ОСНОВНЕ ЧЕРТЕ

РАВНЕ И СФЕРИЧНЕ

ТРИГОНОМЕТРІЕ.

ЗА ПОТРЕБУ ВЫШИ УЧИЛИШТА КНЯЖ. СРБІЕ

ИЗРАДІО

ЕМИЛІАНЪ ІОСИМОВИЋЪ,

при военой академіи К. С. основне в више математике, практичне геомеиріе и механике професоръ; школске комисіе и друштва србске словесности членъ.

прегледала и одобрила школска комисія.

цена е 12 гроша.

У БЕОГРАДУ.

У Књигопечатньи Княжества Србіе.

1854.

Wirke! Das ist das große Gesetz, in des Tempels Tafeln gehauen.
Klopstock.

ПРЕДГОВОРЪ.

Три важна узрока, 1.) безъ сумнѣ велика педагогична и практична користь математичнога знаня, — 2.) врло ограничено башъ таково знанѣ кодъ веће части наши учителя, особито по маньимъ школама, и 3.) готово коначна оскудица у цели сходнымъ те струке делама на нашемъ єзику: побудила су ме на израђенѣ математике за школску потребу, одъ првогъ корака у ньой па до найвыше кодъ насъ учеће се нѣне части, найсходніимъ, постепеномъ умномъ развіяню ученика саображавајућимъ се начиномъ и обзиромъ на горе поменуту нѣну двояку цѣль.

Тимъ се я посломъ занимамъ већъ више година'; но како ми зато збогъ млоги други мои явны и приватны дужностій врло мало времена остаѥ, то ће проћи безъ сумнѣ іошъ неколико година' докъ съ ньимъ сасвимъ и онако готовъ будемъ као што самь радъ.

Тога ради, т. ѥ. да бы и дотле нешто принео къ олакшици и што већемъ успеху учеће се наше младежи у той науци, предузео самь израђивати према потреби но сасвимъ у кратко све оне нѣне части, кое се кодъ насъ дояко іошъ никако нису училе и о коима іошъ манѣ на нашемъ езизу каковы кньига има.

Томъ намеромъ дакле и тимъ начиномъ израђене су ове, одъ высокославногъ попечительства просвештеня за школску кньигу примлѣне „**основне черте равне и сферичне тригонометріе.**"

Све ово морао самь напоменути, да ме небы ко окривіо збогъ тога, што се появлюемъ найпре съ онаковымъ частима мога предмета, кое друге простіе предпоставляю, и при томъ зашто у таковой само краткоћи.

У осталомъ еда ли и уколико ово мое делце одговара изявлѣной намери съ ньимъ и потреби наши выши школа, за кое е написано, — као и е ли распорећенѣ и излаганѣ нѣговы предмета педагогично и практично сходно: нека пресуде они, кои све то, па дакле и исту науку познаю болѣ него я. Критика у томъ обзиру и одъ таковы лица бытће ми тимъ милія, што бы се ньомъ осимъ мана, кое на свакій начинъ исправити валя, одкрило уедно и све оно, што е оригинално, и кое ми се дакле у праву aукторску заслугу брояти има.

При томъ имамъ само іошъ приметити како самь я при израђеню истогъ овогъ делца осимъ већъ познате цели имао іошъ поглавито у виду и практичну потребу оны мои ученика, кои ће остати и после у техничной струци.

Та є ньіова потреба мени као инженіеру и уобште технику, смемъ рећи, врло добро позната. Поуздано надамъ се дакле, да самь съ ньимъ намиріо ако мож' да не и ону другу, а оно баръ ову єдну потребу, и да зато заслужуємъ ако иначе ничію, а оно за цело тій мои ученика признателность. Увиде ли они то поздніє, онда є мой трудъ више него у пола награђенъ.

Напослѣдку у смотреню єзика признаємъ искрено, да самь іошъ доста слабъ, но и сасвимъ наравно, еръ є была такова прилика, да самь и я као млоги други Срби осимъ часловца и псалтира све друго морао учити на туђемъ єзику. Погрешке дакле у томъ смотреню опраштайте да бы вамъ се опростиле.

На Иваньданъ 1854.

Іосимовићъ.

САДРЖАЙ.

Страна

Б.) *Употребленѣ доякошнѣга на разрешенѣ неколико геометр. задатака.*

Кньига трећа. Сферична Тригонометрія.

А.) *Уводна понятія и правила; свойства сферичны труглова, и основна уравненія сфер. тригонометріе.*

Б.) *Разрешенѣ сфер. труглова.*

В.) *Разрешенѣ два важна геодетична задатка.*

Особитый додатакъ.

УВОДЪ.

§. 1.

Изъ геометріє знамо, да є свакій триугалъ са три нѣгова основка — стране и угли —, меѣу коима є найманѣ една страна, подпуно определѣнъ.

Часть математике, коя учи изъ три у броєвима задата основка триугла остале нѣгове основке и садржай **рачуномъ** определити, или краѣе реѣи: триугалъ разрешити, зове се **тригонометрія** или триугломеріє.

Ова наука дели се по положеню вопросногa триугла на **равну** и **сферичну** тригонометрію. Равна тригонометрія занима се съ триуглима у равнини, а сферична съ триуглима на површію сфере.

§. 2.

Тригонометрія по горнѣму основана є на строгой меѣусобной зависимости углова и страна триугла. Но одношенѣ исты нѣговы основака, збогъ ньіове разнородности, неможе се определити непосредствено само броємъ; зато тригонометрія, да бы свою цѣль постигла, мора узети у помоѣь неке одъ углова зависне, а странама сразмерне праве, кое називамо **тригонометричнымъ**, или болѣ **гоніометричнымъ** — угломернымъ — пругама.

Нѣнъ задатакъ састои се дакле найпре у испытиваню свойства гоніометричны пруга и ньіовомъ разномъ определиваню, а потомъ у употребленю исты пруга на разрешенѣ правостраны и сферичны триуглова. Тога ради делимо целу науку на три главне части или кньиге. Прва сматра гоніометричне пруге, збогъ чега називамо ю **гоніометріомъ**; оне друге две пакъ употреблюю докученя прве на разрешенѣ правостраны и сферичны триуглова, и образую дакле равну и сферичну тригонометрію у тешнѣмъ или правомъ смислу.

Гоніометрично разрешенѣ полигона сачинява за себе четврту часть тригонометріє подъ именомъ **полигонометрія**, коя се у новіє доба подигла до особите науке, но о коіой у овоме дѣлу, као о предмету изванъ нѣговы граница лежећемъ, неможе быти никаковогъ далѣгъ спомена.

§. 3.

Што се найпосле тиче начина у тригонометричнымъ доводима и доказима, то се ови могу извести или геометричнымъ или чисто аналитичнымъ сматранѣмъ. Последньій се начинъ у наше доба, збогъ савршене обштости таковы доказа, веħма употреблює; но мы ħемо се при свемъ томъ и онымъ првымъ служити свуда, гди се съ ньимъ брже и лакше до цѣли долази.

КНЬИГА ПРВА.

ГОНІОМЕТРІЯ.

А.) Просте или основне функціе.

I. *Основна понятія.*

§. 4.

Ако изъ врха C некогъ угла $ACM = \varphi$ (слика 1.) напишемо меѣу нѣгове краке съ произвольнымъ полупречникомъ $AC = CM = r$ лукъ AM, и спустимо потомъ изъ еднога края M истога лука на супротный полупречникъ AC управну MD, у другомъ пакъ лука краю A подигнемо на истый полупречникъ управну — дирку — AT до пресецаня съ продуженымъ другимъ полупречникомъ MC у точки T: то се управна MD зове **синусъ** — *sinus* —; часть полупречника AC одъ края A до синуса, т. є. одстояніє AD **попречный синусъ** — *sinus versus* —; часть AT геометричне дирке у A **тангента** — *tangens* —, а продуженый полупречникъ MC до пресецаня съ истомъ дирком, т. є. одстояніє CT **секанта** — *secans* — лука AM или угла φ, за полупречникъ r. сл. 1.

Изъ узрока што се ове четири пруге, као што ѣемо позднiє увидити, при найманьой премени дотичнога угла или нѣгова лука и саме съ места меняю тако, да ньіова величина свагда само одъ нѣга завыси: наричу се іошъ све четири общтымъ именомъ **тригонометричне** — болѣ бы было гоніометричне — **функціе** или дѣйства тичућегъ се угла или лука, и означую се слѣдуюћимъ скраћенымъ начиномъ.

$$MD = sin.\,\varphi,\ AD = sin.\,v.\,\varphi,\ AT = tang.\,\varphi,$$
$$CT = sec.\,\varphi$$

§. 5.

сл. 1. Продужуюћи на ниже лукъ AM и нѣговъ синусъ MD до меѓусобногъ пресецаня у M_1 : бытће лукъ $AM_1 = AM$ т. е $\angle ACM = \angle ACM_1 = \varphi$, и даклє $\angle MCM_1 = 2\varphi$, а $MD = DM_1 = \frac{1}{2} MM_1$. По томе

Синусъ некогъ угла ніе ништа друго, но полутетивка удвоеногъ истогъ угла.

Старіи математици употреблявали су у тригонометріи тетивке место синуса, и они, кои су се при томъ служили латинскимъ езикомъ, називали су іи *inscriptae*, а ньине половине *semissis inscriptae*. Скраћуюћи ово име у рачуну найпре на *s. ins.*, а позніе на *sin.*, постало е по мнѣню неки ауктора име *sinus*. Други на противъ веле, и то е вѣроватніе, да е то име само преводъ, за дотичну функцію одъ Арапа алегорично употребляване речи џаибъ, коя као и у латинскомъ значи недра.

§. 6.

Допуна некогъ угла до правога, т. е. допуна нѣгове мере до едне четврти круга, называ се нѣговымъ **комплементомъ**; нѣгова пакъ допуна до два права угла или по круга, **суплементомъ**. Комплементъ дакле некогъ угла φ ніе ништа друго но нѣгова разлика одъ едногъ правогъ угла, или $90^\circ - \varphi$, а суплементъ **разлика** одъ два права угла, или $180^\circ - \varphi$. Обе те допуне бытће, као што е лако увидити, одрицателне, ако є угалъ φ односно веħій одъ єдногъ **или** одъ два права угла.

§. 7.

Ако є у сл. 2. $\angle \varphi + \psi = 90^0$, у сл. пакъ 3. $\angle \varphi - \psi =$ сл. 2.
$= 90^0$: то є по предходеħему угалъ ψ у оба слу- и 3.
чая комплементъ угла φ.

Функціє комплементногъ угла ψ називаю се **кофункціяма** или садѣйствама угла φ. По на особъ є ME **косинусъ** — *cosinus* —, BE **попречный косинусъ** — *cosinus versus* —, BG **котангента** — *cotangens* —, а CG **косеканта** — *cosecans* — угла φ за полупречникъ $AC = r$, коє слѣдуюħимъ начиномъ означуємо:

$ME = cos.\ \varphi$, $BE = cos.\ v.\ \varphi$, $BG = cot.\ \varphi$, $CG = cosec.\ \varphi$.

По себи увиђа се, да є обратно $\angle \varphi$ комплементъ угла ψ, и да су нѣгове функціє кофункціє угла ψ.

Додатци. 1.) Изъ саме слике види се, да є $ME = DC$; зато се подъ косинусомъ некогъ угла φ обично разумева одстояніє DC, т. є. одстояніє средишта C одъ синуса. Мы ħемо одъ яко такођеръ то одстояніє называти косинусомъ. — 2.) У §. 4. описане четири функціє угла и сада споменуте нѣгове кофункціє, именую се купно просте **или основне функціє**, за разлику одъ **сложены**, съ коима ħемо се упознати у поздніимъ §§.

II. *Свойства основны функція.*

§. 8.

Нека су A_1B_1 и A_2B_2 два єданъ на другій у- сл. 4.
правна пречника, а A_1M_1, A_1M_2, A_1M_3, ... A_1M_8 у разне четврти круга допируħи луци.

Построивши по §§. 4. и 6. све функціє овы лукова примећавамо, да є нъіово положенѣ, изузимаюћи оно попречны синуса, и косинуса кои се пружаю само на єдну єдину страну, — двояко и єдно другомъ противно, тако: да су по томе, сматраюћи функціє у првой четврти као положителне,

синуси и косеканте у 1. и 2. четврти положителне, а у 3. и 4. одрицателне;

косинуси и секанте у 1. и 4. четврти положителне, у 2. пакъ и 3. одрицателне;

тангенте и котангенте у 1. и 3. четврти положителне, а у 2. и 4. одрицателне; найпосле

попречни синуси и косинуси у свима четвртима положителни.

Одрицателне секанте и косеканте єсу оне, при коима се дотичный полупречникъ, ради пресецаня съ тангентомъ или котангентомъ, продужуе преко средишта назадъ.

Додатакъ. Функціє лукова веће одъ єдногъ круга, лукова т. є. кои допиру у 5., 6., 7., и т. д. четврть, слажу се по положеню, а као што ћемо мало касніє видити, и величиномъ односно съ онима у 1., 2., 3. и 4. четврти.

§. 9.

Што се тиче величине функція, то находимо простымъ сматранѣмъ слике обзиромъ на предходећій §.

1.) Умаляванѣмъ лука A_1M_1 умаляваю се такођеръ и нѣгова оба синуса, тангента и секанта расту на противъ оба косинуса, котангента и косеканта тако, да є

$$\text{за } A_1M_1 = a = 0 \ :$$
$$sin\, 0 = sin.v.\, 0 = tang.\, 0 = 0 \ ,$$
$$cos\, 0 = cos.v.\, 0 = sec.\, 0 = r \ , \ a$$
$$cot.\, 0 = cosec = \infty$$

2.) Увећаванѣмъ лука A_1M_1 у первой четврти увећаваю се оба нѣгова синуса, тангента и секанта, а умаляваю се на противъ оба косинуса, котангента и косеканта, тако, да є

$$\text{за } A_1M_1 = A_1A_2 = 90^0 \ :$$
$$sin\ 90^0 = sin.v.\, 90^0 = cosec.\ 90^0 = r \ ,$$
$$cos\ 90^0 = cos.v.\, 90^0 = cot.\, 90^0 = 0, \ a$$
$$tang\, 90^0 = sec.\, 90^0 = \infty$$

3.) У 2. четврти умаляваю се синусъ, тангента и секанта, расту на противъ попречный синусъ, оба косинуса, котангента и косеканта тако, да є

$$\text{за } A_1M_1 = A_1A_2B_1 = 180^0 = 2\ R \ :$$
$$sin.\ 180^0 = tang.\, 180^0 = 0 \ ,$$
$$sin.\ v.\ 180^0 = 2r \ ,$$
$$cos.\ 180^0 = sec.\, 180^0 = -r \ ,$$
$$cot\ 180^0 = -\infty \ ,$$
$$cosec.\, 180^0 = \infty$$

4.) У 3. четврти расту синусъ, попречный косинусъ, тангента и секанта, а умаляваю се попречный синусъ, косинусъ, котангента и косеканта тако, да є

$$\text{за } A_1M_1 = A_1A_2B_1B_2 = 270^0 = 3\,R \ :$$
$$sin.\ 270^0 = cosec\ 270^0 = r \ ,$$
$$sin.\ v.\ 270 = r \ ,$$
$$cos.\ 270^0 = cot.\ 270^0 = 0 \ ,$$
$$cos.\ v.\ 270^0 = 2r \ ,$$
$$tang.\ 270^0 = \infty \ ,$$
$$sec.\ 270^0 = -\infty$$

5.) У 4. найпосле четврти умаляваю се оба синуса, попречный косинусъ, тангента и секанта, а расту косинусъ, котангента и косеканта, тако да є

$$\text{за } A_1M_1 = A_1A_2B_1B_2A_1 = 360_0 = 4\,R \quad :$$
$$sin.\,360^0 = sin.\,u.\,360_0 = tang.\,360^0 = 0\,,$$
$$cos.\,360^0 = cos.\,v.\,360^0 = sec.\,360^0 = r\,,$$
$$cot.\,360^0 = cosec.\,360^0 = -\,\infty$$

Додатакъ. Сматраюћій функціє лука кои се найпре одъ нулле, а потомъ одъ 90^0 или четврти круга єдва разликую̀є, увиђамо: да се у првомъ случаю синусъ и тангента одъ самога лука, а косинусъ и секанта одъ полупречника, у другомъ пакъ случаю синусъ и косеканта одъ полупречника, а косинусъ и котангента одъ нулле **приметно** ничимъ неразликую. Найпосле да су у првомъ случаю котангента и косеканта, а у другомъ тангента и секанта безъ сваке сумнѣ безконачно велике.

§. 10.

Докученя предходећа два §§. могу се сложити у слѣдуюћу просту, почетнику веома полезну таблицу, у коіой *рс* показує растенѣ, а *ум.* умаляванѣ функція.

	∠ одъ 0°	у I. четвр.	∠ одъ 90°	у II. четвр.	∠ одъ 180°	у III. четвр.	∠ одъ 270°	у IV. четвр.	∠ одъ 360°
синусъ	0	+, рс.	г	+, ум.	0	—, рс.	—г	—, ум.	0
косинусъ	г	+, ум.	0	—, рс.	—г	—, ум.	0	+, рс.	г
попр. синусъ	0	+, рс.	г	+, рс.	2г	+, ум.	г	+, ум.	0
попр. косин.	г	+, ум.	0	+, рс.	г	+, рс.	2г	+, ум.	г
тангента	0	+, рс.	∞	—, ум.	0	+, рс.	∞	—, ум.	0
котангента	∞	+, ум.	0	—, рс.	—∞	+, ум.	0	—, рс.	—∞
секанта	г	+, рс.	∞	—, ум.	—г	—, рс.	—∞	+, ум.	г
косеканта	∞	+, ум.	г	+, рс.	∞	—, ум.	—г	—, рс.	—∞

Изъ ове таблице изводимо іошъ нарочито слѣдуюће две важне приметбе:

1.) Синусъ, попречный синусъ, тангента и секанта у првой четврти расту, кофункціє на противъ умаляваю се: ако углалъ расте, и обратно.

2.) Немотрећи на знакъ,

границе синуса и косинуса єсу 0 — нулла — и полупречникъ,

„ попречногъ синуса и попр. косинуса 0 и пречникъ,

„ тангенте и котангенте 0 и безконачно, найпосле границе секанте и косеканте полупречникъ и безконачно.

Попречный синусъ и косинусъ употреблюю се одъ свію функція найманѣ, зато іи мы одяко выше нећемо сматрати.

§. 11.

Найвећій є синусъ, као што смо видили, раванъ полупречнику. Овай синусъ назива се целымъ синусомъ или *sinus totus* и узима се обично, ради простієгъ рачуна, за єдиницу свію осталы функція.

Мы ћемо одъ сада при свима нашимъ дальимъ испытиваняма такођеръ єдиницу сматрати као полупречникъ, докле годъ не условимо другій. Но да бы функціє за полупречникъ 1 разликовали одъ єдноимены функція за другій некій полупречникъ: то ће мо оне у будуће свагда малимъ, а ове великимъ писменима започиняти.

За полупречникъ 1 периферія круга равна є 2π, пола круга $= \pi$, а четврть круга $= \frac{1}{2}\pi$. Тога ради писат'ћемо одъ яко место четврти круга, по круга и цела круга краће $\frac{1}{2}\pi$, π и 2π.

§. 12.

Ако є у сл. 1. по величини лукъ $AM = AM_1$ т. є. $\angle\ ACM = \angle\ ACM_1 = \varphi$, и точка A ньіовъ заєднички́й почетакъ: то су исти луци по положеню єданъ другомъ противни, и зато, сматраюћи горнѣ пололенћ као положително, лукъ є AM положителанъ, а лукъ AM_1 одрицателанъ, или — што є све идно —, $\angle\ ACM = +\varphi$, а $\angle\ ACM_1 = -\varphi$. сл. 1.

Да су єдноимене функціє оба угла по величини єднаке, увиђавно є по себи, и мы дакле обзиромъ на § 8 налазимо

$$\begin{array}{l|l} sin.\ (-\varphi) = -\,sin.\ \varphi & tang.\ (-\varphi) = -\,tang.\ \varphi \\ cos.\ (-\varphi) = cos.\ \varphi & cot.\ (-\varphi) = -\,cot.\ \varphi \end{array}$$

$$sec.\,(-\varphi) = sec.\ \varphi$$
$$cosec.\,(-\varphi) = -\,cosec.\ \varphi$$

кои изрази важе за сваку безъ разлике величину угла φ.

§. 13.

Ако су (сл. 5.) A_1B_1 и A_2B_2 два єданъ на другі́й управна пречника, а по величини $\angle\ A_1CM_1 = A_2CM_2 = B_1CM_3 = B_2CM_4 = \varphi$: то є, изъ лако увиђавны — геометричны — узрока, по величини $M_2N_2 = N_1C$, $M_3N_3 = M_1N_1$, $M_4N_4 = N_1C$, $M_5N_5 = M_1N_1$; обзиромъ дакле на §. 8. и 11. сл. 5.

$$\begin{array}{l|l} sin\,(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = cos\ \varphi & sin\,(\tfrac{3}{2}\pi + \varphi) = -\,cos\ \varphi \\ sin\,(\pi + \varphi) = -\,sin\ \varphi & sin\,(2\pi + \varphi) = sin\ \varphi \end{array}$$

Поставляюћи у ове изразе $(-\varphi)$ место φ слѣдує по §. 12.

$$\begin{array}{l|l} sin\,(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = cos\ \varphi & sin\,(\tfrac{3}{2}\pi - \varphi) = -\,cos\,\varphi \\ sin\,(\pi - \varphi) = sin\ \varphi & sin\,(2\pi - \varphi) = -\,sin\ \varphi \end{array}$$

Овымъ истымъ начиномъ и остале функціє сматраюћи долазимо найпосле до слѣдуюћи обшты докученя:

Синусъ	Косинусъ	Тангента	Котангента	Секанта	Косеканта
		одъ $(\frac{1}{2}\pi \pm \varphi) =$			
$\cos\varphi$	$\mp \sin\varphi$	$\mp \cot\varphi$	$\mp \tan\varphi$	$\mp \operatorname{cosec}\varphi$	$\sec\varphi$
		одъ $(\pi \pm \varphi) =$			
$\mp \sin\varphi$	$\mp \cos\varphi$	$\pm \tan\varphi$	$\pm \cot\varphi$	$-\sec\varphi$	$\mp \operatorname{cosec}\varphi$
		одъ $(\frac{1}{2}\pi \pm \varphi) =$			
$-\cos\varphi$	$\pm \sin\varphi$	$\mp \cot\varphi$	$\mp \tan\varphi$	$\pm \operatorname{cosec}\varphi$	$-\sec\varphi$
		одъ $(2\pi \pm \varphi) =$			
$\pm \sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\pm \tan\varphi$	$\pm \cot\varphi$	$\sec\varphi$	$\pm \operatorname{cosec}\varphi$

Функціє углова веђи или мањи одъ 4, 5, 6, 7, 8 или више правы, стое према функціяма основногъ угла φ дотично у истомъ одношеню, као функціє у овой таблици назначены углова.

III. Међусобно одношенѣ функція.

§. 14.

Построивши функціє некогъ угла $ACM = \varphi$ (сл. 2.) находимо сл. 2.

а.) изъ триугла MCD

$$\overline{MC}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{DC}^2 \text{, т. є.}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \\ \text{и одтуда}\quad \sin\varphi &= \sqrt{(1-\cos^2\varphi)} \\ \cos\varphi &= \sqrt{(1-\sin^2\varphi)} \end{aligned}\right\} \ldots 1.$$

б.) изъ триугла ACF

$$\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 \text{, или}$$

$$\left.\begin{aligned} \sec^2\varphi &= 1 + \tang^2\varphi \\ \text{дакле}\quad \sec\varphi &= \sqrt{(1 + \tang^2\varphi)} \\ \tang\varphi &= \sqrt{(\sec^2\varphi - 1)} \end{aligned}\right\} \ldots 2.$$

в.) изъ триугла BCG

$$\overline{CG}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BG}^2 \text{, т. є.}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cosec}^2\varphi &= 1 + \cot^2\varphi, \text{ и} \\ \text{зато}\quad \operatorname{cosec}\varphi &= \sqrt{(1 + \cot^2\varphi)} \\ \cot\varphi &= \sqrt{(\operatorname{cosec}^2\varphi - 1)} \end{aligned}\right\} \ldots 3.$$

§. 15.

Збогъ подобія триуглова ACF и DCM (иста сл.) имамо далѣ

$$AF : AC = DM : DC$$ и
$$CF : AC = CM : DC$$, то ће рећи
$$tang\,\varphi : 1 = sin\,\varphi : cos\,\varphi$$, а
$$sec\,\varphi : 1 = 1 : cos\,\varphi$$, и одтуда

$$tang\,\varphi = \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} \ldots\ldots 4.$$

$$\left.\begin{array}{ll} & sec\,\varphi = \dfrac{1}{cos\,\varphi} \\ \text{обратно} & cos\,\varphi = \dfrac{1}{sec\,\varphi} \end{array}\right\} \ldots\ldots 5.$$

Подобіє пакъ триуглова BCG и ECM подає

$$BG : BC = EM : EC,$$
$$GC : BC = MC : EC$$, или

збогъ $EM = CD$, а $EC = MD$:

$$BG : BC = CD : MD,$$
$$GC : BC = MC : MD$$, то ће рећи
$$cot\,\varphi : 1 = cos\,\varphi : sin\,\varphi$$, а
$$cosec\,\varphi : 1 = 1 : sin\,\varphi$$, дакле

$$cot\,\varphi = \frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi} \ldots\ldots 6.$$

$$\left.\begin{array}{ll} & cosec\,\varphi = \dfrac{1}{sin\,\varphi} \\ \text{обратно} & sin\,\varphi = \dfrac{1}{cosec.\,\varphi} \end{array}\right\} \ldots 7.$$

§. 16.

Будући є $\frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} = 1 : \frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi}$, то є по горнѣму (образацъ 4.) $tang\,\varphi = 1 : \frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi}$, но по образцу є 6. $\frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi} = cot\,\varphi$, дакле є

$$\left.\begin{array}{l} tang\,\varphi = \dfrac{1}{cot\,\varphi} \\ cot\,\varphi = \dfrac{1}{tang\,\varphi} \end{array}\right\} \ldots.\ 8.$$

и обратно

§. 17.

Заменююћи именителѣ у изразима подъ 5., 7., и 8. съ ньіовымъ вредностима изъ 1., 2., и 3., добыямо редомъ

$$sec\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 - sin^2\,\varphi)}} \qquad sin\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + cot^2\,\varphi)}}$$

$$cos\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + tang^2\,\varphi)}} \qquad tang\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(cosec^2\,\varphi - 1)}}$$

$$cosec\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 - cos^2\,\varphi)}} \qquad cot\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(sec^2\,\varphi - 2)}}$$

Поставляюћи обратно за функціє у именительима овы разломака ньіове вредности изъ образаца подъ 5., 7. и 8. налазимо

$$sec\,\varphi = \frac{cosec\,\varphi}{\sqrt{(cosec^2\,\varphi - 1)}} \qquad sin\,\varphi = \frac{tang\,\varphi}{\sqrt{(1 + tang^2\,\varphi)}}$$

$$cos\,\varphi = \frac{cot\,\varphi}{\sqrt{(1 + cot^2\,\varphi)}} \qquad tang\,\varphi = \frac{sin\,\varphi}{\sqrt{(1 - sin^2\,\varphi)}}$$

$$cosec\,\varphi = \frac{sec\,\varphi}{\sqrt{(sec^2\,\varphi - 1)}} \qquad cot\,\varphi = \frac{cos\,\varphi}{\sqrt{(1 - cos^2\,\varphi)}}$$

Найпосле ове разломке преокретаюћи имамо обзиромъ на образце 5., 7. и 8.

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{(cosec^2\varphi - 1)}}{cosec\,\varphi} \qquad cosec\,\varphi = \frac{\sqrt{(1 + tang^2\varphi)}}{tang\,\varphi}$$

$$\sec\varphi = \frac{\sqrt{(1 + \cos^2\varphi)}}{\cot\varphi} \qquad \cot\varphi = \frac{\sqrt{(1 - \sin^2\varphi)}}{\sin\varphi}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(\sec^2\varphi - 1)}}{\sec\varphi} \qquad tang\varphi = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2\varphi)}}{\cos\varphi}$$

§. 18.

Ова докученя показую, да се тригонометричне функціє геометричнымъ и аналитичнымъ путемъ єдна чрезъ другу, и све чрезъ єдну исту изразити даю, кое є, као што ћемо касніє увидити, одъ врло велике ползе. Сватаюћи иста докученя ради лакшегъ прегледа и веће удобности при позднієм употребленю, сва у скупъ, имамо

изразъ	синусомъ	косинусомъ	тангентомъ	котангент.	секантомъ	косекант.
синуса	sin	$\sqrt{(1-cos^2)}$	$\frac{tang}{\sqrt{(1-tang^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+cot^2)}}$	$\frac{\sqrt{(sec^2-1)}}{sec}$	$\frac{1}{cosec}$
косинуса	$\sqrt{(1-sin^2)}$	cos	$\frac{1}{\sqrt{(1+tang^2)}}$	$\frac{cot}{\sqrt{(1+cot^2)}}$	$\frac{1}{sec}$	$\frac{\sqrt{(cosec^2-1)}}{cosec}$
тангенте	$\frac{sin}{\sqrt{(1-sin^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-cos^2)}}{cos}$	$tang$	$\frac{1}{cotang}$	$\sqrt{(sec^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(cosec^2-1)}}$
котангенте	$\frac{\sqrt{(1-sin^2)}}{sin}$	$\frac{cos}{\sqrt{(1-cos^2)}}$	$\frac{1}{tang}$	cot	$\frac{1}{\sqrt{(sec^2-1)}}$	$\sqrt{(cosec^2-1)}$
секанте	$\frac{1}{\sqrt{(1-sin^2)}}$	$\frac{1}{cos}$	$\sqrt{(1+tang^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+cot^2)}}{cot}$	sec	$\frac{cosec}{\sqrt{(cosec^2-1)}}$
косеканте	$\frac{1}{sin}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-cos^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1+tang^2)}}{tang}$	$\sqrt{(1+cot^2)}$	$\frac{sec}{\sqrt{(sec^2-1)}}$	$cosec$

Б.) Сложене функціе.

I. Функціе сбира и разлике два угла.

§. 19.

сл. 6. Ако е (сл. 6.) лукъ $AM = \alpha$, лукъ пакъ $MN = \beta$: то е лукъ $AN = \alpha + \beta$ и по §. 4. $MP = \sin\alpha$, $CP = \cos\alpha$, $NQ = \sin\beta$, $CQ = \cos\beta$, $NR = \sin(\alpha + \beta)$, а $CR = \cos(\alpha + \beta)$.

Спустимо $QS \perp AC$, и $QT \perp NR$; бытће

1.) тригалъ $CMP \sim \triangle CQS$, и зато

$CM : MP = CQ : QS$, а

$CM : CP = CQ : CS$, или по горнѣму и збогъ $QS = TR$:

$1 : \sin\alpha = \cos\beta : TR$,

$1 : \cos\alpha = \cos\beta : CS$; дакле

$$TR = \sin\alpha \cos\beta \quad \ldots\ldots (а.$$

$$CS = \cos\alpha \cos\beta \quad \ldots\ldots (б.$$

2.) $\triangle CMP \sim \triangle NQT$, зато

$CM : MP = NQ : QT$, а

$CM : CP = NQ : NT$, или збогъ $QT = SR$:

$1 : \sin\alpha = \sin\beta : SR$

$1 : \cos\alpha = \sin\beta : NT$, и одтуда

$$SR = \sin\alpha \sin\beta \quad \ldots\ldots (в.$$

$$NT = \cos\alpha \sin\beta \quad \ldots\ldots (г.$$

Равности подъ (а. и (г. сабираюћи, а равность (в. одъ (б. одузимаюћи добыямо

$TR + NT = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$, и

$CS - SR = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$;

будући є пакъ $TR + NT = NR = sin\ (\alpha + \beta)$, а

$CS -- SR = CR = cos\ (\alpha + \beta)$: то є дакле

$$sin\ (\alpha + \beta) = sin\,\alpha\ cos\,\beta + cos\,\alpha\ sin\,\beta \ \ldots . \ (\mathrm{I}.$$

$$cos\ (\alpha + \beta) = cos\,\alpha\ cos\,\beta - sin\,\alpha\ sin\,\beta \ \ldots . \ (\mathrm{II}.$$

§. 20.

Подобнымъ начиномъ могли бы изнаћи и изразе синуса и косинуса разлике два угла. Но ове функціє мы садъ добыямо млого простіє аналитичнымъ путемъ поставлюћи т. є. у пређашнѣ $(-\beta)$ место β, коє учинивши имамо

$$sin\,(\alpha - \beta) = sin\,\alpha\ cos\,(-\beta) + cos\,\alpha\ sin\,(-\beta) \ \text{ и}$$

$$ccs\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\ cos\,(-\beta) - sin\,\alpha\ sin\,(-\beta),$$

или обзиромъ на §. 12., т. є. збогъ $cos\ (-\beta) = cos\,\beta$, а $sin\,(-\beta) = -sin\,\beta$:

$$sin\,(\alpha - \beta) = sin\,\alpha\ cos\,\beta - cos\,\alpha\ sin\,\beta \ \ldots . \ (\mathrm{III}.$$

$$cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\ cos\,\beta + sin\,\alpha\ sin\,\beta \ \ldots . \ (\mathrm{IV}.$$

§. 21.

Ова четири образца синуса и косинуса сбира и разлике два угла важе не само за два оштра угла, као што смо у употреблѣной за ньіово довођенѣ слики предпоставили, но у обште за ма какова два угла α и β, о чему се лако уверавамо слѣдуюћимъ начиномъ.

Поставимо да є $\angle\ \alpha$ као и пре оштаръ, угалъ пакъ β тупъ, н. п. $\beta = (90^0 + \chi) < 180^0$; бытће по томе

$$\begin{aligned} sin\ (\alpha + \beta) &= sin\,(\alpha + 90^0 + \chi) \\ &= sin\left[\tfrac{\pi}{2} + (\alpha + \chi)\right] \ \ldots \ (\text{§. } 11.) \\ &= cos\,(\alpha + \chi) \ \ldots . \ (\text{§. } 13.), \end{aligned}$$

и тимъ истымъ начиномъ

$$\cos(\alpha+\beta) = -\sin(\alpha+\chi).$$

Но угли су α и χ по предпоставлѣню оштри, дакле є односно по образцима II. и I.

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\chi)$$
$$= \cos\alpha\cos\chi - \sin\alpha\sin\chi, \quad \text{a}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = -\sin(\alpha+\chi)$$
$$= -\sin\alpha\cos\chi - \cos\alpha\sin\chi$$

Будући є найпосле, такођеръ по предпоставлѣню, $\angle\ \chi = \beta - 90^0 = \beta - \frac{\pi}{2} = -(\frac{\pi}{2} - \beta)$, и дакле по §. 13.

$$\sin\chi = \sin\left[-(\frac{\pi}{2}-\beta)\right] = -\sin(\frac{\pi}{2}-\beta) = -\cos\beta,$$

а $\cos\chi = \cos\left[-(\frac{\pi}{2}-\beta)\right] = \sin\beta$: то є, ове вредности у предходећа уравненія поставляюћи и ова потомъ уређуюћи,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$ за єданъ оштаръ и єданъ тупъ уголъ, као годъ за два оштра.

Поставляюћи садъ да є осимъ угла β іошъ и $\angle\ \alpha$ тупъ и н. п. $= (180 + y) < 270^0$, налазимо истымъ начиномъ

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180^0 + y + 90^0 + \chi) =$$
$$= \sin\left[270^0 + (\chi + y)\right] = -\cos(\chi + y)$$
$$= -\cos\chi\cos y + \sin\chi\sin y$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\left[270^0 + (\chi+y)\right] = \sin(\chi+y)$$
$$= \sin\chi\cos y + \cos\chi\sin y,$$ или, збогъ $\chi = \beta - 90^0 = -(90^0 - \beta)$, $y = \alpha - 180^0 = -(180^0 - \alpha)$ и дакле $\sin\chi = -\cos\beta$, $\cos\chi = \sin\beta$, $\sin y = -\sin(180^0 - \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos y = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$: —

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

и за два условлѣно тупа угла.

До овы исты образаца долазимо, као што сада већь лако увидити можемо, давајући углима α и β и ма какове друге вредности тако, да по томе ньіова, па дакле и изъ ньи изведены образаца общтность, никаковой выше сумньи неподлежи

§. 22.

По 15. є §. $tang(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$, или, место овы функціја ньіове вредности изъ §§. 19. и 20. узимајући

$$tang(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$$

Делећи броителя и именителя овогъ разломка еданпутъ съ $\cos\alpha\cos\beta$, другій путъ пакъ съ $\sin\alpha\sin\beta$, добыямо

$$\left.\begin{aligned} tang(\alpha \pm \beta) &= \frac{tang\,\alpha \pm tang\,\beta}{1 \mp tang\,\alpha\, tang\beta} \\ cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{cot\,\beta \pm cot\,\alpha}{cot\,\alpha\, cot\,\beta \mp 1} \end{aligned}\right\} \ldots . (V.$$

ове пакъ разломке преокретајући слѣдув (по § 16.)

$$\left.\begin{aligned} cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{1 \mp tang\,\alpha\, tang\,\beta}{tang\,\alpha \pm tang\,\beta} \\ tang(\alpha \pm \beta) &= \frac{cot\,\alpha\, cot\,\beta \mp 1}{cot\,\beta \pm cot\,\alpha} \end{aligned}\right\} \ldots . (VI.$$

Остале функціе сбира и разлике два угла врло се редко употреблюю, зато се съ ньіовымъ опредѣльиванѣмъ нећемо задржавати, но определеюћи іошъ еданъ за рачунанѣ функція потребанъ образацъ, приступит'ћемо одма другимъ сложенымъ функціяма.

Поставляюћи у прво одъ горньи уравненія подъ V. $\angle\ \alpha = 45^0$, добыямо

$$tang\,(45^0 \pm \beta) = \frac{tang\ 45^0 \pm tang\ \beta}{1 \mp tang\ 45^0\ tang\ \beta}$$, будући е пакъ — изъ лако увићавны, геометричны узрока — $tang\ 45^0 = 1$, то е

$$tang\,(45^0 \pm \beta) = \frac{1 \pm tang\ \beta}{1 \mp tang\ \beta} \ldots \text{(VII}$$

II. Сбиръ и разлика едноимены функція два угла.

§. 23.

Сабираюћи и одузимаюћи уравненія, I. и III. а II. и IV. добыямо

$$\left.\begin{aligned} sin\ (\alpha + \beta) + sin\ (\alpha - \beta) &= 2\ sin\ \alpha\ cos\ \beta\,, \\ sin\ (\alpha + \beta) - sin\ (\alpha - \beta) &= 2\ cos\ \alpha\ sin\ \beta\,, \\ cos\ (\alpha + \beta) + cos\ (\alpha - \beta) &= 2\ cos\ \alpha\ cos\ \beta\,; \\ cos\ (\alpha + \beta) - cos\ (\alpha - \beta) &= -\ sin\ \alpha\ sin\ \beta\,; \end{aligned}\right\} .\,(v$$

поставляюћи пакъ у ове изразе $\alpha + \beta = \varphi$, а $\alpha - \beta = \psi$, дакле $\alpha = \frac{1}{2}\,(\varphi + \psi)$, $\beta = \frac{1}{2}\,(\varphi - \psi)$, слѣдуе

$$\left.\begin{aligned} sin\,\varphi + sin\,\psi &= 2\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi + \psi)\ cos\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi - \psi) \\ sin\,\varphi - sin\,\psi &= 2\,cos\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi + \psi)\ sin\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi - \psi) \\ cos\,\varphi + cos\,\psi &= 2\,cos\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi + \psi)\ cos\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi - \psi) \\ cos\,\varphi - cos\,\psi &= 2\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi + \psi)\ sin\ \tfrac{1}{2}\,(\psi - \varphi) \end{aligned}\right\} ..\,(1.$$

§. 24.

Обзиромъ на §. 15. (обр. 4. и 6.) имамо

$$tang\,\varphi \pm tang\,\psi = \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} \pm \frac{sin\,\psi}{cos\,\psi}, \text{ а}$$

$$cot\,\varphi \pm cot\,\psi = \frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi} \pm \frac{cos\,\psi}{sin\,\psi},$$ сабиранѣ пакъ у другимъ частима свршуюћи

$$tang\,\varphi \pm tang\,\psi = \frac{sin\,\varphi\,cos\,\psi \pm cos\,\varphi\,sin\,\psi}{cos\,\varphi\,cos\,\psi} \text{ и}$$

$$cot\,\varphi \pm cot\,\psi = \frac{sin\,\psi\,cos\,\varphi \pm cos\,\psi\,sin\,\varphi}{sin\,\varphi\,sin\,\psi}, \text{ т. е.}$$

$$\left.\begin{aligned} tang\,\varphi \pm tang\,\psi &= \frac{sin\,(\varphi \pm \psi)}{cos\,\varphi\,cos\,\psi} \\ \text{а} \quad cot\,\varphi \pm cot\,\psi &= \frac{sin\,(\psi \pm \varphi)}{sin\,\varphi\,sin\,\psi)} \end{aligned}\right\} \ldots (2.$$

§. 25.

Деобомъ сваке равности подъ (1. — §. 23. — чрезъ остале три, добыямо дванаестъ врло потребны образаца, одъ кои наводимо само оне, кои постаю деобомъ прве чрезъ оне друге, оставляюћи налазенѣ осталы почетнику на упражненіе.

$$\frac{sin\,\varphi + sin\,\psi}{sin\,\varphi - sin\,\psi} = tang\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi - \psi)\;cot\,\tfrac{1}{2}\,(\varphi - \psi)$$

или место котангенте узимаюћи по §. 16. тангенту

$$\frac{sin\,\varphi + sin\,\psi}{sin\,\varphi - sin\,\psi} = \frac{tang\,\frac{1}{2}\,(\varphi + \psi)}{tang\,\frac{1}{2}\,(\varphi - \psi)} \ldots (3.$$

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \;\; . \;.\;.\;.\; (4.$$

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{\sin\frac{1}{2}(\psi - \varphi)}$$

$$= \frac{\cos\left[-\frac{1}{2}(\psi - \varphi)\right]}{\sin\frac{1}{2}(\psi - \varphi)}$$

или због $\cos\left[-\frac{1}{2}(\psi - \varphi)\right] = \cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$:

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = \cot\tfrac{1}{2}(\psi - \varphi) \;\; . \;.\;.\;.\; (5.$$

У ова три §§. определѣни образци есу у практики одъ найвеће ползе по томе, што се ньіовомъ помоћи логаритми и онде могу употребити, гди то иначе ніе могуће. Мы ћемо се о томе довольно уверити при разрешеню триуглова.

III. Функціе двогубогъ угла и полуугла

§. 26.

Поставляюћи у образце синуса, косинуса, тангенте и котангенте сбира два угла (§. 19. и 22.) $\angle \beta = \alpha$, слѣдуе

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \;\; . \;.\;.\;.\;.\;.\; (1.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \;\; . \;.\;.\; (2.$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha} \\ &= \frac{2\cot\alpha}{\cot^2\alpha - 1} \end{aligned}\right\} \;\; . \;.\;.\;.\;.\;.\; (3.$$

$$\left.\begin{aligned} cot\ 2\alpha &= \frac{1 - tang^2\alpha}{2\,tang\,\alpha} \\ &= \frac{cot^2\alpha - 1}{2\,cot\,\alpha} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4.$$

У другомъ пакъ одъ овы уравненія найпре косинусъ синусомъ а потомъ обратно овай оньмъ заменюю̂ћи добыямо

$$\left.\begin{aligned} &cos\ 2\alpha = 1 - 2\,sin^2\alpha \\ \text{и}\quad &cos\ 2\alpha = 2\,cos^2\alpha - 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5.$$

два образца, у коима є, као што видимо, косинусъ двогубогъ угла израженъ єданпутъ самымъ синусомъ, а другій путъ самымъ косинусомъ простога угла.

§. 27.

Оределююћи изъ предходећа два уравненія $sin\,\alpha$ и $cos\,\alpha$, и нађене ньіове вредности потомъ деобомъ саюжаваюћи, добыямо редомъ

$$\left.\begin{aligned} sin\ \alpha &= \sqrt{\frac{1 - cos\ 2\alpha}{2}} \\ cos\ \alpha &= \sqrt{\frac{1 + cos\ 2\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6.$$

$$\left.\begin{aligned} tang\,\alpha &= \sqrt{\frac{1 - cos\ 2\alpha}{1 + cos\ 2\alpha}} \\ cot\ \alpha &= \sqrt{\frac{1 + cos\ 2\alpha}{1 - cos\ 2\alpha}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7.$$

Разрешаваюћи пакъ прво уравненіє подъ (3 у смотреню $tang\ \alpha$ налазимо іошъ

$$tang\ \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + tang^2\,2\alpha)}}{tang\ 2\alpha} \ldots (8.$$

§. 28.

Изъ уравненія подъ (7. слѣдує далѣ

$$\left.\begin{array}{ll} & \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan g^2 \alpha}{1 + \tan g^2 \alpha} \\ \text{и} & \cos 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha + 1} \end{array}\right\} \ldots\ldots (9.$$

Найпосле збогъ $\tan g\, 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ имамо

$$\sin 2\alpha = \tan g\, 2\alpha . \cos 2\alpha.$$

Заменююћи у овомъ изразу $\tan g\, 2\alpha$ съ нѣнымъ вредностима подъ (3., $\cos 2\alpha$ пакъ са предходећима подае се

$$\left.\begin{array}{ll} & \sin 2\alpha = \frac{2 \tan g\, \alpha}{1 + \tan g^2 \alpha} \\ \text{и} & \sin 2\alpha = \frac{2 \cot 2\alpha}{\cot^2 \alpha + 1} \end{array}\right\} \ldots\ldots (10.$$

§. 29.

Поставляюћи сада у уравненія подъ (6. и (7. $2\alpha = \beta$, дакле $\alpha = \frac{\beta}{2}$, слѣдує

$$\left.\begin{array}{l} \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos \beta)} \\ \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos \beta)} \end{array}\right\} \ldots\ldots (11.$$

$$\left.\begin{aligned} tang\,\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} \\ \cot\,\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (12.$$

Истымъ начиномъ добыямо изъ уравненія подъ (9. и (10., (3. и (4.

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{1-tang^2\frac{1}{2}\beta}{1+tang^2\frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{\cot^2\frac{1}{2}\beta-1}{\cot^2\frac{1}{2}\beta+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13.$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{2\,tang\frac{1}{2}\beta}{1+tang\frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{2\cot\frac{1}{2}\beta}{1+\cot^2\frac{1}{2}\beta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14.$$

$$\left.\begin{aligned} tang\,\beta &= \frac{2\,tang\frac{1}{2}\beta}{1-tang^2\frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{2\,\cot^2\frac{1}{2}\beta}{\cot^2\frac{1}{2}\beta-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (15.$$

$$\left.\begin{aligned} \cot\beta &= \frac{1-tang^2\frac{1}{2}\beta}{2\,tang\frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{\cot^2\frac{1}{2}\beta-1}{2\,\cot\frac{1}{2}\beta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16.$$

§. 30.

Броителя и именителя подкорены разломака у изразима подъ (12. еданпутъ съ ($1 - \cos\beta$), другій путъ пакъ съ ($1 + \cos\beta$) множећи, и потомъ ($1 - \cos^2\beta$) по §. 14. синусомъ заменююћи добыямо іошъ

$$tang\,\frac{\beta}{2} = \frac{1 - cos\,\beta}{sin\,\beta} = \frac{sin\,\beta}{1 + cos\,\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (17.$$

$$cot\,\frac{\beta}{2} = \frac{sin\,\beta}{1 - cos\,\beta} = \frac{1 + cos\,\beta}{sin\,\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (18.$$

Поставляюћи пакъ у образацъ подъ (8. $2\alpha = \beta$, слѣдуе

$$tang\,\frac{\beta}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + tang^2\beta)}}{tang\,\beta} \quad \ldots (19.$$

§. 31.

Замењуюћи у изразима подъ (11. $cos\,\beta$ по §. 14. синусомъ, налазимо

$$sin\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{(1 - sin^2\,\beta)}}{2}} \quad \text{и}$$

$$cos\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{(1 - sin^2\,\beta)}}{2}} \; ; \text{ броителѣ}$$

пакъ овы корена, т. е. $\sqrt{\left[1 \mp \sqrt{(1 - sin^2\,\beta)}\right]}$ познатымъ начиномъ — као сурдске корене — опредѣлюючи подае се

$$\left.\begin{aligned} sin\,\frac{\beta}{2} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + sin\,\beta)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - sin\,\beta)} \\ cos\,\frac{\beta}{2} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + sin\,\beta)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - sin\,\beta)} \end{aligned}\right\} . (20.$$

Найпосле, првый одъ ова два израза другимъ делећи

$$tang\,\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{(1+sin\,\beta)}-\sqrt{(1-sin\,\beta)}}{\sqrt{(1+sin\,\beta)}+\sqrt{(1-sin\,\beta)}}\,..\,(21.$$

B) Преобраћанѣ функція и ньіово броєвно определьиванѣ — рачунанѣ —.

I. *Преобраћанѣ функція.*

§. 32.

Сви до яко изнађени, међусобно одношенѣ гоніометричны функція показуюћи образци тичу се, као што знамо, полупречника 1. Почемъ нама пакъ исти образци у практики више пута требаю и у односу на другій некій, условлѣный полупречникъ; то є нуждно показати, како се изъ ньи добыяю истоветни образци за свакій у обште полупречникъ r.

У име тога напишимо изъ врха угла α (сл. 7.) међу нѣгове краке два лука AB и ab съ разнымъ полупречницима $AC=r$ и $aC=\varrho$, и построймо потомъ истога угла функціє за оба ова полупречника. То учинивши подає се сл. 7.

1.) Збогъ подобія триуглова BCD и bdC,
$BD : bd = DC : dC = BC : bC$;

2.) изъ подобія пакъ триуглова GAC и gaC,
$AG : ag = GC : gC = AC : aC$; найпосле

3.) изъ подобія триуглова EHC и ehC,
$EH : eh = HC : hC = EC : eC$.

То ће рећи

$$sin\,\alpha_r : sin\,\alpha_\varrho = cos\,\alpha_r : cos\,\alpha_\varrho = r : \varrho\,,$$

$$tang\,\alpha_r : tang\,\alpha_\varrho = sec\,\alpha_r : sec\,\alpha_\varrho = r : \varrho\,,$$

$cot\,\alpha_r : cot\,\alpha_\varrho = cosec\,\alpha_r : cosec\,\alpha_\varrho = r : \varrho$: при чему функціяма придата писма r и ϱ показую комъ полупречнику исте функціє принадлеже.

Изъ овы сразмерносте видимо, да є **одношенѣ єдноимены функція єдногъ истогъ угла за разне полупречнике равно одношенію исты полупречника** тако, да ако є полупречникъ r н. п. два пута већій одъ полупречника ϱ, свака функція угла α за полупречникъ r такођеръ двапутъ већа есть одъ єдноимене функціє за полупречникъ ϱ.

§. 33.

Постављаюћи садъ у горнѣ сразмерности полупречникъ $\varrho = 1$, и разликуюћи єдноимене функціє међу собомъ условлѣнымъ у §. 11. начиномъ, налазимо, єдне чрезъ друге определююћи,

$Sin\,\alpha = r.\,sin\,\alpha$, $Cos\,\alpha = r.\,cos\,\alpha$, $Tang\,\alpha = r.\,tang\,\alpha$, $Sec\,\alpha = r.\,sec\,\alpha$, $Cot\,\alpha = r.\,cot\,\alpha$, $Cosec\,\alpha = r.\,cosec\,\alpha$; на противъ пакъ

$$sin\,\alpha = \frac{Sin\,\alpha}{r},\ cos\,\alpha = \frac{Cos\,\alpha}{r},\ tang\,\alpha = \frac{Tang\,\alpha}{r},$$

$$sec\,\alpha = \frac{Sec\,\alpha}{r},\ cot\,\alpha = \frac{Cot\,\alpha}{r},\ cosec\,\alpha = \frac{Cosec\,\alpha}{r}$$

У обште, означуюћи съ $f\,(\alpha)$ сваку функцію угла α за полупречникъ **1**, съ $F\,(\alpha)$ пакъ єдноимену нѣгову функцію за полупречникъ r, имамо

$F(\alpha) = r \cdot f(\alpha)$, а $f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{r}$; то ће рећи:

Функціе некогъ угла α за полупречникъ 1 преобраћаю се у едноимене функціе за другій некій полупречникъ r, ако се съ овымъ полупречникомъ помложе; функціе напротивъ за полупречникъ r преводе се у едноимене функціе за полупречникъ 1, ако се съ истымъ полупречникомъ r разделе.

§. 34.

Да бы ово правило примерима већма обяснили, то преобратимо изнађене за полупречникъ 1 образце 1.) $\sin\alpha = \sqrt{(1 - \cos^2\alpha)}$, 2.) $\tan g\,\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$ и 3.) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$, у едноимене образце угла α за полупречникъ r.

По горнѣму е

$$\sin\alpha = \frac{Sin\,\alpha}{r},\ \cos\alpha = \frac{Cos\,\alpha}{r},\ \tan g\,\alpha = \frac{Tang\,\alpha}{r},\ \cot\alpha = \frac{Cot\,\alpha}{r},\ \cos(\alpha \pm \beta) = \frac{Cos\,(\alpha \pm \beta)}{r},\ \cos\beta = \frac{Cos\,\beta}{r}$$

$\sin\beta = \frac{Sin\,\beta}{r}$; поставляюћи дакле у горнѣ изразе ове вредности место функція за полупречникъ 1, слѣдуе

$$1.)\ \frac{Sin\,\alpha}{r} = \sqrt{\left(1 - \frac{Cos^2\alpha}{r^2}\right)} = \frac{\sqrt{(r^2 - Cos^2\alpha)}}{r}$$

и одтуда

$$Sin\,\alpha = \sqrt{(r^2 - Cos^2\alpha)},$$

$$2.)\ \frac{Tang\ \alpha}{r} = 1 : \frac{Cot\ \alpha}{r} = \frac{r}{Cot\ \alpha}$$, дакле

$$Tang\ \alpha = \frac{r}{Cot\ \alpha}$$; найпосле

$$3.)\ \frac{Cos\ (\alpha \pm \beta)}{r} = \frac{Cos\ \alpha}{r} \cdot \frac{Cos\ \beta}{r} \mp \frac{Sin\ \alpha}{r} \cdot \frac{Sin\ \beta}{r} =$$

$$= \frac{Cos \alpha\ Cos \beta \mp Sin\ \alpha\ Sin\ \beta}{r^2}$$, одатле пакъ

$$Cos\ (\alpha \pm \beta) = \frac{Cos\ \alpha\ Cos \beta \mp Sin\ \alpha\ Sin \beta}{r}$$

II. Рачунанѣ функція за полупречникъ 1.

§. 35.

Велика полза, кою иначе подаю гоніометричне функціє у практики, сасвимъ бы се изгубила, да іи мы при свакомъ употреблѣню найпре морамо израчунати. Зато су исте функціє одавна вeћъ израчуване и за употреблѣнѣ у удобне таблице сложене тако, да нама садъ само іошъ остає показати, коимъ се начиномъ могу определити и како се употребляваю.

Прво урадит' ћемо сада, и у томъ обзиру имамо приметити, да се гоніометричне функціє найболѣ налазе посредствомъ безконачны редова. Почемъ пакъ мы рачуна съ таковымъ редовима — као предметъ више аналитике, коя ће текъ слѣдовати — іошъ незнамо, то смо принуђени служити се за исту цѣль другимъ, такођеръ обичнымъ, но нешто теготніимъ начиномъ, при комъ употребляваmo само нека доякошня наша геометрична и гоніометрична докученя. У осталомъ рачунали мы поменуте функціє коимъ годъ начиномъ, по смислу §. 13. ніє потребно определити выше, него само функціє прве четврти. Будући є пакъ по §. 7. свакимъ синусомъ определѣнъ свагда и єданъ косинусъ; и будући се по §. 18. све остале функціє синусомъ и косинусомъ лако могу изразити: то є найпосле довольно, ако изнађемо само синусе поменуте четврти. До овы, служећи се, као што горе рекосмо, само доякошньимъ нашимъ докученяма, долазимо найпростіє слѣдуюћимъ путемъ.

§. 36.

По §. є 5. $sin\ \varphi = \frac{1}{2}\ chord.\ 2\varphi$; изъ геометріє пакъ знамо, да є за полупречникъ 1

а.) страна правилногъ триугла или $chord.\ 60^0 = 1$. (полупречнику);

б.) страна правилногъ триугла т. є. $chord.\ 120^0 = \sqrt{3}$;

в.) страна квадрата, то ће рећи $chord.\ 90^0 = \sqrt{2}$; найпосле

г.) страна правилногъ 10^0 угла или $chord.\ 36^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; дакле є на основу горнѣгъ образца

$$sin.\ 30^0 = cos.\ 60^0 = \tfrac{1}{2}\ chord.\ 60^0$$
$$= \tfrac{1}{2} = 5^{\cdot},$$
$$sin.\ 60^0 = cos.\ 30^0 = \tfrac{1}{2}\ chord.\ 120^0$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = {}^{\cdot}8660254$$
$$sin.\ 45^0 = cos\ 45^0 = \tfrac{1}{2}\ chord.\ 90^0$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = {}^{\cdot}7071068$$
$$sin.\ 18^0 = cos.\ 72^0 = \tfrac{1}{2}\ chord.\ 36^0$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = {}^{\cdot}3090170$$

§. 37.

Поставляюћи садъ у образацъ I. §-а 19. и у образацъ III. §. 20., $\alpha = 60^0$, а $\beta = 45^0$ добыямо по првомъ

$sin\ 105^0$, или збогъ $sin\ (\pi - \varphi) = sin\ \varphi$ (§. 13),

$$sin\ 75^0 = cos\ 15^0 = sin\ 60^0\ cos\ 45^0 + cos\ 60^0\ sin\ 45^0$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.(\sqrt{3}+1) = {}^{\cdot}9659257,$$

а по другомъ

$$sin\ 15^0 = cos\ 75^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1) = {}^{\cdot}2588189$$

Раменюючи пакъ у истымъ образцыма α съ 18^0, а β съ 15^0, слѣдуе

збогъ $cos\ 18^0 = \sqrt{(1 - sin^2\ 18^0)} =$

$$\sqrt{\left\{1 - \left[\tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\right]\right\}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},$$

изъ првога

$$sin\ 33^0 = cos\ 57^0 = \frac{\sqrt{2}}{16}\,(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{3}) +$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{8}\,(-1+\sqrt{3})\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = {}^{\cdot}5446390$$

а изъ другога

$$sin\ 3^0 = cos\ 87^0 = \frac{\sqrt{2}}{16}\,(-1+\sqrt{5})\,(1+\sqrt{3})$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(-1+\sqrt{3})\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = {}^{\cdot}0523360$$

§. 38.

Найпосле, заменюющи іощъ у првомъ образцу §а 31. подъ 20, т. е. у

$$\sin\frac{\beta}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin\beta)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin\beta)},$$

редомъ β съ 3^0, $\frac{3^0}{2}$, $\frac{3^0}{4} = 45'$, $\frac{3^0}{8} = \frac{45'}{2}$, $\frac{3^0}{16} = \frac{45'}{4}$ и т. д. до $\frac{45'}{64}$: добыямо после две последнѣ замене

$$\sin\frac{45'}{32} = \text{·}0002090, \text{ и}$$
$$\sin\frac{45'}{64} = \text{·}0002045$$

Сравнюћи ова два синуса међу собомъ видимо, да є последнѣй половина предходећега, и одтуда основано заключуємо, да є одношенѣ овако **малы синуса равно одношеню нѣіовы лукова.** Ползуюћи се овымъ докученѣмъ налазимо

$\sin\frac{45'}{64} : \sin 1' = \frac{45'}{64} : 1$, и одатле, место

$\sin\frac{45'}{64}$ горню вредность поставляюћи,

$$\sin 1' = \text{·}0002908$$

§. 39.

Дошавши овымъ начиномъ єданпутъ до синуса єдногъ минута, определюємо затымъ посредствомъ истога найпре све манѣ синусе, а после помоћу іошъ неки одъ овы и све остале веће.

Прве добыямо врло просто поставляюћи ій по горнѣмъ докученю, према синусу єднога минута у онако исто одношенѣ, као дотичный лукъ према єдномъ минуту или 60″. Тако н. п. имамо по томе за синусъ одъ 24″ сразмерность

$sin\ 24'' : sin\ 60'' = 24 : 60$, или, место $sin\ 60'' = sin\ 1'$ нађену нѣгову вредность узимаюћи,

$sin\ 24'' : \text{˙}0002908 = 24 : 60$; изъ чега слѣдуе

$$sin\ 24'' = \frac{24}{60} \times \text{˙}0002908 = \text{˙}0001163$$

О овомъ рачунаню маньи синуса иоле размишляваюћи увиђамо, да е довольно определити показанымъ начиномъ само синусе одъ 31″, 37″, 41″, 47″, 53″, 59″, и ма кои іошъ еданъ маньій, еръ се остали, на основу оногъ истогъ докученя, лакше добыяю мложенѣмъ и деобомъ последнѣга, а после опетъ мложенѣмъ и деобомъ тымъ начиномъ изнађены, съ некимъ, лако докучльивымъ броевима. Тако н. ъ. определююћи осимъ поменуты шестъ синуса само іошъ синусъ одъ 6″ — кои врло лако налазимо деобомъ синуса одъ 1′ броемъ 10 —, добыямо изъ истога деобомъ съ 2 и 3 синусе одъ 3″ и 2″; мложенѣмъ пакъ съ 2 и 3 синусе одъ 12″ и 18″. Мложенѣмъ затымъ синуса одъ 2″ съ 2, 5, 7 и другимъ броевима, слѣдую синуси одъ 4″, 10″, 14″ и други; мложенѣмъ пакъ синуса одъ 3″ съ 3, или деобомъ синуса одъ 18″ съ 2, подае се синусъ одъ 9″, и подобнымъ безъ сумнѣ лакимъ начиномъ и сви остали.

§. 40.

Веће синусе налазимо посредствомъ синуса 1′ и неки маньи мож'да найудобніе слѣдуюћимъ начиномъ.

Изъ првогъ образца подъ (*v*. у §. 23. слѣдуе

$$sin\ (\alpha + \beta) = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ (\alpha - \beta)$$

а по замени $cos\ \beta$ нѣговомъ подаюћомъ се вредности изъ првогъ образца подъ (11. у §. 29. $\cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}$,

$$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha - 4\sin\alpha\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin(\alpha-\beta),$$ или, увиђавномъ премeномъ десне части,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \left[\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)\right] - 4\sin\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}$$

Замeнююћи садъ у овомъ, тако названомъ Деламбровомъ — *Delambre* — образцу, β съ $1''$, α пакъ редомъ съ $1'$, $1'\,1''$, $1'\,2''$, $1'\,3''$ и т. д. добыямо све веће синусе и косинусе одъ секунде до секунде, као што изъ слѣдуюћи неколико примера видити можемо.

$$\sin 1'\,1'' = \cos 89^0\,58'\,59'' = \sin 1' + (\sin 1' - \sin 59'') - 4\sin 1'\sin^2\frac{1''}{2}$$

$$\sin 1'\,2'' = \cos 89^0\,58'\,58'' = \sin 1'\,1'' + (\sin 1'\,1'' - \sin 1') - 4\sin 1'\,1''\sin^2\frac{1''}{2}$$

$$\sin 1'\,3'' = \cos 89^0\,58'\,57'' = \sin 1'\,2'' + (\sin 1'\,2'' - \sin 1'\,1'') - 4\sin 1'\,2''\sin^2\frac{1''}{2}$$

. . . .

$$\sin 1'\,59'' = \cos 89^0\,58'\,1'' = \sin 1'\,58'' + (\sin 1'\,58' - \sin 1'\,57'') - 4\sin 1'\,58''\sin^2\frac{1''}{2}$$

$$\sin 2' = \cos 89^0\,58' = \sin 1'\,59'' + (\sin 1'\,59'' - \sin 1'\,58'') - 4\sin 1'\,59''\sin^2\frac{1''}{2}$$

$$\sin 1' 2'' = \cos 89^0 57' 59'' = \sin 2' + (\sin 2' - \sin 1' 59') - 4 \sin 2' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

. . . .

$$\sin 59' 59'' = \cos 89^0 0' 1'' = \sin 59' 58'' + (\sin 59' 58'' - \sin 59' 57'') - 4 \sin 59' 58'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

$$\sin 1^0 = \cos 89^0 = \sin 59' 59'' + (\sin 58' 59'' - \sin 59' 58'') - 4 \sin 59' 59'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

. . . .

. . . .

$$\sin 15^0 = \cos 75^0 = \sin 14^0 59' 59'' + (\sin 14^0 59' 59'' - \sin 14^0 59' 58'') - 4 \sin 14^0 59' 59'' \sin^2 \frac{1''}{2}$$

. . . .

. . . .

§. 41.

Обичне таблице гоніометричны функція садрже ове само за лукове одъ 10 до 10', минута до минута, или найвише одъ 10 до 10''; остале пакъ определюю се при таковымъ таблицама по потреби особитымъ начиномъ, съ коимъ ћемо се мы упознати на надлежномъ месту поздніе.

Рачунаюћи синусе за такове таблице 1.) само за лукове одъ минута до минута, валя у истомъ деламбровомъ образцу заменити β съ 1', α пакъ редомъ съ 1', 2', 3', и т. д. чимъ добыямо

$$\sin 2' = \cos 89^0\, 58' = \sin 1' + (\sin 1' - \sin 0') - \\ - 4 \sin 1' \sin^2 30''$$

$$\sin 3' = \cos 89^0\, 57' = \sin 2' + (\sin 2' - \sin 1') - \\ - 4 \sin 2' \sin^2 30''$$

$$\sin 4' = \cos 89^0\, 56' = \sin 3' + (\sin 3' - \sin 2') - \\ - 4 \sin 3' \sin^2 30''$$

. . . .

Рачунаюћи ій пакъ 2.) само одъ 10 до 10′, треба найпре овымъ начиномъ определити синусъ одъ 10′, а потомъ у истомъ образцу β заменити съ 10′, а α редомъ съ 10′, 20′, 30′, и т. д. При томъ рачуну имамо

$$\sin 20' = \cos 89^0\, 40' = \sin 10' + (\sin 10' - \sin 0) - \\ - 4 \sin 10' \sin^2 5'$$

$$\sin 30' = \cos 89^0\, 30' = \sin 20' + (\sin 20' - \sin 10') - \\ - 4 \sin 20' \sin^2 5'$$

. . . .

Найпосле 3.) определююћи синусе одъ 10 до 10″, морамо β заменити съ 10″, α пакъ редомъ съ 10″, 20″, 30″, и т. д., чимъ находимо

$$\sin 20'' = \cos 89^0\, 59'\, 40'' = \sin 10'' + (\sin 20'' - \\ - \sin 0'') - 4 \sin 10'' \sin^2 5''$$

$$\sin 30'' = \cos 89^0\, 59'\, 30'' = \sin 20'' + (\sin 20'' - \\ - \sin 10'') - 4 \sin 20'' \sin^2 5''$$

. . . .

$$\sin 1'\, 10'' = \cos 89^0\, 58'\, 50'' = \sin 1' + (\sin 1' - \\ - \sin 50'') - 4 \sin 1' \sin^2 5''$$

. . . .

$$\sin 2^0\, 3'\, 40'' = \cos 87^0\, 56'\, 20'' = \sin 2^0\, 3'\, 30'' +$$

$+ (\sin 2^\circ\, 3'\, 30'' - \sin 2^\circ\, 3'\, 20'') - 4 \sin 2^\circ\, 3'\, 30'' \sin^2 5''$

. . . .

§. 42.

Синусе лукова веђи одъ 60° и косинусе одъ тога мањи лукова определюемо лакше посредствомъ образца

$$\sin (60^\circ + \beta) = \sin (60 - \beta) + \sin \beta$$

заменюючи у истомъ β съ другимъ мањимъ углима, $\sin \beta$ дакле већъ израчунанимъ синусима исты углова. Тако н. п. налазимо поставляюћи β редомъ $= 1', 2', \ldots 1^\circ\, 10', 1^\circ\, 20', \ldots 15^\circ\, 3'\, 10'', 15^\circ\, 3'\, 20'', \ldots$

$$\sin 60^\circ\, 1' = \cos 29^\circ\, 59' = \sin 60^\circ + \sin 1'$$

$$\sin 60^\circ\, 2' = \cos 29^\circ\, 58' = \sin 60^\circ\, 1' + \sin 2'$$

. . . .

$$\sin 61^\circ\, 10' = \cos 28^\circ\, 50' = \sin 58^\circ\, 50' + \sin 1^\circ\, 10'$$

$$\sin 61^\circ\, 20' = \cos 28^\circ\, 40' = \sin 58^\circ\, 40' + \sin 1^\circ\, 20'$$

. . . .

$$\sin 75^\circ\, 3'\, 10'' = \cos 14^\circ\, 56'\, 50'' = \sin 44^\circ\, 56'\, 50'' + \\ + \sin 15^\circ\, 3'\, 10''$$

$$\sin 75^\circ\, 3'\, 20'' = \cos 14^\circ\, 56'\, 40'' = \sin 44^\circ\, 56'\, 40'' + \\ + \sin 15^\circ\, 3'\, 20''$$

. . . .

. . . .

Употребл̂ный при овоме образацъ добыямо изъ другогъ образца подъ (v у §. 23. поставляюћи у истомъ $\alpha = 60^\circ$; чимъ слѣдує

$$\sin (60^\circ + \beta) = \sin (60^\circ - \beta) = 2 \cos 60^\circ \sin \beta,$$

или збогъ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (§. 36. г.)

$$\sin(60^o + \beta) - \sin(60^o - \beta) = \sin\beta;$$ и одтуда

$$\sin(60^o + \beta) = \sin(60^o - \beta) + \sin\beta$$

§. 43.

Израчунавши овымъ безъ сумнѣ врло лакимъ начиномъ, све синусе и косинусе прве четврти, определюемо затымъ посредствомъ нъи тангенте, служећи се при томъ найболѣ познатымъ већъ образцемъ $tang\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, кои се логаритмички рачунати може.

Съ тангентама, као што є лако увидити, добыямо уєдно и котангенте, єръ є по §. 13. $tang\ \alpha = cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, т. є. свака тангента равна єдной котангенти. Остале пакъ функціє, изъ узрока, што се обично неупотреблюю, нерачунаю се.

§. 44.

Тангенте лукова већи одъ 45^o, израчунавши найпре све манѣ, добыямо лакше посредствомъ овы маньи замѣнюючи у образцу

$$tang\,(45^o + \beta) = tang\,(45^o - \beta) - 2\ tang\ 2\ \beta)$$

лукъ β съ маньимъ луцима одъ 45^o.

Образацъ овай налазимо слѣдуюћимъ начиномъ.

По §. є 23. обр. подъ VII

$$tang\,(45^o + \beta) = \frac{1 + tang\,\beta}{1 - tang\,\beta},$$ а

$$tang\ (45^0 - \beta) = \frac{1 - tang\ \beta}{1 + tang\ \beta}$$; дакле

$$tang\ (45^0 + \beta) - tang\ (45^0 - \beta) = \frac{4.\ tang\ \beta}{1 - tang^2\ \beta} =$$

$$= 2.\frac{2\ tang\ \beta}{1 - tang^2\ \beta}$$, или. збогъ $\frac{2\ tang\ \beta}{1 - tang^2\ \beta} = tang\ 2\ \beta$ (§. 29.)

$$tang\ (45^0 + \beta) - tang\ (45^0 - \beta) = 2\ tang\ 2\ \beta$$

и одтуда, увиђавномъ пременомъ, горньій образацъ

$$tang\ (45^0 + \beta) = tang\ (45^0 - \beta) - 2\ tang\ 2\ \beta$$

§. 45.

При овомъ рачунаню функція употреблює се као што смо видили, свакій синусъ за определьиванѣ слѣдуюћегъ веһегъ, и сви они потомъ за налазенѣ осталы потребны функція. Лако є дакле увидити, да погрешка, коя бы се случайно учинила при єдномъ одъ ньи, прелази не само на све веће синусе, него и на све посредствомъ овы и нѣга изнађене друге функціє; те да є тога ради необходимо нуждно, да се при истомъ рачунаню синуса чешће о ньіовой точности уверавамо. У име тога имамо одъ Айлера — *Euler* — слѣдуюћій врло удобанъ образацъ

$$sin\ \beta = sin\ (36^0 + \beta) - sin\ (36^0 - \beta) + sin\ (72^0 - \beta) - \\ - sin\ (72^0 + \beta)$$

Употреблѣнѣ овога образца увиђавно є по себи, и састои се у простой замени угла β съ оныма углима, кои синусе у горнѣмъ смислу испытати желимо ; добыямо га пакъ слѣдуюћимъ начиномъ.

По другомъ образцу §. 23. подъ (*v.*, заменююћи у истомъ угалъ α еданпутъ съ 36^0, другій путъ пакъ 72^0, добыямо збогъ $\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, а $\cos 72^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (*)

$$\sin(36^0+\beta) - \sin(36^0-\beta) = \sin\beta\,\frac{1+\sqrt{5}}{1}, \text{ а}$$

$$\sin(72^0+\beta) - \sin(72^0-\beta) = \sin\beta\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

ова пакъ уравненія еданпутъ сабираюћи, а другій путъ друго одъ првога одузимаюћи слѣдуе

$$\sin(36^0+\beta) - \sin(36^0-\beta) + \sin(72^0-\beta) - \\ - \sin(72^0+\beta) = \sin\beta,$$

поменутый образацъ.

(*) Да е $\cos 72^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ знамо изъ §. 36.; да е пакъ $\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ дознаемо айудобніе образцемъ $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ (§. 27. подъ 6.), поставляюћи у истомъ $\alpha = 36^0$, по чему слѣдуе $\cos 36^0 = \sqrt{\frac{1+\cos 72^0}{2}}$ или, $\cos 72^0$ горньомъ вредности заменююћи, $\cos 36^0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)}$ и найпосле іошъ $\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}\right)}$ као сурдскій — $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$ — разрешуюћи, $\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Г.) Построй и употреблѣнѣ тригонометричны таблица; и преобраћанѣ лучне мере у праву и обратно.

I. Построй и употреблѣнѣ тригонометричны таблица.

§. 46.

Сматранѣмъ веће части гоніометричны образаца морамо увидити, да се рачунъ при ньіовомъ употреблѣню, употреблѣнѣмъ логаритама дотичны функція место ньіовы броєвны вредностій, веома олакшава. Тога ради употреблюю се обично не саме функціє, него ньини логаритми, кои су на тай конацъ већъ и одавна израчунѣни и у удобне таблице сложени. Но будући су, као што знамо, синуси прве четврти за полупречникъ 1, чисти разломци; значице дакле ньіовы логаритама одрицателне и одтудъ рачунъ съ таковымъ логаритмима неудобанъ: то су такове таблице обично израчунѣне за полупречникъ 10^{10}, чимъ значице логаритама поменуты, у 10 деловны места определѣны функція постаю положителне.

Найпосле іошъ валя приметити, да се гоніометричне функціє за разлику одъ ньіовы логаритама називаю **природнымъ**, ови пакъ **умѣтнымъ** или **артистичнымъ** функціяма. Тако є н. п. по §. 36. $\frac{1}{2} = 0\text{·}5$ наравный, по овоме пакъ $log\ 0\text{·}5$ умѣтный синусъ лука одъ 36^0.

§. 47.

Построй и употреблѣнѣ тригонометричны таблица учи се найболѣ изъ овы самы, зато ћемо овде само да наведемо оне гоніометричне истине, на коима су такове таблице основане. Те єсу

1.) Функціє прве четврти расту, кофункціє на противъ умаляваю се увеђаванѣмъ лука.

2.) Синуси и тангенте врло малы лукова стоє съ овыма у геометричной, ньіови дакле логаритми съ логаритмима лукова у аритметичной сразмерности, тако да, ако су φ и ψ два врло мала лука, имамо

$$\sin\varphi : \sin\psi = tang\,\varphi : tang\,\psi = arc\,\varphi : arc\,\psi\text{, а}$$

$$\log\sin\varphi \div \log\sin\psi = \log tang\,\varphi \div \log tang\,\psi =$$
$$= \log arc\,\varphi \div \log arc\,\psi$$

3.) Разлике веђи, међу собомъ найдалѣ єднымъ минутомъ разликуюђи се лукова, имаю се као разлизе єдноимены функція, и дакле и као разлике истымъ функціяма принадлежеђи логаритама. Найпосле

4.) Логаритми тангенте и котангенте исты лукова имаю єднаке, но разно означене разлике.

Првый одъ овы основа тригонометричны таблица познатъ є іошъ изъ §. 10.; другій слѣдує непосредствено изъ §. 38. и додатка §у. 9. , о тређемъ пакъ и четвртомъ можемо се лако уверити, но найпре морамо іошъ приметити, да другій збогъ $\cos\varphi = \sin(90^0 - \varphi)$ и $\cot\varphi = tang\,(90^0 - \varphi)$, постои, и за косинусе и котангенте онаковы углова, кои се одъ правога разликую само некимъ броемъ секунда.

§. 48.

Уверенѣ о трећемъ. За полупречникъ 1 подае се познатымъ изъ геометріе начиномъ, у 10 деловны места

$$arc\ 1' = \frac{\pi}{10800} = 0{\cdot}0002908882,\ \text{а по §у 39.}$$

у исто толико теста

$$sin\ 30'' = 0{\cdot}0001454441\ ;\ \text{дакле}$$

$$2\ sin\ 30'' = 0{\cdot}0002908882 = arc\ 1',$$

или збогъ $2\,sin\ 30'' = chord.\ 1'$, у 10 деловны места

$$chord.\ 1' = arc.\ 1'\ ;$$

то ће рећи, **луци до едногa минута могу се заменити тетивкама, или такови се луци могу сматрати као праве пруге.**

сл. 8. Ово предпославши условимо у сл. 8, да е $arc\ AM$ = некомъ број степена и минута α, $arc.\ MP =$ $= 1' = 60''$, найпосле $arc.\ MN = v'' < 60''$, и спустимо MQ, PS и $NR \perp$ на AC; бытће $MQ = sin\,\alpha$, $PS = sin\ (\alpha + 60'')$ а $NR = sin\ (\alpha + v'')$. Ако пакъ іошъ повучемо $Mp \parallel Nn \perp PS$, онда е, сматрајући по горњему MP и MN као праве, $\triangle\ MPp \sim \triangle\ MNm$, и одтуда

$$MP : MN = Pp : Nm\ ,\ \text{или}$$

$$(AP - AM) : (AN - AM) = (PS - MQ) : (NR - MQ)$$

т. е.

$$\left[arc\ (\alpha + 60'') - arc\ \alpha\right] : \left[arc\ (\alpha + v'') - arc\,\alpha\right] =$$
$$= \left[sin\,(\alpha + 60'') - sin\ \alpha\right] : \left[sin\ (\alpha + v'') - sin\ \alpha\right]$$

Луци $(\alpha + 60'')$ и α разликую се међу собомъ само еднымъ минутомъ, луци пакъ $(\alpha + v'')$ и а съ іошъ манѣ; а мы знамо изъ алгебре, да су разлике броєва, међу собомъ само єдномъ єдиницомъ разликуюћи се, у 7 деловны места сразмерне разликама истымъ броєвима принадлежећи логаритама; дакле є

$$1.)\ \left[arc\,(\alpha+60'')-arc\,\alpha\right] : \left[arc\,(\alpha+v'')-arc\,\alpha\right] =$$
$$=\left[sin\,(\alpha+60'')-sin\alpha\right] : \left[sin\alpha\,(\alpha+v'')-sin\,\alpha\right]$$
$$=\left[log\,sin\,(\alpha+60'')-log\,sin\,\alpha\right] :$$
$$:\left[log\,sin\,(\alpha+v'')-log\,sin\,\alpha\right]$$

Подобнымъ начиномъ налазимо и

$$2.)\ \left[arc\,(\alpha+60'')-arc\,\alpha\right] : \left[arc\,(\alpha+v'')-arc\,\alpha\right] =$$
$$=\left[tang\,(\alpha+60'')-tang\,\alpha\right] :$$
$$:\left[tang\,(\alpha+v'')-tang\,\alpha\right]$$
$$=\left[log\,tang\,(\alpha+60'')-log\,tang\,\alpha\right] :$$
$$:\left[log\,tang\,(\alpha+v'')-log\,tang\,\alpha\right]$$

Овымъ є сразмерностима вопросно треће изреченіє, као што є лако увидити, у смотреню синуса и тангенте доказано; почемъ пакъ косинуси и котангенте нису ништа друго, него синуси и тангенте комплементарны, међу собомъ истымъ начиномъ разликуюћи се углова: то постои исто изреченіє и за косинусе и котангенте, и тако дакле доиста за све обично употребляюће се функціє.

§. 49.

Уверенѣ о четвртомъ. По §. є 16. или 18.

$$tang\ \alpha = \frac{1}{cot\ \alpha}\ ,\ \text{а}\ tang\,(\alpha + d\alpha) = \frac{1}{cot\,(\alpha + d\alpha)}$$

т. є. $tang\ \alpha . cot\ \alpha = 1$, и $tang\,(\alpha + d\alpha). cot\,(\alpha + d\alpha) = 1$, при чему $d\alpha$ означує некій нараштай угла α.

Изъ овы уравненія слѣдує просто

$$tang\,\alpha .\ cot\,\alpha = tang\,(\alpha + d\alpha).\ cot\,(\alpha + d\alpha)$$

дакле є

$log\,tang\,\alpha + log\,cot\,\alpha = log\,tang\,(\alpha + d\alpha) + log\,cot\,(\alpha + d\alpha)$ или, увиђавномъ пременомъ,

$$\left[log\,tang\,(\alpha + d\alpha) - log\,tang\,\alpha\right] = - \\ - \left[log\,cot\,(\alpha + d\alpha) - log\,cot\,\alpha\right]$$

т. є. логаритмичне разлике тангента' и котангента' исты углова, као што є речено, равне, и само разно означене.

§. 50.

На основу прве и друге одъ овы истина (§. 47.) налазимо при рачунаню тригонометричны таблица' логаритме синуса и тангента' лукова до єдногъ минута, и логаритме косинуса и котангента' лукова одъ 89° 59' до 90°, — врло удобно простымъ сабиранѣмъ и одузиманѣмъ на слѣдуюћій начинъ:

Посредствомъ точно израчунѣны логаритама просты броєва определюємо логаритамъ некогъ синуса, н. п. логаритамъ синуса одъ 30", и томе додаємо потомъ логаритмичну разлику броєва 30 и 31, чимъ добыямо логаритамъ синуса и тангенте одъ 31", а косинуса и котангенте одъ 89° 59' 29". Додаюћи потомъ овоме логаритму разлику броєва 31 и 32, налазимо логар. синуса и тангенте одъ 32" а косинуса и котангенте одъ 89° 59' 28"; и тымъ истымъ начиномъ и далѣ поступаюћи, подаю се логаритми синуса и тангенте осталы већи лукова до єдногъ минута, а логаритми косинуса и котангенте маньи, до $89^0\ 59'$. — Одузимаюћи на противъ одъ логаритма синуса одъ $30''$ логаритмичну разлику броєва 29 и 30, добыямо логар. синуса и тангенте одъ $29''$, а косинуса и котангенте одъ $89^0\ 59'\ 31''$; одъ овога опетъ одузимаюћи логаритмичну разлику броєва 28 и 29, налазимо логаритамъ синуса и тангенте одъ $28''$, а косинуса и котангенте одъ $89^0\ 59'\ 32''$, и т. д. све друге.

§. 51.

Изъ доказаны сразмерностій §а 48 слѣдуе

$$60'' : v'' = \left[log\ sin\ (\alpha + 60'') - log\ sin\ \alpha\right] : \\ : \left[log\ sin\ (\alpha + v'') - log\ sin\ \alpha\right] \\ = \left[log\ tang\ (\alpha + 60'') - log\ tang\ \alpha\right] : \\ : \left[log\ tang\ (\alpha + v'') - log\ tang\ \alpha\right]$$

или, краћине ради прве разлике съ $D\,log\,sin\,\alpha$ и $D\,log\,tang\,\alpha$, друге пакъ съ $d\ log\,sin\,\alpha$ и $d\ log\,tang\,\alpha$ означуюћи,

$$60'' : v'' = D\ log\ sin\,\alpha : d\ log\ sin\,\alpha$$

$$= D\,log\,tang\,\alpha : d\ log\ tang\ \alpha, \text{ и одтуда}$$

$$d\,log\ sin\,\alpha = v''.\ \frac{D\ log\ sin\,\alpha}{60''},$$

$$d\ log\ tang\ \alpha = v''.\ \frac{D\ log\ tang\ \alpha}{60''}$$

При овоме є, као што лако увиђамо, $\frac{D\,log\,sin\,\alpha}{60}$ разлика, коіомъ логаритамъ синуса одъ α нарашћуе при свакомъ вышку одъ едне секунде до логаритма синуса одъ ($\alpha + 60''$), т. е. до логаритма синуса еднымъ минутомъ веђега лука ; а $\frac{D \log tang\, \alpha}{60''}$ иста логаритмична разлика тангенте, и мы по томе налазимо разлику коiомъ логаритамъ синуса или тангенте одъ α нарашђуе до логаритма синуса или тангенте съ v'' веђега лука : ако пређашню логаритмичну разлику за $1''$ помложимо съ v.

На основу дакле треће, у §. 48. доказане истине довольно е, да тригонометричне таблице садрже логаритме функцiя лукова веђи одъ $1'$, само одъ минута до минута ; еръ се изъ ньи они други, т. е. логаритми функцiя, осимъ степена и минута iошъ и некiй брой секунда садржаваюћи лукова, лако могу определити — увиђавнымъ изъ горнђга начиномъ — посредствомъ израчунђне разлике за $1''$. При томе само iошъ валя приметити, да се съ обзиромъ на прву истину логаритмична поправка збогъ секунда при косинусима и котангентама предходећемъ логаритму нема додати, но одъ нђга одузети.

§. 52.

Найпосле, на основу четврте, у §. 49. доказане истине, могу быти логаритмичне разлике тангенте и котангенте у таблицама, као заедничке, само еданпутъ уписане, и таблице дакле тимъ нешто простiе.

§. 53.

При концу овога предмета морамо iошъ показати, коимъ се начиномъ логаритми функцiя за полупречникъ 1 преводе у табличне, т. є. у логаритме за полупречникъ 10^{10}, и обратно.

По §. є. 33. $F(\alpha) = r.\ f(\alpha)$, обратно $f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{r}$; зато

$$\log F(\alpha) = \log f(\alpha) + \log r\text{, на противъ}$$
$$\log f(\alpha) = \log F(\alpha) - \log r\text{; или збогъ } r = 10^{10}$$
$$\log F(\alpha) = \log f(\alpha) + 10\text{, а}$$
$$\log f(\alpha) = \log F(\alpha) - 10\text{; то ће рећи:}$$

Логаритамъ неке функціє налазимо за табличный полупречникъ 10^{10}, ако нѣномъ логаритму за полупречникъ 1, десетъ единица додамо; на противъ пакъ логаритамъ неке функціє за полупречникъ 1 добыя се изъ логаритма таблице, ако се одъ овога 10 единица одузму.

II. Преобраћанѣ лучне мере у праву и обратно.

§. 54.

У практики нуждно є млого пута, да се некій лукъ изрази у частима полупречника, т. є. да се лучна мера преведе у праву; као и обратно некій у частима полупречника, то ће рећи, правомъ меромъ определѣный лукъ, да се изрази нѣговомъ природномъ, т. є. лучномъ меромъ. Извидимо дакле коимъ то начиномъ постизавамо.

У име тога нека намъ представля φ'' некій у секундама израженый лукъ, $arc\ \varphi''$ пакъ истога лука дужину у частима пулупречника. За полупречникъ 1 имамо познатымъ изъ геометріє начиномъ

$\varphi'' : 180.60.60 = arc\ \varphi'' : \pi$, и одтуда

$$\varphi'' = \frac{180.60.60.}{\pi} \cdot arc\ \varphi'' \ldots\ldots (1.$$

Означуюћи подобно съ ϱ'' лукъ у правой мери раванъ полупречнику, бытће за полупречникъ 1, $arc\ \varrho'' = 1$, дакле

$\varrho'' : 180.60.60 = 1 : \pi$, и одатле

$$\varrho'' = \frac{180.60.60.}{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots (2.$$

Почемъ є пакъ найпосле $arc\ \varrho'' = 1 = \varrho''.\ arc\ 1''$, то є

$$\varrho'' = \frac{1}{arc\ 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots (3.$$

а збогъ $arc\ 1'' = sin\ 1''$, іошъ

$$\varrho'' = \frac{1}{sin\ 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots (4.$$

Поставляюћи садъ све ове вредности у равность подъ 1, имамо

За преобраћанћ лучне мере у праву

$$\varphi'' = \varrho''.\ arc\ \varphi'' = \frac{arc\ \varphi''}{arc\ 1''} = \frac{arc\ \varphi''}{sin\ 1''}$$ и одтуда обратно

За преобраћанћ праве мере у лучну

$$arc\ \varphi'' = \frac{\varphi''}{\varrho''} = \varphi''.\ arc\ 1'' = \varphi''\ sin\ 1'';$$

при чему є, по равности подъ 2, у секундама израженый полупречникъ

$$\varrho'' = 206265''$$

Додатакъ. Сасвимъ истымъ начиномъ налазимо $\varrho' = \frac{1}{arc\ 1'} = \frac{1}{sin\ 1'}$, $\varrho^0 = \frac{1}{arc\ 1^0}$; и дакле

$$\varphi' = \varrho'\ arc\ \varphi' = \frac{arc\ \varphi'}{arc\ 1'} = \frac{arc\ \varphi'}{sin\ 1'}\text{, а}$$

$$\varphi^0 = \varrho^0 .\ arc\ \varphi^0 = \frac{arc\ \varphi^0}{arc\ 1^0}$$

при чему є

$$\varrho' = \frac{180.60}{\pi} \doteq 3447'8\text{, а}$$

$$\varrho^0 = \frac{180}{\pi} \doteq 57^0 3$$

§. 55.

Ако φ'' ніє веће одъ $2400'' = 40'$, онда $arc\ \varphi''$ у првомъ одъ горньи израза можемо заменити синусомъ, т. є. можемо рећи, да є

$$\varphi'' = \frac{sin\ \varphi}{sin\ 1''}\text{, и одтуда обратно}$$

$$sin\ \varphi = \varphi''.\ sin\ 1''$$

Узимаюћи у првомъ одъ ова два израза $\varphi = 40'$, грешимо само съ $0''05$; при φ пакъ $= 1^0$, грешимо съ $0''18$.

Ова два израза служе, као што се лако увиђа, првый за налазенѣ малогъ некогъ лука изъ познатогъ нѣговогъ синуса и синуса $1''$, другій пакъ обратно за налазенѣ синуса некогъ малогъ лука изъ овога и синуса $1''$.

КНЬИГА ДРУГА.

РАВНА ТРИГОНОМЕТРІЯ.

Б.) Разрешенѣ триуглова.

I. *Обшта свойства триуглова.*

§. 56.

Означимо угле произвольногъ триугла ABC
сл. 9. (сл. 9.) са A, B и C, а супротне ньима стране дотично съ a, b и c; и спустимо потомъ съ ма коега угла, н. п. съ B, управну BD на супротну страну b. Сматраюћи потомъ страну c као полупречникъ мере угла A, а страну а као полупречникъ угла C: у правна є BD синусъ $\angle\angle$ A и C, т. є. $BD = \mathrm{Sin}_c A = \mathrm{Sin}_a C$.

По §у є пакъ 33. за полупречникъ 1
$\mathrm{Sin}_c A = c.\ \sin A$, а $\mathrm{Sin}_a C = a.\ \sin C$; дакле є

$$c.\ \sin A = a.\ \sin C,$$ и одтуда

$$\left.\begin{array}{l} a : c = \sin A : \sin C \\ \text{Истимъ начиномъ добыямо} \\ a : b = \sin A : \sin B \\ b : c = \sin B : \sin C \end{array}\right\} \ldots \text{(1.}$$

одкуда види се, да су стране свакогъ триугла сразмерне синусима супротны углова.

§. 57.

Изъ предходеђи сразмерностій слѣдуе:

$$(a+c):(a-c)=(\sin A+\sin C):(\sin A-\sin C)$$
$$(a+b):(a-b)=(\sin A+\sin B):(\sin A-\sin B)$$
$$(b+c):(b-c)=(\sin B+\sin C):(\sin B-\sin C)$$

т. е.

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin A-\sin C},\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B},$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin B-\sin C};$$

будуђи е пакъ по §. 25. $\dfrac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi}=$

$=\dfrac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(\varphi-\varphi)}$: то е

$$\left.\begin{aligned}\frac{a+c}{a-c}&=\frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(A+C)}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(A-C)}\\ \frac{a+b}{a-b}&=\frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(A-B)}\\ \frac{b+c}{b-c}&=\frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(B+C)}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(B-C)}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (2$$

и дакле уобште:

Количникъ одъ сбира две стране и ньіове разлике, раванъ е количнику тангенте полусбира, поделѣне тангентомъ полуразлике истымъ странама супротны углова.

§. 58.

сл. 9. Изъ слике 9. подав се далѣ за полупречникъ 1, $AD = c.\ cos\ A$, $DC = a.\ cos\ C$, дакле

$$b = AD + DC = c.\ cos\ A + a.\ cos\ C.$$

Подобнымъ сматранѣмъ налазимо и

$$a = b.\ cos\ C + c.\ cos\ B$$
$$c = b.\ cos\ A + a.\ cos\ B$$

Множећи прву равность съ b, другу съ a а трећу съ c добыямо

$$b^2 = bc.\ cos\ A + ab.\ cos\ C$$
$$a^2 = ab.\ cos\ C + ac.\ cos\ B \quad \text{и}$$
$$c^2 = bc.\ cos\ A + ac.\ B\ ;$$

одузимаюћи пакъ одъ сбира сваке две одъ овы равностій дотичну трећу, слѣдуе

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab.\ cos\ C,$$
$$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac.\ cos\ B$$
$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\ cos\ A\ ; \text{ и одтуда}$$

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\ cos\ C \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\ cos\ B \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\ cos\ A \end{array}\right\} \ldots (3.$$

то ће рећи:

Квадратъ сваке стране равань є сбиру квадрата друге две стране, умалѣномъ удвоенымъ производомъ исты страна и косинуса вопросной страни супротнога угла.

§. 59.

Изъ горньи равностій слѣдую за косинусе углова слѣдуюће три

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Да бы ове ирзазе, ради касніе потребе, успособили за логаритмичанъ рачунъ, то поставимо у образцу $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ (§. 26. подъ 5) редомъ $2a = C$, B и A, дакле односно $a = \frac{C}{2}, \frac{B}{2}$ и $\frac{A}{2}$. Имат' ћемо

$$\cos C = 2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1$$

$$\cos B = 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1$$

$$\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1$$

Заменюю̂ћи садъ косинусе у горньимъ равностима съ овима вредностима слѣдує

$$2 \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab}$$

$$2 \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2ac} =$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + c - b)}{2ac}$$

$$2\ cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a);}{2bc}$$; или краћине ради $a + b + c = 2S$, дакле $a + b - c = 2(S-c)$, $a + c - b = 2(S-b)$, а $b + c - a = 2(S-a)$ постављаюћи,

$$cos^2 \frac{C}{2} = \frac{S\ (S-c)}{ab}$$

$$cos^2 \frac{B}{2} = \frac{S\ (S-b)}{ac}$$

$$cos^2 \frac{A}{2} = \frac{S\ (S-a)}{bc}$$, и одтуда

$$\left.\begin{aligned} cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{S\ (S-c)}{ab}} \\ cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{S\ (S-b)}{ac}} \\ cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{S\ (S-a)}{bc}} \end{aligned}\right\} \ldots . (4.$$

§. 60.

Овакимъ истимъ начиномъ добыямо изъ образца $cos\ 2\alpha = 1 - 2\ sin^2\alpha$ (§. 26).

$$\left.\begin{aligned} sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(S-b)\ (S-b)}{bc}} \\ sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(S-a)\ (S-c)}{ac}} \\ sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(S-a)\ (S-b)}{ab}} \end{aligned}\right\} \ldots . (5.$$

Ове пакъ изразе съ предходећима дотично делећи налазимо

$$\left.\begin{aligned} tang\,\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(S-b)\,(S-c)}{S\,(S-a)}} \\ tang\,\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(S-a)\,(S-c)}{S\,(S-b)}} \\ tang\,\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(S-a)\,(S-b)}{S\,(S-c)}} \end{aligned}\right\}\ldots (6.$$

Заменюћи найпосле у обраацу $sin\,2\alpha = 2\,sin\alpha\,cos\alpha$ (§. 26. подъ 1.) 2α редомъ съ A, B и C, а по томъ синусе и косинусе полууглова съ нѣіовимъ горнѣимъ вредностима, находимо

$$\left.\begin{aligned} sin\,A &= \frac{2}{bc}\sqrt{S\,(S-a)(S-b)(S-c)} \\ sin\,B &= \frac{2}{ac}\sqrt{S\,(S-a)(S-b)(S-c)} \\ sin\,C &= \frac{2}{ab}\sqrt{S\,(S-a)(S-b)(S-c)} \end{aligned}\right\}\ldots (7.$$

II. Разрешенѣ правоуглогъ тригла

а.) У обичнымъ случаєвима.

§. 61.

Правоуглый тригалъ определѣнъ є, као што знамо, ако су осимъ правога угла іошъ два нѣгова основка позната, кои само несмеду быти оба угли.

Познати дакле основци могу само быти:

1.) пречница и една управница; 2.) пречница и еданъ угалъ; 3.) обе управнице; 4.) една управница и на ньой лежећій угаль; 5.) една управница и супротный угаль, и мы по томе при разрешеню правоуглогъ триугла можемо имати свега само петъ разны случаєва.

Неупуштаюћи се у особито сматранѣ свакогъ поєдиногъ случая, испытат'ћемо само одношенѣ страна и углова правоуглогъ триугла уобште, изъ чега подат' ће се потомъ и исто нѣгово разрешенѣ.

§. 62.

сл. 10. По §. 56. има се у сл. 10.

1.) $c : a = sin\ 90^0 : sin\ A = 1 : sin\ A$

2.) $c : b = sin\ 90^0 : sin\ B = 1 : sin\ B$

3.) $a : b = sin\ A : sin\ B$;

Будући є пакъ $sin\ A = sin\ (90 - B) = sos\ B$, и обратно $sin\ B = sin\ (90^0 - A) = sco\ A$, то имамо іошъ

4.) $c : a = 1 : cos\ B$

5.) $c : b = 1 : cos\ A$

6.) $a : b = sin\ A : cos\ A = cos\ B : sin\ B$

Изъ прве и четврте сразмерности слѣдуе

I. $a = c.\ sin\ A = c.\ cos\ B.$

Изъ 2 пакъ и 5.

II. $b = c.\ sin\ B = c.\ cos\ A.$

найпосле изъ 6.

III. $a = b.\ tang\ A = b.\ cot\ B$, обратно

IV. $b = a.\ tang\ B = a.\ cot\ A$

По првой є дакле и другой равности **свака управница равна производу пречнице са синусомъ управници супротногъ, или косинусомъ на истой лежећегъ угла**, по трећой пакъ и четвртой равности **свака управница равна производу оне друге управнице са тангентомъ првой супротногъ, или котангентомъ на истой лежећегъ угла.**

§. 63.

Помоћу ова два правила и већъ познатогъ трећегъ $c^2 = a^2 + b^2$ у станю смо разрешити правоуглый триугалъ у свакомъ одъ поменуты случаєва. Но будући ово последнѣ уравненіє за употреблѣнѣ логаритама ніє способно, то ћемо сада іошъ показати, како се и оно врло лако зато удесити може.

Изъ истогъ уравненія слѣдує

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = a\sqrt{(1 + \frac{b^2}{a^2})}$$

Будући пакъ тангента, као што смо видили, (§. 10.), може имати сваку вредность одъ 0 до ∞, то можемо у овомъ изразу поставити $\frac{b}{a} = tang\,\varphi$; быт' ће потомъ

$$c = a\sqrt{(1 + tang^2\,\varphi)} = a.\ sec\ \varphi = \frac{a}{cos\ \varphi}$$

и одтудъ іошъ $a = c.\ cos\ \varphi.$

У случаю дакле, гди бы вопросно уравненіє потребно было, изнаћи ће се найпре изъ израза

$tang\ \varphi = \frac{b}{a}$, дакле $log\ tang\ \varphi = log\ b - log\ a$, помоћный $\angle\ \varphi$, а съ овымъ потомъ изъ $c = \frac{a}{cos\ \varphi}$ пречница c, или изъ $a = c.\ cos\ \varphi$ управница a.

§. 64.

За површный садржай T правоуглогъ триугла ABC, добыямо изъ уравненія §. 62. подъ I, II, III редомъ

$$T = \tfrac{1}{2}\ bc.\ sin\ A = \tfrac{1}{2}\ bc\ cos\ B = \tfrac{1}{2}\ ac.\ sin\ B = \\ = \tfrac{1}{2}\ ac.\ cos\ A\ \ldots\ldots\ (1$$

$$= \tfrac{1}{2}\ b^2.\ tang\ A = \tfrac{1}{2}\ b^2.\ cot\ B = \tfrac{1}{2}\ a^2.\ tang\ B = \\ = \tfrac{1}{2}\ a^2.\ cot\ A\ \ldots\ldots\ (2$$

по уравненію пакъ $c^2 = a^2 + b^2$ збогъ $b = \sqrt{(c^2 - a^2)} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$ и $a = \sqrt{(c^2 - b^2)} = \sqrt{(c+b)(c-b)}$ слѣдуе

$$T = \frac{a}{2}\sqrt{(c+a)(c-a)} = \frac{b}{2}\sqrt{(c+b)(c-b)}\ \ldots\ (3$$

Ови су изрази, као што се види, сви удесни за рачунъ съ логаритмима, и по нѣима е **површный садржай правоуглогъ триугла равань половини производа изъ пречнице и едне управнице са синусомъ на управници лежећегъ, или косинусомъ истой супротногъ угла (1); или равань половини производа изъ квадрата едне управнице и тангенте на ньой лежећегъ, или котангенте супротногъ їой угла (2); или найпосле равань половини производа едне управице са квадратнымъ кореномъ изъ производа сбира и разлике пречнице и исте управнице (3).**

§. 65.

Сватаюћи сва ова докученя, удобности ради при употреблѣню, у єдну таблицу, имамо

Позпати основци	Непознати основци триугла и нѣговъ поврпшный садржай
1.) пречница c и управница a . . .	$b=\sqrt{(c^2-a^2)}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$; $\sin A=\frac{a}{c}$; $T=\frac{a}{2}\sqrt{(c+a)(c-a)}$
2.) пречница c и єданъ угалъ А .	$a=c.\ \sin A$; $b=c.\cos A$; $T=\frac{c^2}{2}\sin A\cos A$ (найудобніє)
3.) обе управнице a и b	$c=\sqrt{(c^2+b^2)}$; $\tang A=\frac{a}{b}$; $T=\frac{1}{2}ab$
4.) єдна управница b и на ньой лежећій угалъ A	$c=\frac{b}{\cos A}$; $a=b.\tang A$; $T=\frac{b^2}{2}\tang A$
5.) єдна управница a и супротный A	$c=\frac{a}{\sin A}$; $b=a.\cot A$; $T=\frac{a^2}{2}\cot A$
	Приметба. У свима є случаєвима $\angle B=90^0-A$

б.) У НЕКИМЪ ОСОБИТЫМЪ СЛУЧАЕВИМА.

§. 66.

При разрешеню правоуглогъ триугла догађа се, да е место еднгогъ одъ нуждна два основка познатъ сбиръ или разлика друга два, или место оба она да су задата два сбира или две разлике, или еданъ сбиръ и една разлика основака. Разрешенѣ у таковымъ случаевима показат' ћемо у слѣдуюћимъ §§а, ограничаваюћи се при томъ само на найтеже.

§. 68.

1.) Познатъ е сбиръ пречнице c и веће управнице a, $c+a=S$, или ньина разлика $c-a=D$ и она друга управница b.

У првомъ случаю разрешавамо правоуглый триугалъ слѣдуюћимъ образцима

$$\cot B = \frac{(S+b)(S-b)}{2\,Sb} \quad \ldots\ldots (1$$

$$a = \frac{(S+b)(S-b)}{2\,S} \quad \ldots\ldots\ldots (2$$

$$c = \frac{b}{\sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3$$

$$T = \frac{b\,(S+b)(S-b)}{4\,S} \quad \ldots\ldots\ldots (4$$

Првый, и у овомъ случаю, основный образацъ находимо слѣдуюћимъ начиномъ:

$$c = \frac{b}{\sin B} = b.\operatorname{cosec} B = b\sqrt{(1+\cot^2 B)}$$

$a = b . \cot B$; дакле

$$c + a = s = b\left[\sqrt{(1 + \cot^2 B)} + \cot B\right],$$

или, ово уравненіе у смотреню $\cot B$ разрешаваюћи, вопросный изразъ подъ 1.

Другій подае се изъ $a = b . \cot B$, поставляюћи место $\cot B$ нађену нѣну вредность; а 4. изъ $T = \frac{1}{2}\, ab$ узимаюћи нађену у 2. вредность одъ a.

За другій случай налазимо сасвимъ истымъ начиномъ

1.) $\cot\ B = \dfrac{(b + D)(b - D)}{2Db}$

2.) $a = \dfrac{(b + D)(b - D)}{2D}$

3.) $c = \dfrac{b}{\sin\ B}$

4.) $T = \dfrac{b\ (b + D)(b - D)}{4D}$

§. 68.

2.) Задатъ є сбиръ $a + b = s$, или разлика $a - b = d$ обадве управнице и пречница c.

У првомъ случаю имамо

$$\cos \frac{A - B}{2} = \frac{s}{c\sqrt{2}} \quad \text{или}$$

$$\cos\ (A - B) = \frac{(s + c)(s - c)}{c^2}$$

чимъ налазимо разлику углова A и B, а помоћу нѣ и сбира $A + B = 90^0$, свакій поєдиный уголъ. Остали непознати основци и садржай триугла определюю се потомъ помоћу нађены углова.

До наведена два образца долазимо слѣдуюћимъ путемъ.

$$a = c.\ sin\ A,\ b = c.\ sin\ B;$$

дакле $a + b = s = c\,(sin\ A + sin\ B)$ одкуда слѣдуе

$$sin\ A + sin\ B = \frac{s}{c}.$$

Но по §. є 23.

$$sin\ A + sin\ B = 2.\ sin\ \frac{A+B}{2}\ cos\ \frac{A-B}{2} =$$

$$= 2.\ sin\ 45^0\ cos\ \frac{A-B}{2} = \sqrt{2}.\ cos\frac{A-B}{2},$$

(єръ є по §. 36. $sin\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$) слѣдователно

$$\sqrt{2}.\ cos\ \frac{A-B}{2} = \frac{s}{c}, \quad \text{а}$$

$$cos\ \frac{A-B}{2} = \frac{s}{c\sqrt{2}}.$$

Онай другій изразъ добыямо изъ овога по образцу $cos\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\,(1 + cos\ \beta)}$, (у §. 29. подъ 11.) поставляюћи у истомъ $\beta = A - B$, чимъ слѣдуе

$$cos\ \frac{A-B}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[1 + cos\ (A-B)\right]}$$ а по предходећой равности

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[1 + cos\ (A-B)\right]} = \frac{s}{c\sqrt{2}}$$

$$\tfrac{1}{2}\left[1 + cos\ (A-B)\right] = \frac{s^2}{2c^2},$$ и одтуда

$$cos\,(A-B)=\frac{s^2-c^2}{c^2}=\frac{(s+c)(s-c)}{c^2}$$

У другомъ случаю овога задатка имамо

$$sin\frac{A-B}{2}=\frac{d}{c\sqrt{2}}$$ или

$$cos\,(A-B)=\frac{(c+d)(c-d)}{c^2}$$, кое изразе добыямо такођеръ вищеназначенымъ путемъ.

§. 69.

3.) Задатъ е сбиръ или разлика пречнице и едне управнице $c+a=S$, или $c-a=D$, и еданъ угалъ н. пр. A.

За првый случай имамо найпре пречницу

$$c=\frac{S}{2.\,sin^2\,(45^0+\frac{A}{2})}=\frac{S}{2\,cos^2\,(45^0-\frac{A}{2})},$$

коіомъ после помоћу познатогъ угла определюемо остале основке и садржай.

За другій случай имамо

$$c=\frac{D}{2\,sin^2\,(45^0-\frac{A}{2})}=\frac{D}{2\,cos^2\,(45^0+\frac{A}{2})}$$

Ови образци добыяю се слѣдуюћимъ начиномъ:

$a=c.\,sin\,A$, дакле

$$c+a=S=c\,(1+sin\,A)$$

$$c-a=D=c\,(1-sin\,A),$$

а одтуда

$$\left.\begin{array}{l} c = \dfrac{S}{1 + \sin A} \\ c = \dfrac{D}{1 - \sin A} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ (\alpha$$

Поставляюћи у образцу §. 23.

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}, \text{ и}$$

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

угалъ $\varphi = 90^0$, а $\psi = A$, слѣдуѥ

$$\sin 90^0 + \sin A, \text{ т. ѥ.}$$

$$1 + \sin A = 2\sin\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)$$

$$1 - \sin A = 2\cos\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right);$$

будући ѥ пакъ $\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)$ комплементъ одъ $\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)$ и обратно, т. ѥ. будући ѥ $\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) + \left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = 90^0$: то ѥ $\cos\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = \sin\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)$, и обратно

$\cos\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) = \sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)$, — и збогъ тога

$$1 + \sin A = 2\sin^2\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)$$

$$1 - \sin A = 2\cos^2\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) = 2\sin^2\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)$$

коѥ вредности, у уравненія подъ α поставлѣне, даю наведена два израза пречнице c.

§. 70.

4. **Познатъ є обадве управнице сбиръ $a+b=s$, или нѣина разлика $a-b=d$, и єданъ уголъ, н.п. A.**

За првый случай имамо

$$c=\frac{s}{\cos\frac{A-B}{2}.\sqrt{2}},$$ а за другій $$c=\frac{d}{\sin\frac{A-B}{2}.\sqrt{2}};$$

съ пречницомъ пакъ c и познатымъ угломъ A опредѣлюємо све остале основке.

Ове образце налазимо слѣдуюћимь начиномъ. По §у є 62.

$a=c.\sin A$, $b=c.\sin B$, дакле

$s=a+b=c.(\sin A+\sin B)$, а

$d=a-b=c.(\sin A-\sin B)$, и одатле

$$c=\frac{s}{\sin A+\sin B}=\frac{d}{\sin A-\sin B},$$

или обзиромъ на §. 68.

$$c=\frac{s}{\cos\frac{A-B}{2}.\sqrt{2}}=\frac{d}{\sin\frac{A-B}{2}.\sqrt{2}}$$

III. Разрешенѣ косоуглогъ триугла.

a.) У НАЙОБИЧНІИМЪ СЛУЧАЄВИМА.

§. 71.

Косоуглый триугалъ подпуно определѣнъ є, као што знамо, 1.) Чрезъ све три нѣгове стране,

2.) две стране и заключеный угалъ,

3.) две стране и већой супротный угалъ, и

4.) єдномъ страномъ и оба на ньой лежећа угла.

Извидимо дакле, како се таковый триугалъ разрешава у свакомъ одъ овы случаєва по на особъ, означуюћи при томъ єданпутъ за свагда стране триугла, као у §у 56. съ a, b и c, угле съ A, B и C, а садржай съ T.

1.) Познате су све три стране a., b и c; траже се дакле угли A, B и C и површный садржай T.

§. 72.

Непознате угле налазимо у овомъ случаю найудобніє посредствомъ образаца §. 60. подъ 5,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}},$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}};$$

при чему морамо приметити, да бы довольно было изнаћи овымъ начиномъ само два угла, н. п. A и B, єръ є съ ньима, збогъ $A+B+C=180^0$, дакле $C=180^0-(A+B)$, познатъ и трећій; но болѣ є определити и овай поменутымъ, одъ она два угла сасвимъ независнымъ начиномъ. У обште валя одъ яко не само при разрешеню триуглова, него и при другимъ задатцима наблюдавати то начело: да непознате основке, гди годъ се може, неопределюємо єданъ посредствомъ веђъ изнађеногъ другогъ, но свагда само помоћу задаты, да не бы се погрешка при єдномъ одъ нъи учинѣна, пренела и на оне друге.

О точности овако определѣны углова уверавамо се нъіовымъ сабиранѣмъ, по чему, ако су добро изнађени, нъіовъ сбиръ мора быти раванъ 180°.

Површный садржай найпосле добыямо познатымъ изъ геометріє образцемъ

$$T = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)},$$

при комъ є S као и у горньимъ образцима $= \frac{1}{2}(a+b+c)$.

§. 73.

Примера ради нека є у вопросномъ случаю

$$\left.\begin{array}{l} a = 42 \\ b = 38 \\ c = 24 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{дакле } S = \frac{1}{2}(42+38+24) = \frac{1}{2}104 = 52 \\ S-a = 52-42 = 10,\ S-b = 52-38 = 14, \text{ а} \\ S-c = 52-24 = 28. \end{array}$$

По горнѣму є

$$1.)\ \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{14 \times 28}{38\ \ 24}} = \frac{7}{\sqrt{114}}$$

$\log \sin \frac{A}{2} = 0{\cdot}845098 \ldots\ldots\ldots \log 7$

$\quad\quad\quad\quad - 1{\cdot}028453 \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2} \log 114$

$\quad\quad\quad\quad 0{\cdot}816645-1$, или за полупречникъ таблица (по §. 53.)

$$\log \sin \frac{A}{2} = 9{\cdot}816645,$$
$$\frac{-507}{138 : 2{\cdot}43 = 57,}$$

и тако

$$\frac{A}{2} = 40^0\ 57'\ 57'', \text{ а}$$

$$\angle A = 81^0\ 55'\ 54''$$

2.) $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{10 \times 28}{42 \times 24}} = \sqrt{\frac{5}{18}}$, дакле

$$\log \sin \frac{B}{2} = 0{\cdot}349485 \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{1}{2} \log 5$$
$$- 0{\cdot}627636 \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{1}{2} \log 18$$
$$0{\cdot}721849 - 1$$

, или за полупречникъ 10^{10}

$$\log \sin \frac{B}{2} = 9{\cdot}721849,$$
$$\frac{-774}{75 : 3{\cdot}4 = 22}$$

одтудъ

$$\frac{B}{2} = 31^0\ 48'\ 22'', \text{ а}$$

$$\angle B = 63^0\ 36'\ 44''$$

3.) $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{10 \times 14}{42 \times 38}} = \sqrt{\frac{5}{57}}$, дакле

$$\log \sin \frac{C}{2} = 0{\cdot}349485 \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{1}{2} \log 5$$
$$- 0{\cdot}877937 \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{1}{2} \log 57$$
$$0{\cdot}471548 - 1$$

, или за табличный полупречникъ

$$log\ sin\ \frac{C}{2} = 9{,}471548$$

$$\begin{array}{r} -271 \\ \hline 277 : 6{,}79 = 41 \end{array}$$

и одтуда

$$\frac{C}{2} = 17^0\ 13'\ 41'', \quad \text{а}$$

$$\angle\ C = 34^0\ 27'\ 22''$$

Найпосле

$$4.)\ T = \sqrt{52.\ 10.\ 14.\ 28}$$

$$log\ T = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{r} 1{,}716003 \\ 1{,}000000 \\ 1{,}146128 \\ 1{,}447158 \\ \hline 5{,}309289 \end{array} \right\} = \begin{array}{r} 2{,}654644 \\ -\ 562 \\ \hline 820 : 96 = 8 \end{array}$$

и по томе $T = 451{,}48$

Увераваюћи се о точности углова налазимо као што треба

$$A + B + C = \left\{ \begin{array}{r} 81^0\ 55'\ 54'' \\ 63^0\ 36'\ 44'' \\ 34^0\ 27'\ 22'' \\ \hline 180^0\ 0'\ 0'' \end{array} \right.$$

2.) Познате су две стране a и b са заклюѥнымъ угломъ C; тражи се дакле трећа страна c, угли A и B и садржай T.

§. 74.

Овде определюемо найпре A и B слѣдующимъ начиномъ : по §. є 57. подъ 2.

$$\frac{tang\ \frac{1}{2}(A+B)}{tang\ \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{a+b}{a-b}\text{, дакле}$$

$$tang\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\ tang\ \tfrac{1}{2}(A+B)$$

Овомъ равности добыямо $(A-B)$, ерь є $\frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}(180^0 - C) = \frac{s}{2}$ познато; имаюћи пакъ

$(A+B) = s$ и $(A-B) = d$, добыямо сабиранѣмъ

$\angle A = \frac{1}{2}(s+d)$, а одузиманѣмъ

$\angle B = \frac{1}{2}(s-d)$

При овомъ треба іошъ приметити, да у случаю: где бы была страна $b > a$, дакле и $\angle B > A$, у горнѣмъ уравненію B и b на прво место дотичны израза поставити валя; у томъ сирѣчь случаю имамо разрешити уравненіе

$$tang\ \tfrac{1}{2}(B-A) = \frac{b-a}{b+a}\ tang\ \tfrac{1}{2}(B+A)$$

§. 75.

Трећу страну c налазимо найпоузданіе првымъ образцемъ §. 58. *подъ* 3., по комъ є

$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab.\ cos\ C)}$; но найпре морамо овай изразъ удесити за употреблѣнѣ логаритама. У име тога додаймо подкореной количини и одузмимо одъ исте $2ab$; бытћe

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab.\ cos\ C)}$$

$$= \sqrt{\left[(a-b)^2 + 2ab\,(1-\cos C)\right]}$$

$$= (a-b)\sqrt{\left[1 + \frac{2ab\,(1-\cos C)}{(a-b)^2}\right]},$$

или збогъ $1 - \cos C = 2 \sin^2 \frac{C}{2}$ (§. 29. подъ 11.)

$$c = (a-b)\sqrt{\left[1 + \frac{4ab \sin^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2}\right]},$$

найпосле пакъ іошъ разломакъ

$$\frac{4\,ab.\, \sin^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2} = \tan g^2\, \varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\alpha$$

поставляюћи,

$$c = (a-b)\sqrt{(1 + \tan g^2\, \varphi)} = (a-b).\, \sec \varphi$$

$$= \frac{a-b}{\cos \varphi} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; (\beta$$

Вопросну дакле страну c наћићемо, ако найпре изъ уравненія подъ α определимо помоћный угалъ φ, и нѣгову вредность потомъ поставимо у уравненіє подъ β.

§. 76.

Сматраюћи єдну одъ задаты страна, н. п. a као основицу триугла (сл. 9.), нѣговъ є садржай $T = \frac{1}{2}\, ah$, означуюћи съ h нѣгову висину. Но иста є висина сл. 9.

$$h = \underset{b}{Sin}\, C = b.\, \sin C \quad (\S\, 33.),$$

дакле садржай

$$T = \frac{1}{2}\, ab.\, \sin C$$

то ће реħи: **садржай триугла равань є половини производа две стране са синусомъ заклюЧеногъ угла.**

§. 77.

За веће обяснѣнѣ горнѣга узмимо, да є као у преħашнѣмъ случаю $a = 42, b = 38$, заключеный $\angle C = 34^0\ 27'\ 18''$; бытħе

1.) $A + B = s = 180^0 - C = 145^0\ 32'\ 42''$,

$\frac{1}{2}(A+B) = \frac{s}{2} = 72^0\ 46'\ 21''$, и дакле

$$tang\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{4}{80}\ tang\ \tfrac{1}{2}(A+B) = \tfrac{1}{20}\ tang\ 72^0\ 46'\ 31''$$

$$\begin{array}{rl} log\ tang\ \frac{1}{2}(A-B) = 10{\cdot}508373 & \\ +\ 141 & \Big\}\ \ldots\ log\ tang\ \frac{1}{2}(A+B) \\ \hline 10{\cdot}508514 & \\ -1{\cdot}301030 & \ldots\ldots\ log\ 20 \\ \hline 9{\cdot}207484 & \\ -7013 & \\ \hline 471 : 13{\cdot}4 = 35 & \end{array}$$

одтуда $\frac{1}{2}(A - B) = 9^0\ 9'\ 35''$, дакле

$$A - B = 18^0\ 19'\ 10''$$

Горе имамо $A + B = 145^0\ 32'\ 42''$, одтуда

(ове две равности сабираюħи и одузимюħи), $2A = 163^0\ 51'\ 52''$

$2B = 127^0\ 13'\ 30''$, и дакле

$\angle A = 81^0\ 55'\ 56''$

$\angle B = 63^0\ 46'\ 46''$;

свакій као што видимо съ $2''$ веħій него у првомъ случаю, кое є, радеħи у 6 само деловны места, врло незнатна погрешка.

2.) У име стране c имамо найпре

$$tang^2 \varphi = \frac{4ab.\, sin^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2},$$ дакле

$$log\, tang\, \varphi = log\, 2 + log\, sin\, \frac{C}{2} - log\,(a-b) + \\ + \frac{1}{2}\,(log\, a + log\, b)$$

$$\begin{array}{rl}
= 0{\cdot}301030 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ log\, 2 \\
\left.\begin{array}{r} 9{\cdot}471271 \\ 278 \end{array}\right\} & \ldots\ldots\ldots\ log\, sin\, \frac{C}{2} \\
0{\cdot}811624 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ {}^1\!/_2\, log\, a \\
0{\cdot}789892 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ {}^1\!/_2\, log\, b \\
\hline
11{\cdot}374095 & \\
-0{\cdot}602060 & \ldots\ldots\ldots\ log\,(a-b) \\
\hline
10{\cdot}772035 & \\
-1760 & \\
\hline
275 & : 12{\cdot}8 = 21,\ \text{а}
\end{array}$$

$\varphi = 80^0\ 24'\ 21''$. Дакле

$$c = \frac{4}{cos\, 80^0\, 24'\, 21''}$$

$$\begin{array}{rl}
log\, c = 0{\cdot}602060 & \ldots\ldots\ldots\ log\,(a-b) \\
-0{\cdot}220954 + 1 & \ldots\ldots\ log\, cos\, \varphi\ \text{за полупречникъ 1} \\
\hline
1{\cdot}381106 & \\
-934 & \\
\hline
172 &
\end{array}$$

и одтуда

$$c = 24{\cdot}0$$

Найпосле

3.) $T = \frac{1}{2}\, ab\, sin\, C = \frac{1}{2}\, 42.\, 38.\, sin\, 34^0\, 27'\, 22''$
$= 21.\, 38.\, sin\, 34^0\, 27'\, 22''$, дакле

$$
\begin{array}{ll}
log\ T = 1\text{'}322219 & \ldots\ldots\ldots log\ \tfrac{1}{2}\ a \\
 1\text{'}579784 & \ldots\ldots\ldots log\ b \\
 \underline{0\text{'}752643 - 1} & \ldots\ldots log\ sin\ C \\
 2\text{'}654646 & \\
 \quad \underline{-562} & \\
 \quad\ 840 : 96 = 8 &
\end{array}
$$

и одтудъ

$$T = 451\text{'}48$$

3.) **Познате су две стране a и b, и већой супротный $\angle A$; траже се дакле трећа страна c, угли B и C и садржай T.**

§. 78.

У овоме случаю имамо прво по §у 56.

$$a : b = sin\ A : sin\ B, \text{ дакле}$$

$$sin\ B = \frac{b.\ sin\ A}{a}, \text{ чимъ добыямо } \angle B$$

а съ овимъ и трећій $\angle C$, еръ є $C = 180 - (A + B)$.

Трећу страну c находимо по томъ изъ сразмерности

$$a : c = sin\ A : sin\ C, \text{ изъ коє слѣдує}$$

$$c = \frac{a.\ sin\ C}{sin\ A}.$$

Найпосле садржай триугла налази се у овомъ случаю као годъ у пређашнѣмъ.

§. 79.

Задржавајући узетый већъ примеръ имамо у настоећемъ случаю по горнѣму

$$1.) \quad \sin B = \frac{38.\ \sin 81^0\ 55'\ 54''}{42}$$

$$= \frac{19.\ \sin 81^0\ 55'\ 54''}{21}$$

$$\begin{array}{rl}
\log \sin B = 1{'}278754 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ \log 19 \\
9{'}995679 & \ldots\ldots\ldots\ \log \sin A \\
\hline
11{'}274433 & \\
-1{'}322219 & \ldots\ldots\ldots\ \log 21 \\
\hline
9{'}952214 & \\
-168 & \\
\hline
46 : 1{'}05 = 44'' & \text{дакле}
\end{array}$$

$\angle\ B = 63^0\ 36'\ 44''$

$\angle\ C = 180 - (A + B) = 34^0\ 27'\ 22''$

$$2.) \quad c = \frac{42.\ \sin 34^0\ 27'\ 22''}{\sin 81^0\ 55''\ 54''}$$

$$\begin{array}{rl}
\log c = 1{'}623249 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ \log a \\
\left.\begin{array}{r} 9{'}752576 \\ 67 \end{array}\right\} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ \log \sin C \\
\hline
11{'}375892 & \\
-9{'}995679 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ \log \sin A \\
\hline
1{'}380213 & \\
-1 & \\
\hline
2 &
\end{array}$$

$c = 24.00$

4.) Позната є една страна a съ оба на ньой лежећа угла B и C; траже се дакле друге две стране b и c, трећій угалъ A и садржай T.

§. 80.

У овомъ є, одъ своју найпростіємъ случаю, съ углима B и C познатъ и трећій A, и раванъ є

$180^{0} - (B + C)$; стране пакъ и садржай триугла налазимо као и у пређашнѣмъ случаю

$$b = \frac{a. \sin B}{\sin A}, \; c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

$$T = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C = \tfrac{1}{2}\, ac \sin B = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A$$

Примеръ є овде излишанъ.

б.) У некимъ особитымъ случаєвима.

§. 81.

Осимъ ова четири проста случая, да разрешимо іоштъ неколико одъ оны, у коима є место єдногъ или другогъ нуждногъ основка познатъ сбиръ или разлика друга два. Овы случаєва има при косоугломъ триуглу наравно млого више него при правоугломъ; но мы се овде морамо ограничити на разрешенѣ само оны, кои се логаритмично рачунати могу. Таковы има четири и єсу

1.) **Задате су две стране a и b и разлика истима супротны углова $(A - B)$;**

2.) **Позната су два угла A и B — дакле и трећій C —, и сбиръ или разлика две стране,** н. п. **$(a + b)$ или $(a - b)$;**

3.) **Познатъ є єданъ угалъ C, супротна страна c и сбиръ или разлика две друге стране,** т. є. **$(a + b)$ или $(a - b)$;**

4.) **Задата є єдна страна c, єданъ на ньой лежећій угалъ** н. п. **B, и сбиръ или разлика остале две стране $(a + b)$ или $(a - b)$**

§. 82.

У првомъ случаю определюємо найпре $\angle C$ помоћу образца

$$tang\ \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b}\ cot\ \tfrac{1}{2}\,(A-B);$$

у другомъ разлику страна $(a-b)$ изъ познатогъ сбира образцемъ

$$a-b=(a+b).\ tang\ \tfrac{1}{2}\,(A-B).\ tang\ \frac{C}{2},$$

обратно сбиръ изъ познате разлике образцемъ

$$a+b=(a-b)\ cot\ \tfrac{1}{2}\,(A-B)\ cot\ \frac{C}{2}.$$

У трећемъ случаю тражимо найпре разлику углова $(A-B)$, и то: при познатомъ сбиру страна $(a+b)$ образцемъ

$cos\ \tfrac{1}{2}\,(A-B)=\frac{a+b}{c}\ sin\ \frac{C}{2}$, а при познатой разлики исты страна образцемъ

$$sin\ \tfrac{1}{2}\,(A-B)=\frac{a-b}{c}.\ cos\ \frac{C}{2}.$$

У четвртомъ найпосле случаю определюємо угалъ A образцима

$$cot\ \frac{A}{2}=\frac{(a+b)+c}{(a+b)-c}.\ tang\ \frac{B}{2}, \quad и$$

$$tang\ \frac{A}{2}=\frac{c+(a-b)}{c-(a-b)}.\ tang\ \tfrac{1}{2}\,B,$$

првимъ, ако є познатъ сбиръ, а другимъ ако є позната разлика страна a и b.

Помоћу овы изнађены количина добыямо по томъ и све остале непознате основке триугла познатымъ већъ начинима одъ пређащньи просты случаєва.

§. 83.

1.) Образацъ за првый случай слѣдує изъ познате равности (§. 57. подъ 2.)

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tang\ \frac{1}{2}\ (A+B)}{tang\ \frac{1}{2}\ (A-B)}$, узимаюћи место

$\frac{1}{2}\ (A+B)$ равну вредность $\frac{1}{2}\ (180-C)=90^0-\frac{C}{2}$; по

чему, збогъ $tang\ (90-\frac{C}{2})=cot\ \frac{C}{2}$, слѣдує

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{cot\ \frac{1}{2}\ C}{tang\ \frac{1}{2}\ (A-B)}=\frac{cot\ \frac{1}{2}\ (A-B)}{tang\ \frac{1}{2}\ C}$$

и одтуда увиђавнымъ начиномъ првый образацъ, као што є наведенъ

$$tang\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}\ cot\ \frac{1}{2}\ (A-B).$$

2.) Изъ овога подаю се далѣ

$$a-b=\frac{(a+b)\ tang\ \frac{1}{2}\ C}{cot\ \frac{1}{2}\ (A-B)}$$

$$=(a+b)\ tang\ \frac{C}{2}\ tang\ \frac{1}{2}\ (A-B) \text{ и}$$

$$a+b=\frac{(a-b)\ cot\ \frac{1}{2}\ (A-B)}{tang\ \frac{1}{2}\ C}$$

$$=(a-b)\ cot\ \frac{1}{2}\ (A-B)\ cot\frac{C}{2}$$

образци другогъ случая.

§. 84.

1.) Збогъ $cot\ \varphi=\frac{cos\ \varphi}{sin\ \varphi}$ имамо изъ последнѣ равности предходећегъ §.

$$a+b=(a-b).\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}C}.$$

Будући є пакъ $a=\frac{c.\sin A}{\sin C}, b=\frac{c.\sin B}{\sin C}$; то є

$$a+b=\frac{c(\sin A+\sin B)}{\sin C}=\frac{c.\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-A)}{\sin C}$$

или збогъ $\sin\frac{1}{2}(A+C)=\sin\frac{1}{2}(180-C)=$
$=\sin(90^0-\frac{C}{2})=\cos\frac{C}{2}$, и $\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,

$$a+b=\frac{c.\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C},$$

кою вредность у горнѣ уравненіє поставляюћи и уєдно скраћуюћи, слѣдує

$$c=(a-b)\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}, \text{ и одтуда}$$

$$\sin\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{c}.\cos\frac{C}{2},$$

коє є другій образацъ трећегъ случая. Подобнымъ начиномъ налазимо и првый.

2.) По §у є 60.

$$\tang\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

$$\tang\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{S(S-b)}}$$

Ова уравненія єданпутъ мложећи, а другій путъ прво чрезъ друго делећи, добыямо

$$\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}=\frac{\tang\frac{1}{2}B}{\cot\frac{1}{2}A}=\frac{S-c}{S}=\frac{a+b-c}{a+b+c}=$$
$$=\frac{(a+b)-c}{(a+b)+c} \text{ и}$$

$\frac{tang \frac{1}{2} A}{tang \frac{1}{2} B} = \frac{S-b}{S-a} = \frac{a+c-b}{c+b-a} = \frac{c+(a-b)}{c-(a-b)}$; и одтуда односно

$$cot \frac{A}{2} = \frac{(a+b)+c}{(a+b)-c} \, tang \frac{B}{2} \quad \text{и}$$

$$tang \frac{A}{2} = \frac{c+(a-b)}{c-(a-b)} \, tang \frac{B}{2},$$

образце четвртогъ случая.

Б.) Употреблѣнѣ доякошнѣга на разрешенѣ неколико геометричны задатака.

I. *Разрешенѣ неколико задатака о кругу и правилномъ полигону.*

§. 85.

сл. 1. Нека є у слики 1. лукъ $MM_1 = \psi$, нѣгова тетивка $MDM_1 = s$, управна на тетивку $CD = h$, найпосле полупречникъ $MC = AC = M_1C = r$.
За овай полупречникъ быт' ће тадъ половина тетивке MD синусъ полуугла ψ, т. є. $\frac{s}{2} = Sin_r \frac{\psi}{2}$ или за полупречникъ 1, $\frac{s}{2} = r.\ sin \frac{\psi}{2}$, и одтуда

$$s = 2r.\ sin \frac{\psi}{2} \dots\dots\dots\dots (1.$$

Изъ кое равности слѣдую друге две

$$r = \frac{s}{2\, sin \frac{\psi}{2}} \dots\dots\dots (2. \quad \text{и}$$

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{s}{2r} \ldots\ldots\ldots\ldots (3.$$

Помоћу овы равности у станю смо разрешити слѣдуюћа, геометріомъ неразрешена три задатка:

1.) **Изъ познатогъ полупречника r и познатогъ лука ψ, изнаћи овоме луку припадлежећу тетивку s.**

2.) **Изъ познатогъ лука ψ и нѣгове тетивке s определити полупречникъ r; и**

3.) **Изъ познатогъ полупречника r и тетивке s изнаћи овомъ тетивкомъ затегнутый лукъ ψ.**

§. 86.

Првый и другій одъ горньи образаца добыяю особиту важность при правилномъ полигону, єръ се съ ньима изъ познатогъ полупречника r може изнаћи страна свакогъ таковогъ полигона и обратно изъ ове полупречникъ, око истогъ полигона написанога круга. При тыма є задатцима ψ као средиштный угалъ свагда познатъ, и раванъ $\frac{360^0}{n}$, означуюћи съ n брой страна. Половина є дакле тога угла $\frac{\psi}{2} = \frac{180^0}{n}$, и по томе имамо за разрешенѣ исты задатака

$$s = 2r.\sin\frac{180^0}{n}, \text{ а}$$

$$r = \frac{s}{2\sin\frac{180^0}{n}}$$

§. 87.

Садржай правилнога полигона може се тригонометрично такоѣеръ изнаћи, и, као што ћемо одма видити, млого лакше него познатымъ изъ геометріє начиномъ. По овоме є садржай полигона

$$P = nt = n.\,\frac{sh}{2},$$

при чему s страну MM_1, а h висину CD триугла MCM_1, дакле $t = \frac{sh}{2}$ садржай овога триугла представляю, каковы триуглова у правилномъ N-няку има као што знамо, n.

Сматраюћи слику налазимо, да є $h = Cos_r \frac{\psi}{2}$ $= r\cos\frac{\psi}{2}$, s є пакъ, по првомъ образцу §а 85, $=$ $= 2r\sin\frac{\psi}{2}$; дакле садржай полигона $P = n.\frac{s}{2}.h$ $= n.r^2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}$, или, збогъ $2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}$ $= \sin\psi$ (§. 26. обр. 1.), и дакле $\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} =$ $= \frac{1}{2}\sin\psi$, $P = \frac{n}{2}r^2\sin\psi$; найпосле место ψ нѣгову вредность узимаюћи,

$$P = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{180^0}{n}.$$ То ће рећи:

Садржай правилнога полигона равань є полуброю страна, помложеномъ съ производомъ квадрата полупречника и синуса половине средиштногъ угла.

§. 88.

Задатакъ. Изъ познатогъ лука ψ и полупречника r, изнаћи садржай окружногъ окрайка MAM_1DM (слика 1.) сл. 1.

Разрешенѣ. Познато є изъ геометріє, да се садржай окрайка добыя, ако се одъ садржая клина $CMAM_1$ одузме садржай триугла MCM_1.

Садржай є клина $K = \frac{\psi}{360^0} \cdot r^2 \pi$, а садржай триугла по §. 87. $t =. r^2 \frac{\sin \psi}{2}$; дакле

садржай окракай $O = K - t = \frac{\psi}{360} r^2 \pi - r^2 \frac{\sin \psi}{2}$

$$= \frac{22. r^2 \psi}{7.360} - r^2 \frac{\sin \psi}{2}$$

$$= \frac{11 r^2 \psi}{1260} - r^2 \frac{\sin \psi}{2}$$

Да бы овай изразъ удесили за удобно употребленѣ логаритама, извуцимо найпре $\frac{11}{1260} r^2 \psi$ као чинителя оба члана и заменимо потомъ другій членъ съ косинусомъ помоћногъ некогъ угла ω; быт' ће

$$O = \frac{11}{1260} r^2 \psi \left(1 - \frac{630. \sin \psi}{11. \psi}\right).$$

Поставляюћи пакъ као што рекосмо

$$\frac{630 \sin \psi}{11. \psi} = \cos \omega \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\alpha,$$ имамо

$$O = \frac{11}{1260} r^2 \psi (1 - \cos \omega), \text{ или збогъ}$$

$$1 - \cos \omega = 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \text{ (§. 27. обр. првый подъ 6.)}$$

$$O = \frac{11}{630} r^2 \psi \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

Садржай окрайка дакле изнаћи ћемо, ако найпре определимо изъ уравненія подъ α помоћный угалъ ω и овога вредность поставимо потомъ у последнѣ уравненіє.

§. 89.

Да є овай рачунъ млого краћій него дояко познатый, увиђа се на првый погледъ. Но онъ є уєдно и млого лакшій, єръ не само, да при истомъ тетивку никако неупотреблявамо, него се іошъ и оба израза, коє логаритмички израчунати имамо, у већой части изъ єднаки броєва састоє, и дакле єднакимъ и логаритмима рачунаю. Єданъ ће насъ примеръ о свему овоме найболѣ уверити. Нека є дакле $\psi = 38^0$, $r = 8$. У овомъ є случаю

$$\cos \omega = \frac{630 \sin 30^0}{11.38}$$

$$\begin{array}{rl}
\log \cos \omega = 2{\cdot}799341 & \ldots\ldots\ldots \log 630 \\
+\ 9{\cdot}789342 & \ldots\ldots\ldots \log \sin 38^0 \\
\hline
12{\cdot}588683 & \\
-\ 1{\cdot}041393 & \ldots\ldots\ldots \log 11 \\
1{\cdot}579784 & \ldots\ldots\ldots \log 38 \\
\hline
9{\cdot}967506 & \\
-471 & \\
\hline
35 : 0{\cdot}85 = 41 &
\end{array}$$

$$21^0\ 54'$$
$$-\ 41''$$

$$\omega = 21^0\ 53'\ 19'',\ \frac{\omega}{2} = 10^0\ 56'\ 39''$$

$$O = \frac{11}{630}.\ 64.\ 38.\ sin^2\ 10^0\ 56'\ 39''$$

$log\ O = 1\text{'}041393$ . . . log 11 (само преписанъ)
$+\ 1\text{'}806180$ . . . log ($8^2 = 64$)
$+\ 1\text{'}579784$ . . . leg 38 (преписанъ)
$0\text{'}277991 - 1$

$+\ 0\text{'}555982 - 2$ ... $log\ sin\ \frac{\omega}{2}$ за пол. 1

$2\text{'}983339$
$-2\text{'}799341$ . . . log 630 (преписанъ)
$0\text{'}183998$
-839
$1590 : 285 \doteq 5$

$$O = 1\text{'}5275 = 1\text{'}\overset{\circ}{5}3$$

II. Определьиванѣ неприступны одстоянія.

§. 90.

1.) Задатакъ. Определити на єдномъ краю *B* неприступно одстояніє *AB*. (сл. **11.**) сл. 11.

Разрешенѣ. Изъ приступне точке *A* треба подъ произвольнымъ угломъ означити и измерити праву *AC*, и потомъ угломеромъ узети угле *A* и *C*; тымъ ћемо одъ триугла *ABC* знати єдну страну *AC* и оба на ньой лежећа угла *A* и *C*, непознато дакле одстояніє *AB*, као страна истогъ триугла, быт' ће

$$AB = \frac{AC.\ sin\ C}{sin\ B}$$

или, збогъ $B = 180 - (A + C)$, и дакле $sin\ B = = sin\ (A + C)$,

$$AB = \frac{AC.\ sin\ C}{sin\ (A + C)}.$$

Изъ поздніє увиђавны узрока валя помоћну AC прво подъ што оштріємъ угломъ на AB поставити, и друго одъ прилике равну AB узети, да бы упливъ погрешногъ угла C на ову маньій быо т. є. ова точніє добила се.

§. 91.

сл. .12 2.) **Задатакъ.** Определити на оба края или сасвимъ неприступну AB. (сл. 12.)

Разрешенѣ. Узети валя и измерити помоћну праву CD, изъ краєва коє могу се видити оба края неприступне AB. Почемъ смо іошъ угломеромъ измерили у C угле C и β, а у D угле D и α, бытћe

$$AD = \frac{CD.\ sin\ C}{sin\ a} = \frac{CD.\ sin\ C}{sin\ (C + a)}, \quad \text{а}$$

$$BD = \frac{CD.\ sin\ \beta}{sin\ b} = \frac{CD.\ sin\ \beta}{sin\ (D + \beta)}.$$

Одъ триугла дакле ABD познате су садъ две нѣгове стране AD и BD са заключенымъ угломъ $(D - a) = \delta$, и трећа нѣгова страна бытћe, по §. 75. (уравненіє подъ β),

$$AB = \frac{AD - BD}{cos\ \varphi},$$

при чему помоћный угалъ φ налазимо изъ уравненія

$$tang^2 \varphi = \frac{4.\,AD.\,BD}{(AD - BD)^2} . \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

§. 92.

3.) **Задатакъ.** Часть $PQ = x$ праве MN_1 (н. пр. неке основице), збогъ неке препоне неможе се измерити; зато да се определи рачуномъ.

Разрешенѣ. Измерит'ће се угломеромъ, изъ сходно узете точке O, угли $MOP = \alpha$, $MOQ = \beta$, $MON = \gamma$. Поставляюћи потомъ познату часть $MP = a$, а $QN = b$, быт'ће

$$a : MO = \sin \alpha : \sin p\,,$$

$$b : NO = \sin(\gamma - \beta) : \sin q\,,$$

$$(a + x) : MO = \sin \beta : \sin n = \sin \beta : \sin (180 - q) = \sin \beta : \sin q\,,$$

$$(b + x) : NO = \sin(\gamma - \alpha) : m = \sin(\gamma - \alpha) : \sin(180 - p) = \sin(\gamma - \alpha) : \sin p\,;$$

и одтуда редомъ

$$\sin p = \frac{MO.\,\sin \alpha}{a}\,,$$

$$\sin q = \frac{NO.\,\sin(\gamma - \beta)}{b}\,,$$

$$\sin q = \frac{MO.\,\sin \beta}{a + x}\,,$$

$$\sin p = \frac{NO.\,\sin(\gamma - \alpha)}{b + x}\,; \quad \text{дакле}$$

$$\frac{MO.\,\sin \alpha}{a} = \frac{NO.\,\sin(\gamma - \alpha)}{b + x} \quad \text{и}$$

$$\frac{MO.\sin\beta}{a+x}=\frac{NO.\ \sin(\gamma-\beta)}{b}\ ,\ \text{или}$$

$$\frac{MO}{NO}=\frac{a.\sin(\gamma-\alpha)}{(b+x)\ \sin\alpha}=\frac{(a+x)\sin(\gamma-\beta)}{b\ \sin\beta}\ ;$$

одавде пакъ слѣдуе

$$(a+x)(b+x)=\frac{ab\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}\ ,\ \text{или}$$

$$x^2+(a+b)x=\frac{ab}{\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}\Big[\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)-\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)\Big]$$

$$=ab.\frac{\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}\ ,$$

кое уравненіе разрешавајући добыямо

$$x=-\frac{a+b}{2}+\sqrt{\left[ab.\frac{\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}+\frac{(a+b)^2}{4}\right]}$$

$$=-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\sqrt{\left[\frac{4ab.\ \sin\gamma\sin(\beta-\alpha)}{(a+b)^2\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}+1\right]}$$

$$=\frac{a+b}{2}\left\{-1+\sqrt{\left[\frac{4\,ab.\ \sin\gamma\ \sin(\beta-\alpha)}{(a+b)^2\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}+1\right]}\right\},$$

или, поставлявући

$$\frac{4ab\ \sin\gamma\ \sin(\beta-\alpha)}{(a+b)\ \sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}=tang^2\varphi\ \ldots\ldots\ (m,$$

$$x=\frac{a+b}{2}\left[-1+\sqrt{(tang^2\varphi+1)}\right]$$

$$= \frac{a+b}{2}(-1 + sec\ \varphi) = \frac{a+b}{2} . \frac{1 - cos\ \varphi}{cos\ \varphi},$$

и найпосле, збогъ $1 - \varphi = 2 sin^2 \frac{\varphi}{2}$,

$$x = (a+b) \frac{sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{cos\ \varphi}$$

Неизмерену дакле часть x наћи ћемо, ако найпре уравненіємъ m определимо помоћный $\angle\ \varphi$ и поставимо потомъ нѣгову вредность у последнѣ уравненіє за x.

III. *Определъиванѣ висина.*

§. 93.

Задатакъ. Определити неприступну висину CD. (сл. 14.) сл. 14.

Разрешенѣ 1. Узети и измерити валя сходну основицу AB, и у єдномъ нѣномъ краю A угломеромъ измерити управне угле v и w и хоризонталный угалъ α, у ономъ другомъ пакъ краю B хоризонталный угилъ β.

Изъ хоризонталногъ триугла ABH слѣдуе

$$AH = \frac{AB.\ sin\ \beta}{sin\ H} = \frac{AB\ sin\ \beta}{sin\ (\alpha + \beta)};$$

изъ управногъ пакъ и правоуглогъ триугла ADH подаѥ се

$$AD = \frac{AH}{cos\ v} = \frac{AB.\ sin\ \beta}{sin(\alpha+\beta)\ cos\ v}$$

Найпосле изъ управногъ косоуглогъ триугла ADC добыямо

$$CD = \frac{AB \sin \beta \sin (w - v)}{\sin (\alpha + \beta) \cos v \cos w}.$$

Разрешенѣ 2. По измереной основици AB и управны углова v и w узеће се угломеромъ іошъ у косой равници ACB лежећи угли γ и δ.

Изъ триугла ACB имамо потомъ

$$AC = \frac{AB. \sin \delta}{\sin C} = \frac{AB \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)},$$

изъ управногъ пакъ триугла ACD

$$CD = \frac{AC. \sin (w - v)}{\sin (180^0 - D)} = \frac{AC. \sin (w - v)}{\sin D}$$

$$= \frac{AC. \sin (w - v)}{\cos v};$$

или AC съ нађеномъ вредности заменюћи

$$CD = \frac{AB \sin \delta \sin (w - v)}{\sin (\gamma + \delta) \cos v}$$

Приметбе. 1. Ако є основица AB у хоризонту точке D, тадъ є, као што се лако увиђа, угалъ $v = o$, и дакле при првомъ разрешеню

$$CD = \frac{AB. \sin \beta \sin w}{\sin (\alpha + \beta) \cos w},$$

а при другомъ

$$CD = \frac{AB. \sin \delta. \sin w}{\sin (\gamma + \delta)}.$$

2. Ако є пакъ основица AB надъ хоризонтомъ точке D, онда угалъ v неиде у висъ него на ниже, и збогъ тога истый угалъ валя узети съ углу w

противнымъ, т. є. съ одрицателнымъ знакомъ или $-v$ У томъ ће дакле случаю быти при првомъ разрешеню

$$CD = \frac{AB.\ \sin\beta\ \sin\ (w - v)}{\sin(\alpha + \beta)\cos v \cos w},$$

а при другомъ

$$CD = \frac{AB.\ \sin\delta\ \sin\ (w + v)}{\sin(\gamma + \delta)\ \cos\ v}$$

§. 94.

Ако основицу AD (сл. 15.) по правцу AD не само у хоризонту точке D узети, но у томъ и мерити можемо, онда треба измерити угломеромъ у краю A само управный угалъ p, а у краю B угалъ q; быт' ће потомъ изъ триугла ACB сл. 15.

$$AC = \frac{AB.\ \sin\ q}{\sin\ \delta},$$

или, збогъ $p = \delta + q$, и дакле $\delta = p - q$:

$$AC = \frac{AB.\ \sin\ q}{\sin\ (p - q)}$$; изъ правоуглогъ пакъ триугла ACD

$$CD = AC.\ \sin\ p$$

или AC съ нађеноме вредности заменюјући

$$CD = \frac{AB.\ \sin\ p.\ \sin\ q}{\sin\ (p - q)}$$

IV. Потенотовъ проблемъ.

§. 95.

Задатакъ. Определити положенѣ точке D према задатымъ у полю точкама $A, B,$ и C. (сл. 16.) сл. 16.

Разрешенѣ. У име овога треба у точки D определити угле α и β, подъ коима се у истой точки виде задатога триугла стране $AC = b$ и $BC = a$. У сбиру иста два угла $\alpha + \beta$ познатъ є и угалъ ADB, подъ коимъ се примећава трећа триугла страна AB. Поставимо краћиие ради

$$\alpha + \beta = \gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1$$

По себи увиђа се, да є положенѣ точке D савршено определѣно углима φ и ψ, и дакле да намъ у име разрешеня поставлѣногъ задатка само исте угле изнаћи валя.

По обштемъ своиству триугла имамо изъ триугла ADC:

$$DC : b = \sin\varphi : \sin\beta, \text{ дакле}$$

$$DC = \frac{b \sin\varphi}{\sin\beta};$$

изъ триугла пакъ BDC:

$$DC : a = \sin\psi : \sin\alpha, \text{ и одтудъ}$$

$$DC = \frac{a \sin\psi}{\sin\alpha}$$

Поставляюћи ове вредности за DC єдну другой равну, бытће

$$\frac{b \sin\varphi}{\sin\beta} = \frac{a \sin\psi}{\sin a}, \text{ одкуда слѣдує}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{a \sin\beta}{b \sin a}.$$

Одузимаюћи одъ овогъ уравненія єдиницу и смешане броєве у разломке преобраћаюћи добыямо далѣ

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\psi} = \frac{a\sin\beta - b\sin\alpha}{b\sin\alpha}.$$

Додаюћи му пакъ единицу слѣдуе

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\psi} = \frac{a\sin\beta + b\sin\alpha}{b\sin\alpha}$$

Найпосле прво одъ овы уравненія другимъ делећи налазимо

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{a\sin\beta - b\sin\alpha}{a\sin\beta + b\sin\alpha}$$

Но по §. є 23. $\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2} \times$ $\times \sin\frac{\varphi-\psi}{2}$, а $\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$; зато ове вредности у предходеће уравненіе узимаюћи

$$\cot\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\tan g\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = \frac{a\sin\beta - b\sin\alpha}{a\sin\beta + b\sin\alpha} = \frac{1-\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}}{1+\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}},$$

или

$$\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} = \tan g\,\delta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2$$

поставляюћи

$$\cot\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\tan g\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = \frac{1-\tan g\,\delta}{1+\tan g\,\delta}$$

По §у є 22. $\tan g(\alpha-\beta) = \frac{\tan g\,\alpha - \tan g\,\beta}{1+\tan g\,\alpha\tan g\,\beta}$

Поставляюћи α 45°, $\beta = \delta$, бытће збогъ $\tan g\,45^0 = 1$,

$$\tan g(45^0 - \delta) = \frac{1-\tan g\,\delta}{1+\tan g\,\delta},$$ и зато

$$cot\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi+\psi)\ tang\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi-\psi)=tang\,(45^0-\delta)\ \ldots\ (3$$

Будући су далѣ угли свакогъ триугла скупа равни 180°, то су угли триуглова ABC и BDC заєдно $= 2.180^0$, то ће рећи, угли $\varphi+\psi+C+\alpha+$ $+\beta=360^0$. Одтуда имамо съ обзиромъ на уравненіе подъ (1, $\varphi+\psi=360-(C+\gamma)$, и дакле

$$\tfrac{1}{2}\,(\varphi+\psi)=180^0-\tfrac{1}{2}\,(C+\gamma)\ldots\ (4\ \text{познато.}$$

Заменюючи найпосле у уравненію подъ (3 $\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$ съ овомъ вредности подає се

$$tang\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi-\varphi)=\frac{tang\,(45^0-\delta)}{cot\left[180^0-\tfrac{1}{2}\,(C+\gamma)\right]}\ \ldots\ldots\ (5$$

Прегледаюћи садъ цео посао увиђамо, да угле φ и ψ налазимо помоћу уравненія подъ 1, 2, 4 и 5 тимъ начиномъ: да найпре определимо изъ уравненія 2.) помоћный угалъ δ, изъ 4.) помоћу 1.) $\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$, а по уравненію 5.) помоћу 4.) $\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$, па онда $\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$ и $\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ єданпутъ саберемо, а другій путъ єдно одъ другога одузмемо.

§. 96.

При овомъ валя іошъ приметити, да ће се угли φ и ψ добыти **положителни**, ако падаю на ону исту страну страна a и b на коіой леже угли A и B, лежала при томъ точка D — као у сматраной слики — изванъ триугла или у самомъ триуглу. Напротивъ угли φ и ψ испадаю **одрицателни**, ако є ньіово положенѣ према странама a и b противно положеню углова A и B, кое ће быти ако є точка D у D_1. Найпосле овай є задатакъ сасвимъ неразрешимъ — єръ неопределѣнъ, — ако се угли φ и ψ узаямно допунюю до 180^0, коє ће быти, ако точка D лежи у периферіи преко точкій A, B и C пролазећегъ круга.

V. Среднѣнѣ углова.

§. 97.

При већемъ премераваню догађа се више пута, да се потребный некій уголъ ACB неможе сматрати изъ свога врха C, но нѣгови су краци $AC=a$ и $BC=b$ при томъ определѣни. У таковомъ случаю поставлямо угломеръ у другой некой точки c_1, c_2, c_3, или c_4, меримо одстояніє $c_1C=c_2C=c_3C=$ $=c_4C=d$ и сматрамо угле α и β, изъ чега свега определюємо затимъ найпре угле x и y, а помоћу ньи потомъ вопросный уголъ $ACB=C$. Разрешенѣ овога задатка познато є подъ именима **среднѣнѣ — центрація — углова, или пренашанѣ — редукція — на средиште или врхъ.** сл. 17. I. II. и III.,

§. 98.

При истомъ задатку разликуємо обично у смотреню помоћне точке c свега три разна случая, но лако є увидити, да су последня два у главномъ само особити случаєви првога, и да намъ зато показати валя разрешенѣ задатка у првомъ само случаю, изъ коєга потомъ, дајући само углима x и y особите вредности, разрешенѣ она друга два слѣдує само собомъ.

§. 99.

Самымъ сматранѣмъ слика' увиђа се, да є у првомъ случаю (сл. 17. I.) сл. 17. I.

$$\measuredangle\ C = c_1 + (x + y)$$

или $C = c_2 - (x + y)$ почемъ є помоћна точка c или изванъ угла C или пакъ у нѣму.

У другомъ є случаю (сл. **17**. II) съ истомъ приметбомъ у смотреню точкій c_1 и c_2 или c_3 и c_4 :

$$\measuredangle\ C = c_1 + x = c_2 - x = c_3 + y = c_4 - y.$$

Найпосле у трећемъ случаю (сл. 17. III.)

$$\measuredangle\ C = c_1 + (x - y) = c_2 - (x - y).$$

Угалъ C дакле налазимо ако, према случаю, сматраномъ углу c_1 : c_2 , c_3 или c_4 угле x и y еданпутъ оба додамо или оба одъ нѣга одузмемо ; другій путъ само еданъ додамо или одузмемо ; трећій путъ найпосле еданъ додамо а онай другій одузмемо

За првый случай имамо

$$\sin x = \frac{d \sin \alpha}{a} \text{ и } \sin y = \frac{d \sin \beta}{b}$$

за другій є случай, при комъ є или y или $x = o$,

$$\sin\ x = \frac{d. \sin \alpha}{a} \text{ ако є } y = o, \text{ а } \sin y = \frac{d \sin \beta}{b}$$

ако є $x = 0$.

У трећемъ є найпосле случаю за помоћну точку у c_1

$$\sin x = \frac{d. \sin (\alpha_1 + \beta)}{a}, \sin y = \frac{d. \sin \beta_1}{b},$$

за помоћну пакъ точку у c_2

$$\sin x = \frac{d. \sin \alpha}{a}, \sin\ y = \frac{d. \sin (\alpha_2 + \beta_2)}{b}.$$

КНЬИГА ТРЕЋА.

СФЕРИЧНА ТРИГОНОМЕТРІЯ.

А.) Уводна понятія и правила; свойства сферичны труглова, и основна уравненія сферичне тригонометріє.

I. *Уводна понятія и правила.*

§. 100.

Изъ Стереометріє знамо већъ, да є свакій пресекъ сфере са некомъ равницомъ окружіє, и да се таковый пресекъ по средишту сфере зове и єсть найвеће окружіє, сви пакъ другій пресеци зову се маня окружія.

Одтуда увидили смо іошъ

1.) Да є полупречникъ свакогъ найвећегъ окружія раванъ полупречнику сфере, збогъ чега су сва найвећа окружія єдне и исте сфере међу собомъ равна.

2.) Да се найвећа окружія, пресецаюћи се узаямно преполавляю, єръ є ньіовъ пресекъ пречникъ сфере; збогъ чега се и ньіове периферіє на површію сфере такођеръ узаямно преполавляю

3.) Да права, коя средиште сфере сєдинява са средиштемъ манѣгъ каковогъ окружія, на ово управно стои, и обратно.

4.) Да є свако манѣ окружіє тымъ манѣ, што є одъ средишта сфере веħма удалѣно и обратно.

5.) Да се преко сваке две точке на површі̂ю сфере може повуħи єданъ найвеħій кругъ; єръ такове две точке, и треħа средиште сфере, савршено определюю равницу истогъ найвеħегъ окружія. Ако оне две точке нису краєви сферичногъ пречника; тадъ се преко исты може повуħи само єданъ найвеħій кругъ; маньи кругова напротивъ може преко исте две точке безбройно млого пролазити.

§. 101.

Свака равница, коя се сфере само у єдной єдиной точки дотиче, назива се **додирчицомъ** сфере.

сл. 18. По предходеħемъ є §у бр. 3. права Cc (сл. 18.) управна на равницу манѣгъ круга AB. Представимо себи, да се ова равница одъ средишта C све веħма удалява, т. є. да се одстояніє нѣно Cc све веħма увеħава, докъ найпосле непостане равно полупречнику $C\gamma$. У томъ є магновеню кругъ AB увиђавно савршено изчезао, равница пакъ PQ, или сада pq, престала є пресецати сферу и постала є нѣномъ додирчицомъ у краю γ полупречника $C\gamma$; а будуħи є Cc при своммъ увеħаваню све єднако управна остала на равницу PQ: то є увиђавно такођеръ и то, да є полупречникъ $C\gamma$ управанъ на додирчицу pq. **По тому полупречникъ повученъ на точку додираня управанъ є на додирчицу; и обратно.**

равница, коя е у краю полупречника на овай управно поставлѣна, есте додирчица сфере.

Ово бы се могло доказати и онымъ начиномъ, коимъ е у геометріи доказано, да е полупречникъ у точки додираня управанъ на дирку, и обратно.

§. 102.

Точка на површію сфере, коя одъ некогъ на овой повученогъ круга свуда еднако одстои: назива се **полусомъ** истога круга.

Поставимо управно на пречникъ сфере P_1P_2 (сл. 19.) едно найвеће окружіе $ADBEA$ и едно манѣ $adbea$, а по нѣму самомъ — пречнику — осимъ $P_1AP_2BP_1$ іошъ два найвећа окружія $P_1DP_2EP_1$ и $P_1FP_2GP_1$. Тетивке овы кругова ab, de и fg, као пречници манѣгъ круга $adbea$; а AB, DE и FG као пречници найвећегъ круга $ADBEA$, есу међу собомъ равне и свака управнымъ пречникомъ сфере P_1P_2 преполовлѣна; равни су дакле и преполовлѣни истымъ пречникомъ и ньіови луци, т. е. $arc\ aP_2 = dP_1 = fP_1 = \dots, arc\ aP_2 = dP_2 = fP_2 = \dots,$ $arc\ AP_1 = DP_1 = FP_1 = \dots = AP_2 = DP_2 = FP_2 = = \dots = 90^0$; и по томе краеви пречника P_1P_2 есу полуси оба на нѣга управна окружія. сл. 19.

§. 103.

Изъ овога видимо

1.) **Да свакій кругъ на сфери има два полуса, и да ови есу краеви управногъ пречника сфере на истый кругъ.** Оваковый пречникъ назива се осомъ круга; дакле

2.) Оса некога круга есте пречникъ сфере, кои нѣгове полусе сединява, и стои на нѣгово окружіє управно.

3.) Полуси свакогъ найвећегъ круга єсу уедно полуси и равноодстойногъ некогъ, манѣгъ круга.

4.) Найвећи кругови, кои єданъ преко полуса другогъ прелазе, єсу єданъ на другій управни; и обратно: **узаямно єданъ на другій управни найвећи кругови прелазе свакій преко полуса оногъ другогъ.**

5.) Управни найвећи кругови на некій трећій, пресецаю се у полусима овогъ трећегъ круга. Полусе дакле найвећегъ (а по трећемъ докученю и полусе манѣгъ) некогъ круга налазимо: ако на истый поставимо два управна найвећа круга; прорези овы єсу тражени полуси

6.) Точка на сфери, коя одъ две точке найвећегъ некогъ круга съ 90° одстои: єсте нѣговъ полусъ. Полусъ дакле найвећегъ некогъ круга наћи ћемо, ако на истый поставимо два управна найвећа лука одъ 90°; ньіовъ прорезъ бытће траженый полусъ.

7.) Свакій найвећій лукъ међу найвећимъ некимъ кругомъ и нѣговымъ полусомъ равань є 90°.

§. 104.

сл. 19. Нека є у пређашньой слики полупречникъ сфере $AC = DC = R$, полупречникъ равноодстойногъ манѣгъ круга $ac = dc = r$, найпосле угалъ $aCA = dCD = \alpha$. Као управница правоуглогъ триугла aCc бытѣе

$$r = R.\cos\alpha$$

Ако дакле поделимо найвеѣій некій кругъ $ADBEA$ у точкама A, D, F и т. д. на выше равны частій, и положимо потомъ по овыма и полусима истога круга найвеѣе кругове: ови ѣе поделити равноодстойный кругъ $adbea$ у точкама a, d, f и т. д. такоѣеръ на равне части, и одношенѣ части єднога према части другога бытѣе

$$AD : ad = R : r$$

или r съ горньомъ вредности заменююѣи

$$AD : ad = 1 : \cos\alpha$$

Овомъ сразмерности єсмо у станю определити степенъ равноодстойногъ манѣгъ круга посредствомъ степена найвеѣегъ, и обратно; у име чега, означуюѣи степенъ првога съ g, степенъ пакъ найвеѣега съ G, имамо

$$G : g = 1 : \cos\alpha$$

и одтуда

$$g = G.\cos\alpha, \text{ обратно } G = \frac{g}{\cos\alpha}$$

§. 105.

По себи є увиѣавно, да се найвеѣій некій кругъ никаковымъ маньимъ неможе пресеѣи на равне части, веѣъ свагда на єдну маню, а другу веѣу одъ 180°. На противъ свакій маньій кругъ преполавля се єднымъ найвеѣимъ

Ово предпошилюћи повуцимо садъ на сфери
сл. 20. (сл. 20.) єданъ маньій кругъ *adbea*, кои се съ найвећимъ *aDbEa* пресеца у тетивки *ab*; и положимо га потомъ око ове тетивке у равницу найвећега круга.

По горнѣму тетивка *ab* затеже у найвећемъ кругу два лука *aDb* и *aEb*, првый већій, а другій маньій одъ 180°. Овай маньій, као лукъ већега круга, краћій є одъ свакогъ одъ два, истомъ тетивкомъ затегнута лука ae_1b или ad_1b манѣга круга; єръ єдна иста тетивка затеже у манѣмъ кругу свагда већій лукъ него у већемъ. Ово постои, као што се увиђа, и о луцима свакогъ другогъ съ найвећимъ кругомъ пресецаюћегъ се манѣга круга, и по томе

Одъ свію међу исте две точке на сфери повучены лукова, онай, кои є часть найвећега круга, бытће найкраћій, ако є маньій одъ 180°, а найдужій, ако є већій одъ 180°.

По обичномъ, єръ наравномъ понятію, разумева се подъ одстояніємъ два предмета свагда найкраће ньіово одстояніє; збогъ тога мы ћемо у будуће, на основу горнѣга докученя, одстояніє две точке на сфери свагда определити маньимъ одъ два, међу истымъ точкама повучена лука найвећегъ круга.

§. 106.

Часть површі́я сфере заключена одъ три лука пресецаюћи се найвећи кругова, назива се **сферичнымъ триугломъ**, а заключуюћи га исти луци єсу нѣгове **стране**. При овомъ предпоставля се свагда, да ни єдна страна триугла ніє већа одъ 180°; єръ є свакій сферичанъ триугалъ, при комъ бы една, две или све три стране веће быле одъ 180°, свагда определѣнъ триугломъ, коега су стране суплементи нѣговы страна, т. е. манѣ одъ 180°.

§. 107.

Угли, подъ коима се она три окружія, коя луцима своима сферичанъ триугалъ заключую, међу собомъ пресецаю, зову се сферични угли и появлюю се на сфери међу странама триугла, збогъ чега се обично подъ сферичнымъ углима, разумеваю ови угли на сфери.

Свакій сферичанъ угалъ DCE (или на сфери DAE (сл. 21.) мери се сл. 21.

1.) угломъ FAG, кои образую дирке FA и GA, повучене у точки A на луке DA и EA; еръ су исте дирке у равницама пресецаюћи се окружія, и као такове у точки A управне на прорезъ окружія AB, збогъ чега е угалъ $FAG = DCE$.

2.) Лукомъ DE, повученымъ изъ A као полуса међу луке AD и AE, съ одстояніемъ одъ 90°; еръ су при томъ луци $AD = AE = 90°$, а збогъ тога $\left.\begin{matrix} DC \\ EC \end{matrix}\right\} \perp AB$, и лукъ DE частъ найвећегъ окружія т. е. угалъ DCE нагибный угалъ пресецаюћи се окружія или сферичный угалъ, а лукъ DE нѣгова мера.

Изъ овога увиђа се іошъ *а.*) да су очелни угли, кои постаю пресеченѣмъ два лука, еданъ другомъ равни (у слики угли DAE и dAe); *б*) да се сферични угли међу собомъ сравнити могу посредствомъ найвећи лукова, написаны међу ньіове краке изъ врхова као полуса', и *в*.) начинъ, коимъ се равни сферични угли построяваю.

§. 108.

Сферични триугли зову се равнострани, равнокраки, правоугли или подобни у оныма истымъ случаевыма, у коима припадаю та имена обичнымъ триуглима. Осимъ свію тій триуглова имамо iошъ и тако назване поларне триугле. То су сферични триугли, кои постаю, ако се изъ врхова другогъ сферичногъ триугла као полуса, напишу найвећи луци до узаямногъ пресецаня. Тако е н. п. у слици 22. $A_1B_1C_1$ поларный триугалъ триугла ABC и
сл. 22.
мы ћемо позднiе увидити, да е обратно опетъ овай поларный триугалъ онога.

II. Свойства сферичны триуглова.

§. 109.

При свакомъ е сферичномъ триуглу сбиръ две стране већiй одъ треће нѣгове стране.

Да бы се о овомъ уверили, повуцимо у сферичномъ триуглу ABC (сл. 23.) тетивке лукова AB, BC и CA. Тимъ добыямо обичанъ триугалъ ABC, о коемъ е већъ познато, да е сбиръ две нѣгове стране свагда већiй одъ треће стране; дакле
сл. 23.

$$\text{chord. } AB + \text{chord. } AC > BC.$$

Будући су пакъ луци AB, BC и AC луци найвећи кругова, и ови равногъ полупречника: то се исти луци могу сматрати као луци едногъ истога круга, а ньiове тетивке као тетивке у томъ кругу. Но тадъ одма собомъ слѣдуе, да, кадъ е сбиръ две тетивке веһій одъ треһе, и сбиръ истымъ тетивкама принадлежеһи лукова веһій мора быти одъ тетивке треһегъ лука: дакле

$$arc\ AB + arc\ AC > arc\ BC,$$

т. є. сбиръ две стране сферичногъ триугла веһій є доиста одъ треһе стране.

§. 110.

Сбиръ страна свакогъ сферичногъ триугла маньій є одъ єдногъ найвеһегъ круга т. є. маньій є одъ $4R$.

Продужимо при сферичномъ триуглу ABC (сл. 24.) две нѣгове стране AB и AC, докъ се непресеку по другій путъ у точки D. Луци BAD и BCD бытһе тадъ свакій $= 180^0$, єръ се найвеһи кругови узаямно преполавляю. Но по пређашнѣмъ є §. у триуглу ACD, $AC < AD + DC$, дакле додаюһи свакой страни ове неравности сбиръ $AB + BC$. сл. 24.

$$AC + AB + BC < AD + DC + AB + BC,$$

или збогъ $AD + AB = BAD$, а $DC + BC = BCD$:

$$AC + AB + BC < BAD + BCD, \text{ т. є.}$$

$$< 180^0 + 180^0 \text{ или}$$

$$< 4R$$

§. 111.

Као годъ што су врхови сферичногъ некогъ триугла ABC полуси супротни страна поларнога триугла: тако су исто обратно врхови овога, полуси супротны страна онога.

Будући є врхъ A (сл. 22.) као полусъ лука B_1C_1 одъ сваке нѣгове точке єднако и то съ 90° удалѣнъ, то є точка A одъ B_1, дакле и обратно B_1 одъ A у 90° удалѣна. Но тако исто одстои и точка C као полусъ лука A_1B_1 одъ точке B_1 дакле и обратно ова одъ нѣ съ 90°. Слѣдователно точка B_1 одстои одъ две точке A и C лука AC одъ сваке съ 90°, и єсть по тому полусъ истога лука. Сасвимъ истымъ начиномъ можемо доказати, да є точка A_1 полусъ лука BC, а точка C_1 полусъ лука AB. Тако дакле врхови поларнога триугла $A_1B_1C_1$ єсу доиста полуси супротны страна триугла ABC, и овай є збогъ тога обратно поларный триугалъ онога.

§. 112.

сл. 22. **Угли єднога, и супротне стране другогъ поларногъ триугла, допунюю се узаямно до 180°.**

По §. 107. є мера угла A лукъ $b\gamma$, дакле

$$A + B_1C_1 = b\gamma + B_1C_1 = b\gamma + (B_1\gamma + C_1b - b\gamma) =$$
$$= B_1\gamma + C_1b,$$

а будући є $B_1\gamma = C_1b = 90°$, то є дакле

$A + A_1C_1 = 180°$ истимъ є начиномъ

$B + A_1C_1 = 180°$

$C + A_1B_1 = 180°$

По истомъ є §. мера угла A_1 лукъ Bc, дакле

$$A_1 + BC = \beta c + BC = (Bc + C\beta - BC) +$$
$$+ BC = Bc + C\beta,$$

или сбогъ $Bc = C\beta = 90°$,

$A_1 + BC = 180°$. Исто тако налазимо

$$B_1 + AC = 180^0$$

$$C_1 + AB = 180^0.$$

§. 113.

Сбиръ углова свакогъ сферичногъ триугла маньій є одъ $6R$, а већій одъ $2R$.

Означуюћи съ A, B и C угле некогъ сферичногъ триугла, а дотично съ a_1, b_1 и c_1 истыма супротне стране поларногъ триугла, имамо по горнѣму

$$(A + a_1) + (B + b_1) + (C + c_1) = 6\,R, \text{ или}$$

$$\alpha) \ldots A + B + C + (a_1 + b_1 + c_1) = 6\,R, \text{ и одтуда}$$

$$A + B + C = 6\,R - (a_1 + b_1 + c_1), \text{ и дакле}$$

$$(A + B + C) < 6\,R.$$

Будући є пакъ по §. 110. сбиръ страна поларнога триугла $a_1 + b_1 + c_1 < 4\,R$, то є іошъ, ову неравность одъ уравненія (α одузимаюћи

$$(A + B + C) > (6\,R - 4\,R), \text{ т. є. } > 2\,R$$

Слѣдства. **1.)** Будући да угли свакогъ сферичногъ триугла леже међу $2\,R$ и $6\,R$, то у сферичномъ триуглу може быти два и три права угла, а могу быти и сви угли тупи, но збогъ предходећегъ §. свакій $< 180^0$. **2.)** Ако су у триуглу два права угла, онда су истымъ углима супротне стране свака 90^0, и дакле врхъ трећега угла быт'ће полусъ супротне му стране. **3.)** Ако су сви угли у сферичномъ триуглу прави, онда су све три стране четвртине круга, т. є. истый є триугалъ уедно и свой поларный триугалъ, а нѣгова є површина осма часть површія сфере.

§. 114.

Триугли на истой сфери єсу савршено равни, ако имаю 1.) све три стране, 2.) две стране и заключеный угалъ, 3.) єдну страну и оба на ньой лежећа угла, и найпосле 4.) сва три угла саответствено равна.

Докази за прва три случая исти су као у геометріи, у четвртомъ пакъ можемо доказати савршену равность триуглова помоћу поларны ньіовы триуглова слѣдуюћимъ начиномъ.

Збогъ саответствено равны углова при вопроснымъ триуглима єсу по пређашнѣмъ §. стране поларны триуглова саответствено равне, дакле су и угли овы триуглова саотвѣтствено равни; но кадъ су угли у поларнымъ триуглима равни, онда су по истомъ §. обратно и саответствене стране у вопроснымъ триуглима равне, и ови потоме, имаюћи равне угле и равне стране, єданъ другомъ савршено равни

§. 115.

У равнокракомъ сферичномъ триуглу єсу угли на трећой страни єданъ другомъ равни, и обратно: **ако су ови угли равни, онда є триугалъ равнокракъ.**

Да бы се о овомъ уверили одсецимо на равнымъ крацима $AD = DE$ (сл. 25.) и положимо потомъ преко D и B найвећій лукъ DB, а преко E и A найвећій лукъ EA. Будући є и $CD = CE$, то су триугли DCB и ECA, имаюћи две стране са заклюценымъ угломъ C саответствено равне, єданъ другомъ савршено равни, збогъ чега є $AE = BD$.

сл. 25.

Сматраюћи садъ іошъ триугле ABE и BAD налазимо, да су и они савршено равни, еръ су имъ све три стране саответствено равне, т. е. $BC = AD$, $AE = BD$, а $AB = AB$ као заедничка страна; равни су дакле и саответствеин угли, а међу овыма $\angle ABE = \angle BAD$, угли на основици равнокракогъ триугла.

Да е обратно збогъ равны углова на едной страни триугалъ равнокракъ, доказуемо по одсеченомъ $AD = BE$ слѣдуюћимъ начиномъ:

Збогъ $AB = AB$, $AD = BE$ и $\angle DAB = EBA$, триугли су BAD и ABE савршено равни, и зато $BD = AE$, $\angle a_1 = b_1$, $d_1 = e_1$; збогъ овога е опетъ $a = b$, $d = e$, и по томе триугли ACE и BCD такођеръ савршено равни, дакле и $DC = EC$. Садъ имамо

$$DC = EC \text{ и } AD = BE, \text{ дакле}$$

$$DC + AD = EC + BE, \text{ или}$$

$$AC = BC,$$

а то ће рећи: триугалъ е ACB равнокракъ.

Додатакъ. Лукъ найвећегъ круга, повученъ изъ половине основице — трећа или неравна страна — равнокракогъ сферичногъ триугла на супротный врхъ, стои управно на основицу, и обратно: управный лукъ изъ врха равнокракогъ триугла на основицу, преполавля основицу. Докази за ово есу врло лаки и оставляю се збогъ тога почетнику на упражненіе.

§. 116.

У свакомъ е сферичномъ триуглу већемъ углу супротна страна већа, и обратно већой страни супротный угалъ већій.

сл. 26. Нека є у триуглу ABC (сл. 26.) угалъ $ACB > CAB$. Построивши у точки C угалъ $DCA = CAB$ быт'ће по предходећемъ §у триугалъ ADC равнокракъ, и одтуда $AD = CD$. Но по §. є 109. $CD + DB > CB$, или CD съ равнымъ AD заменююћи, $AD + DB > CB$, т. є.

$$AB > CB,$$

и тако доиста већемъ углу супротна страна већа.

За обратный доказъ можемо употребити поларный триугалъ. Ако є страна $AB > BC$, онда є збогъ $AB + C_1 = 180^0$ и $BC + A_1 = 180^0$, увиђавно угалъ $C_1 < A_1$, и дакле углу A_1 супротна страна B_1C_1 поларнога триугла по горнћму већа одъ нћгове, углу C_1 супротне стране A_1B_1. Но по свойству є поларны триуглова $B_1C_1 + A = 180^0$, и $A_1B_1 + C = 180^0$; слћдователно є угалъ

$$A < C,$$

т. є. већой страни AB супротный угалъ већій.

§. 117.

Изъ стереометріє знамо већъ, да се садржай кришке има према површію сфере као найвећа ширина кришке према 360^0; сада пакъ увиђамо, да ова найвећа ширина кришке ништа друго ніє, но мера нћнога угла, и по томе **одношенћ кришке према површію целе сфере изражено є одношенћмъ нћнога угла према 360^0.** Изъ овога слћдуе далћ, да **кришке едне исте сфере међу собомъ у истомъ одношеню стое као ньіовы угли.**

§. 118.

Садржай свакогъ сферичногъ триугла може се определити сувишкомъ нѣговы углова надъ 180°.

Да бы ово лакше доказали, узмимо на сфери триугалъ ABC (сл. 27.) тако, да една нѣгова страна AB лежи у найвећемъ кругу $ABabA$, кои представля сферу (т. є. да є иста страна часть овога круга), и попунимо потомъ оне друге две нѣгове стране AC и BC до целы кругова. Ови ће се, као што се лако увиђа, по другiй путъ пресећи на противной половини сфере у точки c. сл. 27.

По §. є 100.

$$ACa = AC + Ca = 180^0, \text{ као годъ што є и}$$

$$Cac = Ca + ac = 180^0\text{; дакле } AC = ac.$$

Истымъ начиномъ налазимо iошъ да є $BC = bc$, а $AB = ab$. Триугли дакле ABC и abc имаю све три стране саответствено равне, и єсу по томе савршено равни и єдногъ истогъ садржая.

Означуюћи далѣ површiє сфере съ S, подає намъ се изъ саме слике

$$\triangle ABC + \triangle ACb + \triangle Abc + \triangle AcB = \frac{S}{2};$$

но будући є, као што се по себи увиђа, кришка $ABaCA = abAca$: то є, збогъ $\triangle ABC = abc$,

$$ABaCA - ABC = abAca - abc\text{, т. є.}$$

$$\triangle aBC = \triangle Abc\text{, и дакле,}$$

узимаюћи место $\triangle$ Abc триугалъ aBC,

$$\triangle ABC + \triangle ACb + \triangle aBC + \triangle AcB = \frac{S}{2} \; . \; . \; (\alpha$$

Садъ имамо по предходећемъ §.

крипка $ABaCA = \triangle ABC + \triangle aBC = \frac{A}{360} \cdot S$,

„ $BAbacA = \triangle ABC + \triangle ACb = \frac{B}{360} \cdot S$,

„ $CAcBC = \triangle ABC + \triangle ABc = \frac{C}{360} \cdot S$;

дакле, ова три уравненія сабирајући,

$$3 \triangle ABC + \triangle aBC + \triangle ACb + \triangle ABc = S \; \frac{A+B+C}{360},$$

или $2 . \triangle ABC + \triangle ABC + \triangle aBC + \triangle ACb +$
$+ \triangle ABc = S \frac{A+B+C}{360}$, а

съ обзиромъ на уравненіе $(\alpha$

$$2 . \triangle ABC + \frac{S}{2} = S \frac{A+B+C}{360}, \text{ и одтуда}$$

$$\triangle ABC = \frac{S}{8} \cdot \frac{A+B+C-180}{R};$$

при чему є, као што знамо, $R = 90^0$.

Изъ овогъ уравненія слѣдує сразмерность

$$\triangle ABC : \frac{S}{8} = (A + B + C - 180^0) : R,$$

у коіой є осимъ $\triangle ABC$, т. є. осимъ нѣговогъ садржая, све друго познато. Сматрајући дакле осму часть сфере $\frac{S}{8}$ као єдиницу површія, а правый угалъ R као єдиницу углова: т. є. $\frac{S}{8} = 1$ и R 1, бытће у овомъ смислу

$$\triangle ABC = (A + B + C)^0 - 180^0. \quad (*)$$

Изъ свега овога увиђа се довольно, да се садржай некогъ сферичногъ триугла *ABC* доиста може определити сувишкомъ нѣговы углова надъ 180^0 или два права угла. Овай сувишакъ углова триугла *ABC* надъ 180^0 назива се ньіовымъ **ексцесомъ**.

Горня сразмерность показує, да є осма часть сферичногъ површія у вопросномъ триуглу оноликo пута садржана, колико у ексцесу нѣговы углова има правы углова.

III. Основна уравненія за разрешенѣ сферичны триуглова.

§. 119.

Као годъ што смо у равной тригонометріи сматрали полупречникъ круга као единицу, тако исто узимамо и овде, да є полупречникъ сфере, на кою ће се наша испытиваня односити, такођеръ единица. Ово єданпутъ за свагда спомињући, повуцимо у врху *A* сферичнога триугла *ABD* (сл. 28.) сл. 28.
на нѣгове стране *AB* и *AD* дирке *AE* и *AF*, и продужимо полупречнике *AB* и *AD* до пресецаня съ истымъ диркама у точкама *E* и *F*. Означуюћи іошъ краћине ради *AB*, *AD* и *BD* односно съ *d*, *b* и *a*, имамо по томъ за условлѣный полупречникъ

$$AE = tang\, b,\ AF = tang\, d,\ CE = sec\, b,\ CF = sec\, d.$$

---

*) Овай є изразъ садржая сферичногъ триугла одъ хвално познатога Холандеза Алберта Жирар-а (Albert Girard).

Изъ правостраны пакъ триуглова CEF и AEF слѣдуе по §. 59.

$$\overline{EF}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 - 2.\overline{CE}.\overline{CF}.\cos ECF \text{ и}$$
$$= \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 - 2.\overline{AE}\,\overline{AF}\cos EAF,$$

или, по замени съ предходеђимъ изразима и обзиромъ на то, да є

$$\angle ECF = a, \text{ а } \angle EAF = \text{сфер. } \angle A:$$

$$\sec^2 b + \sec^2 d - 2\sec b.\sec d.\cos a = tang^2 b + tang^2 d -$$
$$- 2\,tang\,b.\,tang\cos A.$$

Изражаваюђи далѣ у овомъ уравненію квадрате секанта' съ тангентама, и потомъ скраћуюђи добыямо

$$\sec b.\sec d.\,sos\,a - 1 = tang\,b.\,tang\,d.\cos A$$

или, секанте и тангенте іошъ синусима и косинусима заменююђи,

$$\cos a - \cos b.\cos d. = \sin b.\sin d.\cos A;$$

одавде пакъ слѣдуе

$$\cos A = \frac{\cos a - sos\,b.\cos d.}{\sin b.\sin d.}.$$

Истымъ начиномъ добыямо

$$\cos B = \frac{\cos b. - \cos a\cos d.}{\sin a.\sin d.} \quad \ldots\ldots (1.$$

$$\cos D = \frac{\cos d - \cos a.\cos b.}{\sin a.\sin b.}$$

§. 120.

Означуюђи стране горнѣмъ триуглу принадлежеђегъ поларногъ триугла съ a_1, b_1 и d_1 а нѣгове угле дотично съ A_1, B_1 и D_1, имамо по §. 112.

$a = 180^0 - A_1$, $b = 180^0 - B_1$, $d = 180^0 - D_1$

и $A = 180^0 - a_1$

Ове вредности у горнѣ уравненіе место a, b, d и A узимаюћи слѣдуе

$$-\cos a_1 = \frac{-\cos A_1 - \cos B_1 \cos D_1}{\sin B_1 \sin D_1}, \text{ дакле}$$

$$\cos a_1 = \frac{\cos A_1 + \cos B_1 \cos D_1}{\sin B_1 \sin D_1}, \text{ или}$$

сказальке (на увиђавномъ основу) изоставляюћи

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos D}{\sin \sin D}$$

Подобно налазимо за остале две стране . . . . (2.

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos D}{\sin A \sin D}$$

$$\cos d = \frac{\cos D + \cos A \cos D}{\sin A \sin B}$$

§. 121.

Изражаваюћи у образцу §. 119. $\cos A$ полу угломъ, узимаюћи т. е. еданпутъ $\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1$, а другій путъ $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$ добыямо, ако при томъ у едно единицу у другу часть пренесемо и ову уредимо,

$$1.)\ 2\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos b \cos d + \sin b \sin d}{\sin b \sin d}$$

$$= \frac{\cos a - \cos (b + d)}{\sin b \sin d},$$

$$2.)\ 2\,sin^2\frac{A}{2} = \frac{sin\,b\,sin\,d - cos\,a + cos\,b\,cos\,d}{sin\,b\,sin\,d}$$

$$= \frac{cos\,(b-d) - cos\,a}{sin\,b\,sin\,d};$$

или, збогъ $cos\,\varphi - cos\,\psi = -2\,sin\frac{\varphi+\psi}{2}\,sin\frac{\varphi-\psi}{2} =$

$$= 2\,sin\frac{\varphi+\psi}{2}\,sin\frac{\psi-\varphi}{2}:$$

$$2\,cos^2\frac{A}{2} = \frac{2\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+d)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(b+d-a)}{sin\,b\,sin\,d}$$

$$2\,sin^2\frac{A}{2} = \frac{2\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(a+b-d)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,(a+d-b)}{sin\,b\,sin\,d}$$

Съ 2 скраћуюћи и краћине ради іошъ $a+b+$ $+d=2S$ поставляюћи, слѣдуе найпосле

$$cos^2\frac{A}{2} = \frac{sin\,S\,sin\,(S-a)}{sin\,b\,sin\,d},$$

$$sin^2\frac{A}{2} = \frac{sin\,(S-b)\,sin\,(S-d)}{sin\,b\,sin\,d}.$$

Истымъ начиномъ нашли бы іошъ

$$cos^2\frac{B}{2} = \frac{sin\,S\,sin\,(S-b)}{sin\,a\,sin\,d}$$

$$cos^2\frac{D}{2} = \frac{sin\,S\,sin\,(S-d)}{sin\,a\,sin\,b},$$

$$sin^2\frac{B}{2} = \frac{sin\,(S-a)\,sin\,(S-d)}{sin\,a\,sin\,d}$$

$$sin^2\frac{D}{2} = \frac{sin\,(S-a)\,sin\,(S-b)}{sin\,a\,sin\,b};$$

и одтуда редомъ

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin S \sin(S-a)}{\sin b \sin d}} \\
\sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(S-b)\sin(S-d)}{\sin b \sin d}} \\
\cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin S \sin(S-b)}{\sin a \sin d}} \\
\sin\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(S-a)\sin(S-d)}{\sin a \sin d}} \\
\cos\frac{D}{2} &= \sqrt{\frac{\sin S \sin(S-d)}{\sin a \sin b}} \\
\sin\frac{D}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(S-a)\sin(S-b)}{\sin a \sin b}}
\end{aligned}\right\} \ldots . (3$$

§. 122.

По § є 26. $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, или узимаюћи за $\sin\frac{A}{2}$ ньіове вредности, коє се подаю изъ горньи израза:

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin S \sin(S-a)\sin(S-b)\sin(S-d)}}{\sin b \sin d},$$

краћине пакъ ради, $\sqrt{\sin S \sin(S-a)\sin(S-b)\sin(S-d)} = w$ поставляюћи,

$$\sin A = \frac{2w}{\sin b \sin d}$$

Истымъ начиномъ налазимо

$$\sin B = \frac{2w}{\sin a \ \sin d}, \ \sin D = \frac{2w}{\sin a \ \sin b};$$

дакле

$$\sin A : \sin B : \sin D = \frac{2w}{\sin b \sin d} : \frac{2w}{\sin a \sin b} : \frac{2w}{\sin a \sin b},$$

или, десна одношеня съ $2w$ скраћуюћи, а съ $\sin a \sin b \sin d$ мложећи,

$$\sin A : \sin B : \sin D = \sin a : \sin b : \sin d \ldots\ldots (4$$

т. є. **Синуси углова сферичнога тругла имаю се као синуси супротны страна.**

§. 123.

Мложенѣмъ и деобомъ дотичны образаца §. 121. добыямо

$$\frac{\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} D} = \frac{\sin (S - b)}{\sin d} \ldots\ldots\ldots (\alpha$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} D} = \frac{\sin (S - a)}{\sin d} \ldots\ldots\ldots (\beta$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} D} = \frac{\sin (S - d)}{\sin d} \ldots\ldots\ldots (\gamma$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} D} = \frac{\sin S}{\sin d} \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta$$

Додаюћи друго уравненіє првомъ, и одузимаюћи га одъ нѣга, слѣдує

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A \pm B)}{\cos \frac{1}{2} D} = \frac{\sin (S - b) \pm \sin (S - a)}{\sin d}$$

или, збогъ $\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$, а $\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$ — §. 23. —

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}D} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(2S-a-b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin d}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin d}\text{, а}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}D} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(2S-a-b)\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin d}$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin d};$$

найпосле $\sin d$ полууглом изражавајући и разломакъ потомъ скраћујући,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}D} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}d}\\ \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}D} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}d}\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(5.$$

Подобнымъ начиномъ налазимо, ако треће уравненіе четвртомъ додамо и одъ истога одузмемо,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}D} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}d}\\ \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}D} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}d}\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(6.$$

Ова четири уравненія позната су подъ именомъ Гаусовы (Gauß) уравненія.

§. 124.

Делећи прво одъ горньи уравненія четвртымъ, а друго трећимъ, добыямо

$$tang\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ tang\ \frac{D}{2} = \frac{cos\ \frac{1}{2}(a-b)}{cos\ \frac{1}{2}(a+b)} \quad \text{и}$$

$$tang\ \tfrac{1}{2}(A-B)\ tang\ \frac{D}{2} = \frac{sin\ \frac{1}{2}(a-b)}{sin\ \frac{1}{2}(a+b)}, \text{ и од-}$$

туда

$$\left.\begin{aligned} tang\ \tfrac{1}{2}(A+B) &= \frac{cos\ \frac{1}{2}(a-b)}{cos\ \frac{1}{2}(a+b)}\ cot\ \frac{D}{2} \\ tang\ \tfrac{1}{2}(A-B) &= \frac{sin\ \frac{1}{2}(a-b)}{sin\ \frac{1}{2}(a+b)}\ cot\ \frac{D}{2} \end{aligned}\right\} \ldots (7.$$

Деобомъ пакъ другога чрезъ прво, а трећегъ чрезъ четврто слѣдує

$$tang\ \tfrac{1}{2}(a-b)\ cot\ \frac{d}{2} = \frac{sin\ \frac{1}{2}(A-B)}{sin\ \frac{1}{2}(A+B)} \quad \text{и}$$

$$tang\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ cot\ \frac{d}{2} = \frac{cos\ \frac{1}{2}(A-B)}{cos\ \frac{1}{2}(A+B)},$$

дакле

$$\left.\begin{aligned} tang\ \tfrac{1}{2}(a-b) &= \frac{sin\ \frac{1}{2}(A-B)}{sin\ \frac{1}{2}(A+B)}.\ tang\ \frac{d}{2} \\ tang\ \tfrac{1}{2}(a+b) &= \frac{cos\ \frac{1}{2}(A-B)}{cos\ \frac{1}{2}(A+B)}.\ tang\ \frac{d}{2} \end{aligned}\right\} \ldots (8.$$

Ова опетъ четири уравненія єсу тако назване Неперове *) сферичне аналогіє.

---

*) Лордъ Џонъ Неперъ (Lord John Napier или обично Neper).

§. 125.

Одма у почетку сферичне тригонометріе рекли смо, да ћемо изъ наведены узрока сматрати само оне триугле, кои имаю стране манѣ одъ 180°. Испытуюћи садъ обзиромъ на ову приметбу последнѣ уравненіе §. 123., увиђамо, да су у истомъ $\sin \frac{D}{2}$ и $\cos \frac{d}{2}$ збогъ $\frac{D}{2}$ на свакій начинъ $<$ одъ 180° (§. 113.), а $\frac{d}{2} < 90°$, свагда положителни, косинусъ дакле одъ $\frac{1}{2}(A+B)$ и $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ свагда еднакога знака. Но ово, као што є такођеръ лако увидити, неможе быти иначе, него само ако су сбирови $(A+B)$ и $(a+b)$ еднородни, т. є. или оба већи, или оба равни, или найпосле оба маньи одъ 180°; **зато є при свакомъ сферичномъ триуглу сбиръ две стране свагда $\gtreqless$ 180°, ако є сбиръ истымъ странама супротны углова $\gtreqless$ 180°; и обратно.**

Б.) Разрешенѣ сферичны триуглова.

I. Разрешенѣ правоуглогъ триугла.

§. 126.

У §. 113. видили смо, да правоуглы сферичны триуглова има трояки, сирѣчь съ еднымъ, съ два и съ три права угла.

При триуглу съ два права угла єсу две нѣгове стране четвртине круга, а трећа є страна мера коссога угла. При триуглу пакъ съ три права угла єсу єве три стране одъ 90°. Ови су дакле триугли подпуно определѣни, и нама по томе само іошъ остає показати разрешенѣ правоуглогъ триугла съ єднымъ само правымъ угломъ.

§. 127.

Означимо у име тога єданпутъ за свагда правый угалъ съ *D*, а коссе угле съ *A* и *B*, дакле, по єданпутъ веѣъ уведеномъ начину, пречницу съ *d*· а управнице съ *a* и *b*.

Мы знамо, да є правоуглый триугалъ подпуно определѣнъ, ако су осимъ правога угла іошъ два нѣгова основка позната. Свако дакле уравненіє за разрешенѣ таковога триугла мора садржати три основка, два позната, а єданъ непознатъ. Почемъ се пакъ далѣ петъ основака — осимъ правога угла — по три на слѣдуюѣій десеторый начинъ меѓу собомъ саюзити могу

$$\overset{1}{dab},\ \overset{2}{daA},\ \overset{3}{daB},\ \overset{4}{dbA},\ \overset{5}{dbB},\ \overset{6}{dAB},\ \overset{7}{abA},$$

$$\overset{8}{abB},\ \overset{9}{aAB},\ \overset{10}{bAB}\ :$$

то имамо при правоугломъ триуглу свега десетъ вопросны случаєва, и потребуємо дакле за нѣгово разрешенѣ толико исто уравненія. Ова налазимо найлакше слѣдуюѣимъ начиномъ.

§. 128.

Збогъ $D = 90^0$, дакле $sin\ D = 1$, а $cos\ D = o$: слѣдує

1.) изъ треѣегъ уравненія §. 119. подъ (1.

$$cos\ d = cos\ b \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha$$

2.) изъ трећегъ уравненія подъ (2. у §. 120.

$$\cos d = \cot A . \cot B \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta.$$

3.) найпосле изъ уравненія подъ (4. у §. 122.

$$\left.\begin{array}{l} \sin a = \sin A \; \sin d \\ \sin b = \sin B \; \sin d \end{array}\right\} . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma.$$

Поставляюћи садъ у прво уравненіе подъ (1. §. 119. найпре место $\cos d$, а после место $\cos a$ ньіове вредности по горнѣмъ уравненію подъ (α., добыямо

$$1.)\ \cos A = \frac{\cos a - \cos a . \cos^2 b}{\sin b . \sin d} = \frac{\cos a\,(1 - \cos^2 b)}{\sin b . \sin d}$$

$$= \frac{\cos a . \sin^2 b}{\sin b . \sin d} = \frac{\cos a . \sin b}{\sin d},$$

или, збогъ $\sin d = \dfrac{\sin a}{\sin A}$ по првомъ уравненію подъ (γ.

$$\cos A = \frac{\cos a . \sin b . \sin A}{\sin a}, \text{ и одтуда}$$

$$\cot A = \cot a . \sin b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\delta.$$

$$2.)\ \cos A = \frac{\cos d\,(1 - \cos^2 b)}{\sin b . \sin d . \cos b} = \frac{\cos d . \sin^2 b}{\sin b . \sin d . \cos b}$$

$$= \frac{\cos d . \sin b}{\sin d . \cos b}, \text{ т. є.}$$

$$\cos A = \tang b . \cot d \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\varepsilon.$$

Подобнымъ начиномъ изъ другогъ уравненія истога §.

$$cot\,B = cot\,b.\,sin\,a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\zeta. \text{ и}$$
$$cos\,B = tang\,a.\,cot\;d.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\eta.$$

Найпосле мложећи уравненія подъ (ε и (η. прво съ другимъ, а друго съ првымъ подъ (γ. слѣдуе

$$cos\,A.\;sin\,b = tang\,b.\,cot\,d.\;sin\,B.\;sin\,d\,,\;\text{и}$$
$$cos\,B.\;sin\,a = tang\,a.\,cot\,d.\;sin\,A.\;sin\,d,\;\text{т. е.}$$

$$cos\,A = \frac{sin\;B.\;cos\;d}{cos\;b},\;\text{а}$$

$$cos\,B = \frac{sin\;A.\;cos\;d}{cos\;b},$$

или узимаюћи место $cos\;d$ нѣгову вредность изъ уравненія (α., и потомъ скраћуюћи

$$\left.\begin{array}{l} cos\,A = \;sin\,B.\,cos\,\alpha \\ cos\,B = \;sin\,A.\,cos\,b \end{array}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(\vartheta.$$

§. 129.

Сравнююћи међу собомъ све могуће, у §. **127**. наведене саюзе основака правоуглогъ триугла, увиђамо лако, да су **2**. и **5**., **3**. и **4**., **7**. и **8**., **9**. и **10**. само знацима разни, по смислу пакъ истоветни; и дакле да по бытности разликуюћи се случаєва при разрешеню правоуглога триугла имамо свега само шестъ, одъ кои

првый, садржаваюћи пречницу и обе управнице, разрешава се уравненіємъ подъ (α;

другій и петый, у коима є пречница, една управница и овой супротный угалъ, уравненіяма подъ (γ.;

трећій и четвртый, сложени изъ пречнице, едне управнице и на овой лежећегъ угла, подлеже уравненіяма подъ (ε и (η;

шестый, сваћаюћи пречницу и оба косса угла, уравненію подъ (β.;

седмый и осмый, у коима су обе управнице и єданъ угалъ, определюю се уравненіяма подъ (δ. и (ζ. ; найпосле

деветый и десетый, садржећи єдну управницу и оба косса угла, уравненіяма подъ (ϑ.

§. 130.

Дояко већъ выше пута споменутый Неперъ поставіо є за разрешенѣ правоуглогъ триугла два врло проста и за памтенѣ лака правила, коя, као што ћемо мало сниже видити, садрже сва, у §. 128. за исту цѣлъ изнађена уравненія.

Испытуюћи познаты 10 саюза (§. 127.) у смотреню положеня ньіовы основака — безъ обзира на правый угалъ, кои є безъ свакогъ уплива —, налазимо: да у свакомъ саюзу има єданъ основакъ, и само тай єданъ, према комъ оба друга основка появлюю се или као супротни, или као на нѣму лежећи. Тога є свойства у 1. и 6. саюзу основакъ d, у 2. и 8. основакъ a, у 3. и 10. основакъ B, у 4. и 9. основакъ A, найпосле у 5. и 7. основакъ b. Називаюћи ове основке **средньима**, и узимаюћи место управница a и b ньіове комплементе (90^0-a) и (90^0-b), — поменута два Неперова правила састоє се у слѣдуюћемъ

1.) Косинусъ среднѣгъ основка раванъ є производу котангента' на нѣму лежећа два основка, и

2.) Косинусъ среднѣгъ основка раванъ є производу синуса супротны основака.

Првомъ подлежи, као што лако докучуємо 3., 4., 6., 7. и 8., а другомъ 1., 2., 5., 9. и 10. случай; дакле свакимъ разрешава се половина могући случаєва.

§. 131.

О основаности овы правила увераваmo се найболѣ тымъ, што ньіовымъ надлежнымъ употреблѣнѣмъ добыямо за свакій случай изнађена уравненія подъ §. 128.

Тако н. п. налазимо 1.) за првый саюзъ dab, при комъ є пречница d по §. пређашнѣмъ средньій основакъ, а управнице a и b истомъ супротни основци, посредствомъ 2. правила

$$\begin{aligned} \cos d &= \sin (90^0 - a) . \sin (90^0 - b) \\ &= \cos a . \cos b , \end{aligned}$$

уравненіє подъ (α, као што по §. 128. за истый случай валя.

2.) За 4. саюзъ dbA, при комъ є средньій основакъ A, а d и b на нѣму лежећи основци, по 1. правилу као што треба

$$\begin{aligned} \cos A &= \cot d . \cot (90^0 - b) \\ &= \cot d . \operatorname{tang} b \end{aligned}$$

уравненіє подъ (ε.

3.) За 8. саюзъ abB, у комъ є средньій основакъ a, а b и B — правый угалъ D не сматраюћи — на томъ среднѣмъ лежећи основци, по истомъ — 2. — правилу

$$\cos (90^0 - a) = \cot (90^0 - b) \cot B \text{, т. є.}$$

$$\sin a = \operatorname{tang} b . \cot B \text{, дакле}$$

$$\cot B = \frac{\sin a}{\operatorname{tang} b} = \sin a . \cot b ,$$

уравненіє подъ (ζ. као што треба. И т. д.

§. 132.

Изъ уравненія подъ (*δ*. у §. 128. слѣдуе

$$\sin b = \frac{\cot A}{\cot a} = \frac{\tang a}{\tang A}$$

Сматраюћи ово урравненіе увиђамо, да е $\sin b$ збогъ $b < 180^0$ (§. 106), свагда положителанъ, и дакле да $\tang a$ и $\tang A$ мораю имати свагда еданъ истый знакъ; но то ніе могуће иначе, него ако е управница a и супротный іой уголъ A едногъ истога рода, то ће рећи обое $\gtreqless 90^0$. То исто докучуемо и изъ уравненія подъ (*ζ*. у смотреню оне друге управнице b и супротногъ іой угла B, и по томе

при правоугломъ е триуглу свака управница $\gtreqless 90^0$, ако е супротный уголъ $\gtreqless 90^0$; и обратно.

§. 133.

Изъ узрока што е свакій уголъ и свака страна сферичногъ триугла у обште свагда $< 180^0$ (§. 106 и 113.): синусъ свакогъ нѣговогъ угла или сваке стране есте свагда положителанъ. Но мы знамо, да свакій таковый синусъ принадлежи двома углима, едномъ манѣмъ, а другомъ већемъ одъ 90^0. Зато сви они вопроси при разрешеню сферичногъ триугла, у коима се непознатый основакъ определюе синусомъ, подлеже той сумньи, кою вредность траженогъ основка валя узети, едали т. е. ону маню, или мож'да ону већу одъ 90^0?

Таковы вопроса има при правоугломъ триуглу, као што уравненія §. 128. показую, свега петъ, и мы дакле треба сада да извидимо, є ли триугалъ у свима тыма доиста неопределѣнъ, или нiє.

§. 134.

Определюю̂ћи

1.) **изъ задате пречнице и єдне управнице овой супротный угалъ**, или

2.) **изъ пречнице и єдногъ угла овоме супротну управницу**, — имамо по уравненiяма подъ (γ, н. п. по првомъ,

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin d}, \text{ и } \sin a = \sin A . \sin d.$$

Но по §. 132 управница a и супротный iой угалъ A мораю быти єднога истога рода. Непознатый дакле основакъ єсть у оба случая известнога рода, и по томе триугалъ у оба случая подпуно **определѣнъ**.

§. 135.

Определюю̂ћи по истимъ уравненiяма

3.) **изъ познате єдне управнице и супротногъ iой угла непознату пречницу**, н. п. опетъ по првомъ, имамо

$$\sin d = \frac{\sin a}{\sin A},$$

кое уравненiє испытуюћи увиђамо, да угалъ A може быти $\gtrless 90^0$.

Ако є $A > 90^0$, онда є збогъ $A + D > 180^0$, по §. 125. и $a + d > 180^0$; но управница є a у томъ случаю збогъ $A > 90^0$ по §. 132. $> 90^0$; пречница дакле d при томъ може быти $\gtreqless 90^0$, и по томе триугалъ у истомъ случаю **неопредѣлѣнъ**, развѣ α.) ако бы было $A = a$, или β.) ако є маня вредность пречнице $d \geqq 180^0 - a$. Єръ у првомъ бы случаю было $\sin d = 1$, дакле d известно $= 90^0$; у другомъ пакъ слѣдовало бы, да є противъ условія $a < 90^0$, збогъ чега у истомъ случаю пречница d може быти само веħа оъ 90^0.

Ако є напротивъ $A < 90^0$, onда є изъ исты узрока као горе $a + d < 180^0$; пречница дакле d, збогъ $a < 90^0$, може быти и у овомъ случаю $\gtreqless 90^0$, и зато триугалъ опетъ **неопредѣлѣнъ**, осимъ ако бы при томъ было α.) опетъ $A = a$, или β.) веħа вредность пречнице $d \geqq 180^0 - a$. Єръ у првомъ бы случаю као и горе d было непремено $= 90^0$; у другомъ пакъ слѣдовало бы, да є управница a противъ условію $> 90^0$, збогъ чега у томъ случаю пречница d може быти само $< 90^0$; дакле у оба ова особита случая и пречница и съ ньомъ триугалъ опредѣлѣнъ.

§. 136.

Найпосле, тражеħи

4.) по уравненію подъ (δ. или (ζ.
изъ познате єдне управнице и супротногъ іой угла ону другу управницу, или

5.) по уравненіяма подъ (ϑ.

изъ исты основака онай другій уголъ, имамо, употреблююħи у свакомъ случаю прво уравненіе,

$$\sin b = \frac{\cot A}{\cot a} = \frac{\tang a}{\tang A}, \text{ и } \sin B = \frac{\cot A}{\cos a}.$$

У овыма є вопросима триугалъ, као што лако можемо увидити, осимъ єдногъ случая, где бы было $A = a$, и у комъ є случаю непознатый основакъ непремено $= 90^0$, иначе свагда **неопредѣлѣнъ**.

II. *Разрешенѣ косоуглогъ триугла.*

§. 137.

Косоуглый сферичанъ триугалъ може се разрешити, ако су познате 1.) све три нѣгове стране, 2.) две стране и заключеный угалъ, 3.) две стране и єдной супротный угалъ, 4.) єдна страна и оба на ньой лежећа угла, 5.) два угла и єдномъ супротна страна, найпосле 6.) ако су позната сва три нѣгова угла. Разрешимо га у свакомъ одъ овы шестъ случаєва по наособъ, оставляюћи при томъ опредѣльиванѣ садржая за послѣдакъ.

1.) Познате су све три стране триугла.

§. 137.

У овомъ случаю налазимо непознате угле врло лако помоћу образаца §. 121. подъ β.

Примера ради узмимо, да су стране триугла

$$a = 43^0\ 24'\ 32''$$

$$b = 50^0\ 43'\ 12''$$

$$d = 81^0\ 8'\ 14''$$; у томъ є случаю

$s = \frac{1}{2}(a+b+d) = \frac{1}{2}(175^0\ 15'\ 58'') = 87^0\ 37'\ 59''$, дакле

$s-a = 44^0\ 13'\ 27''$, $s-b = 36^0\ 54'\ 47''$, $s-d = 6^0\ 29'\ 45''$.

и зато по поменутымъ образцима

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(S-b)\ \sin(S-d)}{\sin b\ \sin d}},$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(S-a)\ \sin(S-d)}{\sin a.\ \sin d}},$$

$$\sin\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{\sin(S-a)\ \sin(S-b)}{\sin a.\ \sin b}};$$

$$\log\sin\frac{A}{2}=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{r} 0{\cdot}778455-1 \\ 131 \\ 0{\cdot}052748-1 \\ 832 \\ \hline +0{\cdot}832166-2 \\ -0{\cdot}888755+1 \\ 20 \\ 0{\cdot}994779+1 \\ 4 \\ \hline 0{\cdot}948608-2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} =9{\cdot}474304 \\ \quad 115 \\ \hline \quad 189 : 6{\cdot}74 = 28 \\ \quad 54 \end{array}$$

$$\frac{A}{2}=17^{0}\ 20'\ 28''$$

$$A=34^{0}\ 40'\ 56''$$

$$\log \sin \frac{B}{2} = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{r} 0{'}843465-1 \\ 58 \\ 0{'}053580-1 \\ \hline +0{'}897103-2 \\ -0{'}837012+1 \\ 71 \\ \hline -0{'}994783+1 \\ \hline 1{'}065237-2 \\ \hline \end{array}\right.$$

$$=9{'}532618$$
$$\begin{array}{r} 312 \\ \hline 306 : 5{'}81 = 52{'}6 \\ 155 \\ 39 \end{array}$$

$$\frac{B}{2} = 19^{0}\ 55'\ 52{'}6''$$

$$B = 39^{0}\ 51'\ 45''$$

$$\log \sin \frac{D}{2} = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{r} 0{'}843523-1 \\ 0{'}778586-1 \\ \hline +1{'}622109-2 \\ -0{'}837083+1 \\ -0{'}994783+1 \\ \hline 1{'}790243-2 \\ \hline \end{array}\right.$$

$$=9{'}895122$$
$$\begin{array}{r} 045 \\ \hline 77 : 1{'}66 \doteq 47 \end{array}$$

$$\frac{D}{2} = 51^{0}\ 45'\ 47''$$

$$D = 103^{0}\ 31'\ 34''$$

2.) Познате су две стране *a* и *b*, и заклююченый угалъ *D*.

§. 138.

Овде определюемо найпре помоћу прве две Неперове аналогіє (§. 124. подъ 7.) угле *A* и *B* а:

потомъ трећу страну d посредствомъ єдне одъ познаты сразмерности §. 122. подъ (4.

$$\sin d = \frac{\sin a. \sin D}{\sin A}, \text{ или}$$

$$\sin d = \frac{\sin b. \sin D}{\sin B}.$$

Но мы исту трећу страну можемо изнаћи и непосредствено само изъ задаты основака, ако найпре у име тога єданпутъ за свагда треће уравненіє у §. 119. подъ (1., удесимо за употреблѣнѣ логаритама, коє быва слѣдуюћимъ начиномъ.

Изъ трећегъ уравненія поменутога §. слѣдуе

$$\cos d = \cos a. \cos b + \sin a. \sin b. \cos D$$

Додаюћи другой части овога уравненія и одузимаюћи одъ исте производъ $\sin a. \sin b$, добыямо

$$\begin{aligned} \cos d &= \cos a. \cos b - \sin a. \sin b + \sin a. \sin b. \cos D \\ &\qquad + \sin a. \sin b \\ &= \cos(a+b) + \sin a. \sin b\ (1+\cos D), \end{aligned}$$

или, збогъ $1+\cos D = 2\cos^2 \frac{D}{2}$ (§. 27. подъ 6.)

$$\cos d = \cos(a+b) + 2\sin a. \sin b. \cos^2 \frac{D}{2}$$

Заменююћи садъ далѣ $\cos d$ съ нѣговомъ вредности $2\cos^2 \frac{d}{2} - 1$ (§. 26. подъ 5.), и уедно єдиницу у десну часть пребацуюћи, бытће

$$2\cos^2 \frac{d}{2} = 1 + \cos(a+b) + 2\sin a\ \sin b \cos^2 \frac{D}{2}$$

или, збогъ $1 + cos\,(a+b) = cos^2 \frac{1}{2}\,(a+b)$,

$$2\,cos^2 \frac{d}{2} = 2\,cos^2 \tfrac{1}{2}\,(a+b) + 2\,sin\,a.\,sin\,b.\,cos \frac{D}{2},$$

а съ 2 скраћуюћи

$$cos^2 \frac{d}{2} = cos^2 \tfrac{1}{2}\,(a+b) + sin\,a.\;sin\,b.\,cos^2 \frac{D}{2}$$

$$= cos^2 \tfrac{1}{2}\,(a+b)\left[1 + \frac{sin\,a.\,sin\,b.\,cos^2 \frac{1}{2}\,D}{cos^2 \frac{1}{2}\,(a+b)}\right]$$

Найпосле поставляюћи разломакъ

$$\frac{sin\,a.\,sin\,b.\,cos^2 \frac{1}{2}\,D}{cos^2 \frac{1}{2}\,(a+b)} = tang^2 \varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\alpha,$$

$$cos^2 \frac{d}{2} = cos^2 \tfrac{1}{2}\,(a+b).(1 + tang^2 \varphi)$$

$$= cos^2 \tfrac{1}{2}\,(a+b).\,sec^2 \varphi = \frac{cos^2 \frac{1}{2}\,(a+b)}{cos^2 \varphi}$$

и одтуда

$$cos \frac{d}{2} = \frac{cos \frac{1}{2}\,(a+b)}{cos\,\varphi} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\beta.$$

Непознату дакле трећу страну d наћићемо независимо одъ други непознаты основака (углова), ако найпре уравненіемъ подъ (α определимо помоћный угалъ φ, и нћгову вредность после поставимо у уравненіе подъ (β.

3.) Познате су две стране a и b, и едной, н. п. првой супротный угалъ A.

§. 139.

У овомъ случаю определюемо найпре угле B и D; првый соразмерноћу §а 122. подъ (4

$$\sin B : \sin A = \sin b : \sin a\,,$$

а другій подаюћимъ се изъ прве Неперове аналогіє (§. 124.) уравненіємъ

$$\cot \frac{D}{2} = \tang \tfrac{1}{2}(A+B) \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)}$$

Имаюћи уголъ D, налазнмо найпосле помоћу нѣговомъ трећу страну d четвртомъ аналогіомъ, изъ кое слѣдує

$$\tang \frac{d}{2} = \tang \tfrac{1}{2}(a+b) \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

Иста трећа страну d и уголъ D могу се изнаћи и сасвимъ независимо одъ угла B, првымъ уравненіємъ §. 119., ако найпре ово єданпутъ за свагда успособимо за употребленѣ логаритама. Коимъ начиномъ то быва, показат'ће мо у слѣдуюћемъ §у.

§. 140.

1.) За трећу страну d.

Изъ поменутогъ уравненія слѣдує

$$\cos a = \cos b . \cos d + \sin b . \sin d \cos A$$

Поставляюћи $\tang b . \cos A = \tang \varphi$ . . . . . $(\alpha$

быт'ће $\sin b . \cos A = \cos b . \tang \varphi = \dfrac{\cos b . \sin \varphi}{\cos \varphi}$, дакле

ову вредность у горнѣ уравненіє узимаюћи,

$$\cos a = \cos b . \cos d + \frac{\sin b . \cos b . \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$= \frac{\cos b}{\cos \varphi} (\cos d. \cos \varphi + \sin b. \sin \varphi)$$

$$= \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cos (d - \varphi),$$

и одтуда

$$\cos (d - \varphi) = \frac{\cos a. \cos \varphi}{\cos b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta.$$

2.) За уголъ D.

Изъ истогъ уравненія §. 119., поставляюћи за $\cos d$ нѣгову вредность по трећемъ уравненію истога §., имамо

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos a. \cos^2 b - \sin a. \sin b. \cos b. \cos D}{\sin b. \sin d}$$

$$= \frac{\cos a (1 - \cos^2 b) - \sin a. \sin b. \cos b. \cos D.}{\sin b. \sin d}$$

$$= \frac{\cos a. \sin^2 b - \sin a. \sin b. \cos b. \cos D}{\sin b. \sin d},$$

или скраћуюћи са $\sin b$,

$$\cos A = \frac{\cos a. \sin b - \sin a. \cos b. \cos D}{\sin d}$$

Заменюћи садъ $\sin d$ нѣговомъ вредности по

§. 122., т. е. $\sin d = \frac{\sin a. \sin D}{\sin A}$, слѣдуе

$$\cos A = \frac{\sin A (\cos a. \sin b - \sin a. \cos b. \cos D)}{\sin a. \sin D},$$

и одтуда, лако увиђаюћимъ се начиномъ,

$$\cot A. \sin D = \cot a. \sin b - \cos b. \cos D.$$

Найпосле поставляюћи

$$tang\,A.\cos b = tang\,\psi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\gamma.$$

бытће $\cot A = \frac{\cos b.\cos\psi}{\sin\psi}$, кою вредность у предходеће уравненіе узимаюћи слѣдуе

$$\frac{\cos b.\cos\psi}{\sin\psi}\sin D = \cot a.\sin b - \cos b.\cos D$$

и одтуда увиђавнымъ начиномъ

$$\frac{\cos b}{\sin\psi}(\sin D.\cos\psi + \cos D.\sin\psi) = \cot a.\sin b$$

т. е.

$$\frac{\cos b}{\sin\psi}.\sin(D+\psi) = \cot a.\sin b\;,\quad \text{дакле}$$

$$\sin(D+\psi) = \frac{tang\,b.\sin\psi}{tang\,a}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\delta.$$

Употреблѣнѣ овы уравненія подъ α, β, γ и δ за поменуто независимо определьиванѣ стране d и угла D, увиђа се по себи безъ свакогъ далѣгъ обяснѣня.

§. 141.

Видили смо, да се у предстоећемъ случаю єданъ угалъ определює синусомъ. Тоиугалъ є дакле у истомъ случаю, збогъ наведены у §. 133 узрока, у обште сматранъ **неопределѣнъ**; но сада ћемо видити, да има неки особиты вредностій задаты основака, при коима є онай угалъ, па дакле и цео тоиугалъ подпуно определѣнъ.

§. 142.

Сбиръ задате две стране може быти $a + b \gtreqless 180^0$.

1) Ако є $a + b = 180^0$, онда є по обштемъ свойству сферичны триуглова (§. 125.) и $A + B = 180^0$, и збогъ тога ако є $\measuredangle A \gtreqless 90^0$, угалъ B бытѣе односно $\lesseqgtr 90^0$; дакле триугалъ у томъ случаю свагда **определѣнъ**.

2.) Ако є $a + b > 180^0$, онда є и $A + B > 180^0$; зато ако буде $\measuredangle A \gtreqless 90^0$, угалъ B може быти само $> 90^0$; дакле триугалъ **определѣнъ**. Напротивъ, ако є $A > 90^0$, онда B може быти $\gtreqless 90^0$, и зато триугалъ **неопределѣнъ**, осимъ ако бы была маня вредность $\measuredangle B \leqq 180^0 - A$, у комъ случаю B може быти само $> 90^0$, изъ узрока: што бы маньомъ нѣговомъ вредности слѣдовало, да є $A + B$ противъ условію $< 180^0$. У томъ є дакле случаю триугалъ опетъ **определѣнъ**. — Найпосле

3) Ако є $a + b < 180^0$, онда є и $A + B < 180^0$, и дакле при $A \geqq 90^0$, $\measuredangle B$ извѣстно $< 90^0$, и тимъ триугалъ **определѣнъ**. На противъ при $A < 90^0$, угалъ $B \gtreqless 90^0$, и съ тога триугалъ **неопределѣнъ**, развѣ ако є веħа вредность вопросного угла $B \geqq 180 - A$, у комъ случаю B мора се узети $< 90^0$, єръ бы иначе испало противъ предпоставлѣню

$A+B > 180$. У томъ е дакле случаю триугалъ опетъ предељнъ.

4.) Позната е една страна н. п. d, съ оба на нъой лежећа угла A и B.

§. 143.

Друге две стране a и b налазимо у овоме случаю посредствомъ треће и четврте Неперове аналогіе (§. 124.), трећій пакъ угалъ D добыя се по томъ сразмерносћу

$$\sin D : \sin A = \sin d : \sin a, \text{ или}$$
$$\sin D : \sin B = \sin d : \sin b;$$

но млого поузданіе добыямо га, употребљаваюћи на уравненіяма подъ (α. и (β. у §. 138. свойство поларнога триугла, еръ га тимъ начиномъ определюемо независимо одъ непознаты — и мож'да погрешно израчунаны — страна a и b.

У име тога треба у поменутымъ уравненіяма место $\sin a$, $\sin b$, $\cos\frac{D}{2}$, $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ и $\cos\frac{d}{2}$ узети односно $\sin(180^0 - A_1) = \sin A_1$, $\sin(180^0 - B_1) = \sin B_1$, $\cos\frac{1}{2}(180^0 - d_1) = \cos(90^0 - \frac{d_1}{2}) = \sin\frac{d_1}{2}$, $\cos\frac{1}{2}(180^0 - A_1 + 180^0 - B_1) = \cos\left[180^0 - \frac{1}{2}(A_1+B_1)\right] = \sin\frac{1}{2}(A_1+B_1)$, и $\cos\frac{1}{2}(180^0 - D_1) = \cos(90^0 - \frac{D_1}{2}) = \sin\frac{D_1}{2}$.

Тымъ преображаваю се иста уравненія у следуюћа два

$$tang^2 \varphi = \frac{sin\, A_1 .\, sin\, B_1 .\, sin^2 \frac{1}{2} d}{sin^2 \frac{1}{2} (A_1 + B_1)} \quad \text{и}$$

$$sin \frac{D_1}{2} = \frac{sin \frac{1}{2} (A_1 + B_1)}{cos\, \varphi}$$, или сказальке, на познатомъ изъ §. 112. основу, изоставляюћи:

$$tang^2 \varphi = \frac{sin\, A .\, sin\, B .\, sin^2 \frac{1}{2} d}{sin^2 \frac{1}{2} (A + B)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha.$$

$$sin \frac{D}{2} = \frac{sin \frac{1}{2} (A + B)}{cos\, \varphi} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta.$$

5.) Позната су два угла A и B, и єдномъ н. п. првомъ супротна страна a.

§. 144.

Овде определюємо найпре другомъ углу B супротну страну b изъ сразмерности

$sin\, b : sin\, a = sin\, B : sin\, A$, а потомъ трећу страну d и трећій угалъ D уравненіяма

$$tang \frac{d}{2} = tang \frac{1}{2} (a + b) \frac{cos \frac{1}{2} (A + B)}{cos \frac{1}{2} (A - B)} \quad \text{и}$$

$$cot \frac{D}{2} = tang \frac{1}{2} (A + B) \frac{cos \frac{1}{2} (a + b)}{cos \frac{1}{2} (a - b)},$$ коя слѣдую односно изъ четврте и прве аналогіє. Но мы исту страну d и трећій угалъ D можемо определити и сасвимъ независимо одъ стране b и єдно одъ другога, и то найболѣ употреблѣнѣмъ поларнога триугла на уравненія трећегъ случая подъ α, β, γ и δ (§. 140.), коимъ начиномъ налазимо

1.) У име стране d по уравненіяма γ и δ

$$tang\,\psi = tang\,(180^0 - a)\,cos\,(180^0 - B)$$

$$= (-tang\,a).(-cos\,B)$$

$$= tang\,a.\;cos\,B. \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha_1.$$

$$sin\,(180^0 - d + \psi) = \frac{tang\,(180^0 - B).\;sin\,\psi}{tang\,(180^0 - A)} \quad \text{т. є.}$$

$$sin\,(d - \psi) = \frac{tang\,B.\;sin\,\psi}{tang\,A} \ldots\ldots (\beta_1.$$

2.) у име угла D изъ уравненія подъ α и β

$$tang\,\varphi = tang\,(180^0 - B).\,cos\,(180^0 - a)$$

$$= tang\,B.\;sos\,a \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma_1$$

$$cos\,(180^0 - D - \varphi) = \frac{cos\,(180^0 - A).\,cos\,\varphi}{cos\,(180^0 - B)} \quad \text{т. є.}$$

$$cos\,(D + \varphi) = \frac{cos\,A.\,cos\,\varphi}{cos\,B} \ldots\ldots\ldots (\delta_1$$

§. 145.

И у овоме є случаю тригалъ само при некимъ особитымъ вредностима задаты углова A и B определѣнъ. То є

1.) ако є $A + B = 180^0$, єръ у томе є случаю $a + b$ такођеръ $= 180^0$, и зато при $a \gtreqless 90^0$, страна b известно $\lesseqgtr 90^0$;

2.) ако є $A + B > 180^0$ и при томъ $a \gtreqless 90^0$, єръ тадъ є збогъ $a + b > 180^0$, вопросна страна b у оба случая известно $> 90^0$;

3.) ако є $A+B < 180^\circ$ и при томъ а $\geqq 90^\circ$; єръ онда є збогъ $a+b < 180^\circ$, страна b известно $< 90^\circ$.

На противъ **неопредѣлѣнъ** є

1.) Ако є $A+B > 180^\circ$ и a при томъ $> 90^\circ$; єръ тадъ страна b, као што є лако увидити, може быти $\lesseqqgtr 90^\circ$. Но ако бы се у томъ случаю нашло, да є маня вредность стране $b \leqq 180-a$, онда се b мора узети $> 90^\circ$, єръ бы иначе противъ условія слѣдовало да є $A+B \leqq 180^\circ$. У томе є дакле случаю триугалъ опетъ **опредѣлѣнъ**.

2.) Ако є $A+B < 180^\circ$ и $a < 90^\circ$; єръ тадъ b може быти $\gtreqqless 90^\circ$. Но ако бы при томъ већа вредность одъ b была $\geqq 180^\circ - a$, онда b може быти само $< 90^\circ$; єръ бы иначе слѣдовало $A+B$ противъ условія $\geqq 180^\circ$; и зато є триугалъ у таковомъ случаю опетъ **опредѣлѣнъ**.

6.) **Позната су сва три угла** A, B и D.

§. 146.

У овомъ — последнѣмъ — случаю налазимо непознате стране триугла найлакше употреблѣнѣмъ поларнога триугла на образце првога случая (§. 138.), поставляюћи при томъ, да є сбиръ углова, т. є. $A+B+D=2\Sigma$. Тако поступаюћи добыямо, сказальке при основцима поларнога триугла одма изоставляюћи.

$$S = \tfrac{1}{2}\left[180^0 - A + 180^0 - B + 180^0 - D\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[3.180^0 - (A + B + D\right] = 270^0 - \Sigma,$$

$$S - a = 270^0 - \Sigma - (180^0 - A) = 90^0 - (\Sigma - A),$$

$S - b = 90^0 - (\Sigma - B)$; $S - d = 90^0 - (\Sigma - D)$; дакле

$$sin\,(S - a) = sin\left[90^0 - (\Sigma - A)\right] = cos\,(\Sigma - A),$$

$sin\,(S - b) = cos\,(\Sigma - B)$, $sin\,(S - d) = cos\,(\Sigma - D)$, и по томе, збогъ $sin\,\frac{A}{2} = sin\,\tfrac{1}{2}(180^0 - a) = sin(90^0 - \frac{a}{2}) = cos\,\frac{a}{2}$, $sin\,\frac{B}{2} = cos\,\frac{b}{2}$, $sin\,\frac{D}{2} = cos\,\frac{d}{2}$, $sin\,a = sin\,(180^0 - A) = sin\,A$, $sin\,b = sin\,(180^0 - B) = sin\,B$, и $sin\,d = sin\,(180^0 - D) = sin\,D$:

$$cos\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{cos\,(\Sigma - B).\ cos\,(\Sigma - D)}{sin\,B.\ sin\,D}}$$

$$cos\,\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{cos\,(\Sigma - A).\ cos\,(\Sigma - D)}{sin\,A.\ sin\,D}}$$

$$cos\,\frac{d}{2} = \sqrt{\frac{cos\,(\Sigma - A).\ cos\,(\Sigma - B)}{sin\,A.\ sin\,B}},$$ съ коимъ образцима налазимо непознате стране триугла a, b и d.

III. Определьиванѣ садржая и ексцеса сферичны триуглова.

§. 147.

У §. 118. показали смо веѣъ, да се садржай сф. триугла може определити сувишкомъ нѣговы углова надъ два права угла. Сада пакъ показатћемо іошъ, како се налази 1.) изъ две стране и заключеногъ угла, и 2.) помоћу самы страна, примећаваюћи: да се може определити и другимъ основцима, но да су образци у свима другимъ случаєвима, особито кадъ бы се удесили за употреблѣнѣ логаритама, тако замршени, да є свагда пробитачніє изнаћи га єднымъ одъ поменута три начина, и ако бы се нуждни основци зато топрвъ морали израчунати.

1.) Рачунанѣ садржая посредствомъ две стране и заключеногъ угла.

§. 148.

Сматраюћи правый угалъ као єдиницу или меру углова, а осму часть сферичногъ површія као єдиницу површины частій сфере имамо по пређе поменутомъ §., означуюћи при томъ садржай тругла съ T, а нѣгове угле съ A, B и D:

$$T = (A + B + D)^0 - 180^0, \text{ и одтуда}$$

$$\tfrac{1}{2}(A + B + D) = 90^0 - \tfrac{1}{2}T$$

дакле

$$tang\,\tfrac{1}{2}(A + B + D) = tang\,(90^0 - \tfrac{1}{2}T) = -cot\,\tfrac{1}{2}T$$

Но по §. є 22. (обр. прв. подъ V.)

$$tang\,\tfrac{1}{2}(A + B + D) = tang\left[\tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}D\right]$$

$$= \frac{taag\,\tfrac{1}{2}(A + B) + tang\,\tfrac{1}{2}D}{1 - tang\,\tfrac{1}{2}(A + B).\,tang\,\tfrac{1}{2}D};$$

зато

$$-cot\,\tfrac{1}{1}T = \frac{tang\,\tfrac{1}{2}(A + B) + tang\,\tfrac{1}{2}D}{1 - tang\,\tfrac{1}{2}(A + B).\,tang\,\tfrac{1}{2}D},$$

или, место $tang\,\frac{1}{2}(A+B)$ нѣну вредность по првой неперовой аналогій узимаюћи,

$$-\cot\tfrac{1}{2}T=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cot\frac{1}{2}D+\cos\frac{1}{2}(a+b)\,tang\,\frac{1}{2}D}{\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}(a+b)\,tang^2\frac{1}{2}D}{\left[\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)\right]tang\,\frac{1}{2}D}$$

Развіяюћи у овоме изразу $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ и $\cos\frac{1}{1}(a+b)$ као косинусе разлике и збира два угла $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$, и при томъ опште чинителѣ извлачећи слѣдуе далѣ

$-\cot\frac{1}{2}T=$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}(1+tang^2\frac{D}{2})+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}(1-tang^2\frac{D}{2}}{-2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\,tang\,\frac{D}{2}}$$

или, место $tang\,\frac{D}{2}$ нѣну вредность $\frac{\sin\frac{1}{2}D}{\cos\frac{1}{2}D}$ уводећи

$$\cot\tfrac{1}{2}T=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}(\cos^2\frac{D}{2}-\sin^2\frac{D}{2})}{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{D}{2}\cos\frac{D}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}(\cos^2\frac{D}{2}-\sin^2\frac{D}{2})}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin D}$$

$$=\frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos^2\frac{D}{2}-\sin^2\frac{D}{2}}{\sin D}$$

Найпосле збогъ $cos^2 \frac{D}{2} = \frac{1 + cos\, D}{2}$, а $sin^2 \frac{D}{2}$ $= \frac{1 - cos\, D}{2}$ (сл. 27.), дакле $cos^2 \frac{D}{2} - sin^2 \frac{D}{2} = cos\, D$:

$$cot\, \tfrac{1}{2}\, T = \frac{cot\, \frac{1}{2}\, a\, cot\, \frac{1}{2}\, b + cos\, D}{sin\, D} \quad \ldots\ldots (1.$$

уравненіє, у комъ є као што видимо израженъ садржай сф. триугла посредствомъ две нѣгове стране a и b, и истымъ странама заключеногъ угла D.

Ово уравненіє удешава се за употреблѣнѣ логаритама врло лако слѣдуюћимъ начиномъ:

Делећи у десной части съ $sin\, D$ слѣдує

$$cot\, \tfrac{1}{2}\, T = \frac{cot\, \frac{1}{2}\, a\; cot\, \frac{1}{2}\, b}{sin\, D} + cot\, D\,;$$

поставляюћи садъ разломакъ

$$\frac{cot\, \frac{1}{2}\, cot\, \frac{1}{2}\, b}{sin\, D} = cot\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha.$$

постаѥ по §. 24. (др. обр. подъ 2.) десна часть у равненія $tot\, \varphi + cot\, D = \frac{sin\,(D + \varphi)}{sin\, D.\, sin\, \varphi}$, тако да є по томе

$$cot\, \tfrac{1}{2}\, T = \frac{sin\,(D + \varphi)}{sin\, D.\, sin\, \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta.$$

2.) Определьиванѣ садржая посредствомъ самы страна.

§. 149.

На основу горнѣгъ уравненія подъ (1 имамо

$$1+cot^2\tfrac{1}{2}T=1+\frac{cot^2\frac{a}{2}\,cot^2\frac{b}{2}+cos^2D+2cot\frac{a}{2}\,cot\frac{b}{2}\,cos\;D}{sin^2\,D}$$

т. є.

$$cosec^2\tfrac{1}{2}T=\frac{1+cot^2\frac{a}{2}\,cot^2\frac{b}{2}+2\,cot\frac{a}{2}\,cot\frac{b}{2}\;cos\;D}{sin^2\,D}$$

и одтуда, место $cosec\,\frac{1}{2}\,T$ нѣну вредность $\frac{1}{sin\,\frac{1}{2}\,T}$ узимаюћи и потомъ обе части уравненія превр-ћући,

$$\alpha.)\ldots\ldots sin^2\tfrac{1}{2}\,T=\frac{sin^2\,D}{1+cot^2\frac{a}{2}\,cot^2\frac{b}{2}+2\,cot\frac{a}{2}\,cot\frac{b}{2}\,cos\;D}$$

Уводећи у изразу $cos\,D=\frac{cos\,d-cos\,a.\;cos\,b}{sin\,a.\;sin\,b}$ (§. 119.) место a, b и d полуугле, налазимо

$$cos\,D=\frac{1-2sin^2\frac{d}{2}-(1-2\,sin^2\frac{a}{2})(1-2sin^2\frac{b}{2})}{2\,sin\frac{a}{2}\,cos\frac{a}{2}\,.\,2sin\frac{b}{2}\,cos\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{sin^2\frac{a}{2}+sin^2\frac{b}{2}-sin^2\frac{d}{2}-2\,sin^2\frac{a}{2}\,sin^2\frac{b}{2}}{2\,sin\frac{a}{2}\,cos\frac{a}{2}\,sin\frac{b}{2}\,cos\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{sin^2\frac{a}{2}+sin^2\frac{b}{2}-sin^2\frac{d}{2}}{2sin\frac{a}{2}\,cos\frac{a}{2}\,sin\frac{b}{2}\,cos\frac{b}{2}}-tang\frac{a}{2}\,tang\frac{b}{2},$$

ово пакъ уравненіе съ $2\cot\frac{a}{2}.\cot\frac{b}{2}$ мложећи

$$\beta.)\ \dots 2\cot\frac{a}{2}.\cot\frac{b}{2}\cos D=\frac{\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b}{2}-\sin^2\frac{d}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}.\sin^2\frac{b}{2}}-2$$

Изражавајући іошъ у производу $\cot\frac{a}{2}.\cot\frac{b}{2}$ оба чинителя синусима, имамо

$$\cot\frac{a}{2}.\ \cot\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{(1-\sin^2\frac{a}{2})(1-\sin^2\frac{b}{2})}}{\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2}},\ \text{и}$$

одтуда

$$\cot^2\frac{a}{2}.\ \cot^2\frac{b}{2}=\frac{(1-\sin^2\frac{a}{2})(1-\sin^2\frac{b}{2})}{\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}},$$

или мложећи и скраћујући

$$\gamma.)\ \dots\ \cot^2\frac{a}{2}.\cot^2\frac{b}{2}=\frac{1-\sin^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{b}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}.\sin^2\frac{b}{2}}+1$$

Дакле, место дотичны чланова у именителю уравненія подъ $\alpha.)$ ове ньіове вредности узимајући и потомъ што є могуће скраћујући

$$\sin^2\tfrac{1}{2}T=\frac{\sin^2 D.\sin^2\frac{a}{2}.\sin^2\frac{b}{2}}{1-\sin^2\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{\sin^2 D . \sin^2 \frac{a}{2} . \sin^2 \frac{b}{2}}{\cos^2 \frac{d}{2}}, \text{ и одтуда}$$

$$\delta.) \ldots \sin \tfrac{1}{2} T = \frac{\sin D . \sin \frac{a}{2} . \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{d}{2}}$$

Найпосле у овомъ уравненію 1°., $\sin D$ полу-угломъ изражаваюћи, потомъ 2°.) место $\sin \frac{1}{2} D$ и $\cos \frac{1}{2} D$ ньіове вредности по §. 121. узимаюћи, и 3.) іошъ тиме появлююће се синусе одъ a и b полу-углима определююћи — слѣдує самимъ странама изражены садржай триугла

$$\sin \tfrac{1}{2} T = \frac{\sqrt{\sin S . \sin(S-a) . \sin(S-b) . \sin(S-d)}}{2 \cos \frac{a}{2} . \cos \frac{b}{2} . \cos \frac{d}{2}} . \text{(II.}$$

§. 150.

Симонъ Люйліє — *Lhuilier* — поставіо є за садржай сф. триугла, определѣнъ самимъ нѣговымъ странама, слѣдуюћій, колико веома лепъ, толико и врло удесанъ образацъ

$$tg \tfrac{1}{4} T = \sqrt{tg \tfrac{1}{2} S . tg \tfrac{1}{2} (S-a) . tg \tfrac{1}{2} (S-b) . tg \tfrac{1}{2} (S-d)} \ldots \text{(III.}$$

кои находимо найлакше овако :

Мложећи уравненіє прећашнѣгъ §. подъ (δ. съ онымъ подъ I. у §. 148. слѣдує

$$\cos\tfrac{1}{2}T = \left(\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{2} + \cos D\right)\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{d}{2}}$$

Но по §. 30. (обр. подъ 17.)

$$\cot\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{\sin a},\text{ а }\cot\frac{b}{2} = \frac{1+\cos b}{\sin b}\text{; дакле}$$

$$\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2} = \frac{(1+\cos a)(1+\cos b)}{\sin a.\sin b}.$$

По §. пакъ 119. имамо

$$\cos D = \frac{\cos d - \cos a.\cos b}{\sin a.\ \sin b}.$$ Слѣдовател-

но ово уравненіе предходећемъ додаюћи

$$\cot\frac{a}{2}.\cot\frac{b}{2} + \cos D = \frac{(1+\cos a)(1+\cos b)+\cos d - \cos a.\cos b}{\sin a.\sin b}$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos d}{\sin a.\sin b},$$ и зато,

ову вредность у прво уравненіе поставляюћи

$$\cos\tfrac{1}{2}T = \frac{(1+\cos a+\cos b+\cos d).\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2}}{\sin a.\sin b.\cos\frac{d}{2}},$$

или ако овде функціе целы страна полустранама изразимо и потомъ скратимо

$$\varepsilon.) \ldots \cos\tfrac{1}{2}T = \frac{\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{d}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}}$$

Одузимаюћи садъ ово уравненіе одъ единице и разлику потомъ съ уравненіемъ подъ II. (§. 149.) делећи слѣдуе збогъ $\frac{1-\cos\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{2}T} = tang\,\frac{1}{2}T$ (§. 30.)

$$(\zeta \ldots tang\tfrac{1}{2}T = \frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2} - \cos^2\frac{a}{2} - \cos^2\frac{b}{2} - \cos^2\frac{d}{2} + 1}{\sqrt{\sin S.\sin(S-a).\sin(S-b)\sin(S-d)}}$$

Означуюћи броителя овогъ израза за дальій посао краћине ради съ N, имамо

$$N = 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2} - \cos^2\frac{a}{2} - \cos^2\frac{b}{2} - \cos^2\frac{d}{2} + 1$$

$$= (\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2} + \cos\frac{b}{2} - \cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2}).(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2} - \cos\frac{b}{2} + \cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2})$$

$$= \left[\cos\frac{b}{2} - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\right]\cdot\left[\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\frac{b}{2}\right],$$ или

по §. 23. (посл. обр. подъ 1.)

$$N = 4\ \sin\tfrac{1}{4}(a+b+d)\ \sin\tfrac{1}{4}(a+d-b)\ \sin\tfrac{1}{4}(a+b-d)\ \sin\tfrac{1}{4}(b+d-a)$$

т. е. збогъ $a+b+d=2S$

$$N = 4.\ \sin\tfrac{1}{2}S.\sin\tfrac{1}{2}(S-b)\sin\tfrac{1}{2}(S-d)\sin\tfrac{1}{2}(S-a),$$ и

дакле, ову вредность броителя у горнѣ уравненіе поставляюћи

$$tang\tfrac{1}{4}T=\frac{4Sin\frac{1}{2}S.sin\frac{1}{2}(S-a).sin\frac{1}{2}(S-b).sin\frac{1}{2}(S-d)}{\sqrt{sinS.sin(S-a).\ sin(S-b).\ sin(S-d)}},$$

или, збогъ $\frac{sin\frac{1}{2}S}{\sqrt{sinS}}=\sqrt{\frac{sin^2\frac{1}{2}S}{sin\ S}}=\sqrt{\frac{sin^2\frac{1}{2}S}{2sin\frac{1}{2}cos\frac{1}{2}S}}=$

$$=\sqrt{\frac{sin\frac{1}{2}S}{2cos\frac{1}{2}S}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}tang\tfrac{1}{2}S},$$

$$\frac{sin\frac{1}{2}(S-a)}{\sqrt{sin(S-a)}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}tang(S-a)}$$

и т. д.

$$tang\tfrac{1}{4}T=4\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}tang\tfrac{1}{2}S.\tfrac{1}{2}tang\tfrac{1}{2}(S-a).\tfrac{1}{2}tang\tfrac{1}{2}(S-b)\ \tfrac{1}{2}tang\tfrac{1}{2}(S-d)\right]}$$

$$=\sqrt{tang\tfrac{1}{2}S.tang(S-a).tang\tfrac{1}{2}(S-b).tang\tfrac{1}{2}(S-d)}$$

Люйлѣовъ образацъ као што смо га горе навели.

3.) Определьиванѣ сферичногъ ексцеса.

§. 151.

Видили смо у §. **118**., да се садржай сферичногъ триугла може определити сувишкомъ нѣговы углова надъ 180°, или тако званымъ ексцесомъ. Сада пакъ, почемъ знамо, како се іошъ и другимъ начиномъ налази, да извидимо, како бы на основу поменутогъ §. обратно изъ познатогъ садржая определили непознатый ексцесъ.

Означуюћи у име тога вопросный ексцесъ, т. є. разлику $(A+B+D)^0-180^0$ съ E, садржай триугла съ T, полупречникъ сфере съ r, а нѣно површіє съ S: имамо по реченомъ §.

$$T = \frac{S}{8} \cdot \frac{E^0}{90^0} = \frac{S}{4} \cdot \frac{E^0}{180^0},$$ и одтуда ексцесъ у степенима

$$E^0 = T.\ 180^0.\ \frac{4}{S},$$

или сбогъ $S = 4\, r^2\, \pi$ .... (стереометрія)

$$E^0 = \frac{T.\ 180^0}{r^2 \pi} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.$$

Изражаваюћи га пакъ у секундама бытће

$$E'' = \frac{T}{r^2} \cdot \frac{180.\ 60.\ 60''}{\pi},$$

или, изъ узрока што є по §. 54. $\frac{180.\ 60.\ 60''}{\pi} = \varrho''$, при чему ϱ'' означує у секундама израженый лукъ дужине равне полупречнику,

$$E'' = \frac{T}{r^2} \cdot \varrho'' \ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}.$$

Найпосле іошъ збогъ $\varrho'' = \frac{1}{\sin 1''}$ по истомъ §.

$$E'' = \frac{T}{r^2 \sin 1''} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}.$$

Приметба. У свыма овыма изразима ексцеса треба да є полупречникъ сфере r ономъ истомъ єдиницомъ изражен, коіомъ су стране триугла у нѣговомъ садржаю T.

§. 152.

Изъ горнѣгъ уравненія подъ II. слѣдує

$$log\ E'' = log\ T + log\ \varrho'' - 2 log\ r.$$

Узимаюћи да є среднѣй полупречникъ наше землѣ $r = 6366678$ метра, имамо дакле за веће триугле на нѣномъ површiю, обзиромъ на §. 54., по комъ є $\varrho'' = 206265''$:

$$log\ E'' = log\ T + 5{\cdot}314425 - 13{\cdot}607826$$
$$= log\ T - 8{\cdot}293401$$

то ће рећи: **Логаритамъ у секундама израженогъ ексцеса свакогъ већегъ триугла на површiю землѣ добыямо, ако одъ логаритма у метрима израженогъ нѣговогъ садржая одузмемо сталный брой 8·293401.**

§. 153.

Определъиванѣ є сферичногъ ексцеса особито при тригонометричномъ премераваню одъ врло велике ползе, єръ се посредствомъ нѣга можемо уверити о точности определѣны при томъ нуждны углова. Примера и већега обясненя ради испытаймо у томъ смислу слѣдуюћiй случай:

При тригонометричномъ некомъ премераваню нашли смо, да су на хоризонтъ пренешени угли (види слѣдуюћiй §.) триугла ABD

$$A = 42^0\ 2'\ 32''$$
$$B = 67^0\ 55'\ 39''$$
$$D = 70^0\ 1'\ 48'',$$ дакле
$$A + B + D = 179^0\ 59'\ 59'',$$ а две нѣгове стране $b = 7530^m$, $d = 11723^m$.

У томъ є случаю збогъ $T = \frac{1}{2}\ bd.\ sin\ A$ (§. 76.)

$$\log T = \left\{ \begin{array}{l} 3{\cdot}876795 \ldots\ldots\ldots \log b \\ 4{\cdot}069041 \ldots\ldots\ldots \log d \\ 0{\cdot}825861-1 \ldots\ldots \log \sin A \\ \hline +7{\cdot}771697 \\ -0{\cdot}301030 \ldots\ldots\ldots \log 2 \\ \hline 7{\cdot}470667 \end{array} \right.$$

, одтудъ пакъ по предходећемъ §. брой $8{\cdot}293401$ одбіяюћи:

$$\log E'' = \overline{0}{\cdot}177266-1\text{, дакле}$$

$E'' = 0{\cdot}\overset{\prime\prime}{15}$, т. є. сбиръ углова у томъ случаю треба да є $180^0\ 0'\ 0{\cdot}\overset{\prime\prime}{15}$, дакле у $1{\cdot}\overset{\prime\prime}{15}$ већій, него што смо га нашли, и зато угле вопросно-га триугла овомъ разликомъ поправити треба. Ако смо уверени, да смо сва три угла єднакомъ точности определили: онда ћемо свакомъ додати $\frac{1{\cdot}\overset{\prime\prime}{15}}{3} = 0{\cdot}\overset{\prime\prime}{38}$; у противномъ пакъ случаю увећатъ ћемо съ надлежномъ части нађене разлике ($\frac{1{\cdot}\overset{\prime\prime}{15}}{2}$ или $\frac{1{\cdot}\overset{\prime\prime}{15}}{1}$) само оне, о коима имамо узрока сумняти се.

B.) Разрешенѣ два важна геодетична задатка.

I. Пренашанѣ углова на хоризонтъ.

§. 154.

Подъ пренашанѣмъ или редукціомъ угла на хоризонтъ разумева се разрешенѣ задатка: изъ познатогъ, према хоризонту неке точке *O* коссо лежећегъ угла *MON*, (сл. 29.) изнаћи посредствомъ сл. 29.

управны на истый хоризонтъ углова $MOm = \alpha$ и $NOn = \beta$, хоризонталный угалъ $\mu o v = x$. (*)

При овоме задатку могућа су свега три случая: 1.) точке M и N, на коє се угалъ сматрао изъ O, єсу обе надъ хоризонтомъ ове точке; или 2.) една є, н. п. M надъ нъимъ а она друга у N' подъ нъимъ; или найпосле 3.) оне су обе у M' и N' подъ истымъ хоризонтомъ. Мы ћемо овде особито сматрати само првый случай, изъ узрока, што се изъ образаца тога случая они за остала два, врло лако добыяю само надлежномъ пременомъ знака углова α и β.

§. 155.

сл. 29. Полажући по крацима угла MON (сл. 29.) два на хоризонтъ точке O управна, у падной ZO пресецаюћа се найвећа окружія, и повлачећи потомъ іошъ найвеће лукове mn и μv: бытће $Z\mu$ и Zv свакій $= 90^0$, и зато по §. 107. $\angle x = Z = \mu v$. Одъ сферичногъ дакле триугла Zmn познате су све три стране $mn = \varphi$, $mZ = 90^0 - \alpha = a$, и $nZ = 90^0 - \beta = b$; тражи се пакъ нѣговъ угалъ $Z = \mu v = x$.

Поставляюћи у име тога у два последня образца §. 121. подъ 3. $< D = x$, страну пакъ $d = \varphi$ имамо

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\sin S . \sin (S - \varphi)}{\sin a . \sin b}}\ ,\ \text{или}$$

*) Овай задатакъ може се разрешити и равномъ тригонометріомъ (види „Adam Burgs Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Wien 1826. §. 61. IV. Ausgabe.“); но много лакше и простіє є нѣгово разрешенѣ на основу сферичне тригонометріє начиномъ, као што ћемо одма видити.

$$sin\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{sin\,(S-a).\,sin\,(S-b)}{sin\,a.\,sin\,b}},$$

при чему є по горнѣму $a = 90^0 - \alpha$, $b = 90^0 - \beta$, $S = \frac{1}{2}(a + b + \varphi) = \frac{1}{2}\left[180^0 - (\alpha + \beta - \varphi)\right] = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \varphi)$, дакле

$$sin a = sin(90^0 - \alpha) = cos \alpha,\ sin b = sin(90^0 - \beta) = cos \beta,$$

$$sin\,S = sin\left[90^0 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\varphi)\right] = cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\varphi),$$

$$sin\,(S-a) = sin\left[90^0 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\varphi) - (90^0-\alpha)\right]$$
$$= sin\frac{1}{2}(\alpha+\varphi-\beta),$$

$$sin\,(S-b) = sin\left[90^0 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\varphi) - (90^0-\beta)\right]$$
$$= sin\frac{1}{2}(\beta+\varphi-\alpha).$$ найпосле

$$sin\,(S-\varphi) = sin\left[90^0 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\varphi) - \varphi\right]$$
$$= sin\left[90^0 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\varphi)\right] = cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\varphi):$$

и по томе у име вопросногa, т. є. на хоризонтъ пренещеногъ угла у првомъ случаю,

$$1.)\quad cos\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\varphi).\,cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\varphi)}{aos\,\alpha.\,cos\,\beta}}$$

или $$2.)\quad sin\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{sin\frac{1}{2}(\varphi+\alpha-\beta).\,sin\frac{1}{2}(\varphi+\beta-\alpha)}{cos\,\alpha.\,cos\,\beta}}$$

§. 156.

У другомъ случаю, т. є. у случаю, гди една одъ сматраны точкій, н. п. *N*, лежи подъ хоризонтомъ точке *O* у точки *N'*, треба угалъ β (у сл. β') у овыма образцима, збогъ нѣговогъ, углу α према поменутомъ хоризонту противногъ положеня, узети одрицателанъ. *У* трећемъ пакъ и последнѣмъ случаю узетћe се изъ истогъ узрока оба угла α и β, или у сл. α' и β', одрицателни.

§. 157.

Упражненія ради наводимо слѣдуюћій примеръ. При предузетомъ у години 1787. тригонометричномъ премераваню у име саюженя звездарнице у Гриничу (*Greenwich*) съ ономъ у Паризу, нађенъ є у Кале-у (*Calais*) сматраный коссій угалъ између Фіенна — *Fiennes* — и Ватна (*Watten*), $\varphi = 66^0\ 30'\ 38''.9$, управни пакъ угли были су $\alpha = 0^0\ 25'\ 47''.2$, и $\beta = -1''$.

Овай дакле примеръ принадлежи збогъ одрицателногъ угла β другомъ случаю, и мы по томе имамо у име тражећегъ се хоризонталногъ угла x по првомъ образцу $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\varphi) = 33^0\ 28'\ 12''.55$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\varphi) = -\ 33^0\ 2'\ 26''.35$$

$$log\ cos\frac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{r} 9.921274 \\ 9.923427 \\ \hline 19.844701 \\ 9.999988 \\ 34 \\ \hline 9.844679 \\ 0.844679-1 \\ \hline 0.922339-1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} 9.922339\ ,\ \text{дакле} \\ \quad\quad 272 \\ \hline \quad\quad 67 : 1.38 = 48.55 \end{array}$$

$$\frac{x}{2} = 33^0\ 15'\ 11''.45$$

$$x = 66^0\ 30'\ 22''.9\ ,\ \text{и по томе}$$

разлика међу сматранымъ коссимъ и хоризонталнымъ угломъ $\varphi - x = 16''$

II. Пренашанѣ сферичногъ угла на тетивке.

§. 158.

Пренашанѣмъ сферичногъ угла на тетивке — редукціомъ на корде — означує се определыванѣ угла *MON*, (сл. 30.) образованогъ тетивкама одъ две стране *a* и *b* сфер. некогъ триугла *MON*.

Ако повучемо по точки *O* дирке на краке *a* и *b* сфер. угла *MON*, равница истымъ диркама *mO* и *nO* определѣна, бытѣе хоризонтъ точке *O*, а угалъ $mOn = x$ раванъ сфер. углу *MON*. Тетивачный угалъ дакле *MON* появлює се као подъ хоризонтомъ овога лежеһій, и мы га по томе можемо изнаһи превреһуһи образце преһашнѣгъ задатка у треһемъ случаю.

§. 159.

Поставляюһи у име тога найпре у првомъ образцу §. 155. место α и β као што треба $(-\alpha)$ и $(-\beta)$ добыямо

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}\left[\varphi - (\alpha+\beta)\right].\cos\frac{1}{2}(\varphi+\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}}$$

или подижуһи цело уравненіе на квадратъ и при томъ другу часть одъ именителя ослобоһаваюһи

$$\cos\alpha.\cos\beta.\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{1}{2}\left[\varphi - (\alpha+\beta)\right].\cos\frac{1}{2}\left[\varphi + (\alpha+\beta)\right]$$

Изражаваюһи сада оба чинителя десне части по другимъ образцима §§. 19. и 20. подъ II. и IV. слѣдуе

$$\cos\alpha.\cos\beta.\cos\frac{x}{2}=\left[\cos\frac{\varphi}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\sin\frac{\varphi}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\times$$
$$\times\left[\cos\frac{\varphi}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\sin\frac{\varphi}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$$
$$=\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$=\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-(1-\cos^2\frac{\varphi}{2})\times$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$=\cos^2\frac{\varphi}{2}\left[\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]-$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$=\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$ и одтуда

$$\cos^2\frac{\varphi}{2}=\cos\alpha.\cos\beta.\cos\frac{x}{2}+\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

Но угалъ є $\alpha=\frac{a}{2}$, а $\beta=\frac{b}{2}$, као угли образовани диркомъ и тетивкомъ (геом.); зато

$$\cos^2\frac{\varphi}{2}=\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{x}{2}+\sin^2\tfrac{1}{4}(a+b),$$

коимъ є уравненiємъ, као што видимо, вопросный т. є. на тетивке пренешеный угалъ φ определѣнъ.

§. 160.

Да бы овай изразъ удесили за пробитачнiи рачунъ съ логаритмима, то извуцимо найпре $\sin^2\frac{1}{4}(a+b)$ као обштегъ чинителя; быт'ће

$$\cos^2\frac{\varphi}{2}=\sin^2\tfrac{1}{4}(a+b)\left[1+\frac{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{1}{4}(a+b)}\right]$$

сада пакъ разломакъ

$$\frac{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{1}{4}(a+b)}=tang^2\,\omega$$

поставляюћи:

$$\cos^2\frac{\varphi}{2}=\sin^2\tfrac{1}{4}(a+b).(1+tang^2\omega)$$

$$=\sin^2\tfrac{1}{4}\,(a+b).\,sec^2\,\omega$$

$$=\frac{\sin^2\frac{1}{4}(a+b)}{\cos^2\omega}$$; и одтуда за логаритмично определьиванѣ тетивачногъ угла, почемъ смо найпре предходећимъ уравненіемъ изнашли помоћный угалъ ω:

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\frac{1}{4}\,(a+b)}{\cos\omega}.$$

ОСОБИТЫЙ ДОДАТАКЪ.

> Die Liebe zu den Gegenständen erhält erst einzig durch die zunehmende Kenntniß von denselben ihre wahre Unerschöpflichkeit.
>
> Wagner.

Велику ползу и занимльивость тригонометріє увиђаюћимъ, и тога ради съ истомъ наукомъ веђма упознати се желећимъ моимъ ученицима, препоручуємъ на концу овогъ могъ, за ту ньіову похвалну намеру безъ сумнѣ недостижућегъ делца слѣдуюћа, мени као врстна позната већа дела.

Adam Burg, Handbuch der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie. Wien 1826.

Lacroix S. F., traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique etc. Paris 1852.

Müller W., analytische Entwickelung der Trigonometrie. Göttingen 1806.

Ozanam, la trigonométrie rectiligne et sphérique. Paris 1741.

Rivard, trigon. rectil. et sphér. Paris 1750.

Voch, Theorie und Praxis der Trigonometrie. Augsburg 1779.

Zimmermann, sphärische Trigonometrie. Berlin 1800.

Belanger J. B., Grundlehren der ebenen Trigonom. analyt. Geometrie etc. etc., deutsch von Dr Bernh. Gugler Stuttgart 1847.

Köcher, ebene Trigonometrie und Polygonometrie. Leipzig 1821.

Meyer J. Tob., tetragonometriae specimen I. Göttingen 1773.

L'Huilier S., Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectiligne etc. etc. Genève et Paris 1789.

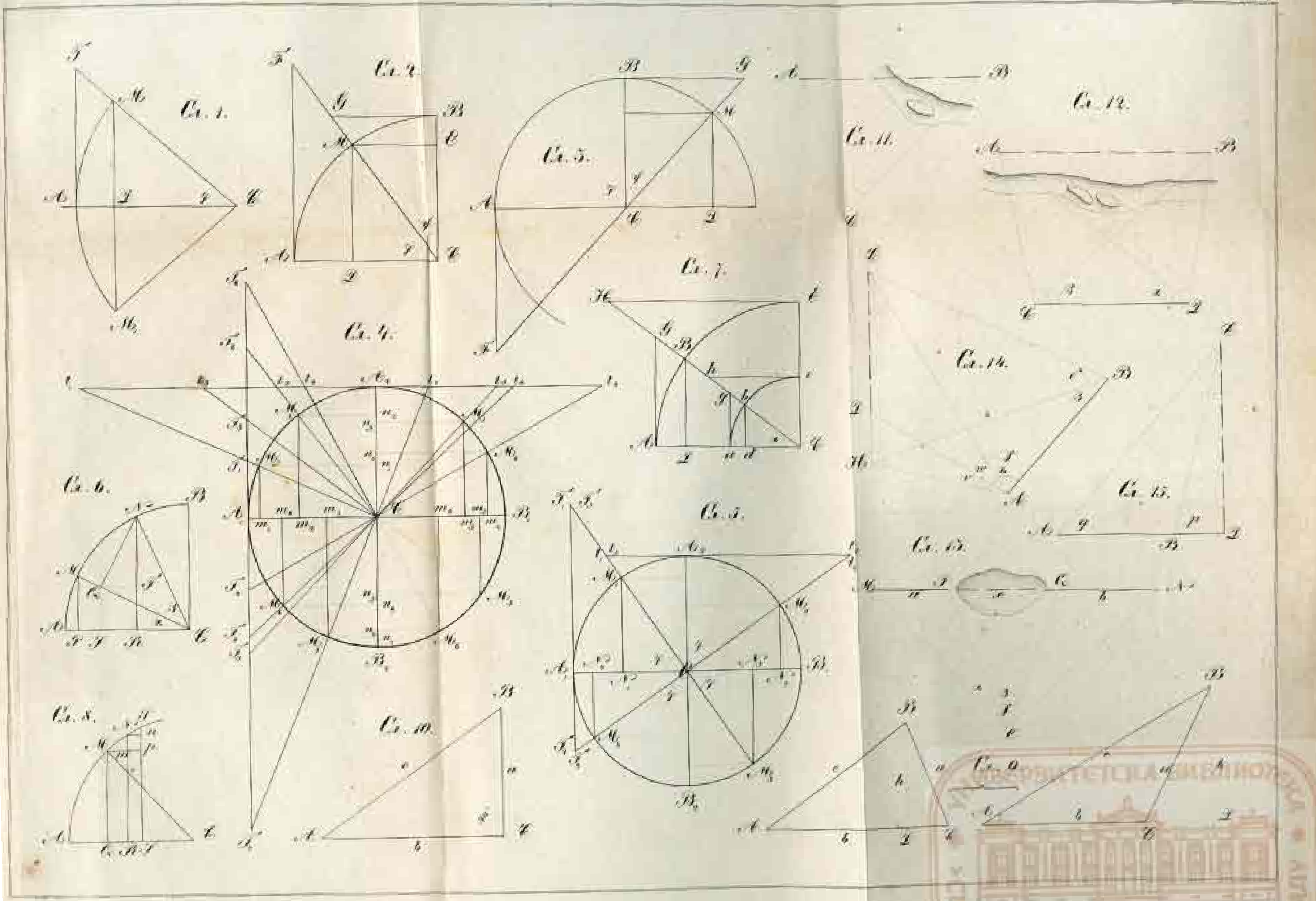
Поправке знаменитiи погрешака.

На стр.	у врсти	место	треба
6.	8. и 10. одозго	положителне и одрицателне	положителни и одрицателни
7.	6. одозго	$coces = \infty$	$cosec\ O = \infty$
„	6. одоздо	$= r$	$= -r$
8.	5. одозго	$sin.\ u.\ 360_0$	$sin.\ v.\ 360^0$
11.	6. „	пололеню	положеню
„	7. „	полотеланъ	положителанъ
12.	6. „	$(\frac{1}{2}\pi \pm \varphi)$	$(\frac{3}{2}\pi \pm \varphi)$
15.	9. „	$cot\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(sec^2\varphi-2)}}$	$cot\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(sec^2\varphi-1)}}$
16.	. . .	$sec\,\varphi = \frac{\sqrt{(1+cos^2\varphi)}}{cot\,\varphi}$	$sec\,\varphi = \frac{\sqrt{(1+cot^2\varphi)}}{cot\,\varphi}$
17.	2. одозго	$\frac{tang}{\sqrt{(1-tang^2)}}$	$\frac{tang}{\sqrt{(1+tang^2)}}$
22.	8. одоздо	$=-sin\alpha\, sin\beta$	$=-2sin\,\alpha\, sin\beta$
23.	3. „	$tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$	$tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$
25.	1. одозго	$1-tang^2\alpha$	$1-tang^2\alpha$
27.	7. „	$1+tang\frac{1}{2}\beta$	$1+tang^2\frac{1}{2}\beta$
„	8. одоздо	$2cot^2\frac{1}{2}\beta$	$2cot\frac{1}{2}\beta$
30.	7. одозго	сразмерносте	сразмерностiй
33.	11. одоздо	; дакле	. Дакле
„	8. „	$= 5,$	$= 5.$
34.	7. одозго	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$
37.	3. одоздо	$(sin\ 1'\ 58' - - sin\ 1'\ 57'')$	$(sin\ 1'\ 58'' - sin\ 1'\ 57'')$
40.	7. одозго	$sin\ (60-\beta)$	$sin\ (60^0-\beta)$
„	2. одоздо	$sin(60^0+\beta) = sin(60^0-\beta)$	$sin\ (60^0+\beta) - sin(60^0-\beta)$
43.	5. одозго	$\frac{1+\sqrt{5}}{1}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
„	3. „	$\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{3}{2}+\frac{5}{4})}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}})$
44.	13. одозго	веђъ и одавна	веђъ одавна
„	1. одоздо	и a	и α
47.	3. „	упогреблююђе	употреблююђе
52.	8. одоздо	лучне м. у праву	праве м. у лучну
„	5. „	праве м. у лучну	лучне м. у праву
54.	4. одозго	Б.)	А.)
„	9. одоздо	страну а	страну a
56.	12. одозго	$ac.\ B$	$ac.\ cos\ B$
58.	3. одоздо	$(S-b)(S-b)$	$(S-a)(S-b)$

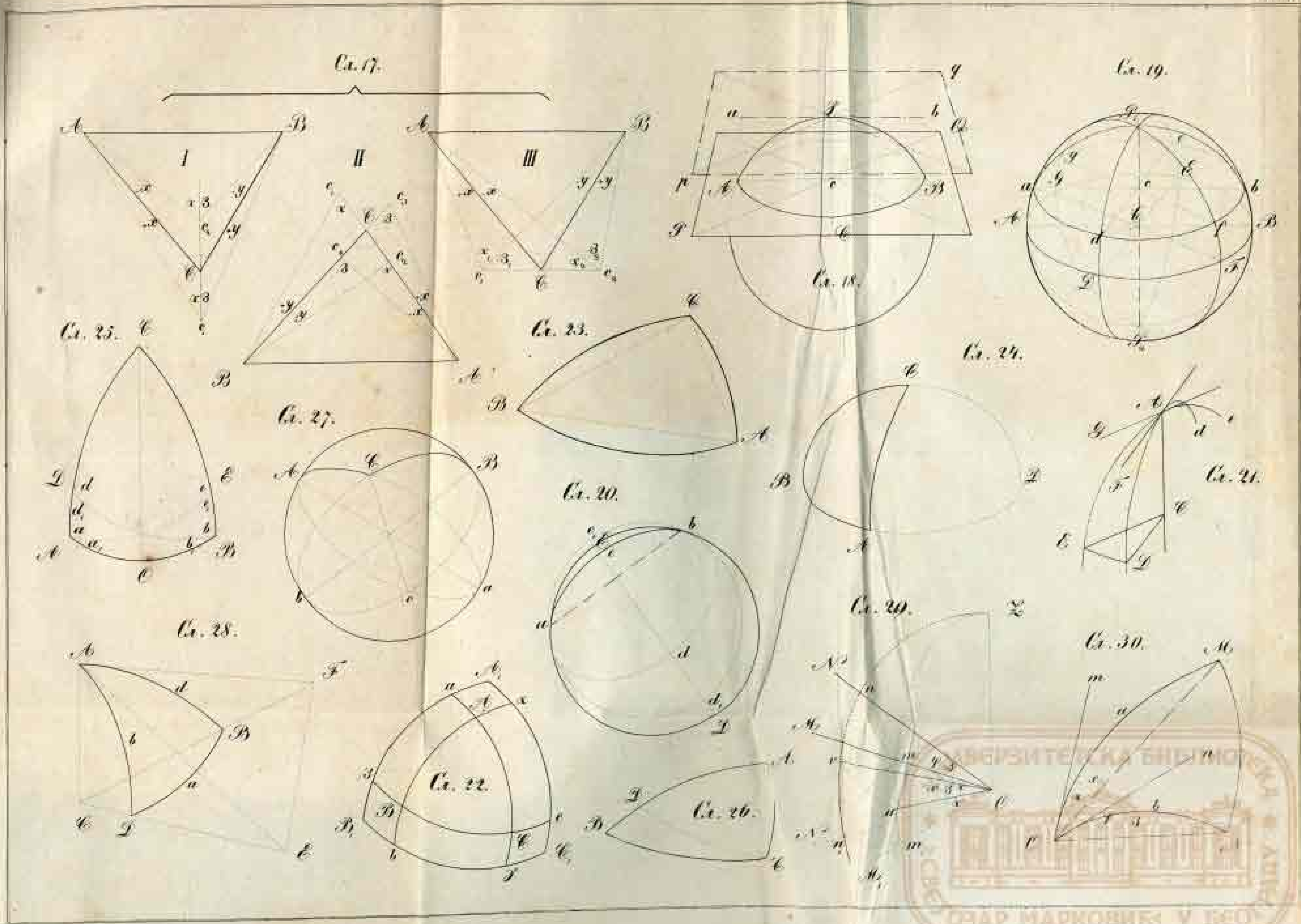
На стр.	у врсти		место	треба
60.	11.	одоздо	$sos\ B$	$cos\ B$
„	10.	„	$sco\ A$	$cos\ A$
63.	3.	„	супротный A	супротный угалъ A
71.	8.	„	$S-a=52$ $=42+10$	$S-a=52$ $-42=10$
„	5.	„	$\sqrt{\frac{14 \times 28}{38\ 24}}$	$\sqrt{\frac{14 \times 28}{38 \times 24}}$
79.	12.	одозго	$sin\ 81^0\ 55''\ 54''$	$sin\ 81^0\ 55'\ 54''$
83.	3.	„	$c.\ sin\frac{1}{2}(A+B)$	$2sin\frac{1}{2}(A+B)$
„	4.	„	$sin\frac{1}{2}(A+C)$	$sin\frac{1}{2}(A+B)$
87.	8.	одоздо	за удобно	за нешто удобніе
90.	8.	„	$sin\ (C+a)$	$sin\ (C+\alpha)$
„	4.	„	$(D-a)$	$(D-\alpha)$
92.	2.	„	$\frac{(a+b)\ sin\ \alpha}{sin\ (\gamma-\beta)}$	$\frac{(a+b)^2\ sin\ \alpha}{sin\ (\gamma-\beta)}$
93.	2.	одозго	$1-\varphi$	$1-cos\ \varphi$
95.	4.	„	$sin(w-v)$	$sin(w+v)$
96.	5. и 4.	одоздо	$sin\ a$	$sin\ \alpha$
98.	10.	одозго	$tang\frac{1}{2}(\varphi-\varphi)$	$tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$
103.	11.	одоздо	$arc.\ a\ P_2$	$arc.\ a\ P_1$
108.	9.	одозго	другогъ	некогъ
110.	8.	одоздо	$A+A_1C_1$	$A+B_1C_1$
„	5.	„	Bc	βc
118.	2.	одозго	§. 59.	§. 58.
„		„	$\frac{-2tang b.tang}{cos\ A}$	$\frac{-2\ taug\ b.\ tang\ d.}{cos\ A}$
119.	8.	„	$sin\ sin\ D$	$sin\ B\ sin\ D$
„	9.	одоздо	$cos\ A\ cos\ D$	$cos\ A\ cos\ B$
121.	6.	„	$sin\ \frac{A}{2}$	$sin\frac{A}{2}$ и $cos\frac{A}{2}$
123.	2.	одозго	$a\ sin\ \varphi$	з $sin\ \varphi$
126.	1.	одоздо	$cos\ d = cos\ b$	$cos\ d = cos\ a.\ cos\ b$
133.	4.	одозго	$d \overset{=}{>} 180^0 - a$	$d \overset{=}{<} 180^0 - a$
138.	1.	„	$cos^2\frac{1}{2}(a+b)$	$2cos^2\frac{1}{2}(a+b)$
„	2.	„	$cos\frac{D}{2}$	$cos^2\frac{D}{2}$

Приметбе. 1.) У примеру §а 89. погрешанъ є логаритамъ синуса одъ $\frac{\omega}{2}$, и зато погрешанъ и савъ дальій рачунъ.

2.) Погрешке састоеће се у промєнутымъ писменима, као е, л, ы... место ѣ, ль, и...., и обратно, остале су непоправлѣне.



Сл. 1.
Сл. 2.
Сл. 3.
Сл. 4.
Сл. 5.
Сл. 6.
Сл. 7.
Сл. 8.
Сл. 9.
Сл. 10.
Сл. 11.
Сл. 12.
Сл. 13.
Сл. 14.
Сл. 15.
Сл. 16.


Сл. 17.
Сл. 18.
Сл. 19.
Сл. 20.
Сл. 21.
Сл. 22.
Сл. 23.
Сл. 24.
Сл. 25.
Сл. 26.
Сл. 27.
Сл. 28.
Сл. 29.
Сл. 30.