Универзитет у Београду
Математички факултет
Смер: статистка, актуарска и финансијска математика

МАСТЕР РАД

Ланци Маркова са дискретним временом и примене

Студент
Јована Марковић 1050/2012

Ментор
др Јован Вукмировић

Београд, februar 2014. године

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Циљ овог мастер рада јесте теоријско представљање хомогених ланаца Маркова са дискретним временом, али је такође дат и приказ њихове практичне примене. Рад се састоји из четири поглавља, од којих први чини увод у рад. Друго поглавље рада бави се теоријским описом ланаца Маркова и у њему је дат приказ оног најважнијег што је потребно да се зна када је ова тема у питању. У трећем поглављу се описује само један мали део од многобројних модела ланаца Маркова који се користе у практичне примене. Четврти део је закључак.

Треба да се напомене да је за разумевање овог мастер рада потребно одређено математичко знање, јер иако је у већини случајева објашњено све што је потребно за праћење рада, ипак није било могуће да се све објасни детаљно.

Ради лакшег сналажења у раду, у дефиницијама је предмет дефинисања написан *italic* стилом. Сваки доказ теореме, става или леме почиње симболом Δ, а завршава се са ■, док се примери који се спомињу завршавају ознаком □.

Београд, децембар 2013. Јована Марковић

1. УВОД

Основни концепт ланаца Маркова представио је Андреј Андрејевич Марков (Андре́й Андре́евич Ма́рков) у свом раду „Исследование замечательного случая зависимых испытаний“[1] који је објављен 1907. године. Од тада су многи велики математичари допринели даљем развоју теорије ланаца Маркова, а једни од значајних били су: Колмогоров (у вези са случајем са бесконачним бројем стања); Доблин (допринос на свим пољима теорије ланаца Маркова); Дуб (рад са ланцима са непрекидним параметром); Леви (интуитивно је нацртао обиман цртеж поља). Иначе ова тема је и даље веома жива, са важним развојем како у теорији, тако и у практичној примени.

Ланци Маркова спадају у релативно једноставну, али и веома интересантну и корисну класу случајних процеса. Они описују случајне појаве или системе који се мењају током времена, а његова једноставна структура омогућава нам да сазнамо много тога о њиховом понашању у будућности. Ако узмемо у обзир познавање неких информација о прошлим стањима, условна расподела будућих стања система зависи само од оних најскоријих. Дакле можемо да кажемо да предвиђање будућности система зависи само од садашњег стања, а не и од пута којим је систем дошао до тог стања.

Марковљеви ланци представљају један од најпростијих математичких модела за описивање многих појава у реалном животу. Правило да су најједноставнији модели често и најкориснији за анализу практичних проблема не заобилази ни Марковљеве ланце. Њима се могу моделирати многе појаве, као што су појаве у биологији, психологији, теорији масовног опсуживања, спорту итд.

---

[1] Наслов рада може да се преведе као: „Истраживање о значајном случају зависних опита“. Рад је 1910. године преведен на француски језик - „Recherches sur un cas remarquable d’epreuves dependantes“.

2. ЛАНЦИ МАРКОВА СА ДИСКРЕТНИМ ВРЕМЕНОМ

2.1. Ланци Маркова

Марковски процеси, $\{X(t),\ t \in T\}$, имају особину да под условом да је позната предисторија процеса закључно са садашњим тренутком, будућност тј. вероватносна структура процеса у будућности не зависи од целе предисторије процеса већ само од садашњег тренутка. Ова особина назива се својство одсуства меморије, а позната је као и Марковљево својство. Код процеса Маркова $X(t)$ представља случајну величину дефинисану на неком простору вероватноћа. Параметар t најчешће означава време, односно t представља тренутак у којем се налази процес. T се зове скуп индекса и подскуп је скупа реалних бројева $\mathbb{R}$. У зависности од тога да ли је T дискретан или непрекидан скуп, разликујемо процесе Маркова са дискретним и непрекидним временом. Све вредности које може да узме случајна величина $X(t)$ чине скуп стања или простор стања који означавамо са S. Ако је скуп S дискретан тј. коначан или пребројив, тада се процес Маркова зове ланац Маркова.

Дефиниција 2.1.1. *Ланац Маркова* је случајан процес $\{X(t),\ t \in T\}$ који има својство Маркова и за свако $t \in T$, $X(t)\colon \Omega \to S$, где је S коначан или пребројив скуп.

Ово значи да за свако $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_{n+1} \in T$ где је $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ и било које $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in S$ важи следећа једнакост

$$P\{X(t_{n+1}) = a_{n+1} \mid X(t_n) = a_n, \dots, X(t_1) = a_1\} = P\{X(t_{n+1}) = a_{n+1} \mid X(t_n) = a_n\}. \quad (2.1.1)$$

2.2. Дефиниција и стандардне ознаке

Дефиниција 2.2.1. Ланац Маркова код којег је скуп индекса T коначан или пребројив ($T \subseteq \mathbb{N}_0$), назива се *ланац Маркова са дискретним временом*.

Уместо ознаке за скуп индекса T, даље ћемо да користимо ознаку $\mathbb{N}_0$ (сем у случајевима у којима буде прецизирано другачије). Сходно томе, случајну величину ћемо даље да означавамо са X_n где је $n \in \mathbb{N}_0$.

Ланци Маркова са дискретним временом се углавном користе за опис физичких система који у дискретним тренуцима времена прелазе из једног стања у други после једног или више корака (тренутака). Природно је да се даље јавља потреба за разматрањем вероватноћа таквих догађаја.

Вероватноћу да се у тренутку n после једног корака пређе из стања i у стање j означавамо са

$$p_{ij}^{n,n+1} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}, \qquad i,j \in S\,. \tag{2.2.1}$$

Уколико вероватноћа (2.2.1) не зависи од тренутка n, тада пишемо само

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,\ i,j \in S\,. \tag{2.2.2}$$

Такви ланци се називају хомогеним и у даљем тексту ћемо се бавити искључиво њима.

За вероватноћу преласка из стања i у стање j после n корака користимо ознаку $p_{ij}(n)$. Сада можемо да уведемо и појам матрице вероватноћа преласка хомогеног ланца Маркова за n корака

$$P_n = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \dots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \dots \\ & \dots & \end{bmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.3}$$

У i-тој врсти и j-тој колони матрице (2.2.3) налази се вероватноћа да се после n корака пређе из i-тог стања у j-то.

Димензија матрице вероватноћа преласка зависи од броја елемената у скупу S, односно од броја свих могућих стања у којем систем може да се нађе. Ако је тај скуп коначан, тада ће матрица бити димензије $|S| \times |S|$.

Када је $n = 1$ тада матрицу (2.2.3) означавамо са Π и она се просто зове матрица вероватноћа преласка

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \dots \\ & \dots & \end{bmatrix}. \tag{2.2.4}$$

Матрица Π је стохастичка[2], односно има својства:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i,j \in S \tag{2.2.5}$$

$$\textstyle\sum_j p_{ij} = 1, \quad \forall j \in S. \tag{2.2.6}$$

---

[2] Приметимо да је и матрица $P_n, n \in \mathbb{N}$, такође стохастичка.

Уведимо још и ознаку за вероватноће почетних стања, тј. за вероватноће догађаја да се систем у почетном тренутку нађе у неком од могућих стања:

$$p_i = P\{X_0 = i\}, \quad i \in S. \qquad (2.2.6)$$

И за ове вероватноће очигледно важи једнакост $\sum_i p_i = 1$.

2.3. Вероватноће преласка у n корака

У претходном делу смо дефинисали вероватноће преласка из једног стања у друго после једног и више корака, као и матрице вероватноћа преласка после једног и више корака. Сада ћемо да покажемо њихову везу и на који начин може да се јединствено дефинише ланац Маркова.

Теорема 2.3.1. *За произвољне природне бројеве m и n важе следеће једначине Колмогоров-Чепмена:*

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k\in S} p_{ik}(m) p_{kj}(n) \qquad i,j \in S. \qquad (2.3.1)$$

Важе и једнакости $P_{m+n} = P_m P_n$ и $P_n = \Pi^n$, где је Π^n ознака за n-ти степен матрице Π.

Δ За произвољне догађаје A, B и C важи следеће

$$P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(A|BC)\cdot P(BC)}{P(C)} = P(A|BC)\cdot P(B|C). \qquad (2.3.2)$$

За доказ једнакости (2.3.1) користићемо формулу потпуне вероватноће, једнакост (2.3.2) као и Марковљево својство (2.1.1):

$$p_{ij}(m+n) = P\{X_{m+n} = j \mid X_0 = i\} = \sum_{k\in S} P\{X_{m+n} = j, X_m = k \mid X_0 = i\} =$$

$$= \sum_{k\in S} P\{X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i\} \cdot P\{X_m = k | X_0 = i\} =$$

$$= \sum_{k\in S} P\{X_{m+n} = j | X_m = k\} \cdot P\{X_m = k | X_0 = i\} =$$

$$= \sum_{k\in S} p_{kj}(n) p_{ik}(m) = \sum_{k\in S} p_{ik}(m) p_{kj}(n).$$

Једнакости $P_{m+n} = P_m P_n$ и $P_n = \Pi^n$ су последице доказаних једнакости. ■

Став 2.3.1. *За произвољно* $n \in \mathbb{N}$ *и произвољна стања* $i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ *важи следећа једнакост:*

$$P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = p_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}. \tag{2.3.3}$$

Δ Коришћењем уопштене формуле множења вероватноће

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \tag{2.3.4}$$

и Марковљевог својства (2.1.1) непосредно следи доказ тврђења. ■

Приметимо да применом претходног става можемо да добијемо вероватноћу сваког могућег сценарија кроз који систем може да прође током одређеног периода. Наравно то је једино могуће уколико знамо расподелу почетног стања система као и матрицу вероватноћа преласка Π.

Став 2.3.2. *Вероватноћа да се систем у тренутку* n *нађе у стању* j *једнака је*

$$p_j^{(n)} = P\{X_n = j\} = \sum_{i \in S} p_i p_{ij}(n) \tag{2.3.5}$$

Δ Користећи формулу потпуне вероватноће

$$P(B) = \sum_i P(BA_i), \tag{2.3.6}$$

следи следеће:

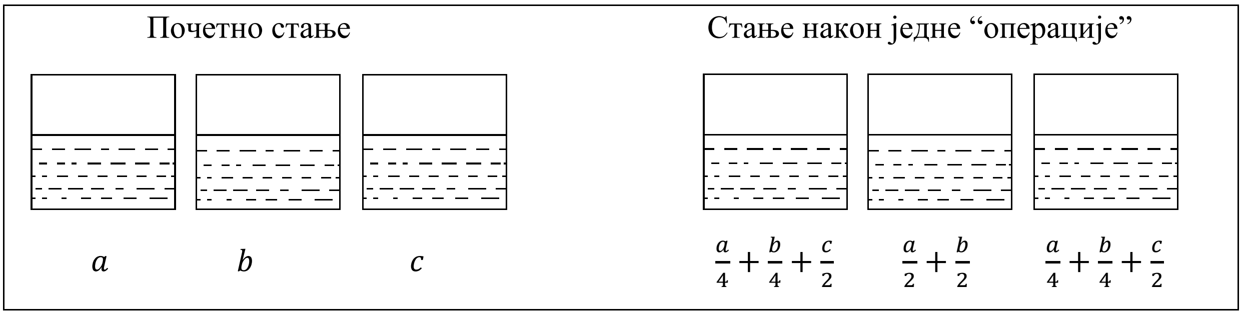
$$p_j^{(n)} = P\{X_n = j\} = \sum_{i \in S} P\{X_n = j, X_0 = i\} =$$

$$= \sum_{i \in S} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} \cdot P\{X_0 = i\} = \sum_{i \in S} p_i p_{ij}(n). \quad ■$$

Овде уочавамо да познавањем расподеле почетног стања система и матрице вероватноћа преласка Π можемо да знамо вероватноћу да се систем у било ком тренутку нађе у било ком могућем стању.

На основу претходна два става закључујемо да је ланац Маркова јединствено одређен са расподелом почетног стања система (p_i, $i \in S$) и матрицом вероватноћа преласка $\Pi = \left[p_{ij}\right]_{i,j \in S}$.

Пример 2.3.1. У свакој од три посуде се налази по литар течности различитог састава. Означимо течност у првој посуди са a, у другој са b и у трећој са c. Врши се следећа "операција": течност из прве посуде се преспе у другу; затим се литар хомогеног раствора из друге преспе у трећу; на крају се литар хомогеног раствора из треће преспе у прву посуду. Графички приказ после операције дат је сл. 2.3.1.



Сл. 2.3.1

Вероватноћа да је неки молекул течности из друге посуде након операције доспео у трећу једнака је $\frac{1}{4}$ јер се у трећој посуди налази $\frac{1}{4}l$ течности b (сматрамо да се после сваког пресипања течност добро измешала). Ако операцију поновимо још једном, ново стање у посудама је следеће: $\frac{5a}{16}+\frac{5b}{16}+\frac{6c}{16}$, $\frac{6a}{16}+\frac{6b}{16}+\frac{4c}{16}$, $\frac{5a}{16}+\frac{5b}{16}+\frac{6c}{16}$.

Желимо да одредимо $p_{ij}(n)$, за $i,j \in \{1,2,3\}$ и $n > 0$, односно веролваноћу да после n оваквих операција неки молекул из i–те посуде пређе у j–ту.

Матрица вероватноћа преласка после једне операције је

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

а после две операције

$$\Pi^2 = \begin{bmatrix} 5/16 & 6/16 & 5/16 \\ 5/16 & 6/16 & 5/16 \\ 6/16 & 4/16 & 6/16 \end{bmatrix}.$$

Треба да нађемо матрицу Π^n, $n > 0$, пошто желимо да одредимо $p_{ij}(n)$, за $i,j \in \{1,2,3\}$ и $n \in \mathbb{N}$. Ради лакшег израчунавања погодно је да матрицу Π запишемо у облику

$\Pi = \frac{1}{4}A$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, пошто тада важи једнакост $\Pi^n = \frac{1}{4^n}A^n$. Сада уместо Π^n тражимо A^n.

Карактеристичан полином мартице A, у ознаци φ_A, једнак је

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda,$$

где је I јединична матрица која има исту димензију као матрица A.

На основу Кејли-Хамилтонове теореме[3] важи једнакост $-A^3 + 5A^2 - 4A = 0$, односно $A^3 = 5A^2 - 4A$. Даље је

$$A^4 = A \cdot A^3 = A(5A^2 - 4A) = 5A^3 - 4A^2 = 5(5A^2 - 4A) - 4A^2 = 21A^2 - 20A.$$

Уопште добијамо да је

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A. \tag{2.3.7}$$

Потребно је да одредимо α_n и β_n за $n \in \mathbb{N}$. Приметимо да је $\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 1$ и $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$.

Из једнакости $A^{n+1} = A^n \cdot A$ следи да је

$$\alpha_{n+1}A^2 + \beta_{n+1}A = (\alpha_n A^2 + \beta_n A)A = \alpha_n A^3 + \beta_n A^2 = \alpha_n(5A^2 - 4A) + \beta_n A^2 =$$

$$= (5\alpha_n + \beta_n)A^2 - 4\alpha_n A,$$

односно $\alpha_{n+1} = 5\alpha_n + \beta_n$ и $\beta_{n+1} = -4\alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$. Сада добијамо да је

$$\alpha_{n+1} = 5\alpha_n - 4\alpha_{n-1}.$$

Једначина $\lambda^2 = 5\lambda - 4$ има решења $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 4$, па је $\alpha_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 4^n$ за $n \in \mathbb{N}$. Пошто су познати α_1 и α_2, решавањем система

$$0 = c_1 + c_2$$

$$1 = c_1 + 4 \cdot c_2,$$

---

[3] Тврђење Кејли-Хамилтонове теореме: Свака квадратна матрица је нула свог карактеристичног полинома.

добија се да је $\alpha_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{12}4^n$, односно из једнакости $\beta_n = -4\alpha_{n-1}$ добија се да је $\beta_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{12}4^n$. На основу (2.3.7) имамо

$$A^n = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{12}4^n\right)\begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{12}4^n\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \frac{4^n}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

односно

$$\Pi^n = \frac{1}{4^n}A^n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (2.3.8)$$

Сада можемо да израчунамо конкретне вероватноће да честица из једне од посуда пређе у било коју другу посуду или остане у истој за неко $n \in \mathbb{N}$. □

2.4. Повратна и пролазна стања

Дефиниција 2.4.1. Нека је $\{X(n),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ Марковљев ланац. Стање i је *повратно* ако је

$$P\{X_n = i, \text{за неко}\ n \geq 1 |\ X_0 = i\} = 1, \qquad (2.4.1)$$

тј. ако је вероватноћа да се систем врати у стање i при услову да је у почетном тренутку у том стању, једнака 1. У супротном, тј. ако је

$$P\{X_n = i, \text{за неко}\ n \geq 1 |\ X_0 = i\} < 1, \qquad (2.4.2)$$

стање i је *пролазно*.

У циљу испитивања услова када је неко стање повратно/пролазно, увешћемо још неке ознаке, доказаћемо помоћну теорему и навешћемо Абелову лему.

Означимо са $v_{i,j}(n)$ вероватноћу да систем први пут дође у стање j у тренутку n, ако је у почетном тренутку био у стању i, односно

$$v_{ij}(n) = P\{X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = i\}. \qquad (2.4.3)$$

Тада је вероватноћа да систем дође у стање j у било ком тренутку из почетног стања i, у ознаци v_{ij}, једнака

$$v_{ij} = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_{i,j}(n). \tag{2.4.4}$$

По начину дефинисања $v_{ij}(n)$, сматрамо да је $v_{ij}(0) = 0$ за све i и j. Такође можемо да уочимо да за повратно стање i важи да је $v_{ii} = 1$.

Дефиниција 2.4.2. Нека је $\{a_n\}$ низ реалних бројева такав да степени ред $A(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n s^n$ конвергирна у неком интервалу $(-s_0,\ s_0)$, $s_0 > 0$. Овако дефинисану функцију $A(s)$ називамо *генераторном функцијом низа* $\{a_n\}$.

На основу дефиниције 2.4.2. можемо да дефинишемо генераторне функције низова $\{p_{ij}(n)\}$ и $\{v_{ij}(n)\}$:

$$P_{ij}(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} p_{ij}(n)s^n, \tag{2.4.5}$$

$$V_{ij}(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} v_{ij}(n)s^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_{ij}(n)s^n, \tag{2.4.6}$$

где је

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } i = j, \\ 0, & \text{ако је } i \neq j. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Очигледно је да редови на десним странама једнакости (2.4.5) и (2.4.6) конвергирају за $|s| < 1$.

Теорема 2.4.1. *Важе следеће једнакости:*

$$P_{ii}(s) = 1 + V_{ii}(s)P_{ii}(s) \tag{2.4.8}$$

$$P_{ij}(s) = V_{ij}(s)P_{jj}(s), \qquad \textit{ако је } i \neq j. \tag{2.4.9}$$

Δ Нека су i и j фиксирана стања. За свако $n \in \mathbb{N}$ означимо

$$A_n = \{X_n = j\},\ B_n = \{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}.$$

Тада важи да је $A_n = A_nB_1 \cup \dots \cup A_nB_n$, при чему су $A_nB_1, \dots, A_nB_n$ међусобно дисјунктни догађаји, па добијамо

$$p_{ij}(n) = P\{X_n = j | X_0 = i\} = \sum_{k=1}^{n} P\{A_nB_k | X_0 = i\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P\{B_k|X_0 = i\}P\{A_n|B_k, X_0 = i\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P\{B_k|X_0 = i\}P\{A_n|X_k = j\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} v_{ij}(k)p_{jj}(n-k). \qquad (2.4.10)$$

Користећи једнакости (2.4.5), (2.4.6) и (2.4.10) добијамо да је

$$V_{ij}(s)P_{jj}(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_{ij}(n)s^n \sum_{n\in\mathbb{N}_0} p_{jj}(n)s^n =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}}\left[v_{ij}(1)p_{jj}(n-1) + \cdots + v_{ij}(n-1)p_{jj}(1) + v_{ij}(n)p_{jj}(0)\right]s^n =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_{ij}(n)s^n = \begin{cases} P_{ij}(s), & \text{ако је } i \neq j, \\ P_{ii}(s) - 1, & \text{ако је } i = j. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Лема 2.4.1. (Абелова)

(а) *Ако ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира, тада*

$$\lim_{s\to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a.$$

(б) *Ако је* $a_n \geq 0$ *и* $lim_{s\to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = a \leq \infty$, *тада*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = a. \quad \blacksquare$$ [4]

Теорема 2.4.2. *Стање i је повратно ако и само ако је*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty. \qquad (2.4.11)$$

Δ Претпоставимо да је i повратно стање, односно да је $v_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ii}(n) = 1$. На основу леме 2.4.2. (а)

$$\lim_{s\to 1_-} V_{ii}(s) = \lim_{s\to 1_-} \sum_{n=1}^{\infty} v_{ii}(n)s^n = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ii}(n) = 1.$$

Једнакост (2.4.8) можемо да напишемо и као $P_{ii}(s) = \frac{1}{1-V_{ii}(s)}$, па имамо да је

$$\lim_{s\to 1_-} P_{ii}(s) = \lim_{s\to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)s^n = \lim_{s\to 1_-} \frac{1}{1-V_{ii}(s)} = \infty.$$

Сада на основу леме 2.4.2 (б), добијамо

---

[4] Доказ леме 2.4.1. може да се нађе у [7] на страни 64.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty,$$

чиме смо доказали директно тврђење теореме.

Да бисмо доказали супротно тврђење користићемо закон контрапозиције[5]. Претпоставићемо да је стање i пролазно, тј. да је $v_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ii}(n) < 1$. Коришћењем леме 2.4.2 (а) и једнакости (2.4.8), закључујемо да је

$$\lim_{s\to 1_-} V_{ii}(s) = v_{ii} < 1,$$

односно

$$\lim_{s\to 1_-} P_{ii}(s) = \lim_{s\to 1_-} \frac{1}{1-V_{ii}(s)} < \infty.$$

Сада на основу леме 2.4.2. (б) добијамо да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty.$$

Доказали смо и обрнуто тврђење. ■

Пример 2.4.1. Испитаћемо пролазност/повратност свих стања из примера 2.3.1. (стања a, b и c ћемо редом да означимо са $1, 2$ и 3) Прво ћемо да испитамо да ли је стање $i = 1$ повратно, односно да ли је $\sum_{n=0}^{\infty} p_{11}(n) = \infty$. На основу (2.3.9) имамо следеће

$$\sum_n p_{11}(n) = \sum_n \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}\right) = \sum_n \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sum_n \frac{1}{4^n} = \sum_n \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3} = \sum_n \frac{1}{3} - \frac{4}{9} = \infty.$$

Стање $i = 1$ је повратно на основу теореме 2.4.2.

Пошто је $p_{22}(n) = p_{11}(n)$, доказивањем да је $i = 1$ повратно стање доказали смо да је и $i = 2$ повратно. Проверићемо још за $i = 3$

$$\sum_n p_{33}(n) = \sum_n \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{4^n}\right) = \sum_n \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sum_n \frac{1}{4^n} = \sum_n \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = \sum_n \frac{1}{3} + \frac{8}{9} = \infty.$$

И стање $i = 3$ је повратно. □

Пример 2.4.2. Нека је $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2 \ldots\}$ скуп стања хомогеног Марковљевог ланца и нека су вероватноће преласка дата са:

---

[5] Закон контрапозиције: $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

$$i \xrightarrow{p={}^{1}/_{3}} i+2;\ i \xrightarrow{q={}^{2}/_{3}} i-1\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Доказати да је стање 0 повратно.

Пошто је потребно $3n$ корака како би се систем из стања 0 поново вратио у њега, јер систем или иде унапред два корака или се враћа уназад за један, проверићемо да ли је $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(3n) = \infty$. Ако то важи, онда је сигурно и $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = \infty$.

$$p_{00}(3n) = \binom{3n}{n} p^n q^{2n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = a_n,$$

и сада испитујемо да ли ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира. Применом Стирлингове формуле $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$ кад $n \to \infty$, добијамо

$$a_n = \frac{(3n)!}{n!(2n)!}\frac{2^{2n}}{27^n} \sim \frac{\sqrt{6\pi n} \cdot (3n)^{3n} \cdot e^{-3n} \cdot 2^{2n}}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{4\pi n} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot 27^n} = \frac{\sqrt{{}^{3}/_{4}}}{\sqrt{n}}.$$

Пошто ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира, онда и ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира, односно $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)$ дивергира, па је стање 0 повратно.

Приметимо да је свако стање овог система повратно, пошто бисмо то доказивали на исти начин. □

2.5. Случајно лутање

Разматрамо случајно лутање честице која полази из тачке 0 и у јединици времена прави јединични корак у позитивном смеру са вероватноћом p и у негативном смеру са вероватноћом $q = 1 - p$. Кораци у лутању представљају низ независних случајних величина $X_1, X_2, \ldots$ са истом расподелом вероватноћа:

$$X_k : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}. \qquad (2.5.1)$$

Случајна величина $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ представља положај честице после n корака, а како смо рекли да честица полази из тачке 0 онда важи да је $S_0 = 0$ са вероватноћом 1. Низ $S_0, S_1, S_2\ \ldots$ је хомоген ланац Маркова чије су вероватноће преласка следеће:

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{ако је } j = i + 1, \\ q, & \text{ако је } j = i - 1, \\ 0, & \text{ако је } j \neq i \pm 1. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Почетна расподела вероватноћа по стањима је дата са: $p_0 = 1$ и $p_i = 0$ за $i \neq 0$.

Сада ћемо да одредимо вероватноће преласка из тачке i у тачку j у n корака, односно $p_{ij}(n)$.

Нека је честица при кретању из тачке i у тачку j направила x корака у позитивном смеру и y у негативном. Тада је $n = x + y$ и $x - y = j - i$, одакле се добија да је $x = (n + j - i)/2$ и $y = (n - j + i)/2$. Дакле број $n + j - i$ мора да буде паран, при чему добијамо да је $p_{ij}(n) = 0$ ако је $n + j - i$ непаран број и

$$p_{ij}(n) = \binom{n}{(n+j-i)/2} p^{(n+j-i)/2} q^{(n-j+i)/2}, \tag{2.5.3}$$

ако је $n + j - i$ паран.

Сада ћемо да проверимо повратност, односно пролазност стања овог ланца.

Да би се честица из тачке i вратила у њу, потребно је да она направи $2n$ корака:

$$p_{ii}(2n) = \binom{2n}{n} p^n q^n. \tag{2.5.4}$$

Користећи Стирлингову формулу, добијамо да при $n \to \infty$ важи

$$p_{ii}(2n) = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4n\pi}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi})^2} p^n q^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}. \tag{2.5.5}$$

Ако је $p = 1/2$, онда је $p_{ii}(2n) \sim 1/\sqrt{n\pi}$, па је $\sum_n p_{ii}(2n) = \infty$, односно стање i је повратно. Дакле сва стања су повратна.

Ако је $p \neq 1/2$, онда је $4pq < 1$, па је $\sum_n p_{ii}(2n) < \infty$, а тиме су и сва стања пролазна.

Одредићемо сада вероватноћу догађаја да ће честица полазећи из тачке i да стигне у тачку j, где је $i < j$, односно одредићемо v_{ij} које је дефинисано у претходном одељку са (2.4.4).

Очигледно важи $v_{ij} = {v_{01}}^{j-i}$, пошто описани догађај можемо да посматрамо као $j - i$ узастопних догађаја да ће честица полазећи из тачке 0 да стигне у тачку 1. На основу потпуне вероватноће добијамо да је

$$v_{01} = p + qv_{01}{}^2, \tag{2.5.6}$$

одакле следи да је $v_{01} = 1$ или $v_{01} = p/q$. Како за $1/2 < p < 1$ важи $p/q > 1$, то за ове вредности добијамо $v_{01} = 1$. Очигледно је и да је $v_{01} = 0$ за $p = 0$, као и да је $v_{01} = 1$ за $p = 1$. Вероватноћу v_{01} можемо да посматрамо и као функцију по p, пошто можемо да је запишемо у облику

$$v_{01} = p + (1-p)p^2 + 2(1-p)^2p^3 + 5(1-p)^3p^4 + \cdots = \sum_{n\geq 0} \alpha_n q^n p^{n+1}, \tag{2.5.7}$$

где су α_n природни бројеви. Сабирци су строго монотоне функције по p, за $p \in (0, 1/2)$, што лако може да се провери налажењем извода. Због тога је и v_{01} строго растућа на $(0, 1/2)$. Пошто је v_{01} вероватноћа и не прелази 1, следи да је на отвореном интервалу v_{01} строго мање од 1. Једина могућност је $v_{01} = p/q$. За $p = 1/2$, v_{01} мора да буде једнако 1, јер је p/q такође једнако 1. Према томе, за $i < j$ добијамо да је

$$v_{ij} = \begin{cases} (p/q)^{j-i}, & \text{ако је } 0 \leq p \leq 1/2, \\ 1, & \text{ако је } 1/2 \leq p \leq 1. \end{cases} \tag{2.5.8}$$

Аналогно за $i > j$ добијамо да је

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } 0 \leq p \leq 1/2, \\ (q/p)^{i-j}, & \text{ако је } 1/2 \leq p \leq 1. \end{cases} \tag{2.5.9}$$

За вероватноћу v_{ii} повратка у стање i ако честица полази из i, добијамо формулу $v_{ii} = pv_{i+1,i} + qv_{i-1,i}$. Користећи формуле (2.5.8) и (2.5.9) добијамо да је за $p \in [0,1/2]$

$$v_{ii} = p + q\frac{p}{q} = 2p = 1 - 1 + 2p = 1 - (1 - 2p), \tag{2.5.10}$$

док је за $p \in [1/2,1]$

$$v_{ii} = p\frac{q}{p} + q = 2q = 2 - 2p = 1 - (2p - 1). \tag{2.5.11}$$

Једнакости (2.5.10) и (2.5.11) можемо заједно да напишемо као

$$v_{ii} = 1 - |2p - 1|, \tag{2.5.12}$$

при чему је $p \in [0,1]$. Одавде опет следи закњучак које смо претходно већ добили: сва стања су повратна ако и само ако је $p = 1/2$.

Пример 2.5.1. Нека је $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ ланац Маркова са вероватноћама преласка

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & |i-j| = 1, \\ 0 & |i-j| \neq 1, \end{cases}$$

при чему је $X(0) = 0$. Дати су природни бројеви m и n. Означимо $U = min\{k \in \mathbb{N} | X(k) = -m\}$, $V = min\{k \in \mathbb{N} | X(k) = n\}$ и $A = \{V < U\}$. Из наведених претпоставки следи да је $P(A) = \frac{m}{m+n}$.

Означимо са $a_{i,j} = P(A_{ij})$, где је A_{ij} догађај да се у низу $\{X(k)\}$ појави j пре i. У складу са овим ознакама, имамо да је $P(A) = a_{m,n}$. Важе једнакости

$$a_{1,m+n-1} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot a_{2,m+n-2}$$

$$a_{2,m+n-2} = \frac{1}{2} \cdot a_{1,m+n-1} + \frac{1}{2} \cdot a_{3,m+n-3}$$

$$\ldots$$

$$a_{m+n-1,1} = \frac{1}{2} \cdot a_{m+n-2,2} + \frac{1}{2} \cdot 1.$$

Ради краћег писања означимо $y_k = a_{k,m+n-k}$. Важи

$$2y_1 = 0 + y_2$$

$$2y_2 = y_1 + y_3$$

$$\ldots$$

$$2y_{m+n-1} = y_{m+n-2} + 1.$$

Сабирањем ових једнакости добија се $y_1 + y_{m+n-1} = 1$, а редом налазимо $y_2 = 2y_1$, $y_3 = 2y_2 - y_1 = 3y_1, y_4 = 2y_3 - y_2 = 4y_1,\ \ldots,\ y_{m+n-1} = (m+n-1)y_1$, па је $y_1 + y_{m+n-1} = y_1 + (m+n-1)y_1 = 1$, односно $y_1 = \frac{1}{m+n}$, $y_2 = \frac{2}{m+n}$, $y_3 = \frac{3}{m+n}$, ..., $y_{m+n-1} = \frac{m+n-1}{m+n}$. Како смо $P(A)$ означили са $a_{m,n} = y_m$, то је $P(A) = \frac{m}{m+n}$. □

2.6. Класификација стања

Дефиниције које ћемо да наведемо на почетку овог дела односиће се на ланац Маркова $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ са скупом стања $\mathbb{Z}$.

Дефиниција 2.6.1. За стање $j \in \mathbb{Z}$ кажемо да је *достижно* из стања $i \in \mathbb{Z}$, ако је $v_{ij} > 0$ и то означавамо са $i \to j$. Другим речима, стање j је *достижно* из стања i ако постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је $p_{ij}(n) > 0$.

Дефиниција 2.6.2. Стања i и j међусобно *комуницирају,* ако је $v_{ij} > 0$ и $v_{ji} > 0$, односно ако постоји $n \in \mathbb{N}_0$ такво да је $p_{ij}(n) > 0$ и $m \in \mathbb{N}_0$ такво да је $p_{ji}(m) > 0$. Комуникацију између стања i и j означавамо са $i \leftrightarrow j$.

Теорема 2.6.1. *Нека стања i и j међусобно комуницирају. Стање i је повратно (пролазно) ако и само ако је стање j повратно (пролазно).*

Δ Пошто стања i и j комуницирају, онда постоје природни бројеви m и n, такви да је $p_{ij}(m) = \alpha > 0$ и $p_{ji}(n) = \beta > 0$. Користећи једначине Колмогоров-Чепмена (теорема 2.3.1.) добијамо да је

$$p_{ii}(m + k + n) \geq p_{ij}(m)p_{jj}(k)p_{ji}(n) = \alpha\beta p_{jj}(k), \tag{2.6.1}$$

$$p_{jj}(m + k + n) \geq p_{ji}(n)p_{ii}(k)p_{ij}(m) = \alpha\beta p_{ii}(k). \tag{2.6.2}$$

Ако сумирамо неједнакости (2.6.1) по свим k и такође сумирамо (2.6.2) по свим k, добијамо да редови $\sum_n p_{ii}(n)$ и $\sum_n p_{jj}(n)$ истовремено конвергирају или дивергирају. Тврђење сада добијамо ако применимо теорему 2.4.2. ■

Став 2.6.1. *Комуникација је релација еквиваленције.*

Δ Да бисмо доказали да је комуникација релација еквиваленције, морамо да покажемо да је она рефлексивна (Р), симетрична (С) и транзитивна (Т).

(Р) Стање i комуницира са самим собом, односно $i \leftrightarrow i$, пошто је то последица једнакости (2.4.7).

(С) Нека важи $i \leftrightarrow j$. Да ли важи и $j \leftrightarrow i$?

$$i \leftrightarrow j \;\Leftrightarrow\; i \to j \;\wedge\; j \to i \;\Leftrightarrow\; j \leftrightarrow i,$$

односно важи $j \leftrightarrow i$.

(Т) Нека су $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$. Да ли онда важи $i \leftrightarrow k$?

Постоји постоје природни бројеви m, n, m_1 и n_1, такви да је

$$p_{ij}(m) > 0, p_{jk}(n) > 0, p_{kj}(m_1) > 0 \text{ и } p_{ji}(n_1) > 0. \qquad (2.6.3)$$

Даље је на основу (2.6.3) и једначина Колмогоров-Чепмена

$$p_{ik}(m+n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{ij}(m)p_{jk}(n) > 0 \ \Rightarrow \ i \to k, \qquad (2.6.4)$$

$$p_{ki}(m_1+n_1) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{kj}(m_1)p_{ji}(n_1) > 0 \ \Rightarrow \ k \to i. \qquad (2.6.5)$$

Из (2.6.4) и (2.6.5) следи да важи $i \leftrightarrow k$. ■

Пошто смо показали да је комуникација релација еквиваленције, сада можемо скуп стања да разложимо на класе еквиваленције. Класу еквиваленције чине она стања која међусобно комуницирају. Пошто смо доказали у теореми 2.6.1. да стања која комницирају имају иста својства, онда следи да су сва стања једне класе или повратна или пролазна. Приметимо и да је могуће са позитивном вероватноћом[6] да се из једне класе дође до друге, али онда није могуће да се врати у полазну, јер би у супротном те две класе чиниле једну.

Дефиниција 2.6.3. Ланац Маркова је *несводљив* (*неразложив*) ако се скуп стања састоји из само једне класе еквиваленције, односно ако сва стања међусобно комуницирају.

Дефиниција 2.6.4. Нека је E подскуп скупа стања S. За скуп E кажемо да је *затворен* ако је $p_{ij} = 0$ за свако $i \in E$ и свако $j \notin E$, тј. ако је вероватноћа да се из стања које припада скупу E пређе у стање које није у скупу E једнака нули. Ако затворен скуп садржи само једно стање, онда се тај скуп и то стање називају *апсорбујућим*.

Теорема 2.6.2. *Свака повратна класа ланца Маркова је затворен скуп.*

Δ Претпоставимо да је C повратна класа која није затворена. Тада постоји $i \in C$ и $j \notin C$ такво да је $p_{ij} > 0$, међутим није могуће да се систем врати у стање i (у супротном би стања i и j комуницирала). Тиме смо добили да је вероватноћа да се систем из стања i не врати у то стање бар $p_{ij} > 0$, што се противи претпоставци да је i из повратне класе. ■

---

[6] Мисли се на вероватноћу која није једнака нули.

Претпоставимо да је $\varPi$ матрица вероватноће преласка за ланац Маркова и да су $R_1, \dots, R_r$ повратне класе и $T_1, \dots, T_s$ пролазне класе. Тада, након потенцијалног прераспореда индекса стања, матрицу можемо да напишемо у следећем облику:

$$\varPi = \left[\begin{array}{ccccc|c} \varPi_1 & & & & & \\ & \varPi_2 & & 0 & & \\ & & \varPi_3 & & & 0 \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & \varPi_r & \\ \hline & & W & & & Q \end{array}\right], \qquad (2.6.6)$$

где је $\varPi_k$ матрица вероватноћа преласка унутар класе R_k. Можемо да приметимо да су матрице $\varPi_1, \dots, \varPi_r$ и Q квадратне, док матрица W не мора да буде. Такође је матрица Q *субстохастична*, односно суме редова су мање или једнаке 1 док бар један ред има суму строго мању од 1. n-ти степен матрице (2.6.6) можемо да напишемо у облику

$$P_n = \varPi^n = \left[\begin{array}{ccccc|c} \varPi_1^n & & & & & \\ & \varPi_2^n & & 0 & & \\ & & \varPi_3^n & & & 0 \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & \varPi_r^n & \\ \hline & & W_n & & & Q^n \end{array}\right], \qquad (2.6.7)$$

па је за разумевање понашања ланца у класи R_k, потребно испитивање само матрице $\varPi_k$.

Пример 2.6.1. Нека је дата матрица вероватноћа преласка за ланац Маркова $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ чији је скуп стања $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\varPi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пошто матрицу вероватноћа $\varPi$ можемо да напишемо у облику

$$\varPi = \begin{bmatrix} \varPi_1 & 0 \\ 0 & \varPi_2 \end{bmatrix}, \text{ где су } \varPi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \text{ и } \varPi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

очигледно је да скуп S можемо да поделимо у две класе E_1 и E_2 такве да је $E_1 = \{1, 2\}$ и $E_2 = \{3, 4, 5\}$. Подскупови E_1 и E_2 су затворени, односно ако почетно стање припада скупу E_1, тада ће систем да остане у тој класи и биће нам значајна само матрица Π_1. Исто важи ако почетно стање припада скупу E_2. Ово је пример где имамо спојена два потпуно неповезана процеса. □

Пример 2.6.2. Нека је дата матрица вероватноћа преласка за ланац Маркова $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ чији је скуп стања $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

при чему је $p > 0, q > 0$ и $p + q = 1$. Ако посматрамо скуп са редоследом стања $\{1, 5, 2, 3, 4\}$, имамо матрицу преласка вероватноћа облика

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & q & 0 & p & 0 \end{bmatrix},$$

Читањем саме матрице закључимо да скуп стања S можемо да поделимо у три класе $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2, 3, 4\}$ и $E_3 = \{5\}$. Прва и трећа класа су затворене и обе се састоје из само једног стања, тзв. апсорбујућег стања. Друга класа није затворена и из ње је могуће да се дође у прву или трећу класу, али је онда зато немогућ повратак у другу класу из прве и треће. □

Дефиниција 2.6.5. *Период* стања i, у ознаци $d(i)$, јесте највећи заеднички делилац свих природних бројева n за које је $p_{ii}(n) > 0$. Стање i је *периодично* ако је $d(i) > 1$, односно *непериодично* ако је $d(i) = 1$.

Теорема 2.6.3. Ако стања i и j комуницирају, тада они имају исти период.

Δ Пошто је j достижно из i то онда постоји природан број n_1 такво да је

$$p_{ij}(n_1) > 0. \tag{2.6.8}$$

Аналогно, како је i достижно из j, онда постоји природан број n_2 такво да је

$$p_{ji}(n_2) > 0. \qquad (2.6.9)$$

На основу (2.6.8), (2.6.9) и једначина Колмогоров-Чепмена следи да је

$$p_{ii}(n_1 + n_2) \geq p_{ij}(n_1)p_{ji}(n_2) > 0, \qquad (2.6.10)$$

односно добијамо да $d(i) \mid n_1 + n_2$.

Сада претпоставимо да је n произвољан природан број такав да је $p_{jj}(n) > 0$. Тада опет коришћењем неједнакости (2.6.8), (2.6.9) и једначина Колмогоров-Чепмена следи да је

$$p_{ii}(n_1 + n + n_2) \geq p_{ij}(n_1)p_{jj}(n)p_{ji}(n_2) > 0, \qquad (2.6.11)$$

односно $d(i) \mid n_1 + n + n_2$. Како већ важи да $d(i) \mid n_1 + n_2$, онда следи да $d(i) \mid n$. Како је n произвољан природан број који задовољава $p_{jj}(n) > 0$, пронашли смо да је $d(i)$ заједнички делилац скупа $\{n \in \mathbb{N} \mid p_{jj}(n) > 0\}$. Пошто се период стања j, $d(j)$, дефинише као највећи заједнички делилац тог скупа, налазимо да је

$$d(j) \geq d(i). \qquad (2.6.12)$$

Ако заменимо стања и применимо исти поступак као до сада, добијамо да је

$$d(i) \geq d(j). \qquad (2.6.13)$$

Из (2.6.12) и (2.6.13) следи да је $d(j) = d(i)$. ■

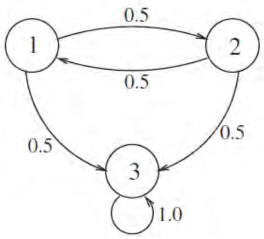
Доказивањем претходне теореме смо заправо доказали да сва стања једне класе имају исти период.

Приметимо да су сва стања у примерма 2.6.1. и 2.6.2. непериодична.

Пример 2.6.3. Посматрамо ланац Маркова са скупом стања $S = \{1, 2, 3\}$, чија је матрица вероватноћа преласка дата са

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Графички приказовог ланца дат је на сл. 2.6.1.



Сл. 2.6.1.

Желимо да испитамо периодичност стања овог ланца.

Посматрајући сл. 2.6.1. можемо да уочимо да стања 1 и 2 међусобно комуницирају и да је стање 3 достижно из стања 1 и 2. Стање 3 је очигледно непериодично, пошто када је систем у том стању не може да изађе из њега, односно $d(3) = 1$. С друге стране, стања 1 и 2 у случају када би могли да се врате у исто стање би то учинили само после парног броја корака, тако да је $d(1) = d(2) = 2$. Ако систем из стања 1 и 2 оде у стање 3, онда оно више не може да оде из тог стања, тако да су стања 1 и 2 пролазна, док је стање 3 повратно. □

2.7. Стационарне расподеле

Дефиниција 2.7.1. Расподела вероватноћа $(\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, где је $\sum_i \pi_i = 1$, је *стационарна расподела* за ланац Маркова, ако при услову да је почетна расподела вероватноћа по стањима

$$p_i = \pi_i, \text{ за све } i \in \mathbb{Z}, \tag{2.7.1}$$

у наредним тренуцима времена остаје непромењена, тј. ако за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$p_i^{(n)} = \pi_i, \text{ за све } i \in \mathbb{Z}. \tag{2.7.2}$$

Теорема 2.7.1. *Расподела* $(\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *је стационарна за ланац Маркова ако и само ако је*

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}, \text{ за све } j \in \mathbb{Z}, \tag{2.7.3}$$

и генерално, ако и само ако за сваки природан број n *важи*

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}(n), \text{ за све } j \in \mathbb{Z}. \tag{2.7.4}$$

Δ Нека је $(\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ стационарна расподела. На основу става 2.3.2. и једнакости (2.7.2) следи да за све природне бројеве n важи $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}(n)$, а како важи за свако n, тако важи и за $n = 1$.

Сада претпоставимо да је почетна расподела вероватноћа по стањима дата са (2.7.1) и да важи једнакост (2.7.4), односно (2.7.3). На основу става 2.3.2. и једнакости (2.7.2) и (2.7.4) имамо да је

$$p_j^{(n)} = \sum_{i\in S} p_i p_{ij}(n) = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}(n) = \pi_j,$$

чиме смо показали да је $(\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ стационарна расподела. ■

Ако са π означимо расподелу $\pi = (\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, при чему Π представља матрицу вероватноћа преласка, тада једнакост (2.7.3) можемо да напишемо у матричном облику

$$\pi = \pi \cdot \Pi. \qquad (2.7.5)$$

Пример 2.7.1. Нека је матица вероватноћа преласка за ланац Маркова дата са

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Одредити стационарне вероватноће.

Из једнакости

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix},$$

добијамо следеће

$$\begin{array}{lclcl}
\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_3 & & \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_3 = 0 & & \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_3 = 0 \\
\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 & \longrightarrow & -\frac{2}{3}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2 = 0 & \xrightarrow{I+II} & \frac{3}{4}\pi_2 - \frac{1}{6}\pi_3 = 0. \\
\pi_3 = \frac{3}{4}\pi_2 + \frac{5}{6}\pi_3 & & -\frac{3}{4}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 = 0 & & \cancel{-\frac{3}{4}\pi_2 + \frac{1}{6}}\pi_3 = 0
\end{array}$$

Добили смо да једно решење зависи од друга два, зато користимо и једнакост

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

Решавањем једначина добијамо да је $\pi_1 = \frac{9}{53}$, $\pi_2 = \frac{8}{53}$ и $\pi_3 = \frac{36}{53}$. □

2.8. Ергодичност

И даље се бавимо Марковљевим ланцем $\{X(n),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ чији је скуп стања $\mathbb{Z}$. Природно се поставља и питање понашања низа $\{X(n)\}$ после великог броја промена стања. У општем случају не може се очекивати да $X(n)$ конвергира ка неком фиксираном стању, али би при одређеним условима могло да се очекује да у неком смислу постоји гранична расподела.

Дефиниција 2.8.1. Марковљев ланац $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, са скупом стања S, је *ергодичан* ако за произвољна стања i и j постоји

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j^* > 0, \qquad \text{где је } \sum_j p_j^* = 1. \tag{2.8.1}$$

Можемо рећи да је ланац Маркова ергодичан када има граничну расподелу.

Теорема 2.8.1. *Нека је $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ланац Маркова са коначним скупом стања $S = \{1, 2, \dots, m\}$, $p_{ij} = p_{ij}(1) \geq \delta$, за свако $i, j \in S$, где је $\delta > 0$. Из наведених претпоставки следи да је $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ергодичан, тј. за свако стање $j \in S$ постоји $lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j^*$; p_j^* не зависи од i и важи $p_1^* + p_2^* + \cdots + p_m^* = 1$.*

Δ Користећи једначине Колмогоров-Чепмена и неједнакост $p_{ij} \geq \delta$ имамо

$$p_{ij}(n) = p_{i1}(n-1)p_{1j} + p_{i2}(n-1)p_{2j} + \cdots + p_{im}(n-1)p_{mj} \geq$$

$$\geq \delta[p_{i1}(n-1) + p_{i2}(n-1) + \cdots + p_{im}(n-1)] = \delta, \qquad (n \geq 2),$$

односно

$$p_{ij}(n) \geq \delta, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.8.2}$$

Уводимо следеће ознаке

$$\alpha_{nj} = \min\{p_{1j}(n), p_{2j}(n), \dots, p_{mj}(n)\}, \tag{2.8.3}$$

$$\beta_{nj} = \max\{p_{1j}(n), p_{2j}(n), \dots, p_{mj}(n)\}. \tag{2.8.4}$$

Пошто је за свако $i \in S$

$$p_{ij}(n+1) = p_{i1}p_{1j}(n) + \cdots + p_{im}p_{mj}(n) \geq \alpha_{nj}[p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{im}] = \alpha_{nj}, \quad (2.8.5)$$

важи да је

$$\alpha_{(n+1)j} \geq \alpha_{nj}. \quad (2.8.6)$$

Аналогно се добија да је

$$\beta_{(n+1)j} \leq \beta_{nj}. \quad (2.8.7)$$

Следи да постоје лимеси $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_{nj}$ и $\beta = \lim_{n\to\infty} \beta_{nj}$ и важи $\alpha \leq \beta$. Треба да докажемо да је $\alpha = \beta$.

Полазимо од једнакости

$$p_{ij}(n+1) = p_{i1}p_{1j}(n) + \cdots + p_{im}p_{mj}(n), \ i, j \in S.$$

Сваки од бројева $p_{kj}(n)$, $k \in S$, је већи или једнак α_{nj}, а бар један од бројева $p_{1j}(n), p_{2j}(n), \dots, p_{mj}(n)$ је једнак β_{nj}, па $p_{ij}(n+1)$ може да се процени овако:

$$p_{ij}(n+1) \geq \alpha_{nj}[p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{im}] + (\beta_{nj} - \alpha_{nj})\delta = \alpha_{nj} + (\beta_{nj} - \alpha_{nj})\delta, \forall i \in S,$$

односно

$$\alpha_{(n+1)j} \geq \alpha_{nj} + (\beta_{nj} - \alpha_{nj})\delta. \quad (2.8.8)$$

На сличан начин се добија

$$\beta_{(n+1)j} \leq \beta_{nj} - (\beta_{nj} - \alpha_{nj})\delta. \quad (2.8.9)$$

Из (2.8.8) и (2.8.9) добијамо да је

$$\beta_{(n+1)j} - \alpha_{(n+1)j} \leq (\beta_{nj} - \alpha_{nj})(1 - 2\delta), n \in \mathbb{N}, \quad (2.8.10)$$

одакле се види да $\beta_{nj} - \alpha_{nj} \to 0$, тј. $\alpha = \beta$ кад $n \to \infty$.

С обзиром да су α_{nj} и β_{nj} уведене са (2.8.3) и (2.8.4), а показали смо и да постоје и њихови лимеси кад $n \to \infty$ који су једнаки, добијамо да је

$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \alpha = \beta, \forall i \in S.$

Овим је доказано да је почетан ланац ергодичан. ■

Теорема 2.8.2. *Ако је* $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *ланац Маркова са коначним скупом стања* $S = \{1, 2, \dots, m\}$, $p_{ij}^r = p_{ij}(r) \geq \delta$, *за свако* $i, j \in S$, *неко* $r \in \mathbb{N}$, *где је* $\delta > 0$, *онда је* $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *ергодичан.*

Δ Дефинишимо ланац $Y_n = X_{nr}$, $n \in \mathbb{N}$. На основу теореме 2.8.1. овај ланац је ергодичан, односно за свако стање $j \in S$ постоји лимес $p_{ij}(nr)$, односно

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nr) = p_j^*, \tag{2.8.11}$$

где p_j^* не зависи од $i \in S$. Даље имамо

$$p_{ij}(nr+1) = p_{i1}p_{1j}(nr) + \cdots + p_{im}p_{mj}(nr) \xrightarrow[n\to\infty]{} p_j^*[p_{i1} + \cdots + p_{im}] = p_j^*, \tag{2.8.12}$$

затим слично важи

$$p_{ij}(nr+k) \xrightarrow[n\to\infty]{} p_j^*, \quad k \in \{2, 3, \dots, r-1\}. \tag{2.8.13}$$

Из једнакости (2.8.11), (2.8.12) и (2.8.13) следи да $p_{ij}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} p_j^*$. Овим смо доказали да је $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ергодичан. ■

Приметимо да теорему 2.8.2. можемо да формулишемо и на други начин: ако за ланац Маркова са коначно много стања постоји природан број n_0, такав да матрица вероватноћа преласка реда n_0 има све позитивне елементе, онда је тај ланац ергодичан.

До сада смо дефинисали ергодичност и навели неке услове који морају да буду задовољени да би ланац Маркова имао то својство. Даље ћемо да видимо каква је гранична расподела ергодичног Марковљевог ланца.

Теорема 2.8.3. *Нека је* $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *ланац Маркова са коначним скупом стања* S. *Претпоставимо да је тај ланац ергодичан, односно да је*

$$lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j^*, \text{ за све } j \in S. \tag{2.8.14}$$

Тада је расподела $p^* = \{p_j^* \mid j \in S\}$ *стационарна.*

Δ Коришћењем једначина Колмогоров-Чепмена и чињенице да је скуп стања коначан[7], имамо да је

$$\sum_{j\in S} p_j^* = \sum_{j\in S} \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} p_{ij}(n) = 1,$$

као и

$$p_j^* = lim_{n\to\infty} p_{ij}(n+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in S} p_{ik}(n) p_{kj} =$$

$$= \sum_{k\in S} \lim_{n\to\infty} p_{ik}(n) p_{kj} = \sum_{k\in S} p_j^* p_{kj}.$$

На основу теореме 2.7.1. следи да је расподела $\{p_j^* \mid j \in S\}$ стационарна. ■

Пример 2.8.1. Нека је дата матрица вероватноћа преласка за ланац Маркова са скупом стања $S = \{1, 2, 3\}$:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(а) Одедити закон расподеле за $\{X_2|X_1 = 1\}$ и израчунати $P\{X_5 = 2|X_1 = 1\}$.

(б) Доказати да је ланац ергодичан и израчунати стационарне вероватноће.

(а) Ако је $X_1 = 1$, читајући из таблице уочавамо да систем може да оде или у 1 са вероватноћом $\frac{1}{2}$ или у 2 са вероватноћом $\frac{1}{2}$. Зато случајна величина $\{X_2|X_1 = 1\}$ има расподелу : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

За рачунање $P\{X_5 = 2|X_1 = 1\}$ нам је потребна матрица вероватноћа преласка другог реда:

$$P_2 = \Pi^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}.$$

---

[7] Коначан скуп дозвољава замену места суме и лимеса.

Сада користимо формулу тоталне вероватноће и својство Маркова, па добијамо следеће:

$$P\{X_5 = 2|X_1 = 1\} = \sum_{i\in S} P\{X_5 = 2, X_3 = i\,|X_1 = 1\} =$$

$$= \sum_{i\in S} P\{X_3 = i|X_1 = 1\} \cdot P\{X_5 = 2\,|X_3 = i\} =$$

$$= P\{X_3 = 1|X_1 = 1\} \cdot P\{X_5 = 2|X_3 = 1\} +$$

$$+ P\{X_3 = 2|X_1 = 1\} \cdot P\{X_5 = 2|X_3 = 2\} +$$

$$+ P\{X_3 = 3|X_1 = 1\} \cdot P\{X_5 = 2|X_3 = 3\} =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{12} \approx 0.43.$$

(б) Пошто мартица P_2 има све позитивне чланове, онда на основу теореме 2.8.2. следи да је Марковљев ланац ергодичан. Пошто ергодичан ланац Маркова са коначним скупом стања има стационарну граничну расподелу, користићемо једначине добијене из једнакости (2.7.4) и $\sum_{i\in S} p_i^* = 1$ да бисмо израчунали стационарне вероватноће p_i^*, $i \in \{1,2,3\}$:

$$p_1^* = \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{3}p_2^*,$$

$$p_3^* = \frac{1}{3}p_2^* + \frac{1}{2}p_3^*,$$

$$p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1.$$

Решавањем једначина добијамо резултат: $p_1^* = \frac{2}{7}$, $p_2^* = \frac{3}{7}$ и $p_3^* = \frac{2}{7}$. □

Пример 2.8.2. Нека је дата матрица вероватноћа прелаcка за ланац Маркова са скупом стања $S = \{1, 2, 3\}$:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Да ли је овај ланац ергодичан? Ако јесте, наћи стационарне вероватнће.

Пробаћемо да нађемо матрицу преласка са позитивним елементима.

$$P_2 = \Pi^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_3 = \Pi^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_4 = \Pi^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \Pi.$$

Пошто се после свака три корака систем враћа у тачно одређено стање са вероватноћом један, неће постојати гранична расподела овог ланца Марова. Закључујемо да ланац није ергодичан. □

2.9. Додатак - матрице вероватноћа преласка за коначне ланце Маркова

У овом делу ћемо да одговоримо на нека питања која се тичу Марковљевих ланаца са коначним скупом стања, а која се често користе у пракси.

Питање 1. Колико корака очекујемо да направи ланац пре него што оде у апсорбујуће стање (или повратну класу), ако је $X_0 = i$, где је i пролазно стање?

Нека је Π матрица вероватноћа преласка неког коначног ланца Маркова $\{X_n, n \geq 0\}$. Као што смо раније споменули, ова матрица може да се представи у облику

$$\Pi = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Pi} & 0 \\ \hline W & Q \end{array}\right], \tag{2.9.1}$$

где је $\tilde{\Pi}$ матрица вероватноћа преласка само за она стања која су повратна, Q је подматрица матрице Π и пружа нам увид у вероватноће прелаза између пролазних стања, и W је подматрица матрице Π која садржи вероватноће преласка из пролазних у повратна стања. Степен матрице (2.9.1) има облик

$$\Pi^n = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Pi}^n & 0 \\ \hline W_n & Q^n \end{array}\right]. \tag{2.9.2}$$

Пошто су вероватноће које се налазе у матрици Q везане за вероватноће преласка између пролазних стања, то значи да ће $Q^n \to 0$ кад $n \to \infty$. Одавде добијамо да ће апсолутне вредности сопствених вредности матрице Q да буду строго мање од 1. Стога ће да постоји инверз матрице $(I_d - Q)$, тј.

$$M = (I_d - Q)^{-1}. \tag{2.9.3}$$

Ако је j пролазно стање дефинишимо укупан број догађаја да се систем нађе у том стању

$$Y_j = \sum_{n\geq 0} I\{X_n = j\}. \tag{2.9.4}$$

Како је j пролазно стање, то је онда $Y_j < \infty$ са вероватноћом 1. Претпоставимо да је $X_0 = i$, где је i такође пролазно стање. Тада је

$$E\left(Y_j \middle| X_0 = i\right) = E\left(\sum_{n\geq 0} I\{X_n = j\} \, |X_0 = i\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} P\{X_n = j | X_0 = i\} =,$$

$$= \sum_{n\geq 0} p_{ij}(n).$$

Добили смо да очекивање $E\left(Y_j \middle| X_0 = i\right)$ представља i–ту врсту и j–ту колону матрице $I_d + P + P^2 + \cdots$, што је исто као и вредност i–те врсте и j–те колоне матрице $I_d + Q + Q^2 + \cdots$[8]. Простом рачуницом добијамо да је

$$I_d + Q + Q^2 + \cdots = (I_d - Q)^{-1} = M. \tag{2.9.5}$$

Показали смо да је очекивани број догађаја да систем уђе у стање j ако је започео у стању i једнак броју који се налази у i–тој врсти и j–тој колони матрице M.

Ако желимо да израчунамо очекивани број корака да ланац уђе у апсорбујуће стање или класу, при чему је $X_0 = i$, потребно је да саберемо све вредности i–те врсте, односно да саберемо све очекиване вредности догађаја да систем посети сва пролазна стања ако је $X_0 = i$.

Пример 2.9.1. Посматрамо ланац Маркова са скупом стања $S = \{1, 2, 3, 4\}$ и матрицом вероватноћа преласка

$$\varPi = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}. \tag{2.9.6}$$

Након прераспореда скупа стања S у скуп $\{3, 4, 1, 2\}$, имамо нову матрицу преласка

---

[8] Овде се, као и даље у овом одељку, i-та врста и j-та колона не односе на редне бројеве врсте и колоне матрице, већ на врсте и колоне одређених стања у матрици.

$$\Pi = \left[\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ \hline 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right], \tag{2.9.7}$$

где је

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.9.8}$$

Даље имамо да је

$$M = (I_d - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Из матрице читамо да ако је систем у почетку био у стању 1, да је очекивани број посета стању 2 пре него што уђе у повратну класу једнак 3, а очекивани број корака који систем направи пре него што уђе у повратну класу једнак је $4 + 3 = 7$. Ако је $X_0 = 2$, онда је очекивани број корака који систем направи пре него што уђе у повратну класу једнак 10. □

Питање 2. Ако имамо несводљив ланац и произвољна стања $i, j \in S$, колики је очекиван број потребних корака да систем пређе из стања i у стање j?

За одговор на друго питање користићемо технику коју смо до сада дефинисали, али са неким изменама.

Прераспоредићемо скуп стања тако да је на првом месту стање j. Тиме матрицу вероватноћа преласка можемо да напишемо на следећи начин:

$$\Pi = \left[\begin{array}{c|c} p_{jj} & U \\ \hline W & Q \end{array}\right], \tag{2.9.9}$$

где је Q субстохастична матрица и вектор U садржи вероватноће преласка из стања j у друга стања. Приметимо сад да би одговор на питање колико корака је потребно да се направи како би систем прешао из стања i у стање j остало непромењено ако би стање j било апсорбујуће. Зато ћемо даље да посматрамо матрицу која се разликује од (2.9.9)

$$P = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline W & Q \end{array}\right]. \tag{2.9.10}$$

Овај проблем нам се сад своди на решавање првог питања које смо већ објаснили.

Пример 2.9.2. Посматрамо матрицу вероватноћа прелаcalled ска за случајно лутање са рефлектујућим баријерама и скупом стања $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\Pi = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]. \tag{2.9.11}$$

Желимо да израчунамо колико корака је потребно да систем пређе из стања 3 у стање 0.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ M = (I_d - Q)^{-1} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}. \tag{2.9.12}$$

Сабирањем свих вредности из треће врсте матрице M добијамо да је очекивани број корака, који је потребно да се направи како би систем прешао из стања 3 у стање 0, једнак 15. □

Питање 3. Ако је $X_0 = i$, при чему је i пролазно стање, и повратне класе обележимо са $R_1, R_2, \ldots,$, која је вероватноћа да ланац заврши у повратној класи R_k?

Приметимо да повратне класе можемо да посматрамо као апсобујућа стања, односно да групишемо сва стања једне класе у једно. Тако ћемо уместо $R_1, R_2, \ldots$, да користимо ознаке $r_1, r_2, \ldots$, где је $p_{r_i, r_i} = 1$. Означимо са $t_1, t_2, \ldots$, сва пролазна стања система. Матрицу преласка можемо да напишемо у облику

$$\Pi = \left[\begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline W & Q \end{array}\right], \tag{2.9.13}$$

где смо прво ставили аспорбујућа стања. За произвољно пролазно стање t_i и повратну класу r_k, дефинисаћемо вероватноћу

$$p_k(t_i) \overset{\text{def}}{=} P\{X_n = r_k \text{ за неко } n \geq 0 | X_0 = t_i\}. \tag{2.9.14}$$

За апсорбујућа стања r_k и r_i важи да је $p_k(r_k) \equiv 1$ и $p_k(r_i) = 0$, ако је $i \neq k$. За свако пролазно стање t_i имамо следеће

$$p_k(t_i) \ = P\{X_n = r_k \text{ за неко } n \geq 0 | X_0 = t_i\} =$$

$$= \sum_{j \in S} P\{X_1 = j | X_0 = i\} P\{X_n = r_k \text{за неко } n \geq 0 | X_1 = j\} =$$

$$= \sum_{j \in S} p_{t_i,j} p_k(j) = \sum_{r_j} p_{t_i,r_j} p_k(r_j) + \sum_{t_j} p_{t_i,t_j} p_k(t_j) =$$

$$= p_{t_i,r_k} + \sum_{t_j} p_{t_i,t_j} p_k(t_j). \qquad (2.9.15)$$

Претходна једнакост може да се прикаже и матрично на следећи начин

$$A = W + QA, \qquad (2.9.16)$$

где i–та врста и k–та колона матрице A представља вероватноћу $p_k(t_i)$. Даље имамо

$$A = W + QA \iff (I_d - Q)A = W \iff A = (I_d - Q)^{-1}W \iff A = MW. \qquad (2.9.17)$$

Пример 2.9.3. Посматрамо матрицу (2.9.7) из примера 2.9.1. која има скуп стања $S = \{3, 4, 1, 2\}$, тј.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ \hline 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right].$$

Приметимо да у овом примеру знамо да систем мора да уђе у стање 3 пре стања 4 односно да систем улази у повратну класу само преко стања 3. Тако да је ово добра провера за раније описан посутпак, јер су вероватноће да из пролазних стања уђе у стање 3 једнаке 1, а да из пролазних стања уђе у стање 4 једнаке 0.

Имамо да су

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad W = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

па је

$$MW = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

што смо и очекивали да ћемо да добијемо. □

Пример 2.9.4. Посматрамо сада пример 2.9.2., где после прераспоређивања стања имамо да је $S = \{0, 4, 1, 2, 3\}$ и матрицу преласка је облика

$$\Pi = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right]. \qquad (2.9.18)$$

Тада је

$$W = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}, \; MW = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \;\;4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (2.9.19)$$

Ако је $X_0 = 1$, вероватноћа да систем уђе у апсорбујуће стање 0 једнака је $3/4$, а у стање 4 једнака је $1/4$. Природно је да буде већа вероватноћа да систем из стања 1 пређе у стање 0 него у 4, пошто су стања 0 и 1 директно повезана. Сличан закључак добијамо и када је $X_0 = 3$, само што су вероватноће замењене, пошто су стања 3 и 4 директо повезана. Ако је $X_0 = 2$, тада ће систем са истим вероватноћама да уђе у апсорбујућа стања 0 и 4. Ово смо могли да очекујемо јер стање 2 није директно повезано са апрорбујућим стањима, већ је повезана са њима преко везе са стањима 1 и 3 у које одлази са истим вероватноћама. С друге стране, стања 1 и 3 са истим вероватноћама прелазе у апсорбујућа стања, па се зато и добија овакав резултат. □

3. ПРИМЕНА ЛАНАЦА МАРКОВА СА ДИСКРЕТНИМ ВРЕМЕНОМ

Значај Марковљевих ланаца лежи у великом броју природних физичких, биолошких, економских и других феномена који се могу описати са њим. У овом поглављу бавићемо се применом ланаца Маркова у разним сегментима.

3.1. Ланац Маркова и Винеров процес

Сада ћемо да покажемо како можемо да користимо ланац Маркова за решавање неких математичких проблема. У конкретном случају описаћемо како се применом ланаца Маркова може доказати тврђење Винеровог процеса. Како до сада нисмо спомињали Винеров процес, прво ћемо да наведемо његову дефиницију, а затим и тврђење које треба да докажемо.

Дефиниција 3.1.1. Случајни процес $\{W(t), t \geq 0\}$ дефинисан на неком простору верованоћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ је *Винеров процес* или *Брауново кретање*, ако важи:

(а) $W(0) = 0$ скоро сигурно;

(б) случајан процес W има независне прираштаје;

(в) за све реалне бројеве $0 \leq s < t < \infty$ важи $W(t) - W(s) \in \mathcal{N}(0, t-s)$, тј. случајна величина $W(t) - W(s)$ има нормалну расподелу са математичким очекивањем 0 и дисперзијом $t - s$.

Тврђење 3.1.1. *Нека је* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\{W(t), t \geq 0\}$ *Винеров процес,* $U = min\{t \mid W(t) = -\alpha\}$, $V = min\{t \mid W(t) = \beta\}$ и $A = \{V < U\}$. *Важи једнакост* $P(A) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Δ Претпоставимо прво да је $\frac{\alpha}{\beta}$ рационалан број, на пример $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, односно $\alpha = \lambda m$ и $\beta = \lambda n$ за неко $\lambda > 0$. Дефинишимо индуктивно низ бројева $t_0, t_1, t_2, \ldots$, $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots)$, на следећи начин:

$t_1 = min\{\, t \mid |W(t)| = \lambda\}$, и за $k \in \mathbb{N}$ је

$$t_{k+1} = min\{\, t \mid t > t_k, |W(t) - W(t_k)| = \lambda\}.$$

Нека је $X(0) = 0$ и $X(k) = \frac{1}{\lambda} W(t_k),\ k \in \mathbb{N}$. Случајни низ $\{X(k), k \in \mathbb{N}_0\}$ је хомогени ланац Маркова са скупом стања $S = \mathbb{Z}$ и вероватноћама преласка $p_{ij} = \frac{1}{2}$, ако је $|i - j| = 1$. Другим речима $\{X(k), k \in \mathbb{N}_0\}$ је случајно лутање. Користећи пример 2.5.1., у низу $\{X(k)\}$ број n се појављује пре броја $-m$ са вероватноћом $\frac{m}{m+n} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = P(A)$.

У општем случају $\frac{\alpha}{\beta}$ не мора да буде рационалан број, али постоје низови позитивних бројева (γ_n) и (δ_n) такви да $\gamma_n \uparrow \beta,\ \delta_n \downarrow \beta$, при чему су бројеви $\frac{\alpha}{\gamma_n}$ и $\frac{\alpha}{\delta_n}$ рационални за свако $n \in \mathbb{N}$. Ако трајекторија $W(t)$ достиже вредност β пре него $-\alpha$, онда она сигурно достиже и γ_n пре него $-\alpha$, што значи да је $P(A) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\gamma_n}$. С друге стране, ако трајекторија $W(t)$ достиже вредност $-\alpha$ пре него β, онда она сигурно достиже $-\alpha$ пре него δ_n, што значи да је $\frac{\alpha}{\alpha+\delta_n} \leq P(A)$. Даље следи да је $\frac{\alpha}{\alpha+\delta_n} \leq P(A) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\gamma_n}$, а преласком на лимес добија се $P(A) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. ■

3.2. Модел набавке

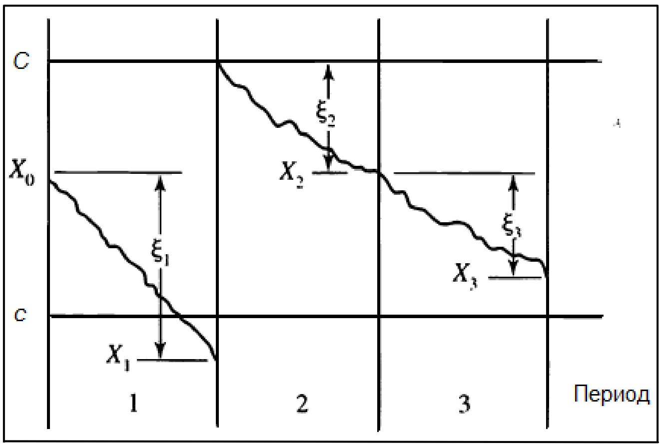
Разматрамо ситуацију у којој се роба набавља у циљу да задовољи потребе купаца. Претпостављамо да се обнова намирница врши на крају сваког периода које ћемо да означимо са $n = 0, 1, 2, \ldots$, и претпоставићемо да је укупна потражња робе током n-тог периода случајна величина ξ_n чија функције расподеле не зависи од периода,

$$P\{\xi_n = k\} = a_k, \qquad \text{за } k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.2.1}$$

где је $a_k \geq 0$ и $\sum_{k\geq 0} a_k = 1$. Ниво залиха се проверава на крају сваког периода. Допуна робе је одређена са два броја c и $C > c$ на следећи начин: ако је на крају периода количина робе мања од c, тада се попуњавају залихе до количине C. Уколико се на крају периода располаже количином залиха којих има више од c, тада нема потребе за допуном. Нека X_n представља количину коју имамо у магацину непосредно пре обнове залиха на крају n-тог периода. Стања у којим може да се нађе процес $\{X_n\}$ зависи од количине намирница у магацину,

$$S = \{C, C-1, C-2, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots\}, \tag{3.2.2}$$

где негативни бројеви означавају неиспуњене захтеве који ће бити задовољени одмах након обнове залиха. Процес $\{X_n\}$ је описан на сл. 3.2.1.



Сл. 3.2.1.

С обзиром на то како се врши допуна залиха, количина робе између два узастопна периода је повезана следећом релацијом:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1}, & \text{ако је } c \le X_n \le C, \\ C - \xi_{n+1}, & \text{ако је } X_n \le c, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

где је ξ_{n+1} количина потражње у $(n+1)$-вом периоду, који задовољава закон вероватноће (3.2.1). Ако претпоставимо да су случајне величине потражње током одређеног периода $\xi_1, \xi_2, \dots$ независне, тада $\{X_n, n \ge 0\}$ јесте ланац Маркова чија се матрица преласка може добити из релације (3.2.2), односно

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} P\{\xi_{n+1} = i - j\}, & \text{ако је } c < i \le C, \\ P\{\xi_{n+1} = C - j\}, & \text{ако је } i \le c. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Познавањем матрице вероватноћа преласка, можемо даље да испитујемо особине модела, а једна од важнијих је да проверимо да ли је ланац ергодичан и ако јесте да израчунамо стационарне вероватноће. Постојање стационарних вероватноћа омогућава и испитивање ефикасности постојећег модела, односно да ли су вероватноће да залихе нису задовољиле потражњу по периоду велике и ако јесу на који начин треба да се промени политика пословања.

Пример 3.2.1. Размотримо случај где је могућа потражња од 0, 1 и 2 резервна дела у било ком периоду, са вероватноћама

$$P\{\xi_n = 0\} = 0.5, P\{\xi_n = 1\} = 0.4, P\{\xi_n = 2\} = 0.1, \qquad (3.2.5)$$

и где су границе $c = 0$ и $C = 2$. Уколико су сви резервни делови продати, дозвољено је да се током једног периода наручи само један део који ће бити испоручен одмах након обнове залиха, односно скуп стања за X_n је $S = \{-1, 0, 1, 2\}$. На основу једнакости (3.2.4) и (3.2.5) можемо да добијемо матрицу вероватноћа преласка:

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Сада ћемо да испитамо ергодичност овог ланца и уколико се испостави да је ланац ергодичан наћи ћемо стационаре вероватноће.

$$P_2 = \Pi^2 = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.22 & 0.44 & 0.3 \\ 0.04 & 0.22 & 0.44 & 0.3 \\ 0.04 & 0.26 & 0.45 & 0.25 \\ 0.04 & 0.22 & 0.44 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Пошто P_2 има све позитивне елемене, на основу теореме 2.8.2. ланац је ергодичан и као такав има стационарне вероватноће. Из једнакости $p_i^* = p_i^* \Pi$ добијамо следеће: $p_{-1}^* = \frac{1}{30}$, $p_0^* = \frac{1}{5}$, $p_1^* = \frac{1}{3}$ и $p_2^* = \frac{13}{30}$. Вероватноћа да залихе неће задовољити потражњу једнака је $\frac{1}{30}$, па можемо да закључимо да није потребно да повећавамо ниво складиштења робе C. □

3.3. Пропаст играча као ланац Маркова

Посматрамо играча који игра неку игру на срећу у којој може да освоји један жетон, који има одређену новчану вредност, са вероватноћом p, односно да губи уложени жетон са вероватноћом $q = 1 - p$. Играч престаје са игром ако сакупи тачно N жетона или ако све изгуби. Претпоставимо да су игре међусобно независне. Ако са

X_n означимо број жетона које играч има у тренутку n, онда је $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ процес Маркова са скупом стања $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ и вероватноћама преласка:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } i = j = 0 \text{ или } i = j = N, \\ p, & \text{ако је } j = i + 1, \\ q, & \text{ако је } j = i - 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{3.3.1}$$

или матрично

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & q & 0 & p \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.3.2}$$

У оваквој ситуацији нас занима колика је вероватноћа да играч на крају игре освоји N жетона ако би почео игру са $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Означимо ту вероватноћу са P_i, односно

$$P_i = P\{X_n = N \text{ за неко } n \geq 1 | X_0 = i\}, \qquad i \in \{1, 2, \dots, N-1\}. \tag{3.3.3}$$

Приметимо да за овако дефинисану вероватноћу важи да је $P_0 = 0$ и $P_N = 1$.

На основу формуле тоталне вероватноће имамо следеће:

$$P_i = P\{X_n = N \text{ за неко } n \geq 1 | X_0 = i\} = \sum_j P\{X_n = N \text{ за неко } n \geq 1, X_1 = j | X_0 = i\}$$

$$= \sum_j P\{X_n = N \text{ за неко } n \geq 1 | X_1 = j\} P\{X_1 = j | X_0 = i\} =$$

$$= pP_{i+1} + qP_{i-1}. \tag{3.3.4}$$

Заменом $p + q = 1$ у (3.3.4) имамо следеће

$$pP_i + qP_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}. \tag{3.3.5}$$

односно

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}), \qquad i = 1, 2, \dots, N-1. \tag{3.3.6}$$

Како је $P_0 = 0$, а важи и (3.3.6) добијамо

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1,$$

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1,$$

$$\vdots$$

$$P_i - P_{i-1} = \frac{q}{p}(P_{i-1} - P_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1,$$

$$\vdots$$

$$P_N - P_{N-1} = \frac{q}{p}(P_{N-1} - P_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1.$$

Сабирање првих i једнакости, добијамо

$$P_i - P_1 = P_1\left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right], \tag{3.3.7}$$

односно

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)} P_1, & \text{ако је } \frac{q}{p} \neq 1, \\ iP_1, & \text{ако је } \frac{q}{p} = 1. \end{cases} \tag{3.3.8}$$

Коришћењем чињенице да је $P_N = 1$ као и једнакости (3.3.8) за $i = N$, имамо да је

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1-(q/p)}{1-(q/p)^N}, & \text{ако је } p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{N}, & \text{ако је } p = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{3.3.9}$$

и онда је

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, & \text{ако је } \frac{q}{p} \neq 1, \\ \frac{i}{N}, & \text{ако је } \frac{q}{p} = 1. \end{cases} \tag{3.3.10}$$

Приметимо да када $N \to \infty$ тада је

$$P_i \to \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, & \text{ако је } p > \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ако је } p \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.3.11}$$

Стога можемо да закључимо да ће, у случају када $N \to \infty$, играч неограничено да увећава свој капитал (у виду жетона) ако је $p > \frac{1}{2}$, док ће за $p \leq \frac{1}{2}$ са вероватноћом 1 да остане без жетона.

Пример 3.3.1. Претпоставимо да се Петар и Филип такмиче у игри са новчићем у којој је циљ бацити новчић ближе зиду, а победник као награду добија новчић пораженог. Петар је бољи у овој игри и он побеђује са вероватноћом $p = 0.6$. (а) Ако Петар почиње игру са 5 новчића, а Филип са 10, која је вероватноћа да ће Петар да победи? (б) Шта се дешава ако Петар има 10, а Филип 20 новчића?

(а) Ми заправо тражимо вероватноћу коју добијамо када у (3.3.9) узмемо да је $i = 5$, $N = 15$ и $p = 0.6$. Тиме добијамо да је тражена вероватноћа

$$P_5 = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{15}} \approx 0.87.$$

(б) Овде имамо сличну ситуацију као под (а), само што је овде $i = 10$ и $N = 30$. Тражена вероватноћа је једнака

$$P_{10} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{30}} \approx 0.98. \quad \square$$

3.4. Менделов модел наслеђивања

Једно од највећих научних достигнућа у XIX веку постигао је Грегор Мендел на пољу биологије. Он је вршио контролисана укрштања између различитих сорти баштанског грашка код којих је пратио одређене особине. Експерименти су трајали осам година и захваљујући њима створене су прве представе о основним принципима наслеђивања. Мендел је предвидео да сваки ген може да дође у више различитих алела[9]. Различите особине које је посматрао при узгајању грашка (поредио је високе и

---

[9] Телесне ћелије садрже две гарнитуре хромозома при чему једна води порекло од мајке, а друга од оца. Хромозоми су у телесним ћелијама удружени у парове који се називају хомологи хромозоми (један хромозом из пара се добија од мајке, а други од оца). Гени се налазе на хромозомима и то на тачно одређеном месту названом генски локус. Гени који заузимају иста места на хомологим хромозомима су алели. Алели су различити облици једног истог гена.

ниске биљке, округла и набрана зрна, и жуте и зелене сорте), зависиле су од типа алела које су биљке имале.

Мендел је одгајао чисте линије биљака: једну која у свакој генерацији даје округло и другу која даје наборано зрно. Биљке из такве две линије укршта међусобно и то назива родитељском (паренталном) генерацијом (P). У потомству је добио све биљке са округлим зрном и ту генерацију је назвао прва филијална (F1). Међусобним укрштањем биљака F1 генерације добио је наредну, F2 генерацију у којој се јављају биљке и са округлим и са набораним семеном у бројном односу $3:1$ (три пута има више биљака са округлим него са набораним семеном). На основу овог експеримента, Мендел је закључио да особине контролише одређени наследни фактор. Симболом великог слова A обележио је фактор који одређује округло, а малим словом a онај који изазива наборано зрно. Када се ова два фактора нађу заједно (Aa) у једној биљци онда се испољава само дејство фактора A, па га је Мендел назвао *доминантан алел*. Други фактор (a) који није дошао до изражаја у F1 генерацији означава се као *рецесиван алел*. Могуће кобинације алела су AA, Aa и aa, и они се зову *генотипи*. Ако се генотипи састоје од истих алела онда се називају *хомозоготи*, у супротном се зову *хетерозиготи*. Посматране особине се често називају *фенотипи*, јер се поред генотипа узима у обзир и утицај спољашне средине.

Посматраћемо генетички модел за укрштање животиња које су у бликом сродству. Претпоставимо да имамо две јединке прве генерације које укрштамо како бисмо добили другу генерацију. Даље су две јединке различитог пола из друге генерације упарени како бисмо добили трећу генерацију. И настављамо даље исти поступак за добијање наредних генерација. Формулишимо ланац Маркова који описује овај процес на следећи начин. Нека X_n представља генотип оба родитеља n–те генерације. Могуће вредности за X_n су дати у табели 3.4.1.

X_n	Генотипи	X_n	Генотипи
1	$AA \times AA$	4	$Aa \times aa$
2	$AA \times Aa$	5	$AA \times aa$
3	$Aa \times Aa$	6	$aa \times aa$

Табела 3.4.1.

Можемо да приметимо да потомак родитеља са генотипима AA обавезно има исти генотип, па је $p_{11} = 1$. Аналогно је и $p_{66} = 1$. Сада размотримо случај 2, односно комбинацију $AA \times Aa$. Нека $Z_1 \in \{A, A\}$ представља алел који ће да се пренесе на потомство од родитеља са генотипом AA, нека $Z_2 \in \{A, a\}$ представља алел који ће да се пренесе на потомство од родитеља са генотипом Aa, и нека Y представља њихов случајно изабран потомак. Важи следеће

$$P\{Y = AA\} = P\{Z_1 = A, Z_2 = A\} = P\{Z_1 = A\} \cdot P\{Z_2 = A\} = 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$

$$P\{Y = Aa\} = P\{Z_1 = A, Z_2 = a\} + P\{Z_1 = a, Z_2 = A\} =$$

$$= P\{Z_1 = A\} \cdot P\{Z_2 = a\} + P\{Z_1 = a\} \cdot P\{Z_2 = A\} = 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 0 = \tfrac{1}{2},$$

$$P\{Y = aa\} = P\{Z_1 = a, Z_2 = a\} = P\{Z_1 = a\} \cdot P\{Z_2 = a\} = 0.$$

Из ове генерације имамо два могућа генотипа. Даља, ако су Y_1 и Y_2 два случајно изабрана потомка описане генерације, имамо да је

$$P\{Y_1 \times Y_2 = AA \times AA\} = P\{Y_1 = AA\} \cdot P\{Y_2 = AA\} = \tfrac{1}{4},$$

$$P\{Y_1 \times Y_2 = AA \times Aa^{10}\} = P\{Y_1 = AA\} \cdot P\{Y_2 = Aa\} + P\{Y_1 = Aa\} \cdot P\{Y_2 = AA\} = \tfrac{1}{2},$$

$$P\{Y_1 \times Y_2 = Aa \times Aa\} = P\{Y_1 = Aa\} \cdot P\{Y_2 = Aa\} = \tfrac{1}{4}.$$

Према томе имамо следеће

$$p_{21} = \tfrac{1}{4},\ p_{22} = \tfrac{1}{2},\ p_{23} = \tfrac{1}{4}.$$

Ако наставимо даље по истом принципу, добијамо матрицу вероватноћа преласка

$$\Pi = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/8 & 1/16 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (3.4.1)$$

Приметимо да имамо три класе $\{1\}$, $\{6\}$ и $\{2, 3, 4, 5\}$ где су прве две повратне, односно 1 и 6 су апсорбујућа стања, док је трећа пролазна. Можемо да уочимо да парење

---

[10] $AA \times Aa = Aa \times AA$.

животиња које су у сродству неизбежно доводи до губљења једног од алела, или доминантног (A) или рецесивног (a), из чега следи и губљења хетерозигота Aa. Испитајмо нека својства овог модела.

Прераспоредимо стања како бисмо добили матрицу облика (2.9.2). Нека скуп стања има распоред $\{1, 6, 2, 3, 4, 5\}$ чија је матрица преласка

$$P = \begin{array}{c} 1\\ 6\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0\\ 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/8\\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]. \qquad (3.4.2)$$

Даље имамо да је

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/8\\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M = (I_d - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 8/3 & 4/3 & 2/3 & 1/6\\ 4/3 & 8/3 & 4/3 & 1/3\\ 2/3 & 4/3 & 8/3 & 1/6\\ 4/3 & 8/3 & 4/3 & 4/3 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 1/4 & 0\\ 1/16 & 1/16\\ 0 & 1/4\\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

одакле имамо да је

$$MW = \begin{array}{c} \\ 2\\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \;\;6 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4\\ 1/2 & 1/2\\ 1/4 & 3/4\\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Добили смо да је у случају да је $X_0 = 2$, вероватноћа да ће да се изгуби алел a једнака је $3/4$, а да се изгуби алел A једнака је $1/4$. Ако је $X_0 = 4$, тада је вероватноћа да се изгуби алел a једнака $1/4$, а вероватноћа да се изгуби алел A једнака је $3/4$. Ако је $X_0 = 3$ или $X_0 = 5$, тада су једнаке вероватноће да се изгуби било који од алела. Занимљиво је да очекивани број корака да систем уђе у апсорбовано стање није исто ако систем почне из стања 3 или из стања 5, и поред тога што су вроватноће једнаке. У првом случају потребно је $16/3 = 5.666 \approx 6$ корака, а у другом $20/3 = 6.666 \approx 7$. Овакву појаву можемо да разумемо јер ако су почетни генотипи облика $AA \times aa$, тада ће наредна генерација да сигурно има генотипе облик $A\_\_ \times a\_\_$, што значи да ће у том случају бити потребно више корака до губљења неког од алела него у случају 3. Очеквани број корака до апсорбције (губљења једног од алела) је једнак ако је $X_0 = 2$ или $X_0 = 4$, и износи $29/6 = 4.833 \approx 5$, разлика је само што је у првом случају већа вероватноћа за губитак алела a, док је у другом обрнута ситуација. □

3.5. Еренфестов модел урне

Класичан математички опис дифузије[11] молекула кроз пропустљиву мембрану представљен је преко Еренфесовог модела урне. Замислимо две посуде (урне) које укупно садрже a лоптица (молекула). Прву посуду означићемо са A, а другу са B и нека се на почетку у првој посуди налази k лоптица, док се у другој налази $a-k$. Случајно бирамо једну од a лоптица[12], при чему свака има исту веровтноћу да буде изабрана, и премештамо је из посуде у којој се налази у ону другу. Сваки одабир представља један корак процеса. Нека X_n представља број лоптица у посуди A после n–тог корака. Тада је $\{X_n\}$ ланац Мркова са скупом стања $S = \{0, 1, \dots, a-1, a\}$ и са вероватноћама преласка

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{a-i}{a}, & \text{ако је } j = i+1, \\ \frac{i}{a}, & \text{ако је } j = i-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (3.5.1)$$

Приметимо да су сва стања периодична са периодом 2.

Оно што нас занима јесте како се мења количина лоптица у посудама после одређеног времена. Да бисмо одговорили на ово питање најбоље је да нађемо стационарну расподелу процеса. Матрица вероватноћа преласка је облика

---

[11] Дифузија представља спонтани транспорт материје или енергије под одређеним утицајем из зоне више у зону ниже енергије или концентрације.

[12] Можемо да претпоставимо да су лоптица означене бројевима, како бисмо могли да их разликујемо.

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{a-1}{a} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{2}{a} & 0 & \frac{a-1}{a} & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & & \frac{a-1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5.2}$$

Из једнакости $p^* = p^* \cdot \Pi$, где је $p^* = (p_0^*, p_1^*, \dots, p_a^*)$ стационарна расподела, добијамо следеће

$$p_0^* = \frac{1}{a} p_1^*,$$

$$p_i^* = \frac{a-(i-1)}{a} p_{i-1}^* + \frac{i+1}{a} p_{i+1}^*, \quad i = 1, 2, \dots, a-1$$

$$p_a^* = \frac{1}{a} p_{a-1}^*,$$

односно имамо

$$p_1^* = a p_0^* = \binom{a}{1} p_0^*,$$

$$p_2^* = \frac{a}{2} p_1^* - \frac{a}{2} p_0^* = \frac{a(a-1)}{2} p_0^* = \binom{a}{2} p_0^*,$$

$$p_3^* = \frac{a}{3} p_2^* + \frac{a-1}{3} p_1^* = \frac{a}{3} \frac{a(a-1)}{2} p_0^* - \frac{a-1}{3} a p_0^* = \frac{a(a-1)(a-2)}{6} p_0^* = \binom{a}{3} p_0^*,$$

$$\vdots$$

$$p_a^* = \binom{a}{a} p_0^*.$$

Добили смо да је

$$p_i^* = \binom{a}{i} p_0^*, \quad i \in \{1, 2, \dots, a\} \tag{3.5.3}$$

Како важи да је $\sum_i p_i^* = 1$ и важе једнакости (3.5.3), тада добијамо

$$p_0^* = \frac{1}{2^a}, \tag{3.5.4}$$

односно

$$p_i^* = \frac{\binom{a}{i}}{2^a}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, a\}. \qquad (3.5.5)$$

Можемо сада да кажемо да након доста времена очекујемо да се у обе посуде налази приближно исти број лоптица, пошто су те вероватноће највеће. На овај начин смо математичким моделом описали дифузију.

Искористићемо Еренфестов модел за приказивање компјутерске симулације ланца Маркова, која је наравно могућа и за остале моделе. Она има за циљ да покаже да ће заиста после неког вермена у посудама углавном да буде приближан број лоптица.

Функција којом се добија ланац написана је у програмском језику R[13]. Аргументи функције су редом: број могућих стања ланца (у коју није укључена нула), почетно стање ланца које је познато и укупан број корака.

```
erenfest<- function(a, x0, n )
{
cat("\n Posmatramo primer Erenfestovog modela urne kod kojeg je pocetno stanje Xo=", x0,"
i vrednost stanja moze da pripadne skupu {0, 1, ...",a ,"}.
Zelimo da modeliramo lanac Markova do trenutka",n,". \n \n")

x<-c(x0)
pi<-c(choose(a,0)/2^a)

for(i in 1:a)
{
pi<-c(pi,  choose(a,i)/2^a)
}

d<-data.frame(Stanje=c(0:a),Verovatnoca=pi)
cat("Stacionarna raspodela data je sledecom tabelom: \n")
print(d)

plot(d$Stanje,d$Verovatnoca, xlab="Stanje", ylab="Verovatnoca", main="Stacionarna raspodela
lanca Markova")
axis(1, at=d$Stanje[which(d$Verovatnoca==max(pi))])
axis(2, at=round(max(pi),3))

cat("Na osnovu stacionarne raspodele, najvecu verovatnocu ima stanje",
d$Stanje[which(d$Verovatnoca==max(pi))] ,"i ono iznosi",round(max(pi),3) ,".\n")

pom<-runif(n,0,1)
```

---

[13] Код програма написао је аутор овог рада.

```
for(i in 2 : (n+1))
{
if(isTRUE(pom[i] < (a-x[i-1])/a)) x<-c(x, x[i-1]+1)
if(isTRUE(pom[i] > (a-x[i-1])/a)) x<-c(x, x[i-1]-1)
}

# Brisanjem znaka # u naredna dva reda, bile bi ispisane modelirane vrednosti lanca Markova.
# cat("Dobijeni lanac ima vrednosti: \n")
# print(x)
cat("Sledeca tabela prikazuje ucestalost stanja u dobijenom lancu: \n")
print(table(x))
f<-as.data.frame(table(x))
pom1<- as.numeric(names(table(x)))
pom2<- f$Freq/n

dev.new()
cat("Najucestaliji element u modeliranom procesu je", pom1[which(pom2==max(pom2))]," i
njegova verovatnoca je",max(pom2),".\n")

plot(pom1, pom2,  xlab="Stanje", ylab="Verovatnoca", main="Raspodela modeliranog lanca
Markova")
axis(1, at=pom1[which(pom2==max(pom2))])
axis(2, at=max(pom2))

cat("Broj kuglica u prvoj posudi nakon", n ," koraka iznosi",x[n],", a u drugoj",a-x[n],".\n")
}
```

Шта ова функција заправо ради?

Она на основу формула (3.5.3) рачуна стационарне вероватноће стања, а затим даје графички приказ те расподеле. Затим функцијом која већ постоји у R-у генерише жељени број независних псеудо-случајних[14] величина које имају $\mathcal{U}[0,1]$ расподелу, а чије вредности наравно припадају интервалу $[0,1]$. Ланац је такав да је могућ само прелаз из стања i у стања $i+1$ или $i-1$, где су вероватноће прелаза дефинисане са (3.5.1), а познато је и почетно стање система пошто је то један од аргумената функције. Једном for петљом одређујемо даље вредности ланца на следећи начин: “поделимо“ исечак $[0,1]$ на два дела, при чему за границу изаберемо једну од две позитивне вероватноће из једнакости (3.5.1); дужине два добијена исечка одговарају позитивним вероватноћама једнакости (3.5.1), па у зависности ком исечку припада псеудослучајни број, стање или расте или опадне за један.

---

[14] Пошто је компјутер детерминистичка машина, сам концепт “случајног“ на њега је непримењљив. Зато се за генерисане низове бројева преко компјутерских програма каже да су псеудо-случајни, а не случајни.

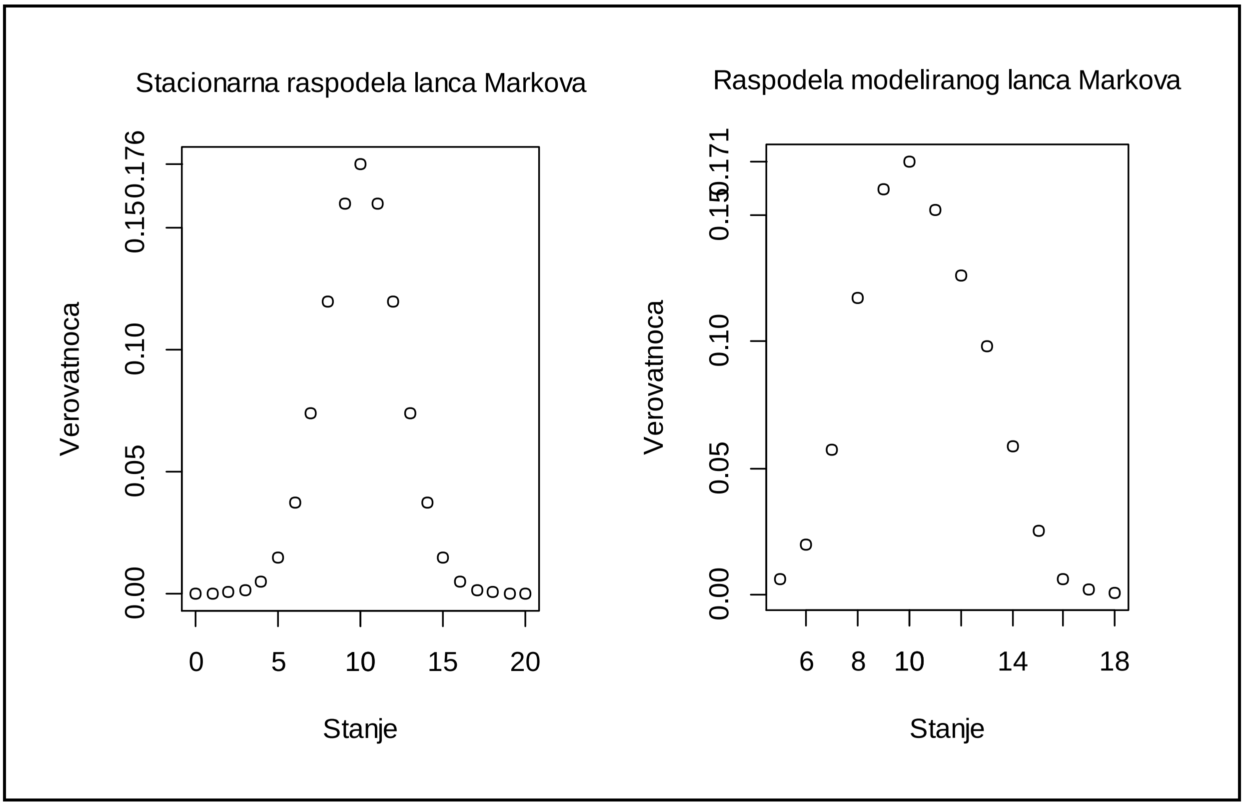
Покренимо програм за случај када имамо две посуде од којих се у једној налази 18, а у другој 2 лоптица, при чему ће ланац да направи 1000 корака. Дакле могућа стања система су $S = \{0, 1, \dots, 20\}$. Добијамо следећи резултат:

```
> erenfest(20,18,1000)

Posmatramo primer Erenfestovog modela urne kod kojeg je pocetno stanje Xo= 18
i vrednost stanja moze da pripadne skupu {0, 1, ... 20 }.
Zelimo da modeliramo lanac Markova do trenutka 1000 .

Stacionarna raspodela data je sledecom tabelom:
   Stanje  Verovatnoca
1        0  9.536743e-07
2        1  1.907349e-05
3        2  1.811981e-04
4        3  1.087189e-03
5        4  4.620552e-03
6        5  1.478577e-02
7        6  3.696442e-02
8        7  7.392883e-02
9        8  1.201344e-01
10       9  1.601791e-01
11      10  1.761971e-01
12      11  1.601791e-01
13      12  1.201344e-01
14      13  7.392883e-02
15      14  3.696442e-02
16      15  1.478577e-02
17      16  4.620552e-03
18      17  1.087189e-03
19      18  1.811981e-04
20      19  1.907349e-05
21      20  9.536743e-07
Na osnovu stacionarne raspodele, najvecu verovatnocu ima stanje 10 i ono iznosi 0.176 .
Sledeca tabela prikazuje ucestalost stanja u dobijenom lancu:
x
  5   6    7     8     9    10    11    12   13   14   15   16   17   18
  6  20   57   117   160   171   152   126   98   59   25    6    2    1
Najucestaliji element u modeliranom procesu je 10  i njegova verovatnoca je 0.171 .
Broj kuglica u prvoj posudi nakon 1000  koraka iznosi 9 , a u drugoj 11 .
```

Сл. 3.5.1. такође представља резултат покренуте функције и она нам даје графички приказ стационарне расподеле ланца Маркова са датим почетним условима и расподеле моделираног ланца који има те исте почетне услове.



Сл. 3.5.1.

Посматрајући резултате симулације видимо да се у чинијама заиста најчешће налази приближно једнак број лоптица. Можемо да проценимо на основу добијених резултата да ће се у првој (другој) чинији са вероватноћом 0.73 наћи између 8 и 12 лоптица. На сл. 3.5.1. уочавамо да расподела генерисаних вредности система очекивано теже стационарној расподели.

Ако покренемо програм тако да се почетно стање разликује од претходно коришћеног, видели бисмо да се крајњи резултат суштински не мења.

4. ЗАКЉУЧАК

Показали смо да ланци Маркова заиста спадају у релативно једноставну, али и веома интересантну и корисну класу случајних процеса са занимљивим особинама и разноврсним применма.

Теоријски део смо градили од најосновнијих дефиниција и ознака, преко увођена појма стања и његове класификације, да бисмо на крају дошли до појма ергодичности из које добијамо граничну расподелу ланца. У делу 2.9. уочавамо занимљиву везу Марковљевих ланца са матричном теоријом, а преко које добијамо интересантна сазнања везана за коначне ланце Маркова.

У овом раду дати су и неки од многобројних употреба ланаца Маркова, као и примери истих. Такође смо споменули и једану компјутрску симулацију (у Еренфестовом моделу урне), која ипак није применљива за ланце са много већим обимом, што је могуће проверити покретањем исписане функције за ланац са скупом стања 2000. Са развојем рачунарске технологије овај проблем је решен тако што се ланци све чешће користе у Монте Карло методи, али за такву примену је ипак потребније напредније рачунарско знање.

Као што смо и на почетку споменули, тема Марковљевих ланаца је и даље јако “жива“, тако да се и даље активно испитују њихове особине и примена, као и практичност тих примена. Један од главних разлога занимања за ланце Маркова је то што они представљају један од најједноставнијих математичких модела за описивање многих појава у реалном животу, што смо у овом раду, између осталог, покушали да покажемо.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gregory F. Lawler (2006). *Introduction to Stochastic Processes, Second Edition.* Boca Raton: Taylor & Francis Group.

[2] David F. Anderson (2013). *Introduction to Stochastic Processes with Applications in the Biosciences.* Madison: University of Wisconsin at Madison.

[3] James R. Norris (2008). *Markov Chains*. Cambridge: Cambridge Univesity Press.

[4] Joseph T. Chang (2007). *Stochastic Processes*.

[5] Kai Lai Chung (1960). *Markov Chains With Stationary Transition Probabilities*. Berlin: Springer.

[6] Павле Младеновић (2008). *Вероватноћа и статистика, четрвто издање*. Београд: Математички факутет.

[7] Samuel Karlin, Howard M. Taylor (1975). *A First Course in Stochastic Processes, Second Edition.* New York: Academic Press.

[8] Samuel Karlin, Howard M. Taylor (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling, Third Edition*. San Diego: Academic Press.

[9] Sheldon M. Ross (2007). *Introduction to Probability Models, Ninth Edition*. Academic Press is an imprint of Elsevier.

[10] William J. Stewart (2009). *Probability, Markov Chains, Queues, and Simulation: The Mathematical Basis of Performance Modeling*. New Jersey: Princeton University Press.

[11] http://sr.wikipedia.org/wiki/Дифузија

[12] http://sr.wikipedia.org/wiki/Менделови_закони