НАЧЕЛА

ВИШЕ МАТЕМАТИКЕ

У ТРИ ДЕЛА

ИЗРАДІО

ЗА ПОТРЕБУ НАШИХ НАЈВИШИХ ШКОЛА

ЕМИЛИЈАН ЈОСИМОВИЋ.

У БЕОГРАДУ.

Издање и штампа Државне Печатње.

1872.

Strebe unermüdet stets nach Erweiterung deiner Kenntnisse, und du erstrebst damit neben eigener Befriedigung und hohem geistigen Genusse, noch das erhedende Gefühl — nützlich geworden zu sein.

E. J.

Fleiss ist mehr, als Genie, und Tausende, die sich mit diesem den Hals brechen würden, ersteigen mit jenem die Höhe glücklich die sie sich vorgesetzt haben.

Justus Möser.

НАЧЕЛА ВИШЕ МАТЕМАТИКЕ

III. ДЕО.

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

У ДВЕ КЊИГЕ.

САДРЖАЈ

I. Књиге.

КЊИГА I.

Аналитична геометрија у равни.

УВОД.

§ 1.

Аналитична је **геометрија** једна од оних математичних наука, што геометријске задатке разрешују рачуном, помоћу аритметике (алгебре).

Можност тога посла лежи у томе, што сваку геометријску количину (влак, угао, плосну, тело) можемо узети као јединицу за мерење друге, једнородне количине, што је резултат свака така мерења број, а бројеве можемо да подвргнемо свакком рачуну. Планиметрија, стереометрија и тригонометрија пуне су така посла, али сва тамо решена питања не чине предмет аналитичне геометрије, јер се освр̂у само на величину и неке извесне отношаје између дотичних количина, а аналитична геометрија извиђа ове у најширој опшности. Она расматра њихов постанак и открива њине особине, како сваке на особ, тако и све за једно у различном међусобном отношају, и све то чини служећи се само рачуном. Кад што прихваћа се и слика, али само колико би абстрактно посматрање дотичних количина тако олакшала.

§ 2.

Кад хоћемо аритметику да употребимо на геометрију, онда треба све геометријске количине да измеримо неком јединицом и нађене бројеве да прибележимо, али јединица та ваља да је за све количине што су у питању једна иста, иначе добијене бројеве, као разнородне не би могли један с другим да сравнимо. Од дотичних геометријских количина неке морају бити познате, иначе нема задатка, т. ј. нема узрока каком питању. Каква свеза буде постојала између геометријских количина задатка, така ће иста постојати и између бројева што их претстављају.

Означујући дакле по начину у рачуници бројеве познатих геометријских количина с a, b, c итд., а не познате с x, y, z итд., и постављајући после све те бројеве у онаку међусобну свезу, каква у задатку за геометријске количине буде одређена, биће цео даљи посао на то сведен: да из неких познатих бројева друге не познате изнађемо, а то је решење једначина. Достигну ли позната аритметична сретства за решење једначине, коју према питању будемо имали, онда ће бити и задатак разрешен, јер корени те једначине показиваће тражене геометријске количине у бројевима, које, ако буде нужно, можемо и сликама (графично) да претставимо.

Примера цела овака рада имали смо у планиметрији и сувише, с тога није нужно да још и овде какве покажемо.

§ 3.

Казао сам у § 1. како аналитична геометрија количине што су јој предмет посматра, испитује и с њима нас упознава. Да би пак природу каква влака (линије), какве плосне (површине) или какве тела у свему открила, неопходно је нужно да најпре посматра поједине тачке оних количина, јер тек кад потпуно дознамо и покажемо како каква тачка влака, плосни или тела лежи, и узроке зашто тако лежи, и да само тако може да лежи: бићемо кадри да потпуно познамо читав какав влак, целу какву плосну, цело какво тело.

С тога је пре свега нужно да извидимо чим је утврђен, или како може да се утврди положај појединих тачака, па онда да покажемо како се са њих може прећи на утврду читава влака, читаве плосне, читава тела.

I. Утврда тачке у равни и у простору. Координатна система.

§ 4.

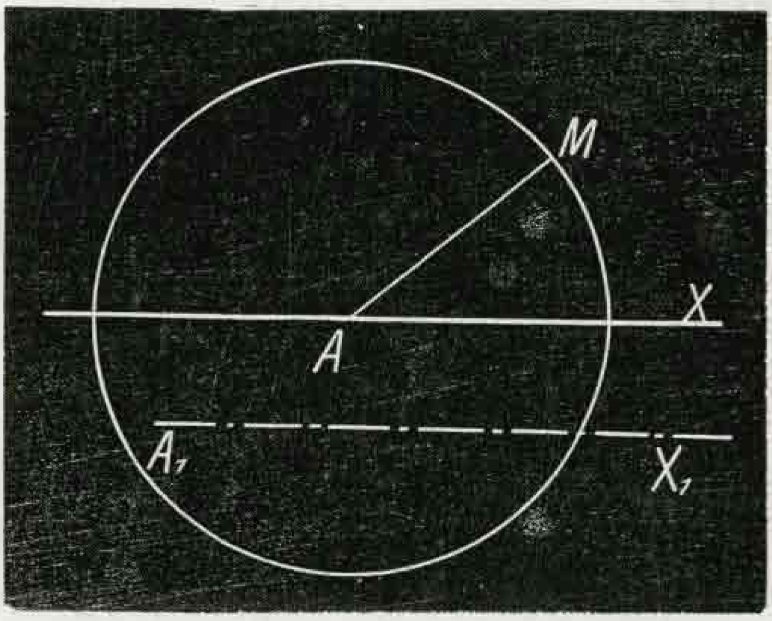
Кад говорим о положају какве тачке, то више не разумем да га утврдимо цртајем, него појмовима, бројевима.

Сваки је положај односан. О положају кака предмета ни како не може бити говора, ако нема друга предмета, или других предмета, према којима га сматрамо. Тако ни о положају какве тачке не може бити речи, ако немамо бар још једну, које је положај утврђен, или се узима да је утврђен. Така тачка, с тога што утврда других од ње почиње, зове се **почетна тачка,** краће **почетак** или **полус.**

За показ положаја неке тачке према узетој или одређеној почетној тачци било би најпростије, да се од ове последње упутимо на пречац оној првој и до ње, па да кажемо колики је пут између њих.

Нека је у некој равни (Сл. 1.) A почетна тачка, M она коју ваља да утврдимо. — Повуцимо и премеримо AM; шта смо тиме дознали? ништа друго, већ да је тачка M од A на пречац удаљена за AM, али утврђена по положају јоште никако није, јер ако из A, као средишта, напишемо круг полупречника AM, то ће све тачке тога круга бити од A на даљини AM; има их безбројно много, па која је између њих она коју требамо, M?

Сл. 1.



Још горе је, ако тачка M лежи негде у простору око A; јер тада све тачке у површју сфере, коју би замислили око A као средишту, а полупречника AM, биле би од A на пречац удаљене за дужину AM, па почем их има безбројно пута још више но пређе, то би још мање знали где је она тражена, M?

§ 5.

Кад су тачке A и M у некој **извесној** равни неизвесност та с места пада, чим утврдимо још и правац AM. Али појам је о правцу опет односан. Да о правцу какве пруге можемо говорити, неопходно је нужно да имамо још једну пругу, које је правац како-год већ утврђен, или се сматра да је утврђен. Хоћемо ли дакле да утврдимо правац AM (Сл. 1.), то је нужно да имамо други неки, већ устаљен правац AX. Казујући после колики је угао MAX између та два правца, као и колика је дужина правца AM, биће положај тачке M у дотичној равни потпуно утврђен.

Овде само још имам да приметим, како онај основни правац AX не мора ићи кроз почетак A. Он може бити ма како положен, н. п. као A_1X_1, јер се свакад кроз A може повући друга напоредна пруга AX, које се правац може узети место основна, за то што лежи онако исто као и A_1X_1. То нас овлашћује, да ради простија посла основни правац узмемо свагда по самој почетној тачци A.

§ 6.

Да је положај какве тачке M у извесној равни потпуно утврђен дужином правца AM (Сл. 1.) и углом MAX, о томе не може бити ни какве сумње с тога, што се свака раван простире само на две стране, у дужину и ширину, и што дакле какву тачку M те равни само у том двојаком погледу утврдити ваља, а то је потпуно урађено са дужином AM и углом MAX, почем AM показује на којој је дужи тачка M од A, а угао MAX како се правац AM у равни око A од основнога правца AX шири.

Пречац AM зове се radius vector тачке M, а ја га зовем пöтёг; угао је MAX његов **обртни угао**, а потег и обртни угао заједно зову се **координате** или **спрежнице** тачке M; овде **обртне** или **поларне** спрежнице, за разлику од других, са којима ћемо се упознати мало доцније. Најпосле основни правац AX зове се **поларна** или **обртна** о́са.

§ 7.

Ако тачка M није у каквој равни него у простору, онда пређашње две количине за потпуну утврду њезина положаја нису довољне. То нам каже сам појам о простору, по коме сваки простор има три протеге: у дужину, у ширину и у висину (или дубину). Али да се уверимо и другаче.

Замислимо раван кроз потег AM и обртну осу AX (Сл. 2.). Ту раван можемо окретати око AX без да оне две тачке свој међусобни положај промене. У том окретању потег AM прави круг MNM_1N_1M, кога ће свака тачка бити под углом MAX од A за дужину AM удаљена. По томе ма која од њих могла би бити тачка M и тако је положај ове тачке одиста још сасвим не извесан.

Сл. 2.

Дакле за потпуну утврду тачке у простору потребна је осем оне две количине још нека трећа, која ону раван MAX при окретању у неком положају утврђује. Положај равни MAX биће потпуно устаљен, ако знамо како лежи према другој некој равни, које положај како-год јесте, или се узима да је утврђен. Том другом равни биће она MAX у свом окретању око AX утврђена. С тога положимо још једну раван, која иде кроз AX и још неку другу пругу AZ, па онда кажемо колики је међусобни нагиб тих двеју равни. Њихов нагиб (нагибни угао), угао MAX и дужина потега AM потпуно утврђују положај тачке M у простору.

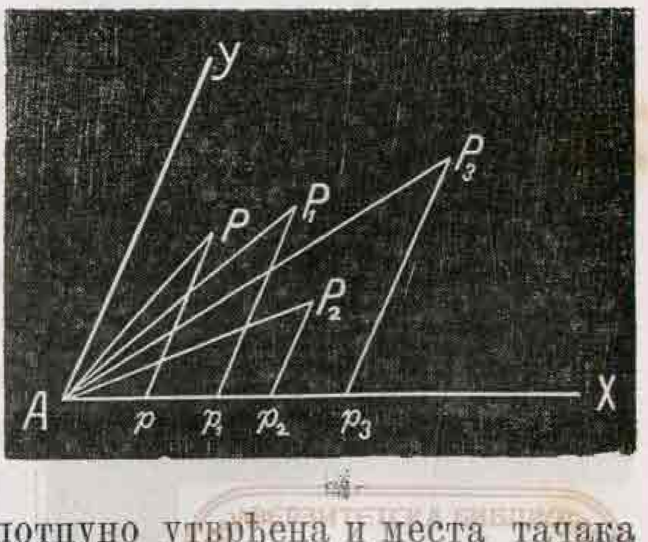
И овде као у §-у 5. ваља приметити, да потребна друга раван не мора ићи баш кроз осу AX, јер свакад ћемо моћи да положимо кроз AX напоредну једну раван, коју можемо место оне сматрати за основну.

§ 8.

Кад би хтели да на показани начин утврдимо више тачака P, P_1, P_2, P_3 и т.д., које су све у некој равни, онда би морали имати колико тачака толико потега и толико исто обртних углова. Многи угли, или само један, али променљив, отештавају посао; за то пронађен је још и други начин за утврђивање положаја, где немамо посла с променљивим углима. Угао сасвим избећи никако није могуће, почем се мора говорити о правцима али толико је достигнуто, да су потребни угли сви стални.

За утврду тачке P, или више тачака P, P_1, P_2 .... и т.д. у равни, повучемо (Сл. 3.) кроз A неку пругу AY, која с оном AX захвата неки угао XAY, и овај увимамо даље да је сталан После повучемо са P, P_1, P_2, P_3 и т.д. с AY напоредне пруге Pp, P_1p_1, P_2p_2 и т.д., па је угао $PAX = P_1AX = P_2AX = \ldots = YAX$, а $< PpA = P_1p_1A = P_2p_2A = \ldots = 180^0 - YAX$. Ако сад још повучемо и потеге AP, AP_1, AP_2 ... и т.д., имаћемо троугле PAp, P_1Ap_1, P_2Ap_2 ... и тд., који су сви потпуно опредељени, јер су од свакога познате две стране са захваћеним углом, па дакле су потпуно утврђена и места тачака P, P_1, P_2, ... и тд.

Сл. 3.



§ 9.

Од пруга AY и AX, које склапају онај стални угао YAX, зове се прва **абсцисна оса**, а друга **ординатна оса.** Пруга Pp, повучена од абсцисне осе до тачке P напоредно ординатној оси, зове се **ордината**, а парче Ap абсцисне осе, од почетка A па до ординате Pp, зове се **абсциса** тачке P. Исто тако су P_1p_1, P_2p_2, P_3p_3, ... ординате, а Ap_1, Ap_2, Ap_3, ... абсцисе тачака P_1, P_2, P_3, ... Ордината и абсциса заједно зову се **координате** или **спрежнице** дотичне тачке, угао пак YAX зове се **координантни угао**. Ове координате, за разлику од поларних (§ 6.), зову се **паралелне** или **напоредне**. Најпосле почетак, обе осе и угао чине укупно **координатну систему.**

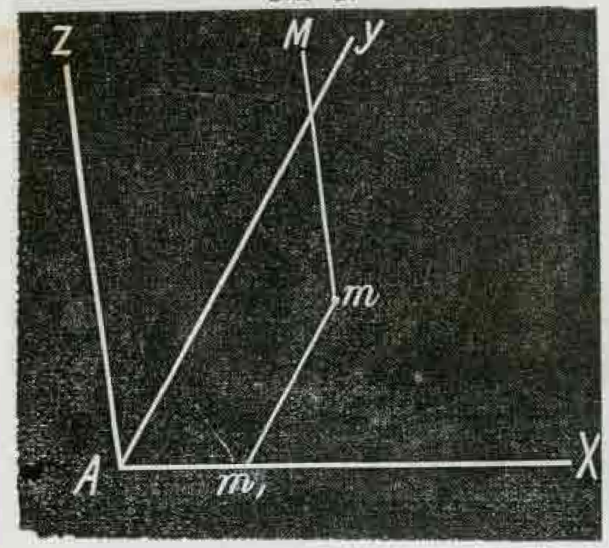
Величина координатнога угла обично зависи од воље или каквих особитих услова, но посао испада простији, кад је тај угао $= 90^0$. Координатна система при таком координатном углу зове се **ортогонална** или **правоугла**, при сваком је другом углу пак **локсогонална** или **косоугла.**

§ 10.

За утврду какве тачке у простору на овај последњи начин за тачку у равни, потребна је осем оне две спрежнице, абсцисе и ординате, још једна трећа пруга. Да би пак и при томе избегли променљиве угле, то узимамо у почетку A (Сл. 4.) још једну пругу AZ, која не лежи у равни YAX, угли пак ZAX и ZAY могу бити сасвим по вољи, али ће и опет сви послови бити најпростији, ако су, као и онај YAX, прави, т. ј. сваки од 90^0.

Сад, да би утврдили какву тачку M, која није у којој од три равни YAX, YAZ и ZAX, него ма где иначе у простору, то ћемо повући из тачке M напоредно прузи ZA пругу Mm до равни YAX, и после у равни YAX из m пругу mm_1 напоредну оси YA. Те две напоредне пруге Mm и mm_1 и парче Am_1 осе AX потпуно утврђују положај оне тачке M у простору према равнима YAZ, YAX и ZAX. Тако исто урадићемо и за ма коју другу тачку. Она трећа пруга AZ зове се такођер **оса**, а пруга је Mm **трећа спрежница** тачке M.

Сл. 4.

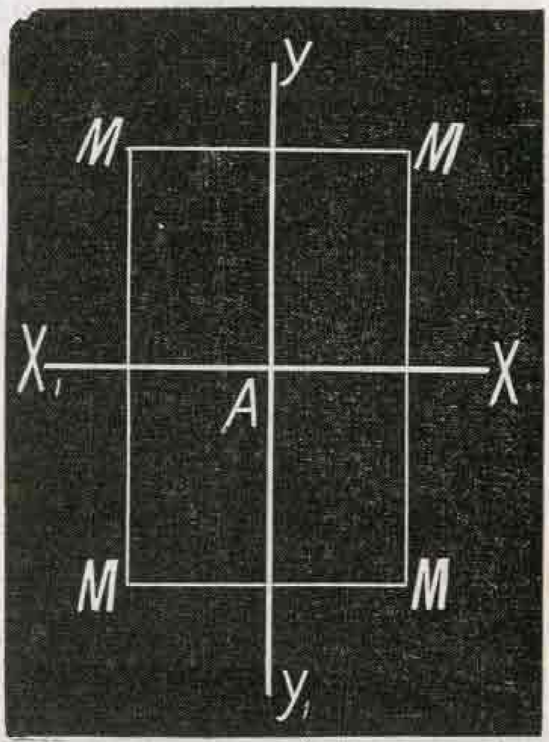


О утврђивању тачака у простору за сада само оволико, а доцније ћемо говорити потање.

§ 11.

Посмотримо даље положај неке тачке M у равни и узмимо при томе ортогоналне спрежнице. (Сл. 5.) Видели смо у § 8. да је тачка у равни утврђена абсцисом и ординатом. Кад хоћемо да кажемо о којој тачци M говоримо, а њена је абсциса $Am = a$, ордината пак $Mm = b$: тад се на кратко изражавамо **тачка** a, b.

Сл. 5.



Да видимо сада да ли је тачка M тима бројевима доиста у сваком положају утврђена.

Бројеви a и b у опште могу бити положни или одречни, па и нула. Свега дакле могу се појавити оваки случаји:

1., $a = 0$, $b = 0$, т. ј. и абсциса и ордината је 0,
2., $a = 0$, $b = +$, т. ј. абсциса нула, ордината положан број,
3., $a = 0$, $b = -$, т. ј. абсциса нула, ордината одречан број,
4., $a = +$, $b = 0$, т. ј. абсциса положан број, ордината 0,
5., $a = +$, $b = +$, т. ј. и абсц. и ордин. положан број,
6., $a = +$, $b = -$, т. ј. абсц. положан број, орд. одречан број
7., $a = -$, $b = 0$, т. ј. абсц. одречан број, ордината 0,
8., $a = -$, $b = +$, т. ј. абсц. одречан број, орд. положан број,
9., $a = -$, $b = -$, т. ј. и абсц. и ордин. одречан број.

Обично узимају се абсцисе на десној страни од ординатне осе за положне, а на левој страни за одречне, ординате пак изнад абсцисне осе за положне, а испод те осе за одречне.

Абсциса $a = 0$ показује да тачка M лежи у ординатној оси, а ордината $b = 0$, каже да је у абсцисној оси. По томе је у

1. случају тачка M и у једној и у другој оси, дакле у њиховом пресеку. т. ј. у самом координатном почетку. У 2. је случају у ординатној оси горе, у 3. случају у тој оси доле, у 4. случају у абсцисној оси десно, у 5. случају десно горе, у 6. случају десно доле, у 7. случају у абцисној оси лево, у 8. случају

лево горе, у 9. случају лево доле; разуме се десно и лево од ординатне осе, горе и доле односно на абсцисну осу.

Кад би из координатнога почетка, као средишта, написали круг с безкрајно великим полупречником, онда обе осе, абсцисна и ординатна, деле тај круг на његове четири четврти и тада тачка каква у равни оса, ако не лежи у почетку (случај 1.) или у којој оси (случаји 2., 3., 4 и 7.), мора бити у којој од тих четири четврти, т. ј. или у оној десно горе, или у оној лево горе, или у оној лево доле, или у оној десно доле (случаји 5., 8., 9., 6.).

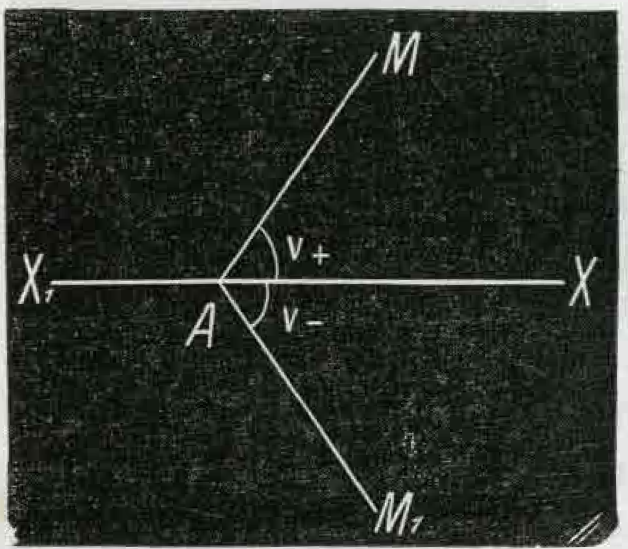
Ако се дакле узму у призрење знаци спрежница, онда абсциса и ордината са својим знацима доиста потпуно утврђују какву тачку у равни, у каквом било можном положају.

За прву координатну четврт узима се обично она десно горе, за другу она лево горе, за трећу она лево доле, а за четврту она десно доле; све као у гониометрији.

§ 12.

Да видимо сада да ли је каква тачка у равни, ма где лежала, доиста потпуно устаљена и поларним координатама.

Сл. 6.



Нека је (Сл. 6.) A почетак, XX_1 обртна оса, v обртни (или поларни) угао и r потег неке тачке M.

У опште потег, као број, могао би бити положан, или одречан, или нула. Али кад се опоменемо појма потегова, т. ј. да се он пружа од почетка A до сваке тачке око тога, онда увиђамо да о одречном потегу не може бити ни помисла, дакле да су сви потези положни, то ће рећи да је r за сваку тачку положан број. Осем тога јасно је такођер, да кад је потег $r = 0$, и обртни угао v мора бити раван нули, јер је r један његов крак. Кад је дакле $r = 0$, онда дотична тачка лежи у самом почетку A.

Што се тиче угла v, он постаје између осе AX и потега r кретањем овога од AX у једну или другу страну и може тако да достигне сваку можну величину од 0° до 360°. Но почем тај угао v иде у стопце за потегом r, дакле се свакад на један исти начин броји, то ни он не може бити другачији, него свагда положан. Само у колико се хоће да означи, да кретање потега r бива од осе AX у лево или у десно, и једно се од та два кретања сматра као положно: само у толико може бити реч о положном или о одречном углу v. Чини ли се та разлика и кретање се потега r у лево од осе AX узима за положно, онда осем горњега случаја $(r = 0)$ можемо имати још ова три:

1., $r = +$, $v = 0$, што показује да дотична тачка лежи у самој обртној оси AX на даљини r од почетка A;

2., $r = +$, $v = +$, што показује да, полазећи од AX у лево, дотична тачка лежи под углом v на даљини r од почетка; најпосле

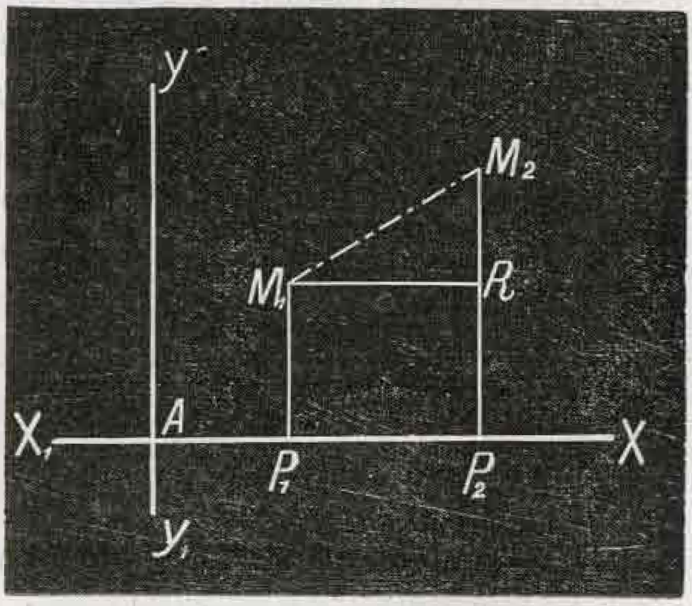
3., $r = +$, $v = -$ значи, да ка тачци које се тиче, ваља поћи од AX на десно, где она лежи под углом v на даљини r од A.

Почем потег r може бити колике-год величине, од 0 па до ∞, и почем обртни угао v може бити сваке величине од 0^0 до 360^0: то је сада јасно, да и поларним координатама можемо потпуно да утврдимо сваку и све тачке у некој равни.

§ 13.

Овде је место да израдимо за доцнију чешћу потребу овај задатак: колика је даљина између две тачке у равни, дате у ортогоналној координатној системи?

Сл. 7.



Нека су у сл. 7. M_1 и M_2 оне две дате тачке, а односно x_1 и y_1, x_2 и y_2 њихне познате координате. Најпосле нека је $M_1M_2 = d$ тражена даљина тачака.

Повуцимо $M_1R = OX$; биће из троугла M_1M_2R

$$d^2 = \overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1R}^2 + \overline{M_2R}^2,$$

или због $M_1R = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1$, а $M_2R = M_2P_2 - RP_1 = M_2P_2 - M_1P_1 = y_2 - y_1$,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$ и отуда тражена даљина

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Овај израз, ради лакшега памтења у речи стављен, гласи овако: **даљина је између две дате тачке у равни квадратни корен из сбира квадрата од разлика једноимених координата.**

II. Утврда положаја разних влакова у равни и у простору у опште.

§ 14.

У свима следећим истрагама служићемо се за олакшање посла само ортогоналном координатном системом, докле-год не условимо другу.

Влаци (линије) у равни могу бити у опште двојаки. Код једних постоји између координата (спрежница) њихових појединих тачака нека извесна и истоветна свеза, тако да ту свезу можемо претставити рачунским (аналитичним) једним изразом и да из овога проналазимо сваку влакову тачку на један исти начин. Код других на против између координата појединих тачака не постоји ни какав сталан, него свагда други однощај, тако да сваку тачку на други начин добијамо и да за сваки поједини координатни спрег морамо имати особен аналитичан израз.

Влаци првога рода зову се **правилни**, а они другога рода **неправилни**.

Неправилни влаци не могу бити предмет аналитичне геометрије, почем оно што је већ у себи не правилно и различно, не може да се стави под општа правила, а аналитична геометрија управ тиме, што проналази и показује закон који постоји између појединости какве или каквих геометријских количина, закључује са појединости на целину и обрнуто са целине на појединости, и што управ у свему томе леже велике користи које нам та наука подаје. Ми ћемо дакле овде имати посла само с правилним влацима.

§ 15.

Почем ни какав влак није сложен из тачака, то и не можемо какав влак тиме потпуно да познамо и претставимо, што би више, па и безбројно много његових тачака определили. Али почем је сваки влак што анал. геом. испитује правилан, и почем у таком влаку све тачке на један исти начин постају, то ћемо свагда моћи да са неколико његових пронађених тачака закључимо на све остале, па тако и на њега цела. Ово се потпуно достизава увођењем премењљивих бројева за координате и функција, које показују онај сталан отношај у сваком координатном спрегу. Да је пак ово можно, служили се ма којом од поменутих координатних система, разумећемо из овог што сада следује.

§ 16.

Нека је M која-год тачка каквог влака у равни. Ако употребимо поларну систему, то нека y значи потег, а x обртни угао оне тачке; а ако радимо са паралелном (било ортогоналном или локсогоналном) системом, то нека буде y ордината, а x обсциса оне тачке M. Служили се ма каквом системом, свагда ћемо наћи рачунски неки израз, који показује свезу, у првом случају између потега и обртнога угла, а у другом случају између ординате и абсцисе, и таком ћемо изразу свагда моћи да дамо облик $F\ (x,\ y) = 0$, или ако ову једначину по y разрешимо, $y = f(x)$. Почем је пак M тачка правилна влака, и почем дакле између координата (поларних или паралелних) ма које његове тачке постоји једнака свеза, то изрази $F(x, y) = 0$ или $y = f(x)$ претстављају сваку његову тачку и можемо дакле сваком тих једначина да утврдимо коју-год његову тачку и колико-год његових тачака, али **само његових**.

Истина сваки је влак нешто наставно или не прекидно и није сложен из појединих, па ма колико тачака, али тако исто и ма која оних једначина, узмимо простију $y = f(x)$, претставља нешто не прекидно, нешто наставно, јер ма колико бројних вредности да узмемо за x, њихов број ни када не можемо изрпсти. Тако дакле једначина $y = f(x)$ и пак потпуно утврђује положај влака у равни, и ако поједине бројне вредности x опредељују само поједине његове тачке.

Свака једначина $F(x, y) = 0$ или $y = f(x)$ претставља један влак у равни, и зато се свака така једначина зове **једначина влака** кога претставља.

§ 17.

У § 10. видели смо да за утврду какве тачке у простору требамо три количине. Ако дакле имамо једначину $F(x, y, z) = 0$ или $y = f(x, y)$ од три премењљива броја, то така једначина не претставља више тачке у равни или влак у равни, него скуп извесних тачака у простору. Ове тачке добијамо из ње на један исти начин, т. ј. узимајући место x и y вољне бројне вредности и израчунавајући с њима одговарајуће им z. Така је једначина у себи наставна; међу тачкама у простору дакле, које на тај начин добијемо, постоји нека извесна и стална свеза. С тога свака така једначина не претставља засебне тачке у простору, него нешто наставно што иде кроз све њих; дакле шта друго, но **плосну** у простору, која је у опште крива, извијена, а може бити и равна.

Обрнуто, за сваку плосну можемо да изнађемо једну једначину $F(x, y, z) = 0$ или $y = f(x, y)$ између три променљива броја, која ју потпуно претставља и од других разликује.

По свему томе свака једначина $F(x, y, z) = 0$ или $y = f(x, y)$ преставља извесну плосну у простору и зове се зато **једначина плосне.**

§ 18.

Пресек од две плосне биће свагда неки влак у простору, нека **вијуга** (courbe). За претставу какве вијуге дакле морамо да имамо две плосне што се секу, т. ј. које имају заједничких тачака. Почем је пак свака плосна претстављена једном једначином између три променљива броја, то за претставу какве вијуге морамо да имамо две таке једначине од истих променљивих бројева, $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$, или $z = f(x, y)$ и $z = \varphi (x, y)$.

Више о вијугама, на име о вијугама двојаке кривине, говорићемо доцније у другом разделу ове књиге.

§ 19.

Кад је положај каква влака утврђен, онда су и све влакове особине одређене. Једначина која потпуно представља какав влак, садржи и све његове особине. У влаковој слици треба да су такођер све садржане. У томе леже два пута, којима аналитична геометрија у свом задатку може да иде. Она или узима неку једначину, па тражи из ње влак који претставља и све његове значајне особине, или узима слику влака, па из ње изводи све његове особине и тражи једначину, која би га претстављала.

Пошав првим путем преузмемо једначине по реду њихова ступња, тражимо влакове, које сваки род једначина претставља и испитујемо особине свакога тих влакова, све рачуном. Пр томе делимо влакове, по ступњу једначина, које их претстављају, на **влакове првога реда, другога реда** и т.д.

Пошав пак другим путем између влакова не може бити друге разлике, него да су или прави (пруге) или криви (вијуге), због чега појам о кривим влацима остаје још сасвим таман. Осем тога тражећи из влака његову једначину не можемо да посмотримо све његове особине, него само једну; али врло лако може бити да та иста особина припада још и другим влацима и дакле да изнађена једначина не претставља само онај један влак, него још друге, мож'да цео неки род влакова, тако да се о истој једначини не може поуздано рећи да је једначина само оног посмотренога влака.

Из свега тога увиђамо довољно, да је онај први начин за испитивање разних влакова прави научни пут, па да се и ми тога пута држати имамо. Узимаћемо дакле једначине редом и тражићемо влакове које претстављају. При употреби пак у практици морамо да поступимо по оном другом начину, јер ће се ту појављивати само поједине особине влакова, према којима ваља поставити једначину.

§ 20.

Пре него се упустимо у теорију разних влакова имамо да решимо још једно питање. Све што се има урадити урадићемо координатама: или поларнима, или паралелним ортогоналнима, или паралелним косоуглима. Сваки тих начина потпуно одређује какав влак, с тога сваки од њих мора некако да садржи и оне друге. Питање је дакле: ако је какав влак одређен на ма који од она три начина, како га отуд можемо претставити и на она друга два? или, што на једно излази, како изводимо из једног рода координата она друга два? — Решење тога питања биће нам сада посао, а познато је под именом

III. ПРЕТВАРАЊЕ КООРДИНАТА.

§ 21.

Задатак претварања координата на кратко рећи тај је, да неку тачку у равни из какве координатне системе пренесемо у другу систему, или да из познатих координата неке тачке у једној системи изнађемо њезине координате за другу систему.

Свега познали смо три координатне системе: поларну, паралелну ортогоналну и паралелну косоуглу. По томе имали би при претварању координата у опште ових девет случајева: да пређемо

1., са поларне системе на другу поларну,
2., „ „ „ „ ортогоналну,
3., „ „ „ „ косоуглу,
4., „ ортогоналне системе на поларну,
5., „ „ „ „ другу ортогоналну,
6., „ „ „ „ косоуглу,
7., „ косоугле системе на поларну,
8., „ „ „ „ ортогоналну,
9., „ „ „ „ другу косоуглу.

Но лако је увидети да 2. случај ни шта друго није него особеност трећега, а 4. особеност седмога, исто тако да су 5., 6. и 8. случај само особености деветога.

По томе као доиста различне случаје имамо да извидимо само ова четири: прелази се

а., из поларне системе у другу поларну,
б., из поларне системе у паралелну косоуглу,
в., из косоугле паралелне системе у поларну и
г., из косоугле паралелне системе у другу косоуглу систему.

§ 22.

Система са које прелазимо на другу, зове се **стара** система. Исто тако сви потребни елементи у тој системи добијају придев стари, стара или старо, и тако имамо **стара** оса и **старе** осе, **старе** координате, **стари** обртни угао и т.д. На против система на коју прелазимо зове се **нова** и сви нужни елементи у њој зову се **нови: нов** почетак, **нове** осе, и т.д.

а., Прелаз са поларне системе на другу поларну.

§ 23.

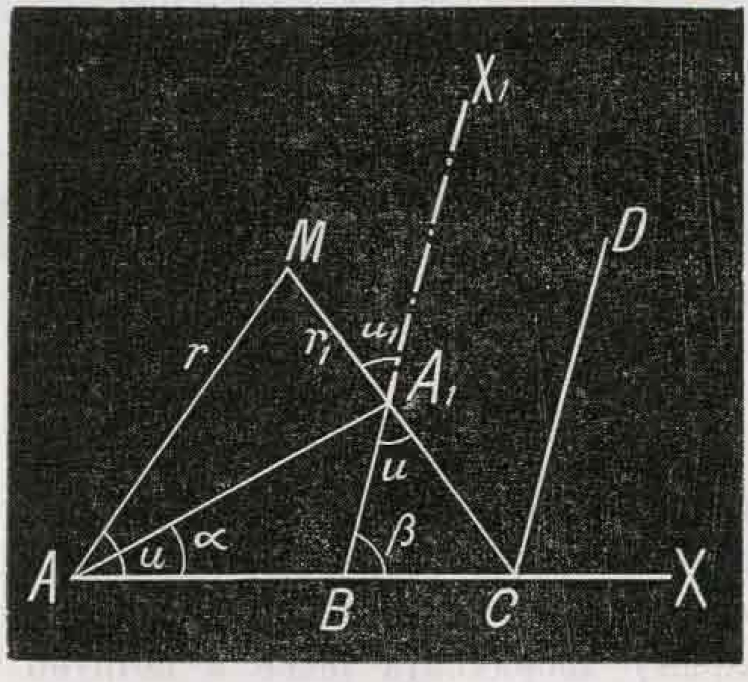
При овоме послу стара система и све што је у њој стално је. Што се пак тиче положаја једне системе према другој, то могућим случајима нема броја. Тако н. п. нови почетак може лежати изнад или испод старе осе, па и у њој, — лево или десно од старога почетка, или баш у њему, — на већој или мањој даљини од старе осе, но што је тачка коју преносимо, или баш у тој тачци и т.д. и т.д.

Једним тих случаја морамо да отпочнемо, а чим се тај услови, одмах су почетак и оса нове системе утврђени. Што пак при таком положају системе изнађемо, можемо лако да удесимо и за ма који други. Ту само ваља једнако имати на уму, да се кретање потега од осе редовно узима у лево и да се дакле и обртни угли тако броје и при томе бројању сматрају као положни (види § 12.).

§ 24.

Сад нека је M у сл. 8. једна тачка каква влака у равни; A (почетак), AX (оса), u (поларни угао) и r (потег) нека су елементи једне системе, а A_1 (почетак) A_1X_1 (оса), u_1 (поларни угао) и r_1 (потег) друге системе. Ма коју од њих сматрали као стару $AA_1 = a$, $\wedge\ A_1AX = \alpha$ и $\wedge\ X_1BX = \beta$ познати су бројеви. Повуцимо још кроз C пругу CD паралелно оси A_1X_1, биће $\wedge\ DCX = \beta$, $\wedge\ A_1CD = u_1$.

Сл. 8.



Из троугла AMA_1 имамо:

1.) $a \,.\, sin\,(u - \alpha) = r_1 \,.\, sin\, AMA_1$, или због $\wedge\ AMA_1 = 180 - (u + ACM) = 180 - [u + 180 - (u_1 + \beta)] = u_1 + \beta - u$,

$$a \,.\, sin\,(u - \alpha) = r_1 \,.\, sin\,(u_1 + \beta - u) = r_1 \,.\, sin\,[(u_1 + \beta) - u].$$

Отуд ако $sin\,(u - \alpha)$ и $sin\,[(u_1 + \beta) - u]$ развијемо, после са $cos\, u$ разделимо и једначину по $tg\, u$ разрешимо:

$$tg\, u = \frac{a \,.\, sin\, \alpha + r_1 \,.\, sin\,(u_1 + \beta)}{a \,.\, cos\, \alpha + r_1 \,.\, cos\,(u_1 + \beta)} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \text{(P.}$$

2.) $a \,.\, sin\, AA_1M = r \,.\, sin\, AMA_1$, или због $\wedge\ AA_1M = 180$

$- (u_1 + AA_1B) = 180 - (u_1 + \beta - \alpha)$ и $\wedge AA_1B = \beta - \alpha$, по пређашњему $\wedge AMA_1 = u_1 + \beta - u$,

$$a \,.\, sin\, [u_1 + (\beta - \alpha)] = r \,.\, stn\, [u_1 + (\beta - u)]\text{, отуд}$$

пак, ако $sin\, [u_1 + (\beta - \alpha)]$ и $sin\, [u_1 + (\beta - u)]$ развијемо, после са $cos\, u_1$ разделимо и једначину по $tg\, u_1$ разрешимо:

$$tg\, u_1 = - \frac{a \,.\, sin\, (\beta - \alpha) - r \,.\, sin\, (\beta - u)}{a \,.\, cos\, (\beta - \alpha) - r \,.\, cos\, (\beta - u)} \;.\;.\;.\;. \;(Q.$$

3.) $r^2 = a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \,.\, cos\, AA_1M$, или због $\wedge AA_1M = 180 - (u_1 + \beta - \alpha)$,

$$r^2 = a^2 + r_1^2 + 2ar_1 \,.\, cos\, (u_1 + \beta - \alpha) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(p.$$

4.) $r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar . cos\, MAA_1$, или због $\wedge MAA_1 = u - \alpha$,

$$r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar . cos\, (u - \alpha) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(q.$$

По свему овоме, ако је A, AX, u и r стара система и имамо у њој $r = F(u)$ као једначину каква влака, кога је M у опште ма која тачка, па хоћемо тај влак (његову једначину) да пренесемо у систему A_1, A_1X_1, u_1 и r_1 као нову, то ћемо узети у оној једначини $r = F(u)$ место r и u нађене вредности под P и p, па ћемо добити тражену нову једначину $r_1 = f(u_1)$; на против, ако је система A_1, A_1X_1, u_1 и r_1 стара, а A, AX, u и r нова, и једначина је онога влака у старој системи $r_1 = f(u_1,)$ то ћемо за u_1 и r_1 узети њихове вредности по обрасцима Q и q, па ћемо добити једначину истога влака $r = F(u)$ за означену нову систему.

§ 25.

Удешавање нађених образаца P, Q, p и q за различне положаје и различне особености оних система остављам ученицима као задатак, од кога ће имати двојаку корист: једну што ће посао о претварању координата боље и потпуно схватити, а другу, што ће о једној муци одмах добити и све нужне обрасце за кашњу потребу.

б., Прелаз са поларне системе на паралелну косоуглу.

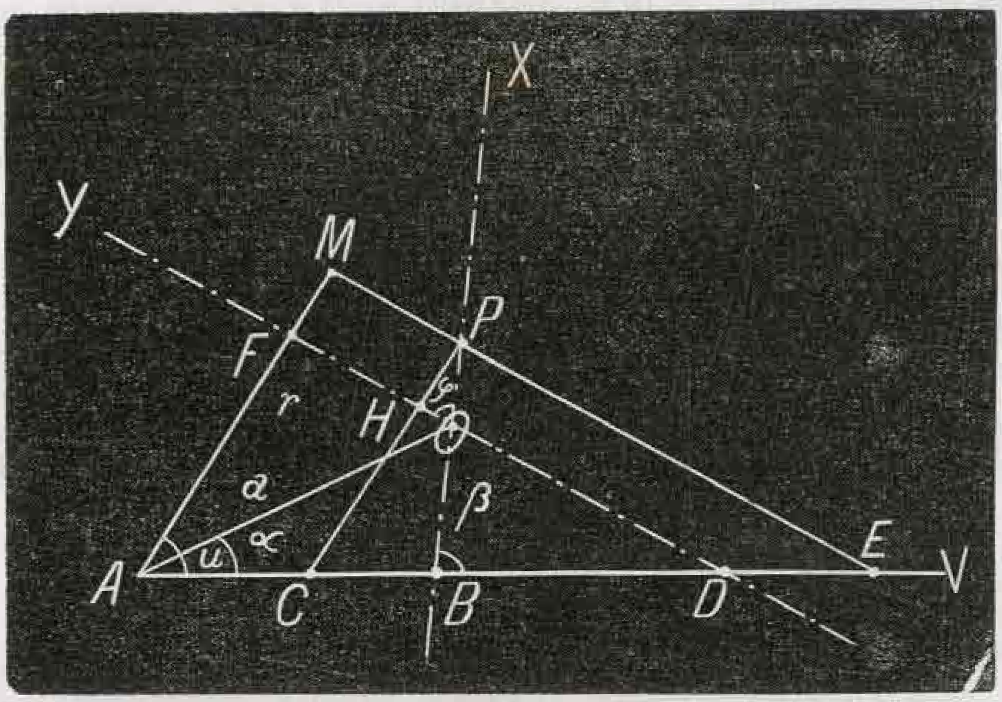
§ 26.

И овде има безбројно случаја, што се тиче можног међусобног положаја система. Но и ту ће бити довољно, ако испитамо само један, јер је после лако дознати из нађених резултата тога случаја, што за друге ваља.

§ 27.

Нека је у сл. 9. у старој (поларној) системи A почетак, AV оса, u поларни угао, M тачка некога влака, $AM = r$ њезин потег; даље нека је O почетак нове (паралелне) системе, OX абсцисна оса, OY ординатна оса, φ координатни угао, x абсциса и y ордината оне тачке M.

Сл. 9.



И овде треба да је утврђен положај нове системе у старој. Зато нека су још $AO = a$ потег нова почетка, угао $OAV = \alpha$ његов нагиб на стару (поларну) осу, најпосле угао између абсцисне осе и поларне $XBV = \beta$.

Сад је опет све до тога стало да старе (поларне) координате r и u изразимо новима x и y и свима, по међусобном положају система познатим бројевима.

§ 28.

Повуцимо кроз P пругу $CP \parallel AM$ и продужимо $MP = y$ преко P до пресека с поларном осом у E (пређ. сл.).

Као што слика стоји, и по свему казаноме лако је увидети, да је $\wedge\ BOD = \varphi$,

$\wedge\ ADY = AEM = 180 - (\varphi + \beta)$,

$\wedge\ ECP = DAM = u$,

$\wedge\ AFD = AME = CHD = \varphi + \beta - u$.

Из троугла AOF имамо:

$FO \,.\, \sin\,[(\varphi + \beta) - u] = a \,.\, \sin\,(u - \alpha)$; али је $FO = FH + HO = y + HO$, за то

$(y + HO) \,.\, sin\,[(\varphi + \beta) - u] = a \,.\, sin\,(u - \alpha)$, а из троугла POH

$$HO = \frac{x \,.\, sin\,(\beta - u)}{sin\,[(\varphi + \beta) - u]}\,.\text{ С тога}$$

$$y \,.\, sin\,[(\varphi + \beta) - u] + x \,.\, sin\,(\beta - u) = a \,.\, sin\,(u - \alpha).$$

Ако у овом изразу развијемо $sin\,(u - \alpha)$, $sin\,(\beta - u)$ и $sin\,[(\varphi + \beta) - u]$, после разделимо са $cos\,u$, и најпосле још једначину разрешимо по $tg\,u$, излази:

$$tg\,u = \frac{a \,.\, sin\,\alpha + x \,.\, sin\,\beta + y \,.\, sin\,(\varphi + \beta)}{a \,.\, cos\,\alpha + x \,.\, cos\,\beta + y \,.\, cos\,(\varphi + \beta)} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\; (R.$$

Даље имамо из троугла ABO

$$BO = \frac{a \,.\, sin\,\alpha}{sin\,\beta}\text{, из троугла } ADO$$

$$DO = \frac{BO \,.\, sin\,\beta}{sin\,(\varphi + \beta)} = \frac{a \,.\, sin\,\alpha}{sin\,(\varphi + \beta)}\text{, а из троугла } BPE$$

$$PE = \frac{PB \,.\, sin\,\beta}{sin\,(\varphi + \beta)}\text{; дакле због } PB = x + BO\text{, узев}$$

за BO пређашњу вредност,

$$PE = \frac{x \,.\, sin\,\beta + a\,sin\,\alpha}{sin\,(\varphi + \beta)}\,.$$

Најпосле је из троугла AME

$$r = ME \,.\, \frac{sin\,(\varphi + \beta)}{sin\,u} = (y + PE) \,.\, \frac{sin\,(\varphi + \beta)}{sin\,u}\,,$$

или узев пређашњу вредност за PE,

$$r = \frac{y \,.\, sin\,(\varphi + \beta) + x \,.\, sin\,\beta + a \,.\, sin\,\alpha}{sin\,u}\,.$$

Но по § 18. (моје) тригонометрије је

$$sin\,u = \frac{tg\,u}{\sqrt{1 + tg^2 u}}\,.$$

Узев дакле место $tg\,u$ нађену њезину вредност по обрасцу ($R.$, следује после свршених рачуна:

$$r = \sqrt{\{[a \,.\, cos\,\alpha + x \,.\, cos\,\beta + y \,.\, cos\,(\varphi + \beta)]^2 + [a \,.\, sin\,\alpha + x \,.\, sin\,\beta + y \,.\, sin\,(\varphi + \beta)]^2\}}$$

Почем је пак, кад оба квадрата под кореном израдимо,

$$a^2 \,.\, cos^2\,\alpha + a^2 \,.\, sin^2\,\alpha = a^2$$
$$x^2 \,.\, cos^2\,\alpha + x^2 \,.\, sin^2\,\alpha = x^2$$
$$y^2 \,.\, cos^2\,(\varphi + \beta) + y^2 \,.\, sin^2\,(\varphi + \beta) = y^2$$ и по (тригонометрије § 20.)

$$2ax \; cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta + 2ax\,.\,sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta = 2ax\,.\,cos\,(\beta - \alpha)$$

$$2ay\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos(\varphi+\beta) + 2ay\,.\,sin\,\alpha\,.\,sin(\varphi+\beta) = 2ay\,.\,cos\,(\varphi+\beta-\alpha)$$

$2xy\,.\,cos\,\beta\,.\,cos(\varphi+\beta) + 2xy\,.\,sin\,\beta\,.\,sin(\varphi+\beta) = 2xy\,.\,cos\,\varphi$: то остаје најпосле

$$r = \sqrt{[a^2 + x^2 + y^2 + 2ax\,.\,cos\,(\beta-\alpha) + 2ay\,.\,cos\,(\varphi+\beta-\alpha)} \\ + 2xy\,.\,cos\,\varphi] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (S.$$

По томе, ако имамо једначину $r = f(u)$ каква влака у поларној системи, па хоћемо, или треба да је имамо за утврђену какву косоуглу систему, то у ону једначину ваља да узмемо место r и u њихове вредности по обрасцима (R и (S., па ћемо добити једначину онога влака, $y = F(x)$, за паралелну косоуглу систему.

§ 29.

Ради доцније потребе извидићемо овде неколико особитих случајева, а друге остављам ученицима за веџбање.

а.) Паралелна је система ортогонална (види § 21. 2.), дакле $\wedge\, \varphi = 90^0$. За тај случај постаје

$$1.) \quad tg\,u = \frac{a\,.\,sin\,\alpha + x\,.\,sin\,\beta + y\,cos\,\beta}{a\,.\,cos\,\alpha + x\,.\,cos\,\beta - y\,sin\,\beta}$$

$$2.) \quad r = \sqrt{[a^2 + x^2 + y^2 + 2ax\,.\,cos\,(\beta-\alpha) - 2ay\,.\,sin(\beta-\alpha)]}$$

б.) Паралелна (нова) система је ортогонална, т. ј. угао је $\varphi = 90^0$ и абсцисна је оса те системе паралелна поларној (старој) оси, дакле $\wedge\, \beta = 0$.

Према томе постаје

$$1.) \quad tg\,u = \frac{a\,.\,sin\,\alpha + y}{a\,.\,cos\,\alpha + x}$$

$$2.) \quad r = \sqrt{(a^2 + x^2 + y^2 + 2ax\,.\,cos\,\alpha + 2ay\,.\,sin\,\alpha)}.$$

в.) Паралелна је система ортогонална и абсцисна оса лежи у поларној оси. Ту је $\varphi = 90^0$, $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, зато

$$1.) \quad tg\,u = \frac{y}{a + x}$$

$$2.) \quad r = \sqrt{(a^2 + x^2 + y^2 + 2ax)} \\ = \sqrt{[(a + x)^2 + y^2]}.$$

г.) Паралелна је система ортогонална, абсцисна оса у поларној оси и нови почетак O у старом A. Ту је, осем пређашњих услова, још и $a = 0$, зато

$$1.) \quad tg\,u = \frac{y}{x}$$

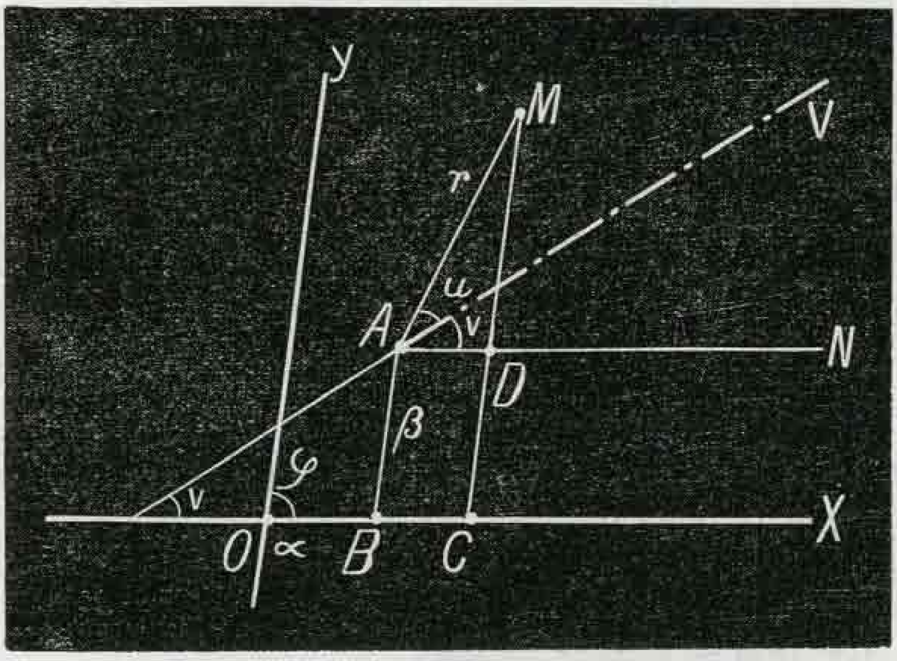
$$2.) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

в.) Прелаз са косоугле паралелне системе на поларну.

§ 30.

Из безбројне множине могућих случајева у погледу на међусобни положај старе и нове системе, узмимо у сл. 10. један од њих, у ком нека су OX и OY осе старе (паралелне) системе, угао $YOX = \varphi$ координатни угао, $OC = x$ и $MC = y$ координате тачке M некога влака у равни, даље AV оса нове (поларне) системе, $\wedge\, MAV = u$ поларни угао и $AM = r$ потег оне тачке M, најпосле $OB = \alpha$ и $AB = \beta$ координате нова почетка A у старој системи и угао v нагиб нове осе према старој. Повуцимо $AN \parallel OX$; биће

Сл. 10.



$$x = OC = OB + BC = OB + AD$$
$$= \alpha + AD$$
$$y = CM = CD + DM$$
$$= \beta + DM.$$

Но из троугла AMD следује

$$AD = \frac{r \, . \, sin\, AMD}{sin\, ADM}$$

$$DM = \frac{r \, . \, sin\, (u + v)}{sin\, ADM}, \text{ а због } \wedge\, AMD = \varphi - (u + \beta)$$

и $\wedge\, ADM = 180 - \varphi$,

$$AD = \frac{r \, . \, sin\, [\varphi - (u + v)]}{sin\, \varphi}$$

$$DM = \frac{r \, . \, sin\, (u + v)}{sin\, \varphi}; \text{ дакле је}$$

$$1.)\ x = \alpha + \frac{r \,.\, sin\,[\varphi - (u + v)]}{sin\,\varphi}$$

$$2.)\ y = \beta + \frac{r \,.\, sin\,(u + v)}{sin\,\varphi}$$

По томе ако је једначина влака, кога је M једна његова тачка, у паралелној системи $y = F\,(x)$, па у ту једначину ставимо за x и y вредности из нађених образаца 1.) и 2.) добићемо једначину онога влака за поларну систему, $r = f\,(u)$.

§. 31.

Особити случаји.

а.) Стара је система ортогонална (види §. 21. 4.), дакле $\varphi = 90^0$. У том је случају

$$1.)\ x = \alpha + r \,.\, cos\,(u + v)$$

$$2.)\ y = \beta + r \,.\, sin\,(u + v)$$

б.) Стара је система ортогонална и нова оса паралелна старој, дакле $\varphi = 90^0$, $v = o$. За тај случај горњи општи обрасци примају облик

$$1.)\ x = \alpha + r \,.\, cos\,u$$

$$2.)\ y = \beta + r \,.\, sin\,u.$$

в.) Нови је почетак у старом и нова оса у старој абсцисној Ту је дакле $\alpha = o$, $\beta = o$ и $v = o$; с тога

$$1.)\ x = \frac{r \,.\, sin\,(\varphi - u)}{sin\,\varphi}$$

$$2.)\ y = \frac{r \,.\, sin\,u}{sin\,\varphi}\,.$$

г.) Уз пређашње је услове још стара система ортогонална дакле $\varphi = 90^0$. За то у том случају

$$1.)\ x = r \,.\, cos\,u$$

$$2.)\ y = r \,.\, sin\,u\,.$$

Друге још случаје остављам опет вредним ученицима на вежбање.

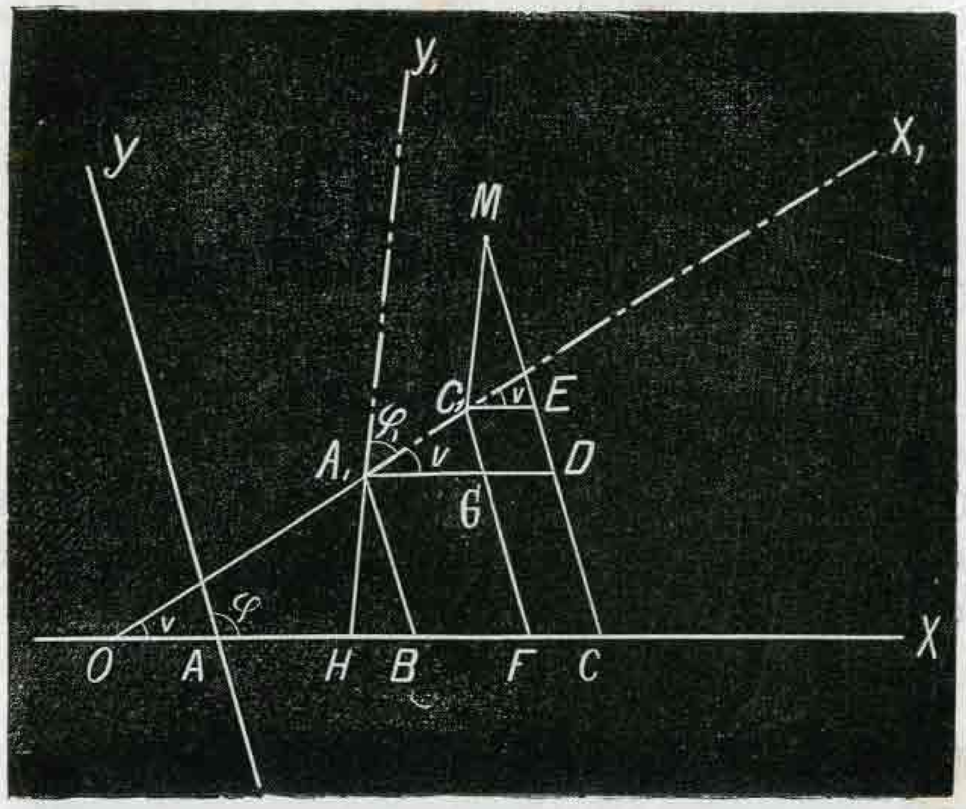
г.) Прелаз са косоугле паралелне системе на другу, такођер, паралелну косоуглу систему.

§. 32.

И овде, што се тиче положаја једне системе према другој има безбројно случајева, но нађемо ли нужне обрасце за прелаз у једном од њих, то их лако можемо удесити и за сваки други случај.

По томе нека је у сл.11. A стари почетак, A_1 нови, AX и $AУ$ старе кординантне осе, A_1X_1 и $A_1У_1$ нове, φ стари координатни угао, φ_1 нови, $AC = x$ и $MC = y$ старе координате неке тачке M каква влака, а $A_1\,C_1 = x$, и $MC_1 = y_1$ нове.

Сл. 11.



Чим се нова система утврди, одмах су координате нова почетка у старој системи познате, а тако исто и положај нових оса према ма којој старој (обично према абсцигној) познат. Нека су $AB = \alpha$ абсциса и $A_1B = \beta$ ордината нова почетка, угао $X_1OX = v$ нагиб нове абсцисне осе на стару, $\wedge\ У_1HX = w$.

И овде је сада све до тога стало, да старе координате изразимо новима и свима сталним бројевима.

Повуцимо кроз A_1 и C_1 паралелне старој абсцисној оси, а кроз C_1 још и паралелну старој ординатној оси. Биће пре свега $\measuredangle\ У_1\,A_1\,D = MC_1E = \varphi_1 + v = У_1HX = w$, а осем тога, што је главно,

$$
\begin{aligned}
1.)\ x &= AC = AB + BF + FC \\
&= \alpha + A_1G + C_1E,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.)\ y &= MC = CD + DE + EM \\
&= \beta + C_1G + EM,
\end{aligned}
$$

а из троуглова A_1GC_1 и C_1ME

$$A_1G = \frac{x_1 . \sin (\varphi - u)}{\sin \varphi}$$

$$C_1 E = \frac{y_1 . \sin (\varphi - w}{\sin \varphi}.$$

$$C_1 G = \frac{x_1 . \sin v}{\sin \varphi}$$

$$ME = \frac{y . \sin w}{\sin \varphi}.$$

Стављајући ове вредности у изразе под 1.) и 2.) добијамо

$$\text{I.)} \quad x = \alpha + \frac{x_1 . \sin (\varphi - v)}{\sin \varphi} + \frac{y_1 . \sin (\varphi - w)}{\sin \varphi}$$

$$\text{II.)} \quad y = \beta + \frac{x_1 . \sin v}{\sin \varphi} + \frac{y_1 . \sin w}{\sin \varphi},$$

два обрасца, где су, као што видимо, старе координате изражене чрез нове координате и све сталне бројеве.

По томе ако имамо једначину $y = f(x)$ каквога влака у старој системи, па хоћемо да је пренесемо у нову систему, то само треба у оној једначини узети место старих координата x и y њихове вредности из образаца I.) и II.), па ћемо најпосле добити једну једначину $y_1 = \varphi (x_1)$, а то ће бити она тражена нова.

§. 33.

Особити случаји.

а.) Стара је система ортогонална, дакле $\wedge \varphi = 90^0$ (види §. 21. под 6.). У том је случају

$$\text{I}^{\text{I}}.) \quad x = \alpha + x_1 . \cos v + y_1 . \cos w$$

$$\text{II}^{\text{I}}.) \quad y = \beta + x_1 . \sin v + y_1 . \sin w.$$

б.) Стара је система косоугла, али нова је ортогонална, дакле $\varphi_1 = 90^0$ (види §. 21. под 8). Тада мора бити

$$\text{I}^{\text{II}}.) \quad x = \alpha + \frac{x_1 . \sin (\varphi - v)}{\sin \varphi} - \frac{y_1 . \cos (\varphi - v)}{\sin \varphi}$$

$$\text{II}^{\text{II}}.) \quad y = \beta + \frac{x_1 . \sin v}{\sin \varphi} + \frac{y_1 . \cos v}{\sin \varphi}.$$

в.) Обе су системе ортогоналне (види §. 21. под 5.). Тада је због $\varphi = 90^0$ и $\varphi_1 = 90^0$

$$\text{I}^{\text{III}}.) \quad x = \alpha + x_1 . \cos v + y_1 . \sin v$$

$$\text{II}^{\text{III}}.) \quad y = \beta + x_1 . \sin v + y_1 . \cos v.$$

§. 34.

Овим је задатак о претварању координата у опште решен и сада смо довољно спремљени, да можемо прећи на саме оне истраге, које чине предмет оналитичне геометрије. Тај наш даљи посао делимо ради олакшице на аналитичну геометрију у равни (књига I.) и аналитичну геометрију у простору (књига II.). У првом делу испитаћемо у нужном пространству најпотребније влакове у равни, а у другом делу најнужније влакове, плосне (површине) и тела у простору, такођер само у најпотребнијем пространству. За све истраге пак служићемо се ортогоналном системом као најпростијом.

КЊИГА I.

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА У РАВНИ.

А.) Влаци 1. реда.

§. 35.

Видели смо да сваки правилан влак у равни можемо преставити неком једначином од два промењлива броја, од којих је један абсциса, а други ордината. Да би дакле извидили све влакове прва реда, то морамо да узмемо најопштију једначину прва ступња, па онда да тражимо влакове које преставља.

Најопштија је или потпуна једначина прва ступња овака изгледа

$$ay + bx + c = o,$$

но можемо је лако преставити и простије, ако је по једном (ма коме) промењливом броју разрешимо, н. п. по y. Учинив тако имамо

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$, или ако још ставимо $-\frac{b}{a} = A$, $-\frac{c}{a} = B$,

$$y = Ax + B.$$

Чим се у овој једначини који од бројева A или B промени, одмах је једначина другојача и с тога је можно, да влакова прва реда има толико, колико различних једначина прва ступња. Ако дакле хоћемо да извидимо све влакове прва реда, то морамо да испитамо редом све различне видове једначине прва ступња.

§. 36.

У једначини $y = Ax + B$, као општој, A и B могу имати све могуће бројне доисне (реелне) вредности, положне и одречне, па могу бити и O. Али ако би било $A = o$, то у $y = B$ не би смо имали једначину од два пременљива броја, с тога A у презетој истрази мора бити свагда различно од нуле, иначе пак може бити или положно или одречно.

По томе и обзиром на могуће тројако B т. ј. $+B$, $-B$, $B = o$ имамо свега да испитамо ових шест разних облика горње опште једначине:

$$1.)\ y = + Ax + B \qquad 3.)\ y = - Ax + B$$
$$2.)\ y = + Ax - B \qquad 4.)\ y = - Ax - B$$

$$5.)\ y = + Ax$$
$$6.)\ y = - Ax\,,$$

у свима којима знаци десних чланова долазе само од сталних сачинилаца A и B.

Колико различних влакова из ових једначина докучимо, толико у опште има влакова прва реда.

§. 37.

Пре понаособнога посматрања истих једначина ваља приметити још ово:

Кад-год из какве дате једначине ваља да изнађемо влак што она претставља, свагда полазимо тим путем, да тражимо различним абсцисама одговарајуће ординате и тиме докучимо поједине влакове тачке, после пак кушамо е да ли из нађених тачака могу дознати какви општи знаци, који влак карактеришу и од других га влакова разликују?

Осем тога у свакој једначини што испитујемо морамо узети свако x један пут положно, други пут одречно. На тај начин добићемо са сваком абсцисом две ординате, од којих једна одговара положној абсциси, друга одречној, а то ће рећи да са сваком абсцисом налазимо две влакове тачке: једну на страни положних абсциса, другу на страни одречних абсциса. По томе дакле сваки оним једначинама преставлен влак сложен је из два дела, од којих један припада положној половини абсцисне осе, а други одречној.

Најпосле најважније су тачке влака свагда оне, у којима он пресеца координатне осе. С тога свагда ваља да изнађемо најпре те тачке.

За пресек влака с ординатном осом абсциса је $x = o$, а за пресек влака с абсцисном осом мора бити ордината $y = o$.

Сад преузмимо све оне једначине у § 37. по реду.

§. 38.

$$y = + Ax + B.$$

1.) Са $x = o$ следује $y = B$, а с $y = o$ показује се $x = -\frac{B}{A}$. То је знак да дотични влак пресеца ординатну осу *изнад* абсцисне осе на даљини B, а абсцисну осу *лево* од почетка на даљини $\frac{B}{A}$.

2.) За свако положно x добијамо положно и y, и што је веће x, то веће је и y. Влакове тачке дакле, које имају таке координате, леже све *десно* од ординатне осе *изнад* абсцисне и с већом се абсцисом од ове осе све већма удаљују.

3.) Са ма којим одречним x, т. ј. за сваку одречну абсцису горња се једначина мења на $y = - Ax + B$.

Док је $x < \frac{B}{A}$, дотле је свака ордината y положна и што-год је x мање од $\frac{B}{A}$, то веће је y. Влакове тачке дакле, што имају одречне абцисе мање од $\frac{B}{A}$, леже све *изнад* абсцисне осе *лево* од ординатне и примичу се првој оси све већма, што-год је одречна обсциса већа.

Кад постане $x = \frac{B}{A}$ појави се $y = o$, и дакле влак сече абсцисну осу.

Чим пак буде $x > \frac{B}{A}$, с места ординате y постану све одречене и као таке све веће, што-год је абсциса већа. Влакове тачке дакле, које имају одречне абсцисе и одречне ординате, леже све *лево* од ординатне осе *испод* абсцисне и удаљују се од ове последње осе с већом абсцисом све већма и већма.

4.) Једначија што испитујемо показује $\frac{y}{Ax + B} = 1$, дакле

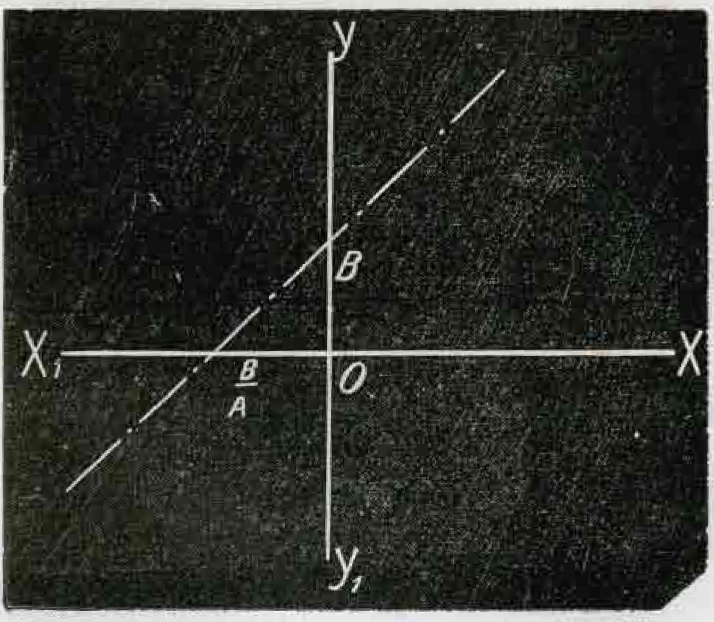
$$\frac{y}{x + \frac{B}{A}} = A.$$

У овом изразу преставља x сваку у опште абцису, положну или одречну, y је дотичној абсциси одговарајућа ордината, а $\frac{B}{A}$ даљина влакова пресека с абсцисном осом од почетка, дакле $x + \frac{B}{A}$ даљина ординате од тога пресека. По томе израз $\frac{y}{x + \frac{B}{A}} = A$ показује, да је размера између ма које ординате влака и њезине даљине од пресека с абсцисном осом једна иста, *стална* и сва кад $= A$. Но ово ни како не може да постоји другаче, осем само ако све влакове тачке леже у једној истој *прузи* (правој линији).

Влак дакле кога преставља једначина $y = + Ax + B$ није ништа друго, него *пруга*, права линија.

Сад, ако покупимо све резултате ових истрага, видимо, да је влак кога преставља једначина $y = + Ax + B$ пруга (права линија), која сече ординатну осу изнад абсцисне на даљини B, а абсцисну осу лево од ординатне осе и почетка на даљини $\frac{B}{A}$, у кратко пругу, која иде кроз прву, другу и трећу координатну четврт. (Сл. 12.)

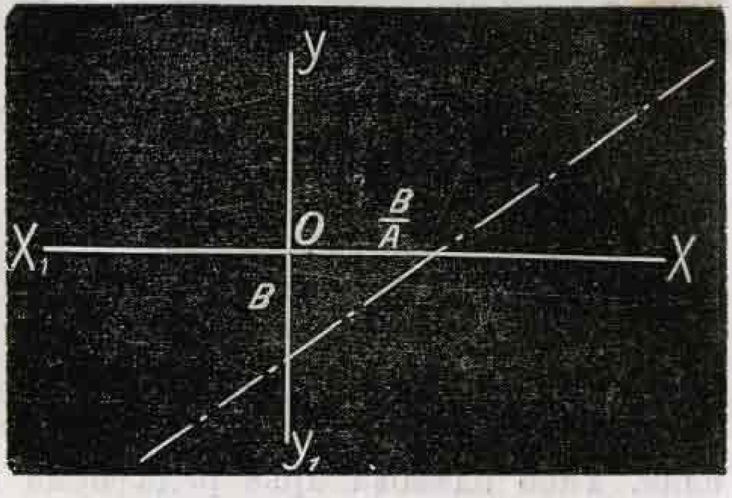
Сл. 12.



§. 39.

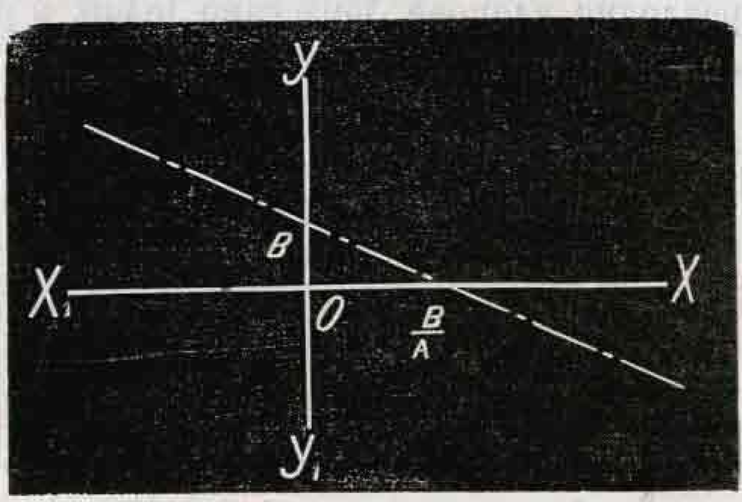
На овакав исти начин долазимо до увиђаја, да једначина $y = + Ax - B$ преставља *пругу* (праву линију), која сече ординатну осу *испод* абсцисне на даљини B, а абсцисну осу *десно* од почетка и ординатне осе на даљини $\frac{B}{A}$, дакле пругу, која иде кроз прву, четврту и трећу координатну четврт; (Сл. 13.)

Сл. 13.



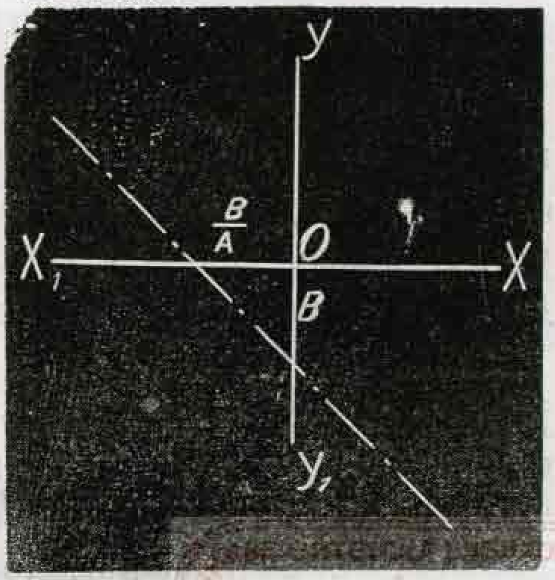
да једначина $y = -Ax + B$ представља *пругу*, која сече ординатну осу *изнад* абсцисне на даљини B, а абсцисну осу *десно* од ординатне и почетка на даљини $\frac{B}{A}$, дакле праву линију, која иде кроз другу, прву и четврту координатну четврт; (Сл. 14).

Сл. 14.



да једначина $y = -Ax - B$ представља праву линију, која сече ординатну осу *испод* абсцисне на даљини B, а абсцисну *лево* од ординатне осе и почетка на даљини $\frac{B}{A}$, дакле пругу, која иде кроз другу, трећу и четврту четврт координатне системе; (Сл. 15).

(Сл. 15.



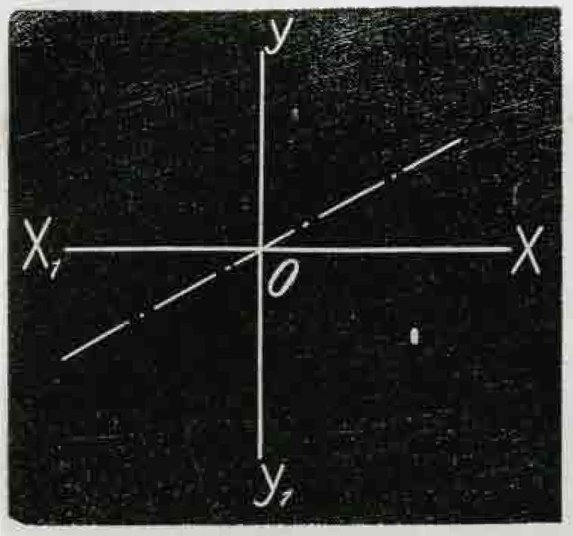
да једначина $y = +Ax$ представља *пругу*, која иде кроз координатни почетак из прве кординатне четврти у трећу; (Сл. 16), најпосле

да једначина $y = -Ax$ представља такођер *пругу*, која иде кроз почетак из друге четврти у четврту; (Сл 17).

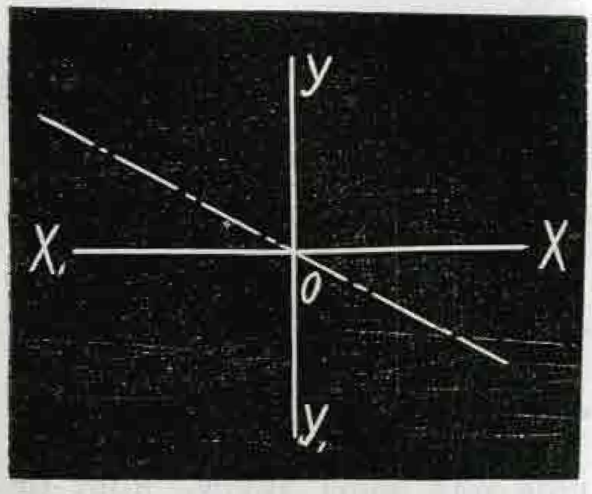
§. 40.

Све једначине прва ступња претстављају дакле само један једини

Сл. 16.



Сл. 17.



влак. Тако влакова прва реда нема више него само један, а тај је *пруга*, права линија. Једначине прва ступња разликују се међу собом разним сачинилцима A и B, али та разлика не показује различне влакове, него само један, *у различном положају* односно координатне системе.

§. 41.

Свака ордината праве линије и даљина те ордвнате од линијина пресека с абсцисном осом јесу свакад катете једног правоуглог троугла, кога ипотенузу прави један линијин део. С тога она стална размера између ма које ординате и њезине даљине од влакова пресека с абсцисном осом није ни шта друго, него тангента линијиног нагиба на абсцисну осу. Дакле ако тај нагиб обележимо с α, то је $A = tg\alpha$ и с тога општу једначину праве линије можемо да пишемо и овако:

$$y = tg\alpha\ x + B.$$

§. 42.

Из истрага §§ 39. — 41. видели смо да положај пруге у координатној системи зависи само од сачинилаца A и B, или сад, по последњем облику једначине, од $tg\alpha$ и од B. За потпуну утврду праве линије у уравни достижу дакле два податка или два услова, из којих се могу пронаћи они сачинилци $A = tg\alpha$ и B.

Ови су сачинилци не зависни један од другога, с тога један само услов није довољан, јер би с њим могли да изнађемо само једног сачинилца, а онај други остао би не опредељен, тада пак ни пруга не би била потпуно утврђена.

О овоме се лако можемо уверити. Нека је н. п. само познато под којим углом пруга сече абсцисну осу. Тиме је познато само

$A = tg\alpha$. Линија што секу абсцисну осу под углом кога је $tg = A$ има безбројно много, па која је између њих она што се мисли или се тражи? Да би то знали ваља да је још познато: или где линија сече абсцисну осу? јер тада знамо где ћемо је под оним углом на ту осу поставити, или где сече ординатну осу? или најпосле то, да прелази кроз неку извесну тачку, и тд.

Сад узмимо да знамо само где линија сече ординатну осу т, ј .да је познато само B. Пруга што ту осу секу на даљини B има такођер безбројно много, зато се опет не може знати која је од њих она што се мисли или тражи? Но та би сумња одмах пала, чим би нам се још казало: под коликим углом тражена пруга сече абсцисну осу, или где ју сече, или да пролази кроз неку извесну тачку, и тд.

Какви могу бити они услови из којих се добијају сачинилци A и B, што својом величином и својим знацима потпуно утврђују праву линију у ортогоналној системи, то ћемо показати мало доцније у неколико задатака, што нам требају за даље послове, а сада ћемо да испитамо општу једначину пруга

$y = Ax + B$ још и у неком другом важном погледу.

§. 43.

1.) Узмимо пруга окреће се око свога пресека с ординатном осом и долази при томе у положај напоредан (паралелан) абсцисној оси. Тада је њезин нагиб на ту осу. т. ј. угао $\alpha = o$, дакле $A = tg\alpha = o$, па с тога *при сваком* x

$$y = o.\, x + B = B.$$

По томе $y = B$, као једначина праве линије, преставља *паралелну пругу абсцисној оси* на даљини B. Ако је B положно, онда она паралелна пруга лежи више абсцисне осе. Ако је пак B одречно, онда парлалелна пруга лежи испод абсцисне осе. Најпосле ако је $B = o$, онда једначина $y = o$, као једначина пруге, претставља саму абсцисну осу.

2.) Узмимо да је при претпостављеном окретању пруге око пресека с ординатном осом угао α постао $= 90^o$. Тада је линија пала на ординатну осу и имамо, због $A = tg\,\alpha = tg\,90^o = \infty$,

$$x = \frac{y-B}{\infty} = o\text{, дакле је}$$

$x = o$, као једначина пруге у равни, једначина саме ординатне осе.

3.) Ставимо $\frac{B}{A} = D$, дакле $B = AD$. Једначина $y = Ax + B$ прима тада облик $y = Ax + AD$, а из ове следује $x = \frac{y}{A} - D = \frac{1}{A} \cdot y - D$

Сад замислимо да се пруга, коју преставља ова једначина, окреће око свога пресека с абсцисном осом, док не дође у положај паралелан ординатној оси. Тада је њезин нагиб на прву осу, т. ј. угао $\alpha = 90^0$ и зато $A = tg\ 90^0 = \infty$, а с овом вредности за A следује из нове једначине за сваку ординату y, због $\frac{1}{A} = \frac{1}{\infty} = o$, $x = -D$.

По томе једначина $x = -D$, као једначина пруге у равни, преставља паралелну (напоредну) пругу ординатној оси на даљини $-D$ од почетка, или $x = -D$ је једначина таке паралелне пруге. Ако је D по себи положно, онда паралелна та пруга лежи лево од ординатне осе, ако ли је пак D по себи одречно, онда парлалелна пруга лежи на десној страни ординатне осе.

4.) Са $\frac{A}{B} = D$ прима једначина пруге облик $y = A + AD$. Замислимо најпосле још да је пруга ове једначине у окретању око свога пресека с абсцисном осом легла на ову осу. Угао α постао је у том положају $= o$, с тога $A = tg\alpha = o$, а зато $y = o$.

Дакле је и по овоме сматрању $y = o$, као једначина пруге у равни, једначина саме абсцисне осе. Види горе под 1.)

Сад приступимо решењу наговештених задатака.

§. 44.

Задатак I. Да изнађемо једначину пруге која иде кроз уречену неку тачку.

Тачка каква у равни утврђује се и дакле и одређује тиме, да се каже какве има спрежнице (координате). Нека су дакле спрежнице оне условљене тачке, кроз коју ваља да иде пруга x_1 и y_1.

Као једначину пруге у опште, па дакле и једначину тражене пруге имамо $y = Ax + B$, где су A и B стални, али јоште не познати бројеви, које сада ваља да удесимо према стављеном услову.

Чим се каже да пруга мора да иде кроз какву извесну тачку, тада та тачка ваља да је једна од њезиних тачака, а почем у једначини пруге x и y заступају координате сваке њезине тачке, то су x_1 и y_1 корени оне једначине. Узев дакле x_1 и y_1 место x и y имамо нову једначину $y_1 = Ax_1 + B$.

Одузимањем ове једначине од оне прве $y = Ax + B$ истребљујемо број B и добијамо једначину

$$y - y_1 = A\,(x - x_1)\,, \quad \text{или}$$

$$y = A\,(x - x_1) + y_1,$$

у коју је већ ушао услов, да пруга иде кроз уречену тачку и која је дакле она, коју смо имали да изнађемо.

У овој су једначини x, и y познате спрежнице уречене тачке дакле *стални* бројеви, x_1 и y_1 пак престављају *опште* или променљиве координате осталих пругиних тачака.

За $x = x_1$ следује из те једначине $y = y_1$ као доказ, да пруга одиста иде кроз дату тачку. Али у тој једначини остао је јоште један не извесан број A, због чега је и сама та једначина и пруга коју преставља јоште не извесна, не опредељена. Но то и неможе бити другаче, почем је и исти задатак не опредељен по томе, што пруга, које иду кроз ону одређену тачку, има бозбројно много. Тек кад се по још неком другом услову дозна и A, знаће се коју од свију тих пруга преставља она једначина, а дотле ова мора остати јоште као општа за све пруге што иду кроз ону исту условљену тачку.

§. 45.

Задатак II. Да изнађемо једначину пруге, која иде кроз две дате тачке.

Нека су координате датих тачака x_1y_1 и x_2y_2. По пређашњем је §-у једначина пруге што иде кроз тачку x_1y_1

$$y = A\,(x - x_1) + y_1 \quad \ldots\ldots\ (\alpha.,$$

а једначина пруге што иде кроз другу тачку x_2, y_2

$$y = A\,(x - x_2) + y_2 \quad \ldots\ldots\ (\beta.$$

Али по услову то нису две различне пруге, него једна иста; за то мора бити

$$A\,(x - x_1) + y_1 = A\,(x - x_2) + y_2\text{, а отуда следује}$$

$$A = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ако дакле ово A, које дадоше оба испуњена услова, метнемо у једначине (α и (β., добијамо као тражену једначину пруге што иде кроз две дате тачке

$$1.)\quad y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1) + y_1 \quad \text{или}$$

$$2.)\quad y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_2) + y_2.$$

У овим једначинама нема више ни каква не позната броја, а и сасвим неравно, јер две тачке пругу потпуно утврђују.

За $x = x_1$ следује из ма које тих једначина $y = y_1$, а за $x = x_2$, $y = y_2$, као доказ, да пруга, коју преставља̂ју оне једначине доиста иде кроз обе уречене тачке.

За $y_2 = y_1$ показује се $y = y_1$ као једначина тражене пруге, која је сада по томе *паралелна* абсцисној оси на даљини y_1. За $x_2 = x_1$ пак следује $x = x_1$ као једначина тражене пруге, која је сада по томе *парлалелна* ординатној оси на даљини x_1.

§. 46.

Задатак III. Да изнађемо услов за то, да три тачке леже у једној истој прузи.

Ако су координате датих тачака односно x_1 и y_1, x_2 и y_2, x_3 и y_3, то у једначинама пређашњега §-а ваља узети $x = x_3$, $y = y_3$ чим смо условили да пруга иде још и кроз трећу тачку ($x_3\ y_3$). Тиме налазимо, да за пролаз пруге кроз три дате тачке, којих су спрежнице (x_1y_1), (x_2y_2) и (x_3y_3), мора да је

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

§. 47.

Задатак IV. Да изнађемо 1) услов да се две пруге (праве линије) секу, 2) угао под којим се секу.

1.) Нека су једначине датих пруга

$$\alpha.)\quad y = A_1x + B_1 \quad \text{и}$$
$$\beta.)\quad y = A_2x + B_2$$

Ако се те пруге секу, онда је пресек њихна заједничка тачка и за то координате пресечне тачке морају да задовоље и једну и другу једначину. Нека x и y у онима једначинама престављају координате пресека; мора бити

$$A_1x + B_1 = A_2x + B.$$

$$(A_1 - A_2)\,x = B_2 - B_1$$ отуда *абсциса пресека*

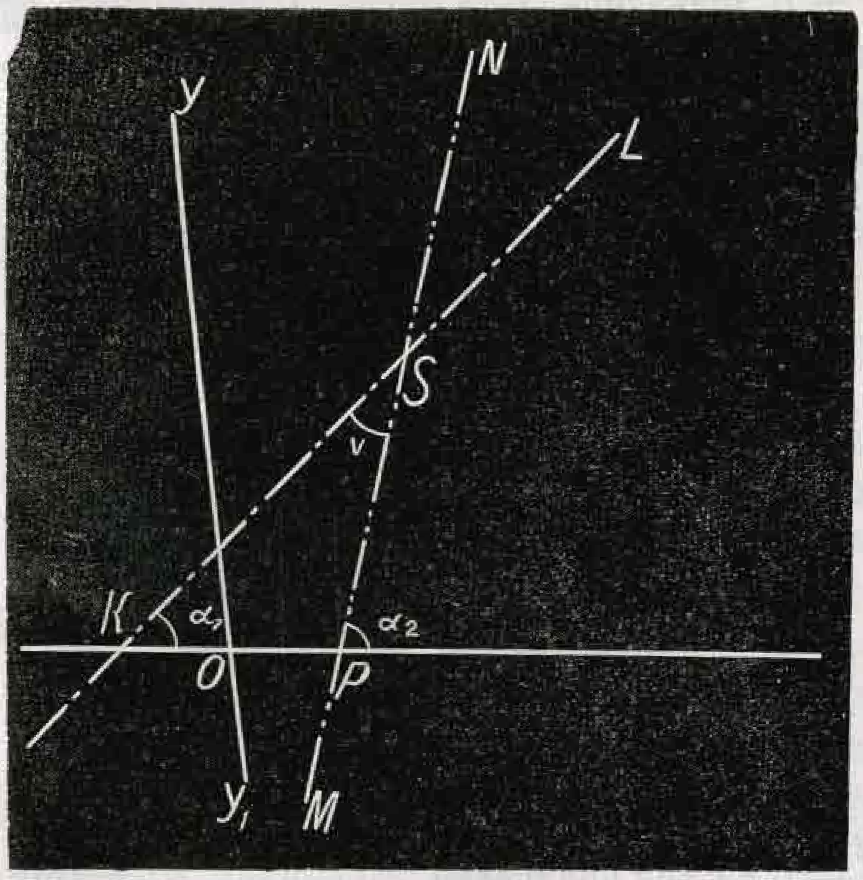
$$x = \frac{B_2 - B_1}{A_1 - A_2}$$; а с овом абсцисом из ма које од горњих једначина

$$y = \frac{A_1\,B_2 - A_2\,B_1}{A_1 - A_2}$$ *ордината пресека.*

За $A_2 = A_1$ следује и x и $y = \infty$, што потпуно одговара самој ствари, јер су у том случају дате пруге паралелне (напоредне).

За $A_2 = A_1$ и $B_2 = B_1$ показује се x и $y = \frac{0}{0}$, т. ј. као *не известни бројеви*; а и не може бити другаче, јер у том случају оне две пруге падају једна на другу и имају тако безбројно много заједничких тачака.

Сл. 18



2.) Нека су у слици 18. KL и MN оне две пруге што се секу, S њихов пресек, α_1 и α_2 относно нагиби њихови на абсцисну осу, v угао под којим се секу.

Из троугла KSP имамо $v = \alpha_2 - \alpha_1$, дакле

$$tg\ v = tg\,(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$= \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1 \,.\, tg\,\alpha_2}$$, или због $tg\ \alpha_1 = A_1$, $tg\ \alpha_2 = A_2$,

$$tg\,v = \frac{A_2 - A_1}{1 + A_1 A_2}.$$

Овим је задатак потпуно разрешен.

Ако су дате пруге напоредне, онда је $v = o$, дакле $tg\,v = o$ и зато $A_2 - A_1 = o$, или $A_1 = A_2$ *услов за паралелизам двеју пруга у равни.*

Ако су пак пруге између се управне, то је $v = 90^0$, дакле $tg\,v = \infty$ и зато $\frac{1 + A_1 A_2}{A_2 - A_1} = o$, а то ће рећи да је $A_1 = -\frac{1}{A_2}$ или $A_2 = -\frac{1}{A_1}$ *услов за две пруге, да стоје једна на другу управно.*

§. 48.

Задатак V. Да изнађемо једначину пруге, која сече неку дату пругу под извесним (уреченим) углом, а иде кроз неку дату тачку.

Нека је $y = Ax + B$ једначина дате пруге, t тангента угла под којим је сече тражена пруга, x_1 и y_1 нека су координате дате тачке кроз коју тражена пруга иде.

За то, што тражена пруга ваља да иде кроз дату тачку, њезина једначина по § 45. мора бити

$$y = \mathfrak{A}\,(x - x_1) + y_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\ (m.$$

За то пак, што се обе пруге секу, мора по пређашњем §-у да буде

$t = \frac{\mathfrak{A} - A}{1 + \mathfrak{A}A}$ или $t = -\frac{A - \mathfrak{A}}{1 + \mathfrak{A}A}$, прво ако је $\mathfrak{A} > A$, а друго ако је $\mathfrak{A} < A$, у опште дакле

$$\pm\ t = \frac{\mathfrak{A} - A}{1 + \mathfrak{A}A}.$$

Отуда следује

$\mathfrak{A} = \frac{A \pm t}{1 \mp A t}$, а с том вредности сачинилца $\mathfrak{A}$ по једначини (m.

$$y = \frac{A \pm t}{1 \mp At} \cdot (x - x_1)$$

као једначина пруге што она два стављена услова испуњује.

Са сваком абсцисом x добијамо из ове једначине две ординате y, што самој ствари потпуно одговара, јер доиста има две пруге које дату пругу секу под оним истим условима, једна с једне, друга с друге стране управне пруге, коју из задате тачке спустимо на задату пругу.

Ако тражена пруга ваља да је напоредна (паралелна) датој прузи, онда због $t = o$ имамо као *једначину пруге што иде кроз дату тачку напоредо са датом пругом*

$$y = A(x - x_1) + y_1 .$$

Ако ли пак тражена пруга ваља да је управна на дату пругу, онда због $t = \infty$ или $\frac{1}{t} = o$ следује

$$y = -\frac{1}{A}(x - x_1) + y_1$$

као *једначина пруге, која иде кроз дату тачку и стоји управно на дату пругу.*

§. 49.

Задатак VI. Да изнађемо даљину неке дате тачке (пречац) од какве дате пруге. Нека су координате дате тачке x_1 и y_1, једначина дате пруге $y = Ax + B$. Тад једначина траженога пречца по пређашњем §у мора бити

$$y = -\frac{1}{A}(x - x_1) + y_1$$

Али овде се не тражи једначина тога пречца, него његова дужина. Ову ћемо добити, ако најпре изнађемо његов пресек са датом пругом и после по § 13. определимо даљину дате тачке од тога пресека. Пресек, т. ј. његове координате нашли би, када би скопчали једначину дате пруге се једначином пречца. Но за оно што се тражи нису нам толико потребне те координате, колико разликеједноимених координата пресекових и дате тачке (§ 13.); зато да гледамо како ћемо добити те разлике без околиша.

Једначину дате пруге без стварне повреде можемо да представимо и овако

$$y = A(x - x_1) + Ax_1 + y_1 - y_1 + B.$$

Ова једначина, кад се по заједничкој тачци скопча са једначином пречца, даје

$$-\frac{1}{A}(x-x_1)=A(x-x_1)+Ax_1-y_1+B,$$

отуда пак следује

$$x-x_1=\frac{A(y_1-Ax_1-B)}{1+A^2},$$ а с овом разликом $(x-x_1)$

из једначине пречца

$$y-y_1=-\frac{y_1-Ax_1-B}{1+A^2}.$$

За то, ако ове разлике једноимених спрежница двеју тачака (оне дате и пресека управне из ње са датом пругом), којих се дањина тражи, узмемо у образац § 13., показује се та даљина

$$d=\frac{y_1-Ax_1-B}{\pm\sqrt{1+A^2}}.$$

Двоструки знак (±) у овоме изразу има тај смисао, што смо задатак сматрали у опште, дата тачка према датој прузи може двојако да лежи, т. ј. или с ове, или с оне стране од ње.

Ако је дата тачка координатни почетак, тад је, због $x_1=o$ и $y_1=o$, тражени пречац

$$d=\frac{-B}{\sqrt{1+A_2}},$$

ако пак дата пруга иде кроз координатни почетак, онда је због $B=o$ тражни пречац

$$d=\frac{y_1-Ax_1}{\sqrt{1+A_1}}.$$

§. 50.

Из једначине пруге за ортогоналну систему можемо претварањем координата да направимо једначину исте пруге за ма какву другу систему, паралелну косоуглу или поларну. Тај посао остављам ученицима на вежбање и препоручујем им, да после подвргну нове једначине онаком претресу, као што је овде чињен са једначином пруге у ортогоналној системи, те да се тако увере е да ли и нове једначине потпуно карактеришу пругу у сваком можном положају, и само њу.

Б.) Влаци 2. реда.

а.) Њихова једначина у опште. Парабола, Елипса и Ипербола.

§. 51.

За изналазак влакова друга реда узмемо потпуну једначину друга ступња између два премењљива броја, који заступају координате, испитамо све можне облике те једначине и определимо после влакове, што ти њезини поједини облици престављају Колико различних влакова на тај начин пронађемо, толико влакова друга реда, и само толико има у опште.

За олакшицу у послу служимо се и при томе ортогоналном координатном системом, а после, ако је потребно, прелазимо са те системе на друге, простим претварањем координата.

§. 52.

Престављајући са *u* сваку абсцису, а са *z* сваку ординату влакова друга реда, имамо као потпуну једначину друга ступња што све те влакове садржи,

$$az^2 + bu^2 + cuz + dz + eu + f = o \;.\;.\;,\;,\;.\;.\; (*.$$

у којој су сачинилци a, b, c, d, e и f стални бројеви.

Из те једначине следује

$$z^2 + \frac{b}{a}u^2 + \frac{c}{a}uz + \frac{d}{a}z + \frac{e}{a}u + \frac{f}{a} = o \;\;.\;.\;.\;.\; (**.$$

или ако ставимо

$$-\frac{b}{a} = \alpha,\;\; -\frac{c}{a} = \beta,\;\; -\frac{d}{a} = \gamma,\;\; -\frac{e}{a} = \delta,\;\; \frac{f}{a} = \varepsilon, \;.\;.\;.\;.\; (m$$

$$z^2 - (\beta u + \gamma)\, z - (\alpha u^2 + \delta u + \varepsilon) = o \;\;.\;.\;.\;.\; (***.$$

где α, β, ... ε престављају опет сталне бројеве.

У теорији виших једначина видели смо како се други члан уређене таке једначине уклања. У ту цељ ваља нам овде узети

$$z = y + \frac{\beta u + \gamma}{2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (n.$$

Том заменом добијамо нову једначину место пређашњих

$$y^2 - (\alpha + \frac{\beta^2}{4})\, u^2 - (\delta + \frac{\beta\gamma}{2})\, u - (\varepsilon + \frac{\gamma^2}{4}) = o,$$

или ако још ради краткоће метнемо

$$\alpha+\frac{\beta^2}{4}=A,\quad \delta+\frac{\beta\gamma}{2}=B,\quad \varepsilon+\frac{\gamma^2}{4}=C\ \ldots\ldots\ (p.,$$

$$y^2=Au^2+Bu+C\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\dagger.$$

Но и од ове једначине, која потпуно замењује прву (*) под условима m, n и p, можемо да направимо простију истога значења. У ту цељ метнемо

$$u=\frac{2v}{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (q,$$

где u заступа сталан број. Постаје

$$y^2=\frac{4A}{n^2}\cdot v^2+\frac{2B}{n}\cdot v+C\ \ldots\ldots\ldots\ (\dagger\dagger.$$

Почем је у овој једначини број C сталан, то за $y=o$ не може да буде и $v=o$. Но y као заменица првобитне ординате може бити сваке вредности, па и o. Последња једначина дакле постоји при свакој вредности ординате y, па и при $y=o$, али да стоји и за ову последњу вредност мора да је

$$\frac{4A^2}{n^2}\cdot v^2+\frac{2B}{n}\cdot v+C=o,$$ што показује да је

$$v=n\,.\,\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{4A}\ \ldots\ldots\ (r.$$

Ово v замењује начином по (q. првобитну абсцису u, а има као што видимо две вредности. Добили смо га за $y=o$, то ће рећи за пресек влака (или влакова) с абсцисном осом.

По томе сви влаци друга реда, које претставља првобитна једначина (*) секу абсцисну осу два пута, на два места.

Однесимо те влакове, т. ј. њихову једначину (††) на ма који од та два пресека као почетак, н. п, узмимо

$$v=x+\frac{n\left(\sqrt{B^2-4AC}-B\right)}{4A};$$ бива

$$y^2=\frac{4A}{n}\cdot x^2+\frac{2\sqrt{B^2-4AC}}{n}\ x,$$

или ако још узмемо

$$\frac{4A}{n^2}=E,\quad \frac{2\sqrt{B^2-4AC}}{n}=D\ \ldots\ldots\ (s.$$

$$y^2=Ex^2+Dx.$$

И тако сада ова једначина стоји место прве (*) и преставља као и она *све* влакове друга реда, али не више у првој системи, него у другој, такођер ортогоналној, с почетком у пређашњој абсцисној оси. Што год дакле дознамо за влакове друга реда из ове последње једначине, стоји као да смо то дознали непосредно из оне прве.

§. 53.

Израз $\sqrt{B^2 - 4AC}$ у пређашњој једначини мора свагда да је доисна (реална) количина, иначе је y имађинарно, у ком случају о каквом влаку не може бити више никаква говора.

Али да $\sqrt{B^2 - 4AC}$ буде доисна количина мора да је $B^2 > 4AC$.

Осем тога E и D у општој једначини влакова друга реда могу бити свакојаке доисне вредности, положне, одречне, па и *o*. Но када би било $D = o$, онда $y^2 = Ex$, дакле $y = x\sqrt{E}$ није више једначина друга ступња, и за то тај случај мора се изузети од сваке даље истраге.

По овим примедбама имамо свега само ових 6 случајева:

1.) $y^2 = Dx$ 3.) $y^2 = Ex^2 + Dx$ 5.) $y^2 = -Ex^2 + Dx$
2.) $y^2 = -Dx$ 4.) $y^2 = Ex^2 - Dx$ 6.) $y^2 = -Ex^2 - Dx$.

Како пак за одречно x од друге једначине постаје прва, од 4. трећа, а од 6. пета, то нам остају као стварно различне и даљем испиту подлежеће једначине само ове три:

I.) $y^2 = Dx$
II.) $y^2 = Dx^2 - Ex^2$
III.) $y^2 = Dx + Ex^2$

Покаже ли се у њиховом испиту да свака претставља други влак, то ће тиме бити доказано да влакова друга реда има само три. Услове пак за сваки од тих влакова дознајемо из првобитне једначине (*), ако E изразимо чрез сачинилце те једначине. Како то можемо да урадимо показаће следећи §.

§. 54.

Имали смо под (*s*. у §. 53. $E = \frac{4A}{n^2}$. Но под (*p*. истога §-а узели смо $A = \alpha + \frac{\beta^2}{4}$, а под (*m*. број $\alpha = -\frac{b}{a}$ и $\beta = -\frac{c}{a}$.

Дакле је $A = \frac{c^2}{4a^2} - \frac{b}{a}$, тако пак

$$E = \frac{4}{n^2}\left(\frac{c^2}{4a^2} - \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{n^2a^2}\cdot(c^2 - 4ab)$$

По једначини I.) је $y^2 = Dx$, дакле $E = o$. С тога за ту једначину мора бити $c^2 = 4ab$.

За једначину II.) $y^2 = Dx - Ex^2$ број E мора бити одречан, а то не може бити иначе, него да је $c^2 < 4ab$.

Најпосле за једначину III.) $y^2 = Dx + Ex^2$ број E треба да је положан, што не може бити другаче, осем ако је $c^2 > 4ab$.

Из овога се види да разлика између влакова друга реда (ако у опште између њих има какве разлике) долази само од сачинилаца оних чланова у општој једначини друга ступња $az^2 + bu^2 + cuz + dz + eu + f = o$, који су баш тога ступња, т. ј. од a, b и c. Остали пак сачинилци те једначине, да био каквом влаку друга ступња у опште могло бити говора, морају стајати између се у такој размери, да је $B^2 > 4AC$ (§. 53.). Да ли пак влак друга реда потпада једначини I. II. или III.? то зависи цигло од тога: да ли је $c^2 \begin{matrix}=\\<\\>\end{matrix} 4ab$, т. ј. да ли је квадрат сачинилца уз производ координата zu раван, мањи или већи од четвороструког производа из сачинилаца оних чланова, што садрже квадрате координата, z^2 и u^2. Кад постоји прво, влак подлежи једначини I.; кад постоји друго, влак потпада једначини II., а кад постоји треће, онда влак иде под једначину III.

Сад испитајмо сваку ових једначина на по се.

§. 55.

I.) $y^2 = Dx$.

Напоменуто је већ у §. 52. да радимо у системи паралелној ортогоналној, а из претходнога посла знамо да y преставља у опште ординате, x абсцисе влакова.

1.) Из преузете једначине следује

$$y = \pm\sqrt{x}$$

Свака ордината дакле има две, по величини једнаке, по знаку пак различне вредности, т. ј. за свако x добијамо два y: једно положно изнад абсцисне осе, а друго онолико исто одречно испод те осе. По томе влак, кога преставља једначина $y^2 = Dx$, има два потпуно једнака, према абсцисној оси једнако положена дела: један на положној страни ординатне осе (изнад абсцисне осе), а други на одречној страни ординатне осе (испод абсцисне.)

2.) За $x = o$ бива и $y = o$, а то је знак: дк дотични влак иде кроз координатни почетак.

3.) Што год је x веће, то веће је и y; влак се дакле с већом абсцисом од абсцисне осе све већма удаљује до у безкрајност.

4.) За одречно x бива $y = \sqrt{-Dx}$, т. ј. имађинарно. Влак дакле нема ни шта своје на одречној страни абсцисне осе. Најпосле

5.) Кад положна абсциса постане $= \frac{1}{4} D$, т. ј. четвртина броја D, који је сталан, постаје ордината

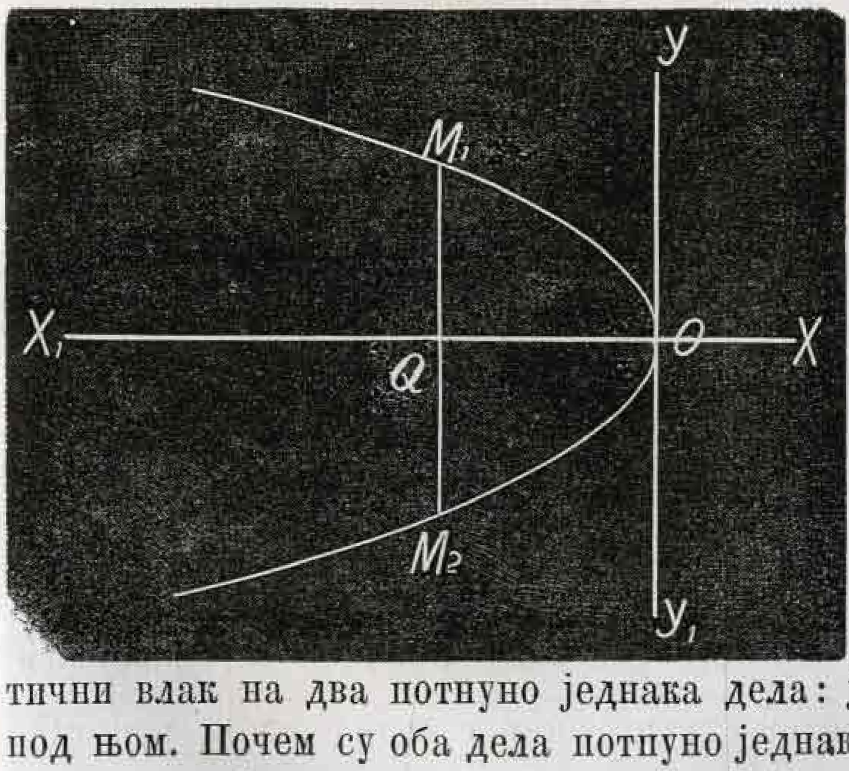
$$y = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} D^2} = \pm \tfrac{1}{2} D.$$

Влак друга реда оваких својстава зове се *Парабола*, а стални број D у једначини тога влака зове се *параметар*. Најпосле пруга што раздваја Параболу на два потпуно једнака, противно положена дела (абсцисна оса) зове се параболина *оса*, а тачка те осе, где Парабола прелази с једне стране на другу, зове се *теме* или врх параболин.

Још напомињем да се једначина Параболе обично преставља у овом виду $y = \sqrt{Dx.}$

Слика 19. покасује тај влак.

Сл. 19.



§. 56

II.) $y^2 = Dx - Ex^2$.

1.) Из ове једначине следује

$$y = \pm \sqrt{\mathrm{Dx} - \mathrm{Ex}^2},$$

а то показује, да свакој абсциси одговарају *две*, по величини једнаке, а по знаку (положају) различне ординате, дакле да абсцисна оса раздваја дотични влак на два потпуно једнака дела: један више ње, други под њом. Почем су оба дела потпуно једнака, то ћемо даље сматрати само један, јер што за тај део дознамо важи и за онај други. Узмимо онај што одговара ординатама $y = + \sqrt{\mathrm{D}x - Ex^2}$

2.) За $x = o$ бива $y = o$, а то је знак, да влак кога преставља једначина II.) иде кроз координатни почетак. Но поткорени број можемо да пишемо још и овако: $x\,(D - Ex)$. Ордината y дакле постаје $= o$ не само при $x = o$, него и за $D - Ex = o$, т. ј. за $x = \frac{D}{E}$. По томе дотични влак сече абсцисну осу на два места, један пут при $x = o$, а други пут при $x = \frac{D}{E}$.

Ово је $\frac{D}{E}$ сталан број, преставља дакле пругу извесне дужине, узмимо ју $= a$. Влак дакле сече абсцисну осу у оба два краја те пруге a.

3.) Ставимо у изразу под 1.) место $\frac{D}{E}$ равни му број a; постаје

$$y = \sqrt{E\,(ax - x^2)}.$$

Нашли смо да је y како при $x = o$, тако и при $x = a$ нула. Морамо се дакле питати: а какво је y за друга x што леже између $x = o$ и $x = a$?

Очевидно ордината донекле расте, а после се опет смањује до o; за које је x дакле ордината y највећа?

Предстојећи израз показује да ће y бити највеће, када буде $E(ax - x^2)$ највеће, или (за то што је E сталан број,) када $(ax - x^2)$ постаје највеће, а то бива при $x = \frac{a}{2}$. Највећа је ордината дакле у половини оне пруге a, што раздваја оба влакова пресека с абсцисном осом, т. ј. кад абсциса x буде равна половини те пруге. Та највећа ордината је $y = \frac{1}{2}\, a \sqrt{E}$.

По томе влак што преставља једначина II.) полази од координатнога почетка с ординатом $y = o$, удаљујући се од абсцисне осе све већма, док ордината у половини пруге a (која је у абсцисној оси) не постане $y = \frac{1}{2}\, a \sqrt{E}$; одатле почиње опет слазити ка абсцисној оси, док ју за $x = a$ не пресече с ординатом $y = o$. Ту почне слазити под абсцисну осу и удаљује се од ње све више, док ордината (сада одречна) не постане опет $y = \frac{1}{2}\, a \sqrt{E}$; одатле се опет све више примиче абсцисној оси док с ординатом $y = o$ не стигне опет у координатни почетак.

4.) Као што видимо међусобно отстојање оних влакових тачака што су од абсцисне осе највећма удаљене, износи две највеће ординате, т. ј. $a\sqrt{E}$. Овај је број сталан и можемо га заменути другим простијим, н. п. b, тако да имамо $a\sqrt{E}=$ b и отуда

$$E=\frac{b^2}{a^2}\,.$$

С овом вредности E прима једначина коју претресамо облик

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{ax-x^2}\,.$$

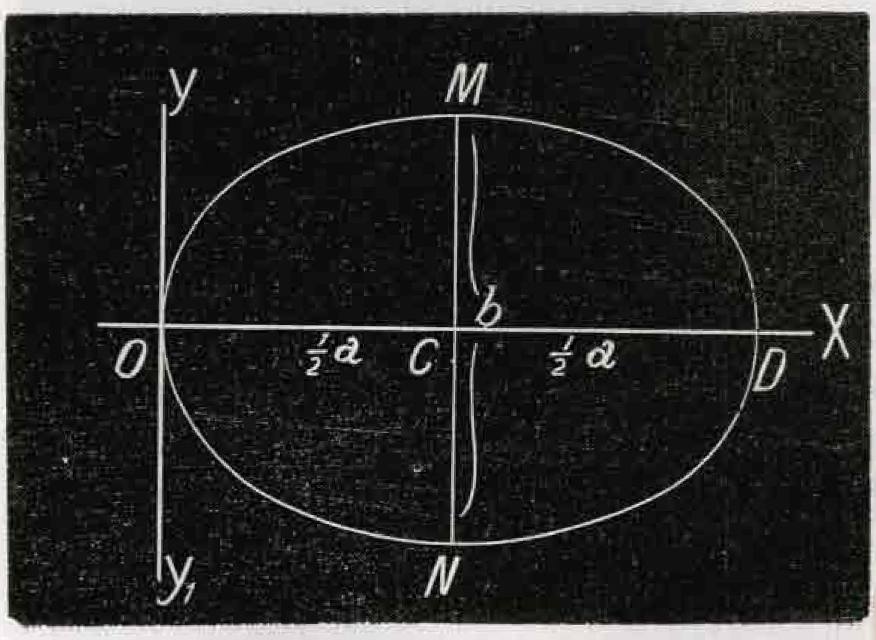
5.) Са одречним x постаје $y=\frac{b}{a}\sqrt{-(ax+x^2)}$ имађинарно, што је знак да од влака што претставља једначина II.) на одречној половини абсцисне осе нема ни чега.

За положно x показује се тај влак дотле само као можан, док је $(ax-x^2)$ положно, дакле $x<a$; чим би пак било $x>a$, с места опет не може бити више говора о каквом влаку.

По томе влак кога претставља једначина $y=\frac{b}{a}\sqrt{ax-x^2}$, или (у првобитном облику) једначина $y^2=Dx-Ex^2$, постоји само на положној половини абсцисне осе од $x=o$, па до $x=a$, враћа се у самога себе и дакле је потпуно омеђашен. Ово га последње својство стварно разликује од Параболе, која се, као што смо видели, са своја два једнака крака пружа у безкрајност.

Влак оваких својстава (1. до 5.) зове се *Елипса.* Даље називамо пругу a његовом *великом осом*, а двоструку његову највећу ординату b његовом *малом осом.* Тачке његове где сече абсцисну осу (дакле крајеви његове велике осе) зову се *темена* или врхови елипсе, најпосле стални број D у елипсиној једначини назива се њезиним *параметром.* Слика 20. представља такав влак.

Сл. 20.



Било је $D=aE=\frac{b^2}{a}$. Отуда следује $b = \sqrt{a\mathrm{D}}$, а то показује: да је мала елипсина оса средња геометријска сразмерница између параметра и велике осе.

§. 57.

III.) $y^2 = Dx + Ex^2$.

1.) Из ове једначине следује

$$y = \pm \sqrt{Dx + Ex^2},$$

што показује да свакој абсциси одговарају две, по величини једнаке, а по знаку различне, дакле противно положене ординате, тако да влак што претставља једначина III.) има два потпуно једнака дела: један изнад абсцисне осе, а други под њом. С тога сматраћемо даље само један од њих, и то онај што одговара једначини

$$y = + \sqrt{Dx + Ex^2}\cdot$$

2.) За $x = o$ постаје и $y = o$, а то је знак да дотични влак иде кроз координатни почетак.

3,) За свако положно x положно је и y и све веће, што је веће x. Влак овај дакле полази од координатнога почетка у положну страну абсцисне осе са два потпуно једнака крака у бескрајност, један изнад абсцисне осе, други под њом.

4.) Ако узмемо x одречно, добијамо $y = \sqrt{-\mathrm{D}x + Ex^2} = \sqrt{x\,(Ex - \mathrm{D})}$, из чега се види да ордината y не постаје 0 само за $x = o$, него и за $Ex - D = o$, т. ј. за $x = \frac{D}{E}\cdot$ По томе влак сече абсцисну осу на два места: једанпут у координатном почетку (види 2.) а други пут на одречној страни абсцисне осе у даљини $\frac{D}{E}$ од почетка.

Узев опет $\frac{D}{E} = a$ имамо као једначину влака за одречне абсцисе

$$y = \sqrt{E\,(x^2 - ax)},$$

За $x <$ а, дакле за $\mathrm{D}x > Ex^2$ појављује се поткорени број одречан, зато y имађинарно и с тога влак не можан. По томе са одречним абсцисама мањима од a не добија се ни каква влакова тачка, или од $x = o$ па до $x = -a$ нема ни шта од влака. У $x = -a$ влак сече абсцисну осу по други иут. За одречно x пак $> a$, дакле $Ex^2 > Dx$ постаје поткорени број опет положан, дакле y опет можно и све веће, што год је (одречно)

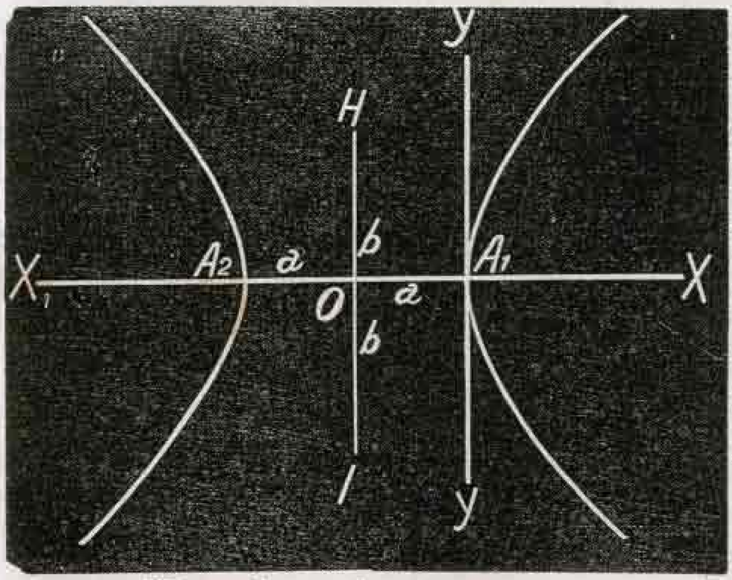
x веће од a. На одречној страни абсцисне осе од $x > a$ има даке опет влака, који се и у ту страну са два потпуно једнака крака: један озго, други оздо, све већма удаљује од абсцисне осе до у безкрајност.

5.) Узев $\sqrt{aD} = b$, дакле $D = \frac{b^2}{a}$ имамо због $a = \frac{D}{E}$, број $E = \frac{b^2}{a^2}$. С овим вредностима за D и E прима једначина што је у испиту облик

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x\,a + a^2}.$$

Влак ових својстава зове се *Иперболa*. Број и пруга a, т. ј. растојање оба влакова пресека с абсцисном осом, зове се *велика оса*. Стални број $D = \frac{b^2}{a}$ зове се *параметар*, а број $b = \sqrt{aD}$, прем да изнад велике осе од влака ни шта нема, зове се (због сличности с Елипсом) *мала оса* и постројава се такођер у половини велике осе a управно на ову, као при Елипси, пола изнад, а друга пола испод велике осе.

Та Иперболина мала оса по горњему (види 5.) није ни шта друго, но средња геометријска сразмерница између параметра D и велике осе a.


Сл. 21

По свему томе Иперболa је влак, који има четири истоветна крака: два изнад абсцисне осе, десно и лево од ординатне осе по један, у међусобном растојању a од почетка, до у бескрајност, а два онака иста испод абсцисне осе у оноликом истом растојању један од другога и такођер до у бескрајност. Укупно дакле Иперболa је влак од два потпуно једнака дела у међусобном растојању a, један десно, други лево од ординатне осе, који иду на обе стране до у бескрајност, и које абсцисна оса тако сече, да од свакога половина лежи изнад ње, а половина испод ње. Слика 21. преставља такав влак.

§. 58

Овај се трећи влак такођер стварно разликује од два пређашња, и тако влакова друга реда има свега три: Парабвла, Елипса и Ипербола, а престављају их односно једначине I.) II.) и III.) §. 54.

Ти се влаци обично зову још и *конусови пресеци*. Показаћу доцније за што? Овде само још напомињем о потпуној уређеној једначини друга ступња

$$y^2 + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y + \delta x + \varepsilon = o$$

ово: ако се полином таке једначине може разлучити у два чинилца $(y + Ax + B)\,(y + ax + b) = o$, онда она не представља више ни какав влак друга реда, него две пруге, Ово увиђамо отуда, што у таком случају полином једначине може да буде $= o$ како због

$y + Ax + B = o$, тако и због

$y + ax + b = o$, а свака ових једначина за се представља једну пругу.

§. 59.

Нађене јеоначине за Параболу, Елипсу и Иперболу стоје за ортогалну паралелну систему, где је координатни почетак био: при Параболи у њеном (једином) темену, при Елипси у њезином левом темену, а при Иперболи у њезином десном темену. Но једначина Елипсина и једначина Иперболина показују се нешто простије, кад почетак координата лежи у половини (средини) велике осе, и због тога се та два влака по највише сматрају у такој системи. Нужно је дакле да једначину Елипсе и једначину Иперболе удесимо за ортогоналну систему с почетком у средини велике осе. Тај је посао врло прост.

Означујући нове координате са x_1 и y_1, имамо по §. 34. због $\alpha = \frac{1}{2}\,a$, $\beta = o$ и $v = o$: за Елипсу

$$x = \frac{1}{2}\,a + x_1 \quad \text{и} \quad y = y_1\,,$$

а за Иперболу $x = x_1 - \frac{a}{2}$ и $y = y_1$, тако да кад ове вредности узмемо у једначини Елипсе и Иперболе (§§ 57. и 58.) следује за Елипсу $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{4} - x_1{}^2}$, а за Иперболу $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x_1{}^2 - \frac{a^2}{4}}$

Да би ове једначине биле простије уводимо место целих оса a и b њихне половине, узев $\frac{a}{2}=\alpha$ и $\frac{b}{2}=\beta$, и после изоставимо сказаљке координата. На тај начин добијамо као једначину Елипсе у ортогоналној системи, где је почетак у половини велике осе,

$$y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2},$$

а као таку исту једначину Иперболе

$$y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}.$$

Ове једначине претстављају се често још и у овакоме виду

$\alpha^2y^2+\beta^2x^2=\alpha^2\beta^2$ Елипсина,

$\alpha^2y^2-\beta^2x^2=-\alpha^2\beta^2$ Иперболина, или

$\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{x^2}{\alpha^2}=+1$ Елипсина,

$\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=-1$ Иперболина.

§. 60.

Пренесимо сада сва три влака друга реда, т. ј. Елипсу, Иперболу и Параболу у поларну систему.

Ту се прелази из ортогоналне системе у поларну, а постављамо услов, да полус буде у старом почетку, поларна оса у ортогоналној абсцисној оси. Имамо дакле у једначинама оних влакова да узмемо по § 31. $x=r.\cos u$ и $y=r.\sin u$, где r значи потег, а u поларни угао.

Из једначине §. 57. следује као *поларна једначина Елипсе*, кад је полус у левом темену, а велика оса у поларној:

$$r=\frac{ab^2.\cos u}{a^2.\sin^2 u+b^2.\cos^2 u}=\frac{ab^2.\cos u}{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 u},$$

из једначине §. 58. пак као *поларна једначина Иперболе*, кад је полус у десном темену, а велика оса у поларној:

$$r=\frac{-ab^2.\cos u}{a^2\sin^2 u-b^2.\cos^2 u}=\frac{-ab^2.\cos u}{a^2-(a^2+b^2)\cos^2 u}$$

Исто тако добијамо из једначина §. 59. као поларну једначину Елипсе, кад је полус у половини велике осе и ова оса у поларној:

$$r=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)\,sin^2 u}}=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-(\alpha^2-\beta^2)\,cos^2 u}},$$

а као таку исту поларну једначину Иперболе:

$$r=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)\,sin^2 u}}=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\,cos^2 u-\alpha^2}}.$$

Најпосле из једначине § 55. следује са горњим вредностима за x и y као *поларна једначина Параболе*, кад је полус у темену а поларна оса у параболиној:

$$r=D.\frac{cos\ u}{sin^2 u}=D.\frac{cos\ u}{1-cos^2 n}.=D.\frac{\sqrt{1-sin^2 u}}{sin^2 u}.$$

б) Пресеци конуса.

§. 61.

Познато је да конусом у најширем смислу називамо тело обухваћено кривом површином, која је постала од обртања неке бескрајне пруге око једне своје тачке као не покретне, идући једнако по неком утврђеном влаку. При томе она пруга што се обртала зове се *производница*, њезина стална тачка око које се обртала зове се *врх*, а влак по коме је производница ишла зове се *основа* конусова.

Сваки конус има два једнака дела, који се од врха пружају у бескрајност.

Пруга која иде кроз врх и средиште основе зове се конусова оса.

Сваки пресек конуса каквом равни, која иде кроз врх и сече обе конусове половине састоји се из два троугла, који се сучељују у конусовом врху и којих су две стране два различна производничина положаја, а трећа им страна лежи у бескрајности. Ако такав пресек иде кроз осу, онда се он сам назива *главним пресеком*, а његове две производнице *главним производницама*.

Кад је главни пресек управан на основу, конус зове се *прав*, иначе је *кос*.

Кад је основа права конуса круг, онда конус назива се *кружним*.

Осем кроз осу можемо конус сећи каквом равни још на *тројак* други начин: 1.) раван сече само једну конусову половину паралелно једној главној производници; 2.) раван сече опет само једну конусову половину, али не паралелно ни с којом главном производницом; 3.) раван сече обе конусове половине под вољним углом према главним производницама.

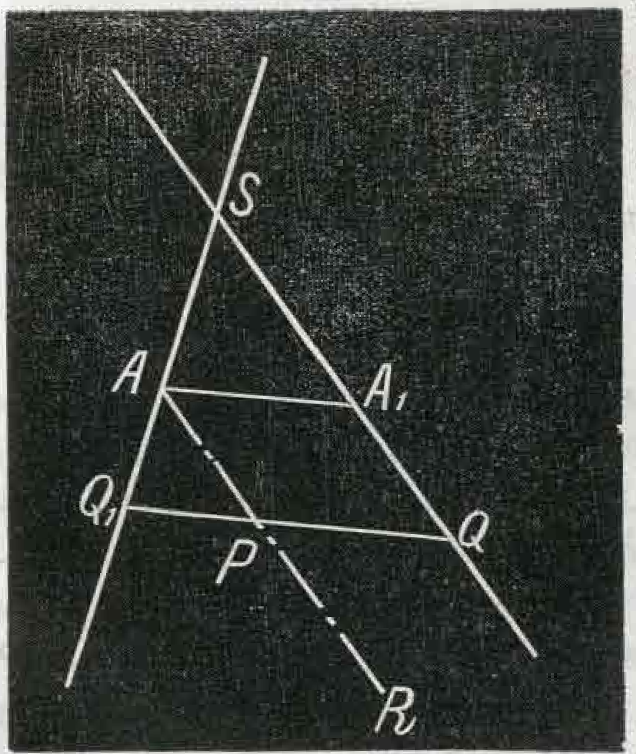
У следећим §§ ма испитаћемо влакове што постају на површју кружна конуса, секућ га на поменута три начина, приметив још да други пресек, кад су угли према главним производницама једнаки, испада онакав као што је сама основа, дакле, такођер круг; зато тај особити случај не може да буде предмет наговештног нашег следећега посла.

§. 62.

На ма који од поменута три начина секли кружан конус каквом равни, свакад имаће један главан пресек на који је та раван управна.

Нека у сл. 22. представља QSQ_1 такав пресек и у њему S врх конуса, а SQ и SQ_1 главне производнице. Осем тога нека буде AP пресек тог главнога пресека и секуће равни, *паралелне* главној произвоници SQ. Ова пруга AP биће у главном пресеку у једно и оглед (пројекција) онога влака, што је секућа раван произвела на конусовом површју. Даље нека је AA_1 у главном пресеку паралелна пруга основи конусовој. P биће оглед неке тачке онога влака. Повуцимо кроз P још једну пругу QQ_1 паралелну основи. Ово QQ_1 биће по пређашњем §-у у једно оглед и пречник онога круга што иде кроз P паралелно основи. Управна дакле, која преноси дотичну тачку влака у P, као управна једне тачке тога круга на пречник, средња је геометријска сразмерница између оба пречникова дела PQ и PQ_1.

Сл. 22.



Узмимо A за почетак ортогоналне системе, а пругу AR за абсцисну осу. Биће $AP = x$ абсциса у P пренесене или огледане влакове тачке, а пређашња управна њезина ордината y Имамо дакле

$$y^2 = PQ \,.\, PQ_1 \text{, или због } PQ = AA_1 \text{,}$$

$$y^2 = AA_1 \,.\, PQ_1 \text{, или ако ставимо } AA_1 = 2m \text{,}$$

$$y^2 = 2m \,.\, PQ_1 \text{;}$$

Но из троуглова Q_1PA и AA_1S имамо

$$PQ_1 = AA_1 \,.\, \frac{AP}{A_1S} = \frac{2m}{A_1S} \,.\, x$$

или ако још узмемо $A_1S = 2n$,

$$PQ_1 = \frac{2m}{2n} . x = \frac{m}{n}\, x \text{, дакле}$$

$$y^2 = \frac{2m^2}{n} \,.\, x \text{, или ако најпосле метнемо } \frac{2m^2}{n} = D \text{,}$$

$$y^2 = Dx \text{,}$$

а то је по §-у 55. једначина Параболе.

По томе *раван, која конус пресеца паралелно једној његовој главној производници, производи на његовом поврију Параболу.*

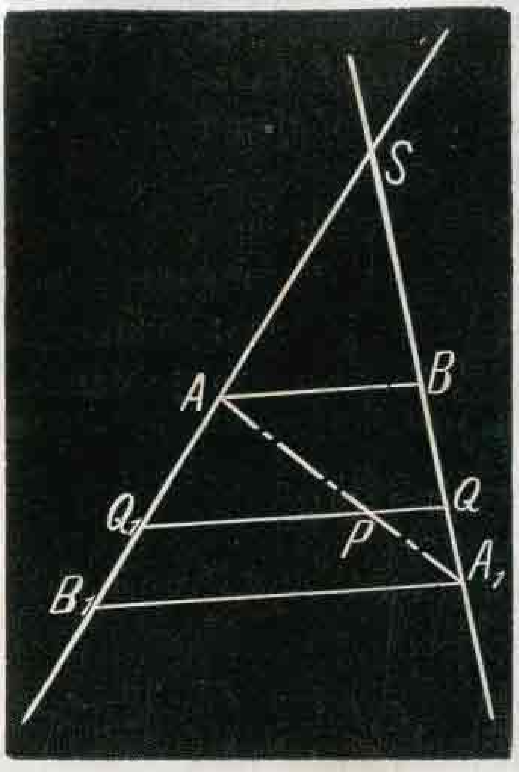
§. 63.

Нека у Сл. 23. преставља SA_1B главан пресек, S врх конуса, AA_1 пресек управне једне равни на главни пресек са овим пресеком, у једно оглед влака што на поврију конуса постаје. AB и A_1B_1 нека су огледи, уједно пречници два паралелна круга конусовој основи; најпосле нека је P оглед једне тачке онога влака на конусовом поврију. Још повуцимо кроз P пругу $QQ_1 \parallel AB$ и A_1B_1. Ова пруга QQ_1 биће такођер пречник и оглед једнога круга на конусовом поврију.

Сад метнимо $AB = 2r$, $A_1B_1 = 2r_1$. Управна што преноси ону влакову тачку на главни пресек у P биће у једно управна на пречник круга, огледаног у QQ_1 и зато ако ју назовемо y,

$$y = PQ.\, PQ_1 \,.$$

Сл. 23.



Метнимо даље $AA_1 = 2\alpha$ и узмимо то AA_1 за абсцисну осу, а тачку A за почетак; биће

$AP = x$ абсциса оне у P пренесене влакове тачке, а y њезина ордината.

Из подобних троуглова AQ_1P и AB_1A_1 следује

$$PQ_1 = \frac{A_1B_1}{AA_1} . AP = \frac{r_1}{\alpha} . x$$

Исто тако из подобних троуглова A_1PQ и A_1AB следује

$$PQ_1 = \frac{AB}{AA_1} . A_1P = \frac{r}{\alpha}(2\alpha - x).$$

Дакле ако ове вредности за PQ и PQ_1 ставимо у горњу једначину, видимо да је

$$y^2 = \frac{rr_1}{\alpha^2} . (2\alpha x - x^2),$$ или ако поставимо $rr_1 = \frac{1}{4}\, b^2$

а $\alpha = \frac{1}{2}\, a$,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} . (ax - x^2),$$ дакле

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{ax - x^2},$$

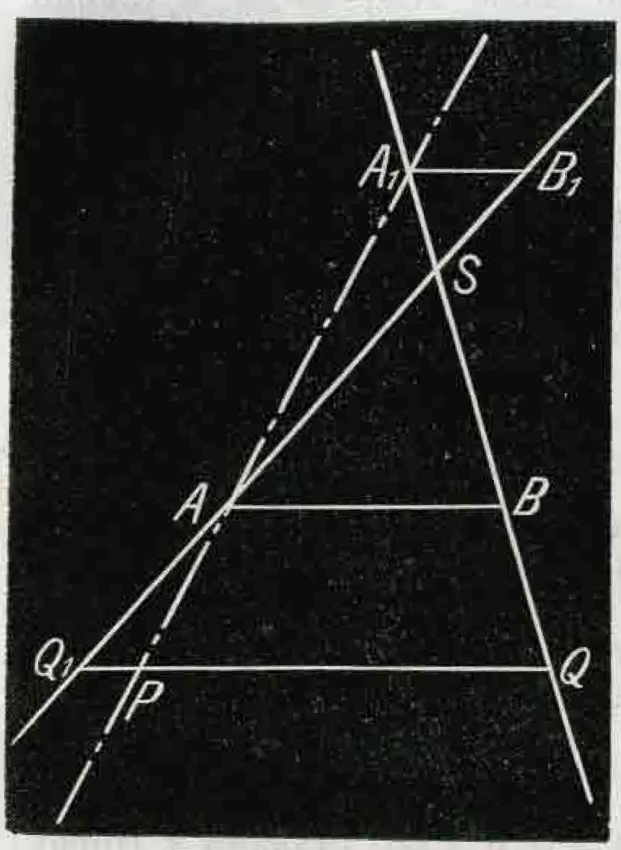
а ово је по §. 56. једначина Елипсе.

По томе *влак на површју конуса, добијен од равни која сече једну његову половину под вољним углима према главним производницама, није ни шта друго него Елипса.*

§. 64.

Најпосле нека је у Сл. 24. A_1SQ и B_1SQ_1 опет главан пресек A_1AP оглед нађ управна пресека од неке равни, која сече обе конусове половине. AB, A_1B_1 и QQ_1 преставлају основи конусовој

Сл. 24.



паралелне пресеке, дакле кругове. и уједно пречнике тих кругова P је оглед неке тачке пресечнога влака, добијеног на површју конуса.

Управна којом се та тачка огледа у тачци P главнога пресека, управна је на пречник у кругу QQ_1, за то, ако је означимо с y,

$$y^2 = PQ \cdot PQ_1.$$

Из троуглова A_1AB и A_1PQ следује

$$PQ = \frac{AB}{AA_1} \cdot A_1P,$$

из троуглова пак APQ_1 и AA_1B

$$PQ_1 = \frac{A_1B_1}{AA_1} \cdot AP.$$

Узев A_1AP за абсцисну осу пресечнога влака на површју конуса, A за почетак, биће $AP = x$ абсциса у P огледане тачке тога влака, а y њезина ордината. Поставимо $AB = 2r$, $A_1B_1 = 2r_1$ и $AA_1 = 2\alpha$. Имамо

$$PQ = \frac{r}{\alpha} \cdot (2\alpha + x)$$

$$PQ_1 = \frac{r_1}{\alpha} \cdot x, \text{ дакле}$$

$$y^2 = \frac{rr_1}{\alpha^2} \cdot (2\alpha x + x^2),$$

или ако најпосле још ставимо $rr_1 = \frac{1}{4} b^2$, а $\alpha = \frac{1}{2} a$,

$$y^2 = \frac{b^2}{\alpha^2} (ax + x^2), \text{ т. ј.}$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{ax + x^2},$$

а то је по §-у 57. једначина Иперболе.

По томе *влак на површју конуса, добијен од једне равни која сече обе његове половине, није ни шта друго него Ипербола.*

§. 65.

Резултати §§. 62., 63. и 64. јесу узроци зашто се влаци друга реда, т. ј. парабола, елипса и ипербола називају пресецима конусовим.

в.) **Даље посматрање влакова друга реда.**

α.) ПАРАБОЛА.

§. 66.

По § 55. једначина параболе је $y^2 = Dx$ или $y = \sqrt{Dx}$, где y и x престављају опште спрежнице, а D параметар.

Из те једначине види се да је свака ордината средња геометријска сразмерница између припадајуће јој абсцисе и параметра.

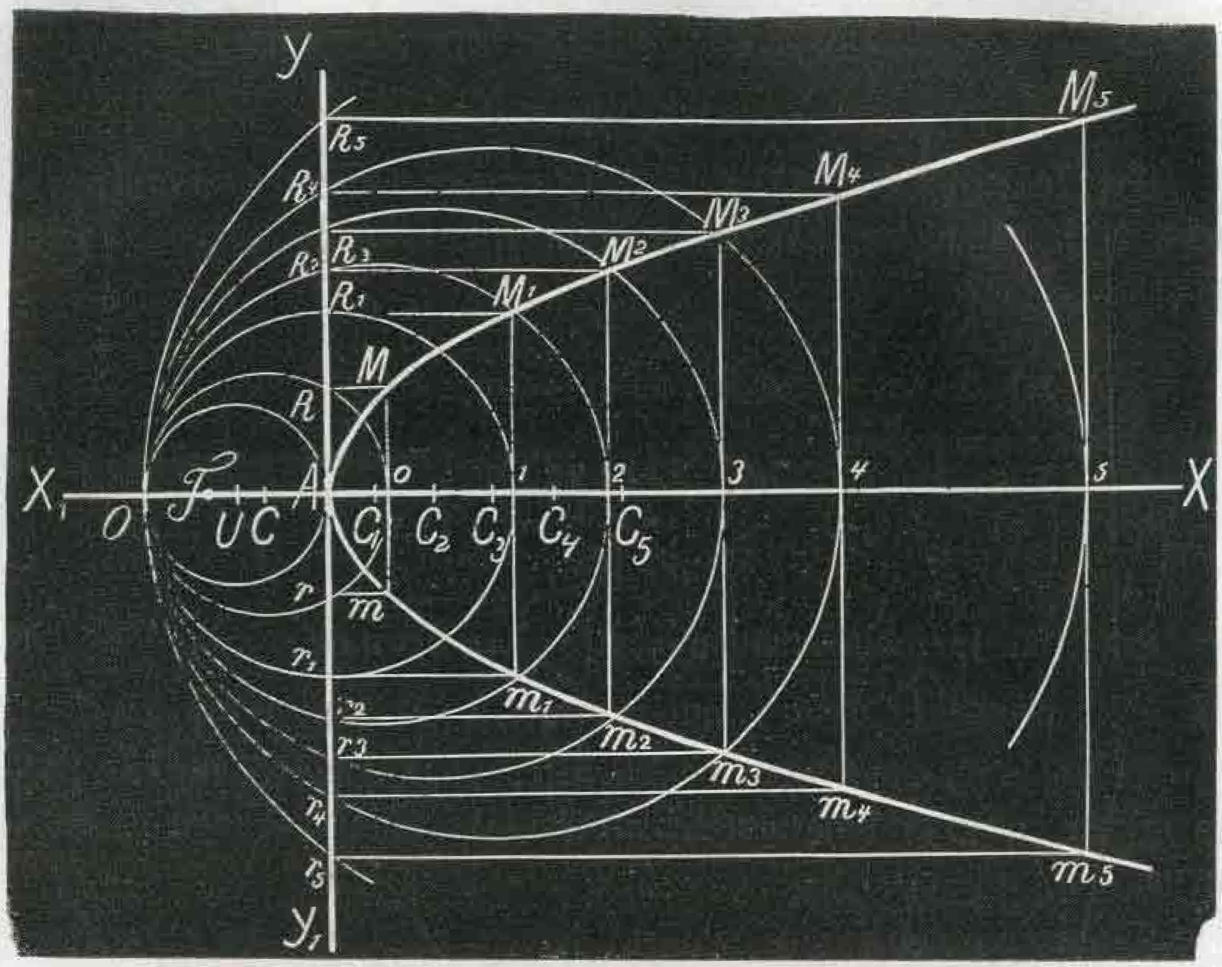
У овом параболином својству имамо средство да геометријски, рећи ће нацртно утврдимо колико год хоћемо њезиних тачака и тиме њу саму.

Нека су сл. 25. AX и AY координатне осе. Од A у лево одмеримо $AO = D$, па сад узмимо у абсцисној оси лево од почетка до $\frac{1}{2}\,AO = \frac{1}{2}\,D$, а десно од A без границе колико год хоћемо тачака C, C_1, C_2, ... и напишимо из њих као средишта кругове с полупречницима CO, C_1O, C_2O, ... Сваки тих кругова пресеца обе координатне осе. У тима пресецима подигнимо управне на те осе, па ће бити свака тачка M, M_1, M_2..., где се две и две тих управних секу, једна тачка параболе.

Да је то тако види се отуда, што је н. п. $Ao = x$ абсциса, $Mo = AR = y$ ордината тачке M; али је AR у том кругу управна на пречник и зато средња геометријска сразмерница између $OA = D$ и $Ao = x$, т. ј. између параметра и абсцисе; дакле је Mo ордината у параболи и тачка M тачка параболе. Тако је исто и код осталих тачака.

Ако је $OU = AU = \frac{1}{2}\,OA = \frac{1}{2}\,D$, па из U напишемо круг

Сл. 25.



с полупречником $\frac{1}{2}D$, тај ће круг обе осе сећи у једној истој тачци A, у координатном почетку. Чим пак лево од почетка узмемо какву тачку T тако. да је $AT > \frac{1}{2} D$, круг написан из те тачке с полупречником $OT > \frac{1}{2} D$, ординатну осу не може да сече и зато с том или таком тачком T не добијамо ни какву параболину тачку. Сасвим наравно, јер лево од почетка и не лежи ни каква параболина тачка, почем је за сваку одречну абсцису $y = \sqrt{-Dx}$ не могуће.

§. 67.

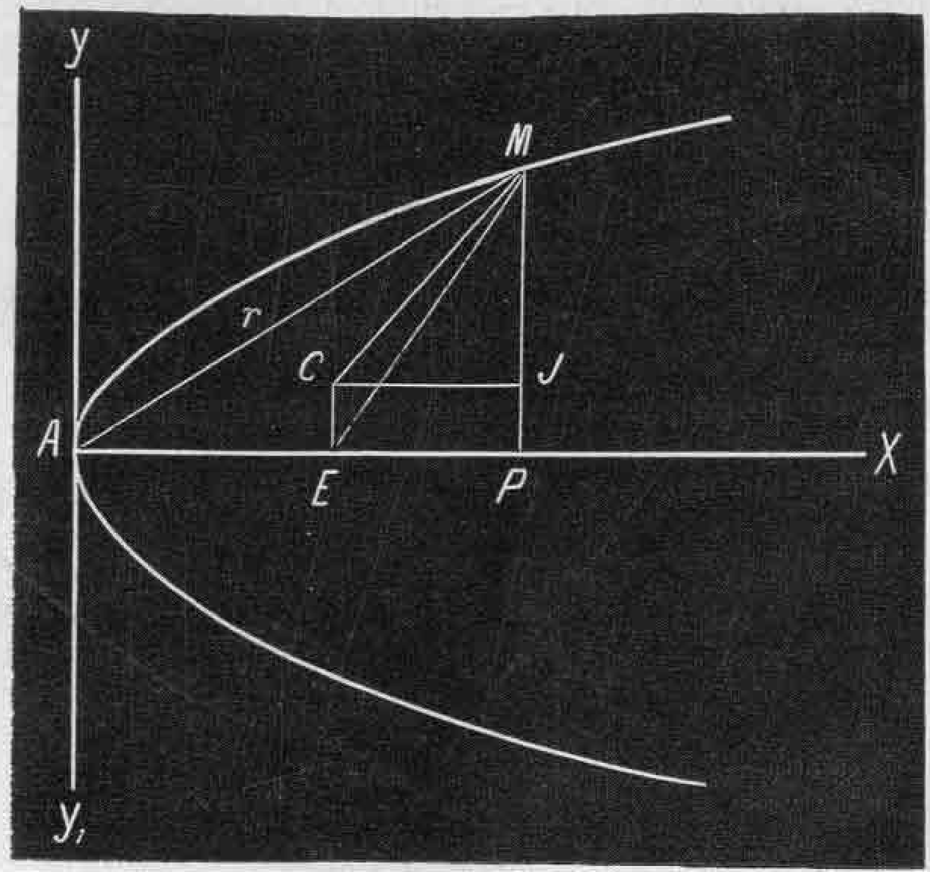
За сваку параболину тачку, утврђујући је на показани овај начин, потребан је засебан построј. Боље је дакле да израчунамо поједине ординате из једначине $y = \sqrt{Dx}$. Али при томе опетваља за свако друго x на ново да извлачимо корен. Осем тога мало има вредности абсцисе x с којима је $\sqrt{Dx}$ срачунљив (рационалан), дакле мало и параболиних тачака, које на тај начин можемо тачно да утврдимо. С тога је и ордината лоше средство за постројење параболе.

Повуцимо у сл. 26. из темена A пругу $AM = r$ на неку параболину тачку. Мора бити свако тако

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + Dx} = \sqrt{x(x + D)},$$

т. ј. свако тако r је средња геометријска сразмерница између абсцисе и абсцисом повећанога параметра. Са сваким r утврдили би такођер по једну параболину тачку, али ни свако r није срачунљиво, дакле и тај начин за построј параболе био би онако исто не тачан, као год онај службом ордината. Ко зна? мож'да има каква тачка у неком извесном положају према оси, из које би све пруге повучене на параболине тачке биле рационалне.

Сл. 26.



Нека је н. п. C така тачка, $AE = x_1$ њезина абсциса, $CE = y$ ордината. Повуцимо $CJ \| AX$; имамо због $CJ = EP = AP - AE$, а $MJ = MP - JP = MP - CE$,

$$\overline{CM}^2 = \overline{CJ}^2 + \overline{MJ}^2$$

$$= (AP - AE)^2 + (MP - CE)^2$$

$$= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$$= (x - x_1)^2 + (\sqrt{Dx} - y_1)^2$$

$$= x^2 - 2y_1 \sqrt{Dx} + (D - 2x_1)\, x + x_1{}^2 + y_1{}^2$$

Да CM буде рационално мора бити десни део ове једначине потпун квадрат $\alpha^2 + 2\alpha\, \beta + \beta^2$, тако да је

$\alpha^2 = x^2$, дакле

1.) $\alpha = x$,

$2\alpha\beta = (D - 2x_1)\, x - 2y_1 \sqrt{Dx}$, дакле

$2\beta x = (D - 2x_1)\, x - 2y_1 \sqrt{Dx}$, т. j.

2.) $\beta = \frac{D}{2} - x - y_1 \sqrt{\frac{D}{x}}$ и

3.) $\beta^2 = x_1{}^2 + y^2{}_1$ т. j.

$$\left(\frac{D}{2} - x_1 - y_1 \sqrt{\frac{D}{x}}\right) = x_1{}^2 + y_1{}^2.$$

Но $(x^2{}_1 + y_1{}^2)$ то је сталан број, зато и $\frac{D}{2} - x_1 - y_1 \sqrt{\frac{D}{x}}$ мора бити сталан број, ово пак због пременљивога броја x није другаче можно, већ ако је $y_1 \sqrt{\frac{D}{x}} = o$, дакле $y_1 = 0$.

Отуд следује

$$\left(\frac{D}{2} - x_1\right)^2 = x_1{}^2, \text{ т. j.}$$

$$\frac{D^2}{4} - Dx_1 + x_1{}^2 = x_1{}^2, \text{ дакле}$$

$$x_1 = \frac{D}{4}.$$

По свему овоме дакле има онака једна тачка, да диљина (отстојање) сваке параболине тачке од ње буде рационалан број и та важна тачка због ординате ($y_1 = o$) лежи у самој абсцисној оси у отстојању $\frac{1}{4}\, D$ од темена. Ако узмемо E је та тачка и повучемо EM, показује се

$$\overline{ME}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{MP}^2$$

$$= (x - \frac{1}{4} D)^2 + y^2 \text{, или због } y^2 = Dx,$$

$$= x^2 + \frac{1}{2} Dx + \frac{1}{16} D^2 \text{, дакле}$$

$EM = x + \frac{1}{4} D$ доиста за сваку абсцису x рационално.

Тачка E, која је у абсцисној оси за $\frac{1}{4}$ параметра од темена удаљена, назива се *жижом (focus)* параболе, а свака пруга из жиже на какву параболину тачку зове се *потег (radius vector)*.

Жижа је и тога својства, да је ордината у њојзи половина параметра, дакле управна M_1M_2 у жижи (Сл. 27.) равна параметру. Јер ако у једначини параболиној

$$y = \sqrt{Dx}$$

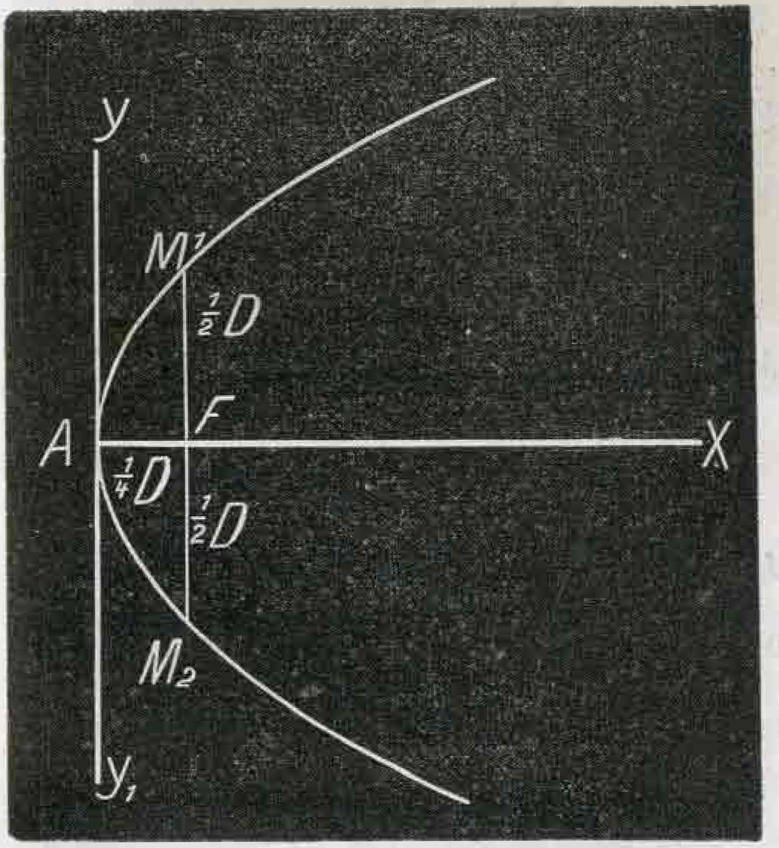
метнемо $x = AF = \frac{D}{4}$, следује да је ордината у жижи F

$$y = FM_1 = \sqrt{\frac{D^2}{4}} = \frac{D}{2},$$

а она управна

$M_1M_2 = 2FM_1 = 2y = D.$

Сл. 27.

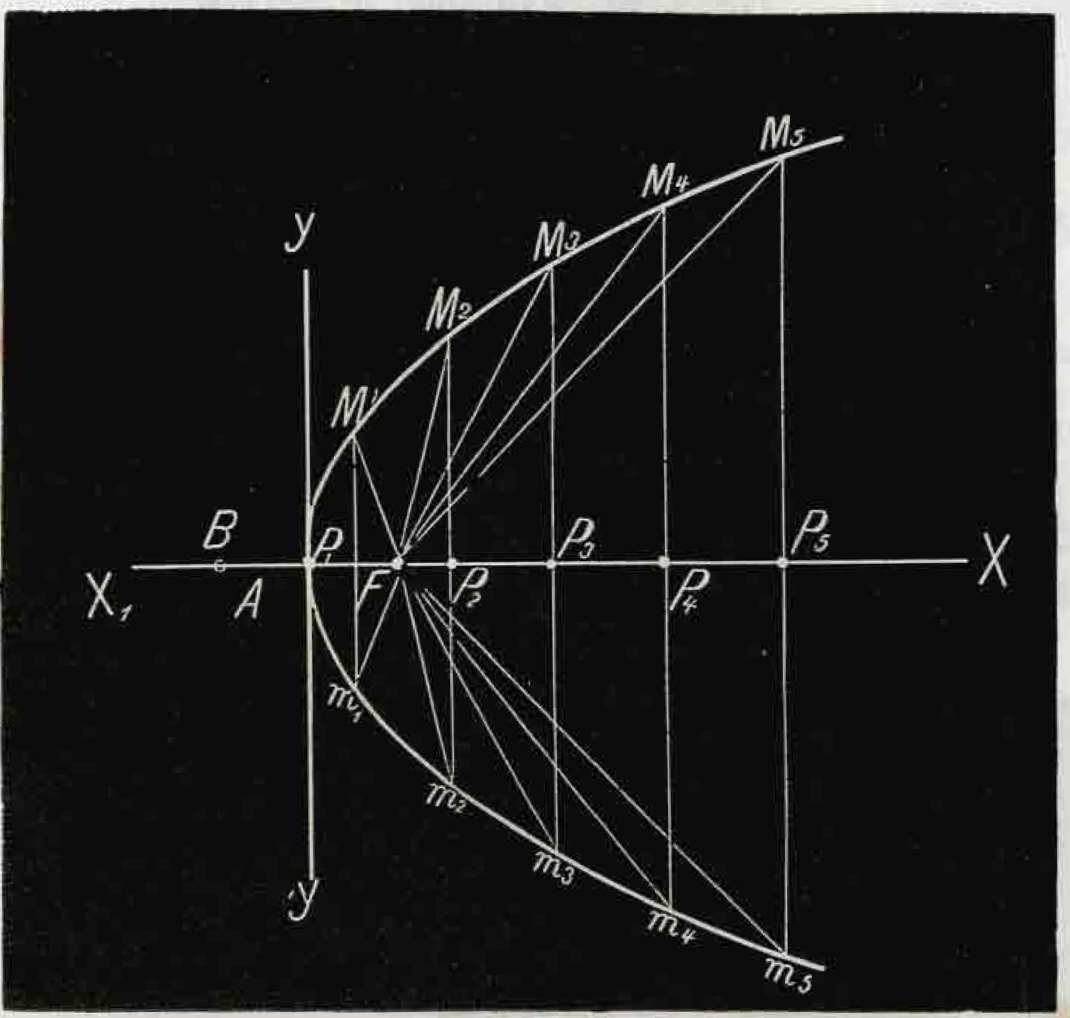


§. 68.

У овом новом параболином својттву, да је сваки потег $= x + \frac{D}{4}$, имамо врло удесан начин за постојење параболе.

Ако је у Сл. 28. XX_1 абсцисна оса, A почетак и теме, и параметар је D условљен (дат), па десно и лево од A одмеримо $AB = AF = \frac{1}{4} D$, биће F жижа. Сад ако узмемо у абсцисној оси вољне тачке $P_1, P_2 P_3$ . . . . , у свакој подигнемо управну и после из жиже као средишта испресецамо те управне редом:

Сл. 28.



прву с полупречником $FM_1 = Fm_1 = P_1B = AP_1 + AB$

$$= x_1 + \frac{1}{4} D,$$

другу с полупречником $FM_2 = Fm_2 = P_2B = AP_2 + AB = x_2 + \frac{D}{4}$, и т д., биће сви добијени пресеци M_1, m_1, M_2, m_2, ... параболине тачке, јер је при сваком потег = абсциси + ¼ параметра.

§. 69.

Ако је у Сл. 29. $AB = AF = \frac{1}{4} D$ и у B пруга SS, управна на осу, онда се та управна зове параболина *вођица*.

Ако из разних тачака R у вођици подигнемо на њу саму управне до пресека с параболом у односним тачкама M, биће

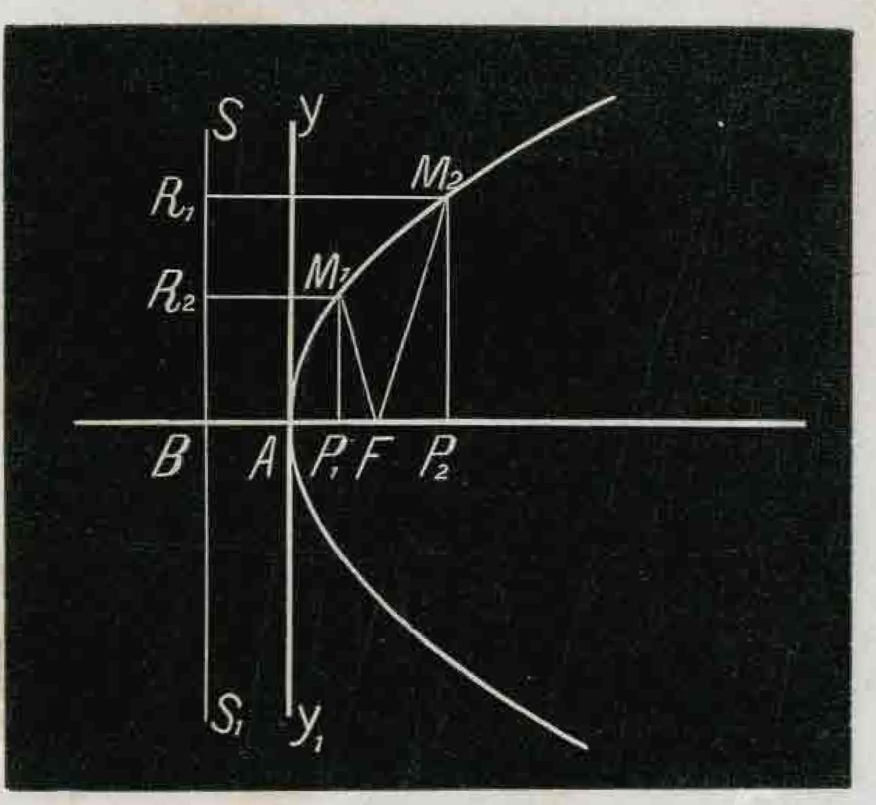
$$R_1M_1 = BP_1 = AP_1 + BA = x_1 + \frac{1}{4} D = FM_1$$

$$R_2M_2 = BP_2 = AP_2 + BA = x_2 + \frac{1}{4} D = FM_2$$

. . . .

дакле сваки потег FM_1, FM_2 . . . . , раван управној прузи из дотичне параболине тачке на вођицу.

Сл. 29.



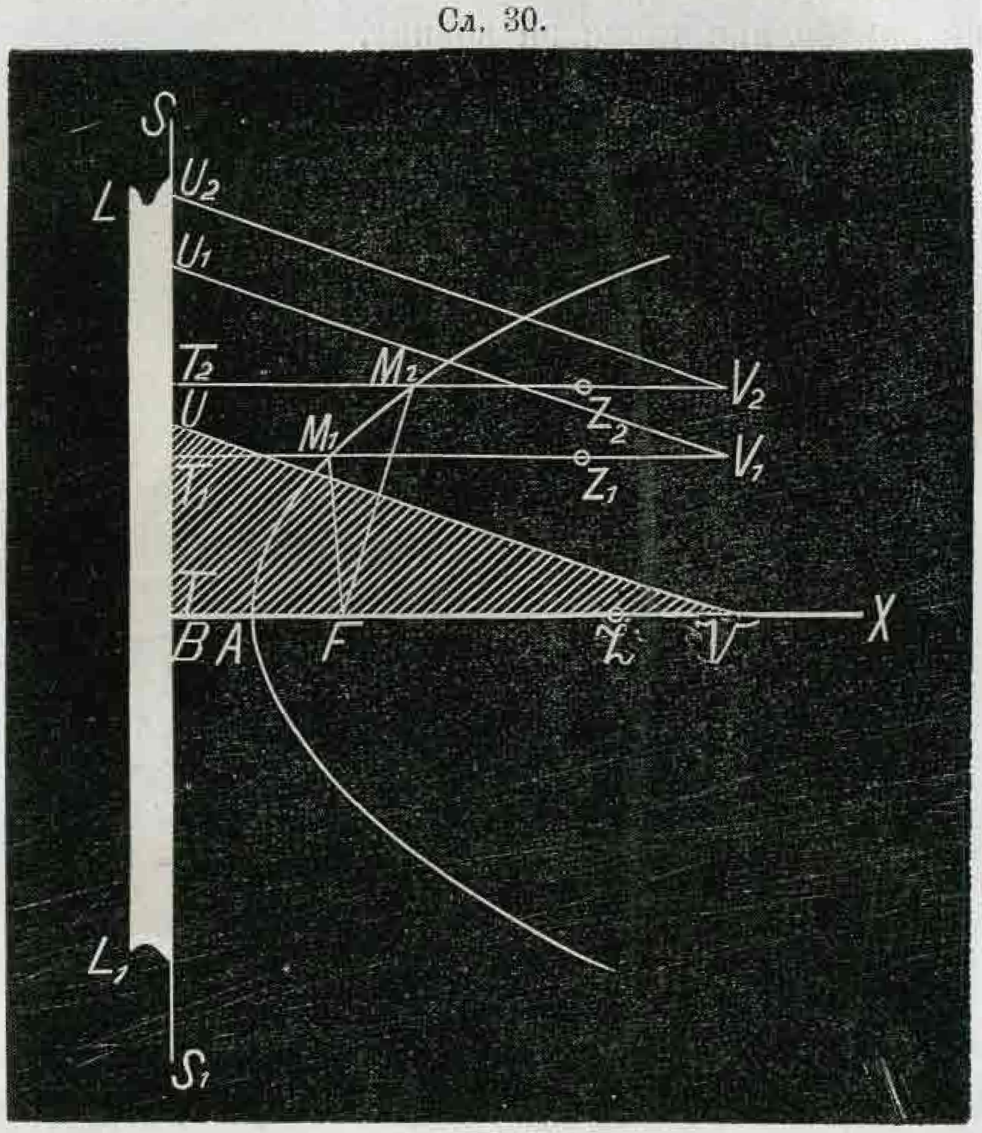
§. 70.

У овом новом опет параболином својству имамо средство за њезино постројење једним наставним повлаком.

Поставимо из познатога параметра D вођицу SS_1, почетак A и жижу F. Положимо тачно уз вођицу пружник (лењир) LL_1 и утврдимо га у том положају. Узмемо правоугли троугао TUV и положимо га једном катетом TU уз вођицу, а другом TV на абсцисну осу. Јоште узмемо конац вољне дужине a и утврдимо један његов крај у жижи F; затегнемо конац до врха оловке у A, вратимо га око оловке натраг и утврдимо други његов, такођер затегнут крај, у оној тачци Z катете TV, до које дотегне. У том је положају троугла дужина конца $a = FA + AF + FZ = FA + AB + FZ = FB + FZ = BZ = TZ$.

Сад помичемо троугао тачно уз вођицу (најпре) на више, после на исти начин и на ниже) и једнако затежући конац оловком пишемо један влак (најпре горе, после доле). Тај је влак парабола, јер је у свакој његовој тачци M_1 дужина конца $T_1 Z_1 = a = FM_1 + M_1 Z_1$, дакле $T_1 Z_1 - M_1 Z_1 = FM_1$, т. ј., као што по пређашњем §-у треба да буде, $T_1 M_1 = FM$.

Сл. 30.



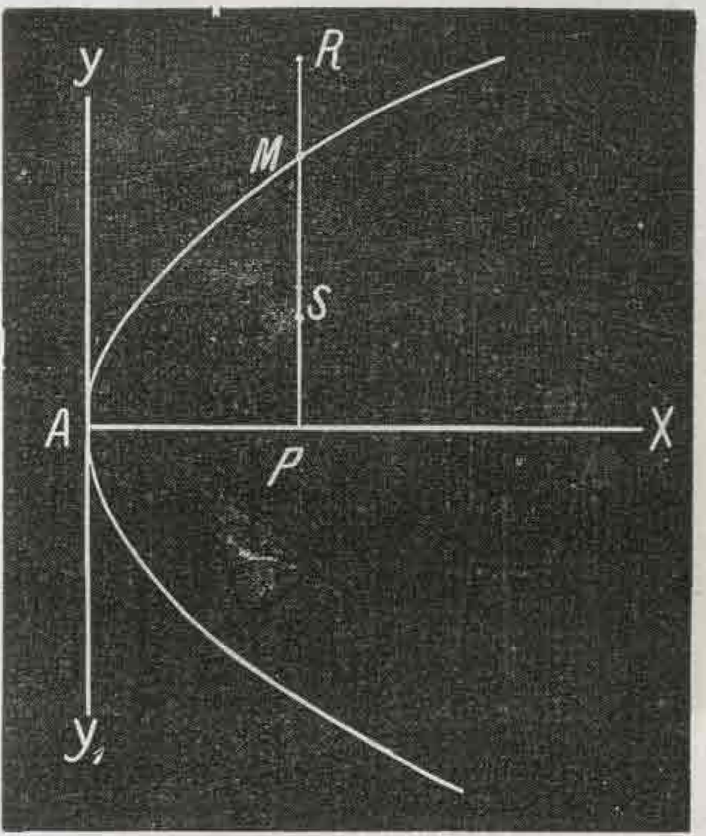
§. 71.

1.) Ако су x_1 и y_1, x_2 и y_2 координате за две параболине тачке, мора бити $y_1 = \sqrt{Dx_1}$ и $y_2 = \sqrt{Dx_2}$, дакле $\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{x_1}{x_2}$. То ће рећи: сваке две параболине абсцисе стоје међу собом у онакој истој размери, као квадрати припадајућих им ордината.

2.) Из параболине једначине следује за сваку њезину тачку $y^2 - D x = o$.

Узмимо у параболи (сл. 31.) једну управну PR на осу, и у њој осем параболине тачке M још две друге R и S, једну с поља, другу изнутра. Све те три тачке имају једну исту абсцису $AP = x$, а различне ординате MP, RP, и SP, које све претстављамо под y.

Сл. 31.



Због $RP > MP$, горња једначина за спољну тачку R више не постоји онако, него је $y - Dx > o$, а због $SP < MP$ не постоји више ни за ону другу тачку, него $y^2 - Dx < o$.

Ако дакле између координата x и y какве тачке постоји такав отношај, да је $y^2 - Dx \overset{=}{\underset{<}{>}} o$, онда та тачка у првом случају лежи у самој параболи (њезина је), у другом случају лежи изван параболе с поља, а у трећем случају изван параболе изнутра.

3.) За то, да ли каква тачка лежи у самој параболи или изван ње с поља или унутри? имамо јоште и други знак у том параболином својству, да је сваки потег раван управној из дотичне тачке на вођицу.

Јер ако је V нека тачка изван параболе с поља, а W друга тачка изван параболе унутри, па кроз V и W повучемо пруге VT и $Wt \| XX_1$ до пресека с вођицом UU_1 и с параболом, а осем тога још и потеге FM_1 и FM_2: биће по познатом својству страна свакога троугла

α.) $FV > FM_1 - VM_1$, или због $FM_1 = TM_1$,

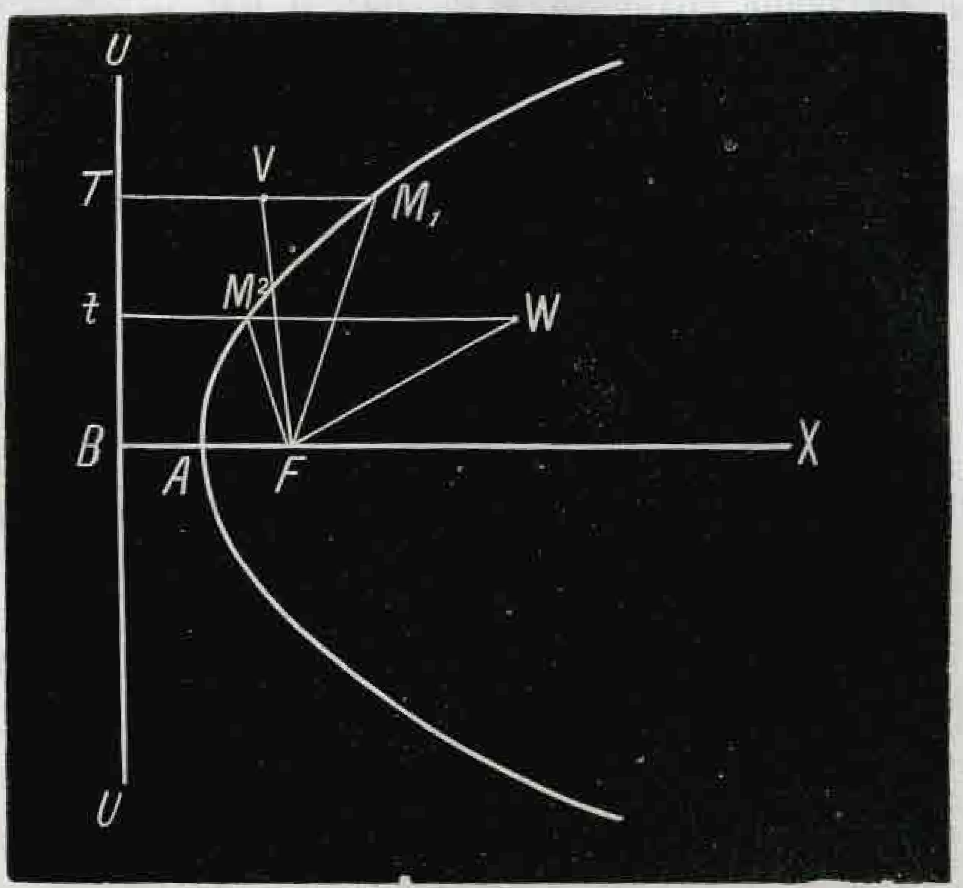
$FV > TM_1 - VM_1$, т. ј.

$FV > VT$, а то показује да тачка V лежи изван параболе с поља;

β.) $FW < FM_2 + WM_2$, или због $FM_2 = tM_2$,

$FW < tM_2 + M_2W$, т. ј.

Сл. 32.



$FW < tW$, а то опет показује, да је тачка W изван параболе унутри.

β.) Елипса.

§. 72.

Једначина је елипсе у ортогоналној системи, кад је почетак у левом темену, по §. 56.

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{ax^2 - x^2},$$

а кад је почетак у средини велике осе, по §. 59.

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

У првој једначини преставља a велику осу, b малу, а у другој је једначини α пола велике осе, β пола мале осе.

Служићемо се за даље истраге другом једначином као простијом.

Видели смо у §. 56. да пола елипсе лежи изнад велике осе, а друга половина испод те осе, т. ј. да велика оса дели елипсу на два потпуно једнака дела, један горе други доле.

Елипсина једначина разрешена по x показује да је свако $x = \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\beta^2 - y^2}$, дакле да свакој ординати одговарају две по величини једнаке, по положају пак противне абсцисе, а то ће рећи да и мала оса дели елипсу на два потпуно једнака или истоветна дела, један на једној, други на другој страни те мале осе.

По томе обе осе деле елипсу на четири потпуно једнака дела, који леже около њих.

§. 73.

Кад би хтели да направимо елипсу по њезиној једначини, тада би имали да израчунимо свакој абсциси x одговарајућу ординату y, чим би изнашли толико елипсиних тачака, колико год хоћемо. Али се и ту појављује онака иста незгода као при параболи, да није свако y рационално и да за то неби све елипсине тачке биле тачно утврђене.

Морамо се дакле и ту питати: не постоји ли, у каквом било положају према великој оси каква тачка тога својства, да све са ње на елипсине тачке повучене пруге буду рационалне?

Нека је у сл. 33. $AF = x_1$ абсциса, $OF = y_1$ ордината таке тачке O. Повуцимо $OQ \| BB_1$ и још OM. Биће
$\overline{OM}^2 = (MP - OF)^2 + (AP - AF)^2 = (y - y_1)^2 + (x - x_1)^2$,
или узев место y његову вредност из елипсине једначине,

$$\overline{OM}^2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} - y_1\right)^2 + (x - x_1)^2.$$

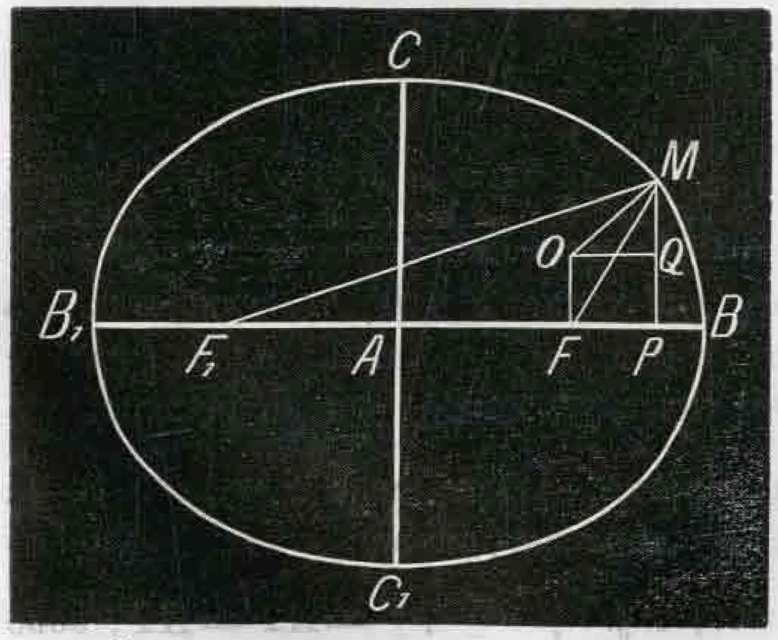
Да би OM било рационално, мора да је

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} - y_1\right)^2 + (x - x_1)^2$$

потпун квадрат, н. п.

$$= (A + B)^2.$$

Сл. 33.



Дакле

1.) $\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) x^2 = A^2$

2.) $-2\left(x_1 x + y_1 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right) = 2AB$

3.) $\beta^2 + x_1^2 + y_1^2 = B^2$

Из 1.) следује

$A = x\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}}$, с том пак вредности из 2.)

$$2Bx\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}} = -2\left(x_1 x + y_1 . \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,\right),\ \text{дакле}$$

$$B = -\frac{x_1 + y_1\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}}{\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}},$$ а с том опет вредности из 3.)

$$\left(-\frac{x_1 - y_1\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}}{\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}}\right)^2 = \beta^2 + x_1^2 + y_1^2 .$$

Леви је део ове једначине због x променљив, а десни је сталан број. Сталан број не може бити раван променљивом броју. С тога да та једначина постоји мора бити

$y_1 . \frac{\beta\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha x} = o$, а то је опет само тако можно, ако је $y_1 = o$.

Дакле да *ОМ* буде рационално, то мора тачка *О* да лежи у самој абсцисној оси, рећи ће у елипсиној великој оси.

Под тим условом мора да је

$$\frac{x_1^2}{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}} = \beta^2 + x_1^2,\ \text{т. ј.}$$

$$\alpha^2 x_1^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 x_1^2 - \beta^4 - \beta^2 x_1^2,\ \text{или}$$

$$x_1^2 = \alpha^2 - \beta^2,\ \text{дакле}$$

$$x_1 = \pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$$

По томе у елипси има две тачке F и F_1 тога својства, да је свака са њих повучена пруга на једну тачку елипсе рационалан број. Обе те тачке леже у великој оси на једнакој даљини $x_1 = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ од почетка, једна десно, друга лево од овога. Те се две тачке зову елипсине *жиже*, а отстојање њихово од средине велике осе, т. ј. $\sqrt{\alpha^2-\beta^2} = AF = AF_1$ зове се *вансређе* (ексцентрицитет); најпосле пруге повучене са жижа на ма коју елипсину тачку зову се *потези* те тачке.

§. 74.

Ако рачунамо потеге, оба два морају бити рационални.

За први имамо (Сл. пређ.)

$$\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{MP}^2 = (x_1 - x)^2 + y^2,$$ или због $y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$,

$$\overline{FM}^2 = \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) x^2 - 2x_1 x + \beta^2 - x_1^2,$$ или због $x_1^2 = \alpha^2 - \beta^2$,

$$\overline{FM}^2 = \alpha^2 - 2x_1 x + \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) x^2,$$ или због $1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = \frac{x_1^2}{\alpha^2}$,

$$\overline{FM}^2 = \alpha^2 - 2x_1 x + \frac{x_1^2}{\alpha^2} \cdot x^2 = \left(\alpha - \frac{x_1}{\alpha} x\right)^2,$$ и отуда

1.) $FM = \alpha - \frac{x_1}{\alpha} x$

Подобно имамо за други потег

$\overline{F_1M}^2 = \overline{F_1P}^2 + y^2 = (x + x_1)^2 + y^2$, или ако све урадимо као за први потег, најпосле

2.) $F_1M = \alpha + \frac{x_1}{\alpha} . x.$

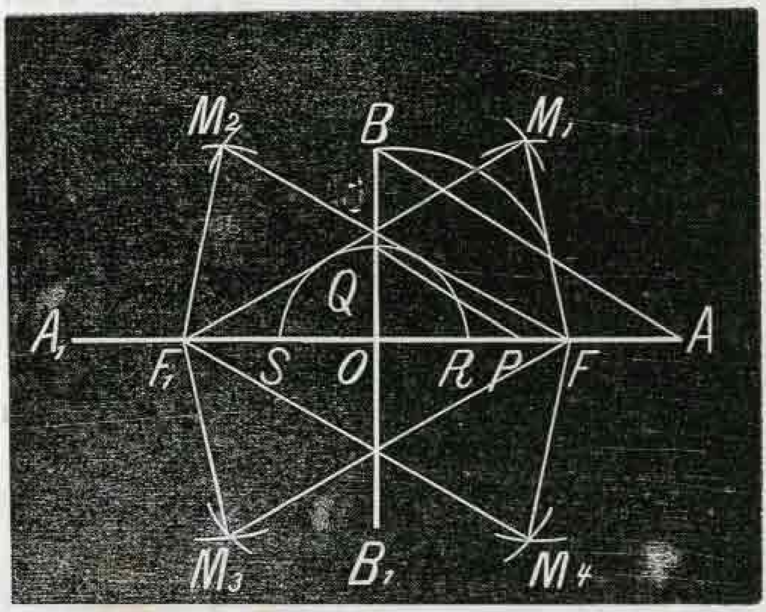
Збир од оба потега даје $FM + F_1M = 2\alpha$ и показује ново елипсино својство: да је збир оба два потега какве год њезине тачке сталан број и свагда раван великој оси.

§. 75.

Потеге какве елипсине тачке можемо лако да израчунимо из једначина 1. и 2. пређашњега §а, али их такођер лако добијамо и простим нацртом, који је основан у томе, што је по тима једначинама други члан $\frac{x_1}{\alpha} . x$ свакога потега четврта геометријска сразмерница ка $\alpha = \frac{1}{2}$ велике осе, вансређу x_1 и абсциси x дотичне тачке.

Ако је у Сл. 34. $OA = OA_1 = \alpha$, $OF = OF_1 = x_1$ и ово x_1 пренесемо на малу осу, т. ј. направимо $OB = x_1$, па онда из краја P абсцисе x повучемо $PQ \parallel AB$, биће $OQ = \frac{x_1}{\alpha} x$, она четврта сразмерница. Зато ако најпосле OQ пренесемо на велику осу лево и десно од почетка O, т. ј. направимо $OR = OS = OQ$: биће $AR = AO - OR = \alpha - \frac{x_1}{\alpha}. x$ један потег, а $AS = AO + OS = \alpha + \frac{x_1}{\alpha}. x$ други потег дотичне елипсине тачке. Ову ћемо тачку дакле добити, ако из F напишемо с полупречником AR један лук и овај после из F_1 пресечемо с полупречником AS. Пресек тај биће дотична елипсина тачка M_1.

Сл. 34.



Почем је елипса, као што смо видели, према својим осама симетрично положена, то са сваким спрегом потега добијамо по четири њезине тачке, две изнад абсцисне осе, две под њом, или две десно а две лево од ординатне осе. Слика 34 показује и то у тачкама M_1, M_2, M_3 и M_4.

Поступајући на показан начин и са другим абсцисама, можемо да изнађемо потеге од колико год хоћемо елипсиних тачака, па с њима направити елипсу. У ту цељ ваља само да на великој оси као абсцисној узмемо разне тачке и по свакој повучемо паралелну пругу оној AB; тиме добијамо односна OQ, која ваља да пренесемо десно и лево од O, да би тако добили дотичне потеге AR и AS.

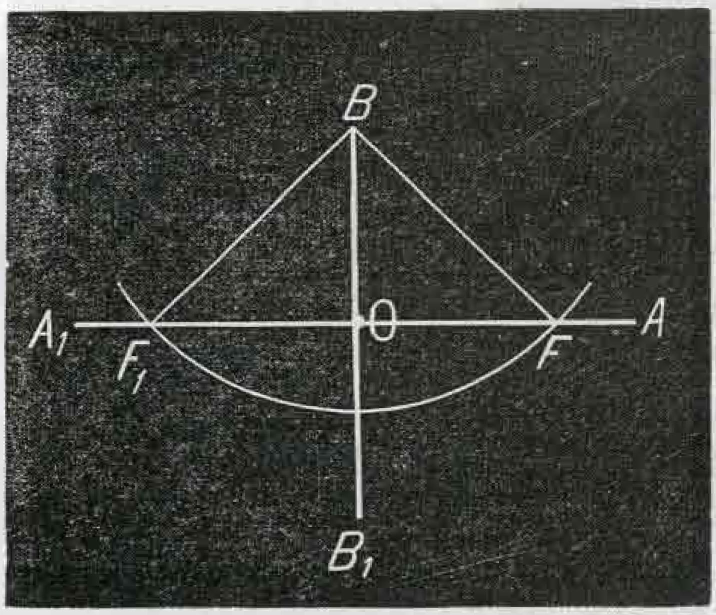
Из овога се види како можемо да направимо елипсу изналаском што више њезиних тачака.

§. 76.

Кад год имамо да направимо елипсу, морамо да знамо 1.) или обе осе, или 2.) једну осу и параметар, или 3.) вансреће и параметар.

1.) Кад су познате обе осе тада најпре тражимо жиже, које добијамо рачуном из $x_1 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, а можемо их лако добити и простим овим постројем: поставимо (Сл. 35.) у половини O велике осе $AA_1 = 2\alpha$ управно на њу пола мале осе $OB = \beta$, па онда из B, као средишта, пресечемо велику осу у F и F_1 с полупречником $BF = BF_1 = \alpha$. Тачке F и F_1 биће елипсине жиже, јер је по тој направи (за елипсину тачку B) $FB + F_1B = 2\alpha$, или $OF = OF_1 = \sqrt{\overline{BF_1}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Сл. 35.



2.) Кад је уз параметар D позната једна оса, онда најпре изнађемо из израза $\frac{b^2}{a} = D$ (§ 56.) ону другу осу и после радимо даље као и пређе

3.) Ако је уз параметар D дато вансреће x_1, онда из израза $\frac{b^2}{a} = \frac{2\beta^2}{\alpha} = D$ и $x_1 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ изнађемо најпре обе осе (управ њихове половине), па радимо даље као горе под 1.)

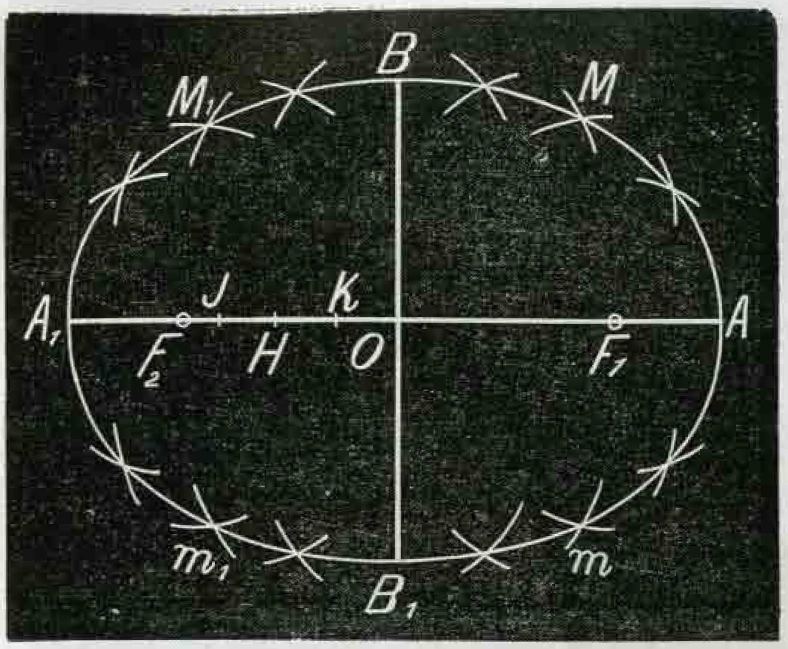
Како би у два последња случаја место рачуна могли да употребимо цртање, то остављам на размишљање и вежбање ученицима.

§. 77.

У елипсином својству да је збир од сваког спрега потега раван великој оси, имамо основу за удеснији построј елипсе.

Нека је у сл. 36. $AA_1 = a$ велика оса, а F_1 и F_2 нека су жиже. Узмемо у шестар један део AH велике осе и напишемо с њим (као полупречником) из жижа F_1 и F_2 (као сре-

Сл. 36.



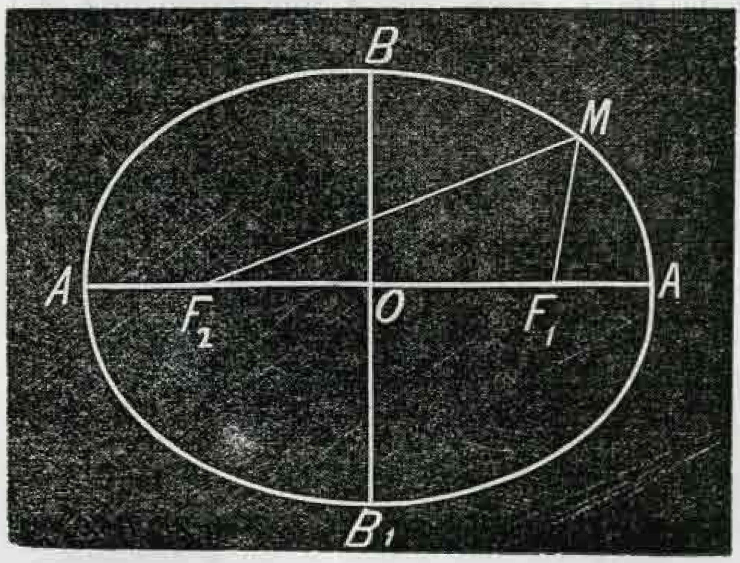
дишта) лукове M_1m_1 и Mm; после узмемо у шестар остатак A_1H велике осе и пресечемо њим (као полупречником) из жижа F_1 и F_2 она два прва лука у M_1 и m_1, M и m. Сва та четири пресека јесу тачке елипсе, јер за сваки стоји да је збир потега раван великој оси.

Ту се може посумњати хоће ли се свагда они из жижа написани луци доиста сећи? Та је сумња основана, јер чим би краћи део велике осе био мањи него отстојање једне жиже од оближњег осиног краја, кругови из оних средишта ни како се не могу сукобити и пресећи. За пресек тих кругова мора бити краћи део велике осе свагда већи но што је отстојање једне жиже од оближњег осиног краја. Узрок је томе прост, зато нека се ученици потруде да га сами докуче.

§. 78.

Исто елипсино својство да је збир свака два спрегнута потега $MF_1 + MF_2 = a$ великој оси основа је построју елипсе са једним само повлаком. Сл. 37.

Сл. 37.



Узмемо конац дужине колико велика оса, утврдимо његове крајеве, један у једној, други у другој жижи, после га затегнемо оловком (или чим другим) и, држећи га једнако затегнута, влачимо оловку не прекидно даље; њезин траг биће елипса, јер је не престано $MF_1 + MF_2 = a =$ великој оси.

§. 79.

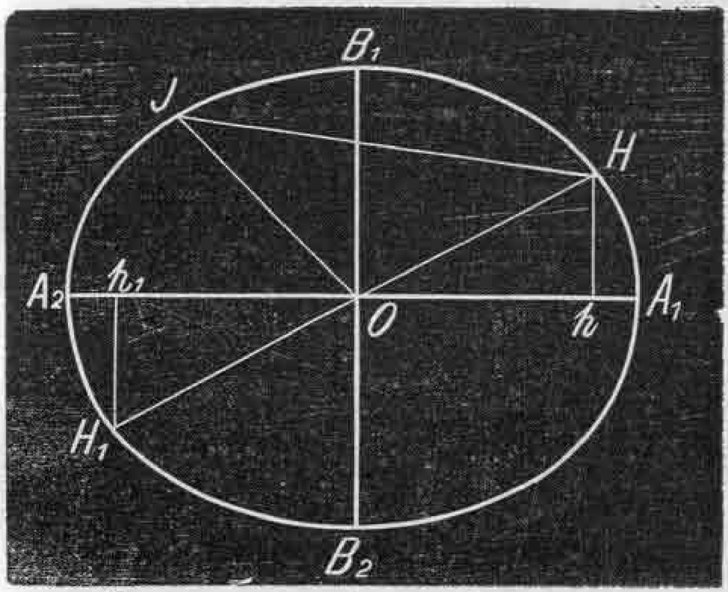
1.) Даљина неке елипсине тачке M од почетка O (сл. 38.) биће

$d = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, или ако место y узмемо његову вредност $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$,

$$d = \sqrt{\beta^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} x^2}$$

Вредност је овога израза најмања при $x = o$, за то је $d = \sqrt{\beta^2} = \pm \beta = OB_1 = OB_2$ *најмање* отстојање какве елипсине тачке од почетка O. Увећањем броја x (абсцисе) увећава се и d и биће највеће при највећем x, а то је $x = \pm \alpha$ *највеће* је дакле отстојање какве елипсине тачке од почетка $d = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 - \beta} = \sqrt{\alpha^2} = \pm \alpha = AO = OA_2$.

Сл. 38.



Отуда следује да је од свију по O повучених тетива A_1A (велика оса) највеће, а B_1B_2 (мала оса) најмање. Осем тога још следује да је тетиво A_1A_2 веће од ма како повучена друга тетива, н. п. HJ; јер ако саставимо H и J с O имамо по познатом својству страна свског троугла

$HJ < HO + JO$, а због $HO + JO < (A_1O + A_2O = A_1A_2)$,

$$HJ < A_1A_2.$$

То је узрок зашто се зове A_1A_2 велика оса.

Исто тако можемо да докажемо да је B_1B_2 мање од ма како повученог другог тетива HJ, што је опет узрок због кога се B_1B_2 зове мала оса.

2.) Свака од елипсиних оса пресеца сва оној другој паралелно повучена тетива управно и преполавља их.

3.) Сва у елипси повучена тетива кроз O преполовљена су у тој тачци.

Јер ако свежемо једначину елипсе $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ са једначином пруге $y = Ax$ која иде кроз почетак O, н. п. HH_1 (пређ. сл.), следује из нове једначине

$$x = \pm \frac{\alpha\beta}{\sqrt{A^2\alpha^2 + \beta^2}},$$ а овим изразом из једначине

тетива HH_1, $y = Ax$,

$$y = \pm \frac{A\alpha\beta}{\sqrt{A^2\alpha^2 + \beta^2}}$$ као координате тетивових краева (т. ј. његових и елипсиних заједничких тачака). Горњи знаци припадају горњем крају H, а доњи доњем крају H_1. Почем је пак $Hh = + y$ по величини $= H_1h_1 = - y$, и $Oh = + x$ по величини $= Oh_1 = - x$, то је и $OH = OH_1$ и дакле тетиво HH_1 у O доиста преполовљено.

То је узрок што се тачка O назива *средиштем* елипсе, а свака кроз O повучено тетиво HH_1 *пречником* њезиним.

§. 80.

По §. 60. поларна је једначина елипсе, кад је полус у пресеку њезиних оса,

$$r = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)\, sin^2 u + \beta^2}} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2)\, cos^2 u}}$$

Узмимо да је мала оса колико и велика, т. ј. $\beta = \alpha$; следује $r = \alpha$, т. ј. да су сви потези у том случају једнаки и сваки $= r$. То је познато својство круга, дакле така елипса није ни шта друго већ круг, и обрнуто круг није ни шта друго него особеност елипсе та, да су обе осе, велика и мала, једнаке и с тога вансређе $= o$.

По томе узевши у једначини елипсе §. 56. $\beta = \alpha = r$, где r сад преставља полупречник круга, налазимо као овога едначину, кад су два управна пречника осе, а средиште координатни почетак,

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Узев пак у елипсиној једначини $y = \frac{b}{a} \sqrt{ax - x^2}$, где је a велика оса, b мала оса, $b = a = 2r$, при чему r опет значи кругов полупречник, имамо као једначину круга у односу на ортогоналну систему, где је један пречник абсцисна оса а почетак у једноме крају тога пречника,

$$y = \sqrt{2rx - x^2}\ .$$

Ученицима задатак. Да изнађу једначину круга у ортогоналној системи у опште помоћу претварања координата, узев да је полупречник круга r, а координате његова средишта у новој системи $+\alpha$ абсциса, $+\beta$ ордината. Као што сами увиђају прелаз је ту из ортогоналне системе у другу ортогоналну, које је абсцисна оса паралелна пређашњој абцисној оси. На послетку нека нађену једначину уреде и на 0 сведу. Ако добро раде наћи ће да је једначина круга у опште (његова општа једначина).

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x + \beta^2 + \alpha^2 - r^2 = o \text{ или}$$
$$(y \quad \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2.$$

§. 81.

1.) Нека су y_1 и y_2 две елипсине ординате, а x_1 и x_2 одговарајуће им абсцисе. По простијој једначини тога влака мора бити

$$y_1{}^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\,(\alpha^2 - x_1{}^2) \quad \text{и}$$

$$y_2{}^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\,(\alpha^2 - x_2{}^2), \text{ дакле}$$

$$\frac{y_1{}^2}{y_2{}^2} = \frac{(\alpha^2 - x_1{}^2)}{(\alpha^2 - x_2{}^2)} = \frac{(\alpha + x_1)\,(\alpha - x_1)}{(\alpha + x_2)\,(\alpha - x_2)}.$$

Лако увиђамо да $(\alpha + x_1)$ и $(\alpha - x_1)$ ни шта друго нису но делови велике осе, на које ју раздваја ордината y_1, исто тако $(\alpha + x_2)$ и $(\alpha - x_2)$ њезини делови, на које ју раздваја ордината y_2.

По нађеном изразу дакле стоје квадрати елипсиних ордината међу собом у онакој истој размери, као производи од делова велике осе, на које ју те ординате раздвајају.

2.) Из простије елипсине једначине следује

$$\frac{y^2}{(\alpha + x)\,(\alpha - x)} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \text{ а из оне друге}$$

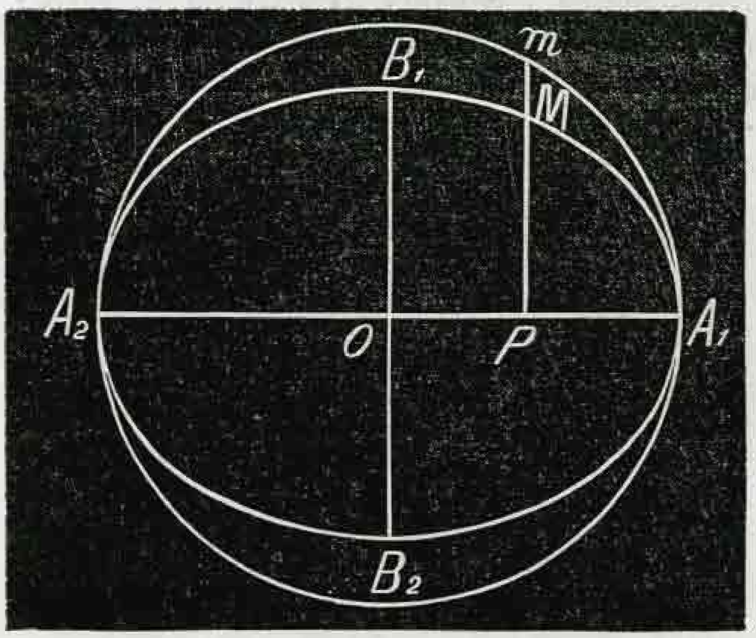
$$\frac{y^2}{(a-x)\,x} = \frac{b^2}{a^2}.$$

По томе дакле између квадрата какве елипсине ординате и производа од делова велике осе, на које ју дели та ордината, постоји онака иста размера, као између квадрата мале осе и квадрата велике осе, или као између квадрата пола мале осе и квадрата пола велике осе.

§ 82.

Ако изнад велике осе $A_1A_2 = 2\alpha$ као пречника напишемо круг и означимо за једну исту абсцису $OP = x$ ординату елипсе PM са y, ординату Pm круга пак са y_1, имамо

Сл. 39.



$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$$

за елипсу, а

$$y_1^2 = \alpha^2 - x^2$$ за

круг. (§. 80.).

Ове две једначине дају

$$y_1{}^2 : y^2 = \alpha^2 : \beta^2 = \frac{1}{4}\,a^2 : \frac{1}{4}\,b^2 = a^2 : b^2,$$ т. ј.

$$y_1 : y = \alpha : \beta = a : b.$$

Између сваке ординате круга, кога је пречник $= 2\alpha = a$ великој елипсиној оси, и елипсине ординате за једну исту абсцису постоји дакле онака иста размера, као између $^1/_2$ велике осе и $^1/_2$ мале осе, или као између целе велике осе и целе мале осе.

Ако напишемо круг над малом осом $B_1B_2 = 2\beta$ као пречнику, налазимо

$$y_1 : y = \beta : \alpha = b : a,$$

дакле да су ордината круга над малом осом и ордината елипсе за једну исту абсцису међу собом у онакој истој размери, као $^1/_2$ мале осе према $^1/_2$ велике осе, или као цела мала оса према целој великој оси.

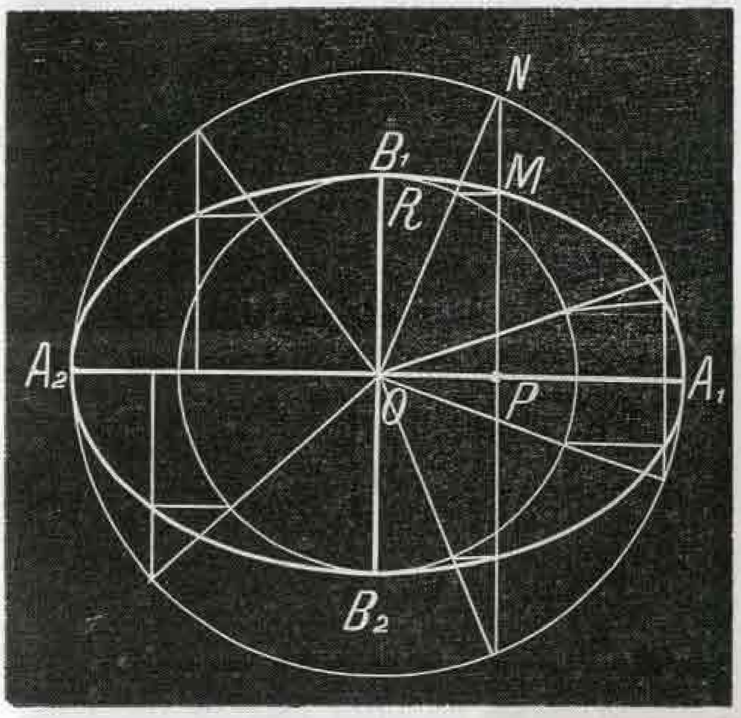
§. 83.

У овом елипсином својству имамо нов начин за њезин построј из појединих тачака.

Напишемо на свакој елипсиној оси као пречнику круг и подигнемо у ма којој тачци P велике осе (Сл. 40.) управну PN, кроз тачку R пак, где полупречник ON сече мањи круг, повучено $RM \parallel A_1A_2$ до пресека с управном у M. Ова тачка M биће тачка елипсе, јер је по построју

$$PN:PM = ON:OR = \alpha : \beta.$$

Сл. 40.



На такав начин можемо да постројимо колико год хоћемо елипсиних тачака и њима њу саму.

§. 84.

1.) За сваку елипсину тачку стоји једначина

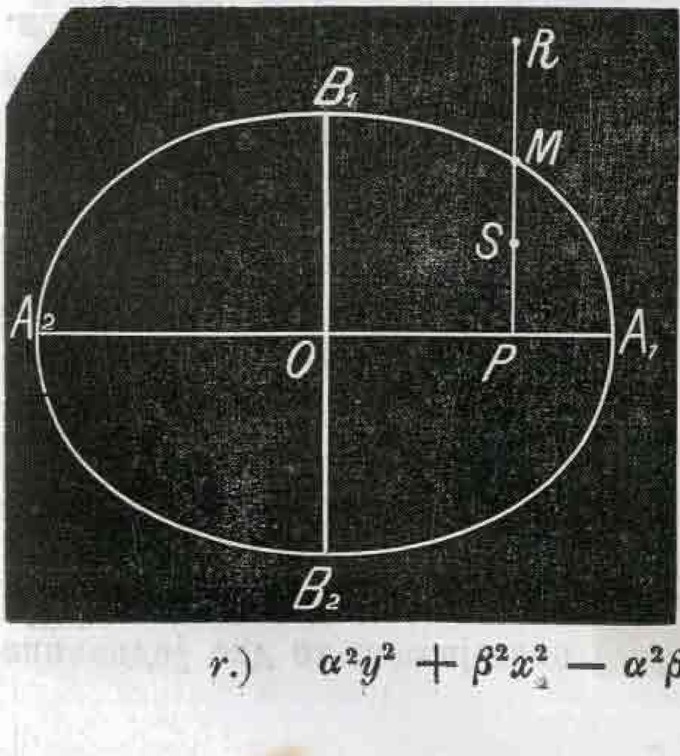
$$p.)\quad \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 - \alpha^2 \beta^2 = o \quad (§.\ 59.)$$

Подигнимо у сл. 41. управну PR на абсцисну осу и узмимо у њој две тачке: R с поља S унутри. Биће за једну исту абсцису $OP = x$, RP ордината тачке R, SP ордината унутрашње тачке S. Односећи дакле обе те тачке на елипсину систему имамо за тачку R, због $RP > MP$ и с тога $\alpha^2.\overline{RP}^2 > \alpha^2\,\overline{MP}^2$,

$$q.)\quad \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 - \alpha^2\beta^2 > o,$$

а за тачку S, због $SP < MP$ па с тога и $\alpha^2.\overline{SP}^2 < \alpha.\ \overline{MP}.$

Сл. 41.

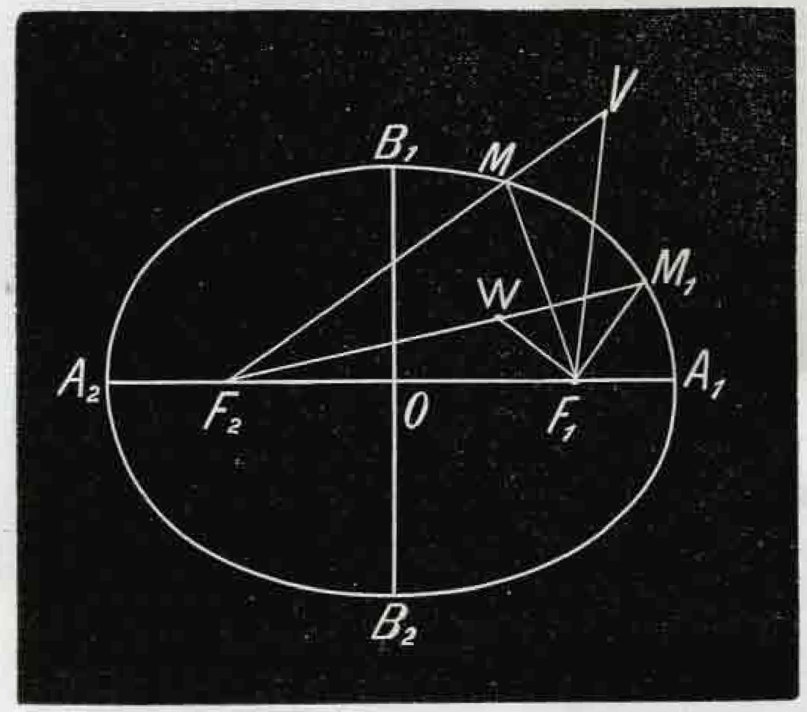


$$r.)\quad \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 - \alpha^2\beta^2 < o.$$

Ова три израза $p.$) $q.$) и $r.$) показују јасно да ли каква тачка у елипсиној системи лежи у самој елипси, или где изван ње, с поља или унутри. Све тачке за које постоји једначина $p.$) леже у самој елипси, рећиће јесу њезине тачке; свака тачка за коју постоји израз под $q.$) лежи изван елипсе с поља, најпосле свака тачка за коју стоји израз под $r.$) лежи изван елипсе унутри.

2.) Други знак за то да ли је каква тачка у елипсиној системи тачка саме елипсе или није и у последњем случају где лежи, с поља или унутри? имамо у елипсином својству да је збир од свака два спрегнута потега = великој оси. Јер ако је у сл 42. V тачка изван елипсе с поља, а W тачка изван елипсе унутри, па повучемо F_1V, F_2V, F_1M, F_1W, F_2WM_1 и F_1M_1, то је очевидно $F_1W + F_2W < F_1M_1 + F_2M_1$, дакле $< 2\alpha$, $F_1V + F_2V > F_1M + F_2M$, т.ј. $> 2\alpha$

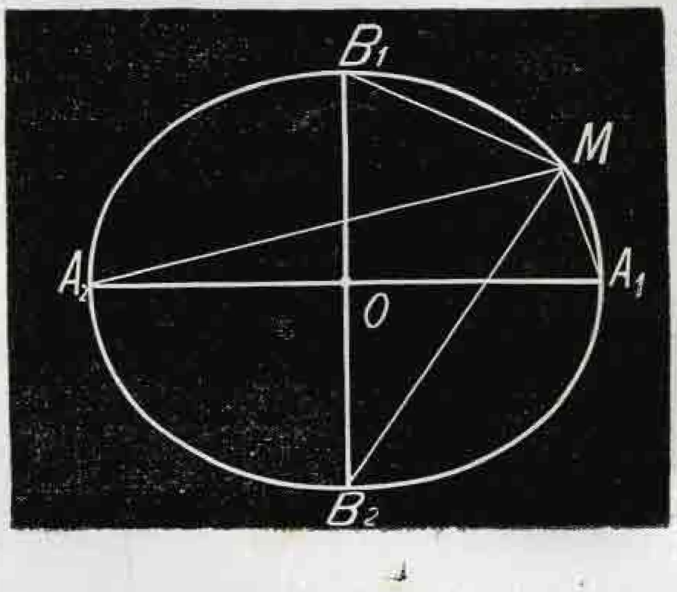
Сл. 42.



§. 85.

Пруге које састављају какву елипсину тачку с оба два краја велике или мале осе, зову се *спрегнута тетива* на дотичној оси.

Сл. 43.



Једначина је тетива A_1M у сл, 43. (као пруге која иде кроз тачку A_1 с координатама $x_1 = \alpha$ и $y_1 = o$) по §. 44. $y = \mathfrak{A}_1 (x - \alpha)$, а једначина спрегнута тетива A_2M (што иде кроз тачку A_2 с координатама $x_2 = -\alpha$, $y_2 = o$) $y = \mathfrak{A}_2 (x + \alpha)$.

За пресек тих тетива у M постоји осем те две једначине још и ова трећа: $y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$ за то, што тачка M није само тачка оних тетива, него у једно и елипсина.

Прве две једначине дају $\mathfrak{A}_1 = \frac{y}{x - \alpha}$ и $\mathfrak{A}_2 = \frac{y}{x + \alpha}$, за то $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \frac{-y^2}{\alpha^2 - x^2}$, или ако за y^2 узмемо његову вредност из треће једначине,

$$1.) \qquad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

За тангенту угла у M између спрегнутих тетива, узев ју t, имамо по § 47. $t = \frac{\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2}{1 + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}$, или ако за $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ узмемо горње вредности за y из елипсине једначине,

$$2.) \qquad t = -\frac{2\alpha\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)y}.$$

Овај израз показује да је угао између спрегнутих тетива на великој оси свакад *туп*, осем тога да је највећи при $y = \beta$, т. ј. за тетива која се стичу у једном крају мале осе.

Ако су тетива на малој оси, онда добијамо за тангенту њихова међусобна нагиба

$$3.) \qquad \tau = \frac{2\alpha^2\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)x},$$

из чега се види да је угао између таких тетива свакад *оштар* а најмањи за $x = \alpha$, т. ј. кад се спрегнута тетива стичу у једном крају велике осе.

γ.) ИПЕРБОЛА.

§. 86.

Једначина је иперболе по §. 57.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{ax + x^2}, \text{ а по §. 59.}$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}.$$

При првој је једначини почетак у десном темену, a пак значи велику осу, b малу; при другој је једначини почетак у средини оса и α значи пола велике осе, β пола мале осе.

Служили се ма којом тих једначина морамо доћи до истих резултата. Због олакшице узмимо за даље изстраге једначину

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}.$$

При овој једначини мала оса лежи у ординатној оси. Израђена једначина по x показује

$$x = \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{y^2 + \beta^2},$$

дакле да свакој ординати одговарарају две по величини једнаке, по положају пак противне абсцисе, а то ће толико рећи, да (при претпостављеном односу) ординатна оса дели иперболу на два потпуно једнака, према њој симетрично положена дела, један на положној страни абсцисне осе, други на одречној.

У § 57. видели смо да и абсцисна оса дели иперболу на два подпуно једнака, према њој симестрично лежећа дела.

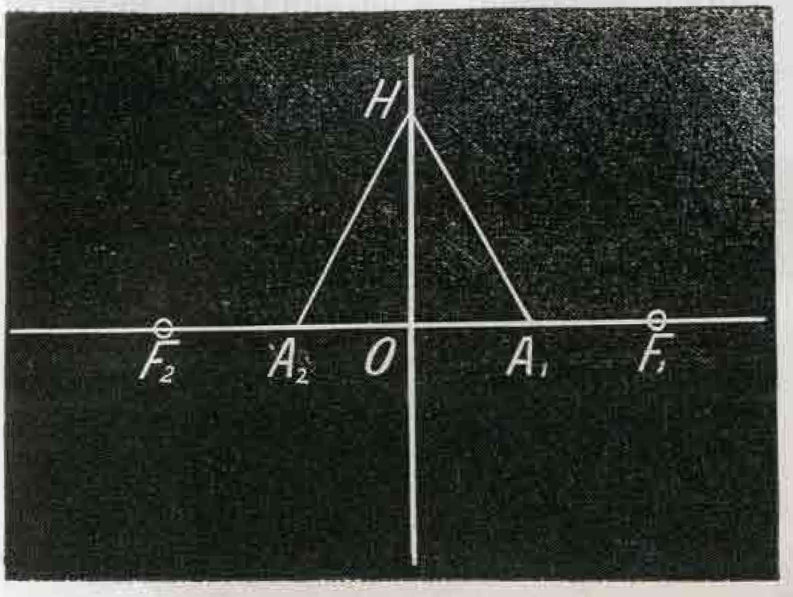
Иперболa дакле састоји се из два потпуно једнака дела, који леже симетрично с обе стране ординатне осе. Сваку пак тих половина дели абсцисна оса на два потпуно једнака дела, који леже симетрично с обе њезине стране. По томе ипербола има укупно четири потпупо једнака крака, који леже симетрично према координатним осама и који се пружају у бескрајност, удаљујући се од тих оса све већма.

§. 87.

1.) Подвргав иперболину једначину $y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$ онакој истој изтрази као у § 73. елипсу, уверавамо се: да и у иперболи има две тачке у абсцисној оси, са којих је сваки потег на какву иперболину тачку рационалан број, на кратко да и *ипербола има две жиже*, у свакој својој половини по једну, а у међусобном отстојању $2x_1 = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Овај израз зове се иперболино *вансређе*. Жиже проналазимо по овом обрасцу или рачуном или постројем, подобним ономе при елипси. Одмеримо на ординатној оси (сл. 44.), $OH = \beta$ т ј $= \frac{1}{2}$ мале осе и саставимо H са A_1 (или A_2) крајем велике осе (теменом иперболе.) Из правоуглог троугла HOA_1 (или HOA_2) имамо тако $A_1H = \sqrt{\overline{OA_1}^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, дакле

Сл. 44.



вансређе x_1. То A_1H узмемо дакле у шестар и пресечемо њим из O обсцисну осу у F_1 и F_2, па ће ове две тачке бити тражене иперболине жиже.

2.) Почем је $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ свагда већи од α, то обе иперболине жиже не леже између крајева велике осе, него преко њих, једна одонуд једнога темена, друга одонуд другога темена.

Ако израчунимо оба потега неке иперболине тачке M на онакав исти начин као у § 74. за елипсу, то се показује да је један

$$F_1M = \frac{x_1 x}{\alpha} - \alpha, \text{ а онај други}$$

$$F_2M = \frac{x_1 x}{\alpha} + \alpha.$$

Разлика дакле између већега и мањега потега биће за сваку тачку

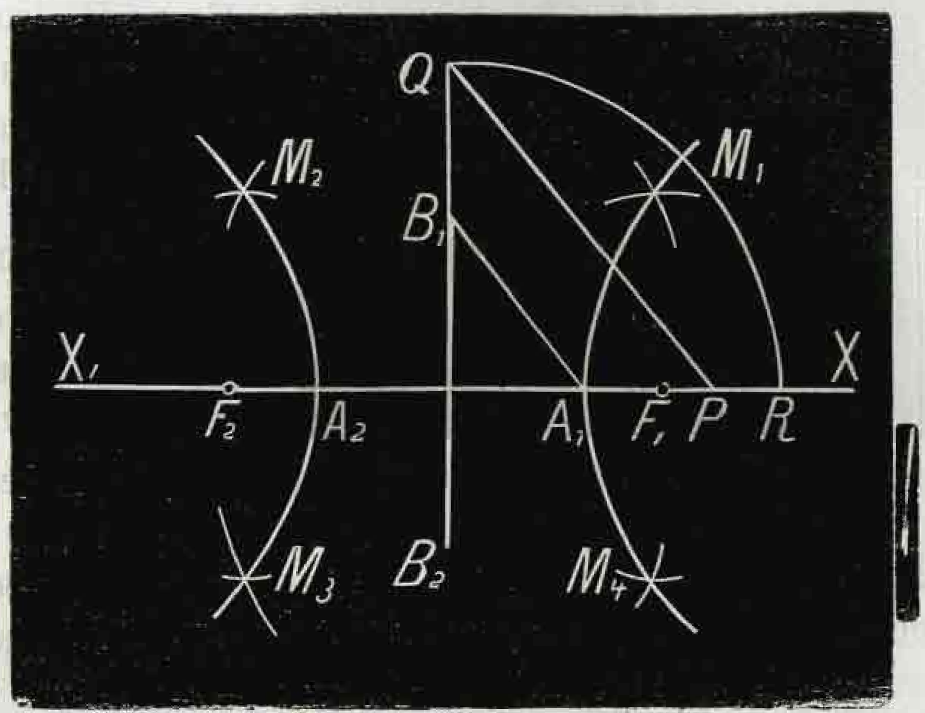
$F_2M - F_1M = 2\alpha$, што чини ново иперболино својство, подобно једном елипсином: *да је разлика од свака два спрегнута њезина потега свагда једна иста и равна великој оси.*

И овде члан $\frac{x_1 x}{\alpha}$ у потезима није ни шта друго но опет четврта геометријска сразмерница од половине велике осе α, вансређа x_1 и дотичне абсцисе x. Тај се члан и овде онако исто постројава као у § 75. при елипси, само је сада $RA_1 = OR - A_1O = \frac{x_1 x}{\alpha} - \alpha = F_1M$, а $RA_2 = RO + OA_2 = \frac{x_1 x}{\alpha} + \alpha = F_2M$.

§. 88.

Ако ваља да направимо иперболу, то ћемо определити што више њезиних тачака, изнашав њихне потеге или рачуном или постројем, по обрасцима пређашњега §-а. Са сваким спрегом потега имаћемо четири тачке, у свакој координатној четврти по једну (Сл. 45.).

Сл. 45.



При томе ваља да знамо: 1.) или обе осе, 2.) или једну осу и параметар, 3.) или једну осу и вансређе, 4.) или вансређе и параметар.

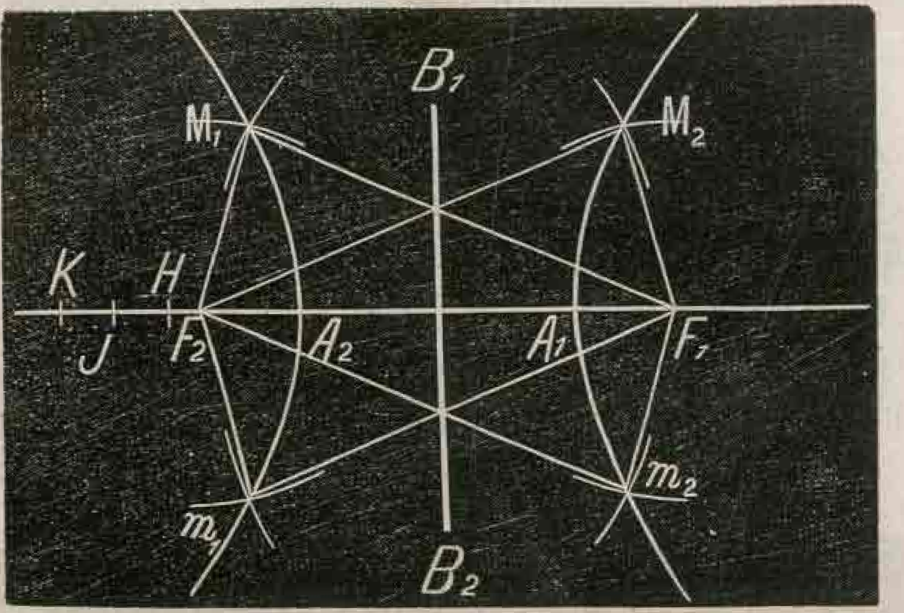
У првом случају изнађемо најпре вансређе, а овим после жиже и потеге. У другом случају изнађемо из израза $D = \frac{b^2}{a} = \frac{2\beta^2}{\alpha}$ (§ 57.) не познату осу, а после на пређашњи начин вансређе, жиже и потеге. У трећем случају докучимо најпре не познату осу из израза за вансређе $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, а после све остало као пре. Најпосле у четвртом случају определимо најпре из једначина $D = \frac{2\beta^2}{\alpha}$ и $x_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ обе осе, па онда све друго као пре.

§. 89.

У иперболином својству да је разлика од сваке спреге два потега једна иста и свагда равна великој оси, основан је други много удеснији начин за постројење ипрболе.

Пошто утврдимо жиже F_1 и F_2 (сл. 46.), узмемо на аб-

Сл. 46.



сцисној оси неку тачку H (после још и више других), па напишемо из жижа најпре с полупречником A_1H лукове M_1m_1 и M_2m_2, а после с полупречником A_2H пресечемо те лукове у тачкама M_1, M_2, m_1 и m_2, које све четири морају бити тачке иперболе, јер је $F_1M_1 - F_2M_1 = F_2M_2 - F_1M_2 = F_1m_1 - F_2m_1 = F_2m_2 - F_1m_2 = 2a$.

На тај начин са сваком тачком у абсцисној оси можемо да изнађемо по четири иперболине тачке, а са свима њима да направимо иперболу.

Овде се опет намеће сумња хоће ли се из жижа онако написани луци свагда сећи?

Почем се један пише из F_1 с полупречником A_1H, а други из F_2 с полупречником A_2H (или изврнуто), то мора бити свагда.

$$A_1H + A_2H > F_1F_2.$$

Док је дакле мањи полупречник $A_2H > A_2F_2$, дотле ће бити и онај већи $A_1H > A_1F_2$, дакле и $A_1H + A_2H > (A_1F + A_2F_1)$, т. ј. $> F_1F_2$ и луци се с тога морају сећи.

Ако је $A_2H = A_2F_2$, онда је $A_1H = A_1F_2$, дакле $A_2H + A_1H = A_2F_2 + A_1F_2 = F_1F_2$ и луци се опет секу, али у самој абсцисној оси у тачкама A_1 и A_2, т. ј. у теменима.

Најпосле ако је $A_2H < A_2F_2$, онда је и $A_1H < A_1F_2$, дакле и $A_2H + A_1H < A_2F_2 + A_1F_2$, т. ј. $< F_1F_2$, због чега се у том случају луци ни како не могу сећи.

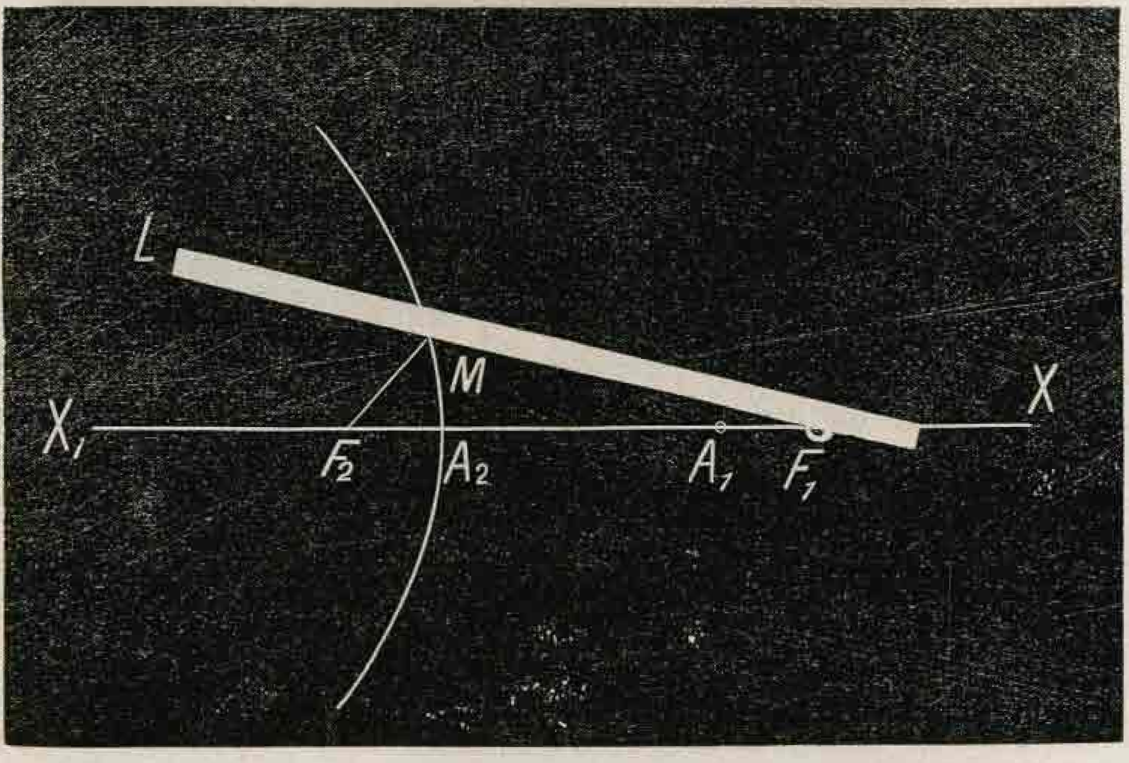
По свему томе само док је отстојање тачке H од оближњега темена мање од даљине између тога темена и оближње жиже сећи ће се они из жижа са A_1H и A_2H као полупречницима написани луци и даваће тачке иперболе, иначе ни како.

§. 90.

Исто иперболично својство, да је разлика од два спрегнута потега свагда равна великој оси, даје основу за цртање иперболе једним само наставним или непрекидним влаком.

Узмемо пружник LF_1 (Сл. 47.) и утврдимо један његов крај у једној жижи F_1 тако, да се око ове може окретати и острица му се при томе тачно може сложити са абсцисном осом

Сл. 47.



После узмемо конац који је за дужину велике осе краћи од пружникове дужине F_1L, па један крај тога конца утврдимо у другом крају пружника L, а други крај у другој жижи F_2, Сад узмемо оловку и њезиним врхом затегнемо конац уз пружникову острицу тако, да се ова сложи са абсцисном осом, па држећи конац једнако затегнут, одмичемо пружник од абсцисне осе по мало даље (најпре у једну, после у другу страну). Траг који при томе остави оловка за собом биће један део иперболе а ако тако урадимо и из друге жиже имаћемо целу иперболу јер је не престано

$$LF_1 - (LM + MF_2) = a, \text{ дакле}$$

$$F_1M - F_2M = a$$

§. 91.

1.) Обе иперболине осе управно секу и преполављају сва оној другој паралелна тетива. Увиђавна истина без доказа.

2.) Свако кроз почетак O (сл. 48 повучено тетиво HH_1 преполовљено је у тој тачци. О томе се уверавамо скопчавајући иперболину једначину $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - a^2}$ с једначином кроз почетак идућа тетива $y = Ax$, јер тако добијамо

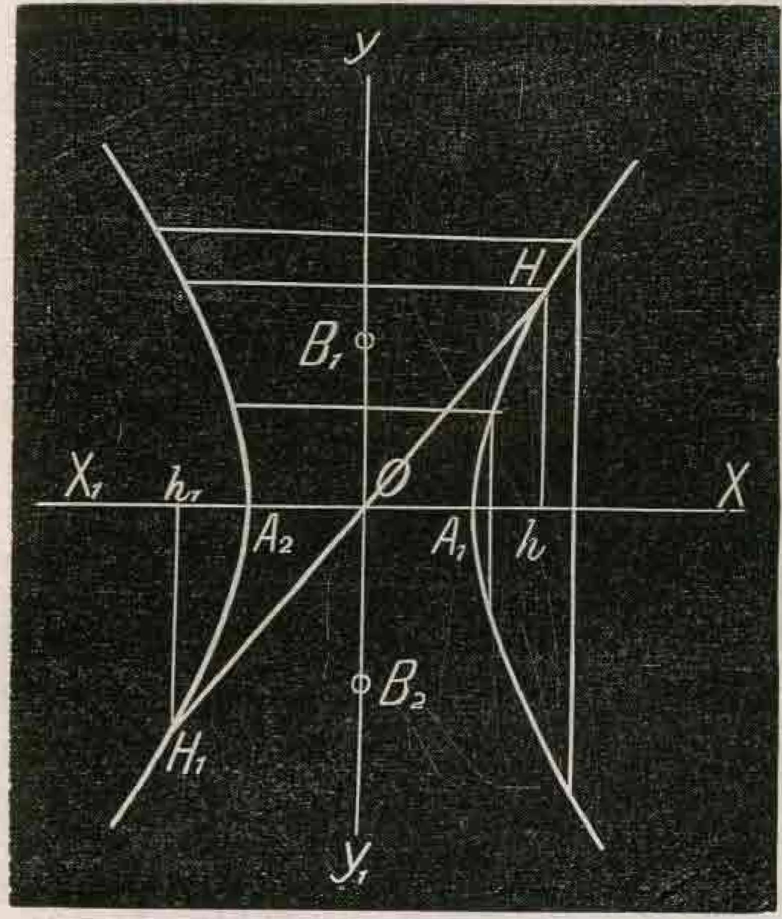
$$x = \pm \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - A^2\alpha^2}} \text{ и}$$

$$y = \pm \frac{A\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - A^2\alpha^2}},$$

а то ће рећи да је по величини $Hh = H_1h_1$, $Oh = Oh_1$, дакле и $OH = OH_1 = \frac{1}{2} HH_1$.

Тачка O (пресек и среда обеју оса) зове се с тога *средиште* иперболино, а свако крозањ повучено тетиво зове се *пречник*.

Сл. 48.



3.) Оба пређашња израза за координате крајева каква пречника показују јасно, да је пречник само дотле можан, док је $\beta > A\alpha$, дакле $A < \frac{\beta}{\alpha}$.

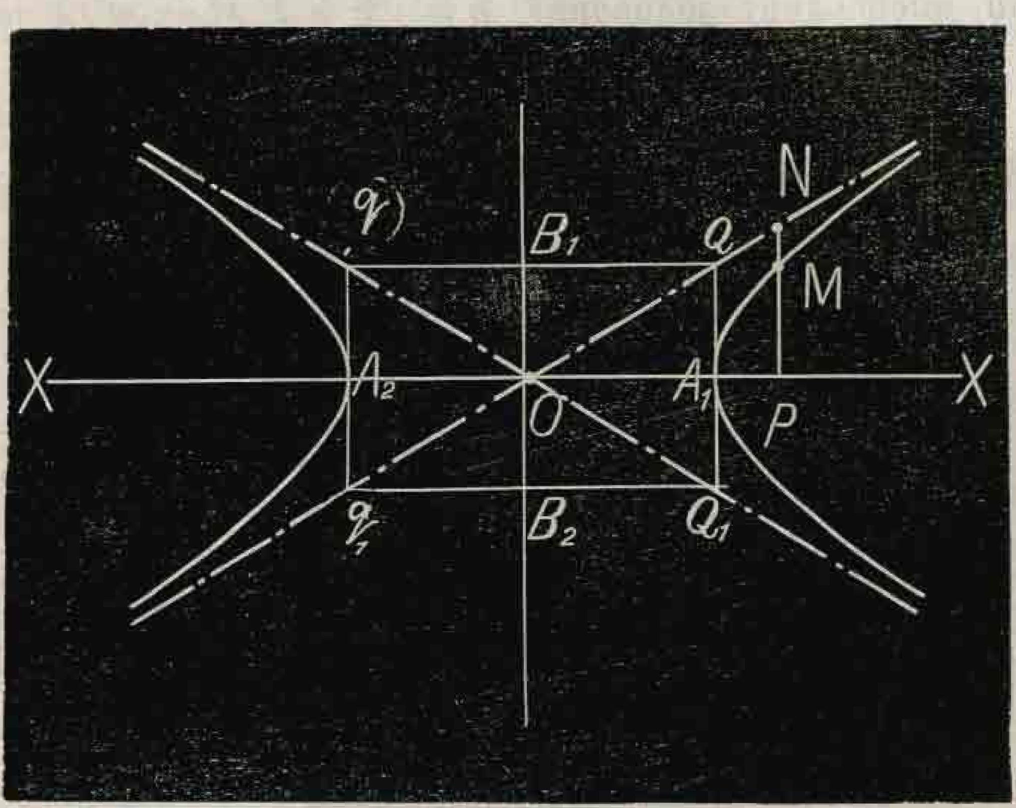
За $A > \frac{\beta}{\alpha}$ постају обе координате имађинарне и пречник дакле добија такав положај, да иперболу ни како не може да стигне и сече.

§. 92.

При $A^2\alpha^2 = \beta^2$, дакле $A = \pm \frac{\beta}{\alpha}$ постају координате пречникових крајева бескрајне. Пречник дакле, који је према абсцисној оси тако положен, да је тангента његова нагиба $A = \pm \frac{\beta}{\alpha}$, сече иперболу тек на бескрајној даљини.

Та два знаменита пречника добијамо, ако у ма ком темену

Сл. 49.



н. п. A_1, (Сл. 49) подигнемо на абсцисну осу једну управну, на њој $A_1Q = A_1Q_1 = \beta$ одмеримо и после Q и Q_1 са средиштем O саставимо и на обе стране (на више и на ниже) продужимо, јер на тај начин постаје $tg\ QOA_1 = + \frac{\beta}{\alpha}$ и $tg\ Q_1OA_1 = - \frac{\beta}{\alpha}$.

Ако су $OP = x$ и $PM = y$ координате неке иперболине тачке M, а y_1 ордината оној истој абсциси одговарајуће пречникове тачке N, то је једначина иперболе $y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (x^2 - \beta^2)$,

а једначина пречника, подигнута на квадрат, $y_1{}^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2$.

Прва одузета од друге даје.

$$y_1{}^2 - y^2 = \beta^2 \text{, или}$$

$$(y_1 + y)(y_1 - y) = \beta^2 \text{ и отуда } y_1 - y, \text{ т. ј.}$$

$$MN = \frac{\beta^2}{y_1 + y}.$$

Сад, како y_1 и y при увећању абсцисе x такођер све већи бивају, то MN при томе бива све мање док најпосле за $x = \infty$ сасвим не изчезне. Она два пречника дакле QO и OQ_1 тога су знаменита својства: да им се иперболини крајеви све већма приближују, без да се њима и када састану.

Ти се пречници зову *асимптоти*, а угао QOQ_1 који они између се према иперболиним крацима праве, зове се *асимптотни* угао.

Из онога што је казано под 3.) види се, да су ти пречници међа између хиперболиних можних и не можних пречника.

§. 93.

1.) Као једначину иперболе, кад је почетак у пресеку оса, имамо

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2},$$

где β значи пола мале осе, α пола велике осе.

Ако ставимо $\beta = \alpha$, следује као једначина особите иперболе, која се зове *равнострана*,

$$y = \pm\sqrt{x^2 - \alpha^2}.$$

Параметар је те иперболе, због $D = \frac{b^2}{a} = \frac{2\beta^2}{\alpha}$, $D = 2\alpha$, т. ј. раван великој (или малој) оси, а вансређе јој је $x_1 = \alpha\sqrt{2}$.

2.) Ако су x_1 и y_1, x_2 и y_2 координате двеју иперболиних тачака, имамо $y_1 = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x_1^2 - \alpha^2}$ и $y_2 = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x_2^2 - \alpha^2}$, отуда

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{x_1^2 - \alpha^2}{x_2^2 - \alpha^2} = \frac{(x_1 + \alpha)(x_1 - \alpha)}{(x_2 + \alpha)(x_2 - \alpha)}.$$

Из овога се види да је размера између квадрата двеју иперболиних ордината равна размери између производа од повећаних и смањених обсциса са пола велике осе.

Да смо место простије једначине узели ону другу $y = \frac{b}{\alpha}\sqrt{ax + x^2}$, где је почетак у десном темену, добили би били

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{(a + x_1)\, x_1}{(a + x_2)\, x_2},$$

што показује да при таком односу између ординатних квадрата постоји онака иста размера као између производа од сваке абсцисе и збира од абсцисе и велике осе.

3.) Из простије иперболине једначине следује

$$\frac{y^2}{x^2 - \alpha^2} = \frac{y^2}{(x + \alpha)\,(x - \alpha)} = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

што значи да је размера од квадрата сваке ординате према производу од повећане и смањене абсцисе за пола велике осе свагда стална и равна размери између квадрата пола мале осе и квадрата пола велике осе.

Из оне друге иперболине једначипе пак, т. ј. из

$y = \frac{b}{a} \sqrt{ax + x^2}$ показује се

$$\frac{y^2}{ax + x^2} = \frac{y^2}{x\,(a + x)} = \frac{b^2}{a^2},$$

а то ће рећи да је при таком односу размера од квадрата сваке ординате и производа од абсцисе помножене са збиром од абсцисе и велике осе свагда стална и равна размери између квадрата мале осе и квадрата велике осе.

§. 94.

Видели смо да од елипсине једначине правимо иперболину, ако у оној узмемо $- \beta^2$ место $+ \beta^2$. По томе изрази под *p.*) *q.*) и *r.*) у § 84 показују се за иперболу оваки:

$p.)\ \alpha^2 y^2 - \beta^2 x^2 + \alpha^2 \beta^2 = o$

$q.)\ \alpha^2 y^2 - \beta^2 x^2 + \alpha^2 \beta^2 > o.$

$r.)\ \alpha^2 y^2 - \beta^2 x^2 + \alpha^2 \beta^2 < o.$

Свака тачка при иперболи, која се добија једначином *p.*) лежи у самој иперболи, т. ј. тачка је иперболе. Тачка пак за коју вреди израз *q.*) лежи изван иперболе с поља, а тачка коју преставља израр *r.*) лежи изван иперболе унутри.

г.) Средиште и пречници влакова друга реда.

§. 95.

Видели смо у § 79. да у елипси, а у § 91. да у иперболи има једна тачка, у којој су сва кроз њу повучена тетива преполовљена. Ту смо тачку назвали *средиштем.* Сада да видимо има ли така тачка и у параболи? Но најбоље ће бити да то питање решимо у опште за сва три влака друга реда, испитујући њихову општу једначину јоште и у том погледу.

У § 52. видели смо да је општа једначина влакова друга реда облика

$$Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = o$$

где су A, B, ... F стални сачинилци.

Пренесимо ову једначину у другу, такођер ортогоналну, пређашњој напоредну (паралелну) систему, узимајући $x + \alpha$ место x и $y + \beta$ место y. Излази нова једначина

$$Ay^2 + Bx^2 + Cyx + D_1 y + E_1 x + F_1 = o,$$

у којој су сачинилци A, B и C они исти који пре, а од нових је $D_1 = 2A\beta + C\alpha + D$, $E_1 = 2B\alpha + C\beta + E$, $F_1 = A\beta + B\alpha^2 + C\alpha\beta + D\beta + E\alpha + F$), што открива сам посао претварања координата.

Сад изнађимо бројеве α и β, који су још не опредељени под тим условом, да чланови с x и y нестану, а то ће бити ако је D_1, т. ј.

$$2A\beta + C\alpha + D = o \text{ и } E_1. \text{ т. ј.}$$
$$2B\alpha + C\beta + E = o.$$

Из ових једначина следује

$$\alpha = \frac{2AE - CD}{C^2 - 4AB},\ \beta = \frac{2BD - CE}{C^2 - 4AB} \ . \ . \ . \ . \ . \quad m).$$

После таког координатног преображаја показује се као једначина влакова друга реда

$$Ay^2 + Bx^2 + Cxy + F_1 = o.$$

У овој једначини можемо место $+ x$ и $+ y$ да узмемо $- x$ и $- y$, без да се она и најмање повреди, а то је јасан знак, да свакој тачци $x = + a$, $y = + b$ одговара друга $x = - a$, $y = - b$ и да дакле обе те тачке леже у једном истом правцу који иде кроз нови координатни почетак, у једнаком отстојању од њега, једна горе десно, друга лево доле.

По томе сва кроз нови почетак повучена тетива бивају у њему преполовљена и он је дакле *средиште* дотичнога влака.

Но ако се обазремо на координате нова почетка α и β, то видимо да такога средишта има у домашном отстојању само док је $C^2 - 4AB \underset{>}{<} o$, а да те координате постају ∞ велике ако је $C^2 - 4AB = o$. У §. 54. пак видели смо да је $C^2 - 4AB < o$ (одречно) при елипси, $C^2 - 4AB > o$ (положно) при иперболи, $C^2 - 4AB = o$ при параболи.

Тако дакле само елипса и ипербола имају средиште а парабола нема, осем ако би при параболи замислили средиште на бескрајној даљини.

§. 96.

Пречником каква влака (за сада друга реда) називамо сваку ону праву или криву линију, која преполавља сва међусобно напоредна (паралелна) тетива, у том влаку ма како повучена.

По §. 59. једначина елипсе је

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (p.$$

а по §. 38. једначина пруге

$$y = \mathfrak{A} x + \mathfrak{B} \; . \; . \; . \; . \; . \; (q.$$

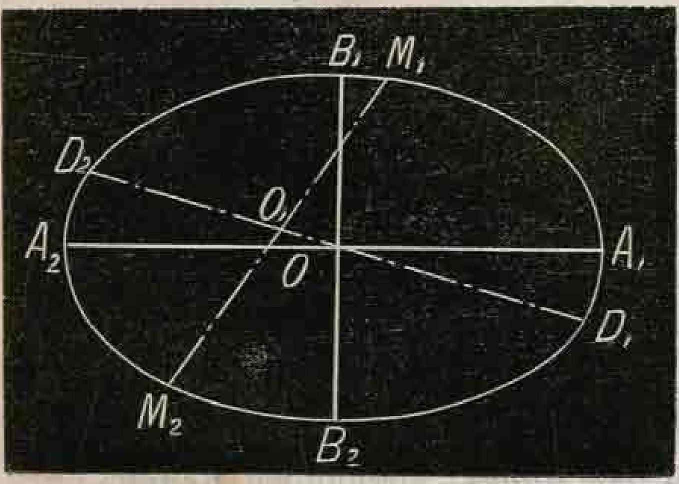
Ако узмемо да је ова пруга $q.$) тетиво у елипси, онда за опредељење његових крајева M_1 и M_2 (сл. 50.), као тачака у једно и елипсиних, следује свезом оних двеју једначина

$$(\alpha^2 \mathfrak{A}^2 + \beta^2) x^2 + 2\alpha^2 \mathfrak{A}\mathfrak{B} x + \alpha^2 (\mathfrak{B}^2 - \beta^2) = o,$$

или ако с $\alpha^2 \mathfrak{A}^2 + \beta^2$ разделимо,

$$x^2 + \frac{2\alpha^2 \mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\alpha^2 \mathfrak{A} + \beta^2} . x + \frac{\alpha^2 (\mathfrak{B}^2 - \beta^2)}{\alpha^2 \mathfrak{A}^2 + \beta_2} = o \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (r.$$

Сл. 50.



Сад нека су x_1 и y_1, x_2 и y_2 спрежнице тачака M_1 и M_2; биће $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \chi_1$ и $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \eta_1$ спрежнице тетивовог средишта O_1, а x_1 x_2 корени једначине (r.

По теорији једначина мора бити први сачинилац $\frac{2\alpha^2 \mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\alpha^2 \mathfrak{A} + \beta^2} = -(x_1 + x_2)$, дакле

$$-\frac{\alpha\mathfrak{A}^2\,\mathfrak{B}}{\alpha^2\mathfrak{A}+\beta^2}=\tfrac{1}{2}\,(x_1+x_2)=\chi_1,$$

а с овом вредности из једначине тетива (q.

$$\frac{\mathfrak{B}\,\beta^2}{a^2\mathfrak{A}+\beta^2}=\mathfrak{A}\chi_1+\mathfrak{B}=\eta_1.$$

Ова два израза дају

$$\frac{\eta_1}{\chi_1}=-\frac{\beta^2}{\mathfrak{A}\alpha^2},$$

а како је овај количник не зависан од $\mathfrak{B}$, то он постоји и за сва друга, тетиву M_1M_2 паралелна тетива, јер је $\mathfrak{A}$ код свију њих једно исто. Дакле је за сва средишта тих паралелних тетива O_1, O_2, O_3, ... , којих су координмте односно (χ_1, η_1) (χ_2, η_2), (χ_3, η_3) . . . . . .

$$\frac{\eta_1}{\chi_1}=\frac{\eta_2}{\chi_2}=\frac{\eta_3}{\chi_3}=\ldots\ldots=-\frac{\beta^2}{\mathfrak{A}\alpha^2}$$

По томе, ако с x и y преставимо у опште координате средишта ма кога од тих тетива, стоји

$$\frac{y}{x}=-\frac{\beta^2}{\mathfrak{A}\alpha^2}$$

и отуд као једначина пруге која иде кроз сва средишта, дакле *једначина пречника*,

$$1.)\quad y=-\frac{\beta^2}{\mathfrak{A}\alpha^2}\cdot x.$$

Ова једначина показује јасно, да је пречник свију, некоме тетиву M_1M_2 паралелних тетива *пруга* D_1OD_2, која иде кроз координатни почетак O, а тај је у једно елипсино средиште; дакле је тај елипсин пречник тетиво што иде кроз њезино средиште.

Ако је положај једнога, ма кога између паралелних тетива, н. п. M_1M_2, познат, то је познато $\mathfrak{A}$ и тада је по горњој пречниковој једначини 1.) тангента угла између свакога пречника и абсцисне осе, $\mathfrak{A}_1=-\frac{\beta^2}{\mathfrak{A}\alpha^2}$.

На против ако је позната једначина каквог елипсинога пречника D_1D_2, то по истој једначини 1.) мора бити тангента нагиба ма кога од паралелних тетива што тај пречник преполавља, (због $\mathfrak{A}_1 = -\frac{\beta^2}{\mathfrak{A}\alpha^2},$) $\mathfrak{A} = -\frac{\beta^2}{\mathfrak{A}_1\alpha^2}$, а једначина ма кога тих тетива

$$2.)\quad y = -\frac{\beta^2}{\mathfrak{A}_1\alpha^2}x + \mathfrak{B}.$$

§. 97.

Знамо већ да се иперболина једначина од елипсине цигло тиме разликује, што у њој стоји $-\beta^2$ где у овој стоји $+\beta^2$.

Од пређашњих резултата дакле добијамо нужне резултате о пречницима при иперболи, ако свуда место $+\beta^2$ узмемо $-\beta^2$.

По томе као једначину пречника у иперболи, који преполавља целу поворку неком тетиву $y = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$ паралелних тетива, налазимо

$$y = \frac{\beta^2}{\mathfrak{A}\alpha^2}x.$$

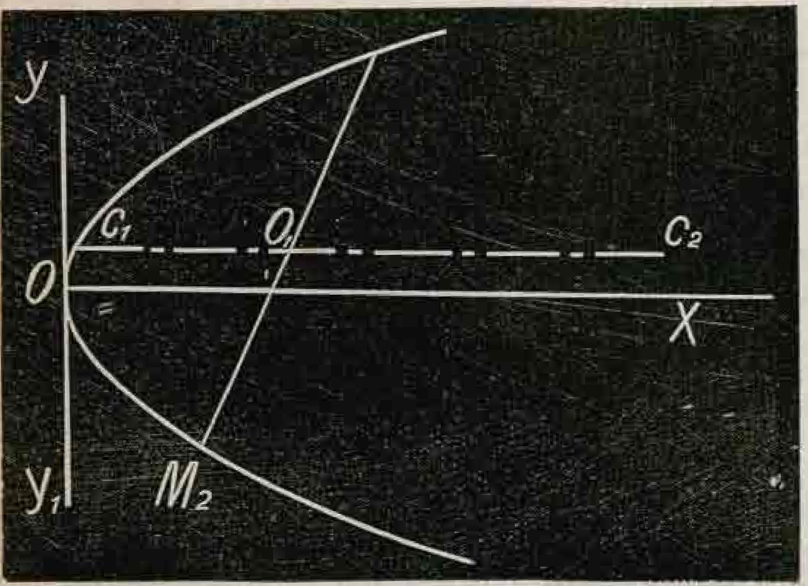
§. 98.

Једначина је параболе $y^2 = Dx$, а једначина пруге, која ваља да је у параболи тетиво, $y = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$.

Ове две једначине скопчане дају као услов да је она пруга доиста тетиво у параболи, $y^2 - \frac{D}{\mathfrak{A}} \cdot y + \frac{\mathfrak{B}D}{\mathfrak{A}} = o.$

Ординате крајева M_1 и M_2 тога тетива M_1M_2 (сл. 51.) јесу корени последње једначине, а $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ је ордината тетивовога средишта O.

Сл. 51.



Ставимо $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \eta_1$, а одговарајућу абсцису χ_1.

По својству сачинилаца у свакој вишој једначини мора бити $y_1 + y_2 = \frac{D}{\mathfrak{A}}$, дакле $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, т. ј. $\eta_1 = \frac{D}{2\mathfrak{A}}$.

Како је ова ордината η_1 сасвим не зависна од $\mathfrak{B}$, дакле за средишта свију ономе тетиву M_1M_2 паралелних тетива једна иста, то имамо, престављајући ординату ма кога тих средишта са y,

$$y = \frac{D}{2\mathfrak{A}},$$

а то показује јасно, да је пруга која пролази кроз сва средишта паралелних тетива у параболи, т. ј. параболин пречник ни шта друго но параболиној оси *напоредна* (паралелна) *пруга* у отстојању $\frac{D}{2\mathfrak{A}}$ од ње, у слици пруга C_1C_2.

Што смо доказали за овај пречник C_1C_2 можемо тако исто да докажемо и за сваки други, јер је положај тетива M_1M_2 узет био сасвим од воље. Отуда пак следује да су пречници параболини сви пруге паралелне њезиној оси, и обрнуто да је свака параболиној оси паралелна пруга параболин један пречник.

Ако је дакле $y = \mathfrak{A}_1$ једначиа таке пруге, т. ј. једначина неког параболиног пречника, то је $\mathfrak{A}_1 = \frac{D}{2\mathfrak{A}}$ и отуда $\mathfrak{A} = \frac{D}{2\mathfrak{A}_1}$ тангента нагиба сваког оних тетива, што тај пречник преполавља, а једначина једнога између њих

$$y = \frac{D}{2\mathfrak{A}_1}x + \mathfrak{B}.$$

Обрнуто, ако је једначина неког параболиног тетива $y = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$, онда је, због $\mathfrak{A} = \frac{D}{2\mathfrak{A}_1}$, $\mathfrak{A}_1 = \frac{D}{2\mathfrak{A}}$ отстојање дотичнога пречника од осе.

§. 99.

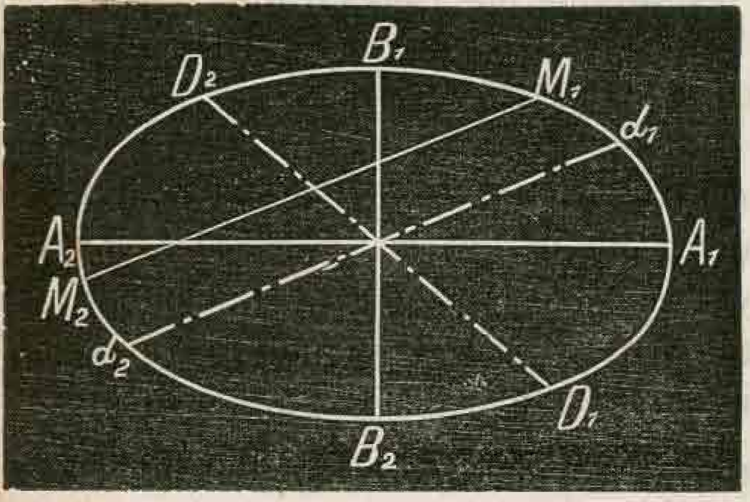
Све дојакошње истраге о пречницима влакова друга реда показују да су осе тих влакова такођер њихови пречници, али да при њима постоји тај особити случај, да оне као пречници секу и преполављају скуп паралелних тетива под *правим* углом, својство које лежи у самом појму *оси* каквога влака.

§. 100.

Из израза $\mathfrak{A}_1 = - \frac{\beta^2}{\mathfrak{A}\alpha^2}$ у §. 96. следује $\mathfrak{A} = - \frac{\beta^2}{\mathfrak{A}_1\alpha^2}$, дакле и $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = - \frac{\beta^2}{\alpha^2}$. Ови изрази откривају за *елипсу* још ова њезина својства:

1.) Ако је у сл. 52. D_1D_2 један елипсин пречник и $y = \mathfrak{A}_1x$ његова једначина, то је једначина тетиву M_1M_2 паралелнога пречника d_1d_2 (по §. 96. и §. 47. под 2.) $y = - \frac{\beta^2}{\mathfrak{A}_1\alpha^2} \cdot x = \mathfrak{A}x.$

52.



Пођемо ли пак од пречника d_1d_2, и његова је једначина $y = \mathfrak{A}x$, то је по прво поменутом §-у једначина паралелног пречника тетивама што пречник d_1d_2 преполавља, $y = - \frac{\beta^2}{\mathfrak{A}\alpha^2}\ x = \mathfrak{A}_1x$ и дакле овај други пречник ни какав други но D_1D_2.

Таки пречници који узајмно преполављају другоме паралелна тетива, зову се *спрегнути пречници* (конјуговани), а угао који међу собом склапају зове се њихов *спрежни угао*.

2.) Почем је први пречник D_1D_2 сасвим вољно узет, то у свакој елипси има безбројно много спрегнутих пречника.

3.) Спрегнути пречник D_1D_2 са неким датим пречником d_1d_2 налазимо, ако неко овоме паралелно тетиво M_1M_2 преполовимо и кроз његово средиште O_1 и елипсино средиште повучемо тетиво D_1D_2. Ово ће бити тражени други пречник.

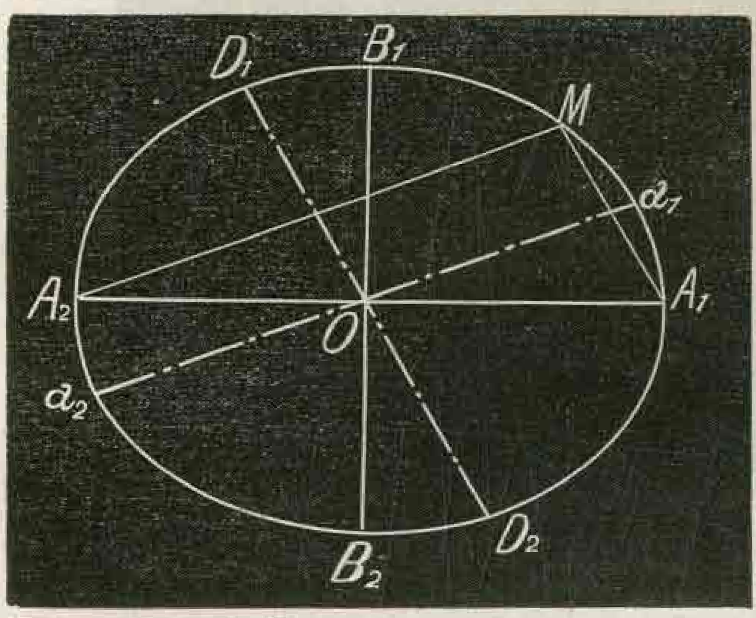
4.) Из горњега израза $\mathfrak{A} = - \frac{\beta^2}{\mathfrak{A}_1\alpha^2}$ следује за $\mathfrak{A}_1 = o$, $\mathfrak{A} = \infty$, а то ће рећи да ако један од спрегнутих пречника лежи у абсциcној (великој елипсиној) оси, онај други стоји нањ управно, дакле лежи у ординатној (малој елипсиној) оси. По томе елипсине су осе такођер спрегнути њезини пречници, али *правоугли*.

5.) Осем ових правоуглих спрегнуних пречника других нема, јер су једначине спрегнутих пречника $y = \mathfrak{A}x$ и $y = \mathfrak{A}_1 x$, а услов да буду управни тај је, да је $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = -1$ (§. 47.), па почем је при елипси $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, то би морало бити $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1$, а то је не могуће с тога што је при њојзи увек $\alpha > \beta$.

6.) Само при кругу, као елипсиној особености, може се тај услов испунити с тога, што је при њему $\beta = \alpha$. У кругу су дакле сви спрегнути пречници правоугли.

7.) Ако у сл. 53. повучемо спрегнутим тетивима MA_1 и MA_2 напоредне пречнике D_1D_2 и d_1d_2, то између углова ових пречника према абсцисној оси постоји онај исти услов, који за угле између спрегнутих тетива према тој оси, т. ј. $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ (§. 85.). Али то је (као што смо у почетку овога §. видели) у једно услов и за спрегнуте пречнике. По томе пречници D_1D_2 и d_1d_2 чине међу собом спрег.

Сл. 53.



У томе имамо врло прост начин за налазак спрегнутога пречника, кад је један дат. Повучемо датом пречнику, н. п. D_1D_2 паралелно тетиво A_1M, после повучемо спрегнуто тетиво A_2M и томе паралелан пречник d_1d_2; овај ће бити тражени други спрегнут пречник.

§. 101.

За *иперболу* налазимо с малом изменом оно исто што за елипсу. И ипербола

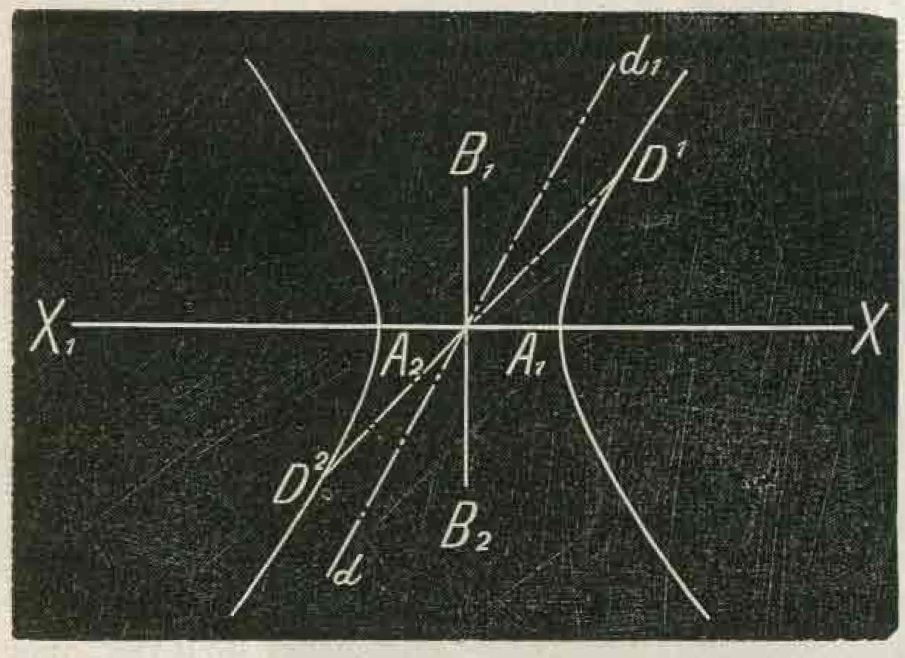
1.) има спрегнутих пречника и њихов је број 2.) бескрајан, 3.) кад је један дат, онај други налазимо онако исто као при елипси. Али као различна иперболина својства показују се ова:

4.) У § 91. под 3. видели смо да је иперболин какав пречник, кога је једначина $y = \mathfrak{A}x$ само дотле можан, док је

$\mathfrak{A} < \frac{\beta}{\alpha}$; за спрегнуте иперболине пречнике пак мора да постоји $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Ако дакле при иперболи повучемо какав можан пречник D_1D_2 (Сл. 54.), кога је једначина $y = \mathfrak{A}x$, то онај први услов $\mathfrak{A} < \frac{\beta}{\alpha}$ постоји, али за спрегнут му пречник d_1d_2, кога је једначина $y = \mathfrak{A}_1x$, због другог услова $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$, мора да је $\mathfrak{A}_1 > \frac{\beta}{\alpha}$; с тога је овај други пречник по оном истом §-у не можан, уображен, т. ј. тај други пречник иперболу ни како не достиже.

Сл. 54.



По томе, ако је од иперболина два спрегнута пречника један *реелан* (можан, доистан), онај је други свагда *имађнаран* (не можан, уображен); онако исто као за иперболине две осе.

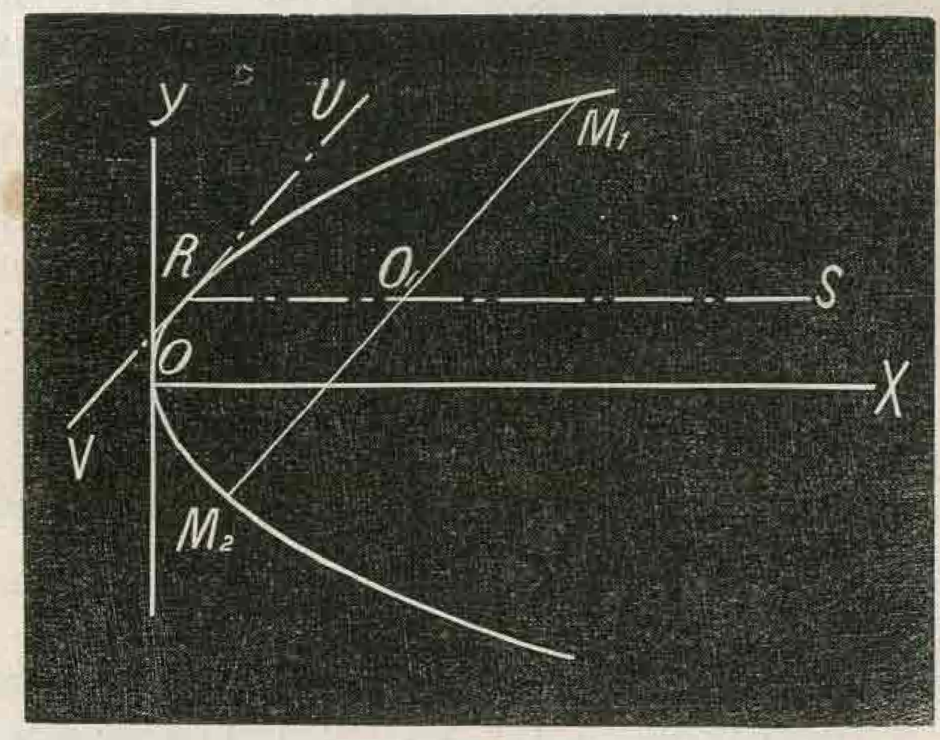
5.) Због $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ тангенте $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ имају свагда један исти знак, зато су угли D_1OA_1 и d_1OA_1 свагда или оба оштри, или оба тупи. Разлика дакле између та два угла, т. ј. спрежни угао D_1Od_1 ни како не може да буде другаче 90^0 или прав, осем ако је $\mathfrak{A} = o$, с тога $\mathfrak{A}_1 = \infty$, или ако је $\mathfrak{A}_1 = o$ и с тога $\mathfrak{A} = \infty$; али тада ти спрегнути пречници падају на саме координатне осе.

6.) За $\beta = \alpha$ постаје $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = 1$, а то показује да су угли D_1OA_1 и d_1OA_1 при равностраној иперболи свага један допуна другога до 90°.

§. 102.

При *параболи* је (сл. 55.) по § 98. за неку њезину тачку R

Сл. 55.



пруга $RS || OX$ један пречник. Нека је y_1 ордината тачке R

Да би дознали положај пруге UV, која овде заступа пречнику RS спрегнути пречник и која је дакле паралелна тетивима што RS преполавља, имамо по поменутом §у $y_1 = \frac{D}{2\mathfrak{A}}$, где је $\mathfrak{A}$ тангента нагиба између тетива или пречника UV и абсцисне осе, а из тога следује $\mathfrak{A} = \frac{D}{2y_1}$.

За правоугло спрегнута два пречника мора бити $\mathfrak{A} = \frac{D}{2y_1} = \infty$, а то је само ако је $y_1 = o$. Постоји ли ово, онда спрегнути пречници падају на координатне осе, а то показује да је од свију можних спрегова пречника у параболи, којих има безбројно много, само *један* правоугли, онај од оса OX и OY.

Доцније ћемо видети да је сваки спрегнут пречник UV у тачци R тангента (дирка) на параболи.

§. 103.

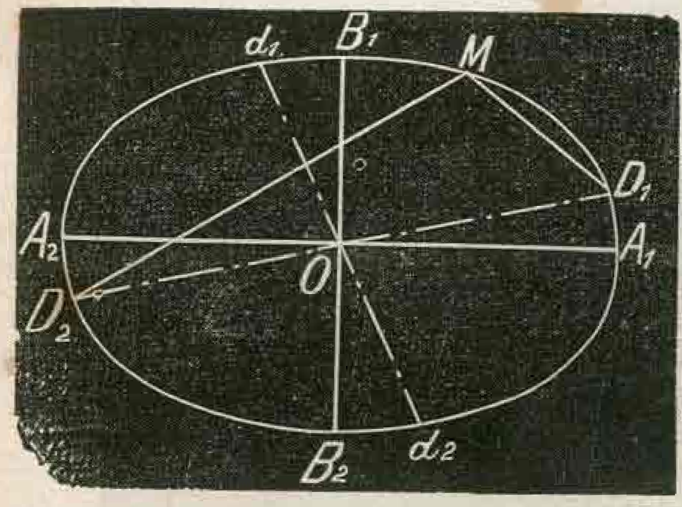
Повуцимо из крајева каквог елипсиног пречника D_1D_2 (Сл. 56.) на неку њезину тачку M тетива D_1M и D_2M. То су *спрегнута тетива* на пречнику D_1D_2 (§ 85). Спрежнице тачке D_1 нека су x_1 и y_2; за тачку D биће $-x_1$ и $-y_1$. Једначина једнога тетива је

$$y - y_1 = \mathfrak{A}(x - x_1),$$

а једначина другога тетива

$$y + y_1 = \mathfrak{A}(x + x_1).$$

Сл. 57.



Те две једначине дају због заједничке тачке M, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = \frac{y^2 - y_1^2}{x^2 - x_1^2}$, где x и y представљају координате тачке M. Но D_1 и M у једно су и елипсине тачке; зато још постоји $y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$ и $y_1^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x_1^2)$, а из тих једначина следује

$$\frac{y^2 - y_1^2}{x^2 - x_1^2} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2},$$ дакле је

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Овај исти израз добили смо у § 85. и за спрегнута тетива на великој оси. По томе између спрегнутих тетива неке тачке M на каквом пречнику D_1D_2 постоји онакав исти отношај, као између спрегнутих тетива исте тачке на великој оси.

За спрегнута тетива једне исте тачке у иперболи, било да су на доистној оси или на ма ком другом доистном пречнику, следује из израза под 1 у § 85. и из пређашњега, узев у оба двома $-\beta^2$ место $+\beta^2$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

д.) Једначине влакова друга реда у системи спрегнутих пречника. Ипербола у системи асимптота.

§. 104.

Пренесимо једначину елипсе $\alpha^2y^2 + \beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$ у другу косоуглу систему, задржав исти почетак.

За то нам служе обрасци I' и II' §. 33., ако у њима узмемо (због једнаког почетка) $\alpha = o$ и $\beta = o$, после чега изгледају овако:

$$x = x_1 . \cos v + y_1 . \cos w$$
$$y = x_1 . \sin v + y_1 . \sin w.$$

У овим обрасцима преставља v угао између нове и старе абсцисне осе, а w нагиб нове ординатне осе на стару абсцисну осу.

Узев у једначини елипсе место x и y њихове вредности по тима обрасцима за претварање координата, имамо нову једначину, изостављајући сказаљке нових координата:

$$(\alpha^2 . \sin^2 w. + \beta^2 . \cos^2 w.) y^2 + (\alpha^2 . \sin^2 v + \beta^2 . \cos^2 v) x^2 +$$
$$+ 2(\alpha^2 . \sin v \sin w + \beta^2 . \cos v \cos w) xy = \alpha^2 \beta^2$$

Да ова једначина буде онака изгледа као стара, мора бити

$$\alpha^2 . \sin v . \sin w + \beta^2 . \cos v . \cos w = o \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (k.$$

дакле, ако са $\cos v . \cos w$ разделимо,

$$tg v . \; tg w = - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (m.$$

чим се нова једначина претвара у

$$(\alpha^2 . \sin^2 w + \beta^2 \cos^2 w) y^2 + (\alpha^2 . \sin^2 v + \beta^2 . \cos^2 v) x^2 = \alpha^2 \beta^2 \; . \; . \; (n$$

Али израз под m) је онај исти који смо у § 100. нашли као услов између два спрегнута елипсина пречника. По томе једначина је под n) једначина елипсе у односу на два њезина спрегнута пречника као оса.

У тој једначини дакле значи сада v угао између велике осе и онога од спрегнутих пречника, који се узима за нову абсцисну осу, а w угао између велике елипсине осе и оног другог пречника што је нова ординатна оса.

Ставимо први од спрегнутих пречника (т. ј. онај на коме бројимо абсцисе) $= 2A$, а онај други (на коме се броје ординате) $= 2B$.

За $y = o$ мора бити $x = \pm A$, а за $x = o$ мора бити $y = \pm B$. Обзиром на то добијамо из једначине n)

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 \sin^2 v + \beta^2 \cos^2 v} \\ B^2 &= \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 \sin^2 w + \beta^2 \cos^2 w} \end{aligned} \right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (s.$$

а одатле

$$\alpha^2 sin^2 v + \beta^2 cos^2 v = \frac{\alpha^2\beta^2}{A^2}$$

$$\alpha^2 sin^2 w + \beta^2 cos^2 w = \frac{\alpha^2\beta^2}{B^2},$$

дакле ако ове вредности узмемо у једначину *(n.*, следује

$$1.)\quad A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$$

као *једначина елипсе у односу на два њезина спрегнута пречника,* од којих је један (онај на ком се броје абсцисе) $2A$, *а* онај други (на ком се броје ординате) $2B$.

§. 105.

1.) Ако у изразима под *s.*) у пређ. §-у место *sin* и *cos* од v и w уведемо тангенте, имамо

$$A^2 = \frac{\alpha^2\beta^2\,(1 + tg^2 v)}{\alpha^2 tg^2 v + \beta^2}, \qquad B^2 = \frac{\alpha^2\beta^2\,(1 + tg^2 w)}{\alpha^2 tg^2 w + \beta^2}.$$

Ако пак сада из ових израза и онога под *m.*) избацимо v и w, следује

$$(\alpha^2 - A^2).(\alpha^2 - B^2) = (A^2 - \beta^2).(B^2 - \beta^2), \text{ т.}$$

$$\alpha^4 - \beta^4 = A^2\,(\alpha^2 - \beta^2) + B^2\,(\alpha^2 - \beta^2), \text{ дакле}$$

$$2.)\quad A^2 + B^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

врло знаменит отнојшај између спрегнутих елипсиних пречника и њезиних оса.

2.) Међусобним множењем она два израза под *(s.* следује

$$A^2B^2 = \frac{\alpha^4\beta^4}{(\alpha^2 sin^2 v + \beta^2 cos^2 v).(\alpha^2 sin^2 w + \beta^2 cos^2 w)}.$$

Свршено множење у именитељу, кога међу тим замењујемо с N, показује

$N = \alpha^4 . sin^2 v . sin^2 w + \beta^4 . cos^2 v . cos^2 w + \alpha^2\beta^2\,(sin^2 v . cos^2 w + sin^2 w . cos^2 v)$, а из израза под *k.)* у пређ. §-у, ако га подигнемо на квадрат, следује

$\alpha^4 . sin^2 v . sin^2 w + \beta^4 . cos^2 v\, cos^2 w = - 2\alpha^2\beta^2 sin\, v . sin\, w . coc\ v .\ cos\, w,$
дакле је, ако заменимо ову вредност у именитељу,

$$N = \alpha^2\beta^2 (sin^2 v . cos^2 w - 2 sin\, v . sin\, w . cos\, v . cos\, w + sin^2 w . cos^2 v)$$

$$= \alpha^2\beta^2 (sin\, w.\ cos\, v - sin\, v.\ cos\, w)^2 ,$$ т. ј.

$$N = \alpha^2\beta^2 . sin^2 (w - v).$$

Ова вредност стављена у горњи израз за N показује

$$A^2B^2 = \frac{\alpha^4\beta^4}{\alpha^2\beta^2 . sin^2 (w - v)},$$ и отуда сасвим просто

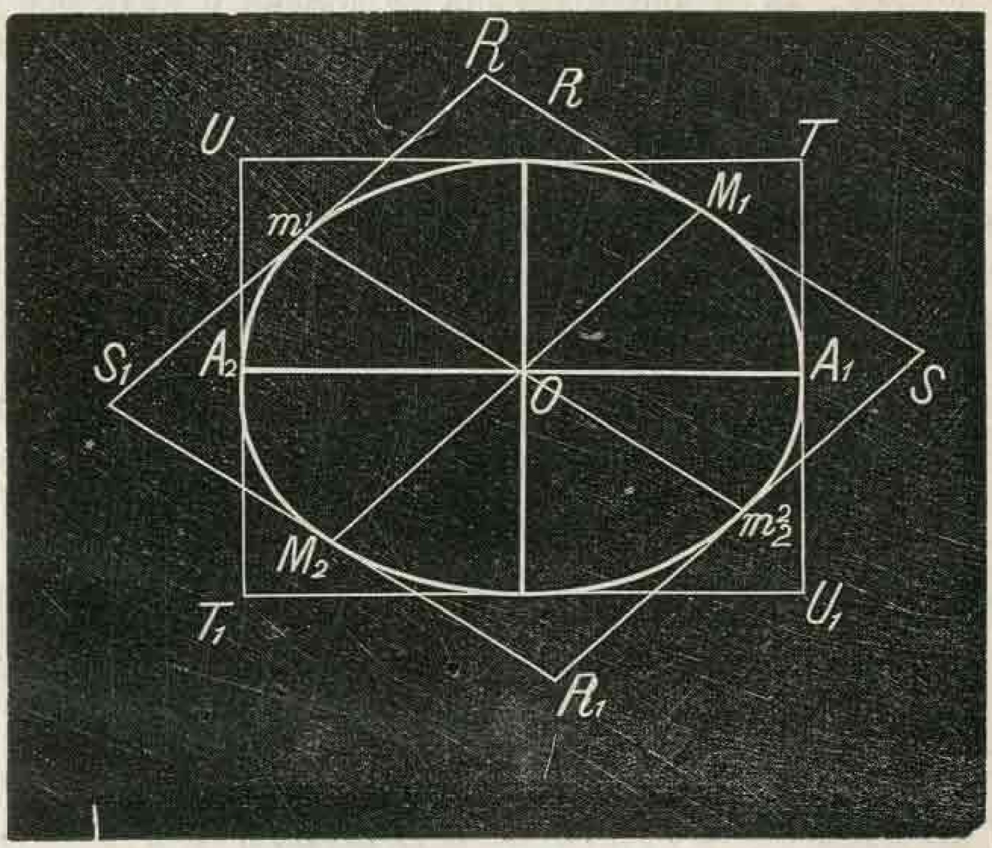
$$3.)\qquad AB . sin\, (w - v) = \alpha\beta.$$

Ова једначина даје

$$4AB . sin\, (w - v) = 4\alpha\beta.$$

Ако у крајевима спрегнутих пречника M_1M_2 и m_1m_2 (Сл. 57.) повучемо тангенте на елипсу, то постаје паралелограм RSR_1S_1, у коме је елипса углављена и који је очевидно четири пута већи од паралелограма Rm_1OM_1. Но површина је овог последњег паралелограма (због $OM_1 = A$ и $Om_1 = B$, $\wedge\ M_1Om_1 = w - v$) по познатом правилу из тригонометрије, $AB\, sin\, (w - v)$; дакле је $4AB\, sin\, (w - v)$ површина паралелограма RSR_1S_1, а $4\alpha\beta = 2\alpha . 2\beta$ површина правоугаоника TU T_1U_1 од елипсиних оса. По горњој једначини 3.) ове су две

Сл. 57.



површине једнаке величине, а то је такођер једно знаменито елипсино својство.

§. 106.

1.) Ако у једначини 1.) §. 104. место $+ B^2$ узмемо $- B^2$, следује *једначина иперболе у односу на два њезина спрегнута пречника,* од којих је онај на коме бројимо абсцисе реелан, а онај други имађинаран (§. 101.)

$$A^2y^2 - B^2x^2 = - A^2B^2.$$

2.) Тим истим начином следује из израза под 2.) у §. 105., као особито иперболино својство,

$$A^2 - B^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Најпосле 3.) израз $4AB . \sin (w - v) = 4\alpha\beta$ добијамо и из једначине иперболе, са чега и при њој стоји оно за елипсу нађено својство: да је правоугаоник од велике и мале осе управ онолики, колики је паралелограм од два спрегнута пречника.

§. 107.

Пренесимо још и једначину параболе у косоуглу система Ту ћемо се опет служити обрасцима I' и II' §. 33. т. ј.

$x = \alpha + x_1 \cos v + y_1 \cos w$

$y = \beta + x_1 \sin v + y_1 \sin w$, где као што смо већ рекли, v преставља нагиб нове абсцисне осе на стару, w нагиб нове ординатне осе на стару абсцисну осу, а α и β координате нова почетка.

С тима вредностима старих координата следује из параболине једначине, одмах опет изостављајући сказаљке нових координата,

$$\sin^2 w . y^2 + \sin^2 v . x^2 + 2 \sin v . \sin w . xy + (2\beta \sin v - D \cos v) x + (2 \beta \sin w - D \cos w) y + \beta^2 - \alpha D = o.$$

Да ова једначина буде онака вида као параболина стара, мора да је

а.) $\sin^2 v = o$, дакле $\sin v = o$, дакле $v = o$

б.) $\beta^2 - \alpha D = o$

в.) $2\beta \sin w - D \cos w = o.$

С овима вредностима показује се нова једначина параболе

$$y^2 = \frac{D}{sin^2 w} . \; x \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (m$$

доиста онака вида као првобитна њезина једначина.

Први услов $v = o$ показује да је нова абсцисна оса паралелна старој. Други услов даје $\beta^2 = D\alpha$, из чега се види да је нови почетак у самој параболи, т. ј. једна њезина тачка. Први и други услов заједно кажу да је нова абсцисна оса један параболин *пречник*. Најпосле трећи услов даје $tg \; w = \frac{D}{4\beta}$, а то је знак да је нова ординатна оса пречник, који је са пређашњим спрегнут (§ 102).

По свему томе дакле онај је израз под $m.$) *једначина параболе у односу на њена два спрегнута пречника* у тачци, чије су координете $x = \alpha$ и $y = \beta$.

За количине v, w, α и β имамо само три једначине, с тога је задатак о преносу параболе у систему од два спрегнута пречника као оса, у опште узет јоште не опредељен, а то има тај смисао, што доиста има безбројно много спрегнутих пречника, на које би параболу могли однети.

§. 108.

1.) Због $sin^2 w = \frac{tg^2 w}{1 + tg^2 w}$, $tg \; w = \frac{D}{2\beta}$ и $\beta^2 = D\alpha$ можемо део $\frac{D}{sin^2 w}$, који је чинилац у новој параболиној једначини, простије овако да изразимо: $D + 4\alpha$, где α, као што већ знамо, преставља абсцису параболине тачке, кроз коју иде онај спрегнути пречник, што је нова абсцисна оса. Тако параболина једначина у односу на два спрегнута пречника у њезиној тачци што за абсцису има α, може се писати и овако:

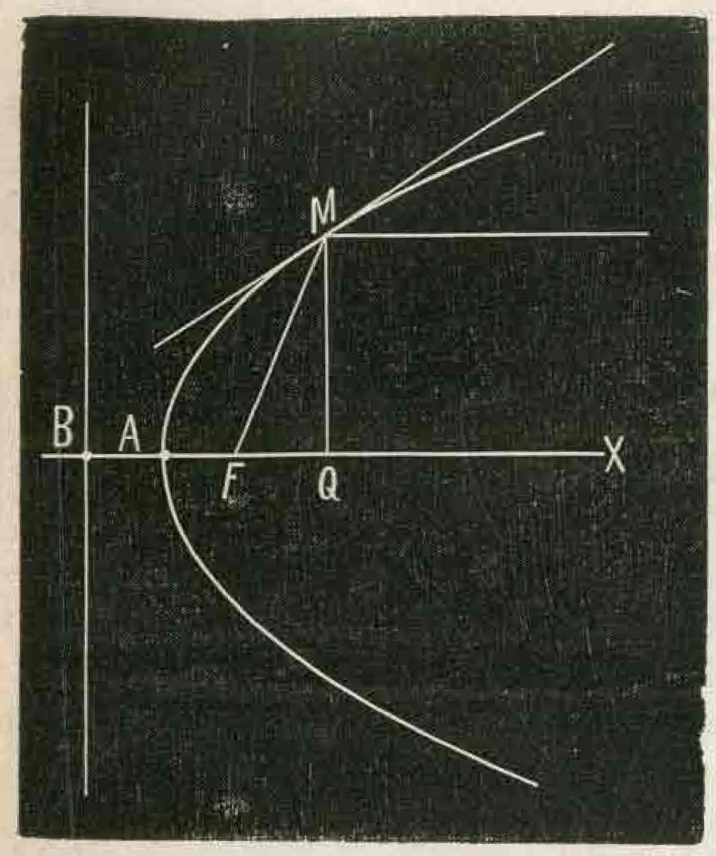
$$y^2 = (4\alpha + D) \, x = 4 \; (\alpha + \frac{D}{4}) \, x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , (m^1,$$

где дакле $4(\alpha + \frac{D}{4})$ преставља параболин параметар у односу на спрегнуте пречнике.

По томе, ако је у слици 58. $AQ = \alpha$ абсциса нова почетка M, а $AB = \frac{D}{4}$, па повучемо потег FM, то је по § 67.

$$MF = AQ + AB = \alpha + \frac{D}{4}, \text{ дакле}$$

Сл. 58.



$$4\,(\alpha + \frac{D}{4}) = 4\,MF,$$

а то ће рећи: *параболин је параметар у односу на два спрегнута пречника раван четвороструком отстојању нова почетка од жиже.*

2.) По томе што је параболина једначина у системи два спрегнута пречника онака иста облика $y^2 = dx$ као у односу на ортогоналне осе, $y^2 = Dx$; то сва параболина својства у овакој системи, у колико оне зависе од координатнога угла, постоје и у системи ма која два спрегнута пречника.

§. 109.

Са једначинама пређашњих §§ а можемо да разрешимо више корисних задатака, од којих, за објашњење посла, израдићемо само неколике.

Задатак I. Познате су осе неке елипсе, тражи се њезин какав спрег пречника, да спрежни угао буде φ.

Нашли смо за елипсу у односу за спрегнуте пречнике

$$A^2 + B^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$AB.\,sin(w - v) = \alpha\beta$$

$$tg\,w.\,tg\,v = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Од шест количина A, B, α, β, w и v у овом су задатку α, β и $\varphi = w - v$ познате, а траже се A, B и w или v.

Друга једначина даје $AB = \dfrac{\alpha\beta}{sin\,(w - v)} = \dfrac{\alpha\beta}{sin\,\varphi}$.

Овај израз удвојен и после један пут првој једначини додат, а други пут од ње одузет показује

$$(A + B)^2 = \alpha^2 + \frac{2\,\alpha\beta}{sin\,\varphi} + \beta^2 \text{ и}$$

$$(A - B)^2 = \alpha^2 - \frac{2\,\alpha\beta}{sin\,\varphi} + \beta^2,\ \text{дакле}$$

$$A + B = \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\alpha\beta}{sin\,\varphi} + \beta^2},\ \text{а}$$

$$A - B = \sqrt{\alpha^2 - \frac{2\alpha\beta}{sin\,\varphi} + \beta^2},\ \text{тако да је}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \frac{2\alpha\beta}{sin\,\varphi} + \beta^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \frac{2\alpha\beta}{sin\,\varphi} + \beta^2},$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \frac{2\,\alpha\beta}{sin\,\varphi} + \beta^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \frac{2\,\alpha\beta}{sin\,\varphi} + \beta^2}.$$

Ова два израза дају *величину* тражених пречника, а за правце њихове имамо из треће једначине, због $w = \varphi + v$:

$$\alpha.^2\, tg\,v.\, tg\,(\varphi + v) = -\,\beta^2$$

$$\alpha^2.\, tg\,v.\, \frac{tg\,\varphi + tg\,v}{1 - tg\varphi.\,tg v} = -\,\beta^2$$

$$\alpha.^2\, tg^2 v + (\alpha^2 - \beta^2)\, tg\varphi.\, tg\,v = -\,\beta^2,\ \text{дакле}$$

$$tg\,v = \frac{-\,(\alpha^2 - \beta^2)\,tg\,\varphi \pm \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2.\ tg^2\varphi - 4\alpha^2\beta^2}}{2\,\alpha^2}$$

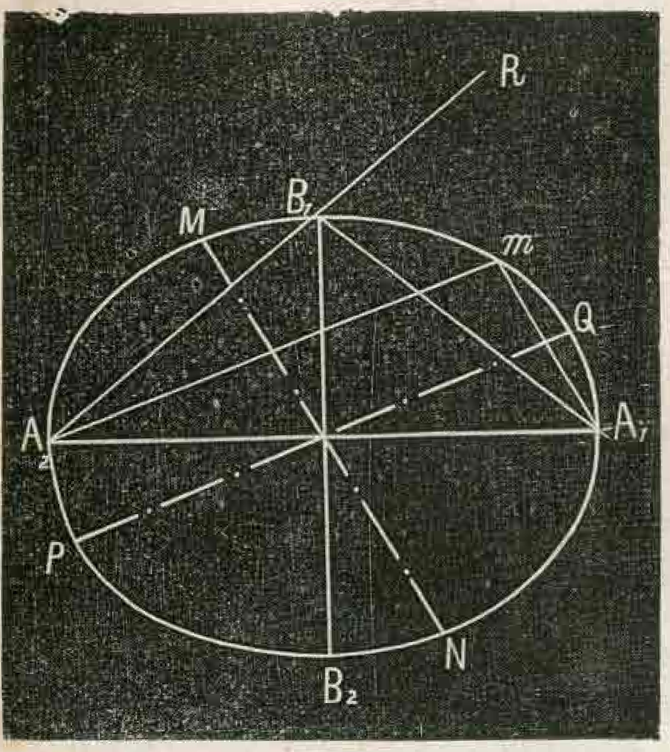
$$= -\,\frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2\,\alpha^2}\left[\,tg\,\varphi \mp \sqrt{tg^2\varphi - \frac{4\,\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}}\,\right].$$

Из овога израза видимо, да је задатак само дотле можан, док је $tg^2\varphi \overset{=}{>} \frac{4\,\alpha^2\,\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}$, т. ј.

$$tg\,\varphi \overset{=}{>} \frac{2\,\alpha\,\beta}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

По томе, ако је угао φ оштар, то мора да је *бар* толики, да му је тангента $= \frac{2\,\alpha\,\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$, ако је пак туп, то може бити *највише* толики, да му је тангента $= -\,\frac{2\,\alpha\,\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$. Но по § у 85. је $\frac{-\,2\,\alpha\,\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = tg\,A_1B_1A_2$ (сл. 59.), а $\frac{2\,\alpha\,\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = tg\,A_1B_1R$; дакле

Сл. 59.

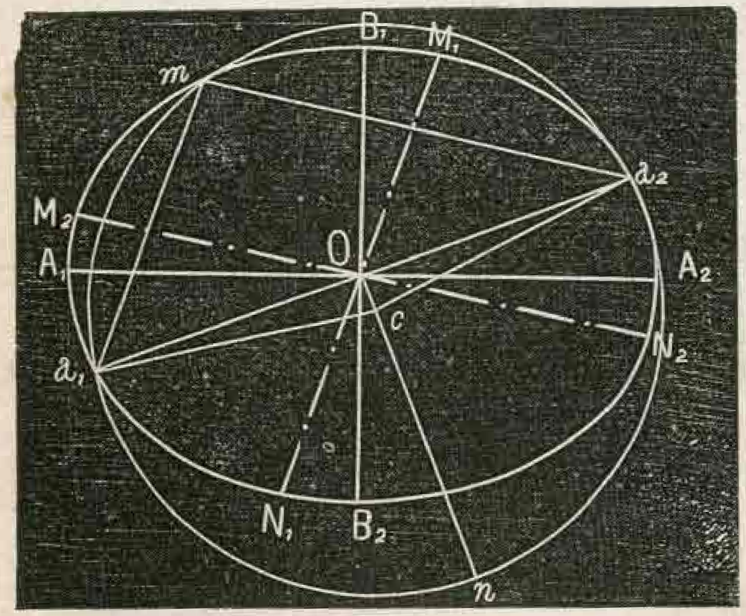


су угли $A_1B_1A_2$ и A_1B_1R међе, изван којих ни један од безбројних спрежних углова не може да лежи. —

Ако није нужно да тражене пречнике израчунимо, него да их нацртамо, то ћемо их лако добити на основу §101. овако:

Повучемо (сл. 60.) ма какав пречник a_1a_2 и напишемо над њим, као тетиву, такав лук a_1ma_2, да тетива ma_1 и ma_2 повучена са ма које његове тачке m на крајеве пречника a_1 и a_2 хватају угао φ.*) Сад ако је задатак по оваком спрежном углу можан, тај ће лук сећи елипсу у некој тачци m, а пруге $M_1N_1 \| a_1m$ и $M_2N_2 \| a_2m$ биће тражени пречници, јер је њихов спрежни угао $M_1CM_2 = a_1ma_2 = \varphi$.

Сл. 60.



Задатак II. Дата је једна елипса (или ипербола), да се изнађу њезине осе.

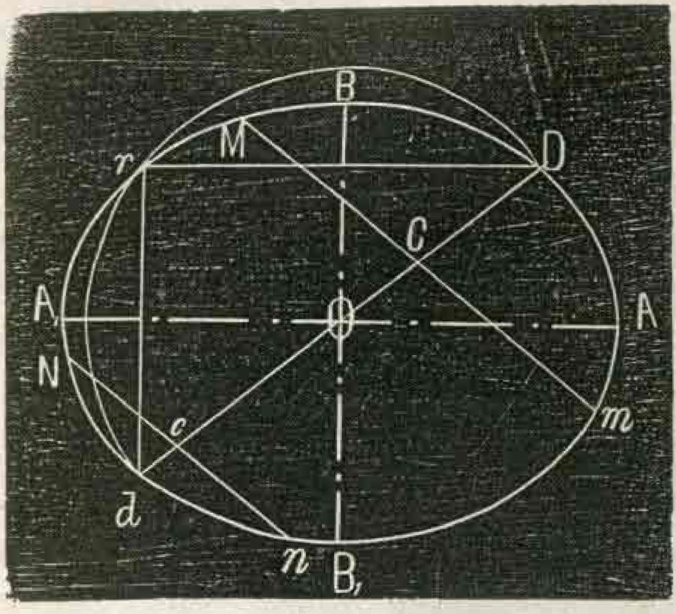
Најпре изнађемо елипсино (или иперболино) средиште O на тај начин, да повучемо два напоредна тетива Mm и Nn (сл. 61.), прво преполовимо у C, друго у c, па за тим повучемо и преполовимо пругу $DCcd$ у O; та је пруга један елипсин пречник, а тачка O елипсино средиште.

Елипсине су осе онај спрег њезиних пречника, где је

---

*) Средиште c тога лука налазимо, ако пречник a_1a_2 управном преполовимо и после у a_1 направимо ∠ $a_2a_1c = \varphi - 90$. Зашто? то нека извиде ученици сами а слика је за то већ спремљена.

Сл. 61.



сржпени угао 90°. Напишемо дакле над Dd полукруг, који елипсу сече у тачци r, и повучемо тетива rD и rd, а кроз O пречник $AA_1 \parallel rD$ пречник $BB_1 \parallel rd$, па су AA_1 и BB_1 тражене есипсине осе. Ако онај полукруг не би секао елипсу, онда место Dp повучемо други неки пречник и поступимо даље као при Dd.

Задатак III. Од неке елипсе имамо један спрег пречника и спрежни угао; да направимо елипсу и изнађемо њене осе.

Од количина A, B, α, β, w и v (види задатак први) сада су познате A, B и $\varphi = w - v$, а траже се α, β и w или v.

Удвојмо једначину $AB \sin\varphi = \alpha\beta$ (§. 105), па један пут додајмо је, а други пут одузмимо од једначине $\alpha^2 + \beta^2 = A^2 + B^2$; следује

$$\alpha + \beta = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \sin\varphi} \quad \text{и}$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \sin\varphi}\,, \quad \text{дакле}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \sin\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \sin\varphi}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \sin\varphi} - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \sin\varphi},$$

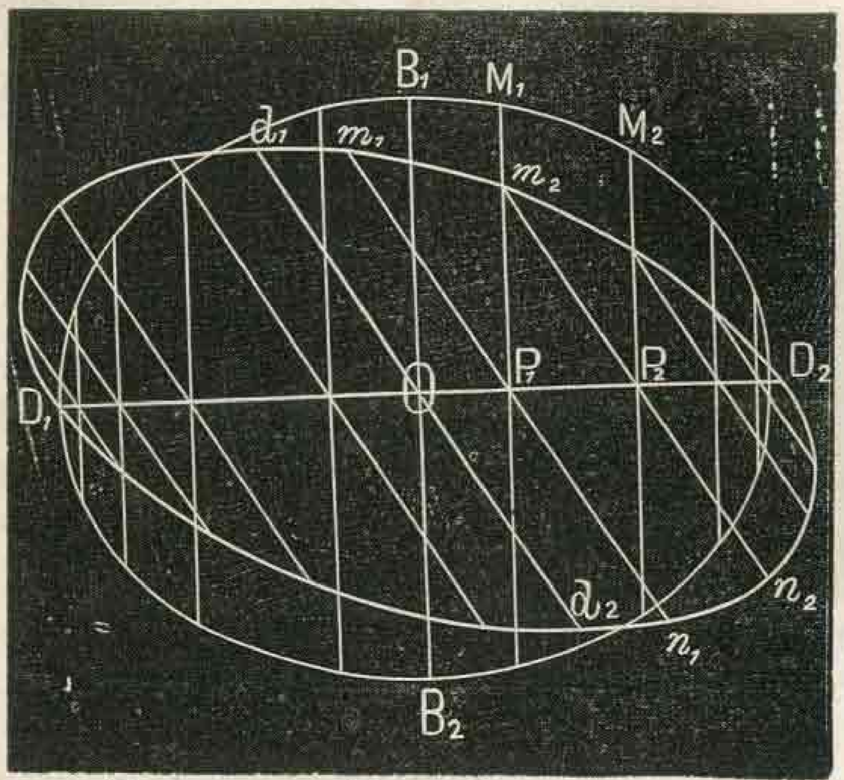
са којима изразима одређена је величина елипсиних оса.

За положај велике осе према једном од датих пречника ваљак нађене вредности α и β да метнемо у једначину $tg(\varphi + v)\, tgv = -\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ и после отуд да одредимо tgv. —

Ако овај исти задатак ваља израдити одмах конструкцијом без рачуна, онда поступимо овако:

У средини O пречника D_1D_2 (Сл. 62.) подигнемо нањ управну и одмеримо $OB_1 = OB_2 = Od_1 = Od_2$, па онда са D_1D_2 и d_1d_2 као осама направимо елипсу. За тим подигнемо у вољно

Сл. 62.



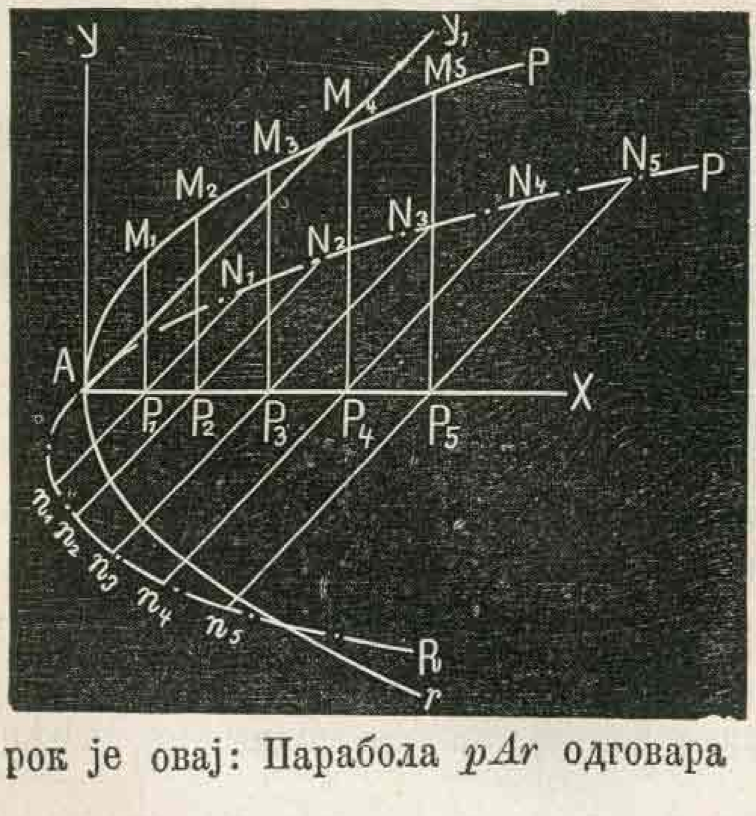
узетим тачкама P_1, P_2, P_3, ... ординате, повучемо кроз исте тачке паралелне пруге пречнику d_1d_2 и најпосле одмеримо
$P_1m_1 = P_1n_1 = M_1P_1$,
$P_2m_2 = P_2n_2 = M_2P_2$,
$P_3m_3 = P_3n_3 = M_3P_3$,
. . . .
Тачке m_1, m_2, m_3, . . . n_1, n_2, n_3, ... jесу тачке оне елипсе коју тражимо и у којој су дати пречници спрегнути.

Ево зашто. По тој конструкцији у направљеним двема елипсама одговарају једнаким абсцисама једнаке и ординате, а то захтевају и њихне једначине $\alpha^2y^2 + \beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$ и $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$, ако као у направи, у последњој узмемо $A = \alpha$, $B = \beta$.

Задатак. IV. Од неке параболе дата су два срегнута пречника AX и AY_1 и параметар D; да направимо параболу.

У тачци A (сл. 63.) подигнемо управну AY и направимо параболу pAr у системи ортогоналних оса AX и AY са параметаром D. Сад подигнемо ординате у вољно узетим осиним тачкама P_1, P_2, P_3, ...; повучемо кроз исте тачке $N_1n_1, N_2n_2, N^3n_3, \ldots \| AY_1$ и одмеримо најпосле
$N_1P_1 = P_1n_1 = P_1M_1$,
$N_2P_2 = P_2n_2 = P_2M_2$,
$N_3P_3 = P_3n_3 = P_3M_3 \ldots$,
па ће N_1, n_1, N_2, n_2, N_3, n_3, . . . бити тачке тражене параболе PAR. Узрок је овај: Парабола pAr одговара једначини $y^2 = Dx$; како

Сл. 63.



пак по задатку тражена парабола PAR треба да има у системи датих пречника ту исту једначину, то следује да у тима параболама једнаким абсцисама одговарају једнаке и ординате, а по направи тако и јесте.

Задатак V. Изнаћи осу дате параболе, њезин параметар и њезину жижу.

Повучемо у параболи (Сл. 64.) по вољи два напоредна тетива M_1m_1 и M_2m_2 и оба преполовимо, прво у O_1, друго у O_2; пруга $A_1O_1O_2X_1$ параболин је један пречник. Како је пак у параболи оса паралелна сваком пречнику и у једно свако управно тетиво преполавља, то ваља само још да повучемо једно тетиво $Mm \perp A_1X_1$ и да га преполовимо, па ће бити пруга AX, повучена кроз његову средину P паралелно A_1X_1, тражена параболина оса.

За параметар имамо $D = \frac{\overline{MP}^2}{AP}$, за жижу пак стоји

$$AF = \frac{D}{4} = \frac{\overline{MP}^2}{4AP.}$$

Задатак VI. У дату параболу да нацртамо онај спрег пречника, који је под углом φ

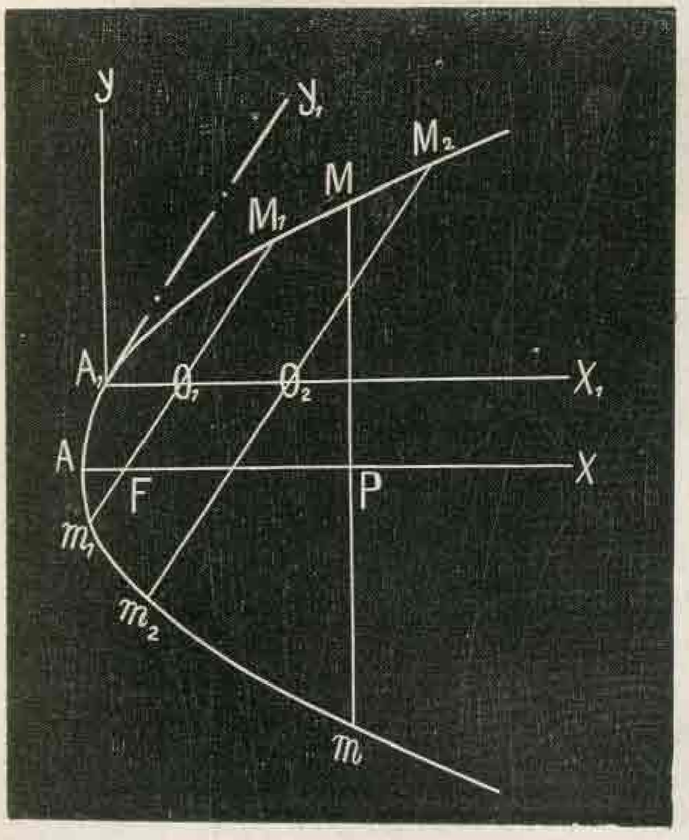
Пошто смо на пређашњи начин изнашли параболину осу AX (сл. 64.), поставимо на њу једно тетиво M_1m_1 под углом φ и преполовимо га у O_1, па повучемо кроз O_1 пругу $A_1X_1 \parallel AX$ а кроз A_1 пругу $A_1Y_1 \parallel M_1m_1$; те две пруге A_1X_1 и A_1Y_1 биће тражени онај спрег пречника.

Ако се и овде тражи параболин параметар у односу на изнађени спрег и њезина жижа у тој системи, то имамо параметар

$$d = \frac{\overline{M_1O_1}^2}{A_1O_1}, \text{ а за жижу је}$$

$$A_1F = \frac{\overline{M_1O_1}^2}{4A_1O_1}.$$

Сл. 64.



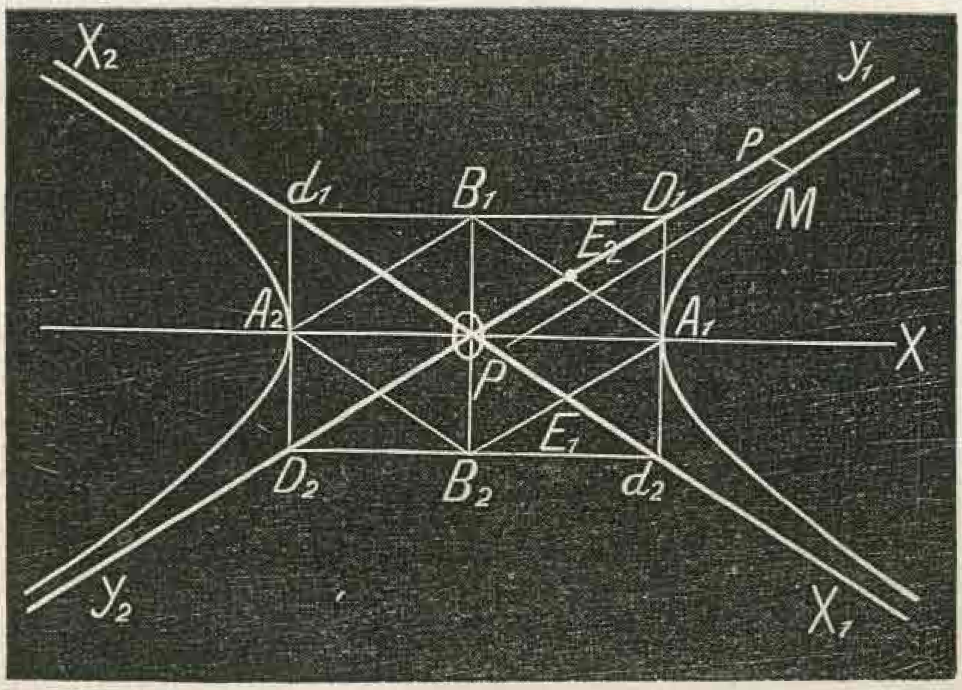
Задатак VII. О датом неком луку зна се да је део нека конусова пресека; да извидимо којега?

Повучемо у луку два напоредна тетива по једном, два друга по другом правцу и сва четири преполовимо, па повучемо пруге кроз средине прва два и средине друга два тих тетива. Ако се те две пруге секу изнутра, лук је део једне *елипсе;* ако се секу с поља, лук је део једне *иперболе;* ако су пак паралелне, лук је део једне *параболе.*

§. 110.

У § 92. казао сам шта су иперболини асимптоти. Нека су у сл. 65. X_1X_2 и Y_1Y_2 асимптоти, па да изнађемо иперболину једначину у односу на њих као координдтне осе, задржавајући иперболино средиште O, које је уједно и пресек асимптота, за почетак координата. При томе нека буде X_1X_2 нова абсциса оса, а други асимптот Y_1Y_2 нова ординатна оса.

Сл. 65.



За тај нам посао опет служе обрасци § 33. с том изменом, да је у њима сада (због не промењенога почетка) $\alpha = o$ и $\beta = o$.

Из једначине иперболе $\alpha^2y^2 - \beta^2x^2 = - \alpha^2\beta^2$ следује после употребе тих образаца

$$(\alpha^2 . sin^2 w - \beta^2 cos^2 w)y^2 + 2(\alpha^2 sin\, v . sin\, w - \beta^2 cos\, v . cos\, w)\, xy$$
$$+ (\alpha .^2 sin^2 v - \beta^2 cos^2 v)\, x^2 + \alpha^2\beta^2 = o.$$

Али овде имају угли v и w своје извесне вредности, јер је по § 92 $tg\,v = -\frac{\beta}{\alpha}$, $tg\,w = \frac{\beta}{\alpha}$. За то, ако узмемо те вредности почем смо најпре изразили sin и cos тангентама и ради краткоће поставили иперболино вансређе $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2\varepsilon$, имамо место нађене једначине ову простију

$$-\frac{\alpha^2\beta^2}{\varepsilon^2} \cdot yx + \alpha^2\beta^2 = o$$

и отуда

$$1.) \qquad \alpha y = \varepsilon^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$$

као *једначину иперболе у односу на њезине асимитоте.*

§. 111.

Ако за ма коју иперболину тачку M (пређ. сл.) повучемо координате $MP = y$ и $Mp = OP = x$ за асимптоте као осе, имамо стављајући асимптотни угао $Y_1OX_1 = u$, паралелограм $MPOp = MP.\,Mp.\,sin\,u = xy.\,sin\,u$, или обзиром на пређашњу једначину 1.) $MPOp = \varepsilon^2 sin\,u$.

Почем је $\varepsilon^2.\,sin\,u$ не зависно од x и y, то је тај паралелограм *стална* количина.

Како је пак $\wedge\, u = Y_1OX_1 = 2\,Y_1OX = 2w$, дакле $sin\,u = sin\,2w = 2sin\,w.\,cos\,w$, и како је по пређ. §у $sin\,w = \frac{\beta}{2\varepsilon}$, а $cos\,w = \frac{\alpha}{2\varepsilon}$, то је због $sin\,u = \frac{2\,\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$ онај паралелограм $MPOp = \varepsilon^2.\,sin\,u = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \cdot \frac{2\,\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{2}\,\alpha\beta$, дакле раван правоуглом троуглу од иперболиних полуоса као катета.

У правоугаонику $D_1d_1D_2d_2$ од иперболиних оса има осам оваких троуглова; дакле је онај стални паралелограм од асимптотних координата ма које иперболине тачке једна осмина тога правоугаоника.

Ако саставимо крајеве оса добијамо развучени квадрат $A_1B_1A_2B_2$, кога су стране по две паралелне једном асимптоту а по величини равне вансређу $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2\varepsilon$. У том развученом квадрату има четири онака троугла; дакле је онај стални паралелограм од асимптотних координата које год иперболине тачке једна четвртина овог развученога квадрата, а он сам половина правоугаоника од иперболиних оса.

Најпосле развучени квадрат $A_1E_1OE_2$ од асимптотних координата темена A_1 четвртина је пређашњега квадрата; дакле је 1.) паралелограм од асимптотних координата ма које иперболине тачке раван овом последњем развученом квадрату, 2.) исти квадрат једна осмина правоугаоника од иперболиних оса.

В.) ТАНГЕНТЕ ВЛАКОВА У РАВНИ.

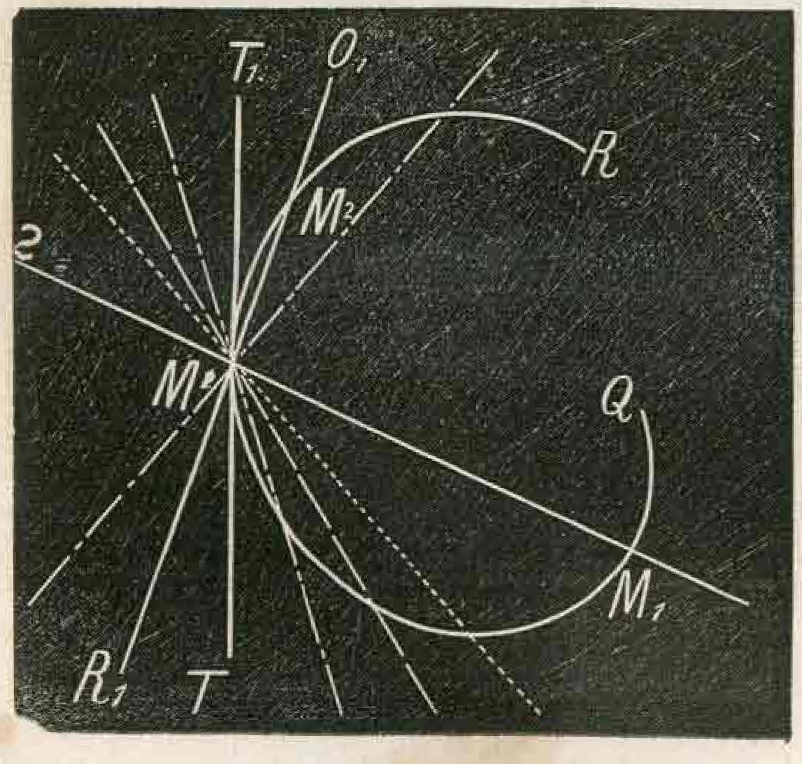
а.) Општи појам тангенте.

§. 112.

У геометрији постављени појам о дирци или тангенти на круг не може потпуно да служи у опште за све влакове у равни. С тога ћемо сада да растумачимо тангенту сасвим у опште.

У ту цељ нека је RMM_1Q (Сл. 66.) један део некога влака у равни, SMM_1 једна његова секанта. Замислимо да се ова секанта обрће око своје и влакове тачке M, као не покретне, ка другој секанти R_1MM_2O, што иде кроз исту не покретну тачку M. При томе ће се очевидно други секантин пресек M_1 све већма приближавати првом пресеку M, дакле отстојање између M и M_1 све мање бивати, а на послетку ће ово, кад M_1 падне на M, сасвим изчезнути. Одатле на даље ће секанта влак осем у тачци M пресецати у још једној, која ће се од прве све већма уда-

Сл. 66.



љавати, што год се секанта буде дуже обртала. У магновењу кад тачка M_1 падне на тачку M, секанта не пресеца више влак у две тачке, него само у једној M, престала је дакле бити секанта, него је постала *тангентом*. По томе можемо рећи да је тангента каквог влака така његова секанта, које оба пресека с влаком леже у *једној* тачци, у *тачишту*.

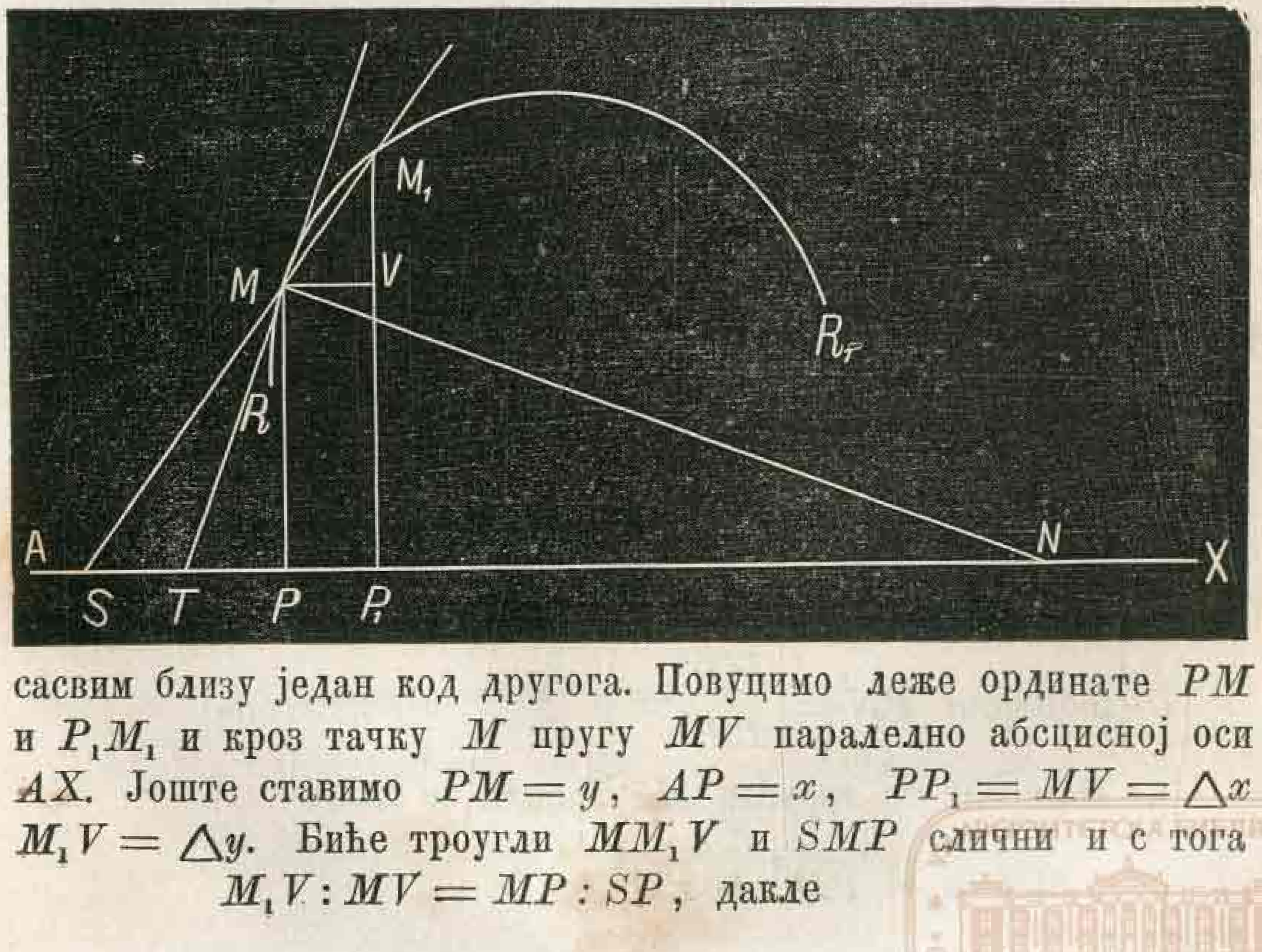
Приметити јоште ваља да она секантина тачка, око које се она окреће да постане тангентом, не мора бити баш једна тачка влака, него може да лежи ма где изван њега, само ако те секанта око ње тако обрће, да се њезини пресеци с влаком седан другом примичу, док се не састану. Тако исто може од секанте да постане тангента, ако се секанта паралелно себи креће ка влаку, док јој оба пресека с њим не падну један на други. Главно је само, да оба секантина пресека буду у једној истој тачци.

б.) Тангента у паралелној ортогоналној системи.

§. 113.

Нека је у сл. 67. RMM_1R_1 опет један део какве влака у равни и SQ така секанта нањ, да њезина два пресека M и M_1 сасвим близу један код другога. Повуцимо леже ординате PM и P_1M_1 и кроз тачку M пругу MV паралелно абсцисној оси AX. Јоште ставимо $PM = y$, $AP = x$, $PP_1 = MV = \triangle x$ $M_1V = \triangle y$. Биће троугли MM_1V и SMP слични и с тога

Сл. 67.



$$M_1V : MV = MP : SP,$$ дакле

$$SP = MP \cdot \frac{MV}{M_1 V} = y \cdot \frac{\triangle x}{\triangle y}$$

Ова пруга SP зове се *подсеканта* за тачку M.

Замислимо да се секанта SR, окреће око M у лево док растојање тачака M и M_1 не постане изчезљиво мало т. ј. тако да се једна тачка од друге не разпознаје и да се дакле може узети, да је једна на другу пала и с тога од секанте постала тангента. Очевидно се при томе $\triangle x$ и $\triangle y$, па с њима и SP не престано умаљавају, док најпосле од $\triangle x$ и $\triangle y$ не постане dx и dy, а од секанте SR_1 тангента TM и подсеканта $SP = TP$. Ово TP зове се *подтангента* за тачку M.

Имамо дакле по свему томе из подсекантинога израза, да је свакога влака у равни, однесена на ортогоналне координате,

$$\textit{Подтангента } TP = y \cdot \frac{dx}{dy} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (k.$$

§. 114.

Под каквога влака тангентом у тачци M као тачишту (пређ. сл.), разумемо у најтешњем смислу само онај део TM од не омеђашене тангенте кроз ту тачку, који лежи између тангентина пресека T с абцисном осом и тачишта M.

Део MN управне на тангенту у тачишту M, од овога па до пресека с абсцисном осом у N, зове се *нормала* у тачци M, део пак PN абсцисне осе од ординате PM па до нормалина пресека с том осом у N, зове се *поднормала* за влаову тачку M.

1.) Из троугла MTP следује $TM = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{TP}^2}$, дакле је по пређашњем §-у

$$\textit{Тангента } TM = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (l.$$

2.) Из троугла MTN пак имамо $\overline{MP}^2 = TP . PN$, дакле је, опет обзиром на пређашњи §

$$\textit{Поднормала } PN = \frac{\overline{MP}^2}{TP} = y \, \frac{dy}{dx} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (m.$$

3.) Најпосле из троугла MPN види се да је

$$MN = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2},$$

а то ће рећи да је (по прећашњем §-у и због тек нађене поднормале PN)

$$\textit{Нормала } MN = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (n.$$

§. 115.

Ако тангентин нагиб на абсцисну осу назовемо α, имамо из прећашње слике

$$tang\,\alpha = \frac{MP}{TP},$$

или ако за MP и TP узмемо њихове вредности из предходна два §-а,

$$tang\,\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Задржавајући x и y за координате тачишта M, а с x_1 и y_1 означујући опште тангентине координате, имамо по §-у 41. и 45. као *једначину тангенте* ма кога влака у ортогоналној системи,

$$y_1 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x),$$

а као *једначину нормале*, као управне пруге на тангенту, по §-у 47.

$$y_1 - y = -\frac{dx}{dy}(x_1 - x),$$

где x_1 и y_1 претстављају нормалине координате у опште.

в.) Тангенте влакова друга реда у односу на главне осе.

§. 116.

1.) Једначина је параболе $y^2 = Dx$. Отуда следује $2ydy = Ddx$, а $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{D}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{D}{2y}$. С тога је по § 112. и 113. параболина

$$\text{Тангента} = \sqrt{Dx + 4x^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha$$

$$\text{Подтангента} = 2x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta.$$

$$\text{Нормала} = \sqrt{D\left(x + \frac{D}{4}\right)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma.$$

Поднормала $= \frac{D}{2}$ . . . . (δ.

2.) Једначина је елипсе $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, или $\alpha^2 y^2 = \beta^2(\alpha^2 - x^2)$. Одатле је $\alpha^2 y\, dy = -\beta^2 x\, dx$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2 - x^2}{x}}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$. Дакле по § 112. и 113. елипсина

Тангента $= \frac{y}{\beta x}\sqrt{\alpha^4 - \gamma^2 x^2}$ . . . . . . (α.,

где γ значи елипсино вансређе $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$,

Подтангента $= -\frac{\alpha^2 - x^2}{x} = \frac{x^2 - \alpha^2}{x}$ . . . (β.

Нормала $= \frac{\beta}{\alpha^2}\sqrt{\alpha^4 - \gamma^2 x^2}$ . . . . (γ.

Поднормала $= -\frac{\beta^2}{\alpha^2}x$ . . . . ((δ.

3.) Једначина је иперболе $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ или $\alpha^2 y^2 = \beta^2(x^2 - \alpha^2)$. Следује $\alpha^2 y\, dy = \beta^2 x\, dx$, дакле $\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{y}{x} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}{x}$. По томе је при иперболи

Тангента $= \frac{y}{x\beta}\sqrt{\gamma^2 x^2 - \alpha^4}$ . . . . . . (α.

где је $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ иперболино вансређе.

Подтангента $= \frac{x^2 - \alpha^2}{x}$ . . . . (β.

Нормала $= \frac{\beta}{\alpha^2}\sqrt{\gamma^2 x^2 - \alpha^4}$ . . . . (γ.

Поднормала $= \frac{\beta^2}{\alpha^2}x$ . . . . (δ.

4.) Ако у горњим изразима под 2.) узмемо $\beta = \alpha = r$ следује кругова

Тангента $= r . \frac{y}{x}$ . . . . (α.

Подтангента $= - \frac{r^2 - x^2}{x}$ . . . . (δ.

Нормала $= r$ . . . . (γ.

Поднормала $= - x$ . . . . (δ.

§. 117.

У §. 114. нашли смо као једначину тангенте у опште $y_1 - y = \frac{dy}{dx} (x_1 - x)$, где x_1 и y_1 преставључу тангентине опште координате, а x и y координате тачишта, $\frac{dy}{dx}$ најпосле гониометријску тангенту тангентина нагиба на абсцисну осу.

Једначине влакова друга реда дају:

парабола $\frac{dy}{dx} = \frac{D}{2y}$,

елипсина $\frac{dy}{dx} = - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y}$,

иперболина $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y}$.

С тога је, ако ове вредности метнемо у горњу једначину тангенте,

1.) *једначина параболине тангенте* $y_1 - y = \frac{D}{2y} (x_1 - x)$,

3.) *једначина елипсине тангенте* $y_1 - y = - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y} (x_1 - x)$

2.) *једначина иперболине тангенте* $y_1 - y = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y} (x_1 - x)$;

даље

4.) *једначина параболине нормале* $y_1 - y = - \frac{2y}{D} (x_1 - x)$,

5.) *једначина елипсине нормале* $y_1 - y = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{y}{x} (x_1 - x)$,

6.) *једначина иперболине нормале* $y_1 - y = - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{y}{x} (x_1 - x)$.

Ако једначине тангената ослободимо од именитеља и после приредимо, добијамо их јоште и у оваким облицима:

1.) Због $y^2 - Dx$, једначина параболине тангенте

$$yy_1 = \frac{D}{2}(x_1 + x),$$

2.) Због $\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2$, једначина елипсине тангенте

$$\alpha^2 yy_1 + \beta^2 xx_1 = \alpha^2 \beta^2,$$

3.) Због $\alpha^2 y^2 - \beta^2 x^2 = - \alpha^2 \beta^2$, једначина иперболине тангенте

$$\alpha^2 yy_1 - \beta^2 xx_1 = - \alpha^2 \beta^2 ,$$

где свуда x_1 и y_1 престављају опште координате, а x и y координате тачишта.

§. 118.

1.) Ако у једначинама елипсине тангенте и нормале узмемо $\beta = \alpha$, имамо као

једначику кругове тангенте $y_1 - y = - \frac{x}{y}(x_1 - x)$

или $$yy_1 + xx_1 = \alpha^2,$$

где α значи полупречник, а као

једначину кругове нормале $y_1 - y = \frac{y}{x}(x_1 - x)$.

2.) Узев у једначинама иперболине тангенте $\beta = \alpha$, имамо као *једначине тангенте при равностраној иперболи*

$$y_1 - y = \frac{x}{y}(x_1 - x), \text{ или } yy_1 - xx_1 = - \alpha^2,$$

а као *једначину нормале* таке иперболе

$$y_1 - y = - \frac{y}{x}(x_1 - x).$$

3.) Из друге једначине иперболине тангенте следује $y_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y} \cdot x_1 - \frac{\beta^2}{y}$, при чему је у опште

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}.$$

Ако у овом последњем изразу узмемо $x = \infty$, постаје $y = \pm \frac{\beta}{\alpha}. x$, а с овом вредности даје пређашња једначина $y_1 = \pm \frac{\beta}{\alpha} x_1 \mp \frac{\alpha\beta}{x}$, или с тога што $\frac{\alpha\beta}{x} = \frac{\alpha\,\beta}{\infty}$ према $\frac{\beta x_1}{\alpha}$ изчезава,

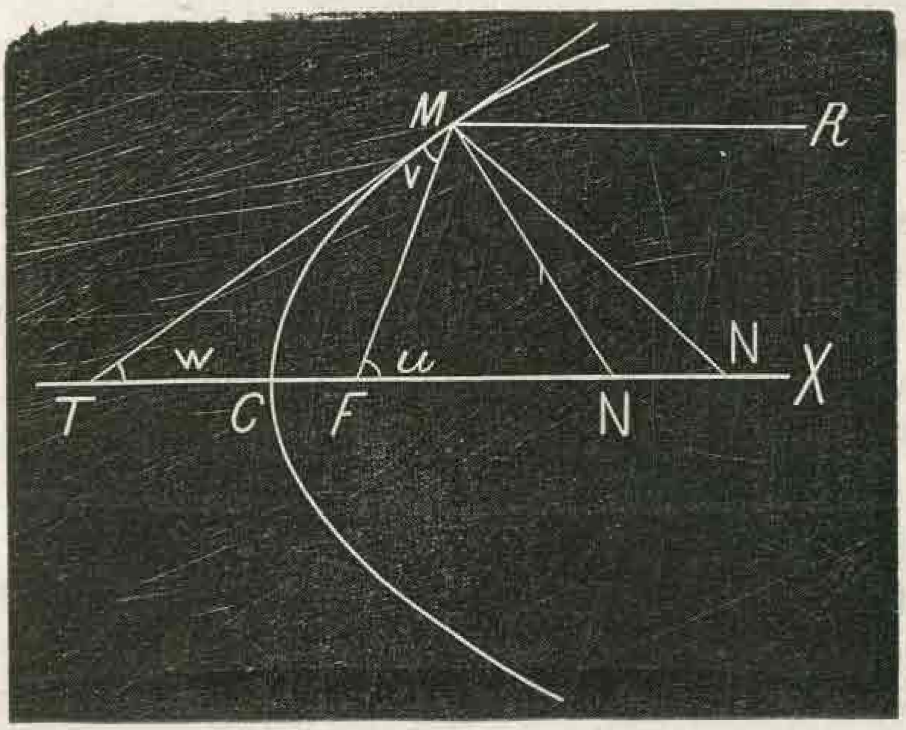
$$y_1 = \pm \frac{\beta}{\alpha} x_1.$$

Но ово је по § 92. једначина асимптота. Следователно *иперболини асимптоти могу се сматрати као њезине тангенте којих су тачишта на бескрајној даљини.*

г.) **Тангенте у односу на потеге.**

§. 119

Сл. 68.



Повуцимо у сл. 68. на неку параболину тачку M пречник MR, тангенту MT и потег FM. Нека је тангентин нагиб на абсцисну осу, т. ј. $> MTX = w$, њезин нагиб на потег FM т. ј. $> TMF = v$, најпосле нагиб потега FM на абсцисну осу т. ј. $> MFX = u$. Координате тачке M нека су x и y.

У §. 98. нашли смо да је тангента нагиба оног пречника, што је спрегнут с пречником по M, $\frac{D}{2y}$, а у §. 114. видели смо да је при параболи гониометријска тангента тангентина нагиба на абсцисну осу $\frac{dy}{dx} = \frac{D}{2y}$. Отуда се види да је параболина тангента у тачци M пречник, који је спрегнут са пречником MR, као год и на против да је онај пречник у тачци M, који је спрегнут са пречником MR, тангента на параболу у тој тачци.

Због $\wedge\, u = v + w$ имамо

$$tg\,v = \frac{tg\,u - tg\,w}{1 + tg\,u\,.\,tg\,w} \quad \ldots\ldots\ldots (m.$$

Координате жиже F по §. 67. јесу $x_1 = \frac{1}{4} D$ и $y_1 = o$. Једначина је потега FM дакле, као пруге што иде кроз тачке F и M

$$\eta = \frac{y}{x - \frac{1}{4} D} \left(\chi - \frac{1}{4} D\right) \text{ и отуда } tg u = \frac{y}{x - \frac{1}{4} D}.$$

Почем је пак још по горњему $tg w = \frac{D}{2y}$, то имамо, ако обе ове вредности заменимо у изразу под $(m.$ и све рачуне свршимо,

$$tg v = \frac{D}{2y},$$

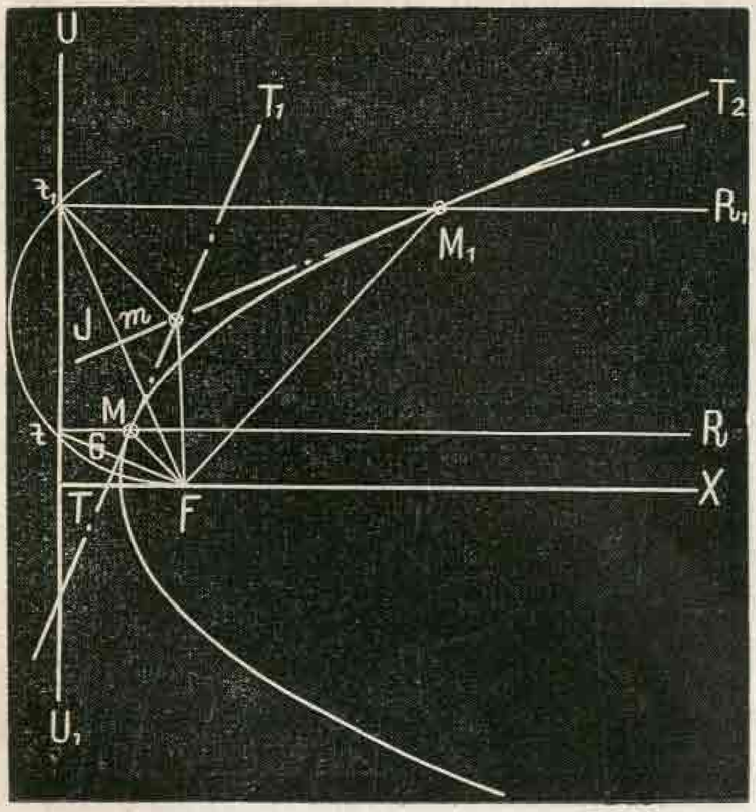
из чега се види да је $\wedge v = w$, т. ј. тангентин нагиб на потег онакав исти као њезин нагиб на абсцисну осу, или као њезин нагиб на пречник MR, дакле да је троугао MFT равнокрак. Уједно види се да нормала MN преполавља у M угао RMF између потега MF и пречника MR.

§. 120.

У пређашњем §-у имамо основу за лак построј тангенте на параболу.

1.) Ако је дато тачиште M (Сл. 69.), онда повучемо кроз M пречник tMR до пресека с вођицом UU_1 у тачци t, саставимо t са жижом F и повучемо кроз M управну TMT_1 на tF. Та управна биће тражена тангента у M. Ево зашто. По параболином је једном својству (§. 69.) $Mt = MF$, дакле троугао MtF равнокрак; но MG је управно на tF и с тога је $\wedge GMF = tMG = T_1MR = MTX$ као што то по пређашњему §-у за тангенту у M требада постоји.

Сл. 69.

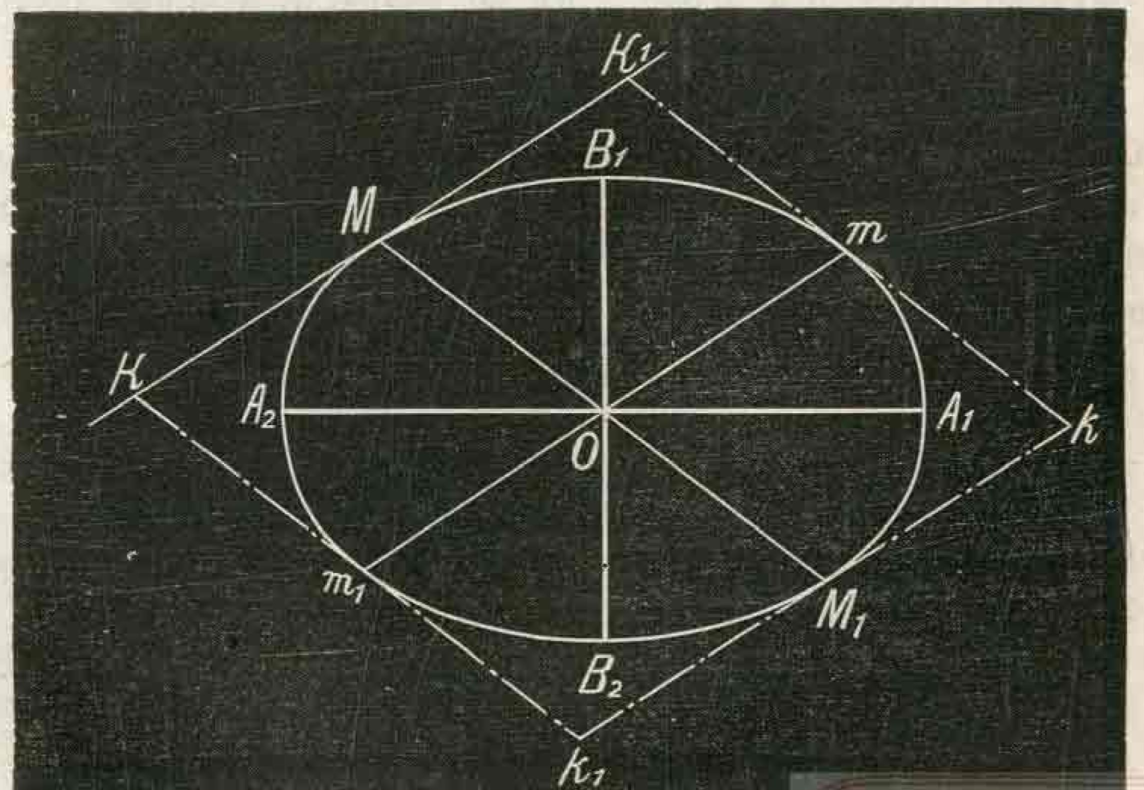


2.) Ако је условљено да тангента иде кроз неку тачку m изван ње с поља, онда из те тачке m напишемо с полупречником mF један лук, који пресеца вођицу на два места t и t_1; кроз t и t_1 повучемо пруге tR и t_1R_1 паралелно оси AX, које секу параболу у M и M_1. Ове две тачке M и M_1 јесу тачишта можних тангената на параболу што иду кроз тачку m, а пруге mM и mM_1 јесу саме те тангенте. Да је н. п. mM одиста тангента, ево доказа из самога построја. Као полупречници написана лука из m стоји $mt = mF$, али по параболином је једном својству и $Mt = MF$, дакле је пруга $mMG \perp tF$ и с тога њом угао tMF у тачци M преполовљен, што је по пређашњем §-у услов за тангенту. Подобно је за тачку M_1 по поменутом параболином својству $FM_1 = t_1M_1$, а по построју $mt_1 = mF$, дакле $M_1mJ \perp t_1F$ и зато $\wedge JM_1F = t_1MJ = T_2M_1R_1$, као што за тангенту важа.

§. 121.

Нека су у некој елипсиној тачци M (Сл. 70.) MM_1 пречник, а KMK_1 тангента. По §. 117. је гониометријска тангента нагиба тангенте KMK_1 на абсцисну осу $\mathfrak{A} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x}{y}$, где x и y престављају координате тачишта M. Једначина је пречника MM_1, као пруге што иде кроз почетак координата, облика $y_1 = \mathfrak{A}_1 x_1$, а почем и тај пречник иде кроз тачку M, то мора

Сл. 70.



бити $y = \mathfrak{A}_1 x$ и отуда $\mathfrak{A}_1 = \frac{y}{x}$. Показује се дакле производ

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Сад ако је тангента нагибнога угла између абсцисне осе и пречника mm_1, који је с оним првим спрегнут, $\mathfrak{A}_2$: то по § 100. мора бити и $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, дакле $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2$, а то ће рећи *да је елипсина тангента у ма којој њезиној тачци M паралелна оном пречнику mm_1, што је спрегнут са пречником MM_1, који иде кроз исту тачку M.*

Отуда јоште видимо да елипсине тангенте, које повучемо у крајевима M, M_1, m и m_1 ма која два спрегнута њезина пречника MM_1 и mm, праве међу собом један *паралелограм* KK_1k_1k, у који је елипса тако углављена, да изван њега од ње ни чега нема.

§. 122.

У овим новим својствима елипсиним имамо основу за лако постројење тангенте на њу у датој њезиној тачци M. Јер ако кроз ту тачку (пређ. сл) повучемо пречник MM_1 и постројимо по §-у 100. други с њим спрегнут пречник mm_1, па онда по тачци M повучемо пругу $KK_1 \parallel mm_1$, та ће пруга KK_1 бити захтевана елипсина тангента за тачиште M.

Ако се тражи да се на елипсу повуче тангента која је паралелна некој датој прузи, онда повучемо пречник паралелан тој прузи и после постројимо други пречник, који је с њим спрегнут. Крајеви овог другог пречника биће тачишта за тражене елипсине тангенте.

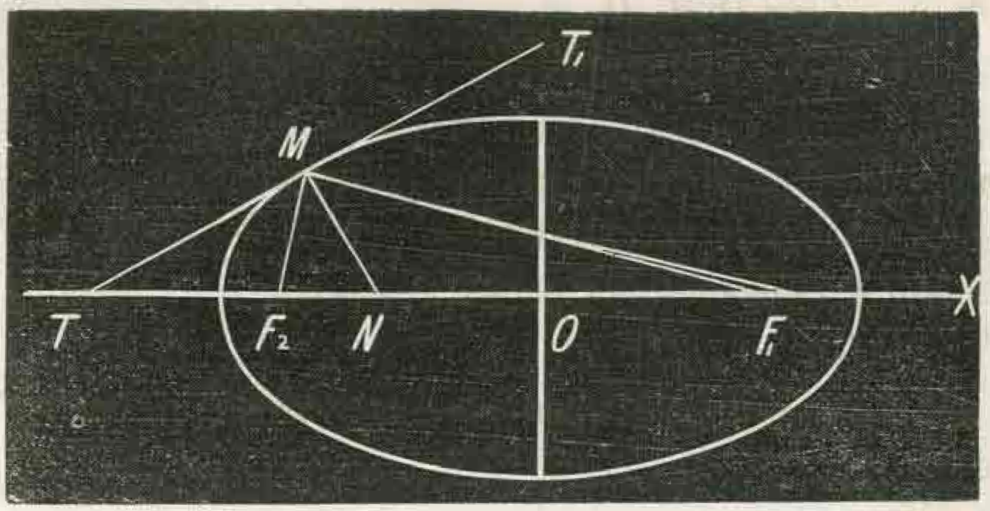
§. 123.

У сл 71. нека су F_1M и F_2M оба потега елипсине тачке M, а MT тангента у тој тачци. Ставимо још $\wedge\ F_1MT = u$, $\wedge\ F_2MT = v$, $tg\, MF_1X = \mathfrak{A}_1$, $tg\, MF_2X = \mathfrak{A}_2$ и $tg\, MTX = \mathfrak{A}$.

Из саме слике следује

$$\left.\begin{aligned} tg\, u &= \frac{\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}}{1 + \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1} \\ tg\, v &= \frac{\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}}{1 + \mathfrak{A}\mathfrak{A}_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (m,$$

Сл. 71.



Нека су сада даље x и y координате тачишта M. Биће једначина потега F_1M (као пруге што иде кроз две тачке: жижу F_1 и тачиште M), ако је $OF_1 = OF_2 = \gamma$,

$$y_1 = \frac{y}{x-\gamma}\,(x_1-\gamma),$$

а једначина другога потега F_2M (као пруге што иде кроз две тачке: жижу F_2 и тачиште M),

$$y_2 = \frac{y}{x+\gamma}\,(x_1+\gamma).$$

Из тих једначина следује $\mathfrak{A}_1 = \frac{y}{x-\gamma}$, $\mathfrak{A}_2 = \frac{y}{x+\gamma}$, а по §-у је 117. $\mathfrak{A} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x}{y}$

С овим вредностим добијамо из првог израза под $m.$),

$$tg\ u = \frac{\alpha^2y^2 - \beta^2x^2 - \beta^2\gamma x}{\alpha^2xy - \alpha^2\gamma y - \beta^2xy},$$

или због $\alpha^2y^2 + \beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$ и $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$,

$$tg\ u = -\frac{\beta^2}{\gamma y}.$$

На исти начин из другог израза, или простије ако по самој ствари у пређашњем резултату место $+\gamma$ узмемо $-\gamma$, налазимо

$$tg\ v = \frac{\beta^2}{\gamma y}$$

Ове вредности за $tg u$ и $tg v$ показују да се угли u и v узајмно допуњују до 180°, т. ј. да је $> F_1MT + > F_2MT =$

180°. За то, ако продужимо тангенту MT преко M, следује због $F_1MT_1 + F_2FT = 180°$, да је

$$> F_2MT = F_1MT_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (п.$$

што ће рећи, да потези на тангенту под једнаким углима ударају, један с једне, други с друге стране тачишта.

Најпосле, ако још повучемо нормалу NM, следује (због $NMT = NMT_1$) обзиром на израз под $п$).

$$NMF_2 = NMF_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \; (р.$$

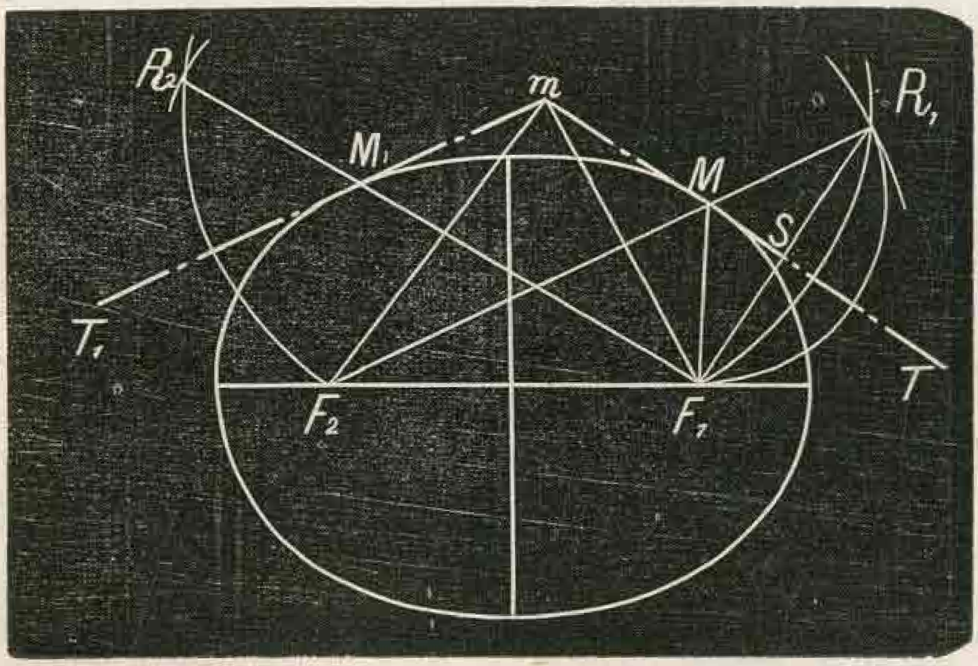
што ће рећи да нормала преполавља у тачишту угао F_1MF_2 између оба потега.

§. 124.

У прећашњим елипсиним новим својствима имамо основу за *најудеснији* построј тангенте на елипсу, било по датом тачишту, или кроз другу неку тачку изван елипсе.

У првом случају (сл. 72.) повучемо на дато тачиште оба

Сл. 72



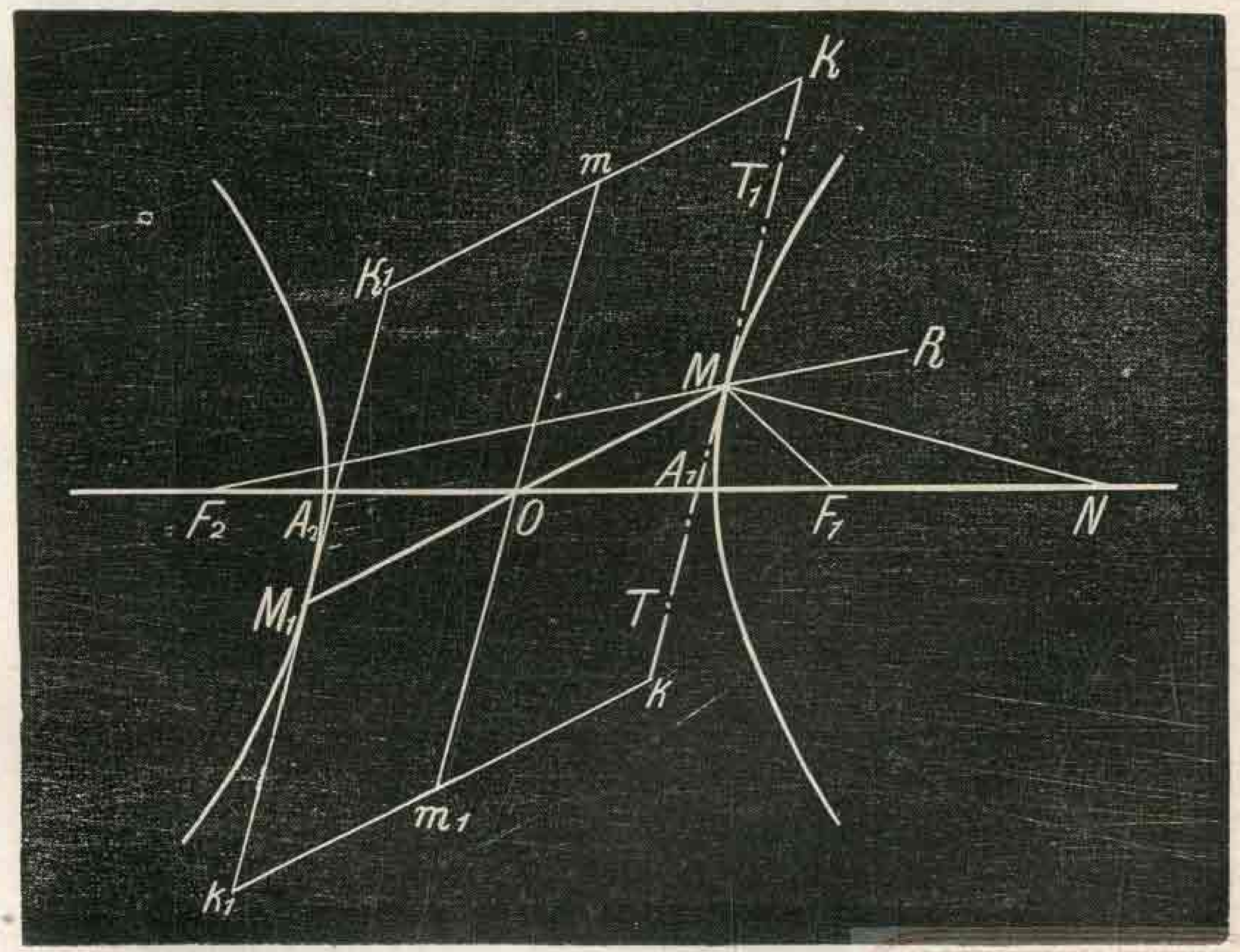
потега F_1M и F_2M, продужимо други за комад $MR_1 = MF_1$ и повучемо на пругу F_1R_1 управну пругу mMT. Ова последња пруга биће тражена тангента, јер је по таком построју, као што за тангенту ваља, $> F_2Mm = R_1MT = F_1MT$.

У другом случају стало је све до тога, да изнађемо тачке R_1 и R_2, које, ако прву саставимо с F_2 а другу с F_1, дају тачишта M и M_1. За то напишемо из условљене тачке m, кроз коју ваља да иде тангента, са полупречником mF_1 један лук десно, а с полупречником mF_2 други лук лево, први после пресечемо из жиже $\boldsymbol{F}_2$ у тачци R_1, а други из жиже F_1 у тачци R_2, оба с полупречником $= 2a$. Пресеци пруга F_2R_1 и F_1R_2 с елипсом, т. ј. тачке M и M_1 биће тачишта тражених можних тангената кроз m, а пруге mMT и mM_1T_1 саме те тангенте. Ево и доказа да је то тако. По построју је $F_2MR_1 = F_2M + MR_1 = 2a$, а по елипсином једном својству је $F_2M + MF_1 = 2a$; с тога је $MR_1 = MF_1$. Даље такођер по построју имамо $mF_1 = mR_1$. Због обојега је пруга $mT \perp F_1R_1$, $> F_1MT = TMR_1 = mMF_2$, као што за тангенту ваља и дакле је mMT доиста тангента кроз m. На овакав исти начин можемо доказати да је mM_1T_1 она друга можна тангента кроз m.

§. 125.

На онакав исти начин као у § 121. за елипсу можемо да докажемо и за иперболу, да је тангента у ма којој њезиној тачци M (Сл. 73.) паралелна пречнику mm_1, спрегнутом са пречником MM_1 што иде кроз тачку M. Осем тога пруге KK_1, kk_1, Kk и K_1k_1, узајмице паралелно повучене у крајевима два

Сл. 73



спрегнута пречника MM_1 и mm_1 са по јединим од њих, дају и при иперболи један паралелограм, али су само две од њих, оне у крајевима реелнога пречника, иперболине тангенте и тај је паралелограм углављен међу иперболина два главна крака.

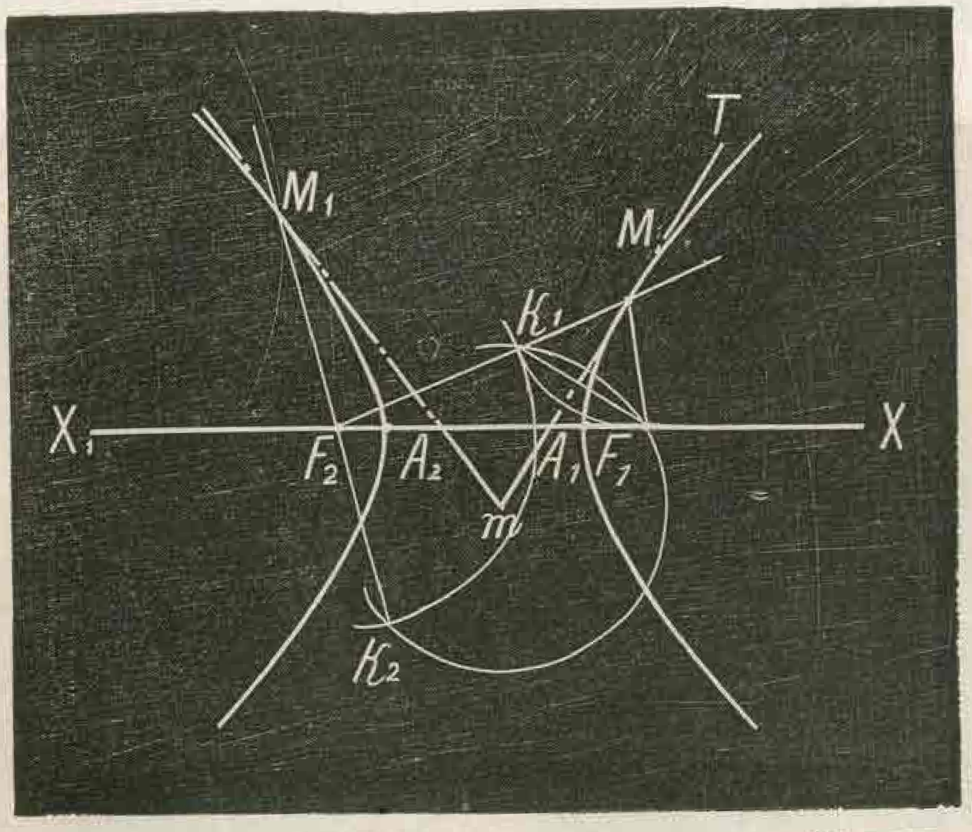
Најпосле онако исто као у §. 121. за елипсу налазимо и за иперболу, да потези неке њезине тачке M на тангенту у тој тачци ударају под једнаким углима F_1MT и F_2MT и да нормала MN преполавља угао F_1MR између оба потега тачишта M.

§. 126.

Ова нова иперболина својства дају најудеснији начин за построј тангенте на њу, било да је дато тачиште или каква друга тачка изван ње споља, кроз коју да иде тангента.

1.) Ако је дато тачиште M (Сл. 74.), онда повучемо нађ оба потега F_1M и F_2M и преполовимо угао F_2MF_1 пругом MT; ова пруга биће тражена тангента у иперболиној тачци M.

Сл. 74.

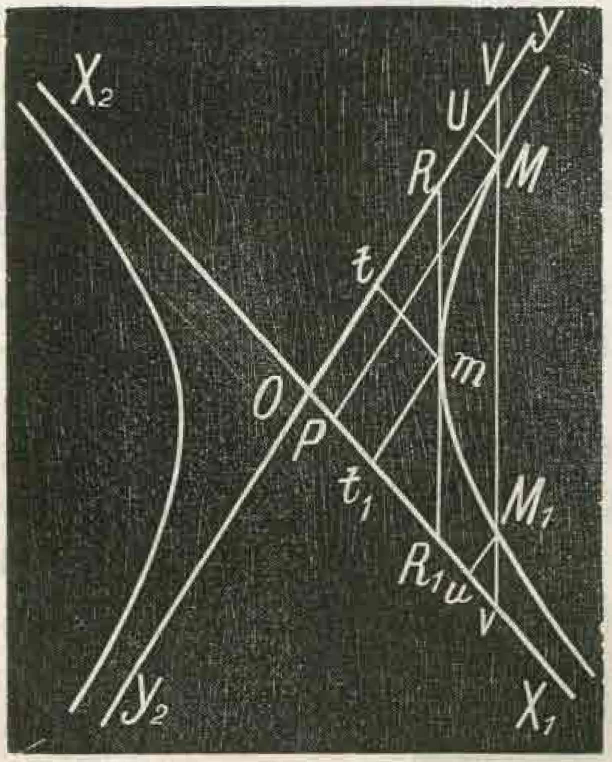


2.) Ако је пак дата спољна нека тачка m, кроз коју да иде тангента, онда напишемо из те тачке с полупречником mF_1 један лук, који после пресечемо из жиже F_2 с полупречником $F_2K_1 = F_2K_2 = 2a$ у тачкама K_1 и K_2; сад повучемо кроз F_2 на K_1 и K_2 пруге $K_2F_2M_1$ и F_2K_1M до пресека са иперболиним крацима у M и M_1, па ће најпосле још повучене пруге mMT и mM_1 бити можне две иперболине тангенте што иду кроз условљену тачку m.

§. 127.

Нека су x_1, y_1 и x_2, y_2 координате иперболиних тачака M и M_1 (Сл. 75.)

У § 100. нашли смо као једначину иперболе у односу на асимптоте, $xy = \varepsilon^2 = \frac{1}{4}\ (\alpha^2 + \beta^2.)$



Сл. 75.

Једначина је секанте што иде кроз оне две тачке, у односу на исту координатну систему,

$$y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2) \ \ldots (1.$$

Осем тога, за то што су оне две тачке иперболине тачке, мора јоште бити

$$x_1 y_1 = \varepsilon^2 \ \ldots\ldots\ldots (2. \text{ и}$$

$$x_2 y_2 = \varepsilon^2 \ \ldots\ldots\ldots (3.$$

Из ових последњих једначина следује $x_1 y_1 - x_2 y_2 = o$, или ако $x_1 y_2$ додамо и одузмемо, $y_2\ (x_1 - x_2) + x_1\ (y_1 - y_2) = o$ и отуда $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{y_2}{x_1}$. Ако дакле ову вредност узмемо у једначину под (1., имамо као једначину секанте што иде кроз оне две тачке

$$y - y_2 = -\frac{y_2}{x_1}(x - x_2).$$

Ова једначина показује да је за $y = o$, $x - x_2 = x_1$. Али при томе y је $x - x_2 = Ov - Ou, = uv$, а ако је $MU \parallel OX_1$, онда је јоште $x_1 = OP = MU$, дакле $uv = MU$. Отуда се види да су троугли M_1uv и MUV потпуно једнаки и да је дакле $MV = M_1v$, а то ће рећи да су оба секантина дела што леже између иперболе и асимптота, једне исте величине.

Ово секантино својство постоји у сваком случају, па дакле и кад оне тачке M и M_1 падају у једну исту, m, т. ј. кад секанта постане тангентом. Отуда се види да тангентин део RR_1, који лежи између асимптота, бива у тачишту преполовљен.

У томе имамо врло лак начин за постројење тангенте на иперболу у њезиној некој датој тачци m када имамо асимптоте. Ваља само просто да повучемо $mt_1 \parallel OY_1$, $mt \parallel OX_1$ и после да одмеримо $t_1R_1 = mt$, па ће бити пруга RmR_1 тражена тангента по тачци m.

Г.) ДАЉЕ ИСТРАГЕ ВЛАКОВА У РАВНИ У ОПШТЕ.

а.) Асимптоти.

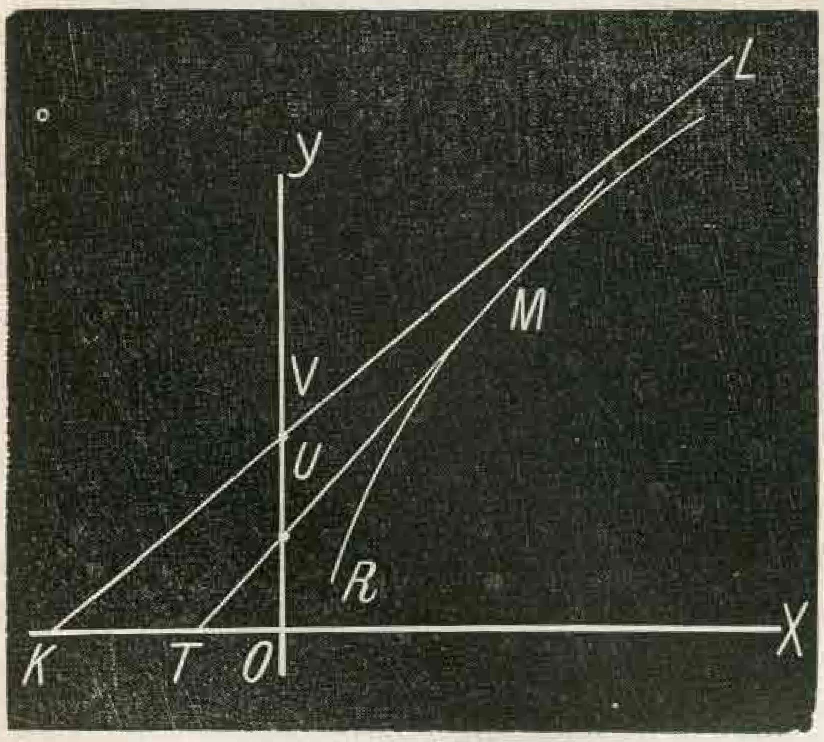
§. 128.

Шта су асимптоти при иперболи, то је казано у § 92. а у §-у 118. смо видели, да се се иперболини асимптоти могу сматрати као њезине тангенте, којих су тачишта на бескрајној даљини. Извесно су пак асимптоти границе не само можних пречника, него и можних тангената.

Сада да извидимо имају ли и други влаци у равни асимптоте? да ли сви, или само неки? у последњем случају који? —

Удаљујући тачиште какве влака све већма и већма од координатнога почетка, положај последње тангенте показаће: да ли влак има асимптоте, или нема. Јер ако је у сл. 76. KN асимптот влака RM, TM тангента у M, O почетак координата, а OX и OY јесу координатне осе: то је јасно, да се тангента TM све већма приближује асимптоту RL што год тачиште M по влаку RM од почетка O даље умиче, и да ће се најпосле обе те пруге сложити, кад даљина тачишта од почетка O буде безкрајно велика. Али тада је и OT постало $= OK$ и $OU = OV$.

Сл. 76.



По томе, ако из познате влакове једначине $y = f(x)$ израчунамо OT и OU, и после у добијеним изразима узмемо $x = \infty$, мора постати $OT = OK$, $OU = OV$. Делове OT и OU добијамо најпростије из тангентине једначине, узимајући у њој најпре општу ординату, па онда и општу абсцису $= o$ и опредељујући тако у првом случају абсцису за пресек с абсцисном осом,у другом пак случају ординату за пресек с ординатном осом.

Приметити ваља при томе још ово двоје: 1.) ако је асимптот паралелан *абсцисној* оси OX, онда за x ∞ постаје абсциса абсциснога пресека $OK = \infty$, а ордината је пресека OV *крајна* количина; 2.) ако је на против асимптот паралелан *ординатној* оси, онда је за $y = \infty$ абсциса абсцисина пресека OK *крајна* количина, а ордината OV постаје *бескрајна.* За то, да би све асимптоте каква влака пронашли, морамо у нађеним изразима за OK и OV да узмемо не само $x = \infty$, него и $y = \infty$ (осем ако је за $x = \infty$ изишло и $y = \infty$), те да видимо постају ли *оба* израза, или само *један* од њих којом од оних замена *крајна* количина? Укаже ли се ово, онда по горњему влак има асимптот и овога је положај опредељен. У случају ако би OK и OV показали се = о, што је знак да асимптот иде кроз координатни почетак, тад, да би утврдили његов положај, морамо у количнику $\frac{dy}{dx}$ да узмемо x или $y = \infty$, чим ћемо наћи гониометријску тангенсу асимптотова нагиба LKX на абсцисну осу.

Поступајући као што рекох, добијамо из тангентине једначине $y_1 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x)$ за $y_1 = o$

$$-x_1 = OT = y\frac{dx}{dy} - x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(1.$$

а за $x_1 = o$

$$y_1 = OV = y - x.\frac{dy}{dx} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(2.$$

као оне изразе, у којима ваља узети $x = \infty$ или $y = \infty$, да би видели да ли тако добијамо *крајне* вредности и да ли по томе влак има асимптота или нема.

§. 129

Примера ради узмимо и испитајмо једначину $y^2 = Dx + Ex^2$. која, као што знамо из § 54., преставља влакове друга реда, Ова једначина диференцијаљена даје

$$2y\,dy = D\,dx + 2\,Ex\,dx = (D + 2Ex)\,dx,$$

а отуда следује

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D + 2\,Ex}{2y} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{D + 2Ex}.$$

Дакле је по горњим изразима под 1. и 2.

$$OT = \frac{2y^2}{D + 2\,Ex} - x = \frac{2\,(Dx + Ex^2) - x\,(D + 2Ex)}{D + 2Ex}$$

$$= \frac{Dx}{D + 2Ex} = \frac{D}{\dfrac{D}{x} + 2E}$$

$$OU - y = \frac{Dx + 2Ex^2}{2y} = \frac{2\,(Dx + Ex^2) - (Dx + 2Ex^2)}{2y}$$

$$= \frac{Dx}{2\sqrt{Dx + Ex^2}} = \frac{D}{2\sqrt{\dfrac{D}{x} + E}}.$$

Узев у овим изразима $x = \infty$, при чему постаје $OT = OK$ и $OU = OV$, следује

$$OK = \frac{D}{2E},\ OV = \frac{D}{2\sqrt{E}}.$$

За $E = o$, у ком случају узета једначина (по § 55.) претставља параболу, покааује се и OK и $OV = \infty$, а то је знак да *парабола нема асимптота.* За $-E$ пак, где горња једначина (по § 56.) преставља елипсу, постаје OV имаћинарно, што је знак да ни *елипса нема асимптоте.* Само за $+E$, где она једначина претставља иперболу, јесу вредности OK и OV крајни бројеви, а то ће рећи да од влакова друга реда само *ипербола има асимптоте.*

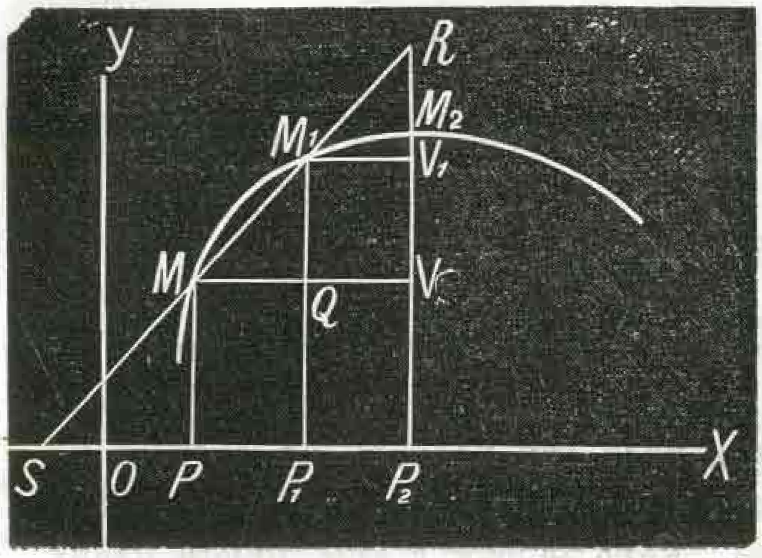
б.) Знак, да је неки влак према абсцисној оси испупчен (конвекс) или удубен (конкав).

§. 130.

Нека су у сликама 77. и 78. $OP = x$ и $PM = y = f\,(x)$ координате неке тачке M, каква било влака у равни, а PP_1

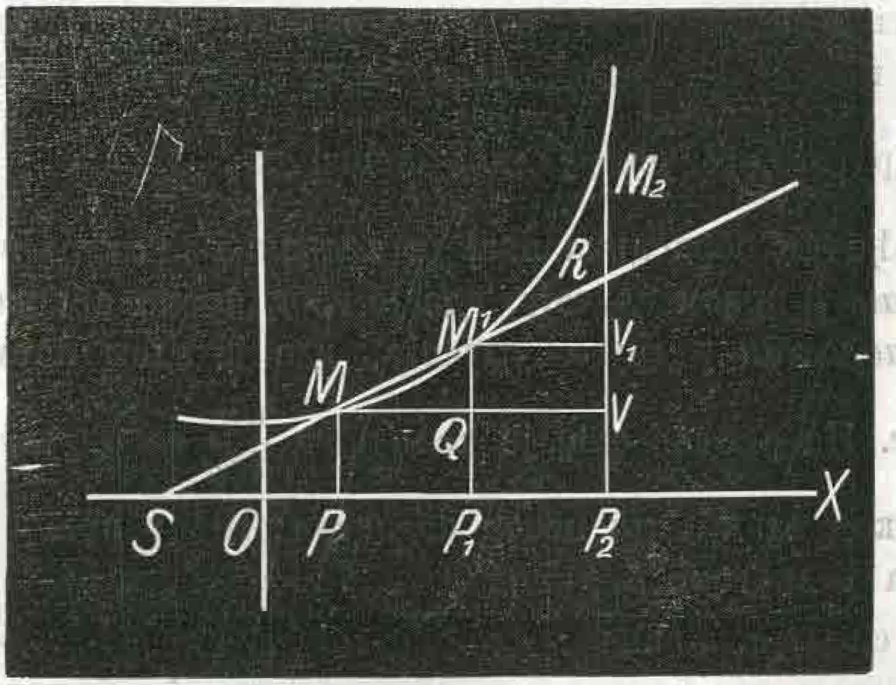
$= P_1P_2 = \Delta x$ неки вољан повећај абсцисе, дакле $P_1M_1 = f(x + \Delta x)$ и $P_2M_2 = f(x + 2\Delta x)$ одговарајуће ординате абсцисама OP_1 и OP_2 за тачке M_1 и M_2. Повуцимо кроз ове тачке секанту SMM_1R и јоште MV и $M_1V_1 \parallel OX$. Очевидно M_2R према секанти не лежи у оба случаја једнако, него је *противна* положаја, тако да ако први положај (сл. 77.), где је влак према абсцисној оси *удубен* (конкав), сматрамо као *положан*, онај други (сл. 78.), где је влак према абсцисној оси *испупчен* (конвекс), морамо узети као *одречан*.

Сл. 77.



Из слика имамо $M_1Q = M_1P_1 - MP$, т. j.

Сл, 78.



$$M_1Q = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= \frac{dy}{dx} . \Delta x + \frac{{}^2dy}{d^2x} . \frac{\Delta^2 x}{2} + \ldots\ldots\ldots,$$

а због сличности троуглова MVR и MQM_1

$$VR = 2M_1Q = 2\,\frac{dy}{dx} . \Delta x + \frac{{}^2dy}{d^2x} . \Delta^2 x + \ldots\ldots$$

$$P_2R = PM + VR = y + 2\,\frac{dy}{dx}\,.\,\Delta x + \frac{{}^2dy}{d^2x}\,.\,\Delta^2x + \ldots\ldots$$

$$PM_2 = f(x + 2\Delta x) = y + 2\,\frac{dy}{dx}\,.\,\Delta x + 2\,\frac{{}^2dy}{d^2x}\,.\,\Delta^2x + \ldots\ldots$$

Отуда у *првој* слици

$$M_2R = P_2R - P_2M = -\,\frac{{}^2dy}{d^2x}\,.\,\Delta^2x + \ldots\ldots$$

а у *другој* слици

$$M_2R = P_2M_2 - P_2R = +\,\frac{{}^2dy}{d^2x}\,.\,\Delta^2x + \ldots\ldots$$

Почем је при овој истрази све до тога стало: каквог су положаја најближе влакове тачке код M? то можемо Δx узети тако мало, да у последња два реда сви чланови од другога на даље према првоме изчезавају и да дакле знак количина M_2R зависи само од првога члана. Како је пак у том првом члану чинилац Δx у квадрату, то он на знак тих количина M_2R ни како не утиче и по свему томе конкавност или конвексност (удубеност или испупченост) влака према абсцисној оси зависи цигло од другог диференцијалног количника $\frac{{}^2dy}{d^2x}$.

По нађеним обрасцима овај је количник за *положне* ординате *одречан* у првом случају, где је влак према абсцисној оси *конкав*, а *положан* у другом случају, где је влак према истој оси *конвекс*. На против онај је количник $\frac{{}^2dy}{d^2x}$ за *одречне* ординате, т. ј. кад влак лежи испод абсцисне осе, у првом случају *положан*, а у другоме *одречан*.

Отуд следује правило: *влак је какав у некој својој тачци према абсцисној оси конкав или конвекс, ако је други диференцијални количник* $\frac{{}^2dy}{d^2x}$ *или противна или онака иста знака као ордината дотичне тачке.*

§. 131.

Узмимо један пример. Да извидимо какви су према абсцисној оси они влаци, које претставља једначина $y^2 = Dx + Ex^2$.

Та једначина даје $2ydy = D.dx + 2Ex.dx$; отуда је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D + 2Ex}{2y}\text{, дакле}$$

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{2Ey - (D + 2Ex).\dfrac{dy}{dx}}{2y^2}\text{, или ако за } \frac{dy}{dx} \text{ узмемо}$$

нађену његову вредност,

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{4Ey^2 - (D + 2Ex)^2}{4y^3}\text{, или обзиром на то, да је}$$

$y^2 = Dx + Ex^2$,

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = -\frac{D^2}{4y^3}.$$

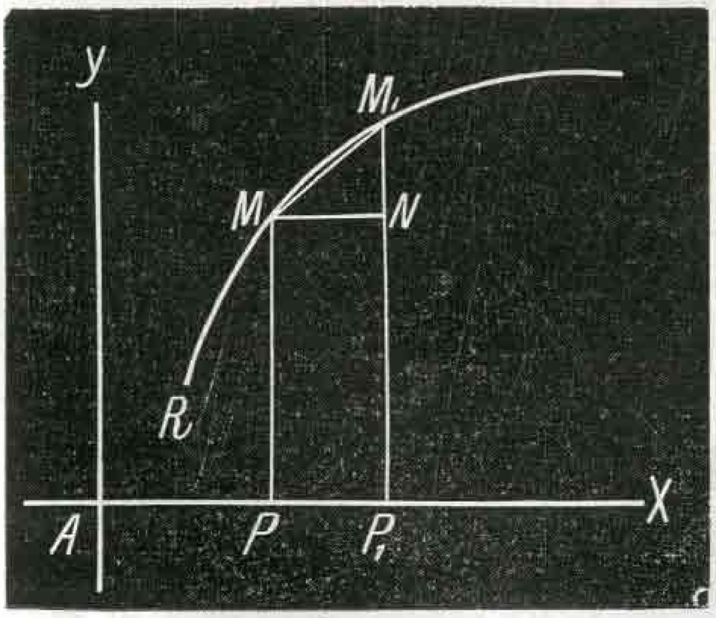
Овај је израз за свако положно y одречан, а за свако одречно y положан. Влаци дакле, које претставља једначина $y^2 = Dx + Ex^2$, сви су према абсцисној оси удубени. И одиста је тако, јер та једначина, као што знамо, претставља позната три влака друга реда: параболу, елипсу и иперболу, а сва три су према абсцисној оси удубени (конкав).

в). Диференцијал или елеменат лука влакова у равни у опште.

§. 132.

Замислимо да је у сл. 79. $RM = s$ лук некога влака у равни и да је тај лук подељен на безбројно многе, изчезљиво мале делове, од којих је MM_1 један. $AP = x$ нека буде абсциса, $PM = y$ ордината лукове тачке M. Дужина се лука RM мења чим узмемо другу (већу или мању) абсцису; лук је RM дакле нека абсцисина функција, која зависи од влакове природе и коју тек ваља да откријемо.

Сл. 79.



По томе стоји $RM = s = f(x)$. Повећајмо абсцису за $PP_1 = h$, тако да је $AP_1 = x + h$ абсциса тачке M_1. Осем тога, ако кроз M повучемо пругу $MN \parallel AX$, биће $P_1M_1 = P_1N + NM_1 = PM + NM_1$ ордината оне друге тачке M_1, а $MN = PP_1 = h$. Најпосле још повуцимо тетиво MM_1. Као год што зависи лук RM од x, тако исто зависи и лук RM_1 од $x + h$; стоји дакле да је $RM_1 = f(x + h)$. Лук је

$$MM_1 = RM_1 - RM = f(x + h) - f(x)$$

$$\frac{ds}{dx} h + \frac{{}^2ds}{d^2x} \cdot \frac{h^2}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots (1.$$

Из троугла MM_1N имамо тетиво

$$MM_1 = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{M_1N}^2} = \left(h^2 + \overline{M_1N}^2\right)^2$$

Но ордината је $MP = y$ тачке M такође нека функција $\varphi(x)$, која опет зависи од влакове природе, а као-год што та ордината MP зависи од своје абсцисе x, тако исто зависи и ордината M_1P_1 од своје абсцисе и зато је $M_1P_1 = \varphi\ (x + h)$. Дакле је

$$M_1N = M_1P_1 - P_1N = \varphi\,(x + h) - \varphi\,(x),$$

или због $\varphi\,(x) = y$,

$$M_1N = \frac{dy}{dx} h + \frac{{}^2dy}{d^2x} \cdot \frac{h^2}{2} x \ldots\ldots$$

По томе, ако ову вредност узмемо у горњи израз лука MM_1, следује

$$\overline{MM_1} = \left[h^2 + \left(\frac{dy}{dx} h + \frac{{}^2dy}{d^2x} \cdot \frac{h^2}{2} + \ldots\ldots\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[h^2 \left(1 + \frac{d^2y}{d^2x}\right) Sh^3 + \ldots\ldots\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= h\left(1 + \frac{d^2y}{d^2x}\right)^{\frac{1}{2}} + Uh^2 + \ldots\ldots (2.$$

Деобом ове једначине чрез ону (1. добијамо, скраћујући одмах са h,

$$\frac{\text{chord } MM_1}{\text{arc. } MM_1} = \frac{\left(1 + \frac{d^2y}{d^2x}\right)^{\frac{1}{2}} + Uh + \ldots\ldots}{\frac{ds}{dx} + \frac{{}^2ds}{d^2x} \cdot \frac{h}{2} + \ldots\ldots}$$

Што-год је h мање, то мање се тетиво разликује од лука, а кад h постане $= o$, онда између њих нема ни какве више разлике и њихова је размера постала $= 1$. За $h = o$ дакле стоји

$$1 = \frac{\left(1 + \frac{d^2y}{d^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{ds}{dx}}$$, отуд пак следује

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{d^2x + d^2y} \cdot$$

као *диференцијал* или *елеменат* лука MR.

§. 133.

Примери.

1.) Једначина је параболе $y^2 = Dx$. Отуд је $2ydy = Ddx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{D}{2y}$, $\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{D^2}{4y^2} = \frac{D}{4x}$; дакле по обрасцу пређашњега §а *диференцијал* или *елеменат параболина лука*

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{D}{4x}} = \frac{dx}{2y} \sqrt{D(D + 4x)} \cdot$$

2.) Из елипсине једначине у односу на сопствене осе $\alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2 - \beta^2x^2$ следује $\alpha^2ydy = - \beta^2xdx$, дакле $\frac{dy}{dx} = - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x^2}{\alpha^2 - x^2}$ и с тога *диференцијал елипсина лука*

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{\beta^2x^2}{\alpha^2(\alpha^2 - x^2)}} = dx \sqrt{\frac{\alpha^4 - (\alpha^2 - \beta^2)\, x^2}{\alpha^2\, (\alpha^2 - x^2)}}$$

$$= dx \frac{\sqrt{\alpha^4 - \gamma^2x^2}}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$

где је $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ елипсино вансређе.

3.) Ако у овом изразу елипсиног елемента узмемо $\beta = \alpha = r$, постаје $\gamma = o$ и елипса прелази у круг полупречника r, а *диференцијал кругова лука* показује се

$$ds = \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

4.) Најпосле иперболина једначина у односу на сопствене осе, т. ј. једначина $\alpha^2y^2 = \beta^2x^2 - \alpha^2\beta^2$ даје $\alpha^2ydy = \beta^2.xdx$, дакле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x}{y}, \text{ а } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\beta^4}{\alpha^4}\cdot\frac{x^2}{y^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x^2}{\alpha^2 - x^2}$$

и с тога *елеменат* или *дифервнцијал иперболина лука*

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{\beta^2x^2}{\alpha^2(x^2 - \alpha^2)}} = dx\sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - \alpha^4}{\alpha^2(x^2 - \alpha^2)}}$$

$$= \frac{dx\sqrt{\gamma^2x^2 - \alpha^4}}{\alpha\sqrt{x^2 - \alpha^2}}$$

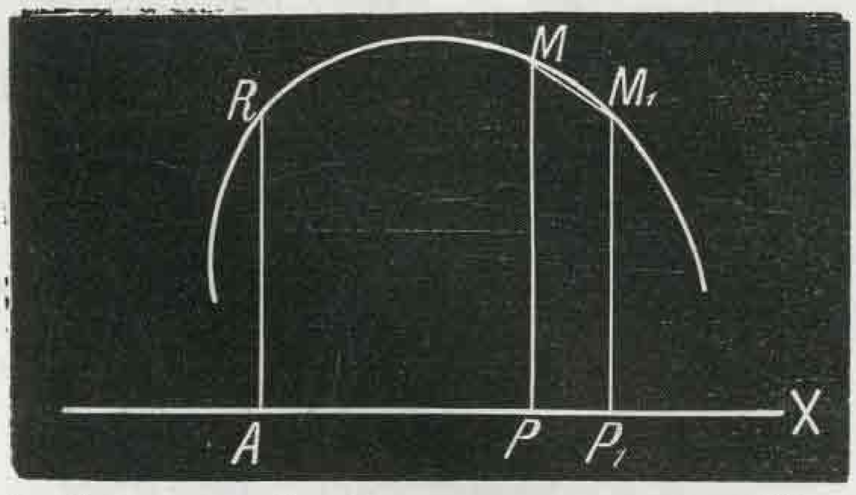
где је $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ иперболино вансређе.

г.) Диференцијал или елеменат површине.

§ 134.

Нека је у Сл. 80. *RN* лук од какве влака у равни и замислимо да смо површину, коју отсецају две влакове ординате, лук између њих и абсцисна оса, поделили ординатама на безбројно многе делове једнаке, али изчезљиво мале ширине *h*. Даље нека је абсциса лукове тачке *M*, т. ј. $AP = x$, $PM = y$ њезина ордината. Површина се дела *ARMP* очевидно мења, чим постане абсциса *x* друга (већа или мања); тај је део дакле

Сл. 80.



нека абсцисина функција, која зависи од влакове природе. Ставимо површину $ARMP = u$, имамо $u = f(x)$.

Повећајмо абсцису x за изчезљиво мало $PP_1 = h$ и подигнимо ординату P_1M_1. Као-год што прва површина $ARMP$ зависи од абсцисе x, тако исто зависи и површина ARM_1P_1 од абсцисе $x + h$, т. ј. она је функција те абсцисе, онака као и прва, дакле $f(x + h)$.

Ако од овог другог дела одузмемо први, остаје један оних делова изчезљиво мале ширине, на какве смо поделили целу површину, део PMM_1P_1. Имамо дакле сегменат

$$PMM_1P_1 = f(x + h) - f(x)$$

$$= \frac{du}{dx} h + \frac{{}^2du}{d^2x} . \frac{h^2}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

Сад, ако повучемо тетиво MM_1, добијамо трапез PMM_1P_1 истих ордината и исте ширине као пређашњи сегменат. Тај је трапез

$$PMM_1P_1 = (PM + P_1M_1) . \frac{h}{2} .$$

Ордината је $PM = y$ нека $\varphi(x)$, која зависи опет од влакове природе; али као-год што та ордината зависи од абсцисе x, тако исто зависи ордината P_1M_1 од абсцисе $x + h$; имамо дакле

$$P_1M_1 = \varphi(x + h) = y + \frac{dy}{dx} . h + \frac{{}^2dy}{d^2x} . \frac{h^2}{2} + \ldots\ldots$$

С тога, ако место ордината узмемо њихне вредности: трапез је

$$PMM_1P_1 = \left(y + y + \frac{dy}{dx} . h + \frac{{}^2dy}{d^2x} . \frac{h^2}{2} + \ldots\ldots\right) . \frac{h}{2}$$

$$= yh + \frac{dy}{dx} . \frac{h^2}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

и по томе

$$\frac{Segm.\ PMM_1P_1}{Trap.\ PMM_1P_1} = \frac{\frac{du}{dx} + \frac{{}^2du}{d^2x} . \frac{h}{2} + \ldots\ldots}{y + \frac{dy}{dx} . \frac{h}{2} + \ldots\ldots\ldots}$$

Што-год се узме мање h, то већма приближује се ова размера између сегмента и трапеза јединици и постаје најпосле за $h = o$ равна јединици $(= 1)$. При томе је h ордината $y = \frac{du}{dx}$, дакле *диференцијал* или *елеменат површине* у опште

$$du = y dx$$

раван производу од ординате и абсцисиног диференцијала.

§ 135.

Примери.

1.) Параболина је једначина $y = \sqrt{Dx}$, зато по пређашњем §у за параболу диференцијал или елеменат површине

$$du = dx \sqrt{Dx}.$$

2.) Елипсина је једначина, у односу на сопствене осе као координатне, $y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$; зато за елипсу имамо диференцијал површине сегмента

$$du = \frac{\beta}{\alpha} . dx \sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

Ако је почетак координата у левом темену, дакле једначина елипсе $y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{2\alpha x - x^2}$, онда је диференцијал површине елипсина сегмента

$$du = \frac{\beta}{\alpha} dx \sqrt{2\alpha x - x^2}$$

3). Са $\beta = \alpha$ у овим изразима за диференцијал елипсина сегмента добијамо као елеменат кругова сегмента

$du = dx \sqrt{\alpha^2 - x^2}$, кад је почетак у средишту,

$du = dx \sqrt{2\alpha x - x^2}$, кад је почетак у левом крају једног пречника као абсцисне осе.

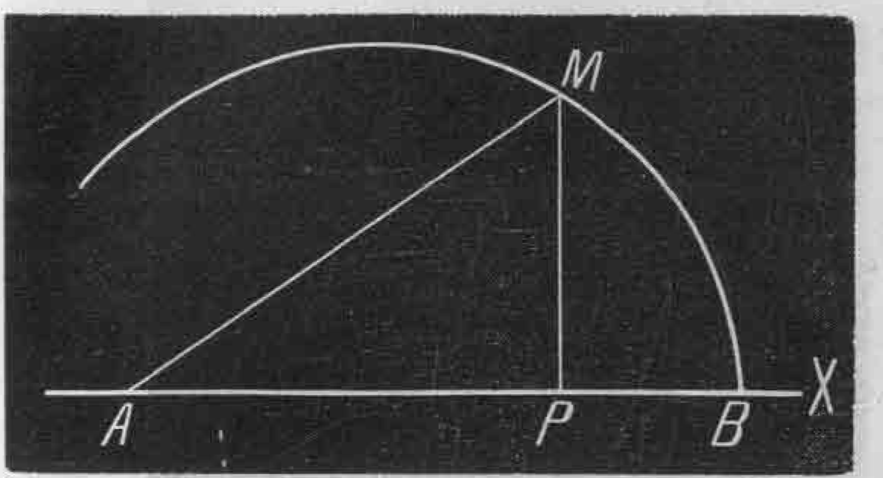
4.) Иперболина је једначина у отнносу на сопствене осе $y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$, зато за иперболу диференцијал површине

$$du = \frac{\beta}{\alpha} dx \sqrt{x^2 - \alpha^2}.$$

§ 136.

Често потребујемо површину сектора *AMD* (Сл. 81.), с тога ћемо одмах сада да изнађемо још и елеменат сектора влакова у равни.

Сл. 81.



Ако спустимо ординату $MP = y$, биће $AP = x$ абсциса тачке M. Имамо из слике да је сектор $AMB = \triangle AMP + Segm.\ PMB$.

Троугао је $AMP = \frac{1}{2} AP . MP = \frac{1}{2} xh$, дакле $d \triangle AMP = \frac{1}{2}(xdy + ydx)$. По §-је пак 134. $dSegm\ PMB = -ydx$, у ком се одречан знак узима с тога, што се очевидно површина сегмента умаљава кад x расте. Дакле је због

$$d\ Sect.\ AMB = d \triangle AMP + d\ Segm.\ PMB,$$ *елеменат сектора*

$$\begin{aligned} dAMB &= \tfrac{1}{2}(xdy + ydx) - ydx \\ &= \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx). \end{aligned}$$

При употреби овога обрасца ваља добро на то пазити како су елементи секторови положени према абсцисној оси и како се сегменат влада при промени абсцисе, те да се сектору онај знак прида, који му одиста припада.

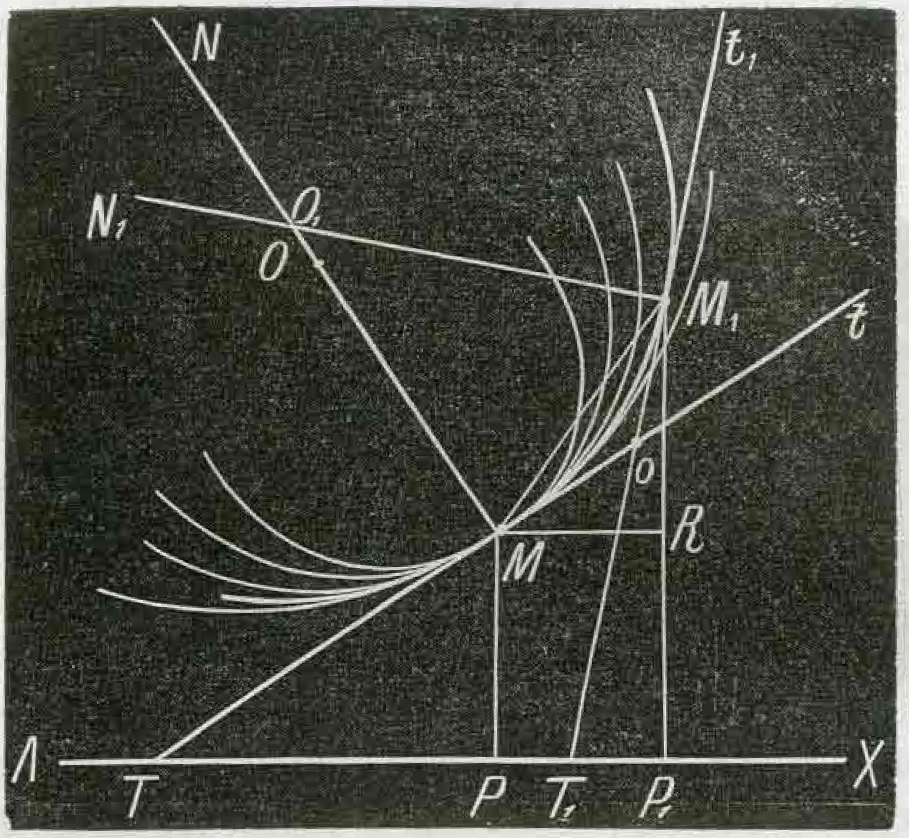
г.) Круг кривине и полупречник кривине влакова у равни.

§ 137.

Слика 82. нека преставља лук нека влака у равни, кога је једначина $y = f(x)$. У луковој тачци M, које су координате $AP = x$ и $MP = y$, повуцимо тангенту Tt и нормалу MN.

Није тешко увидети да има безбројно много кругова, који се на ону исту страну криве на коју и сам влак, који сви имају оно исто T*t* за тангенту и којих средишта леже сва у правцу нормале MN. Али између свију тих кругова има само један што се са влаком $y = f(x)$ у тачци M и лево и десно око ње

Сл. 82.



најприсније слаже. Тај се круг зове влаков *круг кривине* за тачку M, а онај полупречник MO тога круга, који лежи у нормалином правцу, зове се *полупречник кривине* за тачку M. Најпосле средиште O истога круга зове се *среидрште влакове кривине* за тачку M.

Полупречник кривине од врло је велике важности и у теорији и у практици, с тога ћемо сада да га определимо најпре за влакове у равни у опште, а после за влакове друга реда на по се.

§. 138.

Узмимо у пређашној слици још једну влакову тачку M_1 у изчезљиво малом отстојању од оне пређашње M, па повуцимо тетиво MM_1, тангенту T_1t_1 на влак у новој тачци M_1 као тачишту, нормалу M_1N_1, најпосле $MR \parallel AX$. Ова друга нормала пресеца прву у тачци O_1.

Имамо из троугла MM_1R т тиво

$$MM_1 = \sqrt{\overline{MR}^2 + \overline{M_1R}^2}$$, или ако ставимо $PP_1 = MR = \varDelta x$, а $M_1R = \varDelta y$,

$$MM_1 = \sqrt{\varDelta^2 x + \varDelta^2 y} = \varDelta x \sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y^2}{\varDelta x}\right)}.$$

Почем је $Tt \perp MN$, $T_1t_1 \perp M_1N_1$, то је $> MO_1M_1 = ToT_1$. Ставимо још нагиб тангенте Tt на абсцисну осу α, а нагиб тангенте T_1t_1 на исту осу α_1. Биће $> MO_1M_1 = \alpha_1 - \alpha$.

Што-год је лук MM_1 мањи, то већма приближује се тетиво тангенти, дакле троугао MO_1M_1 равнокракоме, а пресек O_1 кривинином средишту O за тачку M. Најпосле при изчезљиво малом луку MM_1 поменути троугао може се без приметне погрешке сматрати као у тачци M правоугао, тако да при тој предпоставци можемо рећи да је

$$MO_1 = \frac{MM_1}{tg\, MO_1M_1}.$$

Видели смо да је $> MO_1M_1 = \alpha_1 - \alpha$; дакле је

$$tg\, MO_1M_1 = tg\, (\alpha_1 - \alpha) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha.\, tg\alpha_1}.$$

Али по §-у је 115. $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$. Ради краткоће ставимо за часак само $tg\alpha = n$. Тада можемо узети $tg\,\alpha_1 = n + \Delta n$ С овима је вредностима

$$tg\, MA_1M_1 = \frac{\Delta n}{1 + n^2 + n\Delta n},$$

дакле по пређашњем изразу и обзиром на горњу вредност за MM_1

$$MO_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.(1 + n^2 + n\Delta x)}{\left(\frac{\Delta n}{\Delta x}\right)}.$$

Ако сад у овом изразу место Δx усмемо dx, Δy прелази у dy, Δn у $dn = d.\frac{dy}{dx} = \frac{{}^2dy}{dx}$, тако да од трећега члана бројитељевог тринома $n\Delta n$ добијамо $\frac{dy}{dx}.\frac{{}^2dy}{dx}$, које као диференцијал вишега реда према другом члану $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ истога тринома изчезава. Осем тога, кад је Δx прешло у dx, тачка се M_1 од тачке M, а тачка O_1 од O више не разликује и M_1O_1 постало је $= MO$ полупречнику кривине за тачку M. Ако дакле ставимо овај полупречник $M = \varrho$, имамо по свему примећеноме по пређашњем обрасцу

$$\varrho = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\left(\frac{^2dy}{d^2x}\right)} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{^2dy}{d^2x}\right)}.$$

Овде јоште ваља приметити да је бројитељ свагда положан, именитељ пак при влацима који су према абсцисној оси конкав одречан, а при онима што су према тој оси конвекс положан (§ 130.), због чега нађени израз кривининог полупречника ваља узети за конкаве влакове са знаком (—), а за конвексе са знаком (+). У првом случају средиште кривине лежи у самој нормали, а у другом случају у њезином продужају, с другим речма: полупречник кривине окренут је у првом случају положним ординатама, а у другом случају одречним ординатама *противно* (сравни с §. 130.).

§ 139.

Изнађимо полупречник кривине за влакове друга реда. Једначина која све те влакове претставља знамо да је $y^2 = Dx + Ex^2$. Из ње следује

$2ydy = Ddx + 2Ex\,dx$

$y.\,^2dy + d^2y = Ed^2x$, дакле је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D+2Ex}{2y}$$

$$\frac{^2dy}{d^2x} = \frac{1}{y}\left(E - \frac{d^2y}{d^2x}\right) = \frac{1}{y}\left[E - \frac{(D+2Ex)^2}{4y^2}\right]$$

$$= \frac{4Ey^2-(D+2Ex)^2}{4y^3}.$$

Као што знамо сви су влаци другога реда конкав. Имамо дакле, кад ове вредности заменимо у обрасцу за полупречник кривине,

$$\varrho = -\,4y^3\left[1+\frac{(D+2Ex)^2}{4y^2}\right]^{\frac{3}{2}}\quad[4\,Ey^2-(D+2Ex)^2]$$

$$= -\,\frac{[4y^2+(D+2Ex)^2]^{\frac{3}{2}}}{2\,[4Ey^2-(D+2Ex)^2]},$$

или ако узмемо вредност за y^2 из једначине дотичних влакова,

$$\varrho = \frac{[4y^2 + (D + 2Ex)^2]^{\frac{3}{2}}}{2D^2} \; .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; (1.$$

Претстављајући нормалу чрез n, имамо по §. 114.

$n = y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, или ако место $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ узмемо нађену вредност,

$$n = \tfrac{1}{2} \, [4y^2 + (D + 2Ex)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Отуд следује

$8n^3 = [4y^2 + (D + 2Ex)^2]^{\frac{3}{2}}$ и с тога

$$\varrho = \frac{8n^3}{2D^2} = \frac{n^3}{(\frac{1}{2}\,D)^2} \; .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; (2.$$

Ово показује да је *при влацима друга реда полупречник кривине за коју-год тачку раван количнику од подељена нормалина куба чрез квадрат параметра.*

§ 140.

Употребимо образац под (2. на поједине влакове друга реда

1.) Параболина је нормала по §. 116. $n = \sqrt{Dx + \frac{D^2}{4}}$

дакле је при параболи полупречник кривине

$$\varrho = \frac{\left[Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{(D + 4x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{D}}.$$

2.) Елипсина је нормала по истом §у

$n = \frac{\beta}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^4 - \gamma^2 x^2}$, а по §у 56. $\frac{D}{2} = \frac{\beta^2}{\alpha}$; дакле је при елипси полупречник кривине

$$\varrho = \frac{\beta^3}{\alpha^6} \, (\alpha^4 - \gamma^2 x^2)^{\frac{3}{2}} : \frac{\beta^4}{\alpha^2}$$

$$= \frac{(\alpha^4 - \gamma^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^4 \beta},$$

где γ претставља елипсино вансређе.

За $\beta = \alpha = r$ постаје $\gamma = o$ и елипса претвара се у круг полупречника r, а пређашњи израз даје полупречник кривине при кругу

$$\varrho = r,$$

као што одиста и јесте.

3.) Иперболина је нормала по оном истом §у $n = \frac{\beta}{\alpha^2} \sqrt{\gamma^2 x - \alpha^4}$, а и за иперболу је по §. 57. $\frac{D}{2} = \frac{\beta^2}{\alpha}$; дакле је иперболин полупречник кривине

$$\varrho = \frac{\beta^3}{\alpha^6} (\gamma^2 x^2 - \alpha^4) : \frac{\beta^4}{\alpha^2}$$

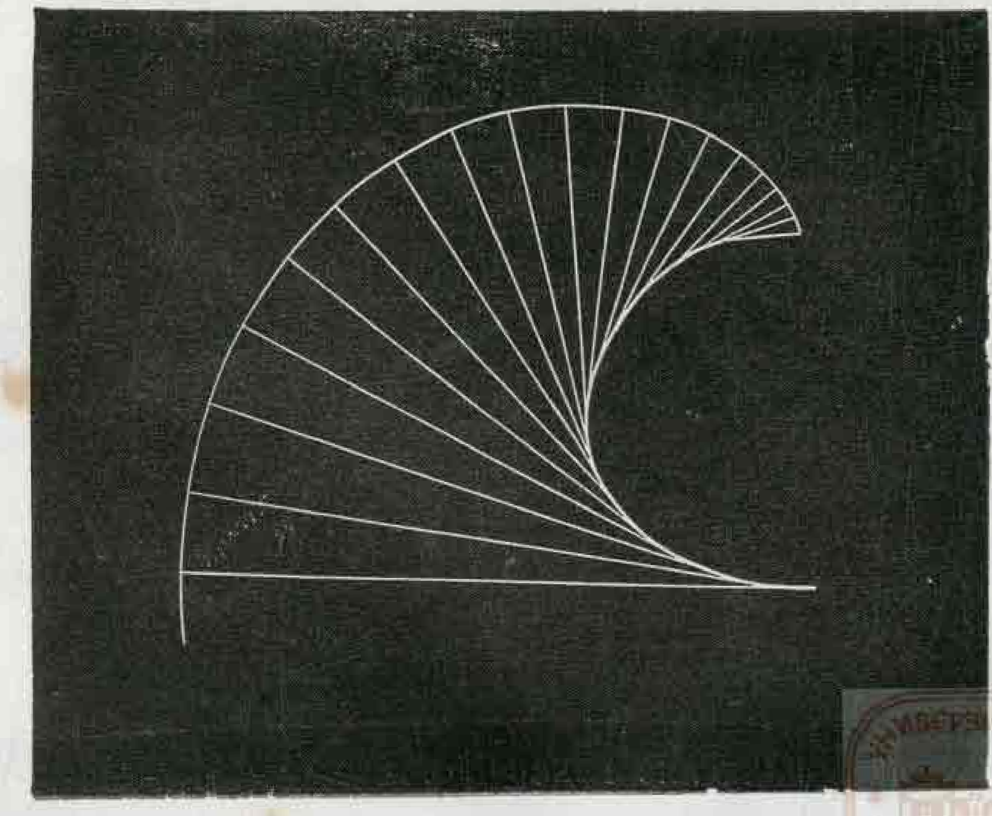
$$= \frac{(\gamma^2 x^2 - \alpha^4)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^4 \beta}$$, где је $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ иперболино вансређе.

ђ.) Еволута и Еволвента.

§ 141.

Из појма круга кривине (§. 137.) увиђамо, да су координате средишта тога круга и његов полупречник (полупр. кривине) функције абсцисе оне влакове тачке, које се тичу. Ти су бројеви дакле од једне влакове тачке до друге и до сваке *пременљиви.* Ако замислимо да су на све колике влакове тачке повучени кругови кривине, то њихова састављена средишта (види сл. 83.)

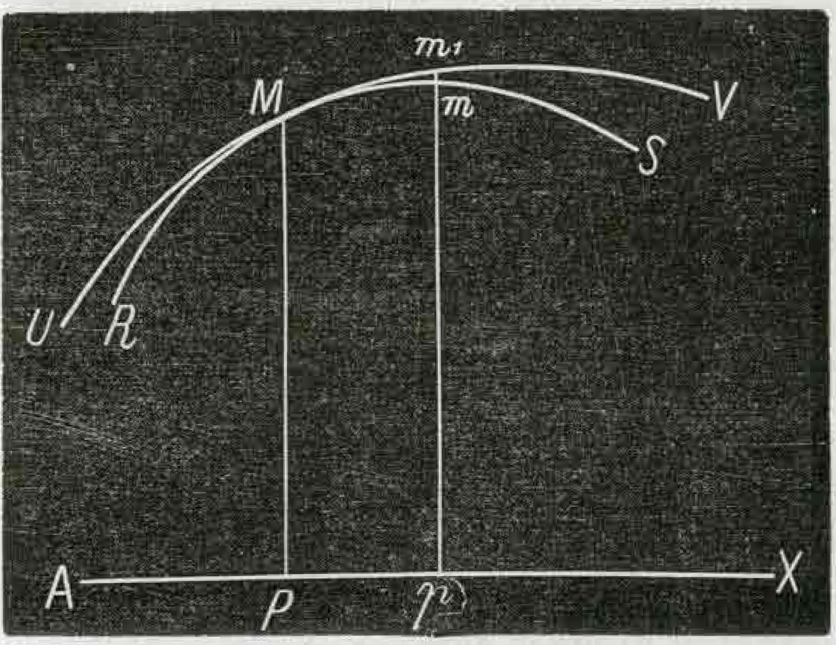
Сл. 83.



дају један правилан влак, који ћемо сада поближе да испитамо, јер је нарочито за механику од велике важности. Да би нам пак то било лакше и да би целу ствар потпуно схватили, нужно је да претпошљемо ово што иде.

§ 142.

Сл. 84.



Нека је 1.) $y = f(x)$ једначина нека влака RMS (Сл. 84.), 2.) $y_1 = \varphi(x_1)$ једначина другог неког влака UMV и M њихова заједничка тачка. Координате те тачке нека су $AP = x$ и $MP = y$. Узмимо $Pp = h$ и подигнимо ординате pm и pm_1 оба влака за абсцису $Ap = x + h$.

Биће за 1. влак

$$pm = f(x + h)$$

$$= y + \frac{dy}{dx}\cdot h + \frac{{}^2dy}{d^2y}\cdot\frac{h^2}{2} + \cdots\cdots\cdots,$$

и за други влак

$$pm_1 = \varphi(x_1 + h) = y_1 + \frac{dy_1}{dx_1}.h + \frac{{}^2dy_1}{d^2x_1}\cdot\frac{h^2}{2} + \cdots\cdots\cdots.$$

Ови пак редови показују јасно, да ће се оба влака око тачке M то присније додиривати, што-год више једноимених чланова тих редова од почетка на даље при изчезљиво малим вредностима броја h једнаки испадну. Кад је осем $y_1 = y$ (дакле $x_1 = x$) још $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, онда каже се да се влаци додирују у првом реду, или да је њихово *додиривање првога реда*. Кад је пак осем та два услова још и $\frac{{}^2dy}{d^2x_1} = \frac{{}^2dy}{d^2x}$, онда говори се да између дотичних влакова постоји *додиривање друга реда* и тд. У опште, кад су у горњим редовима n првих диференцијалних количника једнаки, онда је додиривање између два дотична влака *n-ога* реда.

Из овога увиђамо да додиривање између два влака не може бити вишега реда (или присније), него што је ступањ једначине онога од њих, који је нижега реда, јер су даљи диференцијални количници при томе влаку 0. Влаци дакле, од којих је један другога реда, а онај други или тог истог реда или вишега, не могу се већма додиривати него најдаље у другом реду.

Сад приступимо испиту онога влака, у ком леже средишта кругова кривине каквог било влака у равни.

§ 143.

Нека x и y значе координате неке тачке влака, кога је једначина $y = f(x)$; полупречник кривине за ту тачку нека је ϱ, а координате средишта дотичног круга кривине у тој тачци нека су χ и η.

Једначина је круга кривине $(x_1 - \chi)^2 + (y_1 - \eta)^2 = \varrho^2$ функција друга ступња; додиривање дакле између тога круга и влака $y = f(x)$ може бити највише другога реда. Једначина круга, диференцијена двапут у стопце, даје

$$(x_1 - \chi)\, dx_1 + (y_1 - \eta)\, dy_1 = o,$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1 - \chi}{y_1 - \eta},$$

$$\frac{{}^2dy_1}{d^2x_2} = -\frac{1}{y_1 - \eta} \cdot \left(1 + \frac{d^2y_1}{d^2x_1}\right).$$

Да између круга кривине и влака $y = f(x)$ постоји додиривање прва реда, мора да је поред $y_1 = y$ и $x_1 = x$, још $\frac{dx_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, т. ј.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \chi}{y - \eta} \;\ldots\ldots\ldots\; (m;$$

а да је њихово оддиривање другога реда мора бити, осем

$y_1 = y$, $x_1 = x$, $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, јоште и $\frac{{}^2dy_1}{d^2x_1} = \frac{{}^2dy_1}{d^2x}$, дакле

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = -\frac{1}{y-\eta} \cdot \left(1 + \frac{d^2y}{d^2x}\right), \text{ или}$$

$$d^2x + d^2y + (y-\eta) \cdot dy = o \cdots\cdots (1.$$

Влак $y = f\,(x)$ са влаком што праве средишта кругова кривине везује нормала у дотичпом тачишту, јер у њој лежи, као што смо видели, и средиште круга кривине. Нормалина је једначина по § 115.

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}\,(\chi - x), \text{ или}$$

$$(x-\chi)\,dx + (y-\eta)\,dy = o \cdots\cdots\cdots (2.$$

Ове две једначине 1. и 2. и једначина $y = f\,(x)$ као трећа потпуно опредељују онај влак, који постаје од средишта кривина. Израз што га претстављa добићемо, ако из једначине $y = f\,(x)$ узмемо $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{{}^2dy}{d^2x},$ па заменимо у једначинама 1. и 2.

Пре него то покажемо на извесним влацима ваља јоште ово приметити.

§ 144.

Напоменуо сам, а и без тога увиђа се, да су χ, η, ϱ и y функције од x.

Диференцијалимо по тима бројевима једначину круга кривине и горњу једначину нормале. Следује

$$(x-\chi)\,dx - (x-\chi)\,d\chi + (y-\eta)\,dy - (y-\eta)\,d\eta = \varrho\,d\varrho$$

и $d^2x - d\chi . dx + d^2y - dy . d\eta + (y-\eta) . {}^2dy = o$, или обзиром на једначине под 1. и 2.

$$(x-\chi)\,d\chi + (y-\eta)\,d\eta = -\varrho\,d\varrho \cdots\cdots (3.$$

$$d\chi . dx + d\eta . dy = o \cdots\cdots\cdots (4.$$

Из ове последње једначине следује

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{d\eta}{d\chi},$$

ако ову вредност узмемо у нормалин први израз,

$$y - \eta = \frac{d\eta}{d\chi} \cdot (x-\chi) \cdots\cdots (5.$$

из чега се види: *да је нормала у ма којој тачци извеснога влака, дакле и правац полупречника кривине у тој тачци тангента на онај влак што образују средишта кривине.*

Са вредности за $(y-\eta)$ под (5. добијамо из једначине круга кривине и једначине под (3.

$$(x-\chi)^2.\left(1+\frac{d^2\eta}{d^2\chi}\right)=\varrho^2 \text{ и}$$

$$(x-\chi).\left(dx+\frac{d^2\eta}{d\chi}\right)=-\varrho d\varrho,$$ дакле ако из ових једначина уклонимо $(x-\chi)$

$$d\varrho=\sqrt{d^2\chi+d^2\eta}=d\chi\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\chi}\right)^2}$$

што показује, да је *диференцијал полупречника кривине раван диференцијалу средишна влака*, а то толико значи, *да се полупречник кривине онако исто мења, као-год и средишни влак, кога су опште координате* χ и η.

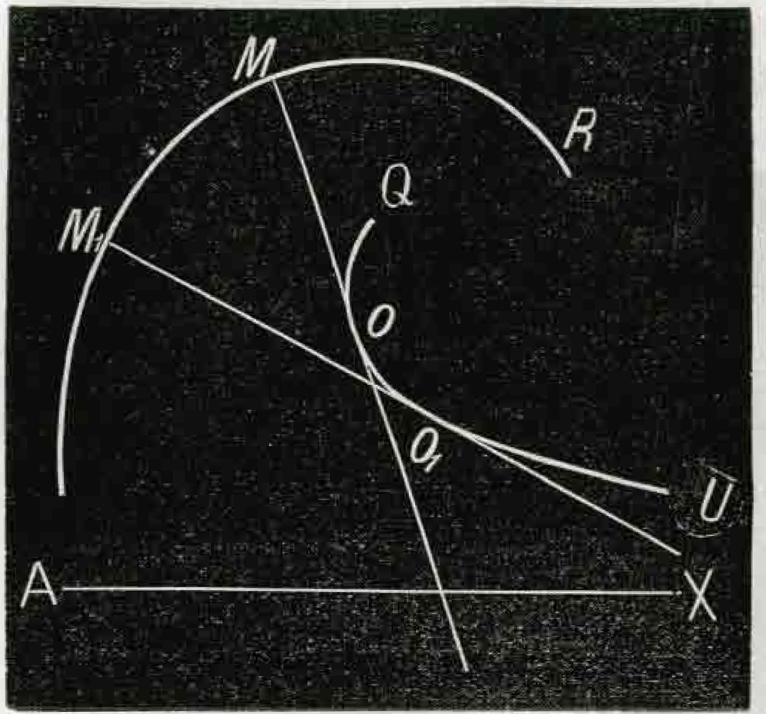
Означујући диференцијал лука од средишнога влака чрез ds, имамо $ds=\sqrt{d^2\chi+d^2\eta}$, дакле по горњем резултату $d\varrho=ds$, или ако c претставља неки сталан број, $d\varrho=d\ (s+c)$ и отуда

$$\varrho=s+c.$$

За какву другу тачку имамо тако исто $\varrho_1=s_1+c$, дакле $\varrho-\varrho_1=s-s_1$, као што и гласи други део претходнога докучаја.

Оба докучаја овога §а карактеришу заједно потпуно средишни влак. Замислимо да је његова конвекса страна (Сл. 85.) обавита витким концем који се не истеже, па да тај конац мало по мало тако с њега одвијамо, да је свагда затегнут. Одвили смо конац до O; тада његов одвијени и затегнути део биће по 1. докучају овога §а тангента на средишни влак у тачци O. Ако је крај затегнута конца при томе у тачци M влака RMM_1S и ми конац даље одвијемо до O_1, то осем што је његов правац O_1M_1 сада тангента у тачци O_1, по другом докучају овога §а јоште је $C_1O_1-MO=$ луку OO_1 и крај M_1 конца још се једнако налази у влаку RMM_1S; он је једнако по томе влаку ишао, тако да влак RMM_1S можемо сматрати као траг, који је крај конца при одвијању за собом оставио.

Сл. 85.



На тај начин влак RMM_1S постаје *одвијањем* или *еволуцијом* средишнога влака, *и* коме је био увит, и зато се влак RMM_1S зове *одвитница* или *еволвента* влака QOO_1U, а овај према ономе *увитница* или *еволута*. Из овога видимо да је еволута према еволвенти на прилику у онаком отношају, као средиште круга према периферији, само што овде полупречник није као при кругу сталан, него за сваку другу тачку еволвенте други. Најпосле, почем је средиште круга кривине уједно пресек двеју најближих нормала, то се сви пресеци нормала налазе у еволути QOO_1U. —

Сад изнађимо еволуте свих влакова друга реда.

§ 145.

Из параболине једначине $y^2 = Dx$ следује $\frac{dy}{dx} = \frac{D}{2y}$, $\frac{{}^2dy}{d^2x} = -\frac{D^2}{4y^3}$.

Ове две вредности и трећа $y = \sqrt{Dx}$, узете у једначине 1. 2. § 143. дају

$$3x \pm \frac{D}{2} - \chi = o \text{ и } \frac{4x\sqrt{Dx}}{D} + \eta = o,$$ отуд пак, уклонив x,

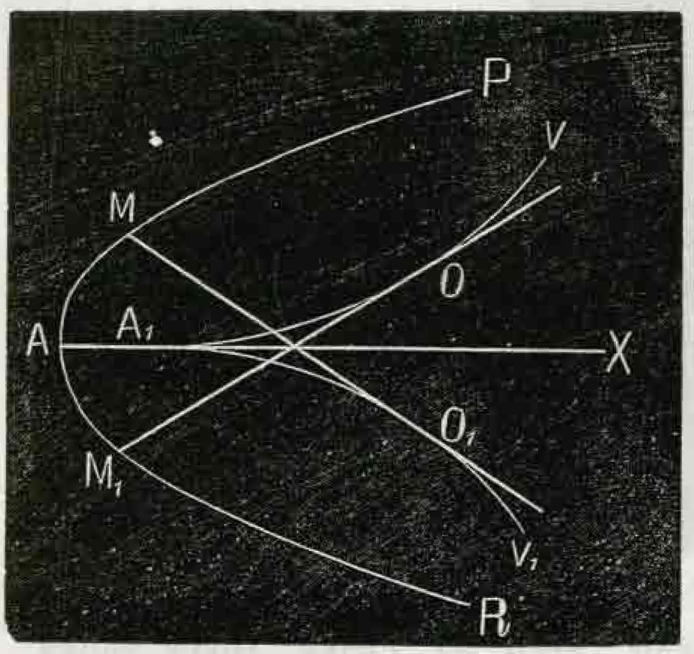
следује

$$\eta^2 = \frac{16}{27D}\left(\chi - \frac{D}{2}\right)^3 \ldots\ldots (1.$$

као *једначина параболине еволуте*, где χ и η претстављају еволутине опште координате.

Ова једначина показује да је за одречно χ ордината η имађинарна, што је знак да еволута лежи само на положној страни абсциса. Даље се види из те једначине да се еволута састоји из два подједнака бескрајна дела, један A_1OV изнад абсцисне осе, а други A_1OV_1 испод ње.

Сл. 86.



Зае волутин пресек A_1 с абсцисном осом морамо узети $\eta = o$. То η даје $\chi = AA_1 = \frac{D}{2}$, што показује да параболина еволута сече абсцисну осу у половини параметра.

Ако узмемо A_1 за почетак координата, дакле у горњој једначини $\chi + \frac{D}{2}$ место χ, следује као простија еволутина једначина

$$\eta^2 = \frac{16}{27\,D} \cdot \chi^3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2.\,*)$$

Најпосле параболин горњи крак добија се одвијањем доњега еволутина крака, а доњи параболин крак одвијањем горњег крака еволуте. За параболино теме A положај је одвијајућега се конца AA_1 (еволутине тангенте у A_1), а његова је дужина $AA_1 = \frac{D}{2}$, што по § 140. и јесте величина полупречника кривине ϱ за параболино теме A.

§ 146.

Из елипсине једначине $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ следује

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \quad \text{и} \quad \frac{{}^2dy}{d^2x} = -\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

---

*) Ово је једначина *кубне* или *Нејлове* параболе. Сви влаци што претставља једначина $y^m = Ax^n$ зову се параболе и деле се по највишим ступњима од x и y на параболе 2., 3.,..... ступња. Кубна се парабола за то зове нејлова, што ју је инглез Нејл први ректификова. У опште је то *први* влак што је ректификован.

Ове две вредности и трећа $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, стављене у једначине 1. и 2. § 143. дају

$$x - \chi = \frac{x\,(\alpha^4 - \gamma^2 x^2)}{\alpha^4} \text{ и } \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \eta = \frac{(\alpha^4 - \gamma^2 x^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{\alpha^3\beta}.$$

Из последњег израза следује

$$(\alpha^4 - \gamma^2 x^2 - \alpha^2\beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2} = -\,\alpha^3\beta\eta, \text{ или}$$

$$(\alpha^2\gamma^2 - \gamma^2 x^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2} = -\,\alpha^3\beta\eta, \text{ дакле}$$

$$\gamma^2\,(\alpha^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = -\,\alpha^3\beta\eta$$

и отуда
$$\alpha^2 - x^2 = \frac{\alpha^2\beta^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}{\gamma^{\frac{4}{3}}}.$$

Из првог израза пак следује сасвим просто

$$x^2 = \frac{\alpha^2\,(\alpha\chi)^{\frac{2}{3}}}{\gamma^{\frac{4}{3}}}, \text{ дакле}$$

$$\alpha^2 - x^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma^{\frac{4}{3}}}\left[(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{2}{3}} - (\alpha\chi)^{\frac{2}{}}\right].$$

По томе, кад обе вредности за $\alpha^2 - x^2$ уједначимо и једначину колико можемо скратимо, имамо

$$\beta^{\frac{2}{3}}.\eta^{\frac{2}{3}} + \alpha^{\frac{2}{3}}.\,\chi^{\frac{2}{3}} = (\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{2}{3}} = \gamma^{\frac{2}{3}}$$

као *једначину елипсине еволуте* у односу на главне осе као координатне.

Из ове једначине добијамо простом изменом од $+\beta^2$ на $-\beta^2$, или од β на $\beta\sqrt{-1}$,

$$\alpha^{\frac{2}{3}}.\,\chi^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{2}{3}} = \gamma^{\frac{2}{3}}$$

као *једначину иперболине еволуте* у онаком истом односу

§ 147.

Преокренимо сада посао и тражимо из познате еволуте $\eta = \varphi\,(\chi)$ еволвенту, т. ј. влак што оној еволути као одвитница одговора.

Ако вредности за $y - \eta$ из једначине под (5. у § 144. ставимо у једначину (3. истога §а, следује обзиром на општију вредност полупречника ϱ у поменутом §у

$\chi - x = (s + c)\frac{d\chi}{ds}$, а стом вредности после из једначине (5.

$$\varphi(\chi) - y = (s + c)\frac{d\eta}{ds}.$$

Уклонив из ове две једначине број χ налазимо једначину по x и y и c, и та ће бити тражена једначина еволвенте под условом, да је интеграљење израза $ds = \sqrt{d^2\chi + d^2\eta}$ можно.

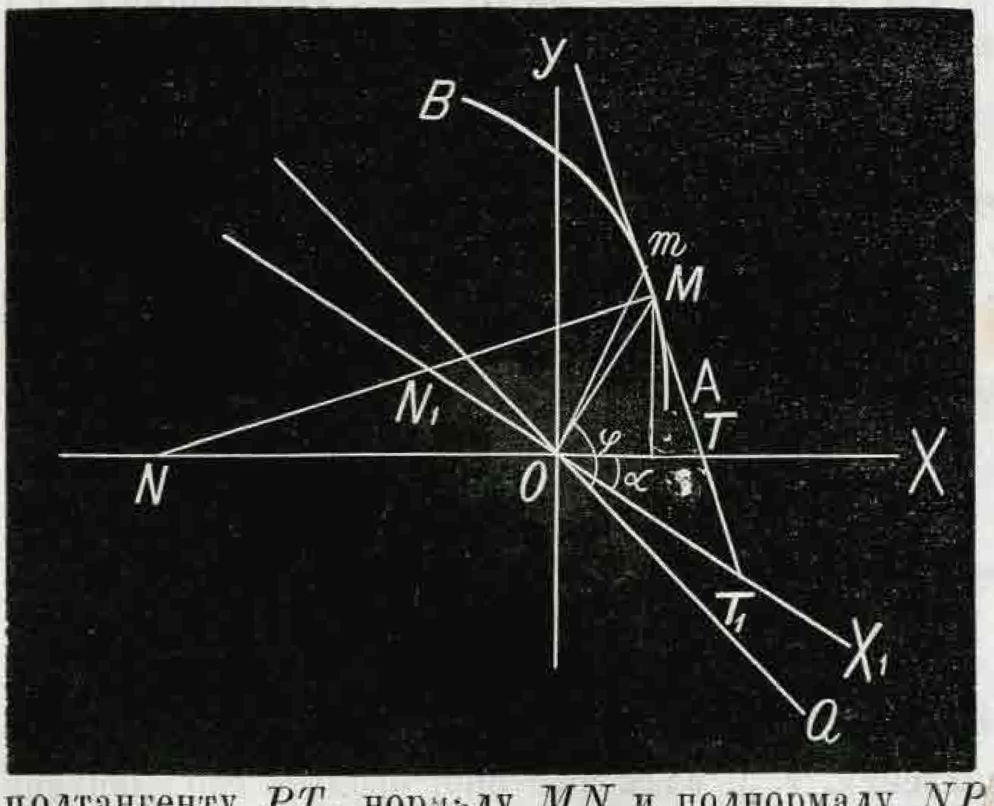
Јоште ваља приметити да ће, ако тај услов постоји, нађена еволвентина једначина одговарати оноликом броју разних влакова (еволута), колико стални број c буде имао различних вредности. Смисао је ове примедбе тај, што се крај одвијајућега се конца може узети у ма којој еволутиној тачци. Тако дакле свакој еволути одговарају безбројне еволвенте.

е. Пренос неких образаца из ортогоналне системе у поларну

§ 148.

Нека је сл. 87. AMB какав влак у равни, M једна његова тачка. $OM = x$ абсциса, $PM = y$ ордината те тачке у ортогоналној системи OX, OY. Повукли смо по M тангенту и нормалу; имамо дакле за тачку M влакову тангенту MT, подтангенту PT, нормалу MN и поднормалу NP.

Сл. 87.



Узмимо сад да је O полус, OQ оса поларне системе, $OM = v$ потег исте оне тачке M, а $> MOQ = \varphi$ њен поларни угао. Кроз O повукли смо $OX_1 \perp$ на потег OM. Део OT_1 те управне зове се *подтангента* тачке M у поларној системи, ON_1 је њена *поднормала*,, MT_1 *тангента*, а MN_1 *нормала*. По овоме подтангента и поднормала у поларној системи немају као у ортогоналној системи сталан положај, него променљив, т. ј. за сваку другу влакову тачку други. Поларна је оса, као што сам већ рекао OQ. Угао између ње и абсцисне осе OX, т. ј. $> QOX$ нека је α. Биће $> MOX = \varphi - \alpha$, осем тога

$$\left.\begin{array}{l} y = v.\, sin\,(\varphi - \alpha) \\ x = v.\, cos\,(\varphi - \alpha) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ (m.$$

Количине y, x и v зависе све три од угла φ, као независног променљивог броја, с другим речма те су количине функције угла φ. Диференцијалимо према томе једначине $(m.$, следује

$$\left.\begin{array}{l} dy = v.\, oos\,(\varphi - \alpha)\, d\varphi + siu\,(\varphi - \alpha)\, dv \\ dx = -\, v.\, sin\,(\varphi - \alpha)\, d\varphi + cos\,(\varphi - \alpha)\, dv \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (n.$$

Као-год што би једначину дотичнога влака за ортоганалну систему удесили за поларну тиме, што би место x и y узели вредности под $(m.$, тако исто направићемо од образаца тангенте, нормале и т. д. у ортогоналној системи обрасце тих пруга за поларну систему тиме, што ћемо у онима узети за x, y, dx и dy њихове вредности из израза под $(m.$ и $(n.$

Тако поступајући налазимо, због тога што је по §у 113. за ортогоналну систему подтангента $= y.\dfrac{dx}{dy}$, а по § 114. поднормала $= y.\dfrac{dy}{dx}$, за поларну систему

$$PT = v.\, sin\,(\varphi - \alpha).\ \frac{cos\,(\varphi - \alpha)\, dv - v\, sin\,(\varphi - \alpha)\, d\varphi}{sin\,(\varphi - \alpha)\, dv + v\, cos\,(\varphi - \alpha)\, d\varphi}$$

$$PN = v.\, sin\,(\varphi - \alpha).\ \frac{sin\,(\varphi - \alpha)\, dv + v.\, cos\,(\varphi - \alpha)\, d\varphi}{cos\,(\varphi - \alpha)\, dv - v.\, sin\,(\varphi - \alpha)\, d\varphi}$$

Почем абсцисну осу OX ортогоналне системе можемо узети како хоћемо, то ју положимо тако да буде $> (\varphi - \alpha) = 90^0$, дакле тако да падне на OX_1, које је $\perp$ на потег OM. Но тад пада и MP на OM, PT на OT_1 и PN на ON_1, тако да је

$\cos(\varphi - \alpha) = \cos 90^0 = o$, а $\sin(\varphi - \alpha) = \sin 90^0 = 1$ и с тога *у поларној системи*

$$\textit{Подтангеита } OT_1 = -\frac{v^2 d\varphi}{dv}.$$

$$\textit{Поднормала } ON_1 = -\frac{dv}{d\varphi}.$$

§ 149.

1.) Из троуглова OMT_1 и OMN_1 следује сасвим просто

$$\textit{Тангента } MT_1 = \sqrt{v^2 + v^4\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2} = v\sqrt{1 + v^2\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2}$$

$$\textit{Нормала } MN_1 = \sqrt{v^2 + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2}.$$

Осем тога имамо јоште обзиром на изразе под (n из обрасца $ds = \sqrt{d^2x + d^2y}$ *диференцијал лука у поларној системи*

$$ds = \sqrt{v^2 d^2\varphi + d^2v} = d\varphi\sqrt{v^2 + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2}.$$

Најпосле ако је $> MOm = d\varphi$, сектор је MOm диференцијал површине, дакле због $d\ Sect.\ MOA = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$, *у поларној системи елеменат сектора*

$$d\ MOA = sect.\ MOm = \tfrac{1}{2} v^2 d\varphi.$$

2.) По томе што овде y не зависи само од x, него с њим заједно јоште и од φ, то, свуд где треба, место $\frac{{}^2dy}{d^2x}$ ваља узети $\frac{dx.\,{}^2dy - dy.\,{}^2dx}{d^3x}$. С тога је полупречник кривине у поларној системи

$$\varrho = -\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{dx.\,{}^2dy - dy.\,{}^2dx}{d^3x}$$

$$= -\frac{(d^2x + d^2y)^{\frac{3}{2}}}{dx.\,{}^2dy - dy.\,{}^2dx},$$ где све диференцијале ваља узети по не зависном премењљивом броју φ.

Из једначина под (*n.* следује

$${}^2dy = sin(\varphi - \alpha).\,{}^2dv + 2\,cos(\varphi - \alpha)\,dv.\,d\varphi - v.\,sin\,(\varphi - \alpha).\ d^2\varphi$$

$${}^2dx = cos(\varphi - \alpha).\,{}^2dv - 2\,sin\,(\varphi - \alpha)\,dv.\,d\varphi - v.\,cos(\varphi - \alpha)\,d^2\varphi;$$

дакле је

$$dx.\,{}^2dy - dy.\,{}^2dx = -v.\,{}^2dv.\,d\varphi + v^2.\,d^3\varphi + 2\,d^2v.\,d\varphi\,,$$ а с тога и што је

$$d^2x + d^2y = v^2.\,d^2\varphi + d^2v,$$

полупречник кривине у поларној системи

$$\varrho = \frac{(v^2.\,d^2\varphi + d^2v)^{\frac{3}{2}}}{v.\,{}^2dv\,d\varphi - 2\,d^2v.\,d\varphi - v^2\,d^3\varphi.} = \frac{\left[v^2 + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{v.\,\frac{{}^2dv}{d^2\varphi} - 2\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 - v^2}$$

§ 150.

Ако на против имамо влакову једначину у поларној системи, где је OQ оса, O полус, па хоћемо да је удесимо за ортогоналну систему OX, OY, то из једначина под (*m.* у § 148. следује

$$\left.\begin{aligned} sin\,(\varphi - \alpha) &= \frac{y}{v} \\ cos\,(\varphi - \alpha) &= \frac{x}{v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (p.,$$

а из ових израза налазимо $sin\,\varphi$ и $cos\,\varphi$ у зависности од x, y, v $sin\,\alpha$ и $cos\,\alpha$.

Узев дакле у поларној једначини влака место $sin\,\varphi$ и $cos\,\varphi$, те вредности и $v = \sqrt{x^2 + y^2}$, добијамо једначину $f(x, y) = o$ која претставља влак у ортогоналној системи OX, OY.

Осем тога је због $tg\,(\varphi - \alpha) = \frac{sin\,(\varphi - \alpha)}{cos\,(\varphi - \alpha)} = \frac{y}{x}$ (обзиром на обрасце под *p.*)

$$\varphi = \alpha + arc\,(tg = \frac{y}{x})\ \ldots\ldots (q.$$

Ако OX падне на OQ биће $\alpha = o$ и зато тражени изрази преобразе се у

$$sin = \frac{y}{v}, \quad cos\,\varphi = \frac{x}{v}, \quad \varphi = arc\left(tg = \frac{y}{x}\right).$$

Уклонив из израза под (*п*. § 148. dv, следује

$$cos\,(\varphi - \alpha)\,dy - sin\,(\varphi - \alpha)\,dx = v.\,d\varphi,$$

отуд пак, узев место $sin\,(\varphi - \alpha)$ и $cos\,(\varphi - \alpha)$ њихове вредности по (*р*.,

$$d\varphi = \frac{xdy - ydx}{v^2} = \frac{xdy - y\,dx}{x^2 + y^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (г.$$

С обрасцима овога §а у стању смо да преобразимо изразе што вреде за *поларну* систему у дотичне за *ортогоналну* систему. Нека ученици то покушају с обрасцима ds и du.

Д.) НЕКОЛИКО ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ВЛАКОВА.

§. 151.

Сви они влаци којих једначине нису алгебрајске, зову се *трансцендентни*. У следећим параграфима испитаћемо неколико најважнијих трансцендентних влакова, служећи се при томе, као и дојако, ортогоналном системом, док не буде нужно да употребимо другу.

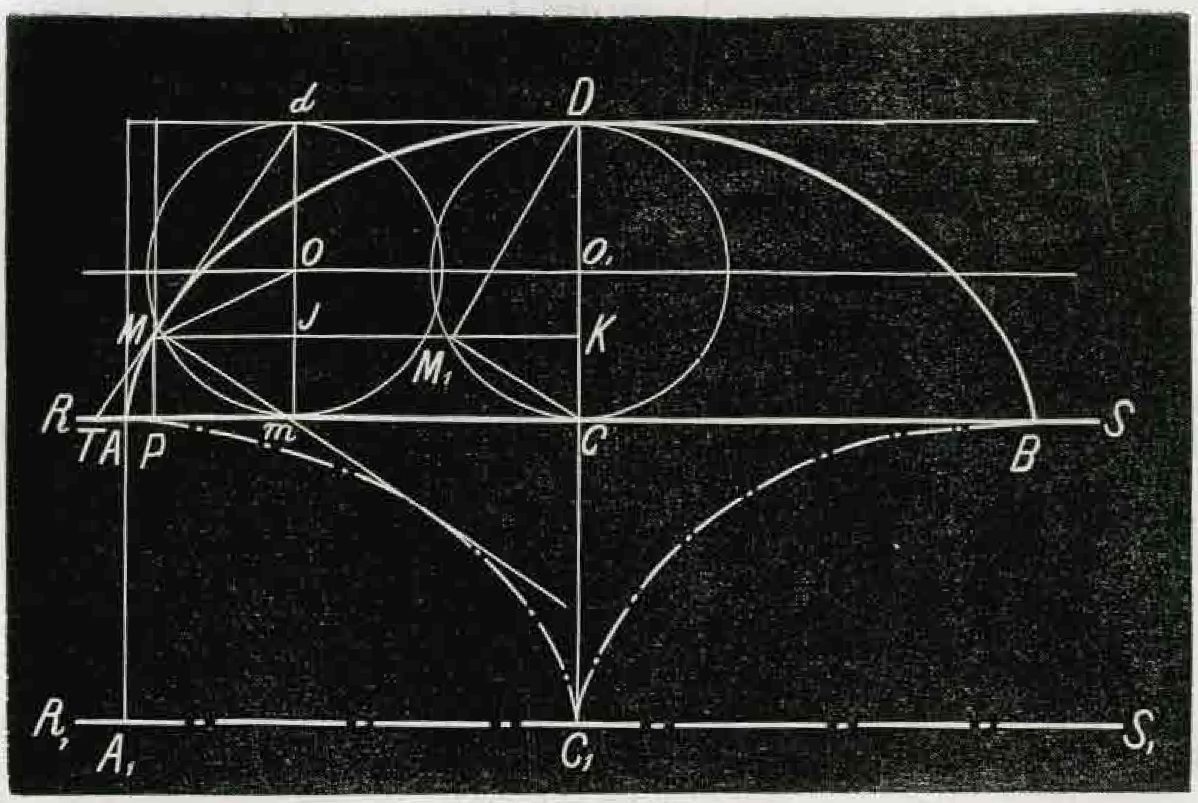
а. Циклоида.

§. 152.

Замислимо круг Mdm (Сл. 88.), који се котрља по прузи позната положаја RS. Пут $AMDB$, који при томе прави нека кругова тачка M, пошав из пругине тачкке A па док у B по други пут не падне опет на пругу RS, зове се *циклоида*. Тачка M зове се циклондина *писалица*; пруга RS, по кијој се круг котрља, зове се циклондина *основа*, а сам круг што се котрља зове се *производник*. Осем тога највиша тачка D, на коју се попне писалица M, зове се циклоидино *теме*, а управна DC из темена на основу зове се циклоидина *оса*.

У цељ да нађемо циклоидину једначину, узмимо основу RS за абсцисну осу, а тачку A из које полази писалица M за почетак координата. $AP = x$ и $MP = y$ биће координате писаличине за неки њезин положај M. Даље нека је r производ-

Сл. 88.



ников полупречник, dm управан пречник на основу, најпосле $MK \| RS$.

Непосредно из циклоидина постанка следује да је AB колико производникова периферија, а у неком његовом положају O лук $Mm = Am$.

Имамо дакле $AP + Pm = arc.\ Mm$, или прво због $AP = x$, друго због $Pm = MJ = \sqrt{\overline{MO}^2 - \overline{OJ}^2} = \sqrt{r^2 - (Om - Jm)^2} = \sqrt{r^2 - (r - MP)^2} = \sqrt{r^2 - (r - y)^2} = \sqrt{2ry - y^2}$, и треће због $arc\ Mm = arc\ (sin.\ v. = Jm) = arc\ (cos = OJ) = arc\ (sin = MJ) = \ldots\ldots\ldots$, т. ј. $arc\ Mm = r.\ arc\left(sin.\ v. = \frac{y}{r}\right)$

$$= r.arc\left(cos = \frac{r-y}{r}\right) = \ldots\ldots:$$

$$x + \sqrt{2ry - y^2} = arc\left(sin.\ v. = \frac{y}{r}\right)$$

$$= arc\left(cos = \frac{r-y}{r}\right)$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots$$

и отуда

$$x = r.\ arc\left(sin.\ v. = \frac{y}{r}\right) - \sqrt{2ry - y^2} \cdots\cdots \quad (1.$$

или

$$x = r.\ arc\left(cos = \frac{r-y}{r}\right) - \sqrt{2ry - y^2} \cdots\cdots \quad (2.$$

. . . .

као тражену *циклоидину једначину*.

§. 153.

Ако у другој циклоидиној једначини за њезин пресек с абсцисном осом узмемо $y = o$, следује, $x = r.\ arc\ (cos = 1)$. Почем је пак за полупречник 1.

$$arc\ (cos = 1) = \pm 1.\ 360^\circ = \pm 2.\ 360^\circ = \pm 3.\ 360^\circ = \cdots\cdots,$$

а по циклоидином постанку $r.\ arc\ (\pm 360^\circ) = \pm AB$ производниковој периферији, то следује да је абсциса за циклоидин пресек с абсцисном осом

$$x = \pm AB = \pm 2AB = \pm 3AB = \cdots\cdots,$$

а ово показује јасно: да циклоида сече абсцисну осу на безбројно много места.

По томе циклоида састоји се из безбројно много онаких лукова ADB, а овај је лук само један њезин део. Ово нам потпуно објашњује и сама та примедба, да производник, кад његова тачка M стигне у B, не стаје, него се и даље онако исто обрће као и дотле.

Даљи претрес ма које од нађених циклоидиних једначина показује као даље особине тога влака: да је за $x = AC$ његова *највећа* ордината $y = DC$; да та ордината лук ADB, који се просто разуме под именом циклоида, дели на два потпуно једнака и према њој подједнако лежећа дела; да циклоида цела лежи *изнад* абсцисне осе, и т. д. итд.

§. 154.

Ако диференцијалимо коју-год циклоидину једначину, н. п. ону под (2., налазимо

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ry - y^2}} \text{ и отуда } \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}.$$

Обзиром на § 113. и 114. следује дакле да је циклоидина

$$\text{Подтангента } PT = \frac{y^2}{\sqrt{2ry - y^2}},$$

$$\text{Поднормала } Pm = \sqrt{2ry - y^2},$$

$$\text{Тангента } TM = \frac{y\sqrt{2ry}}{\sqrt{2ry - y^2}},$$

$$\text{Нормала } Mm = \sqrt{2ry}.$$

Све ове пруге можемо врло лако да постројимо. Почнимо с последњом.

$\sqrt{2ry}$ показује да је нормала средња геометријска сразмерница између производникова пречника $2r$ и ординате y. С тога за нормалино постројење у циклоидиној некој тачци M не треба нам ни шта друго учинити, него да поставимо производник у темену D, да повучемо кроз M пругу $MK \| AB$, са производникова пресека M_1 с пругом MK тетиво M_1C и још кроз M пругу $Mm \| M_1C$, — па ће ова пруга Mm бити $= M_1C =$

$\sqrt{DC.KC} = \sqrt{2r.MP} = \sqrt{2ry}$ тражена нормала.

Кад ово стоји, онда чим у m повучемо $dm \| DC$, дакле $\perp RS$, имамо $Pm = MJ = \sqrt{2ry - y^2}$ поднормалу.

Ако повучемо још тетиво M_1D и по M пругу $Td \| M_1D$, $MP \perp Tm$, биће $Td \perp Mm$, дакле троугао TMm правоуголан и с тога $\overline{MP}^2 = TP.\ Pm$, отуда пак $TE = \frac{\overline{MP}^2}{Pm} = \frac{y^2}{\sqrt{2ry - y^2}}$ подтангента.

Кад је MP подтангента, онда је TM (због $TM \perp Mm$ т. ј. управно на нормалу, тангента. То показује такођер и сличност правоуглих троуглова TMP и mMP, из којих следује

$$TM : TP = Mm : Pm, \text{ или } TM = \frac{MP.\,Mm}{Pm} = \frac{y\sqrt{2ry}}{\sqrt{2ry - y^2}}.$$

§ 155.

1. По пређашњем је §у $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y}$, дакле ако на ново диференцијалимо $\frac{{}^2dy}{dx} = -\frac{rdy}{y\sqrt{2ry - y^2}}$, отуда

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = -\frac{r}{y\sqrt{2ry - y^2}} \cdot \frac{dy}{dx},$$ или обзиром на вредност првог диференцијалног количника $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = -\frac{r}{y^2},$$

а ово је по § 150. знак, да је циклоида према абсцисној оси *конкавна*.

2.) У § 138. нашли смо да је полупречник кривине свакога влака у равни

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{{}^2dy}{d^2x}\right)}.$$

Ако у овај израз ставимо горње вредности за $\frac{dy}{dx}$ и

$\frac{^2dy}{d^2x}$, следује обзиром на примедбу у § 138. циклоидин *полупречник кривине*

$$\varrho = 2\sqrt{2ry}\,.$$

Овај израз сравњен са нормалном вредности (§ 154., показује, да је при циклоиди за сваку тачку полупречник кривине раван *двострукој нормали,* дакле у оба краја A и B (првога лука ADB) 0, а у темену D, где је највећи, $4r$.

§. 156.

Из једначина под (3. и (5. у § 144., употребљујући ма коју циклоидину једначину, следује

$$x - \chi = -2\sqrt{2ry - y^2}$$

$$y - \eta = 2y\,,$$

а из ових једначина показују се средишне координате круга кривине у влаковој тачци, која има координате x и y,

$$\chi = x + 2\sqrt{2\,ry - y^2}$$

$$\eta = -\,y.$$

Ако сад у првом од ова два израза узмемо место x његову вредност из прве циклоидине једначине и после из новог израза помоћу другога $\eta = -\,y$ уклони о y, то следује као *једначина циклоидине еволуте*

$$\chi = r.\,arc\left[\,sin.\,v. = -\,\frac{\eta}{r}\right] + \sqrt{-2ry - y^2},$$

која показује, да циклоидина еволута (у координатној системи каквом се служимо) постоји само за *одречне* ординате.

Ако место циклоидине основе RS узмемо паралелну јој пругу R_1S_1 у отстојању $AA_1 = CC_1 = 2r$ за абсцисну осу и место одречне ординате $QM_1 = -\,\eta$ положну у новом односу $\eta_1 = P_1M_1$, дакле у пређашњој еволутиној једначини ставимо $\eta = 2r - \eta_1$, то следује као еволутина једначина у новој системи

$$\chi = r.\, arc \left[sin.\, v. = \frac{2r - \eta_1}{r} \right] + \sqrt{2r\eta_1 - \eta_1^2}.$$

Најпосле ако у новој системи абсцисе место од A_1 бројимо од пресека C_1 циклоидине осе с новом абсцисном осом R_1S_1, дакле ако у пређашњој једначини ставимо $A_1C_1 - \chi = r\pi - \chi$ место χ, следује као еволутина једначина у односу на таку координатну систему

$$\chi = r.\, \left[\pi - arc \left(sin.\, v. = \frac{2r - \eta_1}{r} \right) \right] - \sqrt{2r\eta_1 - \eta_1^2},$$

или, због $\pi - arc \left(sin.\, v. = \frac{2r - \eta_1}{r} \right) = arc. \left(sin.\, v. = \frac{\eta_1}{r} \right)^2$

јер се попречни синуси лукова што су заједно = 180° допуњују до целога пречника,

$$\chi = r.\, arc \left(sin.\, v. = \frac{\eta_1}{r} \right) - \sqrt{2r\eta_1 - y_1^2}.$$

Ова еволутина једначина и прва једначина циклоиде сасвим су једнака кроја, а то показује јасно, да је циклоидина еволута опет *циклоида од онаког истог производника,* који се на R_1S_1 као основи котрља пређашњем правцу противно.

§. 157.

1.) У §132.нашли смо диференцијал лука у опште $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}$, а из ма које циклоидине једначине следује $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$. Ако дакле ову вредност узмемо у израз за ds, налазимо као *диференцијал циклоидина лука*

$$ds = \frac{dy\,\sqrt{2r}}{\sqrt{2r - y}}.$$

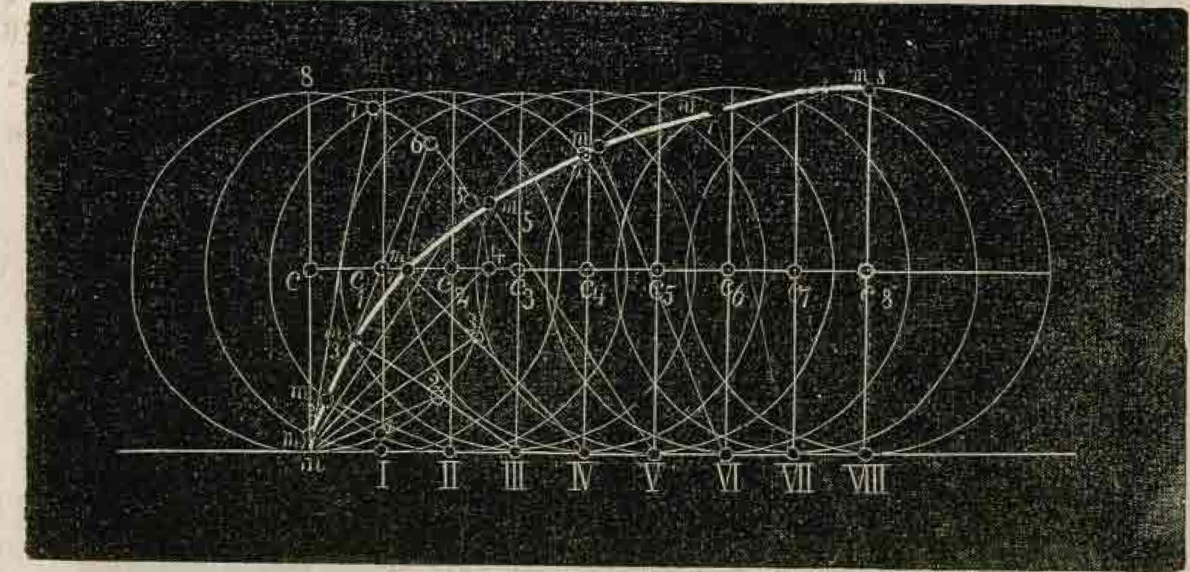
а.) Тако исто следује из обрасца $du = ydx$ за елеменат површине у опште, елеменат циклоидине површине, обухваћене циклоидиним каквим луком, координатама крајева тога лука и основом,

$$du = \frac{y^2 dx}{\sqrt{2ry - y^2}}\ .$$

§ 158.

Из циклоидина постанка увиђамо и како се гради. Поделимо перифирију прозводника на паран број једнаких делова

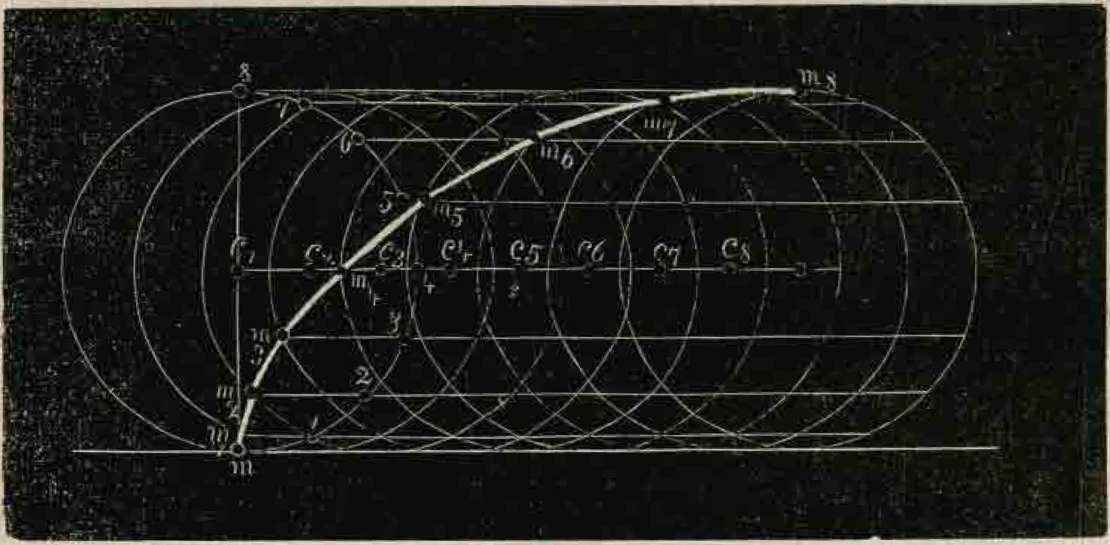
Сл. 88.



$m1 = 1{,}2 = 2{,}3 = \ldots\ldots$ Што мање узмемо те делове, то тачнија биће циклоида. Дужину једнога дела пренесемо на основу од m до $I, II, III, \ldots\ldots$ онолико пута колико има делова, и подигнемо у тачкама $I, II, III, \ldots\ldots$ управне на основу. Кроз производниково средиште c повучемо паралелу основи и напишемо из $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots$ кругове са полупречником $c_1I = c_2II = c_3III = \ldots\ldots = cm$. Ти су кругови производникова места, када његове тачке $1, 2, 3, \ldots\ldots$ при котрљању дођу у $I, II, III, \ldots\ldots$ Најпосле пресечемо периферију круга c_1 са $Im_1 = m1$ у m_1, периферију круга c_2 са $IIm_2 = m2$ у m_2, периферију круга c_3 са $IIIm_3 = m3$ у m_3, итд., па су тачке m_1, m_2, m_3, ... места писалице m, када производник дође редом на места кругова c_1, c_2, $c_3, \ldots\ldots$, дакле је влак који те тачке везује, циклоида од производника c. Ево зашто. На ком су остојању производникове тачке $1, 2, 3, \ldots\ldots$ у почетку од писалице m, на толиким је истим отстојањима ова после од њих, када оне при обртању дођу редом у *I*, *II*, *III*, . . ., а та су отстојања, као што смо их и узели, по реду тетива $IIm_3 = m2$, $IIIm_3 = m3$, ...

Када прозводникова тачка 1 падне на тачку *I*, онда је писалица у периферији круга c_1 на оноликој истој висини, на којој је пре била тачка 1 у производнику; ту висину показује паралела кроз тачку 1, и зато је пресек m_1 те паралеле са кругом c_1 писаличино место, када је производник у месту круга c_1. Исто тако када производникова тачка 2 падне на *II*, онда је писалица у периферији круга c_2 на оној истој висини, на којој је у почетку била тачка 2, дакле је пресек m_2 круга c_2 са паралелом по тачци 2 писаличино место када је производник у месту круга c_2. Итд. По томе још простије градимо сада циклоиду овако: поделимо производник као пре; повучемо кроз његово средиште c паралелу основи; пренесемо на ту паралелу дужину једног производниковог дела од c до $c_1, c_2, c_3, \ldots$ онолико пута колико има делова; напишемо из $c_1, c_2, c_3, \ldots$ кругове са производниковим полупречником, а кроз тачке 1, 2, 3,... повучемо парелеле основи, па су пресеци $m_1, m_2, m_3, \ldots$ оних кругова са дотичним паралелама тачке циклоиде.

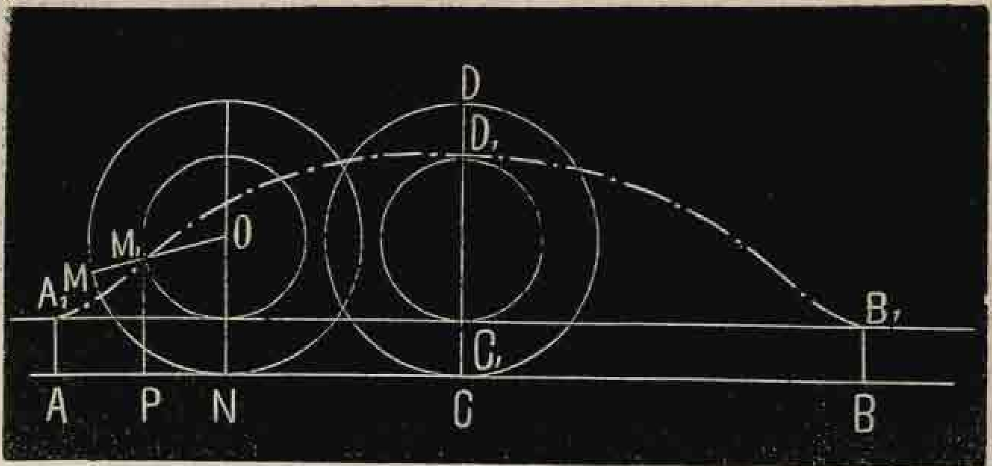
Сл. 89.



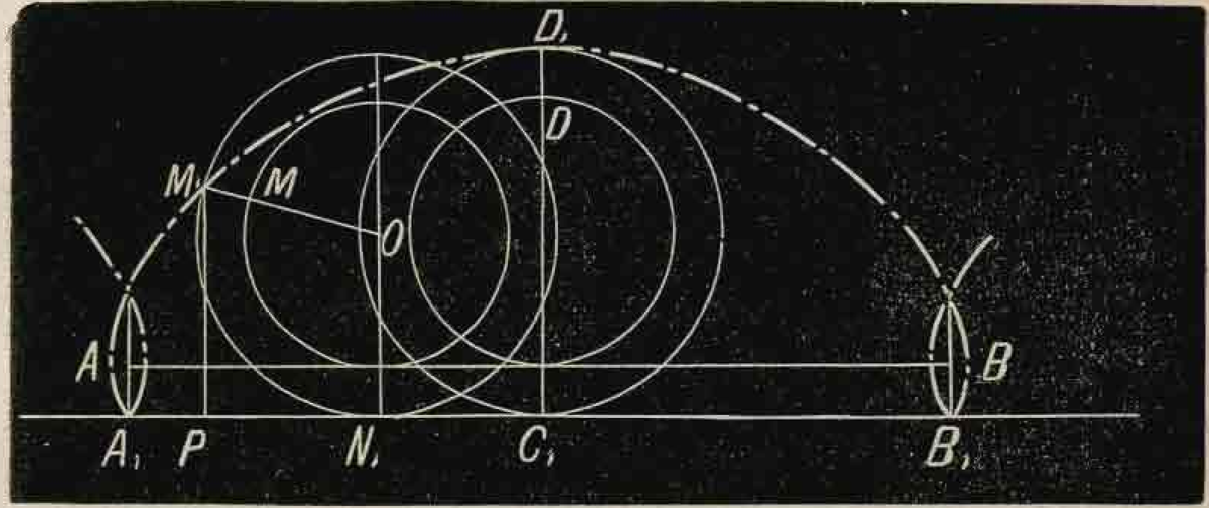
159.

Осем показане циклоиде, која се зове *проста*, има јоште три друге: *истегнута* или *извијена* (Сл. 90.), *скраћена* или *посувратна* (Сл. 91.) и тако звана *мала* циклоида или *циклоидина пратилица* (Сл. 92). Истегнута циклоида добија се од тачке, која није у самој периферији производника, него у нутри, али с њим стално везана. Скраћена циклоида постаје од писалице која је изван про-

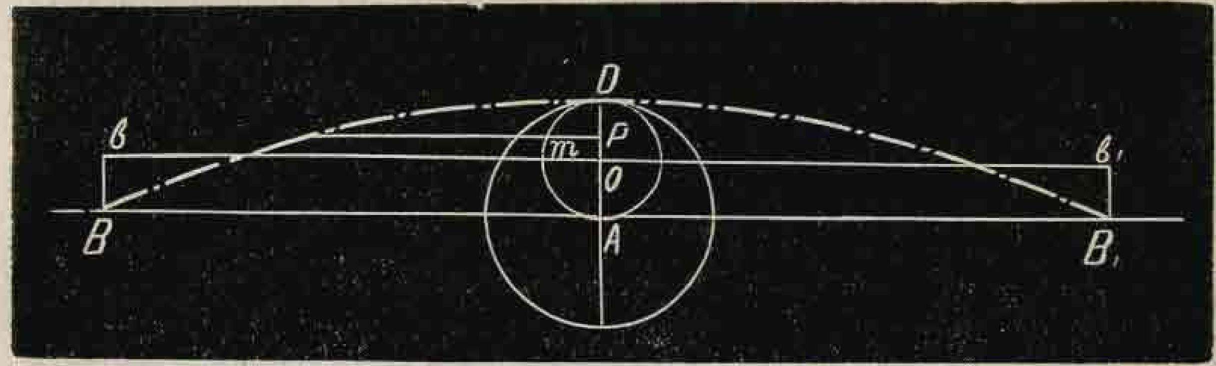
Сл. 90.



Сл. 91.



Сл. 92.



изводникове периферије споља, али с њим такођер тврдо скопчана
Најпосле мала циклоида добија се од неке тачке m (Сл. 92.) круга AmD, кога средиште C једнаким кораком прође даљину $ab=AB$, док сам круг у такођер подједнаком окретању учини један обрт

Све ове циклоиде називају се укупним именом *Трохоиде*, неки пак математици означавали су овим именом само малу циклоиду.

Због знаменитих циклоидних геометријских и механичких особина, тај је влак подвргнут био најразличитијим истрагама. *Хујгенс* пронашао је, да је циклоидина еволута онака иста као она сама, даље да нека тешка тачка (н. п. пушчано зрно) по изврнутој циклоиди, које је оса перпендикуларна, дакле теме најнижа тачка, од свакуда до дна за једно исто време слази. Због тога својства зове се циклоида јоште и *тавтохрона* или *исохрона*. *Бернули* пак доказао је после, да каква тешка тачка с некога места до другога нижега, које не лежи с њим у једном вертикалном правцу, по изврнутој циклоиди, где је теме најнижа тачка, за *најкраће* време пада, због чега се циклоида најпосле јоште зове и *брахистохрона*.

У испитивање других трохоида не можемо се упустити јер би прекорачили постављење овоме делу међе.

б.) **Епициклоида.**

§. 160.

Кад се круг производник не окреће по прузи, него по *конвексој* страни другога круга, онда влак, који постаје од неке производникове тачке као писалице, зове се *Епициклоида*, круг пак по ком се производник окреће, зове се епициклоидин *основник*.

Да би изнашли једначину тога влака, нека је један његов део лук MA (Сл. 93.), што је поостао од производникове тачке A, док је производник прешао из положаја (c) у положај (c_1), а писалица је A дошла до M. За то се време неки производников лук Aa ваљао по основнику и крај је тога лука a дошао у a_1, тако да је лук $Aa =$ луку Aa_1.

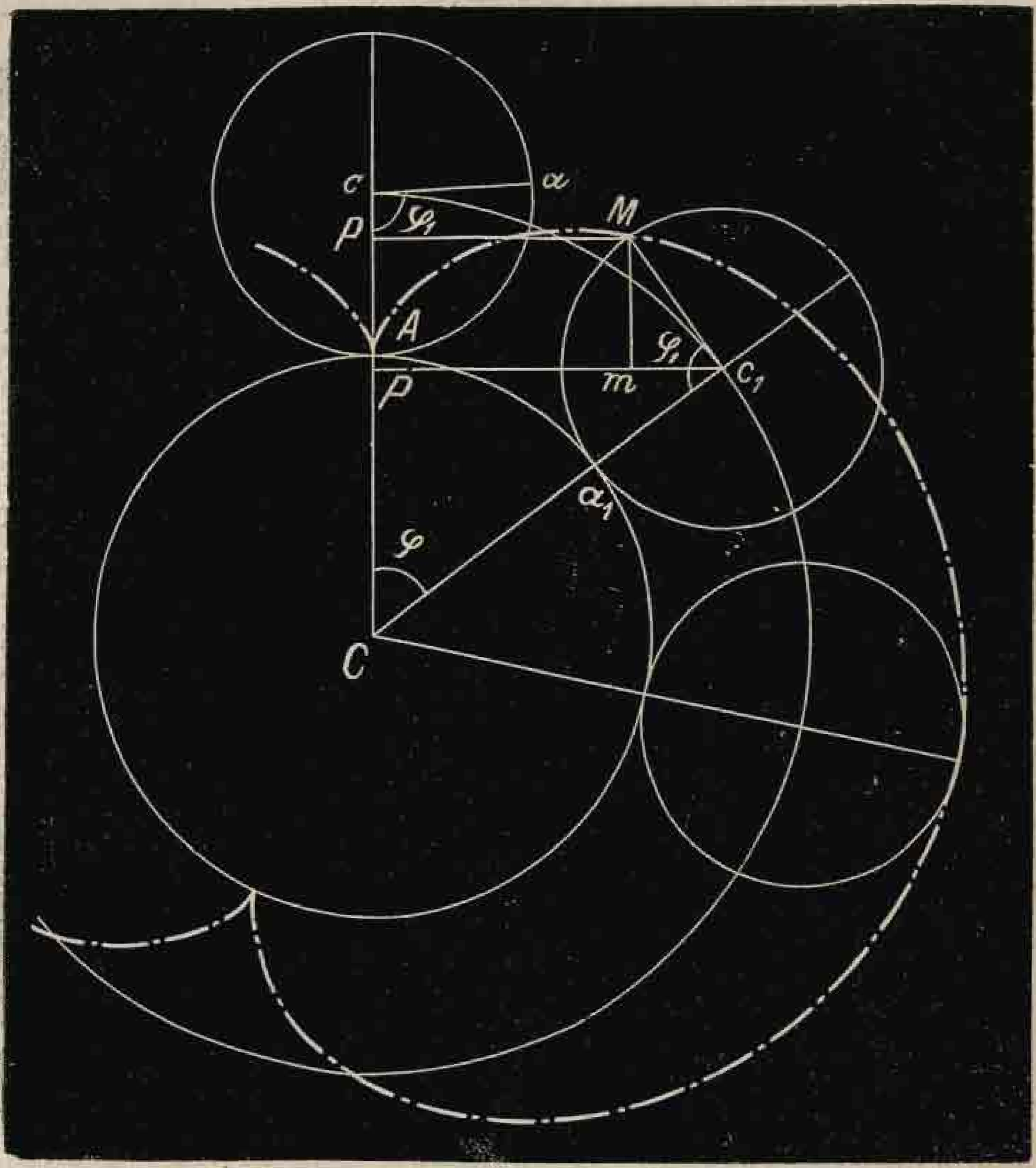
Повуцимо средишне пруге Cc и Cc_1, из M и c_1 управне MP и c_1p на Cc, најпосле $Mm \| Cc$, Јоште ставимо полупречник основника $CA = R$, а полупречник производника $Ac = ca = Mc_1 = a_1c_1 = r$, даље угао котрљања $cCc_1 = \varphi$, а угао за који је тачка a до a_1 сишла, или за који се тачка M издигла, т. ј $> Aca = Mca_1 = \varphi_1$.

Најпосле нека је $CP = x$ абсциса, $MP = y$ ордината епициклоидине тачке M. Биће $x = CP = Cp + Pp = Cp + Mm$, $y = MS = c_1p - mp = c_1p - c_1m$.

Из троуглова Cc_1p и c_1Mm следује

$$c_1p = Cc_1 \sin \varphi = (R + r) \sin \varphi$$
$$Cp = (R + r) \cos \varphi$$
$$Mm = r. \sin Mc_1m = r. \sin [\varphi_1 - (90 - \varphi)]$$

Сл. 93.



$$= - r.\,sin\left[90^0 - (\varphi + \varphi_1)\right]$$

$$= - r.\,cos\,(\varphi + \varphi_1)$$

$$c_1m = r.\,sin\,(\varphi \pm \varphi_1).$$

Ако ове вредности заменимо у горњим изразима координата, показује се

$$x = (R + r)\,cos\,\varphi - r\,cos\,(\varphi + \varphi_1).$$

$$y = (R + r)\,sin\,\varphi - r\,sin\,(\varphi + \varphi_1).$$

Обзиром на то, да је *arc.* Aa = *arc.* Aa_1, дакле $r\varphi_1 = R\varphi$, можемо из ових једначина да уклонимо φ или φ_1, јер је

$\varphi_1 = \frac{R}{r}\varphi$, а $\varphi = \frac{r}{R}\varphi_1$ и с тога

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+r)\,cos\,\varphi - r.\,cos\,\frac{R+r}{r}\varphi \\ y &= (R+r)\,sin\,\varphi - r.\,sin\,\frac{R+r}{r}\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1.$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+r)\,cos\,\frac{r}{R}\varphi_1 - r.\,cos\,\frac{R+r}{R}\varphi_1 \\ y &= (R+r)\,sin\,\frac{r}{R}\varphi_1 - r.\,sin\,\frac{R+r}{R}\varphi_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2.$$

Једначине под (1, као год и једначине под (2. јесу *једначине епициклоиде*, јер се с њима за сваку вредност угла φ или φ_1 налази дотична њезина тачка.

И овај се влак састоји из безбројно много једнаких делова, као што је онај један AMA_1, и од тих се лукова неки, кад је $\frac{R}{r}$ или $\frac{r}{R}$ *рационалан* број, по неком извесном реду потпуно слажу с првим (AMA_1), следећи с другим, и тд.

§. 161.

У особитим случајима где је $\frac{R}{r}$ или $\frac{r}{R}$ *цео* број, можемо из епициклоидиних једначина да уклонимо угле φ и φ_1, и тако да добијемо за епициклоиду алгебрајску једначину по x и y.

Најпростији је од тих случајева, да је $R = r$. У томе имамо, због $\varphi = \varphi_1$,

$$x = 2r\,cos\,\varphi - r.\,cos\,2\varphi$$
$$y = 2r\,sin\,\varphi - r.\,sin\,2\,\varphi\,,$$

и одатле

$$x^2 + y^2 = 5r^2 - 4r^2.\,cos\,\varphi \ldots\ldots\ldots (к.$$

Али због $cos\,2\varphi = 2\,cos^2\varphi - 1$ имамо јоште

$$x = 2r.\,cos\,\varphi - 2r.\,cos^2\varphi + r,$$ дакле

$$cos^2\varphi - cos\,\varphi = \frac{r-x}{2r}$$ и отуда

$$\cos\varphi = \frac{r \pm \sqrt{3r^2 - 2rx}}{2r},$$ а та вредност

заменута у једначини (к. даје

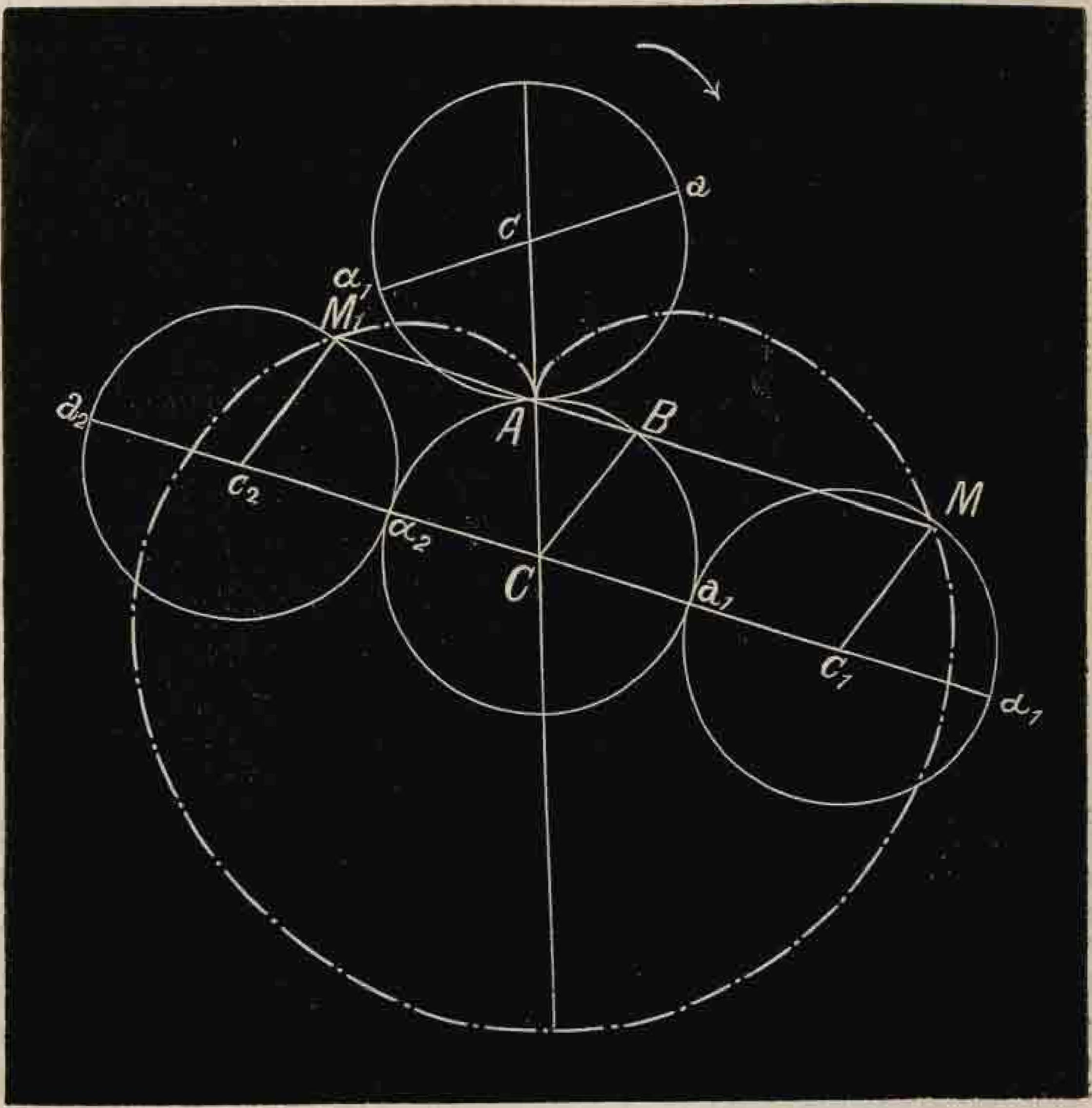
$$x^2 + y^2 = 3r^2 \mp 2r\sqrt{3r^2 - 2rx}, \text{ или}$$

$$4r^2(3r^2 - 2rx) = (x^2 + y^2)^2 - 6r^2(x^2 + y^2) + 9r^4, \text{ најпотле}$$

$$y^4 + 2(x^2 - y^2)y^2 + x^4 - 6r^2x^2 + 8r^3x - 3r^4 = o$$

као епициклоидину једначину у поменутом особитом случају где је тај влак изгледа $AMOM_1A$ (Сл. 94.) и добија особено име *кардиоида*.

Сл. 94.



Ако место C узмемо A за почетак координата, дакле $AP = x$ место $CP = x$, то у пређашњој једначини ваља само да ставимо $AC - AP$ место CP, т, ј. $r - x$ место x. Тиме добијамо, ако јоште узмемо производников пречник $2r = D$, као *једначину кардиоиде*

$$y^4 - (D^2 + 2Dx - 2x^2)\,y^2 - 2Dx^3 + x^4 = o,$$

из које можемо да дознамо све колике главне особине тога влака. Овај посао остављам ученицима на вецбање.

§. 162.

Посмотримо такова два положаја кардиодиногa производника, где оба његова средишта и средиште основниково леже у једној истој прузи $c_1 C c_2$ (Сл. 94.)

Ту је $> Aca = ACa_1 = a_1 c_1 M = a_2 c_2 M_1$, а $> AC\alpha_2 = Mc_2\alpha_2$, зато $Mc_1 \# M_1c_2$, $M_1ABM \# c_2C\,c_1$. Дакле обе кардиоидине такчке M и M_1 налазе се са тачком A у једној истој прузи, која је паралелна оној c_1Cc_2, у којој леже средишта c_1, C и c_2. Ако јоште повучемо CB, биће $CB \# Mc_1$ и M_1c_2, дакле $BM = BM_1 = Cc_1 = Cc_2 = 2r$. Из тога се види како можемо да направимо кардиоиду, опредељујући што више њезиних тачака M и M_1. Повучемо кроз A што више вољних тетива AB и одмеримо на свакоме од B на једну и на другу страну $MB_1 = MB = 2r$, па ће бити тачке M и M_1 тачке кардиоид е.

в.) **Кругова Еволвента.**

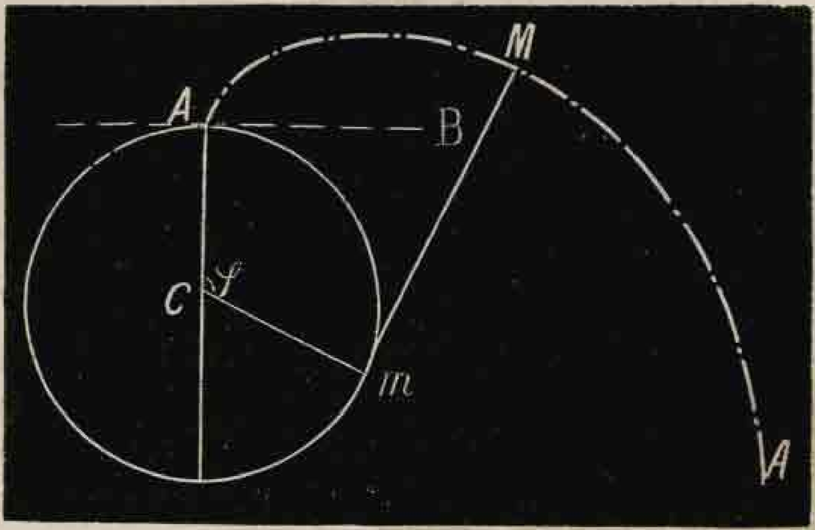
§. 163.

Ако ири епициклоиди узмемо производников полупречник $r = \infty$, производник није више круг, него *пруга* AB (Сл. 95.) и деписиклоида прелази у *еволвенту* AMA_1 *круга* основника, која, вијући се око њега, све већма и већма одањ одмиче до у бескрајност. Да би нашли једначину кругове еволвенте, развијмо у једначинама под (1. § 153. *sin* и *cos* сбира углова. Следује

$$x = R\cos\varphi + r\,\cos\varphi - r.\,\cos\frac{R}{r}\varphi.\cos\varphi + r.\,\sin\frac{R}{r}\,\varphi.\sin\varphi$$

$$y = R\sin\varphi + r\sin\varphi - r.\,\sin\,\frac{R}{\gamma}\varphi.\cos\varphi = r.\cos\,\frac{R}{r}\varphi.\sin\,\varphi$$

Сл. 95.



Но ако, као што у почетку рекох, узмемо $r = \infty$, тада је $\frac{R}{r}\varphi = \frac{R}{\infty} . \varphi = o . \varphi = o$, а $\cos o = 1$, с тога за $r = \infty$

$$r . \cos \frac{R}{v} \varphi = r \cdots\cdots\cdots (m.$$

Осем тога је због $R\varphi = r\varphi_1$, $r = R\frac{\varphi}{\varphi_1}$, а зато опет

$r . \sin \frac{R}{r} \varphi = \frac{R\varphi}{\varphi_1} \sin \frac{R}{r}$, или обзиром на вредност $\frac{R}{r} \varphi$ при $r = \infty$,

$r \sin \frac{R}{r} \varphi = R\varphi . \frac{\sin o}{\varphi_1}$, а с тога опет што је при $r = \infty$

очевидно $\varphi_1 = o$,

$$r . \sin \frac{R}{r} \varphi \cdot R = \frac{\sin o}{o} = R\varphi \ldots . (n.$$

По свему томе, ако вредности под $(m$ и $(n.$ заменимо у једначинама за x и y и после скратимо, следује,

$$x = R\cos \varphi + R\varphi . \sin \varphi$$
$$y = R\sin \varphi - R\varphi . \cos \varphi$$

као *једначине кругове еволвенте*, из којих се могу извести сва најглавнија својства тога влака.

За доцнију потребу изнађимо јоште и елеменат еволвентина лука. Нађене једначине дају $dx = R\varphi . \cos \varphi . d\varphi$ и $dy = R\varphi . \sin \varphi . d\varphi$, дакле *елеменат еволвентина лука за круг*

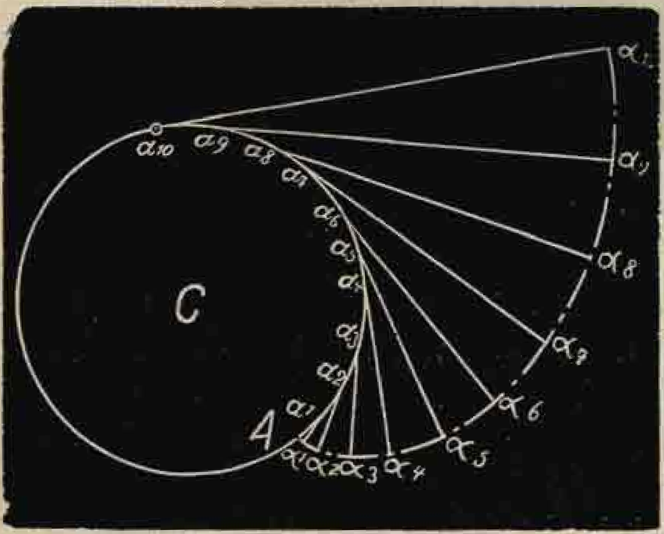
$$ds = \sqrt{d^2x + d^2y} = R\varphi . d\varphi$$

§ 162.

Кругова је еволвента у механици од знатне важности, с тога да видимо сада како је правимо, кад је основник дат.

Узмемо на основнику (Сл. 96.) тако мален лук Aa_1, да га без приметне погрешке можемо заменити његовим тетивом. Тај лук одмеримо на кругу од a_1 до a_2, од a_2 до a_3, и тд., па онда у тачкама $A, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ повучемо тангенте на круг и одмеримо их, по реду, $a_1\alpha_1 = Aa_1$, $a_2\alpha_2 = 2. Aa_1$, $a_3\alpha_3 = 3. Aa_1$ и тд., па ће тачке α_1, α_2, α_3 и тд. бити тачке тражене еволвенте.

Сл. 96.



Тачније можемо добити еволвенту круга, ако пругу, која је до у неколико десетних места своје вредности равна половини основникове периферије, поделимо на (што више хоћемо) једнаке делове, па онда и половину круга поделимо на толико исто једнаких делова и у свима његовим деоним тачкама повучемо нањ тангенте Одмерив на овима најпосле по реду: на врвој један, на другој два, на трећој три пругина дела, и тд., биће сви крајеви тих тангената тачке кругове еволвенте.

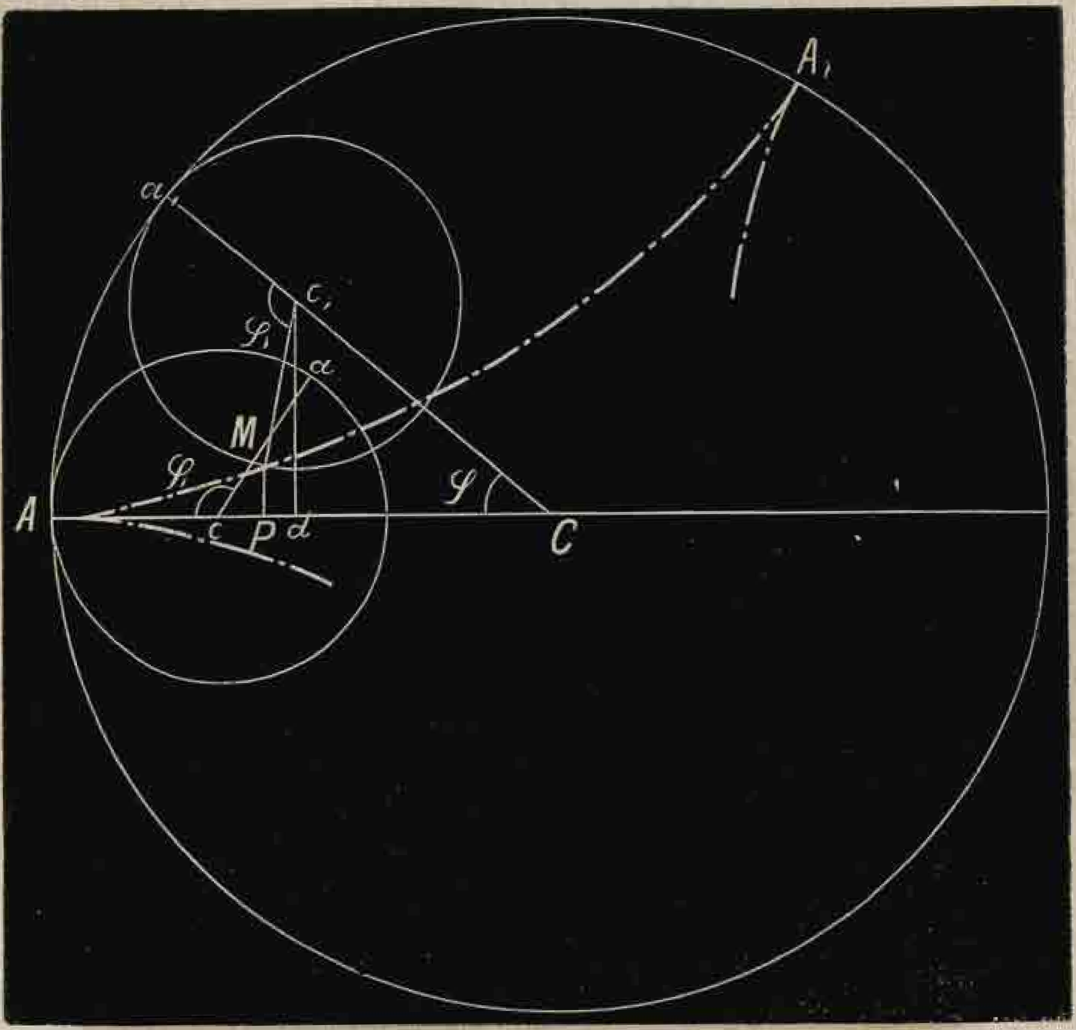
г.) Хипоциклоида.

§ 165.

Ако се производник котрља по *конкавој* основниковој страни место по конвексој, тада нека његова тачка A прави влак AMA_1 (Сл. 97.), који се зове *хипоциклоида*.

Нека је AM лук, што је написала тачка A док је основник из положаја c прешао у положај c_1. Ставимо $> ACa_1 = \varphi$, $> Aca = Mc_1a_1 = \varphi_1$, $CA = R$, $cA = c_1a_1 = r$ и повуцимо на CA, као абсцисну осу, из M и c_1 управне PM и c_1d, најпосле по M пругу $Mm \| CA$. Поступајући даље онако исто као при епициклоиди добили би хипоциклоидине једначине, али их простије изводимо из епициклоидиних, узевши у тима r *одречно*. На

Сл. 97.



овај последњи начин добијамо обзиром на то, да је $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, а $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,

$$\left.\begin{aligned} x &= (R-r)\cos\varphi + r\cos\frac{R-r}{r}\varphi \\ y &= (R-r)\sin\varphi - r.\sin\frac{R-r}{r}\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (1.$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= +(R-r)\cos\frac{r}{R}\varphi_1 - r.\cos\frac{R-r}{R}\varphi_1 \\ y &= -(R-r)\sin\frac{r}{R}\varphi_1 = r.\sin\frac{R-r}{R}\varphi_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad 2).$$

Ове једначине као и сам начин хипоциклоидина постанка показују, да се и овај влак састоји из безбројно много онаких лукова као што је AMA_1.

Од велике је важности у механици тај случај, где је *производников пречник раван основниковом полупречнику*, т. ј. случај, кад је $2r = R$.

Узимајући у једначинама под (1. R место $2r$ следује

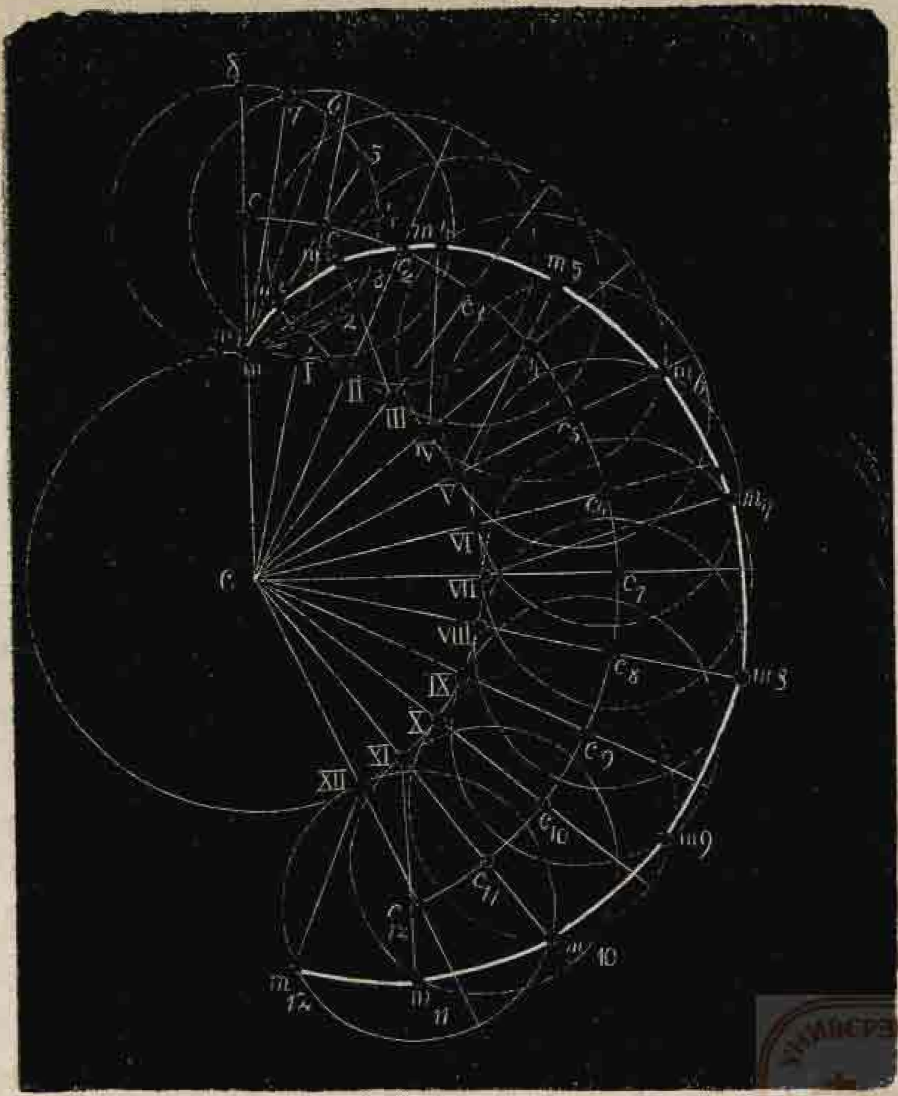
$x = R \cos\varphi$ и $y = o$,

а обе ове једначине претстављају абсцисну осу ACB. По томе у поменутом случају претвара се хипоциклоида у пругу, која иде кроз производниково средиште.

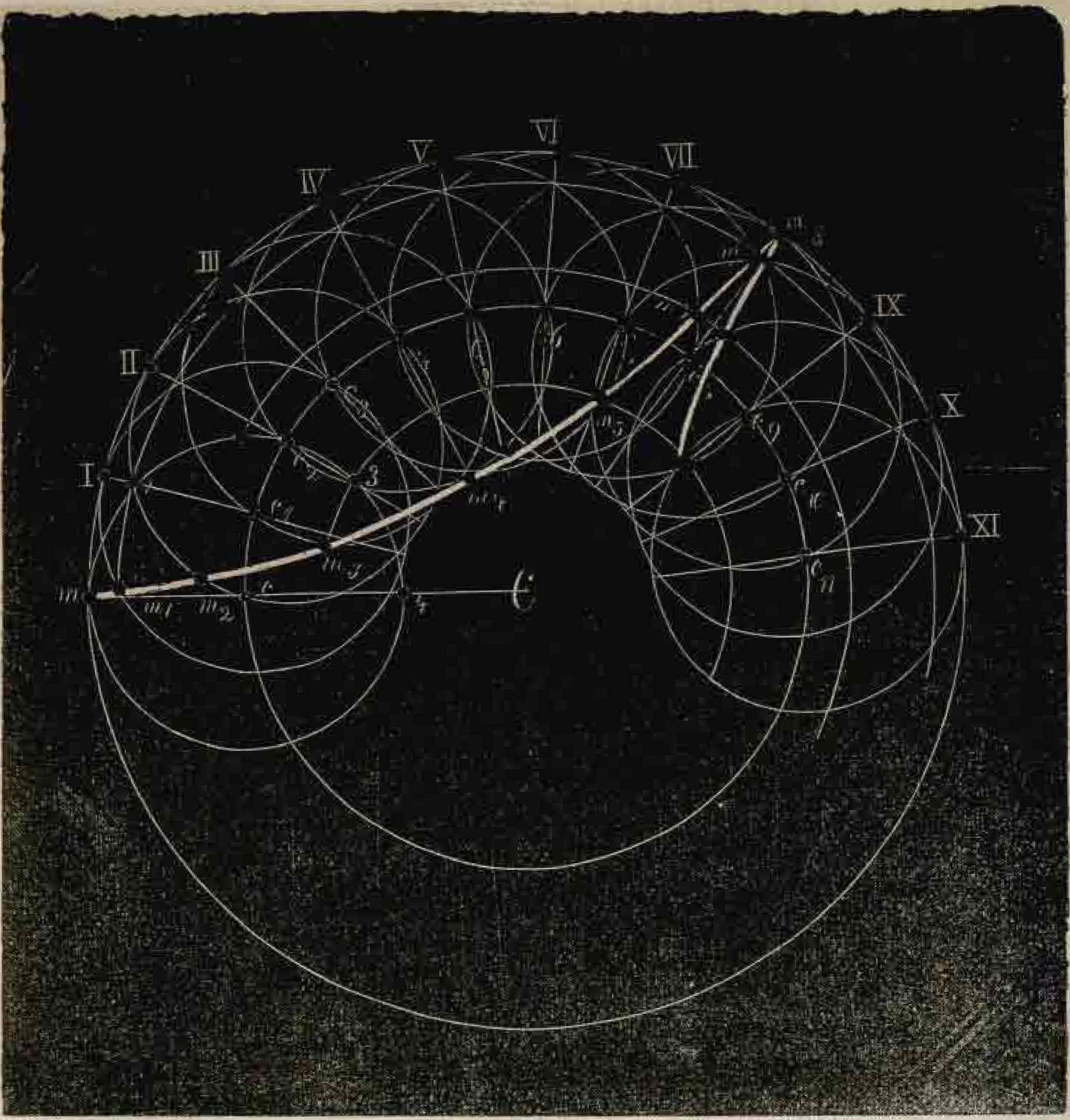
Примедбе. 1.) Епициклоида и хипициклоида употребљују се у механици при чешљастим колама (точковима). И њих има *скраћених и истегнутих*. Скраћене постају кад је писалица изван производника *споља*, а истегнута кад писалица лежи изван производника *унутри*.

2. Епициклоида и хипоциклоида цртају се онако исто као и проста циклоида (§ 156.). Што се тамо ради на основи, то се овде чини на основнику; што је тамо паралелно основи, то је овде сасредно (концентрично) основнику; најпосле што је тамо управно на основу, то је овде нормално на основнику. У сл. 98. цртана је на први начин епициклоида, а у сл. 99. на онај други начин хипоциклоида, цртање пак прве на други начин, а друге на први остављено је ученицима на вежбање.

Сл. 98.



Сл. 99



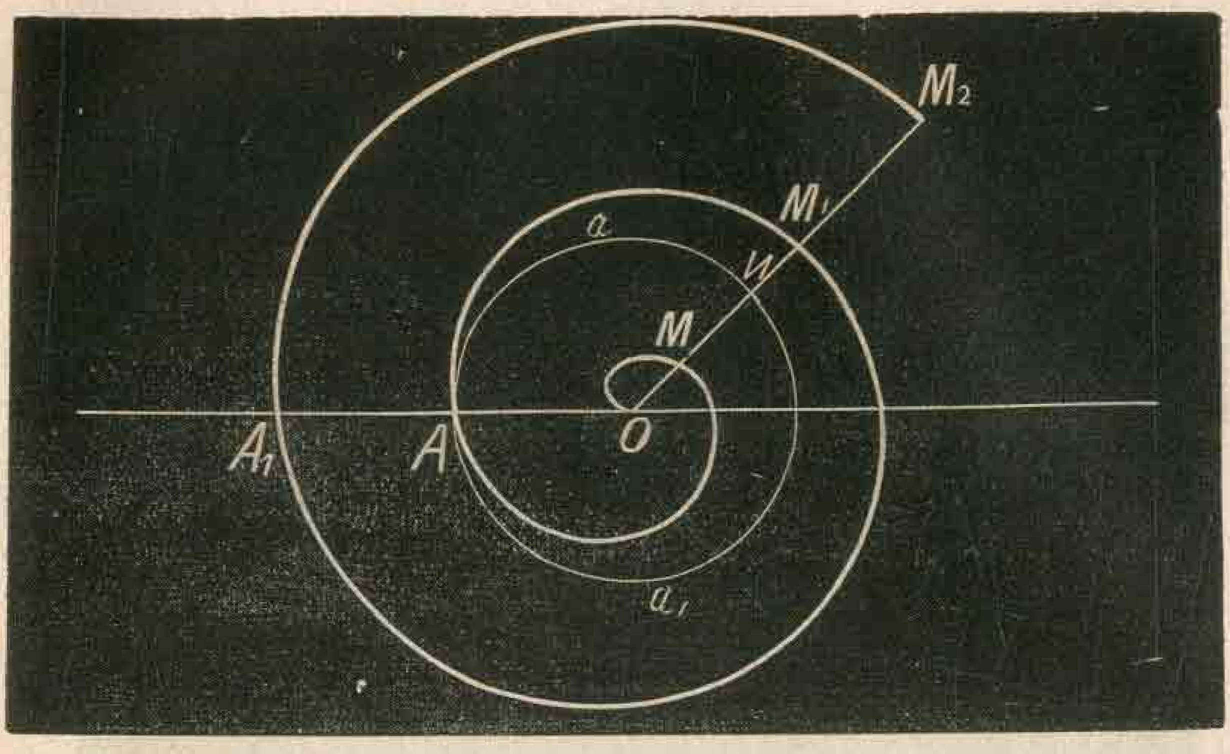
д. Архимедова спирала.

§ 166.

Пруга OA у равни (Сл. 100.) окреће се око једне своје тачке O као сталнога средишта у на около, у исто добо пак иде по њој нека тачка M од O тако, да јој је сваки корак сразмеран углу, за који се пруга OA од свога првог положаја удалила, и да за то време доспе O до A. — Кад дакле ова пруга један обрт сврши, тачка се M налази у периферији круга од полупречника OA. Траг који та тачка M у окретању пруге OA за собом остравља, зове се *Архимедова спирала* или Архимедова *завојица*.

Овај је влак, као што видмо, поларан. Узмимо први положај полупречника OA за поларну осу, тачку O за полус и ставимо за ма које место тачке M потег $OM = v$, обртни угао $MOA = \varphi$, а ради простријега посла полупречник $OA = 1$.

Сл. 100.



По постављеном појму мора бити

$$OM : OA = \text{лук } AaN : \text{периферији } AaNa_1A, \text{ т. ј.}$$

$$v : 1 = \varphi : 2\pi,$$

отуд пак следује као *поларна једнчина архимедове спирале*

$$v = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

§ 165.

Из ове једначине можемо извести све особине тога влака

1.) Почем φ може расти у бескрајност, то и потег v расте без престанка и с тога се спирала вије око полуса O у бескрајност, удаљујући се ода њ све већма и већма. Ово одговара потпуно самом постанку тога влака, почем се пруга OA око O може обртатити без престанка и тачка M при томе иде по њој даље по онаком истом закону као и први пут.

За $\varphi = 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi, \ldots\ldots$ показује се по реду $v = 1, 2, 3, \ldots\ldots$, т. ј. $v = OA = OA_1 = OA_2 = \ldots\ldots$

$$= 2.\, OA = 3.\, OA = \ldots\ldots$$

тако дакле, да је $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots\ldots = 1$, а то ће рећи да *спиралине вијуге секу поларну осу у једнаким међусобним, полупречнику OA равним отстојањима*.

Још општије: ако место *arc* φ узмемо по реду φ, $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$, $\varphi + 6\pi$, ... то ће рећи: ако тражимо пресеке M, M_1, M_2, M_3. . . . . некога потега ON са устопним вијугама спиралиним, то из горње једначине следује

$$OM = \frac{\varphi}{2\pi},\ OM_1 = 1 + \frac{\varphi}{2\pi},\ OM_2 = 2 + \frac{\varphi}{2\pi}\ , \ldots\ldots$$

тако да је $OM = \frac{\varphi}{2\pi}$, $MM_1 = OM_1 - OM = 1 = OA$, $M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = 1 = OA$, $M_2M_3 = OM_3 - OM_2 = 1 = OA$, ..., а то показује: да *спирала сече сваки потег у међусобно једнаким, полупречнику r равним отстојањима.*

2.) Ако диференцијакимо спиралину једначину следује

$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi}$, дакле по § 148.

а.) *Подтангента* $= v^2 . \frac{d\varphi}{dv} = \frac{\varphi^2}{(2\pi)^2} . 2\pi = \frac{\varphi^2}{2\pi} = v\varphi$,

то ће рећи равна луку, написаном из O међу краке угла AOM са полупречником равним потегу v;

б.) *Поднормала* $= \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi}$ *за све тачке спирале стална и једна иста.* По § 149. пак

$$\text{в.) } \textit{Тангента} = v . \sqrt{1 + v^2 \left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2}$$

$$= v \sqrt{1 + \frac{\varphi^2}{(2\pi)^2} . (2\pi)^2}$$

$$= \frac{\varphi}{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2},$$

г.) *Нормала* $= \sqrt{v^2 + \left(\frac{do}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{\varphi + \frac{1}{4\pi^2}}$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{1 + \varphi^2}.$$

д.) *елеменат лука* $ds = d\varphi \sqrt{v^2 + \left(\frac{dv}{1\varphi}\right)^2}$

$$= d\varphi \sqrt{v^2 + \frac{1}{4\pi^2}}$$

$$= \frac{d\varphi}{2\pi}\sqrt{1 + \varphi^2}$$

ђ.) *елеменат површине* $du = \frac{1}{2} v^2 \, d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\,d\varphi$

е.) *полупречник кривине* $\varrho = \frac{\left[v^2 + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{v^2 . \frac{{}^2dv}{d^2\varphi} - 2\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 - v^2}$

$$= -\frac{(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi\,(2 + \varphi^2)} .$$

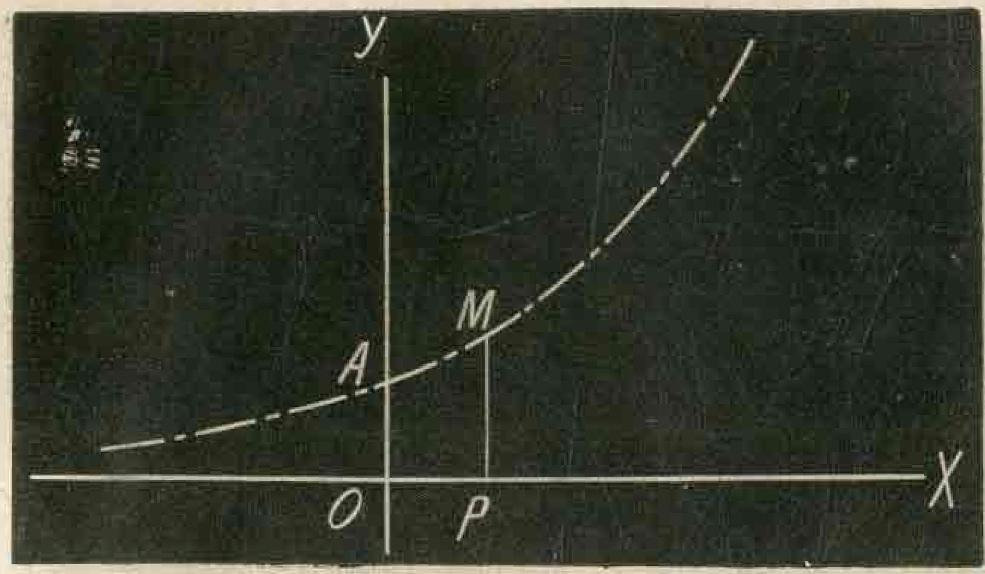
ђ.) Логаритмика.

§ 168.

Влак RAS (Сл. 101.) тога својства, да је за сваку његову тачку M абсциса OP логаритам ординате MP, зове се *логаритмика.* Једначина је така влака дакле $x = log\, y$ или $a^x = y$, где a претставља основу логаритама.

Из ове једначине следује непосредно: 1.) да цела логаритмика лежи изнад абсцисне осе и да се пружа у бескрајност; — 2.) да је у почетку координата ордината $OA = 1$; — 3.) да је за $x = OP = OA = 1$ ордината $y = a$, т. ј. равна основи логаритама; — 4.) да се влак за $a > 1$ на страни положних абсциса

Сл. 101.



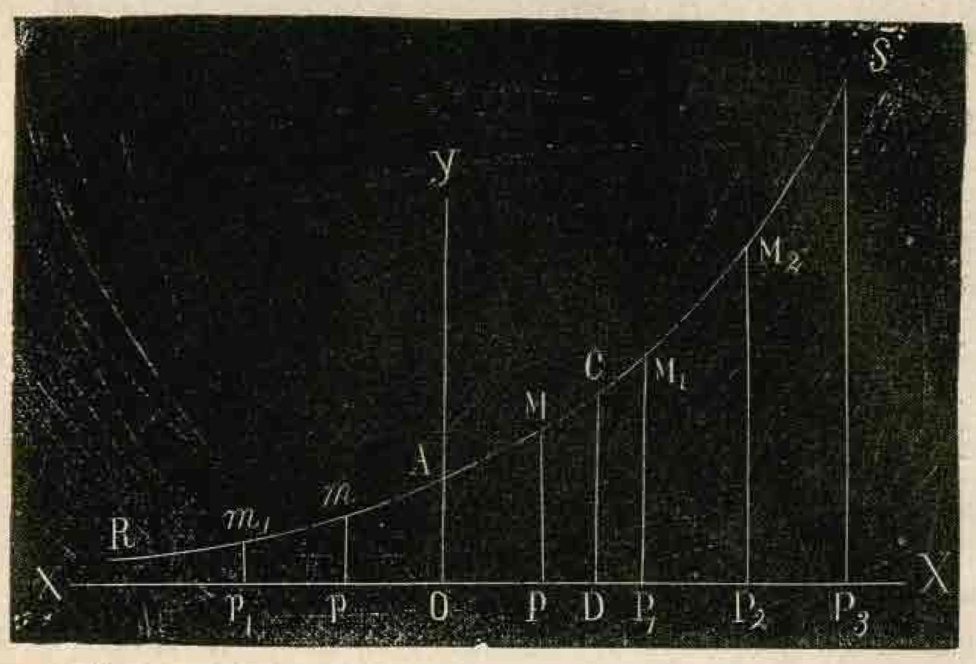
све већма од абсцисне осе удаљује, на против на страни одречних абсциса све више тој оси приближује, без да је се и када дотакне, од куда следује да је абсцисна оса асимптот логаритмике; — најпосле 5.) да се овај влак за $a < 1$ абсцисној оси на одречној страни све већма примиче, а на положној страни све већма од ње удаљује до у бескрајност.

Све што о логаритмици јоште ваља знати, као: њезину тангенту, нормалу и тд., њезин полупречник кривине, елеменат лука и површине, њезину еволуту и тд., све то остављам да извиди ученик. Само ћу овде то јоште да напоменем, да је *подтангента логаритмике стална*, јер њезина једначина даје $\frac{dy}{dx} = a^x . la$, због чега је подтангента $= y . \frac{dx}{dy} = \frac{a^x}{a^x . la} = \frac{1}{la}$ одиста *сталан број* и раван *модулу* дотичне логаритмијске системе. За $a = e = 2{\cdot}718 \ldots .$ постаје подтангента $= 1$.

§ 169.

Помоћу логаритмијских таблица је грађење логаритмике из поједних тачака за коју год дату основу a сасвим лако и не потребује ни каква објашњења. Но можемо направити логаритмику и без таблица на овај начин: Узмемо неку пругу α (Сл. 102.) за јединицу, а другу a за основу; од O као почетка координата одмеримо на абсцисној оси десно $OP = PP_1 = P_1P_2 = \ldots = \alpha$, лево $Op = pp_1 = p_1p_2 = \ldots = \alpha$ и подигнемо у свима тачкама P и p ординате вољне дужине, па онда одмеримо $OA = \alpha = 1$, $PM = a$; A и М биће две логаритми-

Сл. 102.



чине тачке. Сад изнађемо трећу геометријску сразмерницу P_1M_1 ка OA и PM ($OA : PM = PM : P_1M_1$), за тим опет трећу геометријску сразмерницу P_2M_2 ка PM а P_1M_1, после опет трећу геом. сразм. P_3M_3 ка P_1M_1 и P_2M_2 и тд. Тако исто изнађемо и за тачке лево од почетка трећу геометријску сразмерницу pm ка PM и OA ($PM : OA = OA : pm$), трећу геом. сразм. p_1m_1 ка pm и тд., и све те нађене пруге пренесемо на дотичне ординате, па ће крајеви тих ордината, т. ј. тачке M, M_1, M_2 ..... m, m_1, m_2, ... бити тачке логаритмике за дату ону основу a.

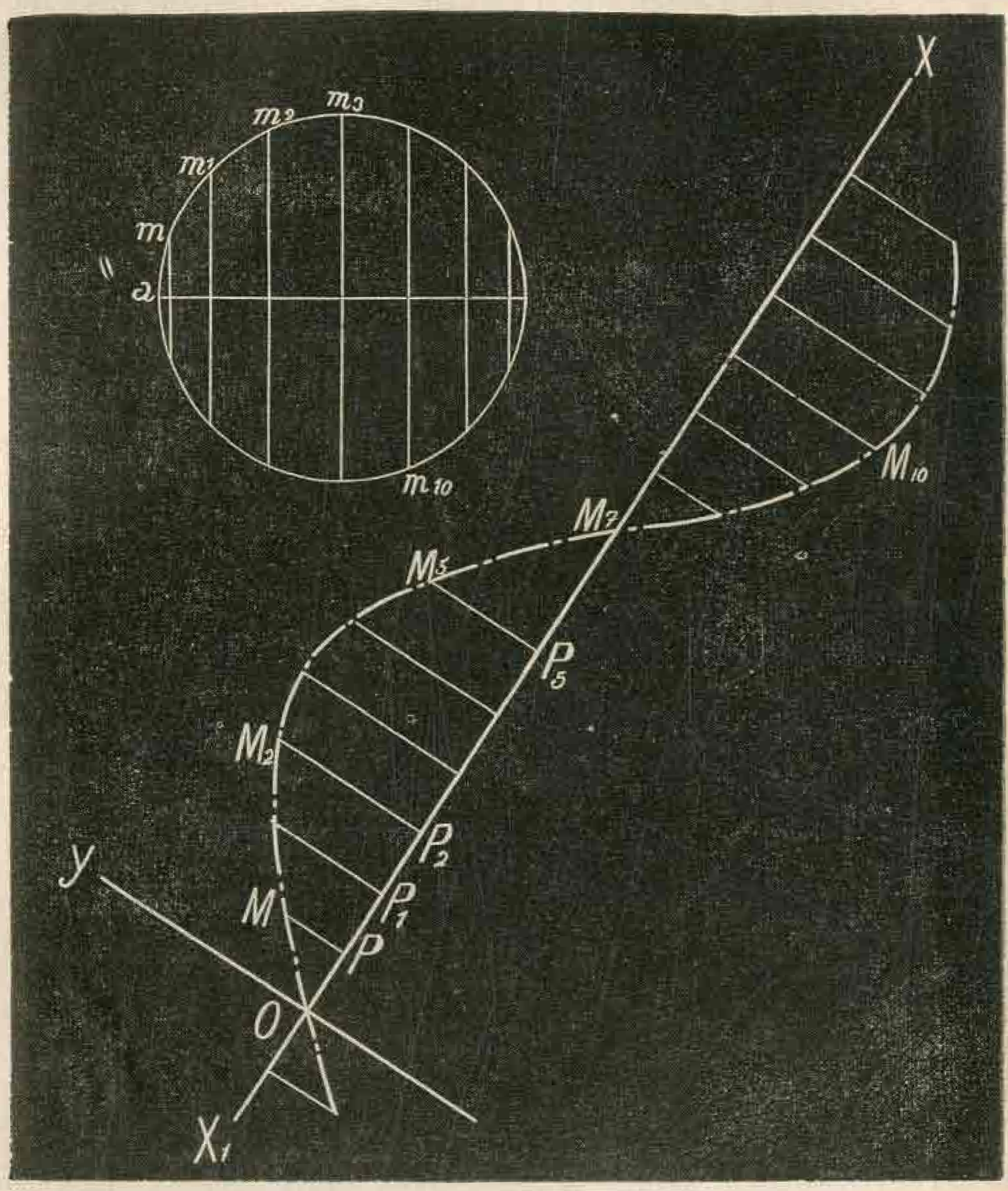
Ако по међу већ нађене две тачке, н. п. M и M_1, хоћемо да уметнемо још неку трећу C, то морамо да преполовимо PP_1 у D и на подигнуту ординату у тачци D да одмримо $DC =$ средњој геом. сразмерници ка PM и P_1M_1 ($PM : DC = DC : P_1M_1$).

е.) **Синусоида.**

§ 170.

Ако на абсцисној оси OX (Сл. 103.) одмеримо од почетка координата OP, OP_1, OP_2 .... по реду = луцима am, am_1, am_2, ,..... некога круга од полупречника $= r$, у тачкама P_1, P_2, ... подигнемо ординате PM, P_1M_1, P_2M_2, ... за лукове прве и друге четврти на више, а за лукове треће и четврте четврти на ниже, па их направимо по реду равне синусима дотичних лукова и по њиховим крајевима повучемо влак OMM_1M_2 ....., имамо тако звану *синусоиду.*

Сл. 103.



Једначина је така влака по самом његовом постапку

$$y = r.\,sin\,\frac{x}{r},$$

где $\frac{x}{r}$ не претставља угао у ступњима, него у размери његове мере према полупречнику.

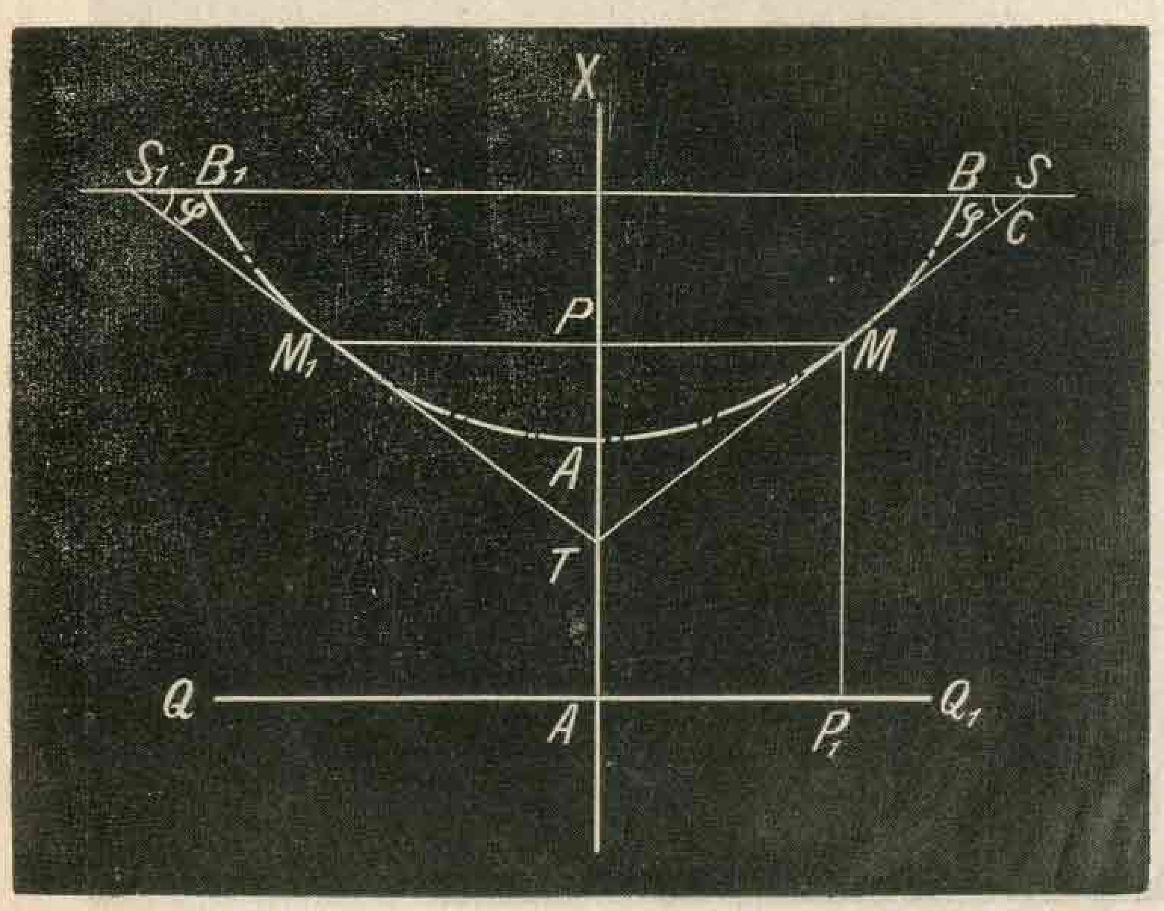
Претресање ове једначине за дознање свију синусоидиних особина, остављам опет вредноме ученику на веџбање.

ж.) Ланчаница.

§ 171.

Влак AMB (Сл. 104,) кога је сваки лук AM, бројан од најниже тачке A, сразмеран гониометријској тангенти угла B_1SM.

Сл. 104.



што праве тангента на M и хоризонтална пруга B_1C, зове се *ланчаница.* *

Узмимо пругу $AX \perp B_1B$ за абсцисну осу, A за почетак координата. Биће $MP = y \perp AX$ ордината, $AP = x$ абсциса неке влакове тачке M. Повукли смо по M тангенту TMS. Нека

---

*) Потпуно витак ланац BAB_1 од врло ситних зглобова, обешен са своја два краја о B и B_1 тако, да су оба у једној хоризонталној прузи, вије се по таком влаку и отуд овоме име ланчаница. Употреба је тога влака голема и важна, с тога га претресамо нешто потање. Још ваља приметити да је број што претставља сталну размеру између лука AM и поменуте гониометријске тангенте (т. ј. број $a = s \cot\varphi$) дужина оноликог ланчевог дела, кога је тежина равна запону ланца у најнижој тачци A.

је $> B_1SM = \varphi$, а лук $AM = s$. Претстављајући јоште чрез a неки сталан број, мора бити по горњем услову за ланчаницу

$$s = a . tg\, \varphi \cdots\cdots\cdots\cdots (1.$$

Но због $tg\, XTM = \frac{dy}{dx}$, а $tg\, \varphi = cot.\, XTM = \frac{1}{tg\, XTM}$,

следује $d\varphi = \frac{dx}{dy}$, дакле

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + cot^2 \varphi} = \frac{dx}{sin\, \varphi}, \quad \text{или}$$

$$ds = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad dy \sqrt{1 + tg^2 \varphi} = \frac{dy}{cos\, \varphi}$$

отуда је пак $\left.\begin{aligned} dx &= ds.\, sin\, \varphi \\ dy &= ds.\, cos\, \varphi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.$

Ако једначину под (1. диференцијалимо, добијамо

$$ds = \frac{a.\, d\varphi}{cos^2\, \varphi},$$

а с овом вредности из једначина под (2.

$$dx = \frac{a\, sin\, \varphi\, d\varphi}{cos^2\, \varphi} \text{ и } dy = \pm \frac{a\, d\, \varphi}{cos\, \varphi},$$

где знак (+) у диференцијалу ординате стоји за положне вредности угла φ, т. ј. за влаков крак AMB, а знак (—) за одречне угле φ, т. ј. за влаков онакав исти и симетричан крак AM_1B_1.

Ове две последње једначине интеграљене дају

$$x = \frac{a}{cos\, \varphi} + C$$

(јер је $sin\, \varphi\, d\, \varphi = -\, d\, cos\, \varphi$)

$$y = \pm\, a.\, l\, tg\, (45^0 + \tfrac{1}{2}\, \varphi) + C_1$$

(по обрасцу 8. § 120. II. дела моје више математике, узев у њему $(90^0 - x)$ место x).

Но за $x = o$ тачка M пада на тачку A и угао је $\varphi = o$. С тога за налазак сталних бројева C и C_1 имамо

$$o = \frac{a}{cos\ o} + C = a + C, \text{ дакле } C = - a \text{ и}$$

$$o = a.\,ltg\,(45^0) + C_1 = o + C_1, \text{ дакле } C_1 = o.$$

По томе потпуно опредељене координате сваке влакове тачке M јесу

$$x = \frac{a}{cos\,\varphi} - a \quad \text{и} \quad y = a.\,l\,tg\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Да би сада добили једначину ланчанице по x и y, ваља нам из последње две једначине уклонити угао φ.

За то имамо због $tg\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + tg\frac{\varphi}{2}}{1 - tg\frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + siu\ \varphi}{cos\ \varphi}$,

$$y = \pm\, a.\ l\ \frac{1 + \sqrt{1 - cos^2\varphi}}{cos\,\varphi},$$

или за то што је по првој од поменутих једначина $cos\ \varphi$ —

$\frac{a}{a + x}$,

$$y = \pm\, a.\ l\ \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a} \ \ldots\ldots \ \text{(I.}$$

и ово је *једначина ланчанице.*

§ 172.

1,) Ако ову једначину диференцијалимо следује

$$dy = \frac{\pm\, a\,dx}{\sqrt{2\,ax + x^2}}, \text{ отуд}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

и за то *елеменат ланчаничинога лука*

$$ds = dx. \, (a + x)$$

2.) Даље следује $\frac{{}^{2}dx}{d^{2}x} = - \frac{a\,(a+x)}{(2ax + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ и с тога *полупречник кривине* (по § 138.)

$$\varsigma = \left[- \frac{(a+x)^3}{(2ax + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] : \left[- \frac{a\,(a+x)}{(2ax + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= \frac{(a+x)^2}{a}.$$

За влаково теме A имамо због $x = o$, $\varrho = \frac{a^2}{a} = a$.

3.) Због $\cos \varphi = \frac{a}{a + x}$ (пређ. §) следује

$$tg\,\varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

дакле је, ако ову вредност узмемо у једначину под (1. пређ, §а,

$$s = \sqrt{2\,ax \;+\; x^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (к.,$$

а то би исто добили и из израза за ds интегралећи га обзиром на то, да је за $x = o$, $s = o$, дакле и онај сталан број у интегралу $= o$.

4.) Из овога израза (к. следује $a = \frac{s^2 - x^2}{2x}$. Ова вредност заменута у једначини I. пређ. §а даје као ланчаничину једначину у којој нема броја а, него само лук и његова абсциса,

$$y = \pm \frac{s^2 - x^2}{2x} \cdot l \frac{s + x}{s - x} \ldots\ldots\ldots \text{(II.}$$

5.) Ако пак у ланчаничиној једначини нећемо да имамо абсцису x, то је, обзиром на једначину под (к. и због $a^2 + s^2 = (a + x)^2$, дакле $a + x = \sqrt{a^2 + s^2}$: ланчанична једначина

$$y = \pm a.\ l \frac{s + \sqrt{a^2 + s^2}}{a} \ldots\ldots\ldots \text{(III.}$$

6.) Ако ваља да је у једначини ланчанице x изражено чрез y, то имамо из једначине I.

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a}, \quad \text{за то}$$

$$e^{-\frac{y}{a}} = \frac{a}{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}$$ и с тога, ако одмах скратимо

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2\ (a + x)}{a}, \quad \text{или}$$

$$a + x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} \right),$$ отуд пак најпосле

$$x = \frac{2}{a} \left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} - 2 \right) \ldots\ldots \text{(IV}$$

као ланчаничину једначину, у којој x је изражено чрез y и a.

7. Ако абцисе бројимо место од A од оне тачке A_1 осе XX_1, за коју је $AA_1 = a$ и QQ претставља ординатну, осу, то ваља место x да узмемо $x - a$, па имамо из једначине IV.

$$x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{y}{}} + e^{-\frac{y}{a}} \right) \ldots\ldots\ldots \text{(V.}$$

8.) На послетку, ако изменимо последње осе т ј. QQ_1 узмемо за абсцисну осу, XX_1 за ординатну, имамо као најпростију ланчаничну једначину

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} \pm e^{-\frac{x}{a}} \right) \ldots\ldots (VI.$$

ђ.) РЕКТИФИГАЦИЈА (ИСПРАВЉАЊЕ) ВЛАКОВА У РАВНИ.

§ 173.

Какав влак *ректификовати* или *исправити* значи: наћи пругу, која је онолике дужине као неки његов лук, или изразити овај лук абсцисама његових крајева.

У §у 132. нашли смо елеменат (диференцијал) лука у ортогоналној системи

$$ds = \sqrt{d^2x + d^2y} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ако дакле за $\frac{dy}{dx}$ узмемо његову вредност из влакове једначине и после интегралимо по абсциси x, имамо

$$s = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int dx \sqrt{1 + \varphi(x)} = \int X dx\cdot$$

Ако овај интеграл испадне тачан (тачно или потпуно опредељен), онда се дотични влак зове *исправљив* (rectificable).

Исправимо неколико показаних влакова у равни.

§ 174.

У §у 133. нашли смо елеменат параболиног лука

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{D}{4x}},$$ а можемо га изразити јоште и

овако:

$$ds = dx \frac{\sqrt{\frac{D}{4} + x}}{\sqrt{x}},$$ тако да је

$$s = \int dx \frac{\sqrt{\frac{D}{4} + x}}{\sqrt{x}}$$, или ако међутим ставимо $\frac{D}{4} = a$,

$$s = \int dx \frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx\,(a + x)}{\sqrt{ax + x^2}},$$

или због $$\frac{a + x}{\sqrt{ax + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{ax + x^2}} + \frac{a}{\sqrt{ax + x^2}},$$

$$s = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax + x^2}} + a \int \frac{dx}{\sqrt{ax + x^2}}.$$

Но по обрасцу C § 115. II. д. м. в. м. имамо

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax + x^2}} = \sqrt{ax + x^2} - \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax + x^2}},$$ а по обрасцу 24. § 89. исте књиге

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax + x^2}} = l \left[a + 2x + 2 \sqrt{ax + x^2} \right],$$

дакле ако заменимо као што ваља имамо за *ректификован параболин лук*

$$s = \sqrt{ax + x^2} + \frac{a}{2} l \left[a + 2x + 2 \sqrt{ax + x^2} \right] + C,$$

или ако за a вратимо $\frac{D}{4}$ и обазремо се на то да је за $x = o$ и $s = o$, дакле $o = \frac{a}{2} la + C$, а то ће рећи $C = -\frac{a}{2} la$:

$$s = \sqrt{\frac{D}{4} x + x^2} + \frac{D}{8} la \left[\frac{\frac{1}{4} D + 2x + 2 \sqrt{\frac{1}{4} Dx - x^2}}{\frac{1}{4} D} \right].$$

§ 175.

По §у је 133. елеменат елипсина лука у односу на њезине осе као кординатне

$$ds = \frac{dx\sqrt{\alpha - \gamma^2 x^2}}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$ дакле је

$$s = \int \frac{dx\sqrt{\alpha^4 - \gamma^2 x^2}}{\alpha\sqrt{\alpha - x^2}}.$$

Узев $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \varepsilon^2$ и $\frac{x^2}{\alpha^2} = z^2$, рећи ће $\frac{x}{\alpha} = z$, претвара се овај интеграл због $dx = \alpha dz$ у

$$s = \alpha \int \frac{dz\sqrt{1 - \varepsilon^2 z^2}}{\sqrt{1 - z^2}},$$

који је у II. д. м. в. м. § 141. 3. већ разрешен.

Повраћајући у свршени интеграл место z и z^2 горње вредности, имамо за *ректификован елипсин лук*

$$s = \alpha A + \frac{\gamma^2}{2\alpha}\left[\frac{x}{2\alpha}\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} - \tfrac{1}{2}A\right]$$
$$+ \frac{1.\,1.\,\gamma^4}{2.\,4.\,\alpha^3}\left[\left(\frac{x^3}{4\alpha^3} + \frac{1.\,3}{2.\,4}\cdot\frac{x}{\alpha}\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{\alpha^2}} - \frac{1.\,3}{2.\,4}\;A\right]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots + C:$$

где је $A = arc\,(sin = \frac{x}{\alpha})$.

За $x = o$ је и $s = o$, а почем је тада и $arc\,(sin = \frac{o}{\alpha}) = o$, то је $o = o + C$, т. ј. број $C = o$.

Ако се лук протеже од $x = o$ до $x = \alpha$ и елипсину периферију претставимо чрез p, имамо, због

$arc\,(sin = \frac{\alpha}{\alpha}) = \frac{\pi}{2}$ и $\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2}} = o$, множећи одмах са 4

$$p = 2\alpha\pi\left[1 - \tfrac{1}{1}\left(\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.\,3}{2.\,4}\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\cdot\frac{\gamma^3}{\alpha^3}\right)^2 - \cdots\cdots\cdots\right]$$

елгисину целу периферију.

Овај је ред то збирљивији, што год је вансређе $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ мањи број.

За $\alpha = \beta$, дакле $\gamma = o$, претвара се елипса у *круг* и пређашњи израз показује да је кругова периферија , као што и јесте, $p = 2\alpha\pi$.

§ 176.

По § 133. је елеменат хиперболина лука

$$ds = \frac{dx\sqrt{\gamma^2x^2 - \alpha^4}}{\alpha\sqrt{x^2 - \alpha^2}},\ \text{дакле}$$

$$s = \frac{1}{\alpha}\int\frac{dx\sqrt{\gamma^2x^2 - \alpha^4}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}.$$

Ако ставимо $\alpha = 1$ и развијемо $\sqrt{\gamma^2x^2 - 1}$, у бескрајан ред, имаћемо

$$s = \gamma\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{2\gamma}\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1.\,1}{2.\,4\gamma^3}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$$
$$- \dots\dots\dots\dots$$

Од ових је интеграла први $= \sqrt{x^2 - 1}$, а остали су већ сви израђени у § 111. под 4. II. д. м. в. м. Ако дакле узмемо њихове вредности као што су тамо и при томе стално C тако определимо, да је за $x = 1, s = o$ и $arc\left(sin = \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, имамо као *исправљен хиперболин лук*

$$s = \left[\gamma - \frac{1.\,1}{2.\,4\gamma^3}\cdot\frac{1}{2x^2} - \frac{1.\,1.\,3}{2.\,4.\,6\gamma^5}\cdot\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{1.\,3}{2.\,4.\,x^2}\right) -\right.$$
$$\left. - \cdots\cdots\right]\cdot\sqrt{x^2 - 1} - \left[\frac{\pi}{2} - arc\left(sin = \frac{1}{x}\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{1}{2\gamma} + \frac{1.1.3}{2.4.6\gamma^5}\cdot\frac{1.3}{2.4} + \cdots\cdots\right],$$

или ако опет повратимо α, дакле место s, γ и x узмемо $\frac{s}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$ и $\frac{x}{\alpha}$:

$$s = \left[\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{\alpha^3}{\gamma^3} \cdot \frac{\alpha^2}{2x^2} - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right] \cdot \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

$$- \alpha \left[\frac{\pi}{2} - arc\left(sin = \frac{\alpha}{x}\right)\right] \cdot \left[\frac{\alpha}{2\gamma} + \frac{1.1}{1.2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^3}{\gamma^3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right],$$

где je $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

§ 177.

1.) По §у je 155. елеменат циклондина лука

$$ds = \sqrt{2r} . \frac{dy}{\sqrt{2r - y}}, \text{ дакле}$$

$$s = \sqrt{2r} . \int \frac{dy}{\sqrt{2r - y}} = - \sqrt{2r} . 2\sqrt{2r - y} + C$$

$$= C - 2\sqrt{2r\,(2r - y)}.$$

Ако циклоидин лук бројимо од координатна почетка A, имамо за $x = y = o$ и $s = o$, тако да je $o = C - 2\sqrt{4r^2} = C - 4r$, дакле $C = 4r$ и с тога *циклоидин исправљен лук* AM

$$s = 4r - 2\sqrt{2r\,(2r - y)},$$

кога други крај M одговора ординати $PM = y$.

За половину циклоидина лука ADB следује због $y = 2r$,

$$s_1 = AD + 4r, \text{ дакле цео лук}$$

$$S = ADB = 8r,$$

из чега се види да je *циклондин лук раван четвороструком производниковом пречнику.*

2.) У § 159. имали смо елеменат кругове еволвенте

$$ds = R\varphi . d\varphi, \text{ дакле je}$$

$$s = R\int \varphi d\varphi = \tfrac{1}{2} R\varphi^2 + C,$$

или почем je за $\varphi = o$ и $s = o$, то je сталник $C = o$ и с тога *исправљен еволвентин лук*

$$s = \tfrac{1}{2} R\varphi^2.$$

3.) У § 163. видели смо да je елеменат архимедове спирале

$$ds = \frac{d\varphi}{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2}, \text{ дакле je}$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}.$$

По 35. обрасцу § 112. II. д. м. в. м. овај је

$$\int d\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} = \tfrac{1}{2} \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} = \tfrac{1}{2} l \left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}\right) + C.$$

Почем је пак за $\varphi = o$ такођер и $s = o$, то је и сталник $C = o$ и с тога *исправљен лук архимедове спирале*

$$s = \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + l\,(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})\right]$$

Ректификовање других још показаних влакова остаје ученицима за вежбање.

Е.) КВАДРАТУРА ВЛАКОВА У РАВНИ.

§ 178.

Под квадратуром каква влака у равни разуме се опредељивање површине, коју међаше влаков какав лук, ординате крајева тога лука и део абсцисне осе између тих ордината.

У § 134. изнашли само елеменат површине у опште $du = y\,dx$; задатак квадратура дакле (или квадровања) сведен је на то, да изнађемо $\int y\,dx$ обзиром на једначину дотична влака $y = f(x)$

Квадрујмо неколико познатих влакова у равни.

§ 179.

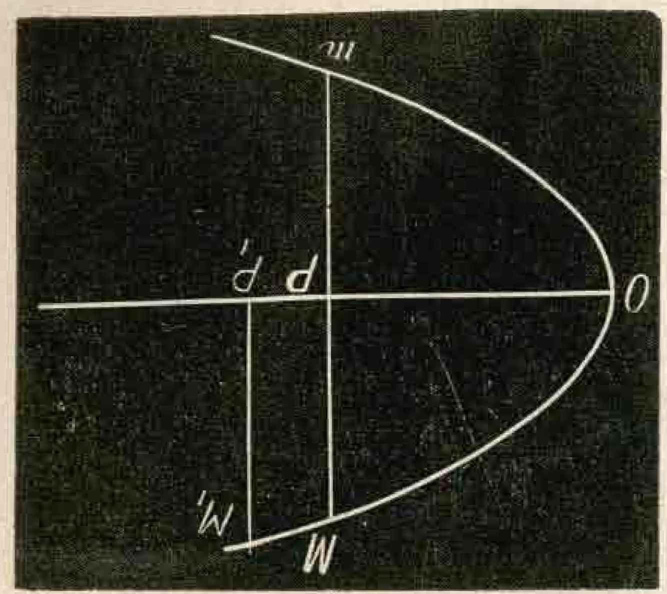
По § 135. елеменат је параболске површине у горњем смислу $du = dx \sqrt{Dx}$; дакле је квадрована парабола

$$u = \int dx \sqrt{Dx} = D^{\frac{1}{4}} \int x^{2}\, dx = \frac{2}{3}\, D^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{Dx}$$

$$= \frac{2}{3} xy.$$

Овај израз показује, да у површини парболина сегмента OPM (Сл. 105. има $\frac{2}{3}$ правоугаоника од абсцисе $OP = x$ и ординате

Сл. 101.



$PM = y$. Ако се тражи површина $U = MOm = 2.OPM$, то имамо

$$U = \frac{4}{3} xy.$$

Тражи ли се пак површина $PMM_1P_1 = u_1$, где је $OP = a$, $OP_1 = a_1$, то имамо да узмемо $\int dx \sqrt{Dx}$ у међама $x = a$ и $x = a_1$, т. ј. да изнађемо $\int_a^{a_1} dx \sqrt{Dx} = u_1$.

Тај је

$$\int_a^{a_1} dx \sqrt{Dx} = D^{\frac{1}{2}} \int_a^{a_1} x^{\frac{1}{2}} dx; \text{ дакле је}$$

$$u_1 = \tfrac{2}{3} D^{\frac{1}{2}} (a_1^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}).$$

Ако је ордината $PM = b$ и ордината $P_1M_1 = b_1$, имамо по параболиној једначини $b_1 = \sqrt{Da_1}$ и $b = \sqrt{Da}$, дакле је јоште

$$u_1 = \tfrac{2}{3} (a_1 b_1 - ab),$$

или због $a_1 = \frac{b_1^2}{D}$ и $a = \frac{b^2}{D}$, јоште

$$u_1 = \tfrac{2}{3} . \frac{b_1^3 - b^3}{D}.$$

§ 180.

1.) Као елеменат елипсина сегмента у односу на осе самога влака нашли смо у § 135.

$$au = \frac{\beta}{\alpha} dx \sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

Дакле је елипсин сегменат

$$u = \frac{\beta}{\alpha}\int dx\sqrt{\alpha^2 - x^2}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\, arc\,(sin = \frac{x}{\alpha})\right] + C,$$

(види обр. 36. § 111. II. д. м. в. м.), или због тога што је за $x = o$ и сам сегменат и $= o$, па дакле и $C = o$,

$$u = \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\, arc\,(sin = \frac{x}{2})\right]$$

Ако овај интеграл узмемо у међама $x = o$ и $x = \alpha$, имамо *површину елипсине четвртине*

$$u = \tfrac{1}{4}\,\alpha\beta\pi,$$

дакле *површина целе елипсе*

$$U = \alpha\beta\pi.$$

2.) По оном је истом §у елеменат елипсина сегмента, кад координате бројимо од лева темена,

$$du = \frac{\beta}{\alpha}\, dx\sqrt{2\alpha x - x^2},$$ дакле елипсин сегменат

$$u = \frac{\beta}{\alpha}\int dx\sqrt{2\alpha x - x^2}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{\alpha - x}{2}\cdot\sqrt{2\alpha x - x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\, arc\,(sin = \frac{x - \alpha}{\alpha})\right] + C$$

(види образац 40. § 114. II. д. м. в. м.), или због тога што је за $x = o$ сам сегменат $= o$, дакле и $C = o$,

$$u = \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{\alpha - x}{2}\cdot\sqrt{2\alpha x - x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\cdot arc\,(sin = \frac{x - \alpha}{\alpha})\right]$$

Ако овај интеграл узмемо у међама $x = o$ и $x = \alpha$, имамо четвртину елипсе и њезина је површина (због

$$\int^{\alpha} dx\sqrt{2\alpha x - x^2} = o, \text{ а } \int_{o} dx\sqrt{2\alpha x - x^2} = -\frac{\alpha\beta}{4}\cdot\pi,$$

дакле $\int_{a}^{a} dx\sqrt{2\alpha x - x^2} = \tfrac{1}{4}\,\alpha\beta\pi$)

$u = \frac{1}{4}\alpha\beta\pi$ као и пре.

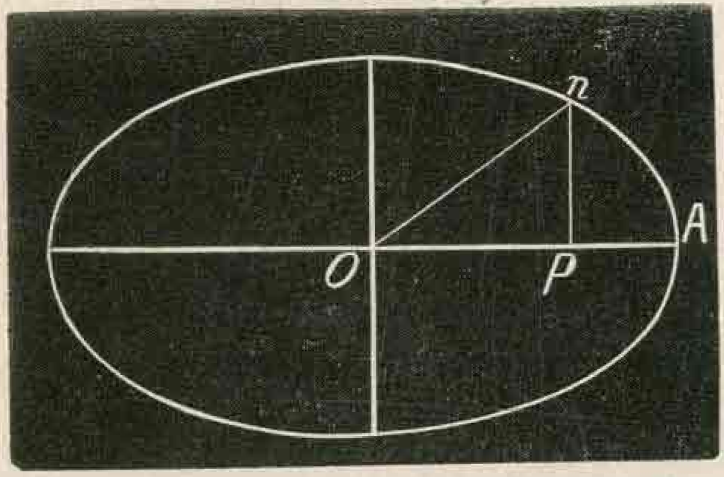
3.) Кад је $\beta = \alpha$ елипса прешла је у круг полупречника α и површина је круга по горњем обрасцу под 1.)

$$U = \alpha^2\pi$$

као што треба. Но још једно. Ако у изразу за елипсин сегменат $u = \frac{\beta}{\alpha}\int dx \sqrt{2\alpha x - x^2}$ узмемо $\beta = \alpha$, са којом вредности од елипсе постаје круг полупречника α, то

$$u = \int dx \sqrt{2\alpha x - x^2}$$

Сл. 102.



претставља сегменат од круга кога је полупречник α.

4. Ако нам треба површина елипсина сектора OAn Сл. 102., то по § 136. имамо

$du = d\,AOn = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$, или због $dy = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x}{y}\,dx = -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$,

$$du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{2}\left[\frac{x^2}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} + \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right]dx$$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\beta dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$ и зато елипсин сектор

$$u = OAn = -\frac{1}{2}\alpha\beta\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha\beta\ arc\,(sin = \frac{x}{\alpha})$$

(види обр. 21. § 88. II. д. м. в. м.).

Ако овај интеграл узмемо у међама $x = \alpha$ до $x = o$, имамо

$\left(\text{због} \int^{o}\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^4}} = o. \int_{x}\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ *четвртина елипсе*

$u = \frac{1}{4}\, \alpha\beta\pi$ као пре.

5·) Површина је круга од полупречника r, $f = r^2\pi$, а површина елипсе, које су полуосе α и β, та је по горњим докучајима $F = \alpha\beta\pi$. Ако ће елипса да буде онолике површине колике круг, то мора да је $r^2 = \alpha\beta$, т. ј. полупречник круга мора да је средња геометријска сразмерница између елипсиних полуоса. По томе можемо рећи *елипсина је површина равна површини једнога круга, кога је полупречник средња геометриска сразмерница између елипсиних полуоса.*

§ 181.

1., По §у је 135. елеменат хиперболина сегмента, кад је почетак координата у десном темену,

$$du = \frac{\beta}{x}\, dx \sqrt{2\alpha x + x^2},$$

дакле је површина хиперболина сегмента

$$u = \frac{\beta}{\alpha}\ \ dx\ \sqrt{2\alpha x + x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, (\alpha + x) \sqrt{2\alpha x -- x^2} - \frac{\alpha^2}{2}\, l\, (x + \alpha + \sqrt{2\alpha x - x^2} + C$$

(види обр. 39 § 114. II. д. м. в. м.), Што се притом тиче сталнога броја C, то ваља приметити, да је за $x = o$ и сегменат $u = o$ дакле број $C = \frac{\alpha\beta}{2}\, l\alpha.$

Ако сегменат хиперболине површине узмемо у односу на саме влакове осе као координантне, имамо

$$du = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}, \text{ дакле}$$

$$u = \frac{\beta}{\alpha} \int dx \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} \Big[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}\, l\, \Big[x + \sqrt{x^2 - x^2} \Big] + C,$$

где је $C = \frac{\alpha\beta}{2}\, la$ као и пре, тако да је најпосле

$$u = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha\beta}{2}\, l\, \frac{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}}{\alpha}.$$

2) Једначина је хиперболе у односу на асимптоте (по § 110.)

$$xy = \frac{\alpha + \beta^2}{4},$$

а почем је у ортогоналној системи асимптота угао прав, дакле хипербола равнострана и тако $\beta = \alpha$, то је

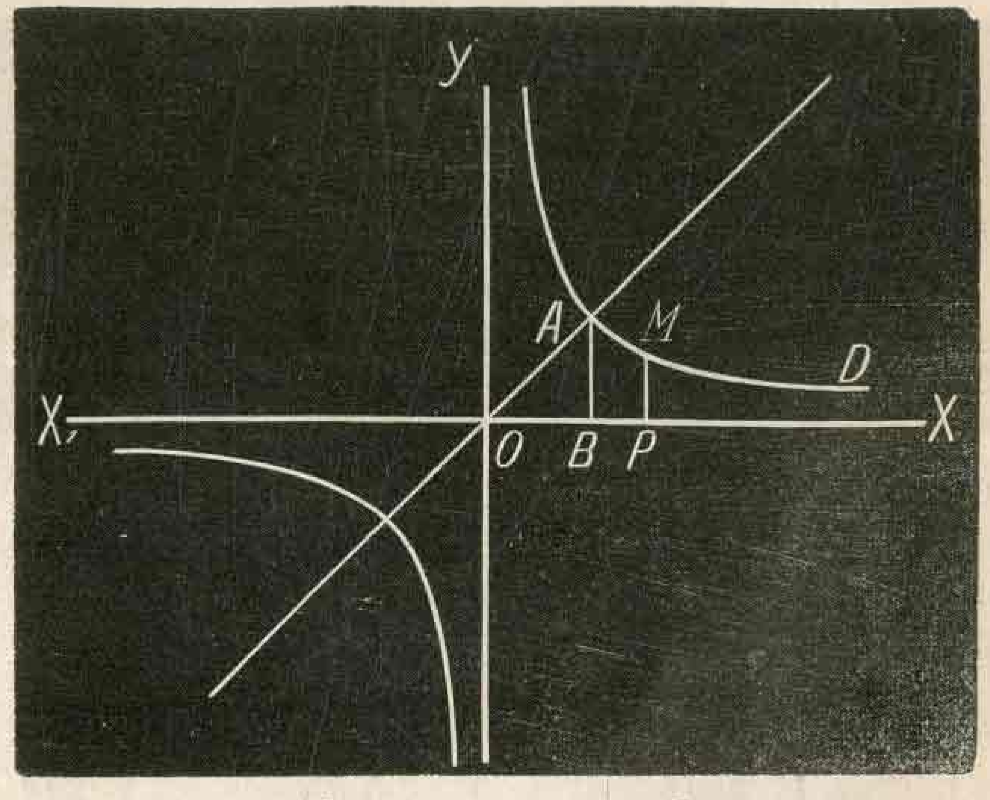
$$xy = \frac{\alpha^2}{2} \text{ или } y = \frac{\alpha^2}{2x}.$$

Са том је вредности $du = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$, дакле

$$u = \frac{\alpha^2}{2} \int \frac{dx}{x} = lx + C\ .$$

Како за $x = o$, тако и за $x = \infty$ постају површине $OADX$ и $OAEX$ (Сл. 103.), које овај интеграл претставља, *бескрајне* и с тога се површина u не може рачунати од асимптота. Ако површину коју међаши асимптот OX не рачунамо од асимптота OY него од ординате BA темена A, за коју је $OB = BA = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2}}$, то по горњем обрасцу налазимо да је површина

Сл. 103.



$$BAMP = \frac{\alpha^2}{2}\,(lx - l\,\overline{OB}) = \frac{\alpha^2}{2}\,(lx - lx),$$

или ако узмемо $\alpha = 1$,

$$BAMP = lx$$

По томе површине између хиперболе и асимптота претстављају природне логаритме абсциса, и то је узрок зашто се ови природни логаритми зову и *хиперболски.*

§ 182.

При циклоиди у § 125. нашли смо

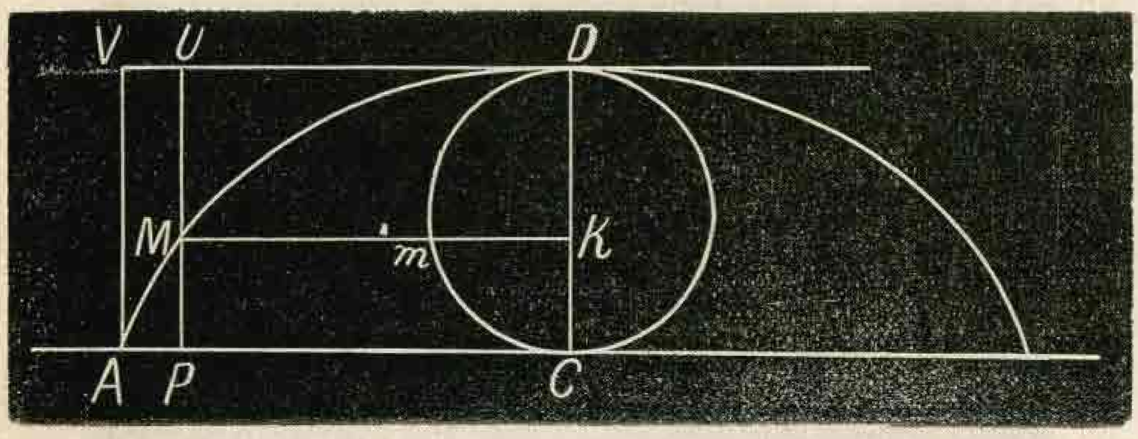
$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}, \text{ дакле је}$$

$$du = \frac{y^2dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \text{ и зато}$$

$$u = \int \frac{y^2dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

који интеграл можемо да разрешимо по обр. C § 115. II. д. м. в. м. Но простије долазимо до истога резултата, ако израчунамо сегменат $AMUV$ (Сл. 104.) и одузмемо од правоугаоника $APUV$.

Сл. 104.



Ако дакле сматрамо VD за абсцисну осу, то је за циклоидину тачку M ордината $y_1 = UM = 2a - y$ и зато за сегменат $AMUV = u_1$

$$du_1 = \frac{y_1 . ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{(2a - y)\, ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{(2ay - y^2)\, dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

т. ј. $du_1 = dy \sqrt{2ay - y^2}$, дакле

$$u_1 = \int dy \sqrt{2ay - y^2}.$$

Но овај интеграл по § 135. претставља сегменат круга од полупречника a, а такав је сегменат овде CmK; дакле је сегменат

$$u_1 = AMUV = segm.\ CmK$$

За циклоидино теме D, у ком је $y = 2a$, следује $segm.\ AVD$ $=$ половини производникове површине, т. ј. $segm\ AVD = \frac{1}{2} a^2\pi$

С тога је површина $ADC = ACDV - AVD = AC.CD - \frac{1}{2} a^2\pi = a\pi.\, 2a - \frac{1}{2} a^2\pi = 2a^2\pi - \frac{1}{2} a^2\pi = \frac{3}{2} a^2\pi$, и по томе *површина целе циклонде*, т. ј,

$$ADB = 3a^2\pi,$$

што показује да је *циклоидина површина равна троструког производниковој површини.*

§ 183.

У §у 167. нашли смо за архимедову спиралу

$$du = \tfrac{1}{2}.\ \frac{\varphi^2}{4\pi^2}.\ d\varphi = \frac{1}{8\pi^2}.\ \varphi^2 d\varphi,$$

дакле је

$$u = \frac{\varphi^3}{24\pi^2}.$$

После *једнога* обрта потега v, т. ј. за $\varphi = 2\pi$, површина коју спирала захвата износи

$$= \frac{8\pi^3}{24\ \pi^2} \times = \tfrac{1}{3}\,\pi = \tfrac{1}{3}\,1^2.\ \pi$$

т. ј. једну трећину површине круга, кога је полупречник узет за јединицу дужине.

После *два* обрта је $\varphi = 4\pi$, дакле споралом закваћена површина

$$u_2 = \frac{64\pi^3}{24\pi^2} = \tfrac{8}{3}\,\pi$$

и с тога она површина, за коју је пређашња у другом обрту повећања,

$$u_2 - u_1 = (\tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{3})\,\pi = \tfrac{7}{3}\,\pi,$$

а површина што лежи између прве и друге спиралине вијуге

$$\tfrac{7}{3}\,\pi - \tfrac{1}{3}\,\pi = 2\pi.$$

Да би у опште нашли површину, која као вишак долази од n. обрта, морамо да узмемо $\int \varphi^2 d\varphi$ у међама $\varphi = (n - {}^1)\, 2\pi$, и $\varphi = n.\, 2\pi$, чим за тражену ту површину налазимо

$$\tfrac{1}{24}\left[8n^3 - 8\,(n-1)^3\right]\frac{\pi^3}{\pi^2} = \tfrac{1}{3}\left[n^3 - (n-1)^3\right]\pi.$$

На исти начин добијамо за $(n+1)$. обрт

$$\tfrac{1}{3}\left[(n+1)^3 - n^3\right]\pi,$$

тако да је у опште она површина што лежи између n. и $(n+1)$. спиралине вијуге

$$\tfrac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 2n^3 + (n-1)^3\right]\pi = 2n\pi.$$

Овај израз даје за $n = 1$ као површину између 1. и 2. вијуге 2π, као год и пре.