Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu
KATEDRA ZA MEHANIKU I AUTOMATIKU
Dvogodišnja nastava



# Rešeni ispitni zadaci iz
# MEHANIKE I
## (Statika i Otpornost materijala)

Katica Hedrih
Ratko Pavlović

N I Š
1978.

MAŠINSKI FAKULTET UNIVERZITETA U NIŠU
KATEDRA ZA MEHANIKU I AUTOMATIKU
DVOGODIŠNJA NASTAVA



REŠENI ISPITNI ZADACI IZ

# MEHANIKE I

(Statika i Otpornost materijala)

KATICA HEDRIH
RATKO PAVLOVIĆ

N I Š
1 9 7 8

Na osnovu odluke po planu izdavačke delatnosti Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu 1979.god. 617/1 od 11.5.1979. i odluke Nastavno-naučnog veća 1380/1 od 19.10.1979.god. odobreno kao skripta za studente dvogodišnje nastave na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu.

RECENZIJA: Dr Veljko Vujičić, red. prof.

IZDAJE: Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu

ŠTAMPA: Štamparija Mašinskog fakulteta u Nišu

TIRAŽ: 600 primeraka

N I Š

1 9 7 9

# PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka obuhvata komplete ispitnih zadataka iz Mehanike I i u skladu je sa nastavnim programom predmeta, koji se sluša na prvoj godini dvogodišnjih studija na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu.

Svi kompleti zadataka koje zbirka sadrži bili su ispitni zadaci na pismenom delu ispita iz Mehanike I u periodu od novembra 1976. god. do februara 1979. god. Kompletno su data rešenja svih zadataka, dok su karakteristični od njih propraćeni i tekstom koji pruža detaljnija uputstva za njihovo razumevanje.

Većinu zadataka sastavio je prvi autor.

Autori se nadaju da će objavljivanje ove zbirke zadataka biti od velike koristi studentima u toku završne pripreme ispita.

Pri crtanju statičkih dijagrama uobičajen je i rasprostranjen način kojim se ne ističe samo funkcionalna zavisnost sila i momenata od koordinata tačaka na uzdužnoj osi z modela, nego su grafički, u razmeri naravno, ucrtani i vektori sila ili momenata koje dejstvuju koncentrisano u pojedinim tačkama. To je učinjeno i u tačkama u kojima ove funkcije imaju prekide, te čitalac treba sa grafika da meri vrednost sile ili momenta neposredno levo ili neposredno desno od preseka.

Isto tako, da bi se izbegle eventualne zabune u pogledu smerova, na dijagramima su označena plja (-) ili (+) u kojima ove veličine zadržavaju odredjene pozitivne ili negativne vrednosti.

Profesor dr Veljko Vujičić pregledao je zbirku u rukopisu i učinio vrlo korisne primedbe na čemu su autori veoma zahvalni.

Niš, januara 1979. god.

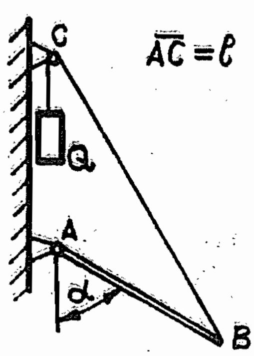
Katica Hedrih

Ratko Pavlović

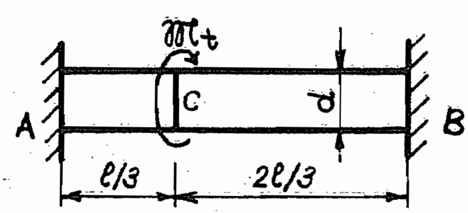
Autori se zahvaljuju drugovima Cvetković Draganu i Tepšić Nebojši čijim zalaganjem je ubrzano umnožavanje ove zbirke.

NOVEMBARSKI ISPITNI ROK 1976

**PRVI ZADATAK:** Homogeni prizmatični štap AB $\ell = 2$ [m], težine $G = 20$ [N], vezan je krajem A zglavkasto za zid i zaklapa ugao $\alpha = 60^\circ$ sa zidom, dok njegov drugi kraj B pridržava uže prebačeno preko kotura C, zanemarljivih dimenzija i koje na drugom kraju nosi teg težine Q. Tačka C je na vertikali kroz A i na visini jednakoj $\ell$. Odrediti težinu tega Q, pod uslovom da održava štap u definisanom položaju ravnoteže, prikazanom na slici br. 1. Izračunati i otpor zgloba A.




Slika br. 1



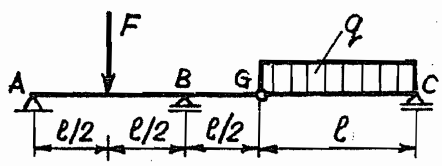

Slika br. 2

**DRUGI ZADATAK:** Obostrano uklešteno vratilo AB, dužine $\ell = 3$ [m], kružnog poprečnog preseka, prečnika d, opterećeno je u preseku C, na rastojanju $\ell/3$ od levog ukleštenja A, momentom uvijanja $\mathfrak{M}_t = 6$ [Mpm]. Dimenzionisati čelično vratilo ako je dozvoljeni napon na smicanje $\tau_{dt} = 400$ [kp/cm$^2$]. Skicirati dijagram momenta uvijanja. (Slika br. 2)

**TREĆI ZADATAK:** Kontinualni nosač ABGC sa zglobom u G, raspona kao na slici br. 3, gde je $\ell = 4$ [m], opterećen je na sredini prvog raspona silom $F = 4$ [Mp], dok je duž drugog raspona GC opterećen kontinualnim opterećenjem $q = 1$ [Mp/m]. Odrediti:

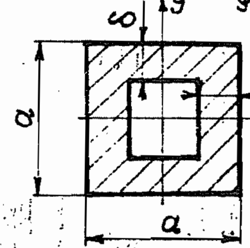
a) otpore oslonaca i skicirati statičke dijagrame nosača;

b) Dimenzionisati nosač poprečnog preseka kao na slici br. 3a, ako je dozvoljeni napon savijanja $\sigma_{df} = 10\,[kp/mm^2]$;
c) Izračunati vrednosti normalnog i tangencijalnog napona u preseku S ( $\overline{SG} = \overline{BS}$), a u tačkama poprečnog preseka na udaljenju a/4 od neutralne ose.




Slika br. 3

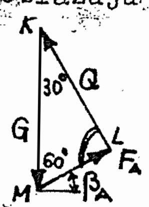
$\psi = \frac{\delta}{a} = \frac{1}{4}$




Slika br. 3a

R E Š E N J A

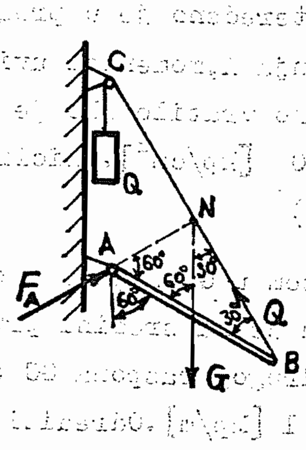
PRVI ZADATAK: Na slici br. 4 prikazane su sile koje dejstvuju na štap. Kada se ukloni uže, njegov uticaj se zamenjuje silom Q jednakom težini tega, dok se uticaj zgloba A izražava silom $F_A$, koja pretstavlja otpor zgloba. Kako na štap AB dejstvuju tri sile, sila težine štapa G, sila u užetu Q i otpor zgloba $F_A$, to, da bi štap bio u ravnoteži potrebno je da se sve tri sile seku u jednoj tački, odnosno da se njihove napadne linije seku u jednoj tački, i da sile obrazuju zatvoreni trougao sila. Iz trougla sila sledi:




$$F_A = G\cos 60° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10\,[N]$$
$$Q = G\cos 30° = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,[N]$$
$$\beta_A = 30°$$

Čime smo odredili sve tražene elemente.

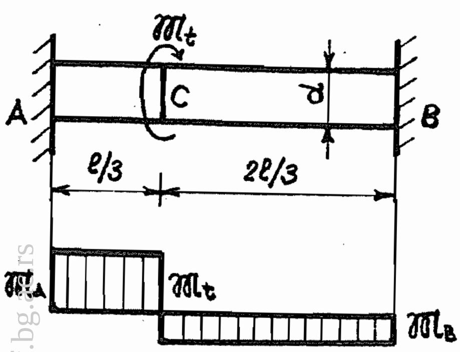
Zadatak možemo rešiti i na drugi način, koristeći uslove ravnoteže ravnog sistema sila:




Slika br. 4

$$\sum M_A = -G\frac{\ell}{2}\sin 60° + Q\cdot\ell\cdot\sin 30° = 0$$
$$\sum X_i = X_A - Q\sin 30° = 0$$
$$\sum Y_i = -G + Y_A + Q\cos 30° = 0$$
$$Q = G\frac{\sin 60°}{2\cdot\sin 30°} = 20\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}} = 10\sqrt{3}\;[N]$$
$$X_A = Q\cdot\sin 30° = 10\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 5\sqrt{3}\;[N]$$
$$Y_A = G - Q\cos 30° = 20 - 10\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\;[N]$$
$$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{75+25} = 10\;[N]$$

DRUGI ZADATAK: Vratilo prikazano na slici br. 5 opterećeno momentom uvijanja $\mathfrak{M}_t = 6$ [Mpm], uklešteno je u tačkama A i B, gde će se javiti otpori ukleštenja u vidu momenata $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$, te kako postoji statički uslov ravnoteže to je problem odredjivanja momenata ukleštenja jedanput statički neodredjen. Dopunsku jednačinu - uslov za odredjivanje momenata ukleštenja nalazimo iz uslova kompatibilnosti deformacija - uvijanja vratila. Ako zamislimo da smo vratilo razdvojili u preseku C tako da dobijemo dva konzolna vratila AC i CB opterećena momentima uvijanja $\mathfrak{M}_A$, odnosno $\mathfrak{M}_B$ to iz jednakosti uglova uvijanja $\theta^{(c)}_{AC} = \theta^{(c)}_{BC}$ dobijamo dopunsku jednačinu. Sada su jednačine za odredjivanje momenata ukleštenja:




Slika br. 5

$$\Sigma M = 0 \qquad \mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_t$$

$$\theta^{(c)}_{AC} = \theta^{(c)}_{BC} \qquad \frac{\mathfrak{M}_A \cdot \ell/3}{I_o \cdot G} = \frac{\mathfrak{M}_B \cdot 2\ell/3}{I_o \cdot G}$$

$$\mathfrak{M}_A = 2\mathfrak{M}_B$$

$$3\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_t$$

te su momenti ukleštenja:

$$\mathfrak{M}_B = \tfrac{1}{3}\mathfrak{M}_t = \tfrac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ [Mpm]}$$

$$\mathfrak{M}_A = \tfrac{2}{3}\mathfrak{M}_t = \tfrac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ [Mpm]}$$

Na istoj slici br. 5 prikazan je dijagram momenata uvijanja. Kako je moment $\mathfrak{M}_A$ veći od momenta $\mathfrak{M}_B$, a poprečni presek vratila konstantan duž vratila, to je moment $\mathfrak{M}_A$ merodavan za dimenzionisanje. Iz uslova da je maksimalni tangencijalni napon manji od dozvoljenog $\tau_{ds}$ izračunavamo koliki najmanji poprečni presek vratila može da bude, odnosno najmanji dopušteni prečnik poprečnog preseka:

$$W_o = \frac{\pi d^3}{16} \qquad \tau_{max} = \frac{\mathfrak{M}_A}{W_o} \leq \tau_{ds}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,\mathfrak{M}_A}{\pi \cdot \tau_{ds}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4 \cdot 10^5}{3{,}14 \cdot 400}} = 10\sqrt[3]{5{,}1} = 10 \cdot 1{,}72$$

$$d = 17{,}2 \text{ [cm]}$$

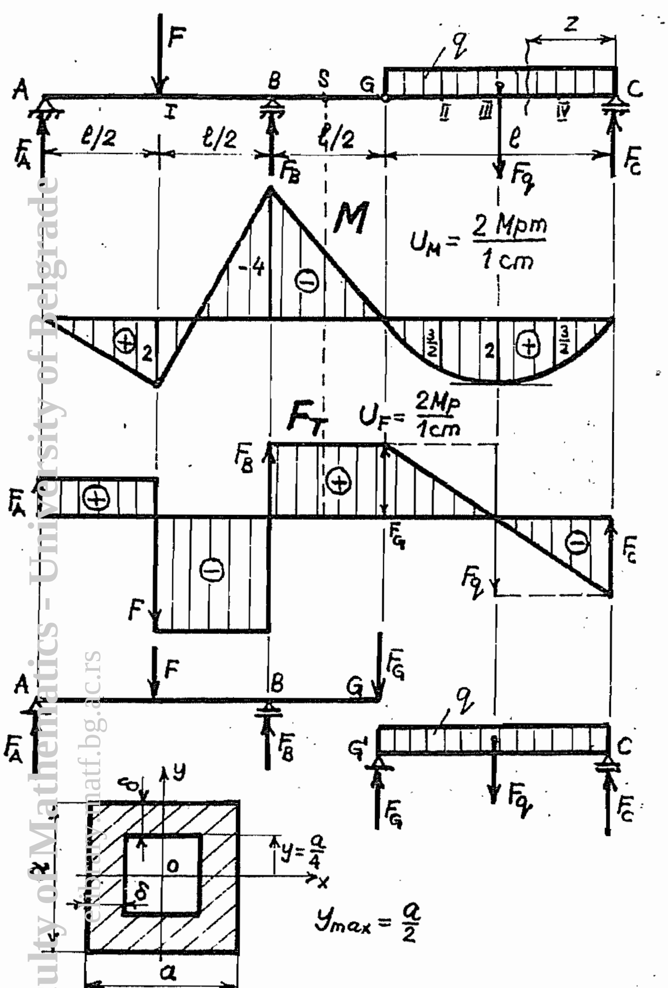
TREĆI ZADATAK: Na slici br. 6 prikazan je nosač ABGC sa naznačenim otporima oslonaca. Dopunski uslov ravnoteže nosača je da je moment savijanja u zglobu G jednak nuli $\Sigma M^d_G = 0$, te nepoznate otpore oslonaca nalazimo iz sledećih jednačina:

$$\Sigma M^d_G = F_c \cdot \ell - F_q \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \qquad F_q = q \cdot \ell = 4 \text{ [Mp]}$$

$$\Sigma Y_i = F_A + F_B + F_C - F - F_q = 0$$

$$\Sigma M_A = F_B \cdot \ell + F_C \cdot \frac{5}{2}\ell - F \cdot \frac{\ell}{2} - F_q \cdot 2\ell = 0$$

$$F_A = 1\,[Mp]\,; \quad F_B = 5\,[Mp]\,; \quad F_C = 2\,[Mp]\,; \quad F_G = 2\,[Mp]\,;$$



Slika br. 6

Momenti savijanja u karakterističnim tačkama naznačenim na slici br. 6 su:

$$M_I = F_A \cdot \frac{\ell}{2} = 1 \cdot 2 = 2\,[Mpm]$$

$$M_B = F_A \cdot \ell - F \cdot \frac{\ell}{2} = 1 \cdot 4 - 4 \cdot 2 = -4\,[Mpm]$$

$$M_S = F_A \cdot \frac{5}{4}\ell - F \cdot \frac{3}{4}\ell + F_B \cdot \frac{\ell}{4} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -2\,[Mpm]$$

$$M_G = 0$$

$$M_{(z)} = F_C \cdot z - \frac{1}{2} q \cdot z^2 = 2z - \frac{1}{2} z^2$$

$$F_{T(z)} = \frac{dM_{(z)}}{dz} = 2 - z$$

$$F_{T(z)} = 0 \Rightarrow 2 - z = 0 \Rightarrow z = 2\,[m]$$

$$M_{(z=2m)} = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2\,[Mpm]$$

$$M_{(z=1m)} = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{3}{2}\,[Mpm]$$

$$M_{(z=3m)} = 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{3}{2}\,[Mpm]$$

$$M_C = M_A = 0$$

Dijagrami momenata savijanja i transverzalnih sila prikazani su na slici br. 6.

b) Sa dijagrama momenata savijanja se može pročitati najveći moment savijanja $M_{max} = 4\,[Mpm]$ u preseku B, pa je potrebni otporni moment poprečnog preseka nosača:

$$W_x = \frac{M_{max}}{\sigma_{df}} = \frac{4 \cdot 10^5}{1000} = 400\,[cm^3]$$

Za zadati oblik poprečnog preseka aksijalni moment inercije za osu savijanja i otporni moment su:

$$I_x = \frac{1}{12}\left[a^4 - (a - 2\delta)^4\right] = \frac{a^4}{12}\left[1 - (1 - 2\psi)^4\right] = \frac{5}{64} a^4$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{\frac{5}{64} a^4}{\frac{a}{2}} = \frac{5}{32} a^3$$

pa su dimenzije poprečnog preseka nosača:

$$a = \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{5}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 400}{5}} = 8\sqrt[3]{5} = 13{,}68\,[cm]\,; \quad \delta = \frac{a}{4} = 2\sqrt[3]{5} = 3{,}42\,[cm]\,;$$

c) U preseku S transverzalna sila i moment su: $F_T = 2\,[Mp]$, $M_S = 2\,[Mpm]$
Na slici br. 6 naznačene su tačke preseka u kojima se traže normalni i tangencijalni naponi.

Za odredjeni poprečni presek aksijalni moment inercije i statički moment dela površine iznad ordinate tačaka u kojima se traže naponi su:

$$I_x = \frac{5}{64}a^4 = \frac{5}{64}\cdot 8^4\cdot 5\sqrt[3]{5} = 1600\sqrt[3]{5}\ [cm^4]\ ; \qquad \xi = 2\delta = 4\sqrt[3]{5}\ [cm]\ ;$$

$$S_x' = a\cdot\delta\cdot\frac{3}{8}a = \frac{3}{32}a^3 = \frac{3}{32}\cdot 8^3\cdot 5 = 240\ [cm^3]\ ; \qquad y = \frac{a}{4} = 2\sqrt[3]{5}\ [cm]$$

Tangencijalni napon je:

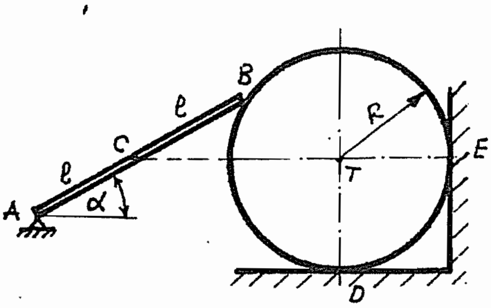
$$\tau = \frac{F_T\cdot S_x'}{I_x\cdot\xi} = \frac{2\cdot 10^3\cdot 240}{1600\sqrt[3]{5}\cdot 4\sqrt[3]{5}} = 15\sqrt[3]{5} = 25{,}65\ [kp/cm^2]$$

dok je normalni napon:

$$\sigma_f = \frac{M_s}{I_x}\cdot y = \frac{2\cdot 10^5}{1600\sqrt[3]{5}}\cdot 2\sqrt[3]{5} = 250\ [kp/cm^2]$$

DECEMBARSKI ISPITNI ROK 1976

PRVI ZADATAK: Homogeni prizmatični štap AB dužine $2\ell = 4$ [m], težine G = 20 [N], vezan je krajem A zglavkasto za pod i zaklapa ugao $\alpha = 30^\circ$ sa horizontom, dok se svojim drugim krajem B oslanja na glatku kuglu poluprečnika $R = \ell = 2$ [m], težine $Q = 10$ [N], koja leži na horizontalnom podu i dodiruje vertikalni zid u tački E. Središte štapa C i središte kugle T nalaze se na istoj visini. Odrediti uzajamni pritisak kugle i štapa, pritiske kugle na horizontalni i vertikalni zid u tačkama D i E i otpor zgloba A. Sistem je prikazan na slici br. 1.




Slika br. 1

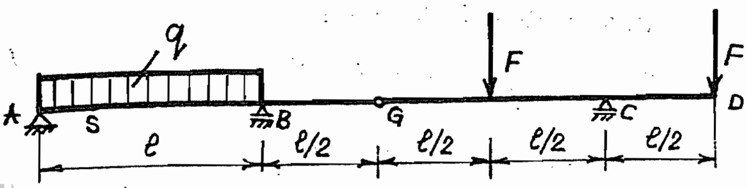
DRUGI ZADATAK: Vratilo prenosi snagu od 200 KS pri broju obrtaja vratila od n=180 [ob/min]. Dimenzionisati vratilo: a) ako je poprečni presek kružni i b) kružno-prstenastog poprečnog preseka ako je $\psi = d/D = 1/4$; $\tau_{dt} = 800$ [kp/cm$^2$]. Za koliko procenata se izvrši ušteda u materijalu po dužnom metru vratila, ako se usvoji kružno-prstenasti poprečni presek umesto punog - kružnog poprečnog preseka?

TREĆI ZADATAK: Kontinualni nosač ABGC sa zglobom u G, raspona i prepusta kao na slici br. 2, gde je $\ell = 4$ [m], opterećen je duž raspona AB kontinualnim opterećenjem $q = 2$ [Mp/m] i koncentrisanim silama $F = 2$ [Mp] na sredini raspona GC i na slobodnom kraju prepusta. Odrediti:

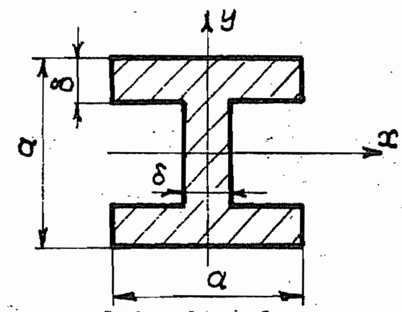
a) Otpore oslonaca i skicirati statičke dijagrame nosača;

b) Dimenzionisati nosač poprečnog preseka kao na slici br. 2a, ako je $\psi = \frac{\delta}{a} = 1/4$ i dozvoljeni napon savijanja $\sigma_{df} = 10$ [kp/mm$^2$];

c) Izračunati vrednosti normalnog i tangencijalnog napona u preseku S ($\overline{AS} = \ell/4$), a u tačkama poprečnog preseka na udaljenju a/4 od neutralne ose preseka.




Slika br. 2

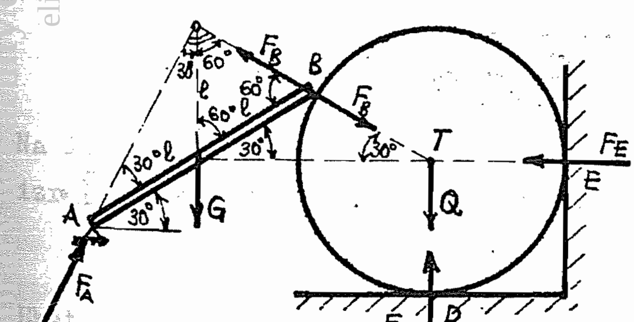



Slika br. 2a

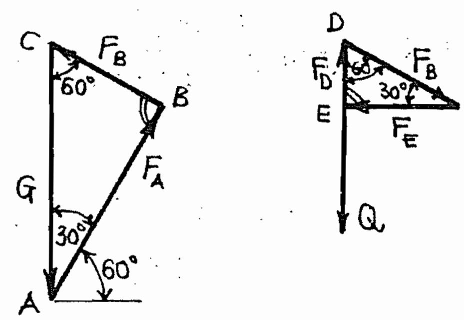
# R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Dekompozicijom sistema dobijamo štap AB na koji dejstvuje sila težine G, otpor zgloba A i uzajamni pritisak kugle i štapa $F_B$, i kuglu na koju dejstvuje sila težine Q, otpori $F_D$ horizontalnog zida-poda i $F_E$ vertikalnog zida i $F_B$ uzajamni pritisak štapa i kugle u tački B suprotno usmeren od smera dejstva na štap. Štap i kugla posmatrani pod dejstvom navedenih sila moraju biti u ravnoteži.

Ravnoteža štapa: Na štap dejstvuju tri sile, te je uslov ravnoteže tih sila da se seku u jednoj tački i da čine zatvoren trougao sila kao što je to na slici br. 3a naznačeno. Iz trougla ABC sledi da je:




Slika br. 3




Slika br. 3a i 3b

$$F_B = G\cdot\cos 60^\circ = G\cdot\frac{1}{2} = 20\cdot\frac{1}{2} = 10\ [N]$$

$$F_A = G\cdot\cos 30^\circ = 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\ [N]$$

Na slici br.3b nacrtan je poligon sila koje dejstvuju na kuglu i koji je zatvoren za slučaj ravnoteže kugle pa je:

$$F_E = F_B\cdot\cos 30^\circ = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ [N]$$

$$F_D = Q + F_B\cdot\sin 30^\circ = 10 + 10\cdot\frac{1}{2} = 15\ [N]$$

Do istih rezultata se može doći korišćenjem analitičkog oblika uslova ravnoteže ravnog sistema sila kao:

a) za štap

$$\Sigma M_A = F_B \cdot 2\ell \cdot \sin 60^\circ - G \cdot \ell \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\Sigma X_i = X_A - F_B \cos 30^\circ = 0$$

$$\Sigma Y_i = Y_A - G + F_B \sin 30^\circ = 0$$

$$F_B = \frac{G \cdot \cos 30^\circ}{2 \sin 60^\circ} = \frac{G}{2} = 10\ [N]$$

$$X_A = F_B \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ [N]$$

$$Y_A = G - F_B \sin 30^\circ = 20 - 10 \frac{1}{2} = 15\ [N]$$

b) za kuglu

$$\Sigma X_i = F_B \cos 30^\circ - F_E = 0$$

$$\Sigma Y_i = F_D - Q - F_B \sin 30^\circ = 0$$

$$F_E = F_B \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ [N]$$

$$F_D = Q + F_B \sin 30^\circ = 10 + 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$F_D = 15\ [N]$$

DRUGI ZADATAK: Koristeći izvedene obrasce za izračunavanje prečnika vratila poprečnog preseka kružnog odnosno kružno-prstenastog oblika, a iz uslova da maksimalni tangencijalni napon u vratilu ne predje dozvoljenu granicu $\tau_{dt} = 800\,[kp/cm^2]$, za naš slučaj prenosa snage $P = 200\,[KS]$, a pri broju obrtaja $n = 180\ [ob/min]$ dobijamo:

a) za vratilo kružnog poprečnog preseka da je prečnik d jednak:

$$d = 71{,}006 \sqrt[3]{\frac{P\,[KS]}{n \cdot \tau_{dt}}} = 71{,}006 \sqrt[3]{\frac{200}{180 \cdot 800}} = 7{,}93\ [cm]$$

usvajamo d = 80 [mm];

b) za vratilo kružno-prstenastog poprečnog preseka spoljašnji prečnik D je:

$$D = 71{,}006 \sqrt[3]{\frac{P\,[KS]}{n \cdot \tau_{dt}(1-\psi^4)}} = 71{,}006 \sqrt[3]{\frac{200}{180 \cdot 800 [1 - (1/4)^4]}} = 7{,}95\ [cm]$$

usvajamo $D = 8\,[cm]$, dok je unutrašnji prečnik preseka $d_u = \psi D = 2\,[cm]$.

c) Zapremina vratila kružnog poprečnog preseka je:

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{4} \ell_1$$

dok je zapremina vratila kružno-prstenastog poprečnog preseka za istu dužinu

$$V_2 = \frac{\pi D^2}{4} \ell_1 (1 - \psi^2)$$

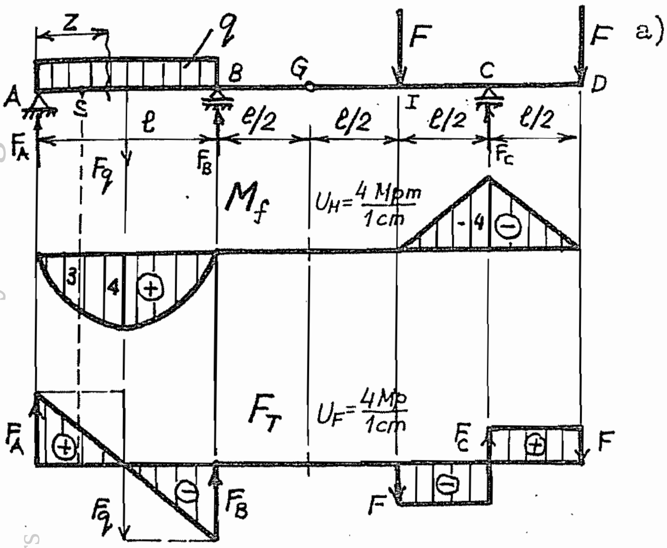
Ušteda u materijalu koja se dobije korišćenjem vratila kružno-prstenastog poprečnog preseka mesto kružnog preseka je:

$$u = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot 100\%$$

$$u = \frac{d^2 - D^2(1-\psi^2)}{d^2} \cdot 100\% = \left[1 - \frac{D^2}{d^2}(1-\psi^2)\right] \cdot 100\%$$

$$u = \psi^2 \cdot 100\% = \frac{1}{16} \cdot 100\% = 6{,}24\ \%$$

TREĆI ZADATAK: Na slici br. 4 prikazan je kontinualni nosač sa zglobom G i naznačenim otporima oslonaca. Nosač je statički odredjen i uslovi ravnoteže sa dopunskom jednačinom iz uslova da je moment savijanja u zglobu jednak nuli omogućavaju da se odredė sva tri nepoznata otpora oslonaca:




$$\overset{+}{\sum} M_G^d = F_C\cdot\ell - F\cdot\frac{\ell}{2} - F\cdot\frac{3}{2}\ell = 0$$

$$\overset{+}{\sum} M_A = 0$$

$$q\cdot\ell\cdot\frac{1}{2}\ell - F_B\cdot\ell + F\cdot 2\ell + F\cdot 3\ell - F_C\cdot\frac{5}{2}\ell = 0$$

$$\sum Y_i = F_A + F_B + F_C - F - F - q\cdot\ell = 0$$

$$F_C = 2F = 4\ [Mp]$$

$$F_B = \frac{1}{2}q\cdot\ell = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4\ [Mp]$$

$$F_A = \frac{1}{2}q\cdot\ell = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4\ [Mp]$$

Slika br. 4

Momenti savijanja u karakterističnim tačkama su:

$$M_C = -F\cdot\frac{1}{2}\ell = -2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 = -4\ [Mp\ m]$$

$$M_I = -F\cdot\ell + F_C\cdot\frac{1}{2}\ell = -2\cdot 4 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 = 0$$

$$M_G = 0$$

Na delu gde dejstvuje jednako-podeljeno kontinualno opterećenje analitički izraz za moment $M(z)$ u funkciji udaljenja z od oslonca A je:

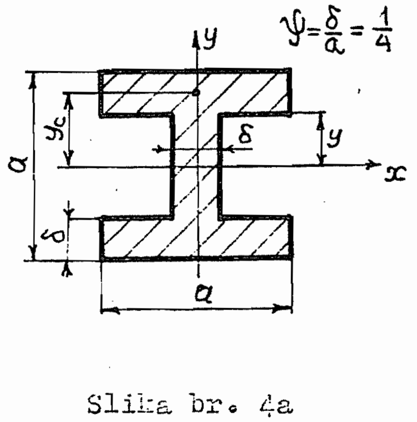
$$M(z) = F_A\cdot z - \frac{1}{2}\cdot q\cdot z^2 = 4z - z^2 \qquad 0\le z\le 4 [m]$$

Ekstremna vrednost momenta se javlja u preseku odredjenom koordinatom $z_o$ iz uslova da je:

$$\left.\frac{dM(z)}{dz}\right|_{z=z_o} = 0 \Rightarrow \left.4-2z\right|_{z=z_o} = 0 \Rightarrow z_o = 2\ [m]$$

te ja maksimalna vrednost momenta u tom preseku:

$$M_{max} = 4z_o - z_o^2 = 4\cdot 2 - 2^2 = 4\ [Mpm]$$




Slika br. 4a

Momenti savijanja duž raspona AB odredjeni presecima udaljenim za 1 ,2 i 3 [m] od oslonca A su:

$$M(z=1m) = 4\cdot 1 - 1^2 = 3 [Mpm]$$

$$M(z=2m) = 4\cdot 2 - 2^2 = 4 [Mpm]$$

$$M(z=3m) = 4\cdot 3 - 3^2 = 3 [Mpm]$$

b) Za poprečni presek na slici br. 4a aksijalni moment inercije preseka za težišnu osu je:

$$I_x = \frac{1}{12} a^4 - \frac{1}{12}(a-\delta)(a-2\delta)^3 = \frac{1}{12} a^4\left[1-(1-\psi)(1-2\psi)^3\right]$$

dok je njegova vrednost za zadato odnos $\psi = \delta/a = 1/4$

$$I_x = \frac{1}{12} a^4\left[1-(1-\psi)(1-2\psi)^3\right] = \frac{1}{12} a^4\left[1-(1-\tfrac{1}{4})(1-2\cdot\tfrac{1}{4})^3\right] = \frac{29}{3\cdot 2^7} a^4$$

Otporni moment posmatranog preseka je:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{\frac{29}{3\cdot 2^7} a^4}{a/2} = \frac{29}{192} a^3$$

Maksimalni moment savijanja duž nosača je $M_{fmax} = 4$ [Mpm] ,pa je potrebni otporni moment poprečnog preseka nosača

$$W_x = \frac{M_{f\,max}}{\sigma_{df}} = \frac{4\cdot 10^5}{1000} = 400\ [cm^3]$$

Izjednačavanjem veličine potrebnog otpornog momenta i analitičkog izraza za otporni moment potrebnog preseka u funkciji a dobijamo jednačinu iz koje izračunavamo veličinu a ,a sa tim i veličinu $\delta$ :

$$a = \sqrt[3]{\frac{192\, W_x}{29}} = \sqrt[3]{\frac{192\cdot 400}{29}} = 8\sqrt[3]{\frac{150}{29}} = 13,87\ [cm]$$

$$\delta = \frac{1}{4} a = \frac{1}{4}\cdot 13,87 = 3,46\ [cm]$$

Za presek izračunatih dimenzija moment inercije je:

$$I_x = \frac{29}{384}\cdot a^4 = \frac{29}{384}\cdot 13,87^4 = 2,78\cdot 10^3\ [cm^4]$$

c) U naznačenom preseku S moment savijanja i transverzalna sila su: $M_f = 3$ [Mpm] , $F_T = 2$ [Mp]. Statički moment dela površine poprečnog preseka ordinata većih od ordinate tačaka u kojima se traže naponi je:

$$S_x' = A'\cdot y_c = a\cdot\delta\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{\delta}{2}\right) = \frac{3}{32} a^3 = \frac{3}{32}\cdot 13,87^3 = 249\ [cm^3]\ ;\ \xi = \delta = 3,46\ [cm]$$

Tangencijalni napon u tačkama preseka na udaljenju a/4 od neutralne ose je:

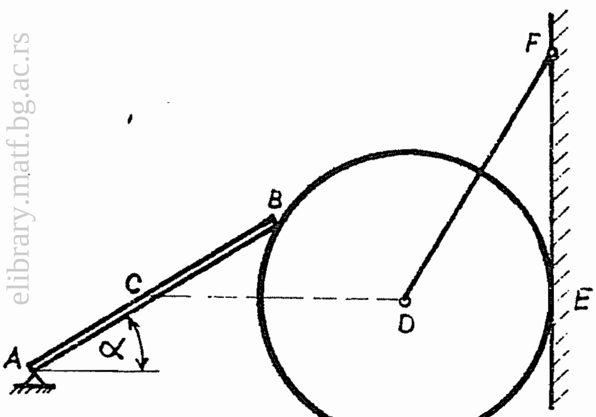
$$\tau = \frac{F_T\cdot S_x'}{I_x\cdot\xi} = \frac{2\cdot 10^3\cdot 249}{2,78\cdot 10^3\cdot 3,46} = 51,8\ [kp/cm^2]$$

dok je normalni napon u istim tačkama preseka:

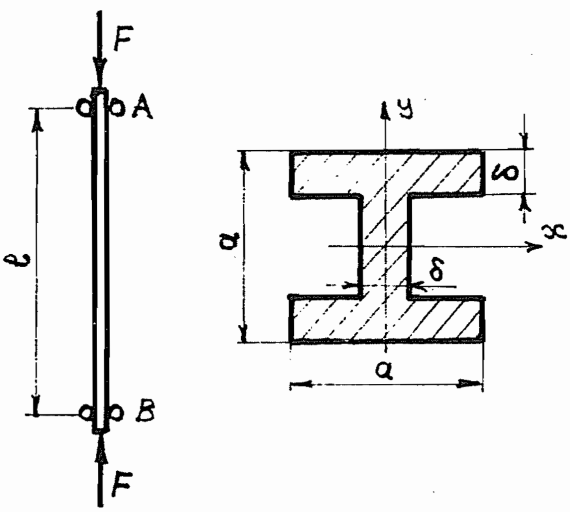
$$\sigma = \frac{M_f}{I_x}\cdot y = \frac{3\cdot 10^5}{2,78\cdot 10^3}\cdot 3,46 = 360\ [kp/cm^2]$$

JANUARSKO-FEBRUARSKI ISPITNI ROK 1977

PRVI ZADATAK: Homogeni prizmatični štap AB dužine $\ell = 4[m]$, težine $G = 20[N]$, vezan je krajem A zglavkasto za pod i zaklapa ugao $\alpha = 30^\circ$ sa horizontom, dok se svojim drugim krajem B oslanja na glatku kuglu poluprečnika $R = \ell/2$, težine $Q = 10[N]$, koja je okačena o konac DF, učvršćen u tački F i koju zaklapa ugao od $30^\circ$ sa pravcem vertikalnog zida. Kugla se oslanja u tački E o vertikalni zid. Središte štapa C i središte kugle D nalaze se na istoj visini. Odrediti otpor zgloba A, uzajamni pritisak kugle i štapa, silu u koncu i pritisak kugle na zid. (slika br. 1)




Slika br. 1



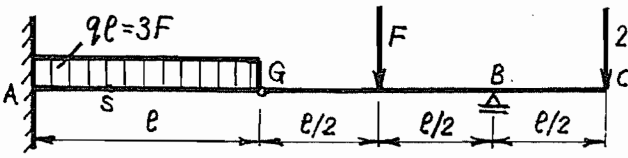

Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Čelični stub dužine $\ell = 3,14[m]$, poprečnog preseka kao na slici br. 2, gde je $\psi = \delta/a = 1/4$, koji je zglobno učvršćen na krajevima opterećen je pritisnom silom $F = 13[Mp]$. Dimenzionisati stub pod uslovom da je stepen sigurnosti od izvijanja $\nu = 10/3$. Za modul elastičnosti materijala usvoji $E = 2 \cdot 10^6 [kp/cm^2]$.

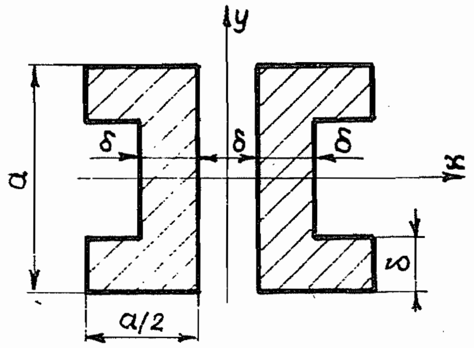
TREĆI ZADATAK: Nosač AGBC, uklešten u tački A i oslonjen na pokretno ležište u tački B, ima zglob u tački G a iste je savojne krutosti duž raspona označenih na slici br. 3, gde je $\ell = 4[m]$. Nosač je duž dela AG opterećen kontinualnim jednakopodeljenim opterećenjem $q\ell = 3F$, dok je na sredini dela GB opterećen silom $F = 2[Mp]$ i na slobodnom kraju silom $2F$. Odrediti:

a) otpore ukleštenja i oslonaca i skicirati statičke dijagrame nosača;

b) Dimenzionisati nosač poprečnog preseka kao na slici br. 3 a, ako je $\psi = 1/4$ i dozvoljeni napon na savijanje $\sigma_{df} = 1000$ $[kp/cm^2]$. Koji bi profil trebalo usvojiti ako se koriste standardni profili 2 [ .




Slika br. 3

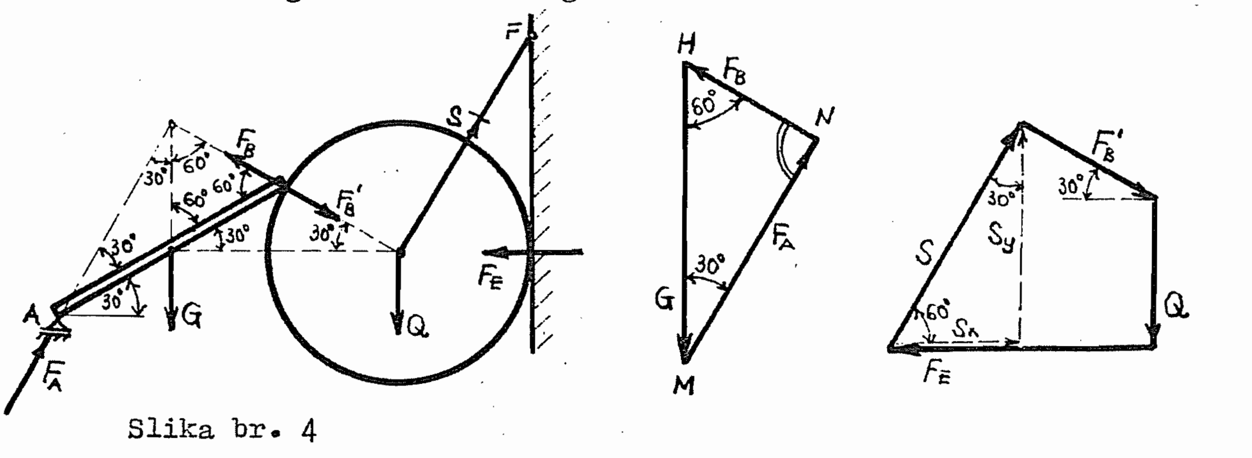



Slika br. 3a

c) Izračunati vrednosti normalnog i tangencijalnog napona u preseku S ( $\overline{AS} = \ell/3$), a u tačkama poprečnog preseka na udaljenju a/4 od neutralne ose.

R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Na sistem dejstvuju aktivne sile: sila težine štapa G i sila težine kugle Q. Ako je sistem u ravnoteži potrebno je da i svaki njegov deo bude u ravnoteži, drugim rečima znači da možemo da posebno posmatramo ravnotežu kugle, a posebno ravnotežu štapa. U tački dodira kugle i štapa javlja se uzajamni pritisak kugle i štapa koji je upravan na tangentu povučenu na krug u tački dodira, jer je površina kugle glatka. Zamislimo da smo uklonili zglob u tački A, pa moramo njegov uticaj zameniti silom $F_A$. Na štap sada dejstvuju tri sile koje moraju biti u ravnoteži te zbog toga moraju da se seku u jednoj tački sve tri napadne linije sila, kao što je to na slici br. 4 naznačeno. Te tri sile moraju da čine i zatvoren trougao sila. Iz trougla sila MNH sledi:




Slika br. 4

Na kuglu dejstvuju: sila težine kugle Q, pritisak štapa na kuglu $F_B' = -F_B$, otpor vertikalnog zida $F_E$, i sila u koncu S, čije napadne linije prolaze kroz jednu tačku, središte kugle, te da bi kugla bila u ravnoteži potrebno je još da te sile čine zatvoreni poligon sila. Iz poligona sila koje dejstvuju na kuglu možemo da pišemo:

$$F_B = G\cdot\cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}G \qquad X_B = F_B\cdot\cos 30^\circ = \tfrac{1}{2}G\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}G$$

$$F_A = G\cdot\cos 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}G \qquad Y_B = F_B\cdot\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}G\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}G$$

te su sila u koncu S i otpor zida $F_E$ jednaki:

$$S_y = Y_B + Q = \tfrac{1}{4}G + Q \qquad S_x = S_y\cdot tg\,30^\circ = \left(\tfrac{1}{4}G+Q\right)\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \left(\tfrac{1}{4}G+Q\right)\sqrt{1+\tfrac{3}{9}} = \tfrac{\sqrt{3}}{6}(G+4Q)$$

$$F_E = S_x + X_B = \tfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\tfrac{G}{4}+Q\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{4}Q = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(G+Q)$$

Za zadate numeričke podatke sledi da je:

$$F_B = 10\,[N]\;;\quad F_A = 10\sqrt{3}\,[N]\;;\quad S = 10\sqrt{3}\,[N]\;;\quad F_E = 10\sqrt{3}\,[N]$$

$$X_A = F_A\cdot\cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}\,[N]$$

$$Y_A = F_A\cdot\sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\sqrt{3} = 15\,[N]$$

(Napomena: Zadatak se može rešiti i pomoću projekcija sila na koordinatne ose.)

DRUGI ZADATAK: Na slici br. 2 dat je poprečni presek stuba napregnutog aksijalnom silom pritiska sa naznačenim glavnim centralnim osama inercije. Najmanji aksijalni moment inercije je za težišnu osu $y$ i njegova vrednost je:

$$I_{min} = I_y = 2\cdot\tfrac{1}{12}a^3\delta + \tfrac{1}{12}(a-2\delta)\cdot\delta^3 = \tfrac{a^4}{12}\left[2\cdot\psi + (1-2\psi)\cdot\psi^3\right]$$

$$I_{min} = \frac{65}{3\cdot 2^9}a^4$$

gde smo pri sračunavanju uzeli u obzir odnos $\psi = \delta/a = 1/4$. Koristeći Euler-ovu metodu pišemo da je:

$$I_{min} = \frac{\nu F}{\pi^2 E}\cdot l_r^2 = \frac{65}{3\cdot 2^9}a^4$$

odakle sračunavamo vrednost veličine a, visine profila stuba:

$$a = \sqrt[4]{\frac{3\cdot 2^9}{65}\,\frac{\nu F}{\pi^2 E}\,l_r^2} = \sqrt[4]{\frac{3\cdot 2^9}{65}\,\frac{10}{3}\,\frac{13\cdot 10^3}{\pi^2\cdot 2\cdot 10^6}\cdot 3{,}14^2\cdot 10^4}$$

$$a = 4\sqrt[4]{20} = 8{,}48\,[cm]\;;\quad \delta = \tfrac{1}{4}a = 2{,}12\,[cm]$$

Poprečni presek stuba ima površinu:

$$A = 2\cdot a\cdot\delta + (a-2\delta)\delta = a^2[2\psi + \psi(1-2\psi)] = \tfrac{5}{8}a^2 = 20\sqrt{5}\,[cm^2]$$

te je kvadrat poluprečnika inercije:

$$i_{min}^2 = \frac{I_{min}}{A} = \frac{\frac{65}{3\cdot 2^9}a^4}{\frac{5}{8}a^2} = \frac{13}{3\cdot 2^6}a^2 = \tfrac{13}{6}\sqrt{5} = 4{,}85\,[cm^2]\;;\quad i_{min} = 2{,}2\,[cm]$$

Vitkost štapa čije smo dimenzije odredili je:

$$\lambda = \frac{l_r}{i_{min}} = \frac{314}{2{,}2} = 143$$

i veća je od kritične vitkosti štapa od zadatog materijala koja iznosi:

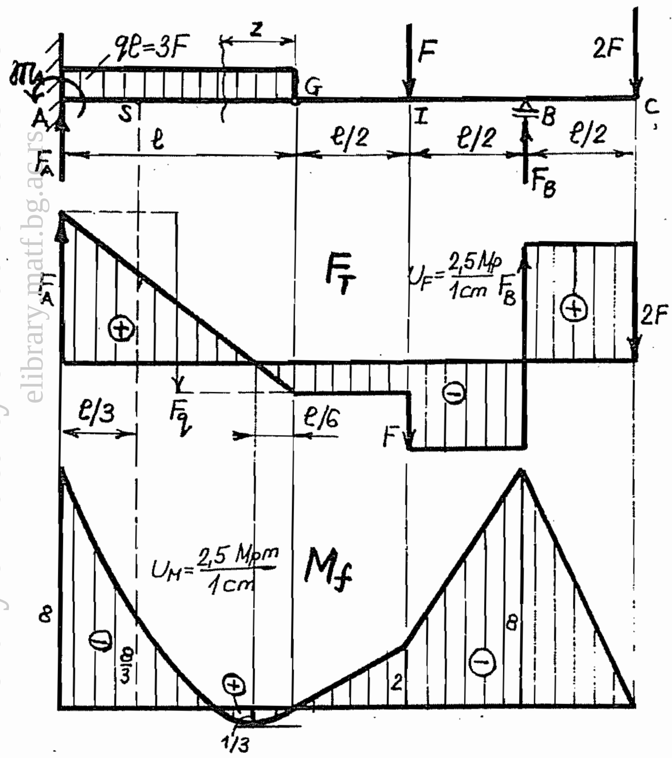
$$\lambda_k = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = \pi\sqrt{\frac{2\cdot 10^6}{500}} = 20\pi = 62{,}8$$

te je metoda dimenzionisanja po Euler-u pravilno izabrana. Normalni napon u poprečnom preseku ovako dimenzionisanog stuba je:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{13\cdot 10^3}{20\sqrt{5}} = 130\sqrt{5} = 291\,[kp/cm^2] < \sigma_{doz}$$

i ne prelazi dozvoljenu vrednost napona na pritisak.

TREĆI ZADATAK: Nosač na slici br. 5 je statički odredjen jer za odredjivanje dva otpora oslonaca i moment uklještenja imamo tri uslova ravnoteže medju kojima je i uslov da je u zglobu moment savijanja jednak nuli. Možemo da pišemo sledeće uslove ravnoteže:




Slika br. 5

$$\sum M_G^d = -2F\,\frac{3}{2}\ell + F_B\cdot\ell - F\cdot\frac{\ell}{2} = 0$$

$$\sum M_A = -\mathfrak{M}_A + \frac{1}{2}q\cdot\ell^2 + F\cdot\frac{3}{2}\ell - F_B\cdot 2\ell + 2F\cdot\frac{5}{2}\ell = 0$$

$$\sum Y_i = F_A + F_B - q\cdot\ell - F - 2F = 0$$

te su otpori oslonca i uklještenja:

$$F_B = \frac{7}{2}\cdot F = \frac{7}{2}\cdot 2 = 7\ [Mp]$$

$$F_A = \frac{5}{2}F = \frac{5}{2}\cdot 2 = 5\ [Mp]$$

$$\mathfrak{M}_A = F\cdot\ell = 2\cdot 4 = 8\ [Mpm]$$

Momenti savijanja u karakterističnim tačkama su:

$$M_B = -2F\cdot\frac{\ell}{2} = -F\cdot\ell = -8\ [Mpm]$$

$$M_I = -2F\cdot\ell + F_B\cdot\frac{\ell}{2} = -2\ [Mpm]$$

$$M_{(z)} = \frac{F}{2\ell}\left(\ell z - 3z^2\right)$$

$$\frac{dM_{(z)}}{dz} = 0 \Rightarrow \ell - 6z = 0 \Rightarrow z = \frac{\ell}{6}$$

$$M\left(\frac{\ell}{6}\right) = \frac{F}{2\ell}\left(\frac{1}{6}\ell^2 - 3\cdot\frac{\ell^2}{36}\right) = \frac{1}{3}\ [Mpm]$$

a)

Maksimalni moment duž raspona nosača je $M_{max} = 8$ [Mpm], pa je potrebni otporni moment poprečnog preseka nosača:

$$W_x = \frac{M_{max}}{\sigma_{df}} = \frac{8\cdot 10^5}{10^3} = 800\ [cm^3]$$

Zadati poprečni presek ima moment inercije $I_x$ i otporni moment $W_x$ izračunat u funkciji visine preseka a:

$$I_x = \frac{5}{2^6}a^4 \quad ; \quad W_x = \frac{5}{2^5}a^3 = \frac{5}{32}a^3$$

Dimenzije potrebnog poprečnog preseka su:

$$\frac{5}{32}a^3 = 800 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 800}{5}} = 8\sqrt[3]{10}\ [cm]$$

$$a = 17{,}25\ [cm] \quad ; \quad \delta = \frac{1}{4}a = 4{,}32\ [cm]$$

Ako bi smo usvojili standardni profil "2U" potrebno je da to bude 2U28 postavljenih kao na slici br. 3a.

c)Moment savijanja i transverzalna sila u preseku S su:

$$M_S = M(z=\tfrac{2}{3}\ell) = -\frac{8}{3}\ [Mpm] \ ; \quad F_T = F_A - q\cdot\frac{\ell}{3} = 3\ [Mp]$$

Moment inercije potrebnog poprečnog preseka, sračunatih dimenzija je:

$$I_x = \frac{5}{64}\cdot a^4 = \frac{5}{64}\cdot 8^4\cdot 10\sqrt[3]{10} = 3200\sqrt[3]{10}\ [cm^4]$$

dok je statički moment dela površine ordinata većih od ordinata tačaka u kojima treba sračunati napone :

$$S_x' = a\cdot\delta\cdot\frac{3}{8}a = \frac{3}{32}a^3 = \frac{3}{32}\cdot 8^3\cdot 10 = 480\ [cm^3]$$

$$y = \frac{a}{4} = 2\sqrt[3]{10}\ [cm] \quad ; \quad \xi = 2\delta = 2\cdot\frac{a}{4} = 4\sqrt[3]{10}\ [cm]$$

Traženi naponi u definisanom poprečnom preseku S, a za sračunate dimenzije poprečnog preseka su:

I)tangencijalni

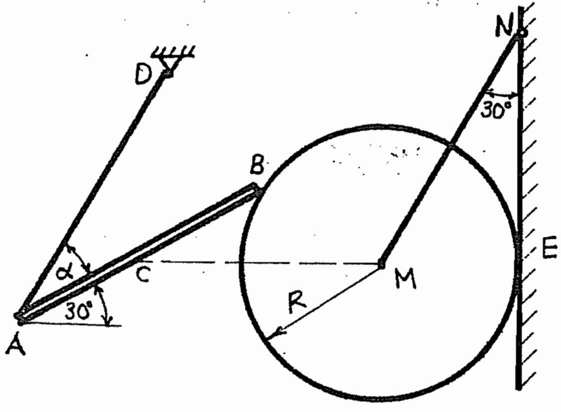
$$\tau = \frac{F_T\cdot S_x'}{I_x\cdot\xi} = \frac{3\cdot 10^3\cdot 480}{3200\sqrt[3]{10}\cdot 4\sqrt[3]{10}} = \frac{45}{4}\sqrt[3]{10} = 26{,}9\ [kp/cm^2]$$

II)normalni:

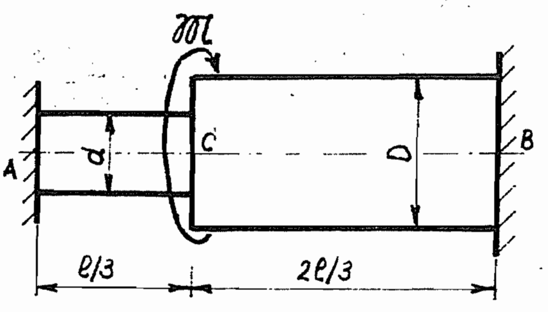
$$\sigma_f = \frac{M_S}{I_x}\cdot y = \frac{8\cdot 10^5\cdot 2\sqrt[3]{10}}{3\cdot 3200\cdot\sqrt[3]{10}} = \frac{10^3}{6} = 166{,}9\ [kp/cm^2]$$

MARTOVSKI ISPITNI ROK 1977

PRVI ZADATAK: Homogeni prizmatični štap AB dužine $\ell = 4\,[m]$, težine $G = 20\,[N]$, zaklapa sa horizontom ugao $30^{\circ}$, a svojim krajem A je vezan pomoću užeta AD koje sa pravcem štapa zaklapa ugao $\alpha$, dok se štap svojim drugim krajem B oslanja o glatku kuglu poluprečnika $R = \ell/2$. Kugla je težine $Q = 10\,[N]$ i okačena je o konac MN, učvršćen u tački N, koji sa pravcem vertikalnog zida zaklapa ugao od $30^{\circ}$. Kugla se u tački E oslanja o vertikalni zid. Središte štapa C i središte kugle M nalaze se na istoj horizontali. Odrediti ugao $\alpha$ tako da sistem bude u ravnoteži, a zatim odrediti sile u užetu i koncu i uzajamne pritiske štapa i kugle i kugle i zida. Sistem je prikazan na slici br. 1.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Kružno stepenasto vratilo ACB prečnika d, na delu $AC = \ell/3$ i prečnika D na delu $CB = 2\ell/3$, je obostrano uklešteno. U preseku C na vratilo dejstvuje moment $\mathfrak{M}$. Odrediti:

a) momente ukleštenja $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ u funkciji odnosa prečnika $\psi = d/D$.

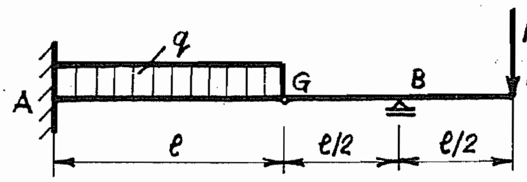
b) Odrediti odnos prečnika $\psi$ iz uslova da su maksimalni tangencijalni naponi za oba dela vratila isti;

c) Dimenzionisati vratilo ako je $\mathfrak{M} = 2{,}25\,[Mpm]$, dozvoljeni napon na smicanje $\tau_{ds} = 1000\,[kp/cm^2]$, a odnos $\psi = d/D$ usvojiti dobijen iz tačke b) ovog zadatka i skicirati dijagram momenata uvijanja. (Slika vratila br. 2).

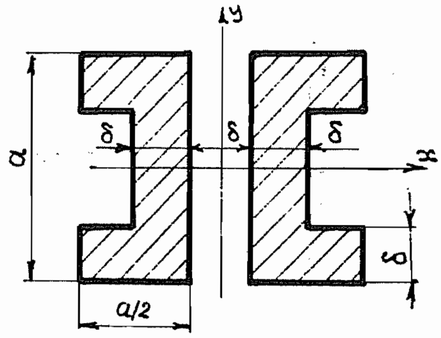
TREĆI ZADATAK: Nosač AGBC, uklešten u tački A, oslonjen na pokretno ležište B, ima zglob u tački G, a rasponi su označeni na slici br. 3, gde je $\ell = 4[m]$. Nosač je duž dela AG = $\ell$, opterećen kontinualnim opterećenjem $q = 2[Mp/m]$, dok je na slobodnom kraju C opterećen silom $F = 2[Mp]$. Celom dužinom nosača je isti poprečni presek. Odrediti:

a) Otpore ukleštenja i oslonaca i nacrtati statičke dijagrame nosača;

b) Dimenzionisati nosač poprečnog preseka kao na slici br. 3a, ako je $\psi = 1/4$ i dozvoljeni napon na savijanje $\sigma_{df} = 1000\,[kp/cm^2]$;




Slika br. 3




Slika br. 3a

c) Izračunati vrednosti normalnog i tangencijalnog napona u preseku P, gde je $AP = \ell/4 = 1[m]$, a u tačkama poprečnog preseka na udaljenju $a/4$ od neutralne ose;

d) Koji bi profil trebalo usvojiti ako se koriste standardni profili?

R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Dekompozicija sistema upućuje nas na to da posmatramo pojedinačno ravnotežu štapa i kugle, zamenjujući njihov uzajamni uticaj silom $F_B$, čija je napadna linija upravna na tangentu, povučenu na kuglu u tački oslanjanja štapa na kuglu.

I) Ravnoteža štapa. Na štap dejstvuje sila težine G, sila $F_B$ uzajamnog pritiska kugle i štapa i sila $S_1$ u koncu AD. Napadne linije svih triju sila moraju da se seku u jednoj tački i da sile čine zatvoren trougao sila da bi sistem bio u ravnoteži. Iz trougla ABK na slici br. 4 sledi da je ugao $\alpha = 30^\circ$. te iz trougla sila sledi da je:

$$F_B = G \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} G$$

$$F_A = S_1 = G \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} G$$

Do istih rezultata možemo doći i analitički iz uslova ravnoteže za štap. Postavili smo koordinatni sistem $A\xi\eta$, tako da se osa $\xi$ poklapa sa pravcem štapa AB. Uslovi ravnoteže daju sada sledeće jednačine:

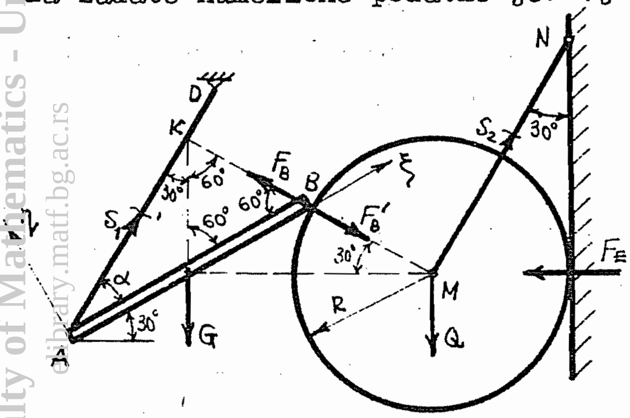
$$\Sigma M_B = G \cdot \ell \cdot \cos 30^\circ - S_1 \cdot 2\ell \cdot \sin\alpha = 0$$
$$G\frac{\sqrt{3}}{2} - 2S_1 \sin\alpha = 0$$
$$\Sigma F_\xi = S_1\cos\alpha - G\cos 60^\circ - F_B \cdot \cos 60^\circ = 0$$
$$S_1 \cdot \cos\alpha - \frac{1}{2}(G + F_B) = 0$$
$$\Sigma F_\eta = S_1 \sin\alpha - G \sin 60^\circ + F_B \cdot \sin 60^\circ = 0$$
$$S_1 \cdot \sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}(G - F_B) = 0$$

čijim rešavanjem odredjujemo tražene veličine $S_1$, $F_B$ i ugao $\alpha$.

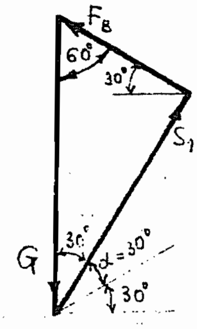
II. Ravnoteža kugle. Na kuglu dejstvuju sledeće sile: Sila težine Q, sila pritiska štapa $F_B' = F_B$, sila u koncu $S_2$ i otpor zida $F_E$. Napadne linije nabrojanih sila seku se u tački M, te je uslov da kugla bude u ravnoteži još da sile čine zatvoren poligon sila, te sledi da je:

$$S_y = F_B \sin 30^\circ + Q = \frac{1}{4}G + Q \quad ; \quad S_x = S_y \cdot tg 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{4}G + Q\right)$$
$$S_2 = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{G}{4} + Q\right)$$
$$F_E = S_x + F_B \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}(G + Q)$$

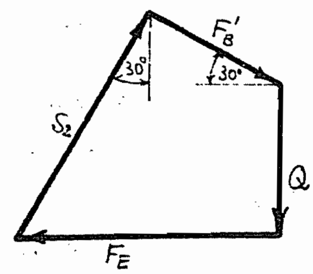
Za zadate numeričke podatke je: $F_B = 10[N]$ ; $F_A = S_1 = 10\sqrt{3}\,[N]$ ; $S_2 = 10\sqrt{3}\,[N]$ ; $F_E = 10\sqrt{3}\,[N]$ ;




Slika br. 4




Slika br. 4a




slika br. 4b

DRUGI ZADATAK: a) Zamislimo da smo vratilo rastavili u tački - preseku C, dobili smo dva konzolna vratila opterećena momentima uvijanja $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ na slobodnim krajevima, ali takva vratila pod dejstvom naznačenih opterećenja moraju da zadovoljavaju uslov da su im uglovi uvijanja jednaki. Na osnovu toga možemo da pišemo da je veza momenata uvijanja $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ sledeća:

$$\vartheta_C = \frac{\mathfrak{M}_B \cdot \frac{2}{3}\ell}{G \cdot \frac{D^4\pi}{32}} = \frac{\mathfrak{M}_A \cdot \frac{1}{3}\ell}{G \cdot \frac{d^4\pi}{32}}$$
$$\mathfrak{M}_A = 2\mathfrak{M}_B \frac{d^4}{D^4} = 2\psi^4 \mathfrak{M}_B$$

Momenti $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ kao otpori ukleštenja moraju da zadovoljavaju i uslov statičke ravnoteže vratila:

$$\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}$$

čime smo dobili dve jednačine za odredjivanje nepoznatih otpora - momenata ukleštenja vratila, odakle sračunavamo da je:

$$\mathfrak{M}_A = \frac{2\psi^4}{1 + 2\psi^4}\mathfrak{M} \quad ; \quad \mathfrak{M}_B = \frac{1}{1 + 2\psi^4}\mathfrak{M}$$

Polarne momente inercije poprečnih preseka vratila koje smo koristili u prethodnom računu imamo u obliku, gde

$$I_o^{(AC)} = \frac{\pi d^4}{32} \quad ; \quad I_o^{(BC)} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_o^{(AC)} : I_o^{(BC)} = d^4 : D^4 = \psi^4$$

gde je $\psi = d/D$ odnos prečnika poprečnih preseka vratila.

b) Iz uslova da su maksimalni tangencijalni naponi za oba dela vratila jednaki dobijamo:

$$\tau_1 = \frac{\mathfrak{M}_A}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{\mathfrak{M}_B}{\frac{\pi D^3}{16}} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M}_A = \frac{d^3}{D^3}\mathfrak{M}_B = \psi^3 \mathfrak{M}_B$$

odakle sračunavamo da je potrebno da je odnos prečnika $\psi = d/D$ jednak 1/2.

c) Momenti ukleštenja za dobijeni odnos prečnika su:

$$\mathfrak{M}_A = \frac{2\psi^4}{1+2\psi^4}\mathfrak{M} = \frac{2\cdot\frac{1}{16}}{1+2\cdot\frac{1}{16}}\cdot 2{,}25 = 0{,}25\,[\mathrm{Mpm}]\,; \qquad \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_A = 2{,}25 - 0{,}25 = 2\,[\mathrm{Mpm}]$$

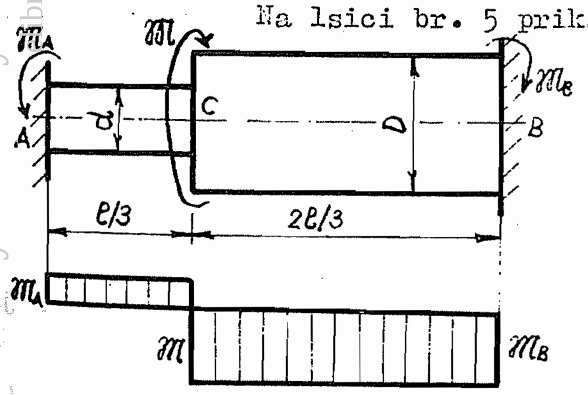
Za materijal zadatog **dozvoljenog napona na uvijanje** potrebno je da prečnici preseka budu:

$$d = \sqrt[3]{\frac{5\,\mathfrak{M}_A}{\tau_{d}}} = \sqrt[3]{\frac{5\cdot 0{,}25\cdot 10^5}{1000}} = 5\,[\mathrm{cm}]$$

$$D = \frac{1}{\psi}\cdot d = 2d = 10\,[\mathrm{cm}]$$

pa da maksimalne vrednosti napona ne predju dozvoljene granice.

Na lsici br. 5 prikazan je dijagram momenata uvijanja vratila.




Slika br. 5

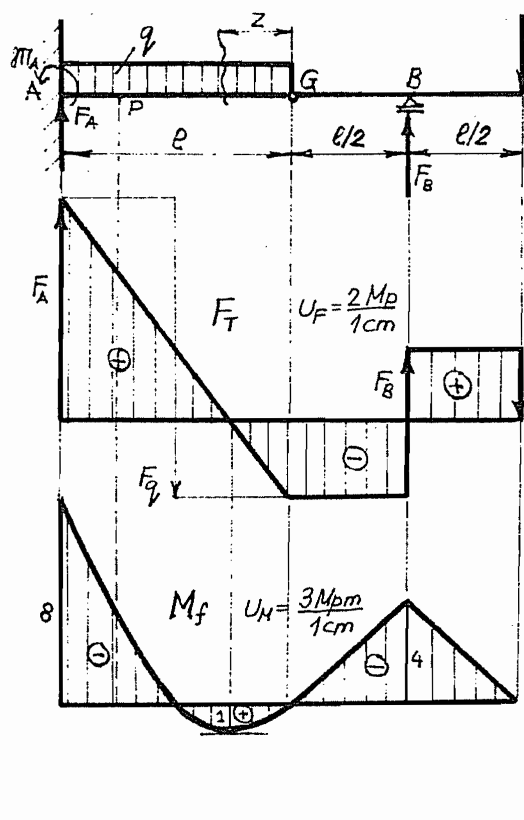
TREĆI ZADATAK: Iz uslova ravnoteže nosača sa zglobom (vidi treći zadatak iz prethodnog ispitnog roka) slede sledeće jednačine:

$$\Sigma M_G^d = F_B\cdot\frac{\ell}{2} - F\cdot\ell = 0$$

$$\Sigma Y_i = F_A + F_B - F - q\cdot\ell = 0$$

$$\Sigma M_A = \mathfrak{M}_A + F_B\cdot\frac{3}{2}\ell - F\cdot 2\ell - q\cdot\ell\cdot\frac{\ell}{2} = 0$$

$$\Sigma Y_i = F_G + F - F_B = 0$$




Slika br. 6

24.

odakle sračunavamo moment ukleštenja $\mathfrak{M}_A$, otpore oslonaca $F_A$ i $F_B$ i silu u zglobu G:

$$\mathfrak{M}_A = 8\,[Mpm] \quad , \quad F_A = 6\,[Mp]$$

$$F_B = 2F = 4\,[Mp] \quad ; \quad F_G = F = 2\,[Mp]$$

Momenti u karakterističnim tačkama nosača su:

$$M_B = -F\cdot\frac{\ell}{2} = -4\,[Mpm] \quad ; \quad M_G = 0$$

$$M(z) = -(z+\ell)F + \left(z+\frac{\ell}{2}\right)F_B - \frac{1}{2}qz^2 = 2z - z^2$$

$$\frac{dM(z)}{dz} = 2-2z = 0 \Rightarrow z = 1\,[m]$$

$$M(1) = 2\cdot1 - 1^2 = 1\,[Mpm] \quad ; \quad M(3) = M_P = 2\cdot3 - 3^2 = -3\,[Mpm]$$

i pomoću njih je nacrtan dijagram momenata na slici br. 6. Veličine transverzalnih sila duž nosača su:

$$F_T = \frac{dM(z)}{dz} = -2+2z \qquad 0\le z\le \ell$$

$$F_T(z=3) = -2+2\cdot3 = 4\,[Mp]$$

b) Maksimalni moment savijanja je: $M_{max} = 8\,[Mpm]$., te je potrebni otporni moment poprečnog preseka nosača:

$$W_x = \frac{M_{max}}{\sigma_{df}} = \frac{8\cdot10^5}{10^3} = 800\,[cm^3]$$

Za zadati poprečni presek aksijalni moment inercije za neutralnu osu savijanja je

$$I_x = \frac{a^4}{12}\left[1-(1-2\psi)^4\right] = \frac{5}{2^6}a^4$$

dok je otporni moment inercije za istu osu:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{\frac{5}{2^6}a^4}{\frac{a}{2}} = \frac{5}{32}a^3$$

pa su dimenzije poprečnog preseka nosača

$$a = \sqrt[3]{\frac{32\,W_x}{5}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot800}{5}} = 8\sqrt[3]{10} = 17,25\,[cm] \quad ; \quad \delta = \frac{a}{4} = 2\sqrt[3]{10} = 4,31\,[cm]$$

i tako dimenzionisani poprečni presek je nosač kod koga za zadato opterećenje maksimalni normalni napon ne prelazi dozvoljene granice.

c) Za izabrani poprečni presek u prethodnoj tački zadatka aksijalni moment inercije je:

$$I_x = \frac{5}{64}a^4 = \frac{5}{64}\cdot8^4\cdot10\sqrt[3]{10} = 3200\sqrt[3]{10}\,[cm^4] \quad ; \quad y = \frac{a}{4} = 2\sqrt[3]{10}\,[cm]$$

dok je statički moment dela površine čije tačke imaju ordinate veće od ordinata tačaka u kojima se traži tangencijalni napon:

$$S_x' = a\cdot\delta\cdot\frac{3}{8}a = \frac{3}{32}a^3 = \frac{3}{32}\cdot8^3\cdot10 = 480\,[cm^3] \quad ; \quad \xi = 2\delta = 4\sqrt[3]{10}\,[cm]$$

Traženi komponentni naponi u tačkama poprečnog preseka definisanih delom zadatka pod c) su:

I) normalni

$$\sigma_z = \frac{M_{tp}}{I_x}\cdot y = \frac{3\cdot10^5}{3200\cdot\sqrt[3]{10}}\cdot2\sqrt[3]{10} = 187,5\,[kp/cm^2]$$

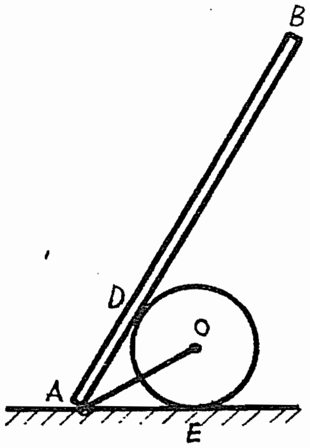
i II) tangencijalni:

$$\tau = \frac{F_{TP} \cdot S_x'}{I_x \cdot \xi} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 480}{3200\sqrt[3]{10} \cdot 4\sqrt[3]{10}} = 15\sqrt[3]{10} = 32{,}4 \ [kp/cm^2]$$

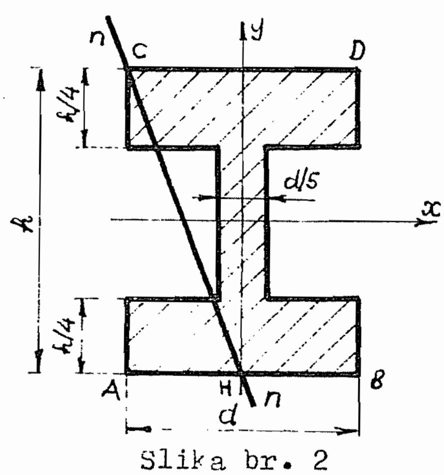
d) Ako bi smo koristili standardni profil 2IP potrebno je da usvojimo 2IP 28.

APRILSKI ISPITNI ROK 1977

PRVI ZADATAK: Homogena kugla poluprečnika R, težine $Q = 12[N]$ leži na horizontalnoj glatkoj ravni, dok je koncem dužine $2R$ od težišta vezana za tačku A na horizontalnoj ravni. Za istu tačku A zglobno je vezan homogeni štap AB, dužine $\ell = 4R\sqrt{3}$, težine $G = 10[N]$, koji se oslanja na kuglu u tački D. Odrediti pritisak kugle na pod u tački E, pritisak štapa na kuglu u tački D, silu u koncu i ukupni otpor zgloba A. (vidi sliku br. 1).



Slika br. 1



Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Za presek na slici br. 2, gde je $d/h = 3/4$, $h = 40$ [cm], odrediti:

a) Oblik i dimenzije jezgra preseka i nacrtati jezgro preseka;

b) Koordinate napadne tačke ekscentrične aksijalne sile intenziteta $F = 30$ [Mp], tako da neutralna osa padne u pravac CH. Za taj položaj sile izračunati najveći normalni napon i nacrtati dijagram napona.

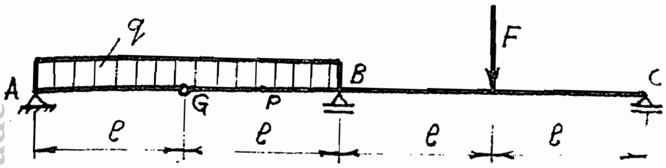
TREĆI ZADATAK: Homogeni kontinualni nosač AGBC, sa osloncima u tačkama A, B i C i zglobom u tački G, dimenzija naznačenih na slici br. 3, gde je $\ell = 2$ [m], na delu AB opterećen je kontinualnim opterećenjem $q = 2$ [Mp/m], dok je na delu BC opterećen koncentrisanom silom $F = 6$ [MP] na sredini. Odrediti:

a) Otpore oslonaca i silu u zglobu; izračunati momente u karakterističnim tačkama i nacrtati statičke dijagrame nosača;

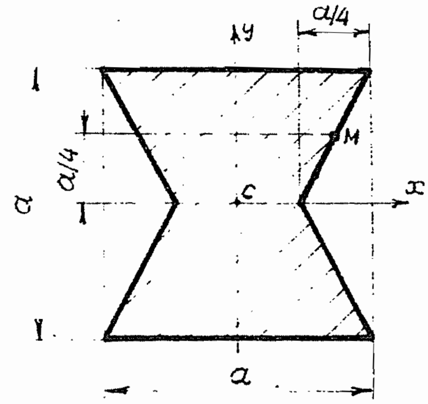
b) Dimenzionisati nosač poprečnog preseka kao na slici br. 3 a, ako je dozvoljeni napon na savijanje $\sigma_{df} = 1000\,[kp/cm^2]$;

c) Izračunati vrednosti normalnog i tangencijalnog napona u preseku P, gde je PB = GP, a u tačkama poprečnog preseka na udaljenju a/4 od neutralne ose;

d)Koji bi profil trebalo usvojiti ako se koristi standardni profil NI .



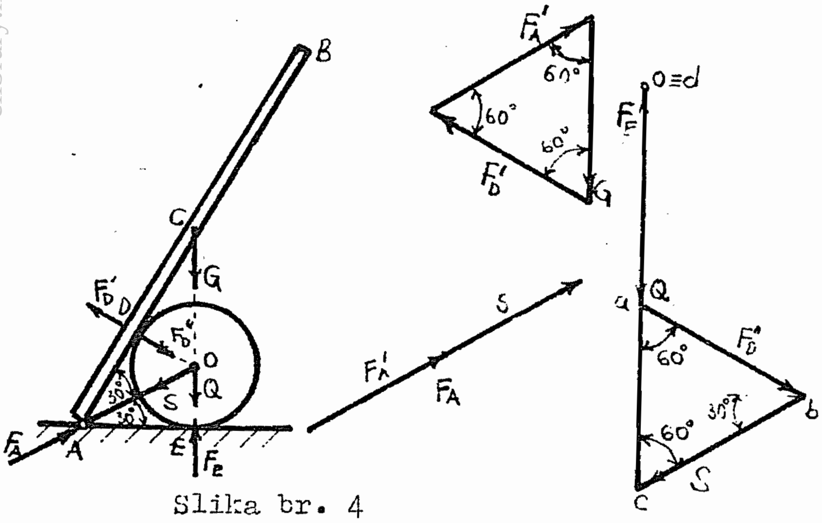

Slika br. 3




Slika br. 3a

R E Š E N J A

PRVO ZADATAK:Na slici br. naznačene su sile koje dejstvuju na štap i kuglu,a takodje je nacrtan trougao sila koje dejstvuju na štap i poligon sila koje dejstvuju na kuglu. Sa slike je očigledno da je:




Slika br. 4

$$F_A' = F_D' = G = 10\,[N]$$

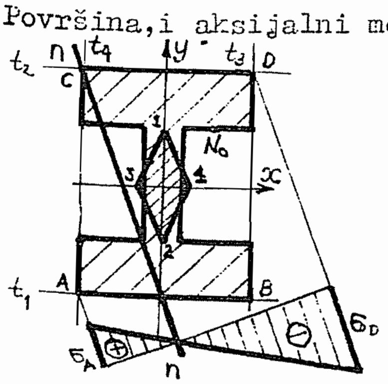
$$S = F_D'' = G = 10\,[N]$$

$$F_E = Q + G = 22\,[N]$$

$$F_A = F_A' + S = 2G = 20\,[N]$$

DRUGI ZADATAK:Na slici br. 5 prikazan je presek sa jezgrom preseka.

a)Površina,i aksijalni momenti inercije za centralne ose su:




Slika br. 5

$$A = 2\cdot\frac{h}{4}\cdot d + \frac{h}{2}\cdot\frac{d}{5} = \frac{3}{5}\cdot d\cdot h$$

$$I_x = \frac{1}{12}\,d\cdot h^3 - \frac{1}{12}\cdot\frac{4}{5}d\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{3}{40}\,d\,h^3$$

$$I_y = 2\cdot\frac{1}{12}\cdot d^3\cdot\frac{h}{4} + \frac{1}{12}\cdot\frac{h}{2}\cdot\left(\frac{d}{5}\right)^3 = \frac{21}{500}\,d^3 h$$

Poluprečnici inercije za glavne centralne ose inercije su:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{3}{40}d\cdot h^3}{\frac{3}{5}dh} = \frac{1}{8}h^2 \;; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{21}{500}d^3h}{\frac{3}{5}dh} = \frac{7}{100}d^2$$

Kontura preseka je pravougaonik, te jezgro preseka ima oblik četvorougla, čija temena imaju sledeće koordinate:

$$x_{j1,2} = -\frac{i_y^2}{a_0} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0 \;; \quad y_{j1,2} = -\frac{i_x^2}{b_0} = -\frac{\frac{1}{8}h^2}{\mp\frac{1}{2}h} = \pm\frac{h}{4}$$

$$x_{j3,4} = -\frac{i_y^2}{a_0} = -\frac{\frac{7}{100}d^2}{\pm\frac{1}{2}d} = \mp\frac{7}{50}d \;; \quad y_{j3,4} = -\frac{i_x^2}{b_0} = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0$$

b) Neutralna osa n-n odseca na koordinatnim osama sledeće odsečke:

$$a_0 = -\frac{1}{4}d \;; \quad b_0 = -\frac{1}{2}h$$

Pa su koordinate napadne tačke sile

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{a_0} = -\frac{\frac{7}{100}d^2}{-\frac{1}{4}d} = \frac{7}{25}d \;; \quad y_0 = -\frac{i_x^2}{b_0} = -\frac{\frac{1}{8}h^2}{-\frac{1}{2}h} = \frac{h}{4}$$

Za taj položaj napadne tačke sile najveći normalni napon se javlja u tački D preseka i iznosi:

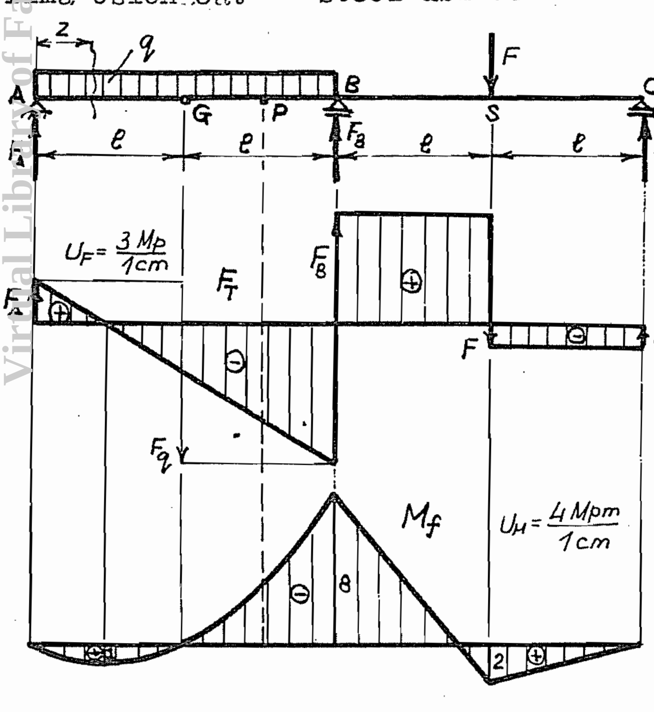
$$\sigma_D = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_0}{i_x^2}\cdot y + \frac{x_0}{i_y^2}\cdot x\right) = -\frac{F}{\frac{3}{5}dh}\left(1 + \frac{\frac{h}{4}}{\frac{1}{8}h^2}\cdot\frac{h}{2} + \frac{\frac{7}{25}d}{\frac{7}{100}d^2}\cdot\frac{d}{2}\right) = -166\ [kp/cm^2]$$

dok je težišni napon jednak:

$$\sigma_0 = -\frac{F}{A} = -\frac{5F}{3dh} = -\frac{5\cdot 30\cdot 10^3}{3\cdot 30\cdot 40} = -\frac{125}{3} = -41{,}67\ [kp/cm^2]$$

Na slici br.5 nacrtan je dijagram normalnog napona.

TREĆI ZADATAK: Na slici br.6 prikazan je nosač sa naznačenim otporima oslonaca. Koristeći uslove ravnoteže nosača sa zglobom pišemo sledeće jednačine:




Slika br.6.

$$\sum M_G^{\ell} = F_A\cdot\ell - \frac{1}{2}q\cdot\ell^2 = 0$$

$$\sum M_B = F_A\cdot 2\ell - q\cdot 2\ell\cdot\ell + F\cdot\ell - F_C\cdot 2\ell = 0$$

$$\sum Y_i = F_A + F_B + F_C - F - 2q\cdot\ell = 0$$

iz kojih izračunavamo tražene otpore oslonaca:

$$F_A = \frac{1}{2}q\cdot\ell = 2\ [Mp] \;; \quad F_C = \frac{1}{2}(F - q\cdot\ell) = 1\ [Mp]$$

$$F_B = 2q\cdot\ell + \frac{1}{2}F = 11\ [Mp]$$

Momenti savijanja u karakterističnim tačkama su:

$$M_S = F_C\cdot\ell = 2\ [Mpm] \;; \quad M_B = 2F_C\cdot\ell - F\cdot\ell = -8\ [Mpm]$$

$$M_{(z)} = F_A z - \frac{1}{2}q\cdot z^2 = 2z - z^2 \;; \quad \frac{dM_{(z)}}{dz} = 0 \rightarrow z = 1\ [m]$$

$$M_{(1)} = 2\cdot 1 - 1^2 = 1\ [Mpm]$$

b) Maksimalni moment savijanja je $M_{max} = 8$ [Mpm], pa je potrebni otporni moment:

$$W_x = \frac{M_{max}}{\sigma_{df}} = \frac{8\cdot 10^5}{10^3} = 800\ [cm^3]$$

Moment inercije poprečnog preseka i otporni moment za neutralnu osu su:

$$I_x = \frac{a^4}{12} - 4\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{7}{96}a^4$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{7}{48}a^3$$

Visina poprečnog preseka je:

$$a = \sqrt[3]{\frac{48 W_x}{7}} = \sqrt[3]{\frac{48\cdot 800}{7}} = 17,65\ [cm]$$

čime smo izvršili dimenzionisanje nosača.

c) U preseku P moment savijanja je $M_P = -3$ [Mpm], dok je transverzalna sila $F_T = -4$ [Mp]. Moment inercije poprečnog preseka za neutralnu osu je:

$$I_x = \frac{7}{96}a^4 = \frac{7}{96}\cdot 17,65^4 = 7050\ [cm^4]$$

Statički moment dela površine iznad tačaka u kojima se traži tangencijalni napon je:

$$S_x' = A_1'y_1' + 2A_2'y_2' = \frac{3}{16}a^2\cdot\frac{3}{8}a + 2\cdot\frac{a^2}{64}\cdot\frac{5}{12}a = \frac{1}{12}a^3 = \frac{1}{12}\cdot 17,65^3 = 457,14\ [cm^3]$$

Komponentni naponi u definisanim tačkama preseka su:

I. tangencijalni

$$\tau_{(M)} = \frac{F_T\cdot S_x'}{I_x\cdot\xi} = \frac{4\cdot 10^3\cdot 457,14}{7050\cdot 13,2375} = 19,57\ [kp/cm^2]$$

II. normalni

$$\sigma_{(M)} = \frac{M}{I_x}\cdot y = \frac{3\cdot 10^5}{7050}\cdot 4,41 = 188\ [kp/cm^2]$$

U težištu poprečnog preseka tangencijalni napon je:

$$\tau_{(c)} = \frac{F_T\cdot S_{1/2}}{I_x\cdot\xi} = \frac{4\cdot 10^3\cdot 571,14}{7050\cdot 8,82} = 36,71\ [kp/cm^2]$$

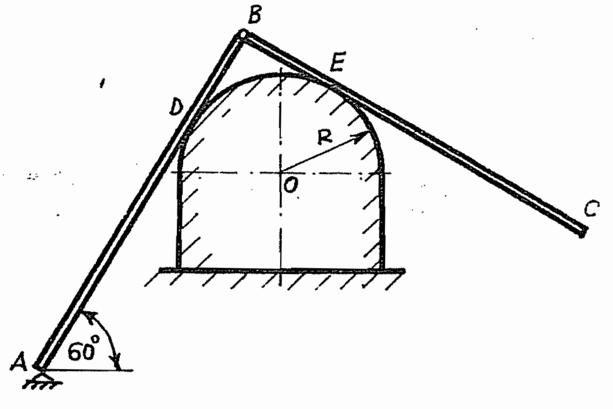
gde je $S_{1/2}$ statički moment površine polovine preseka i iznosi:

$$S_{1/2} = A_1 y_1 + 2A_2 y_2 = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{4} + 2\cdot\frac{a^2}{16}\cdot\frac{a}{3} = \frac{5}{48}a^3 = \frac{5}{48}\cdot 17,65^3 = 571,14\ [cm^3]$$

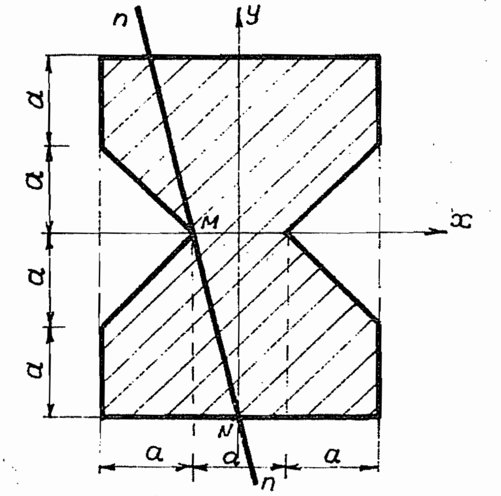
d) Ako bi smo usvojili standardni NI profil treba da to bude NI34.

JUNSKI ISPITNI ROK 1977

PRVI ZADATAK: Dva jednaka homogena štapa dužine $4R$, težine po $G$, zglobno su vezana u tački B i oslanjaju se u tačkama D i E o glatku nepokretnu sfernu površinu poluprečnika $R$, tako da je $DB = R$, a štap AB zaklapa sa horizontalom ugao od $60^\circ$, dok je u tački A zglobno vezan za nepomično ležište A. Odrediti pritiske štapova na kuglu i otpor zgloba A i silu u zglobu B. Sistem je prikazan na slici br. 1.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Za presek na slici br. 2, gde je $a = 30$ [cm], odrediti:

a) Oblik i dimenzije jezgra preseka;

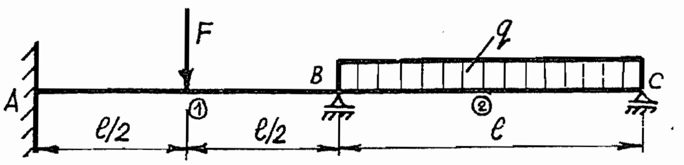
b) Koordinate napadne tačke ekscentrične aksijalne sile intenziteta $F = 30$ [Mp], tako da neutralna osa pada u pravac MN naznačen na slici; za taj položaj napadne tačke sile i silu, izračunati najveći normalni napon i nacrtati dijagram napona.

TREĆI ZADATAK: Dvorasponi nosač ABC na slici br. 3, jednakih raspona $\ell = 4$ [m], uklešten u tački A i oslonjen u tačkama B i C, opterećen je koncentrisanom silom $F = 4$ [Mp] na sredini prvog raspona i kontinualnim opterećenjem $q\ell = F$, duž drugog raspona BC.

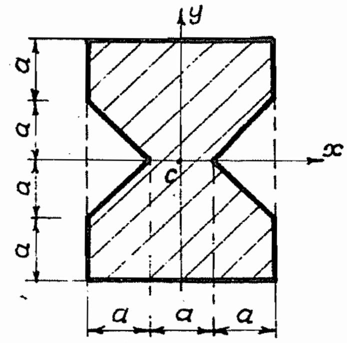
a) Odrediti statičke nepoznate i otpore oslonaca nosača;

b) Izračunati momente u karakterističnim tačkama i nacrtati statičke dijagrame nosača;

c)Dimenzionisati nosač poprečnog preseka kao na slici br. 3a




Slika br. 3




Slika br. 3a

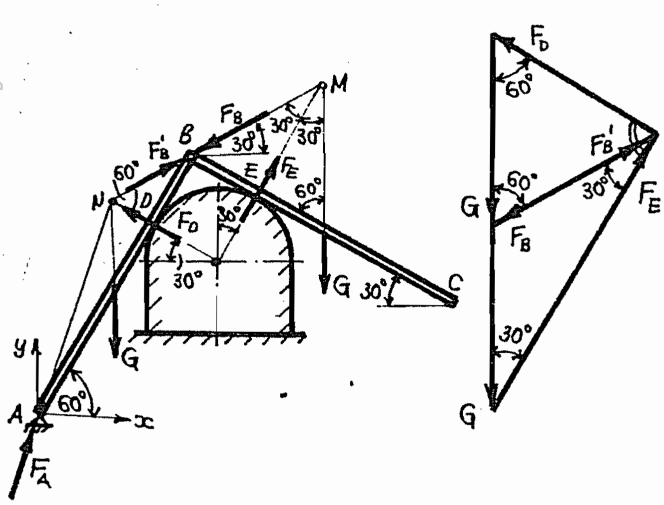
ako je dozvoljeni napon na savijanje $\sigma_{df} = 1000\,[kp/cm^2]$.(napomena: izračunatu vrednost za a zaokružiti na celi broj santimetara.).

c)Izračunati vrednost normalnog i tangencijalnog napona u preseku (2) na sredini drugog raspona, a u tačkama poprečnog preseka na udaljenju a od neutralne ose.

d)Ako bi smo za nosač usvojili standardni I profil, koje dimenzije profila treba usvojiti pri istom dozvoljenom naponu na savijanje?

R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Na slici br. 4 prikazan je sistem sila koji dejstvuje na štapove. Posmatraćemo prvo ravnotežu štapa BC, na koji dejstvuju sledeće sile: sila G težine štapa, sila $F_E$ otpor glatke sferne površine u tački oslanjanja E, i sila $F_B$ otpor zgloba B. Ove tri sile moraju da se seku u jednoj tački i da čine zatvoren trougao sila da bi sistem bio u ravnoteži. Odatle zaključujemo da sila $F_B$ gradi ugao od $30^\circ$ sa horizontom. Iz uslova ravnoteže štapa BC sledi da je:




Slika br.4

$$\Sigma M_B = F_E \cdot R - G \cdot 2R\cos 30^\circ = 0$$

$$\Sigma X_i = F_B \cdot \cos 30^\circ - F_E \sin 30^\circ = 0$$

$$F_E = G\sqrt{3}$$

$$F_B = G$$

Na štap AB dejstvuju sledeće sile: Sila G težine štapa AB, sila $F_D$ otpor glatke sferne površine u tački oslanjanja štapa, sila $F'_B = -F_B$ otpor zgloba B, i sila $F_A$ otpor zgloba A. Napadne linije sila G, $F_D$ i $F'_B$ seku se u tački N te da bi štap AB bio u ravnoteži potrebno je i da napadna linija sile $F_B$ prolazi kroz istu tačku N i da sve četiri sile čine zatvoren poligon sila što je prikazano na slici br.4a,odakle zaključujemo da je otpor zgloba A jednak nuli,a da su sile $G, F_B'$ i $F_D$ jednake po intenzitetu.Do istog rezultata dolazimo i iz uslova ravnoteže u analitičkom obliku:

$$\sum M_A = -G\cdot 2R\cos 60^\circ - G(4R\cos 60^\circ + 2R\cos 30^\circ) + F_E\cdot R + F_D\cdot 3R = 0$$

$$\sum X_i = X_A - F_D\cos 30^\circ + F_E\cdot \sin 30^\circ = 0$$

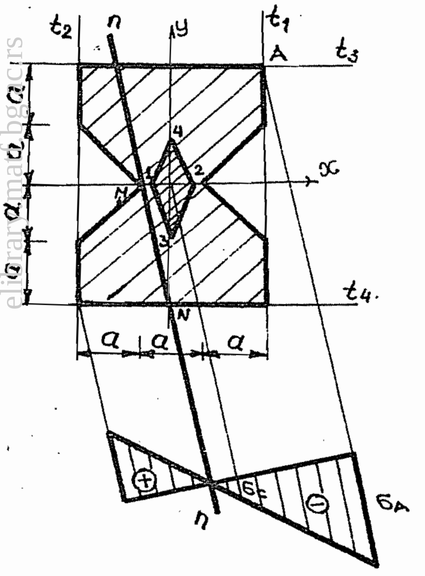
$$\sum Y_i = Y_A - 2G + F_D\sin 30^\circ + F_E\cdot\cos 30^\circ = 0$$

$$F_D = G$$

$$X_A = 0$$

$$Y_A = 0$$

DRUGI ZADATAK: a)Ose Cx i Cy su glavne centralne ose inercije poprečnog preseka i aksijalni momenti inercije za te ose su:




Slika br. 5

$$I_x = \frac{1}{12}3a(4a)^3 - 4\cdot\frac{1}{12}a^4 = \frac{3\cdot 16 - 1}{3}a^4$$

$$I_x = \frac{47}{3}a^4 = \frac{47}{3}\cdot 30^4 = 1269\cdot 10^4\ [cm^4]$$

$$I_y = \frac{1}{12}(3a)^3\cdot 4a - 2\left[\frac{1}{36}\cdot 2a\cdot a^3 + a^2\left(\frac{7}{6}a\right)^2\right]$$

$$I_y = 9a^4 - 2a^4\,\frac{2+49}{36}$$

$$I_y = \frac{37}{6}a^4 = \frac{37}{6}\cdot 30^4 = 499{,}5\cdot 10^4\ [cm^4]$$

$$A = 4a\cdot 3a - 2\,\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a$$

$$A = 10a^2 = 10\cdot 30^2 = 9000\ [cm^2]$$

Za sračunavanje aksijalnog momenta inercije za Cx osu koristili smo moment inercije pravougaonika osnovice 3a i visine 4a i moment inercije trougla osnovice a i visine a,koji osnovicom naleže na Cx osu,a takvih trouglova ima četiri.Za sračunavanje aksijalnog momenta inercije za Cy osu koristili smo moment inercije pravougaonika dimenzija 3ax4a i momente inercije trouglova osnovice 2a i visine a,čije težišne ose paralelne Cy osi su na udaljenju od 7a/6 ,te smo još koristili i Steiner-ovu teoremu po kojoj smo morali izračunavati i položajni deo momenta inercije za ta dva trougla.Površina zadatog preseka je: $A = 10\ a^2$ .Za zadate numeričke vrednosti aksijalni momenti inercije su:

$$I_x = 1269\cdot 10^4\ [cm^4]\ ; \qquad I_y = 499{,}5\cdot 10^4\ [cm^4]$$

$$A = 9000\ [cm^2]$$

Kvadrati poluprečnika inercije poprečnog preseka su:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{47}{3}a^4}{10a^2} = \frac{47}{30}a^2 = 1{,}565\,a^2$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{37}{6}a^4}{10a^2} = \frac{37}{60}a^2 \approx 0{,}618\,a^2$$

dok su sami poluprečnici inercije:

$$i_x = 1{,}25\,a = 37{,}5\,[cm] \quad ; \quad i_y = 0{,}786\,a = 23{,}58\,[cm]$$

Da bi smo odredili koordinate temena jezgra preseka povućićemo tangente na konturu preseka, a njih je u našem slučaju četiri. Svakoj stranici konture preseka odgovara jedno teme jezgra preseka. Sada možemo da sračunamo koordinate temena jezgra preseka:

$$t_{1,2}\left(\pm\tfrac{3}{2}a\,;\,\infty\right) \qquad x_{1,2} = -\frac{i_y^2}{a_{1,2}} = -\frac{\frac{37}{60}a^2}{\pm\frac{3}{2}a} = \mp\frac{37}{90}a = \mp 0{,}412\,a = \mp 12{,}36\,[cm]$$

$$y_{1,2} = -\frac{i_y^2}{b_{1,2}} = -\frac{\frac{47}{30}a^2}{\infty} = 0$$

$$t_{3,4}\left(\infty\,;\pm 2a\right) \qquad x_{3,4} = -\frac{i_y^2}{a_{3,4}} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0$$

$$y_{3,4} = -\frac{i_x^2}{b_{3,4}} = -\frac{47a^2/30}{\pm 2a} = \mp\frac{47}{60}a = \mp 0{,}785\,a = \mp 23{,}55\,[cm]$$

Pomoću odredjenih koordinata temena jezgra preseka na slici br. 5 je nacrtano jezgro preseka.

b) Neutralna osa na koju je zadata odseca na koordinatnim osama odsečke:

$$a_o = -\frac{a}{2} = -15\,[cm] \quad ; \quad b_o = -2a = -60\,[cm]$$

te su koordinate napadne tačke sile F za slučaj da neutralna osa pada u pravac MN:

$$x_o = -\frac{i_y^2}{a_o} = -\frac{\frac{37}{60}a^2}{-\frac{a}{2}} = \frac{37}{30}a = \frac{37}{30}\,30 = 37\,[cm]$$

$$y_o = -\frac{i_x^2}{b_o} = -\frac{\frac{47}{30}a^2}{-2a} = \frac{47}{60}a = \frac{47}{60}\,30 = 23{,}5\,[cm]$$

Napon u težištu poprečnog preseka za izračunati položaj napadne tačke sile je:

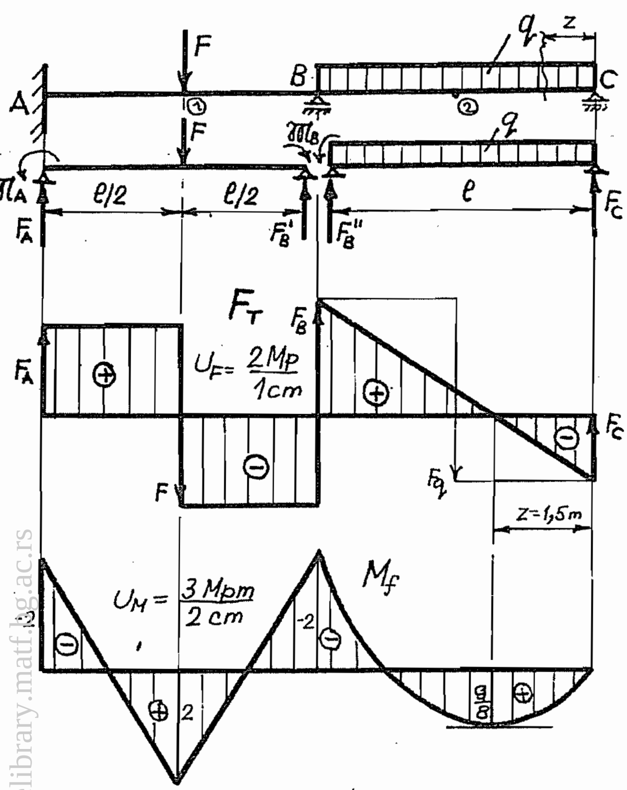
$$\sigma_c = -\frac{F}{A} = -\frac{30\cdot 10^3}{9000} = 3{,}33\,[kp/cm^2]$$

Najveći normalni napon je u temenu A poprečnog preseka za izračunati položaj napadne tačke aksijalne ekscentrične sile, i iznosi:

$$\sigma_A = -\frac{F}{A}\left[1 + \frac{x_A\cdot x_o}{i_y^2} + \frac{y_A\cdot y_o}{i_x^2}\right] = -\frac{30\cdot 10^3}{9000}\left[1 + \frac{\frac{3}{2}a\cdot\frac{37}{30}a}{\frac{37}{60}a^2} + \frac{\frac{47}{60}a\cdot 2a}{\frac{47}{30}a}\right]$$

$$\sigma_A = -\frac{50}{3} = -16{,}666\,[kp/cm^2]$$

TREĆI ZADATAK: Nosač na slici br. 6 je dva puta statički neodredjen i za statičke nepoznate izaberemo moment uklještenja $\mathfrak{M}_A$ i moment $\mathfrak{M}_B$ nad osloncem B, koje ćemo izračunati iz uslova da je nagib tangente na elastičnu liniju u uklještenju jednak nuli i iz uslova da je nagib elastične linije sa leve i desne strane preseka B nad osloncem jednak. Zato pišemo sledeće jednačine:




Slika br. 6

$$\alpha_A = 0$$

$$\frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}_A \ell}{3\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{6\mathcal{B}} = 0$$

$$\beta_B = \alpha_B$$

$$-\frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}} + \frac{\mathfrak{M}_A \ell}{6\mathcal{B}} + \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{3\mathcal{B}} = -\frac{\mathfrak{M}_B \ell}{3\mathcal{B}} + \frac{q\ell^3}{24\mathcal{B}}$$

odnosno:

$$2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = \frac{3}{8}F\ell$$

$$\mathfrak{M}_A + 4\mathfrak{M}_B = \frac{1}{4}q\ell^2 + \frac{3}{8}F\ell$$

odakle sračunavamo statičke nepoznate:

$$\mathfrak{M}_A = \frac{9}{56}F\ell - \frac{1}{28}q\ell^2$$

$$\mathfrak{M}_B = \frac{1}{14}q\ell^2 + \frac{3}{56}F\ell$$

Za zadate numeričke podatke statičke nepoznate su:

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B = 2\,[\mathrm{Mpm}].$$

Greda AB: Otpori oslonaca su:

$$F_A = F_B' = \frac{F}{2} = 2\,[Mp]$$

dok je moment u tački (1) jednak:

$$M_1^F = F_A \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{4}F\ell = 4\,[Mpm]$$

Greda BC: Otpori oslonaca su:

$$F_B'' = \frac{1}{2}q\ell + \frac{\mathfrak{M}_B}{\ell} = \frac{5}{2}\,[Mp]$$

$$F_C = \frac{1}{2}q\ell - \frac{\mathfrak{M}_B}{\ell} = \frac{3}{2}\,[Mp]$$

Analitički izraz za moment duž raspona BC je:

$$M(z) = F_C \cdot z - \frac{1}{2}q \cdot z^2 = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^2$$

Ekstremna vrednost momenta je za $z_0 = 3/2$ [m] jer je: $M'(z) = \frac{3}{2} - z = 0$ i iznosi:

$$M\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}[Mpm] = 1{,}125\,[Mpm]$$

Na osnovu sračunatih vrednosti nacrtani su statički dijagrami nosača prikazani na slici br. 6.

b) Maksimalni moment duž raspona nosača je: $M_{f\max} = 2\,[\mathrm{Mpm}]$ pa je potrebni otporni moment preseka:

$$W_x = \frac{M_{f\,max}}{\sigma_{df}} = \frac{2\cdot 10^5}{10^3} = 200\ [cm^3]$$

Kako smo u prethodnom zadatku sračunali aksijalni moment inercije zadatog preseka, to koristimo taj rezultat da sračunamo otporni moment poprečnog preseka:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{47a^4/3}{2a} = \frac{47}{6}a^3$$

Za zadato opterećenje nosača potrebno je da dužina a pomoću koje dimenzionišemo poprečni presek bude:

$$a = \sqrt[3]{\frac{6W_x}{47}} = \sqrt[3]{\frac{6\cdot 200}{47}} = \sqrt[3]{25{,}5} = 2{,}95\ [cm]$$

Izračunatu vrednost za a zaokružujemo na celi broj [cm] pa je $a = 3$ [cm].

c) Za usvojeni poprečni presek aksijalni moment inercije je:

$$I_x = \frac{47}{3}a^4 = \frac{47}{3}\cdot 3^4 = 1269\ [cm^4]$$

Dok je statički moment dela površine iznad tačaka u kojima se traži tangencijalni napon:

$$S_x' = 3a^2\left(a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{9}{2}a^3 = \frac{9}{2}\cdot 3^3 = \frac{243}{2}\ [cm^3]$$

U definisanom preseku (2) moment i transverzalna sila su:

$$M_2^q = F_C\cdot\frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}q\ell\cdot\frac{\ell}{4} = \frac{3}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1 = 1\ [Mpm]\ ;\quad F_T^{(2)} = -F_C + q\frac{\ell}{2} = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}\ [Mp]$$

Traženi komponentni naponi su:

1. normalni:

$$\sigma = \frac{M_2^q}{I_x}\cdot y = \frac{1\cdot 10^5}{1269}\cdot 3 = 231\ [kp/cm^2]$$

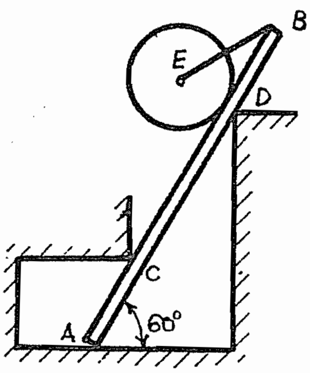
2. tangencijalni:

$$\tau = \frac{F_T^{(2)}\cdot S_x'}{I_x\cdot\xi} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^3\cdot\frac{243}{2}}{1269\cdot 9} = 5{,}3\ [kp/cm^2]$$

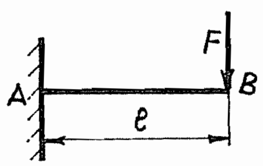
d) Ako bi smo usvojili standardni I profil potrebno je da to bude I20.

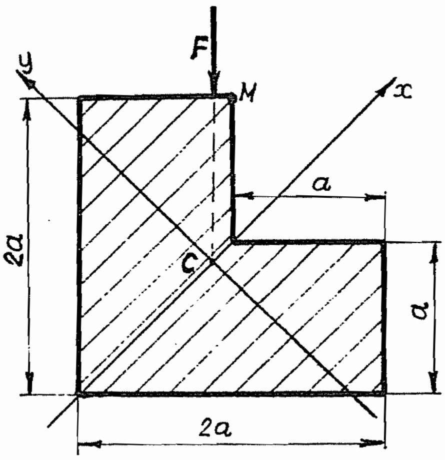
SEPTEMBARSKI ISPITNI ROK 1977

PRVI ZADATAK: Štap AB dužine $4\ell$, težine G, oslanja se u tačkama A, C i D o zid tako da sa horizontalom zaklapa ugao od $60^{\circ}$, pri čemu je $2\,AC = CD = 2\ell$. O tačku B koncem je vezana kugla poluprečnika $R = \ell\sqrt{3}/3$, koja se u tački D oslanja na štap AB. Odrediti otpore zida u tačkama A, C i D oslanjanja štapa kao i silu u koncu EB i pritisak kugle na štap u tački D. Težina kugle je Q. Sistem je prikazan na slici br. 1.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Konzola AB, dužine $\ell = 1\,[m]$, datog poprečnog preseka na slici br. 2 opterećena je na slobodnom kraju vertikalnom silom $F = \sqrt{2}\,[kN]$, čija napadna linija prolazi kroz težište C poprečnog preseka. Stranica $a = 6\,[cm]$.

a) Odrediti položaj neutralne ose preseka.

b) Izračunati najveći napon u temenu M preseka.

c) Nacrtati dijagram normalnog napona.

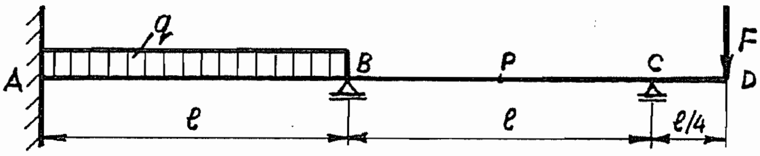
TREĆI ZADATAK: Kontinualni nosač ABCD, jednakih raspona dužina po $\ell$, istog poprečnog preseka, opterećen je duž prvog raspona jednakopodeljenim kontinualnim opterećenjem $q\ell = 130\,[kN]$, i silom $F = 30\,[kN]$, na slobodnom kraju prepusta dužine $\ell/4 = 1\,[m]$, sa slike br. 3:

a) Odrediti statičke nepoznate i skicirati statičke dijagrame;

b) Dimenzionisati nosač IP(Peiner) profila ako je $\sigma_{df} = 10\,[kN/cm^2]$.

c) Izračunati normalni i tangencijalni napon u preseku P, gde je $PB = PC = \ell/2$, a u vlaknima koja su udaljena 6 cm od poprečne neutralne ose;

d) d)Izračunati ugib kraja D nosača.Za modul elastičnosti usvoji $E = 2{,}2 \cdot 10^4 [kN/cm^2]$. Dužina $\ell = 4[m]$.

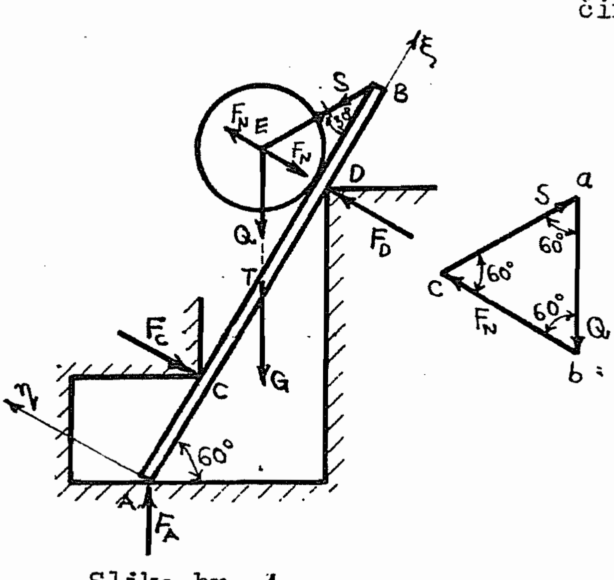



Slika br. 3

R E Š E N J A

PRVI ZADATAK:Na sistem dejstvuju dve aktivne sile,sila težine kugle Q i sila težine štapa G,i sile otpora zida u tačkama naleganja štapa na zid i to:u tačkama D i C slie $F_D$ i $F_C$ upravne na štap i u tački A sila $F_A$ upravna na zid,kako je to naznačeno na slici br. 4.Iz trougla EDB sledi da konac EB zaklapa ugao od $30^0$ sa pravcem štapa AB.Takodje iz odnosa geometrijskih veličina zaključujemo da je ugao ETD jednak $30^0$ ,što znači da se tačke E i T nalaze na jednoj vertikali,odnosno da sile G i Q imaju istu napadnu liniju.

Postavimo sada koordinatni sistem sa početkom u tački A,tako da osa A$\xi$ pada u pravac štapa AB.Iz analitičkih uslova ravnoteže pišemo sledeće jednačine:




Slika br. 4

$$\Sigma M_A = F_C \cdot \ell - F_D \cdot 3\ell + (Q+G) \cdot 2\ell \cos 60^\circ = 0$$

$$F_C - 3F_D + (Q+G) = 0$$

$$\Sigma F_\xi = F_A \cdot \cos 30^\circ - (Q+G)\cos 30^\circ = 0$$

$$F_A = Q+G$$

$$\Sigma F_\eta = -F_C + F_D - (Q+G)\sin 30^\circ + F_A \sin 30^\circ = 0$$

$$F_C = F_D$$

odakle sračunavamo tražene otpore zida:

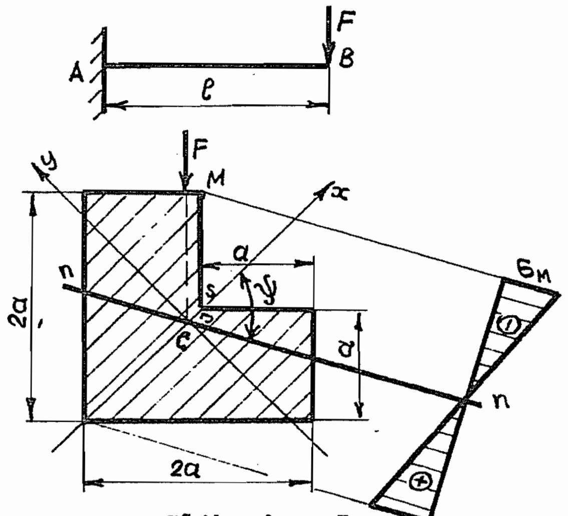
$$F_A = Q+G$$

$$F_C = F_D = \tfrac{1}{2}(Q+G)$$

Ako sada posmatramo ravnotežu kugle izolovano na nju dejstvuju tri sile: sila težine kugle Q, sila u koncu S i sila pritiska na štap $F_N$ i napadne linije sve tri sile prolaze kroz središte kugle tako da je za njihovu ravnotežu potrebno jš da čine zatvoren trougao sila abc iz koga sledi da je:

$$S = F_N = Q$$

DRUGI ZADATAK: Konzola je pod dejstvom sile F napregnuta na koso savijanje jer ravan savijanja ne prolazi kroz jednu od glavnih osa inercije poprečnog preseka. Na slici br. 5 naznačene su ose (x) i (y) glavne centralne ose inercije, jer je osa (x) osa simetrije poprečnog preseka, a obe ose se seku u težištu C poprečnog preseka. Težište C poprečnog preseka odredjeno je duži CS = s čija veličina je:




Slika br. 5

$$a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - s\right) - 2a^2 s = 0$$

$$s = \frac{\sqrt{2}}{6}\,a = \sqrt{2}\ [cm]$$

a) Površina poprečnog preseka je:

$$A = 3a^2 = 3\cdot 6^2 = 108\ [cm^2]$$

Aksijalni momenti inercije za glavne centralne ose inercije su:

$$I_x = \frac{a^4}{12} + 2\left[\frac{a^4}{12} + a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right] = \frac{5}{4}a^4$$

$$I_x = 1620\ [cm^4]$$

$$I_y = \frac{a^4}{12} + a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + 2\left[\frac{a^4}{12} + a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{6}a\right)^2\right]$$

$$I_y = \frac{7}{12}a^4 = 756\ [cm^4]$$

Za izračunavanje korišćeni su obrasci za aksijalne momente inercije kvadrata za ode koje prolaze pravcem dijagonale i Steiner-ova teorema koja kaže da se aksijalni moment inercije preseka sastoji iz sósptvenog i položajnog momenta inercije:

$$I_x = I_\xi + A\cdot y_c^2 \quad ; \quad I_y = I_\eta + A\cdot x_c^2$$

Poluprečnici inercije poprečnog preseka su:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{1620}{108} = 15\ [cm^2] \quad ; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{756}{108} = 7\ [cm^2]$$

Ugao koji neutralna osa čini sa pravcem Cx ose je: $\psi$ i njegov tang je:

$$tg\,\psi = -\frac{I_x}{I_y}\cdot ctg\,\varphi = -\frac{i_x^2}{i_y^2}\cdot ctg\,\varphi = -\frac{15}{7}\cdot 1 = -2{,}14286 \Rightarrow \psi = -65^\circ$$

dok je jednačina neutralne ose: $y = x\,tg\,\psi = -2{,}14286\cdot x$

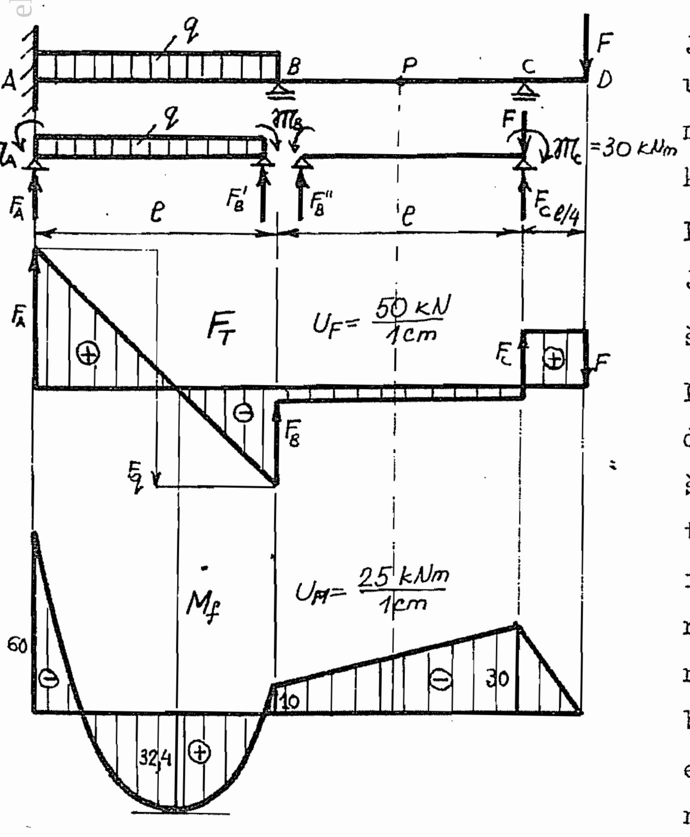
b) Najveći moment duž konzole je u ukleštenju i jednak $\mathfrak{M}_A = -\sqrt{2}$ [kNm]. Koordinate tačke - temena M su: M ( x = $4\sqrt{2}$ [m], y = $3\sqrt{2}$ [m]), te je najveći napon u temenu M preseka u uklještenju i njegova vrednost iznosi:

$$\sigma_M = -\mathfrak{M}_A\left(\frac{\cos\varphi}{I_y}\cdot x + \frac{\sin\varphi}{I_x}\cdot y\right) = -(-\sqrt{2})\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{756}\cdot 4\sqrt{2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1620}\cdot 3\sqrt{2}\right)$$

$$\sigma_M = \frac{5\sqrt{2}}{7} \approx 1\ [kN/cm^2]$$

c)Koristeći položaj neutralne ose i napon u temenu M i znajući da se napon menja linearno sa rastojanjem od neutralne ose na slici br. 5 je nacrtan dijagram normalnog napona.

TREĆI ZADATAK:Kontinualni nosač ABC na slici br. 6 ima sledeće otpore uklještenja i oslonaca: $F_A$ ,$F_B$, $F_C$ i moment uklještenja $\mathfrak{M}_A$,što predstavlja četiri nepoznate veličine,te kako su sve sile u ravni i paralelne zajedno sa opterećenjem to sledi da postoje dva uslova za ravnotežu pa je nosač dva puta statički neodredjen,te je potrebno da nadjemo dve dopunske jednačine koje bi nam pomogle da izračunamo sve tražene otpore oslonaca.Ti dopunski uslovi se dobijaju iz uslova kompatibilnosti deformacija (saglasnosti deformacija).U našem slučaju mogli bi smo nosač pretvoriti u konzolu kod koje su ugibi u tačkama B i C koje odgovaraju osloncima jednaki nuli,čime bi smo dobili dve dopunske jednačine.Medjutim zadatak možemo rešiti i na drugi način olakšavajući sebi račun time što ćemo nosač dekomponovati (razdvojiti) na dve proste grede istog oblika od kojih je prva opterećena kontinualnim opterećenjem i momentima $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ nad osloncima,i drugu opterećenu momentima $\mathfrak{M}_B$ i $\mathfrak{M}_C$ nad osloncima i silom F u osloncu C kako je to na slici br. 6 naznačeno. Moment $\mathfrak{M}_A$ je moment uklještenja,moment $\mathfrak{M}_B$ je uzajamni uticaj greda u tački B,dok je moment $\mathfrak{M}_C$ rezultat redukcije sile F koja dejstvuje na slobodnom kraju prepusta D. Sada kao nepoznate se javljaju: $\mathfrak{M}_A$, $\mathfrak{M}_B$, $F_A$, $F_B'$, $F_B''$ i $F_C$ što iznosi šest nepoznatih veličina, pri čemu nam stoje na raspolaganju po dve jednačine ravnoteže za svaku gredu što je ukupno četiri pa je i ovako postavljen problem dva puta statički neodredjen.U ovom slučaju kao dopunske jednačine izabiramo iz uslova kompatibilnosti deformacija,t.j. kako nosač mora biti kontinualan nad osloncima,to nagib elastične linije sa leve i desne strane oslonca mora biti isti t.j. $\beta_1 = \alpha_2$ i kako je u tački A uklještenje to u toj tački mora biti nagib tangente




Slika br. 6

na elastičnu liniju u tački A jednak nuli $\alpha_1 = 0$ .Prednost ovakvog postavljanja problema je u korišćenju tablica iz Otpornosti materijala i u tome što u jednačinama za odredjivanje statičkih nepoznatih figurišu samo dve nepoznate veličine $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ koje prvo izračunamo,a zatim korišćenjem statičkih jednačina ravnoteže za svaku gredu odredjujemo ostale otpore oslonaca,koje nismo izračunali,dok bi u prethodnom načinu rešavanja u svim jednačinama figurisale sve nepoznate veličine te bi jednačine rešavali simultano,što je očigledno veoma glomazno za inženjerski proračun.

Jednačine za odredjivanje statičkih nepoznatih su:

$$\alpha_1 = 0 \qquad -\frac{\mathfrak{M}_A \ell}{3\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{6\mathcal{B}} + \frac{q\ell^3}{24\mathcal{B}} = 0$$

$$2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = 130$$

$$\beta_1 = \alpha_2 \qquad \frac{\mathfrak{M}_A \ell}{6\mathcal{B}} + \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{3\mathcal{B}} - \frac{q\ell^3}{24\mathcal{B}} = -\frac{\mathfrak{M}_B \ell}{3\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}_C \ell}{6\mathcal{B}}$$

$$\mathfrak{M}_A + 4\mathfrak{M}_B = 100$$

Pa su nepoznati momenti:

$$\mathfrak{M}_A = 60 \ [kNm] \quad ; \quad \mathfrak{M}_B = 10 \ [kNm]$$

GREDA AB: Iz uslova ravnoteže sledi:

$$\Sigma Y_i = F_A + F_B' - q \cdot \ell = 0$$

$$\Sigma M_A = F_B' \cdot \ell + \mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_B - \frac{1}{2} q \cdot \ell^2 = 0$$

$$F_A = \frac{155}{2} [kN] \quad ; \quad F_B' = \frac{105}{2} \ [kN]$$

Momenti u karakterističnim tačkama duž grede AB su:

$$M(z) = -\frac{1}{2} q \cdot z^2 + F_A \cdot z - \mathfrak{M}_A = -\frac{65}{4} z^2 + \frac{155}{2} z - 60$$

$$\frac{dM(z)}{dz} = -\frac{65}{2} \cdot z + \frac{155}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{155}{65} = \frac{31}{13} = 2,38 \ [m]$$

$$M(1) = -\frac{65}{4} \cdot 1^2 + \frac{155}{2} \cdot 1 - 60 = 1,25 \ [kNm]$$

$$M(2) = -\frac{65}{4} \cdot 2^2 + \frac{155}{2} \cdot 2 - 60 = 30 \ [kNm]$$

$$M(2,38) = -\frac{65}{4} \cdot 2,38^2 + \frac{155}{2} \cdot 2,38 - 60 = 32,4 \ [kNm]$$

GREDA BC: Iz uslova ravnoteže sledi:

$$\Sigma Y_i = F_B'' + F_C - F = 0$$

$$\Sigma M_C = F_B'' \cdot \ell - \mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_C = 0$$

$$F_B'' = -5 \ [kN] \quad ; \quad F_C = 35 \ [kN]$$

Duž grede BC nema koncentrisanih sila te se moment menja linearno izmedju najveće i najmanje vrednosti od oslonca B do oslonca C.Na osnovu sračunatih vrednosti skiciran je dijagram momenata savijanja.Takodje je prikazan i dijagram transverzalnih sila.

b)Mrksimalni moment je $M_{max} = \mathfrak{M}_A = 60 \ [kNm]$ ,pa je potrebni otporni moment poprečnog preseka nosača:

$$W_x = \frac{M_{max}}{\sigma_{df}} = \frac{60 \cdot 10^2}{10} = 600 \ [cm^3]$$

Iz tablica usvajamo standardni IP profil IP22 čije su geometrijske karakteristike: $I_x = 8050\ [cm^4]$, $h=B= 22\ [cm]$, $A = 91{,}1\ [cm^2]$, $S_{1/2} = 412\ [cm^3]$, $\delta = 1\ [cm]$.

c) Moment i transverzalna sila u naznačenom preseku P na sredini nosača BC su: $F_T = 5\ [kN]$ i $M_f = 20\ [kNm]$. Statički moment dela površine preseka iznad tačaka u kojima se traže naponi je:

$$S_x' = S_{1/2} - h_1 \cdot \delta \cdot \frac{1}{2} h_1 = 412 - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 394\ [cm^3]$$

Traženi komponentni naponi su sada:

1) Normalni

$$\sigma = \frac{M_P}{I_x} \cdot y = \frac{20 \cdot 10^2}{8050} \cdot 6 = 1{,}4906\ [kN/cm^2] = 1490{,}6\ [N/cm^2]$$

2) tangencijalni $\quad \tau = \frac{F_T \cdot S_x'}{I_x \cdot \delta} = \frac{5 \cdot 394}{8050 \cdot 1} = 0{,}2447\ [kN/cm^2] = 244{,}7\ [N/cm^2]$

d) Ugib kraja D nosača je:

$$f_D = \beta_{BC} \cdot c + f_D^F$$

gde je $\beta_{BC}$ ugao nagiba grede BC u tački C pod dejstvom momenata $\mathfrak{M}_B$ i $\mathfrak{M}_C$ i njegova vrednost iznosi:

$$\beta_{BC} = \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{6\mathcal{B}} + \frac{\mathfrak{M}_C \ell}{3\mathcal{B}} = \frac{10 \cdot 4}{6\mathcal{B}} + \frac{30 \cdot 4}{3\mathcal{B}} = \frac{140}{3\mathcal{B}}$$

dok je $f_D^F$ ugib tačke D kao da je prepust CD uklešten (konzola) i njegova vrednost je:

$$f_D^F = \frac{F}{3\mathcal{B}} \left(\frac{\ell}{4}\right)^3 = \frac{30}{3\mathcal{B}} \cdot 1^3 = \frac{30}{3\mathcal{B}}$$

Pa je sada ugib tačke D:

$$f_D = \frac{140}{3\mathcal{B}} \cdot 1 + \frac{30}{3\mathcal{B}} = \frac{170}{3\mathcal{B}}$$

Savojna krutost nosača za izabrani poprečni presek IP22 i naznačeni materijal je:

$$\mathcal{B} = E \cdot I_x = 2{,}2 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 8050 \cdot 10^{-8} = 17\,710\ [kN \cdot m^2]$$

Pa je numerička vrednost ugiba tačke D jednaka:

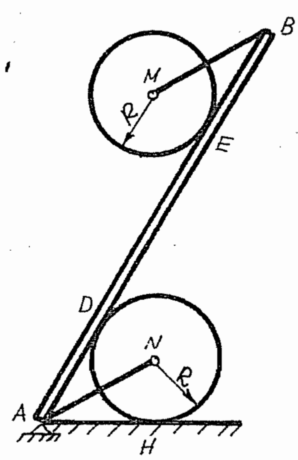
$$f_D = \frac{170}{3 \cdot \mathcal{B}} = \frac{170}{3 \cdot 17710}\ [m] = \frac{17000}{3 \cdot 17710} = 0{,}32\ [cm]$$

što je u granicama dozvoljenog za ugibe pri savijanju.

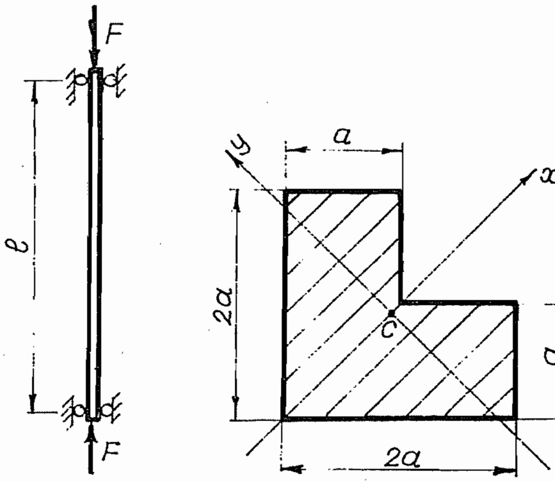
OKTOBARSKI ISPITNI ROK 1977

PRVI ZADATAK: Homogena kugla poluprečnika $R = \sqrt{3}\,\ell/3$, težine $Q = 12$ [kN], leži na horizontalnoj glatkoj ravni, dok je koncem dužine 2R od težišta N vezana za tačku A na horizontalnoj ravni. Za istu tačku A na horizontalnoj ravni, zglobno je vezan homogeni štap AB dužine $4\ell$, težine $G = 10$ [kN], koji se oslanja na kuglu u tački D. Za drugi kraj štapa B koncem dužine 2R vezana je kugla težine $Q = 12$ [kN], poluprečnika $R = \sqrt{3}\,\ell/3$, kao što je na slici br. 1 prikazano.

Odrediti pritisak kugle na pod u tački H, pritisak štapa na kuglu u tački D, pritisak druge kugle na štap u tački E, sile u koncima i ukupni otpor zgloba A.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Čelični stub dužine $\ell = 3{,}14$ [m], poprečnog preseka kao na slici br. 2, koji je zglobno učvršćen na krajevima, opterećen je aksijalnom pritisnom silom $F = 270$ [kN]. Dimenzionisati stub pod uslovom da je stepen sigurnosti od izvijanja $\nu = 7$. Za modul elastičnosti materijala usvoji $E = 2 \cdot 10^4$ [kN/cm$^2$].

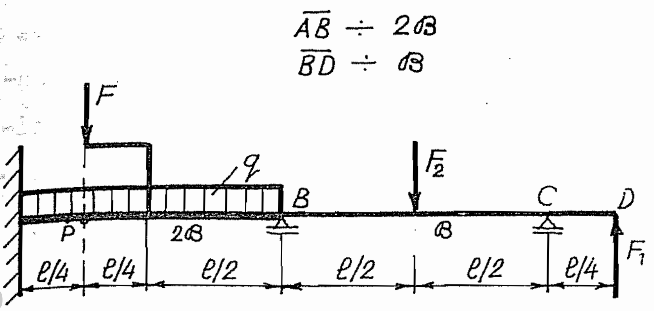
TREĆI ZADATAK: Za kontinualni nosač ABCD na slici br. 3, gde je $\ell = 4$ [m]; $F = 40$ [kN]; $F_1 = 3F/4$; $F_2 = 3F/2$; $q\ell = F$; :

a) Odrediti statičke nepoznate i skicirati statičke dijagrame.

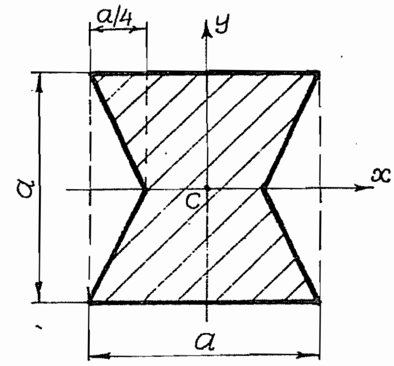
b) Dimenzionisati nosač poprečnog preseka kao na slici br. 3a, ako je dozvoljeni napon na savijanje $\sigma_{df} = 10$ [kN/cm$^2$];

c) Izračunati vrednosti normalnog i tangencijalnog napona u preseku P, gde je $AP = \ell/4$, a u tačkama poprečnog preseka na udaljenju a/4 od neutralne ose; .

d) Koji bi profil trebalo usvojiti ako se koristi standardni profil I ?




Slika br. 3




Slika br. 3a

R E Š E N J A

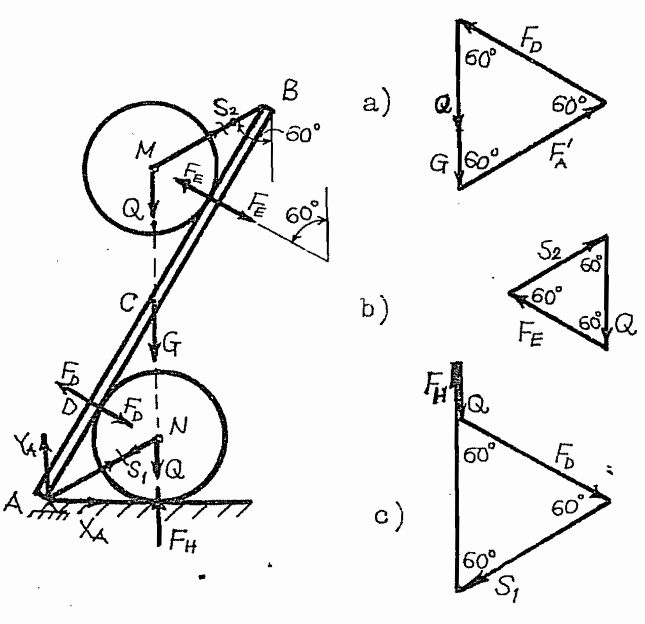
PRVI ZADATAK: Sistem se sastoji iz tri elementa na koje možemo izvršiti dekompoziciju sistema, dok uzajamni uticaj pojedinih elemenata jednog na drugi zamenjujemo silama uzajamnog pritiska.

Prvo ćemo posmatrati ravnotežu sistema u celini. Na sistem dejstvuju sila težine štapa G, sila Q težine I kugle i sila Q težina II kugle. Iz momentne jednačine za tačku A sledi:

$$\sum M_A = (Q+G+Q)\cdot 2\ell\cdot\frac{1}{2} - F_H\cdot 2\ell\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$F_H = 2Q+G$$

$$F_H = 34\ [kN]$$




Slika br. 4

Ako sada uklonimo kuglu br. I onda njen uticaj zamenjujemo silom $F_D$ u tački D i iz uslova ravnoteže štapa sa kuglom II, odnosno iz momentne jednačine za tačku A sledi:

$$\sum M_A = (Q+G)\cdot 2\ell\cos 60^\circ - F_D\cdot\ell = 0$$

$$F_D = Q+G$$

$$F_D = 22\ [kN]$$

Ako kuglu I posmatramo izolovano od sistema onda uzimajući uticaj štapa na kuglu i zida i sile u koncu, a prema slici br. 4 na kuglu I dejstvuju sledeće sile; sila Q težine kugle I, sila $F_H$ otpora horizontalnog zida - poda, sila $F_D$ pritiska štapa na kuglu I i sila $S_1$ u koncu AN. Sve četiri sile seku se u jednoj tački N, pa je potrebno i da čine zatvoren poligon sila da bi bile u ravnoteži, kao što je na slici br. 4c prikazano. Iz poligona sila sledi da je:

$$S_1 = F_D = Q + G = 22\ [kN]\ ; \quad F_H = F_D + Q = 34\ [kN]$$

Na kuglu II dejstvuju sledeće sile: sila $Q$ težine kugle II, sila $F_E$ otpora štapa usled naleganja kugle na štap u tački E, i sila $S_2$ u koncu MB. Napadne linije nabrojanih sila seku se u tački M, pa je potrebno još da čine zatvoren trougao sila da bi bile u ravnoteži, što je na slici br. 4b prikazano. Iz trougla sila sledi da je:

$$S_2 = F_E = Q = 12\ [kN]$$

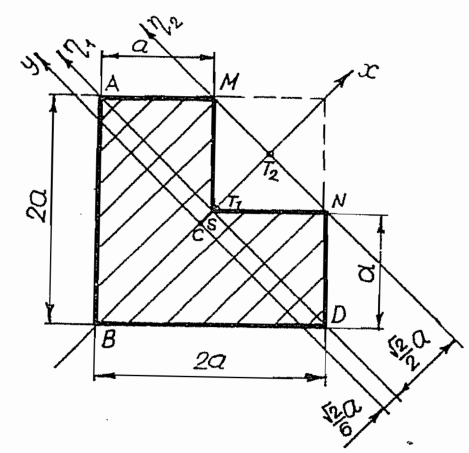
Grafički uslov ravnoteže štapa prikazan je na slici br. 4a. Iz uslova ravnoteže štapa sledi da je:

$$\sum Y_i = Y_A - 2Q - G + F_H = 0$$

$$Y_A = 2Q + G - (2Q + G) = 0$$

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_A = 0$$

DRUGI ZADATAK: Poprečni presek na slici br. 5 je simetričan sa osom simetrije u pravcu BE, pa se težište poprečnog preseka nalazi na tom pravcu, koji smo označili sa (x). Ako sa s označimo rastojanje težišta C poprečnog preseka od tačke E onda je njegova veličina:




Slika br. 5

$$a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - s\right) - 2a^2 s = 0$$

$$s = \frac{\sqrt{2}}{6}a$$

Površina poprečnog preseka je: $A = 3a^2$.

Glavne centralne ose inercije poprečnog preseka su sada: Cx i Cy, jer prolaze kroz težište C poprečnog preseka i jedna od osa je osa simetrije. Aksijalni momenti inercije za glavne centralne ose inercije su sada:

$$I_x = \frac{1}{12}(2a)^4 - \frac{1}{12}a^4 = \frac{15}{12}a^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(2a)^4 + 4a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{6}a\right)^2 - \frac{1}{12}a^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{6}a + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot a^2$$

$$I_y = \frac{7}{12}a^4$$

Pri sračunavanju aksijalnih momenata inercije koristili smo sledeće: osa Cx je težišna osa za kvadrat stranice 2a i za kvadrat stranice a; Težišne ose $\eta_1$ i $\eta_2$ koje prolaze kroz tačke $T_1$ odnosno $T_2$ a paralelno sa Cy su na rastojanjima $\sqrt{2}\,a/6$ odnosno $(\sqrt{2}\,a/6 + \sqrt{2}a/2)$; pa smo pri izračunavanju momenta inercije za osu Cx mogli da oduzmemo odgovarajuće aksijalne momente inercije kvadrata stranice 2a i kvadrata stranice a, dok smo pri izračunavanju aksijalnog momenta inercije za osu Cy morali da uzmemo u obzir i položajne momente površina a prema Steiner-ovoj teoremi:

$$I_y = \sum_i \left( I_{\eta i} + \xi_i^2 A_i \right)$$

Uporedjenjem dobijenih vrednsti aksijalnih momenata inercije za glavne centralne ose zaključujemo da je aksijalni moment inercije za osu Cy manji i da će izvijanje stuba pod kritičnim opterećenjem biti oko ose Cy preseka.

Prema Euler-ovoj metodi potreban minimalni aksijalni moment inercije sa stepenom sigurnosti $\nu$ od izvijanja treba da bude:

$$I_{min} = \frac{\nu \cdot F \cdot \ell_r^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{\nu \cdot F \cdot \ell}{\pi^2 \cdot E} = \frac{7}{12} a^4$$

gde je $\ell_r$ redukovana dužina štapa koja zavisi od uslova oslanjanja štapa. U našem slučaju štap je na krajevima zglobno vezan, pa je redukovana dužina štapa jednaka samoj dužini štapa. Za zadate numeričke podatke dobijamo veličinu a pomoću koje je zadata dimenzija samog poprečnog preseka štapa:

$$a = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot \nu \cdot F \cdot \ell^2}{7 \cdot \pi^2 \cdot E}} = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot 7 \cdot 270 \cdot 3{,}14^2 \cdot 10^4}{7 \cdot 3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^4}} = 3\sqrt[4]{20} = 6{,}36 \ [cm]$$

Izračunata vrednost a nam definiše dimenzije poprečnog preseka štapa. Medjutim moramo proveriti pravilnost izabrane metode za dimenzionisanje štapa napregnutog na izvijanje. Za čelični štap kritična vitkost štapa je:

$$\lambda_K = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{50}} = 20\pi = 62{,}8$$

Poluprečnik inercije poprečnog preseka štapa za osu Cy je:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{7}{12} a^4}{3a^2}} = \frac{\sqrt{7}}{6} a = 2{,}8 \ [cm]$$

pa je vitkost štapa dimenzionisanog prema Euler-ovoj metodi:

$$\lambda = \frac{\ell_r}{i_{min}} = \frac{3{,}14 \cdot 10^2}{\frac{\sqrt{7}}{6} \cdot 6{,}36} = 112{,}1$$

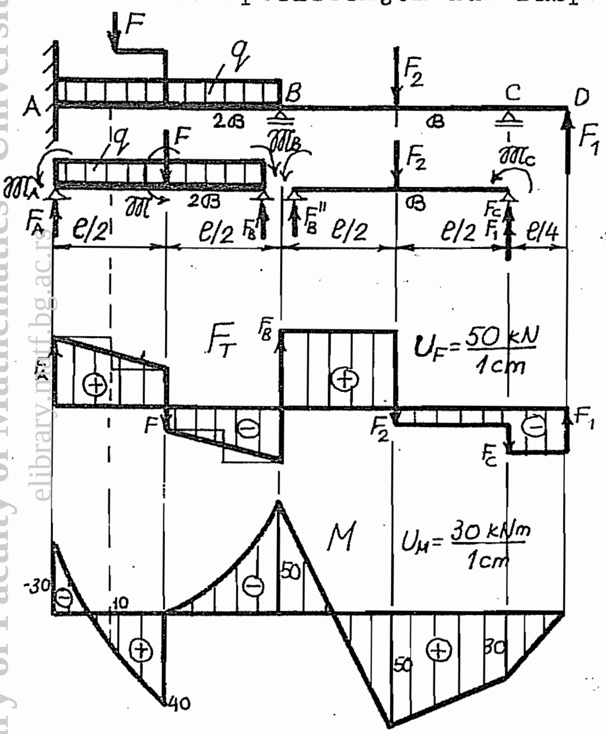
što je veće od kritične vitkosti $\lambda_K$, pa sledi da smo pravilno izabrali metodu za dimenzionisanje štapa napregnutog na izvijanje. Provera napona koji vlada u štapu aksijalno pritisnutom je za zadatu vrednost a:

$$A = 3a^2 = 3 \cdot 3^2 \sqrt[4]{20^2} = 54\sqrt{5} \ [cm^2]$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{270}{54\sqrt{5}} = \sqrt{5} \ [kN/cm^2]$$

što je u granicama dozvoljenog za aksijalno naprezanje.

TREĆI ZADATAK: Kontinualni nosač na slici br. 6 je dva puta statički neodredjen jer imamo četiri nepoznata otpora oslonaca i ukleštenja a dve statičke jednačine za odredjivanje otpora oslonacaca. Dodatne jednačine slede iz otpornosti materijala, odnosno iz uslova kompatibilnosti deformacija. Zadatak ćemo najlakše rešiti ako kontinualni nosač rastavimo u osloncu B na dve proste grede, a uticaj jedne na drugu zamenimo momentom $\mathfrak{M}_B$, a takodje momentom $\mathfrak{M}_A$ zamenjujemo uticaj ukleštenja na gredu u tački A. Silu F na slobodnom kraju prepusta redukujemo na tačku M na gredi AB, gde dobijemo silu F i moment $\mathfrak{M} = F\,\ell/4$. Takodje silu $F_1$ redukujemo na oslonac C gde dobijemo pored sile i moment $\mathfrak{M}_C = F_1\,\ell/4$. Sada možemo koristiti tablične slučajeve opterećenja proste grede: momentima nad osloncima, momentom na sredini raspona, silom na sredini raspona i kontinualnim opterećenjem duž raspona. Jednačine za odredjivanje statičkih nepoznatih dobijamo iz uslova: da je nagib tangente elastične linije u ukleštenju A jednak nuli, a on je rezultat dejstva momenata $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ nad osloncima grede AB, zatim momenta $\mathfrak{M}$ na sredini grede, koncentrisane sile F koja dejstvuje na sredini i kontinualnog jednakopodeljenog opterećenja duž celog raspona, na osnovu čega možemo da pišemo:




Slika br. 6

$$\alpha_A = 0$$

$$-\frac{\mathfrak{M}_A \ell}{3\cdot 2EI} - \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{6\cdot 2EI} + \frac{\mathfrak{M}\,\ell}{24\cdot 2EI} + \frac{F\ell^2}{16\cdot 2EI} + \frac{q\cdot \ell^3}{24\cdot 2EI} = 0$$

odakle sledi prva jednačina:

$$2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = 110$$

i da je nagib tangente na elastičnu liniju u tački nad osloncem B sa leve i desne strane jednak; Sa leve strane računamo od opterećenja koja su na gredi AB′, dok sa desne strane računamo od opterećenjå koja su na gredi B′′C na osnovu čega pišemo da je:

$$\beta_B = \alpha_B$$

$$\frac{\mathfrak{M}_A\cdot \ell}{6\cdot 2EI} + \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{3\cdot 2EI} + \frac{\mathfrak{M}\,\ell}{24\cdot 2EI} - \frac{F\ell^2}{16\cdot 2EI} - \frac{q\ell^3}{24\cdot 2EI} = -\frac{\mathfrak{M}_B \ell}{3EI} + \frac{F_2\ell^2}{16EI} + \frac{\mathfrak{M}_C \ell}{6EI}$$

$$\mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B + 4\mathfrak{M}_B = -\frac{\mathfrak{M}}{4} + \frac{3}{8}F\ell + \frac{1}{4}q\ell^2 + \frac{3}{4}F_2\ell + 2\mathfrak{M}_C$$

pa je druga jednačina:

$$\mathfrak{M}_A + 6\mathfrak{M}_B = 330$$

Rešavanjem dobijenog sistema jednačina:

$$2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = 110$$

$$\mathfrak{M}_A + 6\mathfrak{M}_B = 330$$

dobijamo da su statičke nepoznate $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ jednake: $\mathfrak{M}_A = 50$ [kNm] i $\mathfrak{M}_B = 30$ [kNm].

GREDA AB: Iz uslova ravnoteže grede AB odredjujemo otpore oslonaca $F_A$ i $F_B'$:

$$\Sigma M_B = 0 \quad F_A = \frac{1}{2}q\ell + \frac{1}{2}F + \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}) = \frac{40}{2} + 20 + \frac{30-50+40}{4} = 45\,[kN]$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad F_B' = \frac{1}{2}q\ell + \frac{1}{2}F - \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}) = \frac{40}{2} + 20 - \frac{30-50+40}{4} = 35\,[kN]$$

Analitički izrazi za momente savijanja duž raspona AB su:

$$M_1(z) = -\mathfrak{M}_A + F_A\cdot z - \frac{1}{2}qz^2 = -30 + 45z - 5z^2 \quad ; \quad 0 \le z \le 2$$

$$\frac{dM_1}{dz} = F_T = 45 - 10z$$

$$M_2(z) = -\mathfrak{M}_A + F_A\cdot z - \frac{1}{2}qz^2 - \mathfrak{M} - F(z-2) = 10 + 5z - 5z^2 \quad ; \quad 2 \le z \le 4$$

te su momenti u karakterističnim tačkama:

$$M_{(0)} = -30 + 45\cdot 0 - 5\cdot 0^2 = -30\,[kNm]$$

$$M_{(1)} = -30 + 45\cdot 1 - 5\cdot 1^2 = 10\,[kNm]$$

$$M_{(2)}^{\ell} = -30 + 45\cdot 2 - 5\cdot 2^2 = 40\,[kNm]$$

$$M_{(2)}^{d} = 10 + 5\cdot 2 - 5\cdot 2^2 = 0\,[kNm]$$

$$M_{(3)} = 10 + 5\cdot 3 - 5\cdot 3^2 = -20\,[kNm]$$

$$M_{(4)} = 10 + 5\cdot 4 - 5\cdot 4^2 = -50\,[kNm]$$

U tački preseku udaljenom za $z = 2$[m] javlja se skok momenta savijanja zbog prepusta nad gredom AB na kome dejstvuje sila F. Taj skok jednak je momentu redukcije sile F na tačku M.

GREDA BC: Iz uslova ravnoteže grede sledi da su otpori oslonaca: $F_B''$ i $F_C$ jednaki:

$$\Sigma M_C = 0 \quad F_B'' = \frac{1}{2}F_2 + \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_C) = \frac{1}{2}\cdot 60 + \frac{50+30}{4} = 50\,[kN]$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad F_C' = \frac{1}{2}F_2 - \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_C) = \frac{1}{2}\cdot 60 - \frac{50+30}{4} = 10\,[kN]$$

$$F_C = F_C' - F_1 = 10 - 30 = -20\,[kN]$$

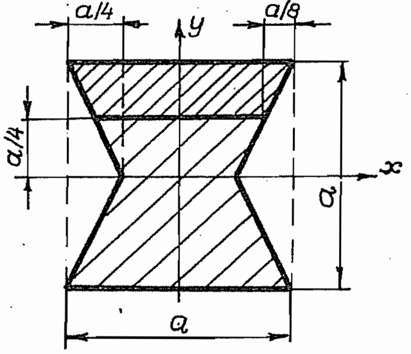
Rezultujući otpor oslonca u tački B je $F_B = F_B' + F_B'' = 85$ kN. Moment savijanja u karakterističnoj tački S je:

$$M_S = -\mathfrak{M}_B + F_B''\cdot\frac{\ell}{2} = -50 + 50\cdot 2 = 50\,[kNm]$$

b) Na osnovu dobijenih računskih podataka konstruisan je dijagram momenata savijanja sa koga se vidi da je maksimalni moment savijanja duž raspona nosača jednak $M_{f\max} = 50$ [kNm] i on je merodavan za dimenzionisanje nosača. Otporni moment koji treba da ima poprečni presek nosača je:

$$W_x = \frac{M_{f\max}}{\sigma_{df}} = \frac{50\cdot 10^2}{10} = 500\,[cm^3]$$

Poprečni presek na slici br. 3a ima sledeće geometrijske karakteristike u odnosu na osu savijanja Cx:




Slika br. 6a

- aksijalni moment inercije:

$$I_x = \frac{1}{12}a^4 - 4\cdot\frac{1}{12}a^3\cdot\frac{1}{4}a\cdot\frac{1}{8} = \frac{7}{96}a^4$$

-otporni moment

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{\frac{7}{96}a^4}{\frac{a}{2}} = \frac{7}{48}a^3$$

- statički moment dela površine

$$S_x' = 3\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{3}{8}a + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{8}\cdot\frac{a}{4}\left(\frac{a}{4}+\frac{2}{3}\frac{a}{4}\right) = \frac{1}{12}a^3$$

Kako se maksimalni moment savijanja javio na delu nosača gde je jednostruka krutost na savijenje to je on merodavan za dimenzionisanje nosača,pa je:

$$a_1^3 = \frac{48}{7}W_{1x} = \frac{48}{7}\cdot 500$$

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{48}{7}\cdot 500} = 20\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = 15{,}05\,[cm]$$

gde smo sa $a_1$ označili visinu poprečnog preseka oblika sa slike br. 6a,a za deo nosača gde je jednostruka krutost.Moment inercije paprečnog preseka nosača na tom delu CB je:

$$I_{1x} = \frac{7}{96}a_1^4 = \frac{7}{96}\,15{,}05^4 = 3750\,[cm^4]$$

Na delu nosača AB savojna krutost je dva puta veća nego na delu nosača BC,pa je sada potrebno da aksijalni moment inercije poprečnog preseka bude dva puta veći nego na delu BC,tj njegova vrednost je sada:

$$I_{2x} = 2I_{1x} = 2\cdot 3750 = 7500\,[cm^4]$$

iz uslova da poprečni presek nosača na delu AB ima aksijalni moment inercije koji smo izračunali,izračunavamo visinu nosača na tom delu:

$$a_2 = \sqrt[4]{\frac{96 I_{2x}}{7}} = \sqrt[4]{\frac{96\cdot 7500}{7}} = 17{,}95\,[cm]$$

čime smo dimenzionisali nosač.

c)U naznačenom preseku P transverzalna sila i moment su: $F_{TP} = 35\,[kN]$ i $M_{fP} = 10\,[kNm]$.Statički moment dela površine iznad tačaka u kojima se traži tangencijalni napon,a za osu savijanja je:

$$S_x' = \frac{1}{12}\cdot a_2^3 = \frac{1}{12}\cdot 17{,}95^3 = 504\,[cm^3]$$

dok je širina preseka na visini tačaka u kojima se traže naponi: $\xi = 3a/4 = 27/2\,[cm]$. Komponentni naponi su sada:

I.tangencijalni

$$\tau = \frac{F_T \cdot S_x'}{I_{2x} \cdot \xi} = \frac{35 \cdot 504}{7500 \cdot 14{,}5} = 0{,}162 \quad [kN/cm^2]$$

II.normalni

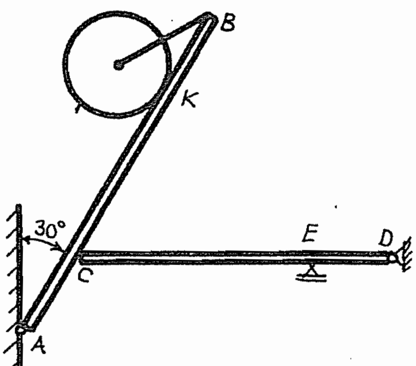
$$\sigma = \frac{M_f}{I_{2x}} y = \frac{10 \cdot 10^2}{7500} \cdot \frac{18}{4} = 0{,}6 \quad [kN/cm^2]$$

d)Ako bi smo koristili standardni profil I potrebno je na delu AB usvojiti 2 I 28 paralelno postavljena profila,dok na delu BC usvojiti jedan profil I 28.

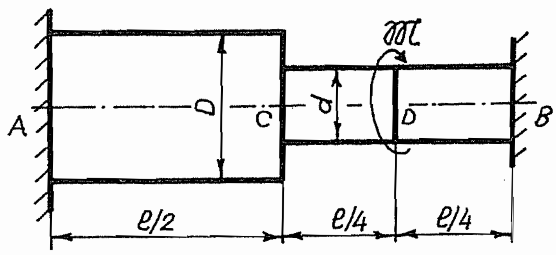
NOVEMBARSKI ISPITNI ROK 1977

PRVI ZADATAK: Štap AB težine $G_2 = 3G$ zglobno je vezan u tački A za vertikalni zid sa kojim zaklapa ugao od $30^\circ$, oslanja se u tački C na gredu CD težine $G_3 = 2G$. Greda CD je u tački D vezana zglobom i poduprta u tački E. U tački K štapa AB oslanja se kugla poluprečnika R težine $G_1 = G$, koja je užetom vezana za kraj B štapa. Data su rastojanja $\overline{AB} = 4R\sqrt{3}$, $\overline{AC} = \overline{KB} = R\sqrt{3}$, $\overline{CE} = 3\ell/4$, $\overline{ED} = \ell/4$.

ODREDITI otpore zglobova A i D, silu u koncu, pritisak kugle na štap AB, pritisak štapa na gredu i otpor potpore E. Slika br. 1.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Kružno stepenasto vratilo ACDB, prečnika $D$ na delu AC = $\ell/2$ i prečnika d na delu CB = $\ell/2$ je obostrano uklešteno. U preseku D na vratilo dejstvuje moment $\mathfrak{M} = 34$ [kNm]. Odrediti:

a) Momente ukleštenja $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ ako je odnos prečnika $\psi = d/D = 1/2$.

b) Dimenzionisati vratilo ako je dozvoljeni napon na smicanje $\tau_{ds} = 9$ [kN/cm$^2$] i skicirati dijagram momenata uvijanja;

TREĆI ZADATAK: Kontinualni nosač ABCDE sa rasponima AB = BC = CD = $\ell$, opterećen je duž raspona AB kontinualnim jednakopodeljenim opterećenjem $q_1\ell = 2F/3$, a duž raspona CD kontinualnim opterećenjem $q_2\ell = 2F$ i koncentrisanom silom F na polovini raspona. Raspon BC, u sredini, opterećen je dvema silama istog intenziteta F, dok na slobodnom kraju prepusta dejstvuje sila F/2. Sila F = 30 [kN], dok je $\ell = 4$ [m]. Savojna krutost raspona AB i BC je $\mathcal{B}$, dok je savojna krutost raspona CD i prepusta DE jednaka $2\mathcal{B}$.

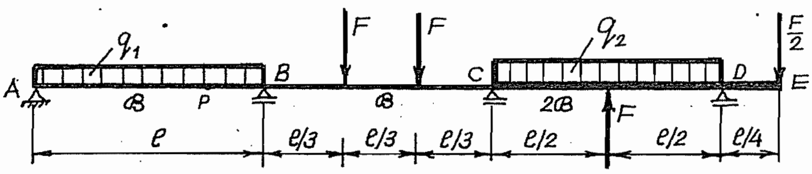
Odrediti:

a)Statičke nepoznate i nacrtati statičke dijagrame nosača.

b)Dimenzionisati nosač standardnog I profila ako je $\sigma_{df} = 10$ [kN/cm$^2$] .

c)Izračunati normalni i tangencijalni napon u preseku P gde je $AP = 3\ell/4$ ,a u vlaknima preseka na udaljenju $h/4$ od neutralne ose.

d)Izračunati ugib kraja E nosača .Za modul elastičnosti usvojiti $E = 2\cdot 10^4$ [kN/cm$^2$] .

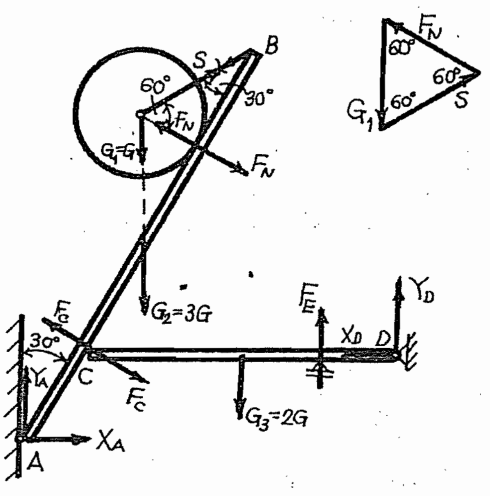



Slika br. 3

## R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Sistem se sastoji iz kugle, štapa AB i štapa CD. Posmatraćemo ravnotežu svakog elementa pojedinačno, a uzajamni uticaj štapa i kugle zamenićemo silom $F_N$, dok ćemo uzajamni uticaj štapova zameniti silom $F_C$ upravnom na štap AB.

Ravnoteža kugle: Na kuglu dejstvuju sila težine $G_1$ ,sila u koncu S i uzajamni pritisak kugle i štapa $F_N$. Sve tri sile se seku u jednoj tački središtu kugle, pa je još potrebno da čine zatvoren trougao sila da bi kugla bila u ravnoteži. Iz trougla sila sledi da je:




Slika br. 4

$$\frac{F_N}{\sin 60^\circ} = \frac{S}{\sin 60^\circ} = \frac{G_1}{\sin 60^\circ}$$

$$F_N = S = G_1 = G$$

Ravnoteža štapa AB:
Na štap AB dejstvuju sledeće sile: sila težine $G_2$, sila S u koncu, sila pritiska kugle na štap, $F_N$ ,sila $F_C$ uzajamnog pritiska štapova i sila $F_A$ otpora zgloba A sa komponentama $X_A$ i $Y_A$. Jednačine ravnoteže štapa AB su:

$$\sum X_i = X_A + F_N\cos 30^\circ - S\cos 30^\circ - F_C\cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A + F_C\cos 60^\circ - F_N\cos 60^\circ - G_2 - S\sin 30^\circ = 0$$

$$\sum M_A = F_N\cdot 3R\sqrt{3} - F_C\cdot R\sqrt{3} + G_2\cdot 2R\sqrt{3}\cos 60^\circ - S\cdot 4R\sqrt{3}\sin 30^\circ = 0$$

čijim rešavanjem dobijamo:

$$F_C = G_1 + G_2 = 4G$$

$$X_A = \frac{\sqrt{3}}{2}(G_1+G_2) = 2\sqrt{3}\,G$$

$$Y_A = \frac{1}{2}(G_1+G_2) = 2G$$

Ravnoteža štapa CD: Na štap CD dejstvuju sledeće sile: sila težine $G_3$ štapa, sila pritiska $F_C$ štapa AB, otpor oslonca D u vertikalnom pravcu, i otpor zgloba D sa komponentama $X_D$ i $Y_D$. Jednačine ravnoteže štapa CD su:

$$\sum X_i = F_C\cdot\cos 30^\circ - X_D = 0$$

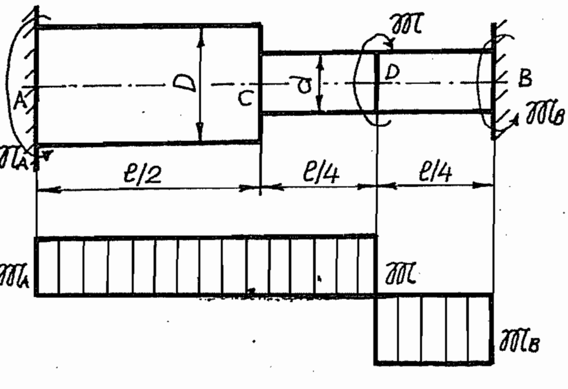
$$\sum Y_i = F_E + Y_D - G_3 - F_C\sin 30^\circ = 0$$

$$\sum M_D = F_C\cdot \ell\cdot\sin 30^\circ + G_3\cdot\frac{\ell}{2} - F_E\cdot\frac{\ell}{4} = 0$$

čijim rešavanjem dobijamo:

$$F_E = 12G\,; \qquad X_D = 2\sqrt{3}\,G\,; \qquad Y_D = -8G$$

DRUGI ZADATAK: Stepenasto obostrano uklešteno vratilo predstavlja jedamput statički neodredjen problem, jer postoji jedna statička jednačina, a dva nepoznata momenta ukleštenja, te dopunski uslov dobijamo time što ćemo vratilo predstaviti kao konzolno sa ukleštenjem u tački A, a postaviti uslov da je ugao uvijanja na slobodnom kraju takvog vratila jednak nuli, jer kod stvarnog vratila tu imamo ukleštenje te ugao uvijanja stvarno mora biti jednak nuli. Sledi da je:




Slika br. 5

$$\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}$$

$$\theta_B = 0$$

$$\mathfrak{M}_A\left(\frac{\ell/2}{I_{o1}G} + \frac{\ell/2}{I_{o2}G}\right) - \frac{\mathfrak{M}\,\ell/4}{I_{o2}G} = 0$$

Kako je odnos polarnih momenata inercije poprečnih preseka vratila jednak:

$$\frac{I_{o1}}{I_{o2}} = \frac{\frac{\pi}{32}D^4}{\frac{\pi}{32}d^4} = \left(\frac{D}{d}\right)^4 = 2^4 = 16$$

to su momenti ukleštenja $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$:

$$\mathfrak{M}_A = \frac{8}{17}\mathfrak{M} = \frac{8}{17}\cdot 34 = 16\ [kNm]$$

$$\mathfrak{M}_B = \frac{9}{17}\mathfrak{M} = \frac{9}{17}\cdot 34 = 18\ [kNm]$$

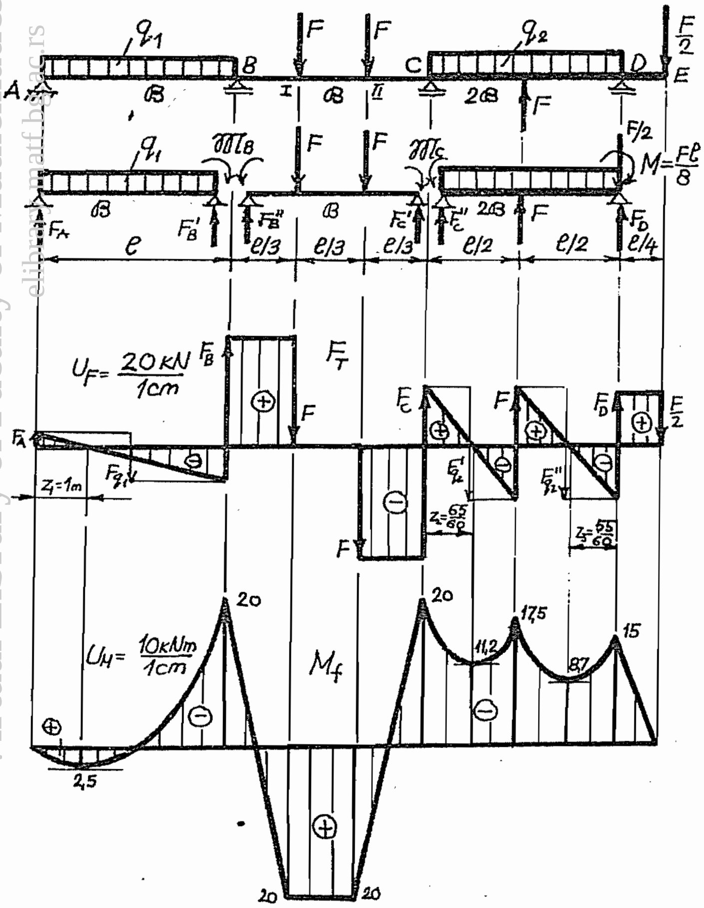
Na slici br. 5 prikazan je dijagram momenata uvijanja.

b)Kako je moment $\mathfrak{M}_B$ veći od momenta $\mathfrak{M}_A$ i dejstvuje na delu manjeg polarnog momenta inercije poprečnog preseka,to je on merodavan za dimenzionisanje vratila.Dimenzionisanje vršimo prema dozvoljenom naponu na smicanje,pa su prečnici potrebnih poprečnih preseka vratila:

$$d = \sqrt[3]{\frac{5\mathfrak{M}_B}{\tau_{ds}}} = \sqrt[3]{\frac{5\cdot 18\cdot 10^2}{9}} = 10\,[cm]$$

$$D = 2d = 2\cdot 10 = 20\,[cm]$$

TREĆI ZADATAK:Kontinualni nosač na slici br.6 je dva puta statički neodredjen.Nosač rastavimo na tri proste grede i uzajamni uticaj jedne na drugu zamenimo momentima $\mathfrak{M}_B$ i $\mathfrak{M}_C$ koje istovremeno biramo kao statičke nepoznate nosača.Iz uslova kontinualnosti nosača i po deformisanju pod dejstvom naznačenih tereta zadajemo dva uslova da su nagibi tangente elastične linije u tačkama B odnosno C sa leve i desne strane oslonca jednaki,odakle slede dve jednačine:




Slika br. 6

$$\beta_1 = \alpha_2$$

$$\frac{\mathfrak{M}_B\ell}{3\mathcal{B}} - \frac{q_1\ell^3}{24\mathcal{B}} = -\frac{\mathfrak{M}_B\ell}{3\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}_C\ell}{6\mathcal{B}} + \frac{F\ell^2}{9\mathcal{B}}$$

$$\beta_2 = \alpha_3$$

$$\frac{\mathfrak{M}_C\ell}{3\mathcal{B}} + \frac{\mathfrak{M}_B\ell}{6\mathcal{B}} - \frac{F\ell^2}{9\mathcal{B}} = -\frac{\mathfrak{M}_C\ell}{3\cdot 2\mathcal{B}} - \frac{M\ell}{6\cdot 2\mathcal{B}} - \frac{F\ell^2}{16\cdot 2\mathcal{B}} + \frac{q_2\ell^3}{24\cdot 2\mathcal{B}}$$

koje posle sredjivanja postaju:

$$4\mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_C = \frac{5}{6}F\ell$$

$$\mathfrak{M}_B + 3\mathfrak{M}_C = \frac{2}{3}F\ell$$

Rešavanjem dobijenog sistema dobijamo za statičke nepoznate sledeće vrednosti:

$$\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_C = \frac{1}{6}F\ell = 20\,[kNm]$$

Ravnoteža grede AB:Iz uslova ravnoteže grede AB sledi:

$$F_A + F_B = q_1\ell = 20\,[kN]$$

$$\Sigma M_B = F_A\cdot\ell - \frac{1}{2}q_1\ell^2 + \mathfrak{M}_B = 0$$

$$F_A = 5\,[kN]$$

$$F_B' = 15\,[kN]$$

Analitički izraz za moment savijanja duž grede AB je:

$$M(z) = F_A\cdot z - \frac{1}{2}q_1 z^2 = 5z - \frac{5}{2}z^2$$

Ekstremna vrednost momenta je u preseku odredjenom sa $z_1$:

$$M'(z) = F_A - q_1 z = 0 \quad\Rightarrow\quad z_1 = 1\,[m]$$

$$M(z_1) = 5\cdot 1 - \frac{5}{2}\cdot 1^2 = 2,5\,[kNm]$$

Ravnoteža grede BC: Iz uslova ravnoteže sledi:

$$F_B'' + F_C' = 2F = 60\ [kN]$$

$$F_B''\cdot\ell - \mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_C - \tfrac{2}{3}F\ell - \tfrac{1}{3}F\ell = 0$$

$$F_B'' = F_C' = 30\ [kN]$$

Momenti u karakterističnim tačkama su:

$$M_F^{I} = F_B''\cdot\ell/3 - \mathfrak{M}_B = 20\ [kNm]$$

$$M_F^{II} = F_B''2\ell/3 - \mathfrak{M}_B - F\tfrac{\ell}{3} = 20\ [kNm]$$

Ravnoteža grede CD: Iz uslova ravnoteže grede CD sledi da je:

$$F_C'' + F_D = q_2\ell - F + \frac{F}{2} = 45\ [kN] \qquad F_C'' = \frac{65}{4}\ [kN]$$

$$F_C''\cdot\ell - \mathfrak{M}_C + F\frac{\ell}{2} - q_2\ell\cdot\frac{\ell}{2} + \frac{F\ell}{8} = 0 \qquad F_D = \frac{115}{4}\ [kN]$$

Analitički izrazi za momente savijanja duž raspona grede CD su:

$$M'_{(z)} = -\mathfrak{M}_C + F_C''\cdot z - \tfrac{1}{2}q_2 z^2 = -20 + \frac{65}{4}z - \frac{15}{2}z^2$$

$$M''_{(z)} = -\frac{F}{2}\left(\frac{\ell}{4}+z\right) + F_D\cdot z - \frac{1}{2}q_2 z^2 = -15 + \left(\frac{115}{4} - 15\right)z - \frac{15}{2}z^2$$

$$M''_{(z)} = -15 + \frac{55}{4}z - \frac{15}{2}z^2$$

Ekstremne vrednosti momenta savijanja se javljaju kada je:

$$\frac{dM'(z)}{dz} = \frac{65}{4} - 15z = 0 \quad\Rightarrow\quad z_2 = \frac{13}{12}\ [m]$$

$$\frac{dM''(z)}{dz} = \frac{55}{4} - 15z = 0 \quad\Rightarrow\quad z_3 = \frac{11}{12}\ [m]$$

pa su same ekstremne vrednosti momenta savijanja:

$$M'_{(z_2)} = -20 + \frac{65}{4}\cdot\frac{13}{12} - \frac{15}{2}\cdot\left(\frac{13}{12}\right)^2 = 11{,}2\ [kNm]$$

$$M''(z_3) = -15 + \frac{55}{4}\cdot\frac{11}{12} - \frac{15}{2}\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^2 = 8{,}7\ [kNm]$$

Pomoću izračunatih vrednosti momenata savijanja u karakterističnim tačkama skiciran je dijagram momenta savijanja dat na slici br.6.

b) Maksimalni moment duž raspona nosača je $M_{fmax} = 20\,[kNm]$ i on je merodavan za dimenzionisanje nosača. Potrebni otporni moment je:

$$W_x = \frac{M_{fmax}}{\sigma_{df}} = \frac{20\cdot 10^2}{10} = 200\ [cm^3]$$

te se za deo nosača ABC usvaja INP 20 sa $I_{x1} = 2140\ [cm^4]$, dok se za deo CDE usvaja INP 26 sa $I_{x2} = 5740\,[cm^4]$, jer je na tom delu potrebno da nosač ima dva puta veću savojnu krutost nego na ostalim delovima: $I_{x2} = 2I_{x1} = 4280\,[cm^4]$.

c) Transverzalna sila i moment u preseku P su:

$$F_{TP} = F_A - \frac{3}{4}q_1\ell = 5 - \frac{3}{4}\cdot 5\cdot 4 = -10\ [kN]$$

$$M_{fP} = F_A\cdot\frac{3}{4}\ell - \frac{3}{4}q_1\ell\cdot\frac{3}{8}\ell = 5\cdot\frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{3}{4}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{3}{8}\cdot 4 = -\frac{15}{2}\ [kNm]$$

Na delu nosača AB gde se nalazi presek P usvojen je profil INP20 te su potrebne geometrijske karakteristike poprečnog preseka potrebne za sračunavanje traženih komponentnih napona:

$$S_x' = S_{1/2} - \frac{1}{4}h\cdot\delta\cdot\frac{h}{8} = 125 - \frac{20}{4}\cdot 0{,}75\cdot\frac{20}{8} = \frac{925}{8}\ [cm^3]$$

$$\xi = \delta = 0{,}75[cm]\ ;\ y = \frac{1}{4}h = 5[cm]$$

Komponentni naponi u naznačenim tačkama preseka su:

a)normalni

$$\sigma_f = \frac{M_{fP}}{I_{x_1}}\, y = \frac{\frac{15}{2}\cdot 10^2}{2140}\cdot 5 = 1{,}75\ [kN/cm^2]$$

b)tangencijalni

$$\tau = \frac{F_{TP}\cdot S_x'}{I_{x_1}\cdot\xi} = \frac{10\cdot\frac{925}{8}}{2140\cdot 0{,}75} = 0{,}72\,[kN/cm^2]\ .$$

d)Nagib u tački D grede CD je rezultat dejstva momenata $\mathfrak{M}_C$ i M nad osloncima C i D ,kontinualnog jednakopodeljenog opterećenja duž raspona i sile koja dejstvuje na sredini tog raspona:

$$\beta_D = \frac{\mathfrak{M}_C\,\ell}{6\mathcal{B}_2} + \frac{M\ell}{3\mathcal{B}_2} - \frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}_2} + \frac{q_2\ell^3}{24\mathcal{B}_2} = \frac{13}{144}\,\frac{F\ell^2}{\mathcal{B}_2}$$

Ugib slobodnog kraja E prepusta DE je rezultat okretanja prepusta DE za ugao nagiba tangente na elastičnu liniju u tački D nosača i savijanja prepusta pod dejstvom sile F na slobodnom kraju (kao da je konzola):

$$f_E = \beta_D\cdot\frac{\ell}{4} + \frac{1}{3\mathcal{B}_2}\,\frac{F}{2}\left(\frac{\ell}{4}\right)^3 = \frac{29}{48\cdot 24}\,\frac{F\ell^3}{\mathcal{B}_2}$$

Savojna krutost dimenzionisanog nosača je:

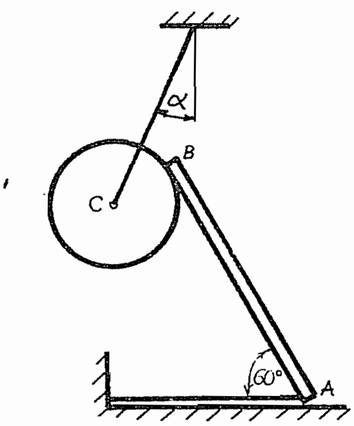
$$\mathcal{B}_2 = E\cdot I_{x_2} = 2\cdot 10^4\cdot 5740 = 11480\cdot 10^4\,[kNcm^2]$$

te je ugib tačke -preseka E:

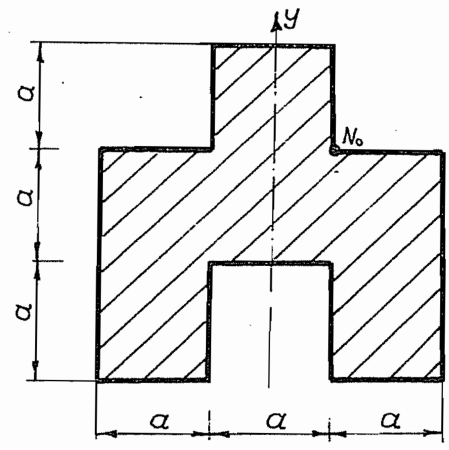
$$f_E = \frac{29}{48\cdot 24}\cdot\frac{30\cdot 4^3\cdot 10^6}{11480\cdot 10^4} = 0{,}015\ [cm]$$

DECEMBARSKI ISPITNI ROK 1977

PRVI ZADATAK: Štap AB težine $G_1 = 400$ [N], dužine $\ell$, krajem A se oslanja na glatki horizontalni pod i vezan je za isti kraj A horizontalnim koncem za zid, dok se krajem B oslanja na kuglu težine $G_2 = 100$ [N], poluprečnika R, koja je vezana za plafon užetom nagnutim za ugao $\alpha$ prema vertikali. U ravnotežnom položaju pravac štapa se poklapa sa pravcem tangente na kuglu, dok sa pravcem poda zaklapa ugao od $60^\circ$. Odrediti sile u koncu i užetu, otpor poda, pritisak štapa na kuglu i ugao koji uže gradi sa vertikalom.



Slika br. 1



Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: a) Računom i grafički odrediti koordinate temena jezgra preseka datog na slici br. 2, ako je $a = 6$ [cm], a zatim nacrtati konturu jezgra preseka.

b) Ako stub prikazanog preseka na slici br. 2 napada aksijalna pritisna sila $F = 81$ [kN] u tački $N_0$, odrediti položaj neutralne ose.

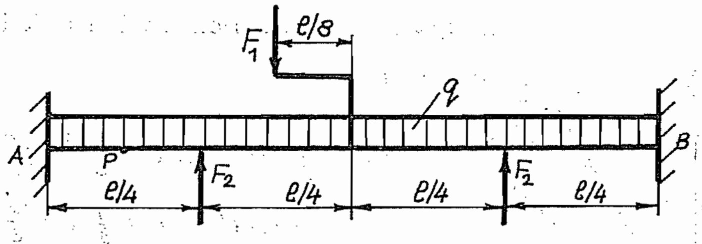
c) Izračunati brojnu vrednost najvećeg normalnog napona i nacrtati dijagram normalnog napona.

TREĆI ZADATAK: Obostrano uklešteni nosač AB, raspona $\ell = 8$ [m], konstantnog poprečnog preseka, opterećen je duž celog raspona kontinualnim jednoliko podeljenim opterećenjem $q\ell = 2F$, gde je $F = 24$ [kN]. Na rastojanjima po $\ell/4$ od ukleštenja dejstvuju koncentrisane vertikalne sile $F_2 = F$, dok na sredini nosača pomoću prepusta dužine $\ell/8$, dejstvuje vertikalna sila $F_1 = 2F/3$, kao što je na slici br. 3 naznačeno.

a) Odrediti statičke nepoznate i skicirati statičke dijagrame nosača.

b) Dimenzionisati nosač standardnog U profila ako je $\sigma_{df} = 10$ $[kN/cm^2]$.

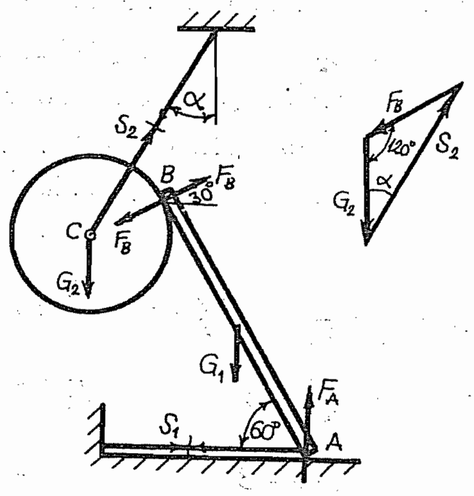
c) Izračunati normalni i tangencijalni napon u preseku P, gde je $AP = \ell/8$, a u vlaknima preseka na udaljenju $h/4$ od neutralne ose preseka.




Slika br. 3

R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Iz ravnoteže štapa AB, na koji dejstvuju sledeće sile: sila težine štapa $G_1$, Sila $F_A$ otpora poda, sila $S_1$ u koncu i sila $F_B$ otpora kugle u tački oslanjanja štapa, dobijamo sledeće jednačine:




$$\sum X_i = F_B \cos 30^\circ - S_1 = 0$$

$$\sum Y_i = F_A - G_1 + F_B \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum M_A = F_B \cdot \ell - G_1 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$F_B = \frac{1}{4} G_1$$

iz kojih izračunavamo nepoznate veličine:

$$F_B = \frac{1}{4} G_1 = 100 \ [N]$$

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} F_B = 50\sqrt{3} \ [N]$$

$$F_A = G_1 - \frac{1}{2} F_B = 400 - \frac{1}{2} \cdot 100 = 350 \ [N]$$

Slika br. 4

Na kuglu dejstvuju sledeće sile: sila $G_2$ težine kugle, sila $F_B' = F_B$ pritiska štapa na kuglu i sila $S_2$ u koncu koji nosi kuglu. Iz uslova ravnoteže kugle imamo da je:

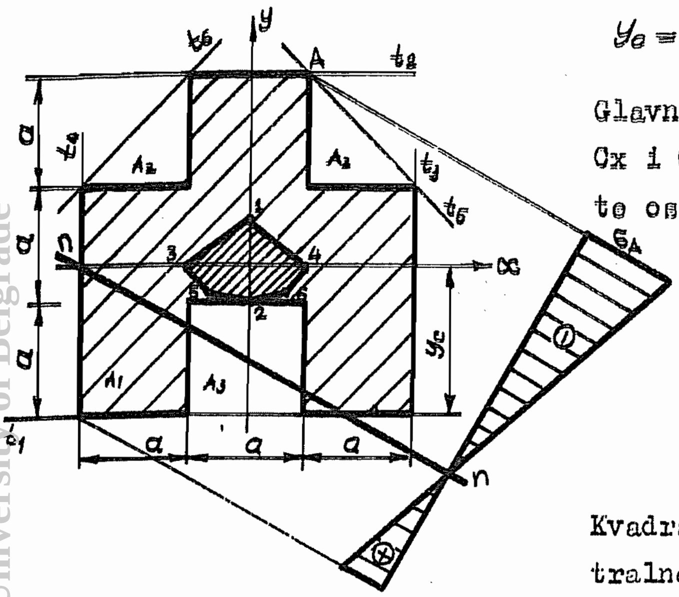
$$\frac{F_B}{\sin\alpha} = \frac{G_2}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{S_2}{\sin 120^\circ}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$S_2 = 2 G_2 \cos\alpha = 2 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} \ [N]$$

Do istih rezultata možemo doći i iz trougla sila. Trougao sila je jednakokrak jer je $F_B = G_2$ pa je ugao koji konac gradi sa pravcem vertikale jednak $\alpha = 30^\circ$.

DRUGI ZADATAK: Zadati presek je simetričan pa osu simetrije označimo sa Cy. Težište C preseka se nalazi na osi simetrije i njegova koordinata u prav-




Slika br. 5

ou ose y mereno od njegovih osnovica je:

$$y_c = \frac{9a^2\cdot\frac{3}{2}a - 2a^2\cdot\frac{5}{2}a - a^2\cdot\frac{a}{2}}{6a^2} = \frac{4}{3}a$$

Glavne centralne ose inercije preseka su sada Ox i Oy. Aksijalni momenti inercije preseka za te ose su:

$$I_x = \frac{1}{12}(3a)^4 + 9a^2\left(\frac{a}{6}\right)^2 - 2\left[\frac{1}{12}a^4 + a^2\left(\frac{5}{2}a - \frac{4}{3}a\right)^2\right] - \left[\frac{1}{12}a^4 + a^2\left(\frac{4}{3}a - \frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$$I_x = \frac{10}{3}a^4 = \frac{10}{3}\cdot 6^4 = 4320\ [cm^4]$$

$$I_y = \frac{1}{12}2a\,(3a)^3 = \frac{9}{2}a^4 = 5832\ [cm^4]$$

Kvadrati poluprečnika inercije za glavne centralne ose inercije su:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{10a^4/3}{6a^2} = \frac{5}{9}a^2 = \frac{5}{9}\cdot 6^2 = 20\ [cm^2]$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{4{,}5a^4}{6a^2} = \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4}\cdot 6^2 = 27\ [cm^2]$$

Jezgro preseka predstavlja geometrijsko mesto tačaka u kojima treba da dejstvuju aksijalne pritisne sile, pa da ceo presek bude napregnut samo na pritisak. Kontura jezgra preseka predstavlja granični slučaj te zato treba povući na konturu preseka tangente koje odgovaraju neutralnim osama i pomoću njih odrediti konturu jezgra. Tangente na konturu preseka naznačene su na slici br. 5 brojevima od 1 do 6. Koordinate temena jezgra preseka su:

$t_1(\infty;\ -\frac{4}{3}a)$ $\quad y_{j1} = -\frac{i_x^2}{b_{01}} = -\frac{20}{-8} = 2{,}5\ ;\ x_{j1} = -\frac{i_y^2}{a_{01}} = -\frac{27}{\infty} = 0$ $\quad T_1\,(0;\ 2{,}5)$

$t_2\,(\infty;\ \frac{5}{3}a)$ $\quad y_{j2} = -\frac{20}{10} = -2\ ;\ x_{j2} = -\frac{27}{\infty} = 0$ $\quad T_2\,(0;\ -2)$

$t_3\,(\frac{3}{2}a;\ \infty)$ $\quad y_{j3} = -\frac{20}{\infty} = 0\ ;\ x_{j3} = -\frac{27}{9} = -3$ $\quad T_3\,(-3;\ 0)$

$t_4\,(-\frac{3}{2}a;\ \infty)$ $\quad y_{j4} = -\frac{20}{\infty} = 0\ ;\ x_{j4} = -\frac{27}{-9} = 3$ $\quad T_4\,(3;\ 0)$

$t_5\,(\frac{13}{6}a;\ \frac{13}{6}a)$ $\quad y_{j5} = -\frac{20}{13}\ ;\ x_{j5} = -\frac{27}{13}$ $\quad T_5\,(-\frac{27}{13};\ -\frac{20}{13})$

$t_6\,(-\frac{13}{6}a;\ \frac{13}{6}a)$ $\quad y_{j6} = -\frac{20}{+13}\ ;\ x_{j6} = -\frac{27}{-13} = \frac{27}{13}$ $\quad T_6\,(\frac{27}{13};\ -\frac{20}{13})$

b) Položaj neutralne ose odredjen je njenim odsečcima na koordinatnim osama koje izračunavamo iz:

$N_0(\frac{a}{2};\ \frac{2}{3}a)$

$$a_0 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{3a^2/4}{a/2} = -\frac{3}{2}a = -9$$

$$b_0 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{5a^2/9}{2a/3} = -\frac{5}{6}a = -5$$

$nn\,(-9;\ -5)$

pa je jednačine neutralne ose preseka za naznačenu napadnu tačku sile:

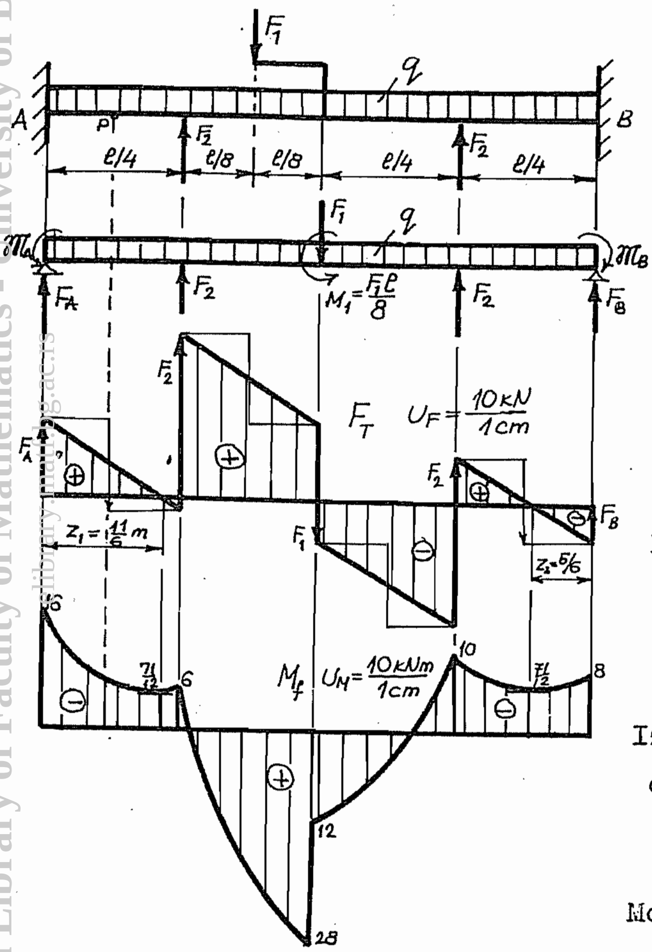
$$\frac{x}{-9} + \frac{y}{-5} = 1$$

$$5x + 9y + 45 = 0$$

c) Za zadati položaj napadne tačke sile i izračunati položaj neutralne ose najveći napon se javlja u temenu A preseka, jer je ono najudaljenije od neutralne ose i njegova vrednost je:

$$\sigma_A = -\frac{F}{A}\left(1+\frac{x_A\cdot x_0}{i_y^2}+\frac{y_A\cdot y_0}{i_x^2}\right) = -\frac{81}{6\cdot 6^2}\left(1+\frac{3\cdot 3}{27}+\frac{10\cdot 4}{20}\right) = -1{,}25\ [kN/cm^2]$$

TREĆI ZADATAK: Obostrano uklešteni nosač na slici br. 6 je dva puta statički neodredjen i kao statičke nepoznate biramo momente ukleštenja $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ koje izračunavamo iz uslova da su nagibi tangenti na elastičnu liniju nosača u ukleštenjima jednaki nuli, odakle pišemo sledeće jednačine:




Slika br. 6

$\alpha=0$

$$-\frac{\mathfrak{M}_A\cdot l}{3B}-\frac{\mathfrak{M}_B l}{6B}+\frac{F_1 l^2}{16B}-\frac{3}{32}\frac{F_2 l^2}{B}+\frac{q l^3}{24B}+\frac{M_1 l}{24B}=0$$

$\beta=0$

$$\frac{\mathfrak{M}_A l}{6B}+\frac{\mathfrak{M}_B l}{3B}-\frac{F_1 l^2}{16B}+\frac{3}{32}\frac{F_2 l^2}{B}-\frac{q l^3}{24B}+\frac{M_1 l}{24B}=0$$

odakle dobijamo sistem jednačina po $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$:

$$2\mathfrak{M}_A+\mathfrak{M}_B=\frac{5}{24}Fl$$

$$\mathfrak{M}_A+2\mathfrak{M}_B=\frac{1}{6}Fl$$

Rešenje predhodnog sistema je:

$$\mathfrak{M}_A=\frac{1}{12}Fl=\frac{1}{12}\cdot 24\ 8=16\ [kNm]$$

$$\mathfrak{M}_B=\frac{1}{24}Fl=\frac{1}{24}\cdot 24\cdot 8=8\ [kNm]$$

Iz statičkih jednačina ravnoteže dobijamo otpore oslonaca:

$$F_A=\frac{11}{24}F=11\ [kN]\ ;\quad F_B=\frac{5}{24}F=5\ [kN]$$

Momenti u karakterističnim tačkama nosača su:

$$M_{F_2}^{l}=F_A\cdot\frac{l}{4}-\mathfrak{M}_A-\frac{1}{4}ql\cdot\frac{l}{8}=-\frac{Fl}{32}=-6\ [kNm]$$

$$M_{F_2}^{d}=F_B\cdot\frac{l}{4}-\mathfrak{M}_B-\frac{1}{4}ql\cdot\frac{l}{8}=-\frac{5}{96}Fl=-10\ [kNm]$$

$$M_{F_1}^{\prime l}=F_A\cdot\frac{l}{2}-\mathfrak{M}_A+F_2\cdot\frac{l}{4}-q\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}=\frac{7}{48}Fl=28\ [kNm]$$

$$M_{F_1}^{\prime\prime l}=M_{F_1}^{\prime l}-M_1=\frac{1}{16}Fl=12\ [kNm]$$

$$F_{T(z_1)}=F_A-q\cdot z_1=0$$

$$z_1=\frac{F_A}{q}=\frac{11}{48}l=\frac{11}{6}\ [m]$$

$$F_{T(z_2)}=-F_B+q\cdot z_2=0$$

$$z_2=\frac{F_B}{q}=\frac{5}{48}l=\frac{5}{6}[m]$$

$$M_{f(z_1)}=F_A\cdot z_1-\mathfrak{M}_A-\frac{1}{2}q\cdot z_1^2=11\cdot\frac{11}{6}-16-\frac{1}{2}\cdot 11\cdot\frac{11}{6}=-\frac{71}{12}\ [kNm]$$

$$M_{f(z_2)}=F_B\cdot z_2-\mathfrak{M}_B-\frac{1}{2}q\cdot z_2^2=5\cdot\frac{5}{6}-8-\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{6}=-\frac{71}{12}\ [kNm]$$

b) Maksimalna vrednost momenta savijanja je: $M_{f max} = 28 [kNm]$, pa je potrebni otporni moment poprečnog preseka nosača:

$$W_x = \frac{M_{f max}}{\sigma_{df}} = \frac{28 \cdot 10^2}{10} = 280 [cm^3]$$

Iz tablice standardnih profila nalazimo da je potreban poprečni presek profila U NP 24 sa $W_x = 300 [cm^3]$ i $I_x = 3600 [cm^4]$.

c) Moment savijanja i transverzalna sila u preseku P su:

$$M_{f(P)} = F_A \cdot \frac{\ell}{8} - \mathfrak{M}_A - \frac{1}{8} q \cdot \ell \cdot \frac{1}{16} \ell = -\frac{1}{24} F\ell = -8 [kNm]$$

$$F_{T(P)} = F_A - \frac{1}{8} q \cdot \ell = \frac{5}{24} F = 5 [kN]$$

Statički moment dela površine preseka naznačenog na slici je:

$$S_x' = b \cdot \delta_1 \left(\frac{h}{2} - \frac{\delta_1}{2}\right) + \frac{1}{2} \delta \left(\frac{h}{2} - \delta\right)\left(\frac{h}{2} - \delta\right)$$

$$S_x' = 8{,}5 \cdot 1{,}3 (12 - 0{,}65) + 0{,}5 \cdot 0{,}95 (12 - 0{,}95)(12 - 0{,}95) = 184{,}3 [cm^3]$$

Komponenti naponi u preseku P a u tačkama udaljenim h/4 od neutralne ose su:

1. normalni

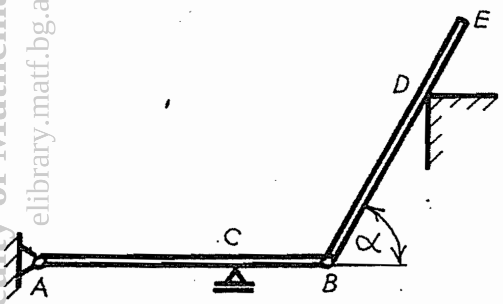
$$\sigma_f = \frac{M_{f(P)}}{I_x} \cdot y = \frac{8 \cdot 10^2}{3600} \cdot 6 = \frac{4}{3} [kN/cm^2]$$

2. tangencijalni

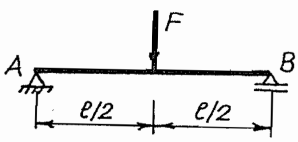
$$\tau = \frac{F_{T(P)} \cdot S_x'}{I_x \cdot \xi} = \frac{5 \cdot 184{,}3}{3600 \cdot 0{,}95} = 0{,}268 [kN/cm^2]$$

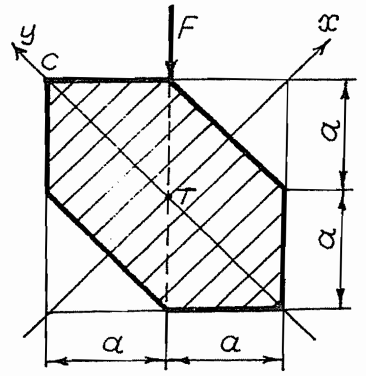
JANUARSKO-FEBRUARSKI ISPITNI ROK 1978

PRVI ZADATAK: Homogena horizontalna greda AB, težine $Q = 30[N]$, zglobno je vezana za zid u tački A i oslanja se na potporu C. Za kraj B grede zglobno je vezan štap BE težine $G = 40[N]$, koji se u tački D oslanja na ivicu zida, kao što je na slici br. 1 prikazano. Ako je $\overline{CB} = \overline{AB}/3$, $\overline{DE} = \overline{BE}/3$ i ugao $\alpha = 60^{0}$, odrediti reakcije zglobova, otpor potpore C i reakciju zida u tački D.




Slika br 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Prosta greda AB, dužine $\ell = 4[m]$, poprečnog preseka kao na slici br. 2, opterećena je u preseku na sredini raspona vertikalnom silom $F = 36[kN]$, čija napadna linija prolazi kroz težište poprečnog preseka. Zadato je $a = 6[cm]$.

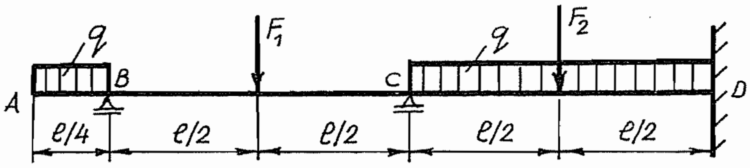
a) Odrediti položaj neutralne ose preseka;

b) Izračunati napon u temenu C u preseku ispod sile;

c) Nacrtati dijagram normalnog napona.

TREĆI ZADATAK: Za kontinualni nosač ABCD, koji je uklešten na kraju D, a oslonjen u tačkama B i C, i sa prepustom AB, iste savojne krutosti duž celog raspona, gde je $\ell = 4[m]$, i sa naznačenim opterećenjima na slici br. 3, gde je $F = 24[kN]$, $F_1 = 3F/2$; $F_2 = 2F/3$ i $q\ell = 2F$:

a) Odrediti Statičke nepoznate i nacrtati statičke dijagrame nosača;




Slika br. 3

b)Dimenzionisati nosač standardnog I profila ako je $\sigma_{df} = 12$ $[kN/cm^2]$;

c)Izračunati vrednosti normalnog i tangencijalnog napona u preseku P,gde je $\overline{BP} = \ell/4$,a u tačkama poprečnog preseka na udaljenju $h/5$ od neutralne ose;

d)Izračunati ugib $f_A$ slobodnog kraja A nosača,usvajajući za modul elastičnosti $E = 2.10^4\,[kN/cm^2]$.

## R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Izdvojimo štap BE i posmatrajmo njegovu ravnotežu.Na taj štap dejstvuju sledeće sile:sila G težine štapa sa napadnom tačkom u središtu štapa,sila $F_D$ otpor zida u tački D oslanjanja štapa na zid i sila $F_B$ sa komponentama $X_B$ i $Y_B$ ,kao otpor zgloba B.Iz analitičkih uslova ravnoteže štapa slede jednačine:

$$\sum M_B^d = F_D \cdot \frac{1}{3}\overline{BE} - G\cdot\frac{1}{2}\overline{BE}\cdot\cos\alpha = 0$$

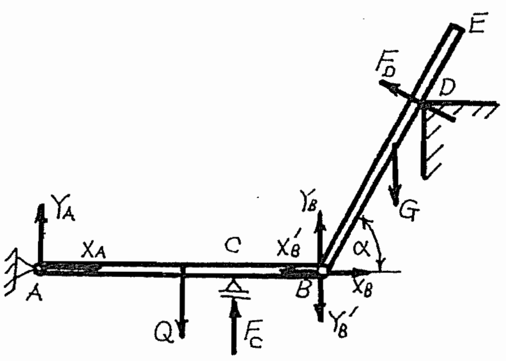
$$\sum X_i = X_B - F_D \sin\alpha = 0$$

$$\sum Y_i = Y_B + F_D\cos\alpha - G = 0$$

iz kojih izračunavamo:

$$F_D = \frac{3}{4}G = 30\ [N]$$

$$X_B = \frac{3}{8}G\sqrt{3} = 15\sqrt{3}\,[N]\ ;\quad Y_B = \frac{5}{8}G = 25\,[N]$$




Slika br. 4

Na horizontalnu gredu dejstvuju sledeće sile:sila Q težine grede, vertikalna sila $F_c$ otpor potpore C,sila $F_B'$ sa komponentama $X_B'$ i $Y_B'$ uticaj štapa BD koji smo uklonili,a po intenzitetu jednaka otporu zgloba B za štap BC,i sila $F_A$ sa komponentama $X_A$ i $Y_A$ otpor zgloba A.Iz uslova ravnoteže za gredu AB dobijamo sledeće:

$$\sum X_i = X_A - X_B = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A + F_C - Q - Y_B = 0$$

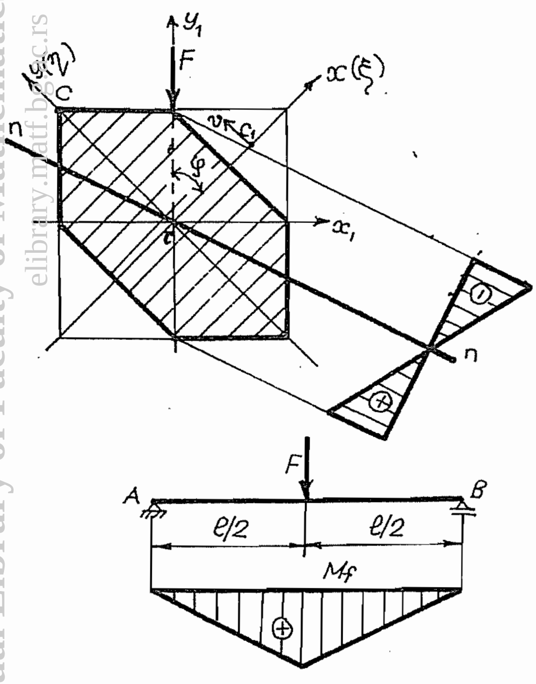
$$\sum M_A = F_C \cdot \frac{2}{3}\overline{AB} - Q \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} - Y_B \cdot \overline{AB} = 0$$

$$F_C = \frac{3}{2}\left(Y_B + \frac{Q}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{8}G + \frac{1}{2}Q\right) = 60\ [N]$$

$$X_A = X_B = 15\sqrt{3}\ [N]\ ; \qquad Y_A = Q + Y_B - F_C = -5\ [N]$$

čime smo odredili sve tražene elemente zadatka.

DRUGI ZADATAK:Poprečni presek nosača ima dve ose simetrije koje su na slici br. 5 označene sa $Cx$ ($C\xi$) i $Cy$($C\eta$).Te ose su istovremeno i glavne centralne ose inercije jer se težište pipреčnog preseka nalazi u preseku osa simetrije.Kako sila dejstvuje u vertikalnom pravcu to je ravan savijanja vertikalna,ali ni jedna od glavnih centralnih osa simetrije poprečnog preseka ne prolazi kroz ravan savijanja to imamo slučaj kosog savijanja.Zato je potrebno da odredimo geometrijske karakteristike poprečnog preseka.Aksijalni momenti inercije poprečnog preseka za glavne centralne ose inercije su:




Slika br. 5

$$I_x = \frac{1}{12}(2a)^4 - \frac{1}{12}a^4 = \frac{5}{4}a^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(2a)^4 - 2\left[I_v + \overline{CC_1}^2 A_2\right]$$

$$I_y = \frac{4a^4}{3} - 2\left[\frac{1}{72}a^4 + \left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\right)\cdot\frac{1}{2}a^2\right]$$

$$I_y = \frac{5}{12}a^4$$

Kao pomoćne površine za sračunavanje momenata inercije poprečnog preseka koristili smo kvadrat stranice 2a i dva trougla kateta po a, čiji su aksijalni momenti inercije:

$$I_v = \frac{bh^3}{36} = \frac{1}{36}a\sqrt{2}\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{72}a^4$$

a) Položaj neutralne ose je odredjen jednačinom

$$y = -\left(\frac{I_x}{I_y}\,ctg\varphi\right)x = -\left(\frac{\frac{5}{4}a^4}{\frac{5}{12}a^4}\cdot ctg\,45^\circ\right)\cdot x$$

koja za naš slučaj postaje: $y = -3x$ .Neutralna osa zaklapa ugao

$$\psi = arc\,tg(-3) = 108^\circ 30'$$

sa pravcem Ox ose.

b)Koordinate tačke C su: C ( 0 , $a\sqrt{2}$ ),pa je na.on u njoj:

$$\sigma_c = -M_f\left(\frac{\cos\varphi}{I_y}x + \frac{\sin\varphi}{I_x}y\right) = -\frac{F\ell}{4}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{5}{12}a^4}\cdot 0 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{5}{4}a^4}\cdot a\sqrt{2}\right)$$

$$\sigma_c = -\frac{F\ell}{5a^3} = -\frac{100}{9}\ [kN/cm^2]$$

gde smo za moment savijanja uzeli moment ispod sile koja dejastvuje na sredini proste grede i njegova vrednost je:

$$M_f = \frac{F\ell}{4} = 36\ [kNm]$$

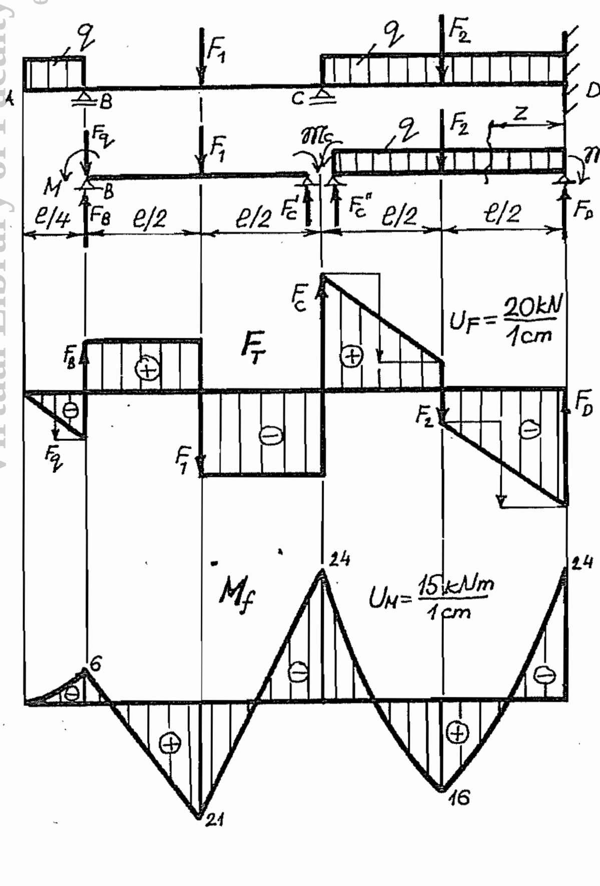
TREĆI ZADATAK: Nosač na slici br. 6 je dva puta statički neodredjen i za statičke nepoznate biramo moment $\mathfrak{M}_C$ nad osloncem C, i moment $\mathfrak{M}_D$ u ukleštenju. Statičke nepoznate odredićemo iz uslova da su nagibi elastične linije sa leve i desne strane oslonca C jednaki medjusobno i da je nagib u ukleštenju jednak nuli. Iz prvog uslova pišemo sledeće:

$$\beta_1 = \alpha_2 \qquad \frac{M\ell}{6B} + \frac{\mathfrak{M}_C\ell}{3B} - \frac{F_1\ell^2}{16B} = -\frac{\mathfrak{M}_C\ell}{3B} - \frac{\mathfrak{M}_D\ell}{6B} + \frac{F_2\ell^2}{16B} + \frac{q\ell^3}{24B}$$

Jednačinu smo napisali koristeći tablice iz Otpornosti materijala. Nagib u tački C je rezultata nagiba usled sile koja dejstvuje na sredini grede BC, i nagiba usled momenta M i momenta $\mathfrak{M}_C$ sa leve strane oslonca, dok je nagib sa desne strane oslonca rezultat je nagiba usled dejstva momenata nad osloncima $\mathfrak{M}_C$ i $\mathfrak{M}_D$, kontinualnog opterećenja duž celog raspona CD i sile $F_2$ koja dejstvuje na sredini drugog raspona. Iz drugog uslova pišemo sledeću jednačinu:

$$\beta_2 = 0$$

$$\frac{\mathfrak{M}_C\ell}{6B} + \frac{\mathfrak{M}_D\ell}{3B} - \frac{F_2\ell^2}{16B} - \frac{q\ell^3}{24B} = 0$$




Slika br. 6

Posle sredjivanja i unošenja brojnih vrednosti sistem jednačina za odredjivanje statičkih nepoznatih dobija oblik:

$$4\mathfrak{M}_C + \mathfrak{M}_D = 120$$

$$\mathfrak{M}_C + 2\mathfrak{M}_D = 72$$

Statičke nepoznate su:

$$\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_D = 24\ [kNm]$$

Greda BC: Iz uslova ravnoteže sila dobijamo otpore oslonaca grede BC:

$$F_B = F_q + \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{\ell}(M - \mathfrak{M}_C) = \frac{51}{2}\ [kN]$$

$$F_C' = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{\ell}(M - \mathfrak{M}_C) = \frac{45}{2}\ [kN]$$

Karakteristična tačka je presek ispod sile pa je moment savijanja u njoj:

$$M_1 = -\mathfrak{M}_C + F_C'\cdot\frac{1}{2}\ell = 21\ [kNm]$$

Greda CD: Otpori oslonaca su:

$$F_C'' = \frac{F_2}{2} + \frac{1}{2} q \cdot \ell + \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_C - \mathfrak{M}_D) = 32\ [kN]$$

$$F_D = \frac{F_2}{2} + \frac{1}{2} q \cdot \ell - \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_C - \mathfrak{M}_D) = 32\ [kN]$$

Analitički izraz za moment duž raspona CD je:

$$M = -\mathfrak{M}_D + F_D \cdot z - \frac{1}{2} q \cdot z^2 \Big\| - F_2\left(z - \frac{1}{2}\ell\right) = -24 + 32z - 6z^2 \Big\| - 16(z-2)$$

koordinata z se meri od ukleštenja D na levo i izraz do vertikalne crete važi za $0 \le z \le 2$, a ceo izraz uklonivši vertikalnu cretu važi za $2 \le z \le 4$. Ekstremne vrednosti momenta se javljaju kada je:

$$F_{T(z)} = \frac{dM}{dz} = F_D - q \cdot z \,\Big|- F_2 = 32 - 12z \Big\| - 16 = 0$$

odnosno kada je transverzalna sila jednaka nuli. Znači da je ekstremna vrednost momenta jednaka:

$$M_{II} = -\mathfrak{M}_D + F_D \cdot \frac{1}{2}\ell - \frac{1}{2} q \cdot \ell \cdot \frac{1}{4}\ell = 16\ [kNm]$$

b) Maksimalni moment duž celog raspona je $M_{max} = 24\ [kNm]$, pa je potrebni otporni moment jednak:

$$W_x = \frac{M_{f\,max}}{\sigma_{df}} = \frac{24 \cdot 10^2}{12} = 200\ [cm^3]$$

Iz tablica standardnih profila nalazimo da profil INP20 zadovoljava uslov da njegov otporni moment nije manji od traženog otpornog momenta nosača, ali je sa najmanjim otpornim momentom koji zadovoljava prethodni uslov. Ostale geometrijske karakteristike usvojenog profila su:

$W_x = 214\ [cm^3]$; $I_x = 2140\ [cm^4]$; $S_{1/2} = 125\ [cm^3]$; $h = 200\ [mm]$; $b = 90\ [mm]$; $\delta = 7{,}5\ [mm]$; $\delta_1 = 11{,}3\ [mm]$.

c) U preseku P moment i transverzalna sila su:

$$F_{TP} = F_B - F_q = \frac{27}{2}\ [kN]$$

$$M_{fP} = F_B \cdot \frac{1}{4}\ell - M - F_q \cdot \frac{1}{4}\ell = \frac{15}{2}\ [kNm]$$

Statički moment dela površine iznad tačaka u kojima se traži tangencijalni napon je:

$$S_x' = S_{1/2} - \frac{1}{5} h \cdot \delta \cdot \frac{1}{4} h = 125 - \frac{20}{5} \cdot 0{,}75 \cdot \frac{1}{4} \cdot 20 = 119\ [cm^3]$$

Komponentni naponi u definisanim tačkama su:

$$\sigma_{f(P)} = \frac{M_{fP}}{I_x} y = \frac{\frac{15}{2} \cdot 10^2}{2140} \cdot \frac{20}{5} = \frac{150}{107} \approx 1{,}4\ [kN/cm^2]$$

$$\tau_{f(P)} = \frac{F_{TP} \cdot S_x'}{I_x \cdot \xi} = \frac{\frac{27}{2} \cdot 119}{2140 \cdot 0{,}75} = \frac{1071}{1070} \approx 1\ [kN/cm^2]$$

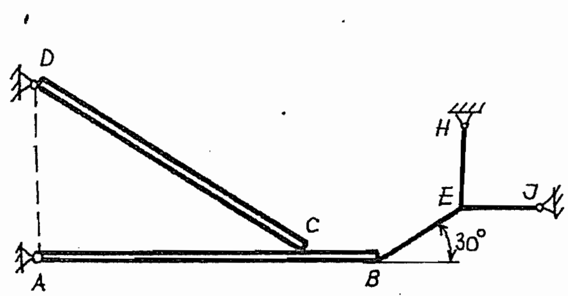
d) Ugib u tački A je:

$$f_A = -\alpha_1 \cdot \frac{1}{4}\ell + \frac{q\left(\frac{\ell}{4}\right)^4}{8\mathcal{B}} = -\frac{12}{\mathcal{B}} \cdot \frac{4}{4} + \frac{12}{8\mathcal{B}} = -\frac{21}{2\mathcal{B}} = -0{,}2\ [cm]$$

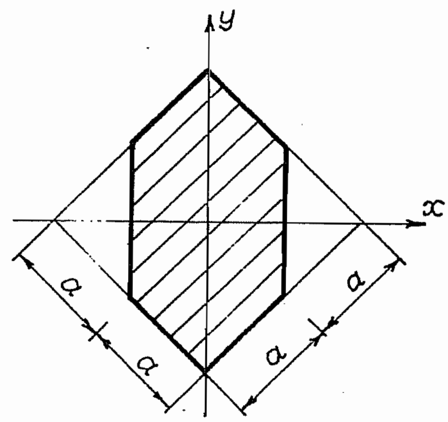
gde je: $\alpha_1$ nagib grede BC i savojna krutost $\mathcal{B} = EI_x = 2 \cdot 10^4 \cdot 2140 = 42{,}8\ [kNm^2]$

MARTOVSKI ISPITNI ROK 1978

PRVI ZADATAK: Homogenu gredu AB, težine $Q = 40$ [N], zglobno vezanu u tački A, u horizontalnom ravnotežnom položaju održava uže BE, koje sa horizontom zaklapa ugao od $30^{\circ}$. U tački E uže BE je zategnuto preko jednog horizontalnog užeta EJ i jednog vertikalnog EH. U tački C na gredu AB se oslanja homogeni štap CD težine $G = 50$ [N], zglobno učvršćen u tački D. Dužina štapa CD jednaka je dužini grede AB, a tačke D i A su na istoj vertikali na rastojanju $\overline{AD} = 3\cdot\overline{CD}/5$. Odrediti sile u zglobovima, sile u užadima i uzajamni pritisak grede i štapa. Sistem je prikazan na slici br. 1.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Vertikalni stub dužine $\ell = 3{,}14$ [m], poprečnog preseka kao na slici br. 2, načinjen od topljenog čelika, zglobno je učvršćen na krajevima, a opterećen aksijalnom pritisnom silom $F = 270$ [kN]. Dimenzionisati stub ako je stepen sigurnosti od izvijanja $\nu = 3{,}1$. Obrazložiti izbor metode za dimenzionisanje. Za modul elastičnosti materijala usvojiti $2\cdot10^4$ [kN/cm$^2$] i za napon pritiska na granici proporcionalnosti $\sigma_{-P} = 50$ [kN/cm$^2$].

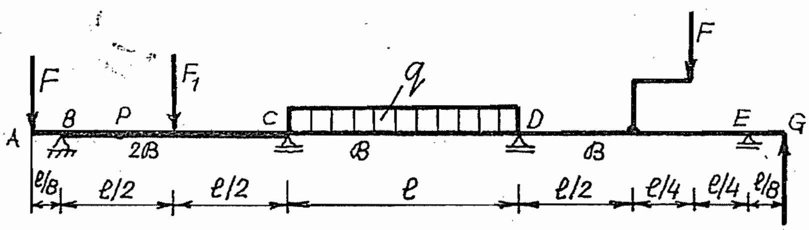
TREĆI ZADATAK: Za kontinualni nosač ABCDEG na delu BC savojne krutosti $2\mathcal{B}$ i na delovima AB, CD, DE i EG savojne krutosti $\mathcal{B}$ sa naznačenim opterećenjima kao na slici br. 3, gde je: $F_1 = 8F/9$, $q = 5F/4\cdot\ell$, $F = 60$ [kN], $\ell = 4$ [m]:

a) Odrediti statičke nepoznate i otpore oslonaca;

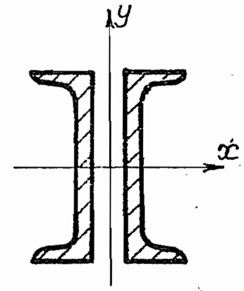
b)Izračunati momente savijanja u karakterističnim tačkama i nacrtati statičke dijagrame nosača;

c)Dimenzionisati nosač pomoću 2[ profila postavljenih kao na slici br. 3a,ako je dozvoljeni napon $\sigma_{df} = 17\,[kN/cm^2]$;

d)Izračunati normalni i tangencijalni napon u preseku P,gde je $\overline{BP} = \ell/4$ ,a u tačkama koje su udaljene **13,4** cm od poprečne neutralne ose preseka,pri čemu treba zanemariti postojanje zaobljenja profila pri računanju.



Slika br. 3

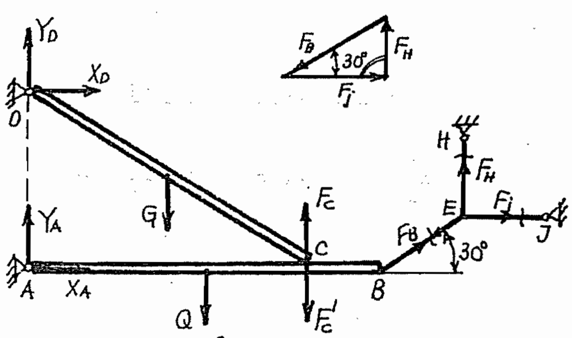


Slika br. 3a



R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Na slici br. 4 prikazan je sistem sa naznačenim silama koje dejstvuju na njega. Na štap CD dejstvuje sila težine G,otpor zgloba D,$F_D$ sa komponentama $X_D$ i $Y_D$ i otpor oslanjanja C ,$F_c$.Iz analitičkih uslova ravnoteže izraženih u koordinatnom Axy sistemu za ravnotežu štapa CD dobijamo sledeće jednačine:



Slika br. 4

$$\sum M_D = G\cdot\frac{1}{2}\overline{DC} - F_c\cdot\overline{DC} = 0$$

$$\sum Y_i = Y_D + F_c - G = 0$$

$$\sum X_i = X_D = 0$$

odakle sledi da je: $F_C = G/2 = 25\,[N]$ , $Y_D = G/2 = 25\,[N]$ i $X_D = 0$.

Na štap AB pored sile Q težine štapa dejstvuju i sledeće sile:sila $F_C' = F_C$ pritiska štapa DC , sila $F_A$ otpor zgloba A sa komponentama $X_A$ i $Y_A$ i sila $F_B$ sila koja se javlja u užetu BE.Iz uslova ravnoteže za štap AB možemo da napišemo sledeće:

$$\sum M_A = Q\cdot\frac{1}{2}\ell + F_c\cdot\frac{4}{5}\ell - F_B\cdot\ell\cdot\sin 30^\circ = 0 \quad\Rightarrow\quad F_B = 80\ [N]$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q - F_C + F_B \cdot \sin 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = 25\,[N]$$

$$\sum X_i = X_A + F_B \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = -40\sqrt{3}\,[N]$$

Na čvor E dejstvuju sile u užadima i to $F_B' = F_B$ , $F_H$ i $F_J$ te iz uslova ravnoteže čvora dobijamo sledeće:

$$F_H = F_B \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} F_B = 40\,[N]$$

$$F_J = F_B \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} F_B = 40\sqrt{3}\,[N]$$

DRUGI ZADATAK: Površina poprečnog preseka stuba i aksijalni momenti inercije za glavne centralne ose inercije preseka su:

$$A = 3a^2 \; ; \quad I_x = \frac{5}{4} a^4 \; ; \quad I_y = \frac{5}{12} a^4$$

(Ovi momenti inercije su sračunati u rešenju drugog zadatka iz januarsko-februarskog roka). Prema Euler-ovoj metodi za dimenzionisanje aksijalno-pritisnutih štapova kod kojih može nastupiti izvijanje minimalna vrednost potrebnog aksijalnog momenta inercije treba da bude:

$$I_{min} = \frac{\nu \cdot F}{\pi^2 E} \ell_r^2 = \frac{3{,}1 \cdot 270}{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^4} \cdot 3{,}14^2 \cdot 100^2 = 418{,}5\,[cm^4] = I_y = \frac{5}{12} a^4$$

i iz ovog izraza dobijamo veličinu za a pomoću koje smo definisali dimenzije poprečnog preseka stuba:

$$a = \sqrt[4]{\frac{12 I_{min}}{5}} = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot 418{,}5}{5}} = 5{,}63\,[cm]$$

Poluprečnik inercije poprečnog preseka čije smo dimenzije odredili je:

$$i_{min}^2 = \frac{I_{min}}{A} = \frac{\frac{5}{12} a^4}{3a^2} = \frac{5}{36} a^2 \Rightarrow i_{min} = \frac{\sqrt{5}\,a}{6} = \frac{\sqrt{5}}{6} \cdot 5{,}63 = 1{,}355\,[cm]$$

te je redukovana vitkost štapa:

$$\lambda = \frac{\ell_r}{i_{min}} = \frac{3{,}14 \cdot 100}{1{,}355} = 233$$

Za zadati materijal od koga je stub načinjen kritična vitkost štapa je:

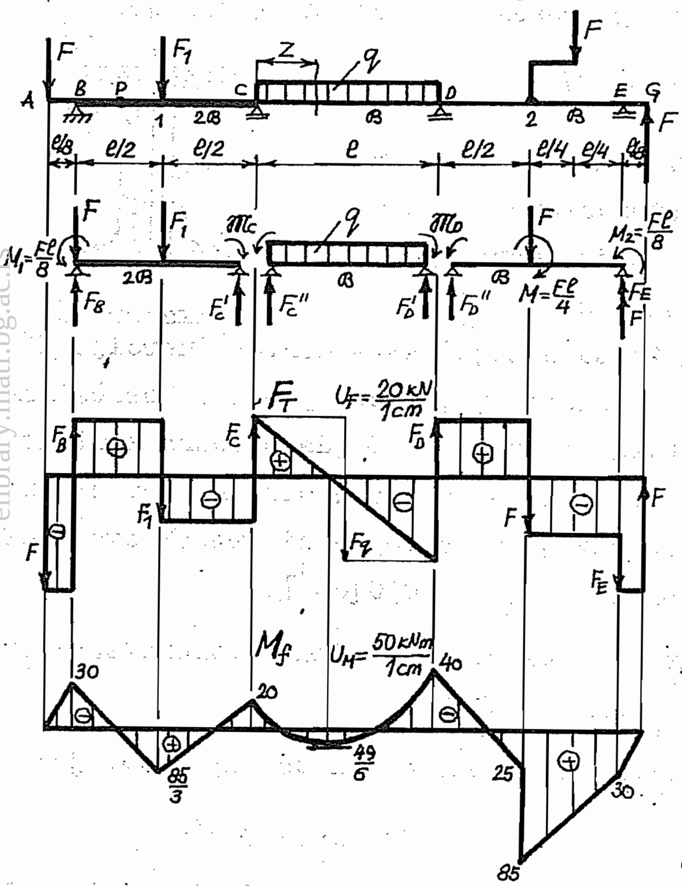
$$\lambda_K = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{50}} = 20\pi = 62{,}8$$

i kako je manja od vitkosti dimenzionisanog štapa to zaključujemo da smo pravilno izabrali Euler-ovu metodu za dimenzionisanje štapa. Provera normalnog napona u poprečnom preseku daje njegovu sledeću vrednost:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{270}{3 \cdot 5{,}63^2} = 2{,}84\ [kN/cm^2] < \sigma_{doz}$$

odakle zaključujemo da je on u granicama dozvoljenog za aksijalna naprezanja.

TREĆI ZADATAK: Kontinualni nosač ABCDEG na slici br. 5 je oslonjen na četiri oslonca pa se javljaju četiri nepoznata otpora za čije odredjivanje na raspolaganju nam stoje dve jednačine statičke ravnoteže te je sistem dva puta statički neodredjen. Za rešenje zadatka izvršićemo dekompoziciju nosača na tri proste grede kod kojih smo uzajamne utiçaje jedne na drugu i prepusta zamenili odgovarajućom spregovima u uslonc**i**ma kao što je to na istoj slici naznačeno. Kao statičke nepoznate biramo momente $\mathfrak{M}_C$ i $\mathfrak{M}_D$ u osloncima C i D. Iz uslova jednakosti uglova što ih čine tangente na elastičnu liniju sa leve i desne strane jednaog oslonca, a za oslonce C i D dobijamo sledeće jednačine:




Slika br. 5

$$\beta_1 = \alpha_2$$

$$\frac{\mathfrak{M}_C\, \ell}{3 \cdot 2B} - \frac{F_1 \ell^2}{16 \cdot 2B} + \frac{M_1 \ell}{6 \cdot 2B} = -\frac{\mathfrak{M}_C\, \ell}{3B} - \frac{\mathfrak{M}_D\, \ell}{6B} + \frac{q\ell^3}{24B}$$

$$\beta_2 = \alpha_3$$

$$\frac{\mathfrak{M}_C\, \ell}{6B} + \frac{\mathfrak{M}_D\, \ell}{3B} - \frac{q\ell^3}{24B} =$$

$$= -\frac{\mathfrak{M}_D\, \ell}{3B} + \frac{F\ell^2}{16B} + \frac{M_2 \ell}{6B} - \frac{M\ell}{24B}$$

odnosno:

$$3\mathfrak{M}_C + \mathfrak{M}_D = 100$$

$$\mathfrak{M}_C + 4\mathfrak{M}_D = 180$$

pomoću kojih odredjujemo statičke nepoznate:

$$\mathfrak{M}_C = 20\ [kNm]\ ; \qquad \mathfrak{M}_D = 40\ [kNm]$$

Iz uslova ravnoteže pojedinačno za svaku od greda dobijamo otpore oslonaca:

I) Za gredu BC:

$$F_B = \frac{535}{6}\ [kN]\ ; \qquad F_C' = \frac{145}{6}\ [kN]$$

II) Za gredu CD:

$$F_C'' = \frac{65}{2}\ [kN]\ ; \qquad F_D' = \frac{85}{2}\ [kN]$$

III) Za gredu DE:

$$F_D'' = \frac{65}{2}\ [kN]\ ; \qquad F_E = -\frac{65}{2}\ [kN]$$

b) Karakteristične tačke nosača su naznačene na slici br. 5 i momenti savijanja u tim tačkama su:

$$M_1 = F_C' \cdot \frac{\ell}{2} - \mathfrak{M}_C = \frac{145}{6} \cdot 2 - 20 = \frac{85}{3} \,[kNm] \qquad za \quad z_0 = \frac{26}{15}\,[m]$$

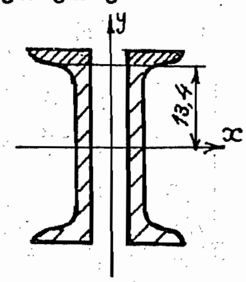
$$M_2^{\ell} = F_D'' \cdot \frac{\ell}{2} - \mathfrak{M}_D = \frac{65}{2} \cdot 2 - 40 = 25 \,[kNm] \qquad M_f = \frac{49}{6}\,[kNm]$$

$$M_2^{d} = M_2^{\ell} + M = 25 + 60 = 85 \,[kNm]$$

Pomoću dobijenih numeričkih rezultata u razmeri $u_M$ nacrtan je je na slici br. 5 dijagram momenata savijanja. Na istoj slici prikazan je i dijagram transverzalnih sila.

c) Sa dijagrama momenata očigledno je da je najveća vrednost momenta savijanja: $M_{f\max} = 85\,[kNm]$ i ta vrednost je merodavna za dimenzionisanje nosača. Potreban otporni moment poprečnog preseka za osu savijanja je:

$$W_x = \frac{M_{f\max}}{\sigma_{df}} = \frac{85 \cdot 10^2}{17} = 500 \,[cm^3]$$



Slika br. 6

Kako poprečni presek predstavlja dva [ profila paralelno postavljena to iz tablica standardnog profila tražimo onaj čiji je otporni moment jednak polovini potrebnog, tj. koji ima otporni moment $W_x' = W_x/2 = 250\,[cm^3]$ i to je profil [ 24 sa aksijalnim momentom inercije $I_x' = 3600\,[cm^4]$, te je ukupni aksijalni moment inercije poprečnog preseka nosača na mestu jednostruke krutosti $I_x = 7200\,[cm^4]$. Za deo nosača BC gde savojna krutost treba da bude dva puta veća jedan [ profil treba da ima aksijalni moment inercije $I_{x1}' = 7200\,[cm^4]$ pa je potrebno da usvojimo za poprečni presek dva profila [ 30 sa aksijalnim momentom inercije $I_{x1} = 8030\,[cm^4]$.

d) U naznačenom preseku **P** transverzalna sila i moment savijanja su:

$$F_{TP} = \frac{175}{6}\,[kN] \,, \quad M_{fP} = -\frac{5}{6}\,[kNm]$$

Statički moment površine preseka iznad naznačene ordinate 13,4 [cm] je:

$$S_x' = 2 \cdot b \cdot \delta_1 \left(\frac{h}{2} - \frac{\delta_1}{2}\right) = 2 \cdot 10 \cdot 1{,}6\,(30 - 1{,}6) = 454{,}4 \,[cm^3]$$

Kako u visini naznačene ordinate površina preseka ima dve širine i to: $\xi_1 = 2\delta = 2\,[cm]$ i $\xi_2 = 20\,[cm]$ to će se javiti dve vrednosti tangencijalnog napona i one iznose:

$$\tau = \frac{F_T \cdot S_x'}{I_x \cdot \xi_1} = \frac{\frac{175}{6} \cdot 454{,}4}{16060 \cdot 2} = 0{,}41 \,[kN/cm^2]$$

$$\tau' = \frac{F_T \cdot S_x'}{I_x \cdot \xi_2} = \frac{\frac{175}{6} \cdot 454{,}4}{16060 \cdot 20} = 0{,}041 \,[kN/cm^2]$$

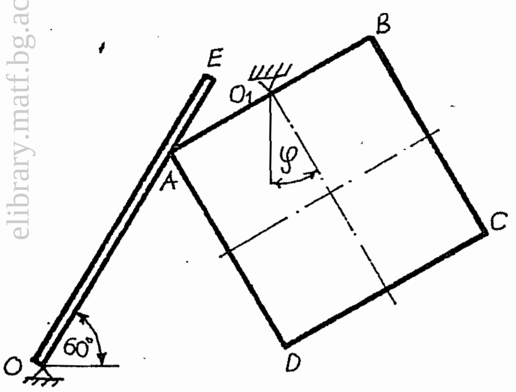
Normalni napon u poprečnom preseku iznosi:

$$\sigma_f = \frac{M_f}{I_x} \cdot y = \frac{\frac{5}{6} \cdot 10^2}{16060} \cdot 13{,}4 = 0{,}07 \,[kN/cm^2]$$

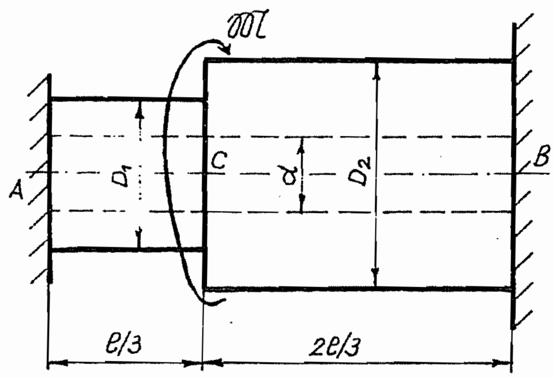
gde je $I_x = 16060\,[cm^4]$ i $y = 13{,}4\,[cm]$.

APRILSKI ISPITNI ROK 1978

PRVI ZADATAK: SISTEM na slici br. 1 sastoji se iz homogene kvadratne ploče ABCD, stranice $a = \ell$, težine $Q$, zglobno vezane u tački $O_1$, gde je $\overline{O_1A} = \overline{O_1B}$ i homogenog štapa OE, težine $G = Q\sqrt{3}$, dužine $\ell$, zglobno vezanog u tački O, dok se u tački A oslanja o teme A ploče, pri čemu je $\overline{OA} = 3\ell/4$, tako da u ravnotežnom položaju gradi ugao $\alpha = 60^\circ$. U ravnotežnom položaju odrediti ugao nagiba stranice kvadratne ploče prema vertikali i otpore zglobova i uzajamni pritisak štapa i ploče.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Stepenasto vratilo ACB, spoljašnjeg prečnika $D_1$ na delu $\overline{AC} = \ell/3$ i $D_2$ na delu $\overline{CB} = 2\ell/3$ prstenastog poprečnog preseka unutrašnjeg prečnika d duž celog vratila AB, je obostrano uklešteno i u preseku C je opterećeno momentom uvijanja $\mathfrak{M}$. Ako je $\psi = d/D_2 = 1/4$, $\lambda = D_1/D_2 = 1/2$, $\mathfrak{M} = 2850\pi$ [kNcm] i $\tau_{ds} = 10$ [kN/cm$^2$], odrediti:

a) Momente uklještenja $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ i nacrtati dijagram momenata uvijanja;

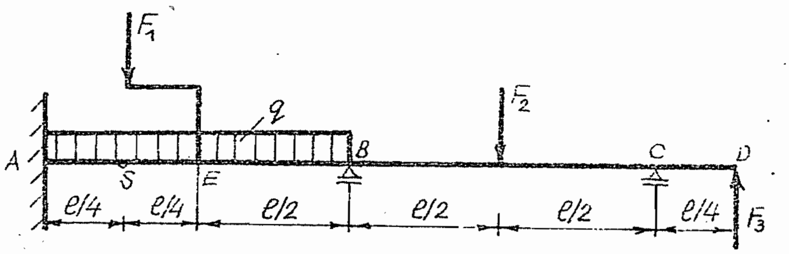
b) Dimenzionisati vratilo.

TREĆI ZADATAK: Za kontinualni nosač ABCD jednakih raspona AB i CD = $\ell$ = 4 [m], i prepustima CD i EMN, konstantnog poprečnog preseka, koji je opterećen duž prvog raspona jednakopodeljenim opterećenjem $q = F/\ell$ i silom $F_1 = F = 40$ [kN] na prepustu EMN i koncentrisanom silom $F_2 = F/12$ na sredini raspona BC i silom $F_3 = 3F/4$ na slobodnom kraju prepusta CD, kako je to na slici br. 3 naznačeno, odrediti:

a) Statičke nepoznate i nacrtati statičke dijagrame nosača;

b) Dimenzionisati nosač I profila, ako je dozvoljeni napon $\sigma_{df} = 15\,[kN/cm^2]$;

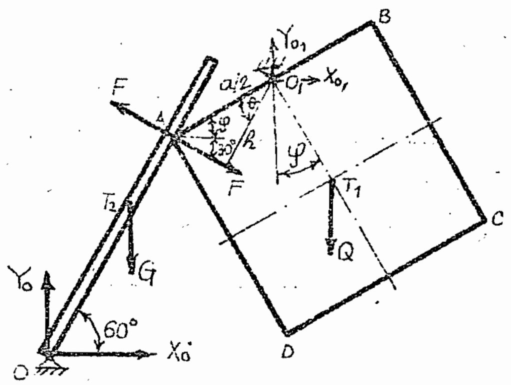
c) U tački N na udaljenju 106,9 [mm] od poprečne težišne ose a u preseku S, gde je $\overline{AS} = \ell/4$ izračunati normalni i tangencijalni napon.




Slika br. 3

R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Sistem je prikazan na slici br. 4 sa naznačenim aktivnim i otpornim silama. Aktivne sile koje dejstvuju na sistem su sila Q težine kvadratne ploče, koja dejstvuje sa napadnom tačkom u težištu ploče $T_1$ i sila G težine štapa koja dejstvuje u težištu štapa $T_2$. Od otpornih sila javljaju se otpor $F_o$ zgloba O štapa, sa komponentama $X_o$ i $Y_o$, Otpor $F_{o1}$ zgloba $O_1$ na ploči, sa komponentama $X_{o1}$ i $Y_{o1}$ i sila F uzajamnog pritiska štapa i ploče u tački A oslanjanja štapa na ploču koja je upravna na štap. Iz uslova ravnoteže štapa OE dobijamo sledeće jednačine:




Slika br. 4

$$\sum M_O = G\cdot\tfrac{1}{2}\ell\cdot\cos 60^\circ - F\cdot\tfrac{3}{4}\ell = 0$$

$$\sum X_i = X_O - F\cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = Y_O - G + F\sin 30^\circ = 0$$

iz kojih izračunavamo nepoznate otporne sile:

$$F = \tfrac{1}{3}G\;;\quad X_O = \tfrac{\sqrt{3}}{6}G\;;\quad Y_O = \tfrac{5}{6}G$$

Iz uslova ravnoteže ploče dobijamo sledeće jednačine:

$$\sum M_{O_1} = F\cdot h - Q\cdot\tfrac{1}{2}a\cdot\sin\varphi \quad 0$$

$$\sum X_i = X_{o_1} - F\cdot\cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = Y_{o_1} - F\cdot\sin 30^\circ - Q = 0$$

gde je h naznačeno na slici br. 4 i njegova vrednost je:

$$h = \frac{a}{2}\cdot\cos\theta = \frac{a}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$$

Iz momentne jednačine izračunavamo ugao $\varphi$ nagiba stranice AB pločice u odnosu na horizontalni pravac, na sledeći način:

$$F\cdot\frac{a}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right) - Q\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin\varphi = 0$$

$$\frac{1}{3}Q\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\varphi + \sin\frac{\pi}{3}\sin\varphi\right) - Q\cdot\frac{a}{2}\sin\varphi = 0$$

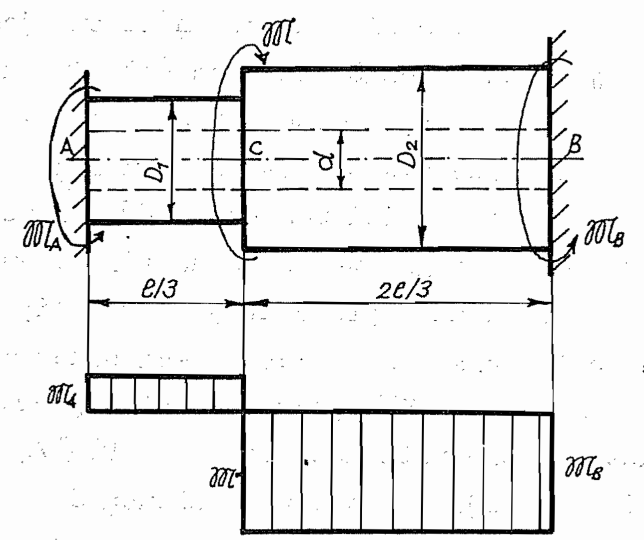
$$tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$$

Komponente otpora zgloba $O_1$ su:

$$X_{o_1} = \frac{\sqrt{3}}{6}G \quad ; \quad Y_{o_1} = \frac{\sqrt{3}+6}{6}Q$$

DRUGI ZADATAK: Na slici br. 5 prikazano je stepenasto vratilo sa naznačenim otpornim momentima ukleštenja. Zadatak je jedamputa statički neodredjen jer nam na raspolaganju stoji samo jedna statička jednačina ravnoteže momenata za geometrijsku osu vratila koja glasi:

$$\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}$$




Slika br. 5

Drugu jednačinu dobijamo iz uslova da su uglovi uvijanja za dva konzolna vratila AC i CB, na koja smo rastavili vratilo, jednaki medjusobno:

$$\frac{\mathfrak{M}_A\cdot\frac{\ell}{3}}{I_{o_1}\cdot G} = \frac{(\mathfrak{M}-\mathfrak{M}_A)\cdot\frac{2}{3}\ell}{I_{o_2}\cdot G}$$

Rešavanjem dobijenog sistema jednačina dobijamo:

$$\mathfrak{M}_A = \frac{2I_{o_1}}{2I_{o_1}+I_{o_2}}\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{M}_B = \frac{I_{o_2}}{2I_{o_1}+I_{o_2}}\mathfrak{M}$$

Polarni momenti inercije poprečnih preseka vratila su:

$$I_{o_1} = \frac{D_1^4\pi}{32}\left[1-\left(\frac{\psi}{2}\right)^4\right] = \frac{D_1^4\pi}{32}\left[1-\frac{1}{16}\right] = \frac{15}{2^9}D_1^4\pi$$

$$I_{o_2} = \frac{D_2^4\pi}{32}\left[1-\psi^4\right] = \frac{D_2^4\pi}{32}\left(1-\frac{1}{256}\right) = \frac{255}{2^{13}}D_2^4\pi$$

pa je njihov odnos:

$$\frac{I_{o2}}{I_{o1}} = \frac{255 D_2^4 \pi / 2^{13}}{15 D_1^4 \pi / 2^9} = \frac{17}{16} \cdot \frac{1}{\lambda^4} = 17$$

Sada možemo momente ukleštenja da napišemo u obliku:

$$\mathfrak{M}_A = \frac{2}{19}\,\mathfrak{M} = 300\pi \ [kNm]; \quad \mathfrak{M}_B = \frac{17}{19}\,\mathfrak{M} = 2550\pi \ [kNm]$$

Dijagram momenata uvijanja vratila je prikazan na slici br. 5.

b) Dimenzionisanje vršimo na osnovu dozvoljenog tangencijalnog napona $\tau_{ds}$ čija vrednost je 10 [kN/cm$^2$]:

$$W_1 = \frac{D_1^3 \pi}{16}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right] = \frac{15}{2^8} D_1^3 \pi = \frac{\mathfrak{M}_A}{\tau_{ds}} = \frac{300\pi}{10} = 30\pi \ [cm^3]$$

$$W_2 = \frac{D_2^3 \pi}{16}\left[1 - \frac{1}{256}\right] = \frac{255}{2^{12}} D_2^3 \pi = \frac{\mathfrak{M}_B}{\tau_{ds}} = 255\pi \ [cm^3]$$

Dimenzije stepenastog vratila sa kružno-prstenastim poprečnim presekom su:

$$D_1 = \sqrt[3]{\frac{2^8 \cdot W_1}{15\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2^8 \cdot 30\pi}{15\pi}} = 8 \ [cm]$$

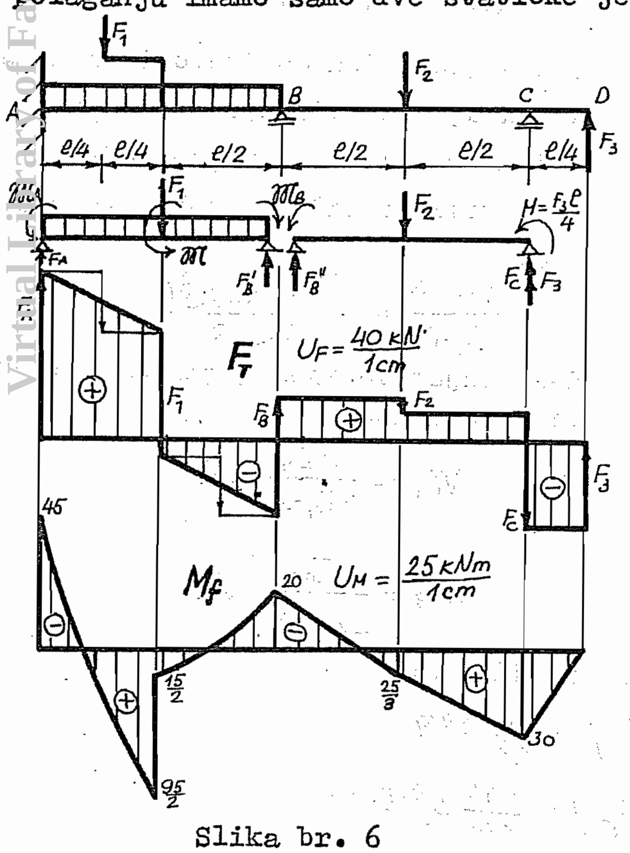
$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{2^{12} W_2}{255\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2^{12} \cdot 255\pi}{255\pi}} = 16 \ [cm]$$

$$d = 4 \ [cm]$$

TREĆI ZADATAK: Nosač ABCD uklešten u tački A i oslonjen u tačkama B i C je dva puta statički neodredjen, jer je potrebno odrediti četiri nepoznate : tri otporne sile $F_A$, $F_B$ i $F_C$ i otporni moment ukleštenja $\mathfrak{M}_A$, a na raspolaganju imamo samo dve statičke jednačine. Zato je potrebno da iz uslova dopuštenih deformacija nosača napišemo još dve jednačine. Nosač ćemo zameniti dvema prostim gredama, kao što je to na slici br. 6 naznačeno, s tim što ćemo uticaj ukleštenja zameniti momentom $\mathfrak{M}_A$ i uslovom da je nagib tangente na elastičnu liniju u tački A grede AB jednak nuli; u tački B uzajamni uticaj greda zamenićemo momentom $\mathfrak{M}_B$; dok ćemo uticaj prepusta CD zameniti momentom $M = F_3 \ell/4$ i silom $F_3$ koji dejstvuju u osloncu C.
Kao statičke nepoznate izaberimo sada momente $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$, te su jednačine za njihovo odredjivanje sada:

$$\alpha_A = 0$$

$$-\frac{\ell}{6\mathcal{B}}(2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B) + \frac{F_1 \ell^2}{16\mathcal{B}} + \frac{q\ell^3}{24\mathcal{B}} + \frac{\mathfrak{M}\ell}{24\mathcal{B}} = 0$$




Slika br. 6

$$\beta_B = \alpha_B$$

$$\frac{\ell}{6B}(\mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B) - \frac{F_1\ell^2}{16B} - \frac{q\ell^3}{24B} + \frac{\mathfrak{M}\ell}{24B} = -\frac{\ell}{6B}(2\mathfrak{M}_B - M) + \frac{F_2\ell^2}{16B}$$

Ili ako se uzmu zadati numerički podaci:

$$2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = 110$$
$$\mathfrak{M}_A + 4\mathfrak{M}_B = 125$$

Rešavanjem dobijenog sistema jednačina dobijamo vrednosti za tražene **statičke** nepoznate:

$$\mathfrak{M}_A = 45\,[kNm]\ ; \qquad \mathfrak{M}_B = 20\,[kNm]$$

b) Iz uslova ravnoteže grede AB dobijamo:

$$F_A = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}q\cdot\ell + \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_B) = \frac{225}{4}\,[kN]$$

$$F_B' = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}q\ell - \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_B) = \frac{95}{4}\,[kN]$$

Momenti u karakterističnim tačkama za gredu AB su:

$$M_A = -\mathfrak{M}_A = -45\,[kNm]$$

$$M_{(z)} = F_A\cdot z - \mathfrak{M}_A - \frac{1}{2}q\cdot z^2 = \frac{225}{4}z - 45 - 5z^2$$

$$F_{T(z)} = \frac{dM_{(z)}}{dz} = \frac{225}{4} - 10z \quad ; \qquad F_{T(1)} = \frac{185}{4}\,[kN]$$

$$M_{(1)} = \frac{225}{4} - 45 - 5 = \frac{25}{4}\,[kNm]$$

$$M^{\ell}_{(2)} = \frac{225}{4}\cdot 2 - 45 - 5\cdot 4 = \frac{95}{2}\,[kNm]$$

$$M^{d}_{(z)} = \frac{225}{4}\cdot z - 45 - 5z^2 - 40 - 40(z-2)$$

$$M^{d}_{(z)} = \frac{65}{4}z - 5 - 5z^2$$

$$M^{d}_{(2)} = \frac{65}{4}\cdot 2 - 5 - 5\cdot 4 = \frac{15}{2}\,[kNm]$$

$$M^{d}_{(3)} = \frac{65}{4}\cdot 3 - 5 - 5\cdot 9 = -\frac{5}{4}\,[kNm]$$

$$M_{(4)} = -\mathfrak{M}_B = -20\,[kNm]$$

Iz uslova ravnoteže grede **BC** dobijamo:

$$F_B'' = \frac{\mathfrak{M}_B + M}{\ell} + \frac{1}{2}F_2 = \frac{85}{6}\,[kN]$$

$$F_C' = -\frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_B + M) + \frac{1}{2}F_2 = -\frac{65}{6}\,[kN]$$

$$F_C = F_C' - F_3 = -\frac{245}{6}\,[kN]$$

Momenti u karakterističnim tačkama su:

$$M_C = M = 30\,[kNm]$$

$$M_2 = -\mathfrak{M}_B + F_B''\cdot 2 = \frac{25}{3}\,[kNm]$$

Pomoću dobijenih numeričkih vrednosti za momente savijanja u karakterističnim tačkama nosača u razmeri $U_m$ nacrtan je dijagram momenata savijanja prikazan na slici br. 6. Takodje je nacrtan i dijagram transverzalnih sila.

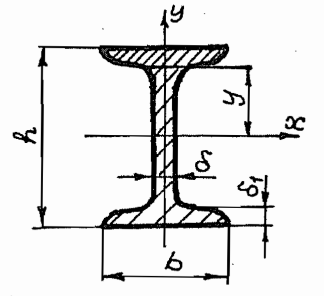
c) Sa dijagrama se može zaključiti da je maksimalna vrednost momenta savijanja $M_{fmax} = M^1_{(2)} = 95/2$ [kNm] i ta vrednost je merodavna za dimenzionisanje nosača. Potreban otporni moment poprečnog preseka nosača za osu savijanja je:

$$W_x = \frac{M_{f\,max}}{\sigma_{df}} = \frac{95 \cdot 10^2}{2 \cdot 15} = 316\ [cm^3]$$

Iz tablice profila na osnovu sračunate vrednosti otpornog momenta poprečnog preseka usvajamo profil I24 sa sledećim gometrijskim karakteristikama:
$W_x = 354\ [cm^3]$, $I_x = 4250\ [cm^4]$, $S_{1/2} = 206\ [cm^3]$, $h = 240\ [mm]$, $b = 106\ [mm]$, $\delta = 8{,}7\ [mm]$, $\delta_1 = 13{,}1\ [mm]$.

d) Na slici br. 7 naznačene su tačke u kojima treba sračunati komponentne napone, normalni i tangencijalni. Statički moment šrafiranog dela površine poprečnog preseka je:

$$S_x' = S_{1/2} - \delta \cdot y \cdot \tfrac{1}{2} y = 206 - 0{,}87 \cdot 10{,}69 \cdot 5{,}345 = 156{,}5\ [cm^3]$$




Slika br. 7

Moment savijanja i transverzalna sila u preseku S nosača su:

$$F_T = \frac{185}{4}\ [kN] \ ; \quad M_f = \frac{15}{2}\ [kNm]$$

Normalni napon u naznačenim tačkama poprečnog preseka je:

$$\sigma_f = \frac{M_f}{I_x} \cdot y = \frac{\frac{15}{2} \cdot 10^2}{4250} \cdot 10{,}69 = 1{,}885\ [kN/cm^2]$$

Na ordinati $y = 106{,}9$ [mm] imamo promenu debljine preseka, pa sa tim i skok vrednosti tangencijalnog napona tako da su vrednosti tangencijalnog napona:

$$\tau_f = \frac{F_T \cdot S_x'}{I_x \cdot \xi} = \frac{\frac{185}{4} \cdot 156{,}5}{4250 \cdot 0{,}87} = 1{,}95\ [kN/cm^2]$$

$$\tau_f' = \frac{F_T \cdot S_x'}{I_x \cdot \xi'} = \frac{\frac{185}{4} \cdot 156{,}5}{4250 \cdot 10{,}6} = 0{,}16\ [kN/cm^2]$$

JUNSKI ISPITNI ROK 1978

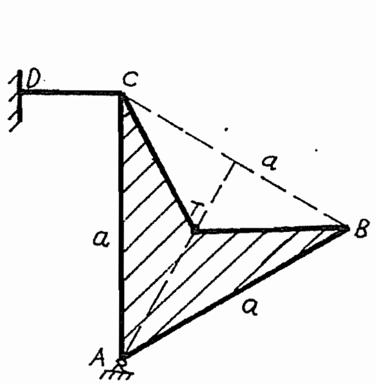
PRVI ZADATAK:Ponovljen je prvi zadatak iz aprilskog roka 1978 godine.

DRUGI ZADATAK:Ponovljen je drugi zadatak iz junskog ispitnog roka 1977 godine.

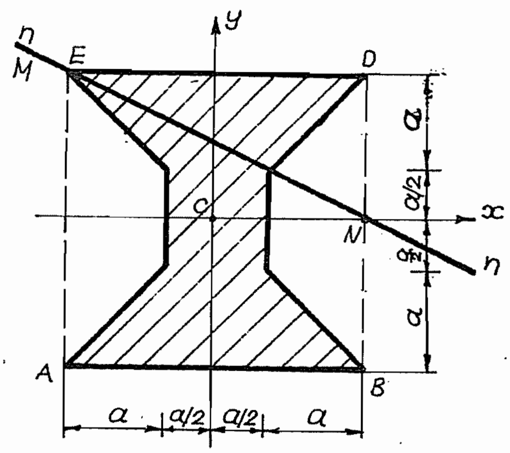
TREĆI ZADATAK:Ponovljen je treći zadatak iz martovskog ispitnog roka 1978 godine.

SEPTEMBARSKI ISPITNI ROK 1978

PRVI ZADATAK:Tanka homogena pločica ABTC težine $G = 80[N]$, oblika jednakostraničnog trougla stranice $a$ ,sa isečenim jednakokrakim trouglom tako da je težište dobijene pločice u temenu T isečenog trougla,a u tački A je zglobno vezana za pod,dok je horizontalno uže DC održava u ravnotežnom položaju u kome je stranica AC vertikalna.Grafički i analitički odrediti silu u koncu i otpor zgloba A.Pločica je prikazana na slici br. 1.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK:Za dati presek na slici br.2 gde je $a = 3[cm]$, odrediti:

a)oblik i dimenzije jezgra preseka i nacrtati jezgro preseka;

b)koordinate napadne tačke u kojoj treba da dejstvuje ekscentrična aksijalna sila intenziteta $F = 180[kN]$,tako da neutralna osa preseka pada u naznačeni pravac MN;za taj položaj napadne tačke sile odrediti najveći normalni napon i nacrtati dijagram napona.

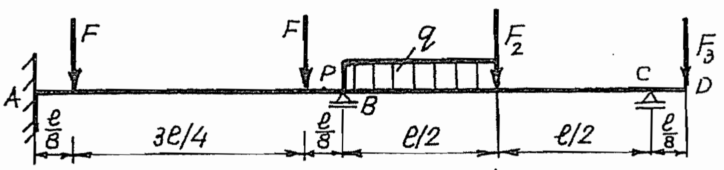
TREĆI ZADATAK:Za kontinualni nosač ABCD uklešten u tački A, oslonjen u tačkama B i C sa prepustom CD , savojne krutosti $\mathcal{B}$ sa naznačenim opterećenjima kao na slici br.3 gde je: $F = 64[kN]$; $F_2 = F/2$ ; $F_3 = 7F/8$; $q\ell = F$; $\ell = 4[m]$:

a)Odrediti statičke nepoznate,otpore oslonaca i ukleštenja;

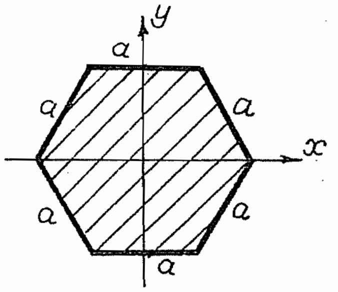
b)Izračunati momente u karakterističnim tačkama i nacrtati statičke dijagrame nosača;

c)Dimenzionisati nosač poprečnog preseka oblika pravilnog šestougaonika stranice a ,postavljenog kao na slici br. 3 a ,ako je dozvoljeni napon savijanja $\sigma_{df} = 14[kN/cm^2]$ ;

d)Izračunati normalni i tangencijalni napon u preseku P gde je $\overline{BP} = \ell/16$ , a u tačkama preseka na udaljenju $a\sqrt{3}/4$ od neutralne ose savijanja.



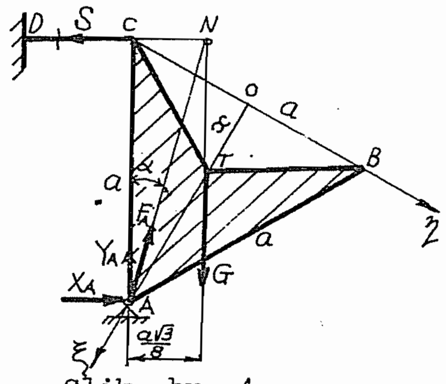

Slika br. 3




Slika br. 3a

R E Š E N J A

PRVI ZADATAK:Na slici br. 4 prikazana je pločica sa naznačenim aktivnim i otpornim silama.Položaj tačke T označen je dužinom x,koju odredjujemo iz uslova da je težište pločice u tački T.Statički moment površine pločice za osu $\eta$ treba da bude jednak proizvodu površine pločice i rastojanja tačke T od ose $\xi$ .Iz ovog uslova dobijamo sledeće:




Slika br. 4

$$\sum A_i \xi_i = A \cdot x$$

$$\frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{3} - \frac{ax}{2} \cdot \frac{x}{3} = \left( \frac{ah}{2} - \frac{ax}{2} \right) x$$

$$x = \frac{1}{4}(3h \pm h) = \begin{cases} h \\ \frac{1}{2}h \end{cases}$$

Od dobijenih rešenja možemo prihvatiti vrednost

$$x = \frac{1}{2} h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

jer odgovara postavci zadatka.Drugo rešenje ne odgovara jer se tada pločica degeneriše.

Zadatak možemo rešiti na dva načina.Prvi način je pomoću trougla sila,koji mora da bude zatvoren i da se sve tri napadne linija sila seku u jednoj tački kako je to naznačeno na slici. Ugao $\alpha$ koji napadna linija otpora zgloba A zaklapa sa vertikalnim pravcem odredjen je sa:

$$tg\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{\sqrt{201}}{67} \; ; \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{8\sqrt{67}}{67}$$

Iz trougla sila sledi:

$$S = G\cdot tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{8}G$$

$$F_A = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{67}}{8}G$$

čime smo odredili silu u koncu i otpor zgloba A.

Do rešenja zadatka možemo da dodjemo čisto analitički postavljajući uslove ravnoteže u koordinatnom Oxy sistemu:

$$\Sigma M_A = S\cdot a - G\cdot\frac{a\sqrt{3}}{8} = 0$$

$$\Sigma X_i = X_A - S = 0$$

$$\Sigma Y_i = Y_A - G = 0$$

iz kojih slede vrednosti za silu u koncu i komponente otpora zgloba A:

$$S = G\frac{\sqrt{3}}{8} \; ; \qquad X_A = S = G\frac{\sqrt{3}}{8} \; ; \qquad Y_A = G$$

$$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \frac{\sqrt{67}}{8}G$$

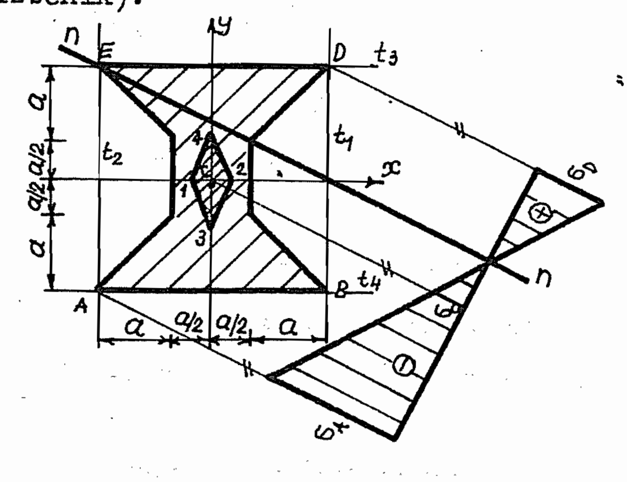
**ZADATAK DRUGI:** Glavne centralne ose inercije poprečnog preseka na slici br. 5 su: Cx i Cy, i aksijalni momenti inercije za te ose su:

$$I_x = 2\cdot\frac{1}{4}3a\left(\frac{3a}{2}\right)^3 + 4\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{61}{12}a^4 = \frac{61}{12}\cdot 3^4 = \frac{1647}{4} = 411{,}7\ [cm^4]$$

$$I_y = 2\cdot\frac{1}{4}a\left(\frac{a}{2}\right)^3 + 4\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)^3 = \frac{7}{4}a^4 = \frac{7}{4}\cdot 3^4 = 141{,}7\ [cm^4]$$

Tangente na konturu preseka koje ne seku presek su naznačene na slici br. 5 sa $t_i$, gde je $i = 1,2,3,4$. Otsečci koje te tangente grade na koordinatnim osama su: $\pm\, 3a/2$. Koordinate temena jezgra preseka se sračunavaju po obrascima (vidi udžbenik):

$$x_j = -\frac{i_y^2}{a_0} \; ; \qquad y_j = -\frac{i_x^2}{b_0}$$




Slika br. 5

Svakoj tangenti na presek odgovara po jedna tačka konture jezgra preseka, pa su tangente i njima odgovarajuće tačke konture jezgra:

$$x_{1,2} = -\frac{\frac{7}{20}a^2}{\pm\frac{3a}{2}} = \mp\frac{7}{30}a = \mp 0{,}7\ [cm]$$

$$y_{1,2} = 0$$

$$x_{3,4} = 0$$

$$y_{3,4} = -\frac{\frac{61}{60}a^2}{\pm\frac{3a}{2}} = \mp\frac{61}{90}a = \mp\frac{61}{30}\ [cm]$$

gde smo koristili vrednosti za

kvadrate poluprečnika inercije za glavne centralne ose inercije:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{61}{12}a^4}{5a^2} = \frac{61}{60}a^2$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{7}{4}a^4}{5a^2} = \frac{7}{20}a^2$$

Tangente na konturu preseka koje ne seku presek čine novu konturu koja ima oblik pravougaonika (četvorougla) te jezgro preseka ima konturu četvorougaonika čija smo temena odredili kao odgovarajuće tačke konture jezgra i tangenti povučenih na presek. Na slici br. 5 u odgovarajućoj razmeri crtanja preseka, nacrtano je jezgro preseka.

b) Ako je neutralna osa n-n naznačena na slici onda su odsečci koje ona gradi sa glavnim centralnim osama inercije poprečnog preseka: 3a/2 i 3a/4. Koordinate napadne tačke u kojoj treba da dejstvuje ekscentrična aksijalna sila, tako da neutralna osa pada u naznačeni pravac MN izračunavamo pomoću sledećih obrazaca:

$$x_o = -\frac{i_y^2}{a_o} = -\frac{\frac{7}{20}a^2}{\frac{3}{2}a} = -\frac{7}{30}a = -0{,}7\,[cm]; \quad y_o = -\frac{i_x^2}{b_o} = -\frac{\frac{61}{60}a^2}{\frac{3}{4}a} = -\frac{61}{45}a = -\frac{61}{15}\,[cm]$$

Za naš slučaj koordinate napadne tačke sile su:

$$x_o = -0{,}7\,[cm] \;; \qquad y_o = -\frac{61}{15}\,[cm]$$

Napon u težištu poprečnog preseka je:

$$\sigma_c = -\frac{F}{A} = -\frac{180}{45} = -4\,[kN/cm^2]$$

dok su naponi u tačkama D i A dva puta odnosno tri puta veći od težišnog napona, jer su same tačke D i A dva puta odnosno tru puta odaljenije od neotralne ose u poredjenju sa tačkom C, te su njihove vrednosti:

$$\sigma_D = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_D \cdot x_o}{i_y^2} + \frac{y_D \cdot y_o}{i_x^2}\right) = 2\sigma_c = 8\,[kN/cm^2]$$

$$\sigma_A = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_A \cdot x_o}{i_y^2} + \frac{y_A \cdot y_o}{i_x^2}\right) = 4\sigma_c = 16\,[kN/cm^2]$$

Normalni napon se menja linearno sa udaljenjem tačaka preseka od neutralne ose, što se vidi i iz samog dijagrama normalnog napona koji je prikazan na slici br. 5.

TREĆI ZADATAK: Nosač na slici je dva puta statički neodredjen i izaberimo kao statičke nepoznate moment uklještenja $\mathfrak{M}_A$ i moment nad osloncem B, $\mathfrak{M}_B$. Kontinualni nosač zamenimo sistemom od dve proste grede opterećene odgovarajućim spoljašnjim opterećenjem i momentima $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ kako je to na slici br. 6 naznačeno. Jednačine za odredjivanje statičkih nepoznatih dobijamo iz uslova da je nagib tangente na elastičnu liniju u tački A jednak nuli i iz uslova da je nagib tangente na elastičnu liniju grede AB u tački B jednak nagibu tangente na elastičnu liniju grede BC u tački C. Te jednačine su:

$$\alpha_A = 0 \qquad -\frac{\mathfrak{M}_A \ell}{3\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{6\mathcal{B}} + \frac{F}{2}\cdot\frac{\ell^2}{\mathcal{B}}\cdot\frac{a}{\ell}\left(1+\frac{a}{\ell}\right) = -\frac{\ell}{6\mathcal{B}}\left(2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B\right) + \frac{7}{128}\frac{F\ell^2}{\mathcal{B}} = 0$$

$$\beta_B = \alpha_B$$

$$\frac{\ell}{6\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B) - \frac{7}{128}\frac{F\ell^2}{\mathcal{B}} = -\frac{\ell}{6\mathcal{B}}(2\mathfrak{M}_B + M) + \frac{3}{128}\frac{F\ell^2}{\mathcal{B}} + \frac{F\ell^2}{32\mathcal{B}}$$

Za zadate numeričke podatke jednačine su:

$$2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = 84$$
$$\mathfrak{M}_A + 4\mathfrak{M}_B = 140$$

Rešavanjem poslednjeg sistema jednačina dobijamo da su statičke nepoznate:

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B = 28\ [kNm]$$

Iz uslova ravnoteže grede AB dobijamo otpore oslonaca:

$$F_A = F_B' = F = 64\ [kN]$$

dok iz uslova ravnoteže grede BC dobijamo otpore oslonaca:

$$F_B'' = \frac{3}{4}\frac{q\ell}{2} + \frac{1}{2}F_2 + \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_B - M) = \frac{5}{8}F = 40\ [kN]$$

$$F_C = \frac{1}{4}\cdot\frac{q\ell}{2} + \frac{1}{2}F_2 - \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_B - M) = \frac{5}{4}F = 80\ [kN]$$

Ukupni otpor oslonca B je sada:

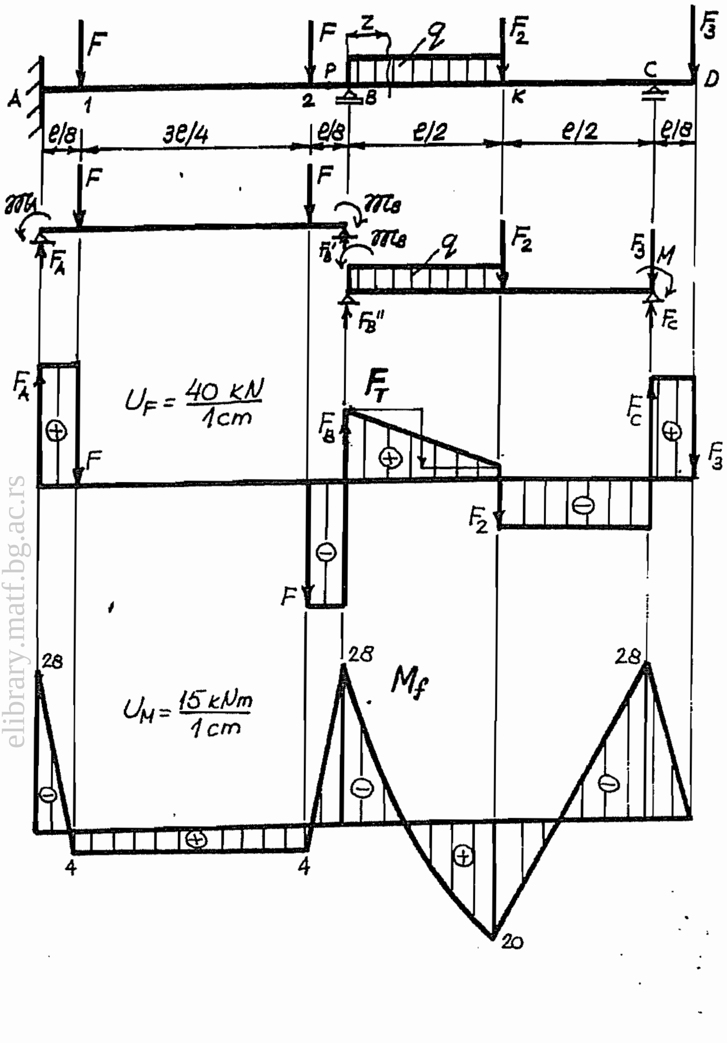
$$F_B = F_B' + F_B'' = 104\ [kN]$$

b) Karakteristične tačke su naznačene na slici i momenti savijanja u tim tačkama su:

$$M_1 = -\mathfrak{M}_A + F_A\cdot\frac{\ell}{8} = 4\ [kNm]$$

$$M_2 = -\mathfrak{M}_A + F_A\cdot\frac{7}{8}\ell - F\cdot\frac{3\ell}{4} = 4\ [kNm]$$

$$M_K^{\ell} = -\mathfrak{M}_B - q\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{4} + F_B''\cdot\frac{\ell}{2} = 20\ [kNm]$$




Slika br. 6

Provera rezultata momenta savijanja u tački K daje:

$$M_K^d = -F_3\cdot\frac{5}{8}\ell + F_C\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{5}{64}F\ell = 20\ [kNm]$$

što je već dobijena vrednost. Na delu grede BC gde dejstvuje kontinualno-jednakopodeljeno opterećenje analitički izraz za moment je:

$$M(z) = -\mathfrak{M}_B - \frac{1}{2}qz^2 + F_B''\cdot z = -28 + 40z - 8z^2 \quad ; \qquad 0 \le z \le 2$$

Ekstremna vrednost analitičkog izraza za moment savijanja bi bila u preseku odredjenom sa $z_0$:

$$\left.\frac{dM(z)}{dz}\right|_{z=z_0} = 40 - 16z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{40}{16} = 2{,}5\,[m] > 2\,[m]$$

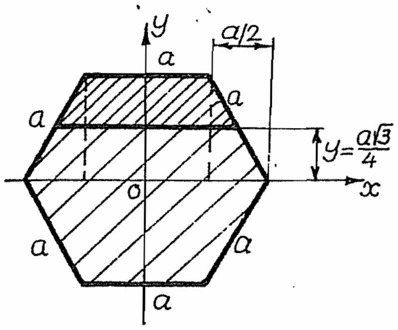
medjutim ta vrednost koordinate ne pripada intervalu u kome važi naš analitički izraz. Pomoću analitičkog izraza dobijamo i sledeće vrednosti momenta savijanja:

$$M_{(1)} = -28+40-8 = 4\ [kNm]$$

$$M_{(2)} = -28+80-8\cdot 4 = 20\ [kNm]$$

Na osnovu sračunatih vrednosti momenata savijanja u karakterističnim tačkama na slici br. 6 u razmeri $u_m$ nacrtan je dijagram momenata savijanja, a na istoj slici prikazan je i dajagram transverzalnih sila.

c) Sa dijagrama se vidi da je maksimalna vrednost napadnog momenta jednaka $M_{fmax} = M_K = 28\ [kNm]$. Ta vrednost je merodavna za dimenzionisanje nosača. Potreban otporni moment poprečnog preseka nosača je:




Slika br. 7

$$W_x = \frac{M_{fmax}}{\sigma_{df}} = \frac{28\cdot 10^2}{14} = 200\ [cm^3]$$

Otporni moment poprečnog preseka sa slike br. 7 je:

$$W_x = \frac{5}{8}a^3$$

i izražen je u funkciji stranice a. Izjednačavanjem poslednjeg izraza sa vrednošću potrebnog otpornog momenta nosača dobijamo jednačinu iz koje izračunavamo stranicu a poprečnog šestougaonog preseka:

$$a = \sqrt[3]{\frac{8W_x}{5}} = \sqrt[3]{\frac{8\cdot 200}{5}} = 4\sqrt[3]{5}\ [cm]$$

Aksijalni moment inercije tako dimenzionisanog poprečnog preseka je:

$$I_x = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^4 = \frac{5\sqrt{3}}{16}(4\sqrt[3]{5})^4 = 400\sqrt[3]{5}\sqrt{3}\ [cm^4]$$

d) Moment i transverzalna sila u naznačenom preseku P su:

$$F_{TP} = 64\ [kN]$$

$$M_{fP} = -\mathfrak{M}_B + F_B'\cdot\frac{\ell}{16} = -\frac{3}{64}F\ell = -12\ [kNm]$$

Statički moment dela površine poprečnog preseka iznad ordinata tačaka u kojima se traži tangencijalni napon (šrafirani deo površine na slici br. 7) je:

$$S_x' = a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{2}\frac{a\sqrt{3}}{4} + 2\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{11}{32}a^3 = 110\ [cm^3]$$

Proveru izračunatog statičkog momenta dela površine možemo izvršiti na sledeći način:

$$y_c' = \frac{(a'+2b)}{3(a'+b)}h' = \frac{\left(\frac{3}{2}a+2a\right)}{3\left(a+\frac{3}{2}a\right)}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{60}a$$

$$y_c = y_c' + \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{11\sqrt{3}}{30}a \quad ; \quad A = \frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{2}a\right)\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^2$$

$$S_x' = A\cdot y_c = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^2\cdot\frac{11\sqrt{3}}{30}a = \frac{11}{32}a^3$$

Širina poprečnog preseka na ordinati gde se traže naponi je: $\xi = 3a/2$ ,pa je osnos:

$$\left(\frac{S_x'}{\xi}\right) = \frac{110}{\frac{3}{2}\cdot 4\sqrt[3]{5}} = \frac{55}{3\sqrt[3]{5}} \quad [cm^2]$$

Komponentni naponi su sada:

I)tangencijalni komponentni napon:

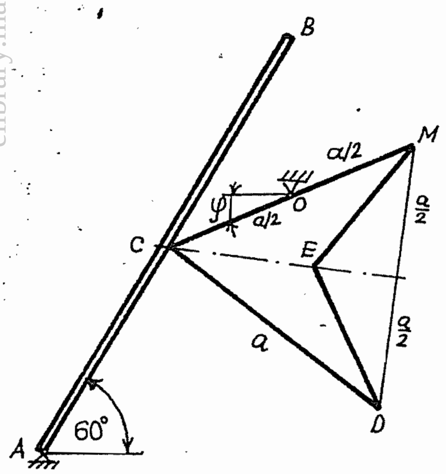
$$\tau = \frac{F_T}{I_x}\left(\frac{S_x'}{\xi}\right) = \frac{64}{400\sqrt[3]{5}\sqrt{3}}\cdot\frac{55}{3\sqrt[3]{5}} = \frac{44}{225}\sqrt{3}\sqrt[3]{5} \approx 0{,}582 \; [kN/cm^2]$$

II)normalni komponentni napon:

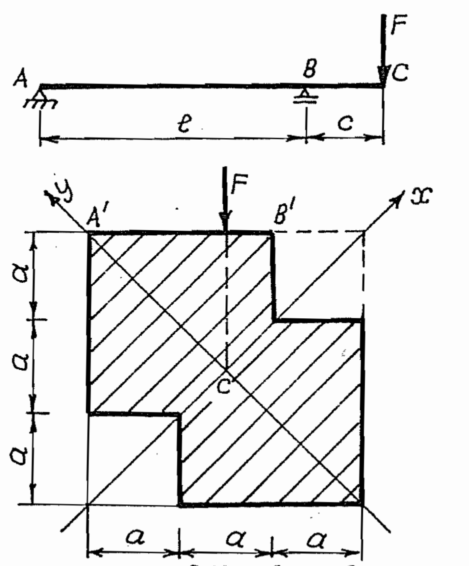
$$\sigma_f = \frac{M_f}{I_x}\cdot y = \frac{12\cdot 10^2}{400\sqrt[3]{5}\sqrt{3}}\cdot 4\sqrt[3]{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = 3 \; [kN/cm^2]$$

OKTOBARSKI ISPITNI ROK 1978 godine

PRVI ZADATAK: Štap AB, težine Q, dužine $2\ell$, zglobno vezan u tački A se svojim središtem oslanja o teme C tanke homogene pločice CDEM, težine $G = 2Q$, oblika jednakostraničnog trougla stranice a, sa isečenim jednakokrakim trouglom, tako da se težište dobijene pločice nalazi u temenu E isečenog trougla, zglobno učvršćene u tački O na sredini stranice CM. U ravnotežnom položaju štap AB zaklapa ugao od $60^\circ$ sa horizontom. Odrediti u ravnotežnom položaju otpore zglobova A i O, uzajamni pritisak štapa i pločice i ugao nagiba stranice CM pločice prema horizontu. Sistem je prikazan na slici br. 1.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Greda ABC sa prepustom BC, dužine $\ell + c$, datog poprečnog preseka kao na slici br. 2 opterećena je silom $F = 31\,[kN]$, koja prolazi kroz težište poprečnog preseka, a upravno na stranicu $A'B' = 2a = 12\,[cm]$.

a) Odrediti položaj neutralne ose preseka;

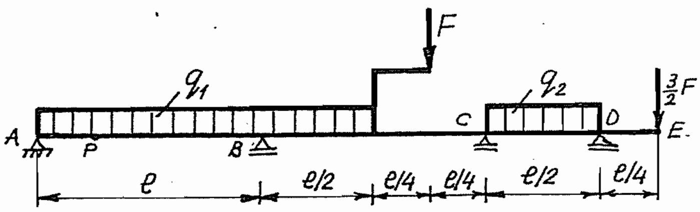
b) Izračunati ugib preseka C u kome dejstvuje sila. Za modul elastičnosti usvoji $E = 2 \cdot 10^4\,[kN/cm^2]$, $\ell = 4c = 4\,[m]$.

TREĆI ZADATAK: Za kontinualni nosač ABCDE, oslonjen u tačkama A, B, C i D, savojne krutosti $\mathcal{B}$, sa naznačenim opterećenjima kao na slici br.3 ,gde je: $F = 32$ [kN]; $q_1 \ell = q_2 \ell = F$; $\ell = 4$ [m]; odrediti:

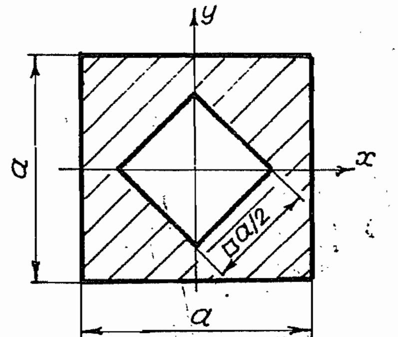
a) Statičke nepoznate, otpore oslonaca i izračunati momente savijanja u karakterističnim tačkama i zatim nacrtati statičke dijagrame nosača;

b) Dimenzionisati nosač profila prikazanog na slici br. 3a ako je dozvoljeni napon $\sigma_{df} = 12$ [kN/cm$^2$];

c) Izračunati normalni i tangencijalni napon u preseku P, gde je $\overline{AP} = \ell/4$, a u tačkama koje su udaljene $3a/8$ od neutralne ose;




Slika br. 3




Slika br. 3a

R E Š E N J A

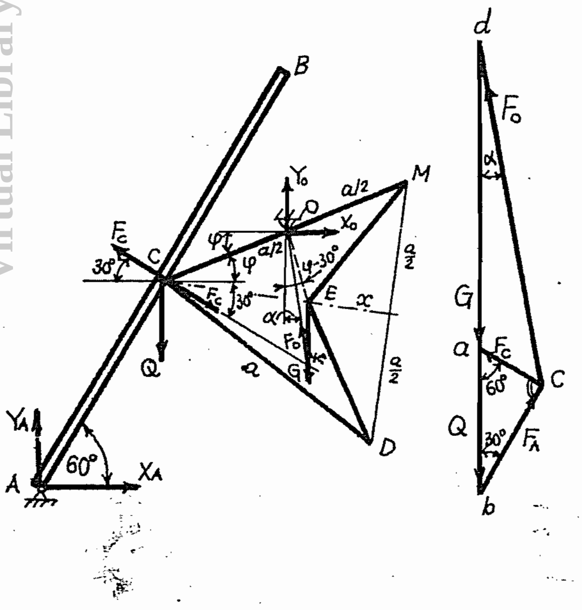
PRVI ZADATAK: Na slici br. 4 prikazan je sistem sa naznačenim aktivnim i otpornim silama koje dejstvuju na sistem. Položaj tačke E odredjen je dužinom x koju odredjujemo iz uslova da je težište pločice u tački E, odakle sledi da je:

$$\sum x_i A_i = A \cdot x$$

$$\frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{3} - \frac{ax}{2} \cdot \frac{x}{3} = \left(\frac{ah}{2} - \frac{ax}{2}\right) \cdot x$$

odnosno

$$x = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$




Slika br. 4

Postavimo koordinatni sistem xAy i postavimo jednačine ravnoteže štapa:

$$\sum M_A = F_c \cdot \frac{1}{2}\ell - Q \cdot \frac{1}{2}\ell \cos 60° = 0$$

$$\sum X_i = X_A - F_c \cdot \cos 30° = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q + F_c \cdot \sin 30° = 0$$

Rešavanjem dobijenih jednačina odredjujemo nepoznate: uzajamni pritisak $F_c$ štapa i ploče, i komponente $X_A$ i $Y_A$ otpora zgloba A i sam intenzitet otpora zgloba A i ugao $\alpha_A$ koji on zaklapa sa pravcem Ax ose: $F_C=\frac{Q}{2}$; $X_A=\frac{Q\sqrt{3}}{4}$; $Y_A=\frac{3Q}{4}$; $F_A=\frac{Q\sqrt{3}}{2}$; $\alpha_A=60^\circ$

Iz jednačina ravnoteže ploče na koju dejstvuje sila G težine ploče i sila $F_C$ uzajamnog pritiska ploče i štapa odredjujemo otpor zgloba O i ugao $\varphi$ koji stranica CM pločice zaklapa sa pravcem horizontale. Jednačine ravnoteže ploče su:

$$\sum M_O = F_C\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin(30^\circ+\varphi^\circ) - G\cdot\frac{a}{4}\cdot\sin(\varphi^\circ-30^\circ)=0$$

$$\sum Y_i = Y_o - G - F_C\sin 30^\circ = 0$$

$$\sum X_i = X_o - F_C\cdot\cos 30^\circ = 0$$

Rešavanjem prve jednačinę dobijemo ugao $\varphi$ na sledeći način:

$$\frac{2F_C}{G}(\sin 30^\circ\cos\varphi+\cos 30^\circ\sin\varphi)+\sin 30^\circ\cos\varphi-\cos 30^\circ\sin\varphi=0$$

$$tg\,\varphi=\frac{1+\frac{2F_C}{G}}{1-\frac{2F_C}{G}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad\varphi=60^\circ$$

Iz drugih dveju jednačina odredjujemo komponente $X_o$ i $Y_o$ i intenzitet otpora $F_o$ zgloba O i ugao $\alpha_o$ koji $F_o$ čini sa pravcem horizontale:

$$X_o = F_C\cdot\cos 30^\circ=\frac{G}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}G$$

$$Y_o = G+F_C\cdot\sin 30^\circ=\frac{9}{8}G$$

$$F_o=\sqrt{X_o^2+Y_o^2}=\frac{\sqrt{21}}{4}G$$

$$tg\,\alpha_o=\frac{Y_o}{X_o}=3\sqrt{3}=ctg\,\alpha\quad\Rightarrow\quad tg\,\alpha=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

Zadatak možemo rešiti i na drugi način koristeći to što svaki element sistema i štap i ploču napada ukupno po tri sile, tako da možemo koristiti uslov da su tri sile u ravnoteži ako čine zatvoren trougao sila, a napadne linije sila se seku u jednoj tački. Na slici br. 4 prikazan je trougao sila koje napadaju štap AB, i na njega nadovezan trougao sila koje napadaju ploču. Trougao sila abc je trougao sila Q, $F_A$ i $F_C$ koje dejstvuju na štap. Pravac sile Q nam je unapred poznat, dok je pravac sile $F_C$ upravan na štap u tački dodira štapa i ploče, i pravac otpora $F_A$ zgloba A odredjujemo iz uslova da se napadne linije sila moraju da seku u jednoj tački, a ta tačka je u ovom slučaju tačka C središte štapa AB. Sada je lako konstruisati trougao ako je poznata dužina jedne stranice i pravci drugih dveju stranica. Uglovi trougla abc su naznačeni na slici br. 4. Iz tog trougla sledi da je:

$$F_C=Q\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}Q\;;\qquad F_A=Q\cdot\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}Q\;;$$

Ploču takodje napadaju tri sile: sila G težine pločice, sila $F_C'$ pritiska štapa i sila $F_o$ otpora zgloba O. Trougao sila acd koji je zatvoren lako je nacrtati jer su nam poznati intenzitetti sila $F_C$ i G i njihovi pravci. Iz tog trougla gde su nam nepoznati ugao $\varphi$ i intenzitet sile $F_o$ primenom sinusne teoreme dobijamo sledeću vezu:

$$\frac{G}{\sin(60-\alpha)} = \frac{F_o}{\sin 120^\circ} = \frac{F_c}{\sin\alpha}$$

iz koje izračunavamo ugao $\alpha$

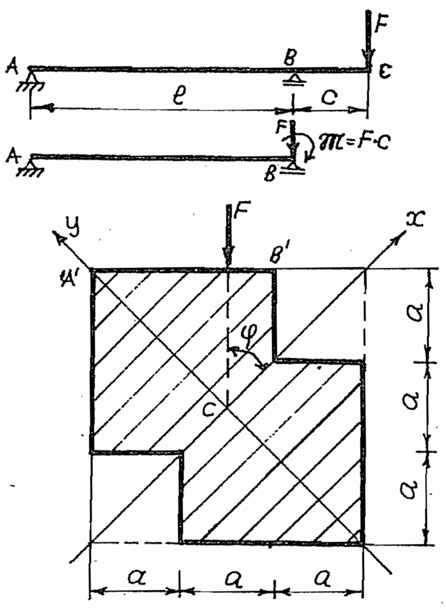
$$\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1) = 4$$

i $\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad ; \quad (90^\circ-\varphi+\alpha)+(30^\circ+\varphi)+(60^\circ-\alpha)=180^\circ$

i intenzitet sile $F_o$ :

$$F_o = \frac{F_c\cdot\sin 120^\circ}{\sin\alpha} = \frac{G}{4}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}/9}{\sqrt{1+3/81}}} = \frac{\sqrt{21}}{4}G$$

DRUGI ZADATAK: Na slici br. 5 prikazan je nosač - greda s prepustom i poprečni presek sa pravcem dejstva sile i naznačenim pravcima Cx i Cy glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka. Momenti inercije za glavne centralne ose inercije su:



Slika br. 5

$$I_x = \frac{1}{12}(3a)^4 - 2\cdot\frac{a^4}{12} = \frac{79}{12}a^4 = 8532\,[cm^4]$$

$$I_y = \frac{(3a)^4}{12} - 2\left[\frac{a^4}{12} + a^2(a\sqrt{2})^2\right]$$

$$I_y = \frac{31}{12}a^4 = 3348\,[cm^4]$$

i površina poprečnog preseka je:

$$A = (3a)^2 - 2a^2 = 7a^2 = 252\,[cm^2]$$

Jednačina neutralne ose kod kosog savijanja je

$$y = \left(-\frac{I_x}{I_y}\,\mathrm{ctg}\,\varphi\right)x$$

U našem slučaju ugao $\varphi$ koji zaklapa sila sa glavnim pravcem (1) je $45^\circ$, pa je ugao $\psi$ koji neutralna osa zaklapa sa pravcem Cx ose:

$$\mathrm{tg}\,\psi = -\frac{I_x}{I_y}\,\mathrm{ctg}\,\varphi = -\frac{\frac{79}{12}a^4}{\frac{31}{12}a^4}\cdot\mathrm{ctg}\,45^\circ = -\frac{79}{31}$$

za naš slučaj jednačina neutralne ose je: $y = -79x/31$ .

b) U slučaju kada se ravan savijanja poklapa sa ravni kroz koju prolaze geometrijska osa nedeformicane grede i jedna od glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka ugib slobodnog kraja C prepusta bi bio:

$$\bar{f}_c = \frac{\mathfrak{M}\cdot\ell}{3\mathcal{B}}\cdot c + \frac{Fc^3}{3\mathcal{B}} = \frac{Fc^2}{3\mathcal{B}}(\ell+c)\Big|_{c=\frac{\ell}{4}}$$

gde je $\mathcal{B}$ savojna krutost nosača koja uključuje aksijalni moment inercije poprečnog preseka za odgovarajuću osu savijanja. Kako se u našem slučaju radi o kosom savijanju, mi silu F možemo da razložimo u dve komponente $X = F\sqrt{2}/2$ i $Y = F\sqrt{2}/2$ koje izazivaju savijanje nosača oko osa Cy odnosno Cx za koje treba uzeti i odgovarajuće savojen krutosti. Ugibi nosača u tački C a u pravcima glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka su sada:

$$f_{cx} = \frac{5}{3\cdot 4^4}\,\frac{X\ell^3}{\mathcal{B}_y} = \frac{5\sqrt{2}}{3\cdot 2^9}\,\frac{F\ell^3}{E\cdot I_y}$$

$$f_{cy} = \frac{5}{3\cdot 4^4}\,\frac{Y\ell^3}{\mathcal{B}_x} = \frac{5\sqrt{2}}{3\cdot 2^9}\,\frac{F\ell^3}{E\cdot I_x}$$

Kako su uva dva komponentna ugiba medjusobno upravna to sledi da je rezultujući ugib slobodnog kraja C:

$$f_c = \sqrt{f_{cx}^2 + f_{cy}^2} = \frac{5\sqrt{2}}{3\cdot 2^9}\,\frac{F\ell^3}{\mathcal{B}_x}\,\sqrt{1+\left(\frac{\mathcal{B}_x}{\mathcal{B}_y}\right)^2}$$

$$f_c = \frac{5}{3\cdot 31\cdot 2^8}\,\frac{F\ell^3}{E\cdot I_x}\,\sqrt{3601}$$

gde smo iskoristili odnos savojnih krutosti

$$\frac{\mathcal{B}_x}{\mathcal{B}_y} = \frac{I_x}{I_y} = \frac{79}{31}$$

Savojna krutost nosača $\mathcal{B}_x$ za Cx osu poprečnog preseka je:

$$\mathcal{B}_x = E\cdot I_x = 2\cdot 10^4\cdot \frac{79}{12}\,6^4 = 17064\cdot 10^4\ [kNcm^2]$$

Numerička vrednost ugiba je sada:

$$f_c = \frac{5}{3\cdot 31\cdot 2^8}\cdot\frac{31\cdot 4^3}{17064}\,\sqrt{3601} \approx 0{,}1465\ [cm]$$

TREĆI ZADATAK: Na slici br. 6 prikazan je nosač ABCDE koji je oslonjen na četiri oslonca, pa je potrebno odrediti četiri nepoznata otpora oslonca, a imamo dve jednačine ravnoteže na raspolaganju, pa sledi da je nosač dva puta statički neodredjen. Kao statičke nepoznate najpogodnije je da izaberemo momente u osloncima B i C. Zato kontinualni nosač rastavimo na tri proste grede koje su opterećene odgovarajućim spoljašnjim opterećenjima, a uticaje jedne na drugu zamenimo momentima u osloncima, koje sada posmatramo kao spoljašnja opterećenja, takodje i sile sa prepusta redukujemo na gredu dodajući odgovarajuće redukcione momente, kao što je to na istoj slici prikazano. Iz uslova da su nagibi tangente na elastičnu liniju u osloncu sa leve i desne strane jednaki dobijamo dve jednačine iz kojih odredjujemo statičke nepoznate. Te jednačine pišemo za oslonac B i oslonac C. Te dve jednačine glase:

$$\beta_1 = \alpha_2 \qquad \frac{\mathfrak{M}_B\ell}{3\mathcal{B}} - \frac{q_1\ell^3}{24\mathcal{B}} = -\frac{\mathfrak{M}_B\ell}{3\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}_C\ell}{6\mathcal{B}} + \frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}} + \frac{3q_1\ell^3}{128\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}\ell}{24\mathcal{B}}$$

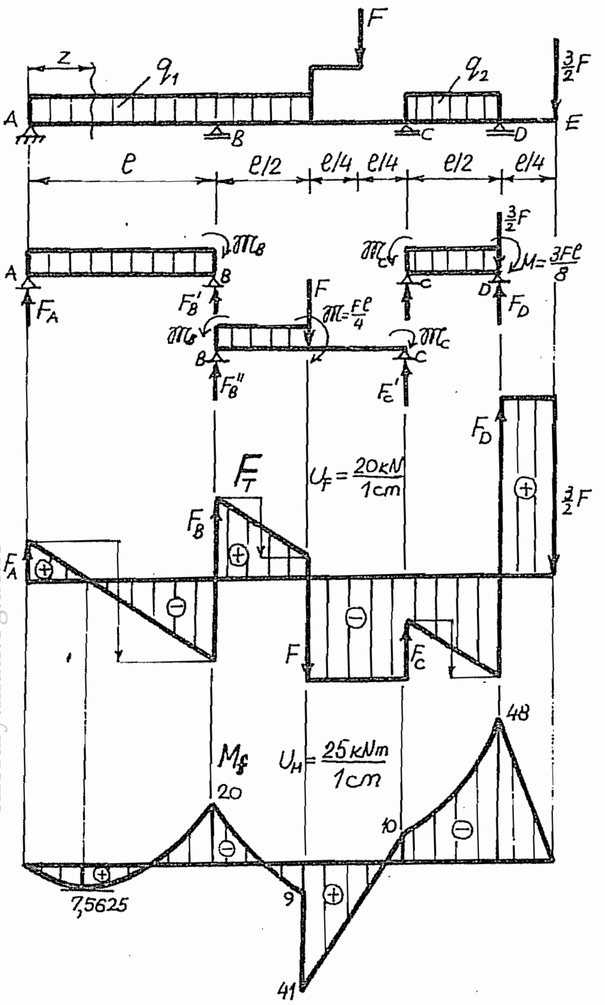
$$\beta_2 = \alpha_3 \qquad \frac{\ell}{6\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_B + 2\mathfrak{M}_C) - \frac{\mathfrak{M}\ell}{24\mathcal{B}} - \frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}} - \frac{7q_1\ell^3}{384\mathcal{B}} = -\frac{\ell/2}{6\mathcal{B}}(2\mathfrak{M}_C + M) + \frac{q_2(\ell/2)^3}{24\mathcal{B}}$$

Posle sredjivanja za zadate odnose opterećenja te jednačine su:

$$4\mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_C = \frac{45}{64} F\ell$$

$$\mathfrak{M}_B + 3\mathfrak{M}_C = \frac{25}{64} F\ell$$

odnosno za zadate numeričke podatke dobijamo sledeći sistem jednačina:




$$4\mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_C = 90$$

$$\mathfrak{M}_B + 3\mathfrak{M}_C = 50$$

Rešenjem dobijenog sistema jednačina odredjujemo statičke nepoznate $\mathfrak{M}_B$ i $\mathfrak{M}_C$:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{10}{64} F\ell = 20 \; [kNm]$$

$$\mathfrak{M}_C = \frac{5}{64} F\ell = 10 \; [kNm]$$

GREDA AB: Iz uslova ravnoteže ove grede slede otpori oslonaca:

$$F_A = \frac{1}{2} q_1 \ell - \frac{1}{\ell}\mathfrak{M}_B = \frac{11}{32} F = 11 \; [kN]$$

$$F_B' = \frac{1}{2} q_1 \ell + \frac{1}{\ell}\mathfrak{M}_B = \frac{21}{32} F = 21 \; [kN]$$

Analitički izraz za moment u poprečnom preseku udaljenom za z od oslonca A je:

$$M_{f(z)} = F_A \cdot z - \frac{1}{2} q_1 z^2 = 11z - 4z^2$$

pa su momenti u karakterističnim tačkama duž raspona prve grede:

$$M_{(1)} = 7 \; [kNm] \quad ; \quad M_{(2)} = 6 \; [kNm]$$

$$M_{(3)} = 3 \; [kNm] \quad ; \quad M_{(4)} = 20 \; [kNm]$$

$$F_{T(z)} = M'_{f(z)} = 11 - 8z = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{11}{8} \; [m]$$

$$M_{(z_0 = \frac{11}{8}[m])} = \frac{121}{16} = 7{,}5625 \; [kNm]$$

Slika br. 6

GRDEA BC: Otpori oslonaca ove grede su:

$$F_B'' = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} q_1 \ell + \frac{1}{2} F - \frac{1}{\ell}\mathfrak{M} + \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_C) = \frac{45}{64} F = 22{,}5 \; [kN]$$

$$F_C' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} q_1 \ell + \frac{1}{2} F + \frac{1}{\ell}\mathfrak{M} - \frac{1}{\ell}(\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_C) = \frac{51}{64} F = 25{,}5 \; [kN]$$

Analitički izraz za moment na delu grede gde dejstvuje kontinualno opterećenje je:

$$M_{(z)} = -\mathfrak{M}_B + F_B'' \cdot z - \frac{1}{2} q_1 z^2 = -20 + \frac{45}{2} z - 4z^2 \qquad 0 \le z \le 2$$

Momenti savijanja u karakterističnim tačkama su sada:

$$M_{(1)} = -1{,}5 \; [kNm] \quad ; \quad M_{(2)}^{\ell} = 9 \; [kNm] \quad ; \quad M_{(2)}^{d} = 41 \; [kNm]$$

GREDA CD: Otpori oslonaca grede su:

$$F_C'' = \frac{1}{4} q_2 \ell + \frac{2}{\ell}(\mathfrak{M}_c - M) = -\frac{11}{32} F = -11 \ [kN]$$

$$F_D = \frac{3}{2} F + \frac{1}{4} q_2 \ell - \frac{2}{\ell}(\mathfrak{M}_c - M) = \frac{75}{32} F = 75 \ [kN]$$

Analitički izraz za moment u funkciji koordinate z mereno od oslonca C je:

$$M(z) = -\mathfrak{M}_c + F_C'' \cdot z - \frac{1}{2} q z^2 = -10 - 11z - 4z^2$$

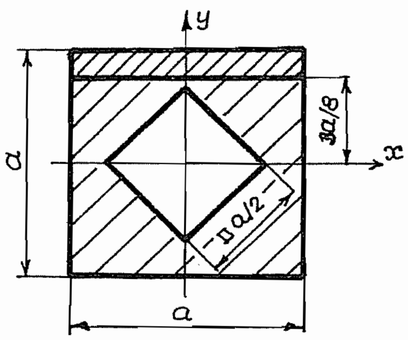
i moment savijanja na sredini grede je:

$$M(1) = -10 - 11 - 4 = -25 \ [kNm]$$

Pomoću sračunatih vrednosti momenata savijanja u karakterističnim tačkama nacrtan je dijagram momenata savijanja na slici br. 6. Takodje je nacrtan i dajagram transverzalnih sila.

b) Sa dijagrama se vidi da je maksimalna vrednost momenta savijanja $M_{fmax} = 48 [kNm]$, te je potrebna otporni moment poprečnog preseka nosača:

$$W_x = \frac{M_{f\,max}}{\sigma_{df}} = \frac{48 \cdot 10^2}{12} = 400 \ [cm^3]$$



Slika br. 7

Aksijalni moment inercije poprečnog preseka oblika kao na slici br. 7 je:

$$I_x = \frac{1}{12} a^4 - \frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\right)^4 = \frac{5}{64} a^4$$

dok je njegov otporni moment:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{5a^4/64}{a/2} = \frac{5}{32} a^3$$

pa je ivica a poprečnog preseka:

$$a = \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{5}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 400}{5}} = 8\sqrt[3]{5} \ [cm]$$

c) Transverzalna sila i moment savijanja u preseku P su:

$$F_{TP} = F_A - \frac{1}{4} q_1 \ell = 11 - 8 = 3 \ [kN]$$

$$M_{fP} = F_A \cdot \frac{\ell}{4} - q_1 \cdot \frac{\ell}{4} \cdot \frac{\ell}{8} = 7 \ [kNm]$$

Na udaljenju $y = 3a/8$ širina preseka je: $\xi = a = 8\sqrt[3]{5}$ [cm], dok je statički moment dela površina iznad naznačene ordinate:

$$S_x' = A \cdot y_c = a \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{7}{16} a = \frac{7}{2^7} a^3 = 140 \ [cm^3]$$

Aksijalni moment inercije preseka za odredjene dimenzije preseka je:

$$I_x = \frac{5}{64} a^4 = \frac{5}{64} \cdot 8^4 \cdot 5\sqrt[3]{5} = 1600\sqrt[3]{5} \ [cm^4]$$

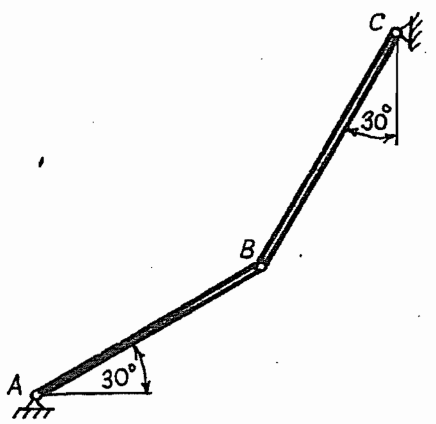
Normalni i tangencijalni komponentni naponi su:

$$\sigma = \frac{M_{fP}}{I_x} \cdot y = \frac{7 \cdot 10^2}{1600 \sqrt[3]{5}} \, 3\sqrt[3]{5} = \frac{21}{16} = 1{,}3125 \; [kN/cm^2]$$

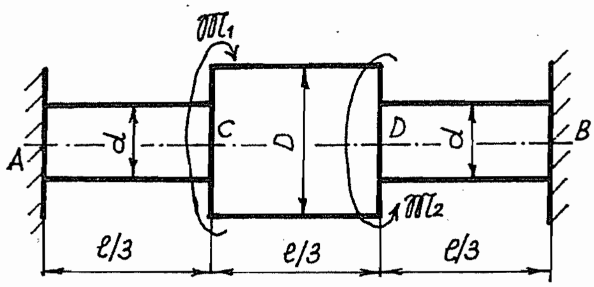
$$\tau = \frac{F_{TP} \cdot S_x'}{I_x \cdot \xi} = \frac{3 \cdot 140}{1600\sqrt[3]{5} \cdot 8\sqrt[3]{5}} = \frac{21\sqrt[3]{5}}{3200} \approx 0{,}01122 \; [kN/cm^2]$$

NOVEMBARSKI ISPITNI ROK 1978

PRVI ZADATAK: Dva homogena štapa AB i BC istih dužina vezani su medjusobno zglobom u tački C. Štap AB, težine G zglobno je vezan za pod u tački A, i zaklapa sa horizontalom ugao od $30^\circ$, a štap BC težine Q zglobno je vezan za zid u tački C, i zaklapa sa vertikalom ugao od $30^\circ$. Odrediti reakcije u zglobovima A, B i C. Sistem je prikazan na slici br. 1.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Obostrano uklešteno stepenasto vratilo ACDB u preseku C je opterećeno momentom $\mathfrak{M}_1 = 66$ [kNm], a u preseku D momentom $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1/2$, čiji je smer suprotan od smera dejstva momenta $\mathfrak{M}_1$. Vratilo je na delovima AC = $\ell/3$ i BD = $\ell/3$ istog prečnika d, dok je na delu CD prečnik vratila D. Ako je odnos $\lambda = d/D = 1/2$ odrediti:

a) reaktivne momente u uklještenjima $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$;

b) nacrtati dijagram momenta uvijanja vratila;

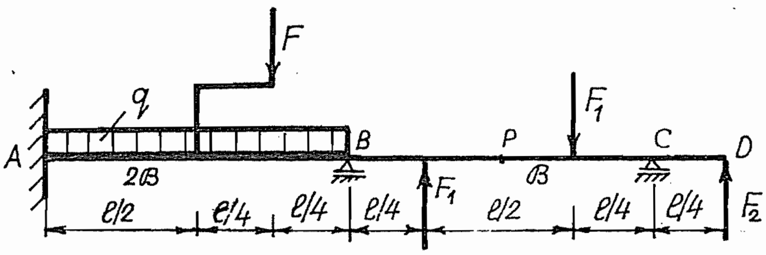
c) dimenzionisati vratilo ako je dozvoljeni napon na smicanje $\tau_{ds} = 9$ [kN/cm$^2$].

TREĆI ZADATAK: Kontinualni nosač ABCD savojne krutosti $2\mathcal{B}$ na delu AB i $\mathcal{B}$ na delu BD, opterećen je naznačenim opterećenjima. Ako je zadato : $F_1 = 2F/3$, $F_2 = 3F/2$, $q\ell = F$, $F = 48$ [kN], $\ell = 4$[m], odrediti:

a) statičke nepoznate i nacrtati statičke dijagrame nosača;

b) dimenzionisati nosač ako je izradjen od materijala čiji je dozvoljeni napon na savijanje $\sigma_{df} = 10$ [kN/cm$^2$], a poprečni presek mu je standardni Peiner-ov profil;

c) intenzitet normalnog i tangencijalnog napona u poprečnom preseku P koji se nalazi na polovini raspona BC, a u vlaknima preseka na udaljenju h/4 od neutralne ose. Nosač je prikazan na slici br. 3.

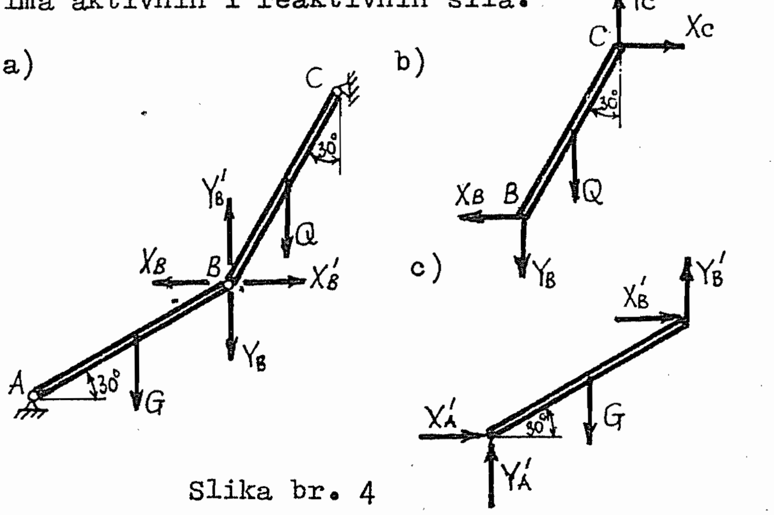



Slika br. 3



R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Na slici br. 4 a prikazan je sistem sa naznačenim opterećenjem - aktivnim silama. Sistem smo rastavili u zglobu B gde smo putem sile $F_B$ sa komponentama $X_B = X_B'$ i $Y_B = Y_B'$ zamenili uzajamni uticaj jednog štapa na drugi koji vrše putem zgloba kada su deo celine sistema. Na slici 4 b i c prikazani su štapovi sa naznačenim pravcima i smerovima aktivnih i reaktivnih sila.




Slika br. 4

Iz uslova ravnoteže prvog štapa sledi:

$$\sum X_i = -X_B + X_C = 0$$

$$\sum Y_i = Y_C - Y_B - Q = 0$$

$$\sum M_B^d = Y_C \frac{\ell}{2} - X_C \frac{\ell\sqrt{3}}{2} - Q \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

ili po izračunavanju:

$$X_B = X_C$$

$$Y_C = \frac{Q}{2} + X_B\sqrt{3}$$

$$Y_B = X_B\sqrt{3} - \frac{Q}{2}$$

Iz uslova ravnoteže drugog štapa slede jednačine ravnoteže:

$$\sum Y_i = 0 \qquad Y_A + Y_B' - G = 0$$

$$\sum X_i = 0 \qquad X_A + X_B' = 0$$

$$\sum M_A^d = 0 \qquad -X_B\cdot\frac{\ell}{2} + Y_B\,\ell\,\frac{\sqrt{3}}{2} - G\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

iz kojih izračunavamo nepoznate komponente otpora zglobova.

$$X_B = -X_A = X_C = \frac{\sqrt{3}}{4}(Q+G)$$

$$Y_A = \frac{1}{4}(G-Q) \quad ; \quad Y_B = \frac{1}{4}(Q+3G)$$

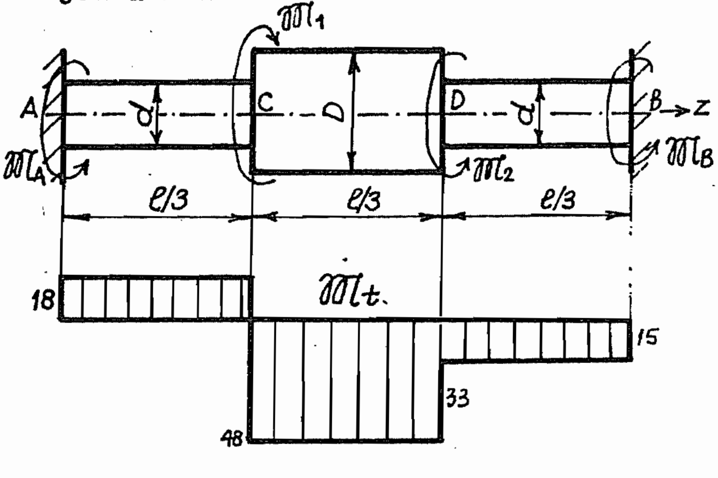
$$Y_C = \frac{1}{4}(5Q+3G)$$

DRUGI ZADATAK: Iz uslova ravnoteže momenata za z osu uključujući aktivne momente $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ i reaktivne momenta $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ ukleštenja, koji su naznačeni sa svojim smerovima na slici br. 5 dobijamo sledeću jednačinu:

$$\sum M_z = 0$$

$$\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = 0$$

$$\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = 33\,[kNm]$$




Slika br. 5

Zadatak je jedanput statički neodredjen jer iz jedne statičke jednačine ne možemo odrediti dva nepoznata momenta. Zamislimo zato da smo uklonili ukleštenje u preseku A pa da nebismo promenili deformaciono stanje vratila potrebno je da postavimo uslov da je ugao uvijanja na slobodnom kraju tako dobijenog vratila jednak nuli. Iz tog uslova dobijamo drugu jednačinu

$$\theta_A = 0$$

$$\mathfrak{M}_A\left[\frac{2\ell/3}{GI_{o_1}} + \frac{\ell/3}{GI_{o_2}}\right] - \mathfrak{M}_1\left[\frac{\ell/3}{GI_{o_1}} + \frac{\ell/3}{GI_{o_2}}\right] + \mathfrak{M}_2\,\frac{\ell/3}{GI_{o_1}} = 0$$

iz koje odredjujemo nepoznati moment ukleštenja $\mathfrak{M}_A$:

$$\mathfrak{M}_A = \frac{1}{2+\psi}\left\{(1+\psi)\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2\right\}$$

u kome je sa $\psi$ označen odnos momenata inercije poprečnih preseka vratila koji ima vrednost:

$$\psi = \frac{I_{o_1}}{I_{o_2}} = \frac{\dfrac{d^4\pi}{32}}{\dfrac{D^4\pi}{32}} = \left(\frac{d}{D}\right)^4 = \lambda^4 = \frac{1}{16}$$

koja unošenjem u izraz za $\mathfrak{M}_A$ daje:

$$\mathfrak{M}_A = \frac{17\mathfrak{M}_1 - 16\mathfrak{M}_2}{33}$$

Za zadate vrednosti opterećenja - momenata $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ reaktivni momenti su:

$$\mathfrak{M}_A = 18[kNm] \quad ; \quad \mathfrak{M}_B = 33 - \mathfrak{M}_A = 15[kNm]$$

b) Na slici br. 5 prikazan je dijagram momenata uvijanja vratila sa naznačenim vrednostima.

c)Da bi smo izvršili dimenzionisanje vratila potrebno je odrediti ekstremne vrednosti momenata uvijanja ,a s obzirom da se radi o stepenastom vratilu izvršiti analizu koji će od tih momenata biti merodavan za dimenzionisanje.Odnos momenata inercije poprečnih preseka vratila je 1:16,dok je odnos otpornih momenata u odnosu na pol jednak 1:8,dok je odnos najvećih momenata uvijanja 18:48 = 3:8 te je očigledno da je za dimenzionisanje vratila merodavan maksimalni moment uvijanja $\mathfrak{M}_{max}$ = 18 [kNm] na užem delu vratila.Iz jednakosti potrebnog otpornog momenta i momenta kružnog poprečnog preseka dobijamo:

$$W_{o1} \approx \frac{d^3}{5} = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{\tau_{dt}} = \frac{18 \cdot 10^2}{9} = 200[cm^3] \quad \text{odnosno} \quad d = 10\ [cm].$$

Kako je zadat odnos prečnika to je D = 20[cm] prečnik poprečnog preseka vratila na delu većeg prečnika.

Proveru našeg zaključka možemo izvršiti izračunavanjem potrebnog prečnika poprečnog preseka na delu gde je presek vratila veći i gde je maksimalni moment uvijanja 48[kNm]:

$$W_{o2} = \frac{1}{5}D^3 = \frac{48 \cdot 10^2}{9}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{24}{9} \cdot 10^3} = 10\sqrt[3]{\frac{8}{3}} < 20\ [cm]$$

Posle izračunavanja zaključujemo da je taj prečnik manji od prethodno dobijenog,čime bi se za uži deo vratila dobio prečnik manji od potrebnog.

TREĆI ZADATAK:Nosač na slici br. 6 je dva puta statički neodredjen.Kao statičke nepoznate izaberimo moment uklještenja $\mathfrak{M}_A$ i reaktivni moment $\mathfrak{M}_B$ ,te nosač rastavimo na dve proste grede kao što je to prikazano na već pomenutoj slici.Sile na prepustima redukujemo na početke prepusta u kojima dobijamo redukcione spregove i premeštene sile koje smo redukovali. Iz uslova da je nagib tangente na elastičnu liniju u preseku A jednak nuli dobijamo sledeći jednačinu:

$\alpha_A = 0$

$$-\frac{\mathfrak{M}_A \ell}{3\cdot 2\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{6\cdot 2\mathcal{B}} + \frac{F\ell^2}{16\cdot 2\mathcal{B}} + \frac{q\ell^3}{24\cdot 2\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}\ell}{24\cdot 2\mathcal{B}} = 0$$

odnosno

$$2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = \frac{9}{16} F\ell$$

Iz uslova da je nagib tangente na elastičnu liniju grede AB u tačku B jednak nagibu tangente na elastičnu liniju grede BC u tački B dobijamo drugu jednačinu za odredjivanje statičkih nepoznatih:

$\beta_B = \alpha_B$

$$\frac{\mathfrak{M}_A \ell}{6\cdot 2\mathcal{B}} + \frac{\mathfrak{M}_B \ell}{3\cdot 2\mathcal{B}} - \frac{F\ell^2}{16\cdot 2\mathcal{B}} - \frac{\mathfrak{M}\ell}{24\cdot 2\mathcal{B}} - \frac{q\ell^3}{24\cdot 2\mathcal{B}} = -\frac{\mathfrak{M}_B \ell}{3\mathcal{B}} + \frac{M\ell}{6\mathcal{B}} - \frac{7}{128}\frac{F_1\ell^2}{\mathcal{B}} + \frac{5F_1\ell^2}{128\mathcal{B}}$$

odnosno:

$$\frac{\mathfrak{M}_A}{12} + \frac{\mathfrak{M}_B}{6} + \frac{\mathfrak{M}_B}{3} = \frac{F\ell}{32} + \frac{F\ell}{192} + \frac{4F\ell}{48} - \frac{4F\ell}{128\cdot 3}$$

Rešavanjem dobijenih jednačina:

$$2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = \frac{9}{16} F\ell$$

$$\mathfrak{M}_A + 6\mathfrak{M}_B = \frac{21}{16} F\ell$$

za statičke nepoznate dobijamo:

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B = \frac{3}{16} F\ell = 36 \ [kNm]$$

Za odredjivanje nagiba nad osloncima od sila $F_1$ koristili smo sledeći obrazac

$$\alpha = \frac{F\ell^2}{6\mathcal{B}}\cdot\frac{a}{\ell}\cdot\frac{b}{\ell}\left(1+\frac{b}{\ell}\right)$$

u kome je trebalo staviti da je $a = \ell/4$ i $b = 3\ell/4$, pa su se dobile sledeće vrednosti za :

$$\alpha' = -\frac{F_1\ell^2}{6\mathcal{B}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\left(1+\frac{3}{4}\right) = -\frac{7F_1\ell^2}{128\mathcal{B}} \ ; \quad \alpha'' = \frac{F_1\ell^2}{6\mathcal{B}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{5F_1\ell^2}{128\mathcal{B}}$$

Iz uslova ravnoteže grede AB kada na nju dejtvuju opterećenja koja su zadata i njima pridruženi moment uklještenja i reaktivni moment dobijamo otpore oslonaca:

$$F_A + F_B' = F + q\ell = 2F$$

$$F_A\cdot\ell - \mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B + \mathfrak{M} - F\frac{\ell}{2} - q\ell\cdot\frac{\ell}{2} = 0$$

$$F_A = \frac{3}{4}F = 36 [kN] \ ; \quad F_B' = \frac{5}{4}F = 60 \ [kN]$$

Iz uslova ravnoteže grede BC ,kada na nju dejstvuje pored spoljašnjeg opterećenja i reaktivni moment $\mathfrak{M}_B$ dobijamo otpore oslonaca:

$$F_B''\ell - \mathfrak{M}_B - M + F_1\frac{\ell}{2} = 0 \qquad F_B'' = \frac{11}{48}F = 11\ [kN]$$

$$F_C = \frac{3}{2}F + F_B'' = 83\ [kN]$$

Momenti savijanja u karakterističnim tačkama nosača, koje su na slici br. 6 naznačene, su:

$$M_F^{\ell} = -\mathfrak{M}_A + F_A\frac{\ell}{2} - q\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{4} = 12\ [kNm]$$

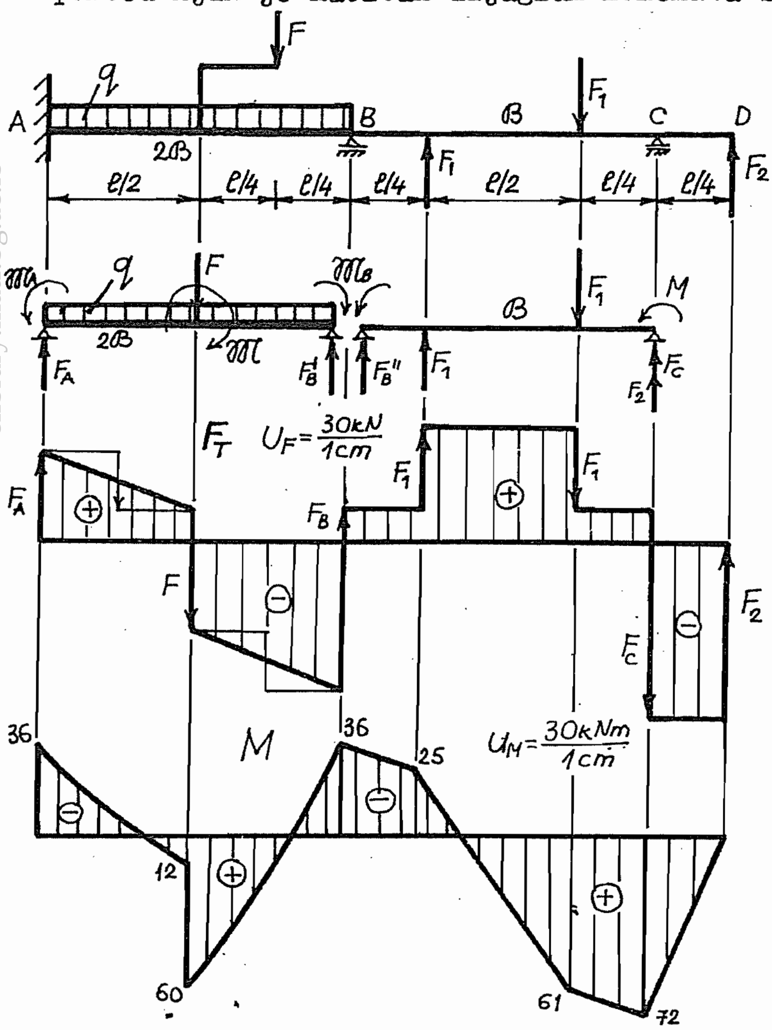
$$M_F^{d} = M_F^{\ell} + \mathfrak{M} = 60\ [kNm]$$

$$M_{F_1} = -\mathfrak{M}_B + F_B''\cdot\frac{\ell}{4} = -25\ [kNm]$$

$$M_{F_1}' = -\mathfrak{M}_B + F_B''\frac{3\ell}{4} + F_1\frac{\ell}{2} = 61\ [kNm]$$

$$M = 72\ [kNm]$$

i pomoću njih je nacrtan dijagram momenata savijanja nosača na slici br. 6.




Slika br. 6

b) Maksimalni moment savijanja je $M_{f\ max} = 72$ [kNm] i on je merodavan za dimenzionisanje. Potrebni otporni moment je:

$$W_x = \frac{M_{f max}}{\sigma_{df}} = \frac{72\cdot 10^2}{10} = 720\ [cm^3].$$

i iz Tablica za Peiner-ove profile nalazimo da je prvi veći standardni profil IP22 koji usvajamo za deo nosača BD, i on ima otporni moment $W_x = 732$ [$cm^3$] i moment inercije za osu savijanja $I_x =$ $= 8050$ [$cm^4$]. Kako je na delu AB savojna krutost dva puta veća to je sada potrebni moment inercije $I_{x2} = 2\ I_x =$ $= 16100$ [$cm^4$] te prema toj vrednosti usvajamo za taj deo nosača profil IP28 .

c) Komponentni naponi u poprečnom preseku su:

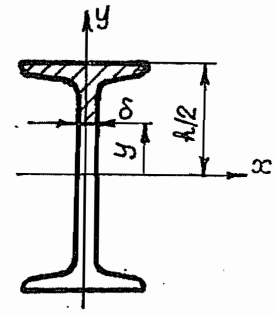
$$\sigma_f = \frac{M_F}{I_x}y = \frac{18\cdot 10^2\cdot 5{,}5}{8050} = 1{,}23\ [kN/cm^2]$$

$$\tau_f = \frac{F_P \cdot S_x'}{I_x \cdot \xi} = \frac{43 \cdot 396{,}8}{8050 \cdot 1} = 2{,}12 \quad [kN/cm^2]$$

jer su:moment i transverzalna sila u tom preseku:

$$M_P = -\mathfrak{M}_B + F_B'' \cdot \frac{\ell}{2} + F_1 \frac{\ell}{4} = 18\,[kNm]$$

$$F_P = F_B'' + F_1 = 43\,[kN]$$




Statički moment dela preseka iznad tačaka u kojima se traže momenti je:

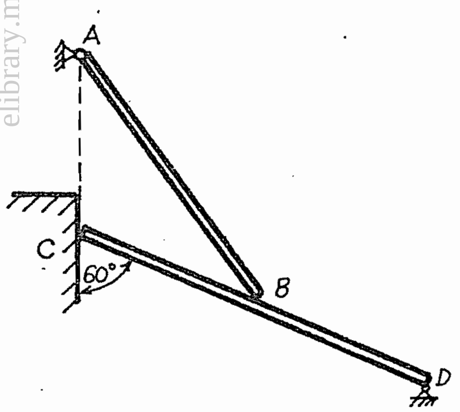
$$S_x' = S_{1/2} - \frac{h}{4} \cdot \delta \cdot \frac{h}{8} = 412 - 5{,}5 \cdot 1 \cdot 2{,}75 = 396{,}875\,[cm^3]$$

Slika br. 7

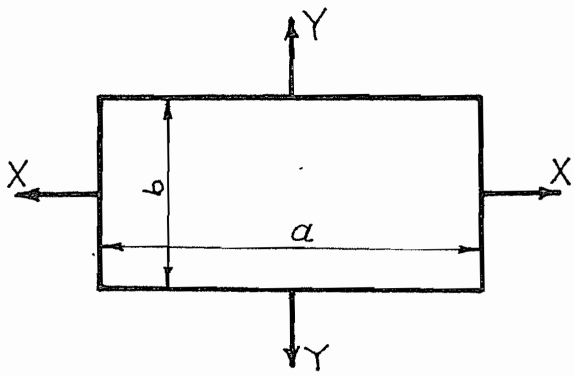
Ordinate tačaka su: $y = h/2 = 5{,}5\,[cm]$, dok je širina profila na tom mestu $\xi = \delta = 1\,[cm]$.

DECEMBARSKI ISPITNI ROK 1978

PRVI ZADATAK: Homogeni štap AB, dužine $\ell\sqrt{3}$, težine G, zglobno je vezan u tački A, a oslanja se u tački B na sredini homogenog štapa CD, dužine $2\ell$, težine Q, koji je tački D zglobno vezan za pod, a u tački C se oslanja na vertikalni zid, zaklapajući sa pravcem zida ugao $60^{\circ}$. U ravnotežnom položaju tačke A i C su na istoj vertikali. Odrediti otpore zglobova A i D, otpor zida u tački C i uzajamni pritisak štapova u tački B dodira. Sisatem je prikazan na slici br. 1.




Slika br. 1

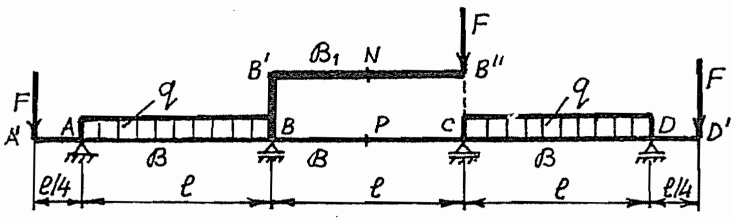



Slika br.2

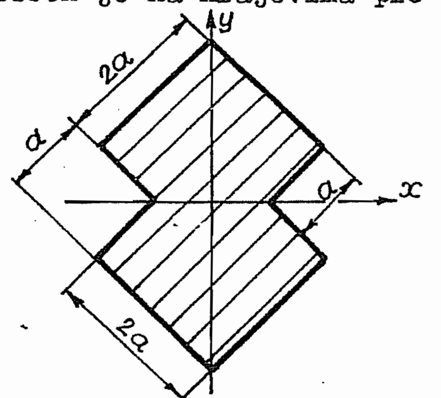
DRUGI ZADATAK: Pravougaona homogena tanka ploča, sa slike br. 2 stranica a = 2 [m] i b= 1[m], debljine $\delta$ = 2 [cm] zategnuta je silama X = 18oo [kN]. i Y = 1200 [kN] jednakoraspodeljenih po odgovarajućim stranicama ploče, a u pravcima upravno na te strane. Odrediti: a) napone u poprečnom i uzdužnom preseku ploče; b) dilatacije u uzdužnom i poprečnom pravcu i odgovarajuće dimenzije ploče u napregnutom stanju; c) za naznačeno stanje naprezanja ploče nacrtati Mohr-ov krug; d) odrediti ugao $\varphi$ pod kojim treba postaviti kosi presek u kome je tangencijalni napon jednak polovini vrednosti maksimalnog tangencijalnog napona.

TREĆI ZADATAK: Kontinualni nosač A´ABCDD´, oslonjen u tačkama

A,B,C i D konstantne savojne krutosti $\mathcal{B}$ i sa prepustom BB'B" ,savojne krutosti $\mathcal{B}_1$ dužina BB'= $\ell/4$, BB" = $\ell$ = 4[m],raspona AB = BC= = CD = $\ell$ sa prepustima A'A = BB'= $\ell/4$ opterećen je na krajevima pre-




Slika br. 3




Slika br. 3 a

pusta A',D', B" jednakim silama F = 30 [kN],dok je duž prvog raspona AB i trećeg raspona CD,opterećen jednakim jednakopodeljenim kontinualnim opterećenjima q = F/$\ell$ .Odrediti:

a)Statičke nepoznate i skicirati statičke dijagrame nosača i prepusta;

b) dimenzionisati nosač i prepust ako je poprečni presek nosača i prepusta oblika kao na slici br. 3 b ,ako je $\sigma_{df}$ = 10 [kN/cm$^2$].

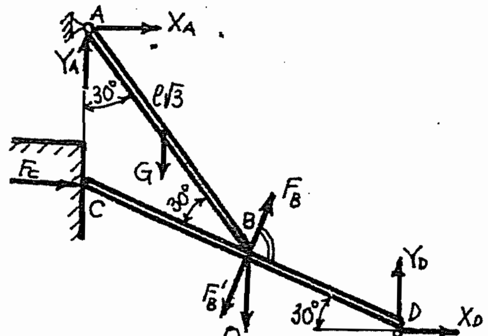
c) izračunati normalne napone u presecima N i P ,sredinama prepusta odnosno nosača,a u vlaknima preseka na udaljenju $a\sqrt{2}/2$ od neutralne ose;zatim izračunati tangencijalne napone u tim presecima,a u vlaknima na neutralnoj osi.

R E Š E N J A

PRVI ZADATAK:Na slici br.4 prikazan je sistem štapova sa naznačenim aktivnim silama G i Q i otpornim silama:$F_B$ ,koja je upravna na pravac štapa CD; $F_C$ ,koja je upravna na pravac zida ;$F_A$ sa komponentama $X_A$ i $Y_A$ ,otpor zgloba A ; $F_D$ sa komponentama $X_D$ i $Y_D$ otpor zgloba D.

Posmatraćemo ravnotežu štapova pojedinačno uzimajući u obzir uzajamni uticaj jednog štapa na drugi.

Iz uslova ravnoteže štapa I -AB dobijamo sledeće jednačine:




Slika br.4

$$\sum X_i = X_A + F_B \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A - G + F_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\sum M_A = G \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - F_B \cdot \ell\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Iz kojih izračunavamo nepoznate :

$$F_B = \frac{G\sqrt{3}}{6}$$

$$X_A = -\frac{G\sqrt{3}}{12} \quad ; \quad Y_A = \frac{3}{4} G$$

Iz uslova ravnoteže drugog štapa CD pišemo sledeće jednačine:

$$\sum X_i = F_C + X_D - F_B' \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\sum Y_i = Y_D - Q - F_B' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\sum M_D = F_C \cdot 2\ell \cdot \frac{1}{2} - F_B' \ell - Q \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 0$$

Iz kojih dobijamo preostale nepoznate otporne sile:

$$F_C = \frac{G+3Q}{6}\sqrt{3}$$

$$X_D = -\frac{G+6Q}{12}\sqrt{3} \quad ; \quad Y_D = \frac{4Q+G}{4}$$

DRUGI ZADATAK:Površine poprečnih preseka ploče su:

$$A_x = b \cdot \delta = 100 \cdot 2 = 200\,[cm^2] \; ; \; A_y = a \cdot \delta = 200 \cdot 2 = 400\,[cm^2]$$

pa su normalni naponi u tim presecima:

$$\sigma_x = \frac{X}{A_x} = \frac{1800}{200} = 9\,[kN/cm^2] \; ; \; \sigma_y = \frac{Y}{A_y} = \frac{1200}{400} = 3\,[kN/cm^2]$$

a oni su istovremeno i glavni naponi.Ako postavimo kosi presek pod uglom $\varphi$ u odnosu na poprečni presek pravcu x ,kao što je to prikazano na slici br.5 možemo napisati izraze za komponentne napone u tome preseku:

a) za normalni napon

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\varphi = 6 + 3\cos 2\varphi$$

b) za tangencijalni komponentni napon

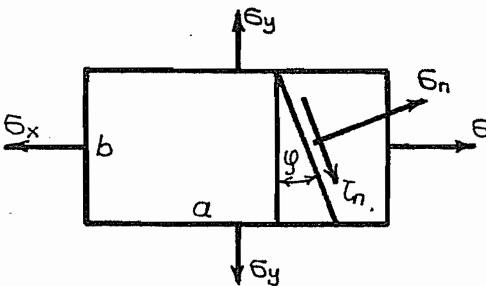
$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\varphi = 3\sin 2\varphi$$

Mohr-ov krug napona ima oblik:

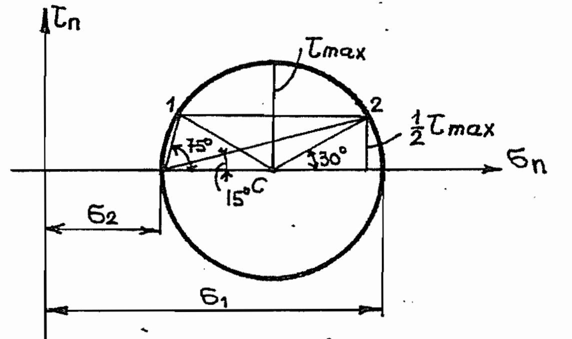
$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]^2 + \tau_n^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right]^2$$

$$(\sigma_n - 6)^2 + \tau_n^2 = 9$$

Mohr-ov krug je krug u koordinatnom sistemu ( $\sigma_n$, $\tau_n$) ,poluprečnika $R = 6\,[kN/cm^2]$ i sa središtem u tački C ( 6,0),kao što je to prikazano na slici br. 6 .




Slika br. 5




Slika br. 6

Najveći tangencijalni napon je: $\tau_{n\,max} = 3\,[kN/cm^2] = 3 \sin 2\varphi$ .
Iz uslova da je tangencijalni napon u nekom preseku jednak polovini maksimalne njegove vrednosti dobijamo:

$$\sin 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi$$

Ugao pod kojim treba postaviti kosi presek tako da u njemu tangencijalni napon bude jednak polovini njegove maksimalne vrednosti je jednak 15° ili 75°. To se može isto uočiti sa slike br. 6 bez računanja.

Specifične dilatacije u pravcima koordinatnih osa su:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{1}{2\cdot 10^4}\left(9 - \frac{1}{3}\cdot 3\right) = 4\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = \frac{1}{2\cdot 10^4}\left(3 - \frac{1}{3}\cdot 9\right) = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\mu(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2\cdot 10^4}\cdot\frac{1}{3}(9+3) = 2\cdot 10^{-4}$$

Vidimo da u pravcu y ose za posmatrano naponsko i deformaciono stanje nema dilatacije ploče,odnosno njena dužina se ne menja.

TREĆI ZADATAK:Na slici br. 7 prikazan je nosač sa odgovarajućim sistemom greda na koji se može rastaviti.Vidi se da je nosač dva puta statički neodredjen i kao nepoznate se mogu izabrati reaktivni momenti nad osloncima.Sile koje dejstvuju na slobodnim krajevima prepusta redukujemo na odgovarajuće oslonce gde se dobijaju i redukcioni momenti:u tački B redukcioni moment $\mathfrak{M}'$ ,i u tački D redukcioni moment $\mathfrak{M} = F\ell/4$ , i u tački A isti takav sa odgovarajućim smerom naznačenim na slici.Statičke nepoznate $\mathfrak{M}_B$ i $\mathfrak{M}_C$ odredjujemo iz uslova da su nagibi tangente na elastičnu liniju u osloncima B odnosno C jednaki sa obe strane oslonaca. Iz tih uslova slede jednačine:

$$\beta_B = \alpha_B$$

$$\frac{\ell}{6\mathcal{B}}(\mathfrak{M} + 2\mathfrak{M}_B) - \frac{q\ell^3}{24\mathcal{B}} = -\frac{\ell}{6\mathcal{B}}(2\mathfrak{M}_B - 2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}_C)$$

$\beta_c = \alpha_c$

$$\frac{\ell}{6\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}' + 2\mathfrak{M}_C) = -\frac{\ell}{6\mathcal{B}}(2\mathfrak{M}_C + \mathfrak{M}) + \frac{q\ell^3}{24\mathcal{B}}$$

odnosno posle sredjivanja taj sistem jednačina ima sldeći oblik:

$$4\mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_C = \frac{q\ell^2}{4} + 7\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{M}_B + 4\mathfrak{M}_C = 3\mathfrak{M} + \frac{q\ell^2}{4}$$

čijim rešavanjem nalazimo statičke nepoznate-reaktivne momente $\mathfrak{M}_B$ i $\mathfrak{M}_C$ :

$$\mathfrak{M}_B = \frac{1}{20}q\ell^2 + \frac{5}{3}\mathfrak{M} = 56\,[kNm]$$

$$\mathfrak{M}_C = \frac{1}{20}q\ell^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{M} = 16\,[kNm]$$

Otpori oslonaca iz uslova ravnoteže pojedinih greda su:

$$F_A = F + \frac{q\ell}{2} + \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_B}{\ell} = \frac{77}{2}\,[kN]$$

$$F_B' = \frac{1}{2}q\ell - \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_B}{\ell} = \frac{43}{2}\,[kN]$$

$$F_B'' = F + \frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_C - \mathfrak{M}'}{\ell} = 10\,[kN]$$

$$F_C' = -\frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_C - \mathfrak{M}'}{\ell} = 20\,[kN]$$

$$F_C'' = \frac{1}{2}q\ell + \frac{\mathfrak{M}_C - \mathfrak{M}}{\ell} = \frac{23}{2}\,[kN]$$

$$F_D = F + \frac{1}{2}q\ell - \frac{\mathfrak{M}_C - \mathfrak{M}}{\ell} = \frac{97}{2}\,[kN]$$

Označimo sa z koordinatu poprečnog preseka mereno od oslonca A za prvu gredu AB, pa je analitički izraz za moment savijanja u tom preseku:

$$M_{1(z)}^{\ell} = F_A \cdot z - \mathfrak{M} - F\cdot z - \frac{1}{2}qz^2 = \frac{17}{2}z - 30 - \frac{15}{4}z^2$$

Iz uslova da je transverzalna sila jednaka nuli dobijamo položaj preseka u kome moment ima ekstremnu vrednost na tom delu nosača:

$$\left.\frac{dM_1(z)}{dz}\right|_{z=z_0'} = \frac{17}{2} - \frac{15}{2}z_0' = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0' = \frac{17}{15} = 1{,}13\,[m]$$

i njena vrednost je:

$$M_1\left(\frac{17}{15}\right) = \frac{17}{2}\cdot\frac{17}{15} - 30 - \frac{15}{4}\left(\frac{17}{15}\right)^2 = -\frac{1511}{60} \approx -25{,}25\,[kNm]$$

Označimo sada sa z koordinatu preseka mereno od oslonca D nalevo za treću gredu CD, pa je analitički izraz za napadni moment na tom delu nosača:

$$M_{2}^{d}(z) = -\mathfrak{M} - Fz + F_D\cdot z - \frac{1}{2}qz^2 = \frac{37}{2}z - 30 - \frac{15}{4}z^2$$

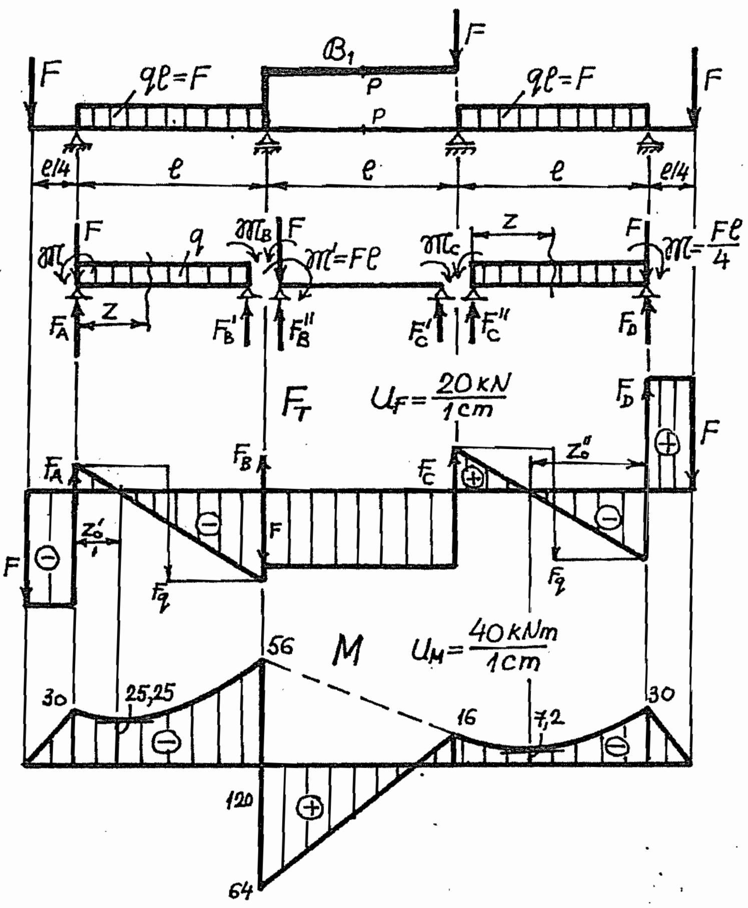
Položaj preseka u kom je ekstremna vrednost napadnog momenta na tom delu nosača dobijamo iz uslova da je transverzalna sila jednaka nuli:

$$\left.\frac{dM_2}{dz}\right|_{z=z_0''} = \frac{37}{2} - \frac{15}{2}z_0'' = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0'' = \frac{37}{15} = 2{,}466\,[m]$$

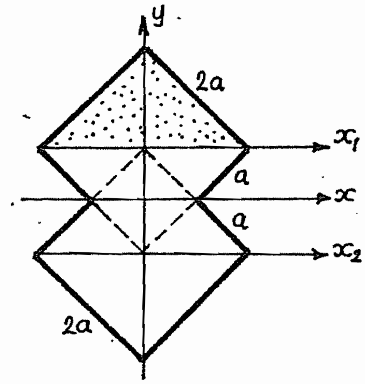
Ekstremna vrednost momenta je sada:

$$M_2\left(\tfrac{37}{15}\right) = -30 + \frac{37}{2}\,\frac{37}{15} - \frac{15}{4}\left(\frac{37}{15}\right)^2 = -\frac{461}{60} \approx -7{,}2\ [kNm]$$

Na osnovu dobijenih rezultata o momentima u karakterističnim tačkama dobijen je dijagram momenata savijanja na slici br. 7. Na istoj slici prikazan je i dijagram transverzalnih sila.




Slika br. 7




Slika br. 8

b) Sa dijagrama napadnih momenata se vidi da je ekstremna vrednost momenta koja je najveća na celoj dužini nosača $M_{f\,max} = 64$ [kNm], te je ona merodavna za dimenzionisanje. Potreban otporni moment je:

$$W_x = \frac{M_{f\,max}}{\sigma_{df}} = \frac{64 \cdot 10^2}{10} = 640\ [cm^3]$$

Aksijalni moment inercije poprečnog preseka sa slike br. 8 je:

$$I_x = 2\cdot\frac{(2a)^4}{12} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 (2a)^2 \cdot 2 - \frac{a^4}{12} = \frac{79}{12}\,a^4$$

dok je otporni moment:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{\frac{79}{12}a^4}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = \frac{79\sqrt{2}}{36}\,a^3$$

Iz jednakosti poslednjeg izraza za otporni moment potrebnog preseka i potrebnog otpornog momenta dobijamo sledeće:

$$640 = \frac{79\sqrt{2}}{36}\,a^3$$

odakle izračunavamo da je $a = 5{,}92$ [cm], čime smo izvršili dimenzionisanje nosača.

Statički moment dela površine iznad ordinata $a\sqrt{2}/2$ je:

$$S_x' = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot 2a\sqrt{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}a\sqrt{2}\right) = \frac{5a^3\sqrt{2}}{3} = 486,66\ [cm^3]$$

dok je statički moment polovine poprečnog preseka za neutralnu osu savijanja:

$$S_x'' = (2a)^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{25}{12} a^3\sqrt{2} = 607\ [cm^3]$$

Aksijalni moment inercije poprečnog preseka nosača za usvojene dimenzije preseka pri dimenzionisanju ima vrednost:

$$I_x = \frac{79}{12} \cdot 5{,}92^4 = 8020\ [cm^4]$$

Na sredini nosača Transverzalna sila $F_{T(P)}$ i moment savijanja imaju vrednost:

$$F_{T(P)} = F_B'' - F = -20\ [kN]$$

$$M_{(P)} = -\mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}' + (F_B - F)\frac{\ell}{2} = 24\ [kNm]$$

Tangencijalni i normalni napon u tačkama preseka na udaljenu $a\sqrt{2}/2$ od neutralne ose savijanja imaju vredosti koje računamo na sledeći način:

$$\tau_1 = \frac{F_{T(P)} S_x'}{I_x \cdot \xi_1} = \frac{20 \cdot 486{,}66}{8020 \cdot 16{,}8} = 0{,}0723\ [kN/cm^2]$$

$$\sigma = \frac{M_{(P)}}{I_x} y = \frac{24 \cdot 10^2}{8020} \cdot 4{,}2 = 1{,}258\ [kN/cm^2]$$

Tangencijalni napon u tačkama neutralne ose je:

$$\tau_2 = \frac{F_{T(P)} S_x''}{I_x \cdot \xi_2} = \frac{20 \cdot 607}{8020 \cdot 8{,}4} \doteq 0{,}18\ [kN/cm^2]$$

dok normalni napon ima vrednost nula.

Za dimenzionisanje prepusta merodavan je maksimalni moment $M_{f\,max} = 120\,[kNm]$, pa je potreban otporni moment:

$$W_x = \frac{M_{f\,max}}{\sigma_{df}} = \frac{120 \cdot 10^2}{10} = 1200\ [cm^3]$$

odakle sračunavamo da je $a = 7{,}27\ [cm]$. Moment i transverzalna sila na polovini prepusta u tački N imaju vrednost $M_N = 60\,[kNm]$, $F_N = 30\,[kN]$. Statički moment polovine poprečnog preseka prepusta je:

$$S_x'' = \frac{25}{12} a^3\sqrt{2} = \frac{25}{12} \cdot 7{,}27^3 \sqrt{2} = 1128{,}7\ [cm^3]$$

Aksijalni moment inercije ima vrednost:

$$I_x = \frac{79}{12}a^4 = \frac{79}{12}\cdot 7{,}27^4 = 18500\ [cm^3]$$

Statički moment dela preseka iznad ordinata $a\sqrt{2}/2$ ima vrednost:

$$S_x' = \frac{5}{3}a^3\sqrt{2} = \frac{5}{3}\cdot 7{,}24^3\cdot\sqrt{2} = 891{,}83\ [cm^3]$$

Tangencijalni i normalni napon u preseku P ,a u vlaknima preseka na udaljenju $a\sqrt{2}/2$ imaju sledeće vrednosti:

$$\tau_1 = \frac{F_N\cdot S_x'}{I_x\cdot \xi_1} = \frac{30\cdot 891{,}83}{18500\cdot 7{,}24\cdot\sqrt{2}} = 0{,}14\ [kN/cm^2]$$

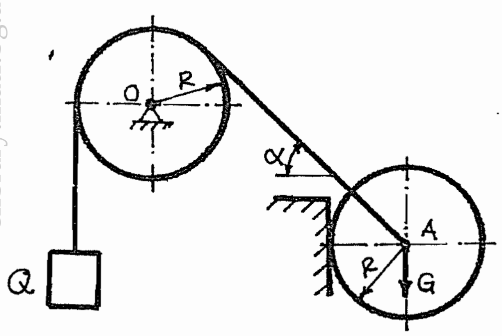
$$\sigma = \frac{\sigma_N}{I_x}\cdot y = \frac{60\cdot 10^2}{18500}\cdot 5{,}15 = 1{,}672\ [kN/cm^2]$$

dok je tangencijalni napon u vlaknima na neutralnoj osi posmatranog preseka:

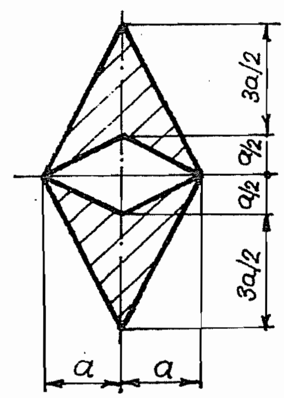
$$\tau_2 = \frac{F_N\cdot S_x''}{I_x\cdot \xi_2} = \frac{30\cdot 1128{,}7}{18500\cdot 10{,}3} = 0{,}185\ [kN/cm^2]$$

JANUARSKO-FEBRUARSKI ROK 1979

PRVI ZADATAK: Za središte kugle poluprečnika R, težine G, vezano je uže prebačeno preko kotura poluprečnika R, koji se može obrtati oko ose kroz 0, i koje na drugom kraju nosi teg težine Q. Kugla se oslanja o vertikalni zid u tački N. U ravnotežnom položaju, kada pravac dela užeta vezanog za središte kugle zaklapa ugao $\alpha = 45^\circ$ sa horizontom odrediti: težinu tereta Q, otpor zida i ležišta kaišnika smatrajući da su veze idealne. Sistem je prikazan na slici br. 1.




Slika br. 1




Slika br. 2

DRUGI ZADATAK: Vertikalni stub dužine $\ell = 3{,}14$ [m], poprečnog preseka kao na slici br. 2 načinjen je od topljenog čelika i zglobno učvršćen na krajevima i opterećen aksijalnom pritisnom silom F = 64 [kN].

Dimenzionisati stub, ako je stepen sigurnosti od izvijanja 4. Za modul elastičnosti materijala usvoji $2 \cdot 10^4$ [kN/cm$^2$], a za napon na granici proporcionalnosti $\sigma_P = 50$ [kN/cm$^2$]. Obrazložiti izbor metode za dimenzionisanje.

TREĆI ZADATAK: Kontinualni nosač ABCD, oslonjen u tačkama B i C, uklešten u A, savojne krutosti $\mathcal{B}$, a prepustom BE = $\ell/2$, savojne krutosti $\mathcal{B}_1$ i prepusta CD = $\ell/4$, raspona AB = BC = $\ell$ = 4 [m], opterećen je na krajevima prepusta silama po F = 21 [kN], i duž prvog raspona

AB kontinualnim jednakopodeljenim opterećenjem $q = 14 \; [kN/m]$.

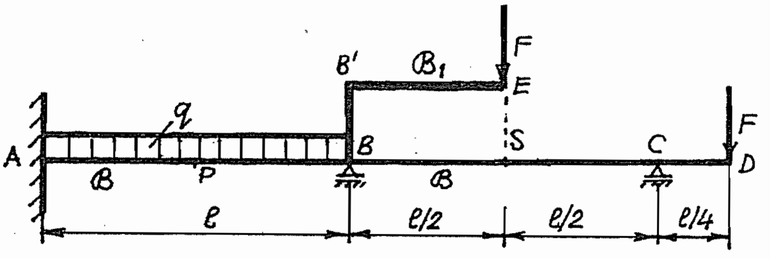
a) Odrediti statičke nepoznate i skicirati statičke dijagrame nosača i prepusta.

b) Dimenzionisati nosač i prepuste NI profilom ako je $\sigma_{df} = 10 \; [kN/cm^2]$.

c) Izračunati ekstremne vrednosti normalnog i tangencijalnog napona u preseku P na udaljenju 2 [m] od ukleštenja.

d) Izračunati ugib preseka S na sredini drugog raspona.

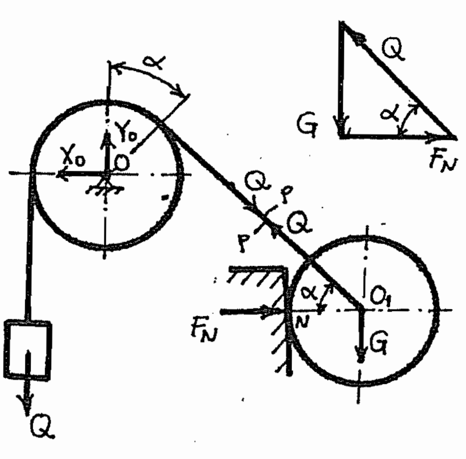
Nosač je prikazan na slici br. 3.




Slika br. 3

R E Š E N J A

PRVI ZADATAK: Na slici br. 4 prikazan je sistem sa naznačenim aktivnim silama i odgovarajućim otpornim silama. Ako se uže preseče po preseku p-p onda se uticaj jednog dela sistema na drugi zamenjuje silom u užetu jednakoj težini tereta Q, jer se zanemaruje trenje užeta i kotura. Ovaj zaključak sledi i iz momentne jednačine za tačku O. Kuglu sa središtem u $O_1$ napada sistem od tri sučeljne sile G težina kugle, Q sila u koncu, $F_N$ otpor zida u tački N. Iz trougla sila sledi:




$$Q = \frac{G}{\sin\alpha}$$

$$F_N = G \operatorname{ctg}\alpha$$

ili za zadatu vrednost ugla $\alpha$ dobijamo:

$$Q = G\sqrt{2} \quad ; \quad F_N = G$$

Slika br. 4

Iz uslova ravnoteže kotura dobijamo otpor obrtnog ležišta O:

$$\Sigma X_i = X_0 - Q\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad X_0 = Q\cos\alpha$$

$$\Sigma Y_i = Y_0 - Q - Q\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_0 = Q(1+\sin\alpha)$$

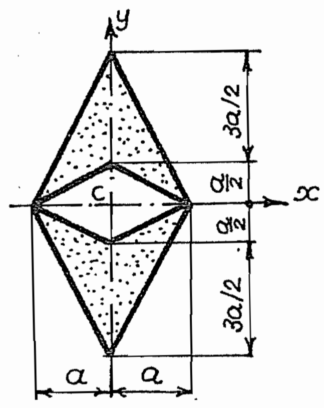
$$F_0 = \sqrt{X_0^2+Y_0^2} = Q\sqrt{2(1+\sin\alpha)} = Q\sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

ili za posebno zadatu vrednost ugla      :

$$X_0 = G\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = G$$

$$Y_0 = G\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = G(\sqrt{2}+1)$$

DRUGI ZADATAK: Za rešavanje zadatka potrebno je odrediti aksijalne momente inercije za glavne centralne ose inercije i uporediti dobijene izraze sa ciljem odredjivanja najmanjeg aksijalnog momenta inercije koji nas upućuje da će se oko odgovarajuće ose pojaviti mogućnost izvijanja koju dimenzionisanjem štapa treba isključiti. Na slici br. 5 prikazan je - poprečni presek štapa. Za sračunavanje aksijalnog momenta inercije za osu cx koja je glavna osa inercije i prolazi kroz težište preseka jer je osa simetrije koristimo polovinu preseka koji predstavljamo kao razliku površina većeg trougla osnovice 2a i visine 2a od koga oduzimamo drugi trougao iste osnovice i visine a/2 :




Slika br. 5

$$I_x = 2\,\frac{1}{12}\left[2a(2a)^3 - 2a\left(\frac{a}{2}\right)^3\right] = \frac{63}{24}a^4$$

Za sračinavanje aksijalnog momenta inercije za cy osu postupamo na sledeći način; presek možemo smatrati da se sastoji od četiri trougla osnovice 3a/2 i visine a, čije osnovice leže na istoj osi, ili na drugi način da se polovina preseka sastoji od razlike površina trougla osnovice 4a i visine a, i torugla osnovice a i iste visine, te kako su osnove na istoj osi to odgovarajućim oduzimanjem i umnožavanjem dobijamo traženi moment inercije:

$$I_y = 4\,\frac{1}{12}\,\frac{3a}{2}\cdot a^3 = \frac{a^4}{2} \quad \text{ili} \quad I_y = \frac{2}{12}\left[4a\cdot a^3 - a\cdot a^3\right] = \frac{a^4}{2}$$

Očigledno je da je minimalni moment inercije za osu cy, te ćemo dimenzionisanje vršiti prema njemu. Prema Euler-ovoj metodi najmanji aksijalni moment inercije ne sme da bude manji od:

$$I_{min} = \frac{\nu F \cdot \ell_r^2}{\pi^2 E} = \frac{4 \cdot 64 \cdot 3{,}14^2 \cdot 10^4}{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^4} = 128 = \frac{a^4}{2}$$

odakle sračunavamo dužinu $a = 4$ [cm] koja odredjuje dimenzije najmanjeg poprečnog preseka kod koga sa sigurnošću 4 neće doći do izvijanja. Redukovana dužina štapa je uzeta da je $\ell_r = \ell$ jer se radi o zglobno učvršćenim krajevima štapa.

Provera kritičnog napona daje:

$$A = 3a^2 = 3 \cdot 4^2 = 48 \ [cm^2]$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3} \ [kN/cm^2]$$

što znači da je on u granicama dozvoljenog za aksijalna naprezanja.

Takodje je potrebno izvršiti proveru ispravnosti izabrane metode - Euler-ove metode za dimenzionisanje. Tu proveru vršimo pomoću vitkosti štapa i njenog uporedjivanja sa kritičnom vitkošću za odgovarajuću vrstu materijala štapa. Minimalni poluprečnik inercije poprečnog preseka štapa je:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{2} \cdot \frac{1}{3a^2}} = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = 1{,}635 \ [cm]$$

te je vitkost štapa za napred izračunate dimenzije poprečnog preseka i zadatu dužinu štapa:

$$\lambda_r = \frac{\ell_r}{i_{min}} = \frac{3{,}14 \cdot 10^2}{1{,}635} = 193$$

Kritična vitkost štapa za materijal - čelik sa zadatim fizičkim karakteristikama - modulom elastičnosti i naponom pritiska na granici proporcionalnosti je:

$$\lambda_K = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{50}} = 20\pi$$

Uporedjivanjem vitkosti našeg štapa i vitkosti kritične dolazimo do zaključka da je kritična vitkost manja od vitkosti izučavanog štapa, te je Euler-ova metoda pravilno izabrana.

TREĆI ZADATAK: Na slici br. 6 prikazan je sistem od dve grede na koje smo razložili zadati nosač. Zadatak je dva puta statički neodredjen i kao statičke nepoznate izaberemo moment uklještenja $\mathfrak{M}_A$ i reaktivni moment $\mathfrak{M}_B$ nad osloncem B. Takodje smo izvršili redukciju sila koje dejstvuju na slobodnim krajevima prepusta na odgovarajuće oslonce, gre smo dobili i odgovarajuće redukcione momente $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} F\ell$ i $\mathfrak{M}' = \frac{1}{4} F\ell$.

Iz uslova saglasnosti deformacija pojedinačnih greda i zadatog nosača u uklještenju i osloncu B pišemo sledeće jednačine za odredjivanje statičkih nepoznatih

$$\alpha_A = 0$$

$$-\frac{\ell}{6B}(2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B) + \frac{q\ell^3}{24B} = 0$$

$$\beta_B = \alpha_B$$

$$\frac{\ell}{6B}(\mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B) - \frac{q\ell^3}{24B} = -\frac{\ell}{6B}\left(2\mathfrak{M}_B - 2\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'\right)$$

ili posle sredjivanja dobijamo sistem:

$$2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = \frac{q\ell^2}{4} \qquad\qquad 2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B = 56$$

$$\mathfrak{M}_A + 4\mathfrak{M}_B = \frac{q\ell^2}{4} + 3\mathfrak{M}' \qquad \text{ili} \qquad \mathfrak{M}_A + 4\mathfrak{M}_B = 119$$

čijim rešavanjem dobijamo tražene statičke nepoznate:

$$\mathfrak{M}_A = \frac{3q\ell^2}{28} - \frac{3}{7}\mathfrak{M}' = 15\,[kNm]$$

$$\mathfrak{M}_B = \frac{q\ell^2}{28} + \frac{6}{7}\mathfrak{M}' = 26\,[kNm]$$

Otpori oslonaca pojedinačnih greda od aktivnog i reaktivnog opterećenja su:

$$F_A = \frac{q\ell}{2} + \frac{\mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_B}{\ell} = \frac{56}{2} + \frac{15-26}{4} = \frac{101}{4}\,[kN]$$

$$F_B' = \frac{1}{2}q\ell - \frac{\mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_B}{\ell} = 28 + \frac{11}{4} = \frac{123}{4}\,[kN]$$

$$F_B'' = F + \frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{\ell} = 21 + \frac{26-42-21}{4} = \frac{47}{4}\,[kN]$$

$$F_C = F - \frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}{\ell} = 21 + \frac{37}{4} = \frac{121}{4}\,[kN]$$

Sa z označimo položaj poprečnog preseka p-p u odnosu na ukleštenje, pa je analitički izraz za moment duž prvog raspona nosača:

$$M_{(z)} = -\mathfrak{M}_A + F_A \cdot z - \frac{1}{2}qz^2 = -15 + \frac{101}{4}z - \frac{1}{2}\,\frac{56}{4}\,z^2$$

Analitički izraz za transverzalnu silu je:

$$F_{T(z)} = \frac{dM_{(z)}}{dz} = \frac{101}{4} - 14z$$

i ona je jednaka nuli u preseku u kome je $z = z_o = 101/56 = 1{,}805$ [m]. U tome preseku je i elstremna vrednost napadnog momenta koja iznosi:

$$M_{(z_o = 1{,}805)} = -15 + \frac{101}{4}\cdot 1{,}805 - 7\cdot 1{,}805^2 = 7{,}7\,[kN/cm^2]$$

Koristeći izvedeni analitički izraz za napadni moment pomerajući presek p-p duž prvog raspona dobijamo napadne momente u tim presecima:

$$M_{(1)} = -15 + \frac{101}{4} - 7 = \frac{13}{4}\ [kNm]$$

$$M_{(2)} = -15 + \frac{101}{2} - 28 = 7{,}5\ [kNm]$$

$$M_{(3)} = -15 + \frac{101}{4}\cdot 3 - 63 = -2{,}75\ [kNm]$$

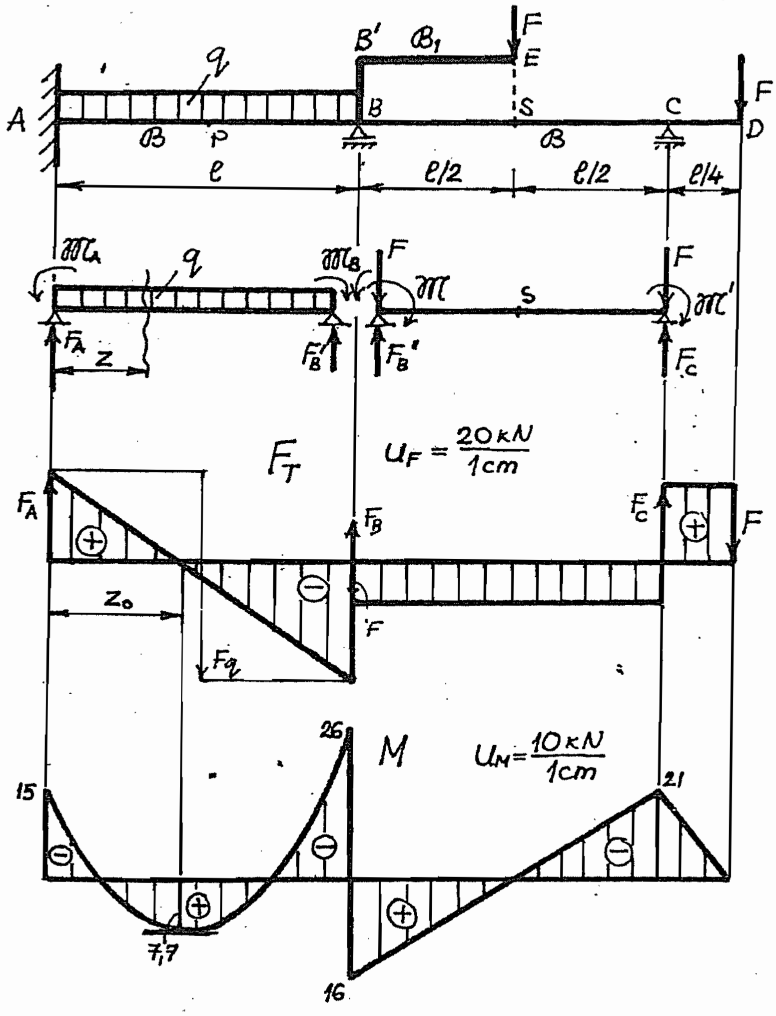
$$M_{(3,5)} = -15 + \frac{101}{4}\cdot 3{,}5 - 7\cdot 3{,}5^2 = -12{,}2\ [kNm]$$

U osloncu B javlja se skok momenta, pa zavisno od tog da li se stavlja presek blisko sa leve ili sa desne strane oslonca B dobijaju se vrednosti napadnog momenta:

$$M_{B(\ell)} = -26\ [kNm] \quad ; \quad M_{B(d)} = -26 + 42 = 16\ [kNm]$$

Moment u tački C je $M_c = -21\ [kNm]$ .

Pomoću sračunatih vrednosti napadnog momenta u karakterističnim tačkama na slici br. 6 nacrtan je dijagram napadnog momenta. Pomoću otpora oslonaca i aktivnog opterećenja na istoj slici nacrtan je i dijagram transverzalnih sila.




Slika br. 6

b) Sa dijagrama napadnog momenta se vidi da je najveći moment savijanja duž raspona celog nosača: $M_{f\,max}$ = =26 [kNm], te je on merodavan za dimenzionisanje nosača. Potrebni otporni moment poprečnog preseka nosača je

$$W_x = \frac{M_{f\,max}}{\sigma_{df}} = \frac{26\cdot 10^2}{10} = 260\ [cm^3]$$

i iz tablice pomoću te vrednosti otpornog momenta biramo profil I22 sa sledeći dimenzijama: h = 220 [mm] , b = 98 [mm], $\delta$ = 8,1 [mm], $\delta_1$ = 12,2 [mm] , $I_x$ = 3060 [$cm^4$] , $W_x$ = 278 [$cm^3$] , $S_{1/2}$ = 162 [$cm^3$].

c) Moment i transverzalna sila u preseku P na udaljenju 2[m] od uklještenja su:

$$M_{(2)} = 7{,}5\ [kNm] \quad ; \quad F_{T(2)} = \frac{101}{4} - 28 = -2{,}75\ [kN]$$

te su ekstremne vrednosti tangencijalnog i normalnog napona :

$$\tau = \frac{F_T \cdot S_{1/2}}{I_x \cdot \xi} = \frac{2{,}75 \cdot 162}{3060 \cdot 0{,}81} = 0{,}18\ [kN/cm^2]$$

$$\sigma = \frac{M}{W_x} = \frac{7{,}5 \cdot 10^2}{278} = 2{,}7\ [kN/cm^2].$$

d) Presek S se nalazi na sredini drugog raspona. Ugib tog preseka je rezultat dejstva momenata $\mathfrak{M}_B$ i $\mathfrak{M}$ nad osloncem B i momenta $\mathfrak{M}'$ nad osloncem C, dok sila ne utiče na taj ugib jer dejstvuje u usloncu C. Ugib preseka S je sada:

$$f_s = -\frac{\ell^2}{16\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M} + \mathfrak{M}') = -\frac{4^2}{16\mathcal{B}}(26-41+21) = -\frac{5}{\mathcal{B}}$$

kako je savojna krutost nosača za izabrani profil:

$$\mathcal{B} = EI_x = 3060 \cdot 2 \cdot 10^4\ [kN/cm^2] = 6120\ [kNm^2]$$

to je numerička vrednost tog ugiba:

$$f_s = -\frac{5}{6120} = -8{,}16 \cdot 10^{-4}[m] = -0{,}0816\ [cm]$$

b') Za dimenzionisanje prepusta BE merodavan je moment $\mathfrak{M} = 42\,[kNm]$, pa je potrebni otporni moment:

$$W_x = \frac{\mathfrak{M}}{\sigma_{df}} = \frac{42 \cdot 10^2}{10} = 420\,[cm^3]$$

na osnovu koga biramo profil I 26 .

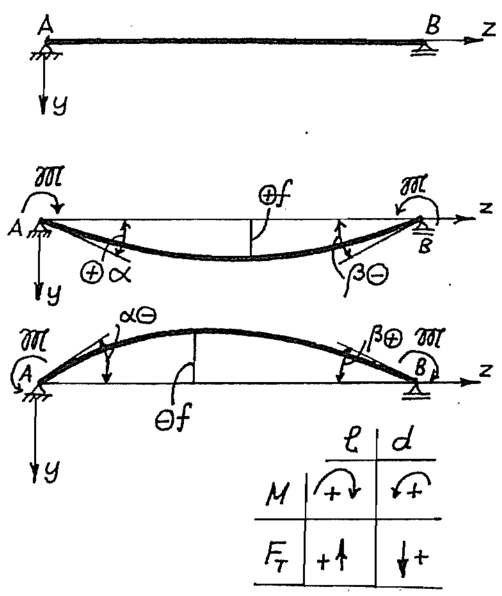
# P R I L O G

## KONVENCIJA O ZNAKU MOMENTA SAVIJANJA, UGIBA I NAGIBA TANGENTE *

Diferencijalna jednačina elastične linije za male ugibe je:

$$\mathcal{B}\cdot y'' = -M_f$$

pri čemu je usvojen koordinatni sistem Axyz sa koordinatnim početkom u levom osloncu A, takav da je ordinatna osa +Ay usmerena naniže, a Az osa usmerena pravcem AB, kao na slici br. 1, dok smo znak za transverzalnu silu i moment zadržali po dogovoru iz Grafostatike: Sa leve strane preseka transverzalna sila je pozitivna kada je usmerena naviše, a moment je pozitivan, ako dejstvuje u smeru kretanja satne kazaljke; Sa desne strane preseka **ove vrednosti su istih** apsolutnih veličina, ali menjaju znak, transverzalna sila usmerena naviše je negativna, a takodje i moment koji dejstvuje u smeru kretanja satne kazaljke. Tada vertikalne sile sa smerom naniže izazivaju ugib grede naniže, tako da ugibe dobijamo sa pozitivnim znakom. Na slici br. 1 naznačeni su nagibi i ugibi sa odgovarajućim znacima prema dogovoru.



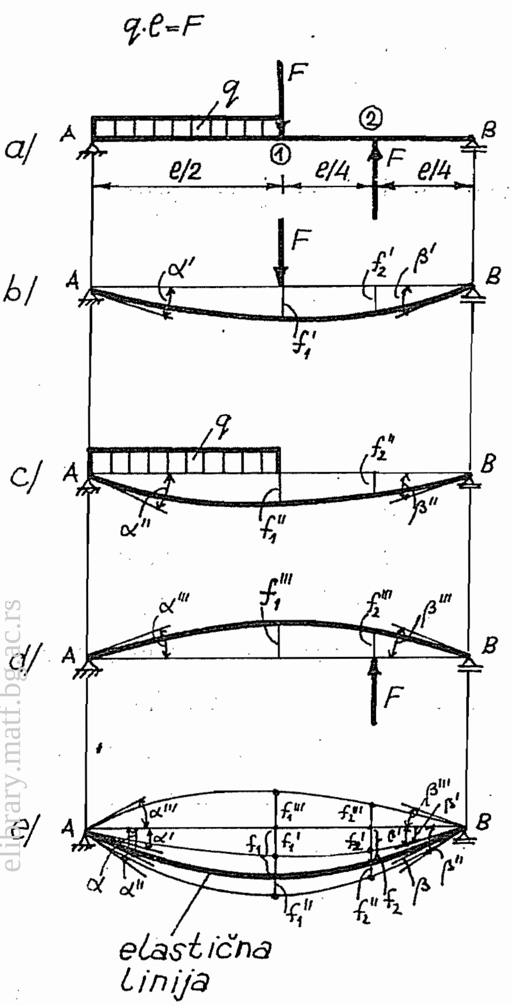

Slika br. 1

## SUPERPOZICIJA UGIBA I NAGIBA TANGENTE NA ELASTIČNU LINIJU

U slučaju složenog opterećenja nosača nagib tangente na elastičnu liniju, odnosno ugib u nekom preseku nosača jednak je algebarskom zbiru nagiba tangenata, odnosno ugiba u istom preseku svih elastičnih linija pojedinih opterećenja (superpozicija deformacija pri savijanju).

* Vidi Otpornost materijala od D. Rašković.

Pokažimo na primeru proste grede AB, raspona $\ell$, opterećene kontinualnim jednakopodeljenim opterećenjem do polovine raspona i dvema silama F kao što je na slici br. 2 prikazano. Potrebno je odrediti nagibe tangenti na elastičnu liniju u osloncima A i B i ugibe u presecima (1) i (2). Ukupno složeno opterećenje grede možemo rastaviti na tri prosta: I. sila F dejstvuje na sredini grede AB; II. kontinualno jednakopodeljeno opterećenje dejstvuje duž polovine raspona mereno od oslonca A i III. sila F usmerena naviše dejstvuje na $\ell/4$ mereno od oslonca B.




Slika br. 2

Za svaki slučaj opterećenja pojedinačno iz Tablica iz Otpornosti materijala koristeći jednačinu za nagibe tangente i jednačinu elastične linije možemo da odredimo tražene komponentne nagibe tangente odnosno ugibe.

I. Za slučaj opterećenja silom F na sredini iz tablica iz Otpornosti materijala na strani br. 44 za prostu gredu nalazimo da su traženi nagibi tangenti i ugibi:

$$\alpha' = -\beta' = \frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}}$$

$$f_1' = \frac{F\ell^3}{48\mathcal{B}}$$

$$f_2' = y\Big|_{z=\frac{3}{4}\ell} = \frac{F\ell^3}{12\mathcal{B}}\left\{\frac{z}{\ell}\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{z}{\ell}\right)^2\right] \Big\| + \frac{1}{4}\left(2\frac{z}{\ell}-1\right)^3\right\}\Big|_{z=\frac{3}{4}\ell} = \frac{11F\ell^3}{3\cdot 2^8\mathcal{B}}$$

gde su na slici br. 2 b naznačene odgovarajuće oznake i preseci.

II. Za slučaj kontinualnog jednako podeljenog opterećenja sa slike br. 2 c iz Tablica iz Otpornosti materijala na strani br. 53 nalazimo tražene nagibe tangenti u ugibe:

$$\alpha'' = \frac{3}{128}\,\frac{q\ell^3}{\mathcal{B}} \quad ; \quad \beta'' = -\frac{7}{384}\,\frac{q\ell^3}{\mathcal{B}}$$

$$f_1'' = \frac{5}{768}\cdot\frac{q\cdot\ell^4}{\mathcal{B}}$$

$$f_2'' = y\Big|_{z=\frac{3\ell}{4}} = \frac{q\cdot\ell^4}{24\mathcal{B}}\left[\frac{9}{16}\left(\frac{z}{\ell}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{z}{\ell}\right)^4 \Big\| - \left(\frac{z}{\ell}-\frac{1}{2}\right)^4\right]_{z=\frac{3}{4}\ell} = \frac{13}{3\cdot 2^{10}}\,\frac{q\ell^4}{\mathcal{B}}$$

III. Za slučaj opterećenja silom F na $\ell/4$ mereno od oslonca B na slici br. 2 d iz Tablica iz Otpornosti materijala na strani 44 nalazimo izraze za nagibe tangenti $\alpha$ i $\beta$ u kojima treba staviti $a = 3\ell/4$, $b = \ell/4$ i umesto sile staviti (-F), te su nagibi tangente elastične linije u osloncima:

$$\alpha''' = \frac{(-F)\ell^2}{6\mathcal{B}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right) = -\frac{5F\ell^2}{2^7\mathcal{B}}$$

$$\beta''' = -\frac{(-F)\ell^2}{6\mathcal{B}} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}\right) = \frac{7F\ell^2}{2^7\mathcal{B}}$$

Na istoj strani nalazimo i izraz za ugib $f_{(z=a)}$ u koji treba staviti da je $a = 3\ell/4$, $b = \ell/4$ i umesto sile vrednost (-F) čime dobijamo ugib preseka u kome dejstvuje sila:

$$f_{(z=a)} = f_2''' = \frac{(-F)\ell^3}{3\mathcal{B}} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{3F\ell^3}{2^8\mathcal{B}}$$

Takodje na istoj strani nalazimo i izraz za $f_{(z=\ell/2)}$ kada je $a > b$ koji zamenom napred navedenih vrednosti dobijamo ugib na sredini grede:

$$f_1''' = f\left(z=\frac{\ell}{2}\right) = \frac{(-F)}{48} \frac{\ell^3}{\mathcal{B}} \frac{b}{\ell}\left[3-4\left(\frac{b}{\ell}\right)^2\right]\Big|_{b=\frac{1}{4}\ell} = -\frac{F\ell^3}{48\mathcal{B}} \cdot \frac{1}{4}\left[3-4\cdot\frac{1}{16}\right] = -\frac{11F\ell^3}{3\cdot 2^8\mathcal{B}}$$

Na slici br. 2 e prikazan je izgled elastične linije koja je rezultat dejstva složenog opterećenja na gredu, koju smo dobili posle izvršene superpozicije ugiba, odnosno nagiba za slučajeve prostih komponentnih opterećenja.

Rezultujući nagibi tangenti na elastičnu liniju u osloncima su:

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' + \alpha''' = \frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}} + \frac{3}{128} \frac{q\ell^3}{\mathcal{B}}\Big|_{q\ell=F} - \frac{5F\ell^2}{2^7\mathcal{B}} = \frac{3F\ell^2}{2^6\mathcal{B}}$$

$$\beta = \beta' + \beta'' + \beta''' = -\frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}} - \frac{7}{384} \frac{q\ell^3}{\mathcal{B}}\Big|_{q\ell=F} + \frac{7F\ell^2}{2^7\mathcal{B}} = -\frac{5F\ell^2}{3\cdot 2^6\mathcal{B}}$$

Rezultujući ugibi preseka (1) odnosno (2) koji odgovaraju složenom opterećenju su:

$$f_1 = f_1' + f_1'' + f_1'''$$

$$f_1 = \frac{F\ell^3}{48\mathcal{B}} + \frac{5}{3\cdot 2^8} \frac{q\ell^4}{\mathcal{B}}\Big|_{q\ell=F} - \frac{11F\ell^3}{2^8\mathcal{B}} = \frac{5F\ell^3}{3\cdot 2^7\mathcal{B}}$$

$$f_2 = f_2' + f_2'' + f_2'''$$

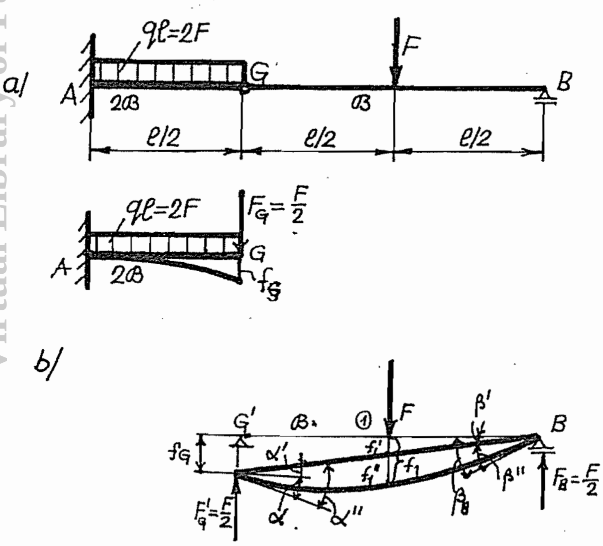
$$f_2 = \frac{11F\ell^3}{3\cdot 2^8\mathcal{B}} + \frac{13q\ell^4}{3\cdot 2^{10}\mathcal{B}}\Big|_{q\ell=F} - \frac{3F\ell^3}{2^8\mathcal{B}} = \frac{15F\ell^3}{2^{10}\cdot\mathcal{B}}$$

# DEKOMPOZICIJA NOSAČA

Nosač možemo nazvati složenim ako ima više raspona ili prepusta. Kao proste nosače možemo usvojiti prostu gredu i konzolu,za koje u svim tablicama iz Otpornosti materijala,a za različite slučajeve opterećenja možemo naći jednačine za nagib tangenti elastične linije i jednačine elastičnih linija.Pod složenim nosačem podrazumevaćemo statički odredjene i neodredjene nosače koji se mogu predstaviti pomoću jedne ili više prostih greda ili konzola ,pri čemu ćemo voditi računa o odgovarajućim spoljašnjim opterećenjima kojima su one opterećene i o uzajamnim uticajima delova nosača koje smo zamenili ekvivalentnim prostim nosačima,ili pak oslonaca ili ukleštenja koje smo dogovorno uklonili uzimajući njihov uticaj pomoću dejstva odgovarajućih momenata odnosno sila i vodeći računa o kompatibilnosti (saglasnosti) deformacija.Sistem prostih nosača koji je ekvivalentan složenom nosaču mora da ima odgovarajuće geometrijske i fizičke veličine iste;nagibe tangenti,ugibe, transverzalne sile i momente savijanja,i odgovarajuće dimenzije nosača.

Da bi smo to bliže razjasnili izvršićemo analizu dva primera.

PRIMER I.Statički odredjen nosač,greda AGB sa zglobom G,savojne krutosti 2 $\mathcal{B}$ na delu AG,i savojne krutosti $\mathcal{B}$ na delu GB,opterećen je spoljašnjim opterećenjem kako je to na slici br. 3 prikazano.Nosač možemo rastaviti na konzolu AG,opterećenu kontinualnim opterećenjem q i silom $F_G$ na slobodnom kraju G ,i prostu gredu G´B opterećenu silom na sredini. Uzajamni uticaj ova dva nosača se mora uzeti na sledeći način:uticaj desnog dela nosača na konzolu izražava se dejstvom sile $F_G$ na slobodnom kraju konzole,koja je po intenzitetu jednaka otporu $F_G'=F/2$ oslonca G´,dok se uticaj konzole - levog dela nosača na prostu gredu G´B izražava time što pomeranje oslonca G´u vertikalnom pravcu nije jednako nuli,već je jed-




Slika br. 3

nako ugibu $f_G$ slobodnog kraja G konzole AG. Uz ovakve pretpostavke o uzajamnom uticaju ova dva nosača, možemo da kažemo da smo pomoću njih kao ekvivalentnim sistemom predstavili zadati složeni nosač AGB. Za ta dva sistema kažemo da su medjusobno ekvivalentni.

Odredimo sada ugibe $f_G$ i $f_1$ i nagibe tengenti elastične linije $\alpha$ i $\beta$ naznačene na slici br. 3 b. Koristeći princip superpozicije ugib $f_G$ i nagib $\gamma_G$ tangente na elastičnu na slobodnom kraju konzole je rezultat ugiba $f_G^q$ i $f_G^{F_G}$ i nagiba $\gamma_G^q$ i $\gamma_G^{F_G}$ od kontinualnog opterećenja q i sile $F_G$. U tablicama iz Otpornosti materijala na strani br. 60 za slučaj konzole opterećene kontinualnim opterećenjem nalazimo izraze za ugib i nagib tangente na elastičnu liniju na slobodnom kraju u koje treba uneti da je raspon konzole $\ell/2$ i savojna krutost $2\mathcal{B}$, odakle dobijamo da su ugib i nagib:

$$f_G^q = \frac{q(\ell/2)^4}{8\cdot 2\mathcal{B}} = \frac{q\ell^4}{2^8\mathcal{B}}\Big|_{q\ell=2F} = \frac{F\ell^3}{2^7\mathcal{B}}$$

$$\gamma_G^q = \frac{q(\ell/2)^3}{6\cdot 2\mathcal{B}} = \frac{q\ell^3}{3\cdot 2^5\mathcal{B}}\Big|_{q\ell=2F} = \frac{F\ell^2}{3\cdot 2^4\mathcal{B}}$$

Na strani 59 u istim tablicama nalazimo izraze za ugib slobodnog kraja i nagib tangente na elastičnu liniju konzole opterećene silom na slobodnom kraju, iz kojih posle zamene raspona sa $\ell/2$ i savojne krutosti sa $2\mathcal{B}$ dobijamo za nagib tangente elastične linije i ugib slobodnog kraja konzole sledeće izraze:

$$\gamma_G^{F_G} = \frac{F_G(\ell/2)^2}{2\cdot 2\mathcal{B}} = \frac{F\ell^2}{2^5\mathcal{B}}$$

$$f_G^{F_G} = \frac{F_G(\ell/2)^3}{3\cdot 2\mathcal{B}} = \frac{F\ell^3}{3\cdot 2^5\mathcal{B}}$$

Nagib slobodnog kraja G konzole je rezultat komponentnih nagiba tangenti na elastičnu liniju za slučaj dejstva kontinualnog opterećenja i sile $F_G$ pojedinačno na konzolu:

$$\gamma_G = \gamma_G^q + \gamma_G^{F_G} = \frac{F\ell^2}{3\cdot 2^4\mathcal{B}} + \frac{F\ell^2}{2^5\mathcal{B}} = \frac{5F\ell^2}{3\cdot 2^5\mathcal{B}}$$

Rezultujući ugib slobodnog kraja konzole takodje je rezultat komponentnih ugiba konzole od kontinualnog opterećenja i od sile $F_G$, i njegova vrednost je:

$$f_G = f_G^q + f_G^{F_G} = \frac{F\ell^3}{2^7\mathcal{B}} + \frac{F\ell^3}{3\cdot 2^5\mathcal{B}} = \frac{7F\ell^3}{3\cdot 2^7\mathcal{B}}$$

S obzirom da oslonac G′ proste grede G′B dobija vertikalno pomeranje jednako ugibu $f_G$ slobodnog kraja konzole, to znači da se cela greda zaokrenula oko oslonca B za ugao $\beta'$ koji je jednak količniku ugiba $f_G$ i dužine grede :

$$\beta' = -\frac{f_G}{\ell} = -\frac{7F\ell^2}{3\cdot 2^7 \mathcal{B}}$$

i ne zavisi od krutosti dela nosača G′B. Presek (1) je usled tog zaokretanja dobio ugib $f_1'$ jednak polovini ugiba $f_G$, jer se nalazi na sredini grede G′B:

$$f_1' = \frac{1}{2} f_G = \frac{7F\ell^3}{3\cdot 2^8 \mathcal{B}}$$

Usled dejstva sile F na sredini greda G′B trpi deformisanje - savija se pa su nagibi tangenti $\alpha''$ i $\beta''$ i ugib preseka (1) usled savijanja grede G′B silom F jednaki:

$$\alpha'' = -\beta'' = \frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}} \quad ; \quad f_1'' = \frac{F\ell^3}{48\mathcal{B}}$$

Ove podatke smo uzeli iz Tablica iz Otpornosti materijala za slučaj proste grede sa strane 44. Rezultujući ugib preseka (1) proste prede G′B je:

$$f_1 = f_1' + f_1'' = \frac{7F\ell^3}{3\cdot 2^8\mathcal{B}} + \frac{F\ell^3}{48\mathcal{B}} = \frac{23F\ell^3}{3\cdot 2^8 \mathcal{B}}$$

i istovremeno predstavlja ugib preseka (1) nosača AGB.

Nagib tangente na elastičnu liniju proste grede G′B u osloncu G′ je jednak zbiru nagiba $\alpha''$ usled savijanja grede silom na sredini i nagiba $\alpha'$ usled spuštanja oslonca G′za $f_G$:

$$\alpha_{G'} = \alpha'' + \alpha' = \frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}} - \frac{7F\ell^2}{3\cdot 2^7\mathcal{B}} = \frac{17F\ell^2}{3\cdot 2^7 \mathcal{B}}$$

i predstavlja nagib tangente u zglobu G nosača, povučenu s desne strane na elastičnu liniju, dok nagib tangente povučene sa desne strane na elastičnu liniju nosača je jednak nagibu tangente na elastičnu liniju na slobodnom kraju konzole. Tačka G - zglob je singularna tačka elastične linije, jer se u njoj elastična linija "lomi" i mogu se na nju povući dve tangente čiji su nagibi:

$$\gamma_G^{levo} = \gamma_G = \frac{5F\ell^2}{3\cdot 2^5 \mathcal{B}}$$

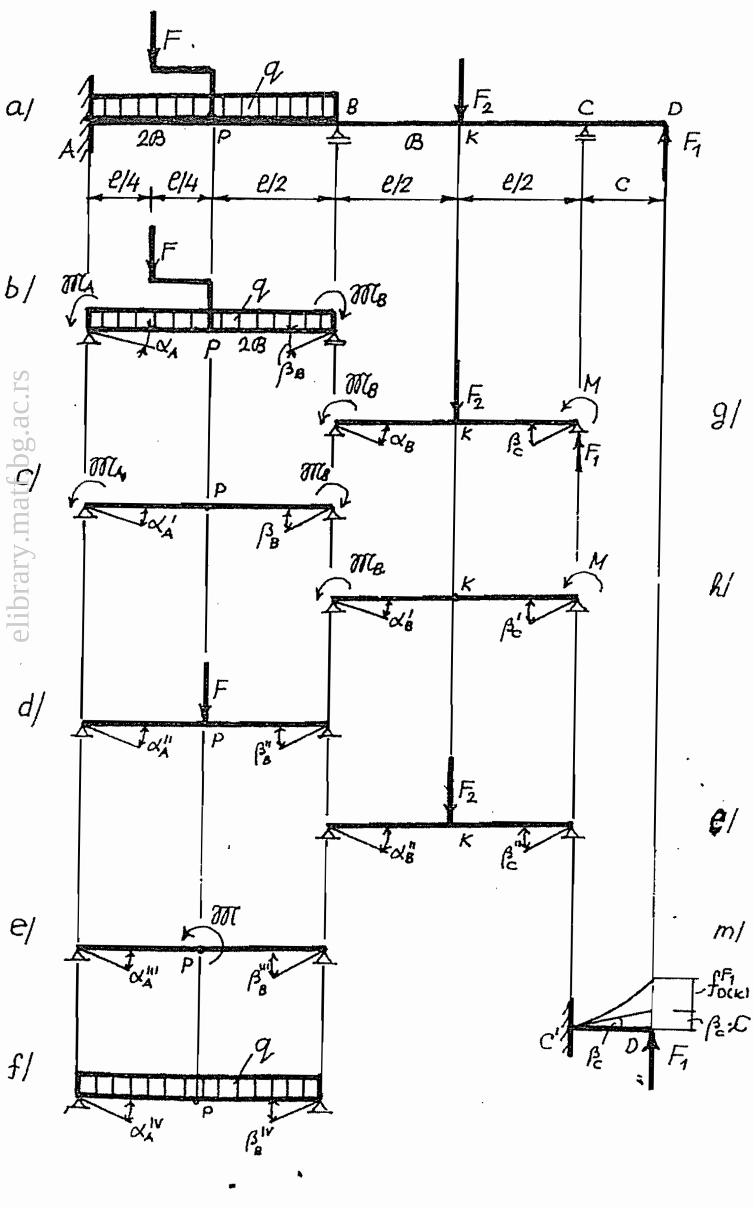
$$\gamma_G^{desno} = \alpha_{G'} = \frac{17F\ell^2}{3\cdot 2^7 \mathcal{B}}$$

Nagib tangente na elastičnu liniju u osloncu B je jednak zbiru nagiba od zaokretanja grede $\beta'$ usled spuštanja zgloba G, i savijanja grede silom F na sredini, :

$$\beta_B = \beta' + \beta''$$

$$\beta_B = -\frac{7 \cdot F\ell^2}{3\cdot 2^7 \mathcal{B}} - \frac{F\ell^2}{16\mathcal{B}} = -\frac{31\ F\ell^2}{3\cdot 2^7 \mathcal{B}}$$

PRIMER II. Izvršićemo analizu kontinualnog, dva puta statički neodredjenog nosača ABCD na slici br. 4, sa naznačenim opterećenjima i savojnim krutostima. Ovaj statički neodredjen nosač možemo zameniti dvema prostim gredama AB i B´C i konzolom C´D elastično ukleštenom u tački C´, pri čemu ova tri prosta nosača moraju da zadovoljavaju dodatne uslove. Prva greda AB opterećena je kontinualnim opterećenjem i silom na prepustu koju redukujemo na tačku proste grede gde se odvaja prepust, gde kao rezultat redukcije dobijamo silu F i moment $\mathfrak{M} = F\ell/4$ i dodajemo dva momenta $\mathfrak{M}_A$ kao uticaj ukleštenja, koje smo uklonili i moment $\mathfrak{M}_B$ kao uticaj dela nosača desno od tačke B. Kako smo ukleštenje uklonili to moramo postaviti uslov da je nagib tangente na elastičnu liniju u osloncu A jednak nuli i još jedan uslov da je nagib $\beta_B$ tangente na elastičnu liniju u tački B jednak nagibu tangente na elastičnu liniju u tački B susedne grede B´C. Druga greda B´C opterećena je silom $F_2$ na sredini raspona i momentom $M = F_1 c$ i silom $F_1$ u osloncu, koje smo dobili redukcijom sile sa prepusta na oslonac i momentom $\mathfrak{M}_B$ kao uticaj levog dela




Slika br. 4

nosača na gredu BC. Konzola C´D koja predstavlja prepust, je opterećena silom $F_1$ na slobodnom kraju, ali ukleštenje nije kruto već elastično što znači da konzola dobija nagib - zaokretanje jednako uglu nagiba tangente na elastičnu liniju proste grede B´C u tački C.

Greda AB je opterećena složenim opterećenjem koje možemo raščlaniti na prosta prikazana na slici br. 4 c, d, e i f te za njih na stranama 47,44,48 i 49 redom, tablica iz Otpornosti materijala nalazimo izraze za nagibe tengenti na elastičnu liniju u osloncima i ugib na sredini iz kojih sledi:

c) $\alpha_A' = -\frac{\ell}{6\cdot 2\mathcal{B}}(2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B)$ $\quad\beta_B' = \frac{\ell}{6\cdot 2\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B)$ $\quad f_P' = -\frac{\ell^2}{16\cdot 2\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B)$

d) $\alpha_A'' = \frac{F\ell^2}{16\cdot 2\mathcal{B}}$ $\quad\beta_B'' = -\frac{F\ell^2}{16\cdot 2\mathcal{B}}$ $\quad f_P'' = \frac{F\ell^3}{48\cdot 2\mathcal{B}}$

e) $\alpha_A''' = \frac{\mathfrak{M}\ell}{24\cdot 2\mathcal{B}}$ $\quad\beta_B''' = \frac{\mathfrak{M}\ell}{24\cdot 2\mathcal{B}}$ $\quad f_P''' = 0$

f) $\alpha_A^{IV} = \frac{q\cdot\ell^3}{24\cdot 2\mathcal{B}}$ $\quad\beta_B^{IV} = -\frac{q\ell^3}{24\cdot 2\mathcal{B}}$ $\quad f_P^{IV} = \frac{5}{384}\;\frac{q\ell^4}{2\mathcal{B}}$

Te su rezultujući nagibi odnosno ugib:

$$\alpha_A = \alpha_A' + \alpha_A'' + \alpha_A''' + \alpha_A^{IV} = -\frac{\ell}{12\mathcal{B}}(2\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B) + \frac{F\ell^2}{32\mathcal{B}} + \frac{\mathfrak{M}\ell}{48\mathcal{B}} + \frac{q\ell^3}{48\mathcal{B}}$$

$$\beta_B = \beta_B' + \beta_B'' + \beta_B''' + \beta_B^{IV} = \frac{\ell}{12\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M}_B) - \frac{F\ell^2}{32\mathcal{B}} + \frac{\mathfrak{M}\ell}{48\mathcal{B}} - \frac{q\ell^3}{48\mathcal{B}}$$

$$f_P' = f_P' + f_P'' + f_P''' + f_P^{IV} = -\frac{\ell^2}{32\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_B) + \frac{F\ell^3}{96\mathcal{B}} + \frac{5}{768}\cdot\frac{q\ell^4}{\mathcal{B}}$$

Greda BC je opterećena složenim opterećenjem koje možemo raščlaniti na prosta prikazana na slici br. 4 h i l, pa za njih na stranama 47 i 44 redom iz Tablica iz Otpornosti materijala nalazimo izraze za nagibe tangente na elastičnu liniju u osloncima i ugib na sredini:

e) $\alpha_B' = \frac{F_2\ell^2}{16\mathcal{B}}$ $\quad\beta_C' = -\frac{F_2\ell^2}{16\mathcal{B}}$ $\quad f_K' = \frac{F_2\ell^3}{48\mathcal{B}}$

h) $\alpha_B'' = -\frac{\ell}{6\mathcal{B}}(2\mathfrak{M}_B - M)$ $\quad\beta_C'' = \frac{\ell}{6\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_B - 2M)$ $\quad f_K'' = -\frac{\ell^2}{16\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_B - M)$

te su rezultujući nagibi odnosno ugibi :

$$\alpha_B = \alpha_B' + \alpha_B'' = \frac{F_2\ell^2}{16\mathcal{B}} - \frac{\ell}{6\mathcal{B}}(2\mathfrak{M}_B - M)$$

$$\beta_C = \beta_C' + \beta_C'' = -\frac{F_2\ell^2}{16\mathcal{B}} + \frac{\ell}{6\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_B - 2M)$$

$$f_K = f_K' + f_K'' = \frac{F_2\ell^3}{48\mathcal{B}} - \frac{\ell^2}{16\mathcal{B}}(\mathfrak{M}_B - M)$$

Prepust CD - elastično ukleštena konzola C'D je zbog elastičnog ukleštenja zaokrenuta za ugao $\beta_C$ usled čega slobodni kraj dobija ugib $f'_D$:

$$f_D' = \beta_c \cdot c = \frac{\ell \cdot c}{6\mathcal{B}} (\mathfrak{M}_B - 2M) - \frac{F_2 \ell^2 c}{16\mathcal{B}}$$

i nagib tangente:

$$\gamma_D' = \frac{\ell}{6\mathcal{B}} (\mathfrak{M}_B - 2M) - \frac{F_2 \ell^2}{16\mathcal{B}}$$

Usled savijanja konzole silom $F_1$ naviše pomoću obrazaca sa strane 59iz Tablica iz Otpornosti materijala slobodni kraj prepusta dobija komponentne:ugib

$$f_{D(K)}^{F_1} = - \frac{F_1 c^3}{3\mathcal{B}}$$

i nagib

$$\gamma_{D(K)}^{F_1} = - \frac{F_1 c^2}{2\mathcal{B}}$$

Pa su rezultujući ugib $f_D$ i nagib $\gamma_D$ tangente na elastičnu liniju;

$$f_D = f_D' + f_{D(K)}^{F_1} = \beta_c \cdot c + f_{D(K)}^{F_1} = \frac{\ell \cdot c}{6\mathcal{B}} (\mathfrak{M}_B - 2M) - \frac{F_2 \ell^2 c}{16\mathcal{B}} - \frac{F_1 c^3}{3\mathcal{B}}$$

$$\gamma_D = \gamma_D' + \gamma_{D(K)}^{F_1} = \frac{\ell}{6\mathcal{B}} (\mathfrak{M}_B - 2M) - \frac{F_2 \ell^2}{16\mathcal{B}} - \frac{F_1 c^2}{2\mathcal{B}}$$

Za dobijanje krajnjih rezultata za nagibe tangente i ugibe potrebno je odrediti statičke nepoznate $\mathfrak{M}_A$ i $\mathfrak{M}_B$ i uneti njihove vrednosti u napred izvedene opšte izraze,što ovoj analizi nije cilj.(Dalje vidi odgovarajući ispitni zadatak.)

## PRIMERI IZRAČUNAVANJA MOMENATA INERCIJE RAVNIH POVRŠINA

Prema definiciji aksijalni momenti inercije površine za koordinatne ose x i y su:

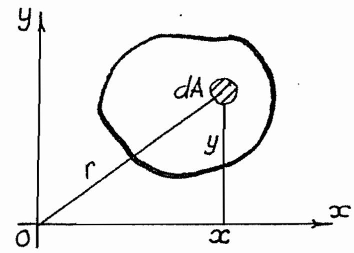
$$I_x = \iint_A y^2 dA \qquad ; \qquad I_y = \iint_A x^2 dA$$

Polarni moment inercije površine za pol 0, presečnu tačku osa x i y je:

$$I_o = \iint_A r^2 dA$$

Centrifugalno moment površine za par upravnih osa Ox i Oy je:

$$I_{xy} = \iint_A xy\, dA$$



Slika br. 1

U tehničkoj praksi najviše se koriste aksijalni momenti inercije i centrifugalni moment površine za težišne (centralne) ose $C\xi$ i $C\eta$. Kada se znaju momenti inercije za par upravnih osa Ox i Oy koje su paralelne odgovarajućim težišnim osama $C\xi$ i $C\eta$, onda se momenti inercije za težišne ose izračunavaju pomoću Steiner-ove teoreme:

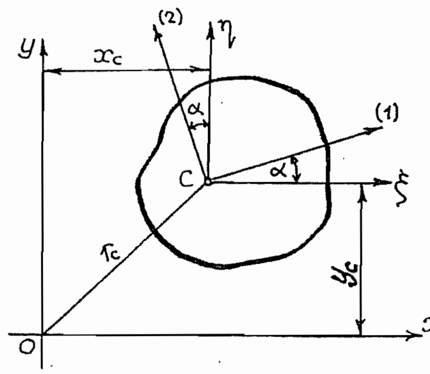
Aksijalni moment inercije površine za neku osu jednak je zbiru sopstvenog momenta inercije za paralelnu težišnu osu i položajnog momenta inercije.

$$I_\xi = I_x - A\cdot y_c^2$$

$$I_\eta = I_y - A\, x_c^2$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - A\cdot x_c\cdot y_c$$

$$I_c = I_o - A\,(x_c^2 + y_c^2) = I_o - A\cdot r_c^2$$



Slika br. 2

Glavne ose inercije su par upravnih osa za koje aksijalni momenti inercije imaju ekstremne vrednosti, a centrifugalni moment površine za te ose je jednak nuli. Kada se glavne ose inercije odredjuju za težište površine, onda su one glavne centralne (težišne) ose inercije poprečnog preseka. Momenti inercije za glavne centralne ose inercije (1) i (2) su:

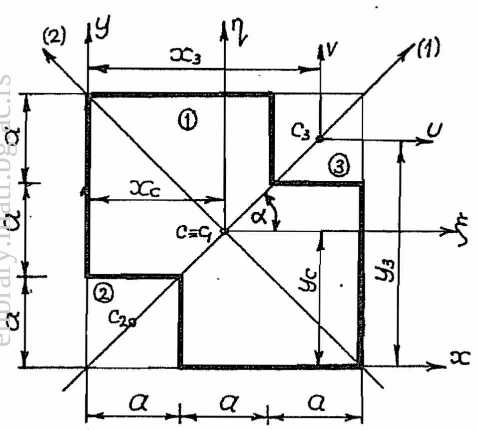
$$I_{1/2}=\frac{1}{2}\left(I_{\xi}+I_{\eta}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{4I_{\xi\eta}+\left(I_{\xi}-I_{\eta}\right)^{2}}$$

$$I_{12}=0 \qquad tg\,2\alpha=-\frac{2I_{\xi\eta}}{I_{\xi}-I_{\eta}}$$

Pri sračunavanju momenata inercije važno je uočiti da se moment inercije za posmatranu osu ne menja ako površinu pomeramo paralelno sa osom. Ovu činjenicu možemo iskoristiti da bi smo skratili postupak praktičnog izračunavanja momenata inercije složenih površina.

Kada izračunavamo moment inercije složene površine, istu podelimo na više prostih za koje su nam poznati sopstveni momenti inercije, a položajne odredjujemo kao proizvod odgovarajuće proste površine i rastojanja njene paralelne težišne ose od ose za koju je potrebno sračunati moment inercije složene površine, što se može videti u narednim primerima.

PRIMER I. Izračunati glavne centralne momente inercije za površinu prikazanu na slici br. 3.




Slika br.3

Da bi smo odredili tražene momente inercije ove složene površine podelićemo je na tri jednostavne površine. U ovom slučaju to su kvadrati. Prvi je stranice 3a, a drugi i treći stranica po a. Momenti inercije za ose Ox i Oy su:

$$I_x=I_x^{(1)}-I_x^{(2)}-I_x^{(3)}$$

$$I_y=I_y^{(1)}-I_y^{(2)}-I_y^{(3)}$$

$$I_{xy}=I_{xy}^{(1)}-I_{xy}^{(2)}-I_{xy}^{(3)}$$

Aksijalne momente inercije $I_x^{(1)}$ i $I_y^{(1)}$ za kvadrat nalazimo iz tablica iz Otpornosti materijala strana 21:

$$I_x^{(1)}=\frac{1}{3}(3a)^4=27a^4\ ;\quad I_y^{(1)}=\frac{1}{3}(3a)^4=27a^4\ ;\quad I_{xy}^{(1)}=\frac{1}{4}(3a)^4=\frac{81}{4}a^4$$

Aksijalni momenti inercije površine (2) za ose Ox i Oy su:

$$I_x^{(2)}=\frac{1}{3}a^4 \qquad I_y^{(2)}=\frac{1}{3}a^4$$

i centrifugalni moment:

$$I_{xy}^{(2)}=\frac{1}{4}a^4$$

Momente inercije površine (3) za ose Ox i Oy izračunavamo koristeći Steiner-ovu teoremu:

$$I_x^{(3)}=I_u+A_3\,y_3^2 \qquad I_{xy}^{(3)}=I_{uv}+A_3\,x_3 y_3$$

$$I_y^{(3)}=I_v+A_3\,x_3^2$$

gde su ose $u$ i $v$ paralelne osama Ox i Oy i prolaze kroz težište površine (3).

Kako je:

$$I_u = I_v = \frac{1}{12} a^4 \quad ; \; I_{uv} = 0 \quad , \; x_3 = y_3 = \frac{5}{2} a \quad ; \quad A_3 = a^2$$

dobija se:

$$I_x^{(3)} = I_y^{(3)} = \frac{1}{12} a^4 + a^2 \cdot \frac{25}{4} a^2 = \frac{19}{3} a^4 \quad ; \quad I_{xy}^{(3)} = 0 + a^2 \cdot \frac{5}{2} a \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} a^4$$

Sada su aksijalni momenti inercije površine za ose Ox i Oy:

$$I_x = 27a^4 - \frac{1}{3} a^4 - \frac{19}{3} a^4 = \frac{61}{3} a^4$$

$$I_y = 27a^4 - \frac{1}{3} a^4 - \frac{19}{3} a^4 = \frac{61}{3} a^4$$

dok je centrifugalni moment površine:

$$I_{xy} = \frac{81}{4} a^4 - \frac{1}{4} a^4 - \frac{25}{4} a^4 = \frac{55}{4} a^4$$

Težište površine je odredjeno koordinatama:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2 - A_3 x_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{9a^2 \cdot \frac{3}{2} a - a^2 \cdot \frac{a}{2} - a^2 \cdot \frac{5}{2} a}{9a^2 - a^2 - a^2} = \frac{3}{2} a$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{9a^2 \cdot \frac{3}{2} a - a^2 \frac{a}{2} - a^2 \cdot \frac{5}{2} a}{9a^2 - a^2 - a^2} = \frac{3}{2} a$$

Momente inercije za težišne ose $C\xi$ i $C\eta$ izračunavamo pomoću Steinerove teoreme:

$$I_\xi = I_x - A \cdot y_c^2 = \frac{61}{3} a^4 - 7a^2 \left(\frac{3}{2} a\right)^2 = \frac{55}{12} a^4$$

$$I_\eta = I_y - A\, x_c^2 = \frac{61}{3} a^4 - 7a^2 \left(\frac{3}{2} a\right)^2 = \frac{55}{12} a^4$$

a takodje i centrifugalni moment površine za iste centralne ose:

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - A\, x_c\, y_c = \frac{55}{4} a^4 - 7a^2 \cdot \frac{3}{2} a \cdot \frac{3}{2} a = -2a^4$$

Glavne centralne ose inercije dobijamo rotacijom osa $C\xi$ i $C\eta$ za ugao $\alpha$ koji sračunavamo posredstvom njegovog tangensa:

$$tg\, 2\alpha = - \frac{2 I_{\xi\eta}}{I_\xi - I_\eta} = - \frac{2 \cdot (-2a^4)}{\frac{55}{12} a^4 - \frac{55}{12} a^4} = +\infty$$

tj. $2\alpha = \pi/2 \Rightarrow \alpha = \pi/4$ .

Korišćenjem odgovarajućih ~~odgovarajućih~~ obrazaca za sračunavanje glavnih centralnih momenata inercije za naš slučaj dobijamo:

$$I_{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{55}{12} a^4 + \frac{55}{12} a^4\right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{4(-2a^4)^2 + \left(\frac{55}{12} a^4 - \frac{55}{12} a^4\right)^2}$$

$$I_1 = \frac{55}{12} a^4 + 2a^4 = \frac{79}{12} a^4 \quad ; \; I_2 = \frac{55}{12} a^4 - 2a^4 = \frac{31}{12} a^4$$

odnosno:

$$I_1 = \frac{79}{12} a^4 \quad ; \quad I_2 = \frac{31}{12} a^4$$

Zadatak se može mnogo JEDNOSTAVNIJE rešiti ako odmah uočimo da su ose (1) i (2) ose simetrije preseka,te je za te ose centrifugalni moment površine jednak nuli.Kako se ose simetrije preseka seku u težištu složene površine onda su to istovremeno i glavne centralne ose inercije.U tablicama iz Otpornosti materijala str.22 dati su opšti izrazi za momente inercije za kvadrat,a za ose koje se poklapaju sa dijagonalama kvadrata.

Aksijalni moment inercije za osu (1) direktno izračunavamo,jer se ona poklapa sa dijagonalama sva tri kvadrata,pa su položajni momenti inercije jednostavnih površina,složene površine jednaki nuli:

$$I_1 = I_1^{(1)} - I_1^{(2)} - I_1^{(3)} = \frac{1}{12}(3a)^4 - \frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{12}a^4 = \frac{79}{12}a^4$$

Kako su kvadrati (2) i (3) simetrično rasporedjeni u odnosu na osu (2)to je moment inercije složene površine za tu osu jednak:

$$I_2 = I_2^{(1)} - 2I_2^{(2)}$$

gde je:

$$I_2^{(1)} = \frac{1}{12}(3a)^4 = \frac{81}{12}a^4$$

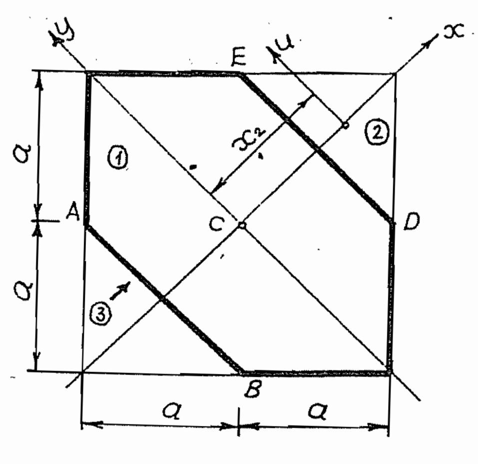
dok moment inercije $I_2^{(2)}$ sračunavamo posredstvom Steiner-ove teoreme:

$$I_2^{(2)} = I_2^{(S2)} + A_2 p^2 \quad ; \quad I_2^{(S2)} = \frac{1}{12}a^4 \quad ; \quad p = a\sqrt{2} \quad \rightarrow I_2^{(2)} = \frac{25}{12}a^4$$

i u krajnjem rezultatu aksijalni moment inercije za osu (2) je:

$$I_2 = \frac{81}{12}a^4 - 2\cdot\frac{25}{12}a^4 = \frac{31}{12}a^4.$$

PRIMER II.Izračunati glavne centralne momente inercije za površinu prikazanu na slici br. 4.



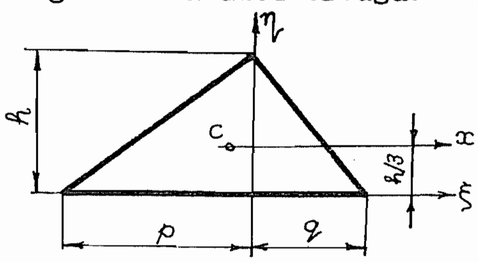

Slika br. 4

Očigledno je da su Cx i Cy glavne centralne ose inercije preseka,jer su ose simetrije preseka i seku se u težištu površine.Površinu pretstavimo pomoću tr jednostavne površine:kvadrata stranice 2a ,i dva pravougla trougla jednakih kateta po a.

Moment inercije za osu Cx možemo dobiti kada od momenta inercije kvadrata za Cx osu oduzmemo momente inercije dva trougla za istu osu:

$$I_x = I_x^{(1)} - 2\,I_x^{(2)}$$

gde momentu inercije $I_x^{(2)}$ prema Tablicama iz Otpornosti materijala na strani 24 odgovara za dati trougao obrazac za moment inercije za osu $\eta$ naznačenu na skici br. 5 :



Skica br. 5

$$I_\eta = \frac{1}{12}\,h\,(p^3+q^3)$$

Kako je u našem slučaju:

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2}a \;; \quad p = q = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

to je:

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3\right] = \frac{1}{24}a^4$$

odnosno:

$$I_x = \frac{1}{12}(2a)^4 - 2\cdot\frac{1}{24}\,a^4 = \frac{15}{12}a^4$$

Dobijeni moment inercije $I_x$ za osu Cx može se jednostavnije izračunati ako zamislimo da smo jedan od trouglova (3) ili (2) translatorno pomerili duž ose Cx, tako da se stranice AB i ED poklope, čime bi smo dobili umesto ta dva trougla jedan kvadrat stranice a, pa je moment inercije za Cx osu:

$$I_x = \frac{1}{12}(2a)^4 - \frac{1}{12}\,a^4 = \frac{15}{12}a^4$$

Moment inercije za Cy osu je:

$$I_y = I_y^{(1)} - 2\,I_y^{(2)}$$

gde je:

$$I_y^{(2)} = I_u + A_2 x_2^2$$

odnosno $I_u$ je sopstveni moment inercije za težišnu u osu trougla kako je naznačeno na slici br. 4, a $A_2 x_2^2$ je položajni moment inercije koji je srazmeran kvadratu rastojanja $x_2$ težišta trougla od ose Cy.

Kako osa u prolazi kroz težište trougla to njoj prema skici br.5 iz Tablica iz Otpornosti materijala odgovara osa x za koju je moment inercije

$$I_x = \frac{1}{18}A\,h^2$$

te je

$$I_u = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{72}\,a^4$$

Rastojanje $x_2$ je:

$$x_2 = a\sqrt{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,a = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$$

Te je aksijalni moment inercije:

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{72}a^4 + \frac{1}{2}a^2\left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{33}{72}a^4$$

Konačno aksijalni moment inercije složene površine za osu Cy je:

$$I_y = \frac{1}{12}(2a)^4 - 2\cdot\frac{33}{72}a^4 = \frac{5}{12}a^4$$

čime smo rešili postavljeni zadatak.

# R E G I S T A R   Z A D A T A K A

## I.S T A T I K A

### I.1.STATIKA U RAVNI



## II. O T P O R N O S T   M A T E R I J A L A

### II.1.NAPREZANJE U DVA PRAVCA



### II.UVIJANJE

Novembar 1978,drugi zadatak,tekst 93,rešenje 95;

II.3.KOSO SAVIJANJE

Septembar 1977,drugi zadatak,tekst 36,rešenje 38;
Januar 1978,drugi zadatak,tekst 61,rešenje 38;
Oktobar 1978,drugi zadatak,tekst 85,rešenje 88;

II.4.IZVIJANJE

Januar 1977,drugi zadatak,tekst 15,rešenje 17;
Oktobar 1977,drugi zadatak,tekst 42,rešenje 44;
Mart 1978,drugi zadatak,tekst 66,rešenje 68;
Januar 1979,drugi zadatak,tekst 108,rešenje 110;

II.5.EKSCENTRIČNI PRITISAK

April 1977,drugi zadatak,tekst 26,rešenje 27;
Juni 1977,drugi zadatak,tekst 30,rešenje 32;
Decembar 1977,drugi zadatak,tekst 56,rešenje 57;
Septembar 1978,drugi zadatak,tekst 78,rešenje 80;

II.6. S A V I J A N J E

II.6.1.Savijanje statički odredjenih nosača

Novembar 1976,treći zadatak,tekst 5,rešenje 7;
Decembar 1976,treći zadatak,tekst 10,rešenje 13;
Januar 1977,treći zadatak,tekst 15,rešenje 18;
Mart 1977,treći zadatak,tekst 20,rešenje 23;
April 1977,treći zadatak,tekst 26,rešenje 28;

II.6.2.SAVIJANJE STATIČKI NEODREDJENIH NOSAČA

Juni 1977,treći zadatak,tekst 30,rešenje 34;
Septembar 1977,treći zadatak,tekst 36,rešenje 39;
Oktobar 1977,treći zadatak,tekst 42,rešenje 46;
Novembar 1977,treći zadatak,tekst 50,rešenje 53;
Decembar 1977,tekst 56,rešenje 59;
Januar 1978,treći zadatak,tekst 61,rešenje 64;
Mart 1978,treći zadatak ,tekst 66,rešenje 69;
April 1978,treći zadatak,tekst 71,rešenje 74;
Septembar 1978,treći zadatak,tekst 78,rešenje 81;
Oktobar 1978,treći zadatak,tekst 85,rešenje 89;
Decembar 1978,treći zadatak,tekst 100,rešenje 103;
Januar 1979,treći zadatak,tekst 108,rešenje 111;

# S A D R Ž A J

D.Rašković:OTPORNOST MATERIJALA,Naučna knjiga ,Beograd 1973.
V.Vujičić:STATIKA, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, 1973
D.Rašković:STATIKA,Naučna knjiga,Beograd 1963.