=b$ naći će se po formuli

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,.\,dx \qquad (1)$$

2. poučka: Ako je krivulja zadana parametričkim jednadžbama $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, naći će se dužina luka od točke, koja odgovara vrijednosti parametra $t=t_0$, do točke $t=t_1$ formulom

$$l=\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,.\,dt \qquad (2)$$

3. poučka: U polarnim koordinata-

ma mjeri se dužina l luka krivulje $r=f(\vartheta)$ formulom

$$l=\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{r^2+r'^2}\,.\,d\vartheta \qquad (3)$$

4. poučka: Rektifikacija prostorne krivulje zadane parametričkim jednadžbama $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ izvest će se po jednadžbi

$$l=\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}\,.\,dt \qquad (4)$$

5. poučka: U polarnim sfernim koordinatama naći će se dužina luka krivulje zadane jednadžbama $r=f(\vartheta)$, $\lambda=g(\vartheta)$ po formuli

$$l=\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{r^2+r'^2+r^2.\lambda'^2\cos^2\vartheta}\,.\,d\vartheta \qquad (5)$$

B. Kvadratura ravnih likova.

6. poučka: Ploština P ravnoga lika, koji je omeđen odreskom osi x između točaka $x=a$ i $x=b$, ordinatama kroz te dvije točke

i lukom krivulje $y=f(x)$ između tih ordinata računa se iz

$$P=\int_a^b y.dx \; . \qquad (6)$$

7. poučka: Za krivulje zadane parametričkim jednadžbama $x=\varphi(t)$ i $y=\psi(t)$ vrijedi formula

$$P=\int_{t_0}^{t_1}\psi(t).\varphi'(t).dt, \qquad (7)$$

gdje su t_0 i t_1 one vrijednosti parametra t, koje davaju apscise $x=a$ i $x=b$.

8. poučka: U polarnim koordinatama naći će se ploština Q ravnoga lika (sektora) omeđena dvjema radiusima vektorima amplituda $\vartheta=\vartheta_0$ i $\vartheta=\vartheta_1$ i lukom krivulje $r=f(\vartheta)$ između tih dvaju po formuli

$$Q=\frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r^2.d\vartheta \qquad (8)$$

C. Komplanacija površina.

9. poučka: Ploština Π onoga dijela površine $z=\Phi(x,y)$, kojemu je projekcija na ravninu (x,y) omeđena zatvorenom krivuljom K jednadžbe $F(x,y)=0$, dana je jednadžbom

$$\Pi=\iint_{PK}\frac{dx.dy}{\cos\omega_3}=\iint_{PK}\sqrt{\Phi_x'^2+\Phi_y'^2+1}\,.dx.dy, \qquad (9)$$

gdje je područje integracije PK ploština ravnoga lika zatvorena krivuljom K.

10. poučka: Ako je površina zadana parametričkim jednadžbama

$$x=\varphi(u,v) \quad y=\psi(u,v) \quad z=\chi(u,v),$$

vrijedi mjesto (9) jednadžba

$$\Pi=\iint_{PK}\sqrt{(\psi_u'\cdot\chi_v'-\psi_v'\cdot\chi_u')^2+(\varphi_v'\cdot\chi_u'-\varphi_u'\cdot\chi_v')^2+(\varphi_u'\cdot\psi_v'-\varphi_v'\cdot\psi_u')^2}\,.du.dv \qquad (10)$$

11. poučka: U cilindričkim prostornim koordinatama komplanirat će se površina $z=f(r,\varphi)$ po formuli

$$\Pi=\iint_{PK}\sqrt{r^2+\left(r\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\,.dr.d\varphi \qquad (11)$$

<u>12. poučka</u>: U <u>sfernim</u> prostornim koordinatama komplanirat će se površina $r=g(\lambda,\vartheta)$ po formuli

$$\Pi = \iint_{PR} r\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 + \cos^2\vartheta\cdot\left[\left(\frac{\partial r}{\partial\vartheta}\right)^2 + r^2\right]}\cdot d\lambda . d\vartheta \qquad (12)$$

<u>13. poučka</u>: Izvodi li meridijanska krivulja $y=f(x)$ rotacijom oko osi x površinu rotacije, bit će ploština <u>zone</u> te površine

$$\Pi = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx \qquad (13)$$

<u>14. poučka</u> (<u>Guldinovo</u> pravilo za ploštine): Ploština zone površine rotacije jednaka je ploštini pravokutnika, kojemu je visina jednaka dužini luka meridijanske krivulje na toj zoni, a osnovnica jednaka putu, što ga težište toga luka prevali kod potpune rotacije.

<u>15. poučka</u>: Ploština onoga dijela valjka $y=f(x)$, što ga iz njega izreže ravnine $x=x_0$, $x=x_1$, $z=0$ i valjak $z=\varphi(x)$, računa se po formuli

$$\Pi = \int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx \qquad (14)$$

D: Kubatura tjelesa.

<u>16. poučka</u>: Opća formula za odredivanje volumena V nekoga tijela jest

$$V = \iiint_V dx.dy.dz. \qquad (15)$$

<u>17. poučka</u>: Volumen tijela, koje je omeđeno ravninom $z=0$, površinom $z=f(x,y)$ i valjkom okomitim na π_1 s bazom ploštine PR nađe se iz formule

$$V = \iint_{PR} f(x,y).dx.dy \qquad (16)$$

<u>18. poučka</u>: Volumen tijela sadržana među ravninama $x=a$ i $x=b$, a komu je ploština <u>presjeka</u> okomita na os x $F(x)$, bit će

$$V=\int_a^b F(x).dx \qquad (17)$$

19. poučka: Volumen tijela rotacije, što ga meridijanska krivulja $y=f(x)$ izvodi rotacijom oko osi x, jednak je

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2.dx \qquad (18)$$

20. poučka (Guldinovo pravilo za volumina) Volumen tijela rotacije nađe se tako, da se ploština ravnoga lika, koji izvodi svojom rotacijom to tijelo, pomnoži s putem, što ga težište lika prevali kod potpune rotacije.

21. poučka: U cilindričkim prostornim koordinatama je volumen V nekog tijela

$$V=\iiint_V r.dr.d\varphi.dz \qquad (19).$$

22. poučka: U sfernim prostornim koordinatama računa se volumen V po formuli

$$V=\iiint_V r^2\cos\varphi.dr.d\varphi.d\lambda. \qquad (20)$$

III. poglavlje.

Obične diferencijalne jednadžbe.

§10. Diferencijalne jednadžbe prvoga reda

A. O diferencijalnim jednadžbama uopće.

1. definicija: Svaka jednadžba između varijabla, nepoznatih funkcija tih varijabla i derivacija njihovih zove se diferencijalna jednadžba. Imamo li samo jednu varijablu x i jednu funkciju njezinu y u jednadžbi, zove se ta diferencijalna jednadžba običnom; ako je najviša derivacija funkcije n-toga reda, kažemo, da je i diferencijalna jednadžba n-toga reda. Dakle će biti opći oblik obične diferencijalne jednadžbe n-toga reda ovaj:

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0. \qquad (1)$$

ako u toj jednadžbi dolazi najviša derivacija $y^{(n)}$ najviše u m-toj potenciji, Kažemo za tu običnu diferencijalnu jednadžbu n-toga reda, da je m-toga stepena.

2. definicija: Imamo li više funkcija y, u, z, ... jedne te iste varijable x, a prema tome i više jednačaba, u kojima dolaze varijabla, te funkcije i njihove derivacije, nazivamo te jednadžbe sistemom običnih diferencijalnih jednačaba. Tako je primjerice

$$\begin{aligned} f(x, y, y', y'', z, z', z'') &= 0 \\ g(x, y, y', y'', z, z', z'') &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

opći oblik sistema dviju običnih diferencijalnih jednačaba drugoga reda.

Imamo li dvije nezavisne varijable ili njih više, to se kod deriviranja funkcije pojavljuju parcijalne derivacije.

3. definicija: Svaka jednadžba, u kojoj dolaze osim varijabla i nepoznatih funkcija još i parcijalne derivacije funkcija po tim varijablama, zove se parcijalnom diferencijalnom jednadžbom, pa je primjerice

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (3)$$

opći oblik parcijalne diferencijalne jednadžbe dviju varijabla i drugoga reda. Imamo li pako više funkcija više varijabla i njihove derivacije, nastaju sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačaba, pa bi primjerice

$$\begin{aligned} \varphi\left(x, y, z, u, v, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0 \\ \psi\left(x, y, z, u, v, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0 \qquad (4) \\ \chi\left(x, y, z, u, v, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned}$$

bio opći oblik sistema triju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda.

4. definicija: Riješiti diferencijalnu jednadžbu znači naći sve one funkcije, koje

sa svojim derivacijama identično zadovolja„ vaju zadanoj jednadžbi; kod sistema di„ ferencijalnih jednadžbi rješenje je dakle sistem od više funkcija.

B. Diferencijalna jednadžba prvoga re„ da. Opći oblik te jednadžbe je

$$F(x, y, y') = 0, \tag{5}$$

ili ako y' izrazimo eksplicitno kao funk„ ciju veličina x i y:

$$y' = f(x, y). \tag{5a}$$

Osobito jednostavan oblik jednadžbe (5a) bio bi

$$y' = f(x), \tag{6}$$

odakle slijedi izravno

$$y = \int f(x).dx + K. \tag{6a}$$

Rješavanje diferencijalne jednadžbe uopće vodi na izvjesne integracije, pa stoga kažemo često umjesto „riješiti" također i „integrirati"

diferencijalnu jednadžbu, a njezina rješenja nazivamo i integralima te jednadžbe.

Rješenja $y = \varphi(x)$ diferencijalne jednadžbe (5) znače geometrijski neke krivulje, a de„ rivacija y' znači koeficijent smjera pripad„ ne tangente; dakle riješiti obične dife„ rencijalnu jednadžbu prvoga reda znači naći sve one krivulje, čije točke i pripad„ ne tangente udovoljavaju zadanoj jednadž„ bi. Te se krivulje zovu integralnim kri„ vuljama zadane jednadžbe.

5. definicija: Linijskim elementom na„ zivamo točku sa izvjesnim smjerom kroz nju. Točka (x, y) je nosioc, a derivacija y' je smjer linijskoga elementa.

Jednadžbom (5a) određeno je ∞^2 linijskih elemenata. Riješiti diferencijalnu jednadž„ bu znači naći one krivulje, koje su tim li„ nijskim elementima određene, t.j. povedati te linijske elemente tako, da nosioci tvore krivulju, a smjerovi da se podudaraju sa smjerovima tangenata. Budući da je svaka krivulja jednodimenzionalna, određuje skup od ∞^2 linijskih elemenata skup od ∞^1 krivulja.

6. definicija: Jednadžba

$$F(x, y, y_0') = 0 \qquad (7)$$

znači geometrijsko mjesto onih linijskih elemenata, koji imadu isti smjer y_0'; te se krivulje zovu *izokline*.

Pripomena: Ako je ravno polje neke sile zadano komponentama $X = f_1(x, y)$ i $Y = f_2(x, y)$ paralelnima sa smjerovima koordinatnih osi, to diferencijalna jednadžba *silnica* toga polja glasi

$$y' = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}. \qquad (8)$$

Skup svih beskonačno mnogih integralnih krivulja predočen je analitički jednadžbom

$$\Phi(x, y, k) = 0; \qquad (9)$$

uzmemo li za *parametar* k posebne vrijednosti, dobivamo pojedine integralne krivulje. Jednadžba (9) predočuje dakle opće rješenje ili *opći integral* diferencijalne jednadžbe.

1. poučka: U općem integralu diferencijalne jednadžbe prvoga reda ima uvijek jedna neodređena konstanta (parametar).

Specijalizacijom parametra k, t.j. uzmemo li u općem integralu za neodređenu konstantu neku *posebnu* vrijednost k_0, dobijemo izvjesni *partikularni integral*

$$\Phi(x, y, k_0) = 0, \qquad (9a)$$

koji je geometrijski određen izvjesnom *jednom* integralnom krivuljom. Partikularni integral će se redovno naći iz zadanih početnih uvjeta $x=x_0$, $y=y_0$. Rad tražimo onu integralnu krivulju, koja prolazi točkom (x_0, y_0).

2. poučka: Svaki skup od beskonačno mnogo krivulja analitički predočenih jednadžbom (9) vodi do diferencijalne jednadžbe prvoga reda (5), koju dobijemo tako, da (9) deriviramo po x, pa imamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad ; \qquad (10)$$

eliminiramo li iz (9) i (10) parametar k, dobijemo traženu jednadžbu (5).

7. definicija: Rješenja diferencijalne jednadžbe, koja ne sadržavaju parametra k, a koja se ipak ne mogu nikako dobiti iz općega integrala (9) specijalizacijom konstante k, zovemo singularnim integralima.

C. Metoda separacije varijabla.

3. poučka: Diferencijalna jednadžba, koja se može svesti na oblik

$$X . dx + Y . dy = 0 , \qquad (11)$$

gdje je $X = X(x)$ funkcija samo nezavisne varijable x, a $Y = Y(y)$ funkcija samo zavisne varijable y, integrira se izravno, pa imamo

$$\int X . dx + \int Y . dy = K . \qquad (12)$$

Pripomene. a.) Ako je jednadžba oblika

$$y' = \varphi(x) . \psi(y) \qquad (13)$$

slijedi odatle

$$\varphi(x) . dx - \frac{1}{\psi(y)} . dy = 0 \qquad (13a)$$

a to je već oblik (11).

b.) Jednadžba zadana u obliku

$$\varphi_1(x) . \psi_1(y) . dx + \varphi_2(x) . \psi_2(y) . dy = 0 \quad (14)$$

pretvorit će se u

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} . dx + \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} . dy = 0 , \qquad (14a)$$

što je opet oblik (11).

D. Homogene jednadžbe.

8. definicija: Diferencijalna jednadžba prvoga reda

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (15)$$

zove se *homogena*, jer se ne mijenja transformacijom

$$x = k.\xi \qquad y = k.\eta \qquad (16)$$

9. definicija: Transformacija (16) zove se *homotetična* ili *perspektivna* transformacija ili *transformacija sličnosti* s ishodištem koordinata kao središtem sličnosti.

4. poučka: Skup integralnih krivulja homogene diferencijalne jednadžbe prvoga reda invarijantan je za homotetičnu transformaciju. Ili: sve su integralne krivulje jednadžbe (15) s obzirom na ishodište koordinata među sobom slične.

5. poučka: Izokline homogene diferencijalne jednadžbe prvoga reda tvore

pramen zraka s vrhom u ishodištu koordinata.

6. poučka: Jednadžba (15) rješava se supstitucijom

$$\frac{y}{x} = z, \qquad (17)$$

dakle

$$y = x.z \qquad \frac{dy}{dx} = z + x\cdot\frac{dz}{dx},$$

pa je

$$z + x\cdot\frac{dz}{dx} = f(z). \qquad (17a)$$

U toj jednadžbi može se izvesti *separacija varijabla*, pa imamo

$$\int\frac{dz}{f(z)-z} = \ln x + k_1. \qquad (17b)$$

Označimo li sa $\Phi(z) = \int\frac{dz}{f(z)-z}$,

vidimo, da je *opći integral* jednadžbe (15) oblika

$$x = k.e^{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)}. \qquad (18)$$

7. poučka: Na osnovni oblik (15) vode jednadžbe oblika

$$\varphi(x,y).dx + \psi(x,y).dy = 0 \qquad (19)$$

gdje su φ i ψ homogene funkcije istoga stepena, jer je onda $\varphi(x,y)=x^n\varphi(1,\frac{y}{x})$; $\psi(x,y)=x^n\psi(1,\frac{y}{x})$, dakle

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi(1,\frac{y}{x})}{\psi(1,\frac{y}{x})}=f(\tfrac{y}{x}) . \qquad (19a)$$

8. poučka: Jednadžbe oblika

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad (20)$$

rješavaju se transformacijom

$$x=\xi+\alpha \qquad y=\eta+\beta, \qquad (21)$$

gdje su $x=\alpha$ i $y=\beta$ rješenja jednačaba

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0 \end{aligned} \qquad (21a)$$

Transformacija (21) pretvara jednadžbu (20) u oblik

$$\frac{d\xi}{d\eta}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\cdot\frac{\eta}{\xi}}{a_2+b_2\cdot\frac{\eta}{\xi}}\right), \qquad (22)$$

a to je već jednadžba (15).

Primjedbe. a.) Riješiti jednadžbe (21a) znači naći sjecište pravaca, koji su tim jednadžbama predočeni, a izvesti transformaciju (21) znači prenijeti ishodište koordinata paralelnom translacijom u sjecište tih pravaca.

b.) Integralne su krivulje jednadžbe (20) međusobom slične sa središtem sličnosti u točki (α,β). Izokline jednadžbe (20) tvore pramen zraka s vrhom u točki (α,β).

c.) Metoda ta će zatajiti, t. j. jednadžbe (21a) ne će se moći riješiti, kad je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0 ; \qquad (23)$$

onda su naime pravci (21a) paralelni, pa se njihovo sjecište (α,β) pomaklo u beskonačnu udaljenost. Radi uvjeta (23) bit će sada $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=m$, gdje je m neka konstanta, pa možemo pisati

$$\frac{dy}{dx}=f\left[\frac{a_1x+b_1y+c_1}{m(a_1x+b_1y)+c_2}\right]. \qquad (24)$$

Supstitucija

$$x = \xi \qquad a_1 x + b_1 y = \eta \qquad (25)$$

daje
$$\frac{1}{b_1} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{\eta + c_1}{m\eta + c_2}\right) + \frac{a_1}{b_1},$$

pa imamo separacijom varijabla

$$\xi = \int \frac{d\eta}{b_1 \cdot f\left(\frac{\eta+c_1}{m\eta+c_2}\right) + a_1} + K; \qquad (26)$$

ovdje treba konačno ξ i η izraziti pomoću x i y (posredovanjem jednačaba (25)).

d.) U posljednjem slučaju tvore izokline snop zraka paralelnih s pravcem $a_1 x + b_1 y = 0$, a integralne su krivulje sve među sobom kongruentne; jedna nastaje iz druge translacijom (paralelnim pomakom) u smjeru pravca $a_1 x + b_1 y = 0$.

E. Egzaktne diferencijalne jednadžbe. Eulerov multiplikator.

10. definicija. Jednadžbe oblika

$$P(x,y).dx + Q(x,y).dy = 0, \qquad (27)$$

u kojima je lijeva strana totalni diferencijal, gdje je dakle ispunjen uvjet

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (28)$$

zovu se egzaktne diferencijalne jednadžbe.

9. poučka: Egzaktne diferencijalne jednadžbe integriraju se po formuli

$$\int P.dx + \int\left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P.dx\right].dy = K. \qquad (29).$$

Primjedbe. a.) Opći integral jednadžbe (27) dan je ne samo formulom (29), već i ekvivalentnom formulom

$$\int Q.dy + \int\left[P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q.dy\right].dx = K. \qquad (29a)$$

b.) Jednadžba

$$X.dx + Y.dy = 0,$$

u kojoj je provedena separacija varijabla, poseban je slučaj egzaktne diferencijalne jednadžbe, jer je ovdje $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$. Dakle su egzaktne diferencijalne jednadžbe posvepćenje jednačaba s rastavljenim varijablama.

Ako jednadžba (27) nije egzaktna, može postojati neka funkcija $\mu(x,y)$, koju nazivamo <u>Eulerovim multiplikatorom</u> ili <u>faktorom integracije</u>, koja pretvara izraz $P.dx + Q.dy$ množenjem u totalni diferencijal $\mu.P.dx + \mu.Q.dy$. Po 10. poučci §-a 7. mora funkcija μ odgovarati uvjetu

$$P.\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - Q.\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = Q'_x - P'_y, \qquad (30)$$

koji je istovjetan s uvjetom

$$P.\frac{\mu'_y}{\mu} - Q.\frac{\mu'_x}{\mu} = Q'_x - P'_y. \qquad (30a)$$

Naći dakle Eulerov multiplikator zadane jednadžbe (27) znači <u>riješiti</u> parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvoga reda (30a), što redovno nije lak posao.

Ako je μ faktor integracije jednadžbe

(27), t.j. ako je izraz $\mu.P.dx + \mu.Q.dy$ <u>totalni</u> diferencijal dz neke funkcije z, onda je po 11. poučci 7. paragrafa i $\mu.g(z)$, gdje je $g(z)$ <u>makar koja</u> funkcija od z, također faktor integracije jednadžbe (27). No i obrnuto, svaki faktor integracije jednadžbe (27) jest uvijek oblika $\mu.g(z)$.

Opći integral jednadžbe (27) jest funkcija (29), koju pišemo kraće u obliku

$$f(x,y) = k;$$

no jer je svaka funkcija konstante k opet neka konstanta K, to je i svaki izraz

$$F(k) = F[f(x,y)] = F(z) = K \qquad (31)$$

također integral jednadžbe (27.). Svakom specijalnom faktoru integracije $\mu.g(z)$ odgovara neki specijalni oblik općeg integrala (31).

<u>11. definicija</u>: Dva Eulerova multiplikatora μ_1 i μ_2 iste diferencijalne jednadžbe zovu se <u>bitno različitim</u>, kad se ne

razlikuju samo za neki konstantni faktor.

10. poučka: Poznamo li dva bitno različita multiplikatora jednadžbe (27), dobit ćemo njezin opći integral bez integracije izravno iz formule

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = K \qquad (32)$$

11. poučka: Ako u kvocijentu

$$\frac{Q'_x - P'_y}{Q}$$

nema veličine y, t.j. ako je on funkcija samo od x, postoji multiplikator $\mu = \mu(x)$, koji je također samo funkcija od x, a dobije se jednom kvadraturom po formuli

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{Q'_x - P'_y}{Q} \cdot dx} \qquad (33)$$

12. poučka: Ako u kvocijentu

$$\frac{Q'_x - P'_y}{P}$$

nema veličine x, t.j. ako je on funkcija samo od y, postoji multiplikator $\mu = \mu(y)$, koji je također samo funkcija od y, a dobije se jednom kvadraturom po formuli

$$\mu(y) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P} \cdot dy} \qquad (34)$$

F. Linearne jednadžbe:

12. definicija: Linearnom diferencijalnom jednadžbom prvoga reda nazivamo svaku jednadžbu, koja je linearna s obzirom na y i y', koja je dakle oblika

$$y' + My + N = 0, \qquad (35)$$

gdje su $M = M(x)$ i $N = N(x)$ funkcije samo od x.

Pripomena: Pišemo li jednadžbu (35) u obliku

$$(My + N)dx + dy = 0,$$

vidimo, da ona nije egzaktna, no jer je izraz $-\frac{Q'_x - P'_y}{Q} = M$ funkcija samo varijable x, postoji po 11. poučci Eulerov multiplikator $\mu(x) = e^{\int M dx}$

13. poučka: Linearna se jednadžba (35) izravno integrira po formuli

$$y = -e^{-\int M.dx}\cdot\left[\int N.e^{\int M.dx}.dx - K\right]. \qquad (36)$$

Pripomene: a.) Ako je zadana jednadžba

$$Ry' + Sy + T = 0,$$

gdje su opet R, S, T funkcije samo varijable x, podijelit će se ta jednadžba sa R da se dobije oblik (35).

b.) Iz formule (36) vidimo, da se opći integral (36) linearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda dobije dvjema kvadraturama. No ako poznamo jedan partikularni integral y_1 te jednadžbe, naći će se opći integral samo jednom kvadraturom po formuli

$$y - y_1 = k.e^{-\int M.dx}. \qquad (37)$$

c.) Poznamo li dva partikularna integrala y_1 i y_2 jednadžbe (35), naći ćemo nje-

zin opći integral bez ikakve integracije po formuli

$$y = y_1 + k(y_2 - y_1). \qquad (38)$$

14. poučka: Opći je integral linearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda linearan s obzirom na konstantu, t.j. oblika

$$y = k\varphi + \psi, \qquad (39)$$

gdje su $\varphi = \varphi(x)$ i $\psi = \psi(x)$ funkcije varijable x.

No i obrnuto: Svakom integralu oblika (39) pripada linearna diferencijalna jednadžba prvoga reda.

Pripomena. Ako su poznata tri partikularna integrala y_1, y_2, y_3 jednadžbe (35), gdje je po 14. poučci

$$y_1 = k_1\varphi + \psi, \quad y_2 = k_2\varphi + \psi, \quad y_3 = k_3\varphi + \psi,$$

vrijedi relacija

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_1}, \qquad (40)$$

vidimo dakle, da omjer $\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$ ne ovisi od x, t.j.

da je konstantan. To je *karakteristično* geometrijsko svojstvo integralnih krivulja linearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda, pa možemo kazati, da su odsječci, što ih tri integralne krivulje određuju na makar kojem pravcu usporednom s osi y, uvijek *proporcijonalni.*

G. Singularni integrali. Diferencijalna jednadžba prvoga reda

$$F(x,y,y')=0, \qquad (41)$$

u kojoj ćemo y' eksplicitno izraziti veličinama x i y u obliku

$$y'=f(x,y), \qquad (41a)$$

može određivati y' kao jednoznačnu ili višeznačnu funkciju, primjerice iz *algebarske* diferencijalne jednadžbe prvoga reda i prvoga stepena

$$Py'+Q=0 \qquad (42)$$

u kojoj su P i Q cijele racijonalne funkcije (polinomi) u x i y, slijedit će $y=-\frac{Q}{P}$ kao

kao *jednoznačna* funkcija veličina x i y u *cijeloj* ravnini (x,y), t.j. svaka točka ravnine je nosioc jednoga i samo jednoga linijskoga elementa, dakle svakom točkom ravnine prolazi izvjesna integralna krivulja, ili drugim riječima: *integralne krivulje pokrivaju jednostruko i bezizimnimno* cijelu ravninu.

Imamo li algebarsku diferencijalnu jednadžbu prvoga reda, a *višega* stepena, n. pr. drugoga

$$Py'^2+Qy'+R=0, \qquad (43)$$

gdje su opet P,Q,R polinomi od x i y, *neće* biti više y' *jednoznačna* funkcija veličina x i y. Za jednadžbu (43) nekim će vrijednostima (x,y) odgovarati *dvije realne* različite vrijednosti veličine y', a nekima opet samo konjugirane kompleksne vrijednosti derivacije y'. Jednadžba (43) dijeli dakle ravninu u područje, u kojem je svaka točka nosioc dva je različitih linijskih elemenata, i u područje, u kojem uopće nema realnih linijskih elemenata. Prvo je područje integralnim krivuljama dvostruko obloženo, a u drugom području nema integralnih krivulja. Na granici među oba ova područja je svaka točka nosioc dvaju realnih jednakih linijskih elemenata (t. j. dvostrukog realnog linijskog elementa). Kod jednačaba trećeg i višeg stepena bit će mnogostruke slične mogućnosti.

<u>13. definicija</u>: Linijski element, koji je složen iz bar dva među sobom identična linijska elementa, nazivamo <u>singularnim</u> linijskim elementom.

<u>15. poučka</u>: Za svaki je singularni linijski element y' <u>višestruki</u> korjen jednadžbe (41)

<u>16. poučka</u>: Višestruke korjene y' jednadžbe (41) naći ćemo kao <u>zajedničke</u> korjene te jednadžbe (41) i jednadžbe

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0, \qquad (44)$$

u kojima smatramo veličine x i y nekim parametrima.

<u>14. definicija</u>: Jednadžba

$$D(x, y) = 0, \qquad (45)$$

koju dobijemo eliminacijom veličine y' iz jednačaba (41) i (45), zovemo <u>diskriminantnom jednadžbom</u> zadane diferencijalne jednadžbe.

<u>17. poučka</u> Uvjet, kojemu moraju udovoljavati nosioci singularnih linijskih elemenata neke zadane diferencijalne jednadžbe (41), je njezina diskriminantna jednadžba (45).

Kod pitanja, koje <u>geometrijske pojave</u> prouzrokuju koincidenciju dvaju linijskih elemenata ili njih više, ograničit ćemo se na <u>dva</u> identična linijska elementa. Oni se mogu pojaviti u ova <u>tri</u> slučaja:

a.) nosiocem prolaze dvije <u>različite</u> integralne krivulje, pa se u njemu dodiru (t. j. imadu zajedničku tangentu),

b.) nosiocem prolaze dvije grane iste integralne krivulje, pa imadu u njemu zajedničku tangentu, integralna krivulja ima dakle u toj točki šiljak,

c.) nosiocem prolaze dvije „susjedne" (t.j. beskonačno blize) integralne krivulje dirajući se i sijekući se u njemu, pa imadu opet zajedničku tangentu.

18. poučka: Geometrijsko mjesto singularnih linijskih elemenata treće vrsti ima svojstvo, da su njegovi linijski elementi ujedno linijski elementi neke integralne krivulje jednadžbe (41), i to baš singularnoga integrala. To geometrijsko mjesto je anvelopa ostalih integralnih krivulja.

Pripomena. Geometrijska mjesta singularnih linijskih elemenata prve i druge vrsti nisu u pravilu integralne krivulje jednadžbe (41)

15. definicija: Geometrijsko mjesto singularnih linijskih elemenata diferencijalne jednadžbe (41), kojemu pripadaju baš ti linijski elementi, koje dakle udovoljava zadanoj diferencijalnoj jednadžbi (41), zovemo singularnim integralom te jednadžbe.

19. poučka: Eliminacijom veličine y' iz jednačaba (41) i (44) dobiveno geometrijsko mjesto $y=\varphi(x)$ singularnih linijskih elemenata samo je onda singularni integral jednadžbe (41), ako ujedno udovoljava i jednadžbi

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' = 0; \qquad (46)$$

Određivanje singularnih integrala zadane diferencijalne jednadžbe. Prije svega će se izračunati diskriminantna jednadžba (45); ona daje sve (integ.) singularne linijske elemente, dakle i one, koji su šiljci ili dirališta integralnih krivulja.

Prema tome će uopće izraz za diskriminantu D raspadati u faktore. Za svaki njegov faktor $\psi(x,y)=0$ valja posebice ispitati, udovoljava li jednadžbi (41) ili (46); samo u pozitivnom slučaju je to singularni integral, dok je to u negativnom slučaju geometrijsko mjesto svih šiljaka ili svih dirališta integralnih krivulja. Ta se dva posljednja slučaja mogu samo posebnim istraživanjima razlučivati

Diferencijalnoj jednadžbi (41) neka pripada opći integral

$$\Phi(x,y,k)=0\ ; \tag{47}$$

on definira iste linijske elemente kao i (41), samo što su na osnovi jednadžbe (47) svi linijski elementi već poredani u integralne krivulje kao geometrijske reprezentante partikularnih integrala. Kako je poznato, diferencijalnu jednadžbu (41) dobijemo, ako iz (47) i iz

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \tag{48}$$

eliminiramo konstantu k; dakle je zapravo jednadžba (41) ekvivalentna jednadžbama (47) i (48).

Deriviramo li (47) po x imamo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\Phi}{\partial k}\cdot\frac{dk}{dx}=0,$$

što s obzirom na (48) daje

$$\frac{\partial\Phi}{\partial k}\cdot\frac{dk}{dx}=0\ . \tag{49}$$

Toj jednadžbi može biti na dva načina udovoljeno, i to:

a.) $\frac{dk}{dx}=0$, dakle $k=\text{konst}$, što daje opći integral (47)

b) $\frac{\partial\Phi}{\partial k}=0$. U tom slučaju imamo dakle riješiti jednadžbe (47) i

$$\frac{\partial\Phi(x,y,k)}{\partial k}=0\ , \tag{50}$$

eliminiramo li iz (47) i (50) veličinu k, dobijemo jednadžbu

$$\Delta(x,y)=0. \tag{51}$$

<u>20. poučka</u>: Višestruke korjene k jednadžbe (47) naći ćemo kao zajedničke korjene te jednadžbe (47) i jednadžbe (50).

<u>16. definicija</u>: Jednadžba (51), koju dobijemo eliminacijom veličine k iz jednačaba (47) i (50) zovemo <u>diskriminantnom</u> jednadžbom zadanog općeg integrala (47)

Jednadžba (51) daje nam one točke (x, y) za koje jednadžba (47), shvaćena kao jednadžba u k, ima <u>višestruke</u> korjene. Pitamo li opet, koje <u>geometrijske pojave</u> uvjetuju u istoj točki višestruki korjen k, pa obaziremo li se opet samo na <u>dvostruke</u> korjene, imamo ove <u>tri</u> mogućnosti:

a.) točkom prolazi ista krivulja dva puta, pa sama sebe siječe, dakle je točka <u>čvor</u>

b.) točkom prolazi ista krivulja dva puta, pa sama sebe dira, dakle je točka <u>šiljak</u>

c.) točkom prolaze dvije „<u>susjedne</u>" (t. j. beskonačno blize) integralne krivulje, koje se u toj točki sijeku i diraju (sa zajedničkom tangentom).

Opet je samo geometrijsko mjesto točaka treće vrsti svojstva, da su singularni linijski elementi ujedno i njegovi linijski elementi, dakle je ono <u>singularni integral</u>, t. j. <u>anvelopa</u> integralnih krivulja. Geometrijska mjesta točaka prve i druge vrsti nisu u pravilu integralne krivulje.

Jednadžba (51) obuhvata dakle geometrijska mjesta čvorova i šiljaka integralnih krivulja i singularne integrale kao anvelope, pa se u pravilu ne će podudarati s jednadžbom (45). No svakako će svaki singularni integral biti <u>zajednički</u> faktor jednačaba (45) i (51). Ali obrat ne vrijedi: ne mora naime svaki zajednički faktor tih dviju jednačaba da bude singularni integral, već može biti i geometrijsko mjesto šiljaka integralnih krivulja. Geometrijsko mjesto čvorova pripada samo jednadžbi (51), a geometrijsko mjesto dirališta samo jednadžbi (45).

Odredivanje singularnih integrala iz općega integrala. Izračuna se diskriminantna jednadžba (51), koja se u pravilu raspada na faktore. Za svaki faktor treba posebno ispitati, udovoljava li jednadžbi (41); samo u pozitivnom slučaju je on zaista singularni integral.

H. Neki posebni oblici diferencijalnih jednačaba prvoga reda:

I. Bernoulli-jeva jednadžba (1695.)

17. definicija: Svaka jednadžba oblika

$$y' + M.y + N.y^{n} = 0, \qquad (52)$$

gdje su $M=M(x)$ i $N=N(x)$ funkcije samo varijable x, a n makar kakova realna konstanta, zove se Bernoulli-jeva jednadžba, jer ju je prvi promatrao Jakob Bernoulli.

Ta jednadžba već po svom obliku sjeća na linearne jednadžbe, pa se i može svesti na taj tip. Podijelimo li je sa y^n, dobijemo

$$\frac{y'}{y^{n}} + \frac{M}{y^{n-1}} + N = 0 ; \qquad (52a)$$

ovamo uvrštavamo novu funkciju z supstitucijom

$$z = y^{1-n} , \quad dz = (1-n)\cdot\frac{dy}{y^{n}} , \qquad (53)$$

što daje linearnu jednadžbu

$$z' - (n-1).M.z - (n-1).N = 0 . \qquad (54)$$

21. poučka: Bernoulli-jeva jednadžba (52) rješava se supstitucijom (53), koja ju transformira na linearnu jednadžbu, pa njezin opći integral glasi

$$y^{1-n} = e^{(n-1)\cdot\int M.dx}\left[(n-1)\cdot\int N.e^{(1-n)\cdot\int M.dx}.dx + R\right]. \qquad (55)$$

Pripomene. a.) Na oblik (52) svest će se svaka jednadžba oblika

$$R.y' + S.y + T y^{n} = 0 , \qquad (56)$$

gdje su R, S i T funkcije samo varijable x, ako se cijela jednadžba (56) podijeli sa R.

b.) Poučka 21. će zatajiti, ako je $n=1$, jer je onda $n-1=0$. No u tom slučaju ima jednadžba (52) oblik

$$y' + (M+N)y = 0,$$

pa se rješava separacijom varijabla.

c.) Sličnim postupkom kao i Bernoulli-jeva jednadžba rješava se i jednadžba

$$y' + M\cdot e^{y} + N = 0; \qquad (57)$$

podijelimo li tu jednadžbu s e^{y} imamo

$$\frac{y'}{e^{y}} + N\cdot e^{-y} + M = 0; \qquad (57a)$$

uvrstimo li ovamo $e^{-y}=z$, $-e^{y}\cdot dy=dz$, imamo linearnu jednadžbu

$$z' - Nz - M = 0. \qquad (57b)$$

d.) Do Bernoulli-jeve jednadžbe vode posve općene homogene diferencijalne jednadžbe prvoga reda

$$xy' - y + P(x,y)\cdot y' + Q(x,y) = 0, \qquad (58)$$

gdje su P i Q homogene funkcije istoga stepena m. I ovdje uvrštavamo $y=xz$, $y'=z+xz'$,

pa jer je

$$P(x,y)=P(x,xz)=x^{m}\cdot P(1,z)$$
$$Q(x,y)=Q(x,xz)=x^{m}\cdot Q(1,z)$$

imamo

$$\frac{dz}{dx}\left(1+x^{m-1}\cdot P\right)=-z\cdot x^{m-2}\cdot P-x^{m-2}\cdot Q$$

ili konačno

$$\frac{dx}{dz}+\frac{P(1,z)}{z\cdot P(1,z)+Q(1,z)}\cdot x+\frac{1}{z\cdot P(1,z)+Q(1,z)}\cdot x^{2-m}=0. \qquad (59)$$

a to je već Bernoulli-jeva jednadžba, u kojoj je z varijabla, a x njezina funkcija.

Metoda će zatajiti u slučaju $z\cdot P(1,z)+Q(1,z)=0$, no onda jednadžba (58) prima jednostavniji oblik, koji se rješava separacijom varijabla.

e.) Jacobijeva jednadžba.

$$(a+a_1x+a_2y)(xy'-y)-(b+b_1x+b_2y)y'+(c+c_1x+c_2y)=0 \qquad (60)$$

spada sa $a=b=c=0$ pod slučaj d.) Ako taj uvjet nije ispunjen, može se transformacijom $x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\beta$ svesti na taj slučaj; konstante α i β ovise od izvjesne algebarske jednadžbe trećega stepena.

II. Riccatti-jeva jednadžba.

<u>18. definicija</u>: Svaka jednadžba oblika

$$y' + L + M.y + N.y^2 = 0 \qquad (61)$$

zove se <u>Riccatti-jeva jednadžba</u>, ako su u njoj L, M i N funkcije samo varijable x.

Tu jednadžbu ne možemo <u>u pravilu</u> riješiti; no poznamo li jedan njesin <u>partikularni</u> integral y_0, možemo je transformirati u Bernoulli-evu jednadžbu, pa onda i riješiti. Uvrstimo li

$$y = y_0 + z, \qquad (62)$$

imamo

$$\frac{dy_0}{dx} + \frac{dz}{dx} + L + My_0 + Mz + Ny_0^2 + Nz^2 + 2Ny_0z = 0; \quad (62a)$$

no jer je y_0 partikularni integral jednadžbe (61), bit će svakako

$$\frac{dy_0}{dx} + L + My_0 + Ny_0^2 = 0$$

što uvršteno u (62a) daje

$$\frac{dz}{dx} + (M + 2Ny_0)z + Nz^2 = 0, \qquad (62b)$$

a to je već Bernoulli-jeva jednadžba, koja će se supstitucijom $z = \frac{1}{u}$ svesti na linearni oblik.

<u>22. poučka</u>: Riccatti-jeva jednadžba (61), kojoj poznamo jedan partikularni integral y_0, pretvara se supstitucijom

$$y = y_0 + \frac{1}{u} \qquad (63)$$

izravno u linearnu jednadžbu, pa se onda rješava dvjema kvadraturama.

<u>Pripomene</u>. a) Poznamo li <u>dva</u> partikularna integrala y_0 i y_1 Riccatti-jeve jednadžbe, bit će $y_1 = y_0 + \frac{1}{u}$, poznamo dakle odatle neki partikularni integral $u_0 = \frac{1}{y_1 - y_0}$ linearne jednadžbe, pa će se opći integral naći na osnovi samo <u>jedne</u> kvadrature. Poznamo li pako <u>tri</u> partikularna integrala Riccatti-jeve jednadžbe, poznat ćemo <u>dva</u> partikularna integrala pripadne linearne jednadžbe, pa će se opći integral naći bez ikakve kvadrature.

b.) Funkcija u je kao opći integral linearne jednadžbe s obzirom na konstantu k linearna, dakle oblika

$$u = P + Q.k,$$

gdje su $P=P(x)$ i $Q=Q(x)$ izvjesne funkcije varijable x. Odatle slijedi, da je opći integral y Riccatti-jeve jednadžbe s obzirom na konstantu lineарно razlomljen, t.j. oblika

$$y = \frac{S+T.k}{P+Q.k}, \qquad (64)$$

gdje su i $S=S(x)$, $T=T(x)$ funkcije varijable x.

c.) Poznamo li četiri partikularna integrala y_0, y_1, y_2, y_3 Riccatti-jeve jednadžbe, pa napravimo li njihov anharmonički omjer (tz. zv. dvoomjer) A:

$$A = \frac{y_3-y_0}{y_1-y_0} : \frac{y_3-y_2}{y_1-y_2}, \qquad (65)$$

vidimo iz (64), da je taj anharmonički omjer neovisan od x, t.j. konstantan.

Imamo li dakle tri partikularna integrala y_0, y_1, y_2 Riccatti-jeve jednadžbe, naći ćemo njezin opći integral bez kvadrature izravno iz formule

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} : \frac{y-y_2}{y_1-y_2} = k. \qquad (66)$$

S geometrijskog gledišta znači nam gornji rezultat ovo: Anharmonički omjer za četiri točke, što ih zadane četiri integralne krivulje Riccatti-jeve jednadžbe odreduju na makar kojem pravcu usporednom s osi y, nezavisan je od položaja te transversale, t.j. konstantan.

d.) Svakom sistemu krivulja zadanih parametričkom jednadžbom (64) pripada Riccatti-jeva diferencijalna jednadžba.

e.) Jednadžba (61) zove se općom Riccatti-jevom jednadžbom, dok je zapravo sam Riccatti promatrao posebnu jednadžbu

$$y' + ay^2 = bx^m. \qquad (67)$$

Ta se jednadžba, ako joj ne poznamo koji partikularni integral, može riješiti samo onda, ako konstante a, b, m udovoljavaju izvjesnim uvjetima, koji dopuštaju, da se zgodnim transformacijama svede na slučaj separacije varijabla.

III. Lagrange-ova jednadžba.

19. definicija: Svaka diferencijalna jednadžba prvoga reda, koja je linearna s obzirom na x i y, dakle oblika

$$x\cdot f(y')+y\cdot g(y')+h(y')=0, \tag{68}$$

može se divizijom sa $g(y')$ svesti na Lagrange-ov oblik jednadžbe

$$y+x\cdot\varphi(y')+\psi(y')=0, \tag{69}$$

gdje su φ i ψ funkcije samo derivacije y'.

24. poučka: Lagrange-ova se jednadžba supstitucijom $y'=p$ i naknadnim deriviranjem po x pretvara u linearnu jednadžbu.

Deriviramo li naime jednadžbu

$$y+x\cdot\varphi(p)+\psi(p)=0, \tag{69a}$$

imamo

$$p+\varphi(p)+x\cdot\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}=0;$$

pomnožimo li tu jednadžbu sa $\frac{dx}{dp}$, dobijemo

$$\frac{dx}{dp}\cdot\left[p+\varphi(p)\right]+x\cdot\varphi'(p)+\psi'(p)=0,$$

ili konačno

$$\frac{dx}{dp}+x\cdot\frac{\varphi'(p)}{p+\varphi(p)}+\frac{\psi'(p)}{p+\varphi(p)}=0, \tag{70}$$

a to je linearna jednadžba sa p kao varijablom, a x kao funkcijom. Njezina integracija daje

$$x=\varrho(p); \tag{71}$$

odatle dobijemo inverzijom $p=y'=\sigma(x)$, što uvršteno u (69) daje neku relaciju $F(x,y,k)=0$ kao opći integral zadane jednadžbe. Uvrstimo li pako iz (71) vrijednost za x u (69a) dobijemo

$$y=\tau(p); \tag{71a}$$

jednadžbe (71) i (71a) davaju također opći integral, samo što su sada koordinate integralnih krivulja zadane kao funkcije pa„ rametra p. Eliminacijom toga parametra iz tih dviju jednačaba dolazimo opet do relacije $\mathcal{F}(x, y, k)=0$.

25. poučka: Sve su izokline Lagrange-ove jednadžbe pravci.

Pripomene. a.) Postavimo li u (69) $\psi=0$, imamo $\frac{y}{x}=-\varphi(y')$, što inversijom daje $y'=\chi(\frac{y}{x})$, dakle su homogene jednadžbe poseban slu„ čaj Lagrange-ovih jednačaba.

b.) Lagrange-ova jednadžba zove se i Dalembert-ova, a i Monge-ova jednadžba.

c.) Među integralnim krivuljama jed„ nadžbe (69) nalazit će se toliko pravaca, koliko ima različitih realnih rješenja jednadžba

$$-\varphi(p)=p\ ; \qquad (72)$$

te su pravocrtne integralne krivulje ujedno i izokline (69 a). Za te vrijednosti p postaju i nazivnici u (70) jednaki nuli.

IV. Clairaut-ova jednadžba.

20. definicija: Jednadžba oblika

$$y-x.y'+\psi(y')=0 \qquad (73)$$

zove se Clairaut-ova jednadžba; ona je poseban slučaj Lagrange-ove jednadžbe (69) za $\varphi(y')=-y'$.

26. poučka: Opći integral Clairaut-ove jed„ nadžbe naći će se bez ikakve integracije izrav„ no iz jednadžbe

$$y-kx+\psi(k)=0. \qquad (74)$$

27. poučka: Sve su integralne krivulje Clai„ raut-ove jednadžbe pravci; one su identične s njezinim izoklinama.

Pripomene. a.) Eliminacijom veličine p iz jed„ načaba $y-xp+\psi(p)=0$ i $\psi'(p)-x=0$ dobijemo singularni integral jednadžbe (73).

b.) Svakom sistemu pravaca oblika (74) pri„ pada Clairaut-ova jednadžba (73)

c.) Clairaultova je jednadžba s historijskog gledišta interesantna, jer je na njoj Clairaut prvi g. 1734. ispitivao pojave singularnih integrala.

I. Opće metode rješavanja. Sve do sada promotrene diferencijalne jednadžbe – osim Lagrange-ovih i Clairaut-ovih – bile su s obzirom na y' linearne. Ako je jednadžba stepena višega od prvoga, redovno su teškoće velike; ima ipak izvjesnih tipova jednačaba, koje možemo elementarnim metodama integrirati; a najvažnije ćemo redom navesti.

I. Ako je jednadžba oblika

$$F(y, y') = 0, \tag{75}$$

t.j. ako u njoj uopće ne dolazi varijabla x, pa ako se y' može eksplicitno izraziti s y, dobit ćemo

$$y' = f(y), \tag{76}$$

a to se rješava separacijom varijabla, pa imamo

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + R. \tag{77}$$

Ako se iz (75) može samo y eksplicitno izraziti s y', bit će

$$y = \varphi(y'); \tag{78}$$

ovamo uvrštavamo $y' = p$, deriviramo i rastavljamo varijable, pa dobijemo

$$x = \int \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{p} + R. \tag{79}$$

Eliminacijom veličine p iz (79) i iz $y = \varphi(p)$ dobijemo opći integral jednadžbe (78).

Ne mogu li se upotrijebiti ni prvi ni drugi postupak, moći će se katkada izraziti iz (75) y i y' racionalno nekim parametrom u, dakle

$$y = \varphi(u) \qquad y' = \psi(u); \tag{80}$$

odatle slijedi $dy = \varphi'(u).du$, $dx = \frac{dy}{\psi(u)}$, $dx = \frac{\varphi'(u).du}{\psi(u)}$, dakle

$$x = \int \frac{\varphi'(u).du}{\psi(u)} + R; \tag{81}$$

iz te jednadžbe i iz prve jednadžbe (80) treba eliminirati parametar u, da se dobije opći integral.

II. Jednadžbe oblika

$$F(x, y') = 0, \qquad (82)$$

u kojima dakle ne dolazi funkcija y, rješava ju se kao i one pod I. Može li se y' eksplicit no izraziti s x, bit će

$$y' = f(x), \qquad (83)$$

pa nakon separacije varijabla imamo

$$y = \int f(x).dx + R. \qquad (84)$$

Može li se pako samo x izraziti kao funkcija derivacije y, bit će

$$x = \varphi(y'); \qquad (85)$$

ovamo ćemo uvrstiti $y' = p$, derivirati i separirati varijable, pa imamo

$$y = \int p.\varphi'(p).dp + R. \qquad (86)$$

Katkad će se moći x i y' izraziti racijonalno nekim parametrom u, pa imamo

$$x = \varphi(u) \qquad y' = \psi(u); \qquad (87)$$

odatle dobijemo kao i gore

$$y = \int \psi(u).\varphi'(u).du + R. \qquad (88)$$

Pripomena. Kad jednadžba (75) shvaćena kao jednadžba u pravokutnim koordinatama y, y', odnosno kad jednadžba (82) u koordinatama x, y' predočuje neku unikursalnu krivulju, moći će se njezine koordinate uvijek izraziti kao racijonalne funkcije parametra u, pa će se integracije (81) i (88) moći izvesti.

III. Jednadžbe oblika

$$F(y') = 0, \qquad (89)$$

u kojima dakle nema ni varijable x ni funkcije y, riješit će se ovako: Jednadžbom (89) nije y' definirano kao funkcija veličina x i y, već kao korjen te jednadžbe, dakle smjerovi linijskih elemenata ne ovise o nosiocu; u svakoj točki ravnine ima toliko linijskih elemenata, koliko ima realnih korjena jednadžba (89).

Skup svih linijskih elemenata definiranih tom diferencijalnom jednadžbom invarijantan je za svaki paralelni pomak. Ako je $y'=\alpha$ korijen zadane jednadžbe, bit će $y=\alpha x+k$, dakle je

$$F\left(\frac{y-k}{x}\right)=0 \tag{90}$$

opći integral jednadžbe (89).

IV. Jednadžbe

$$F(x,y,y')=0, \tag{91}$$

kojima je lijeva strana racijalna cijela funkcija n-toga stepena derivacije y', mogu se poredati po potencijama derivacije

$$y'^{n}+\varphi_1(x,y)\cdot y'^{n-1}+\varphi_2(x,y)\cdot y'^{n-2}+\dots+\varphi_{n-1}(x,y)\cdot y'+\varphi_n(x,y)=0; \tag{92}$$

riješimo li tu algebarsku jednadžbu u y', dobit ćemo n korijena

$$y_1'=\psi_1(x,y), \quad y_2'=\psi_2(x,y), \dots, y_n'=\psi_n(x,y). \tag{93}$$

Time smo dobili n diferencijalnih jednačaba prvoga reda i prvoga stepena. Neka su njihovi

opći integrali

$$f_1(x,y)=k, \quad f_2(x,y)=k, \dots, f_n(x,y)=k; \tag{94}$$

onda je opći integral jednadžbe (91) dan formulom

$$(f_1-k)(f_2-k)\dots\dots(f_n-k)=0. \tag{95}$$

V. Metoda deriviranja. Ta metoda, koju smo prvi put upotrijebili kod Lagrange-ove jednadžbe, uvodi novu varijablu $p=\frac{dy}{dx}$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu $F(x,y,y')=0$, koja se time transformira u

$$F(x,y,p)=0. \tag{96}$$

Uzmemo li totalni diferencijal, imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot dp=0. \tag{97}$$

Podijelimo li jednadžbu (97) i jednadžbu $dy=p.dx$ sa dp, imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dp}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dp}+\frac{\partial F}{\partial p}=0 \quad i \quad \frac{dy}{dp}=p\cdot\frac{dx}{dp}. \tag{98}$$

Riješimo li ove dvije jednadžbe prvoga stepena u $\frac{dx}{dp}$ i $\frac{dy}{dp}$ dobijemo

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-F'_p}{F'_x + p.F'_y}, \quad \frac{dy}{dp} = \frac{-p.F'_p}{F'_x + p.F'_y}. \qquad (99)$$

Taj ćemo postupak kušati aplicirati onda, kad je diferencijalna jednadžba zadana u jednome od oblika

$$y = f(y', x) \qquad \text{ili} \qquad x = f(y', y). \qquad (100)$$

U prvom je slučaju $F = y - f(p, x)$, pa prva jednadžba (99) daje

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'_p}{p - f'_x}; \qquad (101)$$

To je diferencijalna jednadžba prvoga reda i prvoga stepena sa x kao funkcijom, a p kao nezavisnom varijablom. Nađemo li njezin opći integral $x = \sigma(p)$, uvrstit ćemo to u (100), pa ćemo dobiti $y = \tau(p)$, a to su parametričke jednadžbe integralnih krivulja. Eliminacijom parametra p dobijemo opći integral u obliku $g(x, y, K) = 0$.

U drugom je slučaju $F = x - f(p, y)$, pa druga jednadžba (99) daje

$$\frac{dy}{dp} = \frac{p.f'_p}{1 - p.f'_y}, \qquad (102)$$

to se dalje rješava kao i jednadžba (101).

Taj će postupak samo onda voditi do cilja, kad će biti jednadžba (101), odnosno (102) oblika, što ga znademo integrirati.

VI. Izmjena varijabla. Ne pomaže li ni koja od opisanih metoda, riješit će se ipak katkada jednadžba tako, da se zgodno izabranim transformacijama uvedu u jednadžbu nove varijable. Najjednostavnija transformacija bit će, da x i y izmijene među sobom svoje uloge, t.j. da smatramo y nezavisnom varijablom, a x funkcijom. U drugim je slučajevima stvar osobite spretnosti, da se nađe transformacija, kojà vodi do cilja; katkada nas sam oblik za„ dane jednadžbe upućuje na transformaciju, ko„ ju treba odabrati.

J. Geometrijske primjene diferencijal„ nih jednačaba prvoga reda.

I. Izogonalne trajektorije.

21. definicija: Krivulja, koja ima svojstvo, da siječe svaku krivulju iz zadanoga skupa krivulja $F(x,y,k)=0$ pod nekim zadanim, kon„ stantnim kutom ω, zove se izogonalnom tra„ jektorijom tog skupa krivulja.

28. poučka: Sve izogonalne trajektorije nekog sistema $F(x,y,k)=0$ iz ∞ mnogo krivu„ lja tvore također neki sistem iz ∞ mnogo krivulja $\Phi(x,y,k)=0$.

29. poučka: Diferencijalna jednadžba izo„ gonalnih trajektorija zadanog sistema krivulja

$$F(x,y,k)=0 \qquad (103)$$

dobije se, ako u izrazu

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{y' + \frac{F_x'}{F_y'}}{1 - y' \cdot \frac{F_x'}{F_y'}} \qquad (104)$$

zamijenimo k s njegovom vrijednošću iz (103).

22. definicija: Ortogonalne trajektorije spe„ cijalni su slučaj izogonalnih trajektorija, i to za kut $\omega = \frac{\pi}{2}$.

30. poučka: Diferencijalna jednadžba or„ togonalnih trajektorija zadanog sistema kri„ vulja (103) dobijemo, ako eliminiramo k iz jednadžbe

$$F_y' - y' \cdot F_x' = 0 \qquad (105)$$

i iz jednadžbe (103).

31. poučka: Diferencijalna jednadžba izogo„ nalnih trajektorija sistema krivulja zadanoga svojom diferencijalnom jednadžbom

$$f(x,y,y')=0 \qquad (106)$$

glasi

$$f\left(x, y, \frac{y' + \operatorname{tg}\omega}{1 - y' \cdot \operatorname{tg}\omega}\right) = 0. \qquad (107)$$

32. poučka: Diferencijalna jednadžba orto-gonalnih trajektorija sistema (106) glasi

$$f(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0 \qquad (108)$$

Pripomena. Jednadžbu izogonalnih trajek-torija sistema (103) možemo pisati i u obliku

$$(F'_x \cdot \cos\omega - F'_y \cdot \sin\omega) \cdot dx + (F'_x \cdot \sin\omega + F'_y \cdot \cos\omega) \cdot dy = 0, \qquad (109)$$

a jednadžbu njezinih ortogonalnih trajektorija u obliku

$$F'_y \cdot dx - F'_x \cdot dy = 0. \qquad (109a)$$

II. Evolvente.

23. definicija: Evolvente (vidi §4, 12. defini-cija) neke krivulje jesu ortogonalne trajektorije sistema njezinih tangenata.

33. poučka: Diferencijalna jednadžba sistema tangenata zadane krivulje $y = f(x)$ glasi

$$y - y'x = \varphi(y'), \qquad (110)$$

gdje je $\varphi(y') = b$ odrezak tangente na osi y

izražen kao funkcija koeficijenta smjera te tangente. Jednadžba (110) je Clairaut-ova jed-nadžba; njezin opći integral je sistem tan-genata, a njezin singularni integral je zada-na krivulja. Diferencijalna jednadžba evol-venata te krivulje glasi

$$x + y\,y' = \psi(y'), \qquad (111)$$

gdje je $\psi(y') = y' \cdot \varphi(\frac{1}{y'})$. Jednadžba (111) je La-grange-ova jednadžba.

III. Slojnice.

24. definicija: Presjeke zadane površine

$$z = f(x, y) \qquad (112)$$

s ravninama paralelnima koordinatnoj rav-nini (xy) nazivamo slojnicama dotične povr-šine. Njihove su dakle jednadžbe

$$z = f(x, y), \quad z = k \qquad (112a)$$

34. poučka: Diferencijalna jednadžba pro-jekcija slojnica na ravninu π_1 glasi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} . \qquad (113)$$

Pripomena. Slojnica ima svojstvo, da je njezina tangenta paralelna tragu, što ga tangencijalna ravnina površine određuje u ravnini (xy).

IV. Linije najvećega pada.

25. definicija: Krivulje povučene na površini (112) tako, da sijeku sve slojnice pod pravim kutom, zovu se linije najvećeg pada.

35. poučak: Ortogonalne projekcije (na ravninu π_1) linija najvećeg pada jesu ortogonalne trajektorije ortogonalnih projekcija slojnica. Diferencijalna jednadžba projekcija linija najvećega pada na ravninu π_1 glasi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'_y}{f'_x} \qquad (114)$$

Pripomene a.) Linije najvećega pada označuju putove materijalnih točaka, koje se gi-

baju na površini prepuštene jedino utjecaju teže.

b.) Linije najvećega pada označuju u svakoj točki onaj smjer na površini, koji zatvara s osi z najmanji kut, odnosno s ravninom (xy) najveći kut.

c.) Kut, što ga tangenta na liniju najvećeg pada zatvara s horizontalnom ravninom jednak je kutu, što ga tangencijalna ravnina površine zatvara s ravninom π_1. Između svih krivulja na površini, koje prolaze nekom točkom, ima linija najvećega pada najstrmiju tangentu.

26. definicija. Duž jedne te iste slojnice je pad površine (t.j. tangens kuta, što ga tangencijalna ravnina zatvara s π_1) različit, pa će imati svoje ekstremne vrijednosti. Spojimo li krivuljom točke na svakoj slojnici, u kojima je pad minimum, dobijemo hrbatnu liniju površine, a spojimo li točke, u kojima je

pad maksimum, dobijemo dolinsku liniju površine.

Pripomene. a.) Ti su pojmovi osobito važni kod topografskih površina.

b.) Jednadžba hrbatne i dolinske linije dobije se bez integracije. Postavimo li izraz za pad kao funkciju nekog parametra duž svake slojnice, pa uzmemo li, da je derivacija toga izraza jednaka nuli, imamo jednadžbu tih linija.

c.) Dolinska linija nije linija najvećega pada, ona samo spaja točke maksimalnoga pada. Na topografskoj površini primjerice znače linije najvećega pada linije, po kojima voda (recimo iza kiše) pada, a dolinska linija označuje put, na kojem se voda sabire (jarak).

V. Linije krivine.

27. definicija: Krivulje na površinama, kojima tangenta prolazi jednom od ravnina

glavnih presjeka, nazivamo linijama krivine. Svakom točkom površine prolaze dvije među sobom okomite linije krivine, ima ih dakle na površini ∞^2, a pokazuju na površini smjerove glavnih presjeka, u kojima je polumjer krivine najveći odnosno najmanji.

36. poučka. Diferencijalna jednadžba projekcija na π_1 linija krivine površine $z=f(x,y)$ glasi

$$[pqr-s(1+p^2)]dx^2+[r(1+q^2)-t(1+p^2)]dx.dy+$$
$$+[s(1+q^2)-pqt]dy^2=0 \qquad (115)$$

gdje su p, q, r, s, t kratice protumačene jednadžbama (74) 4. paragrafa. Ta je diferencijalna jednadžba prvoga reda i drugoga stepena, pa se raspada u dva faktora prvoga reda i prvoga stepena, koji svaki znači jedan sistem linija krivine.

Pripomene. a.) Linije krivine pokazuju u svakoj točki površine smjerove osi Dupinove indikatrikse.

b.) Ravnina i kugla nemaju linija krivine.

c.) Na površini rotacije su meridijani i paralele linije krivine.

d.) Jednadžba (115) možemo zgodnije pisati ovako:

$$\begin{vmatrix} 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \\ y'^2 & -y' & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (116)$$

c.) Kod linija krivine se ravnina oskulacije podudara sa ravninom jednoga glavnoga presjeka površine.

VI. Asimptotičke linije.

28. definicija: Krivulje na površinama, kod kojih se tangenta podudara s asimptotom Dupinove indikatrikse, zovu se asimptotičke linije.

37. poučka: Diferencijalna jednadžba projekcija na π_1 asimptotičkih linija glasi

$$r.dx^2+2s.dx.dy+t.dy^2=0. \qquad (117)$$

Pripomene. a.) Asimptotičkih linija ima samo na površinama sa totalnom krivinom negativnom ili nulom.

b.) Kroz svaku hiperboličku točku površine prolaze dvije asimptotičke linije; one određuju smjerove, u kojima je zakrivljenost normalnih presjeka jednaka nuli.

c.) Kroz svaku paraboličku točku prolazi samo jedna asimptotička linija; na developablim površinama su primjerice izvodnice asimptotičke linije.

d.) Ravnina oskulacije asimptotičke linije je tangencijalna ravnina površine.

§11. Diferencijalne jednadžbe drugoga i višega reda.

A. Diferencijalne jednadžbe drugoga reda.

Opći je oblik diferencijalne jednadžbe drugoga reda

$$F(x, y, y', y'') = 0; \qquad (1)$$

uvrstimo li ovamo $y' = p$, vidimo, da jednadžbu (1) možemo zamijeniti sistemom dviju jednačaba prvoga reda:

$$\frac{dy}{dx} = p \quad , \quad F(x, y, p, \frac{dp}{dx}) = 0. \qquad (2)$$

1. poučka: U općem integralu obične diferencijalne jednadžbe drugoga reda dolaze dvije neodređene konstante (parametra) on je dakle oblika

$$\Phi(x, y, k, k_1) = 0. \qquad (3)$$

2. poučka: Svaka jednadžba oblika (3), koja radi svojih dvaju parametra predočuje sistem od ∞^2 krivulja u ravnini, vodi na di-

ferencijalnu jednadžbu drugoga reda, koju ćemo dobiti tako, da jednadžbu (3) deriviramo dva puta za redom:

$$\Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' = 0 \qquad (3a)$$

$$\Phi''_{xx} + 2\Phi''_{xy} \cdot y' + \Phi''_{yy} \cdot y'^2 + \Phi'_y \cdot y'' = 0. \qquad (3b)$$

Eliminacijom veličina k i k_1 iz (3), (3a) i (3b) dolazimo do tražene jednadžbe (1).

Izrazimo li iz (1) y'' eksplicitno imamo

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad (4)$$

pa vidimo, da svakom po volji odabranom skupu vrijednosti x, y, y' pripada izvjesno neko y'' (ili njih više, ako je funkcija f višeznačna). Skup x, y, y' označuje linijski element, a pripadno y'' određuje krivinu krivulje, kojoj taj linijski element pripada; zato se skup svih četiri vrijednosti x, y, y', y'' zajedno zove elementom krivine: Svakom točkom (x,y) kao nosiocem prolazi ∞ mnogo integralnih krivulja diferencijalne jednadžbe (4); ta jednadžba definira ∞^3 elemenata krivine, a nju integrirati znači geometrijski odrediti sve one krivulje, kojima ti elementi krivine pripadaju; tih krivulja ima ∞^2.

Da iz općeg integrala (3) dobijemo neki *partikularni integral*, moraju biti zadani *početni uvjeti*, iz kojih možemo izračunati konstante k i k_1. Ti će početni uvjeti biti ovdje x_0, y_0, y_0'; vrijednosti k i k_1 izračunat ćemo iz jednačaba (3) i (3a):

$$\Phi(x_0, y_0, k, k_1) = 0$$

$$\Phi_x'(x_0, y_0, k, k_1) + \Phi_y'(x_0, y_0, k, k_1) \cdot y_0' = 0.$$

Ima li jednadžba (1) integrala, koji se ne mogu dobiti nikakvom specijalizacijom konstanta, zovu se *singularni integrali*.

Ima samo malo tipova diferencijalnih jednačaba drugoga reda, koje možemo lako integrirati, a to su ovi tipovi:

I. Jednadžba ne sadržaje funkcije y, dakle je oblika

$$F(x, y', y'') = 0. \qquad (5)$$

Supstitucijom $y' = p$ prelazi ta jednadžba u jednadžbu

$$F(x, p, p') = 0, \qquad (5a)$$

koja je *prvoga* reda. *Znamo li je riješiti*, bit će

$$p = \varphi(x, k) \qquad (6)$$

njezin *opći integral*, a odatle slijedi

$$y = \int \varphi(x, k) \cdot dx + k_1 \qquad (7)$$

kao opći integral zadane jednadžbe (5).

Ako je kod integracije jednadžbe (5a) zgodnije, da se rezultat izrazi u obliku

$$x = \psi(p, k), \qquad (8)$$

bit će $dx = \psi'(p,k) \cdot dp$, što u vezi s jednadžbom $dy = p \cdot dx$ daje

$$y = \int p \cdot \psi'(p, k) \cdot dp + k_1. \qquad (9)$$

Jednadžbe (8) i (9) davaju opći integral jednadžbe (5) izražen parametrom p. Eliminacijom toga parametra iz (8) i (9) dolazimo do konačnoga oblika (3) općega integrala.

II. Nema li u jednadžbi varijable x, bit će oblika

$$F(y, y', y'') = 0 . \qquad (10)$$

Budući da je

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot y',$$

vidimo, da je jednadžba (10) zapravo oblika

$$F\left(y, y', \frac{dy'}{dy} \cdot y'\right) = 0, \qquad (10a)$$

dakle prvoga reda; y je varijabla, a y' je funkcija. Znamo li jednadžbu (10a) integrirati, bit će

$$y' = \varphi(y, k); \qquad (11)$$

uvrstimo li ovamo $y' = \frac{dy}{dx}$, bit će nakon separacije varijabla

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, k)} + k_1 \qquad (12)$$

opći integral jednadžbe (10).

Daje li integracija jednadžbe (10a) mjesto relacije (11) relaciju

$$y = \psi(y', k), \qquad (13)$$

pisat ćemo $y' = p$, dakle

$$y = \psi(p, k) \qquad (13a)$$

Deriviramo li (13a), te uvrstimo li to u jednadžbu $dy = p . dx$ imamo nakon separacije varijabla

$$x = \int \frac{\psi'(p, k) . dp}{p} + k_1 \qquad (14)$$

Jednadžbe (13a) i (14) davaju opći integral jednadžbe (10) u parametričkom obliku; eliminiramo li iz njih parametar p, dobijemo opći integral u obliku (3).

III. Jednadžbe $F(x, y, y', y'') = 0$, koje su homogene s obzirom na y, y' i y'' bit će karakterizirane relacijom

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^n . F(x, y, y', y''), \qquad (15)$$

gdje je n stepen homogeniteta.

Ta se jednadžba rješava supstitucijom

$$y = e^{\int z.dx}, \qquad (16)$$

koja daje

$$y' = z.e^{\int z.dx}, \quad y'' = (z^2+z').e^{\int z.dx}, \qquad (16a)$$

dakle je

$$F(x,y,y',y'') = F\{x, e^{\int z.dx}, z.e^{\int z.dx}, (z^2+z')e^{\int z dx}\},$$

a po (15) je to konačno

$$F(x, 1, z, z^2+z') = 0; \qquad (17)$$

tako smo dobili diferencijalnu jednadžbu prvoga reda. Znamo li je riješiti, bit će $z = \varphi(x,k)$, što uvršteno u (16) daje

$$y = k_1 . e^{\int \varphi(x,k).dx} \qquad (18)$$

kao opći integral jednadžbe (15).

IV. Ako je druga derivacija y'' zadana kao eksplicitna funkcija samo jedne od veličina x, y, y', može se jednadžba integrirati.

a.) $$y'' = f(x). \qquad (19)$$

To je vrlo jednostavna jednadžba; dvjema kvadraturama dobijemo

$$y = \iint f(x).dx^2 + kx + k_1 . \qquad (20)$$

b.) $$y'' = f(y). \qquad (21)$$

Uvrstimo li ovamo $y' = p$, pa pomnožimo li cijelu jednadžbu s p, imamo

$$p.\frac{dp}{dx} = f(y).p,$$

a jer je $p = \frac{dy}{dx}$, imamo

$$p.dp = f(y).dy,$$

što daje

$$p^2 = 2\int f(y).dy + k = \varphi(y) + k.$$

Dakle je konačno

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)+k}} + k_1 \qquad (22)$$

Može li se samo y izraziti kao eksplicitna funkcija veličine y'', bit će

$$y = \varphi(y''); \qquad (23)$$

supstitucija $y''=z$ daje

$$y=\varphi(z), \tag{23a}$$

a diferenciranje $dy=\varphi'(z).dz$. Pomnožimo li tu jednadžbu sa $2\frac{d^2y}{dx^2}=2z$, imamo

$$2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dy=2\cdot\frac{dp}{dx}\cdot p\,dx=2z.\varphi'(z).dz$$

ili

$$p^2=2\int z.\varphi'(z).dz+K=\psi(z)+K,$$

a odatle dobijemo konačno

$$x=\int\frac{\varphi'(z).dz}{\sqrt{\psi(z)+K}}+K_1. \tag{24}$$

Jednadžbe (23a) i (24) davaju opći integral jednadžbe (23) u parametričkom obliku.

c.) Jednadžba

$$y''=f(y') \tag{25}$$

daje supstitucijom $\frac{dy}{dx}=p$ izravno $\frac{dp}{dx}=f(p)$, dakle

$$dx=\frac{dp}{f(p)}, \tag{25a}$$

što uvršteno u $dy=p.dx$ daje

$$dy=\frac{p.dp}{f(p)} \tag{25b}$$

Integracijom jednadžaba (25a) i (25b) dobijemo opći integral jednadžbe (25) u parametričkom obliku:

$$x=\int\frac{dp}{f(p)}+K \qquad y=\int\frac{p.dp}{f(p)}+K_1. \tag{26}$$

U tim dvim jednadžbama dolaze konstante samo aditivno, dakle su sve integralne krivulje među sobom kongruentne, pa nastaju jedna iz druge translacijom

B. Geodetske linije. Od geometrijskih aplikacija diferencijalnih jednadžaba drugoga reda najvažnija je određivanje geodetskih linija na zadanoj površini.

1. definicija: Geodetskom linijom na zadanoj površini nazivamo krivulju na površini, čija je ravnina oskulacije u svakoj točki okomita na tangencijalnu ravninu površine u toj točki. To znači također, da se

normala površine nalazi u ravnini oskula-
cije krivulje ili da se glavna normala geo-
detske linije podudara s normalom površine.

<u>3. poučka</u>: Diferencijalna jednadžba pro-
jekcija na Π_1 geodetskih linija zadane po-
vršine $z = f(x, y)$ glasi

$$y''(1+p^2+q^2)-(py'-q)(r+2s.y'+t.y'^2)=0, \qquad (27)$$

gdje su p, q, r, s, t uobičajene kratice za pr-
ve i druge derivacije funkcije $f(x, y) = 0$

<u>Pripomene</u>. a) Geodetska linija

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t) \qquad z = \chi(t)$$

zadane površine $F(x, y, z) = 0$ mora udovoljava-
ti uvjetu

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0, \qquad (28)$$

koji baš znači, da se normala površine na-
lazi u ravnici oskulacije geodetske linije.

b.) Povučemo li na zadanoj površini <u>najkra-
ću linija</u> između dviju točaka, bit će to geo-
detska linija. No nisu izobratno sve geodetske
linije najkraći putovi.

c.) Na developabloj površini su geodetske li-
nije svojstva, da se pretvaraju u pravce, kad
površinu razvijemo u ravninu.

d.) Geodetske linije imadu važno svojstvo,
da kod svakog <u>savijanja</u> (<u>bez rastezanja</u>) po-
vršine ostaju i dalje geodetskim linijama no-
ve površine.

e). Ime geodetskih linija potječe iz činjeni-
ce, što iskolčenjem „pravca" na zemaljskoj
površini metodama geodezije dobijemo radi
zakrivljenosti baš geodetske linije.

<u>C. Diferencijalne jednadžbe višega reda</u>.

Svaka obična diferencijalna jednadžba n-toga
reda

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (29)$$

može se nadomjestiti sistemom iz n običnih diferencijalnih jednačaba prvoga reda

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\ \frac{dy_1}{dx}=y_2,\ \frac{dy_2}{dx}=y_3,\ \dots,\ \frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},$$

$$F(x,y,y_1,y_2,y_3,\dots,y_{n-1},\frac{dy_{n-1}}{dx})=0, \qquad (30)$$

u kojima je x varijabla, a $y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ su tražene funkcije.

4. poučka: U općem integralu obične diferencijalne jednadžbe n-toga reda dolazi n neodređenih konstanta (parametara); on je dakle oblika

$$\Phi(x,y,k,k_1,k_2,\dots,k_{n-1})=0 \qquad (31)$$

Integralnih krivulja zadane jednadžbe (29) ima u svemu ∞^n, t.j. svakom točkom izvjesnoga područja ravnine, koje je određeno jednadžbom (29), prolazi u svemu n integralnih krivulja.

5. poučka: Svaki sistem krivulja zadanih jednadžbom (31), u kojoj ima n parametara, vodi na diferencijalnu jednadžbu n-toga reda. U tu svrhu treba jednadžbu (31) n puta derivirati, pa iz tih (n+1) jednačaba eliminirati svih n parametra.

Da iz općeg integrala (31) dobijemo neki partikularni integral, moraju biti zadani početni uvjeti $x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}$, a tih ima svega n+1. Ima li jednadžba (29) i integrala, koji se ne mogu dobiti specijalizacijom konstanta, nazivaju se singularnim integralima.

Ima samo malo tipova diferencijalnih jednačaba n-toga reda, koje možemo integrirati, a to su ovi tipovi:

I. Diferencijalna jednadžba oblika

$$y^{(n)}=f(x) \qquad (32)$$

može se riješiti sa n kvadratura, jer je

$$y = \iiint \cdots \int f(x)\, dx^n + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \dots + k_{n-2} x + k_{n-1} \qquad (32)$$

II. Jednadžba oblika

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}) \qquad (33)$$

rješava se tako, da se uvrsti $y^{(n-2)} = z$, pa imamo

$$z'' = f(z); \qquad (33a)$$

ta se jednadžba (vidi jedn. (21) ovoga paragrafa) rješava supstitucijom $z' = p$, koja daje

$$p^2 = \int f(z)\, dz + k = \varphi(z) + k.$$

Dakle je

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z) + k}} + k_1 = \psi(z, k) + k_1;$$

riješimo li tu jednadžbu po z imamo

$$z = y^{(n-2)} = \chi(x, k, k_1),$$

dakle je konačno

$$y = \iiint \cdots \int \chi(x, k, k_1)\, dx^{n-2} + k_2 x^{n-3} + k_3 x^{n-4} + \dots + k_{n-2} x + k_{n-1}. \qquad (34)$$

Dakle se i jednadžba (33) rješava sa n kvadratura.

III. U jednadžbu

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}) \qquad (35)$$

uvrstimo $z = y^{(n-1)}$, što daje $z' = f(z)$, dakle

$$x = \int \frac{dz}{f(z)} + k = \varphi(z) + k;$$

riješimo li tu jednadžbu po z, imamo

$$z = y^{(n-1)} = \psi(x, k),$$

dakle je konačno

$$y = \iiint \cdots \int \psi(x, k)\, dx^{n-1} + k_1 x^{n-2} + k_2 x^{n-3} + \dots + k_{n-2} x + k_{n-1}. \qquad (36)$$

Dakle se i jednadžba (35) rješava sa n kvadratura.

IV. U jednadžbama

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (37)$$

postavit će se $y^{(n-1)} = z$, čime ih transformiramo u jednadžbe prvoga redu

$$\mathcal{F}(x,z,z')=0\,; \qquad (37a)$$

ako je njezin opći integral $z=\varphi(x,k)$ imamo konačno

$$y=\iiint\cdots\int\varphi(x,k)\,dx^{n-1}+k_1x^{n-2}+k_2x^{n-3}+\dots$$
$$\dots+k_{n-2}x+k_{n-1}\,. \qquad (38)$$

Rješivost jednadžbe (37) ovisi dakle o mogućnosti rješavanja jednadžbe prvoga reda (37a).

Tipove I.–III. znamo uvijek riješiti, tip IV. znamo svesti na jednadžbu prvoga reda, a sad ćemo nabrojiti neke tipove, kojima možemo red sniziti. Time dakako nije još postignuta rješivost; ona nastupa samo u iznimnom slučaju, kad je dobivena jednadžba specijalnoga tipa.

V. Ako u jednadžbi ne dolazi varijabla x, bit će oblika

$$\mathcal{F}(y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0\,. \qquad (39)$$

Supstitucija $y'=z$ reducira red te jednadžbe za jedan, pa imamo

$$\mathcal{F}(y,z,z',z'',\dots,z^{(n-1)})=0\,. \qquad (39a)$$

Znamo li tu jednadžbu riješiti, bit će njezin opći integral

$$z=\Phi(y,k,k_1,k_2,\dots,k_{n-2})\;,$$

a odatle dobijemo kvadraturom

$$x=\int\frac{dy}{\Phi(y,k,k_1,\dots,k_{n-2})}+k_{n-1}\,. \qquad (40)$$

VI. Ako u jednadžbi ne dolazi nepoznata funkcija y, bit će oblika

$$\mathcal{F}(x,y',y'',\dots,y^{(n)})=0\;; \qquad (41)$$

i ovdje supstitucija $y'=z$ snizuje red jednadžbe za jedan, pa imamo

$$\mathcal{F}(x,z,z',\dots,z^{(n-1)})=0\,. \qquad (41a)$$

Znamo li tu jednadžbu integrirati, bit će njezin opći integral

$$z=\Phi(x,k,k_1,k_2,\dots,k_{n-2})\;;$$

uvrstimo li ovamo $z=\frac{dy}{dx}$, imamo nakon separracije varijabla i kvadrature

$$y = \int \Phi(x, k, k_1, \dots, k_{n-2})\,dx + k_{n-1}. \qquad (42)$$

VII. Ako u jednadžbi nema ni varijable x ni funkcije y, ima oblik

$$F(y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0. \qquad (43)$$

Supstitucija $y' = z$ pretvara je u

$$F(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0, \qquad (43a)$$

što je oblik (39); ovamo će se uvrstiti $z' = t$, pa imamo

$$F(z, t, t', \dots, t^{(n-2)}) = 0, \qquad (43b)$$

čime smo snizili red zadane jednadžbe za dva. Znamo li (43b) riješiti, bit će

$$t = \Phi(z, k, k_1, \dots, k_{n-3}),$$

dakle

$$x = \int \frac{dz}{\Phi(z, k, k_1, \dots, k_{n-3})} + k_{n-2};$$

izrazimo li odatle nakon integracije z, bit će

$$z = \Psi(x, k, k_1, k_2, \dots, k_{n-2}),$$

dakle konačno

$$y = \int \Psi(x, k, k_1, k_2, \dots, k_{n-2})\,dx + k_{n-1}. \qquad (44)$$

VIII. Ne dolazi li u jednadžbi ni funkcija y ni njezinih prvih $(h-1)$ derivacija bit će oblika

$$F(x, y^{(h)}, y^{(h+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \qquad (45)$$

Supstitucija $y^{(h)} = z$ reducira joj red za h, pa imamo

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-h)}) = 0. \qquad (45a)$$

Znamo li tu jednadžbu riješiti, bit će

$$z = \varphi(x, k, k_1, k_2, \dots, k_{n-h-1})$$

njezin opći integral, a odatle slijedi

$$y = \iiint \cdots \int \varphi(x, k, k_1, \dots, k_{n-h-1})\,dx^h + k_{n-h}\,x^{h-1} + \dots$$
$$\dots + k_{n-2}\,x + k_{n-1}. \qquad (46)$$

IX. Jednadžbe, koje su homogene s obzirom na funkciju y i sve njezine derivacije, kurakterizirane su relacijom

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'',\dots,\lambda y^{(n)})=\lambda^{m}\cdot F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}),\quad (47)$$

gdje je m stepen homogeniteta. Supstitucija

$$y=e^{\int z.dx},\ y'=z.e^{\int z.dx},\ y''=(z^2+z').e^{\int z.dx},\ \dots$$

snizuje red te jednadžbe za jedan, jer radi homogeniteta možemo iza izvršene supstitucije kratiti sa $e^{m\int z.dx}$, pa imamo

$$F(x,1,z,z^2+z',\dots)=\Phi(x,z,z',z'',\dots,z^{(n-1)})=0,\quad (47a)$$

Znamo li riješiti tu jednadžbu, bit će

$$z=\varphi(x,k,k_1,k_2,\dots,k_{n-2}),$$

dakle konačno

$$y=k_{n-1}\cdot e^{\int\varphi(x,k,k_1,\dots,k_{n-2}).dx}\quad (48)$$

X. Posebna vrst homogenih jednačaba je karakterizirana relacijom

$$F(\lambda x,y,\frac{y'}{\lambda},\frac{y''}{\lambda^2},\dots,\frac{y^{(n)}}{\lambda^n})=F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0;\quad (49)$$

one se rješavaju supstitucijom

$$x=e^{t},\ y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}:\frac{dx}{dt}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\ \text{i.t.d.}$$

aopće

$$y^{(r)}=e^{-rt}\cdot R\left(\frac{d^ry}{dt^r},\frac{d^{r-1}y}{dt^{r-1}},\dots,\frac{dy}{dt}\right),$$

gdje R znači izvjesnu cijelu racijonalnu funkciju. Uvrstimo li to u zadanu jednadžbu, možemo radi relacije (49) kratiti sa svim eksponencijalnim izrazima, pa imamo

$$F(1,y,\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},\dots)=\Phi(y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0,\quad (49a)$$

a to je oblik (39), koji će se riješiti supstitucijom $\frac{dy}{dt}=z$.

XI. Druga vrst homogeniteta pripada jednadžbama karakterisiranim relacijom

$$F(\lambda x,\lambda y,y',\frac{y''}{\lambda},\frac{y'''}{\lambda^2},\dots,\frac{y^{(n)}}{\lambda^{n-1}})=F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0.\quad (50)$$

Uvedemo li ovamo novu funkciju $z=\frac{y}{x}$, ma-ćemo kratiti sa svim y pa dobivamo tip X. sa x kao varijablom, a z kao funkcijom.

Pripomena. Ako je jednadžba na dva načina homogena, ako je primjerice karakterizirana relacijom

$$F(\lambda x, c^\alpha y, \frac{c^\alpha}{\lambda} y', \frac{c^\alpha}{\lambda^2} y'', \ldots, \frac{c^\alpha}{\lambda^n} y^{(n)}) = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad (51)$$

moći će se opisanim metodama red njezin snizit sa dva.

D. Linearne homogene jednadžbe.

2. definicija: Diferencijalnu jednadžbu n-toga reda, koja je prvoga stepena s obzirom na funkciju y i sve njezine derivacije $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, nazivamo linearnom diferencijalnom jednadžbom; ona je dakle oblika

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = \mathcal{H}, \quad (52)$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i $\mathcal{H}$ makar kakove funkcije samo varijable x. Uvedemo li kraticu

$$f(y) \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y, \quad (53)$$

pišemo jednadžbu (52) kraće

$$f(y) = \mathcal{H}. \quad (54)$$

Ako je napose $\mathcal{H} = 0$, imamo jednadžbu

$$f(y) = 0, \quad (54a)$$

koju nazivamo homogenom linearnom diferencijalnom jednadžbom, dok je opća jednadžba (54) nehomogena.

6. poučka: Za linearne jednadžbe vrijede ova jednostavna pravila:

a.) $$f(ky) = k.f(y), \quad (55)$$

gdje je k makar koja konstanta;

b.) $$f(y_1 \pm y_2 \pm \ldots \pm y_i) = f(y_1) \pm f(y_2) \pm \ldots \pm f(y_i), \quad (55a)$$

gdje su $y_1, y_2, \ldots, y_i$ funkcije varijable x;

c.) $$f(k_1 y_1 \pm k_2 y_2 \pm \ldots \pm k_i y_i) = k_1 f(y_1) \pm k_2 f(y_2) \pm \ldots \pm k_i f(y_i) \quad (55b)$$

ta formula sadrži u sebi formule (55) i (55a).

Zamislimo li, da su $y_1, y_2, \dots, y_n$ sami međusobom različiti partikularni integrali homogene jednadžbe (54a), da je dakle

$$f(y_1)=0, \quad f(y_2)=0, \quad \dots, \quad f(y_n)=0,$$

bit će po (55b) i izraz

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n \tag{56}$$

integral jednadžbe (54a), no jer u njem dolazi točno n konstanata, to je on njesin <u>opći</u> integral.

<u>7. poučka:</u> Opći je integral (56) homogene linearne diferencijalne jednadžbe (54a) s obzirom na konstante linearan i homogen.

<u>3. definicija:</u> Ako je y_1 partikularni integral jednadžbe (54a), smatrat ćemo neki drugi partikularni integral y_2 od njega <u>bitno različitim</u>, ako nije oblika $k_1 y_1$, gdje je k_1 neka konstanta. Treći partikularni integral y_3 smatrat ćemo

<u>bitno različitim</u> od prvih dvaju, ako nije oblika $k_1 y_1 + k_2 y_2$; četvrti integral y_4, ako nije oblika $k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3$ i t.d. Mjesto toga možemo kazati, da među sobom bitno različiti integrali moraju biti među sobom <u>linearno nezavisni</u>.

<u>8. poučka:</u> Izraz (56) bit će samo onda opći integral zadane jednadžbe (54a), kad su <u>svi</u> partikularni integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ među sobom linearno nezavisni.

<u>9. poučka:</u> Partikularni integrali $y_1, y_2, \dots y_n$ bit će među sobom linearno nezavisni, kad je njihova determinanta

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

od nule različita.

<u>4. definicija:</u> Skup partikularnih integra-

la $y_1, y_2, \dots, y_n$ linearne homogene diferencijal-ne jednadžbe n-toga reda, koji udovoljavaju uvjetu $D \neq 0$ zove se <u>fundamentalnim sistemom</u>.

<u>10. poučka</u>: Zadanome fundamentalnom sistemu partikularnih integrala $y_1, y_2, \dots, y_n$ pripada diferencijalna jednadžba

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots\dots & y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots\dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \dots\dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots\dots & y_n' & y_n \end{vmatrix} = 0. \qquad (58)$$

<u>11. poučka</u>: <u>Svi</u> su integrali linearne ho-mogene diferencijalne jednadžbe (54a) sadržani u izrazu (56), t.j. ona nema singularnih integrala.

<u>12. poučka</u>: Poznajući jedan partikularni integral integral y_1 linearne homogene di-ferencijalne jednadžbe

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (59)$$

možemo joj red sniziti sa <u>jedan</u>; ta nova jednadžba je također linearna i homogena, pa glasi

$$\left[\binom{n}{1} a_0 y_1^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} a_1 y_1^{(n-2)} + \dots + \binom{2}{1} a_{n-2} y_1' + \binom{1}{1} a_{n-1} y_1\right] z +$$
$$+ \left[\binom{n}{2} a_0 y_1^{(n-2)} + \binom{n-1}{2} a_1 y_1^{(n-3)} + \dots + \binom{2}{2} a_{n-2} y_1\right] z' + \dots$$
$$+ \dots\dots + \binom{n}{n} a_0 y_1 z^{(n-1)} = 0; \qquad (59a)$$

nova funkcija z vezana je uz prijašnju funkciju y relacijom

$$y = y_1 \int z . dx . \qquad (59b)$$

<u>Pripomene</u>. a.) Poznamo li partikularni integral y_1 neke homogene linearne diferen-cijalne jednadžbe <u>drugoga</u> reda, reducirat će se po 12. poučci njezino integriranje na rješavanje homogene linearne jednadžbe <u>prvoga</u> reda, što je uvijek moguće. Prema

tome znamo riješiti homogenu linearnu jednadžbu drugoga reda, kojoj je poznat jedan partikularni integral, uvijek, ma kakovi bili njezini koeficijenti.

b.) Poznamo li u svemu k linearno nezavisnih partikularnih integrala homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-toga reda $(n>k)$, možemo ji transformirati u linearnu homogenu jednadžbu reda $n-k$.

E. Linearne homogene jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Jednadžbe

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (60)$$

kojima su svi koeficijenti a_i konstante, integrirao je već Euler. Postavi li se

$$y = e^{rx}, \qquad (60a)$$

gdje je r neka - sada još neodređena - konstanta, bit će

$$y' = r.e^{rx}, \; y'' = r^2 \cdot e^{rx}, \dots, y^{(n)} = r^n \cdot e^{rx}, \qquad (60b)$$

dakle je

$$e^{rx} \cdot (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = 0. \qquad (60c)$$

Prvi faktor s lijeva ne može za konačno r postati jednak nuli; da bude jednadžbi (60c) udovoljeno, mora dakle biti

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0. \qquad (61)$$

5. definicija: Algebarsku jednadžbu (61) nazivamo karakterističnom jednadžbom za dane linearne homogene diferencijalne jednadžbe (60).

13. poučka: Ima li karakteristična jednadžba (61) n različitih realnih korijena $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, to su funkcije

$$y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = e^{r_2 x}, \; y_3 = e^{r_3 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}$$

partikularni integrali jednadžbe (60), a izraz

$$y = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x} + \dots + K_n e^{r_n x} \qquad (62)$$

je njezin opći integral.

<u>Kompleksni korjeni karakteristične jednadžbe.</u> Ima li karakteristična jednadžba komplek„ne korjene, pojavljuju se oni u <u>parovima</u> konjugiranih brojeva, pa će svaki <u>par</u> kor„jena $\alpha \pm \beta i$ davati u općem integralu izraz

$$k_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + k_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\cdot(k_1 e^{\beta x i} + k_2 e^{-\beta x i}). \quad (63)$$

Taj je <u>prividno</u> kompleksan izraz zapravo realan.

<u>14. poučka:</u> Izraz (63) transformira se uporabom formula

$$e^{iz} = \cos z + i.\sin z$$
$$e^{-iz} = \cos z - i.\sin z, \quad (64)$$

pa dobijemo

$$k_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + k_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\cdot(l_1.\cos\beta x + l_2.\sin\beta x), \quad (65)$$

odnosno

$$k_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + k_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = M.e^{\alpha x}.\cos(\beta x+\varphi), \quad (65a)$$

gdje su l_1 i l_2, odnosno M i φ <u>realne</u> kon„stante integracije.

<u>Pripomena.</u> Ima li karakteristična jed„nadžba par <u>čisto imaginarnih</u> korjena $\pm\beta i$ ($\alpha=0$), dolazi u općem integralu diferencijalne jednadžbe <u>čisto periodički</u> dio

$$k_1.e^{\beta i x} + k_2.e^{-\beta i x} = M.\cos(\beta x+\varphi). \quad (65b)$$

<u>Višestruki korjeni karakteristične jednadžbe</u>

Ima li karakteristična jednadžba višestru„ke korjene, dat će nam 13. poučka <u>premalo</u> singularnih integrala.

<u>15. poučka:</u> Svaki l-struki realni korjen r_1 karakteristične jednadžbe daje l linear„no nezavisnih partikularnih integrala

$$e^{r_1 x},\ x.e^{r_1 x},\ x^2.e^{r_1 x}, \ldots,\ x^{l-1}.e^{r_1 x},$$

dakle je njegov prinos općem integralu

$$e^{r_1 x}(k_1 + k_2 x + k_3 x^2 + \ldots + k_l x^{l-1}). \quad (66)$$

Svaki par l-strukih konjugiranih kompleks„nih korjena $\alpha \pm \beta i$ karakteristične jednadžbe daje $2l$ linearno nezavisnih partikularnih in„

tegrala

$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ x.e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\dots\dots,x^{l-1}\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,$

$e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\ x.e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\dots\dots,x^{l-1}\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,$

dakle je njegov prinos općem integralu

$$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x.(K_1+K_2x+K_3x^2+\dots+K_lx^{l-1})+ \tag{67}$$
$$+e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x.(K_{l+1}+K_{l+2}x+K_{l+3}x^2+\dots+K_{2l}x^{l-1}).$$

6. definicija: Jednadžbe oblika

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}xy'+a_ny=0, \tag{68}$$

gdje su svi koeficijenti a_i konstante, zovu se Eulerove linearne diferencijalne jednadžbe.

16. poučka: Eulerove linearne jednadžbe transformiraju se supstitucijom

$$x=e^t,\quad t=\ln x,\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x},$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),\ i\ t.d. \tag{69}$$

u linearne homogene jednadžbe s konstant„ nim koeficijentima.

F. Linearne nehomogene jednadžbe.

7. definicija: Ako je zadana nehomogena linearna jednadžba

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=X, \tag{70}$$

to se pripadna homogena jednadžba

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{70a}$$

naziva reduciranom jednadžbom (70).

17. poučka: Opći integral y nehomogene linearne jednadžbe aditivno je složen iz jednog njezinog partikularnog integrala η i iz općeg integrala Y reducirane jednadžbe, t.j.

$$y=Y+\eta. \tag{71}$$

18. poučka: Poznamo li opći integral

$$Y=K_1y_1+K_2y_2+\dots+K_ny_n \tag{72}$$

reducirane jednadžbe (70a), možemo uvijek na„ ći opći integral pripadne nehomogene jed„

nadžbe (70) Lagrange-ovom metodom varija- cije konstanta na osnovi samih kvadra- tura. Ta metoda postupa ovako: Iz algebar- skih jednačaba prvoga stepena

$$\begin{aligned} &\varphi_1' y_1 + \varphi_2' y_2 + \dots + \varphi_n' y_n = 0 \\ &\varphi_1' y_1' + \varphi_2' y_2' + \dots + \varphi_n' y_n' = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi_1' y_1^{(n-2)} + \varphi_2' y_2^{(n-2)} + \dots + \varphi_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ &\varphi_1' y_1^{(n-1)} + \varphi_2' y_2^{(n-1)} + \dots + \varphi_n' y_n^{(n-1)} = \frac{\mathcal{X}}{a_0} \end{aligned} \tag{73}$$

izračunat će se n nepoznanica $\varphi_1', \varphi_2', \dots, \varphi_n'$, koje su funkcije varijable x. Kvadraturama do- bijemo odatle

$$\varphi_1(x) = \int \varphi_1'(x).dx, \quad \varphi_2(x) = \int \varphi_2'(x).dx, \ \dots, \ \varphi_n(x) = \int \varphi_n'(x).dx, \tag{73a}$$

pa je sada

$$\eta = \varphi_1 \cdot y_1 + \varphi_2 \cdot y_2 + \dots + \varphi_n \cdot y_n \tag{73b}$$

partikularni integral jednadžbe (70), a

$$y = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n + \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \dots + \varphi_n y_n \tag{73c}$$

je njezin opći integral.

Partikularni integral η može se izravno izračunati, ako su koeficijenti jednadžbe (70) konstante, a izraz $\mathcal{X}$ izvjesna jednostavna funkcija varijable x.

I: Funkcija $\mathcal{X}$ je polinom stepena m, t.j.

$$\mathcal{X} = P(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m . \tag{74}$$

19. poučka: Uz pomišljaj, da je u (70) $a_n \neq 0$, postoji za slučaj (74) partikularni integral η, koji je polinom stepena m; dakle

$$\eta = \lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \dots + \lambda_{m-1} x + \lambda_m \tag{75}$$

Uvrstimo li iz (75) u (70) $y = \eta$, dobijemo i na lijevoj strani jednadžbe polinom stepena m, pa možemo veličine λ izračunati metodom neodređenih koeficijenata. Ako je $a_n = 0$, $a_{n-1} \neq 0$, moramo za η uzeti u (75) polinom stepena m+1; ako je $a_n = a_{n-1} = 0$, $a_{n-2} \neq 0$, polinom stepena $m+2$ i t. d.

II. $\mathcal{X}$ je eksponencijalna funkcija, dakle

$$\mathcal{X} = A.e^{ax}, \tag{76}$$

gdje su A i a izvjesne konstante.

20. poučka: Za slučaj (76) postoji partikularni integral

$$\eta = \frac{A}{f(a)} \cdot e^{ax}, \tag{77}$$

gdje se $f(a)$ izračuna iz

$$f(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n. \tag{77a}$$

21. poučka: Ako je a korjen karakteristične jednadžbe $f(r)=0$, ne može se rabiti formula (77). U tom slučaju vrijede ova pravila:

a.) ako je a jednostruki korjen jednadžbe $f(r)=0$, bit će

$$\eta = \frac{A}{f'(a)} \cdot x \cdot e^{ax}; \tag{77b}$$

b.) ako je a dvostruki korjen, bit će

$$\eta = \frac{A}{f''(a)} \cdot x^2 \cdot e^{ax}; \tag{77c}$$

c.) ako je a p-struki korjen bit će

$$\eta = \frac{A}{f^{(p)}(a)} \cdot x^p \cdot e^{ax}. \tag{77d}$$

III. Funkcija $\mathcal{X}$ je suma nekog polinoma i raznih eksponencijalnih funkcija, dakle

$$\mathcal{X} = P(x) + A.e^{ax} + B.e^{bx} + \ldots + H.e^{hx}. \tag{78}$$

22. poučka: Za slučaj (78) naći će se po poučkama 19.-21. partikularni integrali $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_l$ jednadžaba

$$f(y) = P(x);\ f(y) = A e^{ax};\ f(y) = B.e^{bx}, \ldots, f(y) = H.e^{hx}.$$

Partikularni integral η zadane jednadžbe nađe se iz formule

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_l. \tag{78a}$$

Pripomena: Ako se u funkciji $\mathcal{X}$ pojavgije funkcija sinus ili kosinus, izrazit će se po eksponencijalnim funkcijama na osnovi formula

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{79}$$

i

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{79a}$$

G. Integracija beskonačnim redovima.

Mnoge jednadžbe, naročito linearne, koje se inače ne mogu integrirati, integriraju se beskonačnim redovima. Tu dolaze u obzir dva načina

a.) Pomišljamo li, da se nepoznata funkcija y može u okolici točke $x=0$ razviti u Mac-Laurinov red, glasit će taj razvoj

$$y=y_0+\frac{x}{1!}y_0'+\frac{x^2}{2!}y_0''+\frac{x^3}{3!}y_0'''+\ldots\ldots \tag{80}$$

Zadana diferencijalna jednadžba neka je n-toga reda, pa neka je $y^{(n)}$ eksplicitno izražena varijablom x, funkcijom y i njezinim derivacijama sve do $(n-1)$-oga reda:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}); \tag{81}$$

ima li biti (80) opći integral jednadžbe (2), ima sadržavati n parametara, imamo dakle na izbor vrijednosti $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$, što ih y i njegovih prvih $(n-1)$ derivacija prima za $x=0$. Te ćemo vrijednosti označiti sa $k_1, k_2, \ldots, k_n$; razvoj (80) glasit će dakle sada

$$y=k_1+\frac{x}{1!}k_2+\frac{x^2}{2!}k_3+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}k_n+\frac{x^n}{n!}y_0^{(n)}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}y_0^{(n+1)}+\ldots, \tag{82}$$

pa preostaje još, da se nađu izrazi za $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}$, ... Vrijednost $y_0^{(n)}$ naći ćemo iz (81), ako uvrstimo $x=0$, $y=k_1$, $y'=k_2$, ..., $y^{(n-1)}=k_n$. Derivíramo li jednadžbu (81), dobit ćemo izraz za $y^{(n+1)}$, pa uvrstimo li ovamo opet vrijednosti $x=0$, $y=k_1$, $y'=k_2$..., $y^{(n-1)}=k_n$ i sad već poznatu vrijednost $y_0^{(n)}$, dobit ćemo $y_0^{(n+1)}$. Daljim deriviranjem i sličnim računanjem dobit ćemo vrijednost $y_0^{(n+2)}$ i t. d.

Na taj način dobijemo iz razvoja (80) beskonačni konačan red potencija, koji, u koliko konver-gira, predočuje opći integral jednadžbe (81). Tako dolazimo ili do poznatih funkcija, koje ćemo prepoznati po njihovom razvoju u bes-konačan red, ili do novih funkcija, koje su baš definirane zadanom diferencijalnom jednadžbom.

Pripomena. Uzmemo li za ishodište raz-voja mjesto točke $x=0$ drugu neku točku $x=x_0$, poslužit ćemo se Taylorovim redom

$$y = y_0 + \frac{(x-x_0)}{1!} y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y_0'' + \frac{(x-x_0)^3}{3!} y_0''' + \ldots \qquad (83)$$

b) Drugi se način osniva na metodi ne-određenih koeficijenata. Pomišljamo, da se nepoznata funkcija y može razviti u kon-vergentan red potencija

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots ; \qquad (84)$$

deriviramo li taj red član po član, i t.d. do-

bit ćemo redove za y', y'', i t.d. Uvrstimo li to sve u zadanu jednadžbu

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0, \qquad (85)$$

pa zbrojimo li koeficijente istih potencija va-rijable x, dobit ćemo

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots = 0, \qquad (86)$$

gdje su sada koeficijenti A_i izraženi koefici-jentima a_i. Budući da red (86) identično iš-čezava, dobijemo po metodi neodređenih koefi-cijenata beskonačno mnogo jednačaba

$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots,$ i t.d.

iz kojih će se izračunati koeficijenti reda (84), i to izraženi prvim n koeficijentima $a_0 = k_1$, $a_1 = k_2$, $a_2 = k_3, \ldots, a_{n-1} = k_n$; uvrstimo li to u (84), dobijemo opći integral jednadžbe (85). Taj raz-voj vrijedi u toliko, u koliko konvergira.

Rješavanje nekih posebnih diferencijalnih jednačaba beskonačnim redovima vodi do uponavanja nekih specijalnih funkcija. Evo ne-koliko najznamenitijih primjera.

I. <u>Legendre</u>-ova diferencijalna jednadžba

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0, \qquad (87)$$

gdje je n cio broj $\geqq 0$, homogena je, linearna i drugoga reda. Metoda neodređenih koefi-cijenata daje

$$(k+1)(k+2).a_{k+2}+[n(n+1)-(k+1)k].a_k=0,$$

dakle

$$a_{k+2}=-\frac{(n+k+1)(n-k)}{(k+1)(k+2)}.a_k \; ; \qquad (88)$$

imamo prema tome za <u>take</u> koeficijente

$$a_{2h}=(-1)^h.\frac{(n+1)(n+3)\ldots\ldots(n+2h-1).n(n-2)\ldots[n-2(h-1)]}{(2h)!}a_0; \qquad (88a)$$

a za <u>like</u>

$$a_{2h+1}=(-1)^h.\frac{(n+2)(n+4)\ldots(n+2h).(n-1)(n-3)\ldots[n-(2h-1)]}{(2h+1)!}.a_1. \qquad (88b)$$

Prema tome glasi opći integral jednadžbe (87)

$$y=a_0\left[1-\frac{(n+1)n}{2!}x^2+\frac{(n+1)(n+3)n(n-2)}{4!}x^4-\frac{(n+1)(n+3)(n+5)n(n-2)(n-6)}{6!}x^6+-\ldots\right]+$$
$$+a_1\left[x-\frac{(n+2)(n-1)}{3!}x^3+\frac{(n+2)(n+4)(n-1)(n-3)}{5!}x^5-\frac{(n+2)(n+4)(n+6)(n-1)(n-3)(n-5)}{7!}x^7+-\ldots\right]. \qquad (89)$$

Taj razvoj vrijedi samo u toliko, u koliko ti redovi konvergiraju; no jer je n cio broj $\geqq 0$, to će automatički jedan od redova u (89) prestati iza člana x^n, i to prvi red, ako je n tako, a dru-gi, ako je n liho. Ima dakle partikularni integral Legendre-ove jednadžbe, koji je cije-la racijonalna funkcija n-toga stepena

$$y_1=a_n x^n+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-4}x^{n-4}+\ldots \qquad (90)$$

Izrazimo li sve koeficijente u (90) prvim, imamo

$$y_1=a_n\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-+\ldots\right]. \qquad (90a)$$

Uzmemo li za neodređeno a_n posebnu vrijed-nost $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}$, dobijemo u (90a) na desnoj strani <u>Legendre-ovu kuglinu funkciju</u> prve vrsti; n-toga reda

$$P_n(x)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\right] \qquad (90b)$$

<u>Pripomene</u>. a.) Te se funkcije zovu <u>kugline</u> funkcije, jer se pojavljuju kod izračunavanja

potencijala na kugli.

b.) Kugline funkcije prve vrsti udovoljavaju diferencijalnoj jednadžbi

$$(1-x^2)P_n''(x)-2x.P_n'(x)+n(n+1).P_n(x)=0, \qquad (91)$$

no one se mogu definirati i jednadžbom

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n.n!}\cdot\frac{d^{(n)}(x^2-1)^n}{dx^n}. \qquad (91a)$$

c.) Razvijemo li izraz $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$, gdje neka je $|\alpha|<1$ i $|x|<1$, u red potencija veličine α, bit će u tom razvoju $P_n(x)$ koeficijent veličine α^n.

d.) Legendre-ove funkcije najnižih redova jesu $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$, $P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$.

e.) Drugi red u općem integralu (89) je beskonačan; po D'alembertovom kriteriju može se ustanoviti, da konvergira za $|x|<1$. Tim su redom definirane Legendre-ove kugline funkcije druge vrsti n-toga reda, koje se obično označuju sa $Q_n(x)$. Dakle je opći integral

Legendre-ove jednadžbe (87)

$$y=k_1.P_n(x)+k_2.Q_n(x). \qquad (92)$$

II. Besselova diferencijalna jednadžba glasi

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2).y=0, \qquad (93)$$

gdje je m cio broj ≥ 0. Metoda neodređenih koeficijenata daje

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n^2-m^2)}; \qquad (94)$$

odatle dobijemo integral jednadžbe (93) u obliku

$$y=a_m x^m.\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l.m!\,x^{2l}}{2^{2l}.\,l!(m+l)!}. \qquad (95)$$

Uzmemo li za neodređeno a_m posebnu vrijednost $\frac{1}{2^m.m!}$, dobijemo kao partikularni integral jednadžbe (93) Besselovu cilindričku funkciju prve vrsti m-toga reda

$$J_m(x)=\frac{x^m}{2^m.m!}\cdot\left[1-\frac{x^2}{2^2.(m+1)}+\frac{x^4}{2^4.2!(m+1)(m+2)}-\frac{x^6}{2^6.3!(m+1)(m+2)(m+3)}+\dots\right]. \qquad (96)$$

Taj red konvergira za svako konačno x.

III. Gaussova hipergeometrička jednadžba glasi

$$(x^2-x)y''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]\,y'+\alpha\beta y=0, \qquad (97)$$

gdje su konstante α, β, γ realni brojevi; za γ pomišljamo povrh toga, da je različito od nu,, le i od kakvog negativnog cijelog broja. Me,, toda neodređenih koeficijenata daje

$$a_{k+1}=\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(1+k)(\gamma+k)}\cdot a_k\ ; \qquad (98)$$

uzmemo li posebice $a_0=1$, dobijemo kao par,, tikularni integral jednadžbe (97) hipergeo,, metrički red

$$\mathcal{F}(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2+\dots$$
$$\dots+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k).\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+k)}{1.2.3\dots(k+1).\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+k)}x^{k+1}+\dots, \qquad (99)$$

za koji nam Dalembertov kriterij pokazuje, da konvergira za $|x|<1$.

Hipergeometrički red obuhvata kao spe,, cijalne slučajeve mnoge elementarne funkci,, je, tako n. pr.

$$\mathcal{F}(-\alpha,\beta,\beta;-x)=(1+x)^\alpha$$

$$x.\mathcal{F}(1,1,2;-x)=\ln(1+x)$$

$$\mathcal{F}(\alpha+1,-\alpha,1;\tfrac{1-x}{2})=P_\alpha(x)$$

$$x.\mathcal{F}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2};x^2)=\arcsin x$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\mathcal{F}(1,\beta,1;\tfrac{x}{\beta})=e^x.$$

§12. Sistemi običnih diferencijalnih jednačaba.

A. Sistemi diferencijalnih jednačaba prvoga reda. Zadano je n diferencijalnih jednačaba prvoga reda sa n nepoznatih funkcija $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$\begin{aligned} &F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ &F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ &\text{-------------------------} \\ &F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Smatramo li za čas derivacije $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ nepoznanicama, bit će zadatak algebarske prirode, da izrazimo te veličine preostalim veličinama $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, pa će rezultat glasiti

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\text{-------------------------} \\ &\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned} \qquad (2)$$

Taj će posao dakako voditi do nesavladivih poteškoća, ako su jednadžbe (1) nešto kompliciranije.

1. definicija: Specijalni oblik (2) zadanog sistema (1) zove se njegov kanonski oblik.

1. poučka: Rješavanje sistema (2) istovjetno je s rješavanjem obične diferencijalne jednadžbe n-toga reda.

Deriviramo li prvu jednadžbu (2) po x, imamo

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx};$$

uvrstimo li ovamo za $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ njihove vrijednosti iz (2), imamo

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \Phi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Sad ćemo tu jednadžbu derivirati po x, pa uvrstavati opet za $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ njihove vrijednosti iz (2); na taj ćemo način dobiti

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \Phi_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Nastavljajući taj posao, dobit ćemo sistem jednačaba (njih n na broju):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} &= \Phi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\;\; - - - - - - - - - \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} &= \Phi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Iz ovih ćemo n jednačaba eliminirati $(n-1)$ veličinu $y_2, y_3, \dots, y_n$, da dobijemo

$$g\left(x, y, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny_1}{dx^n}\right) = 0. \quad (4)$$

To je 1. poučkom tražena obična diferencijalna jednadžba n-toga reda, čiji opći integral glasi

$$y_1 = \varphi_1(x, k_1, k_2, \dots, k_n). \quad (5)$$

Uvrstimo li tu vrijednost u prvih $n-1$ jednačaba (3), imamo $n-1$ jednadžbu s isto toliko nepoznanica $y_2, y_3, \dots, y_n$. Sad je opet algebarski posao, da odatle izračunamo

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, k_1, k_2, \dots, k_n) \\ y_3 &= \varphi_3(x, k_1, k_2, \dots, k_n) \\ &\;\; - - - - - - - - - \\ y_n &= \varphi_n(x, k_1, k_2, \dots, k_n) \end{aligned}\right\} \quad (5a)$$

Jednadžbe (5) i (5a) predočuju opći integral sistema (1), odnosno (2).

B. Sistemi dviju jednačaba prvoga reda.

U kanonskom obliku glasi taj najjednostavniji slučaj:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Deriviramo li prvu jednadžbu, imamo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}; \quad (7)$$

iz jednadžba (6) i (7) eliminirat ćemo z i $\frac{dz}{dx}$, pa imamo običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$g(x, y, y', y'') = 0, \quad (8)$$

čiji je opći integral

$$y = \varphi(x, k_1, k_2). \quad (9)$$

Uvrstimo li (9) u prvu jednadžbu (6) imamo

$$z = \psi(x, k_1, k_2). \quad (9a)$$

Geometrijska interpretacija. Jednadžba tangente prostorne krivulje glasi

$$x - x_0 = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'} .$$

Odaberemo li makar koju točku $P(x_0, y_0, z_0)$ možemo iz obiju zadanih diferencijalnih jednačaba (6) izračunati pripadno y_0' i z_0'; a time je odredjen i *smjer* tangente. Dakle sistem (6) definira ∞^3 *prostornih linijskih elemenata*. Integrirati znači poredati sve elemente u ∞^2 integralnih krivulja tako, da se uvijek smjer linijskog elementa podudara sa smjerom tangente na krivulji u toj točki. Izrazimo li k_1 i k_2 iz (9) i (9a), imamo

$$\begin{aligned} k_1 &= \Phi(x, y, z) \\ k_2 &= \Psi(x, y, z) \end{aligned} \qquad (10)$$

kao drugi oblik općeg integrala. Odatle vidimo, da je svih ∞^2 integralnih krivulja predočeno kao prodorne linije dvaju sistema po ∞^1 površina.

Silnice. U nekom prostoru djeluje na svaku jedinicu mase sila, koja ovisi samo od položaja

materijalne točke $M(x, y, z)$. To je *polje sile* poznato, ako su komponente sile zadane kao funkcije hvatišta, dakle

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \psi(x, y, z), \quad Z = \chi(x, y, z),$$

gdje su X, Y, Z komponente paralelne smjerovima koordinatnih osi. Silnice su krivulje, kojima se u svakoj točki tangenta podudara sa smjerom sile, dakle su projekcije elementa luka dl na koordinatne osi proporcionalne komponentama sile, t.j.

$$dx : dy : dz = X : Y : Z .$$

Odatle slijedi izravno

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x, y, z)}{\varphi(x, y, z)} , \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\chi(x, y, z)}{\varphi(x, y, z)} \qquad (11)$$

kao traženi sistem diferencijalnih jednačaba silnica.

Ortogonalne trajektorije sistema površina.

Neka je zadan sistem površina jednadžbom

$$f(x, y, z) = \lambda ,$$

gdje je λ varijabilni parametar. Tražimo li krivulje, koje su ortogonalne trajektorije tih površi„na, moramo imati na umu, da se tangenta takove krivulje

$$\frac{x-x_0}{dx} = \frac{y-y_0}{dy} = \frac{z-z_0}{dz}$$

mora podudarati s normalom površine

$$\frac{x-x_0}{f'_x} = \frac{y-y_0}{f'_y} = \frac{z-z_0}{f'_z} .$$

Odatle slijedi izravno

$$\frac{dx}{f'_x} = \frac{dy}{f'_y} = \frac{dz}{f'_z}$$

ili

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \qquad (12)$$

kao sistem diferencijalnih jednačaba ortogo„nalnih trajektorija.

Te ortogonalne trajektorije možemo smatrati silnicama neke sile, kojoj su komponente f'_x, f'_y i f'_z; funkcija f je onda potencijal te sile, a po„vršine $f=\lambda$ jesu niveau-površine ili površine istog potencijala.

C. Prvotni integrali. Rješenja sistema (2)

dobili smo u obliku (5). Smatramo li u tim jednadžbama parametre k za nepoznanice, te riješimo li jednadžbe (5) i (5a) po tim parametrima k, dobijemo ekvivalentni sis„tem jednačaba

$$\begin{aligned} k_1 &= H_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ k_2 &= H_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ k_n &= H_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) . \end{aligned} \qquad (13)$$

Te su funkcije H među sobom bitno raz„ličite, pa nisu vezane jedna s drugom kak„vom relacijom. Jer kad bi jedna od njih, na pr. H_n, bila funkcija preostalih, bio bi i k_n funkcija preostalih konstanta $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$, pa opći integral (5) i (5a) ne bi sa„državao n neodređenih parametara.

2. definicija: Prvotnim integralom nekog sistema iz n diferencijalnih jednačaba prvo„ga reda nazivamo svaku funkciju veličina

$x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, koja je konstantna, tako da zamijenimo li u njoj $y_1, y_2, \ldots, y_n$ njihovim vrijednostima (5), dobijemo funkciju, u kojoj nema varijable, koja sadrži samo konstan„ te $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Sve su funkcije (13) prvot„ ni integrali.

2. poučka: Funkcija

$$H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

samo je onda prvotni integral, kad jed„ nadžba

$$\frac{\partial H}{\partial x} + f_1 \cdot \frac{\partial H}{\partial y_1} + f_2 \cdot \frac{\partial H}{\partial y_2} + \ldots + f_n \cdot \frac{\partial H}{\partial y_n} = 0 \qquad (14)$$

identično iščezava.

Pripomena: Dva prvotna integrala sma„ tramo različitim, kad jedan nije funkcija drugoga, treći je opet različit, kad nije funk„ cija prvih dvaju i t. d.

3. poučka: Poznavanje jednog prvotnog integrala snizuje broj jednačaba sistema (2) za jedan. Poznavanje k različitih prvotnih