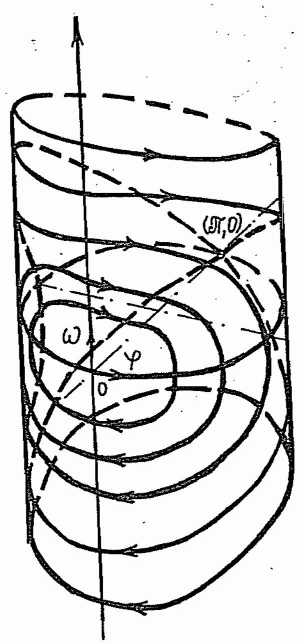
UNIVERZITET U NIŠU

IZABRANA POGLAVLJA TEORIJE NELINEARNIH OSCILACIJA



Katica R. (Stevanović) Hedrih

NIŠ – 1975

MAJCI I OCU POSVEĆUJEM

P R E D G O V O R

"Nikakva sila ne čini čoveka velikim i mudrim što čini snaga rada - zajedničkog, složnog, slobodnog rada"

(M. Gorki)

Oscilacije konstrukcija i mašina, elektromagnetne oscilacije u radiotehnici i optici, zvučne i ultrazvučne oscilacije, oscilatorne pojave u atomskom jezgru, periodična kretanja i bliskoperiodična kretanja nebeskih tela, oscilatorne pojave u biologiji i drugo, su na prvi pogled veoma različiti procesi, ali su jednovremeno svi objedinjeni metodama matematičke fizike u jedno učenje o oscilacijama.

Problemi nelinearnih oscilacija imaju danas, dominantnu ulogu u najraznovrsnijim oblasima fizike i tehnike. Sama teorija nelinearnih oscilacija, kao naučni pravac javila se dvadesetih godina XX veka u vezi sa otkrićem elektronskih cevi i novih pojava u mehanici i akustici. U periodu od 1907 godine do 1928 godine centar izučavanja nelinearnih oscilacija bio je u Nemačkoj, a tridesetih godina se premešta u SSSR. Poznate su škole Müler-a i Barakhauzen-a, Moskovsko-Gorkovska škola na čelu sa Mendeljštamom i Papaleksijem i Kijevska škola sa Krilovim i Bogoljubovim.

Teorija nelinearnih oscilacija inspirisana je radovima Poincaré-a i Ljapunova, koji i danas predstavljaju nje-nu osnovu.Jednu od najznačajnijih uloga u daljem razvoju teorije nelinearnih oscilacija igrao je Van-der Pol,koji je prvi obratio pažnju na neprimenljivost metode linearizacije na nelinearne zadatke.On je predložio metodu sporopromenljivih koeficijenata,sličnu Lagrange-ovoj metodi varijacije konstanata.I pored toga što je veliki broj zadataka bio rešen ovom metodom ona je davala samo prvu aproksimaciju,pa sa tim stepen njene tačnosti nije bio jasan i matematički,u to vreme nedokazan.

Posle ovog prodora razvijaju se i analitičke aproksimativne metode,a i grafičke metode.U primeni analitičkih metoda susreće se problem pojave u rešenjima takozvanih sekularnih članova,koji su bili nepogodni za izračunavanja.

Krajem XIX veka Poincaré u svojim radovima "O problemu triju tela" (1890) i "Nove metode nebeske mehanike" (1892) podvrgao je strogoj analizi izučavanja svojih prethodnika i pokazao da su svi trigonometrijski redovi u kojima se provodi metoda malog parametra,divergentni.Posle izvesnog broja članova,članovi počinju da divergiraju,ali zbir prvih članova tih redova daje veličinu,čija je greška utoliko manja ukoliko je manja vrednost malog parametra i takve redove je nazvao asimptotskim.U narednom periodu svoju široku primenu i razvoj dobijaju asimptotske metode nelinearne mehanike.

Pri izučavanju Praktičnih zadataka iz oblasti oscilacija sistema sa više stepeni slobode oscilovanja,često se susrećemo sa pojavom da trenje i poremećajne sile dovode do brzog uspostavljanja oscilacija osnovnog tona,pa je na osnovu toga Bogoljubov predložio asimptotsku metodu zasnovanu na jednofrekventnosti,koja dozvoljava da se nadje bilo koja asimptotska aproksimacija rešenja sistema jednačina koje opisuju oscilacije sistema sa više stepeni slobode oscilovanja.

Zajedno sa razvitkom nelinearne mehanike bio je povezan i razvoj matematike,posebno oblasti nelinearnih diferencijalnih običnih i parcijalnih jednačina,tako da realno možemo da kažemo da se sa jednog od aspekata teorija nelinearnih oscilacija može da razmatra kao matematička disciplina.

Cilj ovog rukopisa nije kompletno izlaganje osnova teorije nelinearnih oscilacija,jer se oni mogu naći u univerzitetskim udžbenicima teorije oscilacija,nego izlaganje izabranih poglavlja iz teorije nelinearnih oscilacija u primeni na izučavanje nelinearnih oscilacija sistema sa više stepeni slobode oscilovanja,elastičnih tela,a u saglasnosti sa programom dela predmeta Elastodinamika sa postdiplomskih studija na smeru Proizvodnog mašinstva na Mašinskom fakultetu u Nišu.Ovde su izložene osnove nekoliko izabranih metoda nelinearnih oscilacija,koje omogućavaju izučavanje nelinearnih oscilatornih procesa koji se javljaju u mašinstvu.

Ovaj rukopis predstavlja deo rukopisa pod nazivom "Osnovi teorije nelinearnih oscilacija" i kao takav ne može predstavljati celinu.Izbor materije je izvršen u okviru programa navedenog predmeta.Ovaj rad prema zamisli autora može da služi kao pomoć studentima postdiplomcima u savladavanju programa predmeta Elastodinamika,a može da služi i kao rukovodstvo,koje će studenta da uvede studioznije u oblast izučavanja problema nelinearnih oscilacija i pokaže mogućnosti primene izloženih metoda.

Neke od metoda su u razvoju tako da student može primenom tih metoda na konkretne primere iz oblasti mašinske prakse da da i svoj stručni i naučni doprinos,čime bi ovakav jedan rukopis u punom smislu te reči opravdao svoje publikovanje.

Niš,maja 1975

Dr. Катица Хедрих

IZABRANA POGLAVLJA IZ TEORIJE NELINEARNIH OSCILACIJA

S A D R Ž A J

U V O D

OSNOVNI PROBLEMI SA NELINEARNIM OSCILACIJAMA

Oscilacije konstrukcija i mašina,elektromagnetne oscilacije u radiotehnici i optici,samopobudne oscilacije u sistemima regulacije i sistemima sa posledejstvom,zvučne i ultrazvučne oscilacije,sve te reklo bi se različite,ne mnogo slične oscilatorne pojave objedinjuju se metodama matematičke fizike u jedno učenje o oscilacijama.

Neophodno je da se uoči da sa razvojem nauke i tehnike brzo raste uloga učenja o oscilacijama.Ne govoreći o takvim disciplinama kao što su radiotehnika i akustika,koje su u potpunosti "zaokupljene" izučavanjem oscilacija možemo uzeti za primer mašinstvo.Ne tako davno izučavanju oscilacija nije se pridavalo mnogo pažnje i proračuni otpornosti i izdržljivosti konstrukacije u osnovi su se izvodili statički.Istovremeno sa povećanjem Brzohodosti mašina i smanjenjem gabarita konstrukcija i pri prelazu na brzohodo mašinstvo zanemariti ulogu oscilacija postalo je gotovo nemoguće.

Osnovi savremene teorije oscilacija se mogu naći u radovima Galilei-a,Hajgens-a,Newton-a o problemu kretanja klatna.U radovima Lagrange-a se već nalazi formirana teorija malih oscilacija,koja je u daljem razvoju dobila naziv teorija linearnih oscilacija.Onovni pojmovi linearne teorije oscilacija kao sopstvena kružna frekvencija,dekrement prigušivanja,rezonantno stanje,normalne oscilacije,normalne i glavne koordinate postali su nezamenljivo sredstvo za izučavanje skoro svih oblasti fizike i tehnike.Svojstvo linearnih oscilatornih sistema je i princip superpozicije.U teoriji linearnih oscilacija široku primenu su dobili i simbolički diferencijalni operatori čija se efektnost vidi posebno u primeni na oscilacije elastičnih tela i sistema sa više stepeni slobode oscilovanja.

Linearna teorija oscilacija je veoma razradjena,pa su se često problemi nelinearnog karaktera linearizovali i rešavali bez neke dublje analize koja bi dovela do zaključka o neprimenljivosti takve ineterpretacije.

U prošlom veku je postojala metoda malog parametra,koja je mogla da bude primenjena za izučavanje nelinearnih oscilacija,dovoljno bliskih linearnim.

Dovoljno bliske linearnim oscilacijama nazivaju se oscilacije,za koje diferencijalne jednačine iako su nelinearne sadrže neki parametar ε ,za čiju vrednost $\varepsilon = 0$, jednačina postaje linearna i pri čemu se pretpostavlja da je ε mali parametar.

Medjutim obično razlaganje po stepenima malog parametra dovodi do toga da se u približnim formulama uporedo sa harmonijski zavisnim od vremena članovima javljaju takozvani sekularni - vekovni članovi.Sekularni članovi su oblika $t^m \sin\omega t$ i $t^m \cos\omega t$ u kojima se vreme t javlja van znaka sinusa i cosinusa.Kao posledica toga zajedno sa vremenom brzo rastu sekularni članovi,tako da to bez studioznije analize dovodi do pogrešnih zaključaka,ako se izuzme to da približna formula važi za ogrаničeni interval vremena.Ovu teškoću moguće je uočiti i na primeru metode Poisson-a.

Metoda Poisson-a se primenjuje za rešavanje nelinearne diferencijalne jednačine koja sadrži mali parametar ε ,a oblika je

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \qquad (1)$$

Rešenje koje zadovoljava ovu diferencijalnu jednačinu sa tačnošću do malih veličina reda ε^{n+1} ,tražimo u obliku n-točlanog reda

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{i} x_i \tag{2}$$

Ako ovaj red unesemo u jednačinu (1) i desnu stranu jednačine razložimo po stepenima malog parametra ε ,a zatim izjednačimo koeficijente uz jednake stepene ε ,zanemarujući pri tome stepene više od n ,dobićemo sistem jednačina

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 = 0 \\
&\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = f\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) \\
&\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = f_x'\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) x_1 + f_{x'}'\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) x_1' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

Ako proučimo ovu metodu na primeru

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \gamma x^3 = 0 \tag{4}$$

možemo uočiti problem sekularnih članova. Ako uvedemo oznake $\omega^2 = \alpha/m$ i $\varepsilon = \gamma/m$ dobićemo da je

$$f(x) = -x^3 \tag{5}$$

pa sistem diferencijalnih jednačina (3) prelazi u oblik

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 = 0 \\
&\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -x_0^3 \\
&\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{6}$$

Iz prve jednačine sistema (6) izračunavamo da je

$$x_0 = a\cos(\omega t+\theta) \tag{7}$$

što zamenom u drugu jednačinu istog sistema daje

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega^2 x_1 = -\frac{3}{4}a^3\cos(\omega t+\theta)-\frac{1}{4}a^3\cos 3(\omega t+\theta) \tag{8}$$

odakle izračunavamo x_1 ,kao rešenje te jednačine u obliku

$$x_1 = -\frac{3}{8\omega}a^3 t\sin(\omega t+\theta)+\frac{a^3}{32\omega^2}\cos 3(\omega t+\theta) \tag{9}$$

pa je rešenje početne jednačine (1) za slučaj funkcije oblika (5) sa tačnošću reda ε^2 oblika

$$x = a\cos(\omega t+\theta)-\frac{3\varepsilon}{8\omega}a^3 t\sin(\omega t+\theta)+\frac{\varepsilon a^3}{32\omega^2}\cos 3(\omega t+\theta) \tag{10}$$

Iz oblika nadjenog približnog rešenja (10) vidimo da se javio sekularni član

$$-\frac{3\varepsilon}{8\omega}a^3 t\sin(\omega t+\theta)$$

pa se može zaključiti da će oscilacije pretstavljene izrazom (10) rasti sa vremenom što je u protivurečnosti sa karakterom tačnog rešenja jednačine (4),koje se može izraziti pomoću eliptičke funkcije oblika

$$x = x_{max}\, cn\left\{\frac{2K}{\pi}\psi\right\} \qquad (\psi=\omega t+\theta) \tag{11}$$

Do istog zaključka možemo da dodjemo ako jednačinu (4) pomnožimo sa $\frac{dx}{dt}$ i izračunamo integral energije

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\alpha x^2+\frac{\gamma}{4}x^4 = E \tag{12}$$

koji izražava zakon očuvanja energije sistema,odakle zaključujemo da energija sistema ne sme neograničeno da raste.Ova metoda zbog ranije spomenutih sekularnih članova nije pogodna i nije u upotrebi, a i zbog toga što je primenljiva samo za kratak interval vremena. Pojava sekularnih članova u izrazu približnog rešenja (10) može da navede i na pogrešan zaključak o tome da jednačina (4) nema periodičkih rešenja što nije tačno.

Laplace i Lagrange su predložili metode koje bi izbegle pojavu sekularnih članova. Medjutim i ti stepeni redovi po stepenima malog parametra koje su predložili Laplace i Lagrange su divergentni, ali i istovremeno veoma pogodni za praktične proračune, jer se ti redovi javljaju kao asimptotski i u tom smislu što njihova greška m-tog reda je približno proporcionalna (m+1)-om stepenu malog parametra. To znači da se neograničenim povećanjem broja članova ne postiže konvergencija reda, iako odredjivanje koeficijenata postaje veoma složeno, već se zato koristi red sa malim brojem članova, pri što manjoj vrednosti parametra ε, pri čemu tačnost rešenja povećavamo koristeći osobine asimptotičnosti reda.

U početku XX veka primena asimptotskih metoda je bila razradjena, ali je problem bio u tome što su sve te metode bile prilagodjene za primenu na nekonzervativne sisteme. U poslednjih dvadeset godina ove su se metode razvile i u pravcu primene na nekonzervativne dinamičke sisteme.

Poincaré i Ляпунов su dali osnovu teorije linearnih diferencijalnih jednačina sa periodičnim koeficijentima i istovremeno proučavali nelinearne diferencijalne sisteme, koji sadrže mali parametar, a imaju za $\varepsilon = 0$ periodična rešenja, sa strogim matematičkim dokazima. Teorija stabilnosti Ляпунова posebno igra važnu ulogu u izučavanju nelinearnih sistema.

U teoriji nelinearnih oscilacija uočene su pojave problema stabilnosti, generacije opadajućih oscilacija, promene frekvencija sa amplitudama, prinudne sinhronizacije, modulacije, problema prolaska kroz rezonantno stanje i slično. Neke od ovih pojava mogu da se objasne samo uvodjenjem nelinearnih elemenata, jer u čisto linearnim sistemima ne mogu da postoje takvi režimi pri dejstvu spoljašnjih sila koji zavise od početnih uslova. Takodje u linearnim sistemima pri dejstvu spoljašnje poremećajne sile sa nekom kružnom frekvencijom Ω, mogu da se uspostave prinudne oscilacije samo sa tom frekvencijom,dok pojava nelinearnih članova može da dovede do pojave i oscilacija sa kombinovanim frekvencijama.Takodje nelinearni članovi mogu da izazovu poremećaj faze oscilovanja,a i da dovedu do zavisnosti perioda sopstvenih oscilacija od amplitude i faze.Da još jednom naglasimo da pojava nelinearnih članova dovodi do neprimenljivosti principa superpozicije.

Sasvim je prirodno da su najdostupniji za izučavanje nelinearni sistemi sa malim parametrom,dok je izučavanje sistema sa velikim (bitnim) nelinearnostima veoma težak problem s matematičke tačke gledišta,koji traži individualni pristup u svakom konkretnom slučaju.Najbolje do sada su izučeni konzervativni sistemi sa jednim stepenom slobode oscilovanja.Van der Poll-ova jednačina oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0 \tag{13}$$

sa metodom koju je predložio Van der Poll za njeno rešavanje,a koja je analogna Lagrange-ovoj metodi primenjivanoj u nebeskoj mehanici,je odigrala važnu ulogu u razvoju nelinearne mehanike,iako je u tom periodu bila intuitivno izvedena,bez odgovarajućih matematičkih dokaza.

Navedimo neke tipične primere nelinearnih sistema.

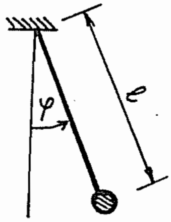
1.Najprostiji primer nelinearnig oscilatora je obična matematičko klatno (Sl.1)čija je jednačina oscilovanja oblika

$$ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}+mgl\sin\varphi=0 \tag{14}$$

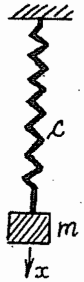
gde je m - masa, ℓ - dužina klatna, φ - ugao otklona od vertikalnog položaja.Frekvencija oscilovanja takvog klatna zavisi od amplitude oscilovanja,pa oscilovanje nije izohrono.

2.Oscilovanje mase na opruzi nelinearne karakteristike krutosti opruge,koja zavisi od koordinate x i čija je jednačina

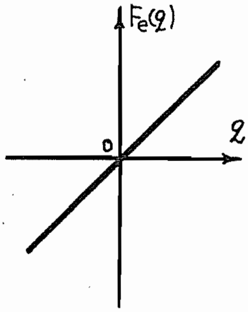
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0 \tag{15}$$



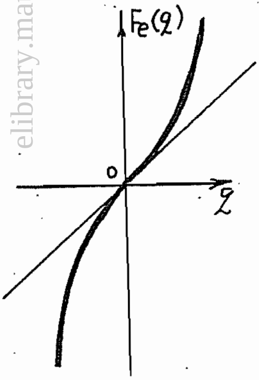
Slika br.1



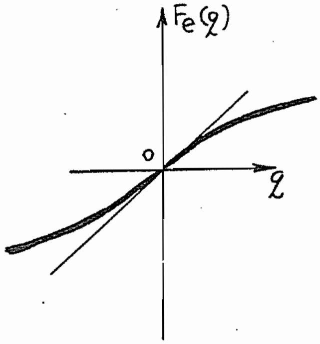
Slika br.2



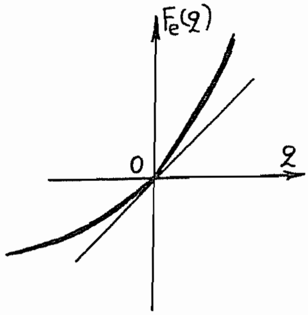
Slika br.2a



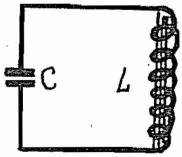
Slika br.2 b



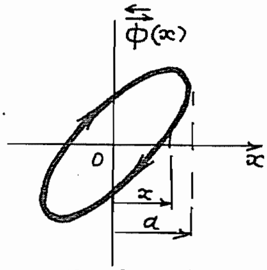
Slika br. 2 c



Slika br.2 c



Slika br. 3



Slika br. 4

I u ovom slučaju se javljaju neizohrone oscilacije. Karakter neizohronosti zavisi od vrste nelinearnosti opruge (Sl.2).

3. Primer oscilatornog električnog kola koje se sastoji iz kalema samoindukcije L sa gvozdenim jezgrom i kondenzatora kapacitivnosti C. Neka je ϕ magnetni fluks, koji prolazi kroz kalem. Tada je jednačina za proučavano kolo oblika

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{i}{c} = 0 \tag{16}$$

gde je struja $i = i(\phi)$ nelinearna funkcija magnetnog fluksa (Sl.3).

4. Primer vertikalnih oscilacija mase m na štapu dužine ℓ sa poprečnim presekom A i sa modulom elastičnosti E, uz pretpostavku da masa vrši samo vertikalne oscilacije i da se masa štapa zanemaruje, a uzima u obzir unutrašnje trenje pomoću funkcije $\omega^2 \overrightarrow{\overleftarrow{\phi}}(x)$, gde strelice označavaju smer rasta (opadanja) funkcije sa promenljivom x, prikazan je diferencijalnom jednačinom oscilovanja

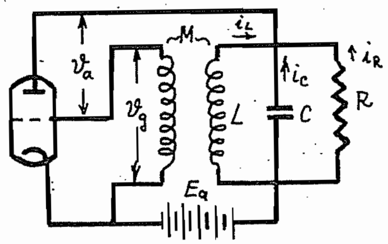
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\left[x + \overrightarrow{\overleftarrow{\phi}}(x)\right] = 0 \tag{17}$$

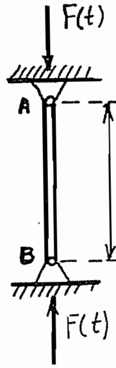
gde je $\omega^2 = \frac{EA}{m\ell^2}$ (Sl. 4).

5. Samopobudni oscilatori su takvi sistemi u kojima pri izvesnim uslovima položaj ravnoteže gubi svoju stabilnost i javlja se kretanje, koje sistem dovodi u stanje stacionarnog periodičnog oscilovanja. Oscilacije koje takvi oscilatori vrše su samopobudne oscilacije ili autooscilacije. Primer takvih oscilacija je električno kolo sa induktivnom spregom sa slike br. 5, čija je diferencijalna jednačina oblika

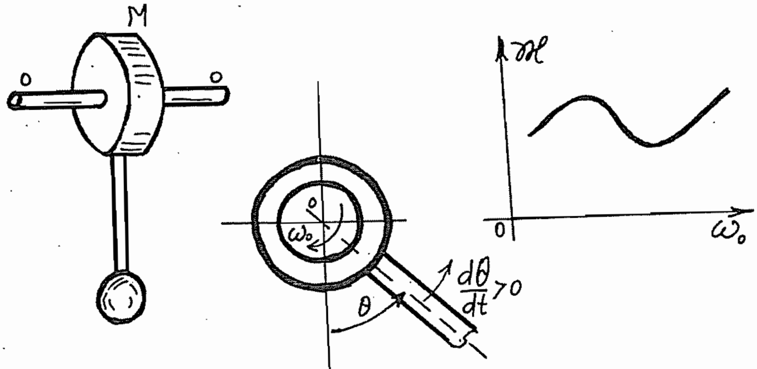
$$\frac{d^2V_a}{dt^2} + f(V_a)\frac{dV_a}{dt} + \omega_r^2 V_a = 0 \tag{18}$$

gde je sa V_a označen anodni napon, tj. napon na anodi triode, $i = f(V_a)$ nelinearna karakteristika triode, koja se ogleda u nelinearnoj zavisnosti anodne struje od napona na anodi triode usled dejstva napona na rešetki V_a.


M
i_L
i_R
v_a
v_g
i_C
L
C
R
E_a


F(t)
A
l
B
F(t)

[illegible]


M
0
0
ω_0
θ
$\frac{d\theta}{dt}>0$
$\mathcal{M}$
0
ω_0

Slika br. 6

6. Klatno Frouda takodje izvodi samopobudne oscilacije, pri čemu se suvo trenje javlja kao uzrok kovitlanja klatna (sl. 6).

7. U navedenim primerima oscilatornih sistema poremećajne sile ne zavise eksplicitno od vremena. Ti sistemi su bili izolovani od spoljašnjih uticaja, i kao posledica toga sile koje su dejstvovale na sistem zavisile su samo od dinamičkog stanja samog sistema. Kao primer uzmimo nelinearni oscilator na koji dejstvuje slaba harmonijska poremećajna sila $\varepsilon F_0 \cos \Omega t$ i čija je jednačina oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon F_0 \cos \Omega t \tag{19}$$

Srednja snaga (rad poremećajne sile u jedinici vremena)

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varepsilon F_0 \cos \Omega t \, \frac{dx}{dt} \, dt \tag{20}$$

koja se sa silom unosi u sistem za vreme T ne može bitno da izmeni oblik oscilacije. Pretpostavljajući da je rešenje jednačine (19) približno harmonijsko oblika

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \psi) \\ \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin(\omega t + \psi) \end{aligned} \tag{21}$$

jer mala nelinearnost i mala spoljašnja sila ne mogu da za jedan period bitno izmene oblik oscilovanja, možemo da dobijemo srednju snagu P u obliku

$$P = \frac{a\omega\varepsilon F_0}{2T} \left[\frac{\cos[(\omega+\Omega)t + \psi]}{\omega + \Omega} - \frac{\cos[(\Omega-\omega)t - \psi]}{\Omega - \omega} \right]_{t_0}^{t_0+T} \tag{22}$$

Za dovoljno dug period T oscilovanja, ovaj izraz za srednju snagu P, praktično je različit od nule, samo u slučaju kada je kružna frekvencija spoljašnje sile dovoljno bliska sopstvenoj kružnoj frekvenciji. U tom slučaju poremećajna sila koja dejstvuje u toku produženog vremena može da znatno utiče na posmatrani nelinearni oscilator samo u slučaju kada je $\Omega \approx \omega$ .Takvo rezonantno stanje je osnovno ili glavno rezonantno stanje.Ovde smo analizu izvodili na osnovu čisto harmonijskog oblika sopstvenih oscilacija,tako da ako se analiza vrši uzimajući u obzir nelinearni član u rešenju koje odgovara sopstvenim oscilacijama javiće se i viši harmonici $n\omega$.

8.Poprečne oscilacije zglobno vezanog štapa,koji se nalazi pod dejstvom aksijalne periodične sile $F(t)=\varepsilon F_0 \cos \Omega t$ (Sl. 7) se opisuju pomoću Mathie-ove diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2\left[1+h\cos\Omega t\right]x=0 \tag{23}$$

u kojoj je $h=-\frac{\ell^2 F_0}{B\pi}$, B -savojna krutost štapa, ℓ - dužina štapa.Smatrajući $\omega^2 h x\cos\Omega t$ spoljašnjim poremećajem možemo da nadjemo srednju snagu u prvoj aproksimaciji u obliku

$$P=\frac{\omega^3 h}{4T}\left[\frac{\cos[(\Omega+2\omega)t+2\Psi]}{\Omega+2\omega}-\frac{\cos[(\Omega-2\omega)t-2\Psi]}{\Omega-2\omega}\right]_{t_0}^{t_0+T} \tag{24}$$

Iz poslednjeg izraza se vidi da rad izvršen poremećajnom silom $\omega^2 h x\cos\Omega t$ za duži interval vremena T nije jednak nuli u slučaju kada je $\Omega=2\omega$,odnosno $\omega=\frac{\Omega}{2}$ .U ovom slučaju se uočava rezonantno stanje POJAVA demultiplikacionog rezonantnog stanja.

9.Oscilacije klatna promenljive dužine mogu se opisati diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{d}{dt}\left\{m\,\ell^2(t)\frac{d\varphi}{dt}\right\}+g\,\ell(t)\sin\varphi=0 \tag{25}$$

gde je φ ugao otklona klatna, $\ell(t)$ dužina klatna,i funkcija je vremena, m je masa.Ovde imamo slučaj sporopromenljivih parametara sa vremenom.

Iz nabrojanih primera mogu se naslutiti neke teškoće na koje se nailazi u objašnjavanju pojava u nelinearnim sistemima o kojima će dalje detaljnije biti reči.

I. METODA N.M.KRILOVA I N.N.BOGOLJUBOVA

Metoda *Крылова-Боголюбова* je asimptotska i primenjuje se za nalaženje rešenja sopstvenih oscilacija sistema bliskih linearnim. Ova metoda je dobila široku primenu u radovima *Крылова*, *Боголюбова*, *Митропольског* i njihovih učenika. Pokazaćemo osnovnu ideju i postavke ove metode na primeru diferencijalne jednačine oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{1}$$

gde je ε mali pozitivan parametar. Metoda se zasniva na fizičkoj predstavi karaktera proučavanog oscilatornog sistema, kada nema poremećaja. Kada je $\varepsilon = 0$, t.j. kada odsustvuje poremećaj oscilovanje je čisto harmonijsko oblika

$$x = a \cos \psi \tag{2}$$

sa konstantnom amplitudom a i jednakopromenljivim faznim uglom ψ

$$\frac{da}{dt} = 0 \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega \tag{3}$$

Pojava nelinearnog poremećaja dovodi do pojave u rešenju jednačine (1) viših harmonika, uslovljava zavisnost trenutne kružne frekvencije $\frac{d\psi}{dt}$ od amplitude, a može da izazove i sistematsko uvećanje ili smanjenje amplitude oscilovanja u zavisnosti od energije koju apsorbuje ili odaje poremećajna sila. Svi ti efekti iščezavaju u graničnom slučaju $\varepsilon = 0$. Uzimajući to u obzir rešenje jednačine (1) tražimo u obliku reda po stepenima malog parametra u obliku

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi) + \cdots \tag{4}$$

gde se $u_1(a,\psi)$, $u_2(a,\psi)$, ... javljaju kao periodične funkcije ugla ψ ,perioda 2π ,a veličine a i ψ kao funkcije vremena odredjuju se iz sistema diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

Na taj način nalaženje asimptotske aproksimacije rešenja jednačine (1) svodi se na izbor odgovarajućih izraza za funkcije $u_i(a,\psi)$, $A_i(a)$ i $B_i(a)$ tako da izraz (4) u kome a i ψ bivaju zamenjene funkcijama vremena,odredjenim iz jednačina (5),bude rešenje početne diferencijalne jednačine (1) sa odgovarajućom tačnošću.

Kada su nadjeni eksplicitni izrazi za koeficijente razlaganja u izrazima (4) i (5) pitanje integraljenja jednačine (1) svodi se na prostiji slučaj integraljenja sistema diferencijalnih jednačina (5) sa razdvojenim promenljivim (argumentima), koje omogućavaju izučavanje pomoću poznatih elementarnih načina.

Odredjivanje koeficijenata redova (4) i (5) ne pretstavlja principijelni problem ali s obzirom da formule vrlo brzo postaju složene,to praktično efektivno mogu da budu nadjena samo prva dva člana.

Zadržavajući se u redovima (4) i (5) samo na prvih m članova t.j. stavljajući da je

$$x = a\cos\psi + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i u_i(a,\psi) \tag{6}$$

i

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i A_i(a) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i B_i(a) \end{aligned} \tag{7}$$

dobijamo aproksimacije prvog,drugog i t.d. m-tog reda,ili uopšte ne tako velikog reda.To je zato jer je poznato da se praktična primena asimptotske metode odredjuje ne osobinama konvergencije redova (4) i (5) pri $m \to \infty$,nego asimptotskim osobinama za zadat broj članova m kada je $\varepsilon \to 0$.Neophodno je samo to da pri maloj vrednosti parametra ε izraz (6) aproksimacije rešenja jednačine (1) i za dovoljno dug period vremena daje dovoljno tačnu aproksimaciju.Zato se obično redovi (4) i (5) pretpostavljaju kao formalni,neophodni za nalaženje asimptotske aproksimacije (6).

Nalaženje asimptotskih aproksimacija može se postaviti i strožije kao nalaženje takvih funkcija $u_i(a,\psi)$, $A_i(a)$ i $B_i(a)$ da izraz aproksimacije rešenja (6) u kome se funkcije vremena a i ψ odredjuju jednačinama m-tog približenja (7) zadovoljava jednačinu (1) sa tačnošću do malih veličina reda ε^{m+1} .

U posmatranom slučaju jednačine (1) moguće je ustanoviti konvergenciju redova (4) i (5) pri veoma opštim uslovima postavljenim za funkciju $f(x,\frac{dx}{dt})$,ali s obzirom da ćemo dalje imati i slučajeve kada su posmatrani redovi divergentni,to mi ovde nećemo vezivati izlaganje metode sastavljanja asimptotskih aproksimacija sa dokazivanjem konvergencije i zato ćemo redovima po stepenima malog parametra ε davati formalni smisao.

Napomenimo i nekoliko reči o proceni greške.Iz činjenice da dobijeno približno rešenje zadovoljava jednačinu (1) sa greškom reda ε^{m+1} ,to i pomoću majoriranja se može utvrditi da će odstupanje približnog rešenja od odgovarajućeg tačnog (uz saglasnost početnih uslova) biti ograničeno veličinom reda $\varepsilon^{m+1}t$ i na taj način razlika ostaje mala za ma koliko velike vrednosti εt ,samo ako je mali parametar ε dovoljno mali.

Pitanje strogog obrazloženja asimptotskih metoda pretstavlja poseban čisto matematički problem koji ima značaj za teoriju diferencijalnih jednačina sa malim parametrom.

Nalaženje funkcija $u_i(a,\psi)$, $A_i(a)$ i $B_i(a)$ sadrži u sebi izvestan stepen proizvoljnosti,a da bi odredjivanje tih funkcija bilo jednoznačno moramo postaviti za njih dopunske uslove. Medjutim i izbor dopunskih uslova je donekle proizvoljan. Kao dopunski uslov mi boramo uslov da u funkcijama $\mathcal{U}_i(a,\psi)$ otsustvuju prvi harmonici, t.j. potrebno je da bude zadovoljen sledeći uslov

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{U}_j(a,\psi)\, e^{i\psi}\, d\psi = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 1,2,\dots,m \\ i = \sqrt{-1} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Fizičko obijašnjenje uslova (8) bi bilo u tome da smo veličini a dali smisao potpune (pune) amplitude prvog osnovnog harmonika oscilovanja. Diferencirajući izraz (4) i uzimajući u obzir izraze(5) za amplitudu i fazu prvog harmonika, nalazimo da je

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\psi + \varepsilon\left\{A_1(a)\cos\psi - aB_1(a)\sin\psi + \omega\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial\psi}\right\} +$$
$$+\varepsilon^2\left\{A_1(a)\cos\psi - aB_1(a)\sin\psi - A_1(a)\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial a} - B_1(a)\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial\psi} + \omega\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\psi}\right\} + \tag{9}$$
$$+\varepsilon^3\{\dots\} + \dots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\psi + \varepsilon\left\{-2\omega A_1\sin\psi - 2\omega aB_1\cos\psi + \omega^2\frac{\partial^2\mathcal{U}_1}{\partial\psi^2}\right\} +$$
$$+\varepsilon^2\left\{\left(A_1\frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega aB_2\right)\cos\psi - \left(2\omega A_2 + 2A_1B_1 + A_1\frac{dB_1}{da}a\right)\sin\psi + \right. \tag{9'}$$
$$\left. + 2\omega_1 A_1\frac{\partial^2\mathcal{U}_1}{\partial a\partial\psi} + 2\omega B_1\frac{\partial^2\mathcal{U}_1}{\partial\psi^2} + \omega^2\frac{\partial^2\mathcal{U}_2}{\partial\psi^2}\right\} + \varepsilon^3\dots$$

Desnu stranu diferencijalne jednačine (1) uzimajući u obzir izvode (9) i (9′) možemo da napišemo u obliku

$$\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \varepsilon^2\left\{\mathcal{U}_1(a,\psi) f'_x(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \right.$$
$$\left. + \left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \omega\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial\psi}\right) f'_{x'}(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\right\} + \varepsilon^3\dots \tag{10}$$

Da bi posmatrani red (4) zadovoljio početnu jednačinu (1) sa tačnošću do malih veličina reda ε^{m+1}, a neophodno je izjednačiti koeficijente uz jednake stepene malog parametra ε sa leve i sa desne strane jednačine (1) do članova m-tog reda, ukljušujući i članove m-tog reda. Kao rezultat dobijamo

$$\omega^2\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \psi^2}+u_i\right)=f_{i-1}(a,\psi)+2\omega A_i \sin\psi+2\omega a B_i \cos\psi \tag{11}$$
$$(i=1,2,3,\dots m)$$

gde su oznake sledeće

$$f_0(a,\psi)=f(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)$$

$$f_1(a,\psi)=u_1(a,\psi)f_x'(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)+\left[A_1\cos\psi-B_1 a\sin\psi+\omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right]\times$$
$$\times f_{\dot x}'(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)+\left(aB_1^2-A_1\frac{dA_1}{da}\right)\cos\psi+ \tag{12}$$
$$+\left(2A_1B_1+A_1\frac{dB_1}{da}a\right)\sin\psi-2\omega A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi}-2\omega B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}$$

....

Vidi se da su funkcije $f_i(a,\psi)$ periodične funkcije promenljive ψ perioda 2π i zavise od amplitude a prvog harmonika.

Da bi smo odredili $A_1(a)$, $B_1(a)$ i $u_1(a,\psi)$ iz prve jednačine sistema (11) razložimo funkciju $f_0(a,\psi)$ u Fourierov red

$$f_0(a,\psi)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_0^{(m)}(a)\, e^{im\psi} \qquad (i=\sqrt{-1}) \tag{13}$$

gde su $f_0^{(m)}(a)$ poznati koeficijenti Fourierovog reda

$$f_0^{(m)}(a,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\, e^{-im\psi}\, d\psi \qquad (i=\sqrt{-1}) \tag{14}$$

a funkciju $u_1(a,\psi)$ potražimo u obliku Fourierovog reda

$$u_1(a,\psi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_1^{(m)}(a)\, e^{im\psi} \tag{15}$$

sa nepoznatim koeficijentima razvoja $u_1^{(m)}(a)$, pa izraze (13) i (15) unesemo u prvu parcijalnu diferencijalnu jednačinu sistema (11) tako da dobijemo jednačinu

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \omega^2(1-m^2)\mathcal{U}_1^{(m)}(a)e^{im\psi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_0^{(m)}(a)e^{im\psi} + 2\omega\left(\mathcal{A}_1\sin\psi + a\mathcal{B}_1\cos\psi\right) \qquad (16)$$

iz koje izračunavamo nepoznate funkcije $\mathcal{U}_1^{(m)}(a)$, $\mathcal{A}_1(a)$ i $\mathcal{B}_1(a)$ a koristeći metodu jednakih koeficijenata uz iste harmonike, tako da dobijamo

$$\mathcal{U}_1(a,\psi) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq\pm1}}^{+\infty} \frac{e^{im\psi}}{2\pi(1-m^2)\omega^2}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\,e^{-im\psi}\,d\psi \qquad (17)$$

i

$$\mathcal{A}_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\,d\psi$$

$$\mathcal{B}_1(a) = -\frac{1}{2\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\,d\psi \qquad (18)$$

Na sličan način rešavajući drugu jednačinu sistema (11) dobijamo

$$\mathcal{U}_2(a,\psi) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq\pm1)}}^{+\infty} \frac{e^{im\psi}}{2\pi(1-m^2)\omega^2}\int_0^{2\pi} f_1(a,\psi)\,e^{-im\psi}\,d\psi \qquad (19)$$

i

$$\mathcal{A}_2(a) = -\frac{1}{2\omega}\left\{2\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_1\frac{d\mathcal{B}_1}{da}a\right\} - \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{U}_1(a,\psi)f_x'(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) +$$

$$+\left(\mathcal{A}_1\cos\psi - a\mathcal{B}_1\sin\psi + \omega\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial\psi}\right)f_{\dot{x}}'(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\Big]\sin\psi\,d\psi$$

$$\mathcal{B}_2(a) = -\frac{1}{2\omega}\left\{\mathcal{B}_1^2 - \frac{\mathcal{A}_1}{a}\frac{d\mathcal{A}_1}{da}\right\} - \frac{1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{U}_1(a,\psi)f_x'(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) + \qquad (20)$$

$$+\left(\mathcal{A}_1\cos\psi - a\mathcal{B}_1\sin\psi + \omega\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial\psi}\right)f_{\dot{x}}'(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\Big]\cos\psi\,d\psi$$

Pri rešavanju većine praktičnih zadataka za sastavljanje asimptotskih aproksimacija sasvim je dovoljno da se ograničimo na prvu aproksimaciju koja može biti pretstavljena u obliku

$$x = a \cos\psi \tag{21}$$

gde se amplituda a i faza ψ odredjuju iz jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \mathcal{A}_1(a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon \mathcal{B}_1(a) \tag{22}$$

u kojima su funkcije $\mathcal{A}_1(a)$ i $\mathcal{B}_1(a)$ odredjene formulama (18). Ove jednačine prve aproksimacije je moguće dobiti i drugim metodama.

I.1. METODA KRILOVA-BOGOLJUBOVA-MITROPOLJSKOG ZA NALAŽENJE REŠENJA NELINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA SPORO PROMENLJIVIM PARAMETRIMA

Ova metoda se primenjuje za nalaženje rešenja diferencijalne jednačine oscilovanja sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja i sa sporo promenljivim parametrima. Metoda se zasniva na asimptotskoj metodi Krilova-Bogoljubova. Da bi smo pokazali suštinu ove metode posmatraćemo diferencijalnu jednačinu sa sporopromenljivim parametrima

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right] + c(\tau)x = \varepsilon F\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{1}$$

gde je ε mali parametar, $\tau=\varepsilon t$ "sporopromenljivo vreme, x generalisana koordinata, t vreme, $m(\tau)$ i $c(\tau)$ inercioni i kvazielastični koeficijent. Pretpostavljamo da su koeficijenti jednačine (1) $m(\tau)$ i $c(\tau)$, a takodje i funkcija $F\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right)$ diferencijalbilni i da su u intervalu $0 \le \tau \le L$, inercioni i kvazielastični koeficijenti $m(\tau)$ i $c(\tau)$ pozitivne funkcije sporopromenljivog vremena. Pretpostavka o sporopromenljivim parametrima sistema kaže da se oni veoma malo promene za vreme jednako periodu jedne sopstvene oscilacije.

Jednovremeno sa posmatranjem diferencijalne jednačine (1) proučimo i homogenu diferencijalnu jednačinu

$$m(\tau)\frac{d^2x}{dt^2}+c(\tau)x=0 \tag{2}$$

gde se parametar τ posmatra kao parametar konstantne vrednosti a sa tim i inercioni i kvazielastični koeficijenti $m(\tau)$ i $c(\tau)$, kao funkcije zavisne od konstantnog parametra. Diferencijalnu jednačinu (2) dobijamo iz jednačine (1) kada stavimo da je $\varepsilon = 0$ i parametar - sporopromenljivo vreme τ posmatramo kao konstantni koji ne zavisi od vremena. Jednačinu (2) ćemo nazvati jednačinom neporemećenog oscilovanja, a koja odgovara jednačini (1) poremećenog oscilovanja.

Rešenje diferencijalne jednačine (2) neporemećenog oscilovanja je čisto harmonijskog oblika

$$x = a\cos\psi \tag{3}$$

sa konstantnom amplitudom i frekvencijom

$$\frac{da}{dt}=0 \qquad \frac{d\psi}{dt}=\omega \tag{4}$$

gde su $\psi=\omega t+\varphi$, $\omega=\sqrt{\frac{c(\tau)}{m(\tau)}}$ i τ = const.

Pojava nelinearnog poremećaja, a takodje i zavisnost parametra τ kao - sporopromenljivog vremena- od vremena dovodi do pojave u rešenju jednačine (1) dopunskih članova u poredjenju sa oblikom rešenja (3) neporemećenog oscilovanja. Tako sada amplituda neće biti konstantna, a ni frekvencija, koje će zavisiti i od sporopromenljivog vremena. Uzimajući sve to u obzir, prirodno je da rešenje jednačine (1) pretpostavimo u vidu reda

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau,a,\psi) + \varepsilon^2 u_2(\tau,a,\psi) + \cdots \tag{5}$$

u kome su $u_1(\tau,a,\psi)$, $u_2(\tau,a,\psi)$, ... periodične funkcije ugla ψ perioda 2π, a veličine a i ψ kao funkcije vremena pretpostavimo u obliku

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(\tau,a)+\varepsilon^2 A_2(\tau,a)+\cdots$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) + \varepsilon \mathcal{B}_1(\tau,a) + \varepsilon^2 \mathcal{B}_2(\tau,a) + \cdots \tag{6}$$

gde je $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{c(\tau)}{m(\tau)}}$ - "sopstvena" frekvencija proučavanog oscilatornog sistema za slučaj neporemećenog oscilovanja, $\tau = \varepsilon t$.

Kako pretpostavljeni redovi u sebi sadrže mogućnost višeznačnosti to usvajamo dopunske uslove oblika

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{U}_m(\tau,a,\psi)\, e^{i\psi}\, d\psi = 0 \qquad (i = \sqrt{-1}\ ,\ m = 1,2,\cdots,m) \tag{8}$$

Uvodjenje ovih uslova je ekvivalentno uslovu da amplituda predstavlja punu (potpunu) amplitudu prvog osnovnog harmonika.

Diferenciranjem pretpostavljenog reda rešenja (5) nalazimo njegove prvi i drugi izvod

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\left\{\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial a} + \varepsilon^2\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial a} + \cdots\right\} + \frac{d\psi}{dt}\left\{-a\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\psi} + \cdots\right\} + \tag{9}$$

$$+ \varepsilon^2\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial\tau} + \varepsilon^3\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial\tau} + \cdots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2}\left\{\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial a} + \varepsilon^2\frac{\partial\mathcal{U}_2}{\partial a} + \cdots\right\} + \frac{d^2\psi}{dt^2}\left\{-a\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial\mathcal{U}_1}{\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\mathcal{U}_2}{\partial\psi} + \cdots\right\} +$$

$$+\left(\frac{da}{dt}\right)^2\left\{\varepsilon\frac{\partial^2\mathcal{U}_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\mathcal{U}_2}{\partial a^2} + \cdots\right\} + 2\frac{da}{dt}\frac{d\psi}{dt}\left\{-\sin\psi + \varepsilon\frac{\partial^2\mathcal{U}_1}{\partial a\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\mathcal{U}_2}{\partial a\partial\psi} + \cdots\right\} +$$

$$+\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\left\{-a\cos\psi + \varepsilon\frac{\partial^2\mathcal{U}_1}{\partial\psi^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\mathcal{U}_2}{\partial\psi^2} + \cdots\right\} + 2\frac{da}{dt}\left\{\varepsilon^2\frac{\partial^2\mathcal{U}_1}{\partial a\partial\tau} + \varepsilon^3\frac{\partial^2\mathcal{U}_2}{\partial a\partial\tau} + \cdots\right\} +$$

$$+2\frac{d\psi}{dt}\left\{\varepsilon^2\frac{\partial^2\mathcal{U}_1}{\partial\tau\partial\psi} + \varepsilon^3\frac{\partial^2\mathcal{U}_2}{\partial\tau\partial\psi} + \cdots\right\} + \varepsilon^3\frac{\partial^2\mathcal{U}_1}{\partial\tau^2} + \varepsilon^4\frac{\partial^2\mathcal{U}_2}{\partial\tau^2} + \cdots \tag{9'}$$

Diferenciranjem sistema diferencijalnih jednačina (6) za amplitudu i fazu osnovnog harmonika dobijamo sledeće izvode

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \varepsilon^2\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial a} + \frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\tau}\right) + \varepsilon^3\cdots$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \varepsilon\frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + \varepsilon^2\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial a} + \frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\tau}\right) + \varepsilon^3\cdots \tag{10}$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \varepsilon^2\mathcal{A}_1 + \varepsilon^3\cdots$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon A_1 \omega(\tau) + \varepsilon^2 \left[A_2 \omega(\tau) + A_1 B_1\right] + \varepsilon^3 \dots$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \omega^2(\tau) + 2\varepsilon \omega(\tau) B_1 + \varepsilon^2 \left[B_1^2 + 2\omega(\tau) B_2\right] + \varepsilon^3 \dots$$

Unošenjem izraza (5), (9) i (10) u diferencijalnu jednačinu (1) i izjednačavanjem koeficijenata sa leve i desne strane uz jednake stepene ε dobijamo sledeći sistem jednačina

$$m(\tau)\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2(\tau) u_1\right] = f_0(\tau, a, \psi) + 2m(\tau)\omega(\tau) A_1 \sin\psi + 2m(\tau)\omega(\tau) B_1 a \cos\psi + \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} a \sin\psi \tag{11}$$

$$m(\tau)\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega^2(\tau) u_2\right] = f_1(\tau, a, \psi) + m(\tau)\left[2\omega(\tau) a B_2 - \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - a B_1^2 - \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - \frac{dm(\tau)}{d\tau}\frac{A_1}{m(\tau)}\right]\cos\psi + m(\tau)\left[2\omega(\tau) A_2 + 2A_1 B_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + a\frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{dm(\tau)}{d\tau}\frac{a B_1}{m(\tau)}\right]\sin\psi \tag{12}$$

. . . .

gde su uvedene oznake

$$f_0(\tau, a, \psi) = F(\tau, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \tag{13}$$

$$f_1(\tau, a, \psi) = F_x'(\tau, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) u_1 + F_{\dot{x}}'(\tau, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) \cdot \left[A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi}\omega(\tau)\right] - m(\tau)\left[2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial \psi}\omega(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} A_1 \omega(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2}\omega(\tau) B_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \psi}\frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \psi}\frac{\omega(\tau)}{m(\tau)}\frac{dm(\tau)}{d\tau}\right] \tag{14}$$

. . . .

Iz parcijalne diferencijalne jednačine (11) uzimajući u obzir uslov da funkcija $u_1(\tau, a, \psi)$ ne sadrži prvi harmonik i koristeći se razvijanjem funkcija u Fourierov red nalazimo izraz za funkciju $u_1(\tau,a,\psi)$ u obliku

$$u_1(\tau,a,\psi) = \frac{1}{2\pi c(\tau)} \sum_{n\neq\pm1} \frac{e^{in\psi}}{1-n^2} \int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\psi) e^{-in\psi} d\psi \tag{15}$$

Iz uslova da funkcija $u_1(\tau,a,\psi)$ ne sadrži prvi harmonik dobijamo izraze za tražene nepoznate funkcije $A_1(\tau,a)$ i $B_1(\tau,a)$ u obliku

$$A_1(\tau,a) = -\frac{a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\psi) \sin\psi \, d\psi$$

$$B_1(\tau,a) = -\frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau) a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\psi) \cos\psi \, d\psi \tag{16}$$

Na taj način u prvoj aproksimaciji imamo asimptotsko rešenje diferencijalne jednačine (1) u obliku

$$x = a \cos\psi \tag{17}$$

gde se a i ψ odredjuju iz sistema jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau) a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\psi) \sin\psi \, d\psi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau) a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\psi) \cos\psi \, d\psi \tag{18}$$

koje su diferencijalne i služe za odredjivanje amplitude i faze osnovnog oblika oscilovanja.Te diferencijalne jednačine prve aproksimacije možemo da napišemo u obliku

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \delta_e(\tau,a)\, a$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_e(\tau,a) \tag{19}$$

gde su redom $\delta_e(\tau,a)$ i $\omega_e(\tau,a)$,ekvivalentni dekrement prigušivanja i ekvivalentna kružna frekvencija poremećenog oblika oscilovanja i funkcije su amplitude i sporopromenljivog vremena:

$$\delta_e(\tau,a) = \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\psi)\sin\psi\, d\psi$$

$$\omega_e^2(\tau,a) = \omega^2(\tau) - \frac{\varepsilon}{\pi m(\tau) a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\psi)\cos\psi\, d\psi \tag{20}$$

Iz parcijalne diferencijalne jednačine (12) na sličan način nalazimo izraz za $u_2(\tau,a,\psi)$ u obliku

$$u_2(\tau,a,\psi) = \frac{1}{2\pi c(\tau)} \sum_{n\neq\pm 1} \frac{e^{in\psi}}{1-n^2} \int_0^{2\pi} f_1(\tau,a,\psi) e^{-in\psi} d\psi \tag{21}$$

a iz uslova da funkcija $u_2(\tau,a,\psi)$ ne sadrži prvi harmonik dobijamo izraz za $A_2(\tau,a)$ i $B_2(\tau,a)$ u obliku

$$A_2(\tau,a) = -\frac{1}{2\omega(\tau)}\left[a\frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + 2A_1 B_1 + \frac{a}{m(\tau)}\frac{d[m(\tau)B_1]}{d\tau}\right] - $$

$$- \frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} f_1(\tau,a,\psi)\sin\psi\, d\psi$$

$$B_2(\tau,a) = \frac{1}{2\omega(\tau)a}\left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - a B_1^2 + \frac{1}{m(\tau)}\frac{d[m(\tau)A_1]}{d\tau}\right] - \tag{22}$$

$$- \frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)a} \int_0^{2\pi} f_1(\tau,a,\psi)\cos\psi\, d\psi$$

Asimptotsko rešenje diferencijalne jednačine poremećenog oscilovanja u drugoj aproksimaciji možemo da napišemo u obliku

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau,a,\psi) \tag{23}$$

u kome su amplituda a i faza ψ kao funkcije vremena odredjene iz jednačina druge aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau,a) + \varepsilon^2 A_2(\tau,a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau,a) + \varepsilon^2 B_2(\tau,a) \tag{24}$$

a u kojima su funkcije $\mathcal{A}_1(\tau,a)$ i $\mathcal{B}_1(\tau,a)$ odredjene izrazima (16), dok su funkcije $\mathcal{A}_2(\tau,a)$ i $\mathcal{B}_2(\tau,a)$ odredjene izrazima (22), i funkcija $\mu_1(\tau,a,\psi)$ prema formuli (15). Naglasićemo da u svim dobijenim formulama a i τ posmatramo kao parametre konstantne vrednosti prilikom integraljenja po argumentu ψ .

Uporedjujući izraze za prvu i drugu aproksimaciju sa rezultatima dobijenim u paragrafu I. utvrdjujemo da je opšta šema nalaženja rešenja u oba slučaja sasvim analogna. Jednačine prve aproksimacije (18) razlikuju se od odgovarajućih jednačina prve aproksimacije dobijenih u prethodnom članu prisustvom sporopromenljivog vremena i dopunskog člana

$$\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\,\omega(\tau)} \; \frac{d[m(\tau)\,\omega(\tau)]}{d\tau}$$

Na taj način, u prvoj aproksimaciji spora promenljivost inercionog i kvazielastičnog koeficijanta, osim narušenja harmoničnosti uvodi i "dopunske sile trenja", čiji znak zavisi od toga na kakav način se menjaju parametri izučavanog oscilatornog sistema.

Pri sastavljaju asimptotskih aproksimacija rešenja mi smo umesto integraljenja jedne diferencijalne jednačine drugog reda problem sveli na integraljenje sistema od dve diferencijalne jednačine prvog reda koje u mnogim slučajevima ne mogu da budu integraljene pomoću elementarnih funkcija i tada njihova rešenja možemo da tražimo samo numerički. Numerički bi isto mogli da integralimo i početnu diferencijalnu jednačinu, ali se javlja mogućnost pojave sistematske greške u toku numeričkog proračuna. Numeričko integraljenje diferencijalnih jednačina prve aproksimacije ne pretstavlja problem jer se kod njih kao promenljive javljaju amplituda i faza, a ne sama oscilatorna funkcija x . Za dobijanje potpune slike procesa ovde je dovoljno da se izračuna ne veliki broj tačaka rasporedjenih na relativno "glatkoj" krivoj što suštinski uprošćuje numeričku integraciju, jer je ta kriva obvojnica funkcije rešenja x .

Izvešćemo još za neke specijalne slučajeve difrenencijalne jednačine (1) diferencijalne jednačine prve aproksimacije za amplitudu i fazu osnovnog poremećenog oblika oscilovanja.

Neka u izučavanom oscilatornom sistemu nema trenja, tada jednačina koja opisuje kretanje ima oblik

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+c(\tau)x=\varepsilon f(\tau,x) \tag{25}$$

U tom slučaju jednačine prve aproksimacije imaju oblik

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)}\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)a}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\psi)\cos\psi\,d\psi\end{aligned} \tag{26}$$

Ovaj sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije se može integraliti, pa iz prve jednačine dobijamo

$$a=\frac{a_0}{[m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2}} \tag{27}$$

gde je a_0 početna vrednost amplitude za $t=0$. Unoseći nadjenu vrednost amplitude u drugu jednačinu sistema (26) diferencijalnih jednačina dobijamo

$$\psi=\int_0^t\omega_e(\tau)\,dt \tag{28}$$

gde je

$$\omega_e(\tau)=\omega(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi[m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2}a_0}\int_0^{2\pi}f_0\left(\tau,\frac{a_0}{[m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2}},\psi\right)\cos\psi\,d\psi \tag{29}$$

Na taj način u prvoj aproksimaciji, oscilacije koje se opisuju diferencijalnom jednačinom (25) sa sporopromenljivim parametrima, su "sinusna" sa amplitudom obrnutoproporcionalnom izrazu $[m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2}$ i fazom kaoja se menja po zakonu (28).

Kao drugi primer posmatramo diferencijalnu jednačinu oscilovanja sistema sa sporopromenljivom masom koja se nalazi pod dejstvom linearne elastične sile $\omega^2(\tau)m(\tau)x$ sa sporopromenljivim koeficijentom elastičnosti i nelinearnog otpora koji zavisi od brzine i sporopromenljivog vremena. Diferencijalna jednačina poremećenog oscilovanja je tada

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+c(\tau)x=\varepsilon f\left(\tau,\frac{dx}{dt}\right) \tag{30}$$

U tom slučaju jednačine prve aproksimacije su

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)}\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}-\frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\psi)\sin\psi\,d\psi\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega(\tau)\end{aligned} \tag{31}$$

Iz druge jednačine odmah nalazimo zakom promene pune faze osnovnog osblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji

$$\psi=\int_0^t\omega(\tau)dt \tag{32}$$

Iz druge jednačine sistema diferencijalnih jednačina (31) sledi da kružna frekvencija oscilovanja sistema opisanog jednačinom (30) u prvoj aproksimaciji ne zavisi od amplitude, a zavisi samo od karaktera sporopromenljivih koeficijenata $m(\tau)$ i $c(\tau)$.

II. STABILNOST OSCILOVANJA

II.1. STABILNOST KRETANJA I TEOREME LJAPUNOVA

Ako se stvarno kretanje podudara sa odredjenim zakonom kretanja, onda takvo kretanje nazivamo *n e p o r e m e ć e n a   k r e t a n j e*, za razliku od svakog drugog sa kojim ga budemo uporedjivali, a koje nazivamo poremećeno kretanje. Odstupanje poremećenog kretanja od neporemećenog kretanja nazivamo poremećaj. Pod *p o r e m e ć a j e m* možemo podrazumevati i otklon sistema od ravnotežnog položaja, a oscilatorno kretanje poremećenim stanjem ravnoteže sistema. Zadatak proučavanja odstupanja poremećenih kretanja od neporemećenih stvarnih i zadatih, pripada oblasti koju nazivamo stabilnost kretanja. Poseban slučaj je kada izučavamo odstupanje poremećenog od neporemećenog stanja ravnoteže, a to je slučaj izučavanja stabilnosti stanja ravnoteže.

Postoji više pristupa u rešavanju problema stabilnosti kretanja i stabilnosti položaja ravnoteže, medju kojima je najopštija Ljapunovljeva teorija. Problem o stabilnosti kretanja u najopštijem obliku prvi put je bio formulisan u doktorskoj disertaciji Ляпунова pod nazivom "Общая задача об устойчивости движения" (1892 god.). Ляпунов je u disertaciji razvio metode rešavanja zadatka o stabilnosti kretanja. U članku "Исследование одного изъ особенных случаев задачи об устойчивости движения" (1893 - XVII вып 2) Мат.сб. Ляпунов je dao uslove stabilnosti pomoću jednačina sa varijacijama ("уравнения в вариациях ") za nelinearne sisteme čija se stabilnost ne može izučavati pomoću linearnih članova.

Ovde će biti reči o stabilnosti položaja ravnoteže i kretanja (prelaznih stanja) kako je to Ljapunov posmatrao u funkciji malih promena početnih uslova. Definicija stabilnosti po Ljapunovu polazi od činjenice da se dinamički sistem, koji je izložen malim promenama početnih uslova vraća ili ne u početno stanje - ravnotežni položaj. Stabilnost kretanja znači zavisi od početnih uslova, karaktera poremećaja i karakteristika sistema. Definicija stabilnosti Ljapunova je opšta jer obuhvata stvarne uslove dinamičkog sistema i ispitivanje stabilnosti sprovodi u odnosu na okolinu datih početnih uslova.

Dinamički sistem se može prikazati sistemom diferencijalnih jednačina oblika

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i = 1,2,3,\dots ,n) \tag{1}$$

sa početnim uslovima $x_i(0) = x_{0i}$, $i = 1,2,3,\dots,n$. Za stacionarno stanje definisanog dinamičkog sistema potrebno je da je zadovoljen sistem nelinearnih jednačina

$$F_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) = 0 \qquad (i = 1,2,3,\dots,n) \tag{2}$$

Ako su rešenja diferencijalnih jednačina sistema (1) u obliku $x_i = x_i(t)$ i ako je $x_i(0)$ u blizini ravnotežnog položaja $\bar{x}_i$, to ponašanje funkcije $x_i(t)$ možemo posmatrati u odnosu na ravnotežni položaj i uz transformaciju koordinata $x_i(t) = \bar{x}_i + y_i(t)$ sistem diferencijalnih jednačina (1) možemo transformisati na sledeći oblik

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(\bar{x}_1 + y_1, \bar{x}_2 + y_2, \dots, \bar{x}_n + y_n) = f_i(y_1, y_2, \dots y_n) \tag{3}$$

Ravnotežnom položaju sada odgovaraju rešenja $y_i = 0$ sistema diferencijalnih jednačina (3) kada se stavi da su prvi izvodi na levoj strani jednaki nuli.

Definicija stabilnosti prema Ляпунов -u

bazira se na pretpostavci da postoji veza izmedju rešenja poremećenog i neporemećenog sistema.

Prema Ляпунов-u dinamički sistem je stabilan ako se za proizvoljan pozitivan broj ε može naći drugi pozitivan broj $\eta(\varepsilon)$ tako da budu zadovoljene nejednačine

$$|y_{oi}| \leq \eta(\varepsilon)$$

$$|y_i(t)| \leq \varepsilon \qquad (i = 1,2,3,\ldots n) \tag{4}$$

za svaki trenutak vremena $t = t_o$.

U teoriji oscilacija ova definicija ima isto značenje kao i kod stabilnosti kretanja uopšte. Prema Ляпунов-u stanje ravnoteže dinamičkog sistema je stabilno, ako se za zadanu okolinu ε položaja ravnoteže, može uvek naći oblast $\eta(\varepsilon)$ takva da posmatrana tačka smeštena u početnom trenutku u toj oblasti ne dostigne nikad granicu ε.

Stabilnost zahteva funkcionalnu vezu $\eta(\varepsilon)$ i ε. Kada vreme teži beskonačnosti, tj. $t \to \infty$ moguća su dva slučaja: da je $y_i(t)$ oscilatorna funkcija kada je kretanje stabilno (kada se javljaju prigušene ili podržane oscilacije) i da se $y_i(t)$ asimptotski približava ravnotežnom položaju ili neporemećenom kretanju kada je kretanje asimptotski stabilno(ovakva stabilnost prelaznih-nestacionarnih stanja u tehničkoj praksi automatskog upravljanja je poželjna).

U definiciji stabilnosti se često umesto apsolutne vrednosti perturbacija mogu uzeti i kvadrati promene početnih uslova pa je

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) < R^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{oi}^2 \leq R_o^2(R) \tag{5}$$

Vrednost ε, u definiciji Ляпунов-a je takva da se za donju granicu uzima beskonačno mali broj, a za gornju granicu se može uzeti dovoljno veliki broj. Kada je broj ε dovoljno mali govori se o stabilnosti u malom, a kada je on dovoljno veliki o stabilnosti u velikom. Uslov stabilnosti (5) može se objasniti i na sledeći način:

Ako se sva rešenja sistema diferencijalnih jednačina (3) nalaze u zoni $\mathcal{R}$,definisanoj koordinatama $y_i(t)$ pomoću nejednakosti (5),odgovarajuće perturbacije početnih uslova moraju se naći u okolini $\mathcal{R}_0$ koordinatnog početka,ako je sistem stabilan.

Kretanje dinamičkog sistema može biti pretstavljeno i sistemom jednačina,diferencijalnih,nelinearnih,prvog reda oblika

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{6}$$

u kojima funkcije $F_i(t, x_1, \dots x_n)$ zavise eksplicitno od vremena t, što je u slučaju dejstva permanentnih perturbacija na sistem. Pretpostavimo da su rešenja sistema jednačina (6)

$$x_i = x_i(t) \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{7}$$

za početne uslove

$$t = 0 \qquad x_i = x_{0i} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{8}$$

Pretpostavimo da u početnom trenutku promenljive $\overline{x}_{i0}$ imaju vrednosti

$$\overline{x}_{0i} = x_{0i} + y_{0i} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{9}$$

gde su uvedene nove promenljive oblika

$$\overline{x}_i = \overline{x}_i(t) = x_i(t) + y_i(t) \tag{10}$$

Ovako definisano kretanje je s t a b i l n o ako za proizvoljno mali broj $\varepsilon > 0$,možemo da nadjemo broj $\eta(\varepsilon) > 0$,da za sve vrednosti $t \geq t_0$ budu zadovoljeni uslovi iz nejednakosti

$$|\overline{x}_i(t) - x_i(t)| \leq \varepsilon \tag{11}$$

$$|\overline{x}_{0i} - x_{0i}| \leq \eta(\varepsilon) \qquad i = 1, 2, 3, \dots n \tag{12}$$

Razliku iz izraza u nejednakosti (11) možemo da obeležimo sa

$$y_i = y_i(t) = \bar{x}_i(t) - x_i(t) \tag{13}$$

i ona pretstavlja koordinate m o g u ć e g kretanja. Moguće kretanje je odredjeno pomoću relativnih koordinata $y_i = y_i(t)$, a "nemoguće" kretanje je odredjeno pomoću relativnih koordinata $y_i = 0$, što je za moguće kretanje položaj ravnoteže. Moguće kretanje, odredjeno relativnim koordinatama $y_i(t)$ je po Ляпунов-u stabilno za vrednosti relativnih koordinata $y_{oi} = 0$, ako za veoma mali broj $\varepsilon > 0$, možemo da nadjemo drugi pozitivan broj $\eta(\varepsilon) > 0$, tako da relativne koordinate zadovoljavaju nejednačinu

$$|y_i(t)| \leq \varepsilon \tag{14}$$

uz uslov da za početne koordinate važi

$$|y_{oi}| \leq \eta(\varepsilon) \tag{15}$$

za svaki naredni trenutak vremena $t \geq t_0$. Taj isti uslov stabilnosti se može da napiše u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \leq \varepsilon^2 \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{oi}^2 \leq \eta^2(\varepsilon)$$

za malo ε i $t \geq t_0$.

II.2. LAPUNOVLJEVA FUNKCIJA PRVOG REDA

Kako je u većini slučajeva nelinearnih sistema nemoguće integraliti sistem diferencijalnih jednačina (1) iz prethodnog člana, to je Ляпунов dao dve metode za analizu stabilnosti, koje ne zahtevaju integraljenje diferencijalnih jednačina nelinearnog sistema.

Pomoću jednačina (3) iz prethodnog člana, možemo da nadjemo brzinu neke funkcije $V(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ koja zavisi od koordinata y_i , $i = 1,2,3,4,..,n$, u obliku

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_i}f_i(y_1,y_2,\cdots y_n) \tag{1}$$

Funkcija $V(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ može biti u obliku definitne, semidefinitne ili indefinitne forme koordinata y_i. Funkcija $V(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ definitne forme može se napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq R^2 \tag{2}$$

a nalazi se u oblasti n-to dimenzione sfere

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = R^2 \tag{3}$$

Funkcija $V(y_1,y_2,\cdots y_n)$ ovako definisana može primati vrednosti jednog istog znaka, a postaje jednaka nuli samo u tačkama u kojima su sve koordinate y_i jednake nuli. Ovakva funkcija $V(y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n)$ naziva se funkcijom Ляпунов-a prvog reda.

Funkcija $V(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ je semidefinitna ako su sve njene vrednosti istog znaka, ali može da bude jednaka nuli u raznim tačkama, a ne samo za $y_i = 0$.

Naprimer, **funkcija** $V(y_1,y_2)= y_1^2 +2y_1y_2+y_2^2$ je semidefinitna jer je jednaka nuli za $y_1 = -y_2$.

Funkcija $V(y_1, y_2, \cdots y_n)$ ima nedefinitnu formu ako može primeti vrednosti pozitivnog i negativnog znaka sa promenom vrednosti y_i .Funkcija neparnog stepena je nedefinitne forme, dok za stepenu funkciju parnog stepena uopšte ne možemo zaključiti kakve je forme dok ne izvršimo analizu.Na primeru funkcije argumenata y_1 , y_2 i y_3 pokazaćemo oblike napred navedenih formi iste funkcije.Pozitivno definitna forma je za $V(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ dok je za $V(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_1y_2+y_2^2+y_3^2$ pozitivno semidefinitna forma.Nedefinitna forma je u slučaju kada je $V(y_1,y_2)=y_1^2-y_2^2$ ili $V(y_1,y_2,y_3)=y_1$.

Posmatrajmo sada sferu

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \varepsilon^2 \tag{4}$$

i neka je $V(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ pozititvno definitna funkcija u oblasti ε .Označimo sa P najnižu granicu oblasti V na sferi ε i onda možemo da definišemo sledeći teoremu:

T e o r e m a: Ako je $0 \leq C \leq P$ onda je površina $V(y_1,y_2,\cdots,y_n)= C$ zatvorena i ona okružuje sa svih strana početnu koordinatu i nalazi se unutar sfere ε .Posledica ovoga je da se za $C_1 < C_2 \leq P$ površina $V(y_1,y_2,\cdots,y_n) = C_1$ nalazi unutar površine $V(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)=C_2$ i nigde je ne tangira.

Ljapunovljeva funkcija prvog reda sa dvema promenljivim može se i geometrijski interpretirati.Zato definišimo Ljapunovljevu funkciju $V(x,y)$ u oblasti

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = x^2+y^2 \leq R^2 \tag{5}$$

kao površinu u trodimenzionalnom prostoru

$$z = V(x,y) \tag{6}$$

Za ilustraciju geometrijske interpretacije priložena je skica na slici br.8 ,površine $z = V(x,y)$ u oblasti ε ravni (x,y). Možemo sada da nabrojimo sledeća svojstva funkcije Лянунов -a prvog reda sa dvema promenljivim:Kriva $V(x,y)=C$ za razne vrednosti konstante C se dobija kao projekcija presečne krive površine $z=V(x,y)$ i ravni $z=C$,na koordinatnu ravan (x,y). Kriva $V(x,y)=P$ se dobija presekom ravni $z=P$ sa površinom $z=V(x,y)$ .Ravan $z=P$ je najniža granica površine V u oblasti $\mathcal{E}$.

Kriva $V(x,y)=Q$ gde je Q gornja granica površine V u oblasti $\mathcal{E}$,se dobija presekom površine $z=V(x,y)$ sa ravni $z=Q$ i njena projekcija na ravan (x,y) obuhvata oblast ε tangirajući je u jednoj tački.

T e o r e m a o stabilnosti stanja ravnoteže. Ako je sistem jednačina mogućeg kretanja takav da možemo naći funkciju $V(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ definitne forme čiji bi izvod po vremenu bio funkcija semidefinitne forme i suprotnog znaka,onda bi ravnotežno stanje sistema,odredjeno vrednostima početnih koordinata jednakim nuli bilo stabilno po Ляпунов-u.

Ako je $V(y_1,y_2,\cdots,y_n)>0$ onda treba da je $\frac{dV}{dt}\leq 0$ da bi stanje ravnoteže bilo stabilno.

Označimo sa $P>0$ najnižu granicu funkcije $V(y_1,y_2,\cdots y_n)$ na sferi

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2=\varepsilon^2 \tag{7}$$

i kako je funkcija $V(y_1,y_2,\cdots y_n)$ neprekidna u nultoj tački i od vremena eksplicitno ne zavisi sleduje da dopušta beskonačno malu najvišu granicu,tako da bi se za P mogao usvojiti vrlo mali broj,ako je moguće naći takav radijus $\eta>0$ i takvu sferu

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2=\eta^2 \tag{8}$$

na kojoj bi P bilo najveća granica na površini $V(y_1,y_2,\cdots y_n)$ tako da je za sve vrednosti y_i zadovoljena nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2\leq\eta^2 \tag{9}$$

a sa tim će biti zadovoljena nejednačina $V(y_1,y_2,\cdots y_n)\leq P$.

Za početne koordinate y_{0i} je

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i0}^2\leq\eta^2 \tag{10}$$

$$V_0 = V(y_{01}, y_{02}, y_{03}, \dots, y_{0n}) \leq P \tag{11}$$

Polazeći od nejednačine

$$\frac{d}{dt} V(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) < 0$$

i njenim integraljenjem po vremenu u oblasti od nule do proizvoljnog vremena t dobijamo

$$\int_0^t \dot{V} dt = V(y_1, y_2, \dots, y_n) - V(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) \leq 0 \tag{12}$$

Uzimajući u obzir prethodne nejednačine zaključujemo da je

$$V(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \leq V_0(y_{01}, y_{02}, \dots y_{0n}) \leq P \tag{13}$$

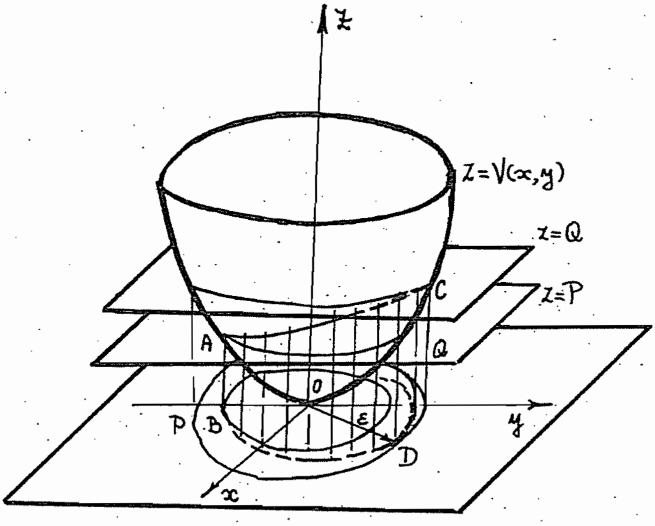
znajući da je izvedena pod pretpostavkom da je

$$\frac{d}{dt} V(y_1, y_2, \dots y_n) \leq 0$$

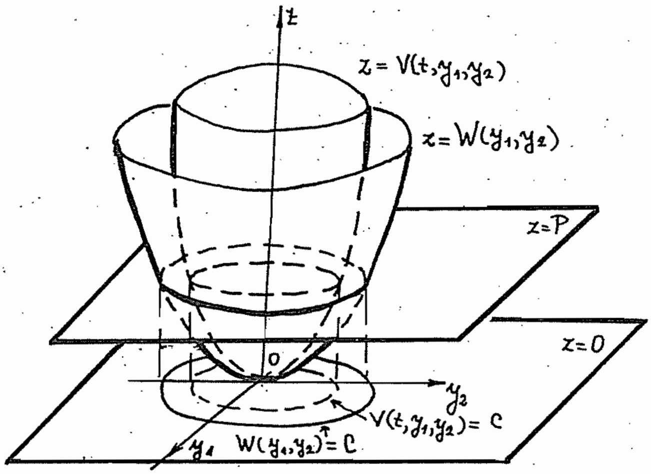
Može se zaključiti da funkcija $V(y_1, y_2, \cdots y_n)$ za sve vreme kretanja ostaje manja od svoje najniže granice na sferi. Sleduje da za početne uslove y_{0i} izabrane prema (10) posmatrana pokretna tačka neće izaći iz oblasti sfere ε definisane izrazom (7), t.j. koordinate y_i mogućeg kretanja će zadovoljavati uslov

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \varepsilon^2 \tag{14}$$

za sve vreme $t \geq 0$.



Slika br. 8



Slika br. 9

II.3.LJAPUNOVLJEVA FUNKCIJA DRUGOG REDA

Za izučavanje stabilnosti kretanja prema drugoj metodi Ляпунов-ljeva funkcija pored relativnih koordinata y_1, y_2, y_3, y_4, ..., y_n, zavisi eksplicitno i od vremena t. Takva funkcija se naziva Ляпунов-ljevom funkcijom drugog reda. Za Ляпунов-ljevu funkciju drugog reda je zadata oblast u kojoj ona za sve vrednosti $t > 0$, treba da bude konačna, jednoznačna i neprekidna po svim promenljivim i definitna, a ta oblast je

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \leq R^2 \tag{1}$$

Prema Ляпунов-ljevoj teoriji funkcija drugog reda

$$V(t; y_1, y_2, \cdots y_n) \tag{2}$$

je definitna u oblasti R, ako u toj oblasti postoji pozitivno definitna odredjena funkcija prvog reda

$$W(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \tag{3}$$

koja ne zavisi eksplicitno od vremena, takva da je za svako $t \geqslant 0$ zadovoljena nejednačina

$$V(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \geqslant W(y_1, y_2, \cdots, y_n) \tag{4}$$

ili

$$-V(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \geqslant W(y_1, y_2, \cdots, y_n) \tag{5}$$

Za nejednakost (4) funkcija $V(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ je pozitivno definitna, dok je za drugu nejednakost (5) negativno definitna.

Naprimer, neka je funkcija

$$V(t, y_1, y_2) = t^2(y_1^2 + y_2^2) - 2y_1 y_2 \cos t \tag{6}$$

a u cilju odredjivanja njene definitnosti napisaćemo je u obliku

$$V(t, y_1, y_2) = (t-1)(y_1^2 + y_2^2) + (y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2 \cos t) \tag{7}$$

pri čemu je prvi izraz pozitivan za svako $t > 1$, dok je drugi izraz uvek pozitivan, pa znači da je funkcija $V(t, y_1, y_2)$ veća od $y_1^2 + y_2^2$ te važi

$$V(t, y_1, y_2) = t(y_1^2 + y_2^2) - 2y_1 y_2 \cos t \geqslant y_1^2 + y_2^2 = W(y_1, y_2) \tag{8}$$

Kako je $W(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ pozitivno definitna forma to je $V(t, y_1, y_2)$ takodje pozitivno definitna forma jer je zadovoljena nejednakost $V \geqslant W(y_1, y_2)$ za bilo koje vrednosti za koje je $y_1^2 + y_2^2 \leq R^2$.

Geometrijsko objašnjenje uslova (4) za odredjivanje definitnosti forme funkcije Ляпунов-a druge vrste lepo se može uočiti sa priložene slike br.9. U prostoru (y_1, y_2, z) su pretstavljene površine $z = W(y_1, y_2)$ i $z = V(t, y_1, y_2)$ i krive $W(y_1, y_2) = C$ i $V(t, y_1, y_2) = C$ u nekom proizvoljnom trenutku vremena.

Uslov definitnosti forme funkcije Ляпунов-a drugog reda je da bude iznad funkcije prvog reda kao na slici, a najmanje jednaka njoj u bilo kom trenutku vremena. Ako isti uslov hoćemo da izrazimo preko ravni (y_1, y_2) onda je potrebno da kriva $W(y_1, y_2) = C$ obuhvata u svakom trenutku vremena krivu $V(t, y_1, y_2) = C$.

T e o r e m a o stabilnosti se može izraziti u sledećem obliku: Ako su jednačine mogućeg kretanja

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, n \tag{9}$$

takve da možemo naći funkciju $V(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ definitne forme, čiji bi izvod za dati sistem (9) bio semidefinitne forme suprotnog znaka od $V(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ to bi stanje ravnoteže relativnog kretanja definisanog sa $y_i = 0$ bilo stabilno po Ляпунов-u.

Pretpostavimo da je prema uslovima teoreme nadjena funkcija $V(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ kao pozitivno definitna forma za koju u oblasti

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq R^2 \tag{10}$$

za svako $t \geq 0$, važe nejednakosti

$$V(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \geq W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad ; \quad \frac{dV(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{dt} \leq 0 \tag{11}$$

Treba dokazati da za unapred zadati broj $\varepsilon > 0$ možemo naći takav broj $\eta(\varepsilon) > 0$, da ako za početne uslove važi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i0}^2 \leq \eta^2 \tag{12}$$

to za promenljive y_i za svaki trenutak vremena treba da važi sledeća nejednačina

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \leq \varepsilon^2 \tag{13}$$

Da bi smo to dokazali uzmimo da je

$$0 < \varepsilon \leq R \tag{14}$$

i postavimo sferu

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \varepsilon^2 \tag{15}$$

i neka je $P > 0$ najmanja vrednost funkcije $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ na toj sferi. Iz uslova teoreme da je $\frac{d}{dt} V(t, y_1, y_2, \ldots y_n) < 0$ i mogućeg kretanja za svako $t > 0$, posle integraljenja dobijamo

$$V(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \leq V(0, y_{01}, y_{02}, \ldots y_{0n}) = V_0 \tag{16}$$

Posmatrajmo sada funkciju

$$V_1(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) = V(0, y_1, y_2, \ldots y_n) \tag{17}$$

pri promeni y_i u oblasti definisanoj jednakošću (13). Kako sada funkcija $V_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ne zavisi eksplicitno od vremena to ona dopušta beskonačno malu višu granicu i sleduje da bi se mogao naći takav broj $\eta(P) > 0$ koji bi za sve vrednosti y_i zadovoljavao uslov

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \eta^2$$

a pri tome funkcija $V_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ne bi bila veća od granice P, t.j.

$$V_1(y_1,y_2,\cdots,y_n) = V(0,y_1,y_2,\cdots,y_n) \leq P \tag{18}$$

Za početne koordinate bi se moglo napisati da je

$$\sum_{i=1}^{n} y_{oi}^2 \leq \eta^2 ; \qquad V_o(y_{o1},y_{o2},\cdots y_{on}) \leq P \tag{19}$$

Ako se uzmu u obzir nejednačine (16) i (19) može se napisati da je

$$V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n) \leq P \tag{20}$$

za svako $t \geqslant 0$, a kako je P najniža granica funkcije $W(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)$ na sferi (15) to je

$$V(t,y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n) \leq W(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n) \tag{21}$$

što je pokazano uz pretpostavku

$$\frac{d}{dt}V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n) \leq 0 \tag{22}$$

te je "nemoguće" kretanje (položaj ravnoteže relativnog kretanja) stabilno.

T e o r e m a o asimptotskoj stabilnosti se može iskazati na sledeći način: Ako su jednačine mogućeg kretanja

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t,y_1,y_2,\cdots,y_n) \qquad i=1,2,3,\cdots,n \tag{23}$$

takve da možemo naći funkciju $V(t,y_1,y_2,\cdots y_n)$ definitne forme (koja dopušta vrlo malu gornju granicu) čiji bi izvod po vremenu bio funkcija definitne forme suprotnog predznaka od funkcije $V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)$, kada se **iskoriste** jednačine mogućeg kretanja, onda je moguće kretanje asimptotski stabilno u okolini početnog "nemogućeg kretanja" $y_i = 0$.

Dokaz ove teoreme možemo izvesti polazeći od funkcije $V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ pozitivno definitne forme za promenljive iz oblasti

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq R^2$$

za $t \geqslant 0$. Da bi sistem bio asimptotski stabilan treba prema teoremi da je

$$V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n) \geqslant W(y_1,y_2,\cdots,y_n); \quad -\frac{dV(t,y_1,\cdots y_n)}{dt} \geqslant W_1(y_1,y_2,\cdots y_n) \tag{24}$$

gde su $W(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ i $W_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ pozitivnih vrednosti u oblasti R i funkcije su samo koordinata y_i .

Moguće kretanje izabrane tačke sistema ne sme da se odvija van sfere

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \varepsilon^2$$

a za početne uslove

$$\sum_{i=1}^{n} y_{0i}^2 \leq \eta^2(\varepsilon)$$

Ako izaberemo ℓ tako da je donja granica $V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ t.j.da je

$$V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n) > \ell \tag{25}$$

za y_i iz oblasti

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geqslant \varepsilon_1^2$$

onda je

$$\varepsilon_1^2 \leq \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \varepsilon^2 \tag{26}$$

Uzmimo sada P_1 kao donju granicu $W_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ u oblasti definisanoj izrazom (26) pa možemo pisati da je

$$0 < P_1 \leq W_1 \leq -\frac{dV}{dt} \tag{27}$$

Ako sada ovu nejednačinu integralimo po vremenu od nule do trenutka vremena t dobijamo da je

$$V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n) \leq V(0,y_1,y_2,\cdots,y_n) - P_1 t \tag{28}$$

Ma koliko bilo malo P_1 nastupiće takav momenat vremena t za koja je desna strana nejednačine (28) postala negativna,pa je pomoću sistema jednačina (23) nemoguće odredjivanje pozitivne funkcije $V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ .Samo u slučaju kada je $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \to 0$, tada je i $P_1 \to 0$ u kom slučaju bi kretanje bilo asimptotski stabilno,jer bi $V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ bilo definitno i suprotnog znaka od svog definitnog izvoda.

T e o r e m a o nestabilnosti kretanja se može iskazati na sledeći način:

Ako su jednačine mogućeg kretanja takve da možemo naći ograničenu funkciju $V(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ definitne forme istog znaka kao i $V(0,y_{01},\cdots y_{0n})$ u blizini položaja relativnog mirovanja $y_i = 0$ za bilo koje vreme $t \geqslant t_0$,onda je isti položaj nestabilan.

Matematički bi se moglo izraziti: U oblasti

$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq R^2$

za bilo koje vreme t treba da je

$$\frac{d}{dt} V(t, y_1, y_2, \cdots y_n) \geqslant W_1(y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad ; \quad |V| < L \tag{29}$$

Neka je

$$\sum_{i=1}^{n} y_{0i}^2 \leq \varepsilon \qquad \text{i} \qquad V(t_0, y_{01}, y_{02}, \cdots, y_{0n}) > 0$$

i kako je za sve vreme $t > t_0$,izvod $\frac{dV}{dt}$ pozitivan na osnovu (29) mora da bude

$$V(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) > V(t_0, y_{01}, y_{02}, \cdots y_{0n}) = V_0 > 0 \tag{30}$$

Ako je sa P_1 označena donja granica $W_1(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ u oblasti

$\varepsilon_1^2 \leq \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq R^2$

onda je

$$0 \leq P_1 \leq W_1(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \leq \frac{d}{dt} V(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

što integraljenjem daje

$$V(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \geqslant V(t_0, y_{01}, y_{02}, \cdots, y_{0n}) + P_1 (t - t_1) \tag{31}$$

Poslednja dobijena nejednačina je nemoguća jer funkcija na desnoj strani linearno raste sa vremenom,te ista ne bi mogla da bude stalno zadovoljena.

II.4. LJAPUNOVLJEVA TEOREMA O STABILNOSTI U PRVOM PRIBLIŽENJU

Kao što se iz prethodnog može videti sistem sa jednim stepenom slobode kretanja u opštem obliku se može da pretstavi sistemom diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}(x,y) \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{1}$$

a može se transformacijom svesti na oblik

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x-x_0) + b(y-y_0) + \mathcal{P}_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= c(x-x_0) + d(y-y_0) + Q_1(x,y) \end{aligned} \tag{2}$$

gde x_0 i y_0 mogu biti jednake nuli. U prvoj aproksimaciji mogu se jednačine sistema (2) napisati kao

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 + by_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= cx_1 + dy_1 \end{aligned} \tag{3}$$

gde je $x_1 = x - x_0$ i $y_1 = y - y_0$ uz uslov ekvivalencije nelinearnog i linearnog sistema u okolini tačke (x_0, y_0) odnosno $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

Ляпунов je u svojoj prvoj metodi ispitao uslove pod kojima se može primeniti linearna aproksimacija za ispitivanje stabilnosti. Neka su za dati nelinearni dinamički sistem opisan sistemom diferencijalnih jednačina (1) funkcije $\mathcal{P}(x,y)$ i $Q(x,y)$ takve da se mogu razviti u stepeni red u okolini tačke (x_0, y_0)

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2 \tag{4}$$

onda je sistem jednačina (1) po prvom približenju dat u obliku (3) gde su $\mathcal{P}_1(x,y)$ i $Q_1(x,y)$ zanemarene. Sada se o stabilnosti može suditi na osnovu prve aproksimacije jednačina (3).

Ляпунов je dokazao, što je na primerima već pokazano, da je ravnotežni položaj stabilan ako oba korena imaju realne delove negativne, a nestabilan ako su realni delovi oba korena pozitivni. Ako su realni delovi oba korena jednaki nuli ili je jedan jednak nuli, a drugi negativan jednačine prve aproksimacije ne mogu dati odgovor na pitanje o stabilnosti. Ova metoda Ляпунов-a po prvoj aproksimaciji nema važnost direktne metode, jer se ograničava na okolinu ravnotežnog položaja x_0, y_0 i ispituje se stabilnost u malom.

Ako sistem jednačina (1) zadovoljava uslove za prvu aproksimaciju oko tačke (x_0, y_0) onda se karakteristična jednačina može napisati kao

$$\begin{vmatrix} a-r & b \\ c & d-r \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

a na osnovu vrednosti njenih korena možemo da odredimo karakter stabilnosti.

Prema Ляпунов-u, naprimer kretanje zadato sistemom jednačina

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax^3$$
$$\frac{dy}{dt} = x + ay^3 \qquad (6)$$

se može u prvoj aproksimaciji napisati u obliku linearnog sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{dt} = -y$$
$$\frac{dy}{dt} = x \qquad (7)$$

Položaj sistema $x = 0$, $y = 0$ je stabilan u linearizovanom problemu. Da bi smo odredili da li je to stabilno stanje ravnoteže za nelinearni sistem uzećemo funkciju Ляпунов-a prvog reda u obliku

$$V(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (8)$$

pa je njen izvod

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = 2a(x^4 + y^4) \qquad (8')$$

Za $\alpha>0$ položaj sistema $x = y = 0$ je nestabilan,dok je za $\alpha< 0$ asimptotski stabilan,a za $\alpha= 0$ prosto stabilan,jer znak parametra α odredjuje definitnoct forme izvoda funkcije $V(x,y)$ Ляпунов-a prvog reda.Za pozitivne vrednosti parametra i funkcija $V(x,y)$ i njen izvod $\frac{dV}{dt}$ su pozitivno definitne forme pa je zato nestabilan položaj ravnoteže.

Neka pomoću transformacija koordinata

$$\xi = \alpha x + \beta y \qquad \eta = \gamma x + \delta y \tag{9}$$

nelinearni sistem može da se napiše u obliku

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda\xi + P_3(\xi,\eta) \\ \frac{d\eta}{dt} &= \mu\eta + Q_3(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{10}$$

gde su λ i μ koreni karakteristične jednačine dati kao

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha_1 + i\beta_1 \\ \mu &= \alpha_1 - i\beta_1 \end{aligned} \tag{11}$$

Za dokaz Ляпунов-ljeve teoreme da znak korena odredjuje stabilnost položaja ravnoteže uzmimo kao Ляпунов-ljevu funkciju prvog reda funkciju

$$V(\xi,\eta) = \xi^2+\eta^2+\xi\eta \tag{12}$$

i nadjimo njen izvod

$$\frac{dV}{dt} = 2\xi\dot{\xi} + 2\eta\dot{\eta} + \xi\dot{\eta} + \dot{\xi}\eta \tag{13}$$

ili uzimanjem u obzir transformisanog sistema (10) isti izvod možemo da napišemo kao

$$\frac{dV}{dt} = 2(\lambda\xi^2+\mu\eta^2) + (\lambda+\mu)\xi\eta + (2\xi+\eta)P_3(\xi,\eta) + (\xi+2\eta)Q_3(\xi,\eta) \tag{14}$$

Prvi deo je binarna forma koja se može napisati u obliku

$$\phi(\xi,\eta) = \lambda(2\xi+\eta)\xi + \mu(\xi+2\eta)\eta \tag{15}$$

čija je diskriminanta forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda \\ \mu & 2\mu \end{vmatrix} = 3\lambda\mu \tag{16}$$

i koja se formira pomoću koeficijenata kvadratne binarne forme i pomoću nje možemo odrediti znak forme. Za dovoljno male vrednosti ξ i η mogu se članovi trećeg i višeg stepena zanemariti i definitnost forme odrediti u zavisnosti od prvog dela $\phi(\xi,\eta)$, koji je binarna forma.

Uzimajući u obzir vrednosti za λ i μ, tako da je α_1 negativno, a sa tim i binarna forma negativno definitna. Položaj ravnoteže $\xi = 0$, $\eta = 0$ je stabilan, jer to odredjuju definitnosti formi $V(\xi,\eta)$ i $\dot{V}(\xi,\eta)$. Na isti način bi smo mogli da utvrdimo i definitnost forme $V(\xi,\eta)$ i njenog izvoda za druge vrednosti korena karakteristične jednačine.

II.5. IZUČAVANJE STABILNOSTI OSCILACIJA POMOĆU JEDNAČINA PRVE APROKSIMACIJE DOBIJENIH ASIMPTOTSKIM METODAMA

Za izučavanje stacionarnih režima oscilovanja u nelinearnim sistemima mogu se koristiti jednačine prve aproksimacije koje se dobijaju pomoću asimptotskih metoda. Zato je potrebno da se sastave jednačine pomoću varijacija i da se izvrši analiza korena karakteristične jednačine i u zavisnosti od znaka realnog dela korena karakteristične jednačine izvuče zaključak o stabilnosti ili nestabilnosti proučavanog režima. Razume se da će rezultat koji se dobije imati smisla za konačni interval vremena, jer se proučavaju jednačine prve aproksimacije, a ne tačne koje smo aproksimirali jednačinama prve aproksimacije na intervalu vremena $\frac{1}{\varepsilon}$.

Ovde ćemo navesti teoreme na osnovu kojih se odredjuje stabilnost kretanja analizom jednačina prve aproksimacije (usrednjenih) koje proizilaze iz teorije Ляпунов-a, a mogu se naći u literaturi [3].

T e o r e m a: Neka jednačina

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x) \tag{1}$$

gde je x n-merni vektor, a $X(t,x)$ n-merna funkcija, zadovoljava sledeće uslove:

a° Jednačina prve aproksimacije (usrednjena)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \tag{2}$$

ima kvazistatičko rešenje $\xi = \xi_0$;

b° Realni delovi korena karakteristične jednačine

$$\det|\mathrm{I}p - X'_{0x}(\xi_0)| = 0 \tag{3}$$

su različiti od nule;

c° Funkcija $X(t,x)$ zadovoljava uslove za postojanje rešenja jednačine (1) i skoro je periodična funkcija vremena t i monotona po x.

Tada je moguće naći takve pozitivne konstantne brojeve δ_0 i ε_0, tako da za svako $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ jednačina (1) ima jedinstveno skoro periodično rešenje (blisko periodično) koje zadovoljava nejednakost

$$|x^*(t) - \xi_0| < \delta_0 \qquad (-\infty < t < +\infty) \tag{4}$$

Ako su svi realni delovi korena karakteristične jednačine (3) negativni, tada proizvoljno rešenje $x(t)$ jednačine (1) teži ka $x^*(t)$ po zakonu

$$|x(t) - x^*(t)| \leq C\, e^{-\gamma\varepsilon(t-t_0)} \tag{5}$$

gde su c i γ pozitivne konstante iz čega proizilazi da je rešenje $x^*(t)$ asimptotski stabilno.

Ako je realni deo makar jednog korena karakteristične jednačine (3) pozitivan, to rešenje $x^*(t)$ je nestabilno.

Ako pretpostavimo da jednačine prve aproksimacije (usrednjene) imaju periodično rešenje

$$\begin{gathered} \xi(\omega t) = \xi \\ \xi(\varphi + 2\pi) = \xi(\varphi) \end{gathered} \tag{6}$$

tada možemo da formulišemo sledeću teoremu:

Neka jednačina (1) u standardnom obliku zadovoljava sledeće uslove:

a° Jednačina prve aproksimacije (2) ima periodično rešenje (6);

b° Realni delovi svih (n-1) karakterističnih pokazatelja - karakterističnih brojeva jednačine s varijacijama

$$\frac{d(\delta\xi)}{dt} = \varepsilon X'_{ox}\left[\xi(\omega t)\right]\delta\xi \tag{7}$$

koji odgovaraju periodičnom rešenju su različiti od nule(jedan karakteristični pokazatelj može biti jednak nuli).

Osim toga u nekoj okolini orbite periodičnog rešenja funkcije $X(t,x)$ zadovoljavaju neophodne uslove za postojanje blisko periodičnog rešenja,koje zavisi samo od jedne konstante (faze).

Tada je moguće naći takve pozitivne brojeve -konstante ε_0 i δ tako da pri proizvoljnom $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,jednačina (1) ima jedinstveno skoro periodično rešenje

$$x^*(t) = f\left[t, \theta(t)\right] \tag{8}$$

koje zavisi od proizvoljne konstante (faze).

Ako su svi realni delovi karakterističnih pokazatelja jednačine (7) sa varijacijama,negativni,to proizvoljno rešenje $x(t)$ jednačine (1) sa početnim uslovima iz dovoljno male okoline orbite rešenja jednačine (2) težiće sa vremenom ka rešenju (2) po zakonu

$$\left|x(t) - f\left[t,\theta(t)\right]\right| \leq C_1 e^{-\gamma(t-t_0)} \tag{9}$$

Iz toga sledi da će rešenje (8) imati orbitalnu asimptotsku stabilnost i privlačiće sebi sva rešenja jednačine (1) koja leže u blizini rešenja jednačine (2).Ako je realni deo bilo kog karakterističnog pokazatelja pozitivan orbita (8) je tada nestabilna.

U slučaju pojave karakterističnih pokazatelja jednakih nuli (više od jednog) ili karakterističnih pokazatelja sa pozitivnim realnim delom dobijamo kritični slučaj za čije proučavanje je potrebno umesto jednačina prve aproksimacije uzeti jednačine viših aproksimacija.

Kako jednačine prve aproksimacije možemo dobiti pomoću metode usrednjenja,a date teoreme pokazuju kako metoda usrednjenja može da se iskoristi za izučavanje stabilnosti stacionarnih režima odredjenih jednačinama prve aproksimacije dobijenih asimptotskim metodama,to znači da je za konkretnu primenu ove teorije potrebno naći parcijalne izvode desnih strana jednačina prve aproksimacije i pomoću njih sastaviti jednačine sa varijacijama i karakterističnu jednačinu.Zatim je potrebno odrediti korene karakteristične jednačine i videti da li su svi realni delovi korena karakteristične jednačine negativni i na osnovu toga izvući zaključak o stabilnosti oscilovanja.Ako se bar jedan realni deo korena javi kao pozitivan oscilovanje je nestabilno.

III. SISTEMI LJAPUNOVA, KONZERVATIVNI SISTEMI, GEOMETRIJSKA DISKUSIJA KRIVIH ENERGIJE U FAZNOJ RAVNI

III.1. SISTEMI LJAPUNOVA - SLUČAJ JEDNOG STEPENA SLOBODE

Klasična teorija periodičnih kretanja diferencijalnih jednačina, čiji je osnovni deo analitička funkcija promenljivih je proizašla iz radova Ляпунов-a i Poincaré-a na kraju prošlog veka. Uporedo sa izučavanjem teorijskog karaktera radilo se i na razradi metoda efektivnog sastavljanja periodičnih rešenja. Ovde ćemo proučiti samo neka izabrana poglavlja koja su nam neophodna za primenu u teoriji oscilacija.

U glavi I.1. smo izučavali rešenja diferencijalne jednačine oblika

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad ; \qquad f(-x) = -f(x) \tag{1}$$

koja opisuje oscilovanje nelinearnog konzervativnog sistema. Ako primenimo metodu fazne ravni za slučaj kada je (o) = 0, utvrdjujemo da su fazne trajektorije ovog sistema u dovoljno maloj okolini položaja ravnoteže zatvorene. Zatvorenim trajektorijama odgovaraju periodična rešenja. Ovakav sistem pripada opštijem sistemu Ляпунов-a. Sistemi Ляпунов-a imaju mnoge osobine konzervativnih sistema. Kao i konzervativni sistemi u okolini položaja ravnoteže pri izvesnim uslovima sistemi Ляпунов-a opisuju periodična kretanja. On je za te sisteme razradio veoma efektivnu metodu nalaženja periodičnih rešenja kretanja.

Ovde ćemo posmatrati sistem diferencijalnih jednačina[1]

$$\frac{d\xi}{dt} = a_{11}\xi + a_{12}\eta + X^*(\xi,\eta)$$
$$\frac{d\eta}{dt} = a_{21}\xi + a_{22}\eta + Y^*(\xi,\eta) \qquad (2)$$

u kome su $X^*(\xi,\eta)$ i $Y^*(\xi,\eta)$ analitičke funkcije promenljivih u okolini tačke $\xi = \eta = 0$, takve da njihovo razvijanje po stepenima ξ i η počinje od članova čiji stepen nije niži od drugog

$$X^*(\xi,\eta) = b_{20}\xi^2 + b_{02}\eta^2 + b_{11}\xi\eta + b_{30}\xi^3 + \cdots$$
$$Y^*(\xi,\eta) = d_{20}\xi^2 + d_{02}\eta^2 + d_{11}\xi\eta + d_{30}\xi^3 + \cdots \qquad (3)$$

Sistem (2) nazvaćemo sistemom Ляпунов-a ako su zadovoljena sledeća dva uslova:

a° Jednačina

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\delta^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\delta^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

ima čisto imaginarne korene $\pm\lambda i$;

b° Sistem (2) ima analitički prvi integral

$$H(\xi,\eta) = const \qquad (5)$$

čije razvijanje po stepenima ξ i η počinje od članova drugog reda,t.j. funkcija $H(\xi,\eta)$ u okolini tačke $\xi = \eta = 0$,može se predstaviti u obliku

$$H(\xi,\eta) = a_0^* + a_{20}^*\xi^2 + a_{02}^*\eta^2 + a_{11}^*\xi\eta + \cdots \qquad (6)$$

Sistem čije je oscilovanje predstavljeno jednačinom (1) se može predstaviti u obliku (2).Ako je naprimer
$f(x) = \omega^2 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots$,
smenom $\dot{\xi} = -\omega\eta$, $x = \xi$ jednačina (1) se svodi na sistem jednačina

1 - Vidi N.N.Moiseev

$$\dot{\xi} = -\omega\eta$$
$$\dot{\eta} = \omega\xi + \frac{a_2}{\omega}\xi^2 + \ldots$$

koji je oblika (2), odakle vidimo da ovakav konzervativni sistem stvarno ispunnjava uslove da pripada sistemu Ляпунов-a.

Sistemu Ляпунов-a pripadaju i mnogi nekonzervativni sistemi koji se sreću u tehnici i fizici, o čemu će biti reči u narednom članu.

I° TRANSFORMACIJA JEDNAČINA NA KANONSKI OBLIK.

Proučimo pomoćni sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta \\ \dot{\eta} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta \end{aligned} \qquad (7)$$

koji opisuje oscilovanje sa konstantnom amplitudom, ako njena karakteristična jednačina ima par čisto imaginarnih korena. Eliminacijom iz jednačina (7) promenljive η, dobijamo

$$\ddot{\xi} - (a_{11} + a_{22})\dot{\xi} + (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})\xi = 0 \qquad (8)$$

Da bi bio zadovoljen uslov o imaginarnosti korena karakteristične jednačine, mora da je koeficijent uz $\dot{\xi}$ jednak nuli, tj. mora da je koeficijent uz ξ iz prve jednačine jednak koeficijentu uz η iz druge jednačine sistema (7) tj. da je $a_{11} = -a_{22}$ i osim toga treba da je

$$\lambda^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \qquad (9)$$

Uvedimo smenu

$$\xi = x \quad ; \qquad \dot{x} = -\lambda y \qquad (10)$$

gde je λ - aritmetička vrednost korena $\sqrt{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$, pomoću koje jednačina (8) daje ekvivalentni sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y \\ \dot{y} &= \lambda x \end{aligned} \qquad (11)$$

Pomoću smene promenljivih (10) početni sistem jednačina (2) se svodi na

$$\dot{x} = -\lambda y + X(x,y)$$
$$\dot{y} = \lambda x + Y(x,y) \qquad (12)$$

gde su $X(x,y)$ i $Y(x,y)$ analitičke funkcije svojih argumenata čiji razvoj u stepeni red počinje sa članovima drugog i višeg stepena. Ovako transformisani sistem jednačina (12) pogodnije je koristiti za izučavanje sistema Ляпунов-a, nego sistem (2).

II° TRANSFORMACIJA INTEGRALA $H(\xi,\eta)$. Saglasno pretpostavci b° oblik integrala $H(x,y)$ je

$$H(x,y) \equiv Ax^2 + By^2 + Cxy + \cdots\cdots = \tilde{\mu} \qquad (13)$$

gde je $\tilde{\mu}$ neka konstanta. Kako je $H(x,y)$ prvi integral to je na osnovu (12) $\frac{dH}{dt} = 0$, što nam dozvoljava da izračunamo koeficijente A, B i C. Nalazimo da je

$$\frac{dH}{dt} = (2Ax + Cy)\left[-\lambda y + X(x,y)\right] + (2By + Cx)\left[\lambda x + Y(x,y)\right] \qquad (14)$$

Izjednačavajući koeficijente uz x^2, y^2 i xy sa nulom dobijamo da je $A = B$ i $C = 0$. Ne umanjujući opštost možemo staviti da je $A = B = 1$ i integral (14) napisati u obliku

$$H(x,y) = x^2 + y^2 + W(x,y) = \mu^2 \qquad (15)$$

gde je $W(x,y)$ analitička funkcija svojih argumenata, a čiji razvoj u stepeni red počinje članovima trećeg stepena, μ^2 je neka konstanta koju mi možemo uvek računati za pozitivnu za dovoljno male vrednosti promenljivih x i y.

III° PERIODIČNOST REŠENJA SISTEMA LJAPUNOVA. Dokažimo sada da su rešenja sistema (12) za dovoljno male vrednosti konstante μ, periodične funkcije vremena t. Za to je dovoljno dokazati da su fazne trajektorije u ravni (x, y) zatvorene i da $\dot{\theta}$ zadržava svoj znak. Zato ćemo uvesti polarne koordinate

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta \qquad (16)$$

i uočićemo da proizvoljna zatvorena trajektorija $\rho(\theta)$ mora biti periodična funkcija argumenta θ. Na osnovu prethodno uvedenih polarnih koordinata sastavimo izraz za prvi analitički integral $H(\rho,\theta)$ kao

$$H(\rho,\theta) \equiv \rho^2\left[1 + \frac{1}{\rho^2} W(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\right] = \mu^2 \tag{17}$$

gde je $W(\rho,\theta)$ analitička funkcija ρ, čiji razvoj ima oblik

$$W(\rho,\theta) = \rho^3\left[\alpha_{30}\cos^3\theta + \alpha_{21}\cos^2\theta\sin\theta + \alpha_{12}\cos\theta\sin^2\theta + \alpha_{30}\sin^3\theta + \cdots\right. \tag{18}$$
$$\cdots + \rho^{n+m}\left[\alpha_{n+m,0}\cos^{m+n}\theta + \cdots\cdots + \alpha_{0,m+n}\sin^{n+m}\theta\right] + \cdots\cdots$$

U formuli (17) funkcija $\frac{1}{\rho^2}W(\rho,\theta)$ može biti pretstavljena u obliku reda

$$\frac{1}{\rho^2} W(\rho,\theta) = \rho a_1(\theta) + \rho^2 a_2(\theta) + \cdots\cdots \tag{19}$$

pri čemu su svi koeficijenti $a_i(\theta)$ polinomi po $\sin\theta$ i $\cos\theta$ tj. periodične funkcije θ. Na taj način izraz (17) možemo napisati kao

$$\rho\left[1 + \rho a_1(\theta) + \rho^2 a_2(\theta) + \cdots\cdots\right]^{1/2} = \mu \tag{20}$$

Ovaj izraz možemo posmatrati kao jednačinu za odredjivanje $\rho(\theta)$. Koristeći analitičnost funkcija koje su obuhvaćene izrazom (20) mi ćemo funkciju $\rho(\theta)$ tražiti u obliku reda

$$\rho = \mu + b_2(\theta)\mu^2 + b_3(\theta)\mu^3 + \cdots\cdots \tag{21}$$

Direktnim izračunavanjem uveravamo se o tome da su koeficijenti razvoja (21) polinomi po $\sin\theta$ i $\cos\theta$. Tako je naprimer

$$b_2(\theta) = -\frac{1}{2}a_1(\theta)\ ; \qquad b_3(\theta) = a_1^2 - \frac{1}{2}a_2\ ; \qquad \cdots \tag{22}$$

Na taj način koeficijenti $b_i(\theta)$ su stepene funkcije koeficijenata $a_i(\theta)$, koji se javljaju kao polinomi po $\sin\theta$ i $\cos\theta$. Kao posledica takve strukture koeficijenata red (21) odredjuje periodičnu funkciju argumenta θ, perioda 2π, tj. pri promeni ugla θ od nule do 2π veličina ρ se vraća na svoju početnu vrednost. Ako se pri tome pokaže da $\dot\theta$ zadržava svoj znak, to će značiti da je fazna trajektorija zatvorena.

Na taj način rešenja sistema (12) funkcije $x(t)$ i $y(t)$ biće periodične funkcije vremena t. Funkcije $x(t)$ i $y(t)$ se javljaju kao analitičke po parametru μ. U suštini na osnovu analitičnosti desnih strana sistema jednačina (12), rešenja tog sistema će biti analitičke funkcije početnih vrednosti $x(0)=c$ i $y(0)=b$. Konstantni parametar μ se takodje odredjuje pomoću početnih vrednosti kao

$$\mu^2 = c^2 + b^2 + W(c,b) \tag{23}$$

Kako desne strane jednačina (12) ne zavise od vremena to bez ograničenja opštosti početne uslove je moguće prihvatiti u obliku

$$x(0)=c \qquad y(0)=0 \tag{24}$$

Odavde se vidi da rešenja sistema jednačina (12) pretstavljaju analitičke funkcije početne koordinate c, a takodje i konstantni parametar prvog integrala μ, koji je analitička funkcija i se može napisati kao

$$\mu = c + \mu_2 c^2 + \cdots \tag{25}$$

IV° IZRAČUNAVANJE PERIODA OSCILOVANJA. Za izučavanje perioda oscilovanja sastavimo diferencijalne jednačine, koje zadovoljavaju promenljive ϱ i θ. Izračunamo izvode

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\varrho}\cos\theta - \varrho\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} &= \dot{\varrho}\sin\theta + \varrho\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned} \tag{26}$$

i u tom sistemu zamenimo izvode $\dot{x}$ i $\dot{y}$ njihovim izrazima iz sistema jednačina (12) pa rešavajući ih u odnosu na izvode $\dot{\varrho}$ i $\dot{\theta}$ nalazimo tražene jednačine

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= X(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)\cos\theta + Y(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)\sin\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \lambda + \frac{1}{\varrho}\{Y(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)\cos\theta - X(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)\sin\theta\} \end{aligned} \tag{27}$$

Iz druge jednačine ovog sistema izračunavamo vreme

$$t=\int_0^{\theta}\frac{\rho\,d\theta}{\lambda\rho+Y(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta-X(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta} \tag{28}$$

Da bi izraz za vreme t zadovoljio uslove (24) neophodno je u izrazu (28) konstantu integracije izjednačiti sa nulom. Iskoristimo sada to da je ρ analitička funkcija μ, što nam dozvoljava da podintegralnu funkciju u izrazu (28) razložimo u red po stepenima μ kao

$$t=\frac{1}{\lambda}\left\{\theta+\int_0^{\theta}\left[\mu\vartheta_1(\theta)+\mu^2\vartheta_2(\theta)+\cdots\right]d\theta\right\} \tag{29}$$

gde su $\vartheta_i(\theta)$ periodične funkcije po θ perioda 2π. Integral

$$I=\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\left[\mu\vartheta_1(\theta)+\mu^2\vartheta_2(\theta)+\cdots\right]d\theta \tag{30}$$

ima podintegralnu periodičnu funkciju pa ne zavisi od početne vrednosti θ_0 i možemo ga napisati u obliku

$$I=2\pi(\mu h_1+\mu^2 h_2+\cdots) \tag{31}$$

gde su h_i - potpuno odredjeni brojevi. Na taj način pri promeni θ za 2π vreme t dobija priraštaj T jednak periodu oscilovanja

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}\left[1+\mu l_1+\mu^2 l_2+\cdots\right] \tag{32}$$

koji ne zavisi od θ_0. Koristeći se prethodnim za period oscilovanja možemo da napišemo da je

$$T(\mu,\theta_0)=\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\frac{\rho\,d\theta}{\lambda\rho+Y(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta-X(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta} \tag{33}$$

Kada $\mu\to 0$, period T teži periodu linearnih oscilacija $2\pi/\lambda$, t.j. periodu oscilovanja u sistemu gde su $X\equiv 0$ i $Y\equiv 0$.

T e o r e m a Ляпунов-a: Ako je konstantni parametar μ dovoljno mali, to su sva rešenja sistema (12) periodične funkcije vremena t, pri čemu je period parna funkcija parametra μ i pri $\mu \to 0$ teži ka $2\pi/\lambda$. Rešenja sistema jednačina (12) su analitičke funkcije veličine c, početnog otklona promenljive x.

V° PRIMER NEKONZERVATIVNOG SISTEMA. Klasa sistema Ляпунов-a kao što smo već rekli je znatno šira od klase konzervativnih sistema i u primenjenim zadacima se ti sistemi često sreću. Razmotrimo sada jednačinu koja se sreće u teoriji talasa, koji se javljaju na površini teške viskozne tečnosti koja se sliva po nagnutom žljebu[1]

$$\ddot{x} - \beta x \dot{x} + \lambda^2 x = 0 \tag{34}$$

Tačka $x = \dot{x} = 0$ se javlja kao položaj ravnoteže. Pokažimo da ova jednačina pripada sistemu Ляпунов-a. Zato je potrebno da proverimo navedena dva uslova: prvo - koreni karakteristične jednačine linearizovanog sistema moraju da budu čisto imaginarni i drugo sistem (34) mora da ima prvi integral analitički u okolini položaja ravnoteže. Prvi od tih uslova je očevidan ako se uvede smena $y = \dot{x}$ u jednačinu (34) koju tada možemo da prepišemo u obliku

$$y\frac{dy}{dx} = (\beta y - \lambda^2)x \tag{35}$$

U ovoj jednačini promenljive se razdvajaju i posle integraljenja se dobija

$$\begin{aligned} &\frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2}\ln(\beta y - \lambda^2) = x^2 + C_1 \qquad && y > \frac{\lambda^2}{\beta} \\ &\frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2}\ln(\lambda^2 - \beta y) = x^2 + C_2 \qquad && y < \frac{\lambda^2}{\beta} \end{aligned} \tag{36}$$

Ovi izrazi pokazuju da prvi integral koji dopusta jednačina (34) će biti analitički u okolini tačke $x = y = 0$. I tako jednačina (34) saglasno teoremi Ляпунов-a ima u okolini položaja ravnoteže periodična rešenja. Do istog zaključka možemo da dodjemo analizom fazne ravni. Označimo sa

---

1 - vidi N.N.Moiseev

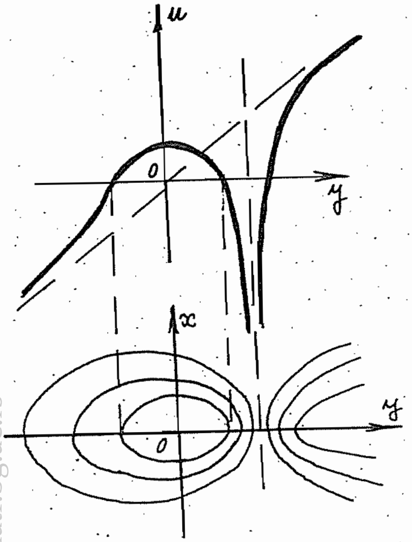
$$u(y) = \frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2} \ln(\beta y - \lambda^2) \qquad y > \frac{\lambda^2}{\beta} \tag{37}$$

$$u(y) = \frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2} \ln(\lambda^2 - \beta y) \qquad y < \frac{\lambda^2}{\beta} \tag{37'}$$

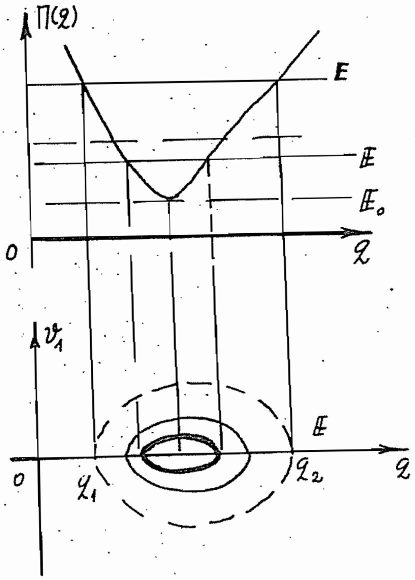
Prvi integral možemo sada da napišemo u obliku

$$x = \pm\sqrt{u(y) - C} \tag{38}$$

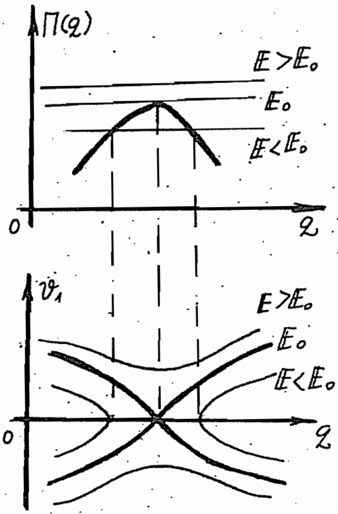
koji nam omogućava da sastavimo fazne trajektorije u faznoj ravni. Na slici br. 10 su prikazane fazne trajektorije za jednačinu (34). Vidi se da je poluravan $y < \frac{\lambda^2}{\beta}$ ispunjena zatvorenim trajektorijama, koje su nesimetrično rasporedjene u odnosu na Ox-osu, ali kojima odgovaraju periodična rešenja polazne jednačine.



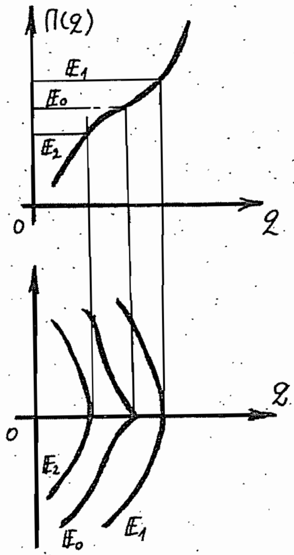
Slika br. 10



Slika br. 11 a



Slika br. 11 b



Slika br. 11 c

III.2. SISTEMI LJAPUNOVA. SLUČAJ PROIZVOLJNOG BROJA STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA

U prethodnom članu smo proučili neka svojstva sistema Ляпунов-a drugog reda. Izloženi zaključci i teorema Ляпунов-a mogu biti uopšteni na sisteme Ляпунов-a- višeg reda, ali su pri tome ograničenja veća. U slučaju sistema Ляпунов-a proizvoljnog reda moguće je odrediti samo odredjenu familiju ili klasu periodičnih rešenja. Bez obzira na ograničen karakter ovog istraživanja on se često javlja kao i jedini način izučavanja i sastavljanja periodičnih rešenja nelinearnih sistema sa više stepeni slobode oscilovanja.

Ovde se nećemo detaljnije zadržavati na izučavanju, nego ćemo samo navesti teoremu Ляпунов-a za sistem Ляпунов-a proizvoljnog broja stepeni slobode oscilovanja.

Sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{\tilde{x}}_i = F_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_{n+2}) \qquad i=1,2,3,\dots,n,n+1,n+2 \tag{39}$$

nazvaćemo sistemom Ляпунов-a, ako zadovoljava sledeće uslove:

a° Funkcije $F_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n+2})$ su analitičke funkcije svojih argumenata; u okolini tačke $\tilde{x}_i = 0$ se mogu izraziti u obliku

$$F_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n+2}) = \sum_{j=1}^{n+2} a_{ij}\tilde{x}_j + F_i^*(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_{n+2}) \; ; \quad (i=1,2,3,\dots,n+2) \tag{40}$$

gde su a_{ij} konstantni brojevi, $F_i^*(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n+2})$ analitičke funkcije čije razvijanje u stepeni red počinje od članova drugog stepena

$$F_i^*(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_{n+2}) = \sum_{s_1+s_2+s_3+\dots+s_{n+2}=2}^{\infty} a_i^{(s_1 s_2 \dots s_{n+2})} \tilde{x}_1^{s_1} \tilde{x}_2^{s_2} \dots \tilde{x}_{n+2}^{s_{n+2}} \tag{41}$$

b^o Jednačina

$$D(\lambda) \equiv \left| a_{ij} - \lambda^* \delta_i^j \right| = 0 \tag{42}$$

ima u krajnjem slučaju jedan par čisto imaginarnih korena $\pm i\lambda$.

c^o Koreni $\pm i\lambda$ su prosti i medju korenima te jednačine nema korena oblika $\pm ip\lambda$,gde je p proizvoljan ceo broj.

d^o Sistem (39) ima prvi analitički integral

$$H(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_{n+2}) = const \tag{43}$$

Sistem jednačina (39) može se transformisati na oblik

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x,y,x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x,y,x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \\ \frac{dx_s}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} b_{si} x_i + X_s(x,y,x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad (s=1,2,3,\dots,n) \end{aligned} \tag{44}$$

što ovde nećemo dokazivati.U izvesnim uslovima ovakvi sistemi dopuštaju periodično rešenje koje se razlaže u red po stepenima početne vrednosti jedne od koordinata uz pretpostavku da je ta vrednost dovoljno mala.Pitanje o postojanju periodičnog rešenja kod ovakvih sistema prema teoriji Ляпунов-a povezano je sa pitanjem o stabilnosti neporemećenog kretanja sistema,odredjenog nultom vrednosšću koordinata u jednom od"kritičnih slučajeva" naime kada karakteristična jednačina ima par čisto imaginarnih korenova.

T e o r e m a Ляпунов-a:Ako jednačine nelinearnog sistema (n+2)-og reda mogu da budu transformisane na oblik (44) gde je λ pozitivan broj, b_{sx} konstantni koeficijenti, $X(x,y,x_1,x_2,\dots x_n)$, $Y(x,y,x_1,x_2,\dots x_n)$ i $X_s(x,y,x_1,x_2\dots x_n)$ analitičke funkcije svojih argumenata za dovoljno male vrednosti, koje u svom razvoju u stepeni red počinju sa članovima ne nižeg reda od dva u odnosu na te promenljive i ako jednačine (44) imaju prvi integral oblika

$$H(x,y,x_1,x_2,\cdots x_n) \equiv x^2+y^2+W(x_1,x_2,\cdots x_n)+S(x,y,x_1,x_2\cdots x_n) = const \tag{45}$$

gde je $W(x_1,x_2,\cdots x_n)$ kvadratna forma promenljivih x_1 , x_2 , x_3 ,......, x_n , a $S(x,y,x_1,x_2,\cdots x_n)$ funkcija svih koordinata čiji razvoj počinje sa članovima ne nižim od trećeg reda (stepena) to sistem (44) ima u dovoljno maloj okolini tačke $x = y = x_1 = x_2 = x_3 \dots = x_n = 0$ periodično rešenje koje može da se razvije u red po stepenima početne vrednosti $x = A$ i ima period koji se može da razvije u red po stepenima A i koji postaje $2\pi/\lambda$ za $A = 0$.

III.3.KONZERVATIVNI SISTEMI I GEOMETRIJSKA DISKUSIJA KRIVIH ENERGIJE U FAZNOJ RAVNI

Kao što smo već napomenuli nelinearni konzervativni sistemi predstavljaju specijalan slučaj sistema Ляпунов-a i mogućnost njihovog izučavanja obuhvaćena je opštim metodama za izučavanje sistema Ляпунов-a.

Konzervativni sistemi su najčešće dosta gruba aproksimacija realnih nelinearnih sistema,koja samo do odredjene granice daje zadovoljavajuće rezultate.Takva aproksimacija je zgodna u smislu prostijeg izučavanja oscilacija uz jednovremenu mogućnost da se studioznije izuči niz drugih pitanja.Konzervativne sisteme karakteriše konstantnost energije u toku procesa oscilovanja.

Posmatrajmo primer oscilovanja konzervativnog sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja,čija je diferencijalna jednačina oblika

$$a\frac{d^2q}{dt^2}+F_e(q)=0 \tag{1}$$

gde je $-F_e(q)$ restituciona sila koja je funkcija generalisane koordinate,a inercioni koeficijent koji može da ima različito fizičko značenje.Restituciona sila pod čijim se dejstvom vrši kretanje je konzervativna,jer proizvoljno zavisi od koordinate.Restituciona sila se može izraziti kao gradijent skalarne funkcije sile

$$-F_e(q)=\frac{\partial U}{\partial q} \tag{2}$$

Jednačinu (1) smenom $\dot{q} = v$ možemo transformisati na sistem od dve jednačine

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} F_e(q) = \varphi(q)$$
$$\frac{dq}{dt} = v \tag{3}$$

odakle sledi jednačina integralnih krivih

$$m v\, dv = -F_e(q)\, dq \tag{4}$$

Integraljenjem postednje jednačine dobijamo

$$\frac{mv^2}{2} + \int F_e(q)\, dq = E_1 \tag{5}$$

Ova jednačina može da se interpretira pomoću energije i ona kaže da je zbir kinetičke i potencijalne energije konstantan

$$\frac{v^2}{2} + \frac{1}{m}\Pi(q) = \frac{v_0^2}{2} + \frac{1}{m}\Pi(q_0) = \frac{E}{m} = h = const \tag{6}$$

Za našu analizu najpogodnije je ovu jednačinu da napišemo u obliku

$$\frac{v^2}{2} + \frac{1}{m}\Pi(q) = h \tag{6'}$$

gde je E totalna energija sistema. Sa $\Pi(q)$ je obeležena potencijalna energija sistema. Za početne uslove konstanta integracije je

$$E = m\frac{v_0^2}{2} + \Pi(q_0)$$

i ona je konstantna za sve vreme kretanja sistema, dok koordinata i brzina, q i v moraju uvek da zadovoljavaju jednačinu (6). Fazna trajektorija (6') u faznoj ravni pretstavlja krivu konstantne energije. Singularne tačke[1] su na mestima gde je fazna brzina jednaka nuli, odnosno gde je

$$\mathcal{V} = \sqrt{v^2 + [\varphi(q)]^2} \tag{7}$$

singularne tačke su, znači, na q - osi gde funkcija $\varphi(q)$ preseca q - osu.

Jednačina integralnih krivih se može napisati u obliku

---

1 vidi D. Rašković: Teorija oscilacija

$$v_1 = \frac{v}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{m}(E - \Pi(q))} \tag{8}$$

odakle se vidi da su integralne krive simetrične u odnosu na q-osu. Za $E - \Pi(q) < 0$ realne grane na integralnim krivama ne postoje, dok za $E - \Pi(q) > 0$ postoje takve realne grane.

Obeležimo sa $z = \Pi(q)$ funkciju potencijalne energije, a onda funkcija $F_e(q)$ predstavlja izvod potencijalne energije po koordinati

$$F_e(q) = \frac{d\Pi(q)}{dq} \tag{9}$$

Kako je u singularnim račkama $F_e(q)$ jednako nuli, to možemo uočiti da se singularne tačke integralnih krivih javljaju u tačkama sa apscisama q za koje potencijalna energija ima ekstremne vrednosti. Ovo možemo uočiti uporednim razmatranjem dve ravni $(q, \Pi(q))$ i (q, v) koje imaju istu apscisu q. Na slici br. 11 prikazane su integralne krive i njihovi singulariteti za različite promene potencijalne energije $\Pi(q)$. Na slici br. 11 a funkcija potencijalne energije $z = \Pi(q)$ ima minimum E_0 i zatvorene integralne krive prelaze u singularnu tačku, koja je centar. Za slučaj kada je $E < E_0$ ne postoje integralne krive, dok su za $E > E_0$ zatvorene i okružuju singularnu tačku - centar. Ova singularna tačka je stabilni centar, jer je potencijalna energija u toj tački u minimumu. Ovo zaključujemo na osnovu Lagrange-ove t e o r e m e, koja glasi: Ako potencijalna energija konzervativnog sistema ima izolovani minimum u položaju ravnoteže, onda je taj položaj stabilan. Kako zatvorene integralne krive odgovaraju periodičnim kretanjima to je period periodičnog kretanja

$$T = 2\int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{v} = 2\int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{2\frac{1}{m}[E - \Pi(q)]}} \tag{10}$$

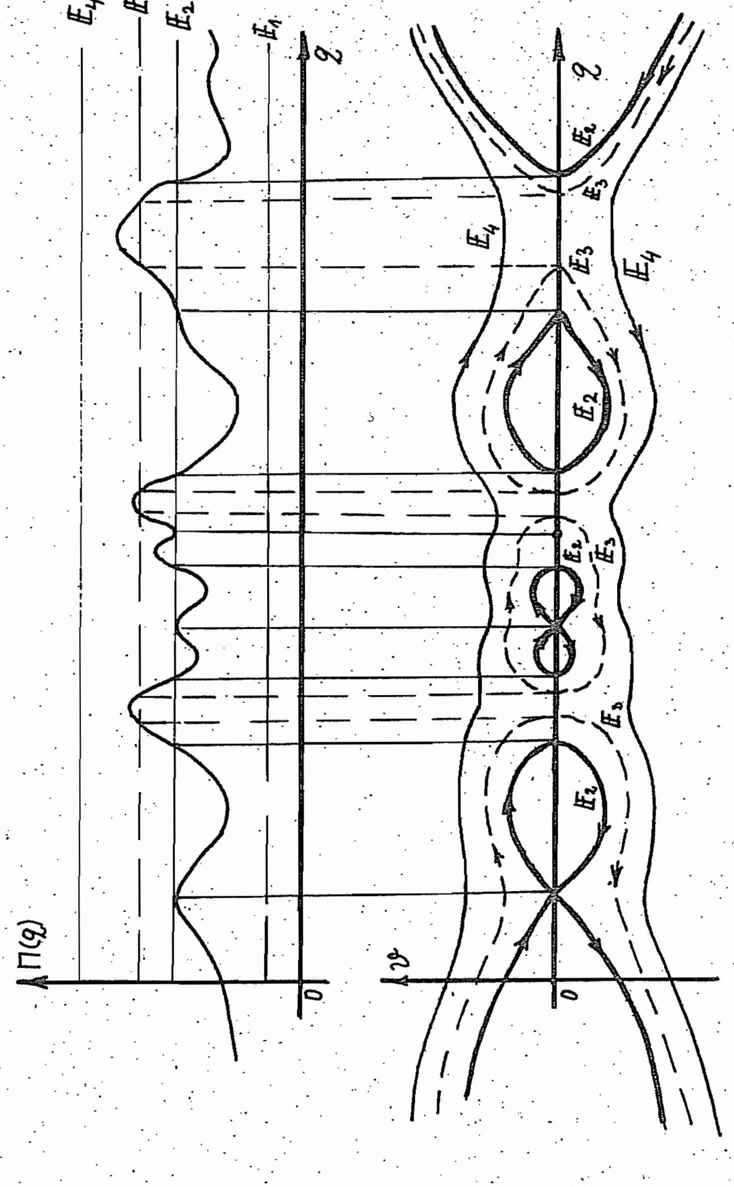
gde su q_1 i q_2 presečne tačke integralne krive sa osom, što je na slici br. 11a prikazano.

U slučaju da potencijalna energija ima maksimum onda za $E = E_0$ gde je E_0 maksimum funkcije potencijalne energije $z = \Pi(q)$ integralna kriva se sastoji iz četiri grane, koje prolaze kroz singularnu tačku tipa sedla, čija apscisa odgovara apscisi q maksimuma potencijalne energije.Ovakvu faznu trajektoriju nazivamo razdvojna linija ili separatrisa,jer ona razdvaja grane trajektorija različitih oblika i nalazi se na prelazu jednih oblika trajektorija u druge.Ostale trajektorije ne prolaze kroz sedlastu tačku,koja predstavlja nestabilan položaj ravnoteže u faznoj ravni.Na ovaj slučaj može se primeniti Ляпунов-ljeva t e o r e m a o nestabilnosti položaja ravnoteže koja glasi:Ako potencijalna energija konzervativnog sistema ima izolovani maksimum u položaju ravnoteže taj položaj je nestabilan.Za $E > E_0$ fazne trajektorije se sastoje iz grana ispod i iznad separatrise koja prolazi kroz sedlastu tačku.Za $E < E_0$ fazne trajektorije su otvorene grane koje su rasporedjene levo i desno od sedlaste tačke i okrenute svojom konveksnom stranom ka njoj (Slika br. 11 b).

Kada funkcija potencijalne energije ima prevojnu tačku u kojoj su prvi i drugi izvod jednaki nuli,tj.kada je tangenta na krivu energije u toj tački horizontalna,kao integralna kriva u faznoj ravni javiće se kriva sa vrhom (špicom) na apscisi koja odgovara prevojnoj tački.Položaj ravnoteže kome odgovara ta tačka je nestabilan (vidi sliku br. 11 c).

Stabilnost u singularnim tačkama može se odrediti i na osnovu ponašanja funkcije sile o čemu govori sledeća Lejenne-Dirichlet-ova t e o r e m a:Kada u položaju ravnoteže materijalnog sistema,na koji dejstvuju konzervativne sile,funkcija sile ima maksimum,položaj ravnoteže je stabilan,dok je u suprotnom taj položaj nestabilan - labilan ili indiferentan.

Na opštem primeru funkcije $z=\Pi(q)$ prikazaćemo analizu kretanja za različite vrednosti konstante energije E u odnosu na krivu potencijalne energije.Ako je prava $z = E$ =const. ispod krive $z=\Pi(q)$ i nigde je ne seče integralne krive ne postoje i kretanje je nemoguće sa takvom energijom.Ako je prava $z = E$ = const. cela iznad krive energije $z=\Pi(q)$ grane integralne krive idu iz beskonačnosti u beskonačnost i ne seku apscisnu osu.Takve krive u ruskoj literaturi se nalaze pod nazivom убегающими.Kretanje čija se reprezentativna tačka kreće po takvim krivama,će se odvijati od početnog položaja sa koordinatom q_0 i brzinom v_0 ,ka položaju u beskonačnosti sa stalnim uveća-



Slika br. 12

njem brzine.

Ako je konstanta energije tako izabrana da prava $\chi = E =$ const. seče, tangira u maksimumu i minimumu, seče u prevojnoj tački krivu energije na faznom portretu se dobija više izolovanih grana faznih krivih, što se može videti sa slike br.12. Za vrednosti koordinate q za koje je $\Pi(q) > E$, ne postoje trajektorije u faznoj ravni. Za ostale vrednosti koordinate q za koje je $\Pi(q) < E$ postoje fazne trajektorije u vidu zatvorenih krivih (1), separatrisa (2), izolovanih tačaka (6) i otvorenih grana (3) i (4). Fazne trajektorije koje se samopresecaju u tački tipa sedla nazivaju se separatrise, a odvajaju krive raznih tipova. Pri povećanju konstante energije E dobijaju se fazne krive koje zahvataju separatrisu i odgovaraju periodičnim rešenjima, dok za smanjenje konstante energije E, dobijamo takodje zatvorene krive obuhvaćene separatrisom u datom slučaju. Neograničeni delovi krivih označeni sa (4) na slici br.12 odgovaraju neperiodičnim kretanjima. Sa (5) je označena separatrisa sa jednom petljom i drugim delom koji ide u beskonačnost.

III.4.POVRŠINA ENERGIJE

Interesantno je proučiti površinu zadatu izrazom

$$z = h = \frac{v^2}{2} + \overline{\Pi}(q) \qquad \overline{\Pi}(q) = \frac{1}{m}\Pi(q) \tag{1}$$

u prostornom Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu (q, v, z) koja predstavlja p o v r š i n u e n e r g i j e (Energiefläche).Ovakva površina je pretstavljena na slici br.13 i omogućava nam da na njoj uočimo neke krive:

1° $z = \overline{\Pi}(q)$ je kriva potencijalne energije koja se dobija za $v = 0$, tj. presekom (z,q) ravni i površine energije.

2° Fazne krive tj. krive h = constant,odnosno krive

$$v = \sqrt{2}\sqrt{h - \overline{\Pi}(q)}$$

čijom se projekcijom na ravan (q,v) dobija fazna kriva,odnosno fazni portret za razne vrednosti konstante energije h .Ove krive se dobijaju presekom površine energije i ravni paralelnih ravni (q,v) na visini h .

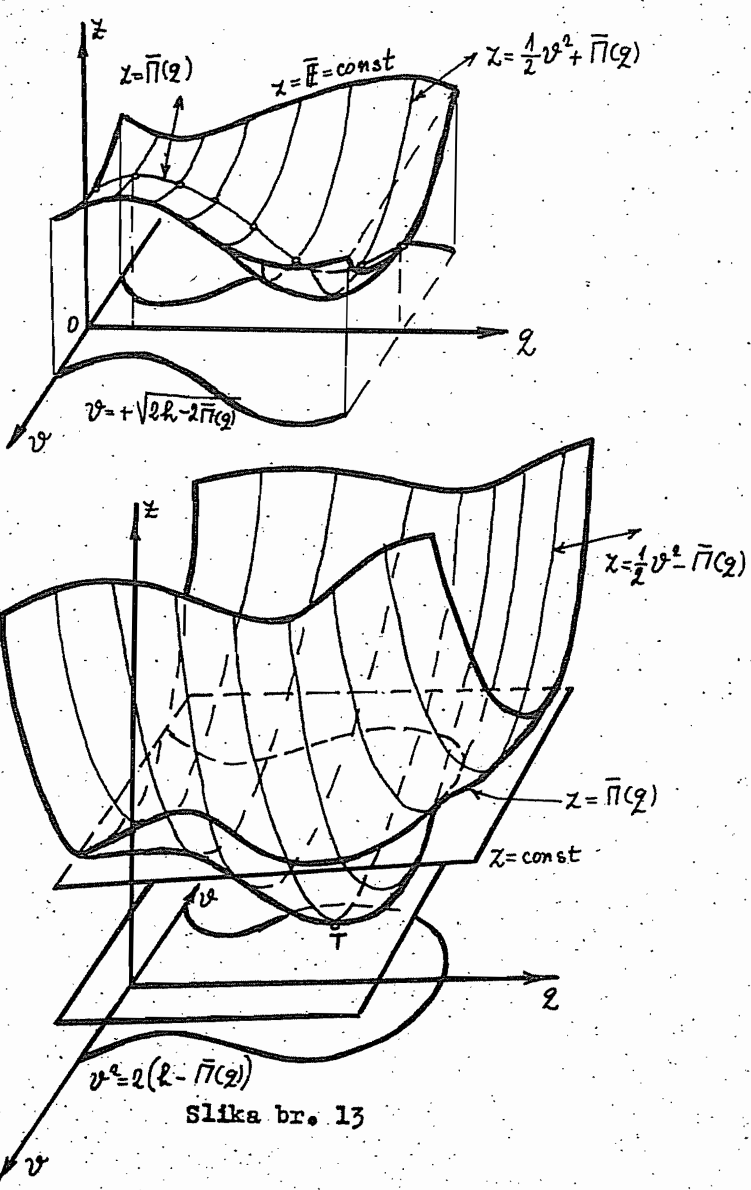
3° Za

$$z = \frac{v^2}{2} + \overline{\Pi}(q_i)$$

dobijaju se krive oblika parabole,koje se nalaze u preseku površine energije i ravni $q = q_i$,gde je q_i izabrana koordinata.Ove krive pokazuju promenu brzine i energije sistema za konstantnu apscisu.Može se uočiti za sve površine energije konzervativnih sistema da je kriva $\overline{z} = \Pi(q)$ u ravni (q,h) d i r e k t -

r i s a, a parabola $z=\frac{1}{2}v^2$ ili $z=\frac{1}{2}v^2+\overline{\Pi}(q_i)$ g e n e r a t - r i s a, čijim kretanjem nastaje površina energije, dok je u toku kretanja svojim temenom uvek na direktrisi, a osa joj je paralelna sa z osom.

Sa priloženog crteža slika br.13 vidi se priroda površine energije konzervativnih sistema. Na slici pod b se vidi da pomeranjem ravni $z=h$ paralelne ravni (q, v) i projektovánjem njenih preseka sa površinom energije se dobija fazni portret u faznoj ravni.



Slika br. 13

III.5. P R I M E R I

1° Kao primer posmatraćemo provodnik koji je prikačen oprugama, a pod dejstvom električnog polja osciluje, jer kroz isti protiče struja, kao što je na slici br. 14 označeno. Diferencijalna jednačina kretanja provodnika je

$$m\ddot{x} + \kappa_1\left(x - \frac{\lambda}{a-x}\right) = 0 \tag{1}$$

gde je $\lambda = \frac{2iI\ell}{\kappa_1}$ parametar, κ_1 konstanta ove opruge i m masa provodnika koji osciluje. Izraz $\frac{\kappa_1\lambda}{a-x}$ predstavlja silu privlačenja izmedju provodnika kada kroz jedan protiče struja jačine i, a kroz drugi koji je nepokretan struja jačine I.

Jednačina integralnih krivih je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\kappa_1(x^2 - ax + \lambda)}{my(a-x)} \qquad y = \dot{x} \tag{2}$$

a singularne tačke na x-osi su

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda} \tag{3}$$

i postoje za $\lambda \le \frac{a^2}{4}$. U faznoj ravni se javlja još jedna neregularna tačka $x = a$ u kojoj postoji asimptota integralnih krivih i krive energije. Potencijalna energija sistema se može izračunati iz (1) kao

$$\Pi(x) = \frac{\kappa_1}{m}\int\left(x - \frac{\lambda}{a-x}\right)dx = \frac{\kappa_1}{m}\left[\frac{x^2}{2} + \lambda\,\ell n\,(a-x)\right] \tag{4}$$

na osnovu čega je

$$\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{k_1}{m}\left[\frac{x^2}{2}+\lambda\ln(a-x)\right]=h=const \tag{5}$$

Ovo je jednačina energijske ravnoteže za posmatrani primer. Za nalaženje integralnih krivih postavićemo krivu energije u (x, z) ravni. Kriva energije $z=\Pi(x)$ ima ekstremne vrednosti za

$$x-\frac{\lambda}{a-x}=0 \tag{6}$$

Zato se sistem mora proučavati za slučajeve kada je

$\lambda > \frac{a^2}{4}$; $\lambda = \frac{a^2}{4}$; $\lambda < \frac{a^2}{4}$.

Za slučaj kada je $\lambda > \frac{a^2}{4}$ nema ekstremnih tačaka i funkcija $\frac{d\Pi}{dx}$ je stalno negativna, što znači da je funkcija $\Pi(x)$ monotono opadajuća te su integralne krive bez singulariteta, kao što se vidi sa slike br. 14. Kretanje štapa je neperiodično, što se tumači činjenicom da je opruga suviše slaba i ne javljaju se oscilacije, pokretni provodnik se jednostavno kreće prema nepokretnom provodniku bez oscilacija.

Za slučaj kada je $\lambda < \frac{a^2}{4}$ kriva energije ima maksimum h_{max} za

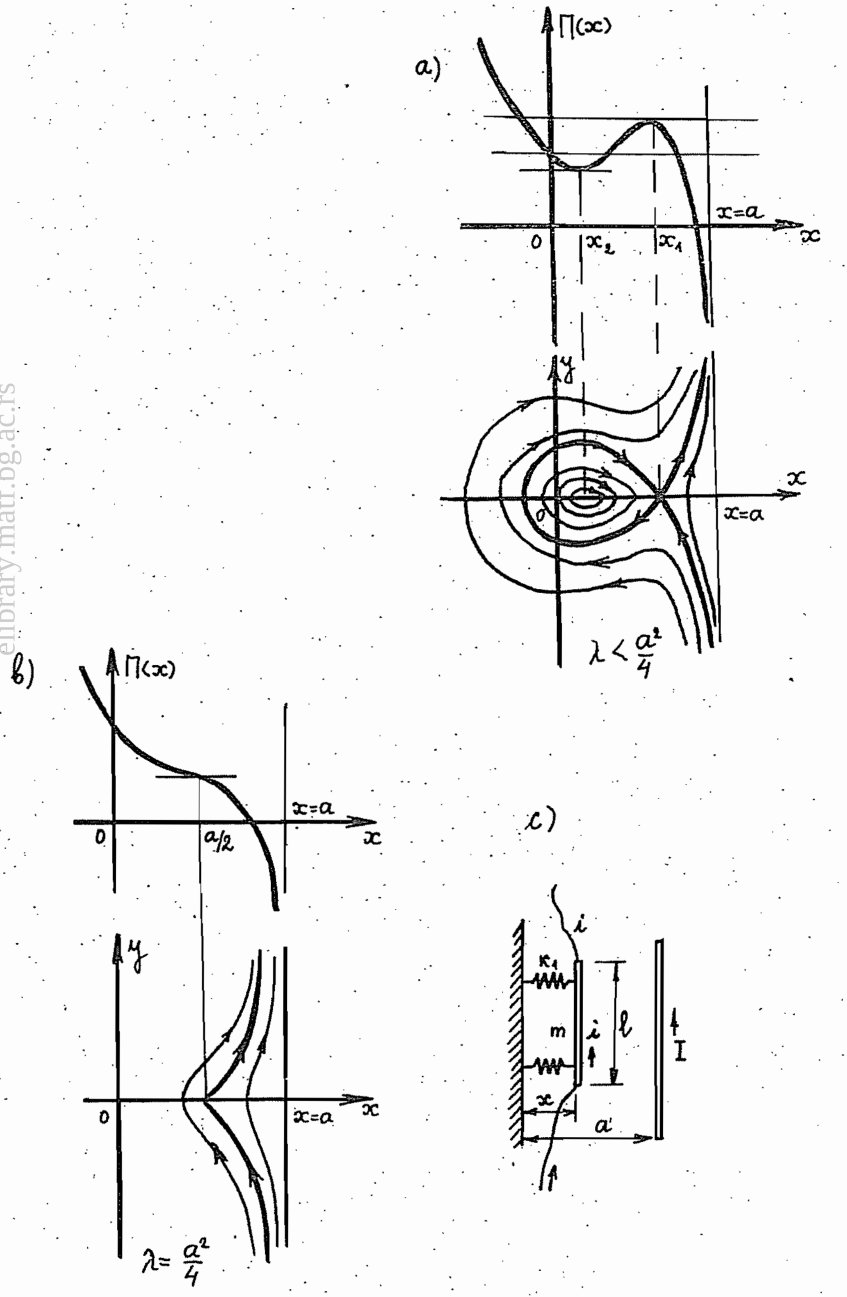
$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-\lambda} \tag{7}$$

i minimum h_{min} za

$$x=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-\lambda} \tag{8}$$

što se vidi i na slici 14a. Iz ovoga sledi da za $h=h_{max}$ integralna kriva sadrži sedlast singularitet i jednu zatvorenu i jednu otvorenu granu, koje se spajaju u sedlu.

Za $h_{min}<h<h_{max}$ fazna trajektorija se sastoji iz zatvorene i otvorene grane. Kretanje kome odgovara zatvorena integralna kriva je periodično, tada je opruga kruta, a početna brzina mala i položaj provodnika koji osciluje nije blizu nepokretnog provodnika. Inače uvek postoji grana, koja je asimptotska u odnosu na pravu $x=a$, što se tumači time da je jačina električnog polja pored samog nepokretnog provodnika beskonačno


a)
Π(x)
x=a
0
x_2
x_1
x
y
x=a
$\lambda < \frac{a^2}{4}$
b)
Π(x)
x=a
0
a/2
x
y
0
x=a
x
$\lambda = \frac{a^2}{4}$
c)
i
κ_1
m
i
l
I
x
a

Slika br. 14

jakog intenziteta.

Za $h = h_{min}$ integralna kriva se sastoji iz otvorene grane i izolovane tačke

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda} \tag{9}$$

Za $h < h_{min}$ i $h > h_{max}$ kriva se sastoji iz otvorene grane oblika kao na slici br.14, a prava $x = a$ je njena asimptota. U ovom slučaju kretanja su neperiodična, ali vrlo različitih tipova kao što se sa slike vidi.

Znači da za $\lambda < \frac{a^2}{4}$ fazni portret sadrži jedno sedlo i jedan centar. Za $\lambda = \frac{a^2}{4}$ singulariteti se poklapaju i formira se singularitet višeg reda. Kriva $z = \Pi(x)$ infleksije - prevoje sa horizontalnom tangentom kroz tačku sa apscisom $x = \frac{a}{2}$. Fazna trajektorija kroz ovu tačku nije glatka kao ostale već ima vrh. Za ove vrednosti λ ne postoje periodična kretanja, već su sva neperiodična. Pored integralnih krivih prikazane su i promene funkcije potencijalne energije.

2^0 Primer kretanja teške tačke po paraboli koja se obrće oko vertikalne ose. Teška tačka mase m može se slobodno kretati po paraboli jednačine $x^2 = 2pz$, koja se oko ose konstantnom brzinom. Sistem ima jedan stepen slobode kretanja. Kinetička energija kuglice je

$$E_K = \frac{m}{2}\left[\omega^2 x^2 + \frac{\dot{x}^2}{p^2}(p^2 + x^2)\right] \tag{10}$$

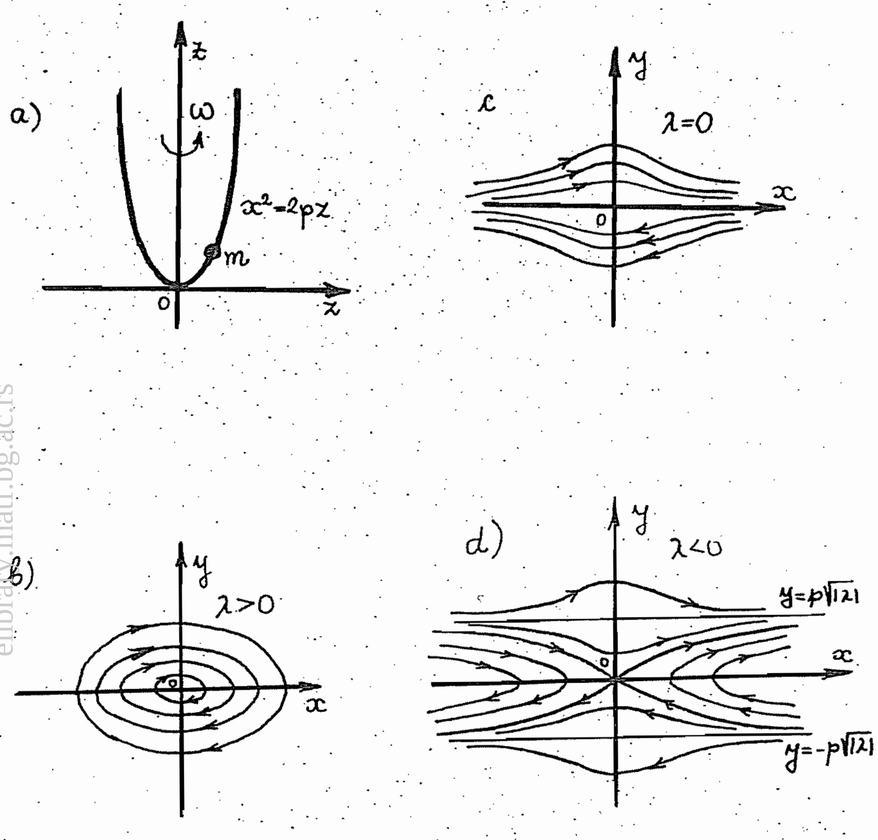
gde je $v_1 = \omega x$ prenosna brzina, a $v_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$ relativna brzina. Potencijalna energija tačke je

$$\Pi(z) = mgz = mg\frac{x^2}{2p} \tag{11}$$

Pomoću Lagrange-ove jednačine druge vrste i izraza za kinetičku i potencijalnu energiju dobijamo jednačinu kretanja u obliku

$$m\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)\ddot{x} + m\frac{x\dot{x}^2}{p^2} + m\lambda x = 0 \tag{12}$$

Smenom $y = \dot{x}$ dobijamo jednačinu integralnih krivih



Slika br. 15

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\lambda + \frac{\dot{x}^2}{p^2}\right)x}{y\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)} \tag{13}$$

koja razdvaja promenljive, a njenim integraljenjem sr dobija

$$\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)y^2 + \lambda x^2 = \mathbb{E} \tag{14}$$

gde je $\mathbb{E}$ integralna konstanta. Iz jednačine (13) se vidi da postoji samo jedna singularna tačka bez obzira na znak parametra λ i to za $x = 0$, $y = 0$.

Za slučaj $\lambda = 0$ postojaće beskonačno mnogo stanja ravnoteže na x - osi.

Za slučaj $\lambda > 0$ kretanje je moguće samo ako je $\bar{E} > 0$, dok je za $\lambda < 0$ moguće kretanje bez obzira na znak konstante integracije $\bar{E}$.

Za slučaj $\lambda > 0$ fazne trajektorije su zatvorene krive, koje za dovoljno veliko p^2 i malo x, su približno jednake elipsama. U ovom slučaju singularna tačka je stabilni centar.

Za slučaj $\lambda < 0$ fazne trajektorije su različite po obliku otvorene beskonačne grane, razdvojene separatrisom. Singularna tačka $x = 0$, $y = 0$ je nestabilno sedlo kroz koje prolazi separatrisa za $\bar{E} = 0$ i njena jednačina je

$$y = \pm\sqrt{|\lambda|}\ \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}} \tag{15}$$

Kada $x \to \infty$ separatrise prelaze u prave $y = \pm\sqrt{|\lambda|}\,p$ koje su joj asimptote. I ove prave predstavljaju integralne krive i kretanje reprezentativne tačke je tada jednoliko, konstantnom brzinom po paraboli. Za $\bar{E} < 0$ fazne trajektorije presecaju x-osu u tačkama $x = \pm\sqrt{\frac{-\bar{E}}{|\lambda|}}$. Za $\bar{E} > 0$ nema preseka sa x-osom, ali se dobijaju po dve grane sa svake strane x-ose, koje se asimptotski za $x \to \pm\infty$ približavaju pravama $y = \pm\sqrt{|\lambda|}\,p$. Za $|y| > p\sqrt{|\lambda|}$ kretanje tačke je približno kretanju za $\lambda = 0$. Na slici br. 15 b, c i d naznačene su fazne trajektorije za $\lambda < 0$, $\lambda > 0$ i $\lambda = 0$. Ovde treba napomenuti da je $\lambda = 0$ vrednost koja odvaja zatvorene od otvorenih trajektorija faznog portreta, jer se za λ pozitivno dobijaju zatvorene krive, a za λ negativno otvorene fazne trajektorije sa separatrisom. Za samo $\lambda = 0$ se dobijaju otvorene krive.

3^0 Jednačina oscilovanja matematičkog klatna se može proučavati sa aspekta konzervativnih sistema. Jednačina oscilovanja matematičkog klatna je

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin\varphi = 0 \tag{16}$$

gde je $k^2 = g/l$ i φ ugao otklona klatna. Integral energije je

$$\frac{\omega^2}{2} - k^2\cos\varphi = \bar{E} \tag{17}$$

Singularne tačke su $\omega = 0$, $\varphi = \pm k\pi$. Funkcija $\chi = \Pi(\varphi)$ ima u tačkama $\varphi = \pm (2k-1)\pi$ izolovane maksimume, te integralne krive za te vrednosti φ imaju singularne tačke tipa sedla što odgovara nestabilnim stanjima ravnoteže.

Za $\varphi = \pm 2k\pi$ funkcija potencijalne energije $\chi = \Pi(\varphi)$ ima relativne minimume i u tim tačkama se javljaju singularne tačke - centri. To su stabilni centri ravnoteže. Fazni portret je dat u faznoj ravni (φ, ω) na slici br. 16 a, i njemu je pridružen grafik $\chi = \Pi(\varphi)$.

Za $\bar{E} < -k^2$ realno stanje oscilovanja klatna je nemoguće.

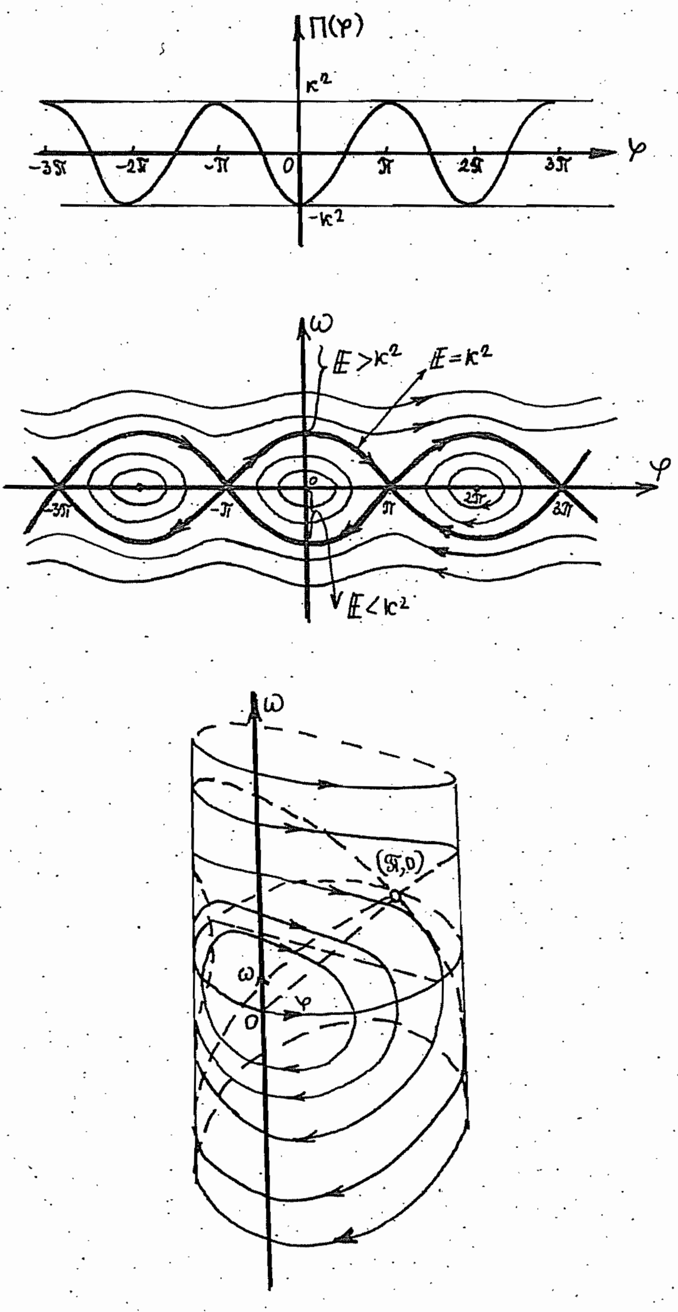
Za $-k^2 < \bar{E} < +k^2$ fazne trajektorije se javljaju kao zatvorene krive koje okružuju centre. Ove zatvorene krive odgovaraju periodičnom kretanju klatna za koje početna brzina oscilovanja (za $\varphi = 0$) nije veća od $2k$ $(\omega \leq 2k)$. Period oscilovanja za matematičko klatno je

$$T = \frac{4}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}} = \frac{4}{k}\bar{F}\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{2\pi}{k}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\varepsilon^{2n}\right\};\ \varepsilon^2 = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}$$

Za $\bar{E} = k^2$ fazne trajektorije su tipa separatrisa sa presecima u sedlastim tačkama. Za $\bar{E} > k^2$ fazne trajektorije su otvorene beskonačne krive, klatno u ovom slučaju izvodi progresivno kretanje po krugu u jednom smeru. Uslovi za kretanje po separatrisi su praktično neostvarljivi jer bi trebalo da tačka "puzi" ka sedlu.

Kako su fazne krive periodične sa periodom 2π, to je moguće faznu ravan "namotati" oko jednog cilindra (valjka) poluprečnika jedinice, čime se delovi faznih trajektorija u intervalu 2π poklapaju jedni na druge i dobijaju se zatvorene krive sa jednom sedlastom tačkom i jednim centrom kao što je pokazano na slici br. 16 b.

4° Klatno sa prigušivanjem srazmernim kvadratu ugaone brzine (sa turbulentnim prigušivanjem) je moguće ostvariti ako se matematičko klatno uroni u neki medij, koji daje silu prigušivanja srazmernu kvadratu ugaone brzine, a suprotnog smera od nje. Diferencijalna jednačina kretanja klatna je tada



Slika br. 16

$$\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi}|\dot{\varphi}| + k^2 \sin\varphi = 0 \tag{18}$$

gde je ugao φ ugao otklona od donjeg vertikalnog položaja. Jednačinu integralnih krivih dobijamo u obliku

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{-k^2 \sin\varphi - c\omega|\omega|}{\omega} \tag{19}$$

gde je $\omega = \dot{\varphi}$. Singulariteti jednačine (2) koji odgovaraju položajima ravnoteže su na φ-osi za koje je $\varphi = n\pi$, gde je $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\ldots$ Za $\varphi = 0$, $\omega = 0$ karakteristična jednačina ne daje odgovor na pitanje o tipu singulariteta (jer su koreni karakteristične jednačine sa realnim delom jednakim nuli), a sa time i o stabilnosti ravnoteže. Ali zato uporedjivanjem sa slučajem klatna bez prigušivanja, gde je za $\varphi = 0$, $\omega = 0$ centar, zaključujemo da je to ovde spiralna žiža.

Za $\varphi = \pi$, $\omega = 0$ singularitet je sedlo jer na ovaj slučaj singularitet ne dejstvuje prigušivanje.

Za $\varphi = 2n\pi$, $\omega = 0$ sve su spiralne, stabilne žiže, a za $\varphi = (2n-1)\pi$ i $\omega = 0$ su nestabilna sedla.

Integralne (fazne) krive se javljaju tako da svako kretanje reprezentativne tačke po njima ima težnju ka položaju stabilne ravnoteže - položaju singularne tačke tipa žiže. Integralne krive u ovom slučaju mogu da se dobijaju uvodjenjem smene $\omega = \dot{\varphi}$ i $\vartheta = \frac{\omega}{k}$ u jednačinu (18)

$$\vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} + c\vartheta|\vartheta| + \sin\varphi = 0 \tag{20}$$

odakle može da se napiše

$$\frac{d(\vartheta^2)}{d\varphi} = -2c\vartheta - 2\sin\varphi \qquad \text{za} \qquad \vartheta > 0$$

$$\frac{d(\vartheta^2)}{d\varphi} = 2c\vartheta - 2\sin\varphi \qquad \text{za} \qquad \vartheta < 0 \tag{21}$$

i u konačnom obliku imamo jednačine integralnih krivih

$$\vartheta^2 = C_1 e^{-2c\varphi} + \frac{2}{1+4c^2}\cos\varphi - \frac{4c}{1+4c^2}\sin\varphi \qquad \text{za} \qquad \vartheta > 0$$

$$\vartheta^2 = C_2 e^{-2c\varphi} + \frac{2}{1+4c^2}\cos\varphi + \frac{4c}{1+4c^2}\cos\varphi \qquad \text{za} \qquad \vartheta < 0 \tag{22}$$

Na slici br. 17 prikazane su integralne krive sa kvadratnim prigušivanjem. Konstante C_1 i C_2 odredjuju karakter krivih. Ako je klatnu dat početni impuls tako da ima početnu brzinu ω_0 onda pri dovoljno malom ω_0 klatno će oscilovati oko položaja $\varphi = 0$ težeći tom položaju ravnoteže. Ako je ω_0 dovoljno veliko klatno će načiniti jedan ili više obrtaja oko tačke vešanja pre nego što počne da osciluje oko stabilnog položaja ravnoteže $2n\pi$. Na faznom dijagramu reprezentativna tačka se pri tome kreće iz tačke $(0, \omega_0)$ pa se spušta do jednog od singulariteta $\varphi = 2n\pi$, zavisno od veličine ω_0, oko koga obilazi i približava mu se.

Može se postaviti pitanje da nadjemo opseg ω_0 u kome će se odgovarajuća kriva (φ, ω) spustiti na željeni singularitet ili to praktično znači da tražimo početnu ugaonu brzinu (početne uslove) za koje će klatno izvršiti odredjen broj n punih obrtaja, posle koga će težiti ravnotežnom položaju $\varphi = 2n\pi$. Da bi smo odgovorili na ovo pitanje, po integralnim krivim kroz sedlaste tačke treba se vratiti do ordinatne ω-ose $\varphi = 0$, gde nadjemo ω_n i ω_{n+2} izmedju kojih je odnos $\omega_n < \omega_0 < \omega_{n+2}$. Klatno će izvršiti $(n+1)/2$ punih obrtaja dok ne stigne u stanje mirovanja. Vrednosti ω_n treba da se odrede eksplicitno iz izraza (22) što je vrlo lako. Treba odrediti C_1 tako da je za $\vartheta = 0$, $\varphi = (2k-1)\pi$ i onda izračunati $\vartheta_0 = \omega_0/\kappa$ za $\varphi = 0$. Integraciona konstanta je za $n = 2k-1$ i date početne uslove

$$C_{1n} = \frac{2}{1+4c^2}\, e^{2c(2k-1)\pi} \tag{23}$$

za koju iz jednačina (22) za $\varphi = 0$ sledi

$$\omega_n^2 = \frac{2\kappa^2}{1+4c^2}\left[e^{2c(2k-1)\pi} + 1\right] \tag{24}$$

Za narednu krivu koja prolazi kroz sedlastu tačku $n = 2k+1$ konstanta je

$$C_{1(n+2)} = \frac{2}{1+4c^2}\, e^{2c(2k+1)\pi} \tag{25}$$

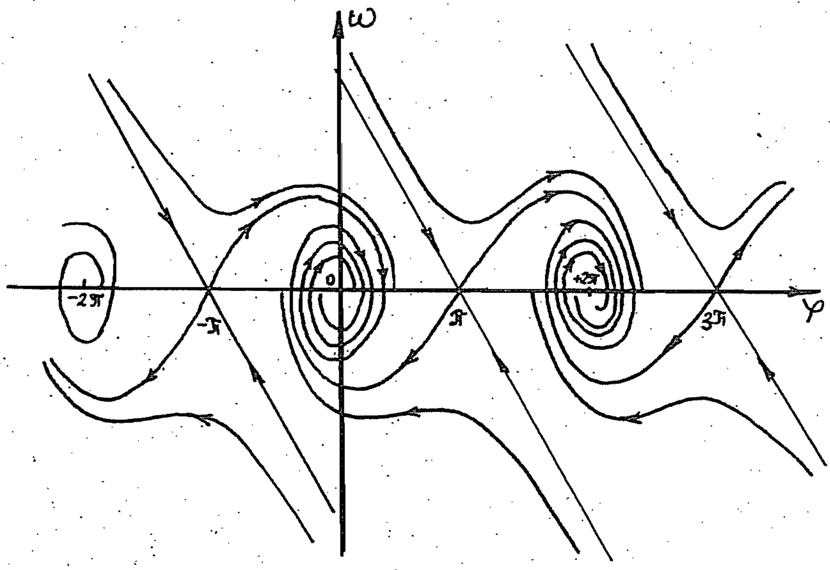
i ugaona brzina za $\varphi = 0$ je

$$\omega_{2+n}^2 = \frac{2k^2}{1+4c^2}\left[e^{2c(2k+1)\varphi} + 1\right] \tag{26}$$

Da bi klatno sa otporom srazmernim kvadratu brzine $\dot{\varphi}$ moglo da izvrši (n+1)/2 punih obrtaja oko tačke vešanja, pre nego što počne da teži ravnotežnom položaju potrebno je da ima početnu ugaonu brzinu ω_0 iz intervala

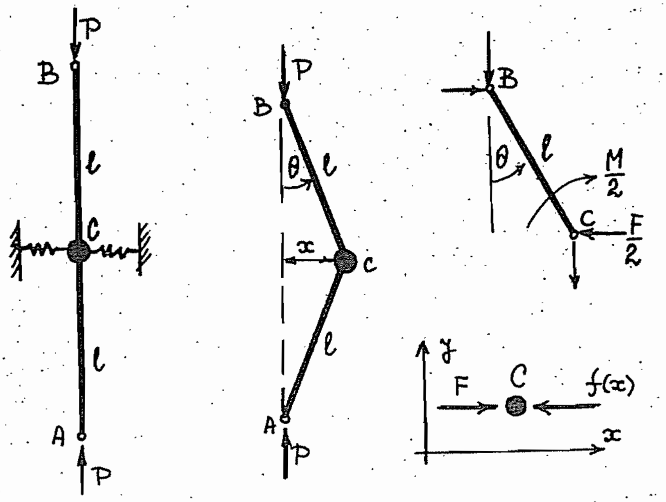
$$\omega_n^2 < \omega_0^2 < \omega_{n+2}^2 \tag{27}$$

gde su ω_n^2 i ω_{n+2}^2 napred izračunate vrednosti.

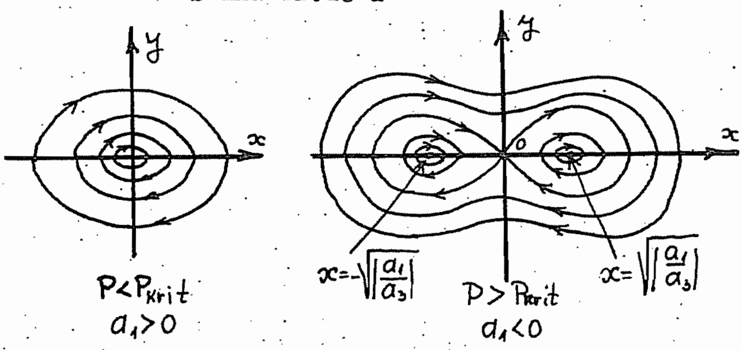


Slika br. 17

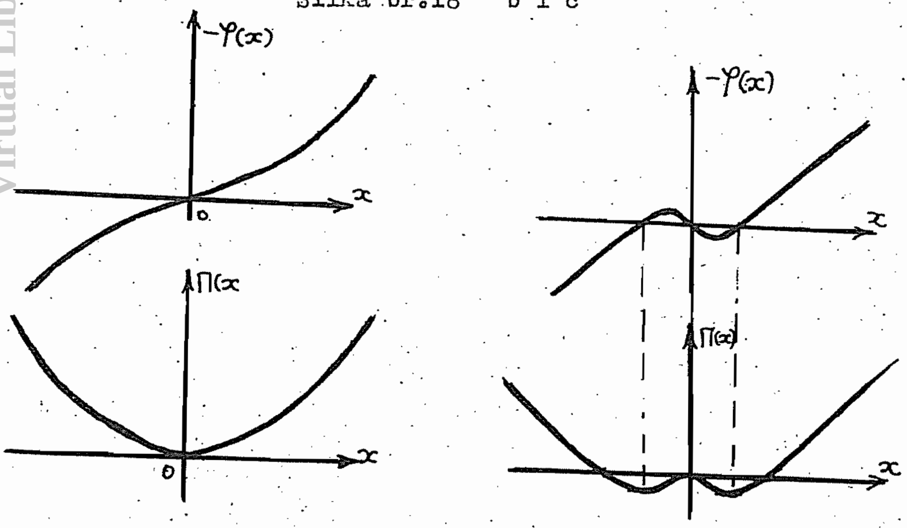
5° Kao naredni primer posmaraćemo elastičnu stabilnost napregnutog stuba dinamičkim putem. Za proučavanje elastične stabilnosti prave elastične šipke (stuba) dinamičkim putem, na koju aksijalno dejstvuju kompresione sile može se usvojiti uprošćeni model sa slike br. 18a. Model se sastoji iz dve šipke



Slika br.18 a



Slika br.18 b i c



Slika br. 18 b′ i c′

dužina po ℓ, zanemarljive mase, koje po vertikali slobodno klize, a drugim delom su spojene zglobom C. U zglobu se postiže otpor pomoću torzione opruge i još u zglobu je smeštena materijalna tačka mase m, koja predstavlja redukovanu masu elastične šipke. Model je dopunjen i jednom zavojnom oprugom.

Prava elastična šipka (stub) će biti u ravnoteži do trenutka kad kompresione sile predju izvesnu kritičnu vrednost posle čega nastaje izvijanje ili lom. Rezultati ispitivanja na uprošćenom modelu mogu pružiti dovoljno tačne podatke o stanju stabilnosti, iako je ispitivanje svedeno na jedan stepen slobode, umesto da se radi sa beskonačno mnogo stepeni slobode kretanja.

Kompresione sile dejstvuju na krajevima A i B šipki duž vertikalne linije. Zavojne opruge u zglobu C dejstvuju u smislu proizvodjenja bočne sile koja zavisi od pomeranja x. Šipke u tački C (zglobu) dejstvuju jedna na drugu pomoću torzione opruge, čiji je moment srazmeran uglu zaokretanja jedne šipke u odnosu na drugu. Ova torziona opruga zamenjuje krutost izvijanja elastičnog stuba. Iz uslova jednakosti sila u vertikalnom pravcu je $V=P$, a iz uslova ravnoteže momenta za tačku C je

$$\frac{M}{2} - V\ell\sin\theta + \frac{F\ell}{2}\cos\theta = 0 \tag{28}$$

odakle dobijamo silu

$$F(x) = \frac{2P\ell\sin\theta - M}{\ell\cos\theta} \tag{29}$$

Ako je sila zavojne opruge nelinearne karakteristike

$$f(x) = \alpha x + \beta x^3$$

i moment torzione opruge

$$M = 2K_1 \arcsin\frac{x}{\ell}$$

jednačina oscilovanja definisanog modela je tada

$$m\ddot{x} - \frac{2P\frac{x}{\ell} - \frac{K_1}{\ell}\arcsin\frac{x}{\ell}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2}} + \alpha x + \beta x^3 = 0 \tag{30}$$

Kako je bočno pomeranje x suviše malo u odnosu na dužinu ℓ, to možemo silu $F\left(\frac{x}{\ell}\right)$ da razvijemo po stepenima $\frac{x}{\ell}$ zadržavajući prva tri člana razvoja, dok ostale članove kao male veličine višeg stepena možemo zanemariti. Tada dobijamo jednačinu kretanja u sledećem obliku

$$m\ddot{x}+\left(\alpha+\frac{2}{\ell^2}K_1-\frac{2P}{\ell}\right)x+\left(\beta+\frac{4K_1}{3\ell^4}-\frac{P}{\ell^3}\right)x^3=0 \qquad (31)$$

Ako sa a_1 i a_3 obeležimo izraze

$$a_1=\alpha+\frac{2K_1}{\ell^2}-\frac{2P}{\ell}$$
$$a_3=\beta+\frac{4K_1}{\ell^4}-\frac{P}{\ell^3} \qquad (32)$$

onda je diferencijalna jednačina kretanja $m\ddot{x}+a_1x+a_3x^3=0$. Ako bi smo posmatrali statički, stavili bi smo da je ubrzanje jednako nuli i sa tim $a_1x+a_3x^3=0$. Ako pretpostavimo da je x malo, možemo x^3 da zanemarimo i zadržimo samo linearni član $a_1x=0$, te sledi da je $x=0$ stanje ravnoteže, izuzev ako nije $a_1=0$ odakle se dobija kritična vrednost sile

$$P_{krit}=\frac{\alpha\ell}{2}+\frac{K_1}{\ell} \qquad (33)$$

i stub bi morao da se izvija jer je ravnoteža indiferentna. Jednačina integralnih krivih pri dinamičkom razmatranju je

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{m}\,\frac{-a_1x-a_3x^3}{y} \qquad (34)$$

gde je $y=\dot{x}$. Singularne tačke faznog portreta su za $y=0$ i $a_1x+a_3x^3=0$. Singularna tačka $x=0$, $y=0$ se uvek javlja. Singularne tačke $y=0$, $x=\pm\sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}$ su uslovljene znakom koeficijenata diferencijalne jednačine, a_1 i a_3.

Pretpostavljajući da je $a_3>0$, za dovoljno velike vrednosti koeficijenata β (a i P/ℓ^3 je malo zbog velikog ℓ^3), singularitete možemo proučavati samo u zavisnosti od znaka koeficijenta a_1. Ako je $a_1>0$, tj. $P<P_{krit}$, u faznom portretu se javlja samo jedna singularna tačka $x=0$, $y=0$ i to kao stabilni centar. Integralne krive su u tom slučaju zatvorene krive. I šipka (stub) osciluje periodično oko nultog položaja ravnoteže, koji je stabilan položaj ravnoteže. (Slika br. 18 b)

Za slučaj $a_1<0$ tj. $P>P_{krit}$ fazni portret sadrži singularitete: za $x=0$, $y=0$ sedlo, kao nestabilnu tačku;

za $x = \pm\sqrt{-a_1/a_3}$; $y = 0$ centre kao stabilne tačke - stabilne položaje ravnoteže. Integralna kriva koja prolazi kroz sedlo je separatrisa u obliku osmice koja okružuje centre i zatvorene krive u sebi, a okružena je takodje zatvorenim krivama. Kretanje je periodično u širokom opsegu (slika br. 18 c).

Stabilnost se može ispitivati pomoću navedenih teorema u prethodnoj glavi, njihovom primenom na potencijalnu energiju sistema:

$$\Pi(x) = \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{4} a_3 x^4 \tag{35}$$

6° Interesantno je ispitati uticaj viskoznog trenja - prigušivanja na elastičnu stabilnost prethodno posmatranog stuba. U tom slučaju jednačina oscilovanja je

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + a_1 x + a_3 x^3 = 0 \tag{36}$$

gde je $c > 0$. Jednačina integralnih krivih je tada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} \frac{-a_1 x - a_3 x^3 - c y}{y} \tag{37}$$

Singularne tačke su iste kao i u prethodnom primeru bez prigušivanja. Za $a_1 > 0$ singularitet $x = 0$, $y = 0$ je stabilna tačka jer je karakteristična jednačina prve aproksimacije $r^2 + cr + a_1 = 0$, sa korenima

$$r_{1/2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a_1}$$

koji imaju negativni realni deo za $\frac{c^2}{4} < a_1$ kada je singularitet žiža, a oba su negativna za $\frac{c^2}{4} > a_1$, kada je to stabilni čvor. Za $a_1 < 0$ postoje tri singularne tačke. Za $x = 0$, $y = 0$ karakteristična jednačina je $r^2 + cr - |a_1| = 0$ i koreni su

$$r_{1/2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + |a_1|}$$

realni i raznog znaka i singularna tačka je sedlo.

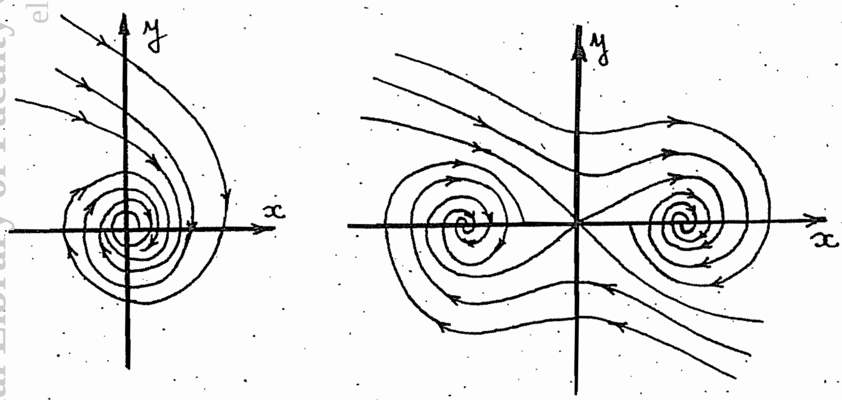
Za $x = \pm\sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}$, $y = 0$ karakteristična jednačina sistema u prvom približenju je $r^2 + cr + 2|a_1| = 0$ sa korenima

$$r_{1/2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2|a_1|}$$

koji odredjuju čvor za $\frac{c^2}{4} > 2|a_1|$,dok za $\frac{c^2}{4} < 2|a_1|$ odredjuju žižu i to u oba slučaja singulariteti odgovaraju stabinim položajima ravnoteže.

Fazne trajektorije za ovaj slučaj prikazane su na slici br. 19.Vidi se da sva kretanja teže jednom ili drugom položaju stabilne ravnoteže.Integralne krive koje sadrže sedlo razdvajaju krive raznih oblika,tj. one koje teže jednom od onih koje teže drugom singularitetu.

Dinamička analiza problema stabilnosti elastičnog stuba na uprošćenom modelu daje zadovoljavajuće rezultate za objašnjenje pojave izvijanja.



Slika br. 19 a i b

III.6. LINIJE ENERGIJE U FAZNOJ RAVNI I UPOREDJIVANJE SA FAZNIM TRAJEKTORIJAMA

Medju posmatranim primerima u članu III.5. uporedo sa proučavanjemprimera konzervativnih sistema,proučavani su i primeri sistema sa prigušivanjem i to iz sledećih razloga:Kod konzervativnih sistema fazne (integralne) krive i krive konstantne energije su identične,medjutim kod sistema sa prigušivanjem moguće je postaviti fazne trajektorije čija je diferencijalna jednačina

$$\frac{dv}{dq} = \frac{-\varphi(v) - f(q)}{v} \tag{1}$$

i linije konstantne energije

$$E_k + E_p = E(q,v) \tag{2}$$

Kod konzervativnih sistema je

$$E_k + E_p = E = const \tag{3}$$

dok je za nekonzervativne sisteme

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{d}{dt} E(q,v) = -2\Phi \tag{4}$$

gde je Φ funkcija rasipanja ili mera opadanja (degradacije) energije. I za sisteme sa prigušivanjem se mogu crtati krive konstantne energije kao

$$E(q,v) = E' \tag{5}$$

ali se pri tome reprezentativna tačka neće kretati po liniji konstantne energije kao kod konzervativnih sistema, nego po faznoj trajektoriji (integralnoj krivoj) pri čemu će seći pojedine linije konstantne energije, jer energija sistema u ovom slučaju nije konstantna.

S obzirom da fazne trajektorije seku linije konstantne energije potrebno je odrediti kakav je to presek. Neka je $\vec{N}$ ort normale linije energije u pravcu porasta skalara $\mathbb{E}$ i neka gradi sa koordinatnim osama uglove α i β (vidi sliku br. 20) čiji su kosinusi smera

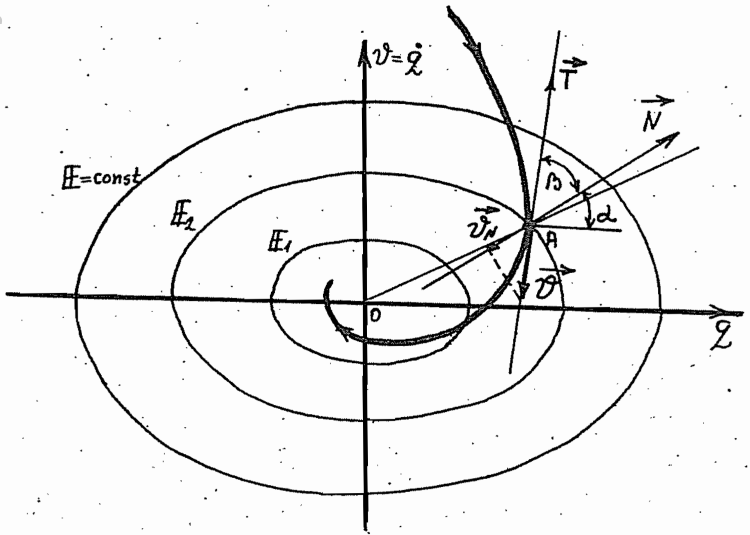
$$\cos\alpha = \frac{1}{A}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial q} \qquad \cos\beta = \frac{1}{A}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \dot{q}} \tag{6}$$

gde je

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \dot{q}}\right)^2}$$

Fazna brzina odredjuje smer fazne trajektorije i njene koordinate su

$$\mathcal{V}_q = \dot{q} = v \qquad \mathcal{V} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} \tag{7}$$



Slika br. 20

Izvod totalne energije po vremenu je

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = A(\dot{q}\cos\alpha + \dot{\vartheta}\cos\beta) = A\overset{\circ}{v}_N \qquad (8)$$

gde je $\overset{\circ}{v}_N$ projekcija fazne brzine na pravac normale $\vec{N}$ linije energije. Kako je iz jednačine (4) i iz jednačine (8) dat izvod energije možemo napisati

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = -2\phi = \overset{\circ}{v}_N A \qquad (9)$$

tj. projekcija fazne brzine na pravac normale na liniju energije je

$$\overset{\circ}{v}_N = -\frac{2\phi}{A}$$

i negativna je, što pokazuje da fazna trajektorija seče liniju energije spolja - unutra što znači da se u ovakvom disipativnom sistemu energija smanjuje sa vremenom i asimptotski teži ravnotežnom položaju.

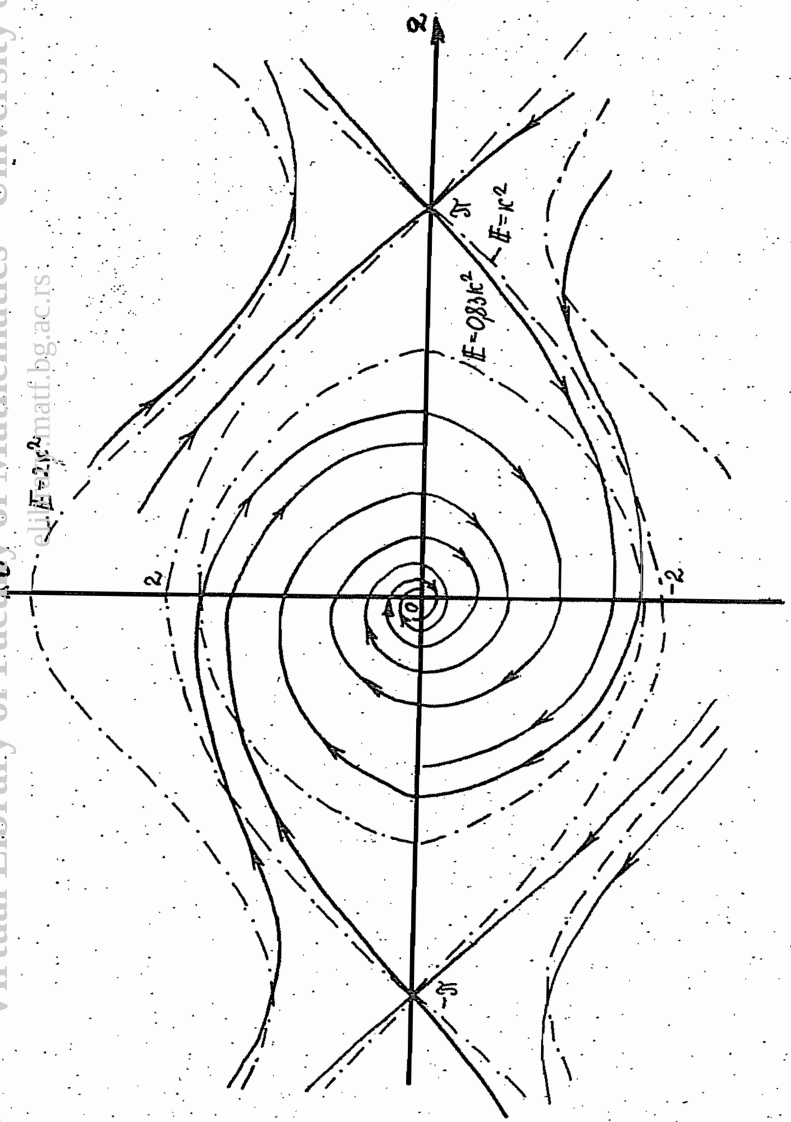
Može se desiti da fazne krive seku linije energije unutra - spolja u kom slučaju se otporna sila prigušivanja javlja kao negativna tj. sistemu se pridodavanjem energije sa vremenom povećava ukupna energija .

Uporedjivanjem faznih trajektorija iz primera klatna sa trenjem i bez trenja možemo zaključiti da fazne trajektorije (linije konstantne energije) matematičkog klatna bez prigušivanja predstavljaju samo linije konstantne energije matematičkog klatna sa viskoznim prigušivanjem, dok fazne trajektorije, kao što je napred pokazano, imaju drugi oblik i seku linije energije spolja - unutra kao što se vidi sa slike br. 21. Isto važi i za primer elastične stabilnosti stuba sa prigušivanjem u odnosu na slučaj bez prigušivanja.

1° Na primeru klatna možemo dokazati tvrdnju da fazne trajektorije seku linije energije spolja - unutra pomoću normalne projekcije fazne brzine na pravac normale. Za klatno sa turbulentnim prigušivanjem je

$$\frac{d\omega}{dt} = -k^2\sin\varphi - c\omega|\omega| \qquad (10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$



Slika br. 21

Potencijalna i kinetička energija su

$$E_p(\varphi) = -mg\ell\cos\varphi$$

$$E_K(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2$$

i ukupna energija

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 - mg\ell\cos\varphi$$

Izvod totalne energije sistema po vremenu je

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E} = m\ell^2\omega\dot{\omega} + mg\ell\sin\varphi\,\dot{\varphi} = -c\,m\ell^2\omega^2|\omega| = -2\phi$$

Fazna brzina je

$$\vartheta = \sqrt{\omega^2 + (k^2\sin\varphi + c\,\omega|\omega|)^2}$$

dok je A (prema napred definisanom izrazu)

$$A = \sqrt{(mg\ell\sin\varphi)^2 + (m\ell^2\omega)^2}$$

Projekcija fazne brzine na pravac normale na linije energije je

$$\vartheta_N = -\frac{2\phi}{A} = -\frac{c\,\omega^2|\omega|}{\sqrt{(k^2\sin\varphi)^2 + \omega^2}}$$

i negativna je, što znači da fazna trajektorija seče linije energije spolja - unutra približavajući se asimptotski ravnotežnom položaju.

2° U primeru elastične stabilnosti stuba kinetička i potencijalna energija su

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_3}{4}x^4$$

pa je ukupna energija sistema

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_3}{4}x^4$$

i njen izvod

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = -c\dot{x}^2 = -c\,y^2 = -2\phi$$

Veličina A je

$$A = \sqrt{(a_1x + a_3x^3)^2 + (my)^2}$$

Projekcija fazne brzine na pravac normale na liniju energije je

$$\vartheta_N = -\frac{2\phi}{A} = -\frac{c\,y^2}{A}$$

i negativna je što znači da fazne krive seku linije energije spolja - unutra težeći asimptotski ravnotežnom položaju.

IV. DEJSTVO KVAZIPERIODIČKIH SILA SA PROMENLJIVOM AMPLITUDOM I FREKVENCIJOM NA NELINEARNI OSCILATORNI SISTEM. PROLAZAK KROZ REZONANTNO STANJE.

Pri proučavanju nestacionarnih (prelaznih) režima u oscilatornim sistemima mogu se uočiti pojave čija je analiza od teorijskog i praktičnog interesa. Pre nego što se u oscilatornom sistemu uspostavi odredjeni stacionarni režim često se može uočiti pojava znatnog povećanja amplitude oscilovanja. To se može javiti i kao posledica pojave bijenja, prolaska frekvencije spoljašnje sile kroz rezonantne vrednosti sopstvene frekvencije sistema i njoj bliske vrednosti ili pri promeni nekih drugih parametara sistema. Naročito intenzivno se uvećava amplituda prilikom prolaska kroz rezonantno stanje i zato je izučavanje ovih pojava veoma važno i pretstavlja interes kao i izučavanje pojava pri običnom stacionarnom rezonantnom stanju.

Pre nego što predjemo na objašnjavanje pojave prolaska kroz rezonantno stanje proanaliziraćemo opšte usvojen pojam rezonancije kao pojave koja se može uočiti u oscilatornim sistemima. Spoljašnje periodične sile, koje dejstvuju na oscilatorni sistem u takt sa sopstvenim oscilacijama, izazivaju velika otstupanja amplituda sopstvenih oscilacija. Za oscilatorne sisteme koji se opisuju linearnim diferencijalnim, rezonantnim stanjem se naziva pojava, koja se ogleda u tome što amplitude oscilovanja sistema počinju brzo da rastu i dostižu neki maksimum, kada je frekvencija spoljašnje sile jednaka frekvenciji slobodnih oscilacija ili pak nekom njenom delu. Pri tome u linearnim oscilatornim sistemima u periodu uspostavljanja rezonantnog stanja (porasta amplitude oscilovanja) parametri sistema - sopstvene i spoljašnje kružne frekvencije sistema, amplituda poremećajne sile ostaju neporemećeni.

U oscilatornim sistemima, koji se opisuju složenim diferencijalnim jednačinama, naprimer diferencijalne jednačine sa periodično - promenljivim koeficijentima (parametarska rezonantna stanja) ili nelinearnim diferencijalnim jednačinana suština pojave rezonantnog stanja je složenija. Naprimer, u nelinearnim sistemima sopstvena kružna frekvencija sistema može da zavisi od amplitude oscilovanja i u toku uspostavljanja rezonantnog stanja ona se može menjati, dok se ne uspostavi takav režim pri kome će amplituda biti konstantna.

U opštem slučaju u složenim oscilatornim sistemima rezonancijom nazivamo pojavu koja se uočava u neautonomnim oscilatornim sistemima izloženim dejstvu spoljašnjih periodičnih sila, koje eksplicitno zavise od vremena, pri kojoj amplituda oscilovanja intenzivno raste u toku uspostavljanja oscilovanja, posle čega će ona imati neku konstantnu vrednost odgovarajuću frekvenciji spoljašnje sile. Opšta karakterna crta pojave rezonantnog stanja kako u linearnim tako i u nelinearnim oscilatornim sistemima je ta što obično mala poremećajna sila dovodi do veoma značajnog uvećanja amplitude oscilovanja.

Navedene rezonantne pojave karakterišu se time, što se u oscilatornom sistemu uspostavlja vremenom stacionarni oscilatorni režim, pri kome su svi parametri oscilatornog sistema konstantni, dok su u procesu uspostavljanja u nelinearnim sistemima neki parametri bili promenljivi sa vremenom.

Kada na oscilatorni sistem dejstvuje spoljašnja sila - poremećaj - kvaziperiodična funkcija promenljive kružne frekvencije može se uočiti intenzivni porast amplitude oscilovanja kada frekvencija spoljašnje sile prolazi kroz vrednosti koje su bliske ili jednake sopstvenoj kružnoj frekvenciji oscilovanja sistema. Ta pojava intenzivnog porasta amplitude oscilovanja naziva se prolaskom sistema kroz rezonanciju ili rezonantno stanje. Pojava prolaska kroz rezonantno stanje se uočava u toku nekog konačnog vremenskog intervala,dok se obično rezonantno stanje uočava u trenutku vremena.Veličina maksimalnih amplituda koje se razvijaju u toku pojave prolaska kroz rezonantno stanje zavise od brzine promene parametara sistema,u prvom redu frekvencije spoljašnje sile.Svaka pojava prolaska kroz rezonantno stanje ima svoje posebne karakteristike,koje zavise od osobina konkretnog proučavanog sistema.

Pri proučavanju pojava rezonantnog stanja i prolaska kroz rezonantno stanje može se izvesti zaključak da je veoma teško razgraničiti rezonanthe pojave koje se uočavaju pri prolasku i uspostavljanju stacionarnog rezonantnog stanja.To je naročito teško u složenim nelinearnim sistemima.

IV.1. ASIMPTOTSKA METODA KRILOVA-BOGOLJUBOVA-MITROPOLJSKOG ZA IZUČAVANJE NESTACIONARNOG REZONANTNOG STANJA

U poglavlju slobodnih oscilacija prikazali smo asimptotsku metodu prilagodjenu za slučaj slobodnih oscilacija sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja, a i za slučaj sa sporopromenljivim parametrima sistema. Ovde ćemo proučiti rezonantni slučaj kada je

$$\omega(\tau) \approx \frac{p}{q}\,\nu(\tau) \tag{1}$$

gde su p i q uzajamno prosti brojevi, $\omega(\tau)$ sopstvena frekvencija sistema, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ trenutna kružna frekvencija prinudne sile za sistem sa jednim stepenom slobode oscilovanja i sa sporopromenljivim parametrima pri čemu ćemo pretpostaviti da se frekvencija spoljašnje sile sporo menja sa vremenom (javljaju se male promene parametara sistema u toku perioda vremena jednakog prirodnoj jedinici vremena za taj sistem ili njegov neporemećeni).

Proučimo sledeći nelinearnu diferencijalnu jednačinu sa sporopromenljivim koeficijentima

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right] + c(\tau)x = \varepsilon F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{2}$$

u kojoj je ε mali parametar, $\tau = \varepsilon t$ "sporo promenljivo" vreme,

$F(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt})$ periodična funkcija argumenta θ perioda 2π, koja se može predstaviti u obliku reda

$$F(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt})=\sum_{n=-N}^{n=+N} e^{in\theta} F_n(\tau,x,\frac{dx}{dt}) \tag{3}$$

čiji su koeficijenti $F_n(\tau,x,\frac{dx}{dt})$ cele racionalne funkcije argumenata x i $\frac{dx}{dt}$, i dovoljno puta diferencijabilne po τ.

Pretpostavićemo, osim toga, da je trenutna kružna frekvencija $\frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$ dovoljno puta diferencijabilna po τ. Radi mogućnosti primene asimptotske metode za sastavljanje približnih rešenja pretpostavljamo da su inercioni $m(\tau)$ i kvazielastični koeficijent $c(\tau)$, takodje dovoljno puta diferencijabilne i strogo pozitivne za proizvoljne vrednosti τ. Pod tim pretpostavkama sastavimo približna rešenja za jednačinu (2) u najopštijem obliku, pogodna za izučavanje kako rezonantne oblasti tako i za prilaze ka njoj iz nerezonantne oblasti za slučaj proizvoljnog demultiplikacionog rezonantnog stanja. Do pravilnog izbora strukture asimptotskog rešenja jednačine (2) dolazimo na osnovu fizičkih tumačenja ponašanja sistema.

Pri otsustvu poremećaja $\varepsilon=0$ i pri konstantnoj vrednosti parametra τ, rešenje jednačine (2) je oblika kosinusne funkcije s konstantnom amplitudom i fazom odredjenim početnim uslovima. Pri pojavi poremećaja u rešenju se mogu pojaviti obertoni, harmonici sa kombinovanim kružnim frekvencijama, mogu se javiti različita rezonantna stanja i druge pojave. Pojava sporopromenljivog vremena τ (a sa tim i spora promena mase sistema, koeficijenata elastičnosti, frekvencije spoljašnje periodične sile i drugih parametara) takodje izaziva u sistemu niz dopunskih pojava koje se ne mogu uočiti u oscilatornom sistemu sa konstantnim koeficijentima. Sopstvena kružna frekvencija $\omega(\tau)=\sqrt{\frac{c(\tau)}{m(\tau)}}$ će se takodje sporo menjati sa vremenom i zavisno od trenutne kružne frekvencije spoljašnje sile $\nu(\tau)$ će uticati na veličinu amplitude oscilovanja. Uzimajući sve to u obzir prirodno je rešenje pretpostaviti u obliku

$$x=a\cos(\frac{p}{q}\theta+\varphi)+\varepsilon u_1(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\varphi)+\varepsilon^2 u_2(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\varphi)+\dots \tag{4}$$

u kome su $u_1(\tau,a,\theta,\frac{p}{2}\theta+\varphi)$ i $u_2(\tau,a,\theta,\frac{p}{2}\theta+\varphi)$ periodične funkcije argumenata θ i $\frac{p}{2}\theta+\varphi$ perioda 2π, dok se a i φ kao funkcije vremena treba da odrede iz sistema pretpostavljenih jednačina

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon\mathcal{A}_1(\tau,a,\varphi)+\varepsilon^2\mathcal{A}_2(\tau,a,\varphi)+\cdots$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega(\tau)-\frac{p}{2}\nu(\tau)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\tau,a,\varphi)+\varepsilon^2\mathcal{B}_2(\tau,a,\varphi)+\cdots \tag{5}$$

gde se razlika $\omega(\tau)-\frac{p}{2}\nu(\tau)$ može menjati u toku procesa oscilovanja i karakteriše razliku izmedju faze sopstvenog oscilovanja i faze spoljašnjeg poremećaja.

Za sastavljanje približnog rešenja neophodno je naći funkcije

$$u_1(\tau,a,\theta,\frac{p}{2}\theta+\varphi)\;;\quad u_2(\tau,a,\theta,\frac{p}{2}\theta+\varphi)\;;\;\ldots$$
$$\mathcal{A}_1(\tau,a,\varphi)\;;\quad \mathcal{B}_1(\tau,a,\varphi)\;;\quad \mathcal{A}_2(\tau,a,\varphi)\;;\quad \mathcal{B}_2(\tau,a,\varphi)\;;\;\ldots \tag{6}$$

čije se odredjivanje govoreći uopšteno javlja kao višeznačno. Za postizanje jednoznačnosti odredjivanja funkcija (6) uvodimo dopunski uslov: otsustvo u periodičnim funkcijama $u_1(\tau,a,\theta,\frac{p}{2}\theta+\varphi)$ i $u_2(\tau,a,\theta,\frac{p}{2}\theta+\varphi)$ prvog harmonika $\psi=\frac{p}{2}\theta+\varphi$. Taj uslov se može napisati u obliku

$$\int_0^{2\pi}u_1(\tau,a,\theta,\psi)\,e^{i\psi}d\psi=0\;;$$
$$\int_0^{2\pi}u_2(\tau,a,\theta,\psi)\,e^{i\psi}d\psi=0\;;\quad\ldots\ldots\ldots \tag{7}$$

Sa fizičke tačke gledišta uvodjenje uslova (7) ekvivalentno je izboru veličine a kao pune amplitude prvog harmonika oscilovanja, što je jednako odsustvu za proizvoljne vrednosti parametra τ u funkcijama $u_1(\tau,a,\theta,\psi)$ i $u_2(\tau,a,\theta,\psi)$ rezonantnih članova čiji imenioci mogu postati jednaki nuli.

Diferencirajmo desne strane jednačine (5) dobićemo sledeće izraze

$$\frac{d^2a}{dt^2}=\varepsilon\left[\omega(\tau)-\frac{p}{2}\nu(\tau)\right]\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial a}\mathcal{A}_1+\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}\mathcal{B}_1+\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\tau}+\left[\omega(\tau)-\frac{p}{2}\nu(\tau)\right]\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial\varphi}\right\}+\varepsilon^3\cdots \tag{8}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \varepsilon\left\{\frac{d\omega}{d\tau} - \frac{p}{2}\frac{d\nu}{d\tau} + \left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\right\} + $$
$$+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial\psi}B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial\tau} + \left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]\frac{\partial B_2}{\partial\psi}\right\} + \varepsilon^3 \ldots\ldots\ldots \tag{9}$$

Diferenciranjem izraza (4) sa uzimanjem u obzir izraza (5),(8) i (9) dobijamo

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega(\tau)\sin\psi + \varepsilon\left\{A_1\cos\psi - B_1 a\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial\theta}\nu(\tau) + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\nu(\tau)\right\} + $$
$$+\varepsilon^2\left\{A_2\cos\psi - B_2 a\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial a}A_1 + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}B_1 + \frac{\partial u_2}{\partial\theta}\nu(\tau) + \frac{\partial u_2}{\partial\psi}\omega(\tau)\right\} + \tag{10}$$
$$+\varepsilon^3 \ldots\ldots$$

i

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2(\tau)\cos\psi + \varepsilon\left\{\left\langle\left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2a\omega(\tau)B_1\right\rangle\cos\psi - \right.$$
$$-\left\langle\left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial B_1}{\partial\psi} + 2\omega(\tau)A_1\right\rangle\sin\psi - \frac{d\omega(\tau)}{d\tau}a\sin\psi + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}\nu^2(\tau) + $$
$$\left.+2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial\psi}\nu(\tau)\omega(\tau) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}\omega^2(\tau)\right\} + \varepsilon^2\left\{\left\langle\left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_2}{\partial\psi} - 2a\omega(\tau)B_2\right\rangle\cos\psi - \right.$$
$$-\left\langle\left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial B_2}{\partial\psi} + 2\omega(\tau)A_2\right\rangle\sin\psi + \left[\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial\psi}B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial\tau} - aB_1^2\right]\cos\psi - $$
$$-\left[2A_1B_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial\psi}B_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial\tau}\right]\sin\psi + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau\partial\psi}\omega(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau\partial\theta}\nu(\tau) + $$
$$+2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\theta}\nu(\tau)A_1 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi}\omega(\tau)A_1(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial\psi}\nu(\tau)B_1 + $$
$$+2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}\omega(\tau)B_1 + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]\frac{\partial B_1}{\partial\psi} + \frac{\partial u_1}{\partial a}\left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi} + $$
$$\left.+\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{d\nu(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2}\nu^2(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta\partial\psi}\nu(\tau)\omega(\tau) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2}\omega^2(\tau)\right\} + \varepsilon^3\ldots \tag{11}$$

Unoseći izraze (4),(10) i (11) u levu i desnu stranu jednačine (2) i izjednačavajući koeficijente uz jednake stepene ε dobijamo sistem jednačina

$$m(\tau)\left\{\omega^2(\tau) + \left[\nu(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta} + \omega(\tau)\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)}\right\}u_1 = F_0(\tau, a, \theta, \psi) - $$
$$-m(\tau)\left\langle\left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2a\omega(\tau)B_1\right\rangle\cos\psi + \tag{12}$$
$$+m(\tau)\left\langle\left[\omega(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial B_1}{\partial\psi} + 2\omega(\tau)A_1 + \frac{1}{m(\tau)}\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}a\right\rangle\sin\psi$$

$$m(\tau)\left\{\omega^2(\tau)+\left[\nu(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta}+\omega(\tau)\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)}\right\}u_2 = F_1(\tau,a,\theta,\psi)-$$

$$-m(\tau)\left\langle\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_2}{\partial\varphi}-2a\omega(\tau)B_2+\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1+\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}B_1+\frac{\partial A_1}{\partial\tau}-aB_1^2+\right.$$

$$\left.+\frac{dm(\tau)}{d\tau}\frac{A_1}{m(\tau)}\right\rangle\cos\psi+\ m(\tau)\left\langle\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial B_2}{\partial\varphi}+2\omega(\tau)A_2+2A_1B_1+\right.$$

$$\left.+a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1+a\frac{\partial B_1}{\partial\varphi}B_1+a\frac{\partial B_1}{\partial\tau}+\frac{dm(\tau)}{d\tau}\frac{a}{m(\tau)}B_1\right\rangle\sin\psi \qquad (13)$$

gde su uvedene oznake

$$F_0(\tau,a,\theta,\psi)=F(\tau,\theta,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi) \qquad (14)$$

$$F_1(\tau,a,\theta,\psi)=F'_x u_1+F'_{x'}\left[A_1\cos\psi-B_1a\sin\psi+\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\nu(\tau)+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\omega(\tau)\right]-$$

$$-m(\tau)\left[2\frac{\partial^2u_1}{\partial\tau\partial\psi}\omega(\tau)+2\frac{\partial^2u_1}{\partial\tau\partial\theta}\nu(\tau)+2\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\theta}\nu(\tau)A_1+2\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\psi}\omega(\tau)A_1+\right.$$

$$+2\frac{\partial^2u_1}{\partial\theta\partial\psi}\nu(\tau)B_1+2\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}\omega(\tau)B_1+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\left\langle\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right\rangle\frac{\partial B_1}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{\partial u_1}{\partial a}\left\langle\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right\rangle\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{d\nu(\tau)}{d\tau}+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}+ \qquad (15)$$

$$\left.+\frac{1}{m(\tau)}\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\nu(\tau)\frac{dm(\tau)}{d\tau}+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{m(\tau)}\frac{dm(\tau)}{d\tau}\right]$$

Nije teško videti da su izrazi (14) i (15) periodične funkcije argumenata θ i $\psi=\frac{p}{q}\theta+\varphi$ sa periodom 2π, a i da zavise od τ i a. Za odredjivanje nepoznatih funkcija $A_1(\tau,a,\varphi)$, $B_1(\tau,a,\varphi)$ i $u_1(\tau,a,\theta,\psi)$ iz jednačine (12) **predstavimo** funkciju (14) u obliku dvojnog trigonometrijskog reda

$$F_0(\tau,a,\theta,\psi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_{0(nm)}(\tau,a)e^{i(n\theta+m\psi)} \qquad (16)$$

gde su poznati koeficijenti razvoja

$$F_{0(nm)}(\tau,a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)e^{-i\{n\theta+m\psi\}}\,d\theta\,d\psi \qquad (17)$$

Izraz za traženu funkciju $u_1(\tau,a,\theta,\psi)$ periodičnu po argumentima θ i $\psi=\frac{p}{q}\theta+\varphi$ sa periodom 2π, tražićemo u obliku dvostrukog Fourier-ovog reda

$$u_1(\tau,a,\theta,\psi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{(nm)}(\tau,a)\, e^{i(n\theta+m\psi)} \tag{18}$$

u kome su koeficijenti $g_{(nm)}(\tau,a)$ nepoznati i potrebno ih je odrediti. U rezultatu iz jednačine (12) dobijamo

$$m(\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left\{\omega^2(\tau)-[m\omega(\tau)+n\nu(\tau)]^2\right\}g_{(nm)}(\tau,a)\,e^{i(n\theta+m\psi)}=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n\theta+m\psi)}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)\,e^{-i(n\theta+m\psi)}d\theta\, d\psi-$$

$$-m(\tau)\left\{\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi}-2a\omega(\tau)B_1\right\}\cos\psi+$$

$$+m(\tau)\left\{\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial B_1}{\partial\psi}+2\omega(\tau)A_1+\frac{1}{m(\tau)}\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}a\right\}\sin\psi \tag{19}$$

Saglasno uslovu (7) funkcija $u_1(\tau,a,\theta,\psi)$ ne sme da sadrži prvi harmonik ugla ψ. Da bi taj uslov bio zadovoljen potrebno je da je

$$m(\tau)\left\{\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial B_1}{\partial\psi}+2\omega(\tau)A_1+\frac{1}{m(\tau)}\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}a\right\}\sin\psi-$$

$$-m(\tau)\left\{\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi}-2a\omega(\tau)B_1\right\}\cos\psi+$$

$$+\sum_{\substack{m=-\infty\\ [nq+p(m\pm1)=0]}}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi^2}e^{i(n\theta+m\psi)}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)\,e^{-i(n\theta+m\psi)}d\theta\, d\psi=0 \tag{20}$$

Odnosno iz jednačine (19) izjednačavajući koeficijente uz jednake harmonike dobijamo

$$g_{(nm)}(\tau,a)=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)\,e^{-i(n\theta+m\psi)}d\theta\, d\psi}{4\pi^2 m(\tau)\left\{\omega^2(\tau)-[m\omega(\tau)+n\nu(\tau)]^2\right\}} \tag{21}$$

Pomoću izraza za koeficijente $g_{(nm)}(\tau,a)$ (21) sastavljamo izraz za funkciju $u_1(\tau,a,\theta,\psi)$ u obliku

$$u_1(\tau,a,\theta,\psi)=\frac{1}{4\pi^2 m(\tau)}\sum_{\substack{n=-\infty \\ [nq+p(m\pm1)\neq0]}}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(n\theta+m\psi)}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)e^{-i(n\theta+m\psi)}d\theta d\psi}{\omega^2(\tau)-[m\omega(\tau)+n\nu(\tau)]^2} \tag{22}$$

U jednačini (20) a u poslednjem izrazu dvostrukoj sumi kompleksni eksponenti za $nq+p(m\pm1)=0$ imaju oblik

$$e^{i(n\theta+m\psi)}=e^{i(\mp\frac{p}{q}\theta+m\varphi)}=e^{i(\mp\psi+(m\pm1)\varphi)} \tag{23}$$

Osim toga $m\pm1$ je deljivo sa q pa taj izraz možemo zameniti sa bq. Izjednačujući u izrazu (20) koeficijente uz $\cos\psi$ i $\sin\psi$ sa nulom dobijamo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po nepoznatim funkcijama $A_1(\tau,a,\varphi)$ i $B_1(\tau,a,\varphi)$ koje odatle možemo izračunati. Te jednačine su

$$\begin{aligned}
&\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}-2a\omega(\tau)B_1=\\
&\qquad=\frac{1}{2\pi^2 m(\tau)}\sum_{b=-\infty}^{\infty}e^{ibq\varphi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)e^{-ibq\varphi}\cos\psi\, d\theta d\psi\\
&\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial B_1}{\partial\varphi}+2\omega(\tau)A_1=-\frac{1}{m(\tau)}\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}a-\\
&\qquad-\frac{1}{2\pi^2 m(\tau)}\sum_{b=-\infty}^{\infty}e^{ibq\varphi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)e^{-ibq\varphi}\sin\psi\, d\theta d\psi
\end{aligned} \tag{24}$$

U poslednjim jednačinama sabiranje se izvodi za sve vrednosti indeksa b za koje su integrali na desnoj strani, koji stoje pod znakom zbira različiti od nule. Ti integrali će biti različiti od nule za one vrednosti indeksa b za koje sumarni pokazatelj, koji odgovara eksponentu trigonometrijskog reda, je jednak nuli.

Za odredjivanje $A_1(\tau,a,\varphi)$ i $B_1(\tau,a,\varphi)$ dovoljno je metodom neodredjenih koeficijenata rešiti sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina (24). Ako $A_1(\tau,a,\varphi)$ i $B_1(\tau,a,\varphi)$ zadovoljavaju sistem jednačina (24) u izrazu za $u_1(\tau,a,\theta,\psi)$ koji se dobija kao partikularno rešenje nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine (12), na desnoj strani se neće javiti sabirci čiji imenioci mogu postati jednaki nuli. Na taj način bi funkcija $u_1(\tau,a,\theta,\psi)$ bila konačna. Za tražene funkcije $A_1(\tau,a,\varphi)$ i $B_1(\tau,a,\varphi)$ dovoljno je uzeti neko partikularno, periodično po φ, rešenje sistema jednačina (24). Metodom neodredjenih koeficijenata vrlo lako se odredjuju rešenja za funkcije $A_1(\tau,a,\varphi)$ i $B_1(\tau,a,\varphi)$ u obliku

$$A_1(\tau,a,\varphi) = -\frac{a}{2m(\tau)\omega(\tau)}\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} + \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)}\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{isq\varphi} \times$$

$$\times\left\{\frac{[q\omega(\tau)-p\nu(\tau)]s i\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0(\tau,a,\theta,\psi)e^{-isq\psi}\cos\psi\, d\theta\, d\psi - 2\omega(\tau)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0(\tau,a,\theta,\psi)e^{-isq\psi}\sin\psi\, d\theta\, d\psi}{4\omega^2(\tau)-[q\omega(\tau)+p\nu(\tau)]^2}\right\}$$

(25)

$$B_1(\tau,a,\varphi) = -\frac{1}{2\pi^2 m(\tau)a}\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{isq\varphi} \times$$

$$\times\left\{\frac{[q\omega(\tau)-p\nu(\tau)]s i\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0(\tau,a,\theta,\psi)e^{-isq\psi}\sin\psi\, d\theta\, d\psi + 2\omega(\tau)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0(\tau,a,\theta,\psi)e^{-isq\psi}\cos\psi\, d\theta\, d\psi}{4\omega^2(\tau)-[q\omega(\tau)+p\nu(\tau)]^2}\right\}$$

Na sličan način iz parcijalne diferencijalne jednačine (13) možemo da odredimo izraz za $u_2(\tau,a,\theta,\psi)$, dok za odredjivanje funkcija $A_2(\tau,a,\varphi)$ i $B_2(\tau,a,\varphi)$ dobijamo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_2}{\partial\tau} - 2\omega(\tau)aB_2 = -\left[\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial\varphi}B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial\tau} aB_1^2 + \frac{dm(\tau)}{d\tau}\frac{A_1}{m(\tau)}\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2 m(\tau)}\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{isq\varphi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\tau,a,\theta,\psi)e^{-isq\psi}\cos\psi\, d\theta\, d\psi$$

(26)

$$\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial B_2}{\partial\varphi} + 2\omega(\tau)A_2 = -\left[\frac{\partial B_1}{\partial a}aA_1 + \frac{\partial B_1}{\partial\varphi}aB_1 + \frac{\partial B_1}{\partial\tau}a - 2A_1B_1 + \frac{dm(\tau)}{d\tau}\frac{aB_1}{m(\tau)}\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 m(\tau)}\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{isq\varphi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\tau,a,\theta,\psi)e^{-isq\psi}\sin\psi\, d\theta\, d\psi$$

Rezimirajući prethodno rečeno možemo da zaključimo da kao prvu aproksimaciju rešenja usvajamo

$$x\Big|_I = a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\varphi\right) \tag{27}$$

gde se $a(t)$ i $\varphi(t)$ odredjuju iz sistema jednačina prve aproksimacije

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau,a,\varphi) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)+\varepsilon B_1(\tau,a,\varphi) \end{aligned} \tag{28}$$

Ako je razlika $\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)$ velika to sistem jednačina (28) možemo usrednjiti po promenljivoj φ, a ako je pak reda ε, to sistem jednačina (28) možemo posmatrati kao sistem jednačina "sporih" kretanja.

Kao drugu aproksimaciju usvajamo izraz

$$x\Big|_{II} = a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\varphi\right)+\varepsilon U_1\left(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\varphi\right) \tag{29}$$

u kome su $a(t)$ i $\varphi(t)$ funkcije vremena i moraju da budu odredjene iz sistema jednačina druge aproksimacije

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau,a,\varphi)+\varepsilon^2 A_2(\tau,a,\varphi) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)+\varepsilon B_1(\tau,a,\varphi)+\varepsilon^2 B_2(\tau,a,\varphi) \end{aligned} \tag{30}$$

Sistem diferencijalnih jednačina prve i druge aproksimacije (28) i (29) za amplitudu i fazu u opštem slučaju se ne mogu analitički integraliti pa nam ostaje numerička metoda integraljenja ili pak neke opšte metode kvalitativne analize. Sistem diferencijalnih jednačina prve i druge aproksimacije su uzajamno povezani sistemi u odnosu na a i φ. Uopšteno govoreći redovi (4) i (5) su divergentni, ali se ovde koristi njihova osobina asimptotičnosti.

IV.2. NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI JEDNAČINE (2) ČLAN IV.1.

Kao specijalan slučaj jednačine (2) iz člana IV.1. posmatrajmo diferencijalnu jednačinu nelinearnog oscilatora koji se nalazi pod dejstvom sinusne sile ,čije se i amplituda i kružna frekvencija sporo menjaju sa vremenom.U tom slučaju diferencijalna jednačina oscilovanja glasi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)+\varepsilon E(x)\sin\theta \tag{1}$$

gde je $\frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$, $\tau=\varepsilon t$ sporopromenljivo vreme kao i ranije, m i c konstante.Na osnovu teorije iz prethodnog člana posmatraćemo osnovno rezonantno stanje za $p = q = 1$,pa je rešenje u prvoj aproksimaciji

$$x=a\cos(\theta+\varphi) \tag{2}$$

u kome su $a(t)$ i $\varphi(t)$ funkcije vremena,koje treba odrediti iz diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitudu i fazu

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{2\pi m\omega}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\sin\psi\,d\psi-\frac{\varepsilon E(\tau)}{m[\omega+\nu(\tau)]}\cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega-\nu(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi m\omega a}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\cos\psi\,d\psi+\frac{\varepsilon E(\tau)}{ma[\omega+\nu(\tau)]}\sin\varphi \tag{3}$$

u kojima je

$$f_0(a,\psi)=f(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi) \tag{4}$$

Ako uvedemo ekvivalentni dekrement prigušivanja i ekvivalentnu sopstvenu kružnu frekvenciju slobodnih oscilacija, prema formulama

$$\delta_e(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi m\omega a}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\sin\psi\, d\psi$$

$$\omega_e^2(a) = \frac{c}{m} - \frac{\varepsilon}{\pi m a}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\cos\psi\, d\psi \qquad (5)$$

diferencijalne jednačine prve aproksimacije možemo napisati u sledećem obliku

$$\frac{da}{dt} = -\delta_e(a)a - \frac{\varepsilon E(\tau)}{m[\omega+\nu(\tau)]}\cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_e(a) - \nu(\tau) + \frac{\varepsilon E(\tau)}{ma[\omega+\nu(\tau)]}\sin\varphi \qquad (6)$$

Kao primer za ovaj slučaj posmatraćemo nelinearni oscilator, čije se kretanje opisuje diferencijalnom jednačinom

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx + dx^3 = F_0\sin\theta \qquad (7)$$

gde je x generalisana koordinata, koja odredjuje položaj sistema, t vreme, m masa, b koeficijent otporne sile, $F_e = cx + dx^3$ nelinearna restituciona sila, F_0 amplituda poremećajne sile, θ neka funkcija **vremena**. Radi uprošćenja uvedimo bezdimenzione koordinatu x_1 i vreme t_1 prema formulama

$$x_1 = \sqrt{\frac{d}{c}}\, x \quad ; \qquad t_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}\, t \qquad (8)$$

i jednačinu (7) napišimo u obliku

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} + \delta\frac{dx_1}{dt_1} + x_1 + x_1^3 = F_1\sin\theta \qquad (9)$$

gde su uvedene oznake

$$\delta = \frac{b}{\sqrt{mc}} \qquad F_1 = \frac{F_0}{c}\sqrt{\frac{d}{c}} \qquad (10)$$

Pretpostavimo da su otporna sila i amplituda spoljašnje sile,a takodje i nelinearni član restitucione sile dovoljno mali,tada je

$$\varepsilon f\left(x_1,\frac{dx_1}{dt}\right)=-\left[\delta\frac{dx_1}{dt}+x_1^3\right] \tag{11}$$

pa saglasno izrazima (3) nalazimo za prvu aproksimaciju rešenja

$$x=a\cdot\cos(\theta+\varphi) \tag{12}$$

gde su $a(t)$ i $\varphi(t)$ funkcije vremena koje se odredjuju iz sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt_1}&=-\frac{\delta a}{2}-\frac{F_1}{1+\nu(\tau)}\cos\varphi\\ \frac{d\varphi}{dt_1}&=1-\nu(\tau)+\frac{3a^2}{8}+\frac{F_1}{a[1+\nu(\tau)]}\sin\varphi\end{aligned} \tag{13}$$

gde je $\nu(\tau)=\dfrac{d\theta}{dt_1}$ neka funkcija vremena,koja karakteriše promenu trenutne frekvencije.Pomoću jednačina (13) može se izučiti stacionarni i nestacionarni oscilatorni proces.Za dobijanje u prvoj aproksimaciji stacionarnih vrednosti amplitude i frekvencije potrebno je u sistemu diferencijalnih jednačina (13) izjednačiti desne strane sa nulom,odakle se dobija

$$(1+\nu(\tau)\approx 2)$$

$$\begin{aligned}&\delta a-F_1\cos\varphi=0\\ &a\left[\left(1+\tfrac{3}{8}a^2\right)^2-\nu^2\right]+F_1\sin\varphi=0\end{aligned} \tag{14}$$

Eleminisanjem faze φ dobijamo sledeću zavisnost izmedju amplitude stacionarnih oscilacija i kružne frenvencije spoljašnje sile

$$a^2\left\{\left[\left(1+\tfrac{3}{8}a^2\right)^2-\nu^2\right]^2+\delta^2\right\}=F_1^2 \tag{15}$$

iz koje nalazimo

$$\nu=\sqrt{\left(1+\tfrac{3}{8}a^2\right)^2\pm\sqrt{\frac{F_1^2}{a^2}-\delta^2}} \tag{16}$$

Pomoću ove zavisnosti sastavljamo rezonantnu krivu stacionarnog rezonantnog stanja koja je prikazana na slici br. 22,a takodje i skeletnu krivu odredjenu sa

$$\nu = 1 + \frac{3}{8} a^2$$

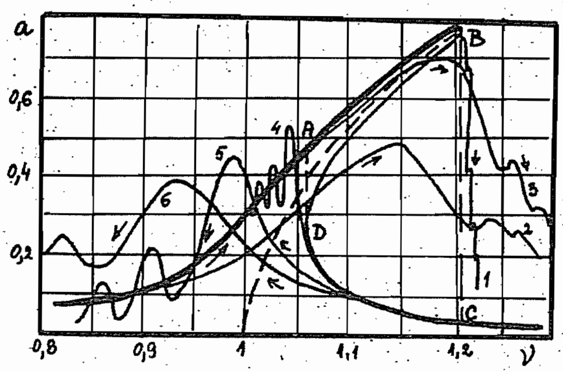
i prikazanu na istoj slici crtkastom linijom. Sabilnom stacionarnom rezonantnom stanju odgovara deo krive izvučen punom linijom, a nestabilnom deo krive izvučen tankom linijom. Sa slike se vidi da pri porastu frekvencije u tački B se javlja skok amplitude na vrednost u tački C,koja je manja od vrednosti u tački B. Pri smanjenju frekvencije spoljašnje sile javlja se skok u tački D od manje na veću vrednost amplitude u tački A. Porast i opadanje frekvencije je ovde upotrebljeno u smislu veoma spore promene,tako da se sistem može posmatrati kao stacionarni. Za nestacionarni slučaj potrebno je za zadatu promenu kružne frekvencije spoljašnje sile $\nu(\tau)$,numerički integraliti sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije (13) i nacrtati rezonantne amplitudno-frekventne krive u funkciji promene frekvencije u smeru porasta ili opadanja frekvencije. Integraljenje sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije (13) treba izvršiti za ceo interval vremena za koji se menja frekvencija od trenutka kada je frekvencija spoljašnje sile dovoljno bliska sopstvenoj kružnoj frekvenciji sistema i ne nalazi se u rezonantnoj zoni, pa do potpunog izlaska iz rezonantne zone.

Posmatraćemo slučaj linearne promene

$$\nu(\tau) = \nu_0 + \beta t$$

za $\beta > 0$ kružna frekvencija raste,a za $\beta < 0$ opada. Brzina prolaska kroz rezonantno stanje zavisi od koeficijenta β . Za vrlo malu apsolutnu vrednost β dobija se kriva koja je sasvim bliska apsolutnoj krivoj stacionarnog rezonantnog stanja. Na slici br. 22 su prikazane rezonantne krive nestacionarnog rezonantnog stanja za tri brzine promene frekvencije spoljašnje sile i za slučaj tvrde karakteristike nelinearne restitucione sile.

Pri prolasku kroz rezonantno stanje suštinski uticaj na rezonantne amplitudno-frekventne krive pokazuje brzina promene frekvencije spoljašnje sile. Pri njenom povećanju maksimumi amplituda se snižavaju,a "Oštrina" prvog maksimuma amplitude se umanjuje. Posle postizanja maksimuma se uočavaju bijenja amplituda pri čemu što se brže ostvaruje promena frekvencije spoljašnja sile pri prolasku kroz rezonantnu vrednost tim se karakterističnije izražavaju posle prvog maksimuma amplitude nekoliko maksimuma manjih veličina. Prvi maksimumi amplituda su manji ukoliko je brža promena frekvencije spoljašnje sile.



Slika br. 22

Kako pri stacionarnom režimu u sistemu uočavamo skok amplituda to pri prolasku kroz rezonantno stanje kružne frekvencije spoljašnje sile se uočavaju nagle promene amplitude naročito za spori prolazak kroz rezonantno stanje. Maksimumi amplitude se ne javljaju u momentu poklapanja kružne frekvencije poremećajne sile sa sopstvenom kružnom frekvencijom sistema nego kasnije ili ranije što zavisi od brzine promene kružne frekvencije spoljašnje sile, karaktera nelinearnosti, a takodje i od smera porasta - opadanja - promene kružne frekvencije spoljašnje sile.

V. NELINEARNE OSCILACIJE SISTEMA SA VIŠE STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA

V.1. JEDNOFREKVENTNE I VIŠEFREKVENTNE OSCILACIJE SISTEMA SA VIŠE STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA

Oscilatorni sistemi sa više stepeni slobode oscilovanja se sreću u mnogim problemima savremene tehnike. Oscilacije u takvim sistemima sa više stepeni slobode oscilovanja su više frekventne jer su kombinacije većeg broja prostih (kod linearnih normalnih) oscilacija. U specijalnim početnim uslovima oscilatorni sistem sa više stepeni slobode oscilovanja može da osciluje sa samo jednom frekvencijom. Takodje pored početnih uslova dejstvo disipativnih sila i spoljašnjih poremećajnih sila dovodi do brzog isčezavanja viših harmonika, tj. oblika oscilovanja kojima odgovaraju više frekvencije, i do uspostavljanja osnovnog oblika oscilovanja sa kružnom frekvencijom bliskom frekvenciji spoljašnje poremećajne sile. Zato je u specijalnim početnim uslovima ili pri dejstvu spoljašnje perturbacione sile sa samo jednom kružnom frekvencijom, celishodno pri proučavanju razmatrati jednofrekventni režim oscilovanja u kome sve tačke sistema osciluju sa jednom i samo jednom kružnom frekvencijom. Na celishodnost izučavanja jednofrekventnih oscilacija u sistemima sa više i beskonačno mnogo stepeni slobode oscilovanja ukazao je H.H. Боголюбов.

Princip jednofrekventnosti bitno uprošćava i nalaženje asimptotskih aproksimacija rešenja i svodi zadatak na integraljenje samo dve diferencijalne jednačine prvog reda u odnosu na sporopromenljive amplitudu i fazu jednofrekventnih oscilacija. Pri tome se mogu zanemariti početni uslovi, zato što u uslovima rezonantnog stanja sistema podržavaju se i razvijaju oscilacije u odredjenom obliku dinamičke ravnoteže, koji odgovara sopstvenoj rezonantnoj kružnoj frekvenciji, a na račun spoljašnjih poremećajnih sila. Ovde je upotrebljen izraz oblik dinamičke ravnoteže, pod kojim podrazumevamo oblik oscilovanja sistema sa jednom sopstvenom frekvencijom i njoj odgovarajućom sopstvenom funkcijom i amplitudom.

Drugi oblici (nerezonantnih) sopstvenih oscilacija odredjeni početnim uslovima u realnim sistemima prigušiće se (isčeznuće) pod uticajem disipativnih sila. Zato u uslovima rezonantnog stanja sistema i pri dejstvu disipativnih sila oscilacije u sistemima sa mnogo stepeni slobode oscilovanja proizilaze kao jednofrekventne u odredjenom obliku dinamičke ravnoteže bliskom jednom od oblika glavnih (normalnih) oscilacija. Da na kraju naglasimo i to da se sve ovde rečeno odnosi na nelinearne sisteme sa više stepeni slobode oscilovanja koji su bliski linearnim. U opštem slučaju nelinearnosti ne meogu se izvući neki opštijeg karaktera zaključci.

V.2. JEDNOFREKVENTNE OSCILACIJE NELINEARNIH SISTEMA SA VIŠE STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA I SA SPOROPROMENLJIVIM PARAMETRIMA

Proučimo oscilacije sistema sa n stepeni slobode oscilovanja, čije su kinetička i potencijalna energija

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\tau)\dot{q}_i\dot{q}_k = \frac{1}{2}(\dot{q})\mathbb{A}\{\dot{q}\} \qquad \mathbb{A} = (a_{ik}) \tag{1}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}(\tau)q_i q_k = \frac{1}{2}(q)\mathbb{C}\{q\} \qquad \mathbb{C} = (c_{ik}) \tag{2}$$

gde su q_j $(j = 1,2,3,\dots,n)$ generalisane koordinate, $\tau=\varepsilon t$ sporopromenljivo vreme ili "lagano" promenljivo vreme, ε mali pozitivan parametar, $a_{ik}(\tau) = a_{ki}(\tau)$ inercioni koeficijenti, $c_{ik}(\tau) = c_{ki}(\tau)$ kvazielastični koeficijenti (uspostavljanja), neke funkcije sporo promenljivog vremena τ, koje imaju izvode proizvoljnog reda po sporo promenljivom vremenu.

Pretpostavićemo da su na konačnom intervalu vremena $0 \le t \le \mathcal{L}/\varepsilon$, gde je $T = \mathcal{L}/\varepsilon$, $\mathcal{L}$ može biti izabrani broj proizvoljno veliki za proizvoljno male vrednosti parametra ε, kvadratne forme kinetičke i potencijalne energije pozitivno definitne.

Neka se oscilatorni sistem nalazi pod dejstvom malog poremećaja, koji je odredjen generalisanim silama:

$$\varepsilon Q_i(\tau, \theta, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \qquad (i = 1,2,\dots,n) \tag{3}$$

periodičnim po argumentu θ s periodom 2π, koje se mogu razviti u konačne Fourier-ove redove sa koeficijentima u obliku polinoma po q_i i $\dot{q}_i$. Pretpostavljamo da je $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ i da su funkcije $\nu(\tau)$, $Q_i(\tau,\theta,q_1,\dots q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$ neograničeno puta diferencijabilne po τ na intervalu vremena $0 \le \tau \le \mathcal{L}$.

Pomoću Lagrange-ovih jednačina druge vrste sastavljamo sistem od n nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(\tau)\dot{q}_i\right\} + \sum_{i=1}^{n} c_{ik}(\tau)\, q_i = \varepsilon\, Q_k(\tau,\theta,q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n) \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{4}$$

Sistem jednačija (4) nazvaćemo sistemom jednačina poremećenog oscilovanja. Uporedo sa ovim sistemom proučimo i sistem jednačina

$$\sum_{i=1}^{n}\left[a_{ik}(\tau)\ddot{q}_i + c_{ik}(\tau)\, q_i\right] = 0 \qquad (k=1,2,\dots,n) \tag{5}$$

neporemećenog oscilovanja, koji dobijamo iz sistema (4) stavljajući da je $\varepsilon = 0$, pri čemu sada τ nije više jednako εt, nego se posmatra kao neki parametar koji je konstantan. Sistem diferencijalnih jednačina neporemećenog oscilovanja je sa homogenim linearnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima i njegovo rešenje nalazimo u obliku

$$q_i^{(s)} = A_i^{(s)}(\tau)\, a_s \cos\left[\omega_s(\tau)t + \alpha_s\right] \qquad (i,s = 1,2,3,\dots,n) \tag{6}$$

gde su $\omega_s(\tau)$ (s = 1,2,3,...,n) sopstvene frekvencije koje se odredjuju iz frekventne jednačine

$$D(\omega^2) = \left|-a_{ik}(\tau)\omega_s^2(\tau) + c_{ik}(\tau)\right| = 0 \quad ; \quad (i,k,s = 1,2,3,\dots n) \tag{7}$$

a $A_i^{(s)}(\tau)$ (i,s = 1,2,3,...,n) su normalne funkcije, amplitude sopstvenih vektira, koje se javljaju kao netrivijalna rešenja sistema homogenih algebarskih jednačina oblika

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{-a_{ik}(\tau)\,\omega_s^2(\tau) + c_{ik}(\tau)\right\} A_i^{(s)}(\tau) = 0 \qquad (s,k = 1,2,\dots,n) \tag{8}$$

i imaju svojstvo ortogonalnosti

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\tau) A_i^{(s)}(\tau) A_k^{(r)}(\tau) = 0 \qquad (s \neq r)$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}(\tau) A_i^{(s)}(\tau) A_k^{(r)}(\tau) = 0 \qquad (s \neq r) \tag{9}$$

U ovim izrazima od (5) do (9) veličine $A_k^{(r)}(\tau)$, $\omega_s(\tau)$, $A_i^{(s)}(\tau)$, $c_{ik}(\tau)$ i $a_{ik}(\tau)$ zavise od parametra τ ,dok su a_s i α_s realne konstante.Ako sada u izrazima (6) i diferencijalnim jednačinama (5) stavimo da τ nije više parametar,nego $\tau = \varepsilon t$ to će funkcije (6) samo približno (sa tačnošću do malih veličina reda ε) da zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina (5) i predstavlja će oscilacije sa sporo promenljivom frekvencijom i sopstvenom funkcijom.Pre nego što pristupimo sastavljanju asimptotskih rešenja sistema (4) koja odgovaraju jednofrekventnim oscilacijama (pri dovoljno malom ε) bliskom jednom od normalnih neporemećenih oscilacija (6),pretpostavljamo da su za sve vrednosti sporopromenljivog vremena τ ,koje pripadaju proučavanom intervalu $0 \leq \tau \leq L$ ispunjeni sledeći uslovi:

1° U neporemećenom sistemu,čije se kretanje opisuje sistemom diferencijalnih jednačina (5) moguće su neprigušene harmonijske oscilacije sa frekvencijom $\omega_k(\tau)$,koje zavise samo od dve proizvoljne konstante;

2° Jedinstveno rešenje sistema jednačina (5) koje odgovara ravnotežnom stanju sistema je trivijalno rešenje $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$;

3° Kružna frekvencija $\omega_k(\tau)$,a i ni jedan viši harmonik $2\omega_k(\tau)$, $3\omega_k(\tau)$, $4\omega_k(\tau)$, ... , $m\omega_k(\tau)$ nisu jednaki sopstvenim frekvencijama ω_1 , ω_2 , ... , ω_{k-1} , ω_{k+1} ,... ω_n neporemećenog oscilovanja sistema (ne postoje unutrašnja rezonantna stanja).

Uz pretpostavku da su zadovoljeni navedeni uslovi,rešenje sistema jednačina poremećenog oscilovanja tražimo u obliku

$$q_i = A_i^{(1)}(\tau)\, a \cos\left(\frac{p}{2}\theta+\varphi\right) + \varepsilon u_i^{(1)}\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{2}\theta+\varphi\right) + \varepsilon^2 u_i^{(2)} + \dots \tag{10}$$

$$i = 1,2,3,\dots,n$$

u kojima su $\tau = \varepsilon t$, $u_i^{(\ell)}(\tau, a, \theta, \frac{p}{2}\theta+\varphi)$ periodične funkcije argumenata

θ i $\frac{p}{q}\theta + \varphi = \psi$ sa periodom 2π, a veličine a i φ, amplituda i faza, kao funkcije vremena se odredjuju iz sistema diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \varphi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \varphi) + \cdots \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \varphi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \varphi) + \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

gde su p i q uzajamno prosti, ne veliki brojevi, čiji izbor zavisi od izučavanog rezonantnog stanja; $\omega_1(\tau)$ je koren jednačine (7), $A_i^{(1)}(\tau)$ (i = 1,2,3, ... ,n) amplitude sopstvenih vektora neporemećenog sistema, netrivijalna rešenja algebarskih jednačina (8) za s = 1.

Za rešenje postavljenog zadatka neophodno je naći takve izraze za funkcije

$$u_i^{(l)}(\tau, a, \theta, \psi); \quad A_l(\tau, a, \varphi); \quad B_l(\tau, a, \varphi) \quad \begin{pmatrix} i = 1,2,3,\dots,n \\ l = 1,2,3,\dots,n \end{pmatrix} \tag{12}$$

da asimptotski redovi (10) posle unošenja u njih umesto amplitude i faze, a i φ funkcija vremena odredjenih jednačinama (11), budu rešenje sistema jednačina (4).

Redovi (10) i (11) se mogu sastaviti bez principijelnih teškoća, medjutim sa povećanjem broja članova formule postaju veoma složene i praktično može da se nadje samo nekoliko prvih članova. Zato se redovi (10) i (11) posmatraju kao formalni neophodni za sastavljanje asimptotskih aproksimacija, koje pri fiksiranom broju članova m i $\varepsilon \to 0$, teže ka partikularnom rešenju sistema diferencijalnih jednačina neporemećenog oscilovanja.

Kako integracija pomoću redova (10) uvodi samo dve proizvoljne integracione konstante, to mi pomoću redova (10) možemo dobiti asimptotsku aproksimaciju ne za opšte rešenje, koje treba da zavisi od 2n proizvoljnih integracionih konstanti, već za neku dvoparametarsku familiju partikularnih rešenja.

U nelinearnim sistemima princip superpozicije ne važi pa ne možemo sastaviti opšte rešenje polazeći od različitih partikularnih rešenja. U većem broju važnih slučajeva familija partikularnih rešenja zadovoljava fizički smisao procesa, pa je onda od interesa da se izuči baš ta familija rešenja. Diferenciranjem jednačina (11) dobijamo

$$\frac{d^2a}{dt^2}=\varepsilon\left\{\left[\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\right\}+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1+\frac{\partial A_1}{\partial\psi}B_1+\frac{\partial A_1}{\partial\tau}+\left[\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_2}{\partial\psi}\right\}+\varepsilon^3\ldots\ldots+\ldots \tag{13}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=\varepsilon\left\{\frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}-\frac{p}{q}\frac{d\nu(\tau)}{d\tau}+\left[\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\right\}+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1+\frac{\partial B_1}{\partial\psi}B_1+\frac{\partial B_1}{\partial\tau}+\left[\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\right\}+\varepsilon^3\ldots \tag{14}$$

Posle toga diferencirajući izraz (10) i uzimajući u obzir jednakosti (11),(13) i (14) nalazimo izraze za $\frac{dq_i}{dt}$ i $\frac{d^2q_i}{dt}$. Unoseći te izraze u levu stranu sistema diferencijalnih jednačina (4) dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{a_{ik}(\tau)\frac{d^2q_i}{dt^2}+\frac{da_{ik}(\tau)}{d\tau}\frac{dq_i}{dt}+c_{ik}(\tau)q_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}\left[-a_{ik}(\tau)\omega_1^2(\tau)+c_{ik}(\tau)\right]A_i^{(1)}(\tau)\,a\cos\psi+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big\{\varepsilon\Big\langle a_{ik}(\tau)\left[A_i^{(1)}(\tau)\left\langle\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right\rangle\frac{\partial A_1}{\partial\psi}-2A_i^{(1)}(\tau)\,a\,\omega_1(\tau)B_1\right]\cos\psi-$$

$$-a_{ik}(\tau)\left[A_i^{(1)}(\tau)\,a\left\langle\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right\rangle\frac{\partial B_1}{\partial\psi}+2A_i^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)A_1\right]\sin\psi-$$

$$-\left[2\omega_1(\tau)\frac{dA_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}a_{ik}(\tau)+\frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}A_i^{(1)}(\tau)\,a_{ik}(\tau)+\omega_1(\tau)A_i^{(1)}(\tau)\frac{da_{ik}(\tau)}{d\tau}\right]a\sin\psi+$$

$$+a_{ik}(\tau)\left[\nu^2(\tau)\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial\theta^2}+2\nu(\tau)\omega_1(\tau)\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial\theta\partial\psi}+\omega_1^2(\tau)\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial\psi^2}\right]+c_{ik}(\tau)u_i^{(1)}\Big\rangle+$$

$$+\varepsilon^2\Big\langle a_{ik}(\tau)\left[A_i^{(1)}(\tau)\left\langle\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right\rangle\frac{\partial A_2}{\partial\psi}-2A_i^{(1)}(\tau)\,a\,\omega_1(\tau)B_2\right]\cos\psi-$$

$$-a_{ik}(\tau)\left[A_i^{(1)}(\tau)\left\langle\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right\rangle\frac{\partial B_2}{\partial\psi}a+2A_i^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)A_2\right]\sin\psi+$$

$$+a_{ik}(\tau)\left[A_i^{(1)}(\tau)\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1+A_i^{(1)}(\tau)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}B_1+A_i^{(1)}(\tau)\frac{\partial A_1}{\partial\tau}-A_i^{(1)}(\tau)\,a\,B_1^2\right]\cos\psi+ \tag{15}$$

$$-a_{ik}(\tau)\Big[2A_i^{(1)}(\tau)\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1 + A_i^{(1)}(\tau)a\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial a}\mathcal{A}_1 + A_i^{(1)}(\tau)a\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\psi}\mathcal{B}_1 + A_i^{(1)}(\tau)\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\tau}\Big]\sin\psi +$$

$$+\Big[a_{ik}(\tau)\frac{d^2A_i^{(1)}(\tau)}{d\tau^2}a + 2\frac{dA_i^{(1)}}{d\tau}\mathcal{A}_1 a_{ik}(\tau) + \frac{dA_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}\frac{da_{ik}}{d\tau}a + A_i^{(1)}(\tau)\frac{da_{ik}(\tau)}{d\tau}\mathcal{A}_1\Big]\cos\psi -$$

$$-\Big[2\frac{dA_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}a_{ik}(\tau)\mathcal{B}_1 + A_i^{(1)}(\tau)\mathcal{B}_1\frac{da_{ik}(\tau)}{d\tau}\Big]a\sin\psi\Big\rangle + \varepsilon^3\ldots\ldots$$

Zamenom q_i i $\frac{dq_i}{dt}$ u desne strane sistema diferencijalnih jednačina (4) i njihovim razlaganjem u Taylor-ove redove nalazimo

$$\varepsilon Q_{ik} = \varepsilon Q_k(\tau,\theta,q_{10},q_{20},\ldots,q_{n0},\dot q_{10},\ldots,\dot q_{n0}) + \varepsilon^2\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big[u_i^{(1)}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} +$$

$$+\frac{\partial Q_k}{\partial \dot q_i}\Big(\frac{dA_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}a\cos\psi + A_i^{(1)}(\tau)\mathcal{A}_1\cos\psi - A_i^{(1)}(\tau)a\mathcal{B}_1\sin\psi +$$

$$+\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial\theta}\nu(\tau) + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial\psi}\omega_1(\tau)\Big)\Big]\Big\} + \varepsilon^3\ldots \tag{16}$$

u kojima su uvedene oznake

$$q_{io} = A_i^{(1)}(\tau)a\cos\psi\,; \qquad \dot q_{io} = -A_i^{(1)}(\tau)a\omega_1\sin\psi \tag{17}$$

Da bi asimptotski redovi (10) zadovoljavali sistem diferencijalnih jednačina (4) sa tačnošću do malih veličina reda ε potrebno je izjednačiti u izrazima (15) i (16) koeficijente uz jednake stepene do članova (m-1)-og reda. U rezultatu dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n}\Big\{a_{ik}(\tau)\Big[\omega_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\psi} + \nu(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta}\Big]^{(2)}u_i^{(1)} + c_{ik}(\tau)u_i^{(1)}\Big\} = Q_{ko}(\tau,\theta,a,\psi) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big\{a_{ik}(\tau)\Big\langle A_i^{(1)}(\tau)\Big[\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\Big]\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\psi} - 2A_i^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)a\mathcal{B}_1\Big\rangle\cos\psi -$$

$$-a_{ik}(\tau)\Big\langle A_i^{(1)}(\tau)a\Big[\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\Big]\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\psi} + 2A_i^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)\mathcal{A}_1\Big\rangle\sin\psi - \tag{18}$$

$$-\left[2\omega_1(\tau)\frac{dA_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}a_{ik}(\tau)+\frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}A_i^{(1)}(\tau)a_{ik}(\tau)+\omega_1(\tau)A_i^{(1)}(\tau)\frac{da_{ik}}{d\tau}\right]a\sin\psi\Big\}\equiv$$

$$\equiv G_{k0}(\tau,\theta,a,\psi)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Big\{a_{ik}(\tau)\left[\omega_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\psi}+\nu(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]^{(2)}u_i^{(2)}+c_{ik}(\tau)u_i^{(2)}\Big\}=\Phi_{k0}(\tau,\theta,a,\psi)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big\{a_{ik}(\tau)\left[A_i^{(1)}(\tau)\left\langle\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right\rangle\frac{\partial A_2}{\partial\psi}-2A_i^{(1)}(\tau)a\omega_1(\tau)B_2\right]\cos\psi-$$

$$-a_{ik}(\tau)\left[A_i^{(1)}(\tau)\left\langle\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right\rangle\frac{\partial B_2}{\partial\psi}a+2A_i^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)A_1\right]\sin\psi+$$

$$+a_{ik}(\tau)\left[A_i^{(1)}(\tau)\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1+A_i^{(1)}(\tau)\frac{\partial A_1}{\partial\tau}-A_i^{(1)}(\tau)aB_1^2\right]\cos\psi-$$

$$-a_{ik}(\tau)\left[2A_i^{(1)}(\tau)A_1B_1+A_i^{(1)}(\tau)a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1+A_i^{(1)}(\tau)a\frac{\partial B_1}{\partial\psi}B_1+\right.$$

$$\left.+A_i^{(1)}(\tau)\frac{\partial B_1}{\partial\tau}\right]\sin\psi+\left[a_{ik}(\tau)\frac{d^2A_i^{(1)}(\tau)}{d\tau^2}a+\frac{dA_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}\frac{da_{ik}(\tau)}{d\tau}a+\right.$$

$$\left.+A_i^{(1)}(\tau)\frac{da_{ik}(\tau)}{d\tau}A_1\right]\cos\psi-\left[2\frac{dA_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}a_{ik}(\tau)B_1+\right.$$

$$\left.+A_i^{(1)}(\tau)\frac{da_{ik}(\tau)}{d\tau}B_1\right]a\sin\psi\Big\}\equiv\Phi_{k0}(\tau,\theta,a,\psi) \tag{19}$$

. . . . $k=1,2,3,\ldots$

U jednačinama (18) i (19) uvedene su oznake

$$Q_{k0}(\tau,\theta,a,\psi)=Q_{k0}(\tau,\theta,q_{10},\ldots,q_{n0},\dot q_{10},\ldots,\dot q_{n0}) \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{k0}(\tau,\theta,a,\psi) = \sum_{i=1}^{n}\Big[&\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}u_i^{(1)} + \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\Big\langle \frac{dA_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}\, a\cos\psi + A_i^{(1)}(\tau)\mathcal{A}_1\cos\psi -\\ &- A_i^{(1)}(\tau)\, a\,\mathcal{B}_1\sin\psi\Big\rangle + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial\theta}\nu(\tau) + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial\psi}\omega_1\Big] - \sum_{i=1}^{n}\Big\{a_{ik}(\tau)\Big[2\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial\tau\partial\psi}\omega_1(\tau) +\\ &+2\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial\tau\partial\theta}\nu(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial a\partial\theta}\nu(\tau)\mathcal{A}_1 + 2\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial\theta\partial\psi}\nu(\tau)\mathcal{B}_1 +\\ &+2\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial\psi^2}\omega_1(\tau)\mathcal{B}_1 + 2\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial a\partial\psi}\omega_1(\tau)\mathcal{A}_1 + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial\psi}\Big\langle\omega_1(\tau)-\frac{p}{2}\nu(\tau)\Big\rangle\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\psi} +\\ &+\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a}\Big\langle\omega_1(\tau)-\frac{p}{2}\nu(\tau)\Big\rangle\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\psi} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial\theta}\frac{d\nu(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial\psi}\frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}\Big] +\\ &+\frac{da_{ik}(\tau)}{d\tau}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial\theta}\nu(\tau) + \frac{da_{ik}(\tau)}{d\tau}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial\psi}\omega_1(\tau)\Big\}\end{aligned} \tag{21}$$

$(k = 1,2,3,\ldots\ldots n)$

Desne strane jednačina (18) kao periodične funkcije argumenata θ i ψ sa periodom 2 , pretstavićemo u vidu Fourier-ovih redova

$$G_{k0}(\tau,\theta,a,\psi) = \sum_{l,m} g_k^{(l,m)}(\tau,a)\, e^{i(l\theta+m\psi)} \tag{22}$$

gde su $g_k^{(l,m)}(\tau,a)$ poznati koeficijenti razvoja

$$g_k^{(lm)}(\tau,a) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} G_{k0}(\tau,\theta,a,\psi)\, e^{-i(l\theta+m\psi)}\, d\theta\, d\psi \tag{23}$$

Nepoznate funkcije $u_i^{(1)}(\tau,a,\theta,\psi)$ tražićemo u obliku Fourier-ovog reda

$$u_i^{(1)}(\tau,a,\theta,\psi) = \sum_{l,m} K_{(i1)}^{(lm)}(\tau,a)\, e^{i(l\theta+m\psi)} \tag{24}$$

gde su $K_{(i1)}^{(lm)}(\tau,a)$ nepoznati koeficijenti razvoja koje treba odrediti. Unesemo li izraze (22), (24) i izvode $\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial \theta \partial \psi}$ i $\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial \psi^2}$ u levu i desnu stranu jednačine (18) i ako izjednačimo koeficijente uz jednake harmonike, to ćemo za odredjivanje koeficijenata $K_{(i1)}^{(\ell m)}(\tau, a)$ da dobijemo sistem algebarskih jednačina

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ -a_{ik}(\tau) \left[\omega_1 m + \nu \ell \right]^2 + c_{ik}(\tau) \right\} K_{(i1)}^{(\ell m)}(\tau, a) = g_k^{(\ell m)}(\tau, a) \qquad (25)$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Da bi smo rešili taj sistem jednačina koristićemo normalne koordinate, pretpostavljajući $K_{(i1)}^{(\ell m)}(\tau, a)$ u obliku

$$K_{(i1)}^{(\ell m)}(\tau, a) = \sum_{s=1}^{n} c_s^{(\ell m)}(\tau, a)\, A_i^{(s)}(\tau) \qquad (26)$$

gde su $c_s^{(\ell m)}(\tau, a)$ nepoznati koeficijenti, koje treba odrediti. Unesemo sada izraz (26) u sistem jednačina (25), a imajući u vidu sistem jednačina (8), dobićemo

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(\tau) \left\{ \omega_s^2(\tau) - \left[\omega_1(\tau) m + \nu(\tau) \ell \right]^2 \right\} c_s^{(\ell m)} A_i^{(s)}(\tau) = g_k^{(\ell m)}(\tau, a) \qquad (27)$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Pomnožimo sada jednačine ovog sistema odgovarajućim $A_k^{(s_1)}(\tau)$ i izvršimo sabiranje po indeksu k , pa ćemo dobiti

$$\sum_{s=1}^{n} c_s^{(\ell m)}(\tau, a) \left\{ \omega_s^2(\tau) - \left[\omega_1(\tau) m + \nu(\tau) \ell \right]^2 \right\} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\tau) A_i^{(s)}(\tau) A_k^{(s_1)}(\tau) = \sum_{k=1}^{n} g_k^{(\ell m)}(\tau, a) A_k^{(s_1)}(\tau) \qquad (28)$$

Imajući u vidu ortogonalnost normalnih funkcija (9) i uvodeći oznaku

$$m_s(\tau) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\tau) A_i^{(s)}(\tau) A_k^{(s)}(\tau) \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (29)$$

izračunavamo nepoznate koeficijente

$$c_s^{(\ell m)}(\tau, a) = \frac{\sum_{k=1}^{n} g_k^{(\ell m)}(\tau, a)\, A_k^{(s)}(\tau)}{m_s(\tau) \left\{ \omega_s^2(\tau) - \left[\omega_1(\tau) m + \nu(\tau) \ell \right]^2 \right\}} \qquad (30)$$

pa su funkcije $u_i^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ sada oblika

$$u_i^{(1)}(\tau,a,\theta,\psi)=\sum_{\ell,m}\sum_{s=1}^{n}A_i^{(s)}(\tau)\,\frac{\sum\limits_{k=1} g_k^{(\ell m)}(\tau,a)\,A_k^{(s)}(\tau)\,e^{i\{\ell\theta+m\psi\}}}{m_s(\tau)\left\{\omega_s^2(\tau)-\left[\omega_1(\tau)m+\nu(\tau)\ell\right]^2\right\}} \tag{31}$$

Kako smo za funkcije $u_i^{(1)}(\tau,a,\theta,\psi)$ pretpostavili da su periodične po argumentima θ i ψ perioda 2π, to one moraju imati konačne vrednosti, jer konstante izučavanog sistema mogu uzimati proizvoljno velike vrednosti. Zato u desnim stranama izraza (31) ne smeju da postoje članovi čiji se imenioci za neke vrednosti parametra - sporopromenljivog vremena τ mogu izjednačiti sa nulom. To se može dogoditi za

$$m\,\omega_1(\tau)+\ell\,\nu(\tau)=\pm\,\omega_1(\tau) \tag{32'}$$

ili za

$$\ell q+p(m\pm 1)=0 \tag{32}$$

zato izrazi (31) imaju konačne vrednosti kada je zadovoljen uslov

$$\sum_{k=1}^{n} g_k^{(\ell m)}(\tau,a)\,A_k^{(s)}(\tau)\,e^{i\{\ell\theta+m\psi\}}=0 \qquad [\ell q+p(m\pm 1)=0] \tag{33}$$

identički po a i τ u proučavanoj oblasti intervalu vremena. Pri ovome je nužno naglasiti da nam je oblast promene sporo promenljivog vremena τ unapred poznata, dok oblast promene a nije unapred poznata. Zato je neophodno pre nego što se reši sistem jednačina, oceniti moguću oblast promene funkcije a i u toj oblasti proveriti da li je zadovoljen uslov (33). Imajući u vidu (33), (23) i oznake (20) i (21) možemo sastaviti izraz za traženu funkciju

$$u_i^{(1)}(\tau,a,\theta,\psi)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{\ell,m\\ [\text{za } s=1\ \ \ell q+(m\pm 1)p\neq 0]}}\sum_{s=1}^{n}A_i^{(s)}(\tau)\,e^{i\{\ell\theta+m\psi\}}\times$$

$$\times\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}Q_k(\tau,a,\theta,\psi)\,A_k^{(s)}(\tau)\,e^{-i\{\ell\theta+m\psi\}}\,d\theta\,d\psi}{m_s(\tau)\left\{\omega_s^2(\tau)-\left[m\,\omega_1(\tau)+\ell\,\nu(\tau)\right]^2\right\}} - \tag{34}$$

$$-2\omega_1(\tau)a\sum_{s=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial E_\kappa(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\right]_{\dot{q}_i=A_i^{(1)}(\tau)} A_i^{(s)}(\tau)}{m_s(\tau)\left[\omega_s^2(\tau)-\omega_1^2(\tau)\right]}\sin\psi$$

gde je uvedena oznaka

$$m_s(\tau)=\sum_{i,\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}(\tau)A_i^{(s)}(\tau)A_\kappa^{(s)}(\tau)=2E_\kappa\left[A_i^{(s)}(\tau)\right]$$

Uvedimo oznake za indekse $\ell=-\sigma p$, $m=\sigma q\pm 1$ i pomoću njih predstavimo jednačinu (33) u obliku

$$\sum_{k=1}^{n}g_k^{(-\sigma p,\sigma q\pm 1)}(\tau,a)A_\kappa^{(s)}(\tau)e^{\pm i\psi+i\sigma q\varphi}=0 \tag{35}$$

pa u njoj izjednačimo koeficijente uz $\cos\psi$ i $\sin\psi$ sa nulom, tako da dobijemo sistem jednačina

$$\left[\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial\psi}-2a\omega_1(\tau)\mathcal{B}_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\varphi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{K=1}^{n}Q_{k0}(\tau,a,\theta,\psi)A_\kappa^{(1)}(\tau)e^{-i\sigma q\varphi}\cos\psi\, d\theta\, d\psi$$

(36)

$$\left[\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial\psi}+2\omega_1(\tau)\mathcal{A}_1=-\frac{a}{m_1(\tau)}\frac{d\left[m_1(\tau)\omega_1(\tau)\right]}{d\tau}-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\varphi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{K=1}^{n}Q_{K0}(\tau,a,\theta,\psi)A_\kappa^{(1)}(\tau)e^{-i\sigma q\varphi}\sin\psi\, d\theta\, d\psi$$

Iz sistema ovih parcijalnih diferencijalnih jednačina nalazimo nepoznate funkcije $\mathcal{A}_1(\tau,\alpha,\varphi)$ i $\mathcal{B}_1(\tau,a,\varphi)$ kao partikularna rešenja metodom neodredjenih koeficijenata

$$\mathcal{A}_1(\tau,a,\varphi)=-\frac{a}{2\omega_1(\tau)m_1(\tau)}\frac{d\left[\omega_1(\tau)m_1(\tau)\right]}{d\tau}+$$

$$+\frac{2}{m_1(\tau)}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\varphi}\frac{\left[q\omega_1(\tau)-p\nu(\tau)\right]i\sigma c_\sigma(\tau,a)+2\omega_1(\tau)d_\sigma(\tau,a)}{4\omega_1^2(\tau)-\left[q\omega_1(\tau)-p\nu(\tau)\right]^2\sigma^2} \tag{37}$$

$$\mathcal{B}_1(\tau,a,\varphi)=\frac{2}{a\,m_1(\tau)}\sum_{\sigma} e^{i\sigma q\varphi}\frac{[q\omega_1(\tau)-p\nu(\tau)]i\sigma d_\sigma(\tau,a)-2\omega_1(\tau)c_\sigma(\tau,a)}{4\omega_1^2(\tau)-[q\omega_1(\tau)-p\nu(\tau)]^2\sigma^2} \tag{37'}$$

gde je označeno

$$\begin{aligned} c_\sigma(\tau,a) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n} Q_{k0}(\tau,a,\theta,\psi)A_k^{(1)}(\tau)e^{-i\sigma q\varphi}\cos\psi\,d\theta\,d\psi \\ d_\sigma(\tau,a) &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n} Q_{k0}(\tau,a,\theta,\psi)A_k^{(1)}(\tau)e^{-i\sigma q\varphi}\sin\psi\,d\theta\,d\psi \end{aligned} \tag{38}$$

Na isti način iz sistema jednačina (19) mogu se odrediti nepoznate funkcije $u_i^{(2)}(\tau,a,\theta,\psi)$, a iz uslova da te funkcije ne sadrže sabirke čiji su imenioci jednaki nuli u nekom trenutku vremena, mogu se odrediti napoznate funkcije $\mathcal{A}_2(\tau,a,\varphi)$ i $\mathcal{B}_2(\tau,a,\varphi)$ tj. iz uslova

$$\sum_{k=1}^{n} g_{k2}^{(\ell m)}(\tau,a)\,A_k^{(1)}(\tau)=0 \qquad [k=1;\ \ell q+p(m\pm1)=0] \tag{39}$$

gde su $g_{k2}^{(\ell m)}(\tau,a)$ koeficijenti razvoja Fourier-ovog reda funkcije (21).

Sada je postupak sastavljanja prve asimptotske aproksimacije sledeći. Prvo izučavamo sistem diferencijalnih jednačina neporemećenog oscilovanja (5) i iz frekventne jednačine (7) izračunavamo sopstvene kružne frekvencije a iz sistema algebarskih jednačina (8) normalne funkcije (amplitude sopstvenih vektora). Zatim odredimo p i q zavisno od toga kakvo rezonantno stanje posmatramo. Dalje proverimo da li su zadovoljeni postavljeni uslovi od jedan do tri za sastavljanje asimptotskih aproksimacija i na kraju kao prvu aproksimaciju rešenja usvajamo

$$q_i(t)=A_i^{(1)}(\tau)\,a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\varphi\right) \tag{40}$$

u kojoj su a i φ neke funkcije vremena, koje se odredjuju iz sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \mathcal{A}_1(\tau, a, \varphi)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1(\tau) - \frac{p}{2}\nu(\tau) + \varepsilon \mathcal{B}_1(\tau, a, \varphi) \qquad (41)$$

u kojima su funkcije $\mathcal{A}_1(\tau,a,\varphi)$ i $\mathcal{B}_1(\tau,a,\varphi)$ partikularna periodična po argumentu φ ,rešenja sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (36) odredjena formulama (37) i (38).

Tako je sastavljanje prve asimptotske aproksimacije rešenja koje odgovara jednofrekventnom režimu oscilovanja svedeno na integraljenje sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije (41),koje se u opštem slučaju ne integrale u zatvorenom obliku,već preostaje da se numerički integrale.Ovde je prednost postignuta u tome što je znatno prostije numerički integraliti jednačine prve aproksimacije,koje odredjuju amplitudu i fazu, $a(t)$ i $\varphi(t)$ negoli neposredno jednačine kretanja,koje odredjuju $q_i(t)$ oscilatorne veličine,čija je obvojnica $a(t)$.

Ova metoda u literaturi je poznata kao metoda Mitropoljskog (Ю.А. Митропольский).

V.3. SASTAVLJANJE ASIMPTOTSKE APROKSIMACIJE REŠENJA BEZ PRETHODNOG SASTAVLJANJA TAČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA OSCILOVANJA . INTERPRETACIJA POMOĆU ENERGIJE

Izložena metoda u članu 2 ove glave, nalaženja prve asimptotske aproksimacije rešenja i jednačina prve aproksimacije dozvoljava prostu energijsku interpretaciju, pomoću koje možemo direktno da sastavimo jednačine prve aproksimacije bez prethodnog sastavljanja jednačina oscilovanja.

Zato je potrebno da nadjemo izraz virtualnog rada, koji bi izvršile poremećajne sile $\varepsilon Q_k(\tau,\theta,q_1,\ldots,q_n,\dot q_1,\ldots,\dot q_n)$ u režimu harmonijskih oscilacija

$$q_{i0}=A_i^{(1)}(\tau)\,a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\varphi\right) \tag{1}$$

$$\dot q_{i0}=-A_i^{(1)}(\tau)\,a\,\omega_1(\tau)\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\varphi\right) \tag{2}$$

na virtualnim pomeranjima

$$\delta q_{i0}=A_i^{(1)}(\tau)\left\{\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\varphi\right)\delta a-a\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\varphi\right)\delta\varphi\right\} \tag{3}$$

koja odgovaraju varijacijama amplitude i faze prve normalne oscilacije. Ovde parametar τ posmatramo kao konstantni, a u konačnim formulama i diferencijalnim jednačinama prve aproksimacije stavljamo da je $\tau=\varepsilon t$.

Sa tačnošću do malih veličina [drugog reda] imamo za virtualni rad izraz

$$\delta W = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} Q_{ko}\left(\tau,\theta,a,\frac{p}{q}\theta+\varphi\right)\left[\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\varphi\right)\delta a - a\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\varphi\right)\delta\varphi\right]A_k^{(1)}(\tau) \tag{4}$$

Označimo sa $\delta\overline{W}$ srednju vrednost virtualnog rada za puni ciklus oscilovanja (vreme od jednog perioda) i razložimo u dvostruki Fourier-ov red izraz za virtualni rad i posle integraljenja po punoj fazi $\psi=\frac{p}{q}\theta+\varphi$ dobićemo

$$\begin{aligned}\delta\overline{W} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta W d\psi = {} & \frac{\varepsilon\delta a}{4\pi^2}\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{isq\varphi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n} Q_{ko}(\tau,\theta,a,\psi)A_k^{(1)}(\tau)e^{-isq\varphi}\cos\psi\, d\theta\, d\psi - \\ & - \frac{\varepsilon a\delta\varphi}{4\pi^2}\sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{isq\varphi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n} Q_{ko}(\tau,a,\theta,\psi)A_k^{(1)}(\tau)e^{-isq\varphi}\sin\psi\, d\theta\, d\psi\end{aligned} \tag{5}$$

gde su ℓ i m povezani sa s odnosima $m=sq\pm 1$ i $\ell=-sp$.

Za koeficijente uz varijacije δa i $\delta\varphi$ uvodimo simboličke oznake $\frac{\delta\overline{W}}{\delta a}$ i $\frac{\delta\overline{W}}{\delta\varphi}$ pomoću kojih sistem jednačina (56) član V.2 možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left[\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - 2\varepsilon\omega_1(\tau)aB_1 = \frac{2}{m_1(\tau)}\frac{\delta\overline{W}}{\delta a}\\ &\varepsilon\left[\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial B_1}{\partial\varphi} + 2\varepsilon\omega_1(\tau)A_1 = \frac{2}{m_1(\tau)a}\frac{\delta\overline{W}}{\delta\varphi} - \frac{\varepsilon a}{m_1(\tau)}\frac{d[m_1(\tau)\omega_1(\tau)]}{d\tau}\end{aligned} \tag{6}$$

Odavde metodom neodredjenih koeficijenata nije teško odrediti nepoznate funkcije $A_1(\tau,a,\varphi)$ i $B_1(\tau,a,\varphi)$ i pomoću njih sastaviti sistem jednačina prve aproksimacije

$$\begin{aligned}&\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m_1(\tau)\omega_1(\tau)}\frac{d[m_1(\tau)\omega_1(\tau)]}{d\tau} + \frac{2}{m_1(\tau)}\sum_{s}\frac{[p\omega_1(\tau)-q\nu(\tau)]is\frac{\delta\overline{W}_s}{\delta a} + 2\omega_1(\tau)\frac{1}{a}\frac{\delta\overline{W}_s}{\delta\varphi}}{4\omega_1^2(\tau)-[p\omega_1(\tau)-q\nu(\tau)]^2 s^2}\\ &\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau) + \frac{2}{am_1(\tau)}\sum_{s}\frac{[p\omega_1(\tau)-q\nu(\tau)]is\frac{\delta\overline{W}_s}{\delta\varphi}\frac{1}{a} - 2\omega_1(\tau)\frac{\delta\overline{W}_s}{\delta a}}{4\omega_1^2(\tau)-[p\omega_1(\tau)-q\nu(\tau)]^2 s^2}\end{aligned} \tag{7}$$

Za sastavljanje jednačina prve aproksimacije neophodno je izračunati srednju vrednost virtualnog rada prema izrazu (5), a zatim odrediti "parcijalne izvode" $\frac{\delta \overline{W_b}}{\delta \alpha}$ i $\frac{\delta \overline{W_b}}{\delta \varphi}$, a prema izrazu

$$\delta \overline{W} = \sum_{b=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta \overline{W_b}}{\delta \alpha} \delta \alpha + \frac{\delta \overline{W_b}}{\delta \varphi} \delta \varphi \right\} \tag{8}$$

a zatim uneti u formule (7). Na energijskoj interpretaciji diferencijalnih jednačina za amplitudu i fazu viših približenja se nećemo zadržavati.

V.4. NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA OSCILOVANJA SISTEMA SA VIŠE STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA

Sastavimo jednačine prve aproksimacije za jednofrekventni režim oscilovanja za neke specijalne slučajeve sistema diferencijalnih jednačina oscilovanja sistema sa više stepeni slobode.

1° Neka generalisane poremećajne sile imaju oblik

$$\varepsilon Q_k(\tau, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \qquad (k=1,2,\dots,n) \tag{1}$$

u kom slučaju jednačine poremećenog oscilovanja imaju oblik

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\tau)\dot{q}_i\right\} + \sum_{i=1}^{n} c_{ik}(\tau) q_i = \varepsilon Q_k(\tau, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{2}$$

Uz pretpostavke uvedene u članu V.2 za prvu asimptotsku aproksimaciju dvoparametarske familije partikularnih rešenja bliskih prvom normalnom obliku neporemećenog oscilovanja usvajamo u obliku

$$q_i = A_i^{(1)}(\tau)\, a \cos\psi \tag{3}$$

u kome su amplituda a i faza ψ funkcije vremena koje se odredjuju iz sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije oblika

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon a}{2m_1(\tau)\omega_1(\tau)}\frac{d[m_1(\tau)\omega_1(\tau)]}{d\tau}-\frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau)\omega_1(\tau)}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n}Q_{k_0}(\tau,a,\psi)A_k^{(1)}(\tau)\sin\psi\, d\psi$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega_1(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau)\omega_1(\tau)a}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n}Q_{k_0}(\tau,a,\psi)A_k^{(1)}(\tau)\cos\psi\, d\psi \tag{4}$$

2° Neka je sistem diferencijalnih jednačina poremećenog oscilovanja sada oblika

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_i+c_{ik}q_i)=\varepsilon Q_k(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1\dots\dot{q}_n)+\varepsilon E_k(\tau)\sin\theta \qquad (k=1,2,3\dots n) \tag{5}$$

gde su $a_{ik}=a_{ki}$ i $c_{ik}=c_{ki}$ konstante. Prva aproksimacija rešenja je tada

$$q_i=A_i^{(1)}a\cos(\theta+\varphi)\ ; \qquad \psi=\theta+\varphi \tag{6}$$

gde su a i φ funkcije vremena i odredjuju se iz sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{2\pi m_1\omega_1}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n}Q_{k_0}(a,\psi)A_k^{(1)}(\tau)\sin\psi\, d\psi-\frac{\varepsilon\sum_{k=1}^{n}E_k(\tau)A_k^{(1)}(\tau)}{m_1(\tau)[\omega_1(\tau)+\nu(\tau)]}\cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega_1-\nu(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi m_1\omega_1 a}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n}Q_{k_0}(a,\psi)A_k^{(1)}\cos\psi\, d\psi+\frac{\varepsilon\sum_{k=1}^{n}E_k(\tau)A_k^{(1)}(\tau)}{m_1[\omega_1(\tau)+\nu(\tau)]}\sin\varphi \tag{7}$$

3° Neka je sada sistem diferencijalnih jednačina poremećenog oscilovanja oblika

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}a_{ik}(\tau)\dot{q}_i\right\}+\sum_{i=1}^{n}c_{ik}(\tau)q_i=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ik}(\tau)\dot{q}_i+\varepsilon E_k(\tau)\sin\theta \qquad (k=1,2,\dots,n) \tag{8}$$

Prva asimptotska aproksimacija rešenja je oblika (6), dok se amplituda a i faza φ odredjuju iz sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije oblika

$$\frac{da}{dt}=\frac{\varepsilon a}{2m_1(\tau)\omega_1(\tau)}\left[n_1(\tau)\omega_1(\tau)-\frac{d[m_1(\tau)\omega_1(\tau)]}{d\tau}\right]-\frac{\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{n}E_k(\tau)A_k^{(1)}(\tau)}{m_1(\tau)[\omega_1(\tau)+\nu(\tau)]}\cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega_1(\tau)-\nu(\tau)+\frac{\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{n}E_k(\tau)A_k^{(1)}(\tau)}{a\,m_1(\tau)[\omega_1(\tau)-\nu(\tau)]}\sin\varphi \tag{9}$$

gde je sa $n_1(\tau)$ obeležen izraz

$$n_1(\tau)=\sum_{i,k=1}^{n}\lambda_{ik}(\tau)\,A_i^{(1)}(\tau)\,A_k^{(1)}(\tau) \tag{10}$$

U svim ovim slučajevima sastavljene su diferencijalne jednačine prve aproksimacije za izučavanje osnovnog rezonantnog stanja. Podrazumeva se da su pri sastavljanju jednačina prve aproksimacije korišćene jednačine iz čl. V.2 : (37), (38), (40) i (41) za slučaj kada je $p = q = 1$.

V.5. KORIŠĆENJE ENERGIJSKE INTERPRETACIJE JEDNAČINA PRVE APROKSIMACIJE ZA REŠAVANJE PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA OSCILOVANJA ELASTIČNIH TELA

Izložena energijska interpretacija jednačina prve aproksimacije iz čl. V.4 omogućava da se one sastave bez prethodnog sastavljanja tačnih diferencijalnih jednačina oscilovanja. Saglasno sa tom metodom za dobijanje asimptotske aproksimacije rešenja dovoljno je sastaviti linearni sistem diferencijalnih jednačina, koji opisuje neporemećeno oscilovanje i proveriti da li za taj sistem važe tri navedena uslova u članu V.2, a to znači odrediti sopstvene kružne frekvencije i koordinate sopstvenih vektora, posle čega se mogu direktno sastaviti jednačine prve aproksimacije za amplitudu i fazu, a i φ, koristeći se izrazom srednjeg virtualnog rada poremećajnih generalisanih sila. Ovo daje ideju da se izložena metoda u članu V.2 formalno može da primeni za sastavljanje asimptotskih aproksimacija rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina oscilovanja elastičnih tela.

Zaista kao i u sistemima sa konačnim brojem stepeni slobode oscilovanja, u oscilatornim sistemima sa raspodeljenim parametrima (čije se kretanje opisuje nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama hiperboličnog tipa) u odredjenim uslovima mogu se ostvariti jednofrekventne oscilacije i kada su one stabilne, važno je da se izuče. Zato je i opravdano da se iskoristi mogućnost izučavanja jednofrekventnih oscilacija elastičnih tela.

V.6. POPREČNE OSCILACIJE ŠTAPA NAPREGNUTOG AKSIJALNOM SILOM PROMENLJIVE FREKVENCIJE

Posmatraćemo poprečne oscilacije štapa napregnutog aksijalnom silom promenljive frekvencije za slučaj opštih linearnih graničnih uslova. U slučaju kada krajevi štapa nisu zglobno vezani obične Fourier-ove zamene promenljivih nisu zgodne čak ni moguće, dok energijska metoda dozvoljava da se izračunavaju jednofrekventne oscilacije za različite granične uslove. Za različite granične uslove dobijamo različite sopstvene kružne frekvencije i normalne funkcije, koje odredjuju oblik dinamičke ravnoteže za neporemećeno kretanje.

Ovde ćemo proučiti štap dužine ℓ, na čijem kraju dejstvuje jednofrekventna aksijalna sila

$$F = S(\theta) \tag{1}$$

gde je $S(\theta)$ periodična funkcija perioda 2π, a $\theta=\theta(t)$ je funkcija vremena pri čemu je $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ kružna frekvencija poremećajne sile funkcija "sporopromenljivog" vremena $\tau=\varepsilon t$, ε je mali parametar. Kao što je poznato, parcijalna diferencijalna jednačina za poprečne oscilacije štapa je

$$\mathcal{B}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+S(\theta)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=0 \tag{2}$$

gde je $\mathcal{B}=EI_x$ savojna krutost štapa, $\rho=\gamma/g$ gustina materijala grede - štapa, A površina poprečnog preseka. Ovu jednačinu možemo razmatrati kao jednačinu poremećenog kretanja štapa pod dejstvom aksijalne poremećajne sile (1).

Granični uslovi na krajevima štapa $z = 0$, $z=\ell$, najčešće se javljaju u obliku:

1° oba kraja uklještena

$$y\Big|_{\substack{z=\ell\\z=0}}=0 \qquad \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_{\substack{z=0\\z=\ell}}=0 \tag{3}$$

2° jedan kraj uklešten, drugi zglobno vezan

$$y(z,t)\Big|_{\substack{z=0\\z=\ell}}=0 \qquad \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_{z=0}=0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\Big|_{z=\ell}=0 \tag{4}$$

3° oba kraja zglobno vezana

$$y(z,t)\Big|_{\substack{z=0\\z=\ell}}=0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\Big|_{\substack{z=0\\z=\ell}}=0 \tag{5}$$

4° u opštem slučaju

$$L_{ij}\left(y,\frac{\partial y}{\partial z},\frac{\partial^2 y}{\partial z^2},\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}\right)\Big|_{\substack{z=0\\z=\ell}}=0 \qquad (i,j=1,2) \tag{6}$$

koji obuhvata sve napred nabrojane slučajeve, i gde je L_{ij} linearni operator. Neka je $Z_1(z)$ prva (osnovna) normalna funkcija koja odgovara najmanjem karakterističnom broju κ_1 i odredjuje se iz diferencijalne jednačine

$$\frac{d^4 Z_1(z)}{dz^4}-\kappa_1^4 Z_1(z)=0 \tag{7}$$

pri čemu na krajevima $z = 0$ i $z=\ell$ ona zadovoljava jedne od napred navedenih graničnih uslova. Na osnovu jednačine (2) očevidno je da dobijamo

$$\int_0^\ell\left(B\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+S\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)Z_1(z)dz=0 \tag{8}$$

Ako je poremećajna sila jednaka nuli, diferencijalna jednačina neporemećenog oscilovanja je

$$\mathcal{B}\frac{\partial^4 y^*}{\partial z^4}+\rho A\frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2}=0 \tag{9}$$

zajedno sa graničnim uslovima (6). Jednačina (9) u jednofrekventnom režimu oscilovanja u prvoj aproksimaciji ima rešenje

$$y^*=Z_1(z)\, a\, \sin(\omega t+\varphi) \tag{10}$$

u kome su a i φ proizvoljne konstante, a

$$\omega^2=\frac{\mathcal{B}}{\rho A}\, k_1^4 \tag{11}$$

kvadrat sopstvene kružne frekvencije.

Asimptotsko rešenje (10) odgovara jednofrekventnom režimu oscilovanja u prvom obliku dinamičke ravnoteže. Pretpostavivši da je odnos osne sile $F=S(\theta)$ kritičnom Euler-ovom opterećenju P_{krit} dovoljno mali, pri izračunavanju jednofrekventnih oscilacija poremećenog kretanja, pretpostavimo da je oblik ugiba odredjen normalnom funkcijom $Z_1(z)$. U vezi sa tim mi ćemo tražiti približno rešenje jednačine poremećenog kretanja (2) u obliku

$$y(z,t)=T(t)\,Z_1(z) \tag{12}$$

gde je $T(t)$ funkcija samo vremena t. Unošenjem pretpostavljenog rešenja (12) u parcijalnu diferencijalnu jednačinu (8) i uzimanjem u obzir jednačine (7) dobijamo da je

$$\mathcal{B}k_1^4\, T(t)+\rho A\frac{d^2T(t)}{dt^2}+S(\theta)\,T(t)\,\frac{\int_0^\ell \frac{d^2Z_1(z)}{dz^2}Z_1(z)\,dz}{\int_0^\ell Z_1^2(z)\,dz}=0 \tag{13}$$

Parcijalnim integraljenjem i uzimanjem u obzir graničnih uslova (6) i jednačine (7) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell \frac{d^2Z_1}{dz^2}Z_1(z)\,dz=-\int_0^\ell\left[\frac{dZ_1(z)}{dz}\right]^2 dz\\
&\int_0^\ell\left[\frac{d^2Z_1(z)}{dz^2}\right]^2 dz=k_1^2\int_0^\ell\left[Z_1(z)\right]^2 dz
\end{aligned} \tag{14}$$

sledi da je

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2}+\omega^2\left(1-\frac{S}{P_1}\right)T(t)=0 \tag{15}$$

gde je

$$P_1=\beta\,\frac{\int_0^\ell\left[\frac{d^2Z_1(z)}{dz^2}\right]^2dz}{\int_0^\ell\left[\frac{dZ(z)}{dz}\right]^2dz} \tag{16}$$

Veličina P_1 koja se odredjuje prethodnim izrazom, javlja se kao približna veličina kritične Euler-ove sile izračunate pomoću Rayleigh-jeve metode energije. Zato i dobijamo da je približno: $P_{krit}\approx P_1$. Osim toga saglasno definiciji

$$P_{krit}=\min\frac{\int_0^\ell\beta\left(\frac{\partial^2y}{\partial z^2}\right)^2dz}{\int_0^\ell\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2dz} \tag{17}$$

je

$$P_1>P_{krit} \tag{18}$$

Praktično odnos $\frac{S}{P_{krit}}$ je dovoljno mali. Saglasno jednačini (18) očevidno je da je

$$\frac{S}{P_{krit}}>\frac{S}{P_1}$$

i zato odnos $\frac{S}{P_1}$ takodje mora da bude dovoljno mali. Pretpostavimo da je poremećajna aksijalna sila oblika

$$S(\theta)=S_0+\sum_{n=1}^{\infty}S_n\sin(n\theta+\varphi_n) \tag{19}$$

tj. javlja se kao poliharmonijska sila po θ. Prepišemo jednačinu (15) u obliku

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2T=\frac{S(\theta)}{P_1}\omega^2T \tag{20}$$

i pretpostavimo u daljem da izučavamo demultiplikaciono rezonantno stanje oblika

$$\omega\cong\frac{s}{r}\nu(\tau) \tag{21}$$

i nalazimo prvu asimptotsku aproksimaciju rešenja jednačine (20) u obliku

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = \frac{S(\theta)}{P_1}\omega^2 T \qquad T(t) = a\cos\left(\frac{s}{r}\theta + \varphi\right) \tag{22}$$

Da bi smo sastavili jednačine prve aproksimacije koristimo energijsku metodu iz člana V.3, pa je zato potrebno izračunati virtualni rad $\varepsilon\delta W$ za poremećajnu silu $\varepsilon Q = \frac{S(\theta)}{P_1}\omega^2$, koji bi ona izvršila u režimu sinusnih oscilacija

$q = a\cos\left(\frac{s}{r}\theta + \varphi\right) = T(t)$

na virtualnom pomeranju

$\delta T(t) = \cos\left(\frac{s}{r}\theta + \varphi\right)\delta a - a\sin\left(\frac{s}{r}\theta + \varphi\right)\delta\varphi$

Sa tačnošću do malih veličina drugog reda imamo da je

$$\varepsilon\delta W = \frac{S(\theta)}{P_1}\omega^2 a\left[\cos^2\left(\frac{s}{r}\theta + \varphi\right)\delta a - \frac{a}{2}\sin 2\left(\frac{s}{r}\theta + \varphi\right)\delta\varphi\right]$$

odnosno srednja vrednost virtualnog rada je

$$\varepsilon\delta\overline{W} = \frac{\omega^2 a}{2\pi P_1}\int_0^{2\pi} S(\theta)\left[\cos^2\left(\frac{s}{r}\theta + \varphi\right)\delta a - \frac{a}{2}\sin 2\left(\frac{s}{r}\theta + \varphi\right)\delta\varphi\right] d\left(\frac{s}{r}\theta + \varphi\right) \tag{23}$$

Uzimajući u obzir silu $S(\theta)$ oblika (19) i izračunavajući izraz srednjeg virtualnog rada utvrdjujemo da je on jednak nuli za sve vrednosti indeksa sabiranja n kada je $2s \neq nr$. Zaključujemo takodje da pojava demultiplikacionog rezonantnog stanja ima mesta samo za $2s = kr$, gde je k ceo broj, tj. kada je $\omega \cong \frac{k}{2}\nu(r)$. Drugim rečima rezonantno stanje se javlja za sopstvene kružne frekvencije jednake ili približno jednake polovini kružne frekvencije nekog harmonika aksijalne sile. Na osnovu rečenog nalazimo izraz za srednji virtualni rad

$$\varepsilon\delta\overline{W} = \frac{\omega^2 a}{4P_1}\left\{\left[2S_0 + S_k\cos(2\varphi - \gamma_k)\right]\delta a - aS_k\sin(2\varphi - \gamma_k)\delta\varphi\right\} \tag{24}$$

Iz ovog izraza odredjujemo "parcijalne" izvode $\varepsilon\frac{\delta\overline{W_b}}{\delta a}$ i $\varepsilon\frac{\delta\overline{W_b}}{\delta\varphi}$ i njihovim unošenjem u jednačine prve aproksimacije (7) član V.3 dobijamo sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitudu i fazu

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\omega^2 S_k}{4P_1}\frac{1}{[\omega-(r\omega-s\nu(\tau))]}\,a\sin(2\varphi-\varphi_k)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega-\frac{\omega S_0}{2P_1}-\frac{s}{r}\nu(\tau)-\frac{\omega^2 S_k}{4P_1}\frac{\cos(2\varphi-\varphi_k)}{[\omega-(r\omega-s\nu(\tau))]} \tag{25}$$

u kojima su indeksi s,r i k vezani uslovom $2s=kr$, a P_1 se odredjuje po formuli (16).

Zaustavimo se sada na izučavanju pojave demultiplikacionog rezonantnog stanja i izučavanju oblasti stabilnosti i nestabilnosti oscilovanja. Naglasimo da je u jednačinama prve aproksimacije (24) moguće zanemariti član $r\omega-s\nu(\tau)$ koji stoji u imeniocu desne strane. Zaista ukoliko je odnos

$$\frac{\omega-\frac{s}{r}\nu(\tau)}{\omega}$$

dovoljno mala veličina prvog reda, zanemarivanje članova $r\omega-s\nu(\tau)$ koji stoje u imeniocima dovodi do zanemarivanja u diferencijalnim jednačinama prve aproksimacije (25) članova malih veličina drugog reda što je potpuno opravdano za diferencijalne jednačine prve aproksimacije. Posle zanemarivanja naznačenih članova, diferencijalne jednačine prve aproksimacije su

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\omega S_k}{4P_1}\,a\sin(2\varphi-\varphi_k)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\left[\omega-\frac{\omega S_0}{2P_1}-\frac{k}{2}\nu(\tau)\right]-\frac{\omega S_k}{4P_1}\cos(2\varphi-\varphi_k) \tag{26}$$

Da bi smo izučili ove jednačine uvedemo zamenu promenljivih a i φ promenljivim u i v, a pomoću formula transformacije

$$u=a\cos\left(\varphi-\frac{\varphi_k}{2}\right)$$

$$v=-a\sin\left(\varphi-\frac{\varphi_k}{2}\right) \tag{27}$$

Jednačine prve aproksimacije izražene pomoću novih promenljivih glase

$$\frac{du}{dt}=\left\{\frac{S_k\omega}{4P_1}+\left[\omega-\frac{\omega S_o}{2P_1}-\frac{\kappa}{2}\nu(\tau)\right]\right\}v \qquad (28)$$

$$\frac{dv}{dt}=\left\{\frac{S_k\omega}{4P_1}-\left[\omega-\frac{\omega S_o}{2P_1}-\frac{\kappa}{2}\nu(\tau)\right]\right\}u$$

i javljaju se kao linearne diferencijalne jednačine promenljivih u i v. Za slučaj poliharmonijske sile $F=S(\theta)$ kada je kružna frekvencija $\nu(\tau)$ konstantna, jednačine prve aproksimacije će biti linearne sa konstantnim koeficijentima. Pri izučavanju zona nestabilnosti smatraćemo da je τ parametar pa ćemo i kružnu frekvenciju posmatrati kao konstantnu. Zato ćemo rešenja sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije (28) tražiti u obliku

$$u=A e^{\mu t}$$
$$v=B e^{\mu t} \qquad (29)$$

i dobiti odgovarajuću karakterističnu jednačinu

$$\mu^2+\left[\omega-\frac{\omega S_o}{2P_1}-\frac{\kappa}{2}\nu(\tau)\right]-\left(\frac{\omega S_k}{4P_1}\right)^2=0 \qquad (30)$$

čiji su koreni

$$\mu_{1/2}=\pm\alpha=\pm\sqrt{\left(\frac{\omega S_k}{4P_1}\right)^2-\left[\omega-\frac{\omega S_o}{2P_1}-\frac{\kappa}{2}\nu(\tau)\right]^2} \qquad (31)$$

Opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina (28) je sada

$$u=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{-\alpha t}$$

$$v=\frac{\alpha}{\frac{\omega S_k}{4P_1}+\left[\omega-\frac{\omega S_o}{2P_1}-\frac{\kappa}{2}\nu(\tau)\right]}\left(C_1e^{\alpha t}-C_2e^{-\alpha t}\right) \qquad (32)$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante integracije, koje mogu biti odredjene iz početnih uslova. Iz izraza za korene karakteristične jednačine (31) vidimo da su oni realni za

$$\frac{\omega S_k}{4P_1}>\pm\left[\omega-\frac{\omega S_o}{2P_1}-\frac{\kappa}{2}\nu(\tau)\right] \qquad (33)$$

odakle sledi da ako frekvencija poremećajne sile leži u intervalu

$$2\omega\left(1-\frac{S_o}{2P_1}\right)+\frac{S_k\omega}{2P_1} > k\nu(t) > 2\omega\left(1-\frac{S_o}{2P_1}\right)-\frac{S_k\omega}{2P_1} \tag{34}$$

poprečne oscilacije dospevaju u oblast demultiplikacionog rezonantnog stanja i njihova amplituda raste po eksponencijalnom zakonu bez obzira koliko male bile početne vrednosti amplitude.Drugim rečima nejednakost (34) odredjuje zonu nestabilnosti u čijoj se sredini položaji ravnoteže pokazuju nestabilnim i poprečne oscilacije se samopobudjuju.Zone nestabilnosti odredjene saglasno jednačinama prve aproksimacije obuhvataju sve navedene slučajeve linearnih graničnih uslova.Pojava konstantne komponente S_o aksijalne sile $F=S(\theta)$,dovodi do toga da sopstvena kružna frekvencija poprečnih oscilacija se pomera,tj. ako je kružna frekvencija sopstvenih slobodnih poprečnih oscilacija jednaka ω (u otsustvu dodatnih aksijalnih sila),to je kružna frekvencija ω^* pomerena dejstvom konstantne komponente opterećenja i odredjuje se po formuli

$$\omega^*=\omega\left(1-\frac{S_o}{2P_1}\right) \tag{35}$$

Iz izraza (34) proizilazi da harmonijske komponente u rezonantnoj zoni ne utiču jedna na drugu.Svaki harmonik aksijalne sile odredjuje svoju sopstvenu individualnu rezonantnu zonu,koja zavisi od amplitude tog harmonika.Svi izvedeni zaključci se odnose na prvu aproksimaciju.Već u drugoj aproksimaciji se javlja uzajamni uticaj harmonika u zoni rezonantnog stanja.U nejednakosti (34) možemo da predjemo od kružnih frekvencija na broj obrzaja u sekundi.Neka je n_o broj sopstvenih slobodnih oscilacija u sekundu n_k broj oscilacija k-tog harmonika aksijalne sile.Iz nejednakosti (34) dobijamo

$$2n_o\left(1-\frac{S_o}{2P_1}\right)-\frac{S_k n_o}{2P_1} < n_k < 2n_o\left(1-\frac{S_o}{2P_1}\right)+\frac{S_k n_o}{2P_1} \tag{36}$$

pri čemu je

$$n_o=\frac{k_1^2}{2\pi}\sqrt{\frac{B}{SA}} \tag{37}$$

Dobijene formule se mogu koristiti za odredjivanje položaja "opasnih zona".

Izvedene formule važe za slučaj i kada je štap promenljivog poprečnog preseka, u kom slučaju u formulama treba n_o i P_1 zameniti sledećim izrazima

$$n_o = \frac{k_1^2}{2\pi}\sqrt{\frac{B}{\rho A}} \tag{38}$$

$$P_1 = \frac{\int_0^\ell B(z)\left[\frac{d^2 Z_1(z)}{dz^2}\right]^2 dz}{\int_0^\ell \left[\frac{d Z_1(z)}{dz}\right]^2 dz} \tag{39}$$

gde je

$$\frac{d^2\left[B(z)\frac{d^2 Z_1(z)}{dz^2}\right]}{dz^2} = A(z)\rho k_1^4 Z_1(z) \tag{40}$$

Ovde je k_1 najmanji karakterističan broj. Veličine k_1 i P_1 moguće je odrediti i pomoću Ritz-ove metode.

Jednačine prve aproksimacije (25) za opšti slučaj amplitude a i faze φ u oblasti promene frekvencije $\nu(\tau)$, dovoljno udaljenih od zone parametarskog rezonantnog stanja uz smenu promenljivih (27) daju sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left\{\frac{S_k\omega^2}{4P_1(k\nu(\tau)-\omega)} + \left[\omega\left(1-\frac{S_o}{2P_1}\right)-\frac{k}{2}\nu(\tau)\right]\right\}v \\ \frac{dv}{dt} &= \left\{\frac{S_k\omega^2}{4P_1(k\nu(\tau)-\omega)} - \left[\omega\left(1-\frac{S_o}{2P_1}\right)-\frac{k}{2}\nu(\tau)\right]\right\}u \end{aligned} \tag{41}$$

u kojima je $\tau=\varepsilon t$. Ovaj sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima ne može se u zatvorenom obliku integraliti, pa se zato primenjuju numeričke metode. Pre svega nužno je naći vrednosti amplitude a i faze φ u početnom trenutku, tj. a_o i φ_o, i prema formulama (27) odrediti u_o i v_o neophodne kao početne vrednosti za integraljenje sistema jednačina (41). Osim toga treba znati i zakone promene frekvencije $\nu(\tau)$, poremećajne sile.

V.7.POPREČNE OSCILACIJE ŠTAPA DVOSTRUKE KRUTOSTI U PRELAZNOM REŽIMU OSCILOVANJA

Posmatraćemo slučaj prostornih poprečnih oscilacija štapa ili vratila različitih savojnih krutosti u glavnim ravnima savijanja,koji se okreće promenljivom ugaonom brzinom $\omega(\tau)$, gde je $\tau = \varepsilon t_1$, ε mali parametar, t_1 vreme u jedinicama reda veličine perioda sopstvenih poprečnih oscilacija štapa u glavnim ravnima savijanja.Za sastavljanje diferencijalnih jednačina neporemećenog kretanja i sastavljanje asimptotskih rešenja energijskom metodom,pre svega,sastavićemo izraze za kinetičku i potencijalnu energiju.Pri tome pored klasičnih pretpostavki pri izučavanju malih poprečnih oscilacija tankog štapa pretpostavljamo da se štap u procesu oscilovanja ne uvija.Pretpostavljamo takodje da je štap statički neuravnotežen,tj. linija geometrijskog mesta težišta elementa štapa koji miruje nije pravolinijska,nego je pomerena u odnosu na pravolinijsku osu i pri tome je ravna kriva unapred poznata.Pretpostavljamo da su krajevi zglobno vezani.Uzdužne oscilacije pri izučavanju poprečnih oscilacija zanemarujemo.

Uvešćemo dva sistema koordinata $Oxyz$ i $O\xi\eta\zeta$ od kojih je prvi nepokretan,a drugi pokretan i okreće se zajedno sa štapom ugaonom brzinom $\omega(\tau)$ .Ose Oz i $O\zeta$ usmerimo duž obrtne ose,koja se poklapa sa pravolinijskom geometrijskom osom štapa u miru,a koordinatni početak izaberimo na levom osloncu.Druge dve ose pokretnog koordinatnog sistema izaberemo da se poklapaju sa glavnim osama inercije površine poprečnog preseka štapa.Osu Oy nepokretnog koordinatnog sistema usmerimo

vertikalno naniže kao što je na slici br. 23 prikazano. Projektujemo proizvoljan poprečni presek štapa koji se obrće u proizvoljnom trenutku, na Oxy ravan. Tada je položaj težišta tog preseka odredjen vektorom $\vec{r}_c$, koji je funkcija položaja preseka i vremena t.
Sa slike je očevidno da je

$$\vec{r}_c = \vec{w} + \vec{\rho} \qquad (1)$$

gde je $\vec{w}$ vektor pomeranja geometrijskog centra elementa štapa, a $\vec{\rho}$ ekscentričnosti težišta. Vektor u pokretnom koordinatnom sistemu funkcija je položaja elementa štapa dužine dz, tj. funkcije promenljive z. U pokretnom koordinatnom sistemu jednačina (1) se može napisati u obliku

$$\vec{r}_c = \xi_c \vec{i}\,' + \eta_c \vec{j}\,' = (\xi + \rho_\xi)\vec{i}\,' + (\eta + \rho_\eta)\vec{j}\,' \qquad (2)$$

gde su $\vec{i}\,'$ i $\vec{j}\,'$ ortovi osa pokretnog koordinatnog sistema.
Na osnovu Rivals-ove teoreme o izvodu vektora je

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{r}_c^{\,*} + [\vec{\omega}, \vec{r}_c] \qquad (3)$$

gde je $\overset{*}{\vec{r}_c}$ relativni izvod vektora. Projekcije apsolutne brzine težišta su sada

$$\begin{aligned} v_\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega(\eta + \rho_\eta) \\ v_\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \omega(\xi + \rho_\xi) \end{aligned} \qquad (4)$$

na osnovu kojih sastavljamo izraz za kinetičku energiju sistema

$$E_k = \frac{\rho_v A}{2} \int_0^\ell \left\{ \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega(\eta + \rho_\eta)\right]^2 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \omega(\xi + \rho_\xi)\right]^2 \right\} d\zeta \qquad (5)$$

gde je $\rho_v A$ linearna gustina mase štapa konstantnog preseka, ℓ dužina vratila, $\rho_1 = \rho_\xi$ i $\rho_2 = \rho_\eta$; $\omega = \omega(\tau)$ ugaona brzina obrtanja vratila, koja je funkcija sporopromenljivog vremena.

Odgovarajuća promena potencijalne energije usled deformacionog rada i rada sila teže je

$$E_p = \int_0^\ell \left\{ \frac{1}{2}\left[B_1\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial\zeta^2}\right)^2 + B_2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\zeta^2}\right)^2\right] - mg\left(y\cos\theta - z\sin\theta\right)\right\} d\zeta \tag{6}$$

gde su B_1 i B_2 savojne krutosti vratila u glavnim ravnima savijanja; $\theta = \int_0^t \omega(\tau)dt$ ugao obrtanja pokretnog koordinatnog sistema. Izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju su izraženi pomoću koordinata pokretnog koordinatnog sistema. Uzimajući u obzir male veličine kao što su asimetrija poprečnog preseka ili "različitost" glavnih momenata inercije, uticaj sopstvene težine, statička neuravnoteženost, možemo da izdvojimo u izrazima za kinetičku i potencijalnu energiju delove - izraze koji sadrže te male veličine: odgovarajuće "poremećajne" potencijalnu i kinetičku energiju. Tada je za štap konstantnog poprečnog preseka kinetička energija u sledećem obliku

$$E_k = E_k' + \varepsilon E_k'' \tag{7}$$

gde su E_k kinetička energija neporemećenog kretanja

$$E_k' = \frac{\rho A}{2}\int_0^\ell \left\{\left[\frac{\partial\xi}{\partial t} - \omega(\tau)\eta\right]^2 + \left[\frac{\partial\eta}{\partial t} + \omega(\tau)\xi\right]^2\right\} d\zeta \tag{8}$$

$\varepsilon E_k''$ kinetička energija poremećenog kretanja

$$\varepsilon E_k'' = \frac{\rho A}{2}\int_0^\ell \left\{\omega^2(\tau)\left(\rho_\xi^2 + \rho_\eta^2\right) - 2\rho_\eta\,\omega(\tau)\left[\frac{\partial\xi}{\partial t} - \omega(\tau)\eta\right] + 2\rho_\xi\,\omega(\tau)\left[\frac{\partial\eta}{\partial t} + \omega(\tau)\xi\right]\right\} d\zeta \tag{9}$$

Za potencijalnu energiju pišemo da je

$$E_p = E_p' + \varepsilon E_p'' \tag{10}$$

gde je E_p' potencijalna energije neporemećenog kretanja

$$E_p' = \frac{B_1 + B_2}{4}\int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial\zeta^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\zeta^2}\right)^2\right] d\zeta \tag{11}$$

i $\varepsilon E_p''$ potencijalna energija poremećenog kretanja

$$\varepsilon E_p'' = \int_0^\ell \left\{\frac{B_1 - B_2}{4}\left[\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial\zeta^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\zeta^2}\right)^2\right] - \rho A g\left(\xi\cos\theta - \eta\sin\theta\right)\right\} d\zeta \tag{12}$$

Za sastavljanje diferencijalne jednačine poprečnih oscilacija neporemećenog kretanja koristićemo varijacioni princip Hamilton-Ostrogradskog

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_p' - E_k')\, dt = 0 \tag{13}$$

Na osnovu Euler-ovih jednačina dobijamo jednačine neporemećenog oscilovanja

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial \varsigma^4} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 2\omega(\tau)\frac{\partial \eta}{\partial t} - \varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\eta - \omega^2(\tau)\xi = 0 \\ c^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial \varsigma^4} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2\omega(\tau)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\xi - \omega^2(\tau)\eta = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

u kojima je

$$c^2 = \frac{B_1 + B_2}{2\varrho A} \tag{15}$$

Prirodni granični uslovi za slučaj zglobno vezanih krajeva su

$$\begin{aligned} \xi(\varsigma,t)\big|_{\varsigma=0} = \xi(\varsigma,t)\big|_{\varsigma=\ell} = \eta(\varsigma,t)\big|_{\varsigma=0} = \eta(\varsigma,t)\big|_{\varsigma=\ell} = 0 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varsigma^2}\bigg|_{\varsigma=0} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varsigma^2}\bigg|_{\varsigma=\ell} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varsigma^2}\bigg|_{\varsigma=0} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varsigma^2}\bigg|_{\varsigma=\ell} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Ako pomnožimo drugu jednačinu sistema (14) sa imaginarnom jedinicom i saberemo sa prvom i uvedemo oznaku

$$\mathfrak{z}(\varsigma,t) = \xi(\varsigma,t) + i\eta(\varsigma,t) \tag{17}$$

dobijamo diferencijalnu jednačinu u kompleksnom obliku

$$c^2 \frac{\partial^4 \mathfrak{z}}{\partial \varsigma^4} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2} + 2i\omega(\tau)\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} + i\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\mathfrak{z} - \omega^2(\tau)\mathfrak{z} = 0 \tag{18}$$

Ako sada sa $\mathfrak{Z}$ obeležimo izraz

$$\mathfrak{Z}(z,t) = x(z,t) + i y(x,t) \tag{19}$$

i formulu prelaza sa pokretnog koordinatnog sistema na nepokretni

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z} e^{-i\theta} \tag{20}$$

iskoristimo za transformaciju jednačine (18) dobijamo

$$c^2 \frac{\partial^4 \mathfrak{Z}}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = 0 \tag{21}$$

koja predstavlja diferencijalnu jednačinu neporemećenog oscilovanja u nepokretnom koordinatnom sistemu, a u kompleksnom obliku. Granični uslovi u kompleksnom obliku za diferencijalnu jednačinu (21) su

$$\mathcal{Z}(z,t)\Big|_{\substack{z=0\\ z=\ell}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial z^2}\Big|_{\substack{z=\ell\\ z=0}} = 0 \tag{22}$$

Da bi smo primenili energijsku metodu sastavljanja asimptotskih rešenja za neporemećen sistem, neophodno je naći "normalne" funkcije koje odredjuju oblik dinamičke ravnoteže i odgovarajuće sopstvene frekvencije neporemećenog sistema. Primenjujući Fourier-ovu metodu dobijamo jednačinu za nalaženje "normalne" funkcije

$$\frac{d^4 Z(z)}{dz^4} - \lambda^4 Z(z) = 0 \tag{23}$$

koja se javlja kao realna funkcija i za granične uslove (22) ima oblik

$$Z_k(z) = \sin\frac{k\pi}{\ell} z \tag{23'}$$

dok su sopstvene frekvencije

$$\omega_n = \frac{n^2\pi}{\ell^2}\sqrt{\frac{\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2}{2\rho A}}$$

Na osnovu ovoga partikularno rešenje jednačine (21) je

$$\mathcal{Z}^{(1)}(z,t) = \sin\frac{\pi}{\ell} z\left[a_1 e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)} + a_2 e^{-i(\omega_1 t+\varphi_2)}\right] \tag{24}$$

gde su a_1 , a_2 , φ_1 i φ_2 realne proizvoljne konstante. Ako predjemo na realne funkcije dobijamo da je

$$\begin{aligned} x^{(1)}(z,t) &= \sin\frac{\pi}{\ell} z\left[a_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + a_2\cos(\omega_1 t+\varphi_2)\right] \\ y^{(1)}(z,t) &= \sin\frac{\pi}{\ell} z\left[a_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1) - a_2\sin(\omega_1 t+\varphi_2)\right] \end{aligned} \tag{25}$$

Neka je za neke vrednosti sporopromenljivog vremena $\tau\in[0,\mathcal{L}]$, $\frac{d\theta}{dt}=\omega(\tau)\approx\omega$, onda prvu aproksimaciju rešenja sistema diferencijalnih jednačina poremećenog oscilovanja potražićemo u obliku

$$x^{(1)}(z,t) = \sin\frac{\pi}{\ell}z\left[a_1\cos(\theta+\varphi_1) + a_2\cos(\omega_1 t+\varphi_2)\right]$$

$$y^{(1)}(z,t) = \sin\frac{\pi}{\ell}z\left[a_1\sin(\theta+\varphi_1) - a_2\sin(\omega_1 t+\varphi_2)\right] \tag{26}$$

gde amplitude a_1 i a_2 i faze φ_1 i φ_2 moraju biti odredjene kao funkcije vremena iz sistema jednačina prve aproksimacije, koji ćemo sastaviti koristeći energijsku metodu njihove interpretacije.

Prvo treba odrediti poremećajne sile koje odgovaraju "poremećenoj" potencijalnoj energiji (radi uprošćenja stavićemo da je $g(=)0$ i pri proučavanju uticaja statičke neuravnoteženosti zanemarićemo poremećaje usled sila sopstvene težine) i "poremećenoj" kinetičkoj energiji, a koje se javljaju usled asimetrije preseka, statičke neuravnoteženosti i promenljive ugaone brzine okretanja. Osim nabrojanih poremećajnih sila, takodje ćemo uračunavati i male disipativne sile koje obrazuju otpornu silu proporcionalnu brzini kretanja elementa štapa i usmerenu suprotno od nje. Silu spoljašnjeg otpora napisaćemo u obliku $-\varkappa\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\,d\zeta$, gde je $\varkappa$ koeficijent spoljašnjeg otpora sredine, redukovan na jedinicu dužine štapa. Za dobijanje eksplicitnih izraza poremećajnih sila, odredjenih u nepokretnom sistemu koordinata u odnosu na koji smo posmatrali neporemećeni sistem, naćićemo prvo raspodeljene sile u pokretnom sistemu koordinata. Unošenjem pod znak integrala u formuli Hamilton-ovog principa umesto E_k' i E_p' vrednosti $\varepsilon E_k''$ i $\varepsilon E_p''$ i posle variranja dobijamo raspodeljeno opterećenje redukovano na glavne pravce savijanja

$$\varepsilon q_\xi(\zeta,t) = \rho_v A\left[\xi\,\omega^2(\tau) + \varepsilon\eta\,\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\right] + \frac{B_\xi - B_\eta}{2}\,\frac{\partial^4\xi}{\partial\zeta^4}$$

$$\varepsilon q_\eta(\zeta,t) = \rho_v A\left[\eta\,\omega^2(\tau) - \varepsilon\xi\,\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\right] - \frac{B_\xi - B_\eta}{2}\,\frac{\partial^4\eta}{\partial\zeta^4} \tag{27}$$

Ako drugi izraz pomnožimo sa imaginarnom jedinicom i saberemo sa prvim dobijamo kompleksnoznačni izraz za raspodeljeno opterećenje izazvano poremećajnim silama u pokretnom koordinatnom sistemu

$$\varepsilon q(\zeta,t) = \rho_v A\,\mathfrak{z}\left[\omega^2(\tau) - i\varepsilon\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\right] + \frac{B_\xi - B_\eta}{2}\,\frac{\partial^4\bar{\mathfrak{z}}}{\partial\zeta^4} \tag{28}$$

gde je

$$\varrho(\zeta,t)=\varrho_{\xi}(\zeta,t)+\varrho_{\eta}(\zeta,t)\,i \qquad \rho=\rho_{\xi}+i\rho_{\eta}$$
$$\bar{\mathfrak{z}}(\zeta,t)=\xi(\zeta,t)-i\,\eta(\zeta,t) \tag{29}$$

Ako iskoristimo formulu prelaza na nepokretni sistem koordinata i pri tome uvedemo uticaj otpornih sila, dok sabirak $i\rho_v A\rho\varepsilon\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}$ u izrazu (28) zanemarimo kao malu veličinu drugog reda dobijamo poremećajnu silu kaoja dejstvuje na element štapa $d\zeta$, koja je sada data sledećim izrazom

$$\varepsilon Q(z,t)=\rho_v A\rho\omega^2(\tau)e^{i\theta}+\frac{B_{\xi}-B_{\eta}}{2}\frac{\partial^4\bar{\mathfrak{z}}}{\partial z^4}e^{2i\theta}-\varkappa\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} \tag{30}$$

gde je

$$\bar{\mathfrak{z}}(z,t)=x(z,t)-i\,y(z,t) \tag{31}$$

Iz poslednjeg izraza razdvajajući realni i imaginarni deo nalazimo sile poremećaja koje dejstvuju na element štapa u smerovima Ox i Oy nepokretnog sistema koordinata

$$\varepsilon Q_x(z,t)=\rho_v A\omega^2(\rho_{\xi}\cos\theta-\rho_{\eta}\sin\theta)+\frac{B_{\xi}-B_{\eta}}{2}\left(\frac{\partial^4 x}{\partial z^4}\cos 2\theta+\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}\sin 2\theta\right)-\varkappa\frac{\partial x}{\partial t}$$
$$\varepsilon Q_y(z,t)=\rho_v A\omega^2(\rho_{\eta}\cos\theta+\rho_{\xi}\sin\theta)+\frac{B_{\xi}-B_{\eta}}{2}\left(\frac{\partial^4 x}{\partial z^4}\sin 2\theta-\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}\cos 2\theta\right)-\varkappa\frac{\partial y}{\partial t} \tag{32}$$

Da bi smo našli izraze za poremećajne sile u režimu sinusnih oscilacija u prvom obliku dinamičke ravnoteže unesemo pretpostavljene vrednosti (26) u jednačinu (32) i sa tačnošću do malih veličina prvog reda nalazimo

$$\varepsilon Q_{x_0}^{(1)}(z,t)=\rho_v A\omega^2(\rho_{\xi}\cos\theta-\rho_{\eta}\sin\theta)+\sin\frac{\pi}{\ell}z\,\frac{B_{\xi}-B_{\eta}}{2}\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\left[a_1\cos(\theta+\varphi_1)+a_2\cos(2\theta+\omega_1 t+\varphi_2)\right]+$$
$$+\varkappa\omega_1\sin\frac{\pi}{\ell}z\left[a_1\sin(\theta+\varphi_1)+a_2\sin(\omega_1 t+\varphi_2)\right]$$

$$\varepsilon Q_{y_0}^{(1)}(z,t)=\rho_v A\omega^2(\rho_{\eta}\cos\theta+\rho_{\xi}\sin\theta)+\sin\frac{\pi}{\ell}z\,\frac{B_{\xi}-B_{\eta}}{2}\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\left[a_1\sin(\theta-\varphi_1)+a_2\sin(2\theta+\omega_1 t+\varphi_2)\right]+ \tag{33}$$
$$+\varkappa\omega_1\sin\frac{\pi}{\ell}z\left[a_2\cos(\omega_1 t+\varphi_2)-a_1\cos(\theta+\varphi_1)\right]$$

Sastavimo sada izraze za virtualni rad, koji bi izvršile poremećajne sile u režimu sinusnih oscilacija, odredjene izrazima (33) na virtualnim pomeranjima

$$\delta x^{(1)}(z,t) = \sin\frac{\pi}{\ell}z\left[\cos(\theta+\varphi_1)\delta a_1 - a_1\sin(\theta+\varphi_1)\delta\varphi_1 + \cos(\omega_1 t+\varphi_2)\delta a_2 - a_2\sin(\omega_1 t+\varphi_2)\delta\varphi_2\right]$$

$$\delta y^{(1)}(z,t) = \sin\frac{\pi}{\ell}z\left[\sin(\theta+\varphi_1)\delta a_1 + a_1\cos(\theta+\varphi_1)\delta\varphi_1 - \sin(\omega_1 t+\varphi_2)\delta a_2 - a_2\cos(\omega_1 t+\varphi_2)\delta\varphi_2\right] \tag{34}$$

koja odgovaraju varijacijama amplituda a_1 i a_2 i faza φ_1 i φ_2 u prvom obliku dinamičke ravnoteže sa tačnošću do malih veličina prvog reda. Za virtualni rad sada imamo

$$\delta W_x = \int_0^\ell \varepsilon Q^{(1)}_{x_0}(z,t)\,\delta x^{(1)}(z,t)$$

$$\delta W_y = \int \varepsilon Q^{(1)}_{y_0}(z,t)\,\delta y^{(1)}(z,t) \tag{35}$$

Radi uproščenja rada pretpostavićemo da je statička neuravnoteženost oblika

$$\rho_\xi(z) = \rho_1 \sin\frac{\pi}{\ell}z$$

$$\rho_\eta(z) = -\rho_2 \sin\frac{\pi}{\ell}z \tag{36}$$

Potrebno je da sada sračunamo srednju vrednost virtualnog rada za puni ciklus oscilovanja prema formulama

$$\delta\overline{W_x} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta W_x\, d(\theta+\varphi_1)\, d(\omega_1 t+\varphi_2)$$

$$\delta\overline{W_y} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta W_y\, d(\theta+\varphi_1)\, d(\omega_1 t+\varphi_2) \tag{37}$$

Ako unesemo u desne strane izraza $\delta\overline{W_x}$ i $\delta\overline{W_y}$ i integralimo kako je to naznačeno dobijamo da je

$$\delta\overline{W_x} = \delta\overline{W_y} = \frac{\ell}{4}\Big\{\Big[\rho_v A\omega^2(\tau)(\rho_1\cos\varphi_1 - \rho_2\sin\varphi_1) + \frac{B_1-B_2}{2\ell^4}\pi^4 a_1\cos 2\varphi_1\Big]\delta a_1 -$$

$$-\Big[\rho_v A\omega^2(\tau)(a_1\rho_2\cos\varphi_1 + a_1\rho_1\sin\varphi_1) + \frac{B_1-B_2}{2\ell^4}\pi^4 a_1^2\sin 2\varphi_1 + \tag{38}$$

$$+\varkappa\omega_1 a_1^2]\,\delta\psi_1 - \varkappa\omega_1 a_2^2\,\delta\psi_2\}$$

Osim toga nalazimo i da je

$$m_1 = \rho_v A\int_0^\ell \sin^2\frac{\pi}{\ell}z\,dz = \frac{\rho_v A\ell}{2} \tag{39}$$

Označimo sada sa

$$\delta\overline{W} = \delta\overline{W}_x = \delta\overline{W}_y = \delta\overline{W}_1(a_1,\psi_1) + \delta\overline{W}_2(a_2,\psi_2) \tag{40}$$

što je moguće za posmatrani zadatak. Iz izraza (38) možemo da odredimo i -ti član - parcijalni izvod srednjeg virtualnog rada $\delta\overline{W}$ i da te izvode unesemo u sistem jednačina diferencijalnih prve aproksimacije član V.3 u energijskoj interpretaciji i da dobijemo dva sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za nalaženje redom a_1 , a_2 , ψ_1 i ψ_2

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= -\alpha a_1 - \gamma_1^{\ell}(\tau)\sin\psi_1 - \gamma_2^{\ell}(\tau)\cos\psi_1 - \beta(\tau)\,a_1\sin 2\psi_1\\
\frac{d\psi_1}{dt} &= 1 - \Delta(\tau) - \gamma_1^{\ell}(\tau)\frac{1}{a_1}\cos\psi_1 + \gamma_2^{\ell}(\tau)\frac{1}{a_1}\sin\psi_1 - \beta(\tau)\cos 2\psi_1\\
\frac{da_2}{dt} &= -\alpha a_2\\
\frac{d\psi_2}{dt} &= 0
\end{aligned} \tag{41}$$

u kojima su uvedene oznake

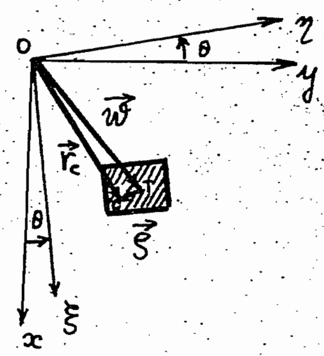
$$\Delta(\tau) = \frac{\omega(\tau)}{\omega_1}; \quad \beta(\tau) = \frac{B_1 - B_2}{2\Delta(\tau)(B_1+B_2)}; \quad \alpha = \frac{\varkappa}{2\rho_v A\omega_1};$$
$$\gamma_1^{\ell}(\tau) = \frac{\rho_1\,\Delta^2(\tau)}{1+\Delta(\tau)}; \quad \gamma_2^{\ell}(\tau) = \frac{\rho_2\,\Delta^2(\tau)}{1+\Delta(\tau)}; \quad \delta = \frac{B_1 - B_2}{B_1+B_2} \tag{42}$$

Obratimo pažnju da smo izraz za srednju vrednost virtualnog rada mogli da nadjemo i varijacijom i nalaženjem srednje vrednosti izraza $\frac{1}{2}(\varepsilon E_k'' - \varepsilon E_p'')$.

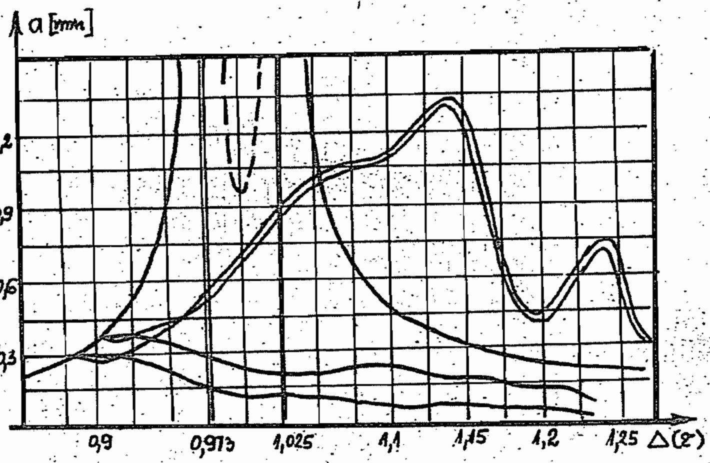
Sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije u zatvorenom obliku ne možemo da integralimo. Ostaje samo mogućnost numeričkog integraljenja nekom od približnih metoda.

Ovde ćemo navesti neke od rezultata koje je dobio B.I.Mosejenkov u svojoj kandidatskoj disertaciji,a koji su interesantni sa aspekta objašnjenja pojave stacionarnog i nestacionarnog rezonantnog stanja štapa koji se obrće (vratila).Za vratilo od čelika pravougaonog preseka $7,28 \times 7,7 cm^2$, dužine $\ell = 200$ cm,gustine $\varsigma = 0,0079$ kg/cm^3,modula elastičnosti $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm^2,koeficijenta otpora $\varkappa = 2,5 \cdot 10^{-3}$ kg sec/cm^2 ,statičke neuravnoteženosti $\varsigma = \varsigma_1 = \varsigma_2 = 0,05$ mm i neka je zakon promene ugaone brzine $\Delta(\tau) = 0,9 + 0,003\, t$ .Za te vrednosti i za promenu $\Delta(\tau)$ u intervalu $0,85 \leq \Delta(\tau) \leq 1,3$,sastavljena je amplitudno-frekventna kriva stacionarnog rezonantnog stanja prikazana na slici br. 24,gde su punim linijama obeležene grane koje odgovaraju stabilnim amplitudama,a crtkasto nestabilnim amplitudama. Sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije (40) je integraljen numerički za zadate podatke,i pri tome su dobijeni podaci na osnovu kojih je sastavljena amplitudno frekventna kriva prolaska kroz rezonantno stanje statički neuravnoteženog $(\varsigma \neq 0)$ i statički uravnoteženog $(\varsigma = 0)$ vratila -štapa koji se okreće za jednake početne uslove $(\Delta(o) = 0,9)$.Posmatrani slučaj odgovara neznatnoj razlici savojnih krutosti $\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1 = 0,894$; $\delta = 0,056$,a sa tim uskoj zoni parametarskog rezonantnog stanja.Zbog toga što je zona parametarskog rezonantnog stanja uska i ima otpornih sila početne amplitude statički uravnoteženog štapa pri datoj brzini prolaska kroz rezonantno stanje se prigušuju.Dejstvo parametarskog rezonantnog stanja na rast amplitude u uskoj zoni je kratkovremeno i zato neznatno.Porast amplitude neuravnoteženog štapa je na račun pojave osnovnog rezonantnog stanja i pri promeni početnih uslova javlja se kao stabilan kako u odnosu na oblik rezonantne krive tako i u odnosu na vrednosti koje uzima.Na taj način u posmatranom primeru radijus direktnog obrtnog kretanja a_1 u prelaznom režimu zavisi u većoj meri od statičke neuravnoteženosti nego od asimetričnosti preseka.

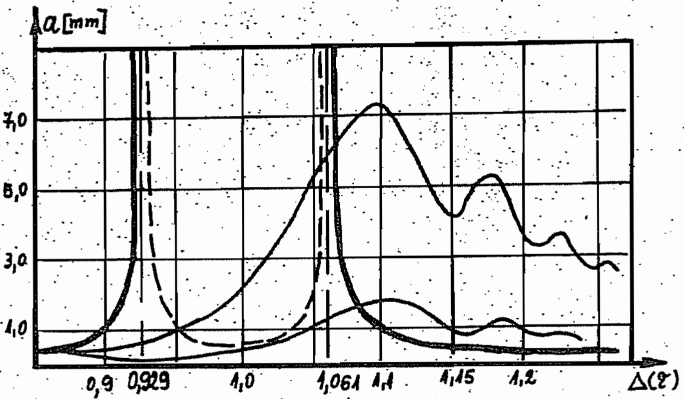
Proučimo sada drugi primer,koji se od prvog razlikuje time što su razmere poprečnog preseka štapa 7×8 cm^2 $(I_2/I_1 = 0,765)$ i sa tim ima znatno razlikovanje savojnih krutosti. Blagodareći toj razlici zona parametarskog rezonantnog stanja znat-



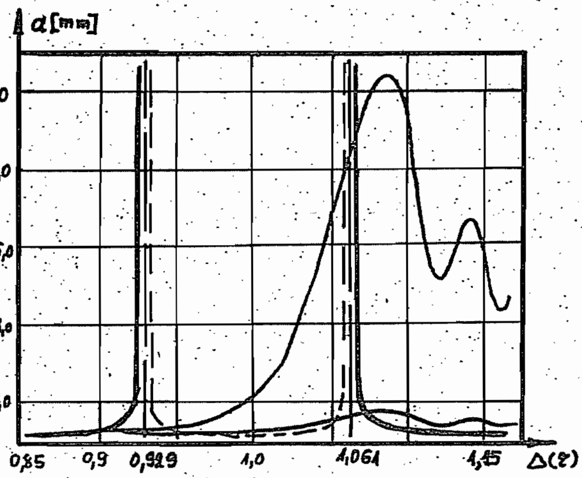
Slika br.23



Slika br. 24



Slika br. 25

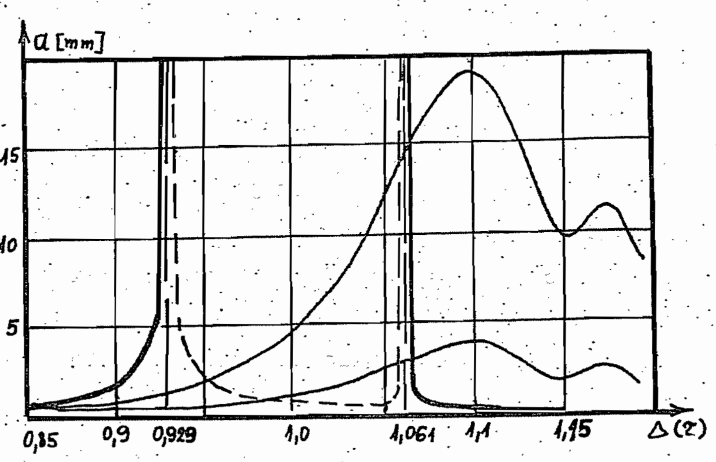


Slika br. 26

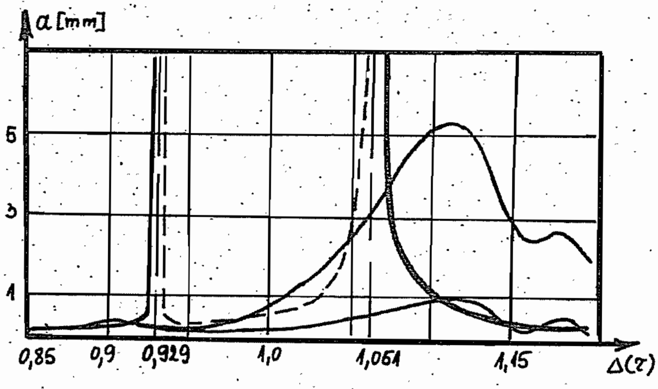
no je veća nego u prethodnom primeru i odredjuje se nejednačinom $0{,}929 \leq \Delta(\tau) \leq 1{,}061$. Amplitudno rezonantnu krivu stacionarnog stanja obrtanja štapa posmatramo u intervalu $0{,}85 \leq \Delta(\tau) \leq 1{,}25$. Grane amplitudno-frekventne krive stabilnog stacionarnog stanja na slici br. 25 nacrtali smo punom linijom, dok su grane koje odgovaraju nestabilnim amplitudama izvučene isprekidanim linijama. Obratimo pažnju na to da je nestabilna grana spustila skoro do ose $\Delta(\tau)$ što je izazvano znatnim uvećanjem zone parametarskog rezonantnog stanja. Posle toga mi sastavljamo krive prolaska kroz rezonantno stanje za sledeće režime obrtanja štapa: a° $\Delta(\tau) = 0{,}85 + 0{,}003\, t$, $\varsigma \neq 0$ - gornja kriva; $\varsigma = 0$ - donja kriva na slici br. 25; b° $\Delta(\tau) = 0{,}85 + 0{,}0015\, t$, $\varsigma \neq 0$ - gornja kriva, $\varsigma = 0$ donja kriva slika br. 26. Kao što se sa grafika vidi statička neuravnoteženost koja pobudjuje osnovno rezonantno stanje na granici parametarskog rezonantnog stanja u početnom stadijumu javlja se kao osnovni uzrok porasta amplitude oscilovanja pri zadatoj brzini prolaska. Nezavisno od pojave sile unutrašnjeg otpora amplituda oscilovanja statički neuravnoteženog štapa u početnom stadijumu raste u isto vreme kao amplituda statički uravnoteženog štapa i kao posledica pojave otporne sile prigušuje se ka početku dejstva parametarske rezonancije, kada pada na minimalnu vrednost. U drugom stadijumu prolaska kroz rezonantno stanje pod dejstvom parametarske rezonancije kao uzrok se javlja različitost savojnih krutosti. Tok porasta amplituda pod dejstvom parametarskog rezonantnog stanja, kako za statički uravnotežen tako i za statički neuravnotežen štap je skoro isti na osnovu čega je prirodno doći do zaključka o dominantnom uticaju različitih krutosti. Na taj način statička neuravnoteženost u početnom stadijumu prelaznog režima razvoja amplituda oscilovanja ka početku dejstva parametarskog rezonantnog stanja izaziva znatno uvećanje početne vrednosti amplitude. U tome je i zaključak o osnovnoj ulozi statičke neuravnoteženosti. Uporedjujući amplitudno-frekventne grafike rezonantnih amplituda pri raznim brzinama prolaska, vidimo da pri manjoj brzini prolaska maksimum amplitude se pomera u stranu manjih vrednosti ugaone brzine, a porast amplitude prolazi neuporedivo brže, pri čemu je to posebno primetno za statički neuravnotežen štap.

Na narednim slikama br. 27 i 28 prikazane su amplitudno-frekventne krive stacionarnog i nestacionarnog rezonantnog stanja, kada je ekscentričnost ρ u glavnoj ravni savijanja najmanje savojne krutosti, slika br. 27, odnosno u glavnoj ravni savijanja najveće savojne krutosti slika br. 28.

Kao što se vidi sa grafika položaj ekscentričnosti u odnosu na glavne ravni savijanja suštinski utiče na veličinu maksimalnih amplituda u prelaznom režimu obrtanja pri jednoj i istoj brzini prolaska. Najveće amplitude dostižu se u prelaznom režimu, ako se ravan ekscentriciteta poklapa sa glavnom ravni savijanja najmanje savojne krutosti, najmanje pri poklapanju sa glavnom ravni savijanja najmanje savojne krutosti.



Slika br. 27



Slika br.28

VI. METODA USREDNJENJA N.N.BOGOLJUBOVA

Metoda usrednjenja se prvo javila u nebeskoj mehanici,pa je u prvoj etapi svog razvoja vezana sa zadacima iz nebeske mehanike.Tada su primenjivane različite šeme usrednjenja kao šeme Gauss-a,Fatou-a,Delloné-a,Hill-a i drugih.Osnovno u svim tim šemama metode usrednjenja je da su desne strane složenih diferencijalnih jednačina,koje opisuju oscilovanje ili obrtanje,zamenjivanje uprošćenim - "izgladjenim" ("сглаживание ") usrednjenim funkcijama,koje ne sadrže eksplicitno vreme i brzo promenljive parametre sistema.

U teoriji nelinearnih oscilacija metoda usrednjenja dugo vremena je ostala nepoznata.Bila je poznata samo metoda Van der Pol-a.

Značajne rezultate u razvijanju metode usrednjenja dali su A.N.Krilov i N.N.Bogoljubov.Oni su pokazali da se metoda usrednjenja može primeniti u slučaju kada se strane jednačina,koje se usrednjavaju javljaju kao kvaziperiodične funkcije vremena.Strogu matematičku teoriju sa dokazima izgradio je N.N.Bogoljubov i pokazao da je metoda usrednjenja suštinski povezana sa nekom zamenom promenljivih,koja dozvoljava da se vreme t isključi iz desnih strana diferencijalnih jednačina sa proizvoljnim stepenom tačnosti u odnosu na mali parametar ε ,o čemu će bliže biti reči.Bogoljubov je pokazao ne samo kako sastaviti sistem jednačina diferencijalnih prve aproksimacije nego i usrednjeni sistem diferencijalnih jednačina viših aproksimacija,čija rešenja aproksimiraju rešenja tačnog sistema sa proizvoljnom unapred zadatom tačnošću.

Н.Н. Боголюбов je izveo strogi matematički dokaz ove metode,koji se sastoji u rešavanju dva problema.Prvi problem je u odredjivanju uslova pri kojima razlika izmedju rešenja tačnog sistema jednačina

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,x) \tag{1}$$

i rešenja odgovarajućeg njemu usrednjenog sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi) \tag{2}$$

za dovoljno male vrednosti parametra ε postaje proizvoljno mala na konačnom,dovoljno velikom intervalu vremena.Drugi problem je u odredjivanju veze izmedju različitih svojstava rešenja tačnih i usrednjenih diferencijalnih jednačina,koja zavise od ponašanja na beskonačnom intervalu vremena,a posebno u uspostavljanju veze izmedju periodičnih rešenja tačnog i usrednjenog sistema jednačina. Ta dva problema matematičkog dokaza rešena su u osnovnom dvema osnovnim teoremama usrednjenja Н.Н. Боголюбова ,koje ovde nećemo obradjivati.Samo ćemo spomenuti da je neophodno postojanje srednje granične vrednosti

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T X(t,\xi)dt\right]=X_0(\xi) \tag{3}$$

U savremenom razvoju metode usrednjenja Н.Н. Боголюбов učestvuje i daje veliki doprinos poznata Kijevska škola na čelu sa Ю.А. Митропольским.Danas se u sovjetskoj literaturi može naći niz radova i monografija po temi metode usrednjenja a takodje i metode osrednjenja usmerenih na rešavanje različitih diferencijalnih jednačina počevši od onih poznatih pod imenom diferencijalnih jednačina sa brzo promenljivom fazom,preko sistema diferencijalnih jednačina sa malim parametrom uz izvode,sistema jednačina koje opisuju oscilacije izazvane trenutnim silama,pa do jednačina sa kašnjenjem i parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Mnogi ektuelni zadaci nelinearnih mehaničkih i električnih oscilacija, radiotehnike, akustike, hidroelastičnosti mogu da se rešavaju pomoću metode usrednjenja. Takodje se može očekivati i uspešna primena metode usrednjenja za izučavanje i ekonomskih i bioloških pojava. Jedan od važnih zadataka metode usrednjenja je njena dalja primena na parcijalne diferencijalne jednačine. Široka je mogućnost primene metode usrednjenja i na zadatke teorije regulisanja.

VI.1. TRANSFORMACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA NA STANDARDNI OBLIK

Neka je nelinearni oscilatorni sistem zadat sledećim izrazima dvostruke kinetičke i dvostruke potencijalne energije

$$2E_k = (\dot{q})\mathbb{A}\{\dot{q}\}$$
$$2E_p = (q)\mathbb{C}\{q\} \tag{4}$$

gde su $\mathbb{A} = (a_{ij})$; $(a_{ij} = a_{ji})$ - inercijska matrica koja karakteriše maseni raspored sistema, kvadratna je, simetrična reda n i uvek je takva da je forma kinetičke energije pozitivno definitna; $\mathbb{C} = (c_{ij})$; $(c_{ij} = c_{ji})$ - kvazielastična matrica, koja karakteriše uticaj konzervativnih sila, kojima je podvrgnut materijalni sistem; (q), $(\dot{q})$, $\{q\}$, $\{\dot{q}\}$ - matrica vrsta, odnosno matrica kolona, čiji su elementi generalisane koordinate, odnosno generalisane brzine.

Neka na materijalni sistem dejstvuju male poremećajne sile, koje se u matričnom obliku mogu napisati

$$\varepsilon \mathbb{Q} = \varepsilon\left\{\mathbb{Q}_0(q_p, \dot{q}_p) + \sum_{\alpha} \mathbb{Q}_1^{(\alpha)}(q_p, \dot{q}_p)\cos\Omega_\alpha t + \mathbb{Q}_2^{(\alpha)}(q_p, \dot{q}_p)\sin\Omega_\alpha t\right\} \tag{5}$$

gde su

$$\mathbb{Q}=\{Q_i\};\ \mathbb{Q}_1^{(\alpha)}=\{Q_{1i}^{(\alpha)}\};\ \mathbb{Q}_2^{(\alpha)}=\{Q_{2i}^{(\alpha)}\};\ \mathbb{Q}_0=\{Q_{0i}\}; \tag{6}$$

ε mali parametar, Ω_α kružne frekvencije poremećajnih sila.

Moguće je uvesti normalne koordinate pomoću matrice kolone $\{x\}$, a pomoću matrice modalne $\mathbb{V}=(\{v_j^{(s)}\})_j^{r\to s}$ glavnih vektora čiji se elementi $v_j^{(s)}$ izračunavaju iz sistema jednačina

$$\begin{aligned}&(\mathbb{C}-\omega_s^2\mathbb{A})\{v_j^{(s)}\}=0 \qquad r,s=1,2,\dots,n\\ &(v_i^{(r)})\mathbb{A}\{v_j^{(s)}\}=\delta_{rs} \qquad i,j=1,2,\dots n\end{aligned} \tag{7}$$

gde su ω_s^2 karakteristični brojevi (sopstvene vrednosti) izračunate iz frekventne jednačine

$$f(\omega^2)=|\mathbb{C}-\omega_s^2\mathbb{A}|=0 \tag{8}$$

na sledeći način

$$\{q\}=\mathbb{V}\{x\} \tag{9}$$

Tu su dvostruke kinetička i potencijalna energija

$$\begin{aligned}&2E_k=(\dot{x})\mathbb{I}\{\dot{x}\}\\ &2E_p=(x)\Lambda\{x\}\end{aligned} \tag{10}$$

$\mathbb{I}$ je jedinična dijagonalna matrica, $\Lambda=\mathbb{V}'\mathbb{C}\mathbb{V}$ dijagonalna matrica sa elementima na dijagonali jednakim karakterističnim brojevima.

Lagrange-ove jednačine druge vrste neporemećenog oscilovanja izražene pomoću normalnih koordinata su

$$\{\ddot{x}\}+\Lambda\{x\}=0 \tag{11}$$

Prelazeći na normalne koordinate dobijamo sledeći sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina poremećenog oscilovanja

$$\{\ddot{x}\} + \Delta\{x\} = \varepsilon \mathcal{X}(t,x,\dot{x}) \tag{12}$$

gde se funkcije $\varepsilon \mathcal{X}(t,x,\dot{x})$ odredjuju iz uslova ekvivalentnosti radova

$$\delta W = \varepsilon(\delta x)\mathcal{X} = \varepsilon(\delta q)Q = \varepsilon(\delta x)\nabla' Q \tag{13}$$

pa je

$$\varepsilon \mathcal{X} = \varepsilon \nabla' Q \tag{14}$$

Sistem jednačina (12) pomoću zamene promenljivih

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{z_k e^{i\omega_k t} + z_{-k} e^{-i\omega_k t}\} \\ \{\dot{x}\} &= i\{\omega_k z_k e^{i\omega_k t} - \omega_k z_{-k} e^{-i\omega_k t}\} \end{aligned} \tag{15}$$

gde su z_k i z_{-k} konjugovano kompleksne nepoznate funkcije vremena, mogu se transformisati na standardni oblik.

Diferencirajući izraze (15) i unoseći ih u sistem jednačina (12) dobijamo sistem

$$\begin{aligned} &\{\dot{z}_k e^{i\omega_k t} + \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t}\} = 0 \\ &i\{\dot{z}_k \omega_k e^{i\omega_k t} - \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t}\} = \varepsilon \mathcal{X} \end{aligned} \tag{15'}$$

odakle je

$$\{\dot{z}_k\} = -\frac{\varepsilon i}{2}\left\{\frac{X_k}{\omega_k} e^{-i\omega_k t}\right\} \tag{16}$$

gde je radi uprošćenja stavljeno da je

$$-\omega_k = \omega_k \qquad X_{-k} = X_k \tag{17}$$

pri čemu su u $X_k(t,x_p,\dot{x}_p)$ zamenjeni izrazi (15), pa je

$$\frac{i}{\omega_k} e^{-i\omega_k t} X_k(t,x_p,\dot{x}_p) = Z_k(t,z_p) \qquad k,p = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n \tag{18}$$

Sistem jednačina (12) se ovim transformisao na oblik

$$\{\dot{z}\}=\varepsilon\{Z\} \quad ili \quad \dot{\mathbf{z}}=\varepsilon \mathbf{Z} \tag{19}$$

VI.2. USVOJENE OZNAKE

Pre nego što predjemo na izlaganje same metode usrednjenja uvešćemo neke oznake koje će nam uprostiti transformacije pri objašnjavanju same metode. Pridržavaćemo se u osnovnom originalnog izlaganja H.H. Боголюбова, dajući pri tome interpretaciju pomoću matrica.

Neka su $\{z_k\}=\mathbf{z}$ matrica kolona, a (z_k) matrica vrsta sa elementima z_k $(k = 1,2,3,\ldots,n)$ i $\{Z_k\}=\mathbf{Z}$ matrica kolona sa elementima $Z_k(t,z_1,z_2,\ldots,z_n)$. Jednačine na kojima ćemo prikazati metodu usrednjenja, pišemo u obliku

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}=\varepsilon \mathbf{Z}(t,\mathbf{z}) \tag{20}$$

Elementi matrice $\mathbf{Z}$ mogu da se pretstave u obliku

$$\mathbf{Z}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\mathbf{Z}_\nu e^{i\nu t} \tag{21}$$

gde je

$$\mathbf{Z}_\nu=\left\{Z_{\nu k}(z_1,z_2,\ldots,z_n)\right\} \tag{22}$$

Za izvod matrične funkcije $\mathbf{F}(t,\mathbf{z})=\{F\}$ pisaćemo da je

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}+\frac{d\mathbf{z}}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right\}\mathbf{F} \tag{23}$$

Ako se matrična funkcija $\mathbf{F}(t,\mathbf{z})$ može da pretstavi u vidu zbira oblika

$$F(t,x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} F_\nu(x) \tag{24}$$

to možemo da uvedemo sledeće oznake

$$\underset{t}{M}\{F(t,x)\} = F_0(x) \qquad \text{operator usrednjenja} \tag{25}$$

$$\tilde{F}(t,x)=\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu} F_\nu(x) \tag{26}$$

$$\tilde{\tilde{F}}(t,x)=\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{(i\nu)^2} F_\nu(x) \tag{27}$$

i da na osnovu njih dobijemo identitete

$$\frac{\partial\tilde{\tilde{F}}}{\partial t}=\tilde{F}\ ; \qquad \frac{\partial\tilde{F}}{\partial t}=F-\underset{t}{M}\{F(t,x)\} \tag{28}$$

Operator $\sim$ ćemo nazvati operatorom integracije, a $\underset{t}{M}$ operatorom usrednjenja po promenljivoj t.

VI. METODA USREDNJANJA H.H. БОГОЛЮБОВА

Oblik približnog rešenja sistema

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\}=\varepsilon\{X(t,x)\} \quad ili \quad \frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,x) \tag{29}$$

može biti nadjen ili bolje reći pogodjen, pomoću savršeno intuitivnih rasudjivanja. Kako je $\frac{dx}{dt}$ proporcionalno malom parametru, to je prirodno računati da je x sporopromenljiva veličina. Zato možemo da $x=\{x\}$ predstavimo kao zbir ravnomerno promenljivog člana ξ i zbira malih oscilatornih članova i zbog njihovih malih veličina u desnoj strani jednačine (29), možemo u prvoj aproksimaciji da stavimo da je $x=\xi$. Zbog (21) možemo da pišemo

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \varepsilon \mathcal{X}_0(\xi) + \varepsilon \sum_{\nu=0} e^{i\nu t} \mathcal{X}_\nu(\xi). \tag{30}$$

Zbir koji stoji na desnoj strani ove matrične jednačine (30) sastoji se iz malih sinusoidnih sabiraka, a smatrajući da oni izazivaju samo male oscilacije $\mathfrak{x}$ oko ξ i ne utiču na sistematsku promenu $\mathfrak{x}$ (nerezonantni slučaj) mi ih možemo zanemariti i doći do diferencijalne jednačine prve aproksimacije u matričnom obliku

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathcal{X}_0(\xi) = \varepsilon \underset{t}{M}\{\mathcal{X}(t,\xi)\} \tag{31}$$

Za dobijanje druge aproksimacije u izrazu za $\mathfrak{x}$ neophodno je uzeti u obzir i oscilatorne članove $\varepsilon e^{i\nu t}\mathcal{X}_\nu(\xi)$, koji u rešenju $\mathfrak{x}$ izazivaju oscilacije oblika

$$\frac{\varepsilon}{i\nu} e^{i\nu t} \mathcal{X}_\nu(\xi) \tag{32}$$

tako da dolazimo do izaraza

$$\mathfrak{x} = \xi + \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} \mathcal{X}_\nu(\xi) = \xi + \varepsilon \widetilde{\mathcal{X}}(t,\xi) \tag{33}$$

U sistemu jednačina (29) izvršimo zamenu promenljivih (33) pri čemu ξ posmatramo kao nepoznatu

$$\frac{d}{dt}\left[\xi + \varepsilon \widetilde{\mathcal{X}}(t,\xi)\right] = \varepsilon \mathcal{X}\left(t, \xi + \varepsilon \widetilde{\mathcal{X}}(t,\xi)\right) \tag{34}$$

Diferenciranjem izraza na levoj strani prethodne matrične jednačine dobijamo

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \widetilde{\mathcal{X}}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \widetilde{\mathcal{X}}}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathcal{X}\left(t, \xi + \varepsilon \widetilde{\mathcal{X}}(t,\xi)\right) \tag{35}$$

odnosno

$$\left(I + \varepsilon \frac{\partial \widetilde{\mathcal{X}}}{\partial \xi}\right)\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathcal{X}_0(\xi) + \varepsilon\left[\mathcal{X}(t, \xi + \varepsilon \widetilde{\mathcal{X}}(t,\xi)) - \mathcal{X}(t,\xi)\right] \tag{36}$$

Množeći levu i desnu stranu poslednje matrične jednačine inverznom matricom

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)-\varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)+\varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)+\varepsilon^3\cdots \tag{37}$$

za nove nepoznate dobijamo

$$\left(\mathbb{I}+\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\right)^{-1}\approx\mathbb{I}-\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\cdots\cdots \tag{38}$$

Znemarujući male veličine drugog reda, dobijamo jednačine prve aproksimacije

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)=\varepsilon \underset{t}{M}\{X(t,\xi)\} \tag{39}$$

Kao prvu aproksimaciju možemo da usvojimo

$$x=\xi \tag{40}$$

uzevši da je ξ rešenje jednačine prve aproksimacije (39) dok ćemo izraz (33) u kome ξ zadovoljava istu jednačinu nazvati prvom popravljenom aproksimacijom.

Za dobijanje druge aproksimacije tražićemo zamenu promenljivih analognu zameni (33) koja promenljivu transformiše na promenljivu x i pri tome zadovoljava jednačinu

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)+\varepsilon^2 P(\xi)+\varepsilon^3 \tag{41}$$

Potražimo sada rešenje u obliku

$$x=\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi)+\varepsilon^2 F(t,\xi) \tag{42}$$

gde se $F(t,\xi)$ može predstaviti zbirom

$$F(t,\xi)=\sum_{\mu} e^{i\mu t}F_{\mu}(\xi) \tag{43}$$

Unoseći izraz (42) u jednačinu (29) dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left[\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi)+\varepsilon^2 F(t,\xi)\right]=\varepsilon X\left(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi)+\varepsilon^2 F(t,\xi)\right) \tag{44}$$

i izvodeći naznačeno diferenciranje na levoj strani jednačine (44) i razlažući u Taylor-ov red desnu stranu dobijamo

$$\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial t}=\varepsilon X(t,\xi)+\varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)+\varepsilon^3 \tag{45}$$

ili

$$\varepsilon X(t,\xi)+\varepsilon^2 P(\xi)+\varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)+\varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial t}+\varepsilon^3\dots=\varepsilon X(t,\xi)+\varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)+\varepsilon^3\dots \tag{46}$$

Da bi leva i desna strana ove jednačine bile medjusobom jednake s tačnošću do malih veličina trećeg reda potrebno je da izaberemo funkcije $P(\xi)$ i $F(t,\xi)$ tako da bude zadovoljen sledeći odnos

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\left[\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)-P(\xi) \tag{47}$$

Imajući u vidu da je

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t,\xi)&=\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}X_\nu(\xi)\\ X(t,\xi)&=\sum_{\nu}e^{i\nu t}X_\nu(\xi)\end{aligned} \tag{48}$$

to možemo da napišemo

$$\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)=\sum_{\mu}e^{i\mu t}\Phi_\mu(\xi) \tag{49}$$

Da bi odnos (47) bio zadovoljen potrebno je da je

$$P(\xi)=\Phi_0(\xi)=\underset{t}{M}\left\{\left[\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]X(t,\xi)-\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)\right\} \tag{50}$$

odnosno da je

$$F(t,\xi)=\widetilde{\left[\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]X(t,\xi)}-\frac{\partial\tilde{\tilde{X}}}{\partial\xi}X_0(\xi) \tag{51}$$

Iz svega napred rečenog može da se izvede zaključak da za ξ, odredjeno iz jednačine

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon\underset{t}{M}\{X(t,\xi)\}+\varepsilon^2\underset{t}{M}\left\{\left[\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]X(t,\xi)\right\} \tag{52}$$

izraz

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi) + \varepsilon^2 \widetilde{\left[\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right] X(t,\xi)} - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{\tilde{X}}}{\partial \xi} X_0(\xi) \tag{53}$$

zadovoljava jednačinu (29) sa tačnošću do malih veličina trećeg reda.

Pokažimo sada da izraz (53) možemo da smatramo zamenom promenljivih pomoću koje možemo jednačinu (29) da transformišemo na oblik (41). Zbog toga prodiferenciramo izraz (53) i imajući u vodu izraze (50) i (51) dobijamo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial t} = \left(I + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}\right)\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial t} =$$

$$= \left(I + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}\right)\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2 \left[\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right] X(t,\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) - \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \underset{t}{M}\left\{\left[\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right] X(t,\xi)\right\} \tag{54}$$

Zamenjujući vrednost x zadatu izrazom (53) u denu stranu jednačine (29) i razvijajući u red dobijamo

$$\varepsilon X(t,x) = \varepsilon X\left(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t,\xi) + \varepsilon^2 F(t,\xi)\right) = \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2 \left[\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right] X(t,\xi) + \varepsilon^3 \cdots \tag{55}$$

Izjednačavajući izraze (54) i (55) i istovremeno množeći sa

$$\left(I + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^{-1} = I - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \cdots \tag{56}$$

i rešavajući po $\frac{d\xi}{dt}$ dobijamo

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\left\{X(t,\xi)\right\} + \varepsilon^2 \underset{t}{M}\left\{\left[\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right] X(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3 \cdots \tag{57}$$

Više aproksimacije se mogu dobiti slično dobijanju druge aproksimacije. U primeni se uglavnom koristi prva, a ponekad druga. Više aproksimacije se uglavnom primenjuju za opšta teorijska razmatranja i analizu svojstva sistema. Praktično se ona retko primenjuju usled brzog usložnjavanja njihovog sastavljanja.

VI.4. ANALIZA USREDNJENIH JEDNAČINA

Dobijene usrednjene jednačine imaju osnovno preimućstvo nad tačnim u tome što ne sadrže u desnim stranama eksplicitno vreme i javljaju se ako autonomne. Uporedo sa tim one su i diferencijalne, što nalaže odredjena ograničenja na mogućnosti primene izložene metode. I pored toga za veliki broj praktično interesantnih zadataka usrednjene jednačine su veoma pogodne za njihovo rešavanje ili pak za izučavanje. Pri tome je u mnogim slučajevima, gde opšte rešenje usrednjenog sistema ne može da se dobije, moguće je u krajnjem slučaju, izučiti partikularna rešenja, koja odgovaraju uspostavljenim stacionarnim procesima. Pri proizvoljnom n, ako $X_0(\xi)$ postaje jednako nuli u nekoj tački $\xi=\xi_0$ možemo proučiti "kvazistatičko" rešenje $\xi=\xi_0$ diferencijalnih jednačina prve aproksimacije. Za proučavanje stabilnosti tog rešenja moguće je sastaviti jednačine u varijacijama

$$\frac{d\delta\xi}{dt}=\varepsilon\frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial\xi}\delta\xi \tag{58}$$

koje su linearne, pa možemo sastaviti karakterističnu jednačinu oblika

$$\mathrm{Det}\left|p-\varepsilon\frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial\xi}\right|=0 \tag{59}$$

u kojoj su p koreni karakteristične jednačine, zavisno od čijeg znaka realnog dela odredjujemo stabilnost ili nestabilnost "kvazistatičkog" rešenja. Ako bi bar jedan koren karakteristične jednačine imao pozitivan realni deo imali bi smo slučaj nestabilnosti "kvazistatičkog" rešenja. Ako su svi realni delovi korena karakteristične jednačine jednaki nuli, onda je potrebno izvršiti analizu pomoću jednačina viših aproksimacija. U formulama viših aproksimacija najčešće se javljaju mali delitelji tako da se praktična primenljivost metode usrednjenja odredjuje asimptotskim svojstvima za odredjeni rang aproksimacije i za $\varepsilon \to 0$.

VI.5. P R I M E R I

1° Rešenje jednačine Van der Pol-a. Kao primer za ilustraciju izložene metode usrednjenja proučimo klasičnu jednačinu Van der Pol-a

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{60}$$

i uvedimo nove promenljive a i φ pomoću formula zamene

$$\begin{aligned} x &= a\cos(t+\varphi) \\ \frac{dx}{dt} &= -a\sin(t+\varphi) \end{aligned} \tag{61}$$

Van der Pol-ovu jednačinu transformišemo na sistem diferencijalnih jednačina u standardnom obliku, a izražene matrično

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} a \\ \varphi \end{Bmatrix} = \varepsilon \begin{Bmatrix} \frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^3}{2}\cos 2(t+\varphi) + \frac{a^3}{8}\cos 4(t+\varphi) \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\sin 2(t+\varphi) - \frac{a^2}{8}\sin 4(t+\varphi) \end{Bmatrix} \tag{62}$$

Usrednjene jednačine u prvoj aproksimaciji glase

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} a_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = \varepsilon \begin{Bmatrix} \frac{a_1}{2}\left(1-\frac{a_1^2}{4}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{63}$$

pa je rešenje za početnu amplitudu $a_1 = a_0$ i fazu φ_{10}

$$x = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}a_0^2(e^{\varepsilon t}-1)}}\cos(t+\varphi_{10}) \tag{64}$$

za slučaj da je $\frac{da_1}{dt} = 0$ imamo stacionarnu amplitudu $a_0 = 2$, pa je rešenje $x = 2\cos(t+\varphi_{10})$.

Usrednjene jednačine u drugoj aproksimaciji glase

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} a_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = \varepsilon\begin{Bmatrix} \frac{a_1}{2}\left(1-\frac{a_1^2}{4}\right) \\ -\varepsilon\left(\frac{1}{8}-\frac{a_1^2}{8}+\frac{7a_1^4}{256}\right) \end{Bmatrix} \tag{65}$$

dok je stacionarno rešenje u drugoj aproksimaciji

$$x = 2\cos(t+\varphi_1) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(t-\varphi_1) \tag{66}$$

2° Klatno sa oscilujućom tačkom vešanja. Kao primer proučimo oscilovanje fizičkog klatna koje se može slobodno okretati oko odredjene horizontalne ose u vertikalnoj ravni čija tačka vešanja osciluje po sinusnom zakonu u vertikalnom pravcu malom amplitudom a i kružnom frekvencijom Ω, tako da je

$$\Omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\frac{\ell_r}{a}\,; \qquad \frac{\ell_r}{a} \ll 1\,; \tag{67}$$

gde je ℓ_r redukovana dužina fizičkog klatna, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ kružna frekvencija malih slobodnih oscilacija klatna.

Pokazaćemo da gornji nestabilni položaj ravnoteže može postati stabilan za odredjene odnose parametra klatna. Da bi smo proučili mogućnost te interesantne pojave posmatraćemo jednačinu oscilovanja klatna sa oscilujućom tačkom vešanja

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda\frac{d\theta}{dt} + \frac{g - a\Omega^2\sin\Omega t}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{68}$$

gde je θ ugao otklona, koji se računa od donjeg položaja ravnoteže, $y = a\sin\Omega t$ je vertikalno pomeranje tačke vešanja, λ koeficijent otpora za koji pretpostavljamo da ima takvu vrednost da za slučaj fiksirane tačke vešanja, kretanje klatna za male otklone od donjeg položaja ravnoteže ima oscilatorni karakter $\lambda^2/4 < g/\ell$.

Da bi smo primenili metodu usrednjenja neophodno je u jednačini (68) izabrati mali parametar i svesti jednačinu na standardni oblik. Umesto vremena uvedemo vreme čija je jedinica 2π, $\tau=\Omega t$, pa će biti

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+\frac{\lambda}{\Omega}\frac{d\theta}{dt}+\left(\frac{g}{l\Omega^2}-\frac{a}{l}\sin\tau\right)\sin\theta=0 \tag{69}$$

Radi uprošćenja uvedemo i oznake

$$\kappa=\frac{\omega}{\Omega}\frac{l}{a}\,;\quad \alpha=\frac{\lambda}{2\omega}\kappa;\quad \frac{g}{l\omega^2}=\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2=\kappa^2\left(\frac{a}{l}\right)^2;\quad \frac{\lambda}{\omega}=\frac{\lambda}{\omega_0}\frac{\omega_0}{\omega}=2\alpha\frac{a}{l}; \tag{70}$$

i jednačinu (69) možemo napisati u obliku

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+2\alpha\frac{a}{l}\frac{d\theta}{d\tau}+\left\{\kappa\left(\frac{a}{l}\right)^2-\left(\frac{a}{l}\right)\sin\tau\right\}\sin\theta=0 \tag{71}$$

Za mali parametar usvojimo $\varepsilon=\frac{a}{l}$ pa dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+2\varepsilon\alpha\frac{d\theta}{d\tau}+\varepsilon(\kappa\varepsilon-\sin\tau)\sin\theta=0 \tag{72}$$

Da bi smo jednačinu (72) transformisali na standardni oblik uvodimo promenljive φ i Ω pomoću sledećih formula zamene

$$\theta=\varphi-\varepsilon\sin\tau\sin\varphi \tag{73}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\varepsilon\Omega-\varepsilon\cos\tau\sin\varphi \tag{74}$$

Diferenciranjem izraza (73) i uporedjivanjem sa (74) dobijamo da je

$$(1-\varepsilon\sin\tau\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\tau}=\varepsilon\Omega \tag{75}$$

Diferenciranjem izraza (74) i zamenom u (72) dobijamo

$$\frac{d\Omega}{dt}=\varepsilon\left\{-\sin^2\tau\sin\varphi\cos\varphi-\kappa^2\sin\varphi+\Omega^2\cos\tau\cos\varphi-2\alpha\Omega+2\alpha\cos\tau\sin\varphi\right\}+\varepsilon^2\ldots \tag{76}$$

a iz izraza (75) dobijamo

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\varepsilon\Omega+\varepsilon^2\ldots \tag{77}$$

Usrednjenjem poslednjih dveju jednačina dobijamo sistem usrednjenih jednačina u prvoj aproksimaciji

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\varepsilon\Omega$$
$$\frac{d\Omega}{d\tau}=-\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\kappa^2\sin\varphi+2\alpha\Omega\right\} \tag{78}$$

Umesto ovog sistema od dveju usrednjenih jednačina prvog reda zgodnije je proučavati jednu jednačinu drugog reda pa iz sistema (78) eliminacijom promenljive Ω dobijamo

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+2\varepsilon\alpha\frac{d\varphi}{d\tau}+\varepsilon^2\left(\kappa^2+\frac{1}{2}\cos\varphi\right)\sin\varphi=0 \tag{79}$$

Ova jednačina prve aproksimacije je mnogo prostija od tačne jednačine (71) zato što eksplicitno ne sadrži vreme. Ova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu oscilovanja sistema sličnog klatna sa nepokretnom tačkom vešanja u kome je restituciona sila proporcionalna ne $\sin\varphi$, nego $\left(\kappa^2+\frac{1}{2}\cos\varphi\right)\sin\varphi$.

Analizirajući usrednjenu jednačinu (79) zaključujemo da ima kvazistatičko rešenje $\varphi=\pi$, koje odgovara gornjem položaju ravnoteže klatna. Za izučavanje stabilnosti proučićemo male otklone $\delta\varphi$ od položaja ravnoteže. Zato sastavljamo jednačinu pomoću varijacijama

$$\frac{d^2\delta\varphi}{d\tau^2}+2\varepsilon\alpha\frac{d\delta\varphi}{d\tau}+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}-\kappa^2\right)\delta\varphi=0 \tag{80}$$

pa će uslov stabilnosti da bude $\left(\frac{1}{2}-\kappa^2\right)>0$, odnosno

$$\Omega>\sqrt{\frac{2g}{\ell}}\,\frac{\ell}{a} \tag{81}$$

Odavde izvodimo zaključak da ako je frekvencija oscilovanja tačke vešanja dovoljno velika tako da je zadovoljena nejednakost (81) tada je gornji položaj klatna stabilan. Na sličan način dolazimo do zaključka da je gornji položaj $\varphi=0$ uvek stabilan.

3° Oscilacije klatna sa sporopromenljivom dužinom. Proučimo primenu metode usrednjenja na matematičkom klatnu konstantne mase u uslovima malog otpora, proporcionalnog brzini i sa sporopromenljivom dužinom.

Označićemo sa x ugao otklona klatna od vertikalnog položaja, g ubrzanje zemljine teže, m masu klatna, $\ell=\ell(\tau)$ sporopromenljivu dužinu, 2δ koeficijent otporne sile. Diferencijalna jednačina oscilovanja je

$$\frac{d}{dt}\left[m\ell^2(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+2\delta\frac{d}{dt}\left[\ell(\tau)x\right]+mg\ell(\tau)\sin x=0 \qquad \tau=\varepsilon t \tag{82}$$

Za dovoljno male otklone možemo $\sin x$ da zamenimo sa prva dva člana stepenog reda i jednačinu možemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\left[m\ell^2(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+mg\,\ell(\tau)x=\frac{mg\ell(\tau)}{6}x^3-2\delta\ell(\tau)\frac{dx}{dt}-2\varepsilon\delta\frac{d\ell(\tau)}{d\tau}x \tag{83}$$

Da bi smo pri sastavljanju jednačina prve aproksimacije lakše mogli da uračunavamo male članove uvešćemo smenu $x=\sqrt{\varepsilon}\,x_1$ i $\delta=\varepsilon\delta_1$ koja karakteriše malost amplitude oscilovanja i otporne sile, pa jednačinu (83) možemo da napišemo u obliku

$$\frac{d}{dt}\left[m\ell^2(\tau)\frac{dx_1}{dt}\right]+mg\ell(\tau)x_1=\varepsilon\left\{\frac{mg\ell(\tau)}{6}x_1^3-2\delta_1\ell(\tau)\frac{dx_1}{d\tau}\right\}-2\varepsilon^2\delta_1\frac{d\ell(\tau)}{d\tau}x_1 \tag{84}$$

Uvedemo smenu

$$x_1=a\cos\psi \qquad \frac{dx_1}{dt}=-a\,\omega(\tau)\sin\psi \tag{85}$$

pa usrednjene jednačine prve aproksimacije dobijamo u obliku

$$\frac{da}{dt}=-\varepsilon\left[\frac{\delta_1}{m\ell(\tau)}+\frac{3\ell(\tau)}{4\ell(\tau)}\right]a$$
$$\frac{d\psi}{dt}=\omega(\tau)\left(1-\varepsilon\frac{a^2}{16}\right) \tag{86}$$

gde je $\omega(\tau)=\sqrt{\dfrac{g}{\ell(\tau)}}$. Integraljenjem prve jednačine ovog sistema za početne uslove $t=0$, $a=a_0$ dobijamo izraz za amplitudu rešenja

$$a = a_0 e^{-\frac{\varepsilon\delta_1}{m}\int_0^t \frac{dt}{\ell(\tau)}} \left[\frac{\ell(0)}{\ell(\tau)}\right]^{3/4} \tag{87}$$

i unošenjem ovog izraza u drugu jednačinu sistema (86) dobijamo izraz za fazu

$$\psi = \int_0^t \omega(\tau)\left[1 - \frac{\varepsilon a_0^2 e^{-\frac{2\varepsilon\delta_1}{m}\int_0^t \frac{dt}{\ell(\tau)}}\left[\frac{\ell(0)}{\ell(\tau)}\right]^{3/2}}{16}\right]dt \tag{88}$$

Jednačine (87) i (88) omogućavaju da se izvede potpuna analiza oscilovanja klatna sa sporopromenljivom dužinom. Unoseći u te jednačine zadatu vrednost za sporopromenljivu dužinu $\ell(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$ i izjednačavajući integrale moguće je dobiti proste formule za amplitudu i fazu koje se mogu lako da analiziraju.

Za slučaj otsustva otporne sile imamo

$$a = a_0\left[\frac{\ell(0)}{\ell(\tau)}\right]^{3/4} \tag{89}$$

U literaturi se nalazi pojam a d i j a b a t s k e invarijante za sisteme sa sporopromenljivim parametrima, koji se definiše količnikom energije i frekvencije sistema

$$\frac{E}{\omega} = const \tag{90}$$

Za klatno sa sporopromenljivom dužinom energija E sistema je

$$E = mg\ell(\tau)\overline{x^2} = mg\ell\,\overline{a^2\cos^2\psi} = mg\frac{\ell a_0}{2}\left[\frac{\ell(0)}{\ell(\tau)}\right]^{3/2} \tag{91}$$

pa je odnos

$$\frac{E}{\omega} = \frac{mg\ell(\tau)\,a_0^2\left[\frac{\ell(0)}{\ell(\tau)}\right]^{3/2}}{2\left[\frac{g}{\ell(\tau)}\right]^{1/2}} = \frac{mga_0^2}{2\sqrt{g}}\left[\ell(0)\right]^{3/2} = const \tag{92}$$

adijabatska invarijanta i konstantan je.

OSNOVNA LITERATURA

1. Andronov A. Vitt A.A. Hajkin C.E. Teorija kalebanjija, Moskva 1959
2. Andjelić T. Osnovi mehanike neprekidnih sredina, Beograd 1950
3. Bogoljubov N.N. Mitropoljskij J.A. Asimptotičeskije metodi v teoriji nelinjejnih kalebanjij, Moskva 1961
4. Babakov J.M. Teorija kalebanjija, Moskva 1958
5. Vujičić V. Teorija oscilacija, Beograd 1967
6. Krilov N.M. Bogoljubov N.N. Osnovnie problemi nelinjejnoj mehaniki, Lenjingrad 1932
7. Ljapunov A.M. Obščaja zadača ob ustojčivosti dviženija, AN SSSR 1965
8. Mitropoljskij J.A. Problemi asimptotičeskoj teoriji nestacionarnih kalebanjij, Moskva 1964.
9. Mitropoljskij J.A. Lekciji po metodu usrednjenjija v nelinjejnoj mehanike, Kijev 1966
10. Mitropoljskij J.A. Mosejenkov B.I. Lekciji po primenjenjiju asimptotičeskij metodov k rešenjiju uravnjenjij v časnih proizvodnih, Kijev 1968
11. Rašković D. Teorija oscilacija, Beograd 1965
12. Stevanović K. Magistarska teza, Niš 1972
13. STevanović - Hedrih K. Doktorska disertacija, Niš 1974
14. Kauderer H. Nihtlinear Mehanik, Berlin 1965
15. Stevanović K. Diplomski rad, Niš 1967
16. Kloter K. Technische Schwingungslehre, I Band. Berlin 1951
17. Magnus K. Schwingungen, Stuttgart 1961
18. Stoker J. Nonlinear Vibrations, London 1950.
19. Moisseev N. Asimptotičeskije metodi nelinjejnoj mehaniki, Mir, Moskva 1969