5. *Zur Theorie der Strahlenabsorption in der Atmosphäre;* *von M. Milankovitch.*

In einer Abhandlung, welche im Jahre 1907 im *Philosophical Magazine* erschien[1]), hat Poynting den Einfluß der Atmosphären auf die Oberflächentemperaturen der Planeten einer mathematischen Schätzung unterzogen, indem er dabei von der Untersuchung der Strahlungsvorgänge im folgenden, ideellen Modelle ausging: Der ebenen Oberfläche des bestrahlten Körpers sei eine selektiv absorbierende Schicht vorgelagert deren Mächtigkeit so gering ist, daß man die aus der Absorption der Strahlung resultierende Temperatur innerhalb dieser Schicht als konstant annehmen kann.

Ich habe bei der Untersuchung derselben Frage, zuerst ohne Kenntnis der Arbeit Poyntings, denselben Weg betreten, nachher aber gesehen, daß seine Untersuchungen in einer Richtung hin nicht unbedeutend erweitert werden können, indem die Strahlungsvorgänge auch in einem allgemeiner konzipierten ideelen Modelle einer exakten mathematischen Behandlung zugänglich sind.

Ich ließ die Annahme, daß die vorgelagerte Schicht eine geringe Dicke habe, gänzlich fallen und setzte auch voraus, daß sich die physikalischen Eigenschaften des vorgelagerten Mediums in der zur Oberfläche des bestrahlten Körpers senkrechten Richtung von Punkt zu Punkt stetig ändern. Der von mir untersuchte ideelle Fall entspricht demnach mehr der Wirklichkeit und ich will ihn hier mitteilen.

Die allgemeine Differentialgleichung des Strahlungsvorganges.

Einer unendlich ausgebreiteten ebenen Oberfläche CC' eines festen Körpers K_0 sei eine ebenfalls unendlich ausge-

1) J. H. Poynting, On Prof. Lowells Method for Evaluating the Surface-Temperatures of the Planets; with an Attempt to Represent the Effect of Day and Night on the Temperature of the Earth.

breitete Schicht $CC'\,B'B$ eines absorbierenden Mediums vorgelagert. Die Mächtigkeit dieser Schicht — welche unter Umständen auch unendlich sein kann — sei h. Die Dichte, Absorptionsvermögen und auch die sonstigen physikalischen Eigenschaften des Mediums sollen sich innerhalb der Schicht derart kontinuierlich ändern, daß sie nur Funktionen der Entfernung x der in Betracht gezogenen Stelle des Mediums von der Ebene CC' sind. Wir denken uns also, daß die vorgelagerte absorbierende Schicht aus unendlich dünnen, zu CC' parallelen Teilschichten bestehe und innerhalb jeder dieser Schichten das Medium homogen sei.

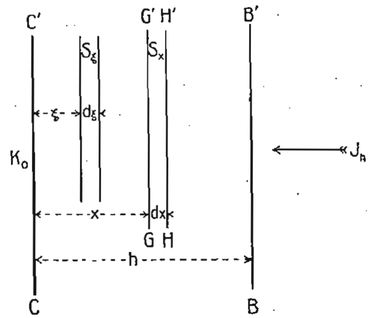

Fig. 1.

Die äußere Begrenzungsfläche $B\,B'$ des absorbierenden Mediums sei von einer konstanten Strahlung J_h (pro Zeit- und Flächeneinheit) getroffen. Diese Strahlung durchdringe, geschwächt durch die Absorption in derselben, die Schicht $CC'\,B'B$ und gelange zur Oberfläche CC' des Körpers K_0, wo ein Teil der Strahlung absorbiert und der andere zurückreflektiert wird, um den Rückweg durch die absorbierende Schicht zu nehmen.

Wir wollen nun die Strahlungsvorgänge in der absorbierenden Schicht und an der Oberfläche des Körpers K_0 in dem Falle untersuchen, in welchem sich der stationäre Temperaturzustand bereits eingestellt hat. Dabei werden wir auf die Wärmeleitung von der Oberfläche des Körpers K_0 gegen sein Inneres (oder umgekehrt) vorläufig keine Rücksicht nehmen, d. h. wir setzen voraus, daß der Körper K_0 in seinem Inneren dieselbe Temperatur aufweise wie auf seiner Oberfläche oder

— wenn dies nicht der Fall sein sollte — daß sein Temperaturleitungsvermögen verschwindend klein sei. Der Wärmeaustausch zwischen dem Körper K_0 und der absorbierenden Schicht und zwischen den einzelnen Teilschichten des absorbierenden Mediums erfolge durch Strahlung.

Die Intensität der in das absorbierende Medium eingedrungenen Strahlung an der Stelle x sei mit $J(x)$ bezeichnet und es ist, wenn wir die Intensität der Strahlung von der Wellenlänge λ an der Stelle x mit $i(x, \lambda)$ bezeichnen,

$$J(x) = \int_{\lambda'_x}^{\lambda''_x} i(x, \lambda),$$

wo λ'_x und λ''_x die Grenzen des Wellenlängenintervalles der Strahlung $J(x)$ bedeuten.

Das Absorptionsvermögen der unendlich dünnen Elementarschicht $G\,G'\,H\,H'$ — welche wir der Kürze halber die Elementarschicht S_x nennen wollen — für die Strahlung der Wellenlänge λ sei $\alpha(x, \lambda)\,d\lambda$. Von der Strahlung $J(x)$ wird demnach von der Elementarschicht S_x der Betrag

$$d\,x \int_{\lambda'_x}^{\lambda''_x} \alpha(x, \lambda)\, i(x, \lambda)\, d\,\lambda$$

absorbiert. Wir führen nun ein mittleres Absorptionsvermögen $a_1(x)$, definiert durch die Gleichung:

$$a_1(x)\,J(x) = \int_{\lambda'_x}^{\lambda''_x} \alpha(x, \lambda)\, i(x, \lambda)\, d\,\lambda$$

ein, und setzen voraus, daß $a_1(x)$ eine bekannte, aus den Eigenschaften des absorbierenden Mediums und der Strahlung J_h ableitbare, kontinuierliche Funktion von x sei.

Beim Auffallen der Strahlung $J(0)$ auf die Ebene CC' soll der Teil $A_1\,J(0)$ absorbiert und der Teil $R_1\,J(0)$ reflektiert werden und es soll

(1) $$A_1 + R_1 = 1$$

sein, d. h. der Körper K_0 als strahlungsundurchlässig angenommen werden.

Die reflektierte Strahlung $R_1 J(0)$ wird ihren Rückweg durch das absorbierende Medium in veränderter Struktur antreten, da die Oberfläche CC' Strahlen verschiedener Wellenlänge verschieden reflektiert, wir nehmen jedoch der Einfachheit halber an, daß das Absorptionsvermögen der Elementarschicht S_x auch für die an der Ebene CC' reflektierte Strahlung gleich $a_1(x)\,dx$ ist. Es unterliegt im übrigen keiner Schwierigkeit, für die reflektierte Strahlung ein anderes Absorptionsvermögen einzuführen.

Die beiden bisher erwähnten Strahlungen (die einfallende und die reflektierte Strahlung J) nennen wir die lichten Strahlungen. Außer diesen Strahlungen kommen in dem von uns betrachteten Modelle noch folgende Strahlungen vor: der Körper K_0 emittiert eine Strahlung E_0, und auch jede beliebige Elementarschicht S_x des absorbierenden Mediums emittiert durch ihre beiden Begrenzungsflächen je eine Strahlung, welche wir mit $\varepsilon(x)\,dx$ bezeichnen wollen. Die beiden Arten von Strahlungen wollen wir die dunklen Strahlungen nennen und annehmen, daß das Absorptionsvermögen der Elementarschicht S_x für diese dunklen Strahlungen $a_2(x)\,dx$ sei.

Das Absorptions- und das Reflexionsvermögen der Oberfläche CC' für die dunklen Strahlungen seien mit A_2 bzw. R_2 bezeichnet und es ist somit:

$$A_2 + R_2 = 1\,. \tag{2}$$

Im stationären Temperaturzustand wird sich sowohl an der Oberfläche des Körpers K_0 als auch in jeder Elementarschicht des absorbierenden Mediums jene Temperatur einstellen, bei welcher das Emissionsvermögen E bzw. $\varepsilon(x)\,dx$ gleich der aufgenommenen Wärmemenge ist, und die mathematische Formulierung dieser Bedingungen liefert uns die Grundgleichungen für den Strahlungs- und Temperaturzustand in der absorbierenden Schicht und an der Oberfläche des Körpers K_0. Um zu diesen Gleichungen zu gelangen, untersuchen wir nun näher den Mechanismus des ganzen Strahlungsvorganges.

Wir haben die Intensität der einfallenden Strahlung (die wir in Wärmeeinheiten messen wollen) an der Stelle x mit $J(x)$ bezeichnet und angenommen, daß von der Elementarschicht S_x, deren Dicke wir gleich dx setzen, der Betrag $a_1(x)\,dx$ absorbiert wird. Dann besteht die Differentialgleichung:

$$dJ(x) = a_1(x)\,J(x)\,dx\,,$$

weil mit wachsendem x auch die Intensität $J(x)$ zunimmt. Die Integration dieser Gleichung liefert uns — wenn wir den Umstand, daß für $x = h$, $J(x) = J_h$ ist, berücksichtigen — die Beziehung:

$$J(x) = J_h\, e^{-\int_x^h a_1(x)\,dx}\,. \tag{3}$$

Die auf die Oberfläche CC' des Körpers K_0 auffallende Strahlung $J(0)$ ist somit:

$$J(0) = J_h\, e^{-\int_0^h a_1(x)\,dx}\,, \tag{4}$$

von welcher der Betrag $A_1 J(0)$ absorbiert und der Betrag

$$J'(0) = R_1\, J(0) = R_1\, J_h\, e^{-\int_0^h a_1(x)\,dx} \tag{5}$$

zurückreflektiert wird. Die Intensität dieser reflektierten Strahlung an der Stelle x bezeichnen wir mit $J'(x)$; von derselben wird der Betrag $a_1(x)\,J'(x)\,dx$ von der Elementarschicht S_x absorbiert, so daß die Beziehung

$$dJ'(x) = -\,a_1(x)\,J'(x)\,dx$$

besteht; das Zeichen minus rührt davon, daß mit wachsendem x die Intensität $J'(x)$ der Strahlung abnimmt. Die Integration der obigen Gleichung liefert:

$$J'(x) = J'(0)\, e^{-\int_0^x a_1(x)\,dx}\,,$$

weil für $x = 0$, $J'(x) = J'(0)$ ist. Berücksichtigen wir die Gleichung (5), so erhalten wir

$$J'(x) = R_1\, J_h\, e^{-\int_0^h a_1(x)\,dx - \int_0^x a_1(x)\,dx}\,. \tag{6}$$

Außer der Strahlung $J(0)$ gelangen zur Oberfläche CC' des Körpers K_0 die von den einzelnen Elementarschichten emittierten dunklen Strahlungen $\varepsilon(x)\,dx$. Dieselben werden auf ihrem Wege nach CC' auch von den dazwischen liegenden Schichten geschwächt. Bezeichnen wir die Intensität der von der Schicht S_x emittierten Strahlung $\varepsilon(x)\,dx$ an der Stelle $x = \xi$ mit $\varepsilon_1(x, \xi)\cdot dx$, so wird von dieser Strahlung von der an der Stelle $x = \xi$ befindlichen, $d\xi$ dicken Elementarschicht S_ξ der Betrag $a_2(\xi)\,\varepsilon_1(x, \xi)\,dx\,d\xi$ absorbiert, welcher gleich $d\,\varepsilon_1(x, \xi)\,dx$ ist. Es besteht somit die Beziehung

$$d\,\varepsilon_1(x, \xi) = a_2(\xi)\,\varepsilon_1(x_1\,\xi)\,d\xi,$$

weil mit wachsendem ξ die Intensität $\varepsilon_1(x, \xi)$ der von S_x emittierten Strahlung zunimmt, solange die Ungleichheit

$$0 < \xi < x$$

befriedigt ist. Integrieren wir die obige Gleichung zwischen den Grenzen ξ und x wobei ξ als variabel zu betrachten ist, so erhalten wir die Gleichung:

$$\varepsilon_1(x, \xi) = \varepsilon(x)\,e^{-\int_\xi^x a_2(\xi)\,d\xi}. \tag{7}$$

An die Oberfläche CC' des Körpers K_0 gelangt von der von der Elementarschicht S_x emittierten Strahlung $\varepsilon(x)\,dx$ der Betrag

$$\varepsilon_1(x, 0) = \varepsilon(x)\,e^{-\int_0^x a_2(\xi)\,d\xi}\,dx \tag{7a}$$

und von der, von der Totalschicht $CC'B'B$ emittierten, Strahlung der Betrag:

$$\int_0^h \varepsilon_1(x, 0)\,dx = \int_0^h \varepsilon(x)\,e^{-\int_0^x a_2(\xi)\,d\xi}\,dx, \tag{8}$$

wovon der Teil

$$A_2\int_0^h \varepsilon_1(x, 0)\,dx$$

absorbiert und der Teil

$$R_2\int_0^h \varepsilon_1(x, 0)\,dx$$

zurückreflektiert wird. Die Oberfläche CC' absorbiert demnach im ganzen die Wärmemenge

$$A_1\,J(0) + A_2\int_0^h \varepsilon_1(x, 0)\,dx$$

und emittiert eine Wärmemenge, die wir mit E_0 bezeichnet haben. Im stationären Temperaturzustand müssen diese beiden Wärmemengen einander gleich sein und es ist somit:

$$E_0 = A_1\,J_h\,e^{-\int_0^h a_1(x)\,dx} + A_2\int_0^h \varepsilon(x)\,e^{-\int_0^x a_2(\xi)\,d\xi}\,dx. \tag{9}$$

Die Funktion $\varepsilon(x)$ erhalten wir aus der Bedingung, daß die von jeder beliebigen Elementarschicht S_x absorbierten und emittierten Wärmemengen einander gleich sein sollen. Zur Aufstellung dieser Bedingung bestimmen wir zuerst die von der Schicht S_x absorbierten Wärmemengen.

Von der einfallenden lichten Strahlung absorbiert die Schicht S_x den Betrag $a_1(x)\,J(x)\,dx$ und von der reflektierten lichten Strahlung den Betrag $a_1(x)\,J'(x)\,dx$. Was die dunklen Strahlungen anbelangt, so ist folgendes zu berücksichtigen:

Die von dem Körper K_0 emittierte dunkle Strahlung E_0 wird durch die Absorption der dazwischen liegenden Elementarschichten geschwächt und zur Schicht S_x gelangt ein Betrag, den wir mit $E(x)$ bezeichnen wollen und von welchem der Teil $a_2(x)\,E(x)\,dx$ in der Schicht S_x verbleibt. Nun muß dieser Teil gleich dem negativen Differential der Strahlung $E(x)$ sein, weil mit wachsendem x die Intensität der Strahlung $E(x)$ abnimmt. Es ist also:

$$d\,E(x) = -\,a_2(x)\,E(x)\,dx,$$

woraus durch Integration die Gleichung

$$E(x) = E_0\,e^{\int_0^x a(x)\,dx} \tag{10}$$

folgt.

Von der an der Oberfläche CC' reflektierten dunklen Strahlung

$$E_r = R_2\int_0^h \varepsilon_1(x, 0)\,dx \tag{11}$$

gelangt zur Elementarschicht S_x ein Betrag, den wir mit $E_r(x)$ bezeichnen wollen und von welchem der Teil $a_2(x)\,E_r(x)\,dx$ in der Schicht S_x verbleibt. Nun muß dieser Teil gleich dem negativen Differential der Strahlung $E_r(x)$ sein, weil mit wachsendem x die Intensität der Strahlung $E_r(x)$ abnimmt. Man hat also

$$dE_r(x) = -\,a_2(x)\,E_r(x)\,dx,$$

woraus durch Integration die Gleichung

$$E_r(x) = E_r\,e^{-\int\limits_0^x a_2(x)\,dx}$$

oder mit Rücksicht auf (11) und (7a) die Gleichung

$$E_r(x) = R_2\,e^{-\int\limits_0^x a_2(x)\,dx}\int\limits_0^h \varepsilon(x)\,e^{-\int\limits_0^x a_2(x)\,dx}\,dx \tag{12}$$

folgt.

Es ist noch die gegenseitige Zustrahlung der einzelnen Elementarschichten in Betracht zu ziehen. Der links von der Elementarschicht S_x befindliche, also sich über das Intervall 0 bis x erstreckende Teil $CC'G'G$ des absorbierenden Mediums entsende gegen die Elementarschicht S_x eine dunkle Strahlung, deren Intensität an der Stelle x wir vorläufig mit $l(x)$ bezeichnen und welche wir später bestimmen wollen. Der rechts von der Elementarschicht S_x sich über das Intervall x bis h erstreckende Teil $HH'B'B$ des absorbierenden Mediums entsende gegen die Elementarschicht S_x eine dunkle Strahlung, deren Intensität an der Stelle x wir vorläufig mit $r(x)$ bezeichnen wollen. Von diesen beiden letzteren dunklen Strahlungen absorbiert die Schicht S_x den Betrag $a_2(x)\,l(x)\,dx + a_2(x)\,r(x)\,dx$.

Die Elementarschicht S_x absorbiert somit die Wärmemenge $a_1(x)\,J(x)\,dx + a_1(x)\,J'(x)\,dx + a_2(x)\,E(x)\,dx + a_2(x)\,E_r(x)\,dx + a_2(x)\,l(x)\,dx + a_2(x)\,r(x)\,dx$, während sie durch jede ihrer beiden Begrenzungsflächen die Wärmemenge $\varepsilon(x)\,dx$, also im ganzen die Wärmemenge $2\,\varepsilon(x)\,dx$ emittiert. Die Gleichsetzung der absorbierten und der emittierten Wärmemengen ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned}2\,\varepsilon(x) = a_1(x)\,J(x) + a_1(x)\,J'(x) + a_2(x)\,E(x) + a_2(x)\,E_r(x)\\ + a_2(x)\,l(x) + a_2(x)\,r(x)\end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (3), (6), (10) und (12) die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned}2\,\varepsilon(x) = {} & J_h\,a_1(x)\,e^{\int\limits_h^x a_1(x)\,dx} + R_1\,J_h\,a_1(x)\,e^{-\int\limits_0^h a_1(x)\,dx-\int\limits_0^x a_1(x)\,dx}\\ & + E_0\,a_2(x)\,e^{-\int\limits_0^x a_2(x)\,dx}\\ & + R_2\,a_2(x)\,e^{-\int\limits_0^x a_2(x)\,dx}\int\limits_0^h \varepsilon(x)\,e^{-\int\limits_0^x a_2(x)\,dx}\,dx\\ & + a_2(x)\,l(x) + a_2(x)\,r(x).\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Um die Größe $l(x)$ zu bestimmen, beachte man, daß eine links von S_x in der Entfernung ξ (wobei $0 < \xi < x$) von CC' befindliche Elementarschicht S_ξ gegen S_x die Wärmemenge $\varepsilon(\xi)\,d\xi$ emittiert, welche auf dem Wege x—ξ nach dem Gesetz

$$d\,\varepsilon(\xi) = -\,a_2(\xi)\,\varepsilon(\xi)\,d\xi$$

geschwächt wird, so daß zur Ebene GG' von der aus S_ξ emittierten Wärmemenge ein Betrag

$$\varepsilon_2(\xi, x)\,d\xi = \varepsilon(\xi)\,e^{-\int\limits_\xi^x a_2(\xi)\,d\xi}\,d\xi \tag{14}$$

gelangt. Alle links von S_x befindlichen Elementarschichten entsenden demnach durch die Ebene GG' den Betrag:

$$l(x) = \int\limits_0^x \varepsilon_2(\xi, x)\,d\xi = \int\limits_0^x \varepsilon(\xi)\,e^{-\int\limits_\xi^x a_2(\xi)\,d\xi}\,d\xi. \tag{15}$$

Die Größe $r(x)$ wird durch ähnliche Überlegungen bestimmt: Eine rechts von S_x in der Entfernung ξ (wobei $x < \xi < h$) von CC' befindliche Elementarschicht von der Dicke $d\xi$ emittiert gegen S_z die Wärmemenge $\varepsilon(\xi)\,d\xi$, welche auf dem Wege ξ—x nach dem Gesetz

$$d\,\varepsilon(\xi) = a_2(\xi)\,\varepsilon(\xi)\,d\xi$$

geschwächt wird, weil jetzt mit wachsendem ξ die Intensität $\varepsilon(\xi)$ zunimmt. Durch Integration der obigen Differentialgleichung zwischen den Grenzen ξ und x finden wir, daß zur Ebene HH' der Betrag

$$\varepsilon_3(\xi, x)\, d\xi = \varepsilon(\xi)\, e^{\int\limits_{\xi}^{x} a_2(\xi)\, d\xi}\, d\xi \tag{16}$$

gelangt. Alle rechts von S_x befindlichen Elementarschichten entsenden demnach durch die Ebene HH' den Betrag

$$r(x) = \int\limits_{x}^{h} \varepsilon_3(\xi, x)\, d\xi = -\int\limits_{h}^{x} \varepsilon(\xi)\, e^{\int\limits_{\xi}^{x} a_2(\xi)\, d\xi}. \tag{17}$$

Um uns von den Integralzeichen, welche durch die obigen Ausdrücke für $l(x)$ und $r(x)$ in die Gleichung (13) eingeführt erscheinen, zu befreien, geben wir dieser Gleichung die Form

$$\begin{aligned} e^{\int\limits_0^x a_2(x)\,dx} \Bigg\{ \frac{2}{a_2(x)}\, \varepsilon(x) - J_h \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, e^{\int\limits_h^x a_1(x)\,dx} & \\ - R_1 J_h \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, e^{-\int\limits_0^h a_1(x)\,dx - \int\limits_0^x a_1(x)\,dx} - l(x) - r(x) \Bigg\} & \\ - E_0 - R_2 \int\limits_0^h \varepsilon(x)\, e^{-\int\limits_0^x a_2(x)\,dx}\, dx = 0 & \end{aligned}$$

und setzen, der kürzeren Schreibweise halber:

$$J_h \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, e^{\int\limits_h^x a_1(x)\,dx} + R_1 J_h \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, e^{-\int\limits_0^h a_1(x)\,dx}\, e^{-\int\limits_0^x a_1(x)\,dx} = f_1(x), \tag{18}$$

so daß wir die Gleichung

$$\left\{ \begin{aligned} e^{\int\limits_0^x a_2(x)\,dx} \left\{ \frac{2}{a_2(x)}\, \varepsilon(x) - f_1(x) - l(x) - r(x) \right\} - E_0 & \\ - R_2 \int\limits_0^h \varepsilon(x)\, e^{-\int\limits_0^x a_2(x)\,dx}\, dx = 0 & \end{aligned} \right. \tag{19}$$

erhalten, welche wir nun nach x differentiieren. Wir erhalten demnach, wenn wir die Ableitungen der Funktionen $f_1(x)$, $a_2(x)$, $l(x)$ und $r(x)$ bzw. mit $f_1'(x)$, $a_2'(x)$, $l'(x)$ und $r'(x)$ bezeichnen die Gleichung

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{a_2(x)} \frac{d\,\varepsilon(x)}{dx} - \frac{2\, a_2'(x)}{a_2^2(x)}\, \varepsilon(x) - f_1'(x) - l'(x) - r'(x) & \\ + 2\,\varepsilon(x) - a_2(x) f_1(x) - a_2(x)\, l(x) - a_2(x)\, r(x) = 0. & \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (15) und (14):

$$l'(x) = \varepsilon_2(x, x) + \int\limits_0^x \frac{\partial\, \varepsilon_2(\xi, x)}{\partial x}\, d\xi = \varepsilon(x) - a_2(x) \int\limits_0^x \varepsilon(\xi)\, e^{-\int\limits_{\xi}^{x} a_2(\xi)\, d\xi}\, d\xi,$$

d. h.

$$l'(x) = \varepsilon(x) - a_2(x)\, l(x). \tag{21}$$

Aus den Gleichungen (17) und (16) folgt hingegen:

$$\begin{aligned} r'(x) = -\, \varepsilon_3(x, x) - \int\limits_h^x \frac{\partial\, \varepsilon_3(\xi, x)}{\partial x}\, d\xi = & \\ = -\, \varepsilon(x) - a_2(x) \int\limits_h^x \varepsilon(\xi)\, e^{\int\limits_{\xi}^{x} a_2(\xi)\, d\xi}\, d\xi, & \end{aligned}$$

d. h.

$$r'(x) = -\, \varepsilon(x) + a_2(x)\, r(x). \tag{22}$$

Setzen wir die Werte für $l'(x)$ und $r'(x)$ aus den Gleichungen (21) und (22) in die Gleichung (20) ein, so erhalten wir:

$$\frac{d\,\varepsilon(x)}{dx} + \left[a_2(x) - \frac{a_2'(x)}{a_2(x)} \right] \varepsilon(x) - \frac{a_2(x)}{2} \left[a_2(x) f_1(x) + f_1'(x) \right] - a_2^2(x)\, r(x) = 0,$$

oder, wenn wir der Kürze halber setzen:

$$\frac{a_2(x)}{2} \left[a_2(x) f_1(x) + f_1'(x) \right] = Q(x), \tag{23}$$

und berücksichtigen, daß

$$\frac{d}{dx} \log_{\text{nat}} a_2(x) = \frac{a_2'(x)}{a_2(x)}$$

ist,

$$\frac{d\,\varepsilon(x)}{dx} + \left[a_2(x) - \frac{d}{dx} \log_{\text{nat}} a_2(x) \right] \varepsilon(x) - Q(x) - a_2^2(x)\, r(x) = 0. \tag{24}$$

Differentiieren wir nun diese Gleichung wieder nach x, so erhalten wir:

$$\frac{d^2\varepsilon(x)}{dx^2}+\left[a_2(x)-\frac{d}{dx}\log_{\text{nat}}a_2(x)\right]\frac{d\varepsilon(x)}{dx}$$
$$+\left[a_2'(x)-\frac{d^2}{dx^2}\log_{\text{nat}}a_2(x)\right]\varepsilon(x)-Q'(x)-2a_2(x)a_2'(x)r(x)$$
$$-a_2^2(x)\,r'(x)=0$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (22)

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2\varepsilon(x)}{dx^2}+\left[a_2(x)-\frac{d}{dx}\log_{\text{nat}}a_2(x)\right]\frac{d\varepsilon(x)}{dx}\\&\quad+\left[a_2^2(x)+a_2'(x)-\frac{d^2}{dx^2}\log_{\text{nat}}a_2(x)\right]\varepsilon(x)-Q'(x)\\&\quad-a_2^2(x)\left[a_2(x)+2\frac{d}{dx}\log_{\text{nat}}a_2(x)\right]r(x)=0.\end{aligned}\right.$$

Die Elimination der Größe $r(x)$ zwischen den Gleichungen (24) und (25) ergibt schließlich die Gleichung:

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2\varepsilon(x)}{dx^2}-3\frac{d}{dx}[\log_{\text{nat}}a_2(x)]\frac{d\varepsilon(x)}{dx}+\Big\{a_2'(x)\\&\quad-a_2(x)\frac{d}{dx}\log_{\text{nat}}a_2(x)+2\left[\frac{d}{dx}\log_{\text{nat}}a_2(x)\right]^2\\&\quad-\frac{d^2}{dx^2}\log_{\text{nat}}a_2(x)\Big\}\,\varepsilon(x)\\&\quad=Q'(x)-\left[a_2(x)+2\frac{d}{dx}\log_{\text{nat}}a_2(x)\right]Q(x),\end{aligned}\right.$$

welche die gesuchte Differentialgleichung des Strahlungsvorganges ist.

Diese Differentialgleichung ist linear und ihre Integrabilität hängt in erster Linie von der Funktion $a_2(x)$, d. h. von dem Absorptionsvermögen des vorgelagerten Mediums für die dunkle Strahlung ab. Wenn die Integration der obigen Differentialgleichung durchgeführt ist — wobei uns zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten und der Größe E_0 die Gleichungen (9), (19) und (24), welche in bezug auf diese drei Konstanten linear sind, zur Verfügung stehen —, so erhalten wir das Emissionsvermögen E_0 des Körpers K_0 und das Emissionsvermögen des vorgelagerten Mediums als Funktion von x. Der Strahlungszustand des ganzen Systems ist dadurch gegeben. Wenn nun die Gesetze der Abhängigkeit des Emissionsvermögens des Körpers K_0 und des vorgelagerten Mediums von deren Temperatur bekannt sind, so ist dadurch auch der Temperaturzustand des Systems eindeutig bestimmt.

Die integrabelen Fälle der Differentialgleichung des Strahlungsvorganges.

Fragen wir, wann die lineare Differentialgleichung (26) konstante Koeffizienten des Gliedes $\frac{d\varepsilon(x)}{dx}$ und $\varepsilon(x)$ aufweisen und ihre Integration demnach möglich sein wird. Die Bedingung, daß der Koeffizient des Gliedes $\frac{d\varepsilon(x)}{dx}$ konstant ist, liefert die Beziehung:

$$\log_{\text{nat}}a_2(x)=-c_2x+C$$

oder

$$(27)\qquad a_2(x)=a_0'e^{-c_2x},$$

wo a_0' und c_2 Konstanten sind. Nun ist aber in diesem Falle:

$$a_2'(x)=-c_2a_0'e^{-c_2x}=-c_2a_2(x),$$
$$\frac{d}{dx}\log_{\text{nat}}a_2(x)=-c_2,$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\log_{\text{nat}}a_2(x)=0,$$

so daß dadurch auch der Koeffizient des Gliedes $\varepsilon(x)$ konstant wird.

Wenn somit das Absorptionsvermögen für die dunkle Strahlung durch die Gleichung (27) darstellbar ist, so erhält die Differentialgleichung (26) des Strahlungsvorganges folgende Form:

$$(28)\qquad\frac{d^2\varepsilon(x)}{dx^2}+3c_2\frac{d\varepsilon(x)}{dx}+2c_2^2\varepsilon(x)=F(x),$$

wobei

$$29)\qquad F(x)=Q'(x)-[a_0'e^{-c_2x}-2c_2]\,Q(x)$$

ist, d. h. sie wird zu einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und ihre Integration kann nach bekannten Regeln erfolgen.

Die charakteristische Gleichung

$$r^2+3c_2r+2c_2^2=0$$

der zu (28) gehörigen homogenen Differentialgleichung hat folgende Wurzeln

$$r_1=-c_2;\quad r_2=-2c_2$$

und es ist somit das allgemeine Integral der Gleichung (28) dargestellt durch:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon(x) = C_1\, e^{-c_2 x} + C_2\, e^{-2c_2 x} + \frac{1}{c_2}\, e^{-c_2 x}\int F(x)\, e^{+c_2 x}\, dx \\ - \frac{1}{c_2}\, e^{-2c_2 x}\int F(x)\, e^{2c_2 x}\, dx\,, \end{aligned}\right.$$

wo C_1 und C_2 die Integrationskonstanten bedeuten. Die im obigen Ausdrucke enthaltenen Quadraturen sind, wie man sich leicht überzeugen kann, in endlicher Form durchführbar.

Spezielle Fälle.

Folgende Spezialfälle des soeben behandelten Problems sind wegen der Einfachheit ihrer Lösung besonders charakteristisch.

Erster Fall. Das Absorptionsvermögen $a_1(x)$ für die lichte Strahlung ist jenem für die dunkle Strahlung gleich und durch den Ausdruck (27) darstellbar. Es ist also:

$$(31)\qquad a_1(x) = a_2(x) = a_0\, e^{-cx}.$$

Dann folgt aus der Gleichung (18):

$$f_1(x) = J_h\, e^{a_0\int_h^x e^{-cx}\,dx} + R_1\, J_h\, e^{-a_0\int_0^h e^{-cx}\,dx}\, e^{-a_0\int_0^x e^{-cx}\,dx}\,,$$

d. h.

$$f_1'(x) = J_h\, a_0\, e^{-cx}\, e^{a_0\int_h^x e^{-cx}\,dx} - R_1\, J_h\, a_0\, e^{-cx}\, e^{-a_0\int_0^h e^{-cx}\,dx}\, e^{-a_0\int_0^x e^{-cx}\,dx}\,.$$

Die Gleichung (23) liefert:

$$Q(x) = \frac{a_0}{2}\, e^{-cx}\left[a_0\, e^{-cx} f_1(x) + f_1'(x)\right],$$

d. h.

$$Q(x) = J_h\, a_0^2\, e^{-2cx}\, e^{a_0\int_h^x e^{-cx}\,dx}\,.$$

Es ist also:

$$Q'(x) = \left(-2c + a_0\, e^{-cx}\right) Q(x),$$

so daß mit Rücksicht auf (29) die Gleichung

$$F(x) = 0$$

folgt.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung des Strahlungsvorganges reduziert sich in diesem Fall auf:

$$(32)\qquad \varepsilon(x) = C_1\, e^{-cx} + C_2\, e^{-2cx}.$$

Zweiter Fall. Die Absorptionsvermögen des Mediums für die dunkle und für die lichte Strahlung sind konstant und verschieden, d. h.

$$(33)\qquad a_2(x) = a_0'\,;\qquad a_1(x) = a_0\,.$$

Dann folgt aus den Gleichungen (18) und (23):

$$f_1'(x) = \frac{a_0}{a_0'}\, J_h\, e^{a_0(x-h)} + \frac{a_0}{a_0'}\, R_1\, J_h\, e^{-a_0(x+h)}\,,$$

d. h.

$$f_1'(x) = \frac{a_0^2}{a_0'}\, J_h\, e^{a_0(x-h)} - \frac{a_0^2}{a_0'}\, R_1\, J_h\, e^{-a_0(x+h)}\,,$$

$$Q(x) = \frac{a_0'}{2}\left[a_0' f_1(x) + f_1'(x)\right],$$

d. h.

$$Q(x) = \frac{a_0}{2}\, J_h\left[(a_0' + a_0)\, e^{a_0(x-h)} + (a_0' - a_0)\, R_1\, e^{-a_0(x+h)}\right].$$

Es ist also

$$Q'(x) = \frac{a_0^2}{2}\, J_h\left[(a_0' + a_0)\, e^{a_0(x+h)} - (a_0' - a_0)\, R_1\, e^{-a_0(x+h)}\right],$$

so daß mit Rücksicht auf (29)

$$F(x) = Q'(x) - a_0'\, Q(x),$$

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\, J_h\, a_0\, (a_0^2 - a_0'^2)\left[\varepsilon^{a_0(x-h)} + R_1\, e^{-a_0(x+h)}\right]$$

wird und die Differentialgleichung (28) des Strahlungsvorganges die Form

$$(34)\qquad \frac{d^2\varepsilon(x)}{dx^2} = \tfrac{1}{2}\, J_h\, a_0\, (a_0^2 - a_0'^2)\left[e^{a_0(x-h)} + R_1\, e^{-a_0(x+h)}\right]$$

erhält, deren Integration uns die Gleichung

$$(35)\qquad \varepsilon(x) = \frac{1}{2a_0}\, J_h\, (a_0^2 - a_0'^2)\left[e^{a_0(x-h)} + R_1\, e^{-a_0(x+h)}\right] + C_1 x + C_2$$

liefert.

Dritter Fall. Die Absorptionsvermögen des Mediums für die dunkle und für die lichte Strahlung sind konstant und einander gleich, d. h.

$$(36)\qquad a_1(x) = a_2(x) = a_0\,.$$

Dann liefert die Gleichung (35):

$$\varepsilon(x) = C_1 x + C_2 . \tag{37}$$

Die Gleichungen (9), (19) und (24) ergeben in diesem Falle für $x = 0$:

$$\begin{cases} E_0 - A_1 J_h e^{-a_0 h} - A_2 W = 0, \\ \frac{2}{a_0} C_2 - J_h e^{-a_0 h} - R J_h e^{-a_0 h} - W - E_0 - R_2 W = 0, \\ C_1 + a_0 C_2 - a_0^2 J_h e^{-a_0 h} - a_0^2 W = 0, \end{cases} \tag{38}$$

wobei wir

$$W = \int_0^h (C_1 x + C_2) e^{-a_0 x} d x$$

gesetzt haben.

Durch Addition und Subtraktion der ersten zwei Gleichungen (38) folgen, mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) und (2), die folgenden zwei ersten Gleichungen, während wir die dritte Gleichung (38) ungeändert lassen.

$$\begin{cases} C_2 - a_0 J_h e^{-a_0 h} - a_0 W = 0, \\ a_0 E_2 - C_2 + a_0 R_1 J_h e^{-a_0 h} + a_0 R_2 W = 0, \\ C_1 + a_0 C_2 - a_0^2 J_h e^{-a_0 h} - a_0 W = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Aus diesen Gleichungen folgt ohne Schwierigkeit

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = a_0 J_h, \\ E_0 = [1 - R_2 - (R_1 - R_2) e^{-a_0 h}] J_h . \end{cases} \tag{40}$$

Es ist also:

$$\varepsilon(x) = a_0 J_h , \tag{41}$$

d. h. im absorbierendem Medium herrscht ein gleichmäßiger Strahlungs- und Temperaturzustand.

Wenn

$$R_2 = R_1$$

ist, so erhalten wir

$$E_0 = (1 - R_1) J_h .$$

Dieser letztere Wert für E_0 würde sich auch bei gänzlicher Abwesenheit des absorbierenden Mediums ergeben haben.

(Eingegangen 20. Dezember 1913.)