

У Н И В Е Р З И Т Е Т У Б Е О Г Р А Д У

Др инж. ДАНИЛО РАШКОВИЋ

МЕХАНИКА

II

КИНЕМАТИКА

ТРЕЋЕ ДОПУЊЕНО ИЗДАЊЕ

ЗАВОД ЗА ИЗДАВАЊЕ УЏБЕНИКА
СОЦИЈАЛИСТИЧКЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
Б Е О Г Р А Д

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade

elibrary.matf.bg.ac.rs

ПРЕДГОВОР ПРВОМ ИЗДАЊУ

Geometrica
geometricae

Овај уџбеник садржи предавања из *кинематике* која држим студентима III семестра Машинског одсека Техничког факултета према новом наставном плану, а друга је књига целог курса механике који се предаје у II, III и IV семестру.

Градиво кинематике подељено је у два дела: *кинематику тачке* и *кинематику крућој шела*, те, дакле, обухвата све кинематичке проблеме, са нешто широм разрадом *равној крећњања*, које ће послужити као оснoв за проучавање *кинематичке механике*.

И овај део механике обрађен је у векторском рачуну. Теоријска излагања пропраћена су и решеним задацима који су рађени са студентима на вежбањима или су били испитни задаци, да би сваки теоријски проблем био искоришћен и у практичном машинству.

Док су као додатак уз Статику дати основи векторског рачуњања (векторска алгебра), уз ову књигу дати су: векторска анализа, примена вектора у диференцијалној геометрији и теорија поља и то у оном обиму који је потребан при проучавању механике.

Професор Техничког факултета инж. Д. Витас прочитао је уџбеник у рукопису и ставно ми је врло корисне примедбе, те му се овом приликом најсрдачније захваљујем.

Нухић Фадиљ и Ђокић Милан, студенти технике, брижљиво су урадили цртеже, на чему сам им много захвалан.

Колеги инж. Д. Лазаревићу, коректору ове књиге, захваљујем на заузимању да књига и технички буде добро опремљена.

1. новембра 1947. године
Београд

Д. РАШКОВИЋ

ПРЕДГОВОР ДРУГОМ ИЗДАЊУ

У другом издању Кинематике, друге књиге целог курса механике, основне црте остале су исте као у првом издању, само су извршене допуне појединих делова и додати су нови чланови: 4.3 g; 8.4; 9.11; 10.6.

Иако су се појавили уџбеници из теорије вектора, ипак сам, по жељи студената, задржао као додатак: *векторску анализу, примену вектора у диференцијалној геометрији и теорију поља*. Примена вектора у диференцијалној геометрији проширена је, с обзиром на потребе динамике, теорије осцилација односно хидромеханике. Теорија поља дата је укратко пошто је детаљније изнета као додатак уз Динамику. И у овој књизи остао сам доследан Лоренцовом обележавању векторских величина.

У циљу бољег савлађивања градива број задатака је повећан на 97, и то већином испитних задатака.

У првом издању било је техничких недостатака у погледу слога и извесних слика, али су захваљујући радном колективу „Научне књиге“ ови недостаци у другом издању отклоњени.

10. марта 1950. године
Београд

Д. РАШКОВИЋ

ПРЕДГОВОР ТРЕЋЕМ ИЗДАЊУ

Градиво из Кинематике у овом издању је нешто проширено у складу са новим наставним програмима за други и трећи степен студија (нови чланови 4.7; 4.8; 8.5; 12.5; 12.6; Додатак 2.10. и 3.6). Многи задаци су редиговани и њихов број је повећан.

Милош Ристић урадио је врло брижљиво нове цртеже те му се срдечно захваљујем.

Морам одати признање и захвалност VI радној бригади Београдског графичког завода на залагању да се овај тешки текст добро и брзо сложи.

Најсрдачније захваљујем колективу Завода за издавање уџбеника СР Србије који је преузео штампање уџбеника и заузимањем омогућио да књига технички буде добро опремљена.

10. априла 1966. године
Београд

Д. РАШКОВИЋ

У В О Д

0.1. Задатак кинематике. — У уводу Статике изнели смо класичну поделу механике на *статичку*, *кинематичку* и *динамичку*, и видели да кинематика испитује кретање геометријских облика не водећи рачуна о њиховој материјалности, као ни о узроцима који производе ова кретања. Она је, дакле, *геометрија кретања*, и разликује се од геометрије што при проучавању кретања узима у обзир и *време*. Пошто и статика припада геометрији, то су обе ове дисциплине сличне; оне испитују просторне односе система вектора (сила, односно кинематичких величина), па се, применом векторског рачуна, у обе дисциплине могу извести аналоге теореме, иако је физикални значај вектора у оба система различит.

Статичким елементима *сила* и *спрега* одговараће кинематички елементи *уједначена брзина* и *транслаторна брзина*. Прва је, као и сила, клизећи вектор, а друга, као и спрег, слободан вектор. У статисти у простору видели смо да се сваки просторни систем сила може свести на *динаму*, која је једнозначно одређена, у кинематици, пак, уочићемо да се свако кретање може свести на *завојно кретање (завртња)*. Улогу централне осе има овде *оса завртња*. За разлику од кинематичког завртња, динама је *динамички завртња*. У овоме и јесте предност векторског рачуна — да се различити проблеми могу интерпретирати само геометријском методом.

Кинематика се дели у два дела: *кинематичку тачку* и *кинематичку крућу тачку*. У првом делу испитује се кретање геометријске тачке, у другом, пак, кретање система тачака. Систем тачака може бити *линеаран* (образује *линију* или *шпату*), *раван* (образује *равну фигуру* или *панку* или *плочу*) и *просјоран* (образује *крућу тачку*).

Под *крућим телом*, као што смо видели у статисти, подразумевамо тело код кога растојање између ма којих његових тачака остаје при кретању непромењено. Таква тела у природи не постоје, она су апстрактна. У природи постоје *чврста тела* која су подвргнута деформацијама, јер се растојања тачака мењају под утицајем сила, те тело мења свој облик, деформише се. Проучавање ових проблема припада теорији еластичности или практичној отпорности материјала.

Кинематика је део рационалне (теоријске) механике, али има и практични део, такозвану *кинематичку механику* (стројева), која проучава кретање механизма (стројева), а ови су основ конструкције машина.

0.2. Мерење величина. Систем мера. — Просторне величине: *облик, величину (зајремину) и положај* мерили смо у геометрији *дужинама и угловима*, то јест скаларним величинама — скаларима (бројевима).

Под *мејром* се сматра дужина усвојена на Међународном конгресу 1889. године чији је *протојипиј* направљен од легуре платине (90%) и иридијума (10%) и чува се у Међународном заводу за мере и тежине у Северу (Париз). Он је приближно једнак 10^7 -мом делу *квадранта Земљиној меридијана*. Подела метра на делове извршена је према *декадном систему*.

Јединице *површине* изведене су из јединице дужине — а исто тако и јединице *зајремине*. Према томе је јединица дужине основна мера просторне величине тела.

Углове меримо у *степенима* и у лучној мери (*радијанима*). При подели степена на делове не важи декадна подела, већ позната *хексајонална подела* старих Вавилоњана, пошто је њихова година имала 360 дана. Поред мере у степенима, постоји и мера углова у *градима*. У овом случају важи декадна подела (1 град = 400 центигради; 1 центиград = 100 минута; 1 минут = 100 секунди).

Трајање једног пуног обрта Земље зове се *звездани дан*. То је у ствари време протекло између два узастопна проласка звезде некретнице кроз меридијан места у коме вршимо мерење. Звездани дан се дели на 24 звездана часа, овај на 60 звезданих минута, а звездани минут на 60 звезданих секунди, тако да звездани дан има 86 400 звезданих секунди — то јест 86 400 *основних јединица времена*. Ова јединица времена употребљава се у астрономији. Међутим, у механици, као и у практичном животу, уместо звезданог дана узима се *средњи сунчани дан*, а то је време између два узастопна проласка средњег, замишљеног, сунца кроз меридијан места посматрања. Средње сунце је узето због неравномерности сунчаног дана.

Између једног и другог дана постоји овај однос: $1 \text{ sec} = \frac{1}{86\,164,091}$ део звезданог дана. Ово је *основна јединица времена*.

Изведене јединице су: $1 \text{ min} = 60 \text{ sec}$; $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ sec}$.

При посматрању кретања не водимо рачуна о протеклом или будућем времену, већ се ограничавамо само на онај период у коме посматрамо кретање. Према томе *време* сматрамо *парамејром* чијом се променом непрекидно мења и кретање. Али има и таквих проблема у којима морамо водити рачуна о бесконачно блиском прошлом и бесконачно блиском

будућем времену, јер су те две брзине различите, као на пример при судару (брзина доласка и брзина одласка). Сматрајући време параметром, а пошто су пут и брзина функције тог параметра, при судару имамо две брзине, односно два извода функције (леви и десни).

Жеља да се основне јединице дужине и времена дефинишу помоћу Земљиних димензија или, пак, њеног кретања, није остварена, те су, дакле, ове јединице *усвојене*.

Сви кинематички елементи: *јуш*, *брзина* и *убрзање* изражавају се помоћу ових основних величина — *дужине* и *времена*. Како између ових кинематичких величина постоје извесни односи, постојаће и односи између њихових мера — *димензија*. Обрасци морају бити независни од избора основних јединица, то јест морају бити *хомогени* у односу на дужину и време. У теоријском апсолутном и техничком систему мера узимају се основне јединице *центиметар* и *секунд*, а у практичним системима *метар* и *секунд*.

0.3. Закон о мерним јединицама и мерилима. — Мерење у СФР Југославији врши се мерним јединицама одређеним *Законом о мерним јединицама и мерилима* (Службени лист бр. 45/61).

Према овом закону називи множина и делова мерних јединица добијају се помоћу *предметка* који се ставља испред основне јединице *изложивоца* (*ексионенција*). Они гласе: *тера* (Т) 10^{12} ; *гига* (Г) 10^9 ; *мега* (М) 10^6 ; *кило* (к) 10^3 ; *хекто* (h) 10^2 ; *дека* (da) 10^1 ; *деци* (d) 10^{-1} ; *сенти* (с) 10^{-2} ; *мили* (m) 10^{-3} ; *микро* (μ) 10^{-6} ; *нано* (n) 10^{-9} ; *пико* (p) 10^{-12} .

Уз закон је дат и списак мерних јединица којим је одређено шта се подразумева под појединим мерним јединицама, као и изведене множине и делови мерних јединица.

Јединица за мерну дужину је *метар* (m). Он је дужина једнака 1 650 763,73 таласних дужина радијације у вакууму која одговара прелазу између нивоа 2 г 10 и 5 d 5 атома криптона 86.

За микрометар (μ m) допушта се назив *микрон* (μ), а за нанометар. (nm) назив *милимикрон* (m μ).

У поморском и ваздухопловном саобраћају употребљава се *морска миља* 1 852 метара.

Јединица за површину је *квадратни метар* (m^2), а за запремину *кубни метар* (m^3). У поморству се употребљава *бродска тона*, запремине 2,832 m^3 .

Јединице за угао у равни су *радијан* (rad) и *прави угао* (\angle).

Радијан је угао са теменом у средишту круга који захвата на његовом обиму лук дужине једнаке његовом полупречнику. Прави угао граде две праве које се секу под једнаким угловима. Делови правоугла су: степен $1^\circ = 1/90$ од \angle ; минут $1' = 1^\circ/60$; секунд $1'' = 1'/60$; градус $1^\circ = 1/100$ од \angle . Према томе је $1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi = 200/\pi$ градуса.

Јединица за просторни угао је *стеррадијан* (sr). Он је просторни угао се теменом у средишту сфере (лопте) који захвата на њој површину једнаку квадрату њеног полупречника.

Јединица за време је *секунд* (s, sec). Секунд је $1/31\,556\,925,974\,7$ тропске године у 12 сати ефемеридног времена 0. јануара 1900.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade

elibrary.maf.bg.ac.rs

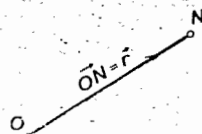
I ДЕО

КИНЕМАТИКА ТАЧКЕ

1. ОДРЕЂИВАЊЕ ПОЛОЖАЈА ТАЧКЕ У ПРОСТОРУ

1.1. Координатни системи. Координате. Вектор положаја. — *Кинематичка тачка* иста је са *геометријском* тачком. Према томе, проучавати кретање покретне тачке исто је што и проучавати кретање геометријске тачке. За тачку N кажемо да се *креће* у некој средини ако се у различитим тренуцима поклапа са различитим тачкама те средине. Та тачка средине са којом се у посматраном тренутку поклапа покретна тачка, одређује положај покретне тачке у датој средини. Природа кретања захтева *непрекидност*, што значи да покретна тачка у два бескрајно блиска временска тренутка заузима и два бескрајно блиска положаја у тој средини.

Положај тачке у простору може се одредити на више начина: *синтетички* — као пресек површина или линија конструисаних под датим условима, *векторски* — помоћу вектора који спаја покретну тачку са једном изабраном тачком средине у којој се тачка креће, и *аналитички* — помоћу координата. Вектор \vec{ON} зове се *вектор положаја покретне тачке у односу на тачку (пол) O* (сл. 1). Сваки вектор је одређен са *три податка*, па ћемо положај тачке N моћи одредити ако познајемо *интензитет* — *модул*, *правац* и *смер* вектора положаја $\vec{r} = \vec{ON}$. На овај начин је положај покретне тачке једнозначно одређен у односу на средину у којој се тачка креће.

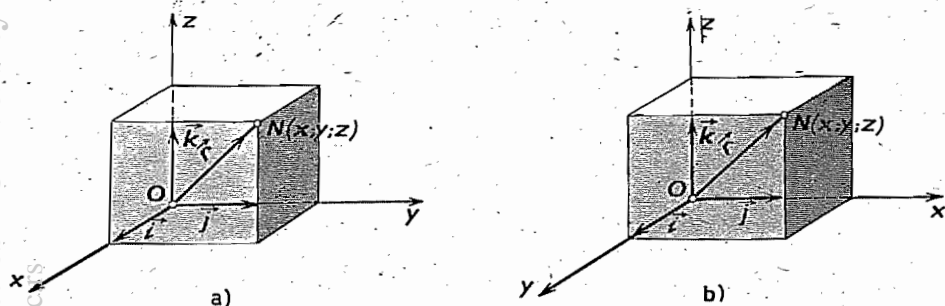


Слика 1. — Вектор положаја покретне тачке

Координате тачке су скаларни параметри (бројеви) чије вредности одређују положај покретне тачке. Постоје разни начини којима се уводе ови скаларни параметри. Скуп ових координата чини *координатни систем*.

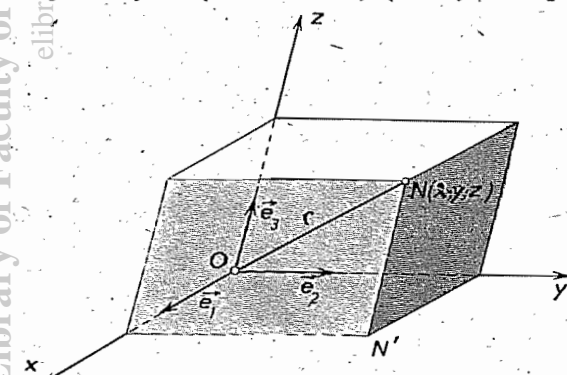
1.2. Декартов координатни систем. — Три оријентисане праве (осе), Ox , Oy , Oz , које пролазе кроз сталну тачку O и не леже у истој равни, образују *Декартов (Descartes) координатни систем*. Ове праве се зову

координатне осе и оне образују три равни, Oxy , Oyz , Ozx , које се зову координатне равни. Тачка O је координатни почетак.



Слика 2. — Декартов правоугли координатни систем десне и леве диспозиције

Ако су све три осе система међу собом управне, Декартов координатни систем је *правоугли (ортононалан)* (сл. 2). У противном случају он је *косоугли (локсононалан)* (сл. 3). И ортови координатних оса, узети у истом поретку као и осе,



Слика 3. — Декартов косоугли координатни систем

чине јединични триедар — координатни триедар. Карактер оријентације оса може да буде двојак. Ако смерови оса одговарају палцу, кажипрсту и средњем прсту *десне руке* (са дланом навише), координатни систем зове се систем *десне оријентације (диспозиције)* или, краће, *десни координатни систем* (сл. 2a). У овом систему, гледајући из оног дела простора куда је усмерена Oz -оса, видимо да Ox -оса, обртањем у обрнутом смеру кретања сатне казаљке, долази до поклапања са Oy -осом. Ова се оријентација назива *десна*, па је и систем *десни*. Ако се осе оријентишу према *левој руци*, систем је *леве диспозиције*, то је *леви координатни систем* (сл. 2b). За исти положај Oz -осе, Ox -оса кретањем у смеру кретања сатне казаљке долази до поклапања са Oy -осом.

Положај покретне тачке према ортогоналном систему одређен је са три броја, x , y , z , који се зову *Декартове правоугле координате*. Оне су у ствари алгебарске пројекције вектора положаја покретне тачке на координатне осе. На тај начин вектор положаја може се написати у облику

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \quad (1)$$

где су $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортови координатних оса. Координате тачке могу се представити скаларним производом вектора положаја и орта дотичне осе:

$$x = (\vec{r}, \vec{i}) = r \cos \alpha; \quad y = (\vec{r}, \vec{j}) = r \cos \beta; \quad z = (\vec{r}, \vec{k}) = r \cos \gamma, \quad (2)$$

где су α, β, γ углови које чини вектор-положаја \vec{r} са координатним осама. Косинуси ових углова јесу координате орта вектора положаја \vec{r}_0 , те између њих постоји позната релација

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (3)$$

Ако положај тачке у косоуглом систему одредимо вектором положаја \vec{r} , онда се он може представити помоћу компонената дуж координатних оса у облику

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3, \quad (4)$$

где су $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ортови координатних оса, а x, y, z косоуле координате.

Када кретање посматрамо у равни Oxy , онда је $z=0$, те су координате тачке само x и y . Ови се системи називају *Декартови координатни системи у равни*.

На пример, једначина праве која гради одсечке a и b на осама Ox и Oy , због $b\vec{j} = a\vec{i} + l$ и $\vec{r} = a\vec{i} + \lambda l = x\vec{i} + y\vec{j}$, била би

$$[\vec{r} - a\vec{i}, l] = [\vec{r}, -a\vec{i} + b\vec{j}] - ab[\vec{i}, \vec{j}] = 0,$$

то јест

$$(x/a) + (y/b) = 1.$$

Напротив, у косоуглом координатном систему, због $b\vec{e}_2 = a\vec{e}_1 + l$; $\vec{r} = a\vec{e}_1 + \lambda l = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, била би

$$[\vec{r} - a\vec{e}_1, l] = [\vec{r}, -a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2] - ab[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = 0,$$

то јест

$$(x/a) + (y/b) = 1.$$

Пошто су формуле трансформација координата система Oxy у систем $O\xi\eta$:

$$x = \xi + \eta \cos \theta, \quad y = \eta \sin \theta,$$

централна једначина круга у оба система је

$$x^2 + y^2 = R^2; \quad \xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos \theta = R^2.$$

1.3. Поларно-цилиндрички координатни систем. — Када на оријентисану праву Oz , у тачки O , положимо раван (Π_3) управну на праву и у њој узмемо нову оријентисану праву (p) , тада се положај тачке N може одредити са три скаларне величине: 1° растојањем z тачке N од оријентисане равни (Π_3) , 2° растојањем r пројекције N' тачке N на ту раван од O , и 3° углом $\varphi = \sphericalangle(p, r)$ који гради *поше* r са осом (p) , а рачуна се да је позитиван у супротном смеру кретања сатне казаљке. Ове три

скаларне величине r, φ, z , зову се *поларно-цилиндричке координате* тачке у простору. Тачка O зове се *пол сисѐма*, а оса (p) *поларна оса* (сл. 4).

Скалар $r = \text{const.}$ одређује кружни цилиндар (Π_1) чија се оса поклапа са Oz -осом; $\varphi = \text{const.}$ одређује вертикалну раван (Π_2) , која пролази кроз

осу Oz и са координатном равни Oxz чини угао φ , док скалар $z = \text{const.}$ одређује *хоризонталну раван* (Π'_3) паралелну Oxy -равни на удаљењу z од ње. Дакле, координатне су површине: *кружни цилиндар и две равни*. Тачка N одређена је пресеком ових *координатних површина*.

Пресеци координатних површина одређују *координатне линије*. Пресек $(\Pi_1 \Pi_2)$ даје *праву линију* паралелну Oz -оси, $(\Pi_2 \Pi_3)$ *праву* управну на Oz -осу и $(\Pi'_3 \Pi_1)$ *кружну линију* са центром на Oz -оси. Тангенте повучене на координатне линије у тачки N представљају координатне осе, које су такође ортогоналне, па је, дакле, *поларно-цилиндрички сисѐм ортоџоналан*.

Положај тачке N можемо одредити вектором положаја $\vec{\rho}$, па је

$$\vec{\rho} = r \vec{r}_0 + z \vec{k} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \quad (5)$$

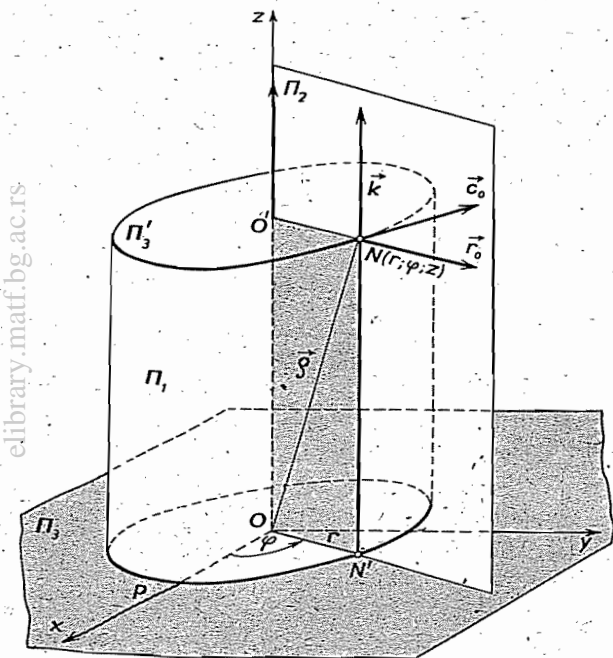
где су \vec{r}_0 и \vec{k} ортови *радијалној* и *аксијалној* правца.

Ако у полу O узмемо Декартов правоугли координатни систем тако да осе Ox и Oy леже у равни (Π_3) и да се Ox -оса поклапа са поларном осом, онда између Декартових правоуглих и цилиндричких координата постоје ове везе:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z. \quad (6)$$

Обратно, поларно-цилиндричке координате могу се изразити помоћу Декартових координата у облику

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}; \quad z = z. \quad (6')$$



Слика 4. — Поларно-цилиндрички координатни систем

Ако је $z=0$, онда све тачке леже у равни Oxy , па су r и φ поларне координате тачке у равни:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi. \quad (6'')$$

Углови које граде ортови Декартовог правоуглог система са ортовима оса поларно-цилиндричког система дати су у следећој схеми:

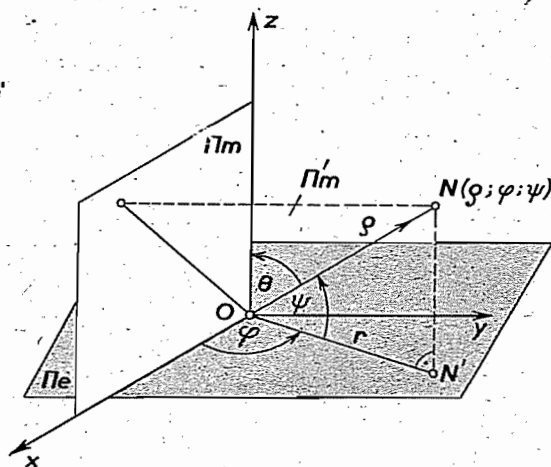
		r	φ	z
		\vec{r}_0	\vec{c}_0	\vec{k}
x	\vec{i}	φ	$\varphi + 1/2 \pi$	$1/2 \pi$
y	\vec{j}	$-1/2 \pi + \varphi$	φ	$1/2 \pi$
z	\vec{k}	$1/2 \pi$	$1/2 \pi$	0

па се ортови једног система могу изразити помоћу ортова другог система на овај начин:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{r}_0 \cos \varphi - \vec{c}_0 \sin \varphi; & \vec{r}_0 &= \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi; \\ \vec{j} &= \vec{r}_0 \sin \varphi + \vec{c}_0 \cos \varphi; & \vec{c}_0 &= -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi; \\ \vec{k} &= \vec{k}; & \vec{k} &= \vec{k}. \end{aligned} \quad (6''')$$

Ортови \vec{r}_0 , \vec{c}_0 и \vec{k} падају у правце тангенти на координатне линије, то јест у *радијалан*, *циркуларан* и *аксијалан* правац.

1.4. Сферни координатни систем. — На оријентисану праву Oz , у тачки O , положимо раван (Π_0) , управну на њу, и кроз исту осу вертикалну полураван (Π_m) чија је граница та права (сл. 5а), тада положај покретне тачке можемо одредити: 1^о дужином потега $\overline{ON} = \rho$ (поларни радијус), 2^о углом φ , између сталне полуравни $(\Pi_m$ — *први меридијан*) и вертикалне равни која пролази кроз тачку N и осу Oz (Π'_m — *меридијан тачке N*), а рачуна се да је позитиван у супротном смеру кретања сатне казаљке, и 3^е углом ψ , који чини потег ρ



Слика 5а) — Сферни координатни систем

са хоризонталном равни (Π_e —раван екватора), и који се мења у интервалу од $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Ове три скаларне величине, ρ , φ , ψ , зову се *сферне координате тачке у простору*.

Уместо угла ψ („географска ширина“) можемо узети угао θ између потеза ρ и Oz -осе („поларно растојање“), који је комплементаран угао угла ψ , ($\theta = \pi/2 - \psi$).

Скалар $\rho = \text{const.}$ одређује *сферу* (лопту Π_1) полупречника ρ са средиштем у O (центар система); $\varphi = \text{const.}$ одређује *вертикалну раван* (Π_2) која пролази кроз осу Oz (поларна оса), то јест *меридијан* (Π'_m), и $\psi = \text{const.}$ одређује *кружни конус* (Π_3) са Oz -осом и врхом у O . Дакле, координатне су површине: *сфера*, *меридионална раван* и *кружни конус* (сл. 5b). Тачка N одређена је пресеком ових површина.

Пресеци координатних површина одређују *координатне линије*. Пресек ($\Pi_1 \Pi_2$) је *кружна линија* (меридијан), ($\Pi_2 \Pi_3$) *права линија* кроз координатни почетак и ($\Pi_3 \Pi_1$) *хоризонтална кружна линија* (ујоредник). Тангенте на координатне линије представљају координатне осе, које су такође ортогоналне; дакле, и *сферни систем је ортогоналан*.

Положај тачке N можемо одредити вектором положаја

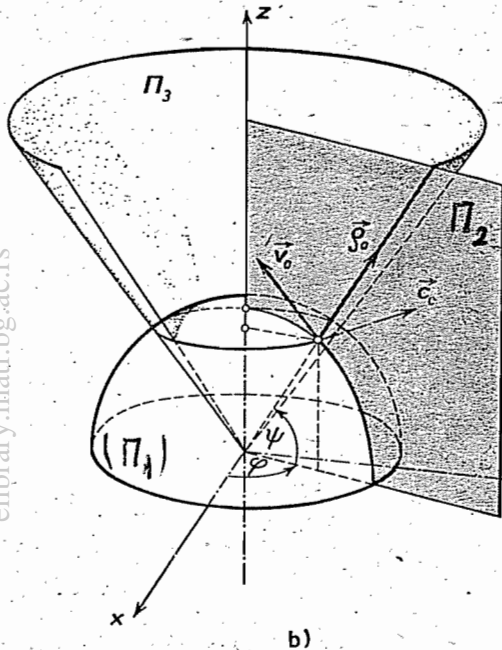
$$\vec{\rho} = \rho \vec{\rho}_0 = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \quad (7)$$

где је $\vec{\rho}_0$ орт вектора положаја. Ако у центру O узмемо Декартов правоугли систем тако да се први меридијан поклопи са Ozx -равни (профилницом), а Oxy -раван са екватором, онда између Декартових правоуглих и сферних координата постоје ове везе:

$$x = \rho \cos \psi \cos \varphi; \quad y = \rho \cos \psi \sin \varphi; \quad z = \rho \sin \psi. \quad (8)$$

Обратно, сферне координате могу се изразити помоћу Декартових координата у облику:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}; \quad \psi = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (8')$$



Слика 5b) — Сферни координатни систем — координатне површине

Ортови $\vec{\rho}_0$, \vec{c}_0 и \vec{v}_0 падају у правце тангенти на координатне линије (поларног радијуса, упоредника и меридијана), то јест у правце *радијалан*, *циркуларан* и *меридионалан*. С обзиром на (7) и (8), између ортова једног и другог система постоји ова, такозвана „косинусна схема“:

		ρ	φ	ψ
		$\vec{\rho}_0$	\vec{c}_0	\vec{v}_0
x	\vec{i}	$\cos \psi \cos \varphi$	$-\sin \varphi$	$-\sin \psi \cos \varphi$
y	\vec{j}	$\cos \psi \sin \varphi$	$\cos \varphi$	$-\sin \psi \sin \varphi$
z	\vec{k}	$\sin \psi$	0	$\cos \psi$

(8'')

па се ортови једног система могу изразити помоћу ортова другог, и обратно, према следећим обрасцима:

$$\begin{aligned}
 \vec{i} &= \vec{\rho}_0 \cos \psi \cos \varphi - \vec{c}_0 \sin \varphi - \vec{v}_0 \sin \psi \cos \varphi; \\
 \vec{j} &= \vec{\rho}_0 \cos \psi \sin \varphi + \vec{c}_0 \cos \varphi - \vec{v}_0 \sin \psi \sin \varphi; \\
 \vec{k} &= \vec{\rho}_0 \sin \psi + \vec{v}_0 \cos \psi; \\
 \vec{\rho}_0 &= \vec{i} \cos \psi \cos \varphi + \vec{j} \cos \psi \sin \varphi + \vec{k} \sin \psi; \\
 \vec{c}_0 &= -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi; \\
 \vec{v}_0 &= -\vec{i} \sin \psi \cos \varphi - \vec{j} \sin \psi \sin \varphi + \vec{k} \cos \psi.
 \end{aligned}$$
(8''')

1.5. Генералисани координатни систем. — За координате тачке N можемо узети три произвољне функције Декартових координата:

$$q_1 = q_1(x, y, z); \quad q_2 = q_2(x, y, z); \quad q_3 = q_3(x, y, z). \quad (9)$$

Обратно, Декартове координате можемо изразити као функције од q_1, q_2, q_3 у облику:

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3); \quad y = f_2(q_1, q_2, q_3); \quad z = f_3(q_1, q_2, q_3). \quad (9')$$

Ова три броја, q_1, q_2, q_3 , зову се *генералисане координате тачке у простору*. У Декартовом систему ти су бројеви били x, y, z , у поларно-цилиндричком систему r, φ, z , а у сферном ρ, φ, ψ .

Претпоставимо да је једна координата константна, на пример $q_1 = C_1 = \text{const.}$, а да се друге две произвољно мењају, онда једначине

$$x = f_1(C_1, q_2, q_3); \quad y = f_2(C_1, q_2, q_3); \quad z = f_3(C_1, q_2, q_3)$$

Вектор положаја тачке зависи од Декартових координата, па ће зависити и од генералисаних координата

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = \vec{r}(q_1, q_2, q_3).$$

Означимо ли са $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$, ортове криволинијских координатних оса, онда између њих и ортова Декартовог правоуглог система постоји извесна веза. Како је вектор положаја $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ добијамо да је тотални диференцијал вектора положаја

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz = ds \cdot \vec{T}; \quad |d\vec{r}| = ds; \quad d\vec{r} = \vec{i}ds_x + \vec{j}ds_y + \vec{k}ds_z.$$

Он је вектор чији је интензитет једнак елементу лука криве и пада у правац тангенте на криву, а у смеру пораста лука (Додатак, II, чл. 1). Из претходног следи да парцијални извод вектора положаја по координати x пада у правац орта \vec{i} , то јест x -осе. Његов интензитет једнак је количнику ds_x/dx , односно количнику диференцијала лука дуж те координатне линије и диференцијала саме координате. За случај сферног система имали бисмо

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{i}\rho \cos \psi \cos \varphi + \vec{j}\rho \cos \psi \sin \varphi + \vec{k}\rho \sin \psi,$$

па је

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} d\psi = \vec{\rho}_0 \cdot ds_\rho + \vec{c}_0 \cdot ds_\varphi + \vec{v}_0 \cdot ds_\psi,$$

те је парцијални извод

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = \vec{v}_0 \cdot \frac{ds_\psi}{d\psi} = \rho \frac{d\psi}{d\psi} (-\vec{i} \sin \psi \cos \varphi - \vec{j} \sin \psi \sin \varphi + \vec{k} \cos \psi) = \vec{v}_0 \rho \frac{d\psi}{d\psi}.$$

Његов интензитет је једнак количнику диференцијала лука који се мења дуж меридијана (ds_ψ) и диференцијала генералисане координате ($d\psi$). Дакле, можемо рећи да је парцијални извод вектора положаја по генералисаној координати q_i вектор који пада у правац тангенте на координатну линију дуж које се мења та координата:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \cdot \vec{T}_i = \frac{ds_i}{dq_i} \vec{T}_i = A_i \vec{T}_i \quad \checkmark \quad (11)$$

где смо са A_i означили интензитет овог парцијалног извода — такозвани Ламеов (*Lamé*) коефицијен^т*. Пошто су $x = f_1(q_1, q_2, q_3)$, $y = f_2(q_1, q_2, q_3)$ и $z = f_3(q_1, q_2, q_3)$ то је извод

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \vec{i} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \vec{j} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \vec{k} \frac{\partial z}{\partial q_i} = A_i \vec{T}_i; \quad i = 1, 2, 3,$$

* G. Lamé (1795—1870): „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications“ — Paris 1859.

па је његов интензитет

$$A_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} = \frac{ds_i}{dq_i} \quad (12)$$

С обзиром на претходну релацију, орт тангенте биће

$$\vec{T}_i = \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{k} \right), \quad (13)$$

па су углови које гради орт \vec{T}_i са координатним осама триедра $Oxyz$ одређени следећим релацијама:

$$\cos \sphericalangle(\vec{i}, \vec{T}_i) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial x}{\partial q_i}; \quad \cos \sphericalangle(\vec{j}, \vec{T}_i) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial y}{\partial q_i}; \quad \cos \sphericalangle(\vec{k}, \vec{T}_i) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial z}{\partial q_i};$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Ламеови коефицијенти за три наведена координатна система биће:

q_i	x	y	z	r	φ	z	ρ	φ	ψ
dq_i	dx	dy	dz	dr	$d\varphi$	dz	$d\rho$	$d\varphi$	$-d\psi$
ds_i	dx	dy	dz	dr	$r d\varphi$	dz	$d\rho$	$\rho \cos \psi d\varphi$	$\rho d\psi$
A_i	1	1	1	1	r	1	1	$\rho \cos \psi$	ρ

(14)

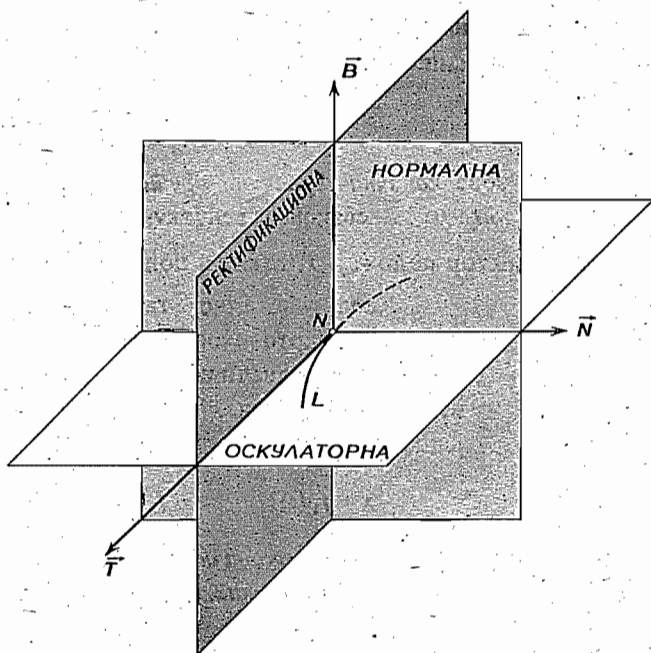
Из овог видимо да је Ламеов коефицијент *неименовани број* ако генералисана координата има димензију дужине, и да има димензију дужине када је генералисана координата угао.

1.6. Природни триедри. — При проучавању кретања тачке по линији или површини често примењујемо *природне триедре* за линију и површину, те ћемо их изложити.

а) Природни триедар за линију. — У свакој тачки криве линије можемо повући три значајне праве: *шанијенту*, *главну нормалу*, која пада у правац полупречника кривине и усмерена је ка средишту кривине, и *бинормалу*, која је управна на раван коју образују прве две праве (сл. 7).

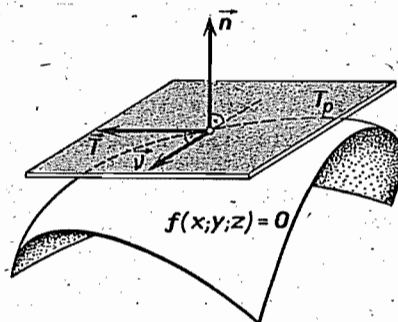
Тангента, главна нормала и бинормала оријентисане су својим ортовима \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} , који су ортогонални и чине *природни координатни систем* (*основни—фундаментални—триедар*). Координате које одређују положај тачке на линији у односу на овај систем зову се *природне координате*. Оријентацију ортова узимамо исту као и ортова Декартовог координатног система десне диспозиције, што значи да је и природни триедар *ортоноалан*, десне диспозиције. Декартов систем може се транслацијом и ротацијом довести до поклапања са природним триедром.

Координатне равни овог триедра су: *оскулаторна равна* (одређена тангентом и главном нормалом), *нормална равна* (одређена главном нормалом и бинормалом) и *ректификациона равна* (одређена бинормалом и тангентом).



Слика 7. — Природни триедар за линију

b) **Природни триедар за површину.** — У свакој тачки површине $f(x, y, z) = 0$ можемо повући *тангенцијалну равна* (коју образује скуп тангената повучених на све криве линије које пролазе кроз ту тачку а леже на површини) и *нормалу на површину*, праву управну на тангенцијалној равни у тој тачки (сл. 8). У свакој *обичној* (регуларној) *тачки* на једној кривој линији на површини можемо, дакле, повући три осе: *тангену на линију*, *нормалу на линију*, која лежи у тангенцијалној равни, и *нормалу површине*. Ортове ових оса \vec{T} , $\vec{\nu}$, \vec{n} тако ћемо оријентисати да чине правоугли координатни систем десне диспозиције. Овакав триедар назива се *природни триедар за тачку на површини* (сл. 8). Правац орта $\vec{\nu}$ одређује *геодезијски правац*.



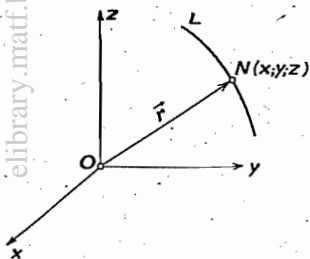
Слика 8. — Природни триедар за тачку на површини

2. КОНАЧНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА

2.1. Кретање тачке. — Ако тачка N мења свој положај у простору, онда се њен вектор положаја, $\overrightarrow{ON} = \vec{r}$, у односу на непокретну тачку — пол O , мења у току времена t , те је одређена векторска функција скаларног параметра t , па се може написати у облику

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (15)$$

Ова се једначина зове *коначна једначина кретања тачке у векторском облику*. Помоћу ње можемо у сваком тренутку, и за сваку вредност параметра t , одредити вектор положаја \vec{r} , дакле и положај тачке у простору.



Када у сталној тачки — полу O (сл. 9) узмемо Декартов координатни систем, онда овој векторској једначини, као што је познато из векторског рачуна, одговарају три скаларне једначине облика

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t), \quad (16)$$

Слика 9. — Кретање тачке

које се зову *коначне једначине кретања у Декартовим координатама*.

За друге координатне системе ове ће једначине имати и други облик, на пример за *поларно-цилиндрички* координатни систем биће

$$r = g_1(t); \quad \varphi = g_2(t); \quad z = g_3(t), \quad (17)$$

а за *сферни* координатни систем су

$$\rho = h_1(t); \quad \varphi = h_2(t); \quad \psi = h_3(t). \quad (18)$$

У динамици материјалне тачке уочићемо велику улогу природних триедара, те ћемо извести једначине кретања за те триедре.

На пример, коначне једначине кретања јесу: а) $x=2t$, $y=3t^2$; б) $x=3 \sin t$; $y=3 \cos t$; в) $x=2 \cos 2t$, $y=3 \sin t$; д) $x=t$; $y=2t$; $z=3t$; е) $r=2t$; $\varphi=t$; ф) $r=ce^{2t}$; $\varphi=2t$.

2.2. Путања. Линија путање. — Геометријско место тачака са којима се у простору, у току кретања, поклапа покретна тачка N , зове се *пуцања* или *трајекторија* покретне тачке. Векторска функција (15), односно скаларне функције (16, 17, 18), мора бити *нејрекидна*, да бисмо у сваком тренутку могли одредити положај покретне тачке, па је и *пуцања нејрекидна крива линија* у равни или простору, што зависи од тога какав проблем кретања испитујемо.

У случају да је кретање дато коначном векторском једначином $\vec{r} = \vec{r}(t)$, путања се може сматрати *хогографом* дате векторске функције*, јер сваком положају покретне тачке N одговара по један одређени вектор положаја. Завршне тачке ових вектора образују путању. Ако је кретање дато у облику скаларних коначних једначина кретања, оне могу бити сматране *параметарским једначинама* *путање*, у којима време t фигурише као *параметар*. Када из ових параметарских једначина *елиминисемо* параметар t , добићемо једначине облика

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad (19)$$

које представљају линију која се зове *линија путање* или *линија прајекторје*. Све тачке путање припадају линији путање, али обратно није, јер линија путање може садржавати и тачке које не припадају путањи. На пример, нека је кретање тачке дато системом једначина:

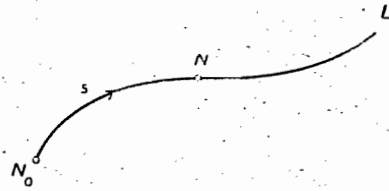
$$x = R \cos \omega t; \quad y = 0,$$

онда се тачка креће по x -оси у интервалу $(R; 0)$ и $(-R; 0)$. Путања је, дакле, дуж величине $2R$; међутим, елиминисањем времена t из претходних једначина добићемо линију путање $y = 0$, то јест целу Ox -осу, којој осим дужи $2R$ припадају и две полуправе. Све тачке путање припадају линији путање, али тачке линије путање које су на полуправама не припадају путањи. Кретање тачке је, дакле, ограничено само у интервалу $2R$.

На пример, ако је кретање дато једначином $x = 2t$, онда је линија путање Ox -оса. Када је $x = 2t; y = 4t$, линија путање је права $y = 2x$; за коначне једначине кретања $x = 2t, y = 4t^2$ добили бисмо да је линија путање парабола $y = x^2$; за $x = 4 \cos t, y = 4 \sin t$ је круг $x^2 + y^2 = 16$, полупречника $R = 4$, са средиштем у координатном почетку O .

2.3. Закон пута. — Нека покретна тачка N за време кретања описује путању L (сл. 10) и нека је N_0 њен *почетни положај* од кога меримо *дужину лука* који пређе покретна тачка за одређени временски размак. И величину лука можемо сматрати координатом покретне тачке у односу на изабрану — кореспондентну тачку N_0 , па једначина

$$s = s(t) \quad (20)$$



Слика 10. — Закон пута

одређује положај тачке на путањи за сваки тренутак t . Њом је, дакле, успостављена директна веза између дужине лука — пређеног *пућа* — и времена; она представља зависност пута од протеклог времена и назива се *закон пућа*.

* Додатак, чл. 1.2.

Кретање тачке познајемо ако знамо: 1° закон *пута* и 2° облик *пушање*. Оба ова податка потребна су и довољна да добијемо потпуну представу о кретању. Обично се закон пута даје помоћу графичке методе, у облику *дијаграма* (*графика* — *абак*) пута и времена. Он нема везе са путањом, већ само представља зависност пута од времена. Детаљније ћемо у члану 5. говорити о *кинематичким дијаграмима*, који су од велике важности за добијање праве представе о кретању. Нарочито они имају велику улогу у машинству при проучавању кретања механизма и основ су *теорије механизма*.

2.4. Главне врсте кретања. — Према облику путање, кретање може бити *праволинијско* и *криволинијско*. Код првог је путања *права*, а код другог *крива линија*. При праволинијском кретању познајемо облик путање, те морамо још знати закон пута и положај праве у простору. Њен је положај одређен положајем једне њене сталне тачке N_0 и ортом правца праве \vec{u} (сл. 11), па је њена векторска једначина

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s \vec{u}; \quad [\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{u}] = 0, \quad (21)$$

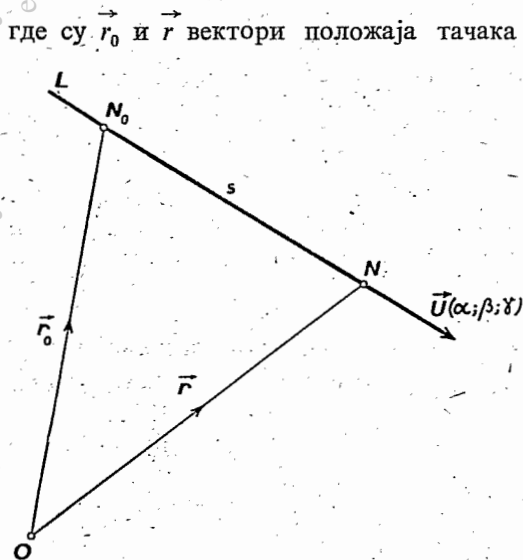
где су \vec{r}_0 и \vec{r} вектори положаја тачака N_0 и N , а s пређени пут тачке у односу на компаративну тачку N_0 . Тај пут зависи од времена, па је

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s(t) \cdot \vec{u}$$

коначна *векторска једначина праволинијског кретања*. Овој једначини, као што знамо, одговарају за Декартов координатни систем три скаларне једначине:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s \cos \alpha; \\ y &= y_0 + s \cos \beta; \\ z &= z_0 + s \cos \gamma, \end{aligned} \quad (22)$$

где су α, β, γ углови које права чини са координатним осама.



Слика 11. — Праволинијско кретање.

Координатни систем $Oxyz$ можемо тако изабрати да се путања поклапа са једном координатном осом, на пример Ox -осом, и да тачка N_0 падне у координатни почетак, па је у овом случају праволинијско кретање, по унапред одређеној правој, дато само једном скаларном једначином

$$x = s(t). \quad (23)$$

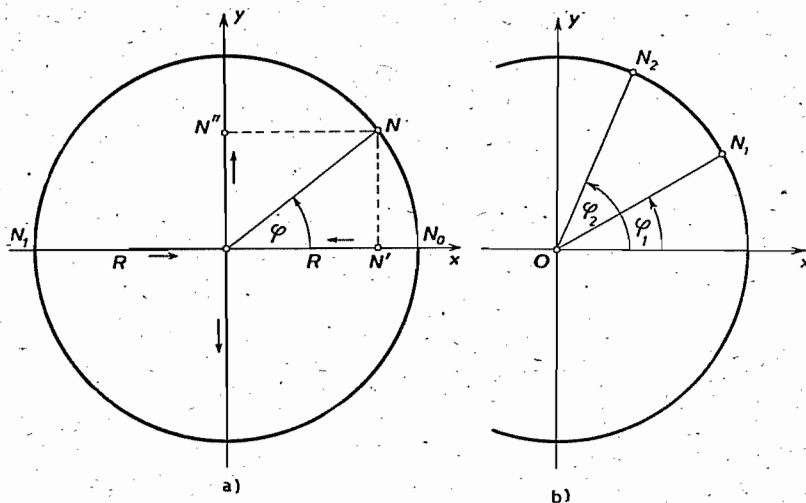
На пример, кретање дато једначинама $x=3t^2$; $y=4t^2$ јесте праволинијско, по правој $4x-3y=0$. Закон кретања је $s=5t^2$, јер је $s^2=x^2+y^2=25t^4$. Кретање дато системом једначина $x=2t$; $y=t/2$; $z=4t$ такође је праволинијско, по правој $(x/2)=(y/0,5)=(z/4)$. Како је $s^2=x^2+y^2+z^2$, закон кретања је $s=9/2t$.

Једначине кретања $x=2+4t$, $y=3+3t$ показују да је у почетку кретања ($t_0=0$) тачка била у положају $N_0(x_0=2\text{ m}; y_0=3\text{ m})$. Сада је закон кретања од те тачке $s=5t$, јер је $s^2=(x-2)^2+(y-3)^2=25t^2$. За време од 5 сек тачка ће прећи пут $s=25\text{ m}$, те ће бити у положају $N(x=22\text{ m}; y=18\text{ m})$.

2.5. Хармонијско кретање. — Најпростије криволинијско кретање је *кружно*, то је кретање тачке по *кружној линији*. Ако је закон пута дат у облику *линеарне* функције, онда се кретање зове *једнолико (равномерно)*. За тај случај, дакле, закон пута дат је у облику

$$s = \lambda t, \quad (24)$$

где је λ произвољни скаларни сачинилац, димензије $[L/T]$, јединице m/sec .



Слика 12. — Хармонијско кретање

Нека пут и време рачунамо од почетне тачке $N_0(R; 0)$, онда је пређени пут, дужина лука (сл. 12a),

$$s = R\varphi = \lambda t,$$

те је угао

$$\varphi = \frac{\lambda}{R} t = \omega t,$$

где је

$$\omega = \frac{\lambda}{R}$$

и има димензију $[T^{-1}]$ и јединицу sec^{-1} . Положај покретне тачке на кружној линији одређен је само углом φ , па се он може сматрати координатом покретне тачке, те једначина

$$\varphi = \omega t \quad (25)$$

представља коначну једначину једноликој (равномерној) кружној кретања.

Док се тачка N креће равномерно по кружној линији, дотле ће се њена пројекција на Ox -осу — тачка N' — кретати по тој оси у размаку од $+R$ до $-R$. Кретање је, дакле, праволинијско и зове се *хармонијско кретање*. Положај покретне тачке N на кружној линији одређен је једначином (25), а положај њене пројекције — тачке N' — одређен је једначином

$$x = R \cos \varphi = R \cos \omega t, \quad (26)$$

која представља коначну једначину *хармонијској кретања*.

Пошто се ово кретање врши само у размаку $+R$ до $-R$; оно је *осцилаторно*, са *центром осцилације (осциловања)* у средишту кружне линије. Највећа раздаљина тачке N' од центра осциловања зове се *амплитуда* (R).

За време T тачка N изврши пуно обртање, те пређе целу кружну линију, односно, потег R опише угао 2π , па је

$$\omega T = 2\pi$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (27)$$

За исто време тачка N' прећи ће пут $N_0 N_1 N_0$, двоструки пречник круга, такозвану *целу (јуну) осцилацију*. Ово време T , за које тачка N' опише целу осцилацију, зове се *период осцилације*.

У једном секунду тачка направи n' осцилација, па је $T n' = 2\pi n' / \omega = 1$ сек. Број осцилација у секунду назива се *фреквенција** или *учестаност (било)*, па је

$$f = n' = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (28)$$

Одавде следи да је сачинилац

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n' \quad (29)$$

Он се назива *кружна фреквенција (кулсација)*, и представља број осцилација у 2π секунда.

* Димензије $[1/T]$, јединице $1/\text{sec}$ или херц (Hz, у почаст физичара R. Hertz) или бројем циклуса у секунду (cycles per second — „супс“). Већа јединица је килохерц, $1 \text{ kHz} = 1000 \text{ Hz}$. За осветљење је у Европи нормирана фреквенција на 50 Hz , у USA на 60 Hz . Музичка учестаност је од 100 до 200 Hz , а у радио-техници иде од 15000 до 300000000 Hz .

Број осцилација у минути износи $n = 60 n'$, па је кружна фреквенција

$$\omega = \frac{1}{30} \pi n. \quad (29')$$

Угао φ зове се *фаза осцилације*. Две или више осцилација разликују се у фази за *фазну разлику* $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (сл. 12b). Док пројекција тачке N на Ox -осу — тачка N' — врши хармонијско кретање по тој оси, истовремено и њена пројекција на Oy -осу — тачка N'' — врши хармонијско кретање по Oy -оси. Обе ове осцилације:

$$x = R \cos \omega t; \quad y = R \sin \omega t, \quad (30)$$

разликују се у фази за $\pi/2$.

Елиминисањем параметра (t) из једначина (30) добићемо линију путање тачке N — кружну линију

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

па се две хармонијске осцилације, са фазном разликом $\pi/2$, могу сматрати компонентним кретањима тачке N по кружној линији.

На пример, ако су $x = 4 \cos 2t$, $y = 4 \sin 2t$, онда је $R = 4$, $\omega = 2$; $T = \pi$; $s = R\varphi = -R\omega t = -8t$, па је $s = 2R\pi = 8T$, то јест период $T = \pi \text{ sec}$.

За $x = 4 \sin(\omega t + 3\pi/2)$, $y = 4 \cos(\omega t + \pi)$, је $R = 4 \text{ cm}$, а померање у фази π . Ако је $T = 0,4 \text{ sec}$, онда је $\omega = 5\pi \text{ sec}^{-1}$.

Два хармонијска колинеарна кретања исте кружне фреквенције могу се *сложити* у једно хармонијско кретање исте фреквенције, али друге амплитуде и померања фазе.

Нека су

$$x_1 = a \cos(\omega t + \alpha), \quad x_2 = b \cos(\omega t + \beta),$$

онда је

$$x = x_1 + x_2 = (a \cos \alpha + b \cos \beta) \cos \omega t - (a \sin \alpha + b \sin \beta) \sin \omega t = R \cos(\omega t + \gamma) = R \cos \gamma \cdot \cos \omega t - R \sin \gamma \cdot \sin \omega t,$$

па су

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha - \beta); \quad \text{tg } \gamma = \frac{a \sin \alpha + b \sin \beta}{a \cos \alpha + b \cos \beta}. \quad (31)$$

На пример, $x_1 = 5 \cos(2t + \pi/6)$, $x_2 = 3 \cos(2t + \pi/2)$ дају $R = 7$; $\text{tg } \gamma = 11 \sqrt{3}/15 = 1,27$; $\gamma^\circ = 50^\circ 45'$; $\gamma = 0,905 \text{ rad}$.

Два осциловања, $x = a \cos \omega t$, $y = b \cos \omega t$, слажу се у кретање по правој $y = bx/a$.

Два осциловања, $x = R \cos \omega t$; $y = r \sin \omega t$, слажу се у хармонијско кретање по *елипси*, полуоса \sqrt{R} и \sqrt{r} (*елиптичка хармонијска осцилација*).

На пример, $x = 3 \cos 2t$, $y = 2 \sin 2t$ дају елипсу $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1$, полуоса $a = 3$, $b = 2 \text{ cm}$.

Општији је случај *елиптичке хармонијске осцилације*

$$x = x_0 + R \cos(\omega t + \alpha); \quad y = y_0 + r \sin(\omega t + \beta).$$

Из система једначина

$$R \cos \alpha \cos \varphi - R \sin \alpha \sin \varphi = (x - x_0); \quad r \sin \beta \cos \varphi + r \cos \beta \sin \varphi = (y - y_0)$$

чија је детерминанта

$$\Delta = Rr \cos(\alpha - \beta),$$

одредићемо непознате $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, $\varphi = \omega t$, па дизањем на квадрат и сабирањем добијамо једначину елипсе у облику

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} + \frac{2(x - x_0)(y - y_0)}{Rr} \sin(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha - \beta). \quad (32)$$

Општи облик кривих другог реда* је

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (33)$$

са детерминантама

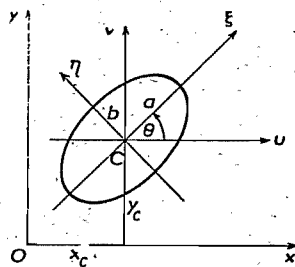
$$J_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}; \quad J_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}; \quad J_1 = A + C, \quad (33')$$

где је J_3 дискриминаната полинома $f(x, y)$. Ако је $J_3 \neq 0$, а $J_2 \geq 0$, крива је елипса, парабола, односно хипербола. Када је $J_2 \neq 0$, крива има средиште, које се одређује из система једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad x_C = (BE - CD)/J_2; \quad y_C = (BD - AE)/J_2, \quad (33'')$$

па се translацијом криве у средиште (систем u, v , сл. 13) добија једначина

$$f(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + F' = 0; \quad F' = f(x_C, y_C) = J_3/J_2.$$



Слика 13.—Редуција елипсе на средиште

Извршимо ли сада ротацију координатног система за угао θ , одређен односом

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2B/(A - C),$$

добићемо канонски облик једначине елипсе

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1; \quad a^2 = -\frac{J_3}{J_2 M}; \quad b^2 = -\frac{J_3}{J_2 N}, \quad (33''')$$

где су M и N корени квадратне једначине

$$z^2 - J_1 z + J_2 = 0; \quad M < N. \quad (33''')$$

* Р. Кашанин: Виша математика I, стр. 159, Београд, 1949.

На пример, ако су $x = 2 + 2 \cos(\omega t + \pi/2)$, $y = 3 + 2 \sin(\omega t + \pi/2)$, онда су $\alpha - \beta = \pi/6$, $R = 2 = r$, па једначина (32) постаје $x^2 + xy + y^2 - 7x - 8y + 16 = 0$, са $J_1 = 2$; $J_2 = 3/4$; $J_3 = -9/4$. Координате средишта су $x_c = 2$ cm, $y_c = 3$ cm, а полуосе елипсе су $a = \sqrt{6}$ cm, $b = \sqrt{2}$ cm.

Кретање дато системом једначина $x = 2 \cos 2t$, $y = 2 \cos t$, због $\cos 2t = -1 + 2 \cos^2 t$, врши се по параболи $y^2 = x + 2$, са теменом у тачки $T(-2; 0)$. Кретање тачке дато једначинама $x = 2 + 2 \sin t$, $y = 3 + 4 \cos 2t$, због $\cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t$, своди се на кретање по параболи $y = -2x^2 + 8x - 1$, са теменом $T(x = 2; y = 7)$.

У сложенијим случајевима као путање добијају се *Лисажуове фигууре*.*

2.6. Опadaјућа хармонијска осцилација. — Кроз тачку N_0 кружне линије, полупречника R (сл. 14) повуцимо логаритамску спиралу чија је једначина

$$r = Re^{-k_1 \varphi}, \quad (34)$$

где су r , φ поларне координате тачке N на спирали, а k_1 позитивна константа. Из једначине (34) види се, што је позната особина логаритамске спирале, да се потег r смањује уколико угао φ расте.

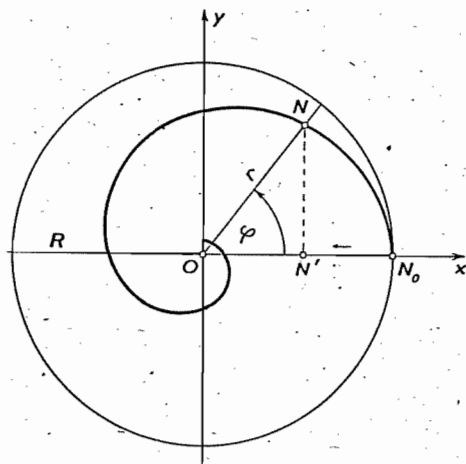
Нека се тачка N креће равномерно по спирали, онда се угао φ мења сразмерно са временом:

$$\varphi = \omega t,$$

где је ω коефицијент пропорционалности. Овом сменом добија се једначина спирале

$$r = Re^{-kt}, \quad (34')$$

где је $k = \omega k_1$ нова позитивна константа.



Слика 14. — Опadaјућа хармонијска осцилација

Док се тачка N креће по логаритамској спирали, њена ће се пројекција на Ox -осу — тачка N' — кретати праволинијски по тој оси. Ово кретање је *квази-периодичко* и зове се *опadaјућа хармонијска осцилација*, а дато је једначином

$$x = Re^{-kt} \cos \omega t \quad (35)$$

која представља коначну једначину ове осцилације.

Пошто је $\cos \omega t$ *периодичка функција*, после периода $T = 2\pi/\omega$ кретање ће имати исту фазу али не и исту амплитуду што значи да тачка нема исти положај. Потег се стално смањује, те се тачка N приближава

* Динамика, чл. 3.4.

полу O , док тачка N' врши осцилаторно кретање. Центар осцилације је *пол* логаритамске спирале.

Упоредимо апсолутне вредности амплитуда ове осцилације за сваки полупериод $T/2 = \pi/\omega$. Од почетка кретања биће

$$\begin{aligned} \text{за } t=0, |x_0| &= R; & t_1 = T/2 = \pi/\omega, |x_1| &= Re^{-\lambda}; \\ t_2 = T = 2\pi/\omega, |x_2| &= Re^{-2\lambda}; & t_n = nT/2 = n\pi/\omega, |x_n| &= Re^{-n\lambda}; \\ t_{n+1} &= (n+1)\pi/\omega, |x_{n+1}| &= Re^{-(n+1)\lambda}, \end{aligned}$$

где је λ нова позитивна константа, $\lambda = k\pi/\omega$.

Упоредивањем величина двеју узастопних амплитуда имаћемо

$$\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = e^\lambda,$$

те се коефицијент λ може одредити из израза

$$\lambda = 1 \ln |x_n| - 1 \ln |x_{n+1}| = k\pi/\omega = kT/2 = \mathbb{D} \quad (36)$$

и једнак је разлици природних логаритама двеју узастопних амплитуда. Он се назива *логаритамски декремент хармонијске осцилације*.

На пример, ако су $k=1/2$, $\omega=2$, $R=4$ cm, онда је закон кретања

$$x = 4 e^{-0,5t} \cos 2t.$$

па су амплитуде $x_0=4$ cm; $x_1=-1,82$ cm; $x_2=0,83$ cm; $x_3=-0,38$ cm.

Логаритамски декремент износи $\lambda = \pi/4 = 0,785$.

Примери. — 1. Кретање је дато системом једначина;

$$x = 2 + 10 \cos^2 \frac{\pi}{5} t; \quad y = 3 + 10 \sin^2 \frac{\pi}{5} t.$$

$$\omega t = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{t}$$

Одредити линију путање и закон пута.

Решење. — Елиминисањем времена t из датих једначина биће линија путање

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = R^2 = 10^2;$$

кружна линија, полупречника 10 cm, са средиштем у тачки $C(2; 3)$ cm; $s = R\varphi = 4\pi t$.

2. Кретање тачке у равни Oxy дато је векторском једначином

$$S = R\omega t$$

$\vec{r} = \vec{b} \sin 2t + \vec{c} \cos 2t$, где су \vec{b} и \vec{c} вектори одређени координатама $\vec{b}(2; 3)$, $\vec{c}(3; 4)$.
Одредити линију путање.

Решење. — Представимо ли дате векторе помоћу компонената

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \quad \vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j},$$

где су \vec{i} и \vec{j} ортови координатних оса, па изједначајући вредности уз исте ортове, кретање је дато системом једначина;

$$x = 2 \sin 2t + 3 \cos 2t; \quad y = 3 \sin 2t + 4 \cos 2t.$$

Да бисмо из овог система једначина елиминисали време, израчунајмо вредности

$$\sin 2t = 3y - 4x; \quad \cos 2t = 3x - 2y.$$

Степенујући ове једначине и сабирајући их, добићемо линију путање у облику

$$(3y - 4x)^2 + (3x - 2y)^2 - 1 = 25x^2 - 36xy + 13y^2 - 1 = 0.$$

Како је карактеристични бином — 1, путања је *елипса*.

3. БРЗИНА ПОКРЕТНЕ ТАЧКЕ

3.1. Померање тачке. — Тачка N креће се по путањи L (сл. 15) и у неком тренутку t_1 је у положају N_1 , а у следећем тренутку t_2 ($t_2 > t_1$) биће у положају N_2 . Оба положаја покретне тачке одређена су векторима положаја \vec{r}_1 и \vec{r}_2 у односу на сталну тачку O . Вектор $\overrightarrow{N_1 N_2}$ показује померање покретне тачке из положаја N_1 у положај N_2 за временски размак $t_2 - t_1 = \Delta t$. Из векторског троугла $ON_1 N_2$ видимо да је то померање једнако разлици вектора положаја

$$\overrightarrow{N_1 N_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}. \quad (37)$$

Ако је временски размак Δt бесконачно мали, померање се зове *елементарно*.

Усвојимо ли у тачки O Декартов координатни систем $Oxyz$, онда су Декартове координате вектора померања

$$\Delta x = x_2 - x_1; \quad \Delta y = y_2 - y_1; \quad \Delta z = z_2 - z_1. \quad (37')$$

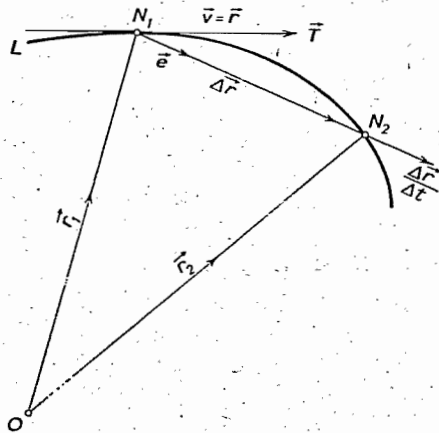
3.2. Брзина тачке. — Претпоставимо да је $t_2 > t_1$, то јест, да је прираштај времена позитиван, $\Delta t > 0$, и поделимо вектор померања $\Delta \vec{r}$ скаларом Δt . Резултат овог дељења је нови вектор $\overrightarrow{N_1 B} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, који има ове особине:

1° интензитет (могул) му је поделен у размери $\frac{1}{\Delta t}$ према интензитету вектора померања,

2° правац му је исти са правцем вектора померања, и

3° смер му је исти са смером вектора померања, пошто смо претпоставили да је прираштај времена позитиван, $\Delta t > 0$.

Овим је овај вектор потпуно одређен са своја три податка, интензитетом, правцем и смером, па се назива *средња брзина покретне тачке* у временском размаку Δt и обележава са



Слика 15. — Померање. Брзина тачке

$$\vec{v}_s = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \vec{e}. \quad (38)$$

Координате овог вектора за Декартов координатни систем $Oxyz$ јесу:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}; \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (38')$$

Из (38) следи да је пређени пут овог праволинијског кретања

$$\Delta s = v_s \cdot \Delta t, \quad (38'')$$

пошто је вектор брзине \vec{v}_s колинеаран са правцем пута (\vec{e}). Пут се мери *дужинским јединицама*, а време, *временским*, па средња брзина има димензију $[L/T]$ и мери се *јединицама* m/sec, m/min, km/h. Она је пређени пут у јединици времена овог праволинијског кретања којим смо заменили стварно кретање по путањи од тачке N_1 до тачке N_2 , па се често користи при кретању саобраћајних средстава као „*средња*“ или „*просечна*“ брзина *вожње*. Ако се са V означи брзина мерена јединицом km/h, а са v иста брзина мерена јединицом m/sec, онда, због тога што је $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$, $1 \text{ h} = 3600 \text{ sec}$, између ове исте вредности мерене разним јединицама постоји овај однос:

$$v = \frac{V}{3,6}; \quad V = 3,6 v. \quad (39)$$

На пример, ако је $V = 72 \text{ km/h}$, онда је $v = 20 \text{ m/sec}$; обратно, када је $v = 15 \text{ m/sec}$, тада је $V = 54 \text{ km/h}$. Брзина звука у ваздуху (при $t=0$, $\gamma=\gamma_0$) износи 333 m/sec па је $V = 1198,8 \text{ km/sec}$ брзина авиона при пробијању звучне баријере.

Поморска миља (nautical mile) износи 1852 m , а брзина једне миље у часу назива се чвор (knot), $1 \text{ чвор} = 1 \text{ n mile/h} = 1852 \text{ km/h} = 0,514 \text{ m/sec}$. Брзина бродова од 12 чворова износи $27,80 \text{ km/h}$.

У машинству се обично брзина *резања* мери јединицом метара у минути $V \text{ (m/min)}$, па је $v = V/60 \text{ (m/sec)}$. На пример, брзина резања алатног челика је од 8 до 12 m/min , тојест од 13 до 20 cm/sec . Брзина резања алуминијума износи од 80 до 250 m/min , или од 1,33 до $4,16 \text{ m/sec}$.

Ако се замисли да се момент времена t_2 мења, опада и бесконачно приближава моменту t_1 , то јест ако се размак Δt тако мења да тежи нули, онда ће се и вектор \vec{v}_s — средња брзина — мењати и у граничном положају поклопиће се са тангентом на путању у тачки N_1 . Тај нови вектор

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

зове се *брзина покретне тачке у тренутку* t_1 . Дакле, она се може дефинисати као *гранична вредност количника вектора померања и одговарајуће временског размака кад овај тежи нули*.

Пошто је положај тачке N_1 одређен вектором положаја \vec{r}_1 , или уопште положај произвољне тачке N вектором положаја \vec{r} , брзина те тачке

представљена је као векторски (геометријски) извод вектора положаја покретне тачке \vec{r} по скалару t :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (40)$$

И овај је вектор потпуно одређен са своја три податка:

1^o интензитет (модул) једнак је диференцијалном количнику пута по времену ако лук расте у смеру кретања тачке по путањи:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{N_1 N_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad (41)$$

2^o правац му је правац танјенције на пуштању у наведеној тачки, и

3^e смер му је усмерен на ону страну куда се тачка креће.

Дакле, брзина се као вектор може представити у овом облику:

$$\vec{v} = v \vec{T} = \frac{ds}{dt} \vec{T}, \quad (42)$$

где је $v = ds/dt$ алгебарска вредност брзине (интензитет), а \vec{T} орт танјенције.

Као што је познато, овој векторској једначини, за случај Декартовог правоуглог координатног система, одговарају три скаларне једначине облика

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f'_1(t) = (\vec{v}, \vec{i}) = v \cos \alpha; \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} = f'_2(t) = (\vec{v}, \vec{j}) = v \cos \beta; \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} = f'_3(t) = (\vec{v}, \vec{k}) = v \cos \gamma; \end{aligned} \quad (43)$$

које представљају координате вектора брзине за координатне осе, чији су ортови $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а α, β, γ углови које овај вектор чини са тим осама.

Дакле, полазећи од векторске једначине вектора положаја

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

диференцирањем по времену (t) , пошто су ортови \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} константни, добијамо

$$\vec{v} = \vec{r}' = x\vec{i}' + y\vec{j}' + z\vec{k}' = v(\vec{i}' \cos \alpha + \vec{j}' \cos \beta + \vec{k}' \cos \gamma) = v\vec{T}, \quad (42')$$

где су тачком означени параметарски изводи координата по параметру t .

Конечна векторска једначина *правoliniјској кретања*, као што смо видели (чл. 2.1) дата је у облику

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s(t) \cdot \vec{u},$$

па је брзина

$$\vec{v} = \vec{r}' = \frac{ds}{dt} \vec{u} = s' \vec{u}; \quad [\vec{v}, \vec{u}] = 0, \quad (44)$$

пошто су вектори \vec{r}_0 и \vec{u} стални, а пут s зависи од времена. Дакле, брзина *правoliniјској кретања* *и*ада у *правац* *и*уићање и у *смеру* *кретања* (јер је $ds > 0$), те ћемо је знати ако знамо закон пута, то јест ако знамо први извод пута по времену.

На пример, ако су коначне једначине кретање $x=3t$, $y=4t$, онда је линија путање права $y=4x/3$, па је закон пута $s=5t$, те је брзина $v=s'=5$ cm/sec, Како су $x=3$, $y=4$, то је $v^2=25$, па је $v=5$ cm/sec.

Кад је $x=2t$, $y=4t^2$, тада су $x=2$, $y=8t=4x$, па је брзина $v=2(1+16t^2)^{1/2} = 2(1+4x^2)^{1/2}$, односно $\vec{v}=2\vec{i}+4x\vec{j}$. Линија путање је парабола $y=x^2$, па је $y'=2x$, те због $\operatorname{tg} \alpha = y'$ тангента гради са осамa углове чији су косинуси: $\cos \alpha = 1/(1+4x^2)^{1/2}$, $\cos \beta = \sin \alpha = 2x/(1+4x^2)^{1/2}$, па је орт тангенте $\vec{T} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta$. Како је $[\vec{v}, \vec{T}] = 0$, то су ова два вектора *колинеарна*. Елемент лука износи $ds = (1+y'^2)^{1/2} dx$, па је брзина $v = s' = 2(1+4x^2)^{1/2}$, као што смо извели и другим путем.

У кинематици нам се намећу два различита задатка.

1⁰ *Познајмо је кретање, а треба одредити његову брзину.*

Као што смо видели, овај се проблем лако решава *диференцирањем*, јер је брзина векторски извод вектора положаја по времену. Треба, дакле, да знамо закон и путању.

2⁰ *Познајмо је брзина кретања, а тражи се само кретање.*

Овај је проблем супротан првом и решава се *интеграцијом* диференцијалне једначине

$$\vec{v} = \vec{r}' = d\vec{r}/dt$$

па је вектор положаја дат као вектор интеграл:

$$\vec{r} = \int \vec{v}(t) dt + \vec{C},$$

где је \vec{C} константан вектор — *интеграциона константа* — који можемо одредити само онда ако знамо *почетне услове кретања*, тојест ако за

неки тренутак t_0 знамо положај покретне тачке — њен вектор положаја \vec{r}_0 , те је

$$\vec{r}_0 = \left(\int \vec{v}(t) dt \right)_{t=t_0} + \vec{C}.$$

Ако из ових једначина елиминишемо константни вектор \vec{C} , добићемо вектор положаја

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt, \quad (45)$$

то јест знаћемо кретање чија је брзина позната, као и почетни услови кретања.

На пример ако је праволинијско кретање дато законом пута $s=2t+1$, онда је брзина, као извод пута по времену, $v=2=\text{const}$. Обратно, пак, ако знамо да је неком кретању брзина константна $v=2$, онда се пут добија интегрисањем једначине $ds=vd t$, те је $s=2t+C$, где је C интеграциона константа, коју ћемо одредити из почетних услова. Они су за овај случај: у тренутку $t=0$, од кога посматрамо кретање, био је пређен пут $s_0=1$, па је закон пута $s=2t+1$.

Интеграционој константи \vec{C} одговарају једна, две или три скаларне интеграционе константе, према томе да ли се тачка креће по правој (на пример Ox -оси), у равни или у простору. Због тога обично интегрисамо скаларне једначине. Вредности константи зависе од почетних услова, којих мора бити онолико колико има скаларних интеграционих константи.

На пример, ако је $x=2$, онда је $x=2t+C_1$. Ако је за $t_0=0$ и $x_0=0$, онда је $C_1=0$, па је закон кретања $x=2t$. Када је у тренутку $t_0=0$ почетни положај $x_0=2$, тада је $C_1=2$, па је $x=2t+2$.

Када је $x=2$, $y=8t$, тада су $x=2t+C_1$, $y=4t^2+C_2$. Ако је у почетном тренутку тачка била у координатном почетку, онда су $C_1=C_2=0$, па је линија путање $x=2t$, $y=4t^2$ или $y=x^2$. Међутим, када је у тренутку $t_0=0$ тачка била у $N_0(2; 3)$ тада су $C_1=2$, $C_2=3$ па су параметарске једначине $x=2+2t$, $y=3+4t^2$, те је путања парабола $y=x^2-4x+7$, са теменом у тачки $T(2; 3)$.

Када су $x=-4 \sin 2t$, $y=4 \cos 2t$, $z=2$ и почетни положај $N_0(2; 0; 0)$, тада су $x=2 \cos 2t+C_1$, $y=2 \sin 2t+C_2$, $z=2t+C_3$, па су константе $C_i=0$, те су једначине кретања $x=2 \cos 2t$, $y=2 \sin 2t$, $z=2t$. Тачка се креће по кружном цилиндру, полупречника $R=2$, чија се геометријска оса поклапа са Oz -осом. Због $\varphi=2t$, лук је $s=R\varphi=4t$, па се кретање састоји из једноликог кретања по кругу и једноликог кретања у правцу Oz -осе (кретање по завојници).

До сада смо само уочили да брзина зависи од времена, али она може да буде и константна или, пак, да зависи и од пређеног пута:

$$\dot{v} = f(s) = ds/dt.$$

Из ове диференцијалне једначине можемо интегрисањем добити време:

$$t = \int \frac{ds}{f(s)} + \tau,$$

где је τ интеграциона константа. Инверзијом се може добити и зависност пута од времена у облику $s = \theta(t)$.

На пример, нека је позната брзина неког кретања $v^2 = cs = f(s)$, где је $c = \text{const}$. Дакле, брзина је зависна од пута s . Интегрисањем једначине $ds/dt = \sqrt{cs}$ биће

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s}} = t\sqrt{c} + \tau = 2\sqrt{s},$$

где је τ интеграциона константа коју ћемо одредити из услова да је за $t=0$ и $s=0$, па је $\tau=0$. Закон пута је

$$s = \frac{ct^2}{4} = \frac{v^2}{c}.$$

Према брзини, кретања делимо на: *равномерна (једнолика)*, код којих је брзина константна, и *неравномерна (променљива)*, код којих је брзина променљива.

3.3. Квадрат брзине. — Брзина је дата векторским изразом

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{T},$$

па је квадрат брзине једнак скаларном производу

$$v^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{ds^2}{dt^2}, \quad (46)$$

Његово се израчунавање своди на израчунавање квадрата *елеменџа* — *дужине* — *лука* ds^2 који се зове *метричка форма*.

За Декартове правоугле координате метричка форма има облик

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (47)$$

па је квадрат брзине, за овај систем:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \quad (48)$$

За *цилиндрички* и *сферни* координатни систем добићемо квадрат брзине помоћу формула трансформација координата (6 и 8) и обрасца (47), водећи рачуна да је метричка форма, као скаларни производ, инваријантна, те не зависи од координатног система. Диференцирајући формуле трансформације (6) и (8) добићемо координате брзине:

у *цилиндричком* систему

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi; \\ y &= r \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi; \\ z &= \dot{z}, \end{aligned} \quad (49)$$

а према обрасцу (47) квадрат брзине биће

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2; \quad (50)$$

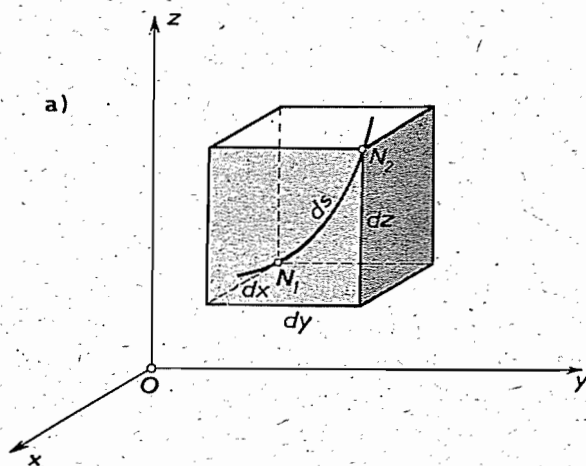
у сферном систему

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \psi \cos \varphi - \rho \dot{\psi} \sin \psi \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \cos \psi \sin \varphi; \\y &= \rho \cos \psi \sin \varphi - \rho \dot{\psi} \sin \psi \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \psi \cos \varphi; \\z &= \rho \sin \psi + \rho \dot{\psi} \cos \psi,\end{aligned}\quad (51)$$

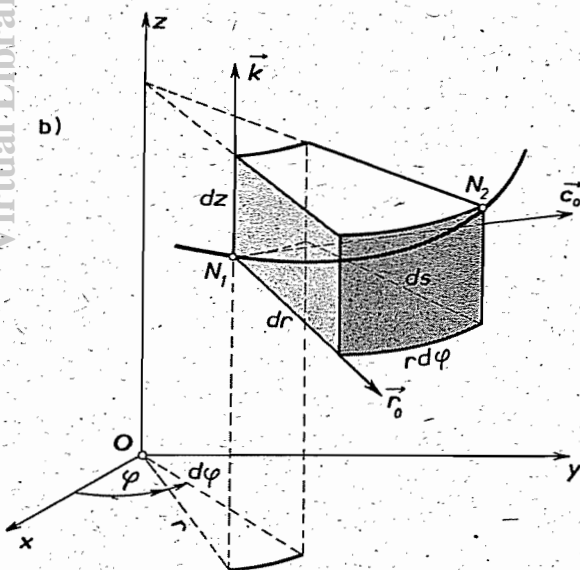
па је квадрат брзине

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\varphi} \cos \psi)^2 + (\rho \dot{\psi})^2. \quad (52)$$

Пошто се елемент лука ds може да сматра дијагоном елементарног правоуглог паралелепипеда, изразе за квадрат брзине за сва три наведена координатна система можемо добити само геометријским начином. Ивице елементарних паралелепипеда јесу прираштаји координата у правцу координатних оса (сл. 16a, b, c): $dx, dy, dz; dr, r d\varphi, dz; d\rho, \rho \cos \psi d\varphi, \rho d\psi$,



Слика 16a) — Елементарни паралелепипед за правоугли систем



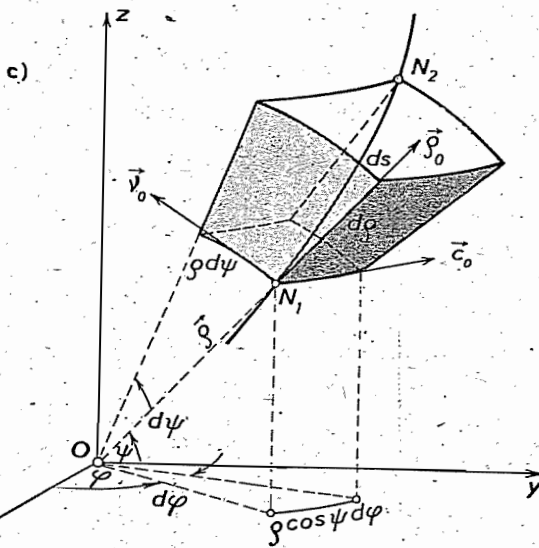
Слика 16b) — Елементарни паралелепипед за цилиндрички систем

па се помоћу њих могу врло лако добити изрази за метричку форму — квадрат елементарног лука:

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2; \\ds^2 &= dr^2 + (r d\varphi)^2 + dz^2; \\ds^2 &= d\rho^2 + (\rho d\psi)^2 + \\&\quad + (\rho \cos \psi d\varphi)^2,\end{aligned}$$

а помоћу њих и за квадрат брзине (48), (50) и (52).

Како су наведени координатни системи правоугли, помоћу квадрата брзине можемо лако одредити пројекције вектора брзине \vec{v} на те осе.



Слика 16c) — Елементарни паралелепипед за сферни систем.

а) Декартови правоугли координатни систем. — Из (48) следи да су пројекције вектора брзине на осе овог система:

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}, \quad (53)$$

па је вектор брзине

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \\ &= \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}, \end{aligned} \quad (53')$$

као што смо добили и раније (43).

До ових вредности долазимо и непосредно диференцирајући векторску једначину (1), пошто су ортови \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} стални,

те не зависе од времена (t) и добијамо обрасце (42').

б) Поларно-цилиндрички координатни систем. — Из (50) добијамо пројекције вектора брзине у радијалном, циркуларном и аксијалном правцу:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}; \quad v_c = r \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}; \quad v_z = \dot{z}, \quad (54)$$

где су v_r радијална, v_c циркуларна и $v_z = \dot{z}$ аксијална брзина. Према томе, вектор брзине може се написати као збир својих компонената:

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{r}_0 + r \dot{\varphi} \vec{c}_0 + \dot{z} \vec{k} \quad (54')$$

До истих резултата долазимо диференцирајући основну векторску једначину (5):

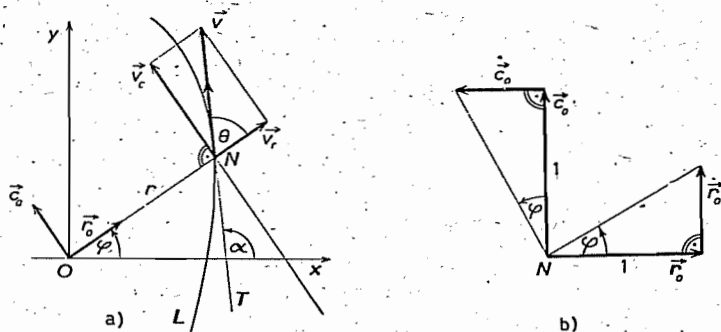
$$\vec{v} = \dot{r} \vec{r}_0 + r \dot{\varphi} \vec{c}_0 + \dot{z} \vec{k},$$

јер је орт радијалног правца променљив. Из обрасца (6''') следи

$$\vec{r}_0 = \dot{\varphi} (-\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi) = \dot{\varphi} \vec{c}_0; \quad \vec{c}_0 = -\dot{\varphi} (\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) = -\dot{\varphi} \vec{r}_0 \quad (55)$$

па је извод орта, због његовог константног интензитета, ујаван на сам орт, а интензитет му је једнак брзини скретања осе на којој се налази

тај орт. Радијална брзина пада у правац радијалног, а циркуларна у правац циркуларног орта, то јест управна је на прву брзину, па се назива *трансверзалном брзином* (сл. 17а). Извод радијалног орта пада, дакле, у



Слика 17. — а) Радијална и циркуларна брзина,
— б) Извод орта управан је на самом орту

циркуларни правац, а извод циркуларног орта пада у негативни радијални правац (сл. 17б). Дакле, ови су изводи заокрећнути за 90° у смеру обртања поларно-цилиндричког координатног система.

У поларном координатном систему имали бисмо само радијалну и циркуларну брзину (сл. 17а). Вектор брзине (\vec{v}) гради са радијалним правцем угао θ , (сл. 17а), па су компоненте и пројекције брзина

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_c \vec{e}_\phi = r \dot{\vec{e}}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi; \quad v_r = v \cos \theta; \quad v_c = v \sin \theta. \quad (56)$$

На пример, ако су $r = ct$, $\phi = \omega t$, онда су: $\dot{r} = c$, $\dot{\phi} = \omega$, па је $v^2 = c^2 + r^2 \omega^2$. Једначина путање је $r = c \phi / \omega = k \phi$; $k = c / \omega$ (*Архимедова спирала*).

Када је $r = ce^{\omega t}$, $\phi = \omega t$, тада су $\dot{r} = \omega r$, $\dot{\phi} = \omega$, па је квадрат брзине $v^2 = (\omega^2 r^2 + \omega^2) = \omega^2 (1 + r^2)$, то јест $v = f(r)$, те је брзина зависна од потега. Путања је *логаритамска спирала* $r = ce^{\phi}$.

с) *Сферни координатни систем*. — Из (52) добијамо пројекције вектора брзине у радијалном, циркуларном и меридионалном правцу:

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}; \quad v_c = \rho \dot{\phi} \cos \psi = r \dot{\phi}; \quad v_\psi = \rho \dot{\psi} \quad (57)$$

где су v_ρ радијална, v_c циркуларна и v_ψ меридионална брзина. Према томе, вектор брзине може се написати као збир својих компонената:

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{\rho}_0 + (\rho \dot{\varphi} \cos \psi) \vec{c}_0 + \rho \dot{\psi} \vec{v}_0. \quad (57')$$

До истих резултата долазимо диференцирајући основну векторску једначину (7):

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{\rho}_0 + \rho \dot{\rho}_0,$$

јер је орт $\vec{\rho}_0$ радијалног правца променљив. Из образаца (8''') следи

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\rho}}_0 &= \dot{\psi} (-\vec{i} \sin \psi \cos \varphi - \vec{j} \sin \psi \sin \varphi + \vec{k} \cos \varphi) + \dot{\varphi} (-\vec{i} \cos \psi \sin \varphi + \vec{j} \cos \psi \cos \varphi) = \\ &= \dot{\varphi} \cos \psi \cdot \vec{c}_0 + \dot{\psi} \vec{v}_0; \end{aligned} \quad (58)$$

$$\vec{c}_0 = -\dot{\varphi} (\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) = -\dot{\varphi} (\rho_0 \cos \psi - \vec{v}_0 \sin \psi);$$

$$\vec{v}_0 = -(\dot{\varphi} \sin \psi \vec{c}_0 + \dot{\psi} \vec{\rho}_0).$$

У овоме случају, због тога што се мењају оба угла (φ и ψ), изводи ортова имају по две компоненте, али су такође управни на својим ортовима (сл. 18), у шта се лако уверавамо из скаларних производа

$$(\dot{\vec{\rho}}_0, \vec{\rho}_0) = (\vec{c}_0, \vec{c}_0) = (\vec{v}_0, \vec{v}_0) = 0.$$

Претходни обрасци се упрошћавају када се тачка креће по сфери ($\rho = R = \text{const}$). Тада су пројекције брзине

$$v_\rho = 0; \quad v_c = R \dot{\varphi} \cos \psi; \quad v_v = R \dot{\psi}. \quad (57'')$$

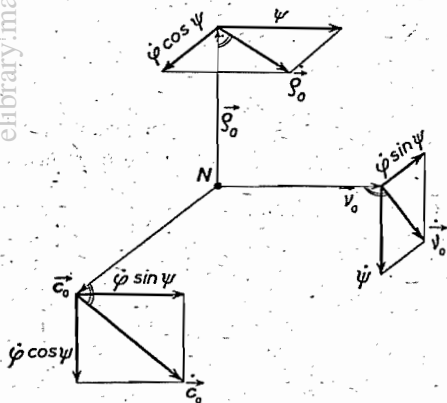
На пример, када су $\rho = R$, $\varphi = 4t$, $\psi = 3t$, тада су $v_\rho = 0$; $v_c = 4R \cos \psi$; $v_v = 3R$.

d) *Генералисани координатни систем*. — Вектор положаја зависи од генералисаних координата (чл. 1.5):

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3),$$

те је померање тачке дато изразом

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^3 A_i dq_i \vec{T}_i, \quad (59)$$



Слика 18. — Изводи ортова сферног координатног система

па је метричка форма

$$ds^2 = (\vec{dr}, \vec{dr}) = A_1^2 dq_1^2 + A_2^2 dq_2^2 + A_3^2 dq_3^2 + 2B_1 dq_2 dq_3 + 2B_2 dq_3 dq_1 + 2B_3 dq_1 dq_2, \quad (60)$$

где су коефицијенти A_i Ламеови коефицијенти, а B_i коефицијенти одређени изразом

$$B_i = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right) = A_j A_k (\vec{T}_j, \vec{T}_k), \quad i \neq j \neq k; \quad i, j, k = 1, 2, 3;$$

на пример

$$B_1 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) = A_2 A_3 (\vec{T}_2, \vec{T}_3) = \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3}.$$

За ортононални генерализани координатни систем коефицијенти B_i једнаки су нули због управности ортова оса овог координатног система, па метричка форма добија простији облик:

$$ds^2 = A_1^2 dq_1^2 + A_2^2 dq_2^2 + A_3^2 dq_3^2 = \sum_{i=1}^3 A_i^2 dq_i^2, \quad (61)$$

те је квадрат брзине

$$v^2 = A_1^2 \dot{q}_1^2 + A_2^2 \dot{q}_2^2 + A_3^2 \dot{q}_3^2 = \sum_{i=1}^3 A_i^2 \dot{q}_i^2. \quad (62)$$

Брзина покретне тачке једнака је првом изводу вектора положаја по времену, па је

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad (63)$$

те се, с обзиром на обрасце (11), може написати и у овом облику:

$$\vec{v} = A_1 \dot{q}_1 \vec{T}_1 + A_2 \dot{q}_2 \vec{T}_2 + A_3 \dot{q}_3 \vec{T}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \dot{q}_i \vec{T}_i. \quad (63')$$

Пројекција брзине \vec{v} на осу \vec{T}_i правоуглој генерализаног координатног система биће

$$v_i = (\vec{v}, \vec{T}_i) = \frac{1}{A_i} \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \dot{q}_i.$$

Пошто брзина зависи од генерализаних брзина (\dot{q}_i), из (63'), с обзиром на (11), добијамо

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = A_i \vec{T}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

па је*

$$v_i = \frac{1}{A_i} \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial (1/2 v^2)}{\partial \dot{q}_i} \quad (64)$$

С обзиром на (14), генералисане брзине и пројекције брзина за три раније наведена координатна система биће:

q_i	x	y	z	r	φ	z	ρ	φ	ψ
\dot{q}_i	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}	\dot{r}	$\dot{\varphi}$	\dot{z}	$\dot{\rho}$	$\dot{\varphi}$	$\dot{\psi}$
A_i	1	1	1	1	r	1	1	$\rho \cos \psi$	ρ
v^2	$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$			$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$			$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2$		
$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}$	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}	\vec{r}_0	$r \vec{c}_0$	\vec{k}	$\vec{\rho}_0$	$(\rho \cos \psi) \vec{c}_0$	$\rho \vec{v}_0$
v_i	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}	\dot{r}	$r \dot{\varphi}$	\dot{z}	$\dot{\rho}$	$(\rho \cos \psi) \dot{\varphi}$	$\rho \dot{\psi}$

Квадрат брзине важан је у динамици при проучавању закона о кинетичкој енергији (живој сили).

е) *Односи између пројекција вектора брзине на осе разних система.* —

Када су познати закони кретања $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$, тада се помоћу пројекција вектора брзине на осе Декартовог правоуглог система могу одредити поларно-цилиндричке и сферне координате вектора брзине. Вектор брзине је

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} = v_r \vec{r}_0 + v_c \vec{c}_0 + z \vec{k} = v_\rho \vec{\rho}_0 + v_c \vec{c}_0 + v_\psi \vec{v}_0,$$

па множењем ове једначине ортовима, с обзиром на односе (6''') и (8''), добијамо пројекције вектора брзине на осе поларно-цилиндричког и сферног система:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi; & v_\rho &= \dot{x} \cos \psi \cos \varphi + \dot{y} \cos \psi \sin \varphi + \dot{z} \sin \psi; \\ v_c &= -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi; & v_c &= -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi; \\ v_z &= \dot{z}; & v_\psi &= -\dot{x} \sin \psi \cos \varphi - \dot{y} \sin \psi \sin \varphi + \dot{z} \cos \psi. \end{aligned} \quad (66)$$

* Додатак I, чл. 4. с.

Примери. — 3. Кретање је дато системом једначина:

$$x = R(kt - \sin kt); \quad y = R(1 - \cos kt).$$

Одредити квадрат брзине и компоненте брзине.

Решење. — Путања је *циклоида*. Компонентне су брзине:

$$\dot{x} = kR(1 - \cos kt) = ky; \quad \dot{y} = kR \sin kt = k \sqrt{R^2 - (R - y)^2}.$$

Квадрат брзине је $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2Rk^2 y = (2kR^2 \sin^2 \frac{1}{2} kt)^2$, јер је $1 - \cos kt = 2 \sin^2 (\frac{1}{2} kt) = y/R$.

4. Одредити путању брода на равном мору ако одржава стални курсни угао према полу O (то јест стални угао θ који гради вектор брзине са потегом $r = \overline{ON}$) и ако је у почетку кретања био на растојању $ON_0 = r_0$ од пола.

Решење. — Пошто су $v_r = \dot{r} = v \cos \theta$; $v_c = r \dot{\varphi} = v \sin \theta$, биће $v_r/v_c = \dot{r}/r \dot{\varphi} = r'/r = -\cot \theta = k$; $\theta = \text{const}$; $r' = d r/d \varphi$. Одавде је $d r/r = k d \varphi$, па је $\ln r = k \varphi + C$, где је C интеграциона константа. За $t=0$ је $\varphi_0=0$, $r=r_0$, па је $C = \ln r_0$, те је $\ln(r/r_0) = k \varphi$, или $r = r_0 e^{k \varphi}$. Путања је *логаритамска спирала*. Ако је $\theta = \pi/2$, онда је путања круг; за $\theta=0$ или $\theta=\pi$ путања је *права*.

5. Тачка се креће по сфери константним односом брзине $v_r/v_c = k$. Одредити путању.

Решење. — Из односа брзина следи

$$\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi} \cos \psi} = k.$$

Интегришући ову диференцијалну једначину добићемо*

$$\ln \operatorname{tg} (\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \psi) - \ln C = k \varphi,$$

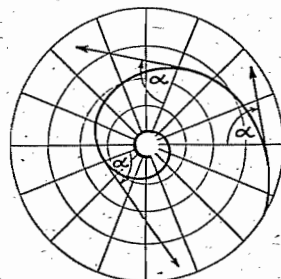
па је једначина путање

$$\operatorname{tg} (\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \psi) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = C e^{k \varphi},$$

$$\theta = \frac{1}{2} \pi - \psi,$$

где је C произвољна константа. Ова крива линија на сфери назива се *локсодрома*. У навигацији велику улогу имају две криве линије на сфери: *ортодрома* (најкраће растојање двеју тачака на сфери) и *локсодрома* (крива линија која сече све меридијане под истим углом). Прва се примењује у циљу да се што више скрати време лета, или шовидбе, а друга да се одржи *констијантан курс*. Локсодрома се може сматрати изогоналном трајекторијом меридијана.

Слика 19. приказује пројекцију локсодроме на раван управну на осу Земље. Локсодрома сече меридијане под истим углом α .



Слика 19. — Пројекција локсодроме

3.4. Секторска брзина. — Појам *брзине* може се уопштити и проширити на векторе и скаларе ако они зависе од времена. Извод вектора или скалара по времену назива се уопште *брзина вектора* односно *брзина*

* $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C; \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$

скалара, па ма какво физичко значење имали ти вектори, односно скалари. Према томе и димензије ових брзина неће, уопште узев, бити $[L T^{-1}]$, већ зависе од природе вектора, односно скалара. Због тога се ове брзине називају *генерализане векторске* односно *генерализане скаларне брзине*.

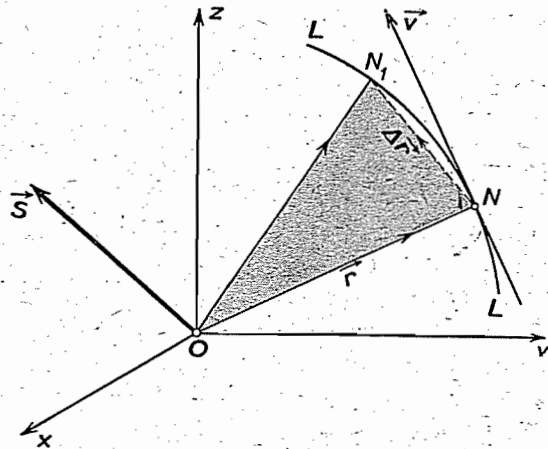
Ако је површина A (сл. 20) омеђена затвореном контуром L , онда је по договору, можемо представити вектором \vec{A} , који има ове особине:

1^о интензитет му је једнак دائој површини A ,

2^о има правац нормале на површину, и

3^о смер у правцу *позитивне* нормале („од лица“) ако површина остаје увек са *леве стране* контуре L . На тај начин површина A потпуно је представљена вектором \vec{A} . Што се тиче смера он се може изабрати и супротно од претходно узетог, али је главно да се једном изабрани смер задржи до краја решења проблема. Ми смо и у статистици представљали површине векторима (векторски производ два вектора — момент силе за моментну тачку), дајући им извесно *смајичко значење*. Исто тако можемо и овде, у кинематици, површине представити векторима и дати им извесна кинематичка значења. Нека се овај вектор \vec{A} , дакле површина A , мења у току времена t ; тада се његов извод по времену $d\vec{A}/dt$, према претходној генерализацији, назива *површинска брзина*. Ако се површина A јавља као сектор између два потега и елемента путање (сл. 21), онда се извод површине сектора по времену зове *секторска брзина*:

$$\vec{S} = \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (67)$$



Слика 21. — Секторска брзина

Површина сектора може се изразити векторским производом

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{r}]$$

па је секторска брзина

$$\vec{S} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \left[\vec{r}, \frac{d\vec{s}}{dt} \right] = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}]. \quad (68)$$

У статисти смо момент силе за тачку дефинисали векторским производом $[\vec{r}, \vec{F}]$, те се секторска брзина може и овако дефинисати:

Двострука секторска брзина једнака је моменту вектора брзине за координатни почетак као моменту тачку.

За Декартов правоугли координатни систем, ако развијемо векторски производ помоћу детерминанте трећег реда, координате секторске брзине,

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}, \quad (69)$$

биће дате изразима

$$S_x = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y});$$

$$S_y = \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z});$$

$$S_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Ако је сектор у равни Oxy (сл. 22), онда је секторска брзина

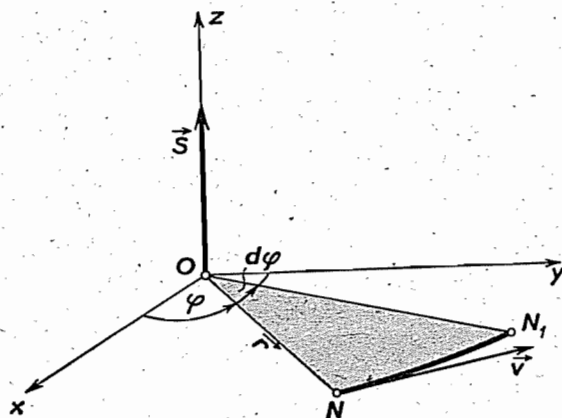
$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k} = S_z\vec{k},$$

и пада у правац Oz -осе. Њен је интензитет

$$S_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

који се може, уводећи поларне координате према обрасцу (6), написати и у овом облику:

$$S_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}, \quad (70)$$



Слика 22. — Сектор лежи у равни Oxy

Пошто је секторска брзина количник површине и времена њена димензија је $[L^2 T^{-1}]$ и мери се јединицама $m^2 \text{sec}^{-1}$ или $\text{cm}^2 \text{sec}^{-1}$.

Ништа нам не смета да на исти начин дефинишемо и *зайремину брзину* ако се запремина мења у току времена. Њена би димензија била $[L^3 T^{-1}]$. Примена ове брзине је велика у хидромеханици при истицању течности.

Пример. — 6). Тачка се креће у равни. Оху константном секторском брзином.

Квадрат њене брзине је $v^2 = n^2/r^2$, где је $n = \text{const.}$, а \vec{r} је вектор положаја покретне тачке за координатни почетак.

Одредити зависност која постоји између вектора положаја и времена t ако су почетни услови: за $t=0$ је $r_0=0$. За коју је вредност n кретање немогуће?

Решење. — Пошто је кретање у равни константном секторском брзином, то је $2S = r^2 \dot{\varphi} = C$, па је квадрат брзине

$$v^2 = \frac{n^2}{r^2} = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}. \quad (\text{и } \sqrt{v^2})$$

Уводећи нову константу $u^2 = n^2 - C^2$, биће

$$\dot{r} = \frac{u}{r}, \text{ то јест } r \, dr = u \, dt.$$

Интегришући добићемо $r^2 = 2ut + C_1$, где је C_1 интеграциона константа која је за почетне услове једнака нули, па је тражена зависност

$$r^2 = 2ut = 2t \sqrt{n^2 - C^2} = 2t \sqrt{n^2 - 4S^2}.$$

Кретање је немогуће ако је $C^2 > n^2$.

3.5. Угаона брзина. Кружно кретање. — Као што смо појам брзине проширили на површину, која се мења у току времена, исто тако можемо га применити и на неки угао α који се мења са временом. Извод овог угла по времену назива се *скаларна угаона брзина* и обележава се са

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (71)$$

Ова је брзина скалар, димензије $[T^{-1}]$, јединице $1/\text{sec}$, пошто је димензија угла неименован број, односно rad/sec , ако се угао мери у радијанима.

Бесконечно мали угао $d\varphi$ можемо представити вектором $\vec{d\varphi}$, који је потпуно одређен са три податка:

1^o интензитет му је једнак величини угла израженој у радијанима,

2^o правац му је правац нормале \vec{n} на раван угла, и

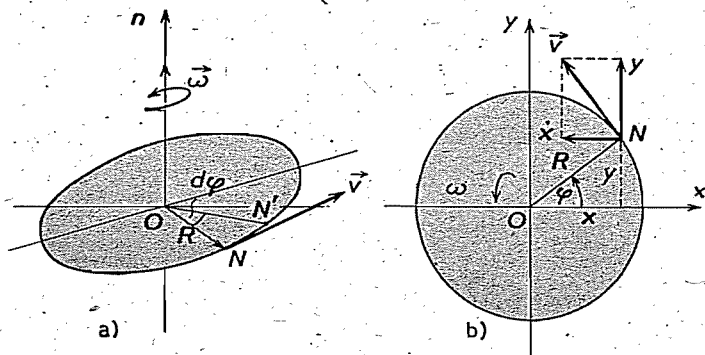
3^e смер му је у правцу позитивне нормале („од лица“), пошто углове меримо у директном смеру.

Ако се овај угао мења у току времена онда се његов извод по-вре-
мену зове *векторска угаона брзина* (сл. 23a) и обележава са

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi} \mathbf{n}. \quad (72)$$

Интензитет ове брзине је *угаона брзина* (ω).

Када се тачка N креће по кружној линији, полупречника R , онда је њен положај на путањи одређен углом φ (сл. 23b). Елемент лука је



Слика 23. — Угаона и обимна брзина

$ds = R d\varphi$, па је брзина покретне тачке

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega, \quad (73)$$

где је ω скаларна угаона брзина. Према томе, брзина покретне тачке, која се креће по кружној линији, једнака је производу полупречника кружне линије и скаларне угаоне брзине. Ова се брзина назива *обимна брзина* и она пада у правац тангенте на кружну линију. Тачка на раздаљини $R=1$ од средишта кружне линије има обимну брзину једнаку угаоној брзини. Према томе се угаона брзина може схватити као *обимна брзина тачке која се креће по кружној линији полупречника једнакој јединици*.

Помоћу векторске угаоне брзине може се обимна брзина представити векторским производом

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}], \quad (74)$$

пошто је \vec{R} вектор положаја покретне тачке. Вектор $\vec{\omega}$ стоји управно на раван угла φ , то јест управан је на раван у којој лежи кружна линија и

показује осу око које се обрће тачка N , крећући се по кружној линији. Пошто је обимна брзина управна на полупречнику R и лежи у равни кружне линије, она је управна и на угаону брзину, те ова три вектора, \vec{v} , $\vec{\omega}$, \vec{R} , образују десни координатни систем. Због ове управности интензитет обимне брзине износи

$$v = \omega R \sin 90^\circ = \omega R,$$

а то је иста вредност коју смо добили и раније.

Координате вектора обимне брзине (сл. 23b) биће

$$x = -R \sin \varphi \cdot \omega = -y\omega; \quad y = R \cos \varphi \cdot \omega = x\omega,$$

где је $\omega = \dot{\varphi}$ скаларна угаона брзина.

Исте обрасце добићемо и развијањем векторског производа (59), пошто кружна линија лежи у равни Oxy :

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j},$$

па су координате $x = -y\omega$; $y = x\omega$; исте вредности смо добили и диференцирањем образаца (6). Збир квадрата ових координата је квадрат обимне брзине $v^2 = R^2\omega^2$, то јест $v = R\omega$, као што смо раније добили.

Између обимне брзине и момента силе за тачку постоји сличност, па се обимна брзина може смањити моментом вектора угаоне брзине за моментину тачку у покретној тачки N :

$$\vec{v} = [\vec{NO}, \vec{\omega}] = [\vec{\omega}, \vec{ON}] = [\vec{\omega}, \vec{R}].$$

Оба ова вектора, обимна брзина и момент силе, резултати су исте векторске операције, али су сасвим других значења. У овоме је баш и предност векторске интерпретације проблема механике.

Према угаоној брзини, кружна кретања деле се на *равномерна* (једнолика) и *неравномерна* (неједнолика). Код првих је угаона брзина константна ($\omega = \text{const.}$), а код других је променљива, $\omega = \omega(t)$.

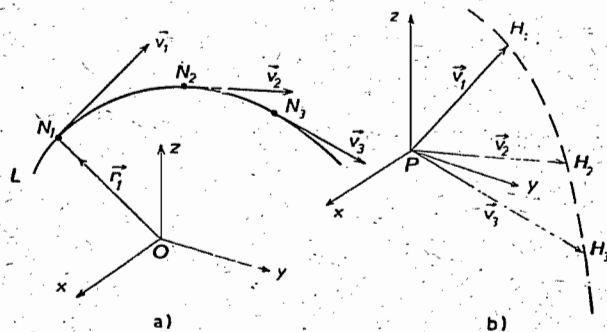
На пример, кретање је дато системом једначина:

$x = 5 \sin(\pi t/4)$; $y = 5 \cos(\pi t/4)$, па су Декартове координате вектора брзине: $x = \omega y$; $y = -\omega x$; $\omega = \pi/4$, те је брзина $v = R\omega = 5\pi/4 = 3,925 \text{ cm/sec}$. Кретање је једнолико кружно кретање, $\omega = \text{const.}$; $\varphi = \omega t = \pi t/4$; закон пута $s = R\varphi = 5\pi t/4$. Тачка ће обићи кружну путању за време $T = 2\pi/\omega = 8 \text{ sec}$.

4. УБРЗАЊЕ ПОКРЕТНЕ ТАЧКЕ

4.1. Ходограф брзине. — Брзина покретне тачке, као што смо видели, мења се у току времена. Ако из једне сталне тачке — пола (P) — (сл. 24), конструишемо векторе брзина покретне тачке, геометријско место завршних тачака ових вектора јесте крива линија која се зове *ходограф брзине покретне тачке за пол (P)*. Свакој тачки N путање одговара само једна, потпуно одређена, тачка (H) на ходографу брзине. Облик ходографа зависи, дакле, од природе кретања, од путање и од избора пола ходографа.

Положај покретне тачке на путањи одређен је вектором положаја покретне тачке у односу на пол (O). Кретање је дато коначном јед-



Слика 24. — Ходограф брзине

начином $\vec{r} = \vec{r}(t)$, па се путања може сматрати *ходографом вектора положаја покретне тачке за пол (O)*. Док се покретна тачка N креће по путањи, њој одговарајућа — кореспондентна — тачка H кретаће се по ходографу брзине. Њен је положај одређен вектором брзине \vec{v} за одговарајући пол (P), па је, дакле, векторска једначина ходографа брзине

$$\vec{v} = \vec{r} = \vec{v}(t). \quad (75)$$

Овој векторској једначини, за Декартов координатни систем у полу (P), одговарају три скаларне једначине облика:

$$\dot{x} = f'_1(t); \quad \dot{y} = f'_2(t); \quad \dot{z} = f'_3(t) \quad (75')$$

где су x, y, z координате кореспондентне тачке H на ходографу.

Ово су у ствари *параметарске једначине ходографа брзине*. Као што смо елиминисањем параметра t — времена — из једначина кретања добили линију путање, на исти начин елиминисањем параметра t из *прелиходних једначина добићемо линију ходографа брзине* за нови координатни систем $Pxyz$.

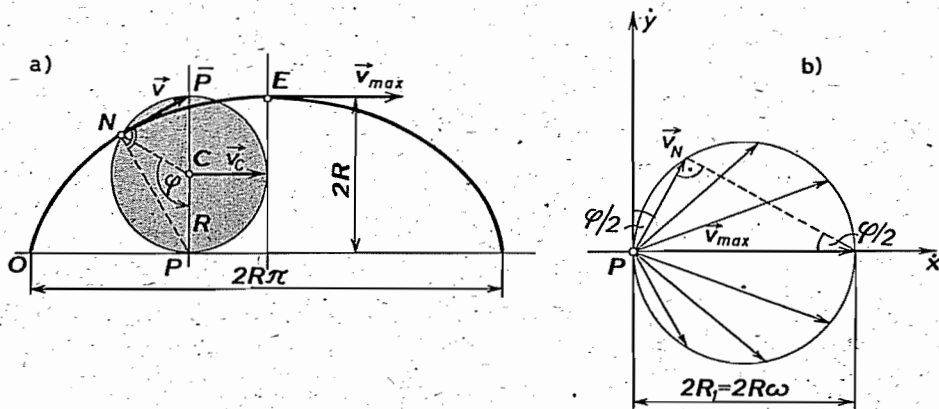
На пример, када су коначне једначине кретања $x = 2R \cos^2 \varphi = R + R \cos 2\varphi$, $y = 2R \cos \varphi \sin \varphi = R \sin 2\varphi$; $\varphi = \omega t$, линија путање је круг $(x-R)^2 + y^2 = R^2$, са средиштем на Ox -оси, $p=R$, $q=0$, полупречника R . Пројекције вектора брзине на координатне осе јесу $x = -2R\omega \sin 2\varphi$, $y = 2R\omega \cos 2\varphi$, па је ходограф брзине централни круг у систему Pxy , полупречника $R_1 = 2R\omega$. Ово показује да се тачка креће по својој путањи једнолико, константном брзином $v = 2R\omega$. Вектор брзине је константног интензитета, али се мења по правцу, па ту промену уочавамо на ходографу брзине.

Линија путање кретања $x = 2t$, $y = 4t^2$ јесте парабола $y = x^2$, са теменом у координатном почетку. Због $x = 2t$, $y = 8t$, ходограф брзине је права, паралелна Pu -оси, на растојању $x = 2$ од ње.

Дакле, и путања и ходограф брзине јесу ходографи векторских функција $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ које зависе од исте скаларне променљиве (t), само за различите полове.

Пример. — 7. Одредити облик ходографа брзине ако се тачка креће по циклоиди (зад. 3).

Решење. — Ако из система једначина компонентних брзина $\dot{x} = kR(1 - \cos kt)$, $\dot{y} = kR \sin kt$; $k = \omega$; елиминишемо време (t), добићемо $(\dot{x} - kR)^2 + \dot{y}^2 = (kR)^2$.



Слика 25. — Кретање тачке по циклоиди

Ходограф је кружна линија, са координатним почетком у левом темену (сл. 25). Полупречник је $R_1 = kR = \omega R$. Екстремне вредности брзина јесу

$$v_{\min} = 0; \quad v_{\max} = 2kR = 2R\omega.$$

Максимална брзина одговара темену циклоиде (E).

Пошто је $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2R^2\omega^2(1 - \cos \varphi) = 4R^2\omega^2 \sin^2(\varphi/2)$, брзина покретне тачке N је $v = v_N = 2R\omega \sin(\varphi/2) = v_{\max} \sin(\varphi/2)$, па вектор брзине \vec{v}_N гради на ходографу брзине (сл. 25 б), са осом Pu угао $\varphi/2$. Брзина пада у правац тангенте на циклоиду и увек пролази кроз горњу тачку \bar{P} круга, јер је угао $\angle N\bar{P}C = \varphi/2$.

Због $v = ds/dt$, $\varphi = \omega t$, $d\varphi = \omega dt$, елемент лука циклоиде је $ds = 2R \sin(\varphi/2) d\varphi = 4R \sin \theta d\theta$, где је $\varphi = 2\theta$. Због тога су лук циклоиде и њена укупна дужина

$$s = 2R \int_0^{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4R \int_0^{\theta} \sin \theta d\theta = 4R \left[1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right]; \quad L = 8R.$$

4.2. Убрзање покретне тачке. — Први извод вектора положаја покретне тачке по времену одређивао је *брзину покретне тачке*:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

која, у општем случају, зависи од времена. Први извод брзине по времену, или други извод вектора положаја покретне тачке по времену, назива се *убрзање покретне тачке* и обележава се са

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (76)$$

Убрзање можемо дефинисати и на други начин. Брзина се може сматрати, као што смо видели, вектором положаја тачке на ходографу брзине те је ходограф брзине путања тачке H кореспондентне покретној тачки N . Брзина покретне тачке била је дефинисана као геометријски извод вектора положаја па се и убрзање, према томе, може дефинисати као *брзина тачке на ходографу брзине*, то јест као геометријски извод вектора брзине. Убрзање покретне тачке јесте вектор који је потпуно одређен са три податка:

1° *интензитет* му је једнак изводу елемената лука ходографа брзине по времену, $d\sigma/dt$, где је $d\sigma$ елемент лука ходографа,

2° *правац* му је *правац тангенције* на ходографу брзине,

3° *смер* му је у смеру *кретања тачке H по ходографу*.

Убрзање је, дакле, прираштај брзине у јединици времена. *Негативно убрзање* назива се *усиорење*. Димензија убрзања је количник брзине и времена:

$$\dim a = [a] = \left[\frac{v}{t} \right] = [L T^{-2}];$$

мери се јединицама $m \text{ sec}^{-2}$; cm sec^{-2} .

Диференцирајући израз (44) по времену, добијамо да је при *праволинијском кретању*

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{s}}; \quad [\vec{a}, \vec{u}] = 0; \quad a = \ddot{s}, \quad (77)$$

па је вектор убрзања *колинеаран са кретањем*. Интензитет убрзања је једнак другом изводу пута по времену.

Када је убрзање једнако нули, тада је праволинијско кретање *једнолико (равномерно)*, у противном је *променљиво*. Ако је убрзање константно, онда је праволинијско кретање *једнако убрзано ($a > 0$)* или *једнако усиорено ($a < 0$)*. Полазећи у овом случају од једначине $\pm a = \text{const.}$, двоструким интегрисањем добијамо брзину и пут:

$$\pm a = \text{const.}; \quad v = \pm at + C_1; \quad s = \pm \frac{1}{2} at^2 + C_1 t + C_2,$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе. Ако су почетни услови такви да је у почетном тренутку $t=t_0$ почетна брзина v_0 и почетни пређени пут s_0 , онда су интеграционе константе $C_1 = v_0 - (\pm at_0)$; $C_2 = s_0 - C_1 t_0 - (\pm at_0^2)$, па су кинематичке једначине једнако убрзаног, односно једнако успореног кретања:

$$\pm a = \text{const.}; \quad v = v_0 \pm a(t - t_0); \quad s = s_0 + v_0(t - t_0) \pm \frac{a}{2}(t - t_0)^2. \quad (78)$$

Знак + односи се на једнако убрзано, а знак - на једнако успорено кретање.

Када се из друге једначине вредност $t - t_0 = (v - v_0)/(\pm a)$ унесе у трећу једначину и среди, добиће се разлика квадрата брзина:

$$v^2 - v_0^2 = \pm 2a(s - s_0). \quad (79)$$

Претходне се једначине упрошћавају ако је почетно време $t_0 = 0$, па су облика:

$$\pm a = \text{const.}; \quad v = v_0 \pm at; \quad s = s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2. \quad (80)$$

Обрасци (78, 79 и 80) важе и за једнолико кретање, тада је $v_0 = 0$, то јест $v = \text{const.}$, па су кинематичке једначине једноликог кретања:

$$a = 0; \quad v = v_0 = \text{const.}; \quad s = s_0 + v(t - t_0); \quad s = s_0 + vt. \quad (81)$$

Једнако убрзано и једнолико кретање су *прогресивна кретања*, јер брзина стално расте, или је, пак, константна, па се тачка *неће никада зауставити*. Међутим, при једнако успореном кретању брзина стално *опада*, па је највећа брзина једнака почетној, *штоа ово кретање не може бити без почетне брзине*. Тачка ће се зауставити када јој брзина буде једнака нули ($v = 0$), у тренутку $T - t_0 = v_0/a$. Пређени пут тада одређујемо из (80), па је

$$T = t_0 + (v_0/a), \quad s_{\text{max}} = s_0 + (v_0^2/2a). \quad (82)$$

Претходни обрасци се упрошћавају када се узме $s_0 = 0$.

На пример, воз се креће праволинијски, једнолико, брзином 72 km/h. Пред станицом се кочењем остварује успорење од 0,4 m/sec². Време после кога ће воз стати износи $T = v_0/a = 20/0,4 = 50$ sec. Пређени пут до заустављања је $s = v_0^2/2a = 500$ m, јер је $v_0 = v = 20$ m/sec.

Или, воз се креће једнолико; брзином 54 km/h, па је на путу од 50 m давана контрапара тако да је брзина спала на 18 km/h. Овде је $s - s_0 = 50$ m, $v_0 = 15$ m/sec, $v = 5$ m/sec, те је $v^2 - v_0^2 = -2a \cdot 50$, па је $a = -2$ m/sec² и време $t - t_0 = 5$ sec.

4.3. Компоненте вектора убрзања. — При проучавању кинематичких и динамичких проблема највећу улогу имају компоненте вектора брзине и вектора убрзања у разним координатним системима, те ћемо их извести за најважније системе.

а) Декартов правоугли систем. — Ако је кретање одређено коначном векторском једначином

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

или коначним скаларним једначинама, у Декартовом правоуглом координатном систему

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t);$$

онда вектор брзине има координате (односно пројекције) у истом координатном систему:

$$v_x = \dot{x} = f'_1(t); \quad v_y = \dot{y} = f'_2(t); \quad v_z = \dot{z} = f'_3(t),$$

а вектор убрзања:

$$a_x = \ddot{x} = f''_1(t); \quad a_y = \ddot{y} = f''_2(t); \quad a_z = \ddot{z} = f''_3(t) \quad (83)$$

где су тачком означени параметарски изводи по времену (t).

Интензитет тоталног убрзања дат је изразом

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (84)$$

и може се представити дијагоналном елементарног паралелепипеда чије су ивице компоненте убрзања.

До истог резултата долазимо диференцирајући двапут по времену једначину (1), односно једанпут једначину (42'), пошто су ортови \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} константни, па је

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad (85)$$

На пример, ако су једначине кретања $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, онда су $\dot{x} = -2 \sin t$; $\dot{y} = 2 \cos t$; $\ddot{x} = -2 \cos t = -x$; $\ddot{y} = -2 \sin t = -y$, па је $a = 2 \text{ cm/sec}^2$. Када је $x = 4 \cos 2t$, $y = 2 \sin t$, то јест $y^2 = 2 - x$, тада су $\dot{x} = -8 \sin 2t$; $\dot{y} = 2 \cos t$; $\ddot{x} = -16 \cos 2t$; $\ddot{y} = -2 \sin t$.

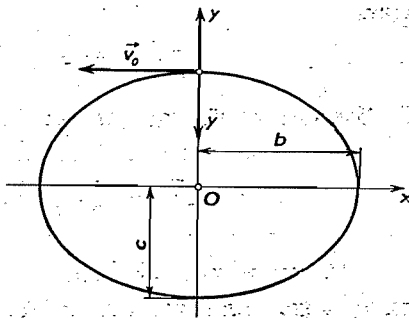
Пример. — 8. Покретна тачка описује елипсу $c^2 x^2 + b^2 y^2 = b^2 c^2$ убрзањем које има правац и смер негативне y -осе. Почетни положај тачке је $x_0 = 0$, $y_0 = c$, а почетна брзина је v_0 (сл. 26). Одредити убрзање на сваком месту путање.

(Newton — Principia).

Решење. — Диференцирајући двапут једначину елипсе, биће

$$c^2 x \dot{x} + b^2 y \dot{y} = 0; \quad y' = -c^2 x / b^2 y;$$

$$c^2 (\dot{x}^2 + x \ddot{x}) + b^2 (\dot{y}^2 + y \ddot{y}) = 0; \quad y'' = c^4 / b^2 y^3$$



Слика 26. — Елиптичко кретање

Пошто су $\ddot{x}=0$, $y'=y/x$ и $\ddot{y}=d^2y/dt^2=(d/dx)x$, компонентне брзине и убрзања износе

$$\dot{x}=-v_0=\text{const.}, \quad y=y'x=-\frac{c^2x}{b^2y}v_0; \quad \ddot{x}=0; \quad \ddot{y}=\frac{dy}{dx}x'=-\frac{c^2}{b^2}v_0\frac{y-xy'}{y^2}x'=-\frac{c^4v_0^2}{b^2y^3}$$

b) *Поларно-цилиндрички координатни систем.* — Као и вектор брзине, тако ћемо и вектор убрзања разложити у три компоненте у *радијалном, циркуларном и аксијалном правцу*. Диференцирајући по времену изразе (49), добићемо Декартове координате вектора убрзања:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\sin\varphi; \\ \ddot{y} &= (\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\cos\varphi; \quad \ddot{z}=\ddot{z}. \end{aligned} \quad (86)$$

Вектор убрзања је

$$\vec{a}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}=\vec{a}_r\vec{r}_0+\vec{a}_c\vec{c}_0+\vec{a}_z\vec{k}, \quad (87)$$

па, с обзиром на односе (6'''), добијамо пројекције вектора убрзања на осе поларно-цилиндричког координатног система:

$$\begin{aligned} a_r &= (\vec{a}, \vec{r}_0) = \ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi; \\ a_c &= (\vec{a}, \vec{c}_0) = -\ddot{x}\sin\varphi + \ddot{y}\cos\varphi; \quad a_z = (\vec{a}, \vec{k}) = \ddot{z}, \end{aligned}$$

односно

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \quad a_c = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}); \quad a_z = \ddot{z}; \quad (89)$$

овде су a_r *радијално*, a_c *циркуларно* и $a_z = \ddot{z}$ *аксијално убрзање*.
Интензитет вектора убрзања износи

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_c^2 + a_z^2}. \quad (89)$$

До истог резултата долазимо диференцирајући по времену вектор брзине (54'), водећи рачуна да су ортови \vec{r}_0 и \vec{c}_0 овог система променљиви:

$$\vec{a} = \dot{v} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\vec{r}}_0 + (r\dot{\varphi} + r\dot{\varphi})\vec{c}_0 + r\dot{\varphi}\vec{c}_0 + \dot{z}\vec{k}.$$

С обзиром на изводе ортова (55), убрзање ће бити:

$$\vec{a} = a_r\vec{r}_0 + a_c\vec{c}_0 + a_z\vec{k} = (\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\vec{c}_0 + \ddot{z}\vec{k}. \quad (90)$$

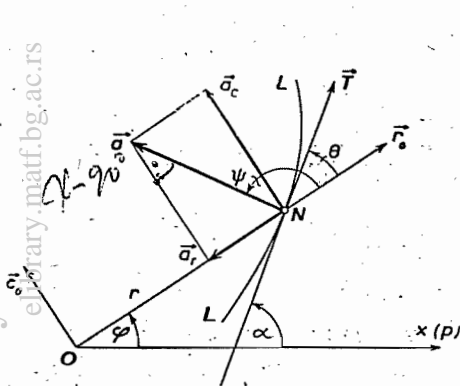
Компонентна убрзања су колинеарна са ортовима својих оса, а да ли су истог или супротног смера, зависи од њихових скаларних величина, јесу ли оне позитивне или негативне.

У поларном координатном систему (сл. 27) постоји само радијално и циркуларно убрзање. Вектор убрзања гради са радијалним правцем угао ψ , па су компоненте и пројекције:

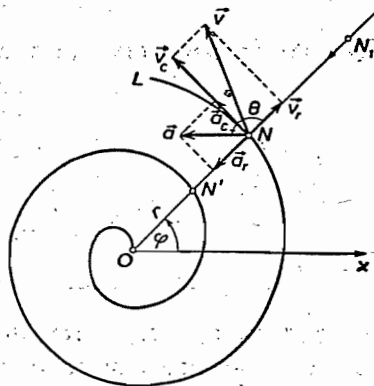
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_c = a_r \vec{r}_0 + a_c \vec{c}_0 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{c}_0, \quad (91)$$

то јест

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = a \cos \psi; \quad a_c = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = a \sin \psi. \quad (92)$$



Слика 27. — Радијално и циркуларно убрзање



Слика 28. — Архимедова спирала

Пример. — 9. За кретање дато системом једначина $r = ct$, $\varphi = \omega t$, где су c и ω позитивне константе, одредити линију путање, компонентне брзине и убрзања и интензитета брзине и убрзања.

Решење. — Ако из једначина кретања елиминишемо параметар t , добићемо линију путање $r = \frac{c}{\omega} \varphi = k \varphi$, где је k нова константа. Линија путање је *Архимедова спирала* (сл. 28).

Пошто су $\dot{r} = c$, $\ddot{r} = 0$; $\dot{\varphi} = \omega$; $\ddot{\varphi} = 0$, пројекције вектора брзине и вектора убрзања јесу: $v_r = c$; $v_c = r\omega$; $v = (c^2 + r^2\omega^2)^{1/2}$; $a_r = -r\omega^2$; $a_c = 2c\omega$; $a = \omega(4c^2 + r^2\omega^2)^{1/2}$.

И брзина и убрзање зависе од потеза, само су компонентне брзине увек позитивне, $\text{tg } \theta = v_c/v_r = r/k$, као и циркуларно убрзање, док је радијално увек негативно, $\text{tg } \psi = a_c/a_r = -2k/r$.

Због $r = k\varphi$ тачка N_1 , која одговара углу $\varphi + 2\pi$, налазиће се на истом потезу, па је $r_1 = k(\varphi + 2\pi) = r + 2k\pi$, те је $r_1 - r = 2k\pi$. Потези свих тачака N_i које одговарају истом углу φ расту у *аритметичкој прогресији*, разлике $2k\pi = 2c\pi/\omega$.

с) Сферни координатни систем. — Вектор убрзања разложимо и у овом систему на три ортогоналне компоненте: у радијалном, циркуларном и меридионалном правцу. Пројекције можемо одредити као и у претходном случају, диференцирајући по времену Декартове координате вектора брзине (51) или непосредно диференцирајући по времену вектор брзине (57), водећи рачуна да су ортови овог система променљиви са временом.

Дакле, биће

$$\vec{a} = \vec{v} = \dot{\rho} \vec{\rho}_0 + \rho \ddot{\rho}_0 + (\dot{\rho} \dot{\varphi} \cos \psi + \rho \ddot{\varphi} \cos \psi - \rho \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi) \vec{c}_0 + \\ + (\rho \ddot{\varphi} \cos \psi) \vec{c}_0 + (\dot{\rho} \dot{\psi} + \rho \ddot{\psi}) \vec{v}_0 + \rho \dot{\psi} \vec{v}.$$

С обзиром на изводе ортова (58), убрзање ће бити:

$$\vec{a} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_c + \vec{a}_v = \dot{a}_\rho \vec{\rho}_0 + \dot{a}_c \vec{c}_0 + \dot{a}_v \vec{v}_0, \quad (93)$$

са сферним координатама вектора убрзања:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\psi}^2 - \rho \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi; \quad a_c = \frac{1}{\rho \cos \psi} \cdot \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi); \\ a_v = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\psi}) + \rho \dot{\varphi}^2 \cos \psi \sin \psi. \quad (94)$$

Овде су: a_ρ радијално, a_c циркуларно и a_v меридионално убрзање.

Претходни обрасци се упрошћавају када се тачка креће по сфери ($\rho = R = \text{const.}$). Тада су пројекције вектора убрзања:

$$a_\rho = -R (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi); \quad a_c = \frac{R}{\cos \psi} \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \cos^2 \psi); \\ a_v = R \ddot{\psi} + R \dot{\varphi}^2 \cos \psi \sin \psi. \quad (94')$$

На пример, ако су $\rho = R$; $\varphi = 4t$; $\psi = 3t$, онда су пројекције вектора убрзања:

$$a_\rho = -R (9 + 16 \cos^2 \psi); \quad a_c = -24 R \sin \psi; \quad a_v = 8 R \sin 2 \psi.$$

d) Генералисани правоугли координатни систем. — Пројекција вектора убрзања \vec{a} на осу \vec{T}_i правоуглој генералисаног координатног система биће:

$$a_i = (\vec{a}, \vec{T}_i) = (\vec{v}, \vec{T}_i) = \frac{1}{A_i} \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right).$$

Пошто је

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) + \left(\vec{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right),$$

пројекција убрзања је

$$a_i = \frac{1}{A_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) - \left(\vec{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \right].$$

Из обрасца (10) следи

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3} \dot{q}_3,$$

а из (63) биће

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3} \dot{q}_3,$$

па је, уопште,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}.$$

Ово значи да је извод по времену парцијалног извода вектора положења по координати q_i једнак парцијалном изводу вектора брзине по истој координати. Уносећи овај израз у претходни, за пројекције вектора убрзања на осе правоуглог криволинијског координатног система добијамо израз

$$a_i = \frac{1}{A_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial (1/2 v^2)}{\partial q_i} - \frac{\partial (1/2 v^2)}{\partial q_i} \right] \quad (96)$$

јер је, слично обрасцу (64), скаларни производ

$$\left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\vec{v}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial q_i} = \frac{\partial (1/2 v^2)}{\partial q_i}.$$

С обзиром на (14), генерализана убрзања и пројекције вектора убрзања за три раније наведена правоугла система биће следећа:

q_i	x	y	z	r	φ	z	ρ	φ	ψ
\dot{q}_i	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}	\dot{r}	$\dot{\varphi}$	\dot{z}	$\dot{\rho}$	$\dot{\varphi}$	$\dot{\psi}$
\ddot{q}_i	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}	\ddot{r}	$\ddot{\varphi}$	\ddot{z}	$\ddot{\rho}$	$\ddot{\varphi}$	$\ddot{\psi}$
A_i	1	1	1	1	r	1	1	$\rho \cos \psi$	ρ
v^2	$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$			$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$			$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \rho^2 \dot{\psi}^2$		
$\frac{\partial (1/2 v^2)}{\partial q_i}$	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}	\dot{r}	$r^2 \dot{\varphi}$	\dot{z}	$\dot{\rho}$	$\rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi$	$\rho^2 \dot{\psi}$
$\frac{\partial (1/2 v^2)}{\partial q_i}$	—	—	—	$r \dot{\varphi}^2$	—	—	$\rho (\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2)$	—	$-\rho^2 \dot{\varphi} \cos \psi \sin \psi$
q_i	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}	$\ddot{r} - \frac{1}{r} \dot{r}^2$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$	\ddot{z}	Обрасци (94)		

(97)

е) *Односи између пројекција вектора убрзања на осе разних система.* — Када су познати закони кретања $x=f_1(t)$; $y=f_2(t)$; $z=f_3(t)$, тада се, помоћу пројекција вектора убрзања на осе Декартовог правоуглог система, могу одредити поларно-цилиндричке и сферне координате вектора убрзања.

Вектор убрзања је

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = a_r\vec{r}_0 + a_c\vec{c}_0 + a_z\vec{k} = a_\rho\vec{\rho}_0 + a_c\vec{c}_0 + a_\nu\vec{\nu}_0,$$

па множењем ове једначине ортовима, с обзиром на односе (6''') и (8''), добијамо пројекције вектора брзине на осе поларно-цилиндричког и сферног координатног система:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi; & a_\rho &= \ddot{x} \cos \psi \cos \varphi + \ddot{y} \cos \psi \sin \varphi + \ddot{z} \sin \psi, \\ a_c &= -\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi; & a_c &= -\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi; \\ a_z &= \ddot{z}; & a_\nu &= -\ddot{x} \sin \psi \cos \varphi - \ddot{y} \sin \psi \sin \varphi + \ddot{z} \cos \psi. \end{aligned} \quad (95)$$

ф) *Природне компоненте вектора убрзања.* — Разложимо ли убрзање у правцу оса природног координатног система, у правцу тангенте, главне нормале и бинормале (ортова \vec{T} , \vec{N} , \vec{B}), биће:

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} + a_B\vec{B}. \quad (99)$$

Компоненте убрзања добићемо диференцирајући основну једначину за брзину:

$$\vec{v} = v\vec{T}$$

јер вектор \vec{v} пада у правац тангенте на путању. Убрзање ће износити

$$\vec{a} = \vec{v} = v\vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Извод орта тангенте по времену може се написати у облику*

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = v K \vec{N} = \frac{v}{R} \vec{N}$$

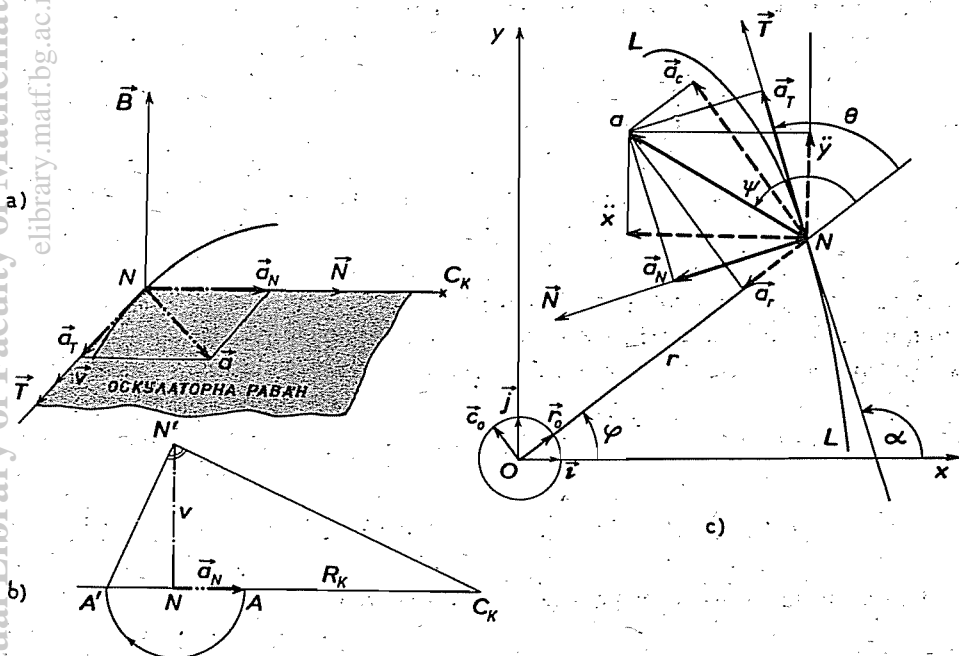
пошто је извод орта тангенте по луку једнак вектору кривине (\vec{K}) криве линије, па је

$$\vec{a} = v\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}, \quad (100)$$

где је $R = R_k$ полуијечник кривине путање.

* Додатак. чл. 1.3.

Свако убрзање, дакле, можемо разложити у две компоненте (сл. 29 а): *тангенцијално убрзање* (\vec{a}_T), у правцу тангенте путање, и *нормално убрзање* (\vec{a}_N), у правцу главне нормале. Ова друга компонента убрзања усмерена је ка *средњој кривине путање*, па се често зове и *центрипетално убрзање*. Убрзање у правцу бинормале једнако је нули, те *топално убрзање увек лежи у оскулаторној равни путање*. До овог сазнања можемо доћи и непосредно, јер две суседне (контигентне) брзине, као тангенте на путању, леже увек у оскулаторној равни путање, па и прираштај брзине, односно убрзање, мора лежати у тој равни; дакле, оно нема компоненте у правцу бинормале која је управна на оскулаторну раван.



Слика 29. — Природне компоненте вектора убрзања

Тангенцијално и нормално убрзање зову се једним именом *природне компоненте вектора убрзања*, јер падају у правце оса природног координатног система. Величине ових компонента су:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \dot{v}; \quad a_N = \frac{v^2}{R}; \quad a_B = 0. \quad (101)$$

Интензитет тоталног убрзања износи

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}. \quad (102)$$

Из другог обрасца (101) следи да се *полупречник кривине* може одредити графички када се познају брзина и нормално убрзање, односно нормално убрзање када се познају брзина и полупречник кривине, јер је брзина средња геометријска пропорционала полупречника кривине и нормалног убрзања, као што је показано на слици 29 b.

Вредности ових компонентних убрзања могу се изразити и помоћу скаларних производа:

$$a_T = (\vec{a}, \vec{T}) = \frac{1}{v} (\vec{a}, \vec{v}); \quad a_N = (\vec{a}, \vec{N}).$$

С обзиром на *Лагранжев* идентитет, биће

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 = \frac{1}{v^2} (\vec{v}, \vec{a})^2 + a_N^2 = a^2 \frac{v^2}{v^2},$$

то јест

$$a_T^2 = \frac{1}{v^2} (\vec{v}, \vec{a})^2; \quad a_N^2 = \frac{1}{v^2} |[\vec{v}, \vec{a}]|^2. \quad (103)$$

Израчунавање полупречника кривине често је приметно и дуго, те се природне координате убрзања могу лакше израчунати из ових једначина. На пример за Декартове координате (сл. 29 c) биће

$$a_T = \frac{1}{v} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2;$$

$$a_N^2 = \frac{1}{v^2} \left\{ (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 \right\}. \quad (103')$$

За случај кретања у равни, због $\dot{z} = \ddot{z} = 0$, биће

$$a_T = \frac{1}{v} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}); \quad a_N = \frac{1}{v} (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}); \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2. \quad (104)$$

За случај приказивања кретања у поларно-цилиндричком систему имали бисмо

$$a_T = \frac{1}{v} [\dot{r}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + r\dot{\varphi}(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) + \dot{z}\ddot{z}]; \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2; \quad (103'')$$

$$a_N^2 = \frac{1}{v^2} \left\{ [r\dot{\varphi}\ddot{z} - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\dot{z}]^2 + [\dot{z}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) - r\ddot{z}]^2 + [r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) - r\dot{\varphi}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)]^2 \right\},$$

односно за случај кретања у равни (сл. 20c):

$$\begin{aligned} a_T &= \frac{1}{v} (\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\ddot{\varphi}^2 + r^2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}); & v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2; \\ a_N &= \frac{1}{v} [(2r\ddot{r} - r\dot{r}^2)\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^3 + r\dot{r}\ddot{\varphi}]. \end{aligned} \quad (105)$$

Помоћу обрасца (81) можемо кинематички одредити полупречник кривине путање:

$$R = \frac{v^2}{a_N}; \quad \vec{R} = R\vec{N} = \frac{v^2}{a_N} \vec{N} = \frac{v^3}{\sqrt{[\vec{v}, \vec{a}]^2}} \vec{N}. \quad (106)$$

За случај кретања у равни биће:

a) за Декартов правоугли сисџем*

$$R = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{x\ddot{y} - y\ddot{x}} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx d^2y - dy d^2x} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}; \quad (107)$$

b) за поларни сисџем*

$$\begin{aligned} R &= \frac{(r^2 + r^2\dot{\varphi}^2)^{3/2}}{(2r\ddot{r} - r\dot{r}^2)\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^3 + r\dot{r}\ddot{\varphi}} = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r r'' - r r'^2} = \\ &= \frac{(u^2 + u'^2)^{3/2}}{u^3(u' + u)}; \quad u = \frac{1}{r}; \end{aligned} \quad (108)$$

јер су

$$y' = y/x; \quad y'' = dy'/dx = (dy'/dt)/x = (x\ddot{y} - y\ddot{x})/x^3; \quad r' = -u^{-2}u';$$

$$r' = dr/d\varphi = r/\dot{\varphi}; \quad r'' = dr'/d\varphi = (dr'/dt)/\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}\ddot{r} - r\ddot{\varphi})/\dot{\varphi}^3;$$

$$r'' = u^{-3}(2u'^2 - uu'').$$

Ако је кретање праволинијско, убрзање се своди само на једну компоненту:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T},$$

пошто је кривина праве линије једнака нули ($K=0$). У овом случају тотално убрзање поклапа се са тангенцијалним и пада у правац тангенте, то јест у *правац саме путање*.

При *равномерном криволинијском кретању* ($v = \text{const.}$) тангенцијално убрзање једнако је нули, јер је $v' = 0$, а тотално убрзање једнако је нормалном:

$$a_T = 0; \quad a_N = \frac{v^2}{R} = a; \quad \vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{N},$$

са смером ка средишту кривине путање.

Покретна тачка нема убрзања *ако мирује*, или се креће праволинијски и једнолико ($v = \text{const.}$).

Примери. — 10. Одредити природне компоненте убрзања кретања датог системом једначина $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$. Какве су криве линије линија путање и ходограф брзине?

Решене. — Диференцирањем система једначина биће

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t; & x' = -\omega y; & \ddot{x} = -\omega^2 x; \\ y = R \sin \omega t; & y' = \omega x; & \ddot{y} = -\omega^2 y. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \ddot{x} &= -\omega^2 x y \\ y \ddot{y} &= \omega^2 x y \end{aligned}$$

Ако из првог система једначина елиминисемо параметар t , линија путање биће кружна линија ($x^2 + y^2 = R^2$), а из другог система биће ходограф брзине такође кружна линија другог полупречника ($x^2 + y^2 = \omega^2 R^2 = R^2$). Пол ходографа брзине пада у средиште линије путање.

Интензитет брзине је $v = \omega R = \text{const.}$ Дакле, кретање је равномерно криволинијско, те је тангенцијално убрзање једнако нули, $a_T = 0$, а тотално убрзање једнако је нормалном убрзању, $a = a_N = \omega^2 R$.

До истих резултата дошли бисмо и применом образаца (83'), само је у овом случају лакше, због $R = \text{const.}$, применити обрасце (81).

11. Кретање је дато системом једначина $x = 2t$, $y = 4t - 5t^2$. Одредити природне координате убрзања, линију путање и ходограф брзине.

Решене. — Елиминисањем времена t из претходних једначина, добићемо линију путање параболу $5x^2 - 8x + 4y = 0$ (карактеристични бином $G = 0$, односно $J_2 = AC - B^2 = 0$).

Затим је $x' = 2$; $y' = 4 - 10t$, па је ходограф брзине вертикална права линија на одстојању 2 од пола, јер је хоризонтална компонента брзине константна.

Компонентна убрзања су $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -10$. Квадрат брзине је $v^2 = 20(5t^2 - 4t + 1)$.

Пошто је тражење полупречника кривине приметно, лакше је одредити природне компоненте убрзања помоћу обрасца (83):

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 20(5t^2 - 4t + 1)$$

$$2v \cdot v' = 20(10t - 4)$$

$$v' = \frac{10}{v} (5t - 2)$$

$$a_T = v'$$

$$a_N = \frac{20}{v}$$

$$R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{20}, \text{ односно, према (84): } R = \frac{[4 + (10 - t)^2]^{3/2}}{-20} = \frac{[1 + (2 - 5x/2)^2]^{3/2}}{-5/2},$$

Полупречник кривине износи

$$R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{20}, \text{ односно, према (84): } R = \frac{[4 + (10 - t)^2]^{3/2}}{-20} = \frac{[1 + (2 - 5x/2)^2]^{3/2}}{-5/2},$$

јер су

$$x = 2; \quad y = 4 - 10t = 4 - 5x; \quad y' = 2 - 5x/2; \quad y'' = -5/2.$$

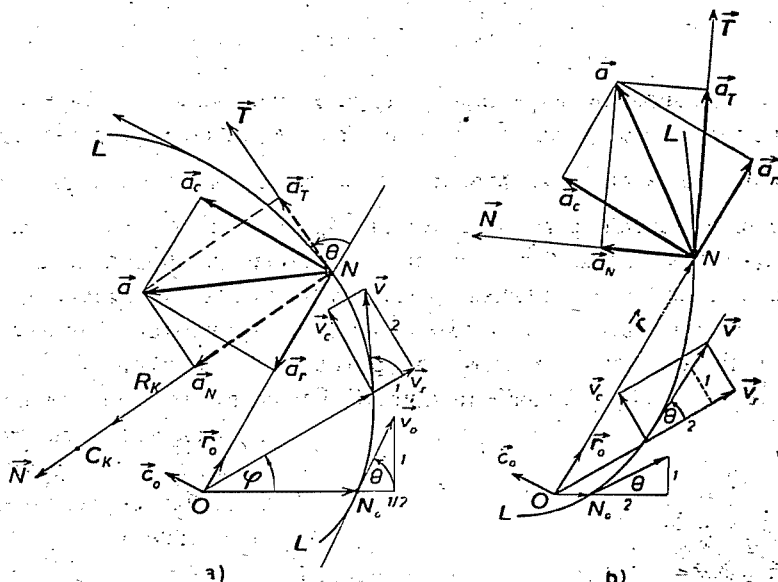
12. Тачка се креће по логаритамској спирали $r = ce^{k\varphi}$, $k > 0$, константном угаоном брзином (ω) око пола. Одредити поларне и природне координате вектора убрзања, тотално убрзање и полупречник кривине.

Решене. — Пошто су $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = 0$, биће $\dot{r} = k\omega r$; $\ddot{r} = k^2\omega^2 r$,

па су

$$v_r = \dot{r} = k\omega r; \quad v_c = r\omega; \quad v = \omega r \sqrt{1+k^2}; \quad \text{tg } \theta = v_c/v_r = 1/k; \quad \theta = \text{const.}$$

Код логаритамске спирале потези расту у *геометријској* *пројекцији* коефицијента $e^{k\alpha}$ када углови расту у *аритметичкој* *пројекцији*, разлике α . Пошто је угао $\theta = \text{const.}$, *потези* *секу* *спиралу* *под* *истим* *углом*. Ово нам омогућава да лако конструишемо тангенту на спиралу; у датој тачки треба на потег пренети вредност k , па из крајње тачке вредност 1 (сл. 30а).



Слика 30. — Логаритамска спирала

Поларне координате вектора убрзања јесу

$$a_r = (k^2 - 1)r\omega^2; \quad a_c = 2k\omega^2 r; \quad a = (1 + k^2)r\omega^2,$$

а према (83''') биће природне координате:

$$a_T = kr\omega^2 \sqrt{1+k^2}; \quad a_N = r\omega^2 \sqrt{1+k^2}; \quad a = (1+k^2)r\omega^2.$$

Полупречник кривине износи

$$R = \frac{v^2}{a_N} = r \sqrt{1+k^2}.$$

На слици 30а приказана је спирала са вредностима $c=4$, $k=1/2$, па је радијално убрзање негативно, $a_r = -3r\omega^2/4$. Међутим, на слици 30b приказана је спирала са $c=1$ и $k=2$, па је радијално убрзање *позитивно*, $a_r = 3r\omega^2$.

13. Тачка се креће у равни константним тангенцијалним и нормалним убрзањем. Одредити линију путање.

$$a_v = \ddot{v} - r\dot{\psi}^2$$

$$a_c = 2r\dot{\psi} + r\ddot{\psi}$$

Решение. — Компонентна убрзања су

$$a_T = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = A = \text{const.}, \quad a_N = \frac{v^2}{R} = B = \text{const.}$$

$$v^2 ds = A ds$$

$$\frac{v^2}{2} = AS$$

Из прве једначине интегрисањем добићемо

$$v^2 = 2As, \text{ па је из друге } s = \frac{B}{2A} R = C \frac{ds}{d\alpha}$$

Поновним интегрисањем добићемо једначину $c_1 e^{k\alpha}$. Ово је природна једначина (intrinsic equation) *логаритамске спирале*.*

Пошто је

$$\alpha = \varphi + \theta; \quad \text{tg } \theta = 1/k; \quad \cos \theta = k/\sqrt{1+k^2}; \quad d\theta = 0; \quad d\alpha = d\varphi, \text{ то је, због } dr = ds \cos \theta,$$

$$ds = c_1 k e^{k\alpha} d\alpha = c_1 k e^{k\theta} \cdot e^{k\varphi} d\varphi = (dr \cdot \sqrt{1+k^2})/k,$$

то јест

$$dr = \frac{c_1 k^2 e^{k\theta}}{\sqrt{1+k^2}} e^{k\varphi} d\varphi; \quad r = c e^{k\varphi}; \quad c = \frac{c_1 k e^{k\theta}}{\sqrt{1+k^2}}$$

4.4. Графичко одређивање убрзања. Велоцида. — Видели смо при проучавању кретања тачке да постоје две важне криве линије, и то два ходографа векторских функција: *вектора положаја* $\vec{r}(t)$ који смо назвали *пуштањом* или *трајекторијом*, и вектора брзине $\vec{v}(t)$ који се назива *ходограф вектора брзине*. Осим њих постоји и трећа крива линија која се назива *VELOCIIDA*, а служи за графичко одређивање брзине. Нацртајмо путању L покретне тачке (сл. 31 а); у свакој њеној тачки повуцимо тангенту и пренесимо на њу брзину, у извесној размери, на пример $u_v = 1 \text{ m/sec/1 cm}$, тако да је $v = u_v \cdot NV$, добићемо тачку V . Геометријско место овако конструисаних тачака јесте велоцида. И троугла ONV добијамо ову векторску релацију:

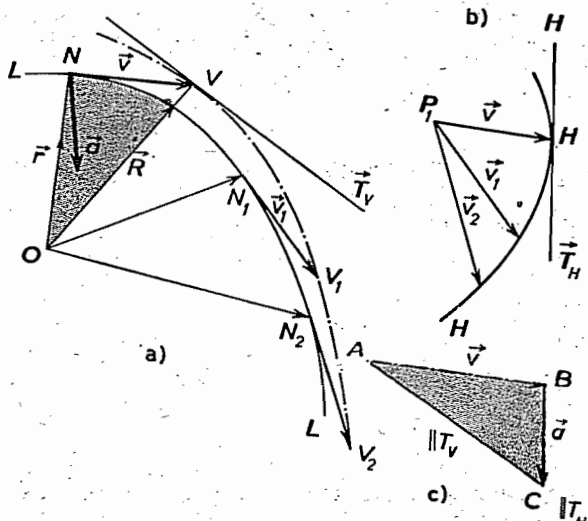
$$\vec{OV} = \vec{ON} + \vec{NV}$$

Претпоставимо да смо ове векторе цртали у дужинским јединицама тако да је $\vec{R} = u_L \cdot \vec{OV}$, $\vec{r} = u_L \cdot \vec{ON}$, где је $u_L = 1 \text{ m/1 cm}$, онда претходна релација постаје

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{v}$$

ИЛИ

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{u_L}{u_v} \vec{v}$$



Слика 31. — Велоцида

* Whittaker: Analytical Dynamics, IV ed., p. 22; Cambridge, 1937.

Диференцирајмо овај израз по времену (t), па ћемо добити

$$\vec{R} = \vec{v} + (u_L/u_v) \vec{a} = R \vec{T}_V \quad (a)$$

пошто је $r = v$ брзина, а $\dot{v} = a$ убрзање покретне тачке. Вектор \vec{R} представља брзину тачке V на велоциди и пада у правац тангенте на велоциду. На основу ове релације можемо одредити убрзање тачке ако знамо путању, ходограф брзине и велоциду, јер убрзање пада у правац тангенте на ходограф брзине. Због тога нацртајмо ходограф брзине (сл. 31 b) у истој размери, тако да је $\vec{v} = u_v \cdot \overrightarrow{P_1 N}$, где је N тачка на ходографу која одговара тачки N путање. Сада из произвољне тачке A пренесимо вектор \overrightarrow{AB} , који представља брзину тачке, $\vec{v} = u_v \overrightarrow{AB}$, и из крајње тачке B праву паралелну тангенти на ходограф брзине (\vec{T}_H), а из тачке A праву паралелну тангенти на велоциду (\vec{T}_V), оне ће се сећи у тачки C (сл. 31 c). Вектор \overrightarrow{BC} одређује убрзање покретне тачке по правцу, смеру и величини и треба га паралелно пренети у тачку N путање.

Да бисмо ово доказали уочимо да из троугла ABC следи векторски збир

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \text{односно} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \vec{T}_V = \frac{v}{u_v} + \overrightarrow{BC} \cdot \vec{T}_H, \quad (b)$$

пошто је \overrightarrow{AC} паралелно тангенти \vec{T}_V , вектор \overrightarrow{BC} тангенти \vec{T}_H на ходограф. Упоредујући ове две једначине, добијамо

$$\vec{T}_V = \frac{1}{R} \vec{v} + \frac{u_L}{R u_v} a \vec{T}_H = \frac{\vec{v}}{AC \cdot u_v} + \frac{\overrightarrow{BC}}{AC} \vec{T}_H.$$

Изједначујући вредности уз исте ортове, следи

$$R = \overrightarrow{AC} \cdot u_v; \quad a = \frac{R u_v}{u_L} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{AC} = \frac{(u_v)^2}{u_L} \overrightarrow{BC} = u_a \cdot \overrightarrow{BC}. \quad (109)$$

Дакле, вектор \overrightarrow{BC} мерен cm и помножен коефицијентом размере $u_v^2/u_L = u_a = (\text{m/sec}^2)/\text{cm}$ представља вредност убрзања у јединици m/sec^2 .

✓ **4.5. Секторско убрзање.** — Извод секторске брзине по времену (67) назива се *секторско убрзање*. Диференцирајући образац (68), због $\dot{r} = \dot{v}$, добијамо да је секторско убрзање вектор одређен следећим векторским производом:

$$\vec{S} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{a}]; \quad 2\vec{S} = [\vec{r}, \vec{a}], \quad (110)$$

па се може дефинисати и на овај начин: *Двоструко секторско убрзање једнако је моменту вектора убрзања покретне тачке за моментну тачку (пол) — координатни почетак.* Због тога је овај вектор везан у моментној тачки (полу O), па се може, слично обрасцу (69), разложити на три управне компоненте у правцима оса Декартовог система $Oxyz$:

$$\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} \quad (111)$$

За случај кретања у равни Oxy секторско убрзање пада у правац Oz -осе, па је

$$S = S_z = \frac{1}{2} (x \ddot{y} - y \ddot{x}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \right) = \frac{1}{2} r (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}). \quad (112)$$

Секторско убрзање има димензију $[L^2 T^{-2}]$ и обично се мери јединицама m^2/sec^2 ; cm^2/sec^2 .

4.6. Угаоно убрзање. Кинематичке једначине кружног кретања. — Извод угаоне брзине по времену назива се скаларно угаоно убрзање, па је, према (71):

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}. \quad (113)$$

Оно се може представити, као и угаона брзина, вектором $\vec{\omega}$, па је онда *векторско угаоно убрзање*. На пример, за случај кретања у равни Oxy и угаона брзина и угаоно убрзање падају у правац осе Oz , па су $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\vec{\dot{\omega}} = \dot{\omega} \vec{k}$. Угаоно убрзање има димензију $[T^{-2}]$ и мери се јединицом sec^{-2} .

Према угаоној брзини, кружно кретање смо поделили на *једнако* и *променљиво*. У првом случају угаона брзина била је константна, у другом променљива. У првом случају угаоно убрзање је једнако нули, у другом је различито од нуле. Када је угаоно убрзање константно и позитивно, кружно кретање је *једнако убрзано*, а када је угаоно успорење константно и негативно, тада је *једнако успорено*. Ако је и угаоно убрзање променљиво, онда је кружно кретање *неравномерно*. При кружном кретању лук је $s = R\varphi$, а обимна брзина $v = R\omega$, где је R полупречник путање, па су кинематичке једначине кружног кретања:

$$\pm \dot{\omega} = \text{const}; \quad \omega = \omega_0 \pm \dot{\omega} t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2; \quad \omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2 \dot{\omega} (\varphi - \varphi_0), \quad (114)$$

где се знак $+$ односи на једнако убрзано, а знак $-$ на једнако успорено кретање. За $\dot{\omega} = 0$ добијају се једначине *једноликог* кружног кретања. Јед-

нако убрзано кретање може бити и без почетне брзине, али једнако успорено *мора* имати почетну угаону брзину.

С обзиром на обрасце (101) и (102), добијамо природне компоненте вектора убрзања и тотално убрзање:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\omega; \quad a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2; \quad a = R\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}. \quad (115)$$

Тангенцијално убрзање \vec{a}_T пада у правац тангенте, па је колинеарно са брзином и истог је или супротног смера, према томе да ли је кретање једнако убрзано или једнако успорено. Нормално убрзање \vec{a}_N увек је усмерено ка средишту O кружне путање, па се назива и центријеталним убрзањем. Вектор тоталног убрзања гради са брзином угао β , који је одређен релацијом

$$\operatorname{tg} \beta = a_N/a_T = \omega^2/\dot{\omega}. \quad (116)$$

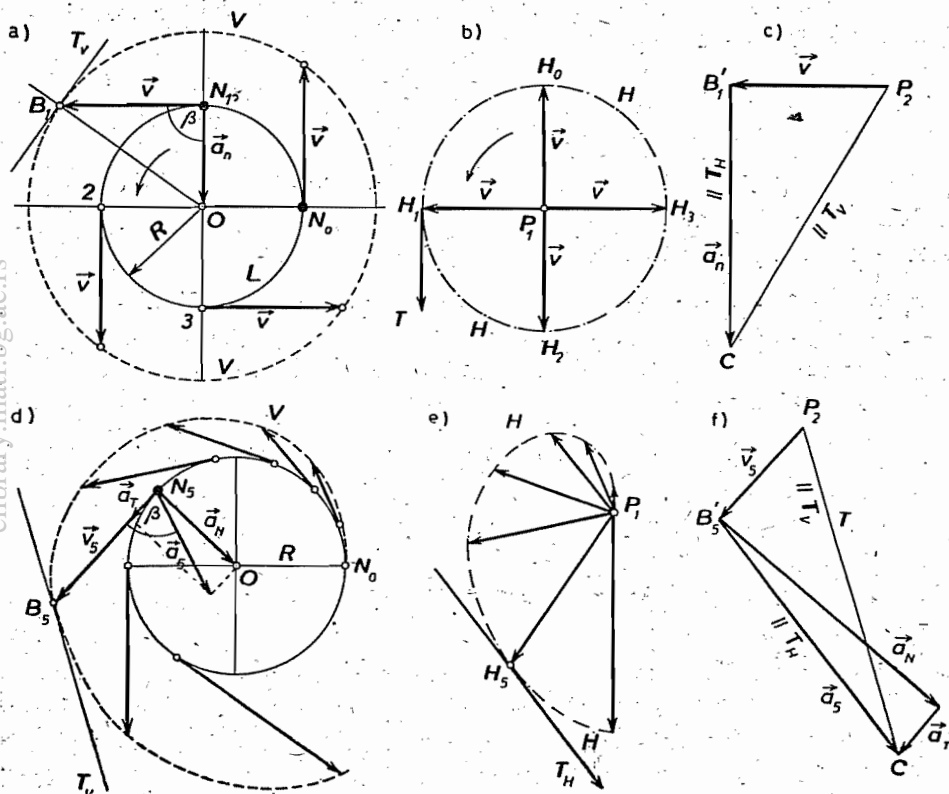
Вектор убрзања \vec{a} увек је усмерен ка конкавној страни кретања. У ово се можемо уверити помоћу велоциде. При једноликом кружном кретању, (сл. 32 а), због $v=R\omega$, ходограф брзине је круг полупречника $v=R\omega$, (сл. 32 б), а велоцида је круг полупречника $R(1+\omega^2)^{1/2}$ (сл. 32 а), па је тотално убрзање једнако нормалном убрзању, $a=a_N=R\omega^2$. При једнако убрзаном кружном кретању ходограф брзине и велоцида јесу *спирале* (сл. 32 д, е), јер постоје обе компоненте убрзања, $a_T=R\dot{\omega}$, $a_N=R\omega^2$. На слици 32 ф показан је графички начин одређивања убрзања за положај тачке у N_5 . Почетна угаона брзина једнака је нули, а такође је и $\varphi_0=0$.

4.7. Кретање константном секторском брзином. — Једна важна класа кретања врши се тако да је секторска брзина константна. Тада је, према (110), секторско убрзање једнако нули, па су вектори \vec{r} и \vec{a} колинеарни. Дакле, постоји само убрзање које је колинеарно са потегом, то јест *радијално убрзање*, $\vec{a}=a_r\vec{r}_0$. Тада је мешовити производ вектора $(\vec{a}, [\vec{r}, \vec{v}]) = a_r r ([\vec{r}_0, [\vec{r}_0, \vec{v}]) = 0$, те су та три вектора компланарна, па се кретање врши у *једној сферској равни*. Вектор секторске брзине управан је на ову сталну раван (*инваријабилну раван*) и пролази кроз исту моментну тачку (O). Због тога узмимо да је ова раван Ox -раван, тада вектор секторске брзине пада у правац Oz -осе, па је

$$2\vec{S} = \vec{C} = |[\vec{r}, \vec{v}]| \vec{k} = C\vec{k}; \quad C = 2S = r^2\dot{\varphi}, \quad (117)$$

те се компонентне брзине и убрзања могу одредити на погоднији начин.

a) *Бинеов образац*. — За случај кретања у равни константном секторском брзином француски математичар и астроном *Бине* (Jacques Philippe



Слика 32. — Путања, ходограф брзине и велоцида једноликог и једнако убрзаног кружног кретања

Marie Binet, 1786—1856) изразио је брзину и убрзање помоћу ове константе C на овај начин. Пошто је $r^2 \dot{\varphi} = 2S = C$, то су изводи вектора положаја по времену

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -C \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = -Cu';$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -C^2 u^2 u'',$$

где је $u = 1/r$ а $u' = du/d\varphi$ и $u'' = d^2u/d\varphi^2$. Према томе, компонентне брзине и квадрат брзине износе

$$v_r = \dot{r} = -Cu'; \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = Cu; \quad v^2 = C^2[u^2 + (-u')^2]. \quad (118)$$

Према (88), циркуларно убрзање једнако је нули, па је радијално убрзање једнако тоталном убрзању. Стога је

$$a_c = 0; \quad \vec{a} = a_r \vec{r}_0 = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \vec{r}_0 = -C^2 u^2 (u'' + u) \cdot \vec{r}_0. \quad (119)$$

Овај се образац зове *Бинеов образац* и представља диференцијалну једначину кретања тачке у равни при константној секторској брзини.

Када је секторска брзина константна тада је $r^2 \dot{\varphi} = C = \text{const}$. Означимо са r' извод по променљивој φ , онда ће изводи бити

$$\dot{r} = dr/dt = r' \dot{\varphi} = Cr'/r^2; \quad \ddot{r} = d\dot{r}/dt = (dr/d\varphi) \dot{\varphi} = C^2 (rr'' - 2r'^2)/r^5,$$

па се добијају и ови обрасци за пројекције брзина

$$v_r = \dot{r} = Cr'/r^2; \quad v_c = r \dot{\varphi} = C/r; \quad v^2 = C^2 (r^2 + r'^2)/r^4; \quad C = |[\vec{r}_0, \vec{v}_0]|, \quad (118')$$

и пројекције убрзања

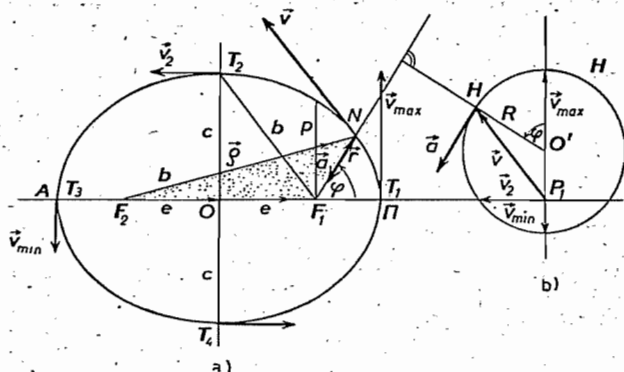
$$a_c = 0; \quad a_r = a = -C^2 (r^2 + 2r'^2 - rr'')/r^5. \quad (119')$$

С обзиром на обрасце (103), добијамо у овом случају тангенцијално и нормално убрзање:

$$a_T = \frac{v_r a_r}{v} = \frac{C^2 u^2 u' (u'' + u)}{(u^2 + u'^2)^{3/2}}; \quad a_N = -\frac{v_c a_r}{v} = \frac{C^2 u^3 (u'' - u)}{(u^2 + u'^2)^{3/2}}, \quad (120)$$

а полупречник кривине дат је обрасцем (108).

На пример, када се тачка креће по елипси (сл. 33 а), онда је $\vec{\rho} = 2\vec{e} + \vec{r}$, где је e линеарна ексцентричност. Према особини елипсе је $\rho + r = 2b$, где је b дужина велике



Слика 33. — Планетско кретање

полуосе елипсе и $e^2 = b^2 - c^2$. Степеновањем, $\rho^2 = 4e^2 + r^2 + 4er \cos \varphi = (2b - r)^2$, добијамо *поларну једначину елипсе*, са полом у десној жижи (F_1), $r = p/(1 + e \cos \varphi)$; параметар

елипсе је $p = c^2/b$, а $\varepsilon = e/b$ *нумеричка ексцентричност*. Због $u = 1/r = (1 + \varepsilon \cos \varphi)/p$, изводи су $u' = -(\varepsilon/p) \sin \varphi$, $u'' = -(\varepsilon/p) \cos \varphi$, па су квадрат брзине и радијално убрзање

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2} (1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi); \quad a_r = -\frac{C^2 u^2}{p} = -\frac{C^2}{pr^2} = -\frac{\lambda}{r^2}.$$

Ходограф брзине је *круа*, полупречника $R = C/p$, са полом у P_1 (или жижи F_1) и средиштем у O' , где је $\overline{P_1 O'} = \varepsilon \overline{R}$, (сл. 33 б). Потег $O'H$ је управан на потег $F_1 N$, па се лако повлачи тангента на путању. *Највећа* је брзина у темену Π (*перихел*) а *најмања* у темену A (*аихел*). Убрзање пада у правац потега и усмерено је ка жижи. Оно је обрнуто сразмерно квадрату потега.

b) *Синусне спирале*. — Криве линије чија је поларна једначина

$$r^n = c^n \sin n \varphi; \quad u^n = 1/c^n \sin n \varphi; \quad c = \text{const.} \quad (121)$$

називају се *синусне спирале**. Када се тачка креће по овој спирали константном секторском брзином $2S = C$, онда се обрасци (118) и (119) могу написати у прегледнијем облику. Пошто су изводи

$$u' = -c^n u^{n+1} \cos n \varphi; \quad u'' = (n+1) c^{2n} u^{2n+1} - u,$$

онда су брзина, убрзање и полупречник кривине спирале:

$$v = C c^n u^{n+1} = \frac{k}{r^{n+1}}; \quad a = a_r = -(n+1) C^2 c^{2n} u^{2n+3} = -\frac{\lambda}{r^{2n+3}}; \quad (122)$$

$$R = \frac{c}{n+1} u^{n-1} = \frac{v}{r^{n-1}}.$$

За различите вредности експонента n резултати су дати у следећој табlici:

n	$r^n = c^n \sin n \varphi$	v	$a = a_r$	R	Крива
1	$r = c \sin \varphi$	k/r^2	$-\lambda/r^5$	v	полукруг са полом на обиму
2	$r^2 = c^2 \sin 2 \varphi$	k/r^3	$-\lambda/r^7$	v/r	лемниската
$1/2$	$r = 2c(1 - \cos \varphi)$	$k/r^{3/2}$	$-\lambda/r^4$	$v\sqrt{r}$	кардиоида
-2	$c^2 = r^2 \sin(\pi + 2 \varphi)$	kr	$-\lambda/r$	$v r^3$	једнакостранична хипербола
$-1/2$	$c = 1/2 r(1 - \cos \varphi)$	k/\sqrt{r}	$-\lambda/r^2$	$v r^{3/2}$	парабола

* Р. Кашанин: — Виша математика I. стр. 350, Београд, 1949.

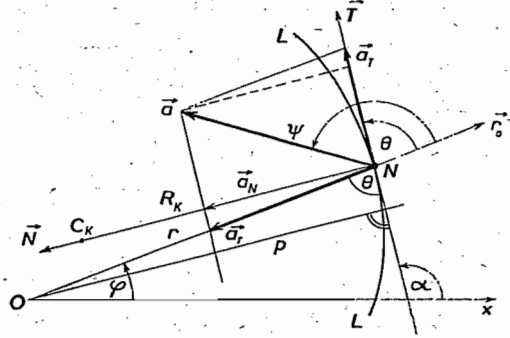
с) Тангенцијално и радијално убрзање (Siacci-јев проблем). — Ако је кретање дато у поларном координатном систему, чија је линија путање $r=f(\varphi)$, можемо нормално убрзање разложити у две компоненте тангенцијалну и радијалну (сл. 34), као што је показао Шиаци* (Siacci).

Пошто је

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N} = a_T \vec{T} + a_r \vec{r}_0,$$

скаларним множењем ортовима \vec{T} и \vec{r}_0 , због односа $(\vec{T}, \vec{r}_0) = \cos \theta$, $(\vec{N}, \vec{r}_0) = \cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta$, где је θ угао између потега и брзине, добијамо једначине:

$$\begin{aligned} a_T + a_r \cos \theta &= \dot{v}; & a_T \cos \theta + a_r &= \\ &= \dot{v} \cos \theta - \frac{v^2}{R} \sin \theta, \end{aligned}$$



Слика 34. — Тангенцијално и радијално убрзање

па су тангенцијално и радијално убрзање

$$a_T = \dot{v} + \frac{v^2 \cos \theta}{R \sin \theta}; \quad a_r = -\frac{v^2}{R} \frac{1}{\sin \theta}; \quad R = R_k.$$

Због $p = r \sin \theta$, $dr = ds \cos \theta$, где је p растојање пола O од тангенте, убрзање се може написати и у овом облику:

$$\vec{a} = \left(\dot{v} + \frac{v^2 r}{R p} \frac{dr}{ds} \right) \vec{T} + \left(-\frac{v^2 r}{R p} \right) \vec{r}_0. \quad (123)$$

Компонентна убрзања често се изражавају и у другом облику, помоћу секторске брзине. Уведимо ознаку $h = pv = 2 S_z = 2S$, онда, се због односа

$$ds \cos \theta = dr; \quad p = r \sin \theta, \quad dp = dr \cdot \sin \theta + r \cos \theta \cdot d\theta; \quad r d\varphi = ds \cdot \sin \theta; \quad \frac{dp}{ds} = \frac{dr}{ds} \left(\sin \theta + \frac{r \cos \theta}{dr} d\theta \right);$$

$$ds = R d\alpha = R (d\varphi + d\theta) = \frac{R}{r} (r d\theta + ds \cdot \sin \theta); \quad \frac{r}{R} = \frac{r d\theta}{ds} + \sin \theta = \sin \theta + \frac{r \cos \theta}{dr} d\theta = \frac{dp}{dr};$$

$$\frac{r dr}{R ds} = \frac{dp}{ds}; \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv ds}{ds dt} = \frac{dv}{ds}; \quad \frac{dh}{ds} = v \frac{dp}{ds} + p \frac{dv}{ds} = p \frac{dv}{ds} + \frac{h}{p} \frac{dp}{ds},$$

тангенцијално и радијално убрзање могу и овако изразити:

$$a_T = v \frac{dv}{ds} + \frac{v^2}{p} \frac{dp}{ds} = \frac{h}{p^2} \frac{dh}{ds} = \frac{4S}{p^2} \frac{dS}{ds}; \quad a_r = -\frac{h^2 r}{p^3 R} = -\frac{4S^2 r}{p^3 R} \quad (123')$$

* Siacci: Atti della R. Acc. di Torino, XIV, p. 750.

односно, уводећи секторско убрзање:

$$\vec{a}_T = \frac{2\dot{S}}{p} \vec{T}; \quad \vec{a}_r = -\frac{4S^2 r}{p^3 R} \vec{r}_0. \quad (183')$$

Разлагање убрзања у тангенцијално и радијално примењује се у балистици.

Када се тачка креће по логаритамској спирали $r = ce^{k\varphi}$ константном угаоном брзином (зад. 13), онда су

$$\operatorname{tg} \theta = 1/k; \quad \sin \theta = (1+k^2)^{-1/2}; \quad \cos \theta = k(1+k^2)^{-1/2}; \quad R = r(1+k^2)^{1/2}; \quad r/R = (1+k^2)^{-1/2};$$

$$p = r \sin \theta = r(1+k^2)^{-1/2}; \quad dr/ds = \cos \theta; \quad v = r \omega(1+k^2)^{1/2}; \quad h = pv = r^2 \omega;$$

$$\frac{dh}{ds} = 2r \omega \frac{dr}{ds} = 2r \omega k(1+k^2)^{-1/2}$$

па су тангенцијално и радијално убрзање

$$a_T = 2r \omega^2 k(1+k^2)^{1/2} = C_1 r; \quad a_r = -r \omega^2(1+k^2) = -C_2 r$$

сразмерни потегу r . Ова два убрзања граде угао $180^\circ - \theta$, па из троугла убрзања добијамо

$$a^2 = a_T^2 + a_r^2 + 2a_T a_r \cos(180^\circ - \theta); \quad a = r \omega^2(1+k^2).$$

то јест исту вредност као и у задатку 13.

Када се тачка креће по кругу, полупречника R , једнолико, онда је $\omega = 0$, $v = R\omega$, а тотално убрзање једнако је нормалном убрзању, $a = a_N = R\omega^2$. Узмемо ли пол (O) на обиму круга, онда је $r = 2R \cos(\varphi/2)$, где је φ централни угао, $\dot{\varphi} = \omega$. Тада је $\theta = (\pi + \varphi)/2$, па су $\sin \theta = \cos(\varphi/2)$, $\cos \theta = -\sin(\varphi/2)$, $p = r \sin \theta = r \cos(\varphi/2) = r^2/2R$; $dr/ds = \cos \theta = -\sin(\varphi/2)$; $h = pv = r^2 \omega/2$; $dh/ds = r \omega dr/ds = -r \omega \sin(\varphi/2)$. Стога су, према (86), тангенцијално и радијално убрзање:

$$a_T = -\frac{2R^2 \omega^2}{r} \sin \frac{\varphi}{2}; \quad a_r = -2 \frac{R^2 \omega^2}{r}.$$

У овом случају тангенцијално убрзање је *непозитивно*, па гради са радијалним убрзањем угао θ , те из троугла убрзања добијамо тотално убрзање

$$a^2 = a_T^2 + a_r^2 + 2a_r a_T \cos \theta = \frac{4R^4 \omega^4}{r^2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}; \quad a = R \omega^2 = a_N,$$

које је заиста једнако нормалном убрзању.

4. 8. Убрзање другог реда. — При кретању мењају се и брзина и убрзање, па ће се мењати ортови оса природног триедра за тачку на линији. Тада се може говорити и о промени вектора убрзања или о *убрзању другог реда* — *трзају*, *трзању* (Ruck, Rucken, jerk, pulse). Овај вектор сада има своје кинематичко значење у модерној кинематици механизма. Диференцирањем вектора убрзања по времену добиће се трзај, па је

$$\vec{w} = d \vec{a} / dt = d(v \vec{T} + v^2 K \vec{N}) / dt = \dot{v} \vec{T} + v \dot{\vec{T}} + (2v \dot{v} K + v^2 \dot{K}) \vec{N} + v^2 K \dot{\vec{N}}.$$

*Додатак, чл. 2.4.

Прва и друга кривина дефинисане су изводима*

$$\begin{aligned}\vec{K} &= d\vec{T}/ds = K\vec{N}; \quad \vec{\mathcal{X}} = d\vec{B}/ds = -\mathcal{X}\vec{N}, \quad \vec{N} = [\vec{B}, \vec{T}]; \quad d\vec{N}/ds = [\vec{\mathcal{X}}, \vec{T}] + [\vec{B}, \vec{K}] = \\ &= -\mathcal{X}[\vec{N}, \vec{T}] + K[\vec{B}, \vec{N}] = \mathcal{X}\vec{B} - K\vec{T},\end{aligned}$$

па су

$$\vec{T} = d\vec{T}/dt = (d\vec{T}/ds)(ds/dt) = v\vec{K}, \quad \vec{N} = (d\vec{N}/ds)(ds/dt) = -vK\vec{T} + v\mathcal{X}\vec{B}.$$

Уношењем ових вредности у претходни израз добијамо и убрзање другог реда, изражено помоћу природних компонената:

$$\vec{w} = (v - v^3 K^2)\vec{T} + (3vvK + v^2\dot{K})\vec{N} + v^3 K\mathcal{X}\vec{B}. \quad (124)$$

Брзина пада у правац тангенте на путању, а вектор убрзања је компланаран са тангентом и нормалом и лежи у оскулаторној равни криве (путање тачке). Међутим, убрзање другог реда (трзај) има све три природне компоненте: у правцу тангенте, главне нормале и бинормале (сл. 35).

При праволинијском кретању трзај је колинеаран са путањом у смеру путање ако је $v > 0$. При кружном кретању је $K = \text{const.}$, па је $\dot{K} = 0$, те трзај има обе природне компоненте. При једноликом кретању је $v = R\omega$, $K = 1/R$, па је $\dot{v} = 0$, $\ddot{v} = 0$, те је трзај $\vec{w} = -R\omega^3\vec{T}$ супротног смера од брзине. При хармонијском кретању је $x = R \cos \varphi$, $\varphi = \omega t$, $\dot{x} = -R\omega \sin \varphi$; $\ddot{x} = -R\omega^2 \cos \varphi = -\omega^2 x$; $w = \ddot{x} = -R\omega^3 \sin \varphi = -\omega^2 x$.

При кретању у равни радијална и циркуларна компонента трзаја биће

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{w}_r + \vec{w}_c = (r - 3r\dot{\varphi}^2 - 3r\ddot{\varphi})\vec{r} + \\ &+ (3r\dot{\varphi} + 3r\ddot{\varphi} - r\dot{\varphi}^3 + r\ddot{\varphi})\vec{c}_0. \quad (124')\end{aligned}$$

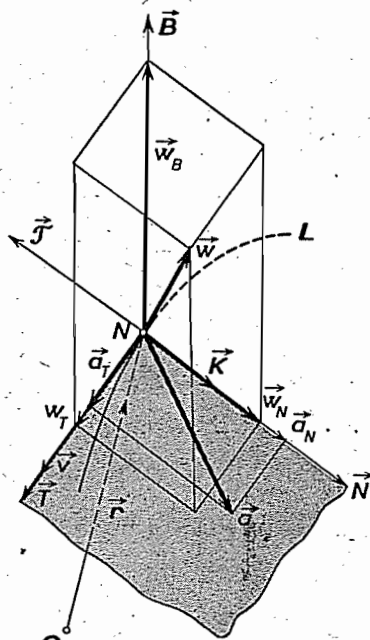
На пример, при кретању по Архимедовој спирали (сл. 28) биће: $r = c$, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$; $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = 0$, па је трзај

$$\vec{w} = -3c\omega^2\vec{r}_0 - r\omega^3\vec{c}_0.$$

Он има, дакле, обе компоненте, и радијалну и циркуларну.

Трзај има димензију $[L/T^3]$, јединицу cm/sec^3 .

* Додатак, чл. 2.4.



Слика 35. — Убрзање другог реда (трзај)

5. ДИЈАГРАМИ КРЕТАЊА

5.1. Кинематички дијаграми. — *a) Остатке особине кинематичких дијаграма.* — При ранијим излагањима напоменули смо улогу дијаграма кретања у кинематици механизма. Ови дијаграми називају се *кинематички дијаграми*. Њихова је улога да графички прикажу све особине кретања.

Главни кинематички дијаграми кретања јесу:

1° *дијаграм пута и времена* (s, t дијаграм),

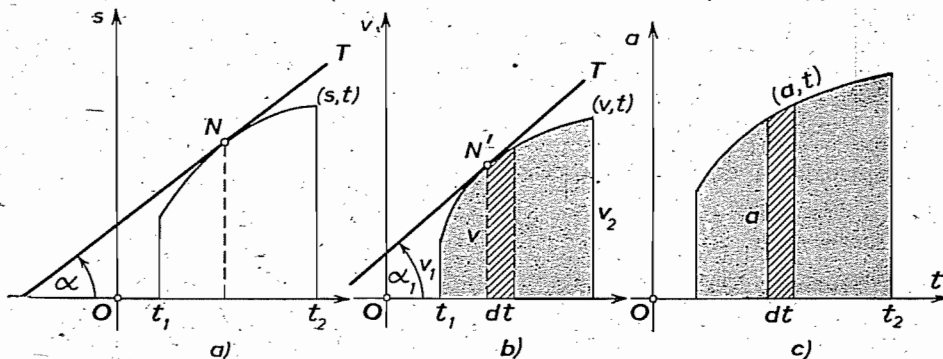
2° *дијаграм брзине времена* (v, t дијаграм) и

3° *дијаграм убрзања и времена* (a, t дијаграм).

Обично се ови дијаграми приказују у Декартовом правоуглом координатном систему у равни Oxy десне диспозиције. Код свих се на апсцисну осу (Ox) преноси време (t), а на ординатне осе (Oy) пут (s), брзина (v) или, пак, убрзање (a), у извесним размерама које ћемо обележавати са;

$$u_t = \text{sec/cm}, \quad u_s = \text{m/cm}, \quad u_v = \text{m sec}^{-1}/\text{cm},$$

$$u_a = \text{m sec}^{-2}/\text{cm}.$$



Слика 36. — a, b, c) Основни кинематички дијаграми

Слике 36 a, b, c представљају основне кинематичке дијаграме за временски размак $t_2 - t_1$, па су $s = u_L \cdot y$; $v = u_v \cdot y$; $a = u_a \cdot y$; $t = u_t \cdot x$, где су $x = \bar{x}$ и $y = \bar{y}$ дужине мерење центиметрима.

Ако у произвољној тачки N дијаграма (s, t) повучемо тангенту, она ће са апсцисном Ot -осом градити угао α , па је

$$\text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{ds}{u_L} \cdot \frac{u_t}{dt} = \frac{u_t}{u_L} \frac{ds}{dt}; \quad v = \frac{u_L}{u_t} \text{tg } \alpha;$$

тангенс угла кога гради тангента повучена у произвољној тачки дијаграма (s, t) са апсцисном осом *сразмеран је вредности брзине покретне тачке.*

Ако пак у произвољној тачки N' дијаграма (v, t) повучемо тангенту, она ће са апсцисном осом чинити угао α_1 , па је

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{u_t}{u_v} \frac{dv}{dt} = \frac{u_t}{u_v} a; \quad a = \frac{u_v}{u_t} \operatorname{tg} \alpha_1,$$

те је тангенс угла кога чини тангента повучена у произвољној тачки дијаграма (v, t) са апсцисном осом *сразмеран вредности брзине покрећне тачке*.

Уочимо у дијаграму (v, t) елементарну површину, онда површина омеђена том кривом и двама крајњим ординатама, то јест одређени интеграл

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{1}{u_v u_t} \int_{t_1}^{t_2} v dt = \frac{1}{u_v u_t} \int_{s_1}^{s_2} ds = \frac{1}{u_v u_t} (s_2 - s_1); \quad s_2 - s_1 = u_v u_t A;$$

сразмеран је пређеном путу $s_2 - s_1$ у том временском размаку. Површину A мерену у cm^2 добијамо планиметрисањем.

Исто тако, површина омеђена кривом дијаграма (a, t) , двама ординатама и апсцисном осом, то јест одређени интеграл

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{1}{u_a u_t} \int_{t_1}^{t_2} a dt = \frac{1}{u_a u_t} \int_{v_1}^{v_2} dv = \frac{v_2 - v_1}{u_a u_t}; \quad v_2 - v_1 = u_a u_t A$$

сразмеран је разлици брзина покрећне тачке за временски размак $t_2 - t_1$.

Дијаграм (v, t) главни је кинематички дијаграм, јер из њега можемо, према изнетом, одредити сва три кинематичка елемента:

- 1° брзину, као ординату дијаграма,
- 2° убрзање, као тангенс нагибног угла тангенте са апсцисом Ot -осом, и
- 3° пут, као површину омеђену кривом (v, t) , апсцисном осом и двама крајњим ординатама, t_1 и t_2 .

Познајемо ли овај дијаграм, можемо, дакле, за тај временски размак одредити сва три податка, те потпуно одређујемо кретање.

Док је при праволинијском кретању ово убрзање тотално, дотле се при криволинијском кретању, помоћу нагибног угла тангенте, може одредити само вредност тангенцијалног убрзања. За нормално убрзање мора се познавати и полупречник кривине путање у одговарајућој тачки.

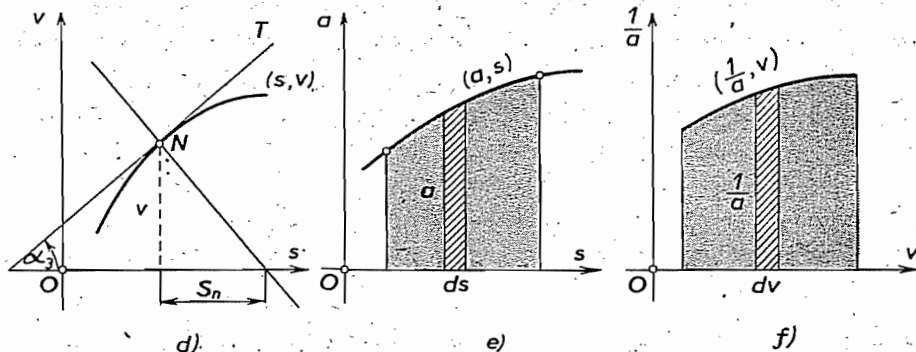
Поред основних кинематичких дијаграма, у кинематици се примењују и ови дијаграми:

4° (v, s) — брзина — *уиш* дијаграм (сл. 36 d),

5° (a, s) — убрзање — *уиш* дијаграм (сл. 36 e), и

6° $(1/a, v)$ — реципрочност убрзање — брзина дијаграм (сл. 36 f).

Пошто и пут и брзина зависе од времена $s = f_1(t)$, $v = f_2(t)$, из ових једначина можемо елиминисати параметар t , па ћемо добити нову зависност



Слика 36. — d) Дијаграм (v, s) e) Дијаграм (a, s) f) Дијаграм $(1/a, v)$

$v = \theta_1(s)$, која се може представити помоћу дијаграма (v, s) . На апсцисну осу преносе се пређени путеви, а на ординатну осу брзине (сл. 36 d), па је $v = u_v \cdot y$, $s = u_L \cdot x$; $x = \bar{x}$; $y = \bar{y}$.

Ако у тачки N дијаграма (v, s) повучемо тангенту и нормалу, онда је субнормала

$$S_n = y \operatorname{tg} \alpha_3 = y y' = y \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u_v} \cdot \frac{dv}{u_L} \cdot \frac{u_L}{u_v^2} = \frac{u_L}{u_v^2} \cdot \frac{v dv}{ds} = \frac{u_L}{u_v^2} a; \quad a = \frac{u_v^2}{u_L} S_n.$$

Дакле, у дијаграму (v, s) субнормала представља убрзање покретне тачке.

И убрзање и пут зависе од времена па из једначина $s = f_1(t)$, $a = f_3(t)$ можемо елиминисати време t и добити нову зависност $a = \theta_2(s)$. Ова зависност представљена је дијаграмом (a, s) коме апсцисна оса представља пређени пут, а ординатна оса убрзање, $a = u_a y$; $s = u_L x$; $x = \bar{x}$; $y = \bar{y}$.

Површина омеђена овом кривом линијом (a, s) (сл. 36 e), апсцисном осом и два крајњим ординатама

$$A = \int_{s_1}^{s_2} y d\bar{x} = \frac{1}{u_a u_L} \int_{s_1}^{s_2} a ds = \frac{1}{u_a u_L} \int_{v_1}^{v_2} v dv; \quad \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = u_a u_L A$$

представља половину разлике квадрата брзина на пређеном путу $s_2 - s_1$.

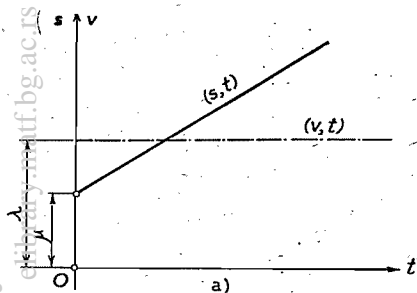
Исто тако, пошто су брзина и убрзање функције времена t , $v = f_2(t)$, $a = f_3(t)$, из ових једначина можемо елиминисати параметар t и добити нову зависност у облику $1/a = \theta_3(v)$, која је приказана дијаграмом $(1/a, v)$.

На апсцисну осу преноси се брзина, а на ординатну осу реципрочна вредност убрзања (сл. 35 f), $1/a = u y$, $v = u x$, $u = (\text{sec}^2/\text{m})/\text{cm}$.

Површина омеђена овом кривом линијом, апсцисном осом и двама крајњим ординатама

$$A = \int_{v_1}^{v_2} y dx = \frac{1}{u u_v} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{a} = \frac{1}{u u_v} \int_{t_1}^{t_2} dt; \quad t_2 - t_1 = u u_v A$$

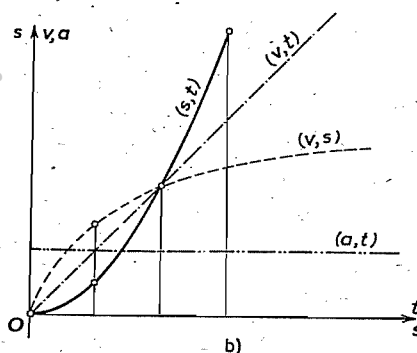
представља временски размак у коме посматрамо кретање.



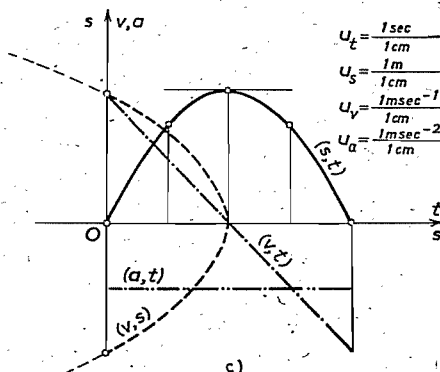
Слика 37 а) — Дијаграми једноликог кретања

Као што видимо, помоћу ових дијаграма можемо да одредимо све потребне кинематичке елементе: пут, брзину, убрзање и параметар — време, то јест у сваком тренутку можемо одредити ове вредности, а то значи да потпуно познајемо кретање покретне тачке.

Кинематичке једначине једноликој *правoliniјској* кретања дате су обрасцем (81), па су кинематички дијаграми (s, t)



Слика 37 б) — Дијаграми једнако убрзаног кретања



Слика 37 в) — Дијаграми једнако успореног кретања

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1 \text{ sec}}{1 \text{ cm}} \\ u_s &= \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ cm}} \\ u_v &= \frac{1 \text{ m sec}^{-1}}{1 \text{ cm}} \\ u_a &= \frac{1 \text{ m sec}^{-2}}{1 \text{ cm}} \end{aligned}$$

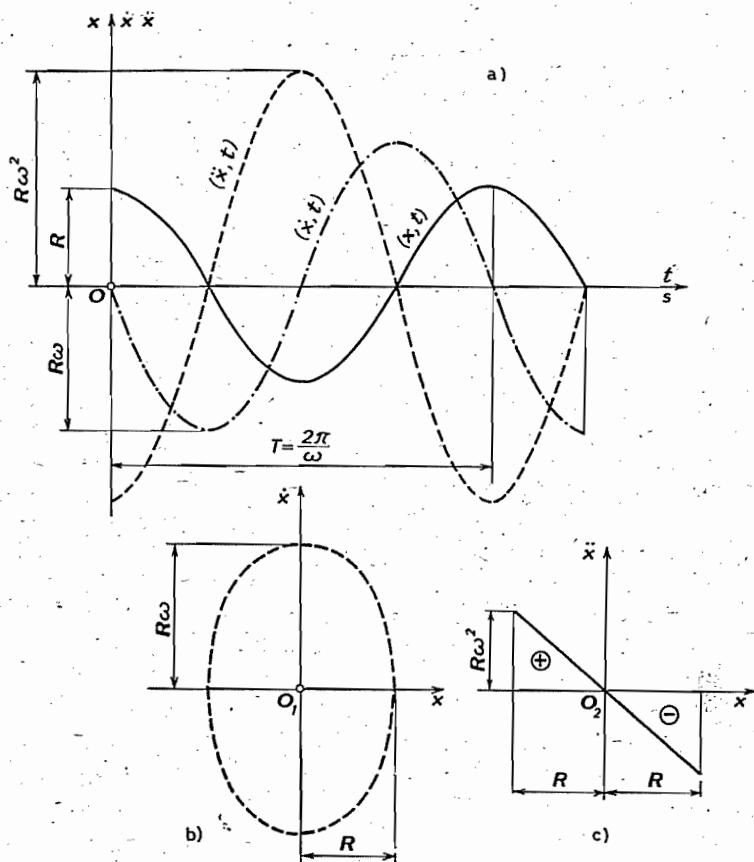
права линија која на Os -оси одсеца одсечак s_0 , а дијаграм (v, t) права паралелна оси Ot (сл. 37, а), са одсечком $v = v_0$ на оси Ov . Тангенс нагибног угла праве (s, t) сразмеран је брзини ($v = \text{const.}$) покретне тачке. Убрзање је једнако нули, па се дијаграм (a, t) поклапа са Ot -осом.

Кинематичке једначине једнако убрзаног и једнако успореног кретања приказане су обрасцима (80) и (79). Дијаграми (s, t) јесу *параболе*; дијаграми (v, t) су *праве линије*, под нагибним углом α чији је тангенс сразмеран

убрзању односно успорењу. Дијаграми (a, t) такође су праве линије паралелне Ot -оси. Дијаграми (v, s) јесу параболе са теменима на Ot -оси.

На слици 37 *b* приказани су кинематички дијаграми једнако убрзаног кретања за податке $t_0=0, s_0=0, v_0=0, a=1 \text{ m/sec}^2$, а на слици 37 *c* једнако успореног кретања за податке $t_0=0, s_0=0, v_0=2 \text{ m/sec}$ и $a=-1 \text{ m/sec}^2$. Дијаграми су цртани у размерама $u_s=1 \text{ m/1 cm}, u_v=1 \text{ m sec}^{-1}/1 \text{ cm}, u_a=1 \text{ m sec}^{-2}/1 \text{ cm}$ и $u_t=1 \text{ sec/1 cm}$.

При хармонијском кретању (чл. 2.5) закон кретања је $x=R \cos \omega t$, па су $\dot{x}=-R\omega \sin \omega t$, $\ddot{x}=-R\omega^2 \cos \omega t$, те су кинематички дијаграми: (s, t) косинусна линија, (v, t) синусна линија и (a, t) такође косинусна линија, као што је показано на слици 38 *a*.



Слика 38. — Дијаграми хармонијског кретања

Из првих двеју једначина, елиминисањем времена, добијамо зависност $(x/R)^2 + (v/R\omega)^2 = 1$, па је дијаграм (v, s) елипса (сл. 38 *b*). Елиминисањем времена из прве и треће једначине добија се да је $\ddot{x} = -\omega^2 x$, те је дијаграм (a, s) права линија (сл. 38 *c*).

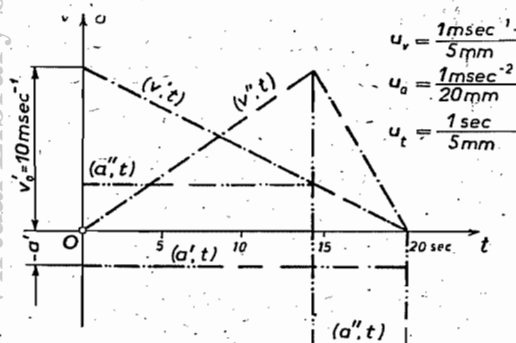
Обично се дијаграми цртају скупно у разним бојама: (s, t) црно; (v, t) плаво и (a, t) црвено.

Примери. — 14. Конструиса-
ти кинематичке дијаграме једнако
убрзаног кретања ако су $t_0=0$,
 $s_0=0,5$ m, $v_0=2$ m/sec, $a=1$ m/sec².

Решење. — Дијаграми су
приказани на слици 39. Теме пара-
боле (s, t) је $y^1T (t=-v_0/a=-2$ sec;
 $s=s_0-v_0/2a=-1,5$ m) а параболое
 (v, s) у тачки $T_1 (s=s_0-v/2a=$
 $=-1, m; v=0)$.

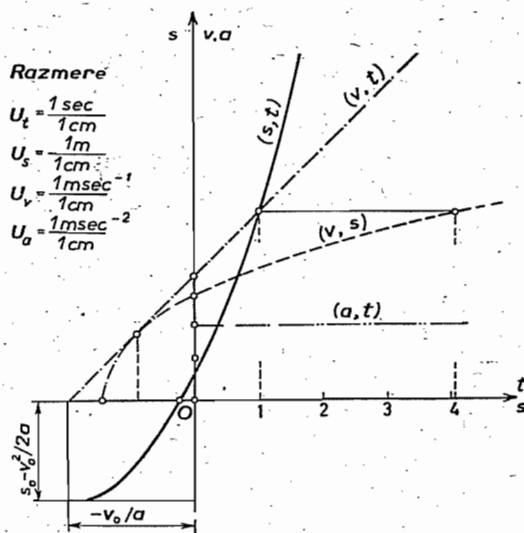
15. Две тачке крену исто-
времено из истог положаја у истој
правој линији, и за исто време
пређу исти пут, па се истовремено
зауставе.

Прва тачка крене почетном
брзином 10 m/sec и једнолико успо-
рава кретање, успорењем 0,5 m/sec².
Друга тачка крене без почетне
брзине, једнако убрзано, убрзањем
0,7 m/sec², све до тренутка док
не постигне почетну брзину прве тачке,
а тада наставља једнако успорено кретање.
Одредити ово успорење и нацртати дијаграме убрзања и брзине за обе покретне тачке.



Слика 40. — Графичко решење кинематичког
проблема

5.2. Графичко диференцирање. — До сада смо кинематичке дија-
граме добијали аналитичком методом, пошто су познати тачни мате-
матички закони зависности кинематичких елемената од времена. Међутим,
може се десити да је зависност пута и времена добијена експериментално
и приказана дијаграмом (s, t) . И у овом случају можемо брзину и убр-
зање одредити графички помоћу опште методе *графичкој диференцирања*.



Слика 39. — Кинематички дијаграми једнако
убрзаног кретања са почетним условима

Решење. — Кретање прве тач-
ке је једнако успорено. Она ће се зауставити
када буде $v=v_0-at=0$, то јест
после 20 sec. За то време прећи ће пут
 $s=v_0t-1/2at^2=100$ m.

Друга тачка креће се једнако
убрзано до тренутка када буде испу-
њен услов $v_1=a_1t_1=10$ m/sec, то јест
 $t_1=14,3$ sec, и за то време прећи ће
пут $s_1=71,5$ m. Од овог тренутка
наступа успорено кретање на путу
 $s_2=s-s_1=28,5$ m, а за време 5,7 sec.
Успорење ћемо добити из релације
 $v_2=v_0-a_2t_2=0$, па је 1,76 m/sec².

Дијаграми брзине и убрзања
показани су на слици 40.

Нека је зависност пута од времена приказана дијаграмом (s, t) у Декартовом правоуглом систему Oxy (сл. 41). Да бисмо одредили брзину покретне тачке N , у тренутку t , поступићемо овако. У дијаграму (s, t) положају покретне тачке N_i одговара тачка S_i , чије су координате, $x_i = x$, $y_i = y$, мерене у см. Паралелно ординатној оси повуцимо вертикалу $v-v$ и на удаљењу \overline{H} , изаберимо произвољну тачку (P_1) — *пол*, тако да је $\overline{P_1 P_0} = \overline{H}$. Ако у тачки S_i дијаграма (s, t) повучемо тангенту, она ће са Ot осом чинити угао α_i . Из пола (P_1) повуцимо праву паралелну овој тангенти, она ће сећи вертикалу $v-v$ у тачки B'_i . Одсечак $\overline{P_0 B'_i}$ представља, у изабраној размери, брзину *покретне тачке* у том тренутку, $u_v \cdot \overline{P_0 B'_i} = v$. Ако сада из тачке B'_i повучемо паралелу апсцисној оси до пресека са ординатом тачке S_i , добићемо тачку B_i . Геометријско место овако добијених тачака је континуална крива линија, која представља *дијаграм брзине и времена* датог кретања.

Докажимо да одсечак $\overline{P_0 B'_i}$ представља брзину тачке. Из особине дијаграма (s, t) и троугла $\Delta P_1 P_0 B'_i$ следи однос

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{dy}{dx} = \frac{ds}{u_L} \cdot \frac{u_t}{dt} = \frac{u_t}{u_L} \cdot v = \frac{\overline{P_0 B'_i}}{\overline{H}}, \text{ то јест } v = \frac{u_L}{u_t} \cdot \overline{P_0 B'_i} = u_v \cdot \overline{P_0 B'_i},$$

јер су $s = u_L y$; $t = u_t x$; $u_L/u_t \overline{H} = (\text{m/sec})/\text{cm}$, пошто је \overline{H} мерено центиметрима. Дакле, одсечак $\overline{P_0 B'_i}$ (см) помножен коефицијентом размере u_v даје вредност брзине у јединици m/sec .

Ако овај поступак применимо на дијаграм (v, t) са новим полом (P_2) и растојањем \overline{H}_a , добићемо дијаграм *убрзања и времена* датог кретања. Тачки S_i дијаграма (s, t) одговарају тачке B_i и A_i дијаграма (v, t) и (a, t) . Брзина и убрзање покретне тачке представљени су одсечцима $\overline{P_0 B'_i}$ и $\overline{P_0 A'_i}$ које одсецају праве повучене из полова (P_1) и (P_2) паралелно тангентама у тачкама S_i и B_i дијаграмима (s, t) и (v, t) .

Из особине дијаграма (v, t) и троугла $\Delta P_2 P_0 A'_i$ следи

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{dv}{dt} = \frac{u_t}{u_v} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{u_t}{u_v} a = \frac{\overline{P_0 A'_i}}{\overline{H}_a},$$

то јест

$$a = \frac{u_v}{u_t} \overline{P_0 A'_i} = u_a \cdot \overline{P_0 A'_i},$$

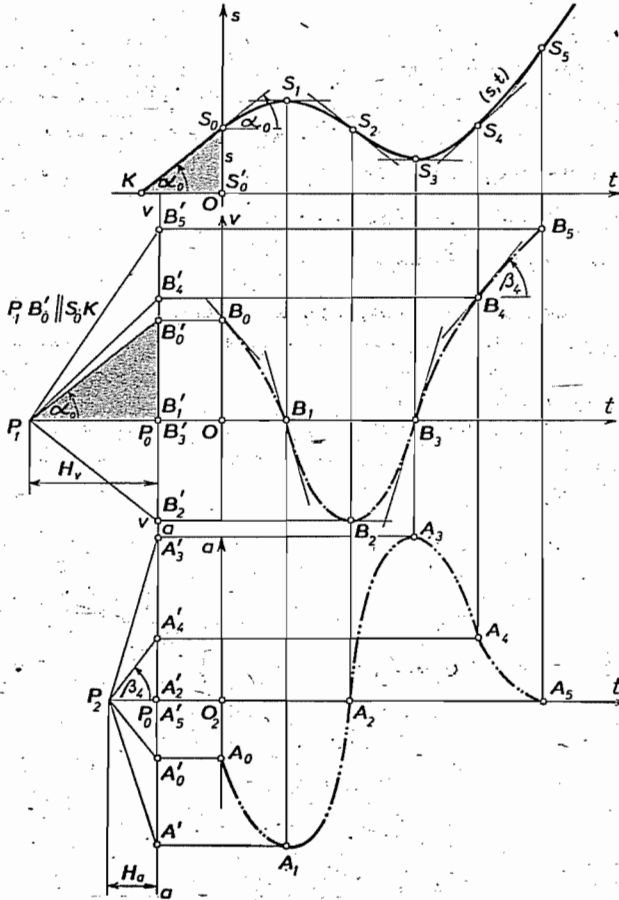
јер су

$$v = u_v y; \quad t = u_t x; \quad u_v/u_t \overline{H}_a = (\text{m/sec}^2)/\text{cm} = u_a$$

пошто је растојање пола \overline{H}_a мерено центиметрима.

Дакле, коефицијенти размера износе:

$$u_v = \frac{u_t}{u_t H_v} \quad (\text{m sec}^{-1}/\text{cm}), \quad (125)$$



Слика 41. — Графичко диференцирање

$$u_a = \frac{u_v}{u_t H_v} = \frac{u_t}{u_t^2 H_v H_a} \quad (\text{m sec}^{-2}/\text{cm}), \quad (126)$$

па су праве вредности брзине

$$v = u_v \cdot P_0 B'_i \quad (\text{m sec}^{-1}), \quad (125')$$

и убрзања

$$a = u_a \cdot P_0 A'_i \quad (\text{m sec}^{-2}). \quad (126')$$

Растојање полова треба мерити дужинским јединицама у којима су цртане ординате и апсцисе (cm или mm).

добито једну полигоналну криву линију $B_0 B_1 B_2 \dots$, која представља приближно интегралну криву јер из сличности шрафираних троуглова следи

$\Delta \eta : \Delta x = C_0 C_1 : \overline{H}_v = u : \overline{H}_v$. Пошто је $a = u_a u$, $t = u_t x$, то је $\Delta \eta = a \cdot \Delta t / u_t u_a \overline{H}_v$, па интегрисањем добијамо

$$\eta = \frac{1}{u_t u_a \overline{H}_v} \int a dt, \text{ то јест } v = u_t u_a \overline{H}_v \cdot \eta = u_v \eta.$$

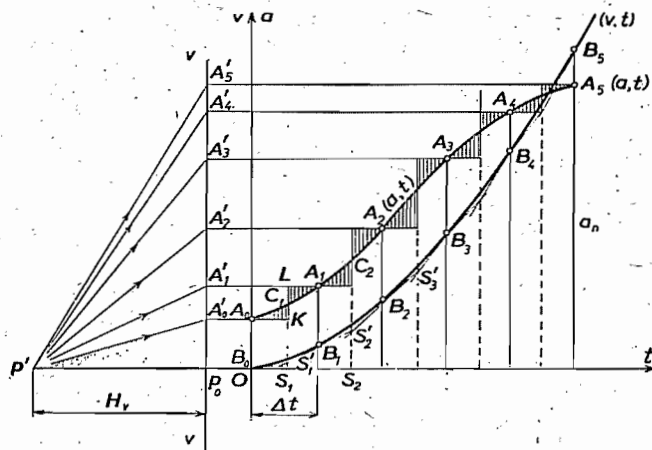
Дакле, ордината новог дијаграма, заиста представља брзину покретне тачке.

Интегралну криву заменили смо на тај начин степенастом кривом линијом. Обе криве линије имају заједничке тачке на граничним ординатама (B_i), па степенаста линија представља *полигон њешива* око кога се мора описати континуална крива линија — интегрална крива — с тим да пролази кроз заједничке тачке (B_i).

На потпуно исти начин добили бисмо из овог дијаграма дијаграм (s, t) са новим полом (P'') и растојањем пола \overline{H}_s .

2⁰ **Графичко интегрисање помоћу средњих апсциса.** — Док смо у првом случају интегрисања добили интегралну криву *описану око полигона њешива*, при интегрисању помоћу средњих апсциса добићемо интегралну криву *уписану у полигон њаненаша*, те је овај начин интегрисања много *погоднији*.

Нека је познат дијаграм (a, t) неког кретања (сл. 43) и поделимо временски размак, у коме посматрамо кретање, на изван број, обично једнаких подељака Δt . У сваком подељку изаберемо *средњу апсцису* тако



Слика 43. — Графичко интегрисање помоћу средњих апсциса

да су правоугаоници $B_0 A_0 K S_1$ и $S_1 L A_1 B'_1$ једнаких површина, или, што је исто, да су *троуглови* $\Delta A_0 K C_1$ и $\Delta C_1 L A_1$ *истих површина*. Паралелно ординатној оси повуимо праву $v-v$ и пројцирајмо на њу све тачке A_i , добићемо тачке A'_i . Спојимо их са полом (P'), добићемо прамен правих $P' A'_i$. Из тачке B_0 (која се поклапа са координатним почетком O , пошто

тражимо интегралну криву која пролази кроз ту тачку према почетним условима кретања $v_0 = 0$), повуцимо праву $B_0 S'_1$ паралелну зраку $P' A'_0$. Из S'_1 повуцимо праву паралелну зраку $P' A'_1$ док не пресече ординату $S_2 C_2$ у тачки S'_2 , а из ове тачке повуцимо праву паралелну трећем зраку, и тако редом. Праве $B_0 S'_1, S'_1 S'_2, \dots$ паралелне су *тангентнама* на тражену интегралну криву (v, t) , јер, на пример, права $S'_1 S'_2$ гради са осом Ot исти угао као потег $P' A'_1$ са правом $P' P_0$. Због тога постоји однос $\Delta \eta : \Delta x = P_0 A'_1 : \overline{H}_v = y : \overline{H}_v$. Пошто је $a = u_a \cdot y; t = u_t \cdot x$, то је $\Delta \eta = a \cdot \Delta t / u_t u_a \overline{H}_v$, па интегрисањем добијамо

$$\eta = \frac{1}{u_t u_a \overline{H}_v} \int a dt$$

то јест

$$v = u_t u_a \overline{H}_v \eta = u_1 \eta.$$

Дакле, ордината представља брзину покретне тачке.

На овај начин смо интегралну криву заменили степенастом линијом — *полиномом тангентнама*, у који ћемо уписати праву интегралну криву која мора да пролази кроз тачке B_i на граничним ординатама.

Интегрирамо ли још једном овај дијаграм (v, t) са новим растојањем пола \overline{H}_s и почетном тачком интегралне криве која одговара почетном путу s_0 , добићемо дијаграм (s, t) . Коефицијенти размера за оба дијаграма биће

$$u_v = u_t u_a \overline{H}_v \text{ (m/sec)/cm; } \quad u_s = u_t u_v \overline{H}_s = u_a u_t^2 \overline{H}_v \overline{H}_s \text{ (m)/cm,} \quad (127)$$

где су растојања полова мерена истим дужинским јединицама.

Постоје апарати (*интеграфи*) помоћу којих се графичко интегрисање може извршити потпуно механички.

На основу изложеног можемо уочити ово: знамо ли један кинематички дијаграм, онда друга два можемо добити графички помоћу графичког диференцирања, односно графичког интегрисања. Између ових дијаграма, дакле, постоје везе. Ако је дијаграм (s, t) крива линија трећег реда, онда је дијаграм (v, t) крива другог, а дијаграм (a, t) крива првог реда.

Ако је крива (s, t) у максимуму, онда крива (v, t) пролази кроз нуду, а крива (a, t) сече апсцисну осу прелазећи у негативну област.

Упоредимо ли ове *кинематичке дијаграме* са *стајичким** дијаграмима, долазимо до закључка да су истоветни и припадају графичком диференцирању односно интегрисању дате функције са почетним односно граничним условима (условима ослањања).

* *Стајика*, II део, чл. 13, и *Збирка задатака из оптичностии материјала*, VII гл. Еластичне линије — зад. 265.

Примери. — 16. Дат је дијаграм (v, t) , $v = 3t^2 - 6t - 4$. Конструисати дијаграме (a, t) и (s, t) када почетни услови кретања за $t = 0$ јесу $a = -6 \text{ m sec}^{-2}$, $s_0 = 12 \text{ m}$. Усвојити размере за брзину $u_v = 1 \text{ m sec}^{-1}/10 \text{ mm}$ и време $u_t = 1 \text{ sec}/40 \text{ mm}$ (сл. 44).

Решење. — Дијаграм (a, t) добићемо диференцирањем једначине $v = f_2(t)$, те је

$$a = 6t - 6$$

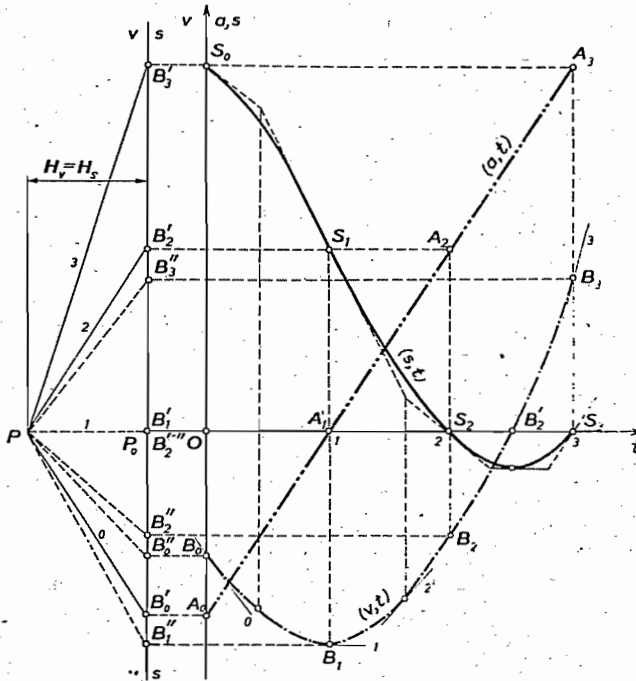
и он је представљен правом линијом. Дијаграм (s, t) добићемо интегрисањем

$$s = t^3 - 3t^2 - 4t + 12$$

и он је представљен кубном параболом.

На месту $t = 1 \text{ sec}$ дијаграм (v, t) је у екстремуму (минимум); дијаграм (a, t) пролази кроз нулу (растући), а дијаграм (s, t) пролази кроз превојну тачку. Дијаграм (s, t) сече Ot -осу у тачкама 2 и 3, а дијаграм (v, t) у тачки 2,53, у којој је крива (s, t) у екстремуму (минимум, $-9/8$).

Графичко решење изведено је са заједничким полом (P) и растојањем пола $\overline{H} = 40 \text{ mm}$.



Слика 44.—Графичко диференцирање и интегрисање на једном дијаграму

Размере убрзања и пута износе

$$u_a = \frac{u_v}{u_t \overline{H}} = \frac{1 \text{ m sec}^{-2}}{1 \text{ cm}}; \quad u_L = u_v u_t \overline{H} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ cm}}$$

17. Дијаграм (v, t) приказан је сликом 45. Нацртати дијаграме (a, t) и (s, t) .

Решење. — Дијаграм (v, t) јесте парабола чија је једначина

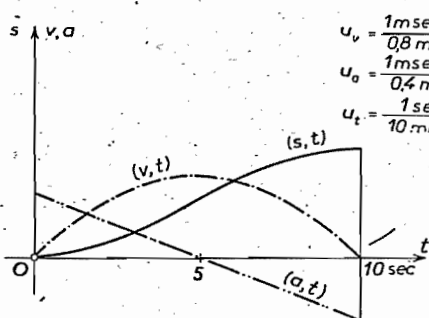
$$v = 80 \left(1 - \frac{t}{10}\right) \cdot \frac{1}{10} t.$$

Диференцирањем, односно интегрисањем, добићемо дијаграме (a, t) и (s, t) , чије су једначине

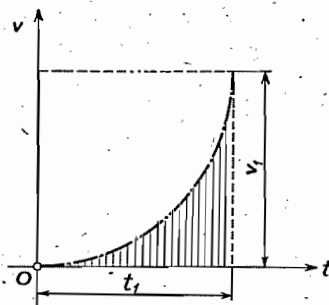
$$a = 8(1 - 1/5t); \quad s = 4(1 - 1/5t)t^2.$$

Дијаграми су приказани на слици 45 са назначеним размерама.

18. Дијаграм (v, t) једне покретне тачке јесте квадрант круга (сл. 46). Истовремено, из истог места, почне да се креће друга тачка, праволинијски у истој правој, једнако убрзано почетном брзином $v_0 = 1/2v_1$, и после времена $t_2 = t$, стигне прву тачку. Одредити убрзање друге покретне тачке.



Слика 45.



Слика 46.

Решење. — Пошто су пређени путеви једнаки, а како је пут прве тачке одређен површином омеђеном кривом (v, t) , апсцисном осом и ординатом t_1 , биће

$$s = v_1 t_1 (1 - 1/4\pi) = v_0 t_2 + 1/2 a t_2^2; \quad t_1 = t_2,$$

па је убрзање друге тачке

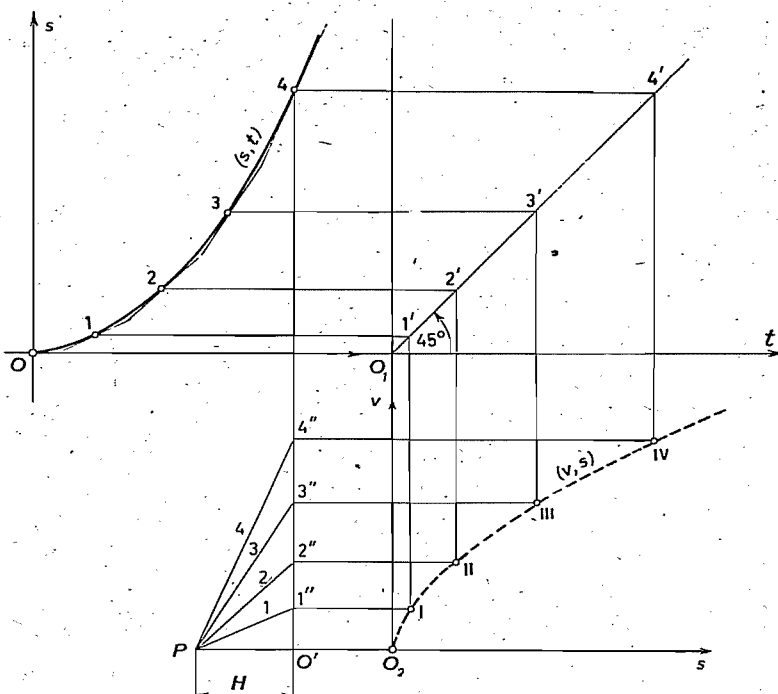
$$a = -\frac{v_1}{t_1} (1/2\pi - 1).$$

5.4. Графичка конструкција (v, s) дијаграма. — Видели смо да се из једначина $s = f_1(t)$, $v = f_2(t)$ елиминисањем времена t може добити зависност $v = \varphi(s)$. Међутим, овај дијаграм (v, s) можемо добити и графички из дијаграма (s, t) пресликавањем помоћу праве под углом 45° према апсцисној оси $O_1 t$ (сл. 47). У тачкама $I, 2, 3, \dots$ дијаграма (s, t) повуцимо тангенте и хоризонтале до пресека са правом L , која пролази кроз тачку O_1 , добићемо тачке $I', 2', 3', \dots$. Из пола (P) са растојањем \bar{H} повуцимо праве паралелне тангентама, добићемо прамен правих $PI'', P2'', P3'', \dots$. Ако из ових тачака повучемо хоризонтале, а из тачака $I', 2', 3', \dots$ вертикале, оне ће се сећи у тачкама I, II, III дијаграма (v, s) .

Ако је дијаграм (s, t) цртан у размерама $s = u_L y$, $t = u_t x$, онда су ординате у дијаграма (s, t) пренете преко праве L на осу $O_2 s$. Из особина дијаграма (s, t) и троугло ва $PO'1'', PO'2'', \dots$ следи однос $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dx} \frac{u_t}{u_L} = \frac{u_t}{u_L} v = \frac{\eta}{H}$, где је η ордината дијаграма (v, s) , то јест ордината тачака I, II, III, \dots . Према томе, брзина тачке сразмерна је овој ординати а коефицијент размере је

$$u_v = \frac{u_L}{u_t H} \left(\frac{\text{m/sec}}{\text{cm}} \right); \quad v = u_v \eta. \quad (128)$$

На слици 47. преведен је дијаграм једнако убрзаног кретања $s = \frac{1}{2} at^2$ у дијаграм (v, s) који је парабола $v^2 = 2as$, параметра $p = a$. За вредност $a = 0,5 \text{ m/sec}^2$ дијаграми



Слика 47. — Графичка конструкција (v, s) дијаграма

су нацртани са размерама $u_L = 1 \text{ m/cm}$, $u_t = 1 \text{ sec/cm}$, $\bar{H} = 14 \text{ mm} = 1,4 \text{ cm}$. У тренутку $t = 2 \text{ sec}$ је $x = 2 \text{ cm}$, $y = 1 \text{ cm}$, $s = 1 \text{ m}$, $u_v = 1/1,4$; $\eta = 1,4 \text{ cm}$; па је $v = 1,4/1,4 = 1 \text{ m/sec}$, што следи рачунски: $v^2 = 2as = 1 \text{ (m/sec)}^2$.

ПРИМЕРИ. КРЕТАЊА

19. Локомотива се креће у правој путањи брзином $43,2 \text{ km/h}$. На путу од 30 m давана је контра-пара, те је услед тога брзина пала на 3 m sec^{-1} . Израчунати:

- колико је времена давана контра-пара, и
- колико је било успорење услед тога.

Решење. — Убрзање је $a = \frac{v_0^2 - v^2}{2s} = \frac{v_0 - v}{t}$, па су $t = 4 \text{ sec}$ и $a = 9/4 \text{ m/sec}^2$.

20. Две тачке крећу се праволинијски једна иза друге, почетним брзинама v_1 и v_2 и константним убрзањима a_1 и a_2 . Почетни положаји кретања налазе се на растојању l . После колико времена ће се тачке сустићи?

Решење. — Оба кретања су једнако убрзана, па су пређени путеви

$$x_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2; \quad x_2 = v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2.$$

Пошто је $l = x_1 - x_2$ време сустизања добија се из квадратне једначине

$$t^2(a_1 - a_2) + 2t(v_1 - v_2) - 2l = 0.$$

21. Из две железничке станице, које се налазе на растојању 230,4 km, истовремено крену два воза један према другом. Први воз креће се средњом брзином 144 km/h, а други 36 km/h. После колико ће се времена и на ком месту мимоићи возови?

Решење. — Збир пређених путева оба воза једнак је растојању станица (l):

$$l = (v_1 + v_2) t = 230,4 \text{ km, па је } t = 1,28 \text{ h} = 1 \text{ h } 16 \text{ min } 48 \text{ sec.}$$

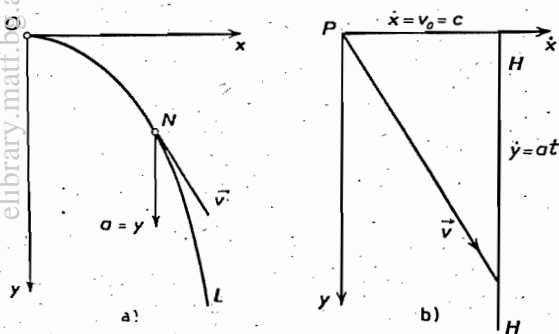
Место мимоилака је на $l_1 = 184,32 \text{ km}$ од станице из које полази бржи воз.

22. Кретање је дато системом једначина $x = ct$, $y = \frac{1}{2} at^2$, где су c и a константе. Одреди линију путање, закон пута, ходограф брзине и убрзање.

Решење. — Елиминисањем времена t из система једначина добићемо линију путање

$$y = ax^2 / 2c^2,$$

параболу са теменом у координатном почетку O (сл. 48 а).



Слика 48. — Параболичко кретање

Закон пута одредићемо из метричке форме

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{c^2 + (at)^2} dt$,
па сменом $z = at/c$, за услове $t = 0, s = 0$, добијамо

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \sqrt{c^2 + (at)^2} dt = \\ &= \frac{t}{2} \sqrt{c^2 + (at)^2} + \\ &+ \frac{c^2}{2a} \ln \frac{at + \sqrt{c^2 + (at)^2}}{c}. \end{aligned}$$

Компонентне су брзине $\dot{x} = c = \text{const.}$, $\dot{y} = at$, па је квадрат брзине $v^2 = c^2 + (at)^2$. Пошто је хоризонтална компонента брзине константна, ходограф брзине је *права линија* паралелна ординатној оси (сл. 48 б).

Компонентна убрзања су $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = a = \text{const.}$

Дакле, тачка се креће по параболу тако да се њена пројекција на хоризонталну осу креће константном брзином, а пројекција на вертикалну осу једнако убрзано. Смер тоталног убрзања поклапа се са ординатном осом (*хоризонтални хитцац*).

23. Кретање тачке дато је системом једначина

$$x = 4 \sin(2\omega t - \frac{1}{2}\pi); \quad y = 4 \sin \omega t.$$

Одредити једначину путање. Израчунати брзину и убрзање покретне тачке у положају $N(0; y)$.

Решење. — Ако из система једначина кретања елиминисемо параметар t , добићемо линију путање

$$x = -4(1 - 2 \sin^2 \omega t) = -4(1 - \frac{1}{16} y^2)$$

односно

$$y^2 = 2x + 8 \text{ (парабола),}$$

За $t = \pi/4 \omega$ биће $x = 0$, $y = \pm 2\sqrt{2}$.

Пошто су

$$\dot{x} = 8\omega \sin 2\omega t; \quad \dot{y} = 4\omega \cos \omega t,$$

$$\ddot{x} = 16\omega^2 \cos 2\omega t; \quad \ddot{y} = -4\omega^2 \sin \omega t,$$

то су у тачки $N(0; y)$ компонентне брзине и убрзања

$$x = 8\omega; y = 2\sqrt{2}\omega; \quad \ddot{x} = 0; \ddot{y} = -2\sqrt{2}\omega^2,$$

па су интензитети

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$v = 6\sqrt{2}\omega; \quad a = -2\sqrt{2}\omega^2.$$

$$x = 0 \quad t = \frac{\pi}{4\omega}$$

$$\dot{x} = 8\omega \sin 2\omega t \frac{\pi}{4\omega}$$

$$\dot{y} = 4\omega \cos \omega \frac{\pi}{4} = 4\omega \frac{\sqrt{2}}{2}$$

24. Из положаја A крену истовремено две тачке по кружној линији, полупречника R , у супротном смеру, али истом почетном брзином v_0 (сл. 49).

Прва тачка (I) креће се једнако убрзано, а друга (II) једнако успорено, али са једнаким тангенцијалним убрзањима.

а) Одредити величину тангенцијалног убрзања (односно успорења), тако да би се покретне тачке среде у положају B , у коме друга тачка мења смер кретања.

б) Колика су тотална убрзања тачака у том положају и који угао међусобно чине вектори тих убрзања?

Решење. — Из једначина кружног кретања, с обзиром на услов $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$, добијамо

$$\varphi_1 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \omega t^2; \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_0 + \omega t;$$

$$\varphi_2 = \omega_0 t - \frac{1}{2} \omega t^2; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_0 - \omega t; \quad t = \omega_0 / \omega = \pi / \omega_0;$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi; \quad 2\pi = 2\omega_0 t; \quad \omega = \omega_0^2 / \pi,$$

те су

$$\varphi_1 = \frac{3}{2}\pi; \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\pi.$$

$$\psi_1 = \pi + \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2 t^2}{\pi} = \pi + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\pi}$$

Пошто су

$$a_T = R\omega = v_0^2 / R\pi; \quad v_0 = R\omega_0,$$

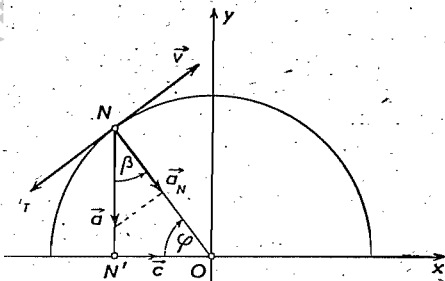
биће

$$a_{T1} = v_0^2 / R\pi; \quad a_{N1} = R\omega_1^2 = 4v_0^2 / R; \quad \omega_1 = 2\omega_0; \quad a_1 = \frac{v_0^2}{R\pi} \sqrt{16\pi^2 + 1}; \quad a_2 = -a_T,$$

па је

$$\text{tg } \gamma = a_{T1} / a_{N1} = \omega / \omega^2 = 1 / (4\pi); \quad \theta = \frac{1}{2}\pi = \gamma; \quad \text{tg } \theta = 4\pi.$$

25. Тачка N креће се по полукружној линији, полупречника R (сл. 50), променљивом брзином v . Њена пројекција на хоризонталну осу (N') креће се једнолико, брзином $c = \text{const}$. Одредити брзину и убрзање покретне тачке N као функције угла φ . Који правец има тотално убрзање?



Слика 50. — Кретање тачке по полукружној линији

Решење. — Брзина је $c = v \sin \varphi = R\omega \sin \varphi$; $\dot{\varphi} = \omega$. Природне компоненте убрзања су

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{c^2 \cos \varphi}{R \sin^3 \varphi}; \quad \frac{c}{2a} = \sin \varphi$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2}{R \sin^2 \varphi}$$

Тотално убрзање је

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \frac{c^2}{R \sin^3 \varphi}$$

Правец тоталног убрзања је $\cos \beta = a_N / a = \sin \varphi$, па је $\beta + \varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Декартове координате брзине и убрзања биће

$$\dot{x} = c; \quad \dot{y} = v \cos \varphi; \quad \ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = v \cos \varphi - v \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Пошто су $\dot{v} = (-c^2 \cos \varphi) / R \sin^3 \varphi$; $\dot{\varphi} = c / (R \sin \varphi) = \omega$, тотално убрзање је

$$\ddot{a} = \dot{y} = -c^2 / (R \sin^3 \varphi),$$

па има правац негативне ординатне осе.

26. Кретање тачке дато је системом једначина $\dot{x} = -\omega y$, $\dot{y} = \omega x$, где је ω константна угаона брзина. Одредити путању покретне тачке за почетне услове кретања: за $t=0$ су $x_0 = R$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$.

Решење. — Диференцирајући прву једначину кретања добијамо $\ddot{x} = -\omega y$, односно $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Интеграл ове хомогене диференцијалне једначине са константним коефицијентима биће $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, где су A и B произвољне константе које одређујемо из почетних услова кретања ($A = R$, $B = 0$), па је

$$x = R \cos \omega t.$$

Из прве једначине кретања, с обзиром на претходну једначину, добијамо

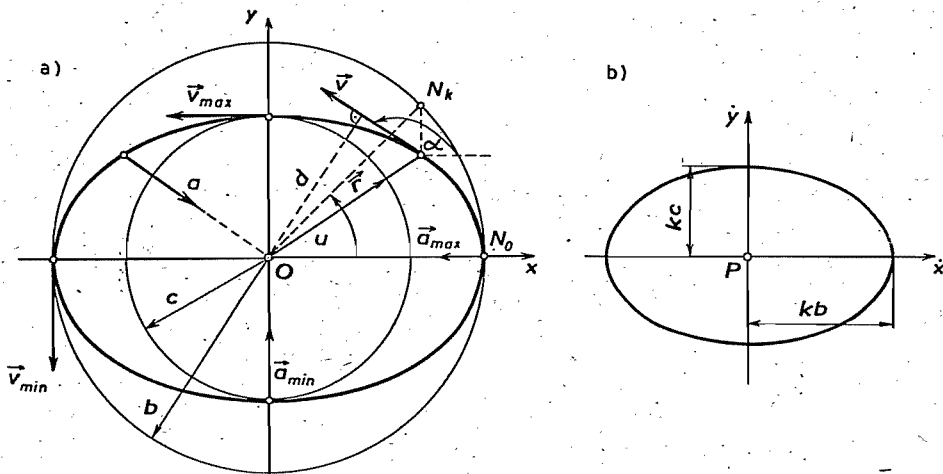
$$y = -\dot{x} / \omega = R \sin \omega t,$$

те је кретање тачке *кружно*. Полупречник путање је R .

27. Кретање је дато системом једначина

$$x = b \cos kt; \quad y = c \sin kt,$$

где су b , c , k позитивне константе. Одредити линију путање, ходограф брзине, величину, правац и смер тоталног убрзања.



Слика 51. — Кретање тачке по елипси

Решење. — Елиминисањем времена t из система једначина добићемо линију путање

$$x^2/b^2 + y^2/c^2 = 1,$$

елипси, полуоса b и c (сл. 51).

Компонентне су брзине: $\dot{x} = -bk \sin kt = -bky/c$; $\dot{y} = ck \cos kt = c\dot{x}/b$,
па је тотална брзина

$$v = k(b^2 \sin^2 kt + c^2 \cos^2 kt)^{1/2}.$$

Правац брзине у произвољној тачки одређен је углом φ :

$$\cos \varphi = -\frac{kb}{v} \sin kt; \quad \sin \varphi = \frac{kc}{v} \cos kt.$$

Напишимо једначине елипсе у параметарском облику: $y = b \cos u$, $x = c \sin u$, где је u ексцентрична аномалија, биће $u = kt$, па је $\dot{u} = k = \omega$. Овај извод једнак је угадној брзини обртања полупречника великог круга елипсе.

Растојање средишта елипсе. O од тангенте у тачки N је

$$d = \frac{bc}{(b^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u)^{1/2}},$$

па се брзина може изразити помоћу овог растојања изразом

$$v = \frac{bck}{d}.$$

Можемо закључити да је интензитет брзине обрнуто сразмеран растојању средишта елипсе од тангенте повучене у дајој тачки на путању.

Ходограф брзине такође је елипса $x^2/(bk)^2 + y^2/(ck)^2 = 1$, полуоса bk и ck , са полом у средишту елипсе O . Због тога су екстремне вредности брзине (сл. 51a): $v_{\max} = bk$, $v_{\min} = ck$.

Компонентна убрзања су

$$\ddot{x} = -bk^2 \cos kt = -k^2 x; \quad \ddot{y} = -ck^2 \sin kt = -k^2 y,$$

па је тотално убрзање

$$a = k^2(b^2 + c^2)^{1/2} = k^2(x^2 + y^2)^{1/2} = kr,$$

где је r интензитет вектора положаја покретне тачке. Представимо ли убрзање векторски, биће

$$\vec{a} = -k^2(x\vec{i} + y\vec{j}) = -k^2\vec{r},$$

те се правац тоталног убрзања поклапа са потегом r , али је смера ка средишту елипсе. Екстремне вредности убрзања (сл. 51b) јесу: $a_{\max} = k^2 b$; $a_{\min} = k^2 c$.

Нормално убрзање је

$$a_N = \frac{1}{v}(\ddot{x}y - \dot{x}\dot{y}) = -k^2 d = \frac{v^2}{R}.$$

Из ове кинематичке релације можемо добити вредности полупречника кривине у тачкама елипсе и износе: $R_1 = c^2/b$, $R_2 = b^2/c$.

28. Кретање тачке дато је системом једначина

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k^2 x.$$

Одредити путању покретне тачке ако су почетни услови кретања:

$$\text{за } t=0 \text{ су } x_0 = b, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad y_0 = v_0.$$

Реш ење. — Слично претходном задатку добијамо

$$\ddot{x} = y = -k^2 x, \quad \ddot{y} + k^2 y = 0; \quad x = A \cos kt + B \sin kt = b \cos kt; \quad y = -bk \sin kt.$$

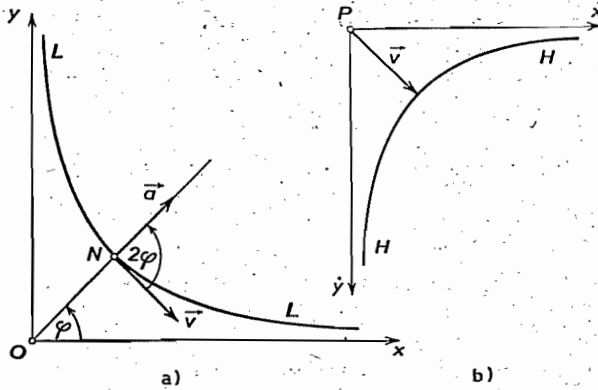
Путања је елипса чија је једначина $x^2/b^2 + y^2/(bk)^2 = 1$.

29. Кретање је дато системом једначина $x = be^{kt}$; $y = ce^{-kt}$, где су b, c, k позитивне константе. Одредити линију путање, ходограф брзине, брзину и убрзање. Колике су природне компоненте убрзања?

Реш е њ е. — Линија путање је хипербола, $xy = bc$. $t = 0 \quad x = b \quad y = c$

Компонентне брзине су $\dot{x} = kx$, $\dot{y} = -ky$, па је интензитет брзине $v = kr$, то јест сразмерно је поједини $r = ON$ (сл. 52). $\ddot{y} = -k^2 y \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Ходограф брзине такође је хипербола $xu = -k^2 bc$, слична линији путање, само је у четвртном квадранту.



Слика 52. — Кретање тачке по хиперболи

Компонентна убрзања су $\ddot{x} = k^2 x$, $\ddot{y} = -k^2 y$, па је тотоално убрзање $a = k^2 r$, и сразмерно је потегу r . Овде је $\vec{a} = k^2(x\vec{i} + y\vec{j}) = k^2 \vec{r}$, па се правац и смер убрзања поклапају са потегом \vec{r} . Ако потег чини са Ox -осом угао ϕ онда је $\tan \phi = y/x$. Брзина, пак, чини са истом осом угао $\alpha = -\phi$, јер је $\tan \alpha = -y/x$. Због тога убрзање чини са брзином угао 2ϕ , те су, према обрасцима (83), природне компоненте убрзања

$$a_T = \frac{k^3}{y} (x^2 - y^2) = k^2 r \cos 2\phi; \quad a_N = 2 \frac{k^3}{y} xy = k^2 r \sin 2\phi.$$

30. Тачка се креће по ланчаници, $y = c \operatorname{Ch} \frac{x}{c}$, константном брзином (сл. 53).

Одредити убрзање као функцију од y . Који правац има тотоално убрзање?

Реш е њ е. — Из једначине ланчанице је

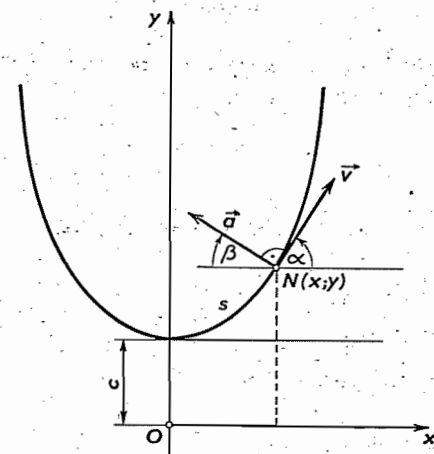
$$y' = \operatorname{Sh} \frac{x}{c}; \quad y'' = \frac{1}{c} \operatorname{Ch} \frac{x}{c} = \frac{y}{c^2}.$$

Лук ланчанице је $s = \int \sqrt{1 + y'^2} dx = cy'$, па је брзина

$$v = s = \frac{ds}{dx} x = x \operatorname{Ch} \frac{x}{c} = \frac{y}{c} x,$$

Слика 53. — Кретање тачке по ланчаници

те су компонентне брзине $\dot{x} = cv/y$, $\dot{y} = y' \dot{x} = sv/y$.



Компонентна убрзања су

$$\ddot{x} = -\frac{cv}{y^2} y' x = -\frac{cs}{y^2} y^2; \quad \ddot{y} = \frac{dy}{dx} \dot{x} = v \frac{s'y - sy'}{y^2} \dot{x} = \frac{c^2}{y^3} v^2.$$

Тотално убрзање је

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{v^2 c}{y^2};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \ddot{y}/\ddot{x} = -c/s; \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -1.$$

Природне компоненте убрзања су:

$$a_T = 0, \quad a_N = a = v^2/R,$$

где је полупречник кривине линије путање $R = y^2/c$, а ту вредност смо добили кинематички. Исту вредност можемо лако добити применом обрасца за полупречник кривине ланчанице, а у статисти смо је извели статички као важну особину ланчанице (в. Статистику, чл. 12.3).

Тотално убрзање пада, дакле, у правац нормале, то јест у правац полупречника.

31. Кретање је дао системом једначина

$$x = 2 \cos 4t, \quad y = 2 \sin 4t, \quad z = 2t.$$

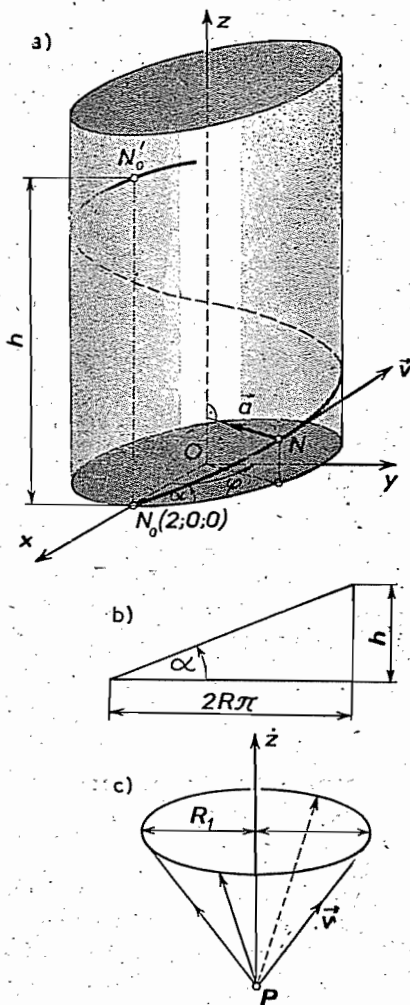
Одредити линију путање, ходеограф кривине и показати да је полупречник кривине константан. Колика је његова бројна вредност? Мере су дате у метрима.

Решење. — Елиминисањем времена t из првих двеју једначина добијамо пројекцију линије путање на Oxy -раван као кружну линију $x^2 + y^2 = 4$, полупречника $R = 2$. Пројекција покретне тачке на Oxy -раван креће се једнолико по кружној линији, јер је $\operatorname{tg} \varphi = y/x = \operatorname{tg} 4t$, па је $\varphi = 4t$.

Почетни положај покретне тачке за $t = 0$ је $N_0(2; 0; 0)$.

Нагиб елемента лука путање $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{R} \frac{dz}{d\varphi} = 1/4$, константан је. Путања је, дакле, просторна крива линија константног успона, завојница на цилиндру чија се оса поклапа са Oz -осом. Претходне једначине су њене параметарске једначине.

Под *ходом завојнице* (h) подразумевамо растојање два узастопна пресека завојнице са истом изводницом цилиндра, $h = N_0 N'_0$ (сл. 54 а). Развијемо ли омотач цилиндра завојница постаје права линија, па је ход завојнице (сл. 54 б): $h = 2R\pi \operatorname{tg} \alpha = \pi = \operatorname{const}$.



Слика 54. — Кретање тачке по завојници

Компоненте брзине су:

$$\dot{x} = -8 \sin 4t = -4y; \quad \dot{y} = 8 \cos 4t = 4x; \quad \dot{z} = 2,$$

па је интензитет брзине $v = 2\sqrt{17} \text{ m sec}^{-1} = \text{const}$. Дакле, кретање је по завојници једнолико.

Компонентна убрзања су

$$\ddot{x} = -16x; \quad \ddot{y} = -16y; \quad \ddot{z} = 0$$

те је тотално убрзање $a = 32 \text{ m sec}^{-2} = \text{const}$.

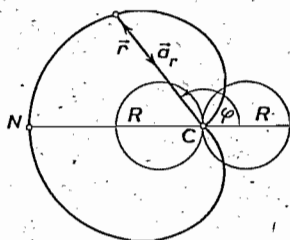
Пошто је брзина константна, тангенцијално убрзање једнако је нули, а нормално убрзање једнако је тоталном убрзању, $a_N = 32 \text{ m sec}^{-2}$. Ове вредности можемо добити користећи се и претходним обрасцима.

Пошто је $z = 0$, тотално убрзање је *уравно* на осу цилиндра и усмерено ка њој. Како су пак v и a_N константни, то је и *полупречник кривине путање косинусанс*, а то је позната особина завојнице. У овом случају је $R = 2^{1/8} \text{ m}$. И овде смо, дакле *кинематички* одредили полупречник кривине путање.

Ходограф брзине је

$$x^2 + y^2 = 8^2; \quad z = 2,$$

кружни конус чија је оса вертикална (сл. 54 с). Основа је круг, полупречника $R_1 = 8 \text{ m}$. Пол ходографа је у врху конуса O , на удаљењу 2 m од основе. Изводнице конуса представљају брзине.



Слика 55. — Кретање по кардиоиди

32. Тачка се креће по кардиоиди, $r = 2R(1 - \cos \varphi)$, константном секторском брзином $S = 4 \text{ cm}^2/\text{sec}$ и убрзањем које је усмерено ка тачки C (сл. 55). Одредити брзину и убрзање покретне тачке у положају N ако је $R = 2 \text{ cm}$.

Решење. — Из једначине кардиоиде добијамо

$$r = 2R\varphi \sin \varphi;$$

$$\dot{r} = 2R\varphi^2 \cos \varphi + 2R\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Како је $2S = r^2 \dot{\varphi}$, у положају N су $\varphi = \pi$; $r = \overline{CN} = 4R$; $\ddot{\varphi} = 0$, па добијамо $\varphi = \omega t$; $\dot{\varphi} = \omega$; $\ddot{\varphi} = 0$

$$v_r = \dot{r} = 0; \quad v_c = r\dot{\varphi} = 2S/r = 1 \text{ cm/sec};$$

$$a_c = 0; \quad a_r = (2R \cos \varphi - r) \dot{\varphi}^2 = -3/16 \text{ cm/sec}^2.$$

Исте вредности добијам о и по Бинеовом обрасцу (122).

Због $r = 2R(1 - \cos \varphi) = 4R \sin^2(\varphi/2)$ је $c = 4R$, $n = 1/2$; $C = 2S = 8$, $k = 8\sqrt{8}$, $r = 4R = 8$; $v = 1 \text{ cm/sec}$; $\lambda = 64 \cdot 12$; $a_r = -3/16 \text{ cm/sec}^2$.

33. Тачка се креће по параболи $y^2 = 1,5x$ (сл. 56) константном секторском брзином и убрзањем које је усмерено ка жижи C . Одредити брзину и убрзање покретне тачке у положају N_1 ако је потег CN превукао површину CNN_1C за 3 сек. Мере су дате у метрима.

Решење. — Параметар параболе је $p = 3/4$, па су координате тачака N (6 m ; 3 m), N_1 ($3/8 \text{ m}$; $3/4 \text{ m}$).

Поларна једначина параболе са полом у жижи C је:

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi},$$

па су у тачки N_1 :

$$r = \frac{-p \sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} \dot{\varphi} = -p \dot{\varphi};$$

$$r' = \frac{p(1 + \sin^2 \varphi - \cos \varphi)}{(1 - \cos \varphi)^3} \dot{\varphi}^2 = 2p \dot{\varphi}^2;$$

$$S = 9/8 \text{ m sec}^{-2}; \quad \dot{\varphi} = C \varphi / r^2 = 16; \quad C = 9/4,$$

због је површина

$$A = \frac{2}{3} (6 \cdot 3^{-3/4} \cdot 3/8) - \frac{1}{2} (6^{-3/8}) \cdot 3 = 27/8 \text{ m}^2.$$

Како је $2S = 9/4$, то је $\dot{\varphi} = 2S/r^2$, па су компонентне брзине и убрзања у положају N_1 :

$$v_r = r' = -3; \quad v_c = r \dot{\varphi} = 3; \quad v = 3\sqrt{2} \text{ m/sec},$$

$$a_c = 0; \quad a_r = -12 \text{ m/sec}^2.$$

Вредности за v^2 и a_r лакше добијамо помоћу образаца (118) и (119). Због $u = (1 - \cos \varphi)/p$ је $u' = (\sin \varphi)/p$, $u'' = (\cos \varphi)/p$, па је

$$v^2 = \frac{2C^2}{pr} = 18 \text{ (m/sec)}^2; \quad a_r = -\frac{C^2}{pr^2} = -12 \text{ m/sec}^2.$$

34. Кретање тачке дато је системом једначина: $x + 2y = -R \sin t$; $y - 2x = R \cos t$.

Одредити једначину путање ако су почетни услови кретања: за $t=0$ су $x=y=0$.

Решење. — Диференцирањем прве једначине, с обзиром на другу, добијамо

$$\ddot{x} + 2\dot{y} = -R \cos t; \quad \ddot{x} + 4x = -3R \cos t.$$

Општи интеграл хомогене диференцијалне једначине $\ddot{x} + 4x = 0$ јесте

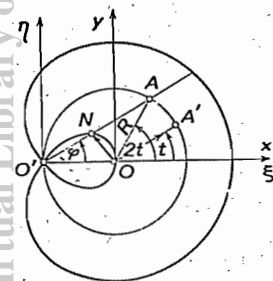
$$x = A \cos 2t + B \sin 2t.$$

Партикуларни интеграл нехомогене диференцијалне једначине

$$\ddot{x} + 4x = -3R \cos t$$

потражићемо у облику

$$x_p = C \cos t + D \sin t.$$



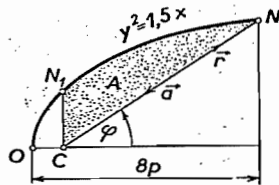
Слика 57. — Паскалов пуж

Ако двапут диференцирамо овај партикуларни интеграл нехомогене једначине и унесемо у једначину, онда можемо по методи неодређених коефицијената одредити константе C и D ($C = -R$; $D = 0$). Општи интеграл нехомогене диференцијалне једначине са константним коефицијентима, као што је познато из теорије ових једначина, једнак је збиру општег интеграла хомогене и партикуларног интеграла нехомогене диференцијалне једначине, па је

$$x = A \cos 2t + B \sin 2t - R \cos t.$$

Из прве једначине кретања одређујемо $y = -1/2 (R \sin t + x)$, па су општи интеграли

$$x = A \cos 2t + B \sin 2t - R \cos t; \quad y = A \sin 2t - B \cos 2t - R \sin t.$$



Слика 56. — Кретање по параболу константном секторском брзином

Интеграционе константе одређујемо из почетних услова кретања ($A=R$; $B=0$), па су

$$x = R(\cos 2t - \cos t); \quad y = R(\sin 2t - \sin t).$$

Уведемо ли формуле трансформације координата $\xi = x + R$, $\eta = y$, добићемо

$$\xi = R \cos t (2 \cos t - 1); \quad \eta = R \sin t (2 \cos t - 1).$$

Ако у тачки O' изаберемо пол са поларном осом $O'\xi$ и ставимо $\xi = r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$, $\varphi = t$, добићемо поларну једначину путање

$$r = R(2 \cos \varphi - 1),$$

која представља Паскалов пуж (В. Pascal, 1623—1662).

Ову криву можемо конструисати на овај начин (сл. 57). Из O повуцимо вектор $\vec{R} = \vec{OA}$, који чини са осом Ox угао $\sphericalangle 2t$ и вектор \vec{OA}' , који са истом осом чини угао $\sphericalangle t$. Ако из A повучемо вектор \vec{AN} паралелан са \vec{OA}' , онда је $\vec{ON} \parallel \vec{A'A}$ вектор положаја покретне тачке N .

35. Сложити колинеарне хармонијске осцилације:

$$x_1 = 5 \sin(\pi t + \frac{1}{2} \pi);$$

$$x_2 = 3 \cos(\pi t + \frac{1}{3} \pi).$$

Решење. — Резултујуће кретање је

$$x = x_1 + x_2 = 5 \cos \pi t + 3 \cos(\pi t + \frac{1}{3} \pi) = \frac{13}{2} \cos \pi t - \frac{3}{2} \sqrt{3} \sin \pi t = R \cos(\pi t + \theta),$$

где су

$$R \cos \theta = \frac{13}{2}; \quad R \sin \theta = \frac{3}{2} \sqrt{3}; \quad R = 7;$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{13} \sqrt{3}.$$

II ДЕО

КИНЕМАТИКА КРУТОГ ТЕЛА

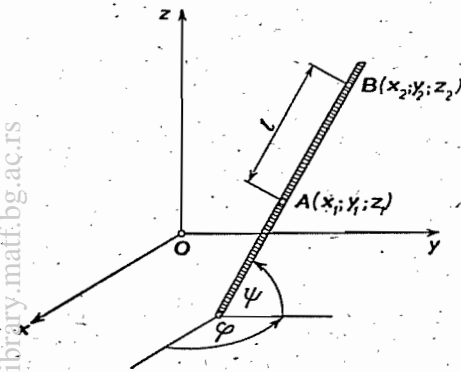
6. КРУТО ТЕЛО. СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ КРЕТАЊА

Под крућим телом подразумевамо оно тело код које растојања између ма којих његових тачака остају непромењена. Таква тела у природи не постоје, она су само замишљена, апстрактна. Међутим, у природи постоје чврста тела која су, при кретању, подвргнута и деформацијама, те се растојањатачака мењају под утицајем извесних узрока — сила, и тело мења свој облик. Ми ћемо у овом одељку механике испитивати кретање само крућих тела не водећи рачуна о њиховој материјалности, то јест испитиваћемо кретања само *геометријских облика*.

Под телом подразумевамо скуп геометријских тачака распоређених у простору. Све ове тачке образују један *систем тачака*. Ако је распоред тачака *линеаран*, онда систем представља *линију*, која може бити *права* или *крива*. Праву линију називаћемо краће *шпайом*, јер су његове две димензије мале величине у поређењу са трећом — дужином. Скуп тачака у равни образује *равну фигуру* (*илочу*), чија је једна димензија (дебљина) мала у поређењу са другим двема. Ако су све три димензије система коначне, онда систем образује *тело*. Према томе, у овом одељку испитиваћемо кретања следећих геометријских облика: *праве* (*шпайа*), *равне фигуре* (*илоче*) и *тела*.

Према могућности кретања разликоваћемо *слободна* и *везана* тела. Слободним телом називамо оно које се може померити из једног произвољног положаја у други, оближњи положај. Број могућности кретања тела зове се *степен слободе кретања*. Ако је тело ограничено у могућностима кретања, онда се каже да је *неслободно* или *везано*. Узроци који спутавају кретање зову се *везе*. Оне, дакле, смањују број могућности кретања тела, те му смањују број степени слободе кретања. Извесне тачке тела принуђене су тада да се крећу по неким везама (линијама или површинама), то јест крећу се у *проецираним путањама*. Овакво кретање је *принудно*. Принудна кретања су од највеће важности у *кинематички механизмима*, јер сви механизми врше оваква кретања.

Према времену трајања, кретања крутог тела могу бити *елементарна* и *коначна*. Прва трају бескрајно кратко, а друга — у коначном временском размаку. Коначна кретања састоје се из низа елементарних кретања. Да бисмо могли испитати ова кретања, посматрамо их у једном делу тродимензионалног простора у односу на један триедар који сматрамо *ајсолоујним*. Да бисмо могли пратити кретање и изводити законе који постоје између појединих кинематичких елемената, морамо у сваком тренутку одредити *положај шела* у односу на изабрани триедар. Тако је положај штапа у простору одређен са шест података, на пример координатама тачака A и B . Променом сваке координате мењаће се положај штапа и он ће се кретати.



Слика 58. — Одређивање положаја штапа у простору

Пошто је положај штапа одређен са шест података, значи да има и шест степени слободе кретања. Међутим, постоји једна веза која му умањује слободу кретања. Та веза постоји на основу претпоставке о *крућости шела*, да је растојање двеју тачака штапа непроменљиво, па се може написати у облику једначине, познате из аналитичке геометрије за растојање двеју тачака у простору:

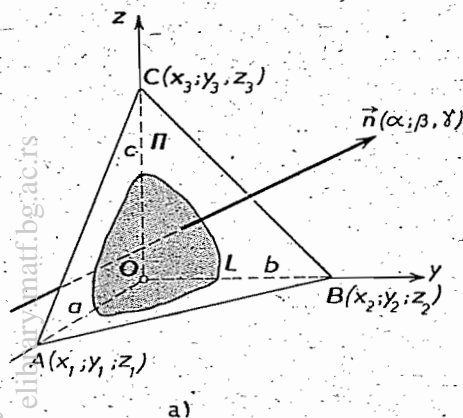
$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{const.}$$

Ова веза је изражена једначином, па је могућност кретања штапа $6 - 1 = 5$, те кажемо да штап у простору има *пет степен слободе кретања*. Да би смо познавали кретање штапа (праве) у простору, потребно нам је *пет података* — пет скаларних величина. Да ли ћемо за ове податке узети координате тачака A и B штапа или, пак, координате тачке A , два угла φ и ψ (сл. 58), сасвим је свеједно, главно је да је увек потребно *пет података* — пет бројева или координата.

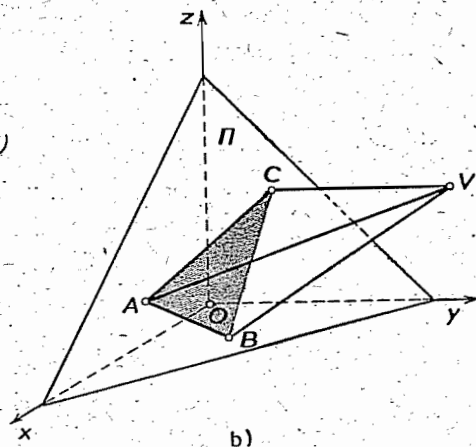
За случај да се штап креће у равни, његов је положај одређен у тој сталној равни, на пример Ox -равни, са *три података*, те штап има *три степена слободе кретања*.

Равна фигура омеђена контуром (L) лежи у равни (Π) и са њом се заједно креће у простору (сл. 59 а). Положај равни одређен је према сталном триедру $Oxyz$ са *три података*: *одсечцима* a, b, c на координатним осама или пак са три *угла* (α, β, γ) које нормала, \vec{n} , повучена на раван фигуре, чини са координатним осама и растојењем равни од координатног

почетка. У овом случају постоје четири податка: три угла и једна дуж, али између углова постоји позната веза из аналитичке геометрије — да је збир квадрата косинуса тих углова једнак јединици ($\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$), те је у сваком случају положај равни одређен са *три* податка, па она има *три степенa слободе кретања*. Међутим, равна фигура може



Слика 59. — а) Одређивање положаја плоче



Слика 59. — б) Основни троугао

да се креће и у самој тој равни. Њен је положај у равни одређен положајем двеју тачака, P и Q , то јест штапом PQ , за који смо видели да има три степена слободе кретања у равни. На тај начин *шлица* у простору има $3+3=6$ *степенa слободе кретања*. Како се кроз три тачке које не леже на једној правој може увек поставити у простору једна равна, њен је положај одређен са девет података (девет координата тачака A, B, C), између којих постоје *три везе*, наиме да су растојања тачака константна те, дакле, кретање плоче има $9-3=6$ степена слободе. Те везе математички изражавамо једначинама

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{const.}, \quad \overline{BC}^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = \text{const.}, \quad \overline{AC}^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = \text{const.}$$

За проучавање кретања плоче у простору потребно нам је, дакле, *шест* *координата* — координата. Које ћемо координате узети — свеједно је, на пример тачака A и B . Узмемо ли у обзир промену углова орта нормале, онда због везе $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ можемо користити само *два* угла и *четири* *координате* тачака A, B или C .

Четири тачке које не леже у једној равни образују *тетраедар* (*ширагид*). Његове три тачке, на пример A, B, C (сл. 59b), чине његову *основу*, а четврта (V) је његов *врх*. Положај тетраедра одређен је положајем његових темена, па имамо 12 координата у односу на триедар *Охуз*. Изгледало би да тетраедар има и 12 степена слободе кретања, међутим,

због наше претпоставке о крутости тела, тај се број снижава, пошто су дужине ивица тетраедра константне, $\overline{AB} = \text{const.}$, $\overline{BC} = \text{const.}$, $\overline{AC} = \text{const.}$, $\overline{AV} = \text{const.}$, $\overline{BV} = \text{const.}$, $\overline{CV} = \text{const.}$, те између 12 координата постоји 6 веза, па тетраедар има само шест степености слободне кретања. Како је кретање непрекидно, положајем основе тетраедра (плоче ABC) једнозначно је одређен и положај врха (V), то јест и положај тетраедра, а тиме и положај крутог тела у коме смо узели ове четири произвољне тачке (A, B, C, V). Због тога можемо у кинематичком смислу заменити тетраедар његовом основом, троуглом ABC , па се и свако круто тело може кинематички заменити његовим трима неколинеарним тачкама, то јест троуглом који се назива основни троугао. Кретањем овог троугла у простору потпуно је одређено и кретање крутог тела, које, дакле, има шест степености слободне кретања.

На основу изнетог можемо овако дефинисати број степени слободне кретања крутог тела: Број степености слободне кретања крутог тела је број међусобно независних координата тела узетих у односу на извесни троугао, које су потребне и довољне да једнозначно одреде положај тела у простору у сваком тренутку. Он представља број могућности да се тело премести из једног положаја у други, посматрано у односу на изабрани троугао.

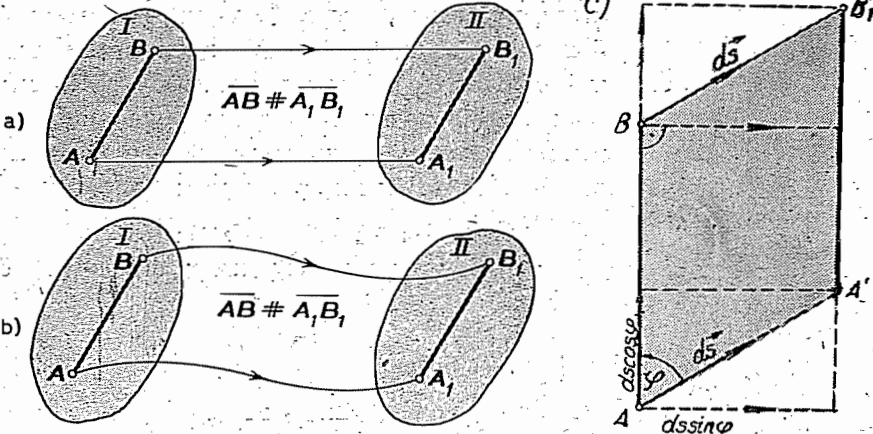
Тачка у простору има три степена слободне кретања, пошто се мењају њене три координате (Декартове, поларно-цилиндричке или сферне), јер може да се креће у Ox -, Oy - и Oz -правцу. У равни има два, а на правој само један степен слободне кретања. Плоча, или штап, у равни има три степена слободне кретања, јер може да се креће у правцима оса Ox и Oy и да се обрће око Oz -осе. Тело у простору има шест степени слободне кретања, јер може да се креће у правцима оса Ox , Oy и Oz и да се истовремено обрће око тих оса. Оно може имати и мањи број степени слободне кретања ако је извесним везама тај број умањен, али не може имати више од шест степености слободне кретања. Међутим, број степени слободне кретања тела која се крећу у некој узајамној вези може бити и већи од шест.

7. ОСНОВНЕ ВРСТЕ КРЕТАЊА КРУТОГ ТЕЛА

Кретање крутог тела, у општем облику, може бити двојачко: *транслаторно кретање* (транслација) и *обртано кретање* (ротација).

Под транслаторним кретањем (транслацијом) крутог тела подразумевамо такво кретање код кога свака права, или равна, тела остаје сама себи паралелна. На пример, ако се тело транслаторно премести из положаја (I) у оближњи положај (II), онда је произвољна права AB прешла у положај A_1B_1 (сл. 60), тако да је остала сама себи паралелна, па је испуњен услов паралелности и крутости, $\overline{AB} \# \overline{A_1B_1}$. Када се тачке A и B крећу по

правим линијама, транслација је *правoliniјска* (сл. 60a), а ако се крећу по кривим линијама, онда је *криволинијска* (сл. 60b).



Слика 60. — a) Правoliniјска транслација, b) криволинијска транслација, c) клизање штапа

Због услова паралелности и крутости следи да све тачке кругог тела које изводи транслаторно кретање имају у истом временском размаку *једнака и паралелна елементарна померања*. Тело можемо заменити штапом AB , па ако је он за време dt прешао из положаја AB у положај $A'B'$ (сл. 60c), онда су елементарна померања $ds \equiv \overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$, те су и брзине једнаке, $v_A = v_B = v$. Дакле, све тачке кругог тела које изводи транслаторно кретање имају исте брзине, па је довољно познавати кретање само једне тачке тела. Због тога транслаторно кретање има само *једну слободу кретања* и може се увек свести на кретање једне једине његове тачке. Дакле, у случају *транслаторног кретања тело кинематички замењујемо једном његовом тачком*, *и кретање можемо представити једним вектором померања*. Разложимо померање ds у две компоненте у правцу осе штапа ($ds \cos \varphi$) и управно на правац штапа ($ds \sin \varphi$), онда због услова паралелности и крутости, $ds \equiv \overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$, пројекције померања свих тачака штапа на правац штапа морају да буду једнаке, а такође и нормалне пројекције. Како је $v = ds/dt$, то је $v_k = (ds \cos \varphi)/dt = v \cos \varphi$ компонента брзине која је колинеарна са штапом. Она представља *брзину клизања штапа*. Због крутости, дакле, *све тачке штапа имају исте брзине клизања*. Друга компонента $v_n = v \sin \varphi$ управна је на штап. Када је померање (ds) управно на штап, тада је брзина клизања једнака нули.

Из изложеног видимо да се проблем *транслаторног кретања крутог тела своди на кретање једне његове тачке*, *и јест на кинематичке проблеме кретања тачке*.

Поред транслаторног (прогресивног) кретања постоји и *обртно кретање*, које се суштински разликује од првог. Добију ли тачке A и B штапа паралелна елементарна померања ds_1 и ds_2 , различитих интензитета, онда ће штап, за одговарајући бесконачно мали временски размак, прећи у положај $A'B'$ (сл. 61). Правци штапова у оба положаја сећи ће се у тачки O и чинити угао $d\varphi$. Померања можемо сматрати кружним луцима описаним из тачке O , те следи овај однос:

$$ds_1 = r_1 d\varphi, \quad ds_2 = r_2 d\varphi.$$

За неку произвољну тачку штапа (C) биће померање

$$ds = r d\varphi,$$

па је њена брзина

$$v_C = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega,$$

Слика 61. — Обртање

где је ω скаларна угаона брзина. Овакво кретање зове се *обртнање* (ротација) око тачке O или, пак, око осе која пролази кроз ту тачку а управна је на раван коју образују два оближња положаја штапа.

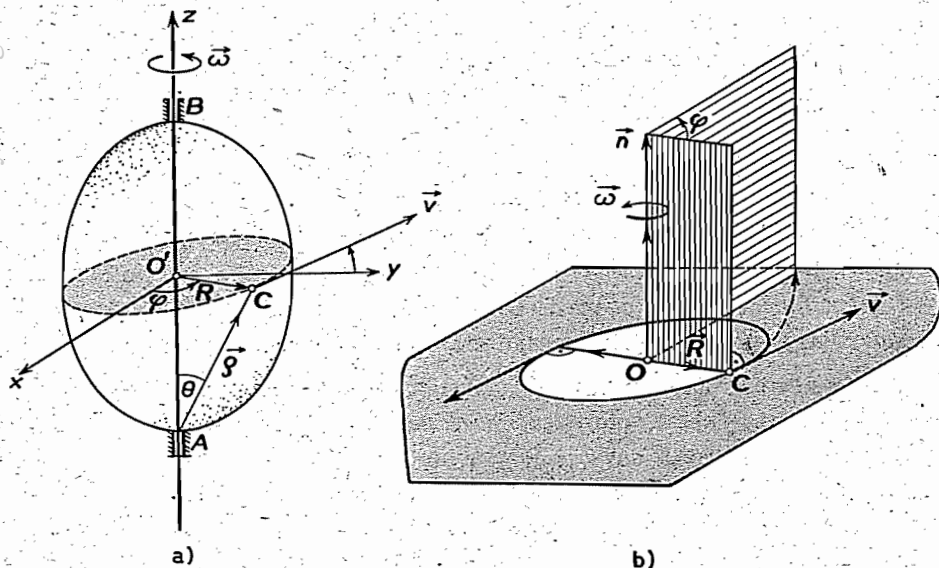
Ако је однос $ds_1/ds_2 = r_1/r_2$ сталан али различит од јединице, онда се правци штапова секу увек у сталној тачки O , па се обртање врши око *непомицне тачке* односно *осе*. Када је тај однос једнак јединици, тада је $A'B' \neq AB$, па се тачка O налази у бесконачности, те имамо случај транслаторног кретања. Из овога следи да се *транслација може кинематички схватити као обртање око бескрајно далеке осе*, слично спрегу сила чија је резултанта једнака нули, али се „њена напада тачка налази у бесконачности“. При променљивом односу померања мења се положај тачке O , односно осе.

Између транслације и ротације постоји битна разлика. Код прве, све тачке штапа имају *исте брзине*, јер су и померања иста, а код друге је брзина сваке тачке *сразмерна њеном одстојању од тачке O односно од обртне осе*. Код транслације брзине тачака, у општем случају, чине извештан угао са осом штапа, док су код ротације брзине свих тачака штапа *уравне на ишају*.

Када тело истовремено врши и транслаторно и обртно кретање, кажемо да изводи опште кретање, које се назива и *завојним кретањем* или, краће, *завртњем*. Према томе, транслација и обртање су компонентна кретања општег кретања. Слично статисти у простору, где се просторни систем сила редукује на динаму са централном осом, у кинематици крутог тела ова кретања се слажу у *завојно кретање са осом завртња, његовом транслаторном и угаоном брзином*.

8. ОБРТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА ОКО НЕПОМИЧНЕ ОСЕ

8.1. Врсте обртања. — Положај крутог тела у простору одређен је основним троуглом $\triangle ABC$. Ако су две тачке троугла, A и B , *сйалне*, кроз њих се може поставити оса AB . Све тачке крутог тела које се налазе на овој оси остају непокретне, а остале његове тачке описиваће при овом обртању *кружне линије* у равнинама управним на *обртну осу*, која пролази и кроз те тачке. Тачка C кретаће се по кружној линији полупречника R (сл. 62a). Средиште кружне линије (O') налази се у продорној тачки обртне осе кроз раван повучену у тачки C управно на обртну осу.



Слика 62. — Обртање крутог тела око непомичне осе (AB)

Пошто тачка описује кружну линију, њен положај је одређен углом φ , што значи да ово кретање има само *један сйејен слободе кретања*, те је одређено само *једним подашком*.

Елементарно померање тачке C биће $ds = R d\varphi$, па је њена брзина $v = R\dot{\varphi} = R\omega$, где је ω скаларна угаона брзина.

Ако положај тачке C одредимо вектором положаја $\vec{\rho}$ у односу на непокретну тачку A , онда се брзина тачке C може изразити овако:

$$v = R\omega = \rho \omega \sin \theta.$$

Због кружног кретања, брзина пада у правац тангенте на путању, па је управна на раван троугла $AO'C$, те се може представити векторским производом (74), где је $\vec{\omega}$ *векторска угаона брзина*. Као клизећи вектор,

она пада у правац обртне осе, интензитет јој је једнак скаларној угаоној брзини, а смер зависи од смера обртања. Ако је обртање у смеру десне диспозиције (противно кретању сатне казаљке), онда векторска угаона брзина има смер од A ка B , то јест у *правицу позитивне нормале на равни кружних ивица* (сл. 62b). Из троугла $AO'C$ следи $\vec{p} = \vec{AO}' + \vec{R}$, па пошто је угаона брзина $\vec{\omega}$ колинеарна са осом, брзина тачке C представља се векторским производом

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}] = [\vec{\omega}, \vec{p}]. \quad (129)$$

Она је, дакле, вектор управан на векторима $\vec{\omega}$ и \vec{p} и таквог је смера да ова три вектора чине десни триедар. Стога се може дефинисати и статички као *момент вектора угаоне брзине за покретну тачку C као моментну тачку*:

$$\vec{M}_C^{\vec{\omega}} = [\vec{CA}, \vec{\omega}] = [-\vec{AC}, \vec{\omega}] = [\vec{\omega}, \vec{AC}] = [\vec{\omega}, \vec{p}] = \vec{v}.$$

Брзина покретне тачке једнака је моменту вектора угаоне брзине за покретну тачку као моментну тачку.

Једначина (129) је позната *Ојлерова (Leonhard Euler, 1707–1783) једначина* која је од основног значаја у кинематици крутог тела.

Према томе да ли је угаона брзина константна или променљива, разликујемо две врсте обртања: *равномерно (једнолико)* и *неравномерно (променљиво)*. У првом случају је угаоно убрзање (чл. 4.6) једнако нули; у другом је различито од нуле. Ако је угаоно убрзање константно, онда је обртање једнако убрзано или једнако успорено, према томе да ли је угаоно убрзање позитивно или негативно (угаоно успорење). Обртање крутог тела око непомичне осе свело се на кружно кретање сваке његове тачке, изузев тачака које се поклапају са осом AB , те важе кинематичке једначине кружног кретања (чл. 46; обр. 114). За $t_0 = 0$ биће:

$$\pm \omega = \text{const.}, \quad \omega = \omega_0 \pm \omega t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \omega t^2; \quad \omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2 \omega (\varphi - \varphi_0) \quad (130)$$

где се знак $+$ односи на једнако убрзано, а знак $-$ на једнако успорено обртање. Једнако убрзано обртање може бити без *почетне угаоне брзине* (ω_0), али једнако успорено *мора имати почетну брзину* ($\omega_0 \neq 0$). Почетни положај тела бира се обично тако да је $\varphi_0 = 0$.

Ако при једноликом обртању означимо са n број обртаја у минути (минути број обртаја, обртаја/min = o/min), онда из једначине за пређени

пут у једном минути $s = 2R\pi n = 60v = 60R\omega$, где је v обимна брзина (m/sec), добијамо овај однос између угаоне брзине и броја обртаја у минути:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ (sec}^{-1}\text{)}. \quad (131)$$

Како се у овом случају угао мења линеарно са временом, $\varphi = \omega t$, време трајања једног обртаја износи

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{60}{n} \text{ (sec)}. \quad (132)$$

Једнако успорено обртање престаје када буде $\omega = 0$; тада је $\varphi_k = \omega_0^2/2\omega$, па је укупни број обртаја $n_k = N = \varphi_k/2\pi = \omega_0^2/4\pi\omega$.

Примери. — 36. Тело се обрће једнолико око непомичне осе са 30 обртаја у минути. Одредити ходограф брзине тачке која је удаљена за 2 m од осе. Колика је њена брзина?

Решење. — Угаона брзина је $\omega = \pi \text{ sec}^{-1}$, па је брзина тачке $v = 2\pi \text{ m sec}^{-1}$. Обртни угао је $\varphi = \omega t$. Како су координате покретне тачке $x = 2 \cos \omega t$, $y = 2 \sin \omega t$; ходограф је кружна линија, полупречника 2π , са средиштем на оси.

37. Замајац, пречника 40 cm (сл. 63), доведен је из стања мировања у једнако убрзано обртање тако да се после 22 sec обрће са 105 o/min.

Одредити ходограф брзине тачке на обиму замајца ако се она у почетном положају ($t=0$) налазила на вертикали Oy . Узети $\pi \approx 22/7$.

Колико обртаја учини тело за један минут?

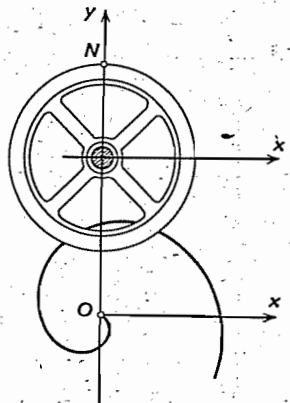
Решење. — Угаоно убрзање је константно, $\omega = \dot{\varphi} = \text{const.}$, па се двоструком квадратуром за почетне услове обртања добија $\varphi = 1/2 \omega t^2$. Угаона брзина је у датом тренутку $\omega = 1/30 \pi n = 11 \text{ sec}^{-1} = \dot{\omega} t$, па је $\omega = 1/2 \text{ sec}^{-2}$.

Брзина је $v = 20 \dot{\omega} t = 20 \sqrt{\dot{\varphi}} = r$, па је ходограф брзине *сирала*.

Пошто је $\varphi = 1/2 \omega t^2 = 2\pi n_k$, то је $n_k = 143$ обртаја.

38. У тренутку искључења мотора ротор се обрћа угаоном брзином којој одговара 1200 o/min и учинио је још 80 обртаја, па стао. Колико је времена прошло од тренутка искључења мотора до заустављања ротора ако се претпостави да је његово обртање једнако успорено?

Решење. — Из (130) следи да је $t = \omega_0/\omega$, где је $\omega_0 = 40\pi$. Како је $\omega_0^2 = 2\omega\varphi = 2\omega \cdot 2\pi n_k = 320\omega\pi$, то је $\omega = 5\pi$, па је $t = 8 \text{ sec}$.



Слика 63. — Обртање замајца

8.2. Пројекције вектора брзине на осе непокретног триедра. — Усвојимо ли у тачки A Декартов координатни систем $Axuz$ десне диспозиције, онда

из Ојлерове једначине (129) можемо добити пројекције вектора брзине произвољне тачке C крутог тела, које се обрће око осе AB , на те координатне осе развијањем векторског производа:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (129')$$

у облику

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y; \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z; \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x, \quad (129'')$$

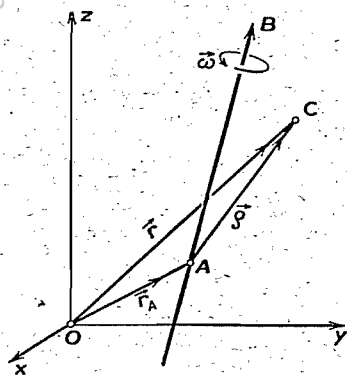
где су $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортови координатних оса, а x, y, z координате тачке C .

Ако се оса AB поклапа са осом Az , наведени изрази ће се упростити, јер вектор угаоне брзине пада у правац те осе, па су пројекције брзине

$$v_x = -\omega y; \quad v_y = \omega x; \quad v_z = 0. \quad (129''')$$

Све тачке осе AB непокретне су, те им је брзина $v=0$. Изједначујући са нулом изразе (129'''), добићемо једначину осе, у облику

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}, \quad (133)$$



Слика 64. — Оса AB не пролази кроз координатни почетак O

то јест праву која пролази кроз координатни почетак A . Она чини са координатним осама углове α, β, γ , између којих постоји позната релација

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Ако оса, око које се обрће круто тело, не пролази кроз координатни почетак, а тачку A нисмо узели за координатни почетак, онда је положај тачке C одређен вектором положаја \vec{r} у односу на координатни почетак O , а положај сталне тачке A на оси вектором положаја \vec{r}_A (сл. 64), па из троугла OAC следи

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_A,$$

те је брзина тачке C :

$$\vec{v} = [\omega, \vec{\rho}] = [\omega, \vec{r} - \vec{r}_A]. \quad (134)$$

Развијањем овог векторског производа, пројекције брзине \vec{v} на координатне осе биће:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y (z - z_A) - \omega_z (y - y_A); & v_y &= \omega_z (x - x_A) - \omega_x (z - z_A); \\ v_z &= \omega_x (y - y_A) - \omega_y (x - x_A). \end{aligned} \quad (134')$$

Једначина осе AB биће у овом случају

$$\frac{x-x_A}{\omega_x} = \frac{y-y_A}{\omega_y} = \frac{z-z_A}{\omega_z}, \quad (134'')$$

као једначина праве линије у простору која пролази кроз сталну тачку $A(x_A; y_A; z_A)$.

Квадрат брзине биће

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (135)$$

или, према Лагранжевом идентитету:

$$[\vec{\omega}, \vec{\rho}]^2 + (\vec{\omega}, \vec{\rho})^2 = \omega^2 \rho^2,$$

да је

$$v^2 = \omega^2 \rho^2 - (\vec{\omega}, \vec{\rho})^2. \quad (135')$$

Пример. — 39. Тело се обрће око непомичне осе угаоном брзином чије су пројекције на координатне осе правоуглог триедра $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7} \text{ sec}^{-1}$. Одредити брзину тачке C ако су њене координате, у односу на исти триедар, $\sqrt{12}, \sqrt{20}$ и $\sqrt{28} \text{ cm}$.

Решење. — Из Ојлерове једначине (129) следи:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ \sqrt{12} & \sqrt{20} & \sqrt{28} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \end{vmatrix} = 0,$$

јер су две врсте детерминанте једнаке нули. Тачка се налази на самој оси AB .

8.3. Пројекције вектора убрзања на осе непокретног триедра. — Усвојимо ли у сталној тачки A , кроз коју пролази оса AB око које се обрће круто тело, Декартов координатни систем $Axuz$, онда се убрзање произвољне тачке C крутог тела добија диференцирањем по времену Ојлерове једначине (129):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\rho}{dt} \right].$$

Извод $\frac{d\rho}{dt}$ је брзина тачке C , па се убрзање може написати и у овом облику:

$$\vec{a} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]. \quad (136)$$

Ако дупли векторски производ развијемо, биће

$$\vec{a} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{\rho}. \quad (136')$$

Развијемо ли овај векторски израз:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{i} [\omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)] + \vec{j} [\omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)] + \\ + \vec{k} [\omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})],$$

па изједначимо вредности уз одговарајуће ортове са леве и десне стране ове једнакости, добићемо изразе за пројекције убрзања на координатне осе Декартовог координатног система у тачки A :

$$\begin{aligned} a_x &= \omega_y z - \omega_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x; \\ a_y &= \omega_z x - \omega_x z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y; \\ a_z &= \omega_x y - \omega_y x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z. \end{aligned} \quad (136'')$$

Ако се оса AB поклапа са осом Az , претходни изрази се много упрошћавају, јер је $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$, те ће бити

$$a_x = -\omega y - \omega^2 x; \quad a_y = \omega x - \omega^2 y; \quad a_z = 0. \quad (136''')$$

Квадрат убрзања, за овај случај, биће

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = \omega^2 (x^2 + y^2) + \omega^4 (x^2 + y^2),$$

а како се тачка креће по кружној линији, полупречника R , то је $R^2 = x^2 + y^2$, па добијамо

$$a^2 = R^2 [\omega^2 + \omega^4].$$

У обрасцима (129'), (129''), (136'') и (136''') претпоставили смо да су угаона брзина и угаоно убрзање позитивни; у противном случају треба им променити предзнак.

Из израза (136) видимо да је убрзање произвољне тачке C крутог тела састављено из два компонентна убрзања:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}'' ,$$

где су

$$\vec{a}' = [\vec{\omega}, \vec{\rho}]; \quad \vec{a}'' = (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{\rho}.$$

Ако је угаона брзина константна, то јест ако је обртање равномерно (једнолико) онда је $\dot{\omega} = 0$, па је и убрзање $\vec{a}' = 0$. Убрзање \vec{a}' , дакле, долази услед *неравномерности обртања кружног тела око непомичне осе*. Да бисмо дознали улогу другог убрзања \vec{a}'' , представимо вектор угаоне брзине у облику производа $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$, где је \vec{u} орт осе AB , онда је

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \omega^2 \rho \cos(\omega, \rho) \vec{u} - \omega^2 \vec{\rho} = \\ &= \omega^2 [\rho \cos(\omega, \rho) \vec{u} - \vec{\rho}] = \\ &= \omega^2 [\rho \cos \theta \cdot \vec{u} - \vec{\rho}].\end{aligned}$$

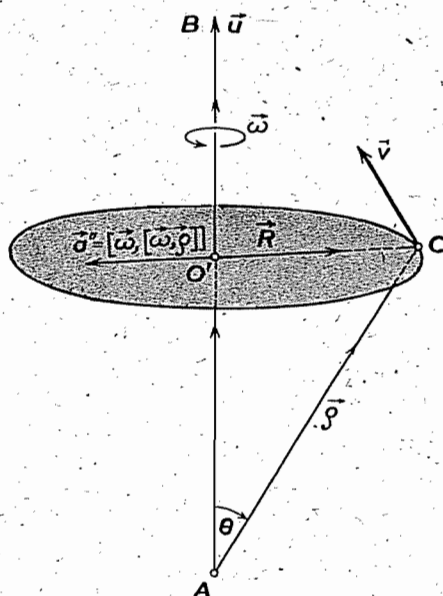
Из слике 65. следи

$$\vec{\rho} = \vec{AO}' + \vec{O}'C = (\rho \cos \theta) \vec{u} + \vec{R},$$

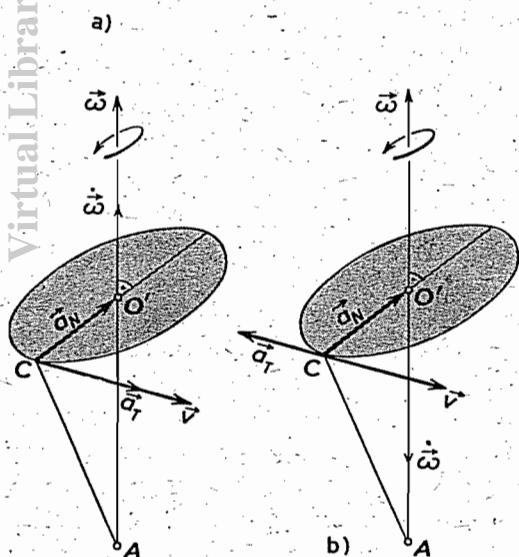
те је

$$\vec{a}'' = \omega^2 (\vec{AO}' - \vec{\rho}) = -\omega^2 \vec{O}'C = -\omega^2 \vec{R},$$

то јест убрзање \vec{a}'' сразмерно је по-
тугу $\vec{O}'C$, истог је правца, али има смер ка средишту O' кружне линије —
путање тачке C . Оно је, дакле, *нормално (центрипетално) убрзање*.



Слика 65. — Нормално (центрипетално) убрзање



Слика 66. — Једнако убрзано и једнако успорено обртање

Вектори $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}$ су колинеарни, $[\vec{\omega}, \vec{\omega}] = 0$, па су и вектори \vec{a}' и \vec{v} колинеарни:

$$\begin{aligned}[\vec{a}', \vec{v}] &= [[\vec{\omega}, \rho], [\vec{\omega}, \rho]] = \\ &= ([\vec{\omega}, \rho], \rho) \vec{\omega} - ([\vec{\omega}, \rho], \omega) \vec{\rho} = 0,\end{aligned}$$

те убрзање \vec{a}' представља *тангентцијално убрзање* тачке C .

Природне компоненте убрзања тачке C могу се изразити обрасцима

$$\vec{a}_T = [\vec{\omega}, \rho]; \quad \vec{a}_N = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \rho]], \quad (137)$$

или

$$a_T = R \omega; \quad a_N = R \omega^2. \quad (137')$$

При једнако убрзаном обртању вектори $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}$ су истог смера, па су и вектори \vec{a}_T и \vec{v} истог смера (сл. 66 а), док су при једнако успореном обртању супротни смера (сл. 66 б).

Вектор убрзања гради са брзином (тангентом) угао γ , а са потегом (R) угао β , па су

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_N}{a_T} = \frac{\omega^2}{\omega}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a_T}{a_N} = \frac{\omega}{\omega^2} = \operatorname{ctg} \gamma. \quad (137'')$$

Ако оса AB не пролази кроз координатни почетак, слично извођењу образаца (134'), можемо извести и обрасце за пројекције убрзања за координатни систем $Oxyz$. Међутим, пошто координатни систем можемо произвољно бирати, изабраћемо га тако да је координатни почетак у непомичној тачки A и да се оса AB поклопи са координатном осом Az .

Пример. — 40. Круто тело обрће се константном угаоном брзином ω око непомичне осе која пролази кроз координатни почетак и чини једнаке углове са координатним осама. Одредити квадрат брзине и квадрат убрзања произвољне тачке крутог тела. Како гласи једначина осе око које се обрће тело?

Решење. — Пошто оса чини исте углове са координатним осама, то је $3 \cos^2 \alpha = 1$, односно $\cos \alpha = 1/3 \sqrt{3}$, па су пројекције угаоне брзине $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega \cdot 1/3 \sqrt{3}$.

Из Ојлерових једначина (129'') добићемо пројекције брзине:

$$v_x = 1/3 \omega \sqrt{3} (z-y); \quad v_y = 1/3 \omega \sqrt{3} (x-z); \quad v_z = 1/3 \omega \sqrt{3} (y-x).$$

Квадрат брзине биће

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 2/3 \omega^2 [(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)].$$

Исти израз добићемо и помоћу Лагранжевог идентитета. Из образаца (136'') пројекције убрзања, биће

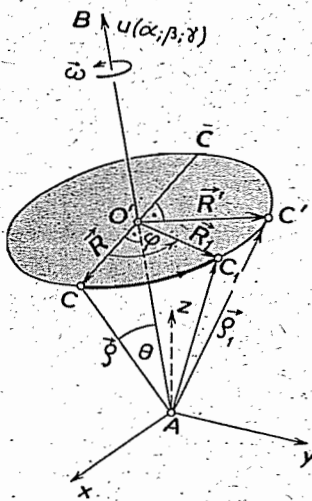
$$a_x = 1/3 \omega^2 (x+y+z) - \omega^2 x; \quad a_y = 1/3 \omega^2 (x+y+z) - \omega^2 y;$$

$$a_z = 1/3 \omega^2 (x+y+z) - \omega^2 z,$$

па је квадрат убрзања

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 2/3 \omega^4 [(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)].$$

Једначина осе је $x=y=z$.



Слика 67. — Извођење Ојлерових формула



8.4. Ојлерове формуле. — Када се круто тело обрне око осе AB у директном смеру за угао φ , тада тачка C пређе по кружној путањи (K) у положај C_1 (сл. 67). Познавајући положај тачке C , то јест њене координате x, y, z у односу на правоугли триедар $Axyz$, можемо одредити координате x_1, y_1, z_1 тачке C_1 у истом триедру као функције угла обртања φ при услову да се дужина потега не мења, $|\vec{\rho}| = |\vec{\rho}_1|$.

Ако је $\vec{AC} = \vec{\rho}$, $\vec{AC}_1 = \vec{\rho}_1$ и R полупречник кружне путање, онда из троуглова $\triangle ACO'$ и $\triangle AC_1O'$ добијамо

$$\vec{AO}' = (\vec{u}, \vec{\rho}) \vec{u}, \quad \vec{O}'C = \vec{R} = \vec{\rho} - (\vec{u}, \vec{\rho}) \vec{u}, \quad \vec{O}'C_1 = \vec{R}_1 = \vec{\rho}_1 - (\vec{u}, \vec{\rho}) \vec{u}.$$

Вектор $\vec{O}'C_1 = \vec{R}_1$ можемо разложити на две компоненте: једну у правцу вектора $\vec{O}'C$ и другу управно на тај правац, ($\vec{O}'C' = \vec{R}'$), па је

$$\vec{R}_1 = \vec{R} \cos \varphi + \vec{R}' \sin \varphi = \vec{R} \cos \varphi + [\vec{u}, \vec{\rho}] \sin \varphi,$$

те је вектор положаја \vec{AC}_1 одређен једначином

$$\vec{\rho}_1 = \vec{\rho} \cos \varphi + [\vec{u}, \vec{\rho}] \sin \varphi + (\vec{u}, \vec{\rho}) (1 - \cos \varphi) \vec{u}. \quad (138)$$

Ова једначина представља *Ојлерове формуле* у векторском облику. Ако је развијемо у скаларном облику, биће

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi + (\beta z - \gamma y) \sin \varphi + \alpha (\vec{u}, \vec{\rho}) (1 - \cos \varphi); \\ y_1 &= y \cos \varphi + (\gamma x - \alpha z) \sin \varphi + \beta (\vec{u}, \vec{\rho}) (1 - \cos \varphi); \\ z_1 &= z \cos \varphi + (\alpha y - \beta x) \sin \varphi + \gamma (\vec{u}, \vec{\rho}) (1 - \cos \varphi). \end{aligned} \quad (138')$$

где смо, краткоће ради, са α , β , γ обележили косинусе смера које орт \vec{u} чини са координатним осама триедра $Axyz$, те су

$$\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}, \quad (\vec{u}, \vec{\rho}) = x\alpha + y\beta + z\gamma.$$

На пример, ако су координате тачке $C(R; 0; h)$ и обртање је извршено за $\varphi = 1/2\pi$ око осе Az , координате тачке C_1 биће: $x_1 = 0$; $y_1 = R$; $z_1 = h$. У случају обртања за $\varphi = \pi$ биће $x_2 = -R$; $y_2 = 0$; $z_2 = h$.

Из обрасца (138) видимо да је ротација одређена *ортом осе обртања* \vec{u} и *углом обртања* φ . Вектор $\vec{\rho}$ обртањем у *директном смеру* за угао φ око осе, оријентисане ортом \vec{u} , прешао је у положај $\vec{\rho}_1$. Исто тако, вектор $\vec{\rho}_1$, обртањем у *индиректном смеру* око исте осе за угао $-\varphi$, прешао је у положај $\vec{\rho}$, па можемо лако одредити координате x , y , z ако познајемо координате x_1 , y_1 , z_1 . При томе се дужина вектора није мењала, у шта се лако уверавамо степеновањем једначине (138), те је

$$\rho_1^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + [\vec{u}, \vec{\rho}]^2 \sin^2 \varphi + (\vec{u}, \vec{\rho})^2 (1 - \cos \varphi)^2 + 2 (\vec{u}, \vec{\rho})^2 (1 - \cos \varphi) \cos \varphi = \rho^2.$$

Дакле, вршена је *само ротација вектора* $\vec{\rho}$ *без његове деформације*.

При ротацији вектора $\vec{\rho}$ у вектор $\vec{\rho}_1$ прешао је и вектор \vec{R} у положај \vec{R}_1 без *деформације*, али у *равни саме кружне путање*. Како је

$\vec{\rho}_1 = \vec{AO}' + \vec{R}_1$ и $\vec{\rho} = \vec{AO}' + \vec{R}$, уношењем у једначину (138), због тога што је вектор $\vec{AO}' = \vec{AO} \cdot \vec{u}$ колинеаран са ортом \vec{u} и управан на \vec{R} :

$$\begin{aligned} \vec{AO}' + \vec{R}_1 &= \vec{AO}' \cos \varphi + \vec{R} \cos \varphi + [\vec{u}, \vec{AO}' + \vec{R}] \sin \varphi + \\ &+ (\vec{u}, \vec{AO}' + \vec{R}) (1 - \cos \varphi) \vec{u} = \vec{AO}' \cos \varphi + \vec{R} \cos \varphi + [\vec{u}, \vec{R}] \sin \varphi + \\ &+ (\vec{u}, \vec{AO}') (1 - \cos \varphi) \vec{u}, \end{aligned}$$

добијамо Ојлерову формулу за ротацију вектора без деформације у равни:

$$\vec{R}_1 = \vec{R} \cos \varphi + [\vec{u}, \vec{R}] \sin \varphi \quad (139)$$

коју можемо и непосредно извести разлажући вектор \vec{R} на две управне компоненте у правцима $O'C$ и $O'C'$ (сл. 67).

Због $[\vec{u}, [\vec{u}, \vec{\rho}]] = (\vec{u}, \vec{\rho}) \vec{u} - \vec{\rho}$ израз (138) може се написати у облику

$$\vec{\rho}_1 = \vec{\rho} + [\vec{u}, \vec{\rho}] \sin \varphi + [\vec{u}, [\vec{u}, \vec{\rho}]] (1 - \cos \varphi).$$

Уведећи тригонометријске релације

$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}; \quad 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2};$$

$$\text{скалар } w_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \text{ и вектор } \vec{w} = \vec{u} \sin \frac{\varphi}{2},$$

образак (138) може се написати у облику

$$\vec{\rho}_1 = \vec{\rho} + 2 w_0 [\vec{w}, \vec{\rho}] + 2 [\vec{w}, [\vec{w}, \vec{\rho}]],$$

на је обртање вектора $\vec{\rho}$ одређено скаларом w_0 и вектором \vec{w} , то јест јединичним кватернионом*

$$\vec{Q}' = w_0 + \vec{w} = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{u} \sin \frac{\varphi}{2},$$

са нормом $N=1$. Дакле, сваком јединичном кватерниону одговара обртање око непомићне осе оријентисане ортом \vec{u} за извесни угао φ . Онда се Ојлеров образац може написати у облику

$$\vec{\rho}_1 = \vec{Q}' \vec{\rho} \cdot \vec{Q}' = (w_0 + \vec{w}) \cdot \vec{\rho} \cdot (w_0 - \vec{w}),$$

где је \vec{Q}' јединични кватернион конјугован првом ($\vec{Q}' = w_0 - \vec{w}$). Да овај израз заиста представља Ојлеров образац, уверићемо се ако извршимо назначена множења:

$$\begin{aligned} \vec{Q}' \vec{\rho} &= w_0 \vec{\rho} + \vec{w} \vec{\rho} = w_0 \vec{\rho} - (\vec{w}, \vec{\rho}) + [\vec{w}, \vec{\rho}], \\ \vec{Q}' \vec{\rho} \cdot \vec{Q}' &= w_0^2 \vec{\rho} - w_0 (\vec{w}, \vec{\rho}) + w_0 [\vec{w}, \vec{\rho}] - w_0 \vec{\rho} \vec{w} + (\vec{w}, \vec{\rho}) \vec{w} - [\vec{w}, \vec{\rho}] \vec{w}, \end{aligned}$$

јер су кватернионски производи

$$\begin{aligned} \vec{\rho} \vec{w} &= -(\vec{\rho}, \vec{w}) + [\vec{\rho}, \vec{w}], \\ [\vec{w}, \vec{\rho}] \vec{w} &= -([\vec{w}, \vec{\rho}], \vec{w}) + [[\vec{w}, \vec{\rho}], \vec{w}] = -[\vec{w}, [\vec{w}, \vec{\rho}]], \end{aligned}$$

*Статика — Векторска алгебра, чл. 18.

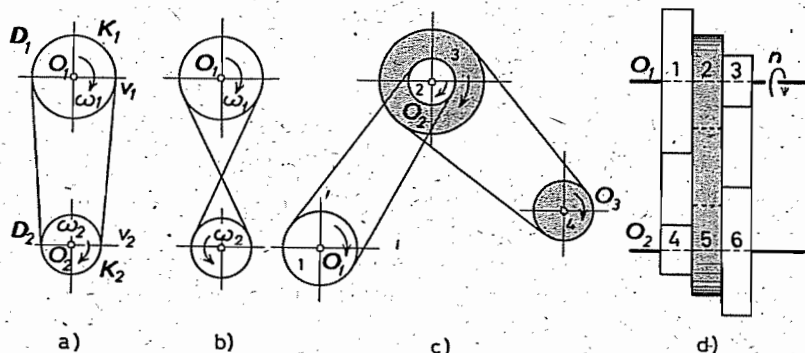
на је

$$\vec{\rho}_1 = \omega_0^2 \vec{\rho} + 2 \omega_0 [\vec{\omega}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \vec{\omega}.$$

Пошто је $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{\rho}$ и $\omega_0 + |\vec{\omega}|^2 = 1$, Ојлеров образац заиста је задовољен.

8.5. Трансмисиони уређаји. — Обртање тела око непомичне осе примењује се код трансмисионих уређаја помоћу којих се преноси снага са једног вратила на друго. Размотримо само две основне врсте ових уређаја: каишне и зупчасте преноснике.

8.5.1. Каишни преносници. — Каиш намакнут на два глатка котура — каишника — насађена на два паралелна вратила, O_1 и O_2 , чини трансмисиони каишни преносник (сл. 68а). Помоћу овог уређаја преноси се снага



Слика 68. — а) Прости каишни преносник, б) укрштени каиш, в) сложени преносник, д) мењач

са *погонској* (*водећеј*, O_1) вратила на *радно* (*вођено*) вратило (O_2). Преносење снаге омогућује сила трења клизања која се јавља између каиша („бескрајног каиша“) и каишника K_1 и K_2 . Ради извођења преносног односа претпоставићемо да је каиш „*круто тврдо*“ које стално додирује каишнике, те нема клизања, које се увек јавља при преносу. Због те претпоставке, обимне брзине каиша на местима додира са каишницима биће једнаке, $v_1 = v_2$. Ако се погонски каишник обрће угаоном брзином ω_1 (или минутним бројем обртаја n_1), радни каиш обрће се угаоном брзином ω_2 у истом смеру, па су обимне брзине $v_1 = v_2 = v = D_1 \omega_1 / 2 = D_2 \omega_2 / 2$, где су D_i пречници каишника. *Преносним односом* (i) назива се *количник угаоних брзина* (или бројева обртаја) *погонској* и *радној* каишника:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{R_2}{R_1}; \quad n_2 = \frac{n_1}{i}. \quad (140)$$

Овај образац показује да су угаоне брзине (или бројеви обртаја) обрнуто сразмерне пречницима каишника. Према томе, ако је $D_1 > D_2$, онда је

$i < 1$, па је $n_2 > n_1$; када је, пак, $D_1 < D_2$, тада је $i > 1$, па је $n_2 < n_1$. Дакле, када се пренос врши са веће (мањег) каишника на мањи (већи) каишник, тада се пренос убрзавање (успоравање) обрћања. Код отвореног каиша обрћања каишника су истосмерна (сл. 68а), али су код укрштеног каиша супротностерна (сл. 68б). Код мимоилазних (укрштених) вратила користи се полуукрштени каиш.

Сложени (вишеструки) каишни преносник (сл. 68с) користи се такође у пракси, мада ређе. На слици (68с) преносник је двоструки, јер се састоји из два проста преносника, преносних односа $i_{12} = \omega_1/\omega_2$, $i_{34} = \omega_3/\omega_4$. Како је $\omega_2 = \omega_3$, јер су оба каишника на истом вратилу (O_2), укупни преносни однос биће

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_3}{\omega_4} = i_{12} \cdot i_{34} = \frac{D_2 D_4}{D_1 D_3}. \quad (141)$$

Он је, дакле, једнак производу преносних односа простих преносника.

Каишни преносник се користи и као мењач (варијатор) брзине, на пример код струга (сл. 68д). Да би се користио исти каиш, пречници каишника расту (опадају) у аритметичкој прогресији, те бројеви обрћања расту (опадају) у геометријској прогресији.

На пример, када су пречници каишника $D_1 = 30, 20$ и 10 cm, они опадају у прогресији разлике $d = 10$ cm, док су преносни односи $i_{14} = 10/30$; $i_{25} = 20/20$; $i_{36} = 30/10$, па бројеви обрћања опадају у геометријској прогресији коефицијента $q = 3$, те су, за $n_1 = 60$ o/min, $n_4 = 180$ o/min, $n_5 = 60$ o/min и $n_6 = 20$ o/min.

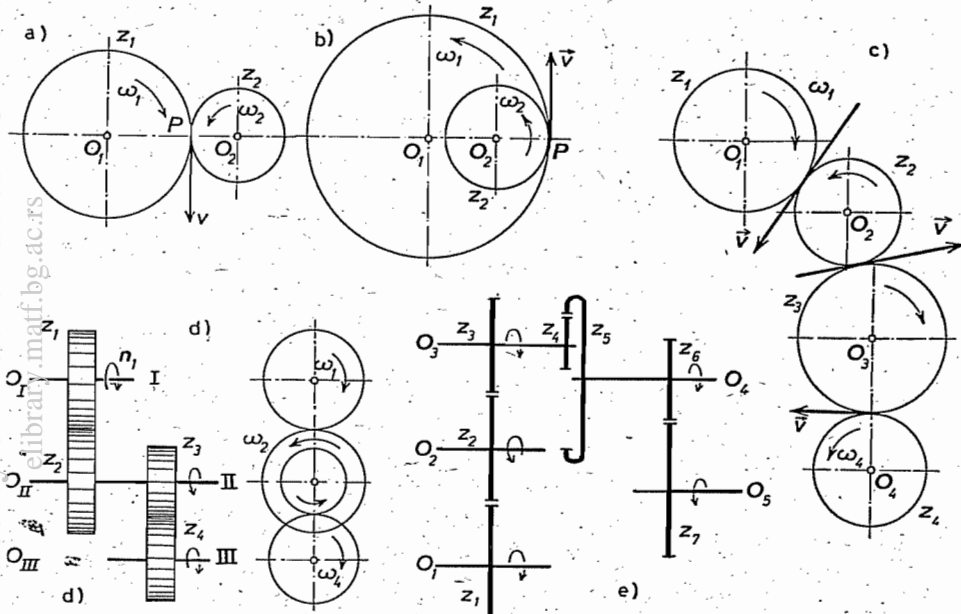
8.5.2 Зувчашти преносници. — Два захваћена (сиреинућа) зувчаника чине једноструки (прости) зувчашти преносник. Спрега тих зувчаника може бити спољашња (сл. 69а) или унутрашња (сл. 69б). Да би се зувчаници могли спрезати, мора постојати неки однос између броја њихових зубаца. Ако је D пречник круга зувчаника по коме се врши подела на зупце (додирни или идеони круг), онда је $O = D\pi = ez$, где је z број зубаца, а e корак зупца. Пошто z мора бити цео број, то је $D = ez/\pi = mz$, где је $m = e/\pi$ модул зувчаника, који се мери дужинским јединицама. Два зувчаника могу се само тада спрезати ако су им исти кораци, односно модули. Додирна тачка (P) оба спрегнута зувчаника има исту обимну брзину, иако се зувчаници обрћу различитим угаоним брзинама, па је $v_1 = v_2 = D_1 \omega_1/2 = D_2 \omega_2/2$. Код спољашњеј захватања угаоне брзине су супротностерне, а код унутрашњеј захватања су истосмерне. Преносни однос дефинише се на исти начин као и код каишног преносника, па је

$$i = \mp \frac{\omega_1}{\omega_2} = \mp \frac{n_1}{n_2} = \mp \frac{D_2}{D_1} = \mp \frac{D_2/m}{D_1/m} = \mp \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{k}; \quad n_2 = k n_1, \quad (142)$$

где се знак — односи на спољашње, а знак \mp на унутрашње сирезање. Дакле, преносни однос је количник броја зубаца радној (вођеној) и вођеној (водећој) зувчаника. Реципрочна вредност преносног односа ја редук-

циони фактор. Он показује колико је пута редукована угаона брзина или број обртаја погонског зупчаника, јер је при $k \geq 1$ и $n_2 \geq n_1$.

Када су вратила доста међусобно удаљена, користи се *вишеструки преносник*. Он може бити са *редном*, *паралелном* и *мешовитом* сирејом.



Слика 69. — а) Спољашња спрега, б) унутрашња спрега, в) редна спрега, д) паралелна спрега, е) мешовита спрега

Код *редне сиреје* сваки се зупчаник налази на свом вратилу и сва су вратила паралелна (сл. 69с). Први зупчаник је погонски, а последњи је радни, остали су *међузупчаници*. За случај на слици 69с преносни односи су $i_{12} = -z_2/z_1$; $i_{23} = -z_3/z_2$; $i_{34} = -z_4/z_3$, па је укупни преносни однос

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = -\frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2 z_3} = -\frac{z_4}{z_1}$$

Он је једнак *производу* *просјих* *преносних* односа. Из претходног резултата видимо да *међузупчаници* не утичу на величину *преносног односа*, већ од њих зависи само смер обртања радног зупчаника. Означимо са n укупан број зупчаника ове спреге, онда је преносни однос дат *Вилисовом* (Willis) *формулом**

$$i = (-1)^{n-1} \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^{n-1} \frac{n_1}{n_n} = (-1)^{n-1} \frac{z_n}{z_1} \quad (143)$$

*R. Willis: Principles of mechanisms, London, 1841.

На пример, за $n=2$ биће $i = -z_2/z_1$; за $n=3$ је $i = z_3/z_1$, док је за $n=4$ опет негативан, $i = -z_4/z_1$.

Код *паралелне сиреје* смањује се број вратила, јер су свака два међузупчаника на једном вратилу. За разлику од претходне спреге, они утичу и на величину и на предзнак преносног односа. За случај приказан на слици 69d биће преносни односи $i_{12} = -\omega_1/\omega_2 = -z_2/z_1$ и $i_{34} = -\omega_3/\omega_4 = -z_4/z_3$. Због $\omega_2 = \omega_3$, јер су оба међузупчаника на истом вратилу O_2 , укупни преносни однос је

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = i_{12} \cdot i_{34} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot -\frac{z_4}{z_3} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

Означимо са ν број паралелних вратила спреге, са p број парова зупчаника — простих преносника — онда је преносни однос ове спреге дат *Вилизовом формулом*:

$$i = (-1)^{\nu-1} \frac{\omega_I}{\omega_V} = (-1)^{\nu-1} \frac{n_I}{n_V} = (-1)^p \frac{n_1}{n_{2p}} = (-1)^p \frac{z_2 z_4 \cdots z_{2p}}{z_1 z_3 \cdots z_{2p-1}} \quad (144)$$

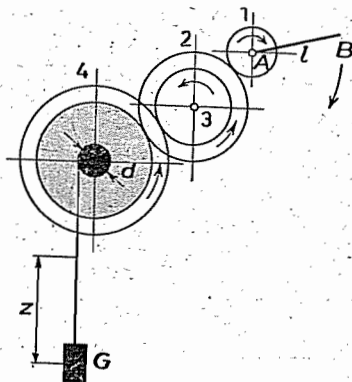
За $\nu=3$, $p=2$, $n=4$ биће $i = +z_2 z_4/z_1 z_3$; за $\nu=4$, $p=3$, $n=6$ биће $i = -z_2 z_4 z_6/z_1 z_3 z_5$. На пример, за $z_i = 18, 40, 15, 36, 16$ и 48 биће $i = -40 \cdot 36 \cdot 48 / 18 \cdot 15 \cdot 16 = -80/5 = -16$, па је $n_6 = n_I \nu = -n/16$. За $n_1 = 1200$ o/min биће $n_6 = -75$ o/min.

Код *мешовите сиреје* мора се водити рачуна о међузупчаницима, јер могу да утичу и на величину и на предзнак преносног односа. Најбоље је појединачно израчунати преносни однос за сваки прости преносник, па је укупни преносни однос једнак *производу* простих преносних односа. За случај представљен на слици 69e међузупчаник (2) је паразитски и не утиче на преносни однос; зупчаници (4) и (5) су унутрашње спрегнути, па је укупни преносни однос

$$i = \prod i_{jk} = i_{13} \cdot i_{45} \cdot i_{67} = \frac{z_3}{z_1} \cdot \frac{z_5}{z_4} \cdot -\frac{z_7}{z_6} = -\frac{z_3 z_5 z_7}{z_1 z_4 z_6}$$

На пример, за бројеве зубаца $z_i = 20, 30, 40, 24, 60, 20$ и 48 биће, према претходном,

$$i = -40 \cdot 60 \cdot 48 / 20 \cdot 24 \cdot 20 = -12.$$



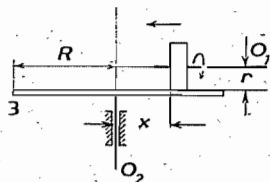
Слика 70. — Дизалични уређај

Примери. — 41. Услед неисправности кочног уређаја дизалице почиње терет G да пада, према закону кретања $z = 10 t^2$, где је z мерено у см, а t у секундама (сл. 70). Одредити брзину и убрзање краја B ручице AB , дужине $l = 30$ см, после 2 сес од тренутка падања, ако су бројеви зубаца зупчаника $z_i = 20, 40, 15$ и 60 и пречник бубња $d = 16$ см.

Решење. — Пошто су $\dot{z} = 20 t$, $\ddot{z} = 20$, и преносни однос $i = 40 \cdot 60 / 20 \cdot 15 = \omega_1 / \omega_4 = 8$, то су $\dot{z} = 40 = d\omega_4 / 2 = 8\omega_4$, $\omega_4 = 5 \text{ sec}^{-1}$; $\omega_1 = 40 \text{ sec}^{-1}$. Због $\dot{z} = a_T = d\omega_4 / 2 = 20$ биће $\omega_4 = 5/2 \text{ sec}^{-2}$, па је $\omega_1 = 20 \text{ sec}^{-2}$, те су $v_B = l\omega_1 = 12 \text{ m/sec}$, $a_{BT} = l\omega_1 = 6 \text{ m/sec}^2$, $a_{BN} = l\omega_1^2 = 480 \text{ m/sec}^2$.

42. Погонско вратило фриксионог трансмисионог уређаја чини 300 о/min и креће се праволинијски, по закону $x = 20 - 2t$. Одредити брзину и убрзање тачке B фриксионог тачка у функцији од x , специјално када је $x = r$ (сл. 71), $r = R/2 = 10 \text{ cm}$.

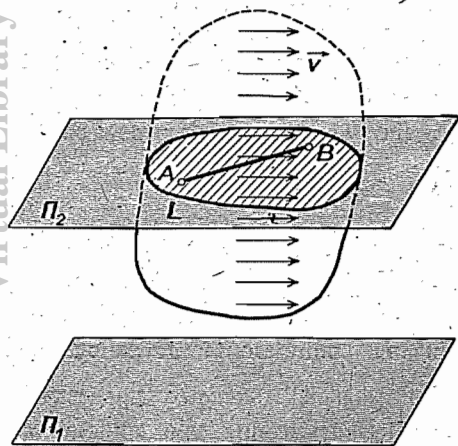
Решење. — Овде је $x = -2$, а због услова $r\omega_1 = x\omega_2$, $\omega_1 = 10\pi$, биће $x\omega_2 + x\omega_2 = 0$, или $\omega_2 = 2\omega_2/x = 2r\omega_1/x^2 = 20\pi r/x^2$, па су $v_B = R\omega_2 = Rr\omega_1/x$; $a_{BT} = 2Rr\omega_1/x^2$; $a_{BN} = Rr^2\omega_1^2/x^2$. За $x = r$ биће $v_B = R\omega_1$; $a_{BT} = 2R\omega_1/r$; $a_{BN} = R\omega_1^2$.



Слика 71. — Фриксиони преносник

9. РАВНО КРЕТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА

9.1. Комплано кретање плоче. — Када су при кретању крутог тела брзине свих његових тачака паралелне једној сталној равни (Π_1), кретање се назива *равно*. Тада се све тачке тела крећу паралелно тој равни. Ако круто тело, које се креће паралелно равни (Π_1), пресечемо равни (Π_2), паралелно првобитној равни, онда је тај пресек омеђен контуром (L). При равном кретању крутог тела његов пресек — *равна фигура*, омеђена контуром (сл. 72), креће се у равни (Π_2). Ово кретање равне фигуре (плоче)



Слика 72. — Равно кретање

у својој равни назива се *комплано кретање*. Према томе, проблем проучавања равном кретања тела можемо свести на *проучавање компланог кретања ма које његовој пресека паралелној сталној равни (Π_1)*. Положај равне фигуре у равни (Π_2) можемо одредити помоћу две произвољне тачке (A и B). Да бисмо познавали кретање равне фигуре у њеној равни, довољно је да познајемо кретање ових њених произвољних тачака. Тачке A и B образују праву линију (штап), па се *проблем равнот кретања крутог тела своди на проучавање компланог кретања штапа*.

Положај плоче одређен је тачкама A и B , па је њен положај у тој равни одређен са четири податка (четири координате тачака A и B). Због крутости плоче постоји једна веза, наиме да је растојање тих тачака стално, $AB = l$, те је за одређивање положаја плоче у њеној равни потребно

свега *шири погашка*, што значи да *комплано крећање плоче има ширину ситијену слободу крећања*.

Положај крутог тела у простору одредили смо помоћу његовог основног троугла, са три тачке, које не леже на једној правој, односно због крутости, са шест података. Међутим, при равном кретању постоје још три везе, најме ортогоналне компоненте брзина тачака A, B, C на сталну раван једнаке су нули, те је оно одређено са *шири погашка*, што значи да *равно крећање крутог тела има ширину ситијену слободу крећања*.

9.2. Коначна промена положаја. — Сваки штап (или плоча) може се из једног произвољног положаја превести у други коначно удаљени положај у тој равни на три начина:

1° *Једном трансляцијом и једним обрћањем (ротацијом).* — Ако штап AB (сл. 73а) транслаторно померимо у положај $A'B'$, а затим га обрнемо око једне његове произвољне тачке C_1 , за изврстан угао $d\varphi$, превешћемо га у положај A_1B_1 . Пошто смо тачку C_1 узели потпуно произвољно, то се ово померање може извести на бесконачно много начина. Тачка C прешла је у положај C_1 трансляцијом, брзином $v_C = ds/dt$. Брзина произвољне тачке D састоји се из брзине трансляције и брзине услед обртања око тачке C_1 , те се може написати у облику

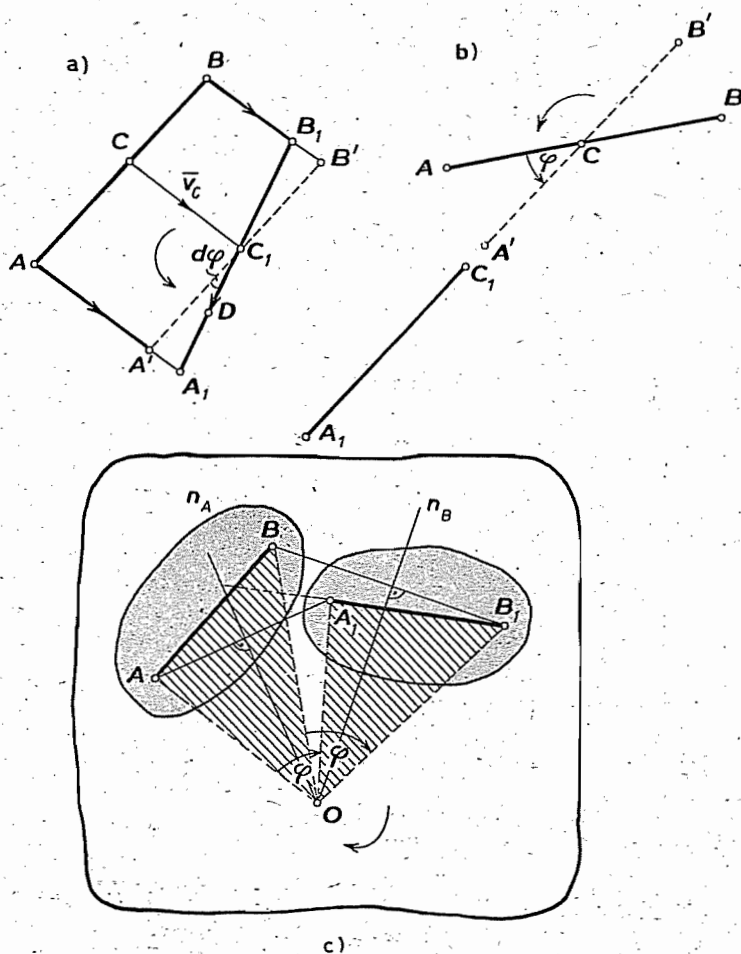
$$\vec{v}_D = \vec{v}_{C_1} + [\omega, \vec{C_1 D}] = \vec{v}_{C_1} + \vec{v}_D^{(C_1)},$$

где је $\omega = \dot{\varphi}$ угаона брзина, а $\vec{C_1 D}$ вектор положаја тачке D у односу на тачку C_1 . Брзина сваке тачке (D) штапа састоји се, дакле, из двеју компонента: *брзине трансляције и релативне брзине те тачке у односу на обртину тачку*. Све тачке штапа имају исту транслаторну брзину, а релативне брзине су управне на правац штапа, јер су обимне брзине кружних путања са средиштем у C_1 .

2° *Једним обрћањем и једним клизањем.* — Штап AB можемо превести у положај A_1B_1 ако га прво обрнемо око одређене тачке C у положај $A'B'$, а затим га клизањем преместимо у положај A_1B_1 (сл. 73б). Ово је обратни случај претходног, пошто је клизање специјални вид трансляције.

3° *Једним обрћањем.* — Штап из положаја AB можемо превести у положај A_1B_1 обрћањем око једне тачке у тој равни или пак око осе управне на ту раван. Нека је штап обрћањем прешао из положаја AB у положај A_1B_1 (сл. 73с). Спојимо тачке A и A_1 , односно B и B_1 , правима и повуцимо њихове симетрале n_A и n_B , оне ће се сести у тачки O . Из особине симетрала следи да је $OA = OA_1$ и $OB = OB_1$, а због услова крутости је $AB = A_1B_1$, што значи да су троуглови $\triangle AOB$ и $\triangle A_1OB_1$ *поугарни*. Дакле, обрћањем троугла $\triangle AOB$ око тачке O за угао φ прећи

ће штап из првог (AB) у други положај (A_1B_1). Пошто су се две стране троугла обрнуле за угао φ , мора се и трећа страна обрнути за исти угао,



Слика 73. — а) Транслација и обртање, б) обртање и клизање, в) обртање око обртног пола

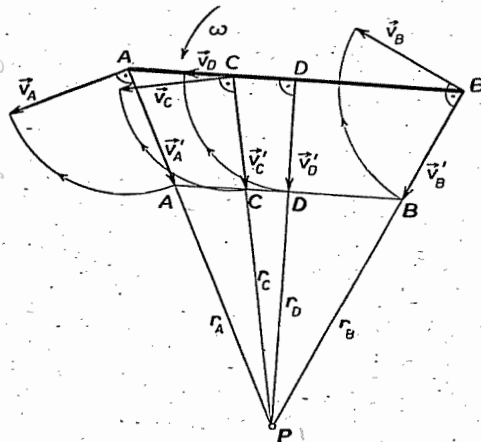
те правци AB и A_1B_1 међусобно чине такође угао φ . Обртна тачка O зове се *обртни пол*. На основу изнетог можемо исказати Шалову* (*Michel Chasles*, 1793—1880) теорему:

Свака равна фигура може се из једног положаја превести у други комплани положај обртањем око одређене тачке (пола) за угао који произвољна права фигури чини у оба положаја.

Ако су оба положаја штапа паралелна, обртни је угао $\varphi=0$, па се обртни пол налази у бесконачности, а то је случај *транслације*.

* M. Chasles: Mémoire de géométrie sur la construction des normales, 1829. године.

9.3. Одређивање брзина тачака покретне плоче. — Равно кретање крутог тела састоји се, као што смо видели, из истовремене translације и обртања око једне тачке плоче, која, сматрамо, у томе тренутку *мирује*. Према томе и свака тачка плоче има две компонентне брзине: брзину translације, која је иста за све тачке плоче, и обимну брзину у односу на ону изабрану тачку плоче, која, сматрамо, у том тренутку *мирује*. Међутим, према Шаловој теорему, равно кретање се може извести само једним обртањем око обртног пола, који, сматрамо, у томе тренутку такође, *мирује*. Кретање је непрекидно, па су тренутна померања \widehat{AA}_1 и \widehat{BB}_1



Слика 74. — Тренутни пол обртања

бескрајно мала, те их можемо сматрати кружним луцима описаним из обртног пола, који се сада назива *тренутни (моментни) пол (P)*.^{*} Брзине тачака *A* и *B* падају у правце тангенти на те кружне лукове и износе

$$v_A = r_A \omega, \quad v_B = r_B \omega,$$

где је ω угаона брзина обртања плоче.

Ако знамо брзине тачака *A* и *B*, онда можемо лако одредити положај тренутног пола. Он се налази у пресеку управних повучених у тачкама *A* и *B* на њихове

брзине (сл. 74). Брзину произвољне тачке *C* штапа *AB* такође лако одређујемо, јер је она управна на потег *PC*, те као обимна брзина износи $v_C = r_C \omega$. Положај тренутног пола можемо одредити и онда када познајемо само брзину једне тачке штапа, на пример *A*, и угаону брзину обртања штапа ω , јер је $v_A = r_A \omega$, па је $r_A = v_A / \omega = PA$.

Када се познаје брзина једне тачке штапа и угаона брзина обртања, тада се брзине појединих тачака штапа (плоче) могу одредити *графички* и *аналитички*.

9.3.1. Графичко одређивање брзине. — Брзине појединих тачака штапа можемо графички одредити на два начина:

- а) помоћу окренутих брзина, и
- б) помоћу њлана брзина.

а) *Метода окренутих (уравних) брзина.* — Ако векторе брзина тачака *A* и *B* заокренемо за 90° у смеру угаоне брзине ω , они ће пасти у

^{*} *Joh. Bernoulli*, 1742. године.

правце потега r_A и r_B , са смером ка тренутном полу. Интензитети ових брзина остали су непромењени:

$$v'_A = v_A = r_A \omega; \quad v'_B = v_B = r_B \omega; \quad |\vec{v}'_A| = |\vec{v}_A|; \quad |\vec{v}'_B| = |\vec{v}_B|.$$

Ове брзине називају се *окренуће* или *ујравне брзине* и имају велику улогу у кинематици механизма.

Две важне особине окренутих брзина јесу:

1° Све окренуће брзине секу се у тренутном полу,

2° Крајеви брзина свих тачака једног штапа (праве) леже на правој паралелној штапу.

Прва особина је очигледна, јер окренуте брзине падају у правце потега који се секу у полу. Да докажемо другу особину, спојимо крајеве окренутих брзина A' и B' правом, онда из слике 74. следи

$$\overline{PA'} = \overline{PA} - \overline{AA'} = r_A(1 - \omega), \quad \overline{PB'} = \overline{PB} - \overline{BB'} = r_B(1 - \omega);$$

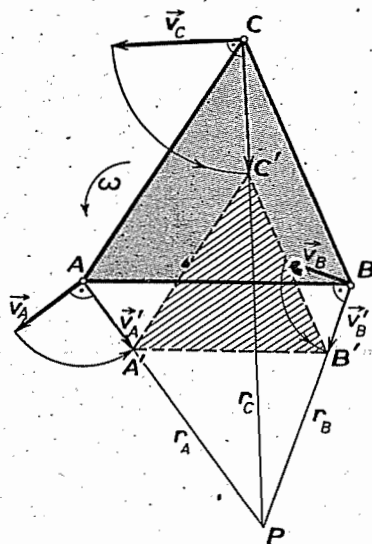
$$\overline{AA'} = v'_A, \quad \overline{BB'} = v'_B$$

односно

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB'}} = \frac{v_A}{v_B} = \frac{v'_A}{v'_B},$$

што показује да су троуглови $\triangle PAB$ и $\triangle PA'B'$ слични, те су им и треће странице AB и $A'B'$ паралелне. Крајеви окренутих брзина свих тачака штапа AB леже, дакле, на правој $A'B'$ паралелној штапу. Брзину неке тачке C можемо лако одредити, треба само повући њен потег r_C , па је \vec{CC}' њена окренута брзина. Права брзина \vec{v}_C је управна на ову и заокренута за угао 90° у супротном смеру од смера угаоне брзине ω . Најмању брзину имаће она тачка штапа чији је положај ујаван на штапу, на пример тачка D . Та брзина је у ствари брзина клизања.

Сва ова излагања која су вредела за штап вредеће и за плочу $\triangle ABC$ (сл. 75). Окренуте брзине тачака A, B, C секу се у полу P . Окренуте брзине свих тачака штапа AB леже на правој $A'B'$, која је паралелна штапу AB , а исто тако ће и крајеви окренутих брзина свих тачака штапова BC и CA лежати на правима $B'C'$ односно $C'A'$. Због паралелности ових страна $A'B' \parallel AB$; $B'C' \parallel BC$; $C'A' \parallel CA$ троугао



Слика 75. — Сличност фигура ABC и $A'B'C'$

$\Delta A'B'C'$ сличан је основном троуглу ΔABC ($\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$). На тај начин можемо изразити и трећу особину управних брзина, наиме:

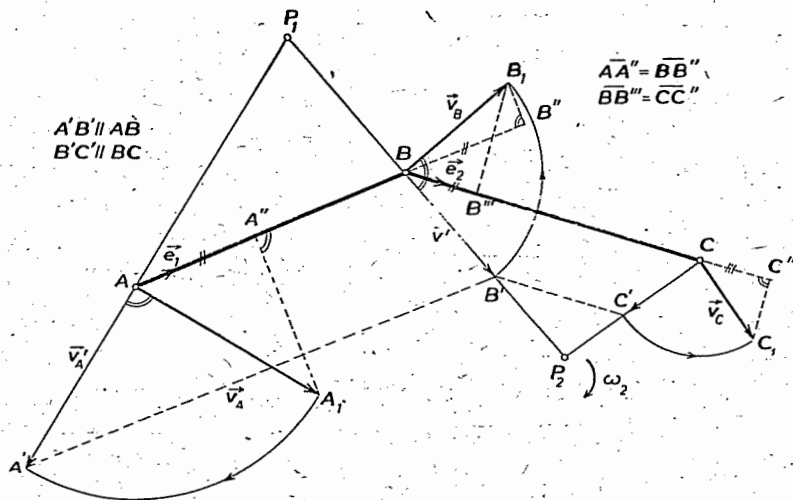
3^e Крајеви окренутих брзина равне фигури леже на сличној фигури. Тренутни пол је центар сличности (ирициј сличности).

Брзине тачака A, B, C нису произвољне, јер је плоча крута, па брзине клизања штапова морају бити једнаке, те морају бити задовољени услови:

$$(\vec{v}_A, \vec{AB}) = (\vec{v}_B, \vec{AB}); \quad (\vec{v}_B, \vec{BC}) = (\vec{v}_C, \vec{BC}); \quad (\vec{v}_A, \vec{AC}) = (\vec{v}_C, \vec{AC});$$

$$(\vec{v}_A, \vec{e}_1) = (\vec{v}_B, \vec{e}_1); \quad (\vec{v}_B, \vec{e}_2) = (\vec{v}_C, \vec{e}_2); \quad (\vec{v}_A, \vec{e}_3) = (\vec{v}_C, \vec{e}_3); \quad \vec{e}_i = \vec{l}_i / l_i; \quad |\vec{e}_i| = 1.$$

Два штапа (или плоче), AB и BC (сл. 76), везана зглобно (у B) могу се обртати око тог зглоба, који има улогу релативног тренутног пола. У пресеку окренутих брзина \vec{v}_A' и \vec{v}_B' лежи пол P_1 штапа AB , а у пресеку окренутих брзина \vec{v}_B' и \vec{v}_C' лежи пол P_2 штапа BC , па како \vec{v}_B' мора бити колинеарно и са P_1B и P_2B , а пролази кроз тачку B , то сва три пола леже на једној правој.



Слика 76. — Релативни пол (B) и полови (P_1) и (P_2) леже на једној правој (P_1BP_2)

Ово је израз Аронхолд-Кенедијеве (Aronhold-Kennedy) теореме*:

Код зилавкасто везаних плоча тренутни болови и релативни пол леже на једној правој линији.

Ово нам показује да брзине тачака A, B, C нису произвољне. Због претпоставке о крутости штапова морају брзине клизања штапова бити једнаке, то јест морају бити задовољени услови:

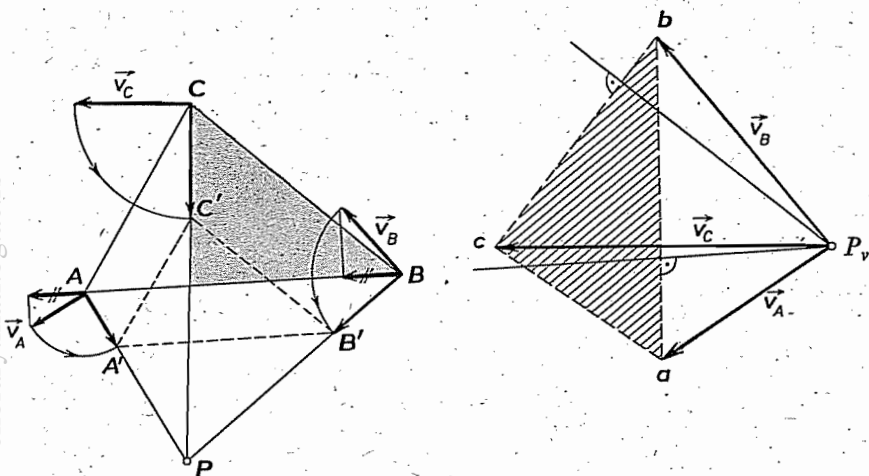
$$(\vec{v}_A, \vec{AB}) = (\vec{v}_B, \vec{AB}); \quad (\vec{v}_B, \vec{BC}) = (\vec{v}_C, \vec{BC})$$

или

$$(\vec{v}_A, \vec{e}_1) = (\vec{v}_B, \vec{e}_1); \quad (\vec{v}_B, \vec{e}_2) = (\vec{v}_C, \vec{e}_2).$$

* S. Aronhold: Grundzüge der kinematischen Geometrie. 1872, год.

б) Метода њлана (основе) брзина. — Нека су познате брзине тачака A, B, C плоче (сл. 77 а) за тренутни пол (P). Ако из једне сталне тачке (P_v), у извесној размери u , ($\text{m sec}^{-1}/\text{cm}$), пренесемо брзине ових тачака и њихове крајеве спојимо, добићемо фигуру — троугао $\triangle abc$ —



Слика 77. — План брзина

сличну основној фигури ABC . Ова фигура ($\triangle abc$) зове се *њлан (основа) брзина њлоче* ($\triangle ABC$). Између плана брзина и основне фигуре постоји однос. Пошто је основна фигура *крућа*, дужине штапова остаће непромењене, па пројекције брзина тачака на правац штапа морају бити исте (брзине клизања):

$$v_A \cos(\vec{v}_A, \vec{AB}) = v_B \cos(\vec{v}_B, \vec{AB}),$$

те због тога морају *сиране њлана брзина бити ујравне на одговарајуће шћапове* ($\vec{ab} \perp \vec{AB}$; $\vec{bc} \perp \vec{BC}$; $\vec{ac} \perp \vec{AC}$). Брзине тачака плоче сразмерне су потезима (одстојањима од тренутног пола), па су ова два троугла слична, $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Ово је израз прве *Мемкеове (Mehmkе) теореме**, која гласи:

План брзина њтачак неке њлоче сличан је фигури њих њтачак и заокренућ је за 90° према њлочи у смеру њне ујаоне брзине:

Из плана брзина следи, на пример, за тачку B :

$$\vec{P_v b} = \vec{P_v a} + \vec{ab}, \quad \text{или} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + u \cdot \vec{ab} = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{(A)},$$

где су \vec{v}_A и \vec{v}_B брзине тачака A и B , а $\vec{v}_B^{(A)}$ *релативна брзина тачке B према тачки A* , па се наведени израз може написати у облику

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{(A)} = \vec{v}_A + [\omega, \vec{AB}]. \quad (145)$$

* R. Mehmke: Über die Geschwindigkeiten bel. Ordnung eines in seiner Ebene bew. Systems. 1833. године

Овај векторски израз показује да је брзина неке тачке (B) илоче једнака векторском збиру брзине неке друге тачке (A) илоче и релативне брзине прве према овој другој тачки. Релативна брзина је у ствари обимна брзина тачке B у односу на тачку A , која, сматрамо, у том тренутку мирује, а да се тачка B обрће око ње по кружној линији, полупречника $AB=l$, угадном брзином ω , којом се штап обрће око тренутног пола (P). Због тога је она и управна на штапу (AB), па и вектор \vec{ab} мора бити управан на \vec{AB} .

Из плана брзина (сл. 77 b) следи за тачку A да је

$$\vec{P}_v a = \vec{P}_v b + \vec{ba}, \text{ то јест } \vec{v}_A = \vec{v}_B + u_v \cdot \vec{ba} = \vec{v}_B + \vec{v}_A^{(B)} = \vec{v}_B + [\vec{\omega}, \vec{BA}],$$

да је

$$\vec{v}_B^{(A)} = [\vec{\omega}, \vec{AB}] = -\vec{v}_A^{(B)} = -[\vec{\omega}, \vec{BA}],$$

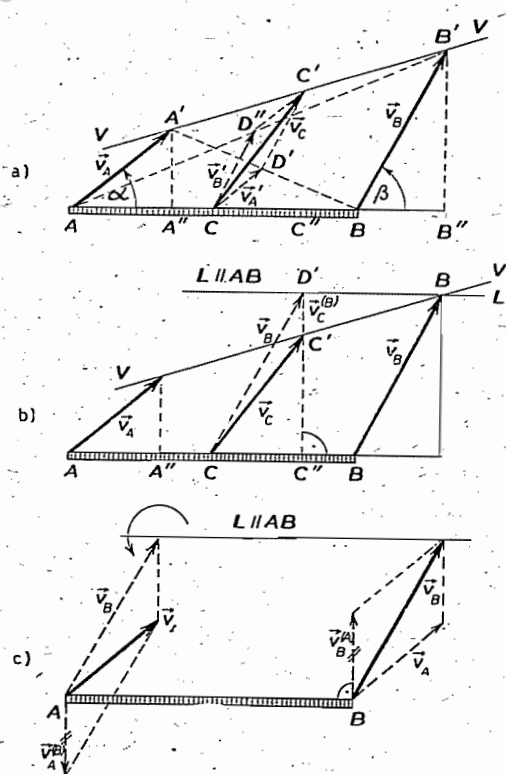
те долазимо до овог закључка:

Релативне брзине двеју тачака штапа једнаке су по величини, паралелне су и управне на штапу, али су супротнио смера.

Дакле, релативна брзина тачке A у односу на тачку B једнака је по величини релативној брзини тачке B у односу на тачку A , паралелна јој је, али је супротног смера:

$$\vec{v}_B^{(A)} = -\vec{v}_A^{(B)}; \quad |-\vec{v}_A^{(B)}| = |\vec{v}_B^{(A)}| = |\vec{v}_B^{(A)}| = |\vec{AB}| \cdot \omega. \quad (145')$$

Када познајемо брзине двеју тачака штапа AB , на пример тачака A и B , тада можемо графички одредити и брзине свих осталих тачака штапа помоћу *велocities*. Пренесимо у извесној размери, u_v , брзине тачака A и B штапа, тако да су $\vec{v}_A = u_v \vec{AA}'$, $\vec{v}_B = u_v \vec{BB}'$ (сл. 78 a), тада је права $A'B'$ *велocитa* ($V-V$). Спојимо тачку A' са B , а тачку B' са A и из тачке C штапа повуцимо праве паралелне брзинама v_A и v_B , оне онда секу праве $A'B$ и $B'A$ у тачкама D' и D'' .



Слика 78. — Одређивање брзине тачке штапа помоћу *велocитe*

Дијагонала паралелограма $CD'C'D''$, коме су стране дужи $\overline{CD'}$ и $\overline{CD''}$, представља по правцу, смеру и величини, у истој размери цртања, брзину тачке C .

Да вектор $\overrightarrow{CC'}$ заиста представља брзину тачке C , доказаћемо на овај начин. Из сличности троуглова $\triangle BCD' \sim \triangle ABA'$, $\triangle ACD'' \sim \triangle ABB'$ следе ови односи:

$$\overline{CD'} : \overline{AA'} = \overline{CB} : \overline{AB}, \quad \overline{CD''} : \overline{BB'} = \overline{AC} : \overline{AB}.$$

По закону крутости морају брзине клизања свих тачака штапа бити једнаке, то јест $\overline{AA''} = \overline{BB''} = \overline{CC''}$, а по закону пројекција добијамо:

$$\overline{CC''} = \overline{CD'} \cos \alpha + \overline{D'C'} \cos \beta = \overline{AA'} \cos \alpha = \overline{AA''},$$

чиме је претходна конструкција, доказана.

Одређивање брзине тачке C можемо извести и на овај начин. Из тачке B' повуцимо праву L паралелно штапу (сл. 78b), па из тачке C повуцимо праву паралелну брзини тачке B , она сече ту праву у тачки D' .

Из D' повуцимо управну на AB , она сече велоциду у тачки C' . Вектор $\overrightarrow{CC'}$ представља брзину тачке C , што лако доказујемо на основу закона крутости.

Применимо ли претходну конструкцију за тачке A и B (сл. 78c), долазимо до закључка да су релативне брзине тачака штапа једнаких величина, паралелне, а супротног смера.

Да крај C' вектора брзине \vec{v}_C лежи на велоциди, можемо доказати математички на овај начин. Из (144), с обзиром на (145), следи:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{(A)}; \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_C^{(A)}, \quad \text{где су } \vec{v}_B^{(A)} = l\omega \vec{T}; \quad \vec{v}_C^{(A)} = c\omega \vec{T};$$

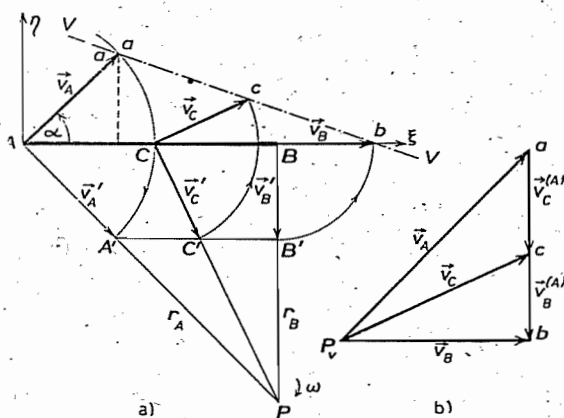
\vec{T} је орт управан на правац штапа AB , $\overline{AB} = l$, $\overline{AC} = c$. Из слике 78a биће $\vec{v}_A + \vec{A'C'} = \vec{c} \vec{e} + \vec{v}_C$; $\vec{v}_A + \vec{A'B'} = l \vec{e} + \vec{v}_B$, где је \vec{e} орт правца штапа AB , па је услов колинеарности тачака A' , B' , C' задовољен:

$$\begin{aligned} [\vec{A'C'}, \vec{A'B'}] &= [\vec{c}\vec{e} + \vec{v}_C - \vec{v}_A, l\vec{e} + \vec{v}_B - \vec{v}_A] = [c\vec{e} + \vec{v}_C^{(A)}, l\vec{e} + \vec{v}_B^{(A)}] = \\ &= l[\vec{v}_C^{(A)}, \vec{e}] + c[\vec{e}, \vec{v}_B^{(A)}] = lc\omega([\vec{T}, \vec{e}] + [\vec{e}, \vec{T}]) = 0. \end{aligned}$$

Пример. — 43. Штап AB , дужине $l = 40$ cm, креће се у равни тако да вектор брзине тачке A , $|\vec{v}_A| = 80$ cm/sec, гради са штапом угао $\alpha = 45^\circ$, а правац брзине тачке B колинеаран је са штапом са смером од A ка B (сл. 79a). Одредити брзине тачака B и C штапа ако је $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Решење. — а) Према закону брзина клизања је $v_A \cos \alpha = v_B$, па је $v_B = 40\sqrt{2} = 56,4$ cm/sec.

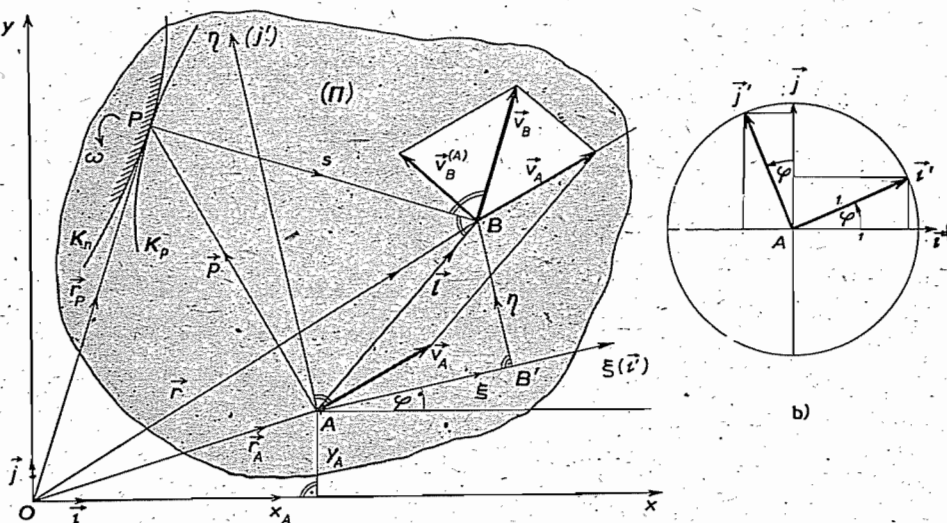
б) Из особина тренутног пола следи $r_A \sin \alpha = l$, $r_B = l \operatorname{ctg} \alpha$, па је $v_A = r_A \omega = 80$; $\omega = \sqrt{2} \operatorname{sec}^{-1}$, те је $v_B = 40\sqrt{2}$ cm/sec.



Слика 79. — Одређивање брзина тачака C и B штапа AB

Брзине су одређене и помоћу окренутих брзина и проверене помоћу велоциде.
 с) Због $\omega = \sqrt{2} \text{ sec}^{-1}$ је $v_B^{(A)} = l\omega = 40\sqrt{2} \text{ cm/sec}$, па брзине одређујемо помоћу плана брзина (сл. 79b), $v_B = u_v \cdot P_v b$; $v_C = u_v \cdot P_v c$; $ac : ab = AC : AB$.

9.3.2. *Аналитичко одређивање брзине.* — Нека се плоча (Π) креће у равни Oxy (сл. 80). Уочимо у њој тачку A и у овој, као координатном почетку, триедар $A\xi\eta$, десне диспозиције, који се креће заједно са плочом. Равно кретање крутог тела има *шири сивейена слобода*, па ће ради одређивања овог кретања, бити потребна три податка. За та три податка узећемо две координате тачке $A(x_A; y_A)$ у односу на непокретни систем Oxy , и угао φ кога чини $+A\xi$ -оса са $+Ox$ -осом, односно вектор положаја тачке $A(\vec{r}_A)$ и угао φ обртања триедра $A\xi\eta$ око триедра $Oxyz$.



Слика 80. — Аналитичко одређивање брзине

Произволна тачка B плоче одређена је вектором положаја \vec{r} у односу на непокретни систем Oxy и вектором положаја \vec{l} у односу на покретни систем $A\xi\eta$. Према томе, први вектор положаја је *аисолућни*, а други *релативни*. Пошто је плоча крута, то је растојање тачака A и B непроменљиво, то јест $\overline{AB} = l = \text{const.}$, те вектор \vec{l} мења само *свој положај*, али му величина *остаје непроменљива*, па се због тога и релативне координате ξ и η у односу на триедар $A\xi\eta$ не мењају са временом, док се *аисолућне координате* x и y мењају.

Ако означимо са \vec{i}, \vec{j} ортове оса система Oxy , а са \vec{i}', \vec{j}' ортове оса покретног система $A\xi\eta$, онда се формуле трансформације координата при

транслацији система Oxy у тачку A и ротацији око те тачке за угао φ , могу поставити из векторског троугла OAB :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{r}_A + \vec{l} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + \xi\vec{i}' + \eta\vec{j}'; \quad \vec{OA} = \vec{r}_A. \quad (146)$$

Множењем претходне једначине скаларно ортовима \vec{i} и \vec{j} , с обзиром на косинусну схему између ортова оса оба триедра

	\vec{i}'	\vec{j}'
\vec{i}	φ	$\varphi + 1/2\pi$
\vec{j}	$-1/2\pi + \varphi$	φ

добићемо координате тачке B плоче:

$$\begin{aligned} x &= (\vec{r}, \vec{i}) = x_A + (\vec{l}, \vec{i}) = x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \\ y &= (\vec{r}, \vec{j}) = y_A + (\vec{l}, \vec{j}) = y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi; \\ \xi &= (\vec{r}, \vec{i}') = (x - x_A) \cos \varphi + (y - y_A) \sin \varphi; \\ \eta &= (\vec{r}, \vec{j}') = -(x - x_A) \sin \varphi + (y - y_A) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (147)$$

Ове једначине представљају параметарске једначине путање. Када се из првих једначина елиминише време, добија се једначина линије путање у односу на непокретни триедар, функција $f(x, y) = 0$. Пошто тачка B не мења свој положај према покретном триедру $A\xi\eta$, она релативно мирује у односу на тај триедар, па је $\xi = \eta = 0$.

Диференцирајмо по времену прве две једначине, $x = x(t)$ и $y = y(t)$; пошто је $\xi = \eta = 0$, а $\dot{\varphi} = \omega$ је угаона брзина обртања триедра $A\xi\eta$ у односу на Oxy , добићемо пројекције вектора брзине тачке B на непокретне осе:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_A - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \omega = x_A - (y - y_A) \omega; \\ \dot{y} &= y_A + (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \omega = y_A + (x - x_A) \omega, \end{aligned} \quad (148)$$

па је вектор брзине

$$\vec{v}_B = x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} = \vec{v}_A - \omega(y - y_A)\vec{i}' + \omega(x - x_A)\vec{j}' = \vec{v}_A - \omega\eta\vec{i}' + \omega\xi\vec{j}', \quad (149)$$

јер између ортова оса оба триедра постоје ови односи (сл. 80b):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}} &= \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi, & \dot{\vec{i}}' &= \omega(-\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi) = \omega\vec{j}, \\ \dot{\vec{j}} &= -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi, & \dot{\vec{j}}' &= -\omega(\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) = -\omega\vec{i}'. \end{aligned} \quad (150)$$

Пројцирајући вектор \vec{v}_B (149) на осе $A\xi$ и $A\eta$ биће пројекције вектора брзине на осе покретног триебра:

$$\boxed{v_\xi = v_{A\xi} - \omega\eta; \quad v_\eta = v_{A\eta} + \omega\xi,} \quad (151)$$

где су

$$v_{A\xi} = (\vec{v}_A, \vec{i}') = x_A \cos \varphi + y_A \sin \varphi, \quad v_{A\eta} = (\vec{v}_A, \vec{j}') = -x_A \sin \varphi + y_A \cos \varphi.$$

Ортови оса Ax и Ay су стални, па су њихови изводи $\dot{\vec{i}} = 0$, $\dot{\vec{j}} = 0$; ортови оса $A\xi$ и $A\eta$ су сталног интензитета, једнаког јединици, али су променљиви, па су, према (150), њихови изводи по времену $\dot{\vec{i}}' = \omega \vec{j}'$, $\dot{\vec{j}}' = -\omega \vec{i}'$. Због тога вектор брзине тачке B плоче можемо добити непосредно из векторске релације (146) диференцирајући је по времену:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B = \dot{\vec{r}} &= \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j} + (\xi \dot{\vec{i}}' + \eta \dot{\vec{j}}') = \dot{\vec{r}}_A - \omega \eta \vec{i}' + \omega \xi \vec{j}' \\ &= \dot{\vec{r}}_A - \omega (y - y_A) \vec{i}' + \omega (x - x_A) \vec{j}'. \end{aligned}$$

Први члан на десној страни је извод вектора положаја тачке A по времену и представља брзину тачке A , или транслаторну брзину сваке тачке плоче. Друга два члана су, према (134), компонентне брзине обимне брзине тачке B , која се обрће око тачке A . Према томе, брзина тачке B може се изразити векторски на овај начин:

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{r}}_A + \vec{l} + [\omega, \vec{l}] = \dot{\vec{r}}_A + \vec{v}_B^{(A)}, \quad (145')$$

јер се извод вектора, уопште узевши, састоји из два дела, једног који настаје услед промене величине вектора (релативни део извода) и другог који наступа услед промене положаја вектора услед обртања (преносни део извода):

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{l}} + [\omega, \vec{l}] = [\omega, \vec{l}]. \quad (145'')$$

У овом случају је вектор $\vec{l} = \vec{AB}$ константног интензитета, па нема релативне промене дужине, те постоји само други део извода, који представља обимну брзину тачке B у односу на тачку A , што се може представити следећим векторским изразима:

$$[\omega, \vec{l}] = [\omega, \vec{r} - \vec{r}_A] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x - x_A & y - y_A & 0 \end{vmatrix}; \quad [\omega, \vec{l}] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi & \eta & 0 \end{vmatrix}. \quad (145''')$$

С обзиром на ову релацију, сада се лако могу добити пројекције вектора брзине на осе оба триедра, пројцирајући векторску једначину (144'). Тако ћемо добити обрасце (148) и (151).

Равно кретање може се, према Шаловој теорему, свести на једно обретање, па је *тренутни пол* (P) она тачка плоче која у датом тренутку мирује, те нема брзине. Положај пола одредићемо векторима положаја

\vec{r}_P и \vec{p} у односу на оба триедра, Oxy и $A\xi\eta$. Из троугла OAP следи $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{p}$. Овај образац је аналоган образцу (146) када се тачка B плоче замени тренутним полом (P), па његове координате можемо одредити из образаца (148) и (151) стављајући да је $v_P = 0$, $x = x_P$, $y = y_P$, $\xi = \xi_P$, $\eta = \eta_P$. Према томе, координате тренутног пола јесу

a) у *непокретном* систему Oxy :

$$\boxed{x_P = x_A - \frac{y_A}{\omega}; \quad y_P = y_A + \frac{x_A}{\omega};} \quad (152)$$

b) у *покретном* систему $A\xi\eta$:

$$\boxed{\xi_P = -\frac{(v_A)_\eta}{\omega} = \frac{x_A \sin \varphi - y_A \cos \varphi}{\omega};} \quad (153)$$

$$\eta_P = \frac{(v_A)_\xi}{\omega} = \frac{x_A \cos \varphi + y_A \sin \varphi}{\omega}.$$

Ове обрасце можемо добити и непосредно векторски, диференцирајући израз $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{p}$ по времену, па ће бити

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{p} + [\omega, \vec{p}] = v_A + [\omega, \vec{p}] = 0, \quad (154)$$

пошто тренутни пол мирује у том тренутку, те је $\vec{p} = \overline{AP} = \text{const}$.

Ако овај израз помножимо векторски са $\vec{\omega}$, биће

$$[\vec{\omega}, \vec{v}_A] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{p}]] = 0,$$

односно развијањем другог члана, водећи рачуна да је угаона брзина управна на раван кретања плоче, па је управна и на вектор \vec{p} који лежи у тој равни, те је $(\vec{p}, \vec{\omega}) = 0$. Због тога је

$$[\vec{\omega}, \vec{v}_A] + \vec{\omega} (\vec{\omega}, \vec{p}) - \omega^2 \vec{p} = [\vec{\omega}, \vec{v}_A] - \omega^2 \vec{p} = 0,$$

па је вектор положаја пола у односу на почетак A покретног триедра $A\xi\eta$:

$$\vec{p} = \frac{1}{\omega^2} [\vec{\omega}, \vec{v}_A]. \quad (155)$$

Множењем овог израза векторски вектором $\vec{\omega}$, због тога што је вектор угаоне брзине $\vec{\omega}$ управан на раван кретања, па је $(\vec{\omega}, \vec{v}_A) = 0$, биће:

$$[\vec{p}, \vec{\omega}] = -[\vec{\omega}, \vec{p}] = -\frac{1}{\omega^2} [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{v}_A]] = \vec{v}_A = \vec{v}_A^{(P)}; \quad (\vec{p}, \vec{v}_A) = 0.$$

Брзина тачке A износи $v_A = p\omega$ и управна је на потегу \overline{PA} , јер је она обимна брзина тачке A у односу на пол P .

Из троугла APB следи релација $\vec{l} = \overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} = \vec{p} + \vec{PB}$; $\overline{PB} = \vec{s}$, па је, због (155), брзина тачке B :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{l}] = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{p}] + [\vec{\omega}, \overline{PB}] = [\vec{\omega}, \overline{PB}] = \vec{v}_B^{(P)}. \quad (144''')$$

Брзина тачке B плоче може се изразити на два начина: помоћу брзине тачке A и релативне брзине према тој тачки, или само помоћу релативне брзине према тренутном полу. Пошто је $(\overline{PB}, \vec{v}_B) = (\overline{PB}, [\vec{\omega}, \overline{PB}]) = 0$, та брзина је управна на потег \overline{PB} , што смо и раније уочили као особину тренутног пола.

Вектор положаја пола (P), за непокретни систем Oxy , према (155), одређен је једначином

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{[\vec{\omega}, \vec{v}_A]}{\omega^2}. \quad (156)$$

Због релација $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ и $\vec{v}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} = v_{A\xi} \vec{i} + v_{A\eta} \vec{j}$, развијањем израза (155) и (156), добијамо координате тренутног пола у оба координатна система (152 и 153).

У свим овим обрасцима иређиосиављено је да је угаона брзина позицијивна, то јест да је обрђиање плоче у директном смеру (супротном од смера кретања сатне казаљке). У ирођиивном, иреба сиаивиии вредности — ω .

На пример, како је у задатку 43, $\vec{\omega} = -\sqrt{3} \vec{k}$ и $\vec{v}_A = 40\sqrt{3} \vec{i} + 40\sqrt{2} \vec{j}$, координате тренутног пола у односу на систем $A\xi\eta$ јесу: $\xi_P = 40$ cm; $\eta_P = -40$ cm.

9.4. Одређивање убрзања тачака покретне плоче. — И убрзања појединих тачака плоче можемо одредити ирафички и аналитички.

9.4.1. *Графичко одређивање убрзања.* — Равно кретање крутог тела састоји се из истовремене translације и обртања, па свака тачка плоче има две компонентне брзине: translације и обртања (144'). Све тачке плоче имају исту translаторну брзину, а брзине обртања, као обимне брзине, зависе од тога према којој тачки посматрамо тренутно обртање. Стога свака тачка плоче имаће и два компонентна убрзања: убрзање translације и убрзање обртања — релативно убрзање једне тачке плоче у односу на другу као да ова мирује, а прва се обрће око ње по кружној линији. Ово релативно убрзање можемо разложити у две природне компоненте: тангенцијалну (управну на штап) и нормалну (колинеарну са штапом и усмерену ка тачки A , која, сматрамо, тренутно мирује). Према томе убрзање тачке B штапа AB (сл. 81 a) може се изразити следећом векторском релацијом:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_B^{(A)} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BT}^{(A)} + \vec{a}_{BN}^{(A)} = \vec{a}_A + [\omega, AB] - \omega^2 AB, \quad (157)$$

где је ω угаона брзина, а ω угаоно убрзање обртања штапа AB око тачке A , која, сматрамо, тренутно мирује. Убрзање \vec{a}_A је убрзање translације, које је исто за све тачке штапа. Вектор релативног убрзања тачке B према тачки A гради са штапом угао β , који је одређен релацијом $\tan \beta = a_{BT}^{(A)} / a_{BN}^{(A)} = l\omega / l\omega^2 = \omega / \omega^2 = \text{const.}$, јер су угаона брзина и угаоно убрзање исти за све тачке штапа.

Множењем претходне векторске једначине ортовима \vec{e} (правац штапа AB) и \vec{T} (управног на тај правац) добија се

$$(\vec{a}_B, \vec{e}) = (\vec{a}_A, \vec{e}) - l\omega^2; \quad (\vec{a}_B, \vec{T}) = (\vec{a}_A, \vec{T}) + l\dot{\omega},$$

јер су компонентна релативна убрзања

$$\vec{a}_{BT}^{(A)} = l\dot{\omega} \vec{T}; \quad \vec{a}_{BN}^{(A)} = -l\omega^2 \vec{e} = -[(\vec{v}_B^{(A)})^2 / l] \vec{e}, \quad (158)$$

где је $l = \overline{AB}$. Из овога видимо да пројекције вектора убрзања тачака A и B на правац штапа нису једнаке, као што је било код брзина клизања.

Када променимо улоге тачака A и B , онда наведена векторска релација постаје (сл. 81 b):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_A^{(B)} = \vec{a}_B + \vec{a}_{AT}^{(B)} + \vec{a}_{AN}^{(B)}.$$

Упоредивањем ових векторских релација следи

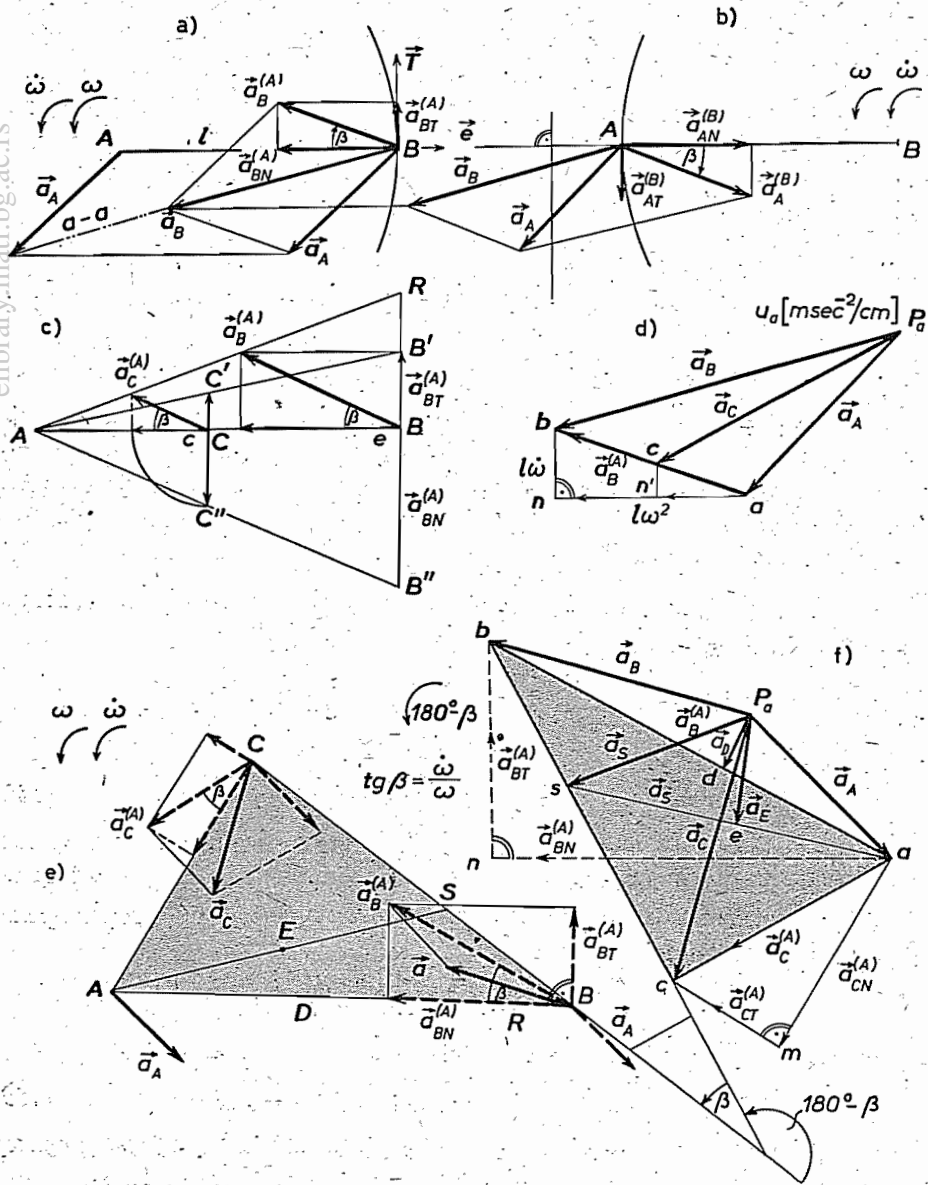
$$\vec{a}_A^{(B)} = -\vec{a}_B^{(A)}; \quad \vec{a}_{AT}^{(B)} = -\vec{a}_{BT}^{(A)}; \quad \vec{a}_{AN}^{(B)} = -\vec{a}_{BN}^{(A)}, \quad (159)$$

те закључујемо да су релативна убрзања двеју тачака штапа једне у односу на другу једнака по величини, паралелна, али суйројној смера. Наравно, ова убрзања су у тачки A односно B штапа.

Векторски израз (157) важи и за ма коју тачку C штапа, тада је

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_C^{(A)} = \vec{a}_A + \vec{a}_{CT}^{(A)} + \vec{a}_{CN}^{(A)}; \quad \vec{a}_{CT}^{(A)} = c \omega \vec{T}; \quad \vec{a}_{CN}^{(A)} = -c \omega^2 \vec{e}.$$

Пошто је $\vec{c} = \overrightarrow{AC} = \lambda l \vec{e}$, можемо да закључимо да све завршне тачке вектора релативних танјенцијалних убрзања тачака штапа у односу на тачку A леже на правој AB' (сл. 81 е). Релативна нормална убрзања су коли-



Слика 81. — Графичко одређивање убрзања тачака штапа

неарна са штапом и усмерена ка тачки A , па ако их заокренемо за угао 90° , видимо да завршне тачке ових заокренутих вектора леже на правој AB'' (сл. 81 с). Пошто је релативно убрзање тачке C према тачки A :

$$\vec{a}_C^{(A)} = \vec{a}_{CT}^{(A)} + \vec{a}_{CN}^{(A)} = c \omega \vec{T} + c \omega^2 \vec{e} = \lambda (l \omega \vec{T} - l \omega^2 \vec{e}) = \lambda (\vec{a}_{BT}^{(A)} + \vec{a}_{BN}^{(A)}) = \lambda \vec{a}_B^{(A)},$$

вектори релативних убрзања свих тачака штапа у односу на тачку A јесу паралелни и завршне тачке ових вектора леже на правој AR (сл. 81 с). Сви ови вектори граде са штапом исти угао β , чији је $\operatorname{tg} \beta = \omega/\omega^2$.

Конструкцију векторске једначине (157) не морамо вршити у тачки B штапа, већ то можемо учинити и помоћу плана убрзања (сл. 81 d).

Из тачке P_a (пола), у размери u_a (msec⁻²/cm), пренесимо вектор убрзања тачке A штапа (убрзање транслације) $\vec{a}_A = u_a \cdot \vec{P}_a a$. Затим на тачку a надовезимо у правцу штапа вектор \vec{an} , који представља релативно нормално убрзање $a_{BN}^{(A)} = l \omega^2$, и затим управно на тај вектор пренесимо вектор \vec{nb} , који представља релативно тангенцијално убрзање $a_{BT}^{(A)} = l \omega$, онда вектор $\vec{P}_a b$ одређује у истој размери цртања убрзање краја B штапа, $\vec{a}_B = u_a \cdot \vec{P}_a b$.

Вектор \vec{ab} представља релативно убрзање, $\vec{a}_B^{(A)} = u_a \cdot \vec{ab}$. Када тачком c поделимо дуж \vec{ab} у плану убрзања у истом односу у коме тачка C дели штап AB , то јест $\vec{ac} : \vec{ab} = \vec{AC} : \vec{AB}$, онда вектор $\vec{P}_a c$ представља убрзање тачке C штапа, $\vec{a}_C = u_a \cdot \vec{P}_a c$. Помоћу те тачке лако се одређују и следеће вредности: $\vec{a}_C^{(A)} = u_a \cdot \vec{ac}$, $\vec{a}_{CT}^{(A)} = u_a \cdot \vec{n'c}$; $\vec{a}_{CN}^{(A)} = u_a \cdot \vec{an'}$.

Завршне тачке вектора убрзања свих тачака штапа повучених из пола P_a леже на правој acb , релативном убрзању свих тачака штапа у односу на тачку A . Због тога све завршне тачке вектора убрзања тачака штапа у плану положаја морају да леже на једној правој $a-a$, која се назива акцелероида (сл. 81 a). Она може да послужи као контрола графичког одређивања убрзања, а такође се помоћу ње могу одредити и убрзања неке тачке штапа када се познају убрзања крајњих (или ма којих других двеју тачака) штапа. Пренесимо у извесној размери (u_a) векторе убрзања тачака A и B (сл. 82 a) и тачке A' и B' спојимо правом $a-a$ (акцелероидом). Тачку A' спојимо са тачком B , а тачку B' са тачком A .

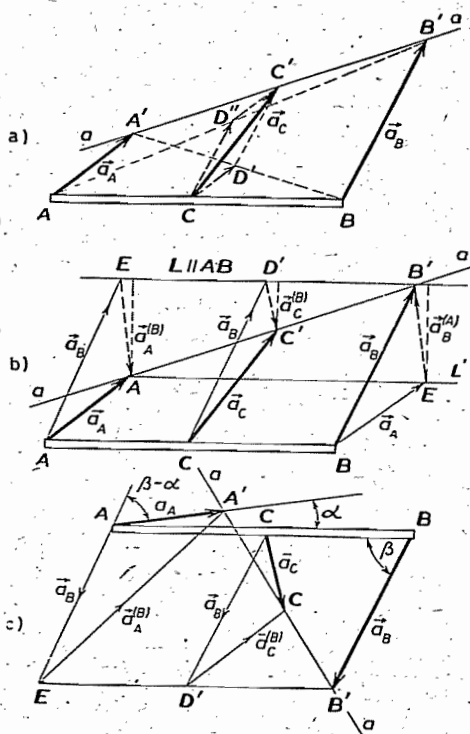
Праве повучене из тачке C паралелно убрзањима \vec{a}_A и \vec{a}_B секу праве $A'B$ и AB' у тачкама D' и D'' . Дијагонала паралелограма $CD'C'D''$ представља убрзање тачке C . Убрзање тачке C можемо одредити и на други начин. Из тачке B' (сл. 82 b) повуцимо праву L паралелну штапу AB , а из тачке A праву паралелну убрзању тачке B . Ове две праве секу се у тачки E .

Из тачке C повуцимо праву паралелну убрзању \vec{a}_B , она сече праву L у тачки D' . Из ове тачке повуцимо праву паралелну правој EA' , она сече

праву $a-a$ у тачки C' . Вектор $\overrightarrow{CC'}$ одређује убрзање тачке C . Из те конструкције видимо да је

$$\vec{a}_C = u_a \cdot \overrightarrow{CC'} = u_a \cdot \overrightarrow{CD'} + u_a \cdot \overrightarrow{D'C'} = \vec{a}_B + \vec{a}_C^{(B)},$$

па вектор $\overrightarrow{C'D'}$ представља релативно убрзање тачке C у односу на тачку B .



Слика 82. — Одређивање убрзања тачке C штапа AB када су позната убрзања крајњих тачака (A и B)

Повучемо ли праву L' паралелну штапу AB , истим поступком добијамо тачку E' . Вектори $\overrightarrow{EA'}$ и $\overrightarrow{B'E'}$ представљају релативна убрзања тачака A и B , па закључујемо да су та убрзања једнаких величина, паралелна, а супротног смера.

Да крај C' вектора \vec{a}_C лежи на правој $a-a$ (акцелерацији), можемо доказати математички на овај начин. Из (157) следе односи

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_B^{(A)}; \quad \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_C^{(A)},$$

а из (159) биће $\vec{a}_B^{(A)} = l\omega\vec{T} - l\omega^2\vec{e}$, $\vec{a}_C^{(A)} = c\omega\vec{T} - c\omega^2\vec{e}$, где је $\overline{AB} = l$, $\overline{AC} = c$, \vec{e} орт правца штапа AB , а \vec{T} орт управан на тај правац. Према томе је $\vec{a}_C^{(A)} = -(c/l)\vec{a}_B^{(A)}$, па је $\vec{a}_C^{(A)} \parallel \vec{a}_B^{(A)}$. Са слике (82 a) видимо да је $\vec{a}_A + \vec{A'C'} = c\vec{e} + \vec{a}_C$, $\vec{a}_A + \vec{A'B'} = l\vec{e} + \vec{a}_B$, па је услов колинеарности тачака A' , B' и C' задовољен:

$$[\vec{A'C'}, \vec{A'B'}] = [c\vec{e} + \vec{a}_C^{(A)}, l\vec{e} + \vec{a}_B^{(A)}] =$$

$$= l[\vec{a}_C^{(A)}, \vec{e}] + c[\vec{e}, \vec{a}_B^{(A)}] = c[\vec{a}_B^{(A)}, \vec{e}] + c[\vec{e}, \vec{a}_B^{(A)}] = 0.$$

Овом конструкцијом одређено је убрзање тачке C средине штапа AB (сл. 82 c) за податке: $a_A = 10 \text{ cm/sec}^2$, $a_B = 20 \text{ cm/sec}^2$, $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 70^\circ$.

Та се вредност слаже и са рачунском, коју одређујемо једначином

$$a_C = \frac{1}{2} \sqrt{a_A^2 + a_B^2 - 2a_A a_B \cos(\beta - \alpha)} = 8,66 \text{ cm/sec}^2.$$

Када се познају убрзања темена A , B , C фигуре ABC плоче (сл. 81 e), онда завршне тачке ових вектора повучених из пола P_a плана убрзања у размери u_a образују фигуру abc , која је слична основној фигури ABC плоче. Пошто свако релативно убрзање двеју тачака штапа гради са штапом угао β , онда се и за убрзања може поставити *Мемкеова теорема*, која гласи (сл. 81 f):

План убрзања тачака круће њлоче сличан је фигури тачака и заокренућ је за $(180 - \beta)^\circ$ према њлочи у смеру њеној ујаној убрзања (ω) .

Када тачком d поделимо дуж \overline{ab} у размери $\overline{ad} : \overline{ab} = \overline{AD} : \overline{AB}$, добићемо убрзање тачке D штапа AB , јер је $\vec{a}_D = u_a \cdot \vec{P}_a \vec{d}$. На исти начин, за тачку S , где је $\overline{bs} : \overline{bc} = \overline{BS} : \overline{BC}$, добијамо $\vec{a}_S = u_a \cdot \vec{P}_a \vec{s}$. За неку тачку E у унутрашњости фигуре ABC , спајањем добијамо праву AES , те следи $\vec{a}_E = u_a \cdot \vec{P}_a \vec{e}$, где је $\overline{ae} : \overline{as} = \overline{AE} : \overline{AS}$.

9.4.2. Аналитичко одређивање убрзања. — Диференцирајући по времену израз (148) добићемо убрзање произвољне тачке B у непокретном координатном систему Oxy :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{x}_A - \dot{\omega} (y - y_A) - \omega^2 (x - x_A); \\ \ddot{y} = \ddot{y}_A + \dot{\omega} (x - x_A) - \omega^2 (y - y_A) \end{cases} \quad (160)$$

па је вектор убрзања

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} = \vec{a}_A - \dot{\omega} \{ \vec{i} (y - y_A) - \vec{j} (x - x_A) \} - \omega^2 \{ \vec{i} (x - x_A) + \vec{j} (y - y_A) \} = \\ &= \vec{a}_A - \dot{\omega} (\eta \vec{i}' - \xi \vec{j}') - \omega^2 (\xi \vec{i}' + \eta \vec{j}'), \end{aligned} \quad (161)$$

јер између ортова оса оба триедра постоје односи (150). Пројицирајући вектор убрзања на осе триедра $A\xi\eta$ добиће се пројекције

$$a_{\xi} = a_{A\xi} - \dot{\omega} \eta - \omega^2 \xi; \quad a_{\eta} = a_{A\eta} + \dot{\omega} \xi - \omega^2 \eta, \quad (162)$$

где су

$$a_{A\xi} = (\vec{a}_A, \vec{i}') = \ddot{x}_A \cos \varphi + \ddot{y}_A \sin \varphi; \quad a_{A\eta} = (\vec{a}_A, \vec{j}') = -\ddot{x}_A \sin \varphi + \ddot{y}_A \cos \varphi.$$

До истих образаца долазимо диференцирањем векторског израза (144'):

$$\vec{r} = \vec{r}_A + [\omega, \vec{l}] + \left[\omega, \frac{d\vec{l}}{dt} \right]$$

па ће, с обзиром на (152), бити

$$\vec{a}_B = \vec{r} = \vec{r}_A + [\omega, \vec{l}] + [\omega, [\omega, \vec{l}]] = \vec{r}_A + [\omega, \vec{l}] - \omega^2 \vec{l} = \vec{a}_A + \vec{a}_B^{(A)} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BT}^{(A)} + \vec{a}_{BN}^{(A)},$$

јер је

$$[\omega, [\omega, \vec{l}]] = (\vec{\omega}, \vec{l}) \omega - \omega^2 \vec{l} = -\omega^2 \vec{l} \quad (157')$$

пошто је угаона брзина $\vec{\omega}$ управна на вектор \vec{l} , то јест $(\vec{\omega}, \vec{l}) = 0$, а векторски производи су

$$[\vec{\omega}, \vec{l}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x - x_A & y - y_A & 0 \end{vmatrix}; \quad [\vec{\omega}, \vec{l}] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi & \eta & 0 \end{vmatrix}.$$

Убрзање произвољне тачке плоче која изводи равно кретање састоји се из три компонентина убрзања: транслаторног убрзања, које је исто за све тачке плоче и једнако убрзању координатног почетка A , релативног тангенцијалног убрзања при обртању око тачке A и релативног нормалног убрзања усмереног ка тачки A .

Ако се тачка A креће праволинијски и једнолико, онда је убрзање \vec{a}_A једнако нули; када је обртање једнолико ($\omega = 0$), тада је тангенцијално убрзање једнако нули. Релативно нормално убрзање увек постоји при равном кретању, изузев у случају када се плоча креће транслаторно ($\omega = 0$).

Слично тренутном полу дефинише се и пол (центар) убрзања. То је она тачка плоче која у датом тренутку нема убрзања. Положај пола убрзања (U) одредићемо векторима \vec{r}_U и \vec{u} у односу на оба триедра, Oxy и $A\xi\eta$, па из троугла OAU (сл. 83а) следи релација $\vec{r}_U = \vec{r}_A + \vec{u}$. Овај образац је аналоган обрасцу (146) када се тачка B плоче замени полом убрзања (U), па његове координате можемо одредити из образаца (160) и (162) стављајући да је $a_U = 0$; $x = x_U$, $y = y_U$; $\xi = \xi_U$, $\eta = \eta_U$. Према томе су координате пола убрзања

а) у неокрећеном координатном систему Oxy :

$$x_U = x_A + \frac{\ddot{x}_A \omega^2 - \ddot{y}_A \omega}{\omega^4 + \omega^2}; \quad y_U = y_A + \frac{\ddot{y}_A \omega^2 + \ddot{x}_A \omega}{\omega^4 + \omega^2}; \quad (163)$$

б) у окрећеном координатном систему $A\xi\eta$:

$$\xi_U = \frac{(a_A)_\xi \omega^2 - (a_A)_\eta \omega}{\omega^4 + \omega^2}; \quad \eta_U = \frac{(a_A)_\eta \omega^2 + (a_A)_\xi \omega}{\omega^4 + \omega^2}. \quad (164)$$

До ових образаца можемо доћи непосредно векторски, диференцирајући двапут по времену израз $\vec{r}_U = \vec{r}_A + \vec{u}$, па ће бити

$$\ddot{\vec{r}}_U = \ddot{\vec{r}}_A + [\vec{\omega}, \vec{u}] - \omega^2 \vec{u} = 0,$$

пошто пол убрзања нема убрзања. Помножимо ли ову једначину прво са ω^2 а затим векторски вектором $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega}^2 r_A + \omega^2 [\vec{\omega}, \vec{u}] - \omega^4 \vec{u} = 0; \quad \vec{\omega} [\vec{\omega}, r_A] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{u}]] - \omega^2 [\vec{\omega}, \vec{u}] = 0,$$

и саберемо, водећи рачуна да је угаоно убрзање управно на вектор \vec{u} , $(\vec{\omega}, \vec{u}) = 0$, добићемо вектор положаја \vec{u} у облику:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_A \omega^2 + [\vec{\omega}, r_A]}{\omega^4 + \omega^2} = \frac{\omega^2 \vec{a}_A + [\vec{\omega}, \vec{a}_A]}{\omega^4 + \omega^2} \tag{165}$$

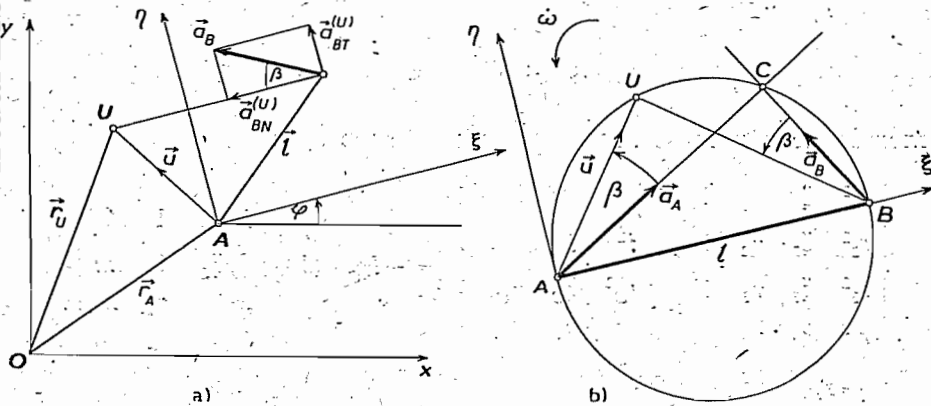
Због тога је вектор положаја пола убрзања у односу на непокретни триедар:

$$\vec{r}_U = \vec{r}_A + \vec{u} = \vec{r}_A + \frac{\omega^2 \vec{a}_A + [\vec{\omega}, \vec{a}_A]}{\omega^4 + \omega^2} \tag{166}$$

Положај пола убрзања можемо одредити и графички. Узмемо ли уместо тачке A пол убрзања U , онда су, због $a_U = 0$, убрзања тачака A и B :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{(U)} = [\vec{\omega}, \vec{UA}] - \omega^2 \vec{UA}; \quad \vec{a}_B = \vec{a}_B^{(U)} = [\vec{\omega}, \vec{UB}] - \omega^2 \vec{UB} \tag{167}$$

једнака само релативним убрзањима у односу на тај пол, пошто пол убрзања нема убрзања у том тренутку. Према томе, убрзање сваке тачке



Слика 83. — Пол убрзања

плоче састоји се из два компонентна убрзања: *релативної тангенцијалної и релативної нормалној убрзања у односу на пол убрзања*. Прво убрзање је управно на потегу који спаја тачку са полом убрзања, а друго је коли-

неарно са потегом и усмерено је, као нормално убрзање, ка полу. Према томе, убрзање гради са тим потегом угао β чији је тангенс сталан, $\operatorname{tg} \beta = \dot{\omega}/\omega^2$. На овој особини се заснива графичко одређивање пола убрзања. Убрзања тачака A и B штапа секу се у тачки C . Заокренемо ли ова убрзања за угао β у смеру угаоног убрзања, она ће се сећи у полу убрзања U (сл. 83b), који лежи на кругу повученом кроз тачке A , B и C .

Да ове тачке леже на кругу, доказаћемо на овај начин. Узмемо систем $A\xi\eta$ такав да се оса $A\xi$ поклапа са штапом AB , онда су из (162) пројекције вектора убрзања тачке B на осе:

$$a_{B\xi} = a_{A\xi} - \omega^2 l; \quad a_{B\eta} = a_{A\eta} + \dot{\omega} l.$$

Координате тачака су:

$$A(0; 0); \quad B(l; 0),$$

$$U; \quad \xi_U = \frac{\omega^2 a_{A\xi} - \dot{\omega} a_{A\eta}}{\Delta}; \quad \eta_U = \frac{\omega^2 a_{A\eta} + \dot{\omega} a_{A\xi}}{\Delta};$$

$$u^2 = \frac{a_A^2}{\Delta}; \quad \Delta = \omega^4 + \dot{\omega}^2.$$

Тачка C се налази у пресеку правих

$$\eta = m\xi; \quad \eta = n(\xi - l); \quad m = a_{A\eta}/a_{A\xi}; \quad n = a_{B\eta}/a_{B\xi};$$

па су јој координате

$$\xi_C = \frac{nl}{n-m} = \frac{a_{A\xi} a_{B\eta} l}{a_{A\xi} a_{B\eta} - a_{A\eta} a_{B\xi}} = \frac{a_{A\xi} a_{B\eta}}{\omega^2 a_{A\eta} + \dot{\omega} a_{A\xi}} = \frac{a_{A\xi} a_{B\eta}}{\Delta \eta_U};$$

$$\eta_C = m\xi_C; \quad r_C^2 = (1+m^2)\xi_C^2.$$

Услов да четири тачке леже на кругу је задовољен:

$$\begin{vmatrix} r_1^2 & \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ r_2^2 & \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ r_3^2 & \xi_3 & \eta_3 & 1 \\ r_4^2 & \xi_4 & \eta_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ l^2 & l & 0 & 1 \\ r_C^2 & \xi_C & \eta_C & 1 \\ u^2 & \xi_U & \eta_U & 1 \end{vmatrix} = -l\xi_C \begin{vmatrix} l & 1 & 0 \\ (1+m^2)\xi_C & 1 & m \\ u^2 & \xi_U & \eta_U \end{vmatrix} =$$

$$= -l\xi_C [l(\eta_U - m\xi_U) + m u^2 - (1+m^2)\eta_U \xi_C] = l\dot{\omega} a_A^2 - a_A^2 (a_{B\eta} - a_{A\eta}) \equiv 0.$$

Примери. — 44. Штап AB , дужине l , чији се крај — клизач — A креће праволинијски константном брзином, покреће полуку CD , која клизи у својим вођицама (сл. 84a). Рачунски и графички одредити брзину и убрзање полуге CD у функцији од u .

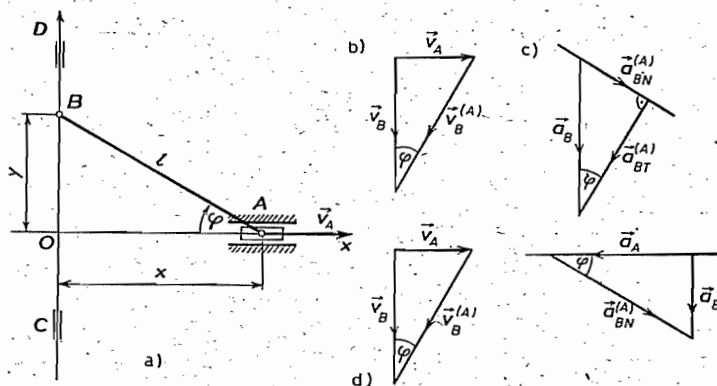
Колика је брзина и убрзање тачке B полуге ако тачка A штапа AB врши хармонијску осцилацију у правој, кружном фреквенцијом ω ?

Решење. — Нека је x одстојање тачке A , штапа AB , од полуге CD , онда је

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Ако двапут диференцирамо ову једначину по времену, водећи рачуна да је брзина тачке A константна, $v_A = \dot{x} = c = \text{const.}$, брзина и убрзање тачке B полуге биће

$$v_B = \dot{y} = -c \frac{x}{y} = -c \operatorname{tg} \varphi = -c \sqrt{\left(\frac{l}{y}\right)^2 - 1}; \quad a_B = \ddot{y} = -\frac{l^2 c^2}{y^3}.$$



Слика 84. — Разводна полука

Графички ћемо одредити брзину и убрзање помоћу плана брзина односно плана убрзања (сл. 84 *b* и *c*) који су у овом случају троуглови, јер је убрзање краја A једнако нули, а угаона брзина штапа је

$$\omega = \frac{c}{l \sin \varphi},$$

и релативно нормално убрзање тачке B у односу на тачку A :

$$a_{BN}^{(A)} = l \omega^2.$$

У случају да је кретање тачке A хармонијско, а пошто је $\dot{\varphi} = -\omega$, добиће се параметарске једначине:

$$x = l \cos \varphi; \quad v_A = \dot{x} = -l \omega \sin \omega t; \quad a_A = -\omega^2 x,$$

$$y = l \sin \varphi; \quad v_B = \dot{y} = l \omega \cos \omega t; \quad a_B = -\omega^2 y.$$

Из плана брзина (сл. 84 *d*) добићемо вредност $\bar{v}_B = v_A \operatorname{ctg} \varphi$, а из плана убрзања (сл. 84 *e*) вредност $a_B = a_A \operatorname{tg} \varphi$, јер је релативно тангенцијално убрзање $a_{BT}^{(A)} = 0$, пошто је угаона брзина ω константна.

45. Квадрат $ABCD$, странеце $l = 2$ cm, креће се у својој равни и у датом тренутку темена A и B имају убрзања $a_A = 2$ cm/sec² и $a_B = 4\sqrt{2}$ cm/sec². Оба су убрзања усмерена ка темену C (сл. 85). Одредити убрзања темена C и D и пол убрзања U .

Решење. — Пројцирајући векторску једначину

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + l \omega \vec{j}' - l \omega^2 \vec{i}' = -2 \vec{j}' + 2 \omega \vec{j}' - 2 \omega^2 \vec{i}'$$

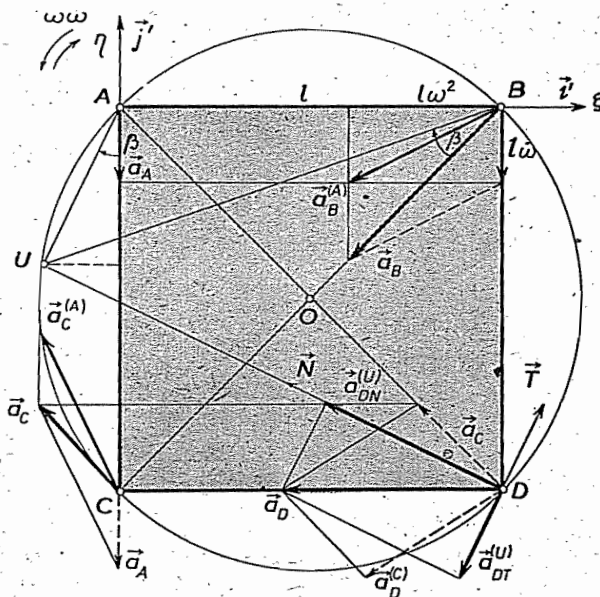
на правце оса триедра $A\xi\eta$:

$$(\vec{a}_B, \vec{i}') = -4 = -2\omega^2; \quad (\vec{a}_B, \vec{j}') = -4 = -2 + 2\omega$$

добивамо угаону брзину и угаону убрзање $\omega^2 = 2 \text{ sec}^{-2}$; $\omega = \sqrt{2} \text{ sec}^{-1}$;

$$\dot{\omega} = -1 \text{ sec}^{-2}, \text{ па је } \text{tg } \beta = -1/2.$$

Према (164), координате пола убрзања износе $\xi_U = -2/5$ см, $\eta_U = -4/5$ см, што се слаже и са графичком конструкцијом као што је показано на слици.



Слика 85. — Кретање квадрата

Убрзање тачке C одредићемо помоћу убрзања тачке A , а тачке D помоћу тачке C и помоћу пола убрзања U , пошто је $\overline{PD} = (1,44 + 4)^{1/2} = 2,69$ см. Ова убрзања износе

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_C^{(A)} = -2\vec{j}' - 2\vec{i}' + 4\vec{j}'; \quad a_{C\xi} = -2; \quad a_{C\eta} = 2; \quad a_C = 2\sqrt{2} \text{ cm/sec}^2;$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_D^{(C)} = -2\vec{i}' + 2\vec{j}' - 2\vec{j}' - 4\vec{i}' = -6\vec{i}'; \quad a_D = 6 \text{ cm/sec}^2;$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_{DT}^{(U)} + \vec{a}_{DN}^{(U)} = -2,69\vec{T} + 2,69 \cdot 2\vec{N}; \quad a_D = 6 \text{ cm/sec}^2.$$

9.5. Рулете. — 9.5.1. Једначине рулетја. — Када штап AB (сл. 86)

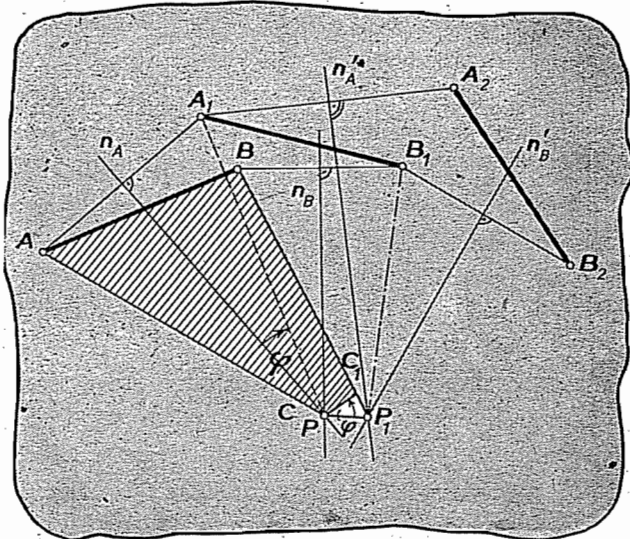
пређе у положај A_1B_1 , тада тренутни пол (P) лежи, као што смо видели, у пресеку симетрала n_A и n_B , јер се штап обрнуо око пола за угао ϕ . Ако, пак, штап пређе из положаја A_1B_1 у положај A_2B_2 , онда је његов пол (P_1) одређен пресеком симетрала n_A' и n_B' ; обртање је извршено за угао ϕ_1 . Мења ли штап AB непрестано свој положај, тада сви полови $P, P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$, образују у непокретној равни (Oxy) континуалну криву линију.

Када је плоча у положају $ABCC_1$, тада се једна њена тачка C поклапала са полом (P). После обртања за угао ϕ тачка C_1 поклопиће се са полом (P_1). Због тога четвороуглови $ABCC_1$ и $A_1B_1PP_1$ морају да буду

погодарни, те им морају бити једнаке и странице $\overline{CC_1} = \overline{PP_1}$, па је угао $\varphi = \sphericalangle P_1 P C_1$.

При узастановном обртању поклапаће се тачке C_i , које припадају покретној плочи, и P_i , које припадају непокретној равни. На тај начин добићемо два геометријска места тачака: *покрећних њолова* (C_i) и *непокрећних њолова* (P_i). Ове две криве линије зову се *рулете* или *центроиде*. Једна је рулета *покрећна* и зове се *покрећна њушања њола* K_p (*полхоџија*), а друга је *непокрећна* K_n и зове се *непокрећна њушања њола* (*хериолхоџија*)*. На основу овога Поансо (Poinsot, 1777—1859) поставио је овај став:

Свако компланано кретање њлоче може се представити као кољчање без клизања једне одређене криве линије, везане за покрећну њлочу, по једној одређеној кривој линији у њомичној равни.



Слика 86. — Рулете

Покретна рулета (K_p) котрља се *без клизања* по непокретној рулети (K_n), јер је $\widehat{CC_1} = \widehat{PP_1} = ds$, где је ds елемент лука, који мора бити исти на обе криве — рулете. Додирна тачка обе криве у том тренутку је тренутни пол (P). Координате тренутног пола у оба координатна система одређујемо једначинама (152) и (153) у функцији од времена (t):

$$x_P = f(t), \quad y_P = g(t); \quad \xi_P = \psi_1(t), \quad \eta_P = \psi_2(t),$$

па се елиминисањем времена t из ових једначина добијају једначине рулета, и то:

a) *непокрећне*

b) *покрећне*

$$F(x_P; y_P) = 0;$$

$$\Psi(\xi_P; \eta_P) = 0.$$

(168)

* Неки писци непокретну рулету називају *базом*, а покретну *рулетом*.

Често је *ипак* практичније одмах поставити изразе за координате тренутног пола у оба координатна система, па елиминисати време из тих једначина, те тако непосредно добити ролете.

На пример, штап AB клизи крајем A једнолико по унутрашњој страни глатког полукруга и пролази кроз покретљиво лежиште у тачки C обода круга (сл. 87). Пошто је

$$x_A = -R \cos 2\varphi, \quad y_A = -R \sin 2\varphi,$$

то су компонентне брзине

$$\dot{x}_A = 2R\omega \sin 2\varphi; \quad \dot{y}_A = -2R\omega \cos 2\varphi \quad \text{и} \quad v_A = 2R\omega,$$

па су

$$v_{A\xi} = -v_A \sin \varphi = -2R\omega \sin \varphi; \quad v_{A\eta} = v_A \cos \varphi = 2R\omega \cos \varphi.$$

Применом образаца (152) и (153) биће:

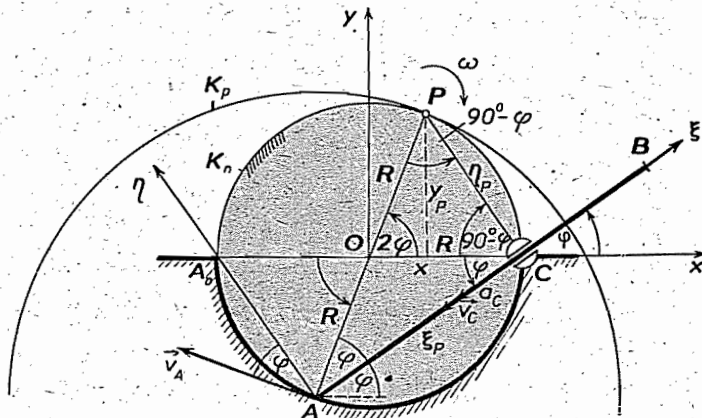
$$x_P = x_A - (y_A/\omega) = R \cos 2\varphi; \quad y_P = R \sin 2\varphi;$$

$$\xi_P = -v_{A\eta}/\omega = -2R \cos \varphi; \quad \eta_P = 2R \sin \varphi,$$

па елиминисањем времена t (то јест угла φ) добијамо једначине ролета у оба координатна система:

$$x_P^2 + y_P^2 = R^2; \quad \xi_P^2 + \eta_P^2 = (2R)^2.$$

Ролете су кругови: K_n полупречника R , са средиштем у тачки O , и K_p полупречника $2R$, са средиштем у тачки A .



Слика 87. — Кругови као ролете

До истог резултата лакше долазимо *непосредно* помоћу слике, пошто се тренутни пол налази у пресеку обрнутих брзина тачака A и C штапа. Троугао OAC је једнакокраки, па је и троугао COP једнакокраки. Због тога је $OP = R$ и угао $\sphericalangle COP = 2\varphi$, па су параметарске једначине ролета

$$x_P = R \cos 2\varphi; \quad y_P = R \sin 2\varphi;$$

$$\xi_P = 2R \cos \varphi; \quad \eta_P = 2R \sin \varphi.$$

Елиминисањем угла φ добијамо једначине ролета као и у претходном случају.

Брзина тачке A износи $v_A = R\omega_0 = 2R\omega$, где је ω_0 вена угаона брзина при кретању по кругу, а ω при обртању око пола P . Према томе је $\omega_0 = 2\omega$. Обе брзине су истосмерне негативне.

9.5.2. *Ојлер-Саваријева једначина.* — Тренутни пол је додирна тачка обе рулете. Особина котрљања без клизања рулета је да је елемент лука ds исти на обе криве, па је брзина пола $v_p = ds/dt$. Означимо са $R_1 = R_n$ и $R_2 = R_p$ полупречнике кривина на месту додира рулета (сл. 88), онда је $ds = R_1 d\varphi_1 = R_2 d\varphi_2$. Пошто је $d\varphi = d\varphi_1 \pm d\varphi_2$, што зависи од тога да ли су обе рулете са разних страна (+) или са исте стране (-) тангенте, биће угаона брзина плоче:

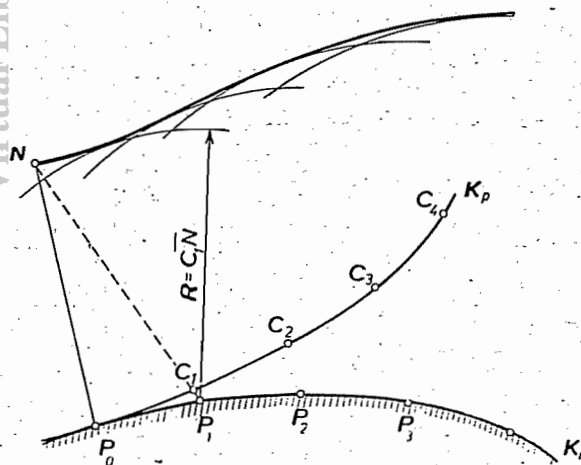
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt} \left(\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right) = v_p \left(\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right). \quad (169)$$

Ово је *Ојлер-Саваријева (Euler-Savary) једначина**.

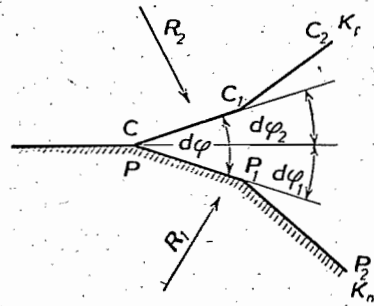
У овом изразу имамо четири променљиве величине, ω , ds , R_1 и R_2 , па ако су три познате, можемо одредити четврту. И ово нам показује да је за ово кретање потребно знати три податка, *иа комилано кретање има три степенa слободe кретања.*

Тренутни пол је она тачка плоче која у том тренутку мирује, али он стварно при кретању има и брзину и убрзање као и свака друга тачка плоче. Познајући рулете и угаону брзину обртања око пола може се, према претходној једначини, одредити и брзина тренутног пола.

9.5.3. *Конструкција путање помоћу рулета.* — Примена рулета у машинству је велика, јер се помоћу њих може конструисати путања ма



Слика 89. — Конструкција путање помоћу рулета



Слика 88. — Ојлер-Саваријева једначина

које тачке покретне плоче. Нека су K_n и K_p рулете, а N тачка покретне плоче (сл. 89). Положају N_0 тачке на путањи одговарају полови P_0 и C_0 на рулетима и они се поклапају. При бескрајно малом померању плоче помериће се покретна рулета (K_p), па ће тачка N описати бескрајно мали лук око пола P_0 , полупречником $\overline{P_0 N_0} = \overline{C_0 N_0}$. У следећем тренутку пол ће бити P_1 , са којим се поклопила

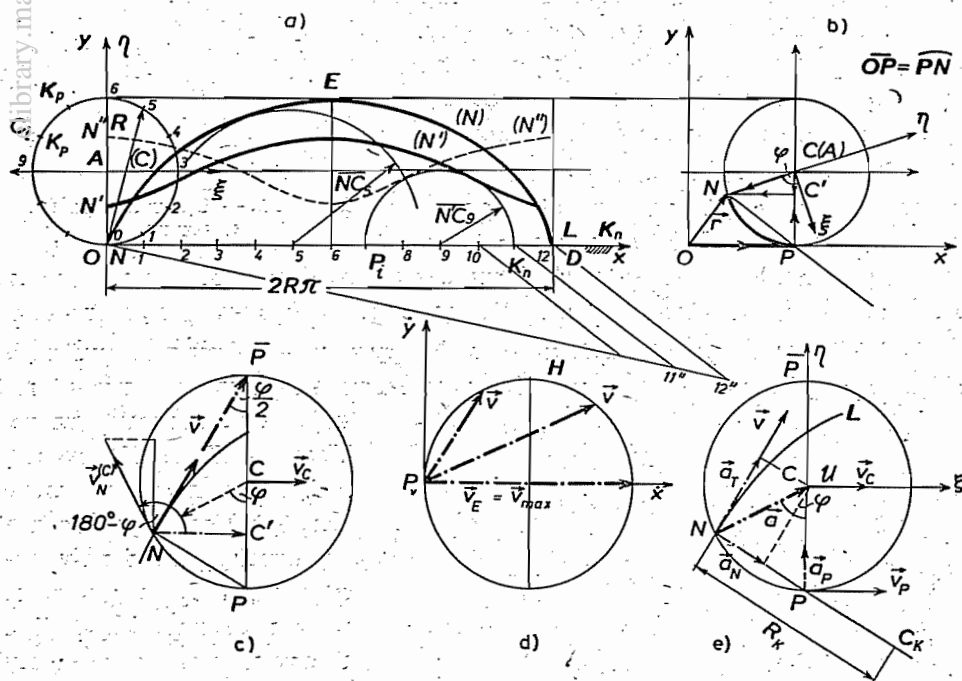
* Euler: Novi Comentarior Academiæ Petropolitane, 1765. године.

тачка C_1 плоче, па је тачка N_0 описала нови круг са центром P_1 , полупречником $\overline{C_1 N_0} = \overline{C_1 N}$. Ако, дакле, из непокретних полова (P_i) опишемо лукове полупречника $\overline{C_i N_0} = \overline{C_i N}$, онда је обвојница ових кружних лукова путања тачке N иокрећне плоче. Почетни положај тачке N је познат (N_0).

Каква ће бити путања тачке N , зависи од облика рулета и положаја тачке N према покретној рулети, па ћемо у даљем тексту показати карактеристичне криве које имају примене у машинству.*

1^о Циклоиде. — Када је непокретна рулета права а покретна круа, онда свака тачка на обиму покретне рулете описује при овом котрљању без клизања криву линију познату под именом *циклоида* (*оризоциклоида*).

Трајекторију тачке N на обиму круга одредићемо графички на овај начин. Поделимо круг (K_p) на једнак број делова (на пример 12), доби-



Слика 90. — Циклоида и трохида

ћемо половине C_i . Дуж $\overline{OD} = 2R\pi$ на правој $L(K_p)$ поделимо такође на исти број подељака (то јест 12), добићемо половине P_i . Опишимо сада из половине P_i (сл. 90a) кружне луке, полупречника $\overline{C_i N} = \overline{C_i O}$, онда је обвојница (анвелопа) ових лукова путања тачке N , *циклоида*.

* Неки писци трајекторију тачке на покретној рулети називају такође *рулетом*.

Једначину циклоиде можемо извести на овај начин. Положај тачке N одређен је вектором положаја $\vec{r} = \vec{ON}$ у односу на непокретни систем Oxy (сл. 90b), па је

$$\vec{r} = \vec{ON} = \vec{OP} + \vec{PC} + \vec{CN} = \vec{OP} + \vec{PC} + \vec{C}'N = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Из особине рулета следи да је $\vec{OP} = P\vec{N} = R\varphi$, па је векторска једначина циклоиде

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = R(\varphi - \sin\varphi)\vec{i} + R(1 - \cos\varphi)\vec{j},$$

одакле непосредно добијамо параметарске једначине

$$x = R(\varphi - \sin\varphi); \quad y = R(1 - \cos\varphi). \quad (170)$$

Због $\cos\varphi = 1 - (y/R)$, елиминисањем угла φ добијамо једначину циклоиде у експлицитном облику:

$$x = R \left[\arccos \frac{R-y}{R} - \frac{1}{R} \sqrt{2Ry - y^2} \right]. \quad (170')$$

Из (170) следи да су координате вектора брзине и брзина:

$$\dot{x} = R\omega(1 - \cos\varphi); \quad \dot{y} = R\omega \sin\varphi; \quad v = 2R\omega \sin(\varphi/2) = \overline{PN} \cdot \omega, \quad (170'')$$

јер је (сл. 90c) $\overline{PN} = 2R \sin(\varphi/2)$. Пошто је брзина управна на потегу PN , јер је P тренутни пол, мора да пролази кроз тачку $\vec{P}(R\varphi; 2R)$.

Тачка N припада и кругу (K_P) и циклоиди, па можемо схватити да је дуж CN штап који изводи равно кретање, те је $\vec{v} = \vec{v}_N = \vec{v}_C + \vec{v}_{N'}^{(C)}$. Како је $v_C = R\omega$ и пада у правац Ox -осе, а $v_{N'}^{(C)} = R\omega$, то је $v^2 = (R\omega)^2 + (R\omega)^2 + 2R^2\omega^2 \cos(180^\circ - \varphi) = 4R^2\omega^2 \sin^2(\varphi/2)$.

Елиминисањем угла φ из првих двеју једначина (170'') добија се $(x - R\omega)^2 + y^2 = (R\omega)^2$, па је ходограф брзине кружна линија са средиштем на P , x -оси (сл. 90d). Тачка има највећу брзину у темену циклоиде ($v_E = v_{\max} = 2R\omega$).

Због $v = ds/dt$ елемент лука је

$$ds = v dt = (v/\omega) d\varphi = 2R \cdot \sin(\varphi/2) d\varphi = 4R \sin(\varphi/2) d(\varphi/2),$$

па је лук циклоиде

$$s = 4R [1 - \cos(\varphi/2)].$$

Из (170) диференцирањем следе координате вектора убрзања и убрзање (сл. 90e):

$$\ddot{x} = R\omega^2 \sin\varphi; \quad \ddot{y} = R\omega^2 \cos\varphi; \quad a = R\omega^2. \quad (170''')$$

Убрзање је увек усмерено ка средишту C круга. Природне координате вектора убрзања и полупречник кривине јесу

$$a_T = R\omega^2 \cos(\varphi/2); \quad a_N = R\omega^2 \sin(\varphi/2); \quad R_k = R_f = 4R \sin(\varphi/2) = 2\overline{PN}.$$

Из образаца (152) и (153) лако се уверавамо да је тачка P тренутни пол. Пошто је $R_1 = \infty$, $a \cdot R_2 = R$, из Ојлер-Саваријеве једначине следи да је $\vec{v}_P = R\omega \vec{i}$. Из релације $\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{a}_{PT}^{(C)} + \vec{a}_{PN}^{(C)}$ биће убрзање тренутног пола $\vec{a}_P = R\omega^2 \vec{j}$. Помоћу образаца (163) и (164) можемо лако показати да се пол убрзања U поклапа са средиштем круга C .

Средиште (C) покретног круга описује *праву линију*, а свака друга тачка (N') у унутрашњости круга описује *хроноиду* (сл. 90a).

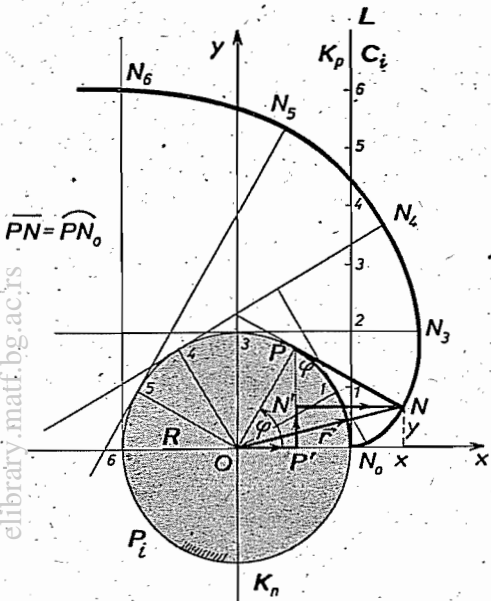
2° *Кружна еволвента*. — У пракси се често измењају улоге рулета, па се добија *инверзно*, или *реципрочно кретање*. Овај реципроцитет се назива *дуализмом кретања*. Узме ли се —

обратно претходном случају — да је *круж неоокрећна рулетка* (K_n), а да је *права* покретна (K_p) и да стално додирује кружну путању, онда тачка N_0 праве описује криву линију која се назива *кружна еволвента** (сл. 91а). Положај тачке N одређен је вектором положаја $\vec{r} = \vec{ON}$, па је

$$\vec{r} = \vec{ON} = \vec{OP} + \vec{PN} = \vec{OP}' + \vec{P}'N' + \vec{N}'N = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Особина ових рулета је $\widehat{PN}_0 = \widehat{PN} = R\varphi$, па су параметарске једначине еволvente круга

$$\begin{cases} x = R(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi); \\ y = R(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi). \end{cases} \quad (171)$$



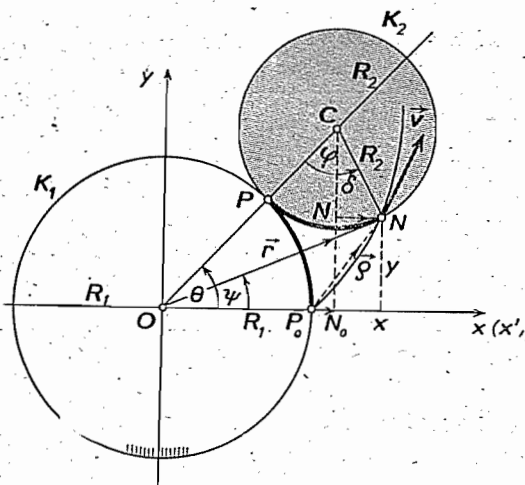
Слика 91. — Еволвента круга

Када се око круга (калема) обмота конач, па се он, непрестано затегнут, после одмотава, његов крај описује кружну еволventу.

3° *Епициклоида*. — Ако се круж K_2 којом се без клизања сивоља по неоокрећном кружу K_1 , тачка N описује *епициклоиду* (сл. 92). Положај покретне тачке N одређен је вектором положаја

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{ON} &= \vec{OC} + \vec{CN} = \\ &= \vec{OC} + \vec{CN}' + \vec{N}'N = x\vec{i} + y\vec{j}. \end{aligned}$$

Из особине рулета следи $\widehat{N_0P} = \widehat{PN} = R_1\theta = R_2\varphi$, па с обзиром да је троугао $\triangle CPN$ једнакокраки, те су $\varphi - \delta = 90^\circ - \theta$; $\delta = \varphi + \theta - 1/2\pi$; $\sin \delta = -\cos(\varphi + \theta) = -\cos(R_1 + R_2)\theta/R_2$; $\cos \delta = -\sin(\varphi + \theta) = \sin(R_1 + R_2)\theta/R_2$;



Слика 92. — Епициклоида

* Циклоида и еволвента круга употребљавају се у машинству за профиле зубаца захваћених зупчаника. Циклоидни зупци су теоријски погоднији, али су еволventни зупци практичнији за израду.

могу се написати параметарске једначине епициклоиде:

$$\begin{cases} x = (R_1 + R_2) \cos \theta - R_2 \cos \frac{R_1 + R_2}{R_2} \theta, \\ y = (R_1 + R_2) \sin \theta - R_2 \sin \frac{R_1 + R_2}{R_2} \theta. \end{cases} \quad (172)$$

Из троугла OCN следи поларна једначина епициклоиде и поларни угао

$$r^2 = (R_1 + R_2)^2 + R_2^2 - 2(R_1 + R_2)R_2 \cos \varphi; \quad r = R_2 \sin \varphi / \sin(\theta - \psi); \quad (172')$$

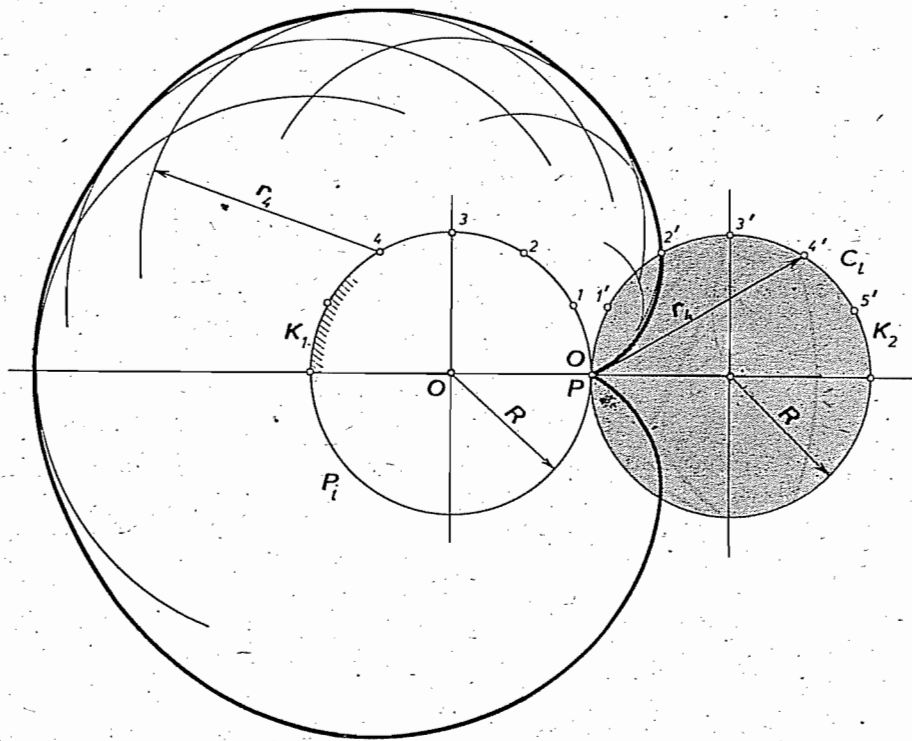
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x} = \frac{(R_1 + R_2) \sin \theta - R_2 \sin(\theta + \varphi)}{(R_1 + R_2) \cos \theta - R_2 \cos(\theta + \varphi)}$$

Када су оба круга *једнаких* полупречника R , епициклоида постаје кардиоида (сл. 93). Тада је $\varphi = 0$, па су параметарске једначине кардиоиде

$$x = R(2 \cos \theta - \cos 2\theta); \quad y = R(2 \sin \theta - \sin 2\theta) \quad (173)$$

и поларна једначина за пол O :

$$r^2 = R^2(5 - 4 \cos \theta). \quad (173')$$



Слика 93. — Кардиоида.

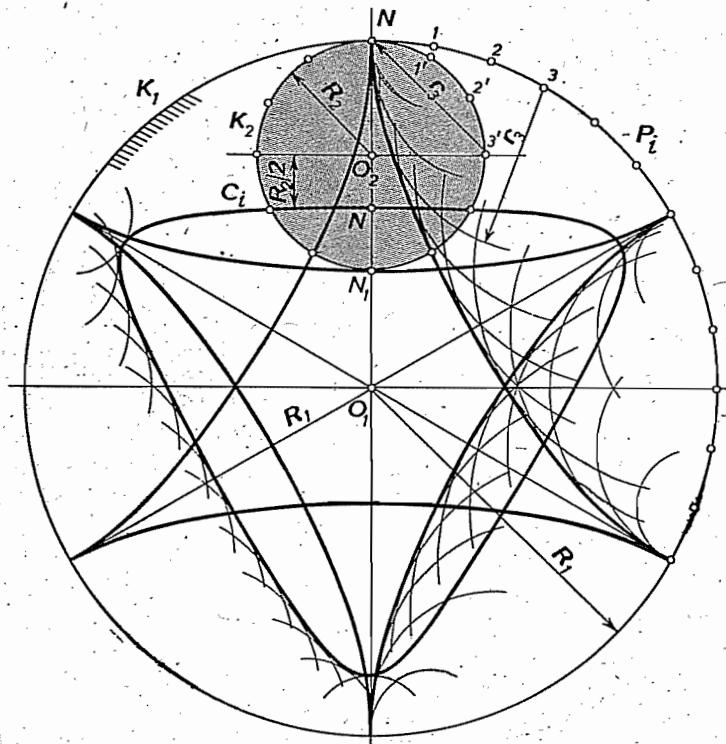
Узме ли се тренутни пол P_0 за пол поларног система, онда су формуле трансформација координата $x' = x - R$, $y' = y$, те је поларна једначина

$$\overline{P_0 N} = \rho = 2R(1 - \cos \theta). \quad (173'')$$

4° *Хипоциклоиде*. — И у овом случају су рулете кругови, само се покретни круг (K_2) котрља по непокретном кругу (K_1) *изнутра*. Тачка на обиму покретног круга описује *хипоциклоиду*. Њене једначине можемо извести непосредно из једначина (172) замењујући R_2 са $-R_2$, па су параметарске једначине

$$\begin{aligned} x &= (R_1 - R_2) \cos \theta + R_2 \cos \frac{R_1 - R_2}{R_2} \theta; \\ y &= (R_1 - R_2) \sin \theta - R_2 \sin \frac{R_1 - R_2}{R_2} \theta. \end{aligned} \quad (174)$$

За случај кад је $R_1 = 3R_2$, путање тачака N_0, N_1 и N , где је $\overline{O_2 N} = \frac{1}{2} R_2$, приказане су на слици 94.



Слика 94. — Хипоциклоиде ($R_1 = 3 R_2$)

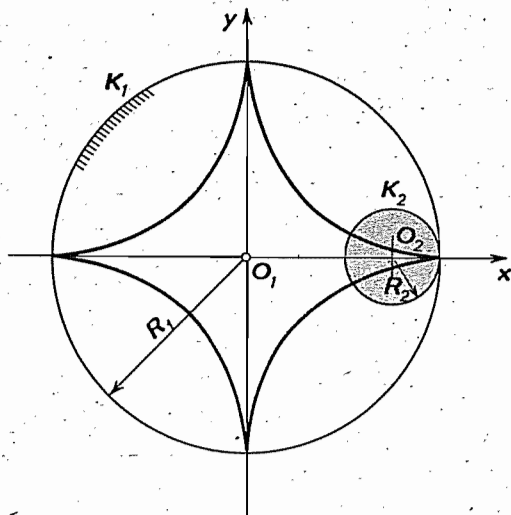
Ако је $R_2 = 1/2 R_1$, хипоциклоида дегенерише у *праву линију*, $y=0$. Када се покретни круг котрља по непокретном кругу, тачка N осцилује дуж хоризонталног пречника непокретног круга. На овај начин може се *осцилаторно* кретање претворити у *кружно*.

Ако је полупречник покретног круга $R_2 = R_1/4 = R/4$, то је $\varphi = 4\theta$, параметарске једначине (174) постају

$$\begin{aligned} x &= 1/4 R (3 \cos \theta + \cos 3 \theta) = \\ &= R \cos^3 \theta, \\ y &= 1/4 R (3 \sin \theta - \sin 3 \theta) \\ &= R \sin^3 \theta, \end{aligned} \quad (175)$$

гдe су

$$\begin{aligned} \cos 3 \theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \\ \sin 3 \theta &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta. \end{aligned}$$



Слика 95. — Астероида

Из параметарског облика произлази следећи имплицитни облик криве:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}, \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2 - R^2)^3 + 27 R^2 x^2 y^2 = 0, \quad (176)$$

која се назива *астероида* (сл. 95).

За случај $R_2 = 1/4 R_1$, путање тачака N_0 , N_1 и N_2 , где је $\overline{O_2 N} = 1/2 R_2$, приказане су на слици 96.

9.5.4. *Конструкција еволуће путање помоћу рулета.* — На основу Ојлер-Саваријево једначине (169) Харџман (*W. Hartmann*)* је показао како се може конструисати еволута путање ако се зна брзина покретне тачке и полупречници кривине рулета.

Бесконачно мало померање покретне тачке N може се представити котрљањем без клизања круга кривине покретне рулете (K_2) по кругу кривине непокретне рулете (K_1). Брзина средишта O_2 круга кривине K_2 биће $v_2 = R_2 \omega$. Пренесимо је у извесној размери (сл. 97) тако да је $u_v \overline{O_2 O_2'} = v_2' = u_v \cdot R_2 \operatorname{tg} \theta$ и тачку O_2' спојимо са O_1 , онда дуж $\overline{P P'}$ представља, у истој размери цртања, брзину v_P тренутног пола. Она пада у правац заједничке тангенте обеју рулета у полу P . Та је брзина

$$v_P = R_1 \omega' = u_v R_1 \operatorname{tg} \theta',$$

где је ω' угаона брзина обртања пола P око средишта O_1 . Из (169) добијамо

$$v_2' = R_2 \omega = v_P \frac{R_1 + R_2}{R_1},$$

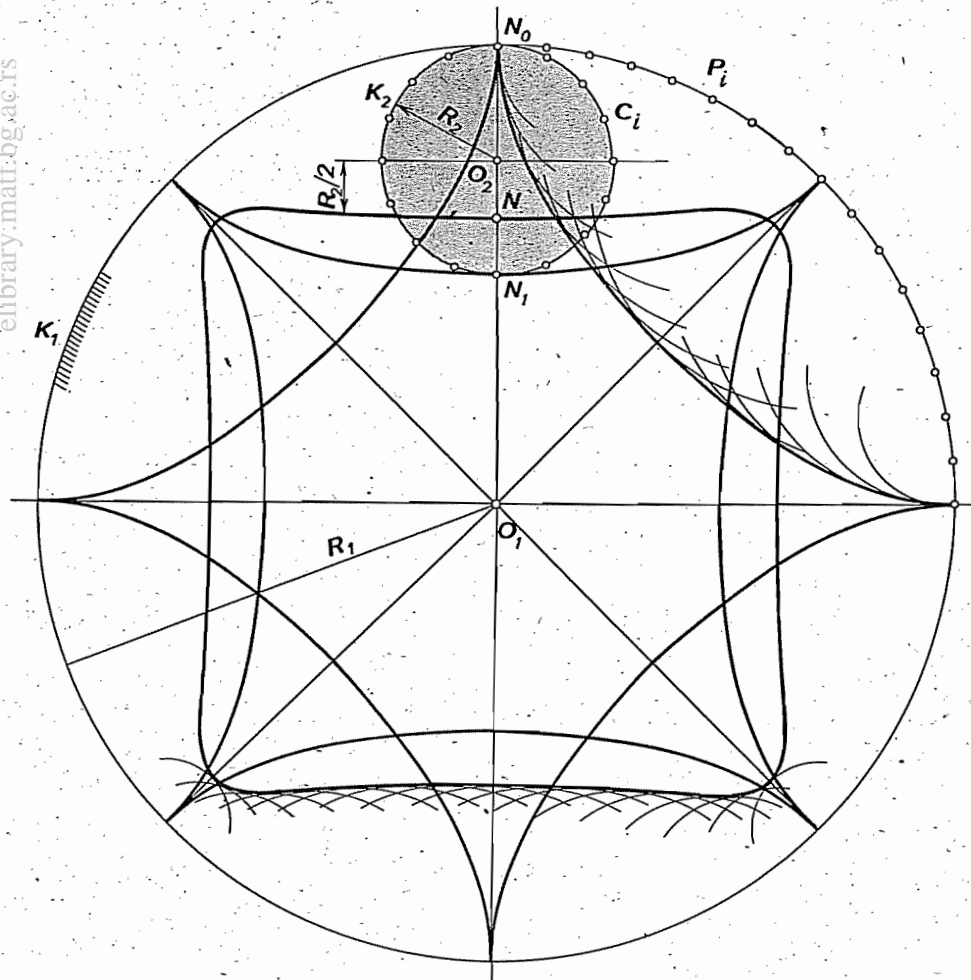
* *W. Hartmann*: 1) Ein neues Verfahren zur Aufsuchung des Krümmungskreises, 1893. године. 2) Die Maschinengetriebe, Berlin 1913. године.

па је испуњен услов

$$v_2' : v_P = (R_1 + R_2) : R_1,$$

те је средиште O_1 тренутни пол обраћања.

Пренесимо брзину покретне тачке N , у истој размери пртања, до тачке N' ($v = -r\omega = u, \overline{NN'}$) и над дужи $|\overline{PP'}| = v_P$, као пречником, опишимо круг. Права повучена из пола P паралелно брзини покретне тачке сече тај круг у тачки a' . Права $N'a'$ сече потег PN у тачки C_k , која је *средишње кривине путање* у положају N .



Слика 96. — Хипоциклоиде ($R_1 = 4 R_2$)

Из сличности троуглова $\triangle C_k P a' \sim \triangle C_k N N'$ следи однос

$$\frac{\overline{C_k P}}{\overline{C_k N}} = \frac{r_P}{r_P + r} = \frac{\overline{P a'}}{\overline{N N'}} = \frac{v_P \sin \alpha}{v} = \frac{v_P \sin \alpha}{r \omega}$$

па је

$$\omega = v_P \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_P} \right) \sin \alpha = v_P \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

чиме је потврђена Ојлер-Саваријева једначина.

Помоћу претходне конструкције можемо нацртати *еволућу циклоиде*. У овом случају полупречници кривине рулета су: $R_1 = \infty, R_2 = R$ (сл. 98), а брзине су $v_C = R\omega, v_P = R\omega$.

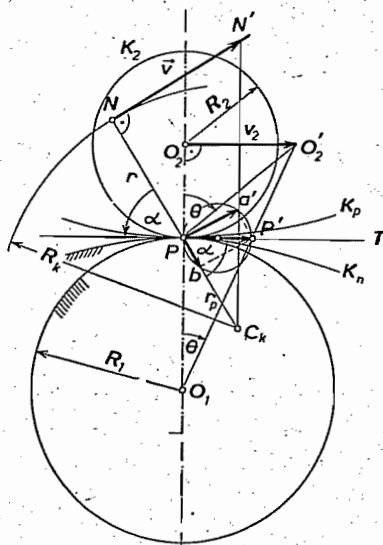
Усвојимо размеру u , такву да је $\omega = 1$, онда је $v_C = v_P = R$, па тачка C' лежи на кругу (сл. 98). Брзина покретне тачке је $v = r$, па је $N_3 N_3' = v_3 = r_3$. Потег $P_3 C'$ сече круг брзине пола (P) у тачки a' . Права $N_3' a'$ сече потег $P_3 N_3$ у тачки $3'$, која је средиште кривине циклоиде за положај покретне тачке у N_3 .

Истим поступком одредили бисмо и остале тачке — средишта кривине, за 12 положаја тачке N . Из слике 98. видимо да је геометријско место средишта кривине циклоиде — еволута циклоиде — конгруентна циклоиди, само померена за 2π , у смеру осе Ox , што је позната особина циклоиде.

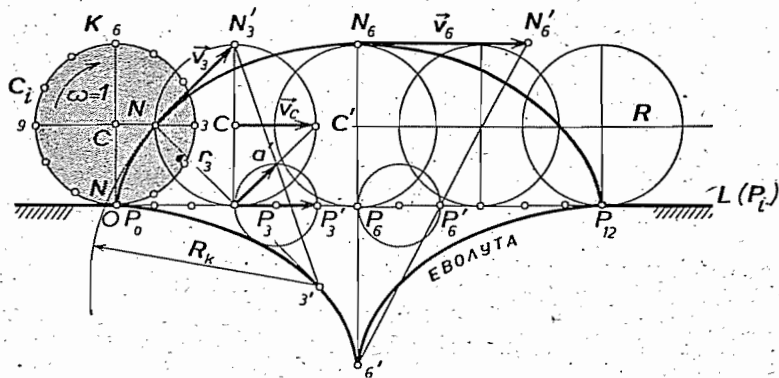
Пошто брзина покретне тачке пада у правац тангенте циклоиде, а вектор кривине у правац савне нормале, то су *тангенте еволуће нормале еволвенте*, и *обрнуто*, што је позната особина еволвенти и еволута.

Истом конструкцијом утврдили бисмо да је еволута кружне еволвенте круг.

Примери. — 46. Штап AB , дужине $l = 30$ cm, ослањајући се на непокретни круг, полупречника $r = 15$ cm, крајем A клизи по правој Ox , која пролази кроз средиште круга. Одредити једначине путања тренутних полова штапа AB . Колика је брзина другог краја B штапа у тренутку када је $OA = 25$ cm (сл. 99), а брзина краја A износи 1 msec⁻¹, са смером $+Ox$ -осе?



Слика 97. — Одређивање средишта кривине путања (еволуте)



Слика 98. — Еволута циклоиде је циклоида

Решење. — Усвојимо покретни координатни систем $A\xi\eta$, који је везан за штап, онда је

$$y_A = 0; \quad x_A = \frac{R}{\cos \varphi}; \quad y'_A = 0; \quad x'_A = R\omega \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

па једначине (152) постају

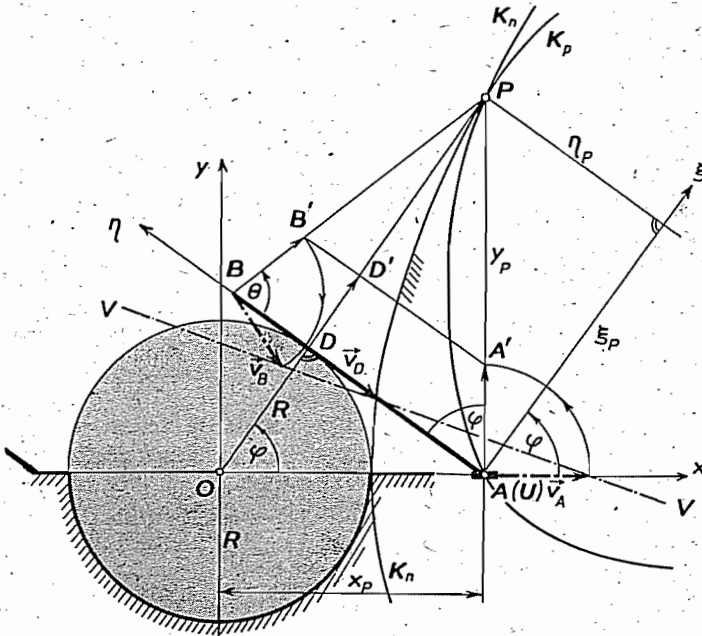
$$x_P = \frac{R}{\cos \varphi}; \quad y_P = R \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Елиминисањем параметра φ из ових једначина добићемо једначину непокретне рулете:

$$x_P^2 (x_P^2 - R^2) - R^2 y_P^2 = 0.$$

На исти начин из једначина (153) биће:

$$\xi_P = -\frac{1}{\omega} (-x_A \sin \varphi + y_A \cos \varphi) = R \operatorname{tg}^2 \varphi; \quad \eta_P = \frac{1}{\omega} (x_A \cos \varphi + y_A \sin \varphi) = R \operatorname{tg} \varphi.$$



Слика 99. — Параболограф.

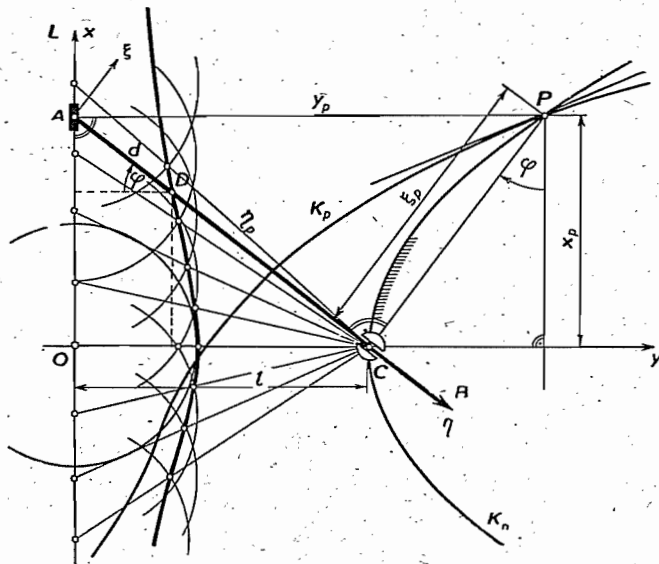
па елиминисањем параметра φ добијамо једначину покретне рулете:

$$\eta_P^2 = R \xi_P.$$

Она је парабола са теменом у тачки A .

У датом положају је $\overline{OA} = x_P = 25$ cm, те је $\cos \varphi = 3/5$, $\sin \varphi = 4/5$, $y_P = \overline{AP} = 100/3$ cm, $v_A = \overline{AP} \cdot \omega = 100$ cm/sec, $\omega = 3$ sec $^{-1}$, па је $v_B = \overline{BP} \cdot \omega = 85,4$ cm/sec, јер је $\overline{BP}^2 = l^2 + y_P^2 - 2ly_P \cos \varphi = 7300/9$ cm 2 . Због $\overline{PD} = y_P \sin \varphi = 80/3$ биће $v_D = \overline{PD} \cdot \omega = 80$ cm/sec. Вредност је одређена и графички помоћу велоциде.

47. Штап AB креће се тако да му крај A клизи по сталној правој L , а други крај пролази кроз сталну тачку C , која се налази на растојању l од прве-праве (сл. 100). Одредити једначине тренутних полова штапа и једначину линије путање тачке D штапа која се налази на растојању d од A (конхоидограф).



Слика 100. — Конхоидограф

Решење. — Пол брзине је у тачки P , која је одређена координатама

$$x_p = l \operatorname{tg} \varphi; \quad y_p = l + x_p \operatorname{tg} \varphi,$$

па после елиминисања φ добијамо једначину непокретне рулете:

$$x_p^2 = l(y_p - l),$$

те је *парабола* са теменом у сталној тачки C .

У координатном систему $A\xi\eta$ пол је одређен координатама:

$$\xi_p = \frac{x_p}{\cos \varphi} = \frac{l \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}; \quad \eta_p = \frac{l}{\cos \varphi},$$

па је једначина покретне рулете

$$\eta_p^4 = l^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

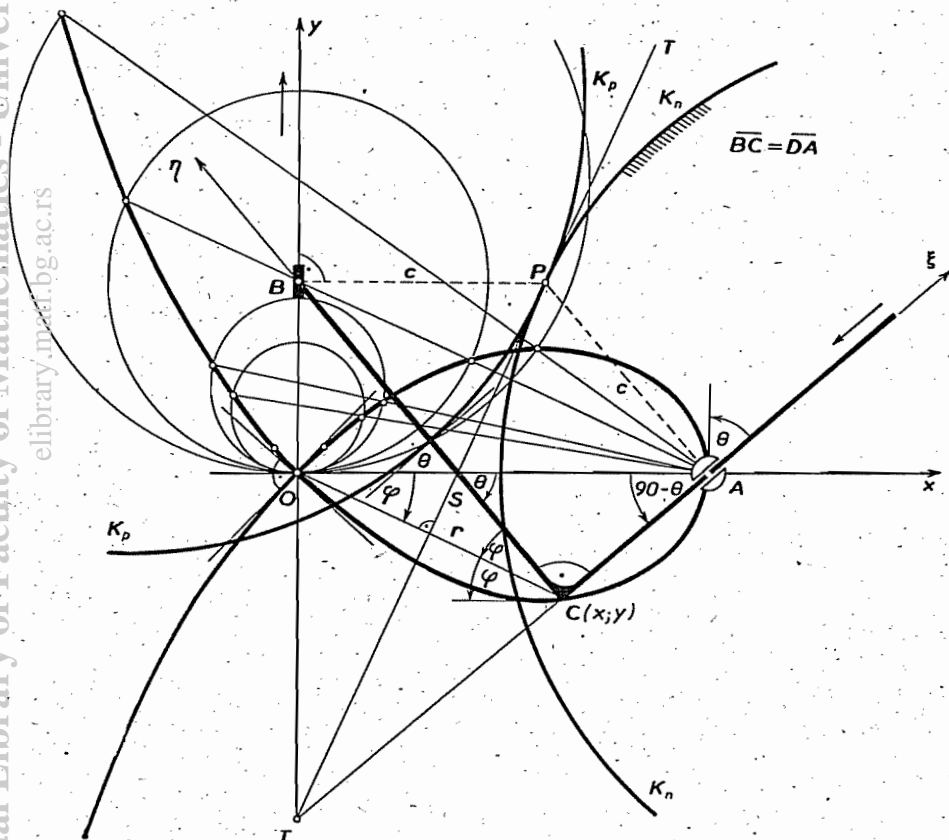
Координате тачке D јесу $x = l \operatorname{tg} \varphi - d \sin \varphi$; $y = d \cos \varphi$, и после елиминисања φ добијамо линију путање тачке D :

$$x^2 y^2 = (l - y)^2 (d^2 - y^2),$$

криву четвртог реда — *конхоиду*.

48. Краци правог угла ABC крећу се тако да тачка B клизи по вертикалној правој, а други крај пролази кроз сталну тачку A (сл. 101). Одредити путање тренутних полова и путању темена C правог угла ако је $\overline{BC} = \overline{OA} = l$.

Решење. — За конфигурацију приказану сликом 101. тренутни пол налази се у пресеку нормала повучених у тачкама A и B на правце брзина ових тачака, то јест у тачки P . Ако је S пресечна тачка штапа AB са правом OA , онда су троуглови $\triangle OSB$ и $\triangle ASC$ подударни, па је $OS = SC$. Исто тако, подударни су и троуглови $\triangle PBS$ и $\triangle PSA$, те је $BP = AP = c$.



Слика 101. — Строфоидограф

Координате пола за координатне системе Oxy и $C\xi\eta$ биће:

$$x_p = c; \quad y_p = c \sin \theta; \quad \xi_p = c \sin \theta; \quad \eta_p = c.$$

Како је $l = c + c \cos \theta = c(1 + \cos \theta)$, елиминисањем параметра θ из претходних једначина добијамо

$$y_p^2 = 2lx_p - l^2; \quad \xi_p^2 = 2l\eta_p - l^2,$$

то јест конгруентне параболе чије су жиже тачка A , односно B , а праве $x=0$, односно $\xi=0$, директрисе. Права ST је заједничка тангента обеју параболо.

Путању лачке C , у поларном координатном систему са Ox -осом, одредићемо, по синусној теорему, из троугла OAC . Пошто је $OS = SC$, троугао $\triangle OSC$ је једнакокраки, па је $\theta = 2\varphi$. Одатле добијамо једначину путање тачке C :

$$\frac{r}{\cos \theta} = \frac{l}{\sin [90^\circ + (\theta - \varphi)]}, \quad \text{односно } r = l \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

Ово је једначина *сирофоиде*, са полом у координатном почетку O . Путању тачке C можемо врло лако добити и пресликавањем координатног почетка O преко тангенте ST обеју рулета.

49. Круг, полупречника $R_2 = 2$ cm, котрља се *сиола* по кругу, полупречника $R_1 = 4$ cm. Сређити графички и аналитички путању тачке N на обиму покретног круга. Затим одредити положај тачке, њену брзину и убрзање при обртају круга K_2 за $3/4$ обима ако је број обртаја у минути $n = 30$ (сл. 102).

Решење. — Путања је епиклоида (сл. 102). Њене параметарске једначине добијамо, за показани координатни систем $O_1 x, y$ облику

$$x = \frac{1}{2} R_1 (3 \cos \varphi - \cos 3 \varphi);$$

$$y = \frac{1}{2} R_1 (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi),$$

па је поларна једначина са поломом у O_1 :

$$r = R_1 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi}.$$

За $\varphi = 135^\circ$ биће

$$r_0 = 2\sqrt{10} \approx 7 \text{ cm}, \quad \omega = \pi, \quad \dot{\omega} = 0.$$

Пошто су

$$\dot{r} = \frac{48 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \dot{\omega} = \frac{6}{5} \pi \sqrt{10}, \quad \ddot{r} = -\frac{48 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\omega}}{r^2} = -\frac{18}{25} \sqrt{10} \pi^2,$$

добијамо компонентне брзине и компонентна убрзања:

$$v_r = -\frac{6}{5} \pi \sqrt{10} \text{ cm sec}^{-1}; \quad v_\varphi = 2\sqrt{10} \pi \text{ cm sec}^{-1}; \quad a_r = -\frac{68}{25} \pi^2 \sqrt{10} \text{ cm sec}^{-2};$$

$$a_\varphi = \frac{12}{5} \pi^2 \sqrt{10} \text{ cm sec}^{-2};$$

па су интензитети брзине и убрзања:

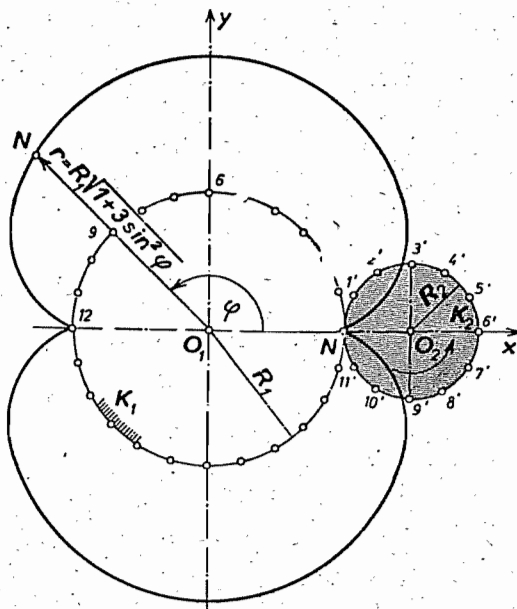
$$v = \frac{4}{5} \pi \sqrt{85} \text{ cm sec}^{-1}; \quad a = \frac{8}{25} \pi^2 \sqrt{1285} \text{ cm sec}^{-2}.$$

9.6. Бресови кругови. — Помоћу (156) одређујемо вектор положаја тренутног пола у односу на некретни триедар Oxy :

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{p} = \vec{r}_A + \frac{1}{\omega^2} [\omega, \vec{v}_A].$$

Диференцирањем овог израза, добиће се брзина тренутног пола:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \{[\omega, \vec{v}_A] \omega^2 + [\omega, \vec{a}_A] \omega^2 - 2 \omega \dot{\omega} [\omega, \vec{v}_A]\} / \omega^4.$$



Слика 102. — Обична епиклоида

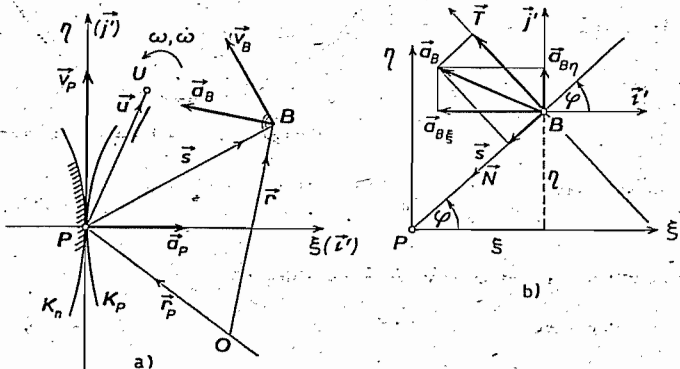
Како су $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{k}$, то је $\vec{\omega} \dot{\vec{\omega}} = (\dot{\omega}, \omega)$, па је $[\vec{\omega}, \vec{v}_A] = \omega [\vec{k}, \vec{v}_A] = \omega [\vec{\omega}, \vec{v}_A] / \dot{\omega}$. Сада се претходни израз за брзину пола може написати и у овом облику:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} [\vec{\omega}, \vec{a}_A] - \frac{1}{\omega^2} [\dot{\vec{\omega}}, \vec{v}_A]. \quad (177)$$

Нека су угаона брзина и угаоно убрзање плоче позитивни. Изаберимо тачку A покретне плоче тако да се стално поклапа са тренутним полом P , онда ће брзина тренутног пола у односу на триедар Oxy бити колинеарна са $P\eta$ -осом, као брзина оне тачке непомицне плоче која се поклапа са тренутним полом (сл. 103а), али ће бити $\vec{v}_A = 0$, јер је то брзина оне тачке покретне плоче која се поклапа са тренутним полом. Због тога претходни образац постаје

$$\vec{v}_P = \frac{1}{\omega^2} [\vec{\omega}, \vec{a}_P] = \frac{a_P}{\omega} \vec{j}', \quad (178)$$

јер је $\vec{a}_A = \vec{a}_P$. Помоћу ове једначине можемо одредити убрзање тренутног пола.



Слика 103. — Брзина и убрзање тренутног пола

Ради тога помножимо дату једначину векторски вектором $\vec{\omega}$:

$$\omega^2 [\vec{\omega}, \vec{v}_P] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{a}_P]] = \vec{\omega} (\omega, a_P) - \omega^2 \vec{a}_P,$$

онда, због управности вектора $\vec{\omega}$ и \vec{a}_P , мора бити $(\vec{\omega}, \vec{a}_P) = 0$, па је убрзање тренутног пола

$$\vec{a}_P = [\vec{v}_P, \vec{\omega}] = \omega v_P \vec{i}'. \quad (179)$$

Оно, дакле, пада у правац осе $P\xi$ и усмерено је ка конкавној страни покретне рулете, тако да ова три вектора, \vec{a}_P , \vec{v}_P и $\vec{\omega}$, образују десни координатни триедар.

Положај произвољне тачке B покретне плоче одређен је у односу на триедар $P\xi\eta$ вектором $\overrightarrow{PB} = \vec{s}$, па је брзина те тачке $v_B = s\omega$ и управна је на потегу \overrightarrow{PB} . Њено убрзање је

$$\vec{a}_B = \vec{a}_P + \vec{a}_{BT}^{(P)} + \vec{a}_{BN}^{(P)} = \vec{a}_P + [\vec{\omega}, \vec{s}] - \omega^2 \vec{s} = (\omega v_P - \dot{\omega}\eta - \omega^2 \xi) \vec{i}' + (\dot{\omega}\xi - \omega^2 \eta) \vec{j}'. \quad (180)$$

Декартове координате вектора убрзања тачке B за осе покретног координатног система $P\xi\eta$ (сл. 103b) биће

$$a_{B\xi} = \omega v_P - \dot{\omega}\eta - \omega^2 \xi; \quad a_{B\eta} = \dot{\omega}\xi - \omega^2 \eta.$$

Геометријска места тачака покретне плоче за која су Декартове координате једнаке нули ($a_{B\xi} = 0$; $a_{B\eta} = 0$) биће

$$\frac{\xi}{v_P/\omega} + \frac{\eta}{\omega v_P/\dot{\omega}} = 1; \quad \eta = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \xi \quad (181)$$

и оне су праве линије L_1 и L_2 (сл. 104). Пошто је $\eta'_1 = -\omega^2/\dot{\omega}$, а $\eta'_2 = \dot{\omega}/\omega^2$, то је $\eta'_1 \eta'_2 = -1$, па су праве *управне*. Њихов пресек је пол убрзања (U), јер из (164), због $a_{P\xi} = v_P \omega$, $a_{P\eta} = 0$, биће

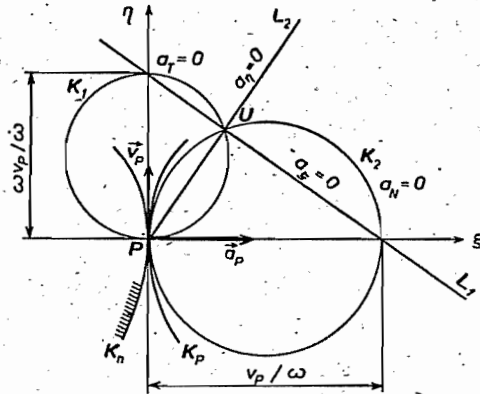
$$\xi_U = \omega^3 v_P / \Delta; \quad \eta_U = \omega \dot{\omega} v_P / \Delta;$$

$$\Delta = \omega^4 + \dot{\omega}^2.$$

Ортови тангенте и нормале кружне путање тачке B око трепутног пола (P) одређени су следећим изразима (сл. 103b):

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -\vec{i}' \sin \varphi + \vec{j}' \cos \varphi = \\ &= \frac{1}{s} (-\eta \vec{i}' + \xi \vec{j}'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= -\vec{i}' \cos \varphi - \vec{j}' \sin \varphi = \\ &= \frac{-1}{s} (\xi \vec{i}' + \eta \vec{j}'), \end{aligned}$$



Слика 104. — Бресови кругови

јер је $\vec{s} = \xi \vec{i}' + \eta \vec{j}'$. Због тога су природне координате вектора убрзања тачке B :

$$a_{BT} = -\frac{\omega v_P}{s} \eta + \dot{\omega} s; \quad s = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}; \quad a_{BN} = -\frac{\omega v_P}{s} \xi + \omega^2 s.$$

Геометријска места тачака B покретне плоче чије су природне координате једнаке нули ($a_{BT} = 0$; $a_{BN} = 0$) биће

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{\omega v_P}{\dot{\omega}} \eta = 0; \quad \xi^2 + \eta^2 - \frac{v_P}{\omega} \xi = 0, \quad (182)$$

и она су кругови K_1 и K_2 . Први круг је полупречника $R_1 = \omega v_P / 2 \dot{\omega}$, са средиштем на $P\eta$ -оси и пролази кроз пол P .

Овај круг се назива *прелазни круи*. Он је *геометријско местио шачака* *плоче* које у *шом шренушк*у имају само *нормално убрзање*, а *танјеницијално убрзање* *једнако је нули* ($a_T = 0$).

Други круг је *полупречника* $R_2 = v_P / 2\omega$, са *средиштем* на $P\xi$ -оси и *пролази* кроз *пол* P . Овај круг се назива по *Бресу* (*Bresse*)* *превојни круи*. Он је, *дакле*, *геометријско местио шачака* *плоче* које у *једној шренушк*у имају само *танјеницијалну компоненту убрзања*, а *нормално убрзање* *једнако је нули* ($a_N = 0$). Називе *превојни* и *прелазни* круг *Брес* је увео 1853. године због тога што је у *првом случају* $a_N = 0$, то јест *полупречник* *кривине* је *бесконечно велики*, па се *тачка налази* на *месту путање* где је *превој*, или је, *пак*, то *повратна* *тачка* *путање*. У *другом случају* је $a_T = 0$, што значи да је *брзина* у *екстремуму* и *убрзање* *прелази* из *позитивне* у *негативну вредност*. У *пресеку* (U) *оба ова* *круга*, који се зову *Бресови круи* *ови*, налази се *пол убрзања* (сл. 104).

На овај начин *добили* смо *четири* *геометријска местио шачака* *плоче*: *два* су *геометријска места* *оних тачака* *покретне плоче* чије су *ортогоналне* *компоненте убрзања* *једнаке нули*, а *два* су *геометријска места* *оних тачака* чије су *природне* *компоненте убрзања* *једнаке нули*. *Прва* *два* *геометријска места* *тачка* *јесу* *праве линије*, *међусобно уйравне*, а *друга* *два* су *круи* *ови* са *средиштима* на *координатним осам*. Сва *четири* *геометријска места* *тачка* *секу* се у *полу убрзања*, који, *према* *томе*, у *посматраном тренутку*, *нема убрзања*.

Помоћу *превојног* *круга* може се *конструисати* *еволута* *путање*. Спојимо *покретну* *тачку* N (сл. 105) са *тренутним* *полом* P , онда *зрак* PN *сече* *превојни* *круг* у *тачки* W_1 .

Изаберимо *произвољну* *тачку* M у *равни* *кретања* и *спојимо* је са *тачком* W_1 . *Права* *повучена* из *пола* P *паралелно* са W_1M *сече* *праву* NM у *тачки* Q . Из *тачке* Q *повуцимо* *праву* *паралелну* *правој* MP , она ће *сећи* *потег* PN у *тачки* C_k — *средишћу* *кривине* *путање* — за *положај* *покретне* *тачке* у N .

Из *сличности* *троуглова* $\triangle NQC_k \sim \triangle PNM$, $\triangle PQC_k \sim \triangle PMW_1$, *добивамо* *однос*

$$\frac{QC_k}{PM} = \frac{C_kN}{PN} = \frac{r+r_P}{r}, \quad \frac{QC_k}{PM} = \frac{C_kP}{PW_1} = \frac{r_P}{PW \sin \alpha},$$

па је

$$\frac{r+r_P}{r} = \frac{r_P}{PW \sin \alpha}$$

Слика 105. — Конструкција *еволуте* *путање* *по* *моћу* *превојног* *круга*

односно

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_P}\right) \sin \alpha = \frac{1}{PW} = \frac{\omega}{v_P}$$

Растојања $r = \overline{PN}$ и $r_P = \overline{C_kP}$ *задовољавају* *Ојлер-Саваријеву* *једначину*, па је C_k *заиста* *средиште* *кривине*, то јест *тачка* *еволуте*.

* Први га је нашао *de la Hire*, 1706. године („Traité des roulettes“).

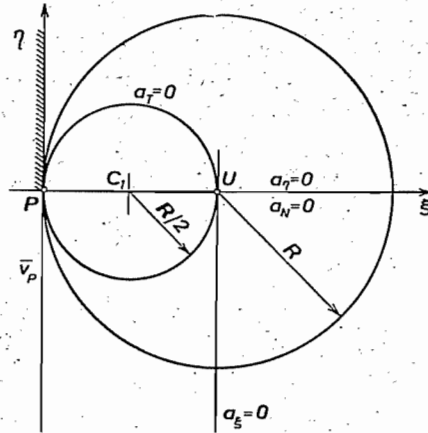
Пример. — 50. Круг полупречника R котрља се без клизања константном угаоном брзином ω по хоризонталној правој (сл. 106). Одредити геометријска места тачака покретне плоче чија су компонентна убрзања једнака нули.

Решење. — Како је угаона брзина $\omega = \text{const.}$, $\dot{\omega} = 0$, то је

$$v_P = R \omega = \text{const.}, \quad \vec{v}_P = -R \omega \vec{j},$$

па су геометријска места тачака за која су Декартове координате убрзања једнаке нули (181): за $a_\xi = 0$ је $\xi = v_P / \omega = R$, а за $a_\eta = 0$ је $\eta = 0$. Прва права је паралелна $P\eta$ -оси, а друга се поклапа са $P\xi$ -осом. *Пол убрзања* се поклапа са средиштем (C) круга.

Бресови су кругови: прелазни — оса $P\xi$, и превојни — са средиштем на $O\xi$ -оси, полупречника $R_2 = R/2$.

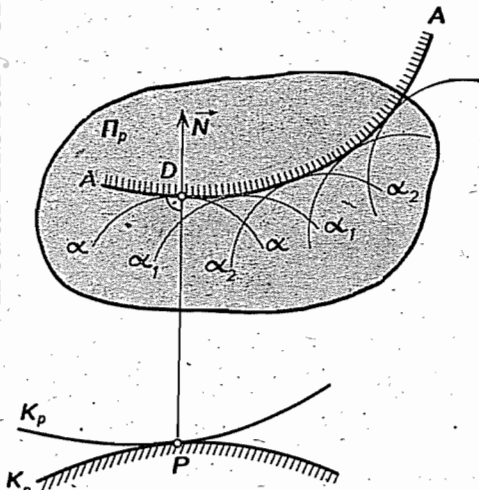


Слика 106. — Бресови кругови при циклоидном кретању

9.7. Принудно кретање. — Положај тренутног пола равнoг кретања кругог тела одређен је, као што смо навели, правцима кретања његових двеју тачака. За познавање кретања био нам је потребан још један податак: угаона брзина плоче, или, пак, брзина произвољне тачке плоче.

Кретање је, дакле, било одређено са *једним* податком, па је имало *једну* степен слободe кретања.

Најважнији случајеви равнoг кретања јесу они када су путање тачака плоче *јединствено* одређене (*јединачно*). У том случају равнo кретање је одређено само *једним* податком, те има само *један* степен слободe кретања. Оваква кретања називају се *принудна*, и у техничкој примени су најважнија, јер се јављају код разних механизма.



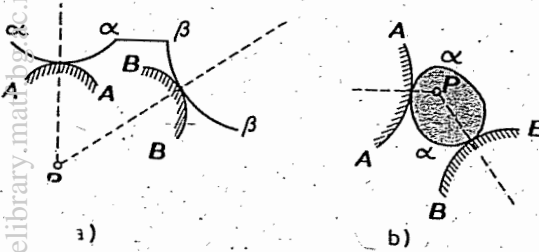
Слика 107. — Анвелопе

Нека је α - α произвољна крива покретне плоче (P_p), која се креће заједно са плочом, према сталној — непокретној — равни (P_n), онда ће она при овом кретању — при котрљању без клизања покретне по непокретној рулети — заузимати низ узастопних положаја α_1 - α_1 , α_2 - α_2 , ... За све ове криве линије можемо у непокретној равни повући *обвојницу* (*анвелоиду*) која се зове *обвојница* (*анвелоида*) *пушање* ($A-A$) за дату *обвојну* криву α - α (сл. 107).

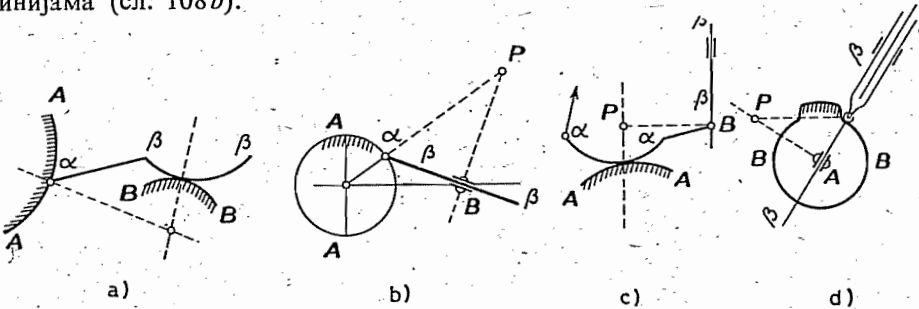
Помоћу обвојнице путање обвојне криве можемо да одредимо равно кретање тела. У додирној тачки ових кривих линија (D) повучимо нормалу (\vec{N}) која мора да пролази кроз тренутни пол, јер се елементарно померање тачке (D) може сматрати луком описаним из пола полупречником \vec{PD} . Дакле, при кретању обвојне криве ($\alpha-\alpha$) по неокрећној обвојници ($A-A$) тренутни пол увек лежи на нормали у додирној тачки кривих. Да бисмо могли тачно одредити положај тренутног пола, потребна је још једна обвојница ($B-B$) и обвојна крива ($\beta-\beta$), пошто је пол једнозначно одређен пресеком нормала повучених у додирним тачкама ових парова

кривих линија. Обвојница и обвојна крива образују пар анVELOИА. Према томе, положај покретне плоче према непокретној плочи одређен је са два пара анVELOИА (сл. 108a и b), па се две криве покретне плоче крећу по двема кривим линијама непокретне плоче. Овај начин извођења кретања

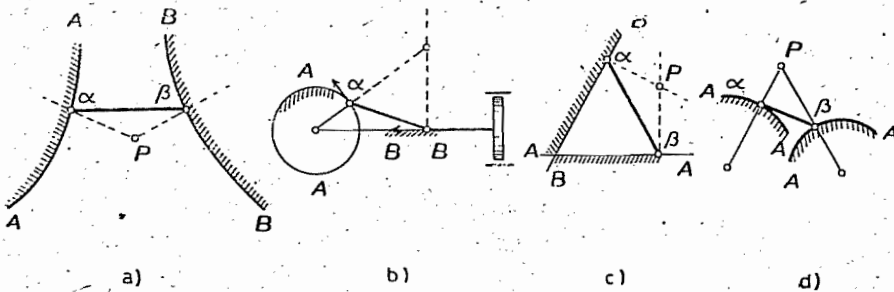
зове се вођење са две криве. Уместо две криве покретне плоче може бити и само једна крива, која се истовремено креће по двема сталним кривим линијама (сл. 108b).



Слика 108. — Вођење са две криве



Слика 109.1. — Вођење са тачком и кривом

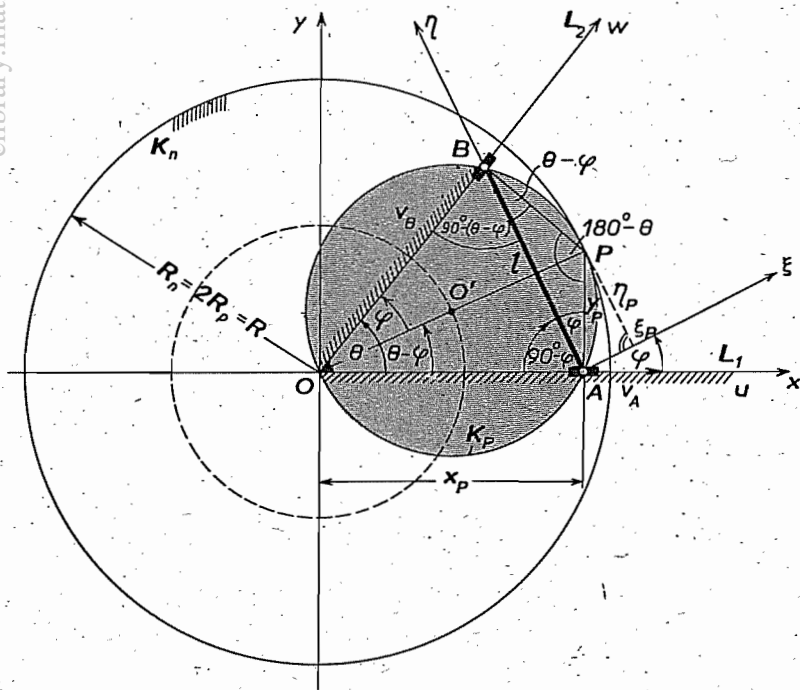


Слика 109.2. — Вођење са две тачке

Анвелопе се могу свести и на тачке, па постоје још два начина всења, и то: *вођење са шачком и кривом* (сл. 109.1), где се једна обвојна личија своди на тачку, и *вођење са две шачке* (сл. 109.2), где су обе обвојне криве тачке.

На претходним сликама приказани су начини за одређивање тренутног пола.

9.8. Карданов проблем. — а) *Карданов директни проблем.* — Када се крајеви A и B (клизачи) штапа AB , дужине l , крећу по двама сталним правима (L_1) и (L_2) онда можемо покретну плочу заменити покретним штапом, а непокретна раван је одређена тим правима које се секу у тачки O и чине угао θ . Брзине клизача A и B (сл. 110а) падају у правце сталних правих, а праве повучене управно на њих секу се у тренутном полу (P):



Слика 110 а) — Карданов директни проблем — рулете

Како су углови $\sphericalangle OAP$ и $\sphericalangle OBP$ прави, тачке O, A, B, P леже на кругу пречника $\overline{OP} = R$. При кретању штапа AB по сталним правима пол се креће по кругу (K_p) који је покретна рулета.

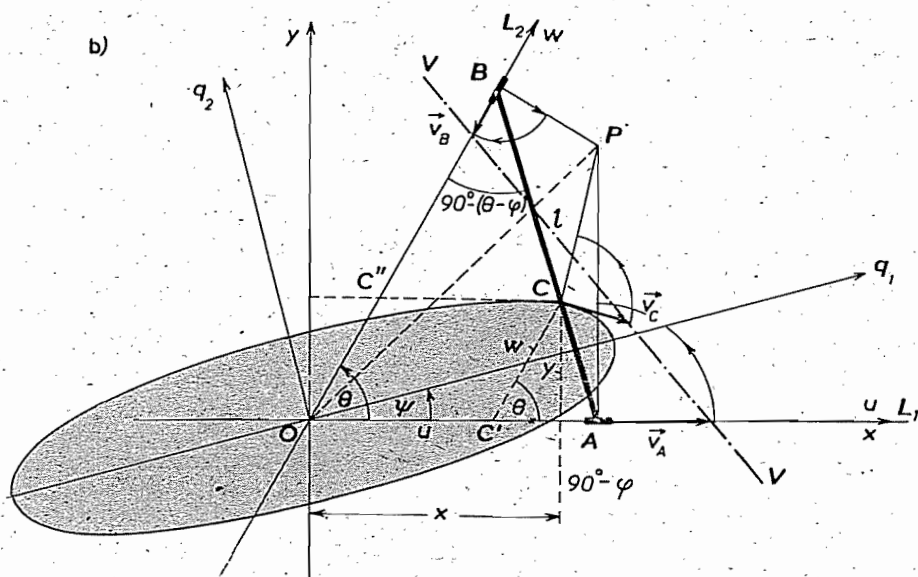
Пошто су l и θ стални, можемо пречник покретне рулете изразити помоћу њих у облику:

$$\overline{OP} = \overline{OA} / \cos(\theta - \varphi) = l / \sin \theta = R,$$

јер су углови $\sphericalangle AOP$ и $\sphericalangle ABP$ једнаки као периферијски над истим луком \widehat{AP} , а из троугла $\triangle OAB$, према синусној теореме, следи однос

$$\overline{OA} : \sin [90^\circ - (\theta - \varphi)] = \overline{AB} : \sin \theta, \text{ то јест } \overline{OA} : \cos (\theta - \varphi) = l : \sin \theta.$$

И непокретна рулета је круг, полупречника R , па се проблем кретања штапа сталне дужине, по крацима који граде одређени угао θ , своди на *кошљање без клизања круга полупречника $\frac{1}{2}R$ изнутра по кругу полупречника R* . Кретање је, дакле, *хипоциклоидно*. Проблем овог кретања први је решио *Кардано* (*Gerónimo Cardano*, 1501 – 1576), па се ове рулете називају *Карданови кругови*.



Слика 110 б) — Карданов директни проблем — путања тачке штапа

Да бисмо рулете одредили аналитички, учимо координатне системе: *непокретни* Oxy и *покретни* $A\xi\eta$. Из троуглова $\triangle OAB$ и $\triangle ABP$, на основу синусне теореме, координате пола у оба система биће:

$$x_P = \overline{OA} = l \frac{\cos (\theta - \varphi)}{\sin \theta}; \quad y_P = \overline{AP} = l \frac{\sin (\theta - \varphi)}{\sin \theta};$$

$$\xi_P = y_P \sin \varphi = l \frac{\sin (\theta - \varphi) \sin \varphi}{\sin \theta} = l (\sin \varphi \cos \varphi - \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \varphi);$$

$$\eta_P = y_P \cos \varphi = l \frac{\sin (\theta - \varphi) \cos \varphi}{\sin \theta} = l (\cos^2 \varphi - \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \cos \varphi),$$

пошто су углови $\sphericalangle APB = 180^\circ - \theta$, $\sphericalangle ABP = \theta - \varphi$.

Елиминисањем параметра φ из система ових једначина добићемо једначину непокретне ролете:

$$x_P^2 + y_P^2 = \left(\frac{l}{\sin \theta} \right)^2 = R^2, \quad (183)$$

круг, полупречника R , са средиштем у тачки O . Једначину покретне ролете добићемо користећи се тригонометријским релацијама:

$$\sin^2 \varphi = 1/2 (1 - \cos 2\varphi), \quad \cos^2 \varphi = 1/2 (1 + \cos 2\varphi)$$

и односима

$$\xi_P + 1/2 l \operatorname{ctg} \theta = 1/2 l (\sin 2\varphi + \operatorname{ctg} \theta \cos 2\varphi),$$

$$\eta_P - 1/2 l = 1/2 l (\cos 2\varphi - \operatorname{ctg} \theta \sin 2\varphi)$$

у облику

$$(\xi_P + 1/2 l \operatorname{ctg} \theta)^2 + (\eta_P - 1/2 l)^2 = \left(\frac{l}{2 \sin \theta} \right)^2 = (1/2 R)^2 \quad (183')$$

то јест круг, полупречника $1/2 R$.

Координате средишта овог круга јесу $-1/2 l \operatorname{ctg} \theta$ и $1/2 l$.

Превојни круг Кардановог кретања јесте сама покретна ролета.

Тачке A и B (клизачи) штапа AB крећу се праволинијски по крацима L_1 и L_2 , а све остале тачке штапа описују елипсе са средиштем у тачки O . Декартове косоугле координате u , w произвољне тачке C штапа AB (сл. 110b) одређујемо, према синусној теорему, из троуглова $\triangle C B C''$ и $\triangle A C C''$:

$$u : \sin [90^\circ - (\theta - \varphi)] = \overline{BC} : \sin \theta; \quad w : \sin (90^\circ - \varphi) = \overline{AC} : \sin \theta.$$

у облику

$$u = (1 - \lambda) l \frac{\cos (\theta - \varphi)}{\sin \theta}; \quad w = \lambda l \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}; \quad \overline{AC} = \lambda l; \quad \overline{BC} = (1 - \lambda) l.$$

Пошто су

$$\sin \varphi = \frac{u}{(1 - \lambda) l} - \frac{w}{\lambda l} \cos \theta, \quad \cos \varphi = \frac{w}{\lambda l} \sin \theta,$$

степеновањем добијамо једначину елипсе у косоуглом систему Ouw :

$$\lambda^2 u^2 - 2 [\lambda (1 - \lambda) \cos \theta] u w + (1 - \lambda)^2 w^2 - \lambda^2 (1 - \lambda)^2 l^2 = 0. \quad (184)$$

Декартове правоугле координате тачке C јесу

$$x = \overline{OA} - \overline{AC} \cos (90^\circ - \varphi) = l [\cos (\theta - \varphi) / \sin \theta] - \lambda l \sin \varphi,$$

$$y = \overline{AC} \sin (90^\circ - \varphi) = \lambda l \cos \varphi = l [\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi + (1 - \lambda) \sin \varphi],$$

па елиминисањем угла φ добијамо једначину елипсе*

$$\lambda^2 x^2 - (2\lambda \operatorname{ctg} \theta) xy + [(1-\lambda)^2 + \operatorname{ctg}^2 \theta] y^2 - \lambda^2 (1-\lambda)^2 l^2 = 0, \quad (184')$$

јер је $J_2 = \lambda^2 (1-\lambda)^2 > 0$. Ротацијом за угао ψ , чији је

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2\lambda \operatorname{ctg} \theta / (1 - 2\lambda + \operatorname{ctg}^2 \theta),$$

једначина се може свести на канонички облик.

На пример, за $l=9$ cm, $\theta=60^\circ$, $\lambda=1/3$ биће: $\operatorname{ctg} \theta = 1/\sqrt{3}$, $\cos \theta = 1/2$, па су једначине елипсе:

a) у косоуглом систему Ouv : $u^2 - 2uv + 4v^2 - 36 = 0$,

b) у правоуглом систему Oxy : $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 - 36 = 0$.

Због $J_1=8$; $J_2=4$, то је $z^2 - 8z + 4 = 0$; $M=4-2\sqrt{3}$; $N=4+2\sqrt{3}$, па су полуосе елипсе:

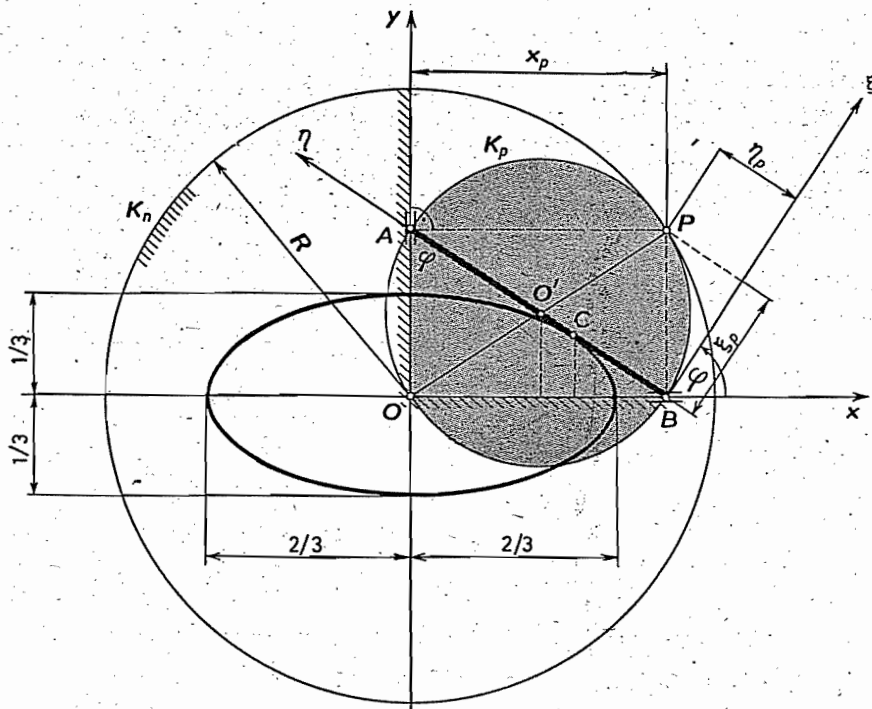
$$a = 3\sqrt{4+2\sqrt{3}} \approx 8,19 \text{ cm}, \quad b = 3\sqrt{4-2\sqrt{3}} \approx 2,20 \text{ cm}.$$

Елипса је приказана на слици 110b.

При познатој брзини тачке A (v_A) одређене су помоћу тренутног пола (P) и велоцидите $V-V$ брзине тачака B и C . Брзина ове друге тачке пада у правац тангенте на путању — елипсу.

У случају да су краци ортононални (сл. 111) биће $\theta=90^\circ$, па су рулете

$$x_P^2 + y_P^2 = l^2 = R^2; \quad \xi_P^2 + (\eta_P - 1/2 l)^2 = (1/2 l)^2 = (1/2 R)^2 \quad (185)$$



Слика 111. — Елипсограф са управним крацима

* Чл. 2.5.

и једначина елипсе неке тачке C штапа AB :

$$\lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 - \lambda^2 (1-\lambda)^2 l^2 = 0, \quad (186)$$

односно

$$\frac{x^2}{(1-\lambda)^2 l^2} + \frac{y^2}{(\lambda l)^2} = 1. \quad (186')$$

Једначина елипсе је сведена на канонични облик, па су полуосе елипсе $a = (1-\lambda)l$, $b = \lambda l$. Када је $\lambda < 1/2$, тада је полуоса $a > b$, и обратно, када је $\lambda > 1/2$, тада је полуоса $a < b$.

За $\lambda = 1/2$ елипса постаје круи.

На овај начин можемо конструисати елипсе механички, па се овакав апарат назива *елипсограф* или *елиптички циркл*.

Нормала спуштена из координатног почетка O на праву AB гради са Ox -осом угао φ , па је једначина праве

$$\begin{aligned} x \cos \varphi + y \sin \varphi - p &= x \cos \varphi + \\ &+ y \sin \varphi - l \sin \varphi \cos \varphi = 0, \end{aligned}$$

те из услова

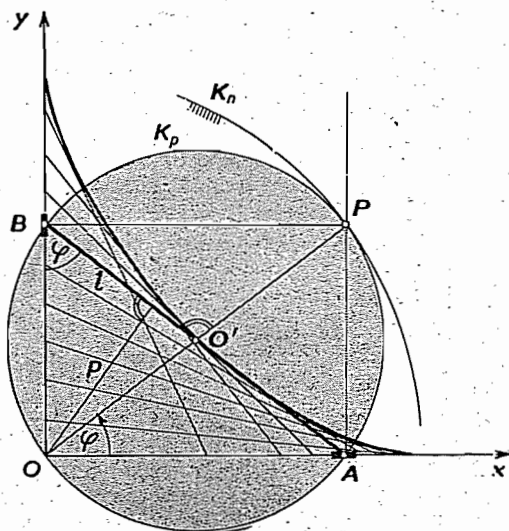
$$\begin{aligned} df/d\varphi &= -x \sin \varphi + \\ &+ y \cos \varphi - l \cos 2\varphi = 0 \end{aligned}$$

и претходне једначине добијамо да је обвојница фамилије правих линија AB које зависе од параметра φ , астероида $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. Кретање се може представити као котрљање обвојне криве (праве AB) по непокретној обвојници (*астероиду*, сл. 112).

Из особине обвојнице и обвојне криве може се лако конструисати тангента на астероиду, пошто тренутни пол лежи на нормали у додирној тачки.

b) Карданов инверзни проблем. — Ако у Кардановом проблему узмемо да су тачке A и B сталне, а да се праве (L_1) и (L_2) крећу, пролазећи кроз ове две сталне тачке, онда су и рулете промениле своје улоге. Круг полупречника R котрља се *своља* по кругу полупречника $1/2 R$. Тренутни пол (P) остаје исти. Кретање је, дакле, *еициклоидно*.

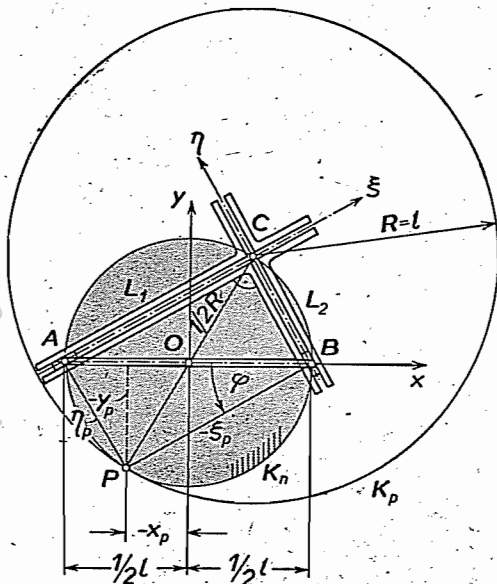
Тачке покретне плоче описују *конхоиде* (*Паскалове њужеве*), а тачке покретне рулете *кардиоиде*.



Слика 112. — Астероида је обвојница елипсе

За координатне системе изабране на слици 113. биће $\theta = 90^\circ$, те су

$$y_P^2 = (\frac{1}{2}l + x_P)(\frac{1}{2}l - x_P); \quad -\xi_P = l \cos \varphi; \quad -\eta_P = l \sin \varphi,$$



Слика 113. — Карданов инверзни проблем

Решење. — Пошто су $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, из једначина 156 одредићемо координате тренутног пола у оба координатна система:

$$x_P = \frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ m}; \quad y_P = \frac{1}{2} \text{ m};$$

$$\xi_P = \frac{1}{4} \sqrt{3} \text{ m}; \quad \eta_P = \frac{1}{4} \text{ m}.$$

Путање полова су Карданови кругови, полупречника 1 m и $\frac{1}{2}$ m, са средиштима у тачкама O и O', на половини штапа AB.

Путања тачке C је елипса:

$$\frac{x^2}{(\frac{2}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{3})^2} = 1, \quad \text{полуоса } \frac{2}{3} \text{ m и } \frac{1}{3} \text{ m}.$$

Ако је кретање тачке B хармонијско, координате тачке C биће:

$$x = \frac{2}{3} \cos \theta = -\frac{1}{3} \sin 2t; \quad y = \frac{1}{3} \sin \theta = \frac{1}{6} \sqrt{4 - \sin^2 2t}.$$

Изводи координата по времену су

$$\dot{x} = -\frac{2}{3} \cos 2t, \quad \dot{y} = -\frac{1}{6} \frac{\sin 4t}{\sqrt{4 - \sin^2 2t}},$$

па је интензитет брзине

$$v = \frac{1}{3} \cos 2t \sqrt{\frac{13 + 3 \cos^2 2t}{3 + \cos^2 2t}}.$$

52. Помоћу превојног круга одредити еволуту путање тачке C штапа AB из претходног задатка.

па су рулете кругови једначина

$$\begin{cases} y_P^2 + x_P^2 = \frac{1}{4} l^2, \\ \eta_P^2 + \xi_P^2 = l^2, \end{cases} \quad (187)$$

и полупречника

$$R = l; \quad \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} l; \quad \text{где је } \overline{AB} = l.$$

Примери. — 51. Штап AB елипсографа, дужине 1 m, клизи тачкама A и B по крацима правог угла uOx (сл. 111).

Одредити координате тренутног пола ако је $\varphi = 60^\circ$.

Напратити путање пола у оба координатна система.

Одредити путању тачке C штапа која га дели у размери $\overline{AC} : \overline{CB} = 2 : 1$.

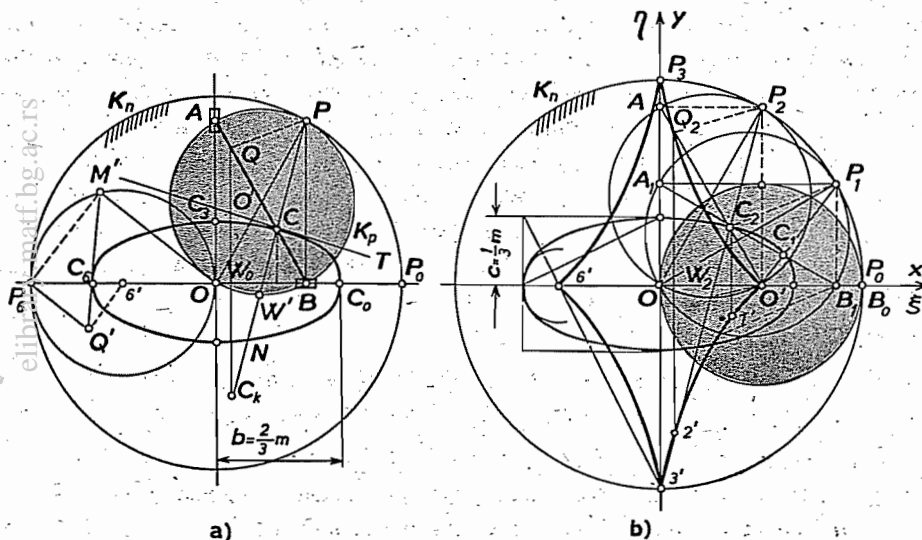
За случај да се крај B штапа креће хармонијски, по закону $x = \frac{1}{2} \sin 2t$, одредити брзину тачке C.

Решење. — У Кардановом проблему превојни круг је сама покретна рулета. Ради одређивања еволуте путање тачке C , за њен произвољан положај узмимо као произвољну тачку M тачку B , а за положаје C_0 и C_6 произвољну тачку M' (сл. 114а). Конструкцијом добијамо да је еволута елипсе астероида (сл. 114б) једначине

$$\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{2/3} + \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{2/3} = 1,$$

где су

$$a_1 = (b^2 - c^2)/b; \quad b_1 = (b^2 - c^2)/c.$$



Сл. 114. — Еволута елипсе је астероида

За дате податке $b = 2/3$ m, $c = 1/3$ m биће $a_1 = 1/2$ m, $b_1 = 1$ m, па је једначина еволуте

$$(2\xi)^{2/3} + (\eta)^{2/3} = 1.$$

За $\eta = 0$ биће $\xi_0 = \pm 1/2$ m, за $\xi = 0$ биће $\eta_0 = \pm 1$. Ове вредности одговарају тачкама O' и $3'$ еволуте (сл. 114 б).

Из конструкције видимо да је тангентна астероиде (еволуте) нормала елипсе (еволвенте), што је позната особина еволуте и еволвенте.

53. Одредити једначину путање тачке N штапа AB конхоидографа (сл. 115) ако је $\overline{OB} = b$, $\overline{AN} = b$.

Решење. — Овде је $\overline{OA} = b \operatorname{tg} \varphi$, па су

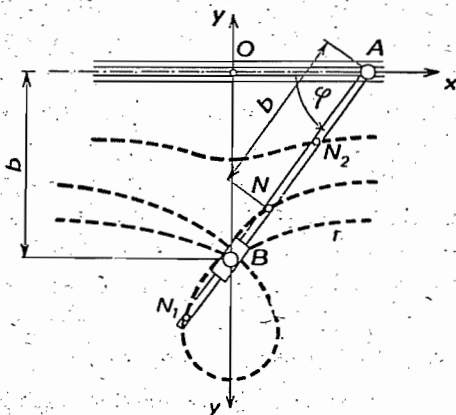
$$x = b(1 - \sin \varphi) \operatorname{ctg} \varphi; \quad y = -b \sin \varphi.$$

Елиминисањем угла φ добијамо једначину путање.

$$x^2 y^2 + y^2 (y + b)^2 = b^2 (y + b)^2$$

или

$$x^2 y^2 = (b + y)^2 \cdot (b^2 - y^2).$$



Слика 115. — Конхоидограф

Путања је конхоида са сингуларном — повратном — тачком.

Тачка N_1 описује конхоиду са замком — двојном тачком, а тачка N_2 конхоиду без сингуларних тачака.

9.9. Кинематички парови и ланци. Згљавкасти четвороугао. — Скуп материјалних тела који има задатак да претвара једно кретање у друго представља *механизам*; машина претвара један вид енергије у други. Да би механизам могао испунити своју улогу, морају бити одређена кретања свих његових саставних делова. Слободно тело може произвести, под утицајем сила, кретање у ма ком правцу, а како је битна карактеристика механизма одређеност кретања његових саставних делова, слободном телу мора се ограничити његова слобода кретања. Због тога се везује са другим телом. Таква два тела чија су кретања у узајамној вези, то јест која ограничавају релативну слободу кретања сваког од њих, образују *кинематички пар*. Тела од којих се састоји механизам називају се *чланови механизма*, а делови који служе за везивање чланова механизма и који омогућавају међусобно кретање чланова у кинематичком пару називају се *елементи кинематичког пара*.

Чланови механизма могу бити *крућа тела* (полуге, штапови), *еластична тела* (каиш, уже, ланац) и *течна тела* (вода, уље).

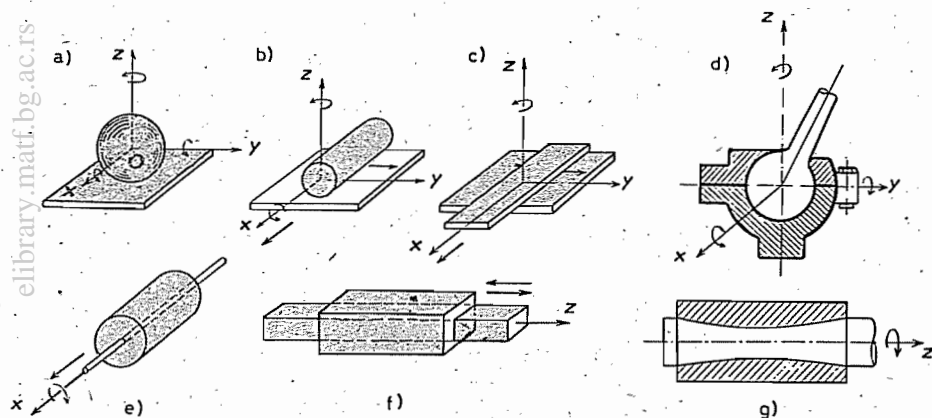
Према врстама кретања (транслаторно, обртно и завојно) и кинематички парови су различити: *транслаторни* (*клизач* и *вођица*), *обртни* (*криваје* и *лежишћа*), *осцилаторни* (*балансијери*) и *завојни* (*заврћањ* и *навртка*).

С обзиром на додир елемената парови се деле на *ниже* и *више*. Код нижих парова елементи се додирују по *површинама*, док се код виших додирују по *линијама* или пак у *тачкама*. Још је једна битна разлика између нижих и виших парова; први су *реверзибилни*, тј. парови могу изменити своје улоге, док виши нису реверзибилни. На пример, ако изменимо улоге заврћања и навртке добићемо исто кретање па било да се заврћањ креће а навртка мирује, или обрнуто. Али код кретања круга по сталној правој није исти случај. Видели смо да је у овом случају путања тачке на кругу циклоида, а у обрнутом случају, код котрљања праве по кругу, путања је еволвента.

Више чланова везаних кинематичким паровима образују *кинематички ланац*. Он може бити *проси* и *сложен*, према томе да ли сваки члан ланца има два или више кинематичких парова. Осим тога, ланци могу бити *ошворени* и *зашворени*. Према кретању, ланци се деле на *круће*, *слободне* и *принудне*. Крут ланац је непокретна фигура која се употребљава као носач (на пример решеткаст).

Слободни ланци немају одређено кретање, а принудни ланци врше одређена кретања, те представљају механизме.

Круто тело има у простору шест степени слободe кретања, па би толико степени имао и елемент кинематичког пара када би се слободно кретао у простору. Међутим, услед повезивања са другим елементом пара умањује му се број степени слободe у његовом релативном кретању. Према томе, степен слободe кретања елемента је $s=6-v$, где је v број условних веза кинематичког пара. Овај број може бити само цео број од 1 до 5, јер би за $v=0$ било $s=6$, то јест елемент би био слободан. Према броју условних веза (v) кинематички парови се деле на *пет* класа. Ако је један елемент пара *кула*, а други *платика равна* (сл. 116а), онда



Слика 116. — Класе кинематичких парова

она има пет степени слободe кретања у односу на равна: две трансляције у правцима оса Ox и Oy и три ротације око координатних оса. Дакле, условна веза је једна, јер нема трансляције у Oz -правцу ($v=1$), па је $s=6-1=5$. Због $v=1$ пар се зове *пет* *прве* класе. *Ваљак на равни* (сл. 116b) има $v=2$, јер не може да врши трансляцију у Oz -правцу и обртање око Oy -осе, па је пар *друге* класе, са $s=4$ степена слободe кретања. *Призма на равни* (сл. 116c) и *сферни зглоб* (сл. 116d) јесу парови *треће* класе, јер је $v=3$, пошто су у првом случају онемогућене три ротације, а у другом три трансляције. *Ваљак у ваљку* (сл. 116e) је пар *четврте* класе, пошто је $v=4$, јер су онемогућене две трансляције и два обртања, а *клизач и вођица* (сл. 116f) и *рукавац и лежиште* (сл. 116g) јесу парови *пете* класе, пошто могу да врше само по једно кретање, трансляторно, односно обртно. Из изложеног видимо да се број класе кинематичког пара *поклапа* са бројем његових условних веза.

Код механизма један је члан непокретан (назива се *поштоље*), па се посматра апсолутно кретање свих чланова система у односу на тај непокретни члан. Број *степен* слободe *таквог* *крећања* ланца (механизма) у односу на његов *непокретни* члан назива се *степен* *покретљивости* ланца.

Означимо са n број чланова ланца, онда је број степени слободе $6n - 6$, јер сваки члан има 6 степени слободе кретања, а један је члан непомичан. Међутим, чланови су везани паровима, те сваки пар класе v умањује v степени слободе кретања. Ако је p_v број пари класе v , онда је број степени слободе умањен за vp_v . Према томе, *сћејен њокрејљивосџи* кинематичког ланца је

$$S = 6(n - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (188)$$

Овај образац представља *сџрукџурну формулу кинематичкој ланца*, а поставио ју је руски математичар *Чебишев* (1821–1894). У немачкој литератури се назива *Гриблеров (Grübler) криџеријум о сџејену њокрејљивосџи кинематичкој ланца*.

Код *равној кинематичкој ланца* јављају се само парови четврте и пете класе, јер они имају два или један степен слободе кретања, па у (188) треба ставити уместо v вредност $v - 3$, те је *сџрукџурна формула равној кинематичкој ланца*

$$S = 3(n - 1) - 2p_5 - p_4. \quad (189)$$

У овом случају пар пете класе је *џранслајџорни* или *обрџни њар*; ови су парови *нижи*, јер се додирују по површинама. Парови четврте класе су *виши*, пошто се додирују по линијама и у тачкама.

За $S = 0$ ланац је *непокретан*, а за $S = 1$ је *покретан* и има само један *џојонски члан* од кога други чланови добијају кретање. За $S = 2$ морају се узети два погонска члана. Према томе, *сџејен њокрејљивосџи ланца њоказује њоџребан број џојонских чланова ланца*.

Раван кинематички ланац са четири члана (полуге) везаних обртним паровима чије су осе паралелне образује *злавакасџи чејџвороџао*. Како је $n = 4$, $p_4 = 0$, $p_5 = 4$, онда је према (189) степен покретљивости $S = 12 - 3 - 8 = 1$, па постоји један погонски члан.

Он је најважнији кинематички ланац у практичном машинству и улога му је да *једна обрџна крејћања џрејџвара у друја или, џак, у осџилајџорна, односно џранслајџорна*.

Непокретни штап (p) зове се *џосџоље*, штапови (b) и (k) зову се *криваје* (ако врше кружна кретања) или *балансијери* (ако врше осџилаторна кретања). Штап (c) је *сџојна џолуја* или *џолуја крејћача*.

Између дужина полуга постоје зависности према *Грасхофовом (Grashof)** ставу:

1° Код *криваје и балансијера* (сл. 117а) *најкраћа је криваја*, а мора бити испуњен и услов

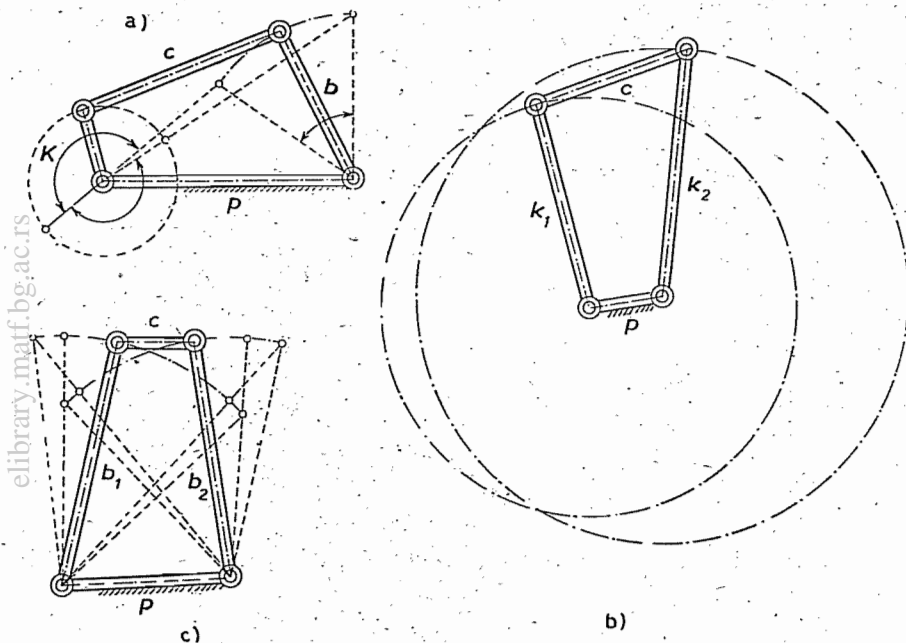
$$p + k \leq c + b.$$

Пример су *крмила*.

* F. Grashof: Theoretische Maschinenlehre, Berlin 1883. године.

2° Код зглавкастог четвороугла са *две криваје* (сл. 117b) најкраће је *посиље*, а збир дужина најкраћег и најдужег члана мора бити мањи од збира дужина друга два елемента, то јест

$$p + k_2 \leq k_1 + c.$$



Слика 117. — Зглавкasti четвороугао: а) криваја и балансијер; б) две криваје; в) два балансијера

3° Код зглавкастог четвороугла са *два балансијера* (сл. 117c) најкраћа је *сијојна полућа* (c), а мора бити испуњен и услов

$$c + b_2 \leq p + b_1.$$

На пример, *Вајтов* (James Watt, 1736—1819) *строј* за *правoliniјско кретање* (вођење).

Специјални случај зглавкастог четвороугла је *укршћени зглавкasti четвороугао* са једнаким супротним полућама, $p = c$, $b = b$ (сл. 118).

Тренутни пол (P) је у пресеку полућа $b-b$. Ако је $p > b$, рулете су *елипсе*, јер су испуњени услови:

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PD} = b; \quad \overline{PD} + \overline{PC} = \overline{PC} + \overline{PB} = b,$$

пошто су $\triangle ADC \cong \triangle ABC$, $\triangle ABP \cong \triangle CDP$.

Обе су рулете елипсе истих оса тако да су веће осе b , а мање $(b^2 - p^2)^{1/2}$. Тачке A, B, C, D су жиже елипси.

На овај начин кретање штапа CD своди се на котрљање без клизања покретне елипсе, жижа C и D, по непокретној елипси, чије су жиже A и B.

Права PP_1 је оса симетрије и истовремено тангента на обе рулете у додирној тачки — полу (P).

Када је $b < p$, рулете су *хиперболе*, реалне полуосе b . Тачке A, B, C, D жиже су хипербола.

Када је $p=c$, $k=b$, онда зглавкasti четвороугао постаје *зглавкasti* или *Вайов паралелограм* (код локомотива).

У пракси се много примењују извесне *трансформације* зглавкастог четвороугла (на пример моторни — клипни — механизам, елипсограф са два клизача и два штапа, са два обртна и два трансляторна пара, кулисни механизам, итд).

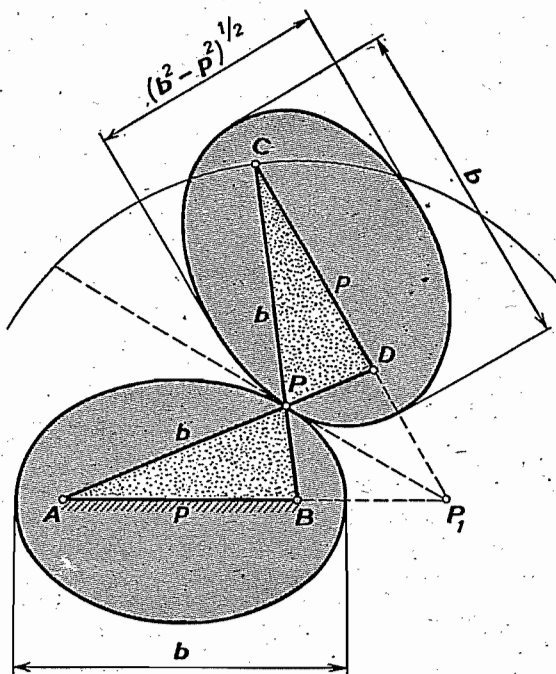
Код зглавкастог петогугла је $n=5$ и $p_5=5$, па је $S=12-10=2$, те је степен померљивости 2, стога морају се узети и два погонска члана.

Два члана зглавкастог четвороугла везана су зглобом који је уједно релативни пол. Пол P_{13} обртања штапа (3) према постољу (1) налази се у пресеку праваца (2) и (4), а пол P_{24} штапа (2) према штапу (4) је у пресеку праваца (1) и (3). Према томе, имамо укупно шест полова: четири су релативна пола, који се поклапају са средиштем кинематичког пара (сл. 119а),

те представљају *основне њолове*. Остали се полови одређују помоћу *Кенедијеве теореме* да три пола леже на једној правој. Направимо ли комбинације друге класе без понављања од индекса 1, 2, 3, 4, биће 12, 13, 14, 23, 24, 34. Овде су основни полови подвучене комбинације, а остали се лако налазе, јер полови индекса трију комбинација леже на једној правој — *џолној правој*, или *џолној џунктуели*. Како на свакој пунктуели леже три пола и кроз сваки пол пролазе $n-2$ пунктуеле, број пунктуела је $q=p(n-2)/3$. С обзиром на број комбинација друге класе из n елемената без понављања, број полова и пунктуела биће одређен обрасцима

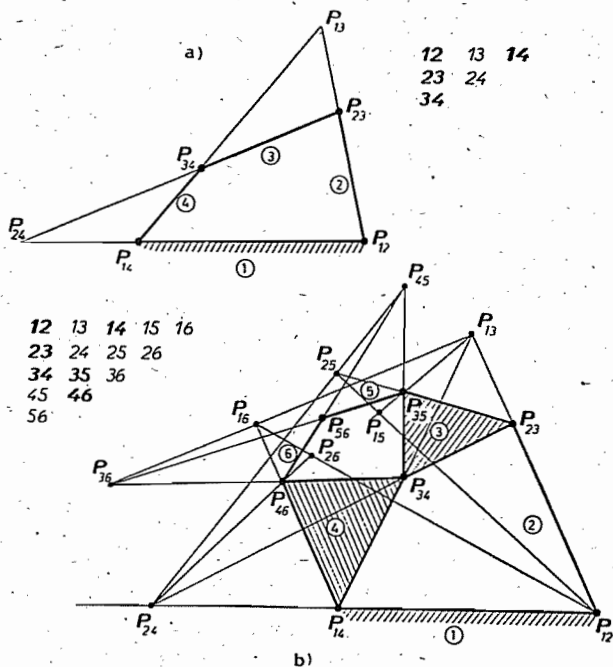
$$p = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}; \quad q = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \quad (190)$$

Вайов сложени механизам има шест чланова ($n=6$), јер су од штапова начињене две круте плоче, које се замењују штаповима 3 и 4



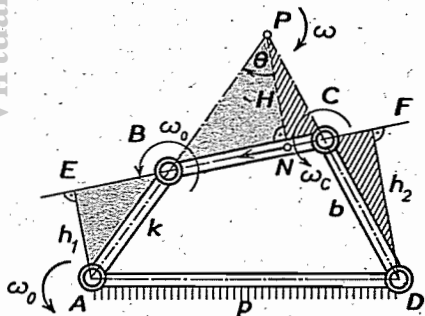
Слика 118. — Укрштени зглавкasti четвороугао

(сл. 119b). Број полова је $p=15$, а број пунктуела $q=20$. Из комбинација се види који су основни полови, а остале налазимо примењом Кенедијеве теореме.



Слика 119. — Тренутни полови

Ако је члан транслаторни, онда му се пол налази у бескрајности, али га опет одређујемо примењом Кенедијеве теореме.



Слика 120. — Зглавкasti четвороугао

Примери. — 54. Одредити ону тачку спојне полуке BC зглавкастог четвороугла $ABCD$, чија брзина пада у правац саме полуке. Колика је брзина те тачке ако се криваја обрће угаоном брзином ω_0 ?

Колика је угаона брзина балансијера CD ако се изрази помоћу одстојања тачака A и D од спојне полуке (сл. 120)?

Решење. — Тренутни пол налази се у тачки (P) , а брзина тачке (B) биће

$$v_B = \overline{AB} \omega_0 = \overline{BP} \omega,$$

$$\omega_1 = \overline{AB} \omega_0 / \overline{BP}.$$

Брзина тачке $N(\overline{PN} \perp \overline{BC})$ пада у правац спојне полуке, па је

$$v_N = \overline{PN} \omega = \overline{PB} \omega \cos \theta = k \omega_0 \cos \theta = k \omega_0 \sin \alpha, \quad k = \overline{AB}.$$

Из сличности троуглова $\triangle ABE \sim \triangle BPN$ следи релација: $k: \overline{BP} = h_1: H$, па је $\omega = \omega_0 h_1/H$, те је $v_C = b \omega = \omega CP$.

Из сличности троуглова $\triangle CDF \sim \triangle PNC$ следи однос $b: \overline{CP} = h_2: H$, па је угаона брзина балансијера изражена помоћу одстојања h_1 и h_2 :

$$\omega_c = \omega \frac{H}{h_2} = \omega_0 \frac{h_1}{h_2}$$

55. Познати су брзина и убрзање тачке A криваје зглавкастог четвороугла $OABD$. Одредити брзину и убрзање тачке B штапа BD (сл. 121а). Одредити брзину и убрзање тачке C полуге, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Решење. — Тренутни пол је у тачки (P). Брзину тачке B одредимо помоћу окренутих брзина или помоћу плана брзина (сл. 121б), па су:

$$v_A = v_A^{(O)} = R \omega_0 = r_A \omega = \overline{AP} \cdot \omega; \quad \omega = R \omega_0 / r_A; \quad \vec{v}_B = \vec{v}_B^{(D)} = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{(A)}; \quad v_B = r_B \cdot \omega = b \omega';$$

$$\omega' = r_B \omega / b = r_B R \omega_0 / r_A b; \quad v_B^{(A)} = l \omega = R l \omega_0 / r_A$$

Убрзања су

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{(O)} = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN}; \quad a_{AN} = R \omega_0^2 = v_A^2 / R; \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BT}^{(A)} + \vec{a}_{BN}^{(A)} = \vec{a}_{BT}^{(D)} + \vec{a}_{BN}^{(D)};$$

$$a_{BN}^{(A)} = l \omega^2 = l R^2 \omega_0^2 / r_A^2 = R l \cdot a_{AN} / r_A^2 = [v_B^{(A)}]^2 / l;$$

$$a_{BN}^{(D)} = b \omega'^2 = r_B^2 \omega^2 / b = r_B^2 R^2 \omega_0^2 / b r_A^2 = r_B^2 R a_{AN} / r_A^2 b = (v_B)^2 / b.$$

Убрзање $a_{AN} = v_A^2 / R$ можемо одредити графички помоћу средње геометријске пропорционале као што је показано на слици 121а, па је $\overline{A1} = a_{AN}$. Из тачке 1 повуцимо праву 12 паралелну потегу BP , онда су троуглови $\triangle A12$ и $\triangle ABP$ слични, те следе односи

$$\overline{A1}: r_A = \overline{A2}: l; \quad \overline{A2} = \overline{A1} \cdot l / r_A = l \cdot a_{AN} / r_A.$$

Сада повуцимо праву $2P$ и из O њој паралелну праву, она ће сећи спојну полуку у тачки 3, па су троуглови $\triangle A2P$ и $\triangle OA3$ слични, те следи

$$\overline{A3}: R = \overline{A2}: r_A; \quad \overline{A3} = R \cdot \overline{A2} / r_A = R l \cdot a_{AN} / r_A^2 = a_{BN}^{(A)}.$$

Дакле, одсечак $\overline{A3}$ представља убрзање $a_{BN}^{(A)}$, па ћемо га пренети у тачку B , те је $\overline{A3} = \overline{B4}$. Ово убрзање можемо одредити и графички помоћу средње геометријске пропорционале, па је

$$\overline{Bb'} = l \cdot \overline{B4}'; \quad \overline{B4}' = \overline{B4} = a_{BN}^{(A)}$$

као што је показано на слици 121а.

Убрзање $a_{BN}^{(D)} = v_B^2 / b$ можемо одредити графички помоћу средње геометријске пропорционале као што је показано на слици 121а, па је $a_{BN}^{(D)} = \overline{B7}$. Међутим, оно се може одредити и на други начин. Спојимо тачке D и 4 и из 4 повуцимо праву паралелну потегу AP , она сече потег BP у тачки 5. Из P повуцимо праву паралелну са $D4$, она сече спојну полуку у тачки 6. Из ове тачке повуцимо праву паралелну правој 45, добићемо на потегу BD тачку 7, па је $a_{BN}^{(D)} = \overline{B7}$. Доказ следи из сличности троуглова

$$\triangle B45 \sim \triangle BAP; \quad \overline{B5}: r_B = \overline{B4}: l;$$

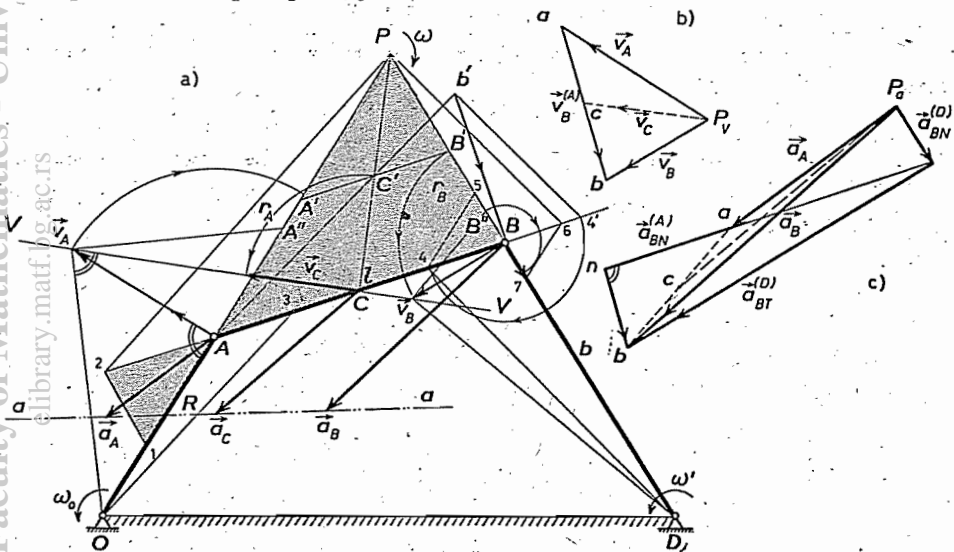
$$\triangle B45 \sim \triangle B67; \quad \overline{B5}: \overline{B7} = \overline{B4}: \overline{B6};$$

$$\triangle DB4 \sim \triangle BP6; \quad \overline{B4}: b = \overline{B6}: r_B; \quad \overline{B4} = \overline{A3} = a_{BN}^{(A)};$$

те је

$$\overline{B7} = \overline{B5} \cdot \overline{B6} / \overline{B4} = r_B \cdot \overline{B4} \cdot \overline{B4} \cdot r_B / l \cdot \overline{B4} \cdot b = r_B^2 \cdot \overline{B4} / b l = r_B^2 \cdot \overline{A3} / b l = R \cdot r_B^2 \cdot a_{AN} / r_A b = a_{BN}^{(D)}.$$

Даље графичко одређивање убрзања \vec{a}_B показано је на плану убрзања. Из тачке P_a пренето је убрзање \vec{a}_A до тачке a , затим је надовезан вектор $\vec{a}n = \vec{a}_{BN}^{(A)}$ и повучена управна. Из P_a пренет је вектор $\vec{P}_a d = \vec{a}_{BN}^{(D)}$ и повучена из d управна. Обе управне секу се у тачки b , па је убрзање тачке B одређено вектором $\vec{P}_a b = \vec{a}_B^{(D)}$, јер је тиме задовољена претходна векторска релација.



Слика 121. — Одређивање брзине и убрзања тачака спојне полуке зглавкастог четвороугла

Брзину тачке C спојне полуке одредићемо графички помоћу окренутих брзина, или ћемо вектор \vec{ab} у плану брзина (сл. 121b) поделити тачком c у истом односу у коме тачка C дели спојну полуку AB , ($\overline{AC}:\overline{AB} = \overline{ac}:\overline{ab}$), па је $\vec{v}_C = u_v \cdot \vec{P}_v c$, где је u_v коефицијент размере за брзине. Контрола је извршена помоћу величине $(V-V)$, пошто завршне тачке вектора брзина леже на њој.

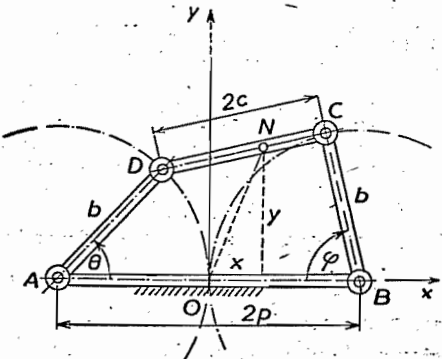
Тачком c подељен је у плану убрзања (сл. 121c) вектор \vec{ab} у односу $\overline{AC}:\overline{AB} = \overline{ac}:\overline{ab}$, па је убрзање тачке C одређено графички, $\vec{a}_C = u_a \cdot \vec{P}_a c$, где је u_a коефицијент размере за убрзање. Као контрола служи акцелероида $(a-a)$, пошто завршне тачке вектора убрзања леже на њој.

56. Одредити једначину путање тачке N на средини спојне полуке зглавкастог четвороугла $ADCB$ (сл. 122).

Решење. — За ознаке усвојене на сл. 122. у односу на координатни почетак O , биће координате тачака D и C :

$$x_D = -p + b \cos \theta; \quad y_D = b \sin \theta;$$

$$x_C = p - b \cos \varphi; \quad y_C = b \sin \varphi,$$



Слика 122. — Booth-ова лемниската

па су координате тачке N , средине дужи \overline{DC} :

$$x = \frac{1}{2}b(\cos \theta - \cos \varphi); \quad y = \frac{1}{2}b(\sin \theta + \sin \varphi),$$

и

$$[2p - b(\cos \theta + \cos \varphi)]^2 + b^2(\sin \theta - \sin \varphi)^2 = 4c^2.$$

Елиминисањем параметара θ и φ из система једначина добићемо

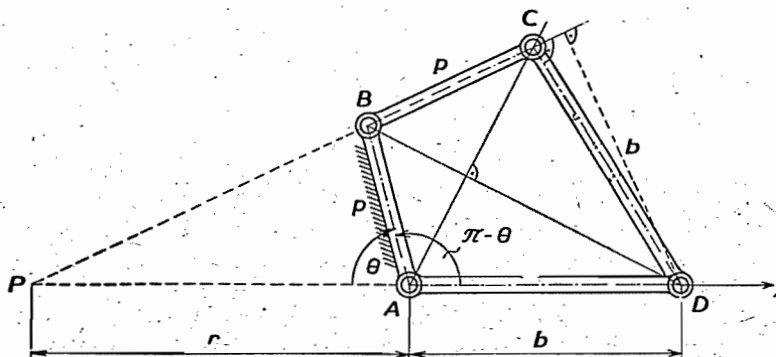
$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + c^2 - p^2 - b^2)^2 + 4p^2y^2(x^2 + y^2 - b^2) = 0.$$

Линија путање је крива *шестіој рета*. Ова једначина може се раставити на ове једначине:

$$(x^2 + y^2 - b^2) = 0; \quad (x^2 + y^2)^2 - b^2x^2 + (4p^2 - b^2)y^2 = 0,$$

крузи и Бучеву (*Booth*) лемнискату, која за однос $b = p\sqrt{2}$ постаје обична лемниската.

57. Одредити путању пола полуге CD зглавкастог четвороугла $ABCD$ (сл. 123) ако је \overline{AB} постоље, а $\overline{AB} = \overline{BC} = p$; $\overline{AD} = \overline{CD} = b$.



Слика 123. — *Pascal-ов пуж*

Решење. — Пол за полуку CD налази се у пресеку правца штапова AD и BC . За поларни систем Px биће, према косинусној теорему:

$$\overline{BP}^2 = r^2 + p^2 - 2rp \cos \theta.$$

Пошто је $ABCD$ делтоид, следи ова релација за површину:

$$\Delta PCD = \frac{1}{2}(\overline{BP} + p)b \sin \theta = \Delta PAB + 2 \Delta ABD = \frac{1}{2}pr \sin \theta + pb \sin \theta,$$

то јест

$$\overline{BP} \cdot b = p(b + r).$$

Уносећи ову вредност у претходну једначину добићемо

$$r = \frac{2pb}{b^2 - p^2}(p + b \cos \theta).$$

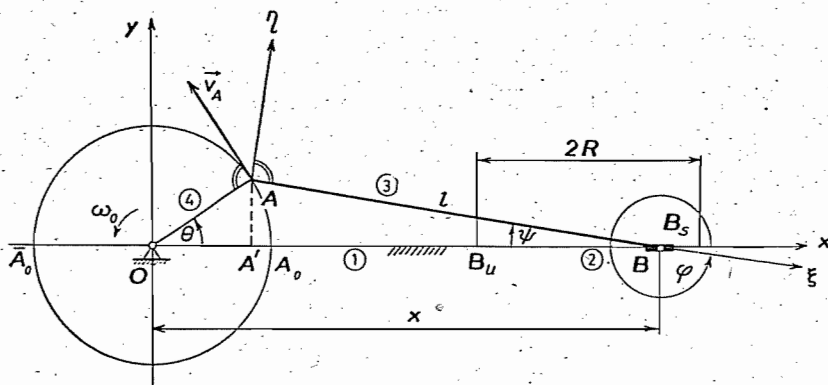
Ово је једначина *Паскаловој пужа*.

9.10. Клипни (моторни) механизам. — Кинематички ланац састављен из *шри* члана: криваје (OA) која се обрће око тачке O , *йолује* *крейшаче* — *сйојне* (*мојторне*)-*йолује* — (AB), дужине l , и *укрсне* *лаве* (B), образује *клипни* *механизам* (сл. 124).

Криваја врши *кружно кретање*, обртање око непомичне осе (вратило O) у равни механизма, *укрсна глава праволинијско кретање*, док спојна полука изводи *компланано кретање* у равни механизма. Због овога клипни механизам служи да праволинијско кретање клипа, који је спојен клипном полугом са укрсноном главом, помоћу равног кретања спојне полуге, претвори у обртно кретање криваје, то јест осовине или вратила на коме је насавена криваја. Он се употребљава и за инверзно кретање, наиме, да претвори обртно кретање криваје у праволинијско кретање укрсне главе (на пример код клипне пумпе и офсет-штампе).

С обзиром на то да ли праволинијска путања укрсне главе пролази или не пролази кроз средиште C кружне путање криваје (тачку O), механизми могу бити *центрични* и *ексцентрични*.

9.10.1. *Центрични клипни механизам*. — Положај тачке A —рукавца криваје — а тиме и положај кинематичког ланца, одређен је углом θ који чини криваја са хоризонталном правом — путем укрсне главе, која је помоћу клипаче везана са клипом цилиндра. Кретање је криваје, дакле, *обртно*, а кретање укрсне главе *праволинијско* и *осцилаторно*, па се може одредити координатом (елонгацијом) $x = \overline{OB}$ у односу на непокретни систем Oxy (сл. 124).

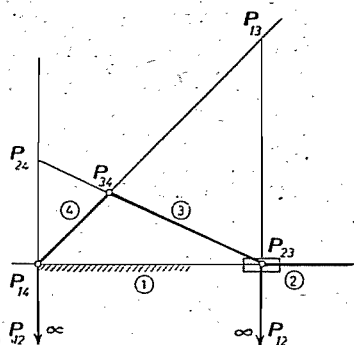


Слика 124. — Центрични клипни механизам

Крајњи положаји укрсне главе (B) одређени су вредностима углова θ . За $\theta=0$ биће положај укрсне главе одређен тачком B_s (*спољашња мртва тачка*), а за $\theta=\pi$ тачком B_u (*унутрашња мртва тачка*). Према томе, укупан *ход* укрсне главе је $2R$ и *једнак је пречнику пуштање крајње тачке (A) криваје*.

Положај механизма одређен је само *једном координатом*, те механизам има само *један степен слободе кретања*, јер му је толики и *степен покретљивости*. Овај механизам је зглавкasti четвороугао са *непокретним постољем* (1), *клизачем* (2) и *полукама* (3 и 4) везаним са *три обртна пара* и *једним транслаторним паром* (сл. 125), те је, према (189), *степен покрет-*

љивости $S = 3(4-1) - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1$, јер су обртни парови, као и транс- латорни, пете класе. Пошто је штап (2) клизач, релативни пол P_{12} је у бескрајности, јер клизач изводи трансляторно кретање. Остала три релативна тренутна пола јесу P_{23} , P_{34} и P_{14} . Овде је $n=4$, па је, према (190), број полова $p=6$, а број полних праваца је $q=4$, те се остали тренутни полови P_{13} и P_{14} одређују применом Кенедијеве теореме; они су приказани на слици 125.



Слика 125. — Тренутни полови клипног механизма

Положај, брзину и убрзање укрсне главе, за разне положаје криваје, можемо одредити аналитички и графички.

9.10.1.1. *Аналитичко одређивање брзине и убрзања укрсне главе.* — Када се криваја OA равномерно обрће око тачке O , константном угаоном брзином ω_0 , она ће, за временски размак t , прећи из почетног положаја \overline{OA}_0 у положај \overline{OA} , који је одређен углом $\theta = \omega_0 t$. За исто време укрсна глава, праволинијским кретањем, прећи ће пут $\overline{B_s B}$, па је положај укрсне главе одређен дужином x_s од спољашње мртве тачке (B_s), односно координатом $x = \overline{OB}$ од координатног почетка O система Oxy . Са слике 124. непосредно следи

$$x = \overline{OB} = R \cos \theta + l \cos \psi, \quad (191)$$

где је ψ угао који гради спојна полука AB са Ox -осом. С обзиром да механизам врши *принудно кретање* и има само један степен слободе кретања, потребна је и само једна координата (угао θ), па је угао ψ зависан од угла θ . Из троуглова $\triangle OAA'$ и $\triangle ABA'$ следи однос

$$R \sin \theta = l \sin \psi; \quad \sin \psi = \lambda \sin \theta; \quad \lambda = R/l. \quad (192)$$

Величина $\lambda = R/l$ из конструктивних разлога узима се између $1/3$ и $1/5$.

За $\theta^0 = 0^\circ$ биће и $\psi = 0^\circ$, па је $x_{\max} = \overline{OB_s} = R + l$; за $\theta = 180^\circ$ биће $\psi = 0$, па је $x_{\min} = \overline{OB_u} = -R + l$. Дакле, положаји мртвих тачака одређени су координатом $x = \pm R + l$, где се знак $+$ односи на спољашњу (B_s), а $-$ на унутрашњу мртву тачку (B_u).

Рукавац (A) криваје OA има обимну брзину $v_A = v_A^{(O)} = R \omega_0 = R \pi n_0 / 30$ константну, јер се криваја обрће једнолико око осе (O) угаоном брзином ω_0 односно минутним бројем обртаја n_0 (o/min). Због тога што је $\omega_0 = \dot{\theta}$, биће $\omega_0 = \dot{\theta} = 0$. Диференцирањем израза (192) по времену добија се угаона брзина промене угла $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \lambda \omega_0 \cos \theta / \cos \psi, \quad (193)$$

а диференцирањем израза (191) добија се брзина укрсне главе

$$v_B = \dot{x} = -R\omega_0(\sin\theta + \cos\theta \operatorname{tg}\psi) = -v_A \frac{\sin(\theta + \psi)}{\cos\psi}. \quad (194)$$

При *равном ходу* („ходу најпрег“) је $0 < \theta < \pi$ и $\psi > 0$, па је брзина укрсне главе *непозитивна*, јер је усмерена ка центру O ; међутим, при *повраћаном ходу* („ходу најпрај“) биће $\pi < \theta < 2\pi$ и $\psi < 0$, па је брзина укрсне главе *позитивна*. У мртвим тачкама је $\theta = 0$ или π , а $\dot{\psi} = 0$, па је брзина укрсне главе *једнака нули*.

Пошто је угаона брзина рукавца криваје константна, он има само нормално убрзање усмерено ка тачки O , које износи $a_A = a_{AN}^{(O)} = R\omega_0^2$. Почовним диференцирањем израза (194) добићемо убрзање укрсне главе:

$$a_B = \ddot{x} = -a_A \left[\cos\theta - \sin\theta \operatorname{tg}\psi + \lambda \frac{\cos^2\theta}{\cos^3\psi} \right] = -a_A \left[\frac{\cos(\theta + \psi)}{\cos\psi} + \lambda \frac{\cos^2\theta}{\cos^3\psi} \right]. \quad (195)$$

У мртвим тачкама су убрзања највећа по апсолутној вредности и износе

	θ	ψ	v_B	a_B
B_s	0	0	0	$-a_A(1 + \lambda)$
B_u	π	0	0	$a_A(1 - \lambda)$

Из услова $a_B = 0$ одредићемо положај механизма када је брзина укрсне главе *највећа*. Тада је $\theta = \theta_m$ и $\psi = \psi_m$, па је услов

$$\cos(\theta_m + \psi_m) \cos^2\psi_m + \lambda \cos^2\theta_m = 0.$$

Сменом $u = \sin^2\theta_m$ он се своди на кубну једначину

$$f(u = \sin^2\theta_m) = \lambda^4 u^3 - \lambda^2 u^2 - u + 1 = 0. \quad (197)$$

За $u = 1$ је $f(1) = \lambda^2(\lambda^2 - 1) < 0$ а за $u = 0$ биће за $f(0) = 1 > 0$. За $\theta_m = 60^\circ$ је $u = 9/16$, па је $f(u) = [81\lambda^2(9\lambda^2 - 1) + 7 \cdot 256]/16^3 > 0$. За $\theta_m = 75^\circ$ је $\sin 75^\circ = 0,966$, па је $u = 0,864$, те је $f(u) = 0,592\lambda^4 - 0,728\lambda^2 + 0,136 > 0$ за свако $\lambda < 1$. Према томе се екстремум налази сигурно између $75^\circ < \theta_m < 90^\circ$.

За $\lambda = 1/3$ узмимо да је $\sin\theta_m = 0,97437$, онда је $u = 0,89748$ прва приближна вредност. Према томе једначина је

$$f(u) = 0,01234 u^3 - 0,11111 u^2 - u + 1 = u^3 - 9u^2 - 81u + 81 = 0.$$

Према Хорнеровој схеми биће

0,89748	1	-9,00000 0,89748	-81,00000 - 7,25185	81,00000 -79,40440
	1	-8,10252 0,89748	-88,25185 - 6,46637	1,59560
	1	-7,20504	-94,71822	

поправка $\Delta = -1,59560 / -94,71822 = 0,01684$, $u = 0,91432$; $\sin \theta_m = 0,97858$, те је $\theta_m = 78^\circ 15'$.

На исти начин нашли бисмо да је за $\lambda = 1/4$ угао $\theta_m = 81^\circ 25'$. Ако λ опада, угао θ_m се повећава и тежи ка 90° . Када буде $\lambda = 0$, тада је спојна полука бескрајно дуга (случај хармонијског осциловања).

У *техничкој пракси*, с обзиром на *Бриксову* графичку методу, узима се да је брзина укрсне главе највећа у оном положају када је спојна полука *уравна на кривају*. Тада је $\theta_m + \psi_m = 90^\circ$, те добијамо

$$\begin{aligned} v_{B\max} &= \overline{OD}' \cdot \omega_0 = -v_A / \sin \theta_m - v_A \sqrt{1 + \lambda^2}; & \sin \theta_m &= 1 / \sqrt{1 + \lambda^2}; \\ \operatorname{tg} \theta_m &= 1 / \lambda = l / R; & \cos \theta_m &= \lambda / \sqrt{1 + \lambda^2}; & x_m &= l \sqrt{1 + \lambda^2}; \\ a_B &= -a_A \lambda^3 \sqrt{1 + \lambda^2} \neq 0. \end{aligned} \quad (198)$$

За три карактеристична случаја биће

λ	$v_{B\max}$	$\operatorname{tg} \theta_m$	θ_m	x_m	a_B
1/3	$-1,0541 v_A$	3	$72^\circ 05'$	$1,0541 l$	$-0,039 a_A$
1/4	$-1,0308 v_A$	4	$75^\circ 55'$	$1,0308 l$	$-0,015 a_A$
1/5	$-1,0198 v_A$	5	$78^\circ 45'$	$1,0198 l$	$-0,008 a_A$

Из изложеног се види да се аналитички и графички екстремум брзине укрсне главе не поклапа.

У *техничкој пракси* узима се да је $\lambda = R/l$ мала вредност, те се више величине од λ^2 занемарују као мале величине у односу на јединицу, јер се множе са $\sin^{2n} \theta$. Стога се узима да је

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{\lambda^4}{8} \sin^4 \theta \dots \approx 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \theta,$$

те су приближни обрасци за законе кретања укрсне главе:

$$\begin{aligned} x &= x_B \approx R \cos \theta + l (1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \theta); \\ v_B &\approx -v_A (\sin \theta + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\theta); \\ a_B &\approx -a_A (\cos \theta + \lambda \cos 2\theta). \end{aligned} \quad (199)$$

Положај криваје (θ_m) за који укрсна глава има највећу брзину одређемо из услова $a_B=0$, па је

$$\cos \theta_m + \lambda \cos 2\theta_m = 2\lambda \cos^2 \theta_m + \cos \theta_m - \lambda = 0,$$

то јест

$$\cos \theta_m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8\lambda^2}}{4\lambda} = \frac{-1 + \sqrt{1+8\lambda^2}}{4\lambda} \quad (199')$$

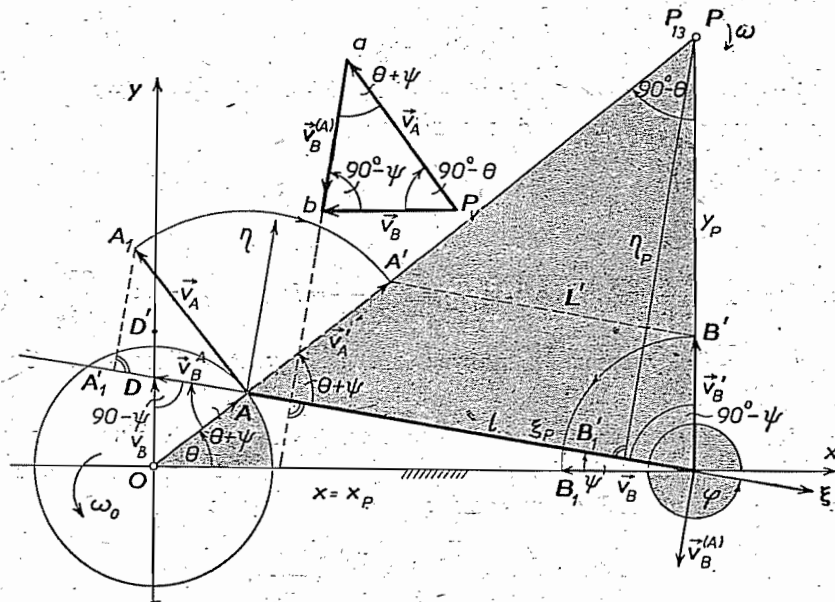
На пример, за три карактеристична случаја $\lambda=1/3, 1/4$ и $1/5$ имали бисмо $\cos \theta_m=0,281; 0,243$ и $0,186$, то јест углове $\theta_m=73^\circ 40'; 75^\circ 55'$ и $79^\circ 17'$.

9.10.1.2. *Графичко одређивање брзине укрсне главе.* — Брзина укрсне главе може се одредити графички на више начина, те ћемо их и приказати, с обзиром да тренутни пол (P_{13}) може да буде у бескојности.

1^o *Метода брзина клизања.* — Спојна полука AB је крут штап, па пројекција брзине тачке A на правац штапа AB мора бити једнака пројекцији брзине тачке B на исти правац, то јест морају бити једнаке брзине клизања. Дакле, мора бити $AA_1' = BB_1'$ (сл. 126), односно

$$v_A \cos [90^\circ - (\theta + \psi)] = v_B \cos \psi,$$

одакле следи образац (194).



Слика 126. — Графичко одређивање брзине укрсне главе

2^o *Метода окренутих брзина.* — Тренутни пол за кретање спојне полуке је P (P_{13}) и налази се у пресеку управних повучених на правац брзина тачака A и B штапа. Заокренимо вектор $\vec{v}_A = u_v \cdot \vec{AA}_1$ док не падне

у правац AP , добићемо тачку A' . Права L' паралелна спојној полузи сече праву PB у тачки B' , па је $u, \overrightarrow{BB'} = \vec{v}_B'$ окренута брзина тачке B штапа. Заокренимо је за 90° , добићемо вектор $\overrightarrow{BB_1}$, који представља, у истој размери пртања (u), брзину укрсне главе.

Према особини тренутног пола и окренутих брзина биће $v_A = \overline{AP} \omega = R \omega_0$, $v_B = \overline{BP} \omega$, где је ω угаона брзина обртања полуге AB око тренутног пола. Из троугла ABP , по синусној теорему, следи

$$\overline{AP} : \overline{BP} = \sin(90^\circ - \psi) : \sin(\theta + \psi),$$

па ће бити

$$v_B = v_A \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = v_A \frac{\sin(\theta + \psi)}{\cos \psi}; \quad \omega = \frac{R}{\overline{AP}} \omega_0,$$

чиме је потврђен образац (194).

3^е План брзина. — Брзину укрсне главе можемо одредити и помоћу плана брзина. Ако из пола (P_v) пренесемо по правцу, смеру и величини, извесној размери (u_v), брзину \vec{v}_A и из тачке (a) плана повучемо праву управну на тренутни положај спојне полуге, а из пола праву паралелну брзини укрсне главе, онда се ове две праве секу у тачки (b). Тиме је одређена брзина укрсне главе

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{(A)},$$

где је $\vec{v}_B^{(A)}$ релативна брзина укрсне главе у односу на тачку (A).

Из троугла $P_v a b$ следе ови односи:

$$\overline{P_v a} : \sin(90^\circ - \psi) = \overline{P_v b} : \sin(\theta + \psi); \quad \overline{P_v a} : \cos \psi = \overline{ab} : \sin(90^\circ - \theta),$$

па су брзине

$$v_B = |\overline{P_v b}| = v_A \frac{\sin(\theta + \psi)}{\cos \psi}; \quad v_B^{(A)} = |\overline{ab}| = v_A \frac{\cos \theta}{\cos \psi} = l \omega; \quad \omega = \lambda \omega_0 \frac{\cos \theta}{\cos \psi}. \quad (200)$$

Брзина $\vec{v}_B^{(A)}$ је управна на полуку AB , па је угаона брзина ω обртања око пола неинерцијална.

4^о Врих-ова метода. — Ако правац спојне полуге продужимо до пресека са вертикалом Oy , добићемо на њој одсечак OD . Из сличности троуглова $\triangle OAD$ и $\triangle ABP$ следи однос

$$\frac{R}{OD} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP} \omega}{\overline{BP} \omega} = \frac{v_A}{v_B} = \frac{R \omega_0}{v_B},$$

те је брзина укрсне главе

$$v_B = v_A \frac{\overline{OD}}{R} = \overline{OD} \omega_0. \quad (201)$$

Дакле, одсечак \overline{OD} помножен угаоном брзином ω_0 представља брзину укрсне главе. Изаберемо ли $\omega_0 = 1$, можемо директно читати брзине укрсне главе.

Користећи однос (201) можемо одредити брзину укрсне главе и на овај начин. Из троугла OAD можемо одредити однос \overline{OD}/R , па је

$$v_B = v_A \frac{\overline{OD}}{R} = v_A \frac{\sin(\psi + \theta)}{\sin(90^\circ - \psi)} = v_A (\sin \theta + \cos \theta \operatorname{tg} \psi).$$

Због односа $\sin \psi = \lambda \sin \theta$ је

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\lambda \sin \theta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}},$$

па је брзина укрсне главе

$$v_B = v_A \left(\sin \theta + \frac{\lambda \sin 2\theta}{2\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}} \right). \quad (202)$$

Овај израз не слаже се са изразом (199), пошто је приближан. Ако бисмо у изразу (202) занемарили величину $\lambda^2 \sin^2 \theta$ као малу у односу на јединицу, добили бисмо израз (199).

Из троугла OAD следи векторска релација $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{R} + \overrightarrow{AD}$, па је $\overrightarrow{OD} \cdot \omega_0 = \vec{R} \cdot \omega_0 + \overrightarrow{AD} \cdot \omega_0 = \vec{v}_A + \overrightarrow{AD} \cdot \omega_0 = \vec{v}_B$, те је релативна брзина

$$v_B^{(A)} = \overline{AD} \cdot \omega_0 = R \omega_0 \frac{\cos \theta}{\cos \psi}, \quad (203)$$

пошто из истог троугла следи однос $\overline{AD} : R = \sin(90^\circ - \theta) : \sin(90^\circ - \psi) = \cos \theta : \cos \psi$.

Положај криваје за који је брзина укрсне главе највећа можемо лако одредити графички. У том положају спојна полука је тангента кружне путање криваје, па је положај укрсне главе одређен једначином

$$x_m = \sqrt{R^2 + l^2} = l\sqrt{1 + \lambda^2}. \quad (204)$$

Правац спојне полуке сече вертикалу Oy у тачки D' , па је максимална брзина укрсне главе већа од брзине тачке A , јер је

$$\frac{\overline{OD'}}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + l^2}}{l} = \sqrt{1 + \lambda^2},$$

те је

$$v_{B_{\max}} = v_A \sqrt{1 + \lambda^2}. \quad (205)$$

Угао θ_m за тај положај одређен је изразом

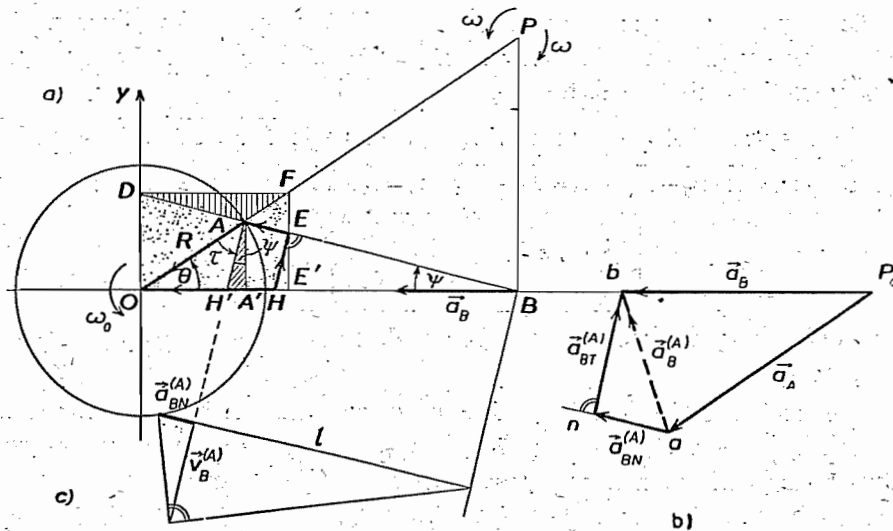
$$\cos \theta_m = \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}. \quad (206)$$

Ова вредност не слаже се са оном из (199) пошто смо тада занемарили мале величине вишег реда од два у сравњењу са јединицом.

Међутим, ако вредност (206) унесемо у израз (202), добићемо највећу брзину укрсне главе (205).

9.10.1.3. *Графичко одређивање убрзања укрсне главе.* — Графички се може и убрзање укрсне главе одредити на више начина.

1^o. *План убрзања.* — Тачка A штапа AB врши једнолико кружно кретање око тачке O ; па има само нормално убрзање $a_A = a_A^{(O)} = a_{AN} = R \omega_0^2$, док је тангенцијално убрзање једнако нули, $a_{AT} = 0$. Нормално убрзање усмерено је ка тачки O — средишту кружне путање (сл. 127а). Тачка B је такође тачка штапа AB , па је њено убрзање једнако векторском збиру убрзања тачке A и релативног убрзања ове друге тачке према првој. Као што је познато, ово релативно убрзање има две компоненте: *релативно*



Слика 127. — Графичко одређивање убрзања укрсне главе: план убрзања и Mohr-ова конструкција

нормално, које је усмерено од B ка A , и *релативно тангенцијално*, управно на полуку AB . Према томе је

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_B^{(A)} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^{(A)} + \vec{a}_{BT}^{(A)}, \quad (207)$$

где је

$$a_{BN}^{(A)} = l \omega^2 = \frac{(v_B^A)^2}{l} = \frac{v_A^2 \cos^2 \theta}{l \cos^2 \psi} = \frac{R^2 \omega_0^2 \cos^2 \theta}{l \cos^2 \psi}; \quad a_{BT}^{(A)} = l \omega; \quad a_A = R \omega_0^2. \quad (208)$$

Ако из пола (P_a) пренесемо по правцу, смеру и величини, у извесној размери (u_a), убрзање \vec{a}_A , а на њега надовежемо релативно нормално убр-

зање $\vec{a}_{BN}^{(A)}$ које пада у правац спојне полуге (сл. 127b), онда права повучена из завршне тачке (n) овог вектора управно на спојну полуку одређује убрзање укрсне главе $\vec{a}_B = u_a \cdot \vec{P}_a \vec{b}$. Оно је хоризонтално, пошто је кретање укрсне главе праволинијско.

Да је конструкција тачна, лако се уверавамо пројцирањем векторске једначине (207) на правац спојне полуге AB . Тада добијамо

$$a_B \cos \psi = a_A \cos (\theta + \psi) + l \omega^2; \quad v_A^2 / R = R \omega_0^2 = a_A,$$

одакле следи образац (195) за убрзање укрсне главе. Наравно, због пројцирања добијена је позитивна вредност, пошто је претпостављено да је убрзање укрсне главе негативно, то јест усмерено у смеру — Ox -осе.

С обзиром на (208) убрзање $a_{BN}^{(A)} = l \omega^2 = (v_B^A)^2 / l$ не мора се рачунати, јер је $[v_B^A]^2 = a_{BN}^{(A)} \cdot l$, па се може одредити графички помоћу средње геометријске пропорционале (сл. 127c). Исто тако не треба рачунати ни $a_{BT}^{(A)}$.

2° *Mohr-ова конструкција*. — Правац спојне полуге AB сече осу Oy у тачки D (сл. 127a). Из ове тачке повучимо хоризонталну праву до пресека (F) са OP , а затим вертикалну праву паралелну оси Oy до пресека са AB , добићемо тачку E . Управна повучена у тачки E на спојну полуку AB сече осу Ox у тачки H . Одсечак \overline{HO} помножен са ω_0^2 представља убрзање укрсне главе:

$$a_B = \overline{HO} \cdot \omega_0^2. \quad (209)$$

Да одсечак \overline{HO} представља убрзање укрсне главе, доказаћемо на овај начин. Из четвороугла $OHEAO$ следи ова векторска релација:

$$\vec{HO} = \vec{HE} + \vec{EA} + \vec{AO},$$

па множењем са ω_0^2 добијамо

$$\vec{HO} \omega_0^2 = \vec{HE} \omega_0^2 + \vec{AE} \omega_0^2 + \vec{AO} \omega_0^2 = \vec{a}_A + \vec{a}_{BT}^{(A)} + \vec{a}_{BN}^{(A)} = \vec{a}_B,$$

јер из сличности троуглова следе ови односи:

$$\triangle OAD \sim \triangle AEF; \quad \overline{EA} : \overline{AF} = \overline{AD} : \overline{AO} = \overline{AD} \cdot \omega_0 : R \omega_0 = v_B^{(A)} : v_A;$$

$$\overline{EA} = v_B^{(A)} \cdot \overline{AF} / v_A = \overline{AF} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \psi};$$

$$\triangle ADF \sim \triangle OAB; \quad \overline{AF} : \overline{AD} = \overline{OA} : \overline{AB} = R : l;$$

$$\overline{EA} \cdot \omega_0^2 = \omega_0^2 \frac{v_B^{(A)}}{v_A} \cdot \overline{AF} = \frac{v_B^{(A)}}{v_A} \cdot \frac{R}{l} \overline{AD} \omega_0^2 = \frac{[v_B^{(A)}]^2}{l} = a_{BN}^{(A)}; \quad (209 a)$$

$$\triangle AH'A' \sim \triangle EHE'; \quad \overline{EH} : \overline{AH'} = \overline{EE'} : \overline{AA'} = (l - \overline{EA}) : l = 1 - (\overline{EA}/l);$$

$$\overline{EH} \cdot \omega_0^2 = \left(1 - \frac{\overline{EA}}{l}\right) \overline{AH'} \cdot \omega_0^2.$$

Да одсечак \overline{HO} представља убрзање укрсне главе, доказаћемо на овај начин. Из четвороугла $OHEAO$ следи ова векторска релација:

$$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AO},$$

па множењем са ω_0^2 добијамо

$$\overrightarrow{HO} \cdot \omega_0^2 = \overrightarrow{HE} \cdot \omega_0^2 + \overrightarrow{EA} \cdot \omega_0^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \omega_0^2 = \vec{a}_A + \vec{a}_{BT}^{(A)} + \vec{a}_{BN}^{(A)} = \vec{a}_B,$$

јер из троуглова следе ове релације:

$$\Delta ABM; \quad \overline{MA}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{AB}; \quad [v_B^{(A)}]^2 = (\overline{MA} \cdot \omega_0)^2 = \overline{AE} \cdot l \omega_0^2,$$

па је

$$\overline{AE} \cdot \omega_0^2 = [v_B^{(A)}]^2 / l = a_{BN}^{(A)};$$

$$\Delta AH'B \sim \Delta EHB; \quad \overline{AH'} : \overline{HE} = l : (l - \overline{EA}); \quad \overline{HE} = \overline{AH'} (l - \overline{EA}) / l; \quad (211 a)$$

$$\Delta AH'O; \quad \overline{AH'} : R = \sin \theta : \sin [180^\circ - (\theta + \tau)] = \sin \theta : \sin (\theta + \tau) = \\ = \sin \theta : \sin [90^\circ - \psi] = \sin \theta : \cos \psi; \quad \text{то јест } \overline{AH'} = R \sin \theta / \cos \psi.$$

па је

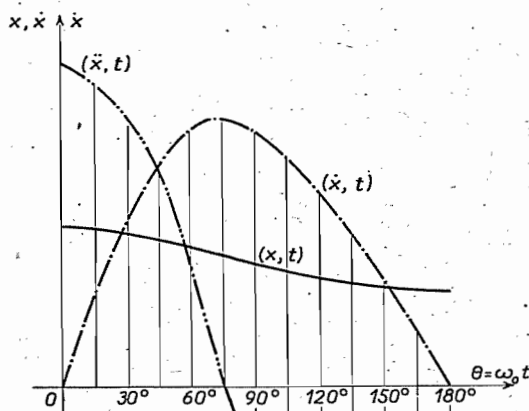
$$\overline{HE} \cdot \omega_0^2 = \omega_0^2 \overline{AH'} (l - \overline{EA}) / l = R \omega_0^2 \sin \theta (l - \overline{EA}) / \cos \psi = l \omega_0^2 = a_{BT}^{(A)}. \quad (211 b)$$

Према томе, одсечак \overline{EA} сразмеран је релативном нормалном, а одсечак \overline{HE} релативном тангенцијалном убрзању, па је одсечак \overline{HO} сразмеран убрзању укрсне главе. Коefицијент сразмере је ω_0^2 .

9.10.1.4. Кинематички дијаграми. — Пошто је $\theta = \omega_0 t$, а брзине и убрзања укрсне главе можемо одредити рачунски (према 191, 194 и 195)

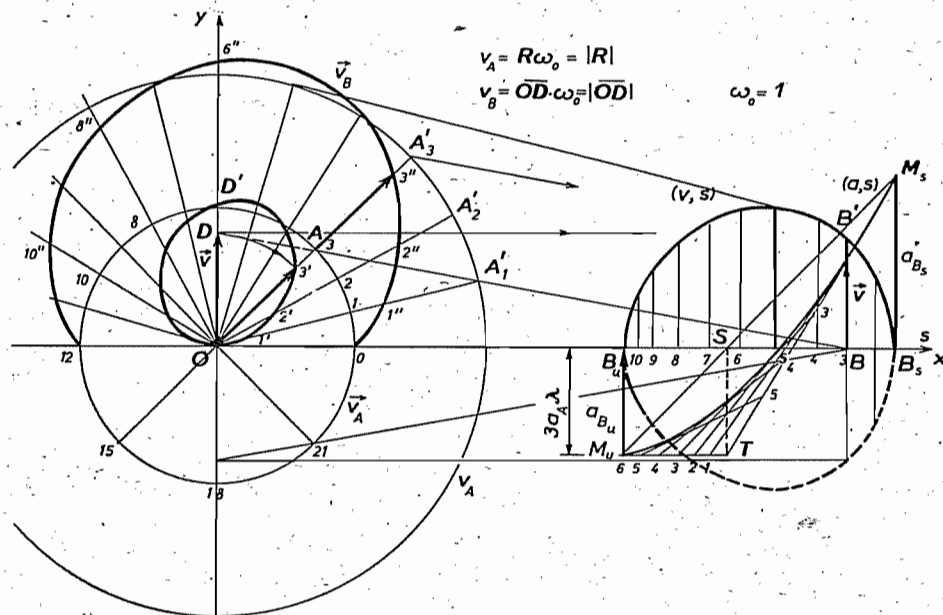
односно графички, лако се могу конструисати кинематички дијаграми (x, t) , (\dot{x}, t) и (\ddot{x}, t) клипног механизма за цео ход укрсне главе, као што је показано на слици 129. за $R = 40$ cm, $l = 160$ cm; $R/l = 1/4$; $\omega_0 = 1$ sec⁻¹.

Узме ли се да је $v_A = R \omega_0 = |R|$, то јест $\omega_0 = 1$ (што је чест случај у пракси), онда круг полупречника R са средиштем у O представља *поларни дијаграм брзине рукавца криваје* (сл. 130). Тада одсечак \overline{OD} представља брзину укрсне главе, $v_B = \overline{OD} \cdot \omega_0 = |\overline{OD}|$. Када се тачке D_i пребаце на правце криваје у одговарајућим положајима укрсне



Слика 129. — Кинематички дијаграми клипног механизма

главе, добиће се *поларни дијаграм брзине укрсне главе (хогограф)* са полом у тачки O , па је $OA_1' = x_1$, $OA_2' = x_2$, итд. Други облик поларног дијаграма брзине укрсне главе добићемо ако из тачака $1, 2, 3, \dots$, рукавца криваје пренесемо одговарајуће одсечке OD_1, OD_2, OD_3, \dots , па је $OD_2'' = x_2$, $OD_3'' = x_3$, итд. Упоредимо ли поларне дијаграме брзине рукавца криваје (круг тачака $1, 2, 3, \dots$) са поларним дијаграмима брзине укрсне главе ($1', 2', 3', \dots$ или $2'', 3'', 4'', \dots$), видећемо да се укрсна глава до положаја који одговара углу $\theta < 90^\circ$ креће брже неголи рукавац криваје.



Слика 130. — Поларни дијаграми брзине и дијаграми (x, x) и (\dot{x}, x) укрсне главе

Помоћу одсечака OD_i најлакше се конструише *дијаграм брзине* и *пута укрсне главе*. Зато одредимо положаје укрсне главе B_i за сваки положај криваје и из одговарајуће тачке D_i повуцимо паралелу оси Ox , она сече вертикалу Bu у тачки B' , која је тачка дијаграма (x, x) односно (v, s) . Дијаграм се може конструисати и помоћу *окренутих брзина* v_A' . Из O опишимо круг полупречника $2R = 2v_A$, онда потези $A_i A_i'$ представљају окренуте брзине. Када из тачака A_i' повучемо праве паралелне спојној полузи, одсечки BB' представљају окренуте брзине укрсне главе v_B' . Тако је нацртан дијаграм брзине и пута укрсне главе за ход напред. Иако је брзина негативна, она је нанета на $+v$ -осу (сл. 130). Графички, односно рачунски конструисан је и дијаграм убрзања и пута. На делу до угла $\theta = 75^\circ 55'$ убрзање је *позитивно*, а затим *негативно*, као што је показано на слици 130. Све рачунске вредности потребне за конструкцију дијаграма дате су у следећој табlici.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0°	$\cos \theta$	$\cos^2 \theta$	$\sin \theta$	$\sin \psi = \frac{[4]}{4}$	$\cos \psi$	$\cos^3 \psi$	$\operatorname{tg} \psi = \frac{[5]}{[6]}$	$[4] \cdot [8]$	$\frac{[3]}{[7]}$	$\frac{1}{4} [10]$	$[2] + [11] - [9]$
0	1,000	1,000	0	0	1,000	1,000	0	0	1,000	0,250	1,250
15	0,966	0,933	0,259	0,065	0,998	0,994	0,065	0,017	0,939	0,235	1,184
30	0,866	0,750	0,500	0,125	0,992	0,976	0,126	0,063	0,768	0,192	0,995
45	0,707	0,450	0,707	0,177	0,984	0,953	0,179	0,127	0,472	0,118	0,798
60	0,500	0,250	0,866	0,217	0,976	0,930	0,222	0,192	0,269	0,067	0,375
75	0,259	0,067	0,966	0,242	0,971	0,915	0,249	0,241	0,073	0,018	0,036
75°55'	0,243	0,059	0,970	0,243	0,970	0,913	0,250	0,243	0,064	0,016	0,000
90	0	0	1,000	0,250	0,968	0,907	0,258	0,258	0,000	0,000	-0,258
105	-0,259	0,067	0,966	0,242	0,971	0,915	0,249	0,241	0,073	0,018	-0,482
120	-0,500	0,250	0,866	0,217	0,976	0,930	0,222	0,192	0,269	0,067	-0,625
135	-0,707	0,450	0,707	0,177	0,984	0,953	0,179	0,127	0,472	0,118	-0,716
150	-0,866	0,750	0,500	0,125	0,992	0,976	0,126	0,063	0,768	0,192	-0,737
165	-0,966	0,933	0,259	0,065	0,998	0,994	0,065	0,017	0,939	0,235	-0,748
180	-1,000	1,000	0	0	1,000	1,000	0	0	1,000	0,250	-0,750

Дијаграм убрзања и пута може се приближно конструисати и на овај начин. У тачкама B_s и B_u треба да пренесемо екстремне вредности убрзања (обично за вредност $\omega_0 = 1$) и добијемо тачке M_s и M_u . Права $M_s M_u$ сече пут укрсне главе у тачки S . Из ове тачке треба да пренесемо дуж $\overline{ST} = 3 a_A \lambda = 3 R \omega_0^2 \lambda = |3 R \lambda|$ и да тачку T спојимо са тачкама M_s и M_u . Поделитемо сада дужи $\overline{M_s T}$ и $\overline{T M_u}$ на једнак број подељака (1, 2, 3, ...) и спојимо одговарајуће тачке истог индекса правима, онда је крива дијаграма убрзања и пута обвојница овог система правих линија.

За $l = \infty$ дијаграм (\ddot{x}, x) постаје елипса, а дијаграм (\ddot{x}, x) права линија, као при хармонијском осциловању тачке по правој Ox (чл. 2.5).

9.10.1.5. Рулетте клинної механизма. — Усвојимо непокретни систем Oxy и покретни $A\xi\eta$ (сл. 124), онда су координате тренутног пола у оба координатна система (сл. 126):

$$x_P = R \cos \theta + l \cos \psi; \quad \xi_P = \overline{AP} \cos(\theta + \psi) = l - \overline{BP} \sin \psi;$$

$$y_P = x_P \operatorname{tg} \theta; \quad \eta_P = \overline{AP} \sin(\theta + \psi) = \overline{BP} \cos \psi.$$

Пошто су: $\lambda \sin \theta = \sin \psi$; $\cos^2 \theta = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{-1} = x_P^2 / (x_P^2 + y_P^2)$; и $\overline{AP} : l = \cos \psi : \cos \theta$; $\overline{BP} : \sin(\theta + \psi) = l : \cos \theta$, из релација

$$\cos \psi = (x_P / l) - \lambda \cos \theta; \quad \xi_P^2 + \eta_P^2 = \overline{AP}^2 = l^2 \cos^2 \psi / \cos^2 \theta;$$

$$\sin \psi = \lambda \sin \theta; \quad \operatorname{tg} \psi = (l - \xi_P) / \eta_P,$$

елиминисањем угла θ , односно ψ , добијамо једначине рулета у оба координатна система:

$$[l^2 - (x_P^2 + R^2)]^2 = \frac{4 R^2 x_P^4}{x_P^2 + y_P^2}; \quad [l^2 \eta_P^2 - (1 - \lambda^2)(l - \xi_P)^2] = \frac{R^2 \eta_P^2}{\xi_P^2 + \eta_P^2}. \quad (212)$$

9.10.1.6. Трзај. — Диференцирањем израза (195) по времену добија се трзај укрсне главе клинног механизма:

$$w_B = \overset{\dots}{x} = R \omega_0^3 \left[\frac{\sin(\theta + \psi)}{\cos \psi} + \frac{3}{2} \lambda \frac{\sin 2\theta}{\cos^3 \psi} \left(1 - \lambda^2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \psi} \right) \right], \quad (213)$$

односно за случај примене приближних образаца (199):

$$w_B = \overset{\dots}{x} = R \omega_0^3 (\sin \theta + 2 \lambda \sin 2\theta). \quad (213')$$

У положају криваје, када је спојна полука управна на њу, трзај износи

$$w_B = \overset{\dots}{x} = R \omega_0^3 \sqrt{1 + \lambda^2} (1 + 3 \lambda^2 - 3 \lambda^6). \quad (213'')$$

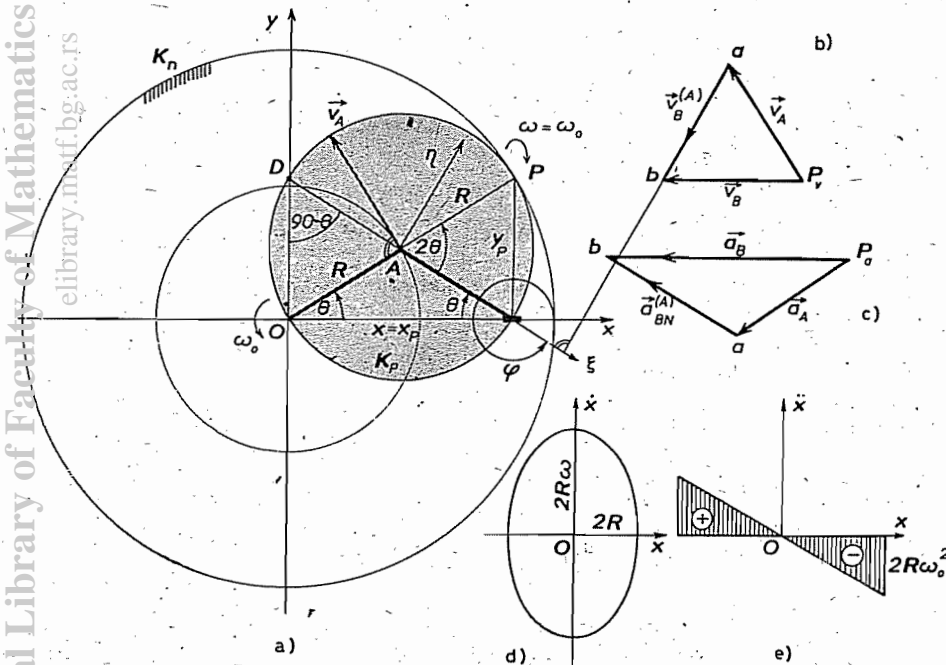
У мртвим тачкама трзај је једнак нули.

За $\lambda = 1/3$ и услов $\theta + \psi = 90^\circ$ величина трзаја је $323 \sqrt{10} R \omega_0^3 / 729 \text{ cm/sec}^3$.

9.10.2. Центрични клипни механизам са $\lambda=1$. — Код центричног клипног механизма чија је спојна полука једнака криваји ($R=l$, то јест $\lambda=1$) биће $\psi=\theta$ (сл. 131a), па су кинематичке једначине укрсне главе:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2R \cos \theta; & \dot{x} = v_B &= -2R \omega_0 \sin \theta = -2v_A \sin \theta; & \ddot{x} &= a_B = -2R \omega_0^2 \cos \theta = \\ & & & & &= -2a_A \cos \theta = -\omega_0^2 x; & \ddot{\dot{x}} &= 2R \omega_0^3 \sin \theta = -v_B \cdot \omega_0^2. \end{aligned} \quad (214)$$

Ове законе добијамо и непосредно из образаца (191), (194) и (195) стављајући $\lambda=R/l=1$.



Слика 131. — Клипни механизам са $\lambda=1$

Пошто је $\varphi=2\pi-\psi=2\pi-\theta$, биће $\dot{\varphi}=\omega=-\dot{\theta}=-\omega_0$, па је $\ddot{\varphi}=0$. Дакле, угаона брзина ω обртања полуке AB око пола P једнака је угаоној брзини *једноликој обротања* криваје, али је супротног смера; угаоно убрзање једнако је нули.

Због тога што је $\overline{AD}=\overline{OA}=R$, релативна брзина је $v_B^{(A)}=v_A=R\omega_0$, као што се види из плана брзина (сл. 131b). Највећа је брзина када је $\theta_m=45^\circ$ и износи $v_{B\max}=\sqrt{2}R\omega_0$. Због $\lambda=1$ биће $a_{BN}^{(A)}=a_A=R\omega_0^2=R\omega_0^2$, па је убрзање одређено графички помоћу плана убрзања, из кога се види да је $a_{BN}^{(A)}=0$ (сл. 131c).

Дијаграм (x, \dot{x}) је *елипса*, а (\ddot{x}, \dot{x}) *права линија* (сл. 131d,e). Из троугла APB следи однос $\overline{AP}:R=\cos \theta:\cos \theta=1$, те је $\overline{AP}=R$, па су коорди-

жаје мртвих тачака B_s и B_u , које одређујемо графички помоћу лукова полупречника $l+R$ и $l-R$ описаних из средишта O . Положајима мртвих тачака одговарају положаји OS и OU криваја, те стога у радном ходу криваја опише угао $\alpha < 180^\circ$, а у повратном ходу угао $\beta > 180^\circ$. Мртвим тачкама одговарају негативни углови криваје, $\sin \theta_s = -h/(l+R)$, $\sin \theta_u = -h/(l-R)$. Због тога су брзине радног хода веће од брзина повратног хода.

Са слике 132. следи релација

$$x = R \cos \theta + l \cos \psi; \quad \overline{AA}_1 = h + R \sin \theta = l \sin \psi, \quad (215)$$

па су брзина и убрзање укрсне главе:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \lambda \omega_0 \cos \theta / \cos \psi; & x_B = v_B &= -v_A [\sin(\theta + \psi) / \cos \psi]; \\ \ddot{x}_B &= a_B = -a_A [\cos \theta - \sin \theta \operatorname{tg} \psi + (\lambda \cos^2 \theta) / \cos^3 \psi]. \end{aligned} \quad (216)$$

Обрасци су исти као и код центрчног клипног механизма (194) и (195), само је угао ψ одређен релацијом (215), у којој се јавља утицај ексцентричности (h).

Брзина укрсне главе може се одредити графички помоћу окренутих брзина, односно помоћу поларног дијаграма окренуте брзине рукавца криваје \vec{v}_A' . Из тачака A_i' треба повући праве паралелне спојној полузи AB у томе положају криваје, па је одсечак \overline{BB}' брзина укрсне главе.

Убрзање одређујемо графички по *Mohr-овој* методи. Тачку D , у којој спојна полука AB сече осу Oy , спојимо са полом P , а из O повучимо праву паралелну са DP , она сече спојну полуку у тачки E , или, из D треба да повучемо праву паралелну са OB , она сече потег AP у тачки F , па из ове тачке повучемо вертикалу (паралелно Oy -оси), она сече спојну полуку у тачки E . Управна повучена у тачки E на спојну полуку сече Ox -осу у тачки H . Из четвороугла $HEAO$ следи векторска релација

$$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AO}; \quad \overrightarrow{HO} \cdot \omega_0^2 = \overrightarrow{HE} \cdot \omega_0^2 + \overrightarrow{EA} \cdot \omega_0^2 + \overrightarrow{a}_A.$$

Из сличности троуглова $\triangle OAE \sim \triangle ADP$ и $\triangle OAD \sim \triangle ABP$ следе односи

$$\overline{AE} : \overline{AD} = R : \overline{AP}; \quad \overline{AD} : R = l : \overline{AP}; \quad \overline{AE} = \overline{AD} \cdot R / \overline{AP} = \overline{AD}^2 / l,$$

па је:

$$\overline{AE} \cdot \omega_0^2 = (\overline{AD} \cdot \omega_0)^2 / l = [v_B^{(A)}]^2 / l = a_{BN}^{(A)}; \quad \vec{a}_B = \vec{HA} \cdot \omega_0^2.$$

Брзине и убрзања у мртвим тачкама су:

$\lambda = R/l$; $\mu = h/l$	θ	ψ	v_B	a_B
B_s	$-\theta_s$	θ_s	0	$-\frac{1+\lambda}{\cos \theta_s} a_A = -\frac{(1+\lambda)^2}{\sqrt{(1+\lambda)^2 - \mu^2}} a_A$
B_u	$\pi - \theta_u$	θ_u	0	$\frac{1-\lambda}{\cos \theta_u} a_A = \frac{(1-\lambda)^2}{\sqrt{(1-\lambda)^2 - \mu^2}} a_A$

На пример, када су $R=40$ cm; $l=200$ cm; $h=20$ cm; $\omega_0=1,5$ sec⁻¹, тада су због $\lambda=1/s$; $v_A=60$ cm/sec; $a_A=90$ cm/sec², брзине и убрзавања* у положајима криваје 1, 2, 3 и 4:

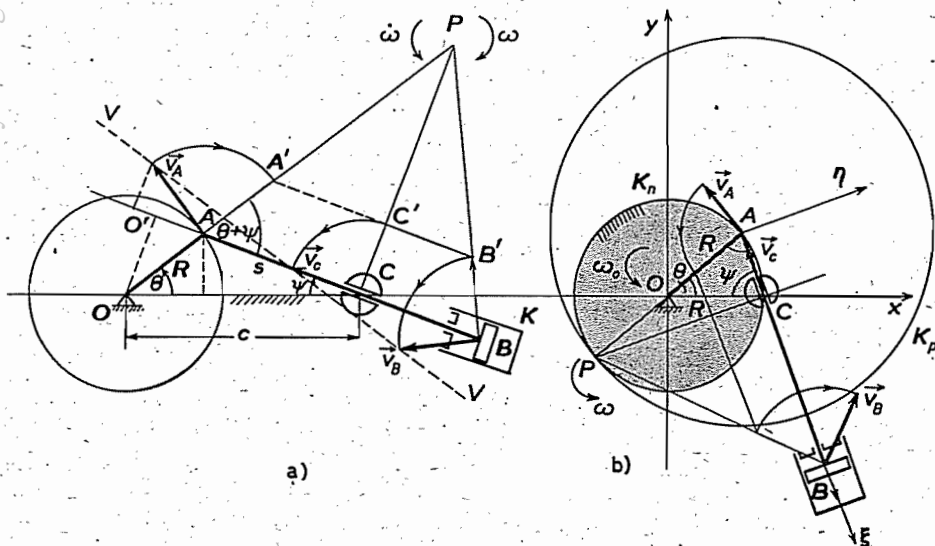
$$a) \theta=0=\pi; \quad \sin \psi=h/l=1/10; \quad \cos \psi \approx 1-(1/200); \quad 1/\cos^3 \psi \approx 203/200; \quad \operatorname{tg} \psi \approx 201/2000;$$

$$v_B = -6,03 \text{ cm/sec}; \quad a_B = -110,4 \text{ cm/sec}^2 \text{ (односно } +69,57 \text{ cm/sec}^2);$$

$$b) \theta=90^\circ; \quad 270^\circ; \quad \sin \psi=(R+h)/l \approx 3/10; \quad \cos \psi=1-(9/200); \quad 1/\cos^3 \psi \approx 227/200; \quad \operatorname{tg} \psi \approx 627/2000;$$

$$v_B = \mp v_A; \quad a_B = \pm a_A \operatorname{tg} \psi \approx \pm 28,22 \text{ cm/sec}^2.$$

9.10.4. *Клијни механизам са обртним цилиндром.* — Код бродова се примењује клипни механизам са обртним осцилаторним („шетајућим“) цилиндром** и сталним клизачем. Клизач је на обртном постољу (C) и омогућава спојној полузи клизање, а уједно и обртање (сл. 133a). Спојна полуга је директно спојена са клипом.



Слика 133. — Клипни механизам са обртним цилиндром

Спустимо из O нормалу на AC , добићемо тачку O' ; онда из троуглова $OA'O'$, OCO' и OAC следе ови односи:

$$s + R \cos(\theta + \psi) = c \cos \psi; \quad R \sin(\theta + \psi) = c \sin \psi; \quad R \sin \theta = s \sin \psi;$$

$$s^2 = R^2 + c^2 - 2Rc \cos \theta; \quad s = \overline{AC},$$

па је, при $\dot{\theta} = \omega_0 = \text{const.}$ и $\varphi = 2\pi - \psi$, $\dot{\psi} = -\dot{\varphi} = -\dot{\omega}$, угаона брзина спојне полузе у њеном обртању око тренутног пола P :

$$\dot{\psi} = -\dot{\omega} = R \omega_0 \frac{\cos(\theta + \psi)}{s} = R \omega_0 \frac{(c \cos \theta - R)}{s^2} \quad (217)$$

$$\frac{1 \pm \alpha}{1 \pm \beta} \approx 1 \pm \alpha \mp \beta; \quad (1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha.$$

**Kurbelschwinge.

Тачка C полуге AB , која се у датом тренутку поклапа са средиштем постоља (C), има брзину клизања, те је

$$v_C = v_A \sin(\theta + \psi), \quad (218)$$

па се помоћу велоциде ($V-V$) лако може одредити брзина крајње тачке B полуге. Њу можемо одредити помоћу тренутног пола, $v_B = \overline{BP} \cdot \omega$, или помоћу диференцирања координата

$$x = R \cos \theta + l \cos \psi; \quad -y = (l-s) \sin \psi,$$

па је

$$\begin{aligned} v_B = \overline{BP} \cdot \omega &= (x^2 + y^2)^{1/2} = \sqrt{v_A^2 + l^2 \omega^2 - 2v_A l \omega \cos(\theta + \psi)} = \\ &= \frac{v_A}{s} \sqrt{s^2 + (l^2 - 2ls) \cos^2(\theta + \psi)}. \end{aligned} \quad (219)$$

На пример, ако су $R = 12$ cm; $l = 100$ cm; $c = 60$ cm; $\omega_0 = 5$ sec⁻¹, биће:

a) за $\theta = 0$; $\psi = 0$; $s = c - R$; $v_B = v_A (l-s)/s = 65$ cm/sec;

b) за $\theta = 180$, $\psi = 0$; $s = R + c$, $v_B = v_A (l-s)/s = 23$ cm/sec;

c) за $\theta = 90^\circ$ односно 270° , $s^2 = R^2 + c^2$, $v_B \approx 40$ cm/sec.

Диференцирајући израз (217) добићемо угаоно убрзање полуге AB при обртању око тренутног пола P :

$$\dot{\omega} = R \omega_0^2 \frac{c(c^2 - R^2) \sin \theta}{s^4}. \quad (220)$$

За $\theta = 0$ је $\omega_{\max} = -R\omega_0/(c-R)$, за $\varphi = \pi$ је $\omega = R\omega_0/(c+R)$; за $\cos \theta = R/c$ је $\omega = 0$.

За случај да је $c = R$ (сл. 133 b) биће $\psi = 90^\circ - (\theta/2)$ и $\varphi = 270^\circ + (\theta/2)$, па је $\varphi = \omega = \omega_0/2$, $s = 2R \sin(\theta/2)$, те су

$$\omega = \frac{\omega_0}{2}; \quad \dot{\omega} = 0; \quad v_C = v_A \cos \frac{\theta}{2}; \quad v_B = \frac{v_A}{2\lambda} \sqrt{1 + 4\lambda^2 - 4\lambda \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (221)$$

Пошто је

$$x_P = -R \cos \theta, \quad y_P = -R \sin \theta; \quad \xi_P = 2R \sin(\theta/2), \quad \eta_P = -2R \cos(\theta/2),$$

рулете су *кругови*, непокретна, полупречника R , са средиштем у O (сама путања рукавца криваје) и покретна, полупречника $2R$, са средиштем у тачки A .

Примери. — 58. Парна машина, пречника цилиндра 500 mm и хода 800 mm, обрће се са 140 o/min. Спојна полука је дугачка 2000 mm. Одредити највећу брзину укрсне главе, њен положај и убрзања у мртвим тачкама.

Решење. — Онда су $\lambda = 1/5$; $\omega \approx 44/3$ sec⁻¹ $R = 40$ cm, па је брзина тачке A $v_A \approx 5,9$ m sec⁻¹.

Стога су

$$\begin{aligned} v_{B\max} &= 1,18 \cdot \sqrt{26}; \quad x_m = 0,36 \text{ m}; \quad \cos \varphi_m = 1/\sqrt{26}; \\ a_{\max} &= \frac{6 \cdot 0,4 \cdot 44^2}{5 \cdot 9} = 103,2 \text{ m sec}^{-2}; \quad a_{\min} = -70,4 \text{ m sec}^{-2}. \end{aligned}$$

59. Код клишног механизма са кривајом $R = 400$ mm, спојном полугом $l = 2\,000$ mm и $n = 180$ o/min, одредити угаону брзину спојне полуге и брзину њене средње тачке C за положаје криваје: $\varphi = 0$; $1/2\pi$; $3/2\pi$; π .

Одредити ходограф брзине те тачке.

Решење. — Угаона брзина криваје износи $\omega_0 = 6\pi \text{ сес}^{-1}$, па је за дате положаје криваје, брзина укрсне главе (v_B): 0 ; $R\omega_0 = 6\pi R$; 0 ; $-R\omega_0 = -6\pi R$.

Координате тачке C су:

$$x = R \cos \theta + 1/2 l \cos \psi = R \cos \theta + 1/2 l (1 - 1/2 \lambda^2 \sin^2 \theta); \quad y = 1/2 R \sin \theta,$$

па су компонентне брзине:

$$\dot{x} = -R \omega_0 (\sin \theta + 1/4 \lambda \sin 2\theta); \quad \dot{y} = 1/2 R \omega_0 \cos \theta.$$

Брзина је

$$v_C = 1/2 R \omega_0 \sqrt{1 + (3 + 4 \lambda \cos \theta + \lambda^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}.$$

Брзина средње тачке спојне полуге дата је табеларно за разне положаје криваје

Угао φ	Тренутни пол лежи	Угаона брзина $\omega = \frac{R}{l} \omega_0$	Брзина средње тачке C v_C
0	на правој OB	$\omega_0 \lambda = 6/5 \pi$	$1/2 R \omega_0 = 120 \pi$
$1/2 \pi$	у бесконачности	0	$R \omega_0 = 240 \pi$
π	на правој OB	$-\omega_0 \lambda = -6/5 \pi$	-120π
$3/2 \pi$	у бесконачности	0	-240π

Елиминисањем угла θ из једначина за компонентне брзине добићемо ходограф брзине

$$\left[R \omega_0 \left(1 + \lambda \frac{y}{R \omega_0} \right) \right]^2 + \left(\frac{1}{2} R \omega_0 \right)^2 = 1.$$

Ако бисмо занемарили израз $\lambda y / R \omega_0$ у односу на 1 (при $\lambda = 1/5$, и y_{\max} он износи 0,1), добили бисмо да је ходограф брзине елипса, полуоса $R \omega_0$ и $1/2 R \omega_0$.

9.11. Кулисни механизам. — Кулисни механизам служи за претварање обртног кретања у праволинијско и примењује се код хоризонталних и вертикалних краткоходних рендисаљки (шепинга и штос-машина). Овај механизам састоји се из криваје (k) и кулисе — клатна (K_u) у којој се креће клизач (K), а у њему се налази обртни кулисни камен (q).

Криваја врши обртно кретање, које добија од мотора или трансмисије преко преносног уређаја. Ово кретање преко кулног камена претвара се у осцилаторно кретање кулисе (клатна) око тачке P (сл. 134 а). Други крај кулисе везан је зглобом (G) са клизачима машине, па се на тај начин обртно кретање криваје (k) претвара у праволинијско кретање ножа.

При једном обрту криваје клизач (K) пређе два различита пута, $s = 2R\alpha$ и $s' = 2R\beta$, где су 2α и 2β углови обртања криваје при прелазу од спољашње (B_s) до унутрашње мртве тачке (B_u), и обратно. Обимна брзина рукавца криваје — клизача K — је константна ($v_k = R\omega = \text{const.}$), а пошто је $\alpha > \beta$, време кретања T у радном ходу (од B_s ка B_u) дуже је од времена у повратном ходу T' (од B_u ка B_s). Та два времена кретања стоје у односу

$$T : T' = \alpha : \beta.$$

При овом кретању нож праволинијским кретањем прелази исти пут h (ход; дужину резања). Смањивањем полупречника криваје R (што се врши помоћу преносног уређаја — коничних зупчаника) може се мењати и ход ножа (h).

Брзину резања и повратну брзину можемо одредити графички на овај начин. У произвољном положају криваје, OK , кулиса заузима положај PG (сл. 134 б). Обимну брзину клизача v_k разложимо у две компоненте: једну у правцу кулисе (v_{ku}) и другу управно на кулису ($v_{kn} = \overline{Kb}$). Права \overline{Pb} сече тангенту повучену у тачки G на путању зглоба у C , па дуж \overline{GC} представља, у истој размери цртања, брзину зглоба у том положају кулисе (v_G). Хоризонтална пројекција ове брзине јесте брзина ножа у том положају криваје ($v = \overline{GD}$).

Истом положају ножа у повратном ходу одговара положај клизача K' . Поступимо ли као и раније, видећемо да је повратна брзина зглоба једнака $\overline{GC'}$, па је повратна брзина ножа ($\overline{GD'}$) у истом положају кулисе већа од брзине радног хода ($v' > v$).

Највећа брзина ножа у оба хода биће у положају кулисе PO (сл. 134 с). Из сличности троуглова

$$\Delta PK_m b_m \sim \Delta PG_m C_m, \text{ односно } \Delta PK'_m b'_m \sim \Delta PG_m C'_m,$$

добивамо односе

$$v_k : (H + R) = v_{\max} : l; \quad v'_k : (H - R) = v'_{\max} : l, \text{ где је } l = \overline{PG}.$$

Највећа брзина ножа биће:

$$v_{\max} = \frac{v_k l}{H + R} = \frac{\pi n}{30} \frac{hl}{2l + h}; \quad v'_{\max} = \frac{v_k l}{H - R} = \frac{\pi n}{30} \frac{hl}{2l - h}, \quad (222)$$

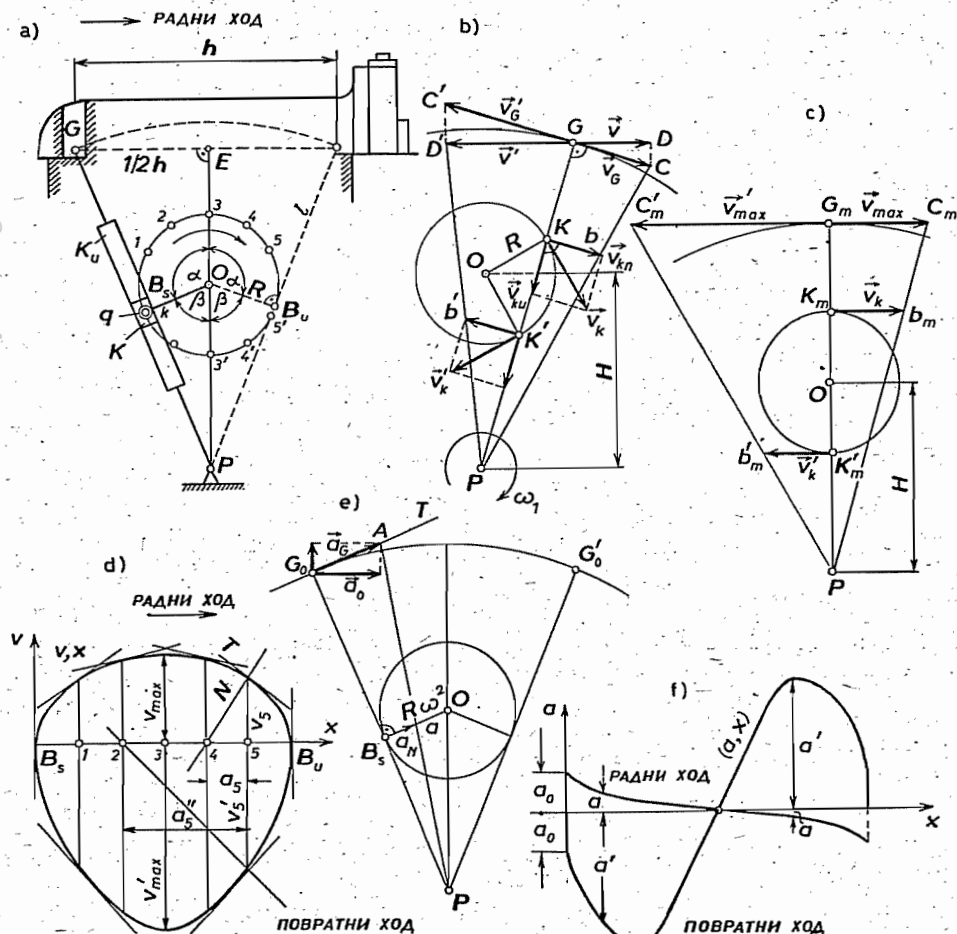
где је $H = \overline{PO}$, јер, с обзиром на сличност троуглова $\Delta POB_s \sim PG_0 E$ (сл. 134 а), добијамо однос $H : R = l : \frac{1}{2}h$, па је $H = 2Rl/h$.

Пошто је за одређени ход ножа брзина криваје константна, времена осциловања кулисе (у sec) за оба хода јесу:

$$T = \frac{s}{v_k} = \frac{2\alpha}{\omega} = \frac{\alpha^0}{3n}; \quad T' = \frac{s'}{v_k} = \frac{2\beta}{\omega} = \frac{\beta^0}{3n},$$

где је n број обртаја криваје (o/min). Та времена су у односу $\alpha^0:\beta^0$. За h_{max} биће однос 1,5 до 2.

Дијаграм брзине резања (односно повратне брзине) и пута приказан је на слици 134*d*. Дијаграм убрзања и пута добијамо најлакше помоћу субнормале (чл. 5.1). У мртвим тачкама не можемо користити ову кон-



Слика 134. — Кулисни механизам хоризонталне краткоходе реидисаљке (шепинга)

струкцију, већ налазимо нормално убрзање криваје рачунски (оно износи $R\omega^2$). Пренесимо ово убрзање од B_s ка O тако да је $a_N = B_s a$, онда права Pa сече тангенту повучену у тачки G_0 на путању зглоба у тачки A , па одсечак $G_0 A$ представља тотално убрзање зглоба у почетном положају (G_0). Хоризонтална пројекција a_0 овог убрзања јесте убрзање ножа када је клизач (K) у спољашњој мртвој тачки B_s (сл. 134*e*). Дијаграм убрзања и пута (a, s) приказан је на слици 134*f*.

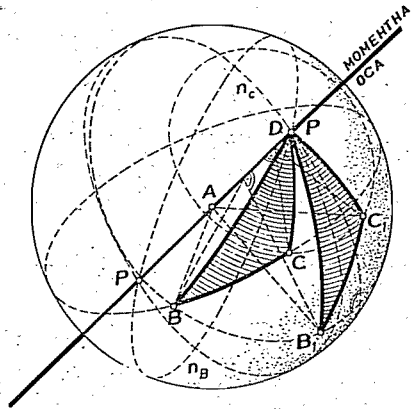
10. ОБРТАЊЕ ТЕЛА ОКО НЕПОМИЧНЕ ТАЧКЕ

10.1. Представљање обртања. — Ако је једна тачка крутог тела, чији је представник троугао ABC , *непомична* (A), онда се друге две тачке крећу по *сферним површинама* са средиштима у тачки A . Претпоставимо да су полупречници тих површина једнаки, $\overline{AB} = \overline{AC}$, тада се тачке B и C налазе на сфери чије је средиште непомична тачка (A). Ако кроз тачке A, B, C поставимо раван, онда се покретне тачке B и C налазе на главном кругу сфере, те лук \widehat{BC} замењује штап \overline{BC} , чије смо кретање испитивали при равном кретању тела. Опишимо око тачке A сферу, полупречника R , она ће сећи круто тело по некој *сферној фигури*, омеђеној контуром (L). Ако познајемо кретање ове сферне фигуре по површини сфере, онда ћемо познавати и обртање крутог тела око непомичне тачке. Због тога се ово кретање и назива *сферно кретање*. Док смо при равном кретању крутог тела посматрали кретање равне фигуре, пресека тела са сталном равни, у самој њеној равни, при сферном кретању, пак, посматрамо кретање сферне фигуре, пресека тела са сталном сфером, на самој сфери. Као што смо при равном кретању покретну фигуру (плочу) заменили *штапом*, при сферном кретању можемо кретање фигуре по сфери заменити кретањем лука *главног круга по самој сфери*.

Када лук \widehat{BC} пређе у положај $\widehat{B_1C_1}$ (сл. 135), можемо тачке B и B_1 , односно C и C_1 , спојити главним круговима сфере који пролазе кроз ове тачке. Повуцимо кроз средине лукова $\widehat{BB_1}$ и $\widehat{CC_1}$ нове главне кругове (симетрале n_B и n_C), они ће се сећи у тачкама (P) и (P'), које леже на сфери. Ако ову тачку (P) спојимо главним круговима са тачкама

B, B_1, C, C_1 , добићемо два једнака *сферна троугла*, PBC и PB_1C_1 . Да бисмо лук \widehat{BC} превели у оближњи положај $\widehat{B_1C_1}$, треба сферни троугао PBC да заокренемо око тачке (P) за угао $\sphericalangle PBB_1 = \sphericalangle PCC_1$. Обртањем крутог тела око осе AP лук \widehat{BC} прешао је у положај $\widehat{B_1C_1}$, а основни троугао $\triangle ABC$ у положај $\triangle AB_1C_1$. Ово је позната *Даламберова (Jean Le Rond d'Alembert, 1717—1783. год. „Recherches sur la précession des équinoxes“, Paris 1749) теорема*, која гласи:

Круто тело, чија је једна тачка непомична, може се превести из једног положаја у други оближњи положај обртањем око осе која пролази кроз непомичну тачку.



Слика 135. — Обртање тела око непомичне тачке

Ако је обртање извршено за бесконачно мали угао, оса се зове *шренућина* — *моментана* — *оса обртања*. Улогу коју је при равном кретању имао *шренућини* *пол* при сферном кретању има *шренућина* *оса*. Све њене тачке у *шом шренућинку* немају брзине.

Положај крутог тела одређен је основним троуглом, то јест са *девети* координата, између којих постоје ове везе: 1° тачка *A* је непомична, и 2° тело је круто. Дакле, положај крутог тела одређен је са *шри* податка, па *обртање крутој шела око нейомичне тачке* има *шри* *свјетена* *слободе* *кретања*.

Дакле, и равно и сферно кретање крутог тела имају по три степена слободе кретања. Код првог смо кретање заменили компланним кретањем плоче, код другог — кретањем сферне фигуре по сфери, *иа се равно кретање крутој шела може* *смањити* *свјецјалним* *случајем* *сферној* *кретања* *када је полупречник* *сфере* *бесконачно* *велики*. Према томе, обрасци изведени раније могу се применити и овде. Угаона брзина је клизећи вектор који пада у правац тренутне осе обртања. Брзина сваке тачке (*B*) крутог тела одређена је Ојлеровом једначином

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{AB}], \quad (223)$$

где је *A* непомична тачка кроз коју пролази тренутна оса.

Коначно обртање састоји се из бесконачно много елементарних обртања. Сваком елементарном обртању припада по једна тренутна оса. Обртање је непрекидно, па се и тренутна оса непрекидно мења у односу на непокретни триедар и у односу на покретно тело. Она ће образовати два геометријска места, две *конусне површине*: једна припада непокретном триедру (*непокретни аксоид*), а друга покретном триедру (*покретни аксоид*). На тај начин коначно обртање крутог тела око непомичне тачке може се представити, по *Поансоу* (*Louis Poinsot*, 1777—1859), *кошљањем* *без* *клизања* *покретној* *по* *непокретном* *аксоиду* („*Théorie nouvelle de la rotation des corps*“, Paris, 1834). *Додирна* *изводница* *оба* *конуса* (*аксоида*) *јесте* *шренућина* *оса* *обртања*, која стално пролази кроз непокретну тачку (*A*).

Ако из непомичне тачке (*A*) опишемо две сфере једнаког полупречника (*R*), једну у непокретном простору а другу у покретном телу, онда ћемо као пресеке конуса и сфера добити две сферне криве на сферама — једну у непокретном простору и другу у простору покретног тела. Као и при равном кретању, ове криве се називају *сферним рулетима*, и то *непокретни рулет* (*херцолходија*) и *покретни рулет* (*полходија*). Оне се додирују у заједничкој тачки на изводници која одговара тренутном полу равном кретања (сл. 136). Као и при равном кретању, покретна рулет *кошља* *се* *без* *клизања* *по* *непокретној*, па се *проблем* *равној* *кретања* *крутој* *шела* *и*

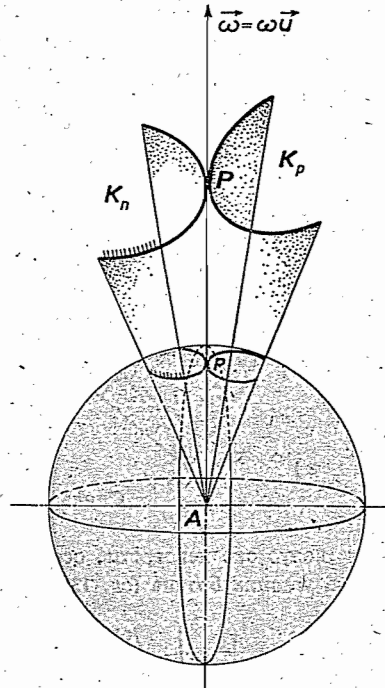
проблем сферног кретања кружног тела своде, дакле, на кохрљање без клизања покретне по непокретној рулетки, односно на кохрљање покретној по непокретном аксоиду. При обртању крутог тела око непомичне тачке (сферног кретања) аксоиди су конусне површине, а при равном кретању су цилиндричне површине. Додирна изводница оба аксоида је тренутна оса обртања. При сферном кретању оса стално пролази кроз непомичну тачку, а при равном она је увек ујавна на раван у којој се плоча компано креће. Ако се сфера претвори у раван, $R = \infty$, конусне површине постаће цилиндричне, те још једном увиђамо да је равно кретање кружног тела само специјалан случај обртања око непомичне тачке (сферног кретања), као што је и транслација специјалан случај ротације око бескојно удаљене осе.

10.2. Прецесионо кретање. — Када су оба аксоида кружни конуси, кретање се зове прецесионо. Углови $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ отвора оба конуса стални су. Геометријска оса непокретног конуса (конуса херолхођије K_n) зове се оса прецесије (AK_n), а оса покретног конуса (конуса полхођије — K_p) је фигурна оса (AK_p). Додирна изводница оба конуса је тренутна оса обртања (AP). Према начину обртања покретног конуса око непокретног, прецесија може бити двојака: прогресивна и регресивна (регресивна).

1° Прогресивна прецесија. — Када се покретни конус (K_p) котрља по спољашњој површини непокретног конуса (K_n), он изводи два кретања: једно око своје фигурне осе, а друго око осе непокретног конуса. Оба кретања су истосмерна, па се прецесија зове прогресивна (сл. 137 а). Прогресивна прецесија је и онда ако се покретни конус својом унутрашњом површином кохрља без клизања по непокретном конусу, јер су оба кретања истосмерна (сл. 137 б).

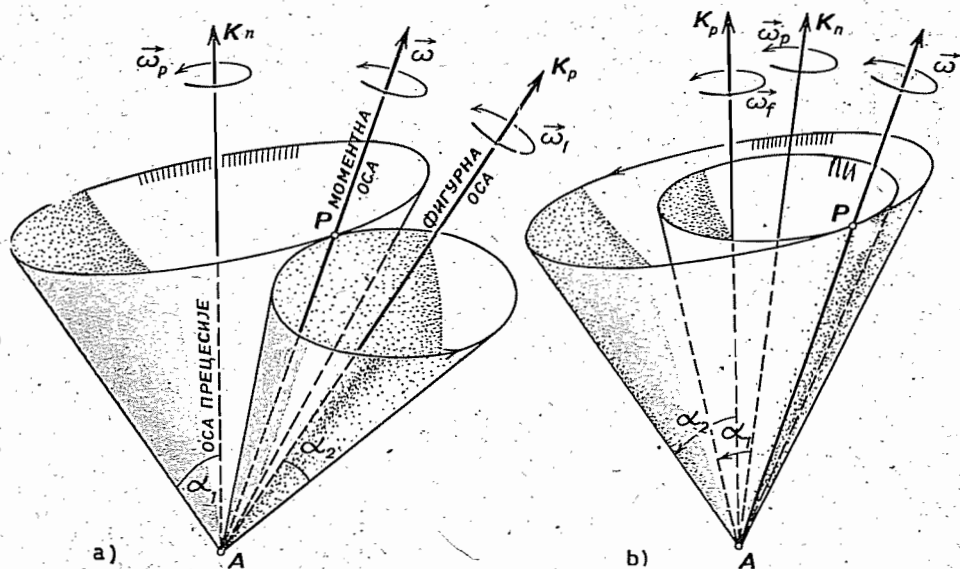
2° Регресивна прецесија. — Ако се, пак, покретни конус својом спољашњом површином кохрља без клизања по унутрашњој површини непокретног конуса, онда су његова обртања супротних смерова. Оваква се прецесија зове регресивна — регресивна — негативна (сл. 138).

Када су угаоне брзине обртања константне, прецесија се зове регуларна.



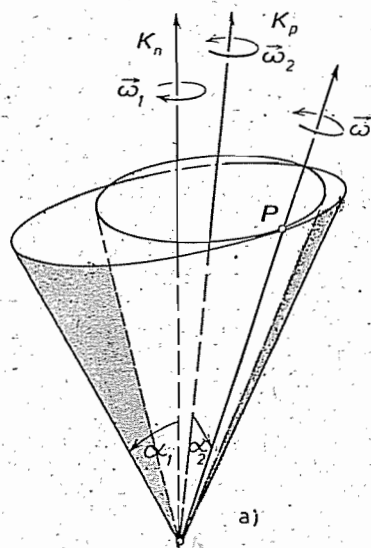
Слика 136. — Аксоиди

Наша Земља изводи регуларну ретроградну прецесију. AK_n представља осу еклиптике, а AK_p осу Земље (фигурна оса), која за 25 868 ($\sim 26\,000$) година (платонска година)



Слика 137. — Прогресивна прецесија

описује конус око непокретне осе AK_n . Половина угла отвора овог конуса је $23^\circ 28'$. Из троугла угаоних брзина (сл. 138b), по синусној теореми, следи овај однос:



Слика 138. — Регресивна прецесија

$$\frac{\omega_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\omega}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{\omega_1}{\omega} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{T}{T_1} \sin 23^\circ 28',$$

јер је

$$\omega_1 T_1 = \omega T.$$

Како је $T=1$ дан, $T_1 = 25\,868 \times 365,256$ дана, то је $\sin \alpha_2 = \sin 0,0087''$, тако да се тренутна оса, тако рећи, поклапа са Земљином осом. Полупречник покретне рулете, коју исеца овај конус на површини Земље, износи свега 27 cm.

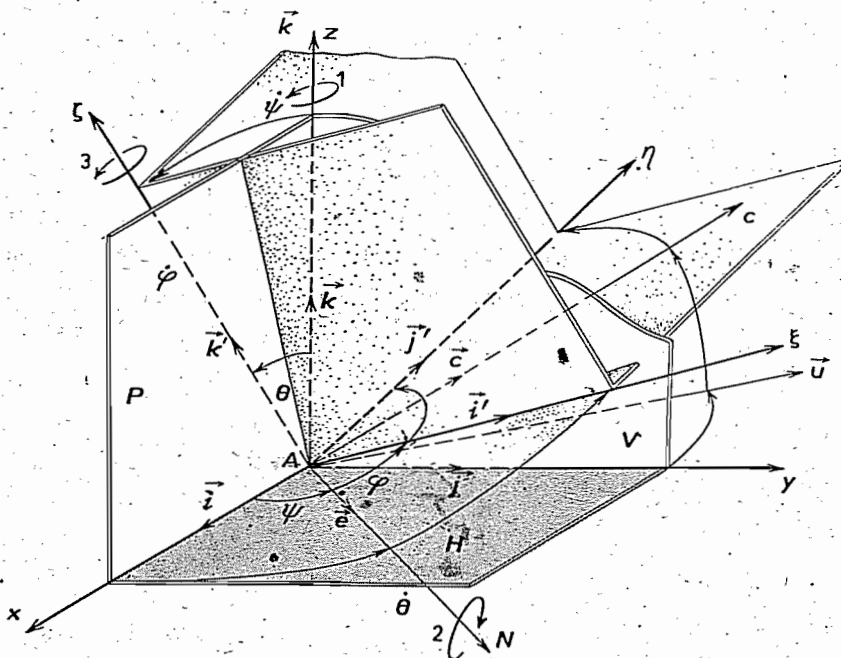
10.3. Ојлерове кинематичке једначине. — Обртање крутог тела око непомичне тачке има *три степенa слободe кретања*, те положај крутог тела морамо одредити са

три податка, односно положајем покретног триедра $A\xi\eta\zeta$, везаног са телом, у односу на непокретни триедар $Axyz$, који са првим има заједнички

координатни почетак у непомичној тачки (A) крутог тела. Положај сваке осе покретног координатног система одређен је са три угла које она чини са координатним осама непокретног триедра, те је положај крутог тела одређен са *девети подајака* — *девети улова*. Између ових девет углова постоји шест веза у облику:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1; & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0; & \alpha_i &= \cos \alpha_i; \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1; & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0; & \beta_i &= \cos \beta_i; \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1; & \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0; & \gamma_i &= \cos \gamma_i, \end{aligned}$$

пошто су оба триедра ортогонална, десне диспозиције (оријентације). Дакле, за одређивање положаја крутог тела остају *три независне величине*, што значи да круто тело које се обрће око непомичне тачке има три степена слободе кретања, што смо и раније уочили (чл. 10.1). За ове три независне величине Ојлер је увео три угла, ψ , φ , θ , који се називају *Ојлерови улови*. Ако је систем $A\xi\eta\zeta$ постао ротацијом триедра $Axyz$ (сл. 139), онда је међусобни положај оса триедара потпуно одређен са ова три угла.



Слика 139. — Ојлерови улови

Кроз координатне осе $A\xi$ и $A\eta$ поставимо раван, она ће сећи раван Axy по траси AN , која се зове *чворна оса* (*линија чворова*). Права управна на њу, а лежи у равни $A\xi\eta$, зове се *попречна оса* (AC).

Обрнемо ли систем $Axuz$ око осе Az за угао ψ (угао *прецесије*), оса Ax поклопиће се са чворном осом (AN), док оса Az остаје непромењена. Ако затим систем обрнемо око чворне осе (AN) за угао θ (угао *нутиације*), оса Az пазиће у положај $A\zeta$. Трећим обртањем око осе $A\zeta$ за угао φ (угао *ројације*), чворна оса пазиће у положај $A\xi$. На тај начин, помоћу *три обртања*, добили смо систем $A\xi\eta\zeta$ из система $Axuz$. Ово је обртање једнозначно одређено са ова три Ојлерова угла.

Ако су ортови непокретног триебра $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а покретног $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, затим \vec{e} орт чворне и \vec{c} орт попречне осе, онда се између ортова оба система могу поставити формуле трансформације. Орт \vec{e} постао је обртањем орта \vec{i} , у равни Axu , око осе Az *здесна налево* за угао ψ . Формуле трансформације добићемо из схеме

	\vec{e}	\vec{c}
\vec{i}	ψ	$\psi + 1/2\pi$
\vec{j}	$-1/2\pi + \psi$	ψ

па је

$$\vec{e} = \vec{i} \cos \psi + \vec{j} \sin \psi = \vec{i} \cos \psi + [\vec{k}, \vec{i}] \sin \psi. \quad (a)$$

Први члан векторског производа $[\vec{k}, \vec{i}]$ показује осу око које се врши обртање, а други показује орт чијим је обртањем постао орт \vec{e} . Применимо ли ове обрасце и на друга два обртања, увиђамо да је орт \vec{k}' постао из орта \vec{k} обртањем *здесна налево* у равни $Az\zeta$ за угао θ око чворне осе, те је

$$\vec{k}' = \vec{k} \cos \theta + [\vec{e}, \vec{k}] \sin \theta. \quad (b)$$

Орт \vec{i}' постао је обртањем орта \vec{e} ~~здесна налево~~ ^{→ *здесна налево*} у равни $A\xi\eta$ за угао φ око $A\zeta$ осе, те је

$$\vec{i}' = \vec{e} \cos \varphi + [\vec{k}', \vec{e}] \sin \varphi. \quad (c)$$

Исто тако, орт \vec{j}' постао је обртањем орта \vec{e} *здесна налево* у равни $A\xi\eta$ за угао $\varphi + 1/2\pi$ око $A\zeta$ осе, па је

$$\vec{j}' = -\vec{e} \sin \varphi + [\vec{k}', \vec{e}] \cos \varphi. \quad (d)$$

Векторске производе

$$[\vec{e}, \vec{k}] \text{ и } [\vec{k}', \vec{e}]$$

добићемо из прве (a) и друге (b) релације у облику

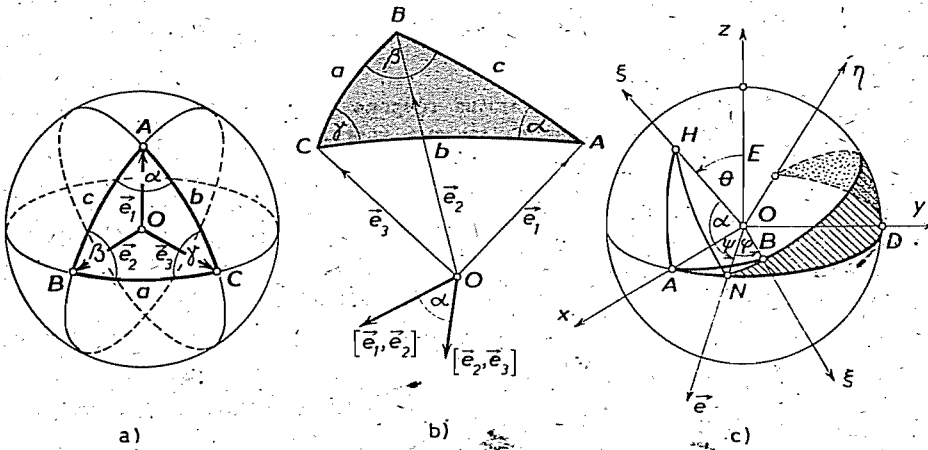
$$[\vec{e}, \vec{k}] = \vec{i} \sin \psi - \vec{j} \cos \psi; \quad [\vec{k}', \vec{e}] = -\vec{i} \sin \psi \cos \theta + \vec{j} \cos \psi \cos \theta + \vec{k} \sin \theta,$$

па се формуле трансформације једних и других координата могу дати следећом схемом*:

	$\xi (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$	$\eta (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$	$\zeta (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$	
x	$\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta$	$-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta$	$\sin \psi \sin \theta$	\vec{i}
y	$\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta$	$-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta$	$-\cos \psi \sin \theta$	\vec{j}
z	$\sin \varphi \sin \theta$	$\cos \varphi \sin \theta$	$\cos \theta$	\vec{k}
	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}'	

(224)

Обрасце (224) можемо извести применом косинусне теореме сферне тригонометрије. Нека је координатни почетак O средиште јединичне сфере (сл. 140 a). У самом почетку O узмимо три произвољна орта, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, који продиру јединичну сферу у тачкама A, B, C . Ове тачке спојене луковима великих кругова чине сферни троугао ABC , чије су стране једнаке луковима a, b, c . Равни OAB и OAC чине угао α , равни OAB и OBC угао β , а равни OBC и OCA угао γ .



Слика 140. — Косинусна и синусна теорема сферне тригонометрије

Између ортова $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ постоје ови односи:

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1; \quad (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \cos a; \quad (\vec{e}_3, \vec{e}_1) = \cos b; \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \cos c;$$

$$|\vec{e}_1, \vec{e}_2| = \sin c; \quad |\vec{e}_1, \vec{e}_3| = \sin b; \quad |\vec{e}_3, \vec{e}_2| = \sin a.$$

* Видети Р. Кашанин: Виша математика I (друго издање 1946. године, стр. 91).

С обзиром на слику 140b и на познати образац векторске алгебре*, скаларни производ векторских производа ортова износи:

$$([\vec{e}_1, \vec{e}_2], [\vec{e}_1, \vec{e}_3]) = |[\vec{e}_1, \vec{e}_2]| |[\vec{e}_1, \vec{e}_3]| \cos \alpha = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) (\vec{e}_2, \vec{e}_3) - (\vec{e}_1, \vec{e}_3) (\vec{e}_1, \vec{e}_2),$$

те је

$$\sin b \sin c \cos \alpha = \cos a - \cos b \cos c.$$

Овај израз представља познату *косинусну теорему сферне тригонометрије*:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Векторски производ**

$$[[\vec{e}_1, \vec{e}_2], [\vec{e}_3, \vec{e}_1]] = -([\vec{e}_2, [\vec{e}_3, \vec{e}_1]]) \vec{e}_1$$

има интензитет

$$\sin c \sin b \sin \alpha.$$

Цикличком пермутацијом добијамо још два израза: $\sin a \sin c \sin \beta$ и $\sin b \sin a \sin \gamma$, па њиховим изједначењем, пошто мешовити производ ортова $(\vec{e}_2, [\vec{e}_3, \vec{e}_1])$ представља запремину паралелепипеда чије су ивице сами ортови, добијамо *синусну теорему сферне тригонометрије*:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Претпоставимо да чворна оса продире јединичну сферу у тачки N (сл. 140c), а сече осе Ox и $O\xi$ у тачкама A и B , онда из сферног троугла ANB добијамо:

$$\cos \widehat{AB} - \cos \alpha_1 = \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \cos (180^\circ - \theta) = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta.$$

Из сферног троугла ANH следи овај израз: $\cos \widehat{CH} = \cos \alpha_3 = \sin \psi \sin \theta$, јер је $\widehat{AH} = \alpha$, $\widehat{NH} = 1/2 \pi$, $\sphericalangle ANH = 90^\circ - \theta$.

Осталих седам вредности добићемо из сферних троуглова ако тачку N спојимо великим круговима сфере са продорним тачкама координатних оса оба координатна система сфере.

Помоћу три узастопна обртања превели смо ортогнални систем $Axuz$ у исти такав систем $A\xi\eta\zeta$. Ова обртања су одређена Ојлеровим угловима, односно угаоним брзинама θ , ψ и φ , чији вектори падају у правце поменутих оса (чворне, прецесије и сопственог обртања), па се и називају угаоним брзинама *нуџације*, *прецесије* и *соисивене ротације*. Према томе, вектор угаоне брзине обртања тела око непокретне осе можемо разложити у три компоненте: у правцима оса непокретног триедра $Axuz$, оса покретног триедра $A\xi\eta\zeta$ и оса триедра $ANz\zeta$:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \omega_\xi \vec{i}' + \omega_\eta \vec{j}' + \omega_\zeta \vec{k}' = \theta \vec{e} + \psi \vec{k} + \varphi \vec{k}'. \quad (225)$$

Пошто смо ортове покретног триедра и орт чворне осе изразили помоћу ортова непокретног триедра и Ојлерових углова, можемо одредити

* $([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]) = (\vec{a}, \vec{c}) (\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d}) (\vec{b}, \vec{c})$;

** $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] = (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{d}]) \vec{b} - (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{d}]) \vec{a}$.

пројекције вектора угаоне брзине на осе непокретног и покретног триедра
множећи претходну једначину скаларно одговарајућим ортовима $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\omega_x = (\vec{\omega}, \vec{i}) = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{i}) + \dot{\psi}(\vec{k}, \vec{i}) + \dot{\varphi}(\vec{k}', \vec{i}) = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{i}) + \dot{\varphi}(\vec{k}', \vec{i}),$$

$$\omega_y = (\vec{\omega}, \vec{j}) = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{j}) + \dot{\psi}(\vec{k}, \vec{j}) + \dot{\varphi}(\vec{k}', \vec{j}) = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{j}) + \dot{\varphi}(\vec{k}', \vec{j}),$$

$$\omega_z = (\vec{\omega}, \vec{k}) = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{k}) + \dot{\psi}(\vec{k}, \vec{k}) + \dot{\varphi}(\vec{k}', \vec{k}) = \dot{\psi} + \dot{\varphi}(\vec{k}', \vec{k}),$$

односно ортовима $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$:

$$\omega_\xi = (\vec{\omega}, \vec{i}') = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{i}') + \dot{\psi}(\vec{k}, \vec{i}') + \dot{\varphi}(\vec{k}', \vec{i}') = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{i}') + \dot{\psi}(\vec{k}, \vec{i}'),$$

$$\omega_\eta = (\vec{\omega}, \vec{j}') = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{j}') + \dot{\psi}(\vec{k}, \vec{j}') + \dot{\varphi}(\vec{k}', \vec{j}') = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{j}') + \dot{\psi}(\vec{k}, \vec{j}'),$$

$$\omega_\zeta = (\vec{\omega}, \vec{k}') = \dot{\theta}(\vec{e}, \vec{k}') + \dot{\psi}(\vec{k}, \vec{k}') + \dot{\varphi}(\vec{k}', \vec{k}') = \dot{\psi}(\vec{k}, \vec{k}') + \dot{\varphi}.$$

При том користимо особину да су оба триедра ортогонална, те добијамо

$\omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi;$	$\omega_\xi = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi;$	(226)
$\omega_y = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi;$	$\omega_\eta = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi;$	
$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta;$	$\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta;$	

јер су скаларни производи:

$$(\vec{e}, \vec{i}) = \cos \psi; \quad (\vec{e}, \vec{j}) = \sin \psi; \quad (\vec{e}, \vec{k}) = 0;$$

$$(\vec{e}, \vec{i}') = \cos \varphi; \quad (\vec{e}, \vec{j}') = -\sin \varphi; \quad (\vec{e}, \vec{k}') = 0;$$

$$(\vec{k}, \vec{i}') = \sin \theta \sin \varphi; \quad (\vec{k}, \vec{j}') = \sin \theta \cos \varphi; \quad (\vec{k}, \vec{k}') = \cos \theta;$$

$$(\vec{k}', \vec{i}) = \sin \theta \sin \psi; \quad (\vec{k}', \vec{j}) = -\sin \theta \cos \psi; \quad (\vec{k}', \vec{k}) = \cos \theta;$$

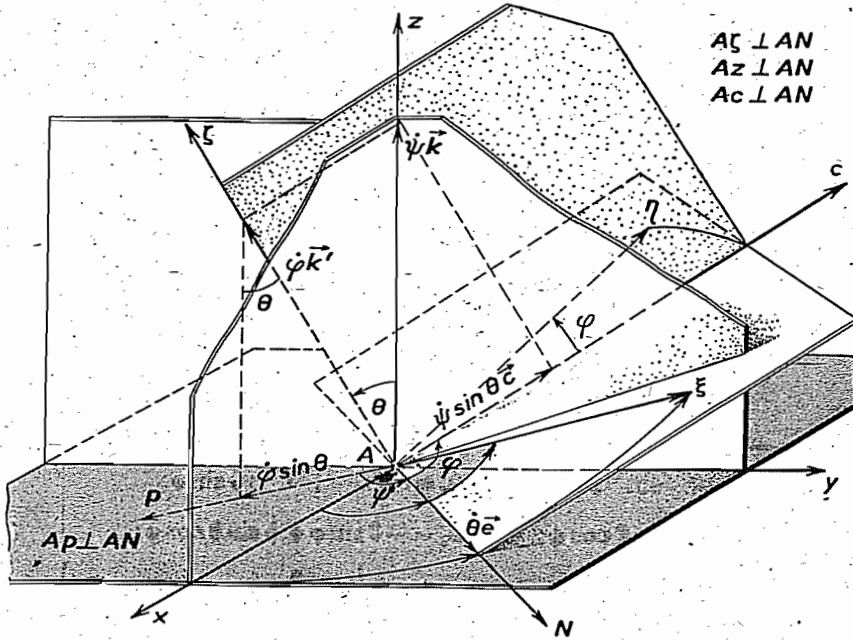
$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0;$$

$$(\vec{i}', \vec{j}') = (\vec{i}', \vec{k}') = (\vec{j}', \vec{k}') = 0.$$

Ово су познате *Ојлерове кинематичке једначине*, из којих добијамо компонентне угаоне брзине, за осе оба координатна система, као функције Ојлерових углова и њихових првих извода по времену.

Ове једначине можемо извести и *непосредно*, пројцирањем вектора угаоне брзине на осе једног и другог триедра, на овај начин. Угаоне брзине $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ падају у правце оса AN , Az и $A\zeta$. Како је чворна оса управна на осе Az и $A\zeta$, пројекција AP осе $A\zeta$ на раван *Оху* управна је

на чворну осу (сл. 141). Попречна оса Ac лежи у равни $A\xi\eta$, у којој лежи и сама чворна оса, па је управна на чворној оси, те мора да лежи и у равни $Az\zeta$. Разлагањем угаоне брзине ψ на компоненте у правцима



Слика 141. — Компоненте вектора угаоне брзине

оса Az и AP и угаоне брзине ψ у правцима оса $A\zeta$ и Ac добијамо углове између одговарајућих оса, који су показани у следећој схеми:

Оса	$AN(\vec{e})$	$AP_{(xy)} \perp N$	ζ	Оса	$N(\vec{e})$	Ac	z
	θ	$\psi \sin \theta$	ψ		θ	$\psi \sin \theta$	ψ
x	ψ	$1/2 \pi - \psi$	\vec{i}	ξ	φ	$-1/2 \pi + \varphi$	\vec{i}'
y	$-1/2 \pi + \psi$	$\pi - \psi$	\vec{j}	η	$1/2 \pi + \varphi$	φ	\vec{j}'
$z(\psi)$	$1/2 \pi$	$1/2 \pi$	$\theta \vec{k}$	$\zeta(\varphi)$	$1/2 \pi$	$1/2 \pi$	$\theta \vec{k}'$
	\vec{e}	\vec{P}_0	\vec{k}		\vec{e}	\vec{c}	\vec{k}

При обртању тела око непомичне осе могли смо угаону брзину изразити као извод једној ујла по времену. Међутим, при овом просторном

(сферном) обртању не можемо наћи један једини угао чији је извод по времену једнак угаоној брзини, већ угаону брзину можемо представити у облику (225), где су изводи Ојлерових углова параметри који се мењају са временом (холономни параметри).

Квадрат угаоне брзине је

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta. \quad (227)$$

На пример, када је кретање дато Ојлеровим угловима $\psi = 3t$; $\varphi = 5t$; $\theta = 60^\circ$, тада су $\dot{\psi} = 3$, $\dot{\varphi} = 5$, $\dot{\theta} = 0$, па је $\vec{\omega} = 3\vec{k} + 5\vec{k}'$, те је $\omega = 6 \text{ sec}^{-1}$. Вектор угаоне брзине, то јест тренутна оса, лежи у равни $Az\zeta$.

10.4. Одређивање брзине тачке покретног тела. — Произвољна тачка тела, које се обрће око непомичне тачке $O(A)$ — координатног почетка покретног и непокретног триедра — одређена је вектором положаја $\vec{\rho}$, који се може написати у развијеном облику:

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \xi\vec{i}' + \eta\vec{j}' + \zeta\vec{k}'. \quad (228)$$

Брзина те тачке одређена је Ојлеровом једначином (223) и може се написати у облику детерминанти трећег реда:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix};$$

из којих можемо добити компонентне брзине за оба триедра:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y; & v_y &= \omega_z x - \omega_x z; & v_z &= \omega_x y - \omega_y x; \\ v_\xi &= \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta; & v_\eta &= \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta; & v_\zeta &= \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi. \end{aligned} \quad (229)$$

Ове обрасце можемо извести и непосредно из обрасца (228) диференцирањем по времену, водећи рачуна да су координате покретне тачке (x, y, z) променљиве са временом, а ортови $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ константни, док су координате ξ, η, ζ независне од времена, јер тачка припада телу које се заједно обрће са координатним системом $O\xi\eta\zeta$, али су ортови $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ променљиви са временом. Брзина, за покретни триедар, одређена је једначином

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \xi \frac{d\vec{i}'}{dt} + \eta \frac{d\vec{j}'}{dt} + \zeta \frac{d\vec{k}'}{dt}.$$

Изводе ортова покретних оса добићемо применом Ојлерове једначине. На пример, за орт \vec{i}' биће:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}'] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_x \vec{j}' - \omega_y \vec{k}', \quad (230)$$

где су

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = -\omega_x \vec{i}' + \omega_z \vec{k}'; \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \omega_y \vec{i}' - \omega_z \vec{j}'.$$

Уносећи ове вредности у претходну једначину и изједначајући са леве и десне стране вредности уз исте ортове, добићемо потпуно исте обрасце за компонентне брзине за осе покретног триедра.

Квадрат брзине је инваријантан и износи:

$$v^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\zeta^2. \quad (231)$$

Познавајући интензитет брзине и њене компоненте, можемо одредити углове које вектор брзине чини са координатним осама, помоћу скаларних производа. На пример, за Ox - и $O\xi$ -осу биће:

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{i}) &= v \cos(\vec{v}, \vec{x}) = v_x; & (\vec{v}, \vec{i}') &= v \cos(\vec{v}, \vec{\xi}) = v_\xi; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

Тренутна оса има особину да све њене тачке, у датом тренутку, имају брзину једнаку нули, па изједначајући са нулом изразе (229) добићемо њену једначину у оба триедра:

$$\boxed{\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}; \quad \frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}}, \quad (232)$$

то јест једначину *праве која пролази кроз координатни почетак O*. Пошто се угаоне брзине мењају са временом, напишимо ове једначине у облику

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\omega_y}{\omega_x} = f_1(t); & \frac{z}{x} &= \frac{\omega_z}{\omega_x} = f_2(t); \\ \frac{\eta}{\xi} &= \frac{\omega_\eta}{\omega_\xi} = \varphi_1(t); & \frac{\zeta}{\xi} &= \frac{\omega_\zeta}{\omega_\xi} = \varphi_2(t). \end{aligned}$$

Елиминисањем времена t из ових једначина добијамо једначине непректног и покретног аксоида у облику:

$$\boxed{F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0; \quad \Phi\left(\frac{\eta}{\xi}, \frac{\zeta}{\xi}\right) = 0.} \quad (233)$$

Ове једначине представљају конусне површине са врхом у непомичној тачки O .

Регуларна прецесија одређена је овим зависностима Ојлерових углова од времена:

$$\psi = \Omega t, \quad \theta = \theta_0 = \text{const.}, \quad \varphi = \nu t = \omega_s t. \quad (234)$$

Оде су $\psi = \Omega$; $\dot{\theta} = 0$; $\dot{\varphi} = \nu = \omega_s$, па је према (226) и (227), угаона брзина

$$\vec{\omega} = \Omega \vec{k} + \nu \vec{k}' = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_s; \quad \omega^2 = \Omega^2 + \nu^2 + 2\Omega\nu \cos \theta_0. \quad (235)$$

Угаона брзина $\omega_s = \nu = \dot{\varphi}$ је угаона брзина *сопствене обртања* тела око фигурне осе, а угаона брзина $\omega_p = \Omega = \dot{\psi}$ је *брзина прецесије*, те трепутна оса лежи увек у равни $Az\zeta$.

Ојлорове кинематичке једначине прецесије су:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \nu \sin \theta_0 \sin \Omega t; & \omega_x &= \Omega \sin \theta_0 \sin \nu t; \\ \omega_y &= -\nu \sin \theta_0 \cos \Omega t; & \omega_y &= \Omega \sin \theta_0 \cos \nu t; \\ \omega_z &= \Omega + \nu \cos \theta_0; & \omega_z &= \nu + \Omega \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (236)$$

па су једначине аксоида — кружних конуса:

$$\begin{aligned} K_n) \quad & (\Omega + \nu \cos \theta_0)^2 (x^2 + y^2) - (\nu^2 \sin^2 \theta_0) z^2 = 0; \\ K_p) \quad & (\nu + \Omega \cos \theta_0)^2 (\xi^2 + \eta^2) - (\Omega^2 \sin^2 \theta_0) \zeta^2 = 0. \end{aligned} \quad (237)$$

Ово су једначине кружних конуса са врхом у координатном почетку.

Једну важну везу између брзине и угаоне брзине можемо изразити помоћу *ројора*. Ротор брзине можемо написати у облику

$$\text{rot } \vec{v} = [\nabla, \vec{v}] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta & \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta & \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi \end{vmatrix} = 2(\omega_x \vec{i}' + \omega_y \vec{j}' + \omega_z \vec{k}') = 2\vec{\omega}. \quad (238)$$

Ротор брзине произвољне тачке кружне тела, које се обрће око непомичне тачке, једнак је двострукој угаоној брзини.

Овај образац је од велике важности у хидромеханици и теорији деформација.

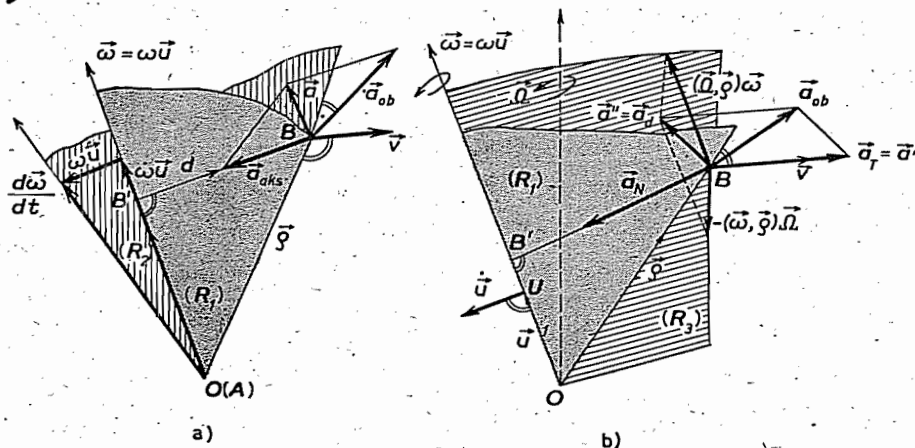
10.5. **Одређивање убрзања тачке покретног тела.** — Диференцирањем по времену једначине (223) добићемо убрзање:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right].$$

Извод $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ представља брзину покретне тачке, па се убрзање може написати и у овом облику:

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = \vec{a}_{ob} + \vec{a}_{aks}. \quad (238)$$

Први образац је сличан обрасцу (223) и може се протумачити као момент вектора угаоног убрзања, са нападном тачком у почетку O , а за моментну тачку у покретној тачки (B), те се назива *обртно убрзање*. Оно је управно на векторима $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ и $\vec{\rho}$, образује са њима десни триедар (сл. 142 а), те је управно на равни (R_2).



Слика 142. — Компоненте вектора убрзања

Друго убрзање може се написати у облику

$$\vec{a}_{aks} = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = \vec{\omega} (\vec{\omega}, \vec{\rho}) - \omega^2 \vec{\rho} = -\omega^2 d\vec{N} = \vec{a}_N,$$

јер је $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$; $\vec{\rho} = \vec{OB} = \vec{OB}' + \vec{B'B} = (\rho, u) \vec{u} + d\vec{N}$; $d = \overline{BB'}$, и усмерено је ка тренутној оси, где је d растојање тачке B од осе. Због тога се ово убрзање назива *аксијетално убрзање*. Оно лежи, дакле, у равни вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{\rho}$, то јест у равни (R_1).

Обртно убрзање може се разложити на две компоненте, јер се угаона брзина обртања тела мења и по величини и по правцу. Пошто је $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$, где је \vec{u} орт тренутне осе, угаоно убрзање биће

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\omega} \vec{u} + \omega \dot{\vec{u}} = \dot{\omega} \vec{u} + \omega [\vec{\Omega}, \vec{u}]; \quad \vec{u} = [\vec{\Omega}, \vec{u}],$$

јер је, према (230), извод орта \vec{u} брзина тачке U на осе чији је вектор положаја сам орт \vec{u} ; $|\vec{u}| = 1$, (сл. 142 b). Према томе, обртно убрзање је

$$\vec{a}_{ob} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] = \omega [\vec{u}, \vec{\rho}] + \omega [[\vec{\Omega}, \vec{u}], \vec{\rho}] = \vec{a}' + \vec{a}''$$

где је Ω угаона брзина којом се обрће тренутна оса око тачке O . Прво убрзање

$$\vec{a}' = \omega [\vec{u}, \vec{\rho}] = \frac{\omega}{\omega} [\dot{\omega}, \vec{\rho}] = \frac{\omega}{\omega} \vec{v} = \omega d\vec{T} = \vec{a}_T$$

колинеарно је са брзином \vec{v} и сразмерно растојању тачке од осе, па има улогу тангенцијалног убрзања при обртању тела око непомичне осе. Оно је управно на равни вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{\rho}$, то јест равни (R_1) и настаје услед промене величине угаоне брзине $\vec{\omega}$ обртања тела. Међутим, други члан се може написати у облику

$$\vec{a}'' = \omega [[\vec{\Omega}, \vec{u}], \vec{\rho}] = -\omega [\vec{\rho}, [\vec{\Omega}, \vec{u}]] = -[\vec{\rho}, [\vec{\Omega}, \vec{\omega}]] = (\vec{\Omega}, \vec{\rho}) \vec{\omega} - (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \vec{\Omega}$$

и представља *гойунско убрзање услед скрећања тренутне осе*. Када би тренутна оса била непокретна, онда би било $\Omega = 0$ и $\vec{a}'' = \vec{a}_d = 0$, те ово убрзање заиста представља *гойунско убрзање услед скретања тренутне осе*. Ово убрзање је паралелно равни (R_2) вектора угаоних брзина $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$ (сл. 142 b).

На овај начин, убрзање тачке тела које се обрће око непомичне тачке разлаже се на три компоненте: *тангенцијално, нормално-аксијетално и гойунско убрзање (Rivals-ова теорема)*:

$$\vec{a} = \vec{a}_{ob} + \vec{a}_{aks} = \vec{a}_T + \vec{a}_N + \vec{a}_d, \quad (239)$$

где су:

$$\begin{aligned} \vec{a}_T &= \omega [\vec{u}, \vec{\rho}] = \frac{\omega}{\omega} \vec{v} = \omega d\vec{T}; & \vec{a}_T &= \omega d; & d &= \overline{BB'}; \\ \vec{a}_N &= [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = -\omega^2 d\vec{N}; & \vec{a}_N &= \omega^2 d; \\ \vec{a}_d &= -[\vec{\rho}, [\vec{\Omega}, \vec{\omega}]] = (\vec{\Omega}, \vec{\rho}) \vec{\omega} - (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \vec{\Omega} = a_{d\omega} \vec{\omega} - a_{d\Omega} \vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (240)$$

Диференцирајући израз (225), с обзиром на изводе (230), добијамо угаоно убрзање:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \dot{\omega}_x \vec{i}' + \dot{\omega}_y \vec{j}' + \dot{\omega}_z \vec{k}' = \dot{\omega}_\xi \vec{i}' + \dot{\omega}_\eta \vec{j}' + \dot{\omega}_\zeta \vec{k}' + \omega_\xi [\vec{\omega}, \vec{i}'] + \omega_\eta [\vec{\omega}, \vec{j}'] + \omega_\zeta [\vec{\omega}, \vec{k}'] = \\ &= \dot{\omega}_\xi \vec{i}' + \dot{\omega}_\eta \vec{j}' + \dot{\omega}_\zeta \vec{k}'. \end{aligned} \quad (241)$$

Како је

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = \vec{\omega} (\vec{\omega}, \vec{\rho}) - \omega^2 \vec{\rho}; \quad (\vec{\omega}, \vec{\rho}) = \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z = \omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta,$$

пројекције вектора убрзања су:

a) на осе *нейокрејној* триедра:

$$\begin{aligned} a_x &= \omega_y z - \omega_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x; \\ a_y &= \omega_z x - \omega_x z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y; \\ a_z &= \omega_x y - \omega_y x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z; \end{aligned} \quad (242 a)$$

b) на осе *покрејној* триедра:

$$\begin{aligned} a_\xi &= \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta + \omega_\xi (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \xi; \\ a_\eta &= \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta + \omega_\eta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \eta; \\ a_\zeta &= \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi + \omega_\zeta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \zeta, \end{aligned} \quad (242 b)$$

јер је

$$\omega_\xi [\vec{\omega}, \vec{i}'] + \omega_\eta [\vec{\omega}, \vec{j}'] + \omega_\zeta [\vec{\omega}, \vec{k}'] = [\vec{\omega}, \vec{\omega}] = 0.$$

Интензитет вектора тоталног убрзања (\vec{a}) покретне тачке инваријантан је за оба триедра:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a_\xi^2 + a_\eta^2 + a_\zeta^2. \quad (243)$$

Диференцирајући израз (225) по времену, угаоно убрзање може се изразити помоћу Ојлерових углова и њихових извода по времену, те је

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\dot{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta) \vec{e} + (\dot{\psi} - \dot{\phi} \theta \sin \theta) \vec{k} + \dot{\theta} (\dot{\phi} \cos \theta - \dot{\psi}) [\vec{e}, \vec{k}] + \dot{\phi} \vec{k}'. \quad (244)$$

Стога су пројекције овог вектора:

a) на осе *нейокрејној* триедра *Охуз*:

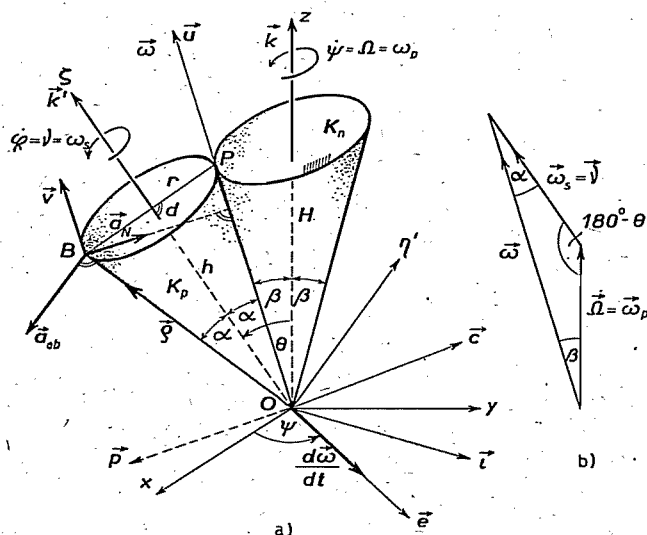
$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi + \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi; \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \cos \psi + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta; \end{aligned} \quad (244 a)$$

b) на осе покретној триедре $O\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \ddot{\theta} \cos \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi + \ddot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi; \\ \omega_y &= -\ddot{\theta} \sin \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi + \ddot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi; \\ \omega_z &= \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta.\end{aligned}\quad (244b)$$

Ове се пројекције добијају и непосредно, диференцирајући Ојлерове кинематичке једначине (226) по времену.

Код регуларне прецесије (сл. 143a) угаона брзина $\dot{\theta}$ једнака је нули, те је тренутна угаона брзина једнака векторском збиру (сл. 143b) угаоне брзине



Слика 143. — Угаоно убрзање регуларне прецесије

прецесије ($\omega_p = \Omega = \dot{\psi}$) и угаоне брзине сопственог обртања ($\omega_s = \dot{\varphi}$):

$$\vec{\omega} = \Omega \vec{k} + \dot{\varphi} \vec{k}' = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_s; \quad \omega = \text{const.},$$

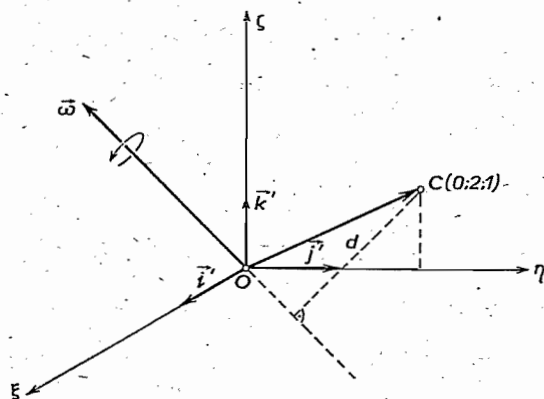
па је због тога тренутна оса у равни $Oz\zeta$.

Диференцирањем претходног израза, а према (230) и (225), добијамо израз за вектор угаоног убрзања:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \omega_s \frac{d\vec{k}'}{dt} = \omega_s [\vec{\omega}, \vec{k}'] = [\vec{\omega}, \vec{\omega}_s] = [\vec{\omega}_p, \vec{\omega}_s] = [\vec{\Omega}, \dot{\varphi}] = \\ &= (\Omega \dot{\varphi} \sin \theta_0) \vec{e} = (\omega_p \omega_s \sin \theta) \vec{e}.\end{aligned}\quad (245)$$

Иако је угаона брзина овог кретања константна ($\omega = \text{const.}$), ипак постоји угаоно убрзање, јер тренутна оса непрекидно мења свој положај у прос-

тору, обрћући се око осе прецесије (Oz -осе) угаоном брзином прецесије (Ω). Вектор угаоног убрзања пада у правац чворне осе (орта \vec{e}). Ово непосредно следи и из обрасца (244), јер је $\Omega = \dot{\psi} = \text{const.}$; $\ddot{\psi} = 0$, $\omega_s = \dot{\varphi} = \text{const.}$; $\ddot{\varphi} = 0$; $\theta = \theta_0$. Када је регуларна прецесија *прогресивна*, угаоне брзине су истосмерне, па је угао θ_0 *оштар*, те вектор угаоног убрзања има *смер чворне осе* (орта \vec{e}); напротив, када је регуларна прецесија *регресивна*, вектор угаоног убрзања је у смеру негативне чворне осе (орта $-\vec{e}$), пошто је тада угао θ_0 туп (сл. 137. и 138).



Слика 144. — Тренутна оса

Примери. — 60. Угаона брзина тела које се обрће око непомичне тачке износи 6 sec^{-1} . Тренутна оса гради у том тренутку са координатним осама углове чији су косинуси смера $2/3$; $-2/3$ и $1/3$.

Одредити брзину тачке C тела која је у том тренутку одређена координатама $(0; 2; 1 \text{ m})$. Колико је растојање те тачке од тренутне осе? Написати једначину тренутне осе (сл. 144).

Решење. — Због

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$$

је $\cos \gamma_1 = 1/3$, па су пројекције угаоне брзине на осе покретног триедра:

$$\omega_\xi = 4; \quad \omega_\eta = -4; \quad \omega_\zeta = 2 \text{ sec}^{-1}.$$

Угао између вектора угаоне брзине (тренутне осе) и вектора положаја тачке одређен је изразом

$$\cos(\vec{\omega}, \vec{\rho}) = \frac{(\vec{\omega}, \vec{\rho})}{\omega \rho} = \frac{-8 + 2}{6\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5},$$

па је растојање тачке од тренутне осе:

$$d = \rho \sin(\vec{\omega}, \vec{\rho}) = 2 \text{ m}.$$

61. Одредити једначине тренутне осе и величину угаоне брзине ω тела ако се зна да су пројекције брзине тачке $B(0; 0; 2 \text{ m})$ на координатне осе: $1, 2$ и 0 m/sec , и да је правац брзине тачке $C(0; 1; 2 \text{ m})$ одређен косинусима смера: $-2/3, 2/3, -1/3$.

Решење. — Према (229) брзина тачке B је

$$\vec{v}_B = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}' + 2\vec{j}' = 2\omega_\eta \vec{i}' - 2\omega_\xi \vec{j}',$$

па су

$$\omega_\xi = -1 \text{ sec}^{-1}; \quad \omega_\eta = 1/2 \text{ sec}^{-1}.$$

На исти начин одређујемо брзину тачке C :

$$\vec{v}_C = \vec{v} = -\frac{2}{3}v \vec{i} + \frac{2}{3}v \vec{j} - \frac{1}{3}v \vec{k},$$

па су:

$$2\omega_\eta - \omega_\zeta = -\frac{2}{3}v; \quad -2\omega_\xi = \frac{2}{3}v; \quad \omega_\xi = -\frac{1}{3}v.$$

Одавде добијамо: $v = 3 \text{ m sec}^{-1}$; $\omega_\zeta = 3 \text{ sec}^{-1}$.

Интензитет угаоне брзине износи, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{14} \text{ sec}^{-1}$.

Према (232) једначина тренутне осе је

$$\xi - 1 = \eta / (\frac{1}{2}) = \zeta / 3, \quad \text{односно} \quad \xi + 2\eta = 0; \quad 3\xi + \zeta = 0.$$

62. Обртање тела око непомичне тачке дато је изводима по времену Ојлерових углова: $\psi = 2t$; $\varphi = 2$; $\theta = 0$. Одредити пројекције угаоне брзине ако су у тренутку $t = 0$ Ојлерови углови: $\psi = 90^\circ$, $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$.

Колика мора бити вредност параметра n да би непокретни аксоид био раван Oxy ?

Решење. — Из Ојлерових кинематичких једначина (226) компонентне угаоне брзине биће дате изразима:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \sqrt{3} \cos 2nt; & \omega_\xi &= n \sqrt{3} \sin 2t; & \Omega &= 2n; & \dot{\theta} &= 0; \\ \omega_y &= \sqrt{3} \sin 2nt; & \omega_\eta &= n \sqrt{3} \cos 2t; & \omega_s &= v = 2 \text{ sec}^{-1}; \\ \omega_z &= 2n + 1; & \omega_\zeta &= 2 + n; & \omega^2 &= 4(n^2 + n + 1), \end{aligned}$$

пошто су

$$\psi = 2nt + C = 2nt + \pi/2; \quad \varphi = 2t; \quad \theta = \pi/3.$$

Према (237) једначине аксоида су

$$x^2 + y^2 - \frac{3z^2}{(2n+1)^2} = 0; \quad \xi^2 + \eta^2 - \frac{3\xi^2\eta^2}{(2+n)^2} = 0.$$

Да би непокретни аксоид био раван Oxy , треба да је коефицијент $n = -\frac{1}{2}$.

Диференцирајући по времену изразе за компонентне угаоне брзине (или применом образаца 244а, б), добићемо компонентна угаона убрзања и угаоно убрзање

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= -2n\sqrt{3} \sin 2nt; & \dot{\omega}_\xi &= 2n\sqrt{3} \cos 2t; \\ \dot{\omega}_y &= 2n\sqrt{3} \cos 2nt; & \dot{\omega}_\eta &= -2n\sqrt{3} \sin 2t; & d\omega/dt &= 2n\sqrt{3}. \\ \dot{\omega}_z &= 0; & \dot{\omega}_\zeta &= 0; \end{aligned}$$

Пошто је регуларна прецесија ($\omega = \text{const.}$) *ипројесивна*, вектор угаоног убрзања је колинеаран са чворном осом (ортом \vec{e}).

63. Кружни конус (K_p), угла отвора 2α , висине h , обиђе n пута у минути кружни непокретни конус (K_n), угла отвора 2β , висине H . Одредити брзину и убрзање тачке B покретног конуса (сл. 145а).

Решење. — Пошто је n константно, то је $\Omega = \pi n/30$, па је кретање *регуларна ипрецесија*. Из слике 145а следи: $r = h \operatorname{tg} \alpha$; $\rho = r/\sin \alpha = h/\cos \alpha$; $d = \rho \sin 2\alpha$. Из троугла угаоних брзина (сл. 145б) добијамо, по синусној теорему, угаону брзину сопственог обртања и тренутну угаону брзину:

$$\omega = \Omega \sin \theta / \sin \alpha; \quad \omega_s = v = \Omega \sin \beta / \sin \alpha = \omega \sin \beta / \sin \theta; \quad \theta = \pi - (\alpha + \beta).$$

Брзина тачке B је

$$v_B = d\omega = 2r\Omega \operatorname{ctg} \alpha \sin(\alpha + \beta) = 2h\Omega \sin(\alpha + \beta). \quad (a)$$

Пошто је угаона брзина константна, $\omega^2 = \Omega^2 + v^2 + 2\Omega v \cos(\alpha + \beta)$; $\omega = \text{const.}$, то је $\dot{\omega} = 0$, па је, према (240), тангенцијално убрзање једнако нули, $\vec{a}_T = 0$, а обртно убрзање

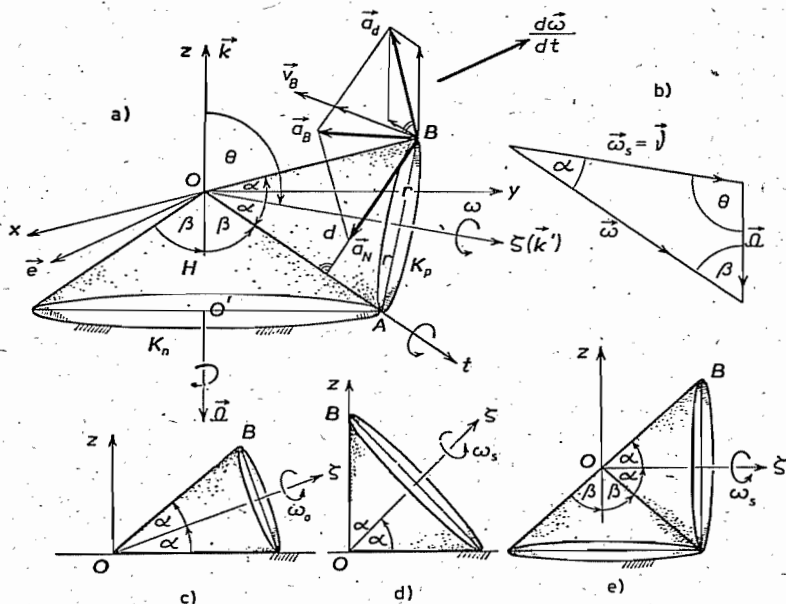
једнако је допунском убрзању, \vec{a}_d . Вектор угаоног убрзања пада у правац чворне осе, па је обртно убрзање управно на потегу OB и износи

$$\vec{a}_{ob} = \vec{a}_d = [\Omega v \sin(\alpha + \beta)] [\vec{e}, \vec{\rho}] = -\rho \Omega v \sin(\alpha + \beta) \cdot \vec{c},$$

те је

$$a_{ob} = a_d = r \Omega^2 \sin \beta \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha} = 2 h \Omega^2 \frac{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha}. \quad (b)$$

Ово убрзање пада у негативни смер попречне осе, јер је тачка B у равни Az .



Слика 145. — Котрљање покретног конуса по непокретном

Нормално (аксипетално) убрзање износи

$$a_{aks} = a_N = \omega^2 d = 2 r \Omega^2 \frac{\cos \alpha \sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha} = 2 h \Omega^2 \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \quad (c)$$

и усмерено је ка тренутној оси ($\vec{\omega}$).

За специјалне вредности углова α и β (сл. 145 c, d, e) вредности су дате у следећој таблици.

Таблица

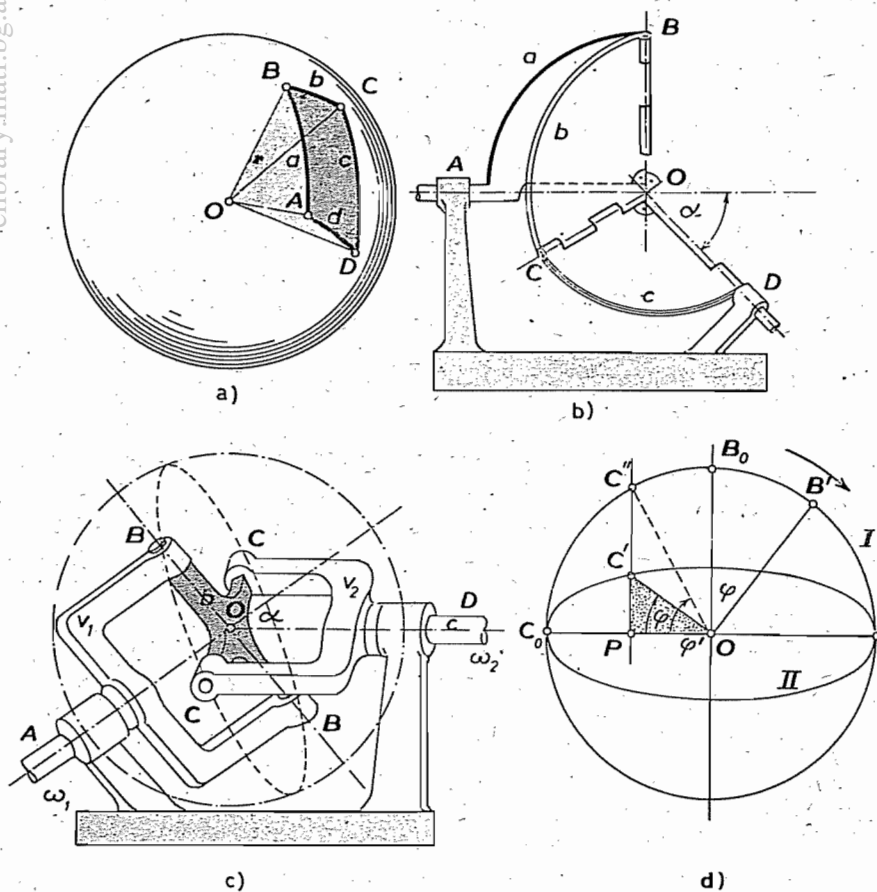
β	α	ω_s	ω	v_B	$a_{ob} = a_d$	$a_{aks} = a_N$
90°	\sim	$\frac{\Omega}{\sin \alpha}$	$\Omega \operatorname{ctg} \alpha$	$2 h \Omega \cos \alpha$	$\frac{h \Omega^2}{\sin \alpha}$	$2 h \Omega^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$
90°	45°	$\Omega / \sqrt{2}$	Ω	$h \Omega \sqrt{2}$	$h \Omega^2 \sqrt{2}$	$h \Omega^2 \sqrt{2}$
$\alpha + \beta = 90^\circ$		$\Omega \operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{\Omega}{\sin \alpha}$	$2 h \Omega$	$\frac{h \Omega^2}{\sin \alpha}$	$\frac{2 h \Omega^2}{\sin \alpha}$

На пример*, за: $\beta = 90^\circ$; $r = 3$ cm; $h = 4$ cm, то јест $\sin \alpha = 3/5$, $\cos \alpha = 4/5$;
 $\Omega = 12 \text{ sec}^{-1}$, биће: $\omega_s = 20 \text{ sec}^{-1}$, $\omega = 16 \text{ sec}^{-1}$; $v_B = 76,8 \text{ cm/sec}$; $a_{ob} = 960 \text{ cm/sec}^2$; $a_{aks} =$
 $= 12,29 \text{ m/sec}^2$; $|\vec{\omega}| = 12 \cdot 20 \cdot 4/5 = 192 \text{ sec}^{-2}$.

За: $\beta = 90^\circ$; $\alpha = 45^\circ$; $h = 18$ cm; $\Omega = 2 \pi$, биће $\omega_s = 2 \pi \sqrt{2}$; $\omega = 2 \pi$; $v_B = 36 \sqrt{2} \pi \text{ cm/sec}$;
 $a_{ob} = 72 \sqrt{2} \pi^2 \text{ cm/sec}^2$; $a_N = a_{ob}$; $|\vec{\omega}| = 4 \pi^2$.

За: $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $n = 120$; $h = 10$ cm, биће $\Omega = 4 \pi$; $\omega_s = 4 \pi \sqrt{3}$, $\omega = 8 \pi$; $v_B = 80 \pi$;
 $a_{ob} = 320 \pi^2$; $a_N = 640 \pi^2$.

10.6. Зглоб Кардана — Хука. — На сфери (сл. 146 а) узмимо четири тачке, A, B, C, D , и спојимо их луцима великих кругова, који пролазе кроз ове тачке, и полупречницима са средиштем сфере, добићемо сферни



Слика 146. — a, b) Сферни зглавкasti четвороугоа
 — c, d) зглоб Кардана — Хука (универзални зглоб)

* И. В. Мешчерски: Збирка задатака из теоријске механике, Београд 1958, зад. 2.337; 2.339; 2.340.

четвороугао $ABCD$. Ако су тачке A, B, C, D зглобови са осама обртања OA, OB, OC, OD , онда је четвороугао $ABCD$ сферни зглавкasti четвороугао, где су a, b, c, d полуге овог кинематичког ланца. Ланац се *принудно* креће по сфери.

У пракси се употребљава специјални сферни зглавкasti четвороугао (сл. 146*b*) чија су три штапа једнака четвртини великог круга (за $R=1$ биће $a=b=c=1/2\pi$). Полука d је *поштоље*. Осе OA и OD чине међусобно угао α . Оса OB управна је на осу OA , а оса OC управна је на осе OD и OB , те је управна на раван BOD . Ако се штап a обрће око осе AO , онда ће се и штап c обртати око осе OD .

Код зглоба *Кардана* — *Хука* (универзалној зглоба) полука a је вратило OA , на чијем се крају налази виљушка V_1 (са тулцима $B-B$), чија је оса управна на осу вратила A (сл. 146*c*). Штап c представља вратило D , које такође има виљушку V_2 (са тулцима $C-C$), чија је оса управна на осу вратила D . Обе виљушке спојене су правоугаоним крстом (b).

Нека се *водеће* — *погонско* — *вратило* A обрће угаоном брзином ω_1 , онда ће се *вођено* — *радно* — *вратило* D обртати угаоном брзином ω_2 , која зависи од прве угаоне брзине, угла α (који чине осе вратила) и угла φ (који чине виљушке). Тачка B прве виљушке описује кружну путању у равни управној на вратило A , а тачка C друге виљушке описује такође кружну путању у равни управној на вратило D . Обе равни чине угао α . Како је $\overline{OB} = \overline{OC}$, обе путање су једнаких пречника и секу се дуж пречника који је управан на раван AOD .

Нека је раван кружне путање (I) раван цртежа, онда се путања тачке B пројцира на ту раван као круг (I), а путања тачке C као елипса (II) — сл. 146*d*. Због *круће везе* крста угао BOC увек је *прав* и пројцира се у правој величини, јер му је један крак увек паралелан равни пројцирања.

Ако се тачка B_0 заокрене за угао φ у положај B' , онда ће се и тачка C_0 заокренути и доћи у положај C' , те је OC'' тренутни положај крста OC , који се заокренуо за угао φ' .

Како је елипса (II) у ствари пројекција кружне путање тачке C на раван првог круга (I), то је $\overline{PC'} = \overline{PC''} \cos \alpha$, па из троуглова $\triangle OPC'$ и $\triangle OPC''$ добијамо

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi' \cos \alpha.$$

Диференцирањем овог израза добиће се

$$\frac{\omega_1}{\cos^2 \varphi} = \frac{\omega_2 \cos \alpha}{\cos^2 \varphi'}$$

па, с обзиром на претходну једначину и тригонометријске релације*, добијамо преносни однос:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{\cos \alpha} \quad (246)$$

Преносни однос зависи, дакле, од углова α и φ , од којих је први сталан а други променљив, па је и угаона брзина вратила D променљива.

Екстремне вредности преносног односа, а тиме и угаоне брзине ω_2 , односно бројева обртаја, биће:

$$\begin{aligned} \text{за } \varphi = 0; \quad i_{\min} &= \cos \alpha; \quad \omega_{2 \max} = \frac{\omega_1}{\cos \alpha}; \quad n_{2 \max} = \frac{n_1}{\cos \alpha}; \\ \text{за } \varphi = 90^\circ; \quad i_{\max} &= \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \omega_{2 \min} = \omega_1 \cos \alpha; \quad n_{2 \min} = n_1 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (246')$$

Према томе, угаона брзина (а тиме и број обртаја) радног вратила *непрекидно се мења* од најмање ($\omega_1 \cos \alpha$) до највеће вредности ($\omega_1 / \cos \alpha$).

На пример, када је број обртаја погонског вратила $n = 120$ o/min, $\alpha = 60^\circ$, онда су екстремне вредности угаоних брзина и бројева обртаја радног вратила: $\omega_1 = 4\pi$; $\omega_{2 \max} = 8\pi \text{ sec}^{-1}$; $\omega_{2 \min} = 2\pi \text{ sec}^{-1}$; $n_{2 \max} = 240$ o/min, $n_{2 \min} = 60$ o/min.

11. ОПШТЕ КРЕТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА. ЗАВРТАЊ

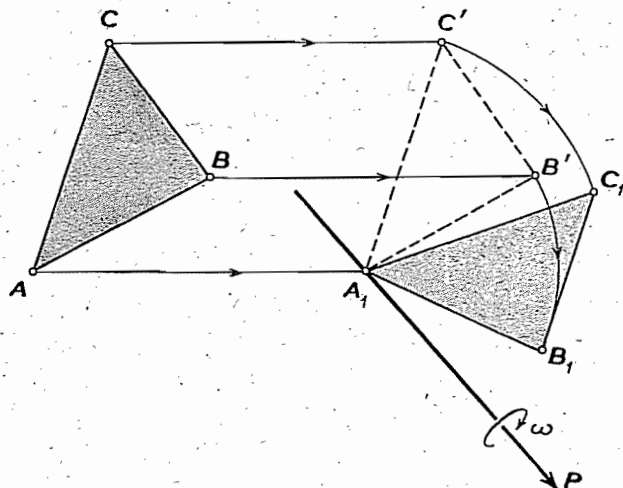
11.1. Геометријске основе општег кретања. — Као што смо при равном кретању крутог тела проучили на које се начине може штап AB превести из једног произвољног положаја у други у истој равни (чл. 9.2), проучићемо исто тако на колико се начина може круто тело превести из једног произвољног положаја у простору у други произвољни положај.

Круто тело, као што је познато, одређено је положајем својих трију тачака које не леже на истој правој — *основним троуглом*. Круто тело може се превести из једног произвољног положаја у други на три начина.

¹⁰ *Превођење једном трансляцијом и једним обртањем (ротацијом).* — Ако је положај крутог тела одређен основним троуглом $\triangle ABC$ (сл. 147), онда се он може превести у положај $\triangle A_1 B_1 C_1$, најпре трансляцијом у положај $\triangle A_1 B' C'$, а затим обртањем око непомичне тачке A_1 за угао φ у положај $\triangle A_1 B_1 C_1$.

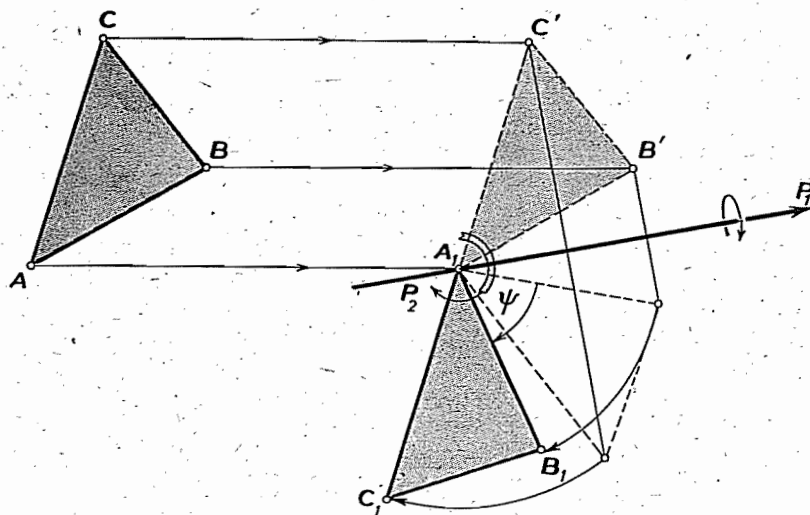
*. $\cos^2 \varphi' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \varphi'} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \text{tg}^2 \varphi}$

На овај начин извршили смо ова кретање: 1^о *транслацијорно*, којим смо основни троугао из једне равни преместили у другу, *паралелну равн*, када је троугао $A_1B'C'$ потпуно подударан са основним троуглом, односно испуњени су услови $\overline{AA_1} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$ и $\overline{AA_1} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$, и 2^о *обртање око*



Слика 147. — Транслација и обртање око непомичне тачке

непомичне тачке A_1 кругог тела, које се као што смо видели, своди на обртање око тренутне осе која пролази кроз ту непомичну тачку. Обртање је извршено за угао φ који чине равни првог и другог положаја основног троугла.



Слика 148. — Транслација и два обртања

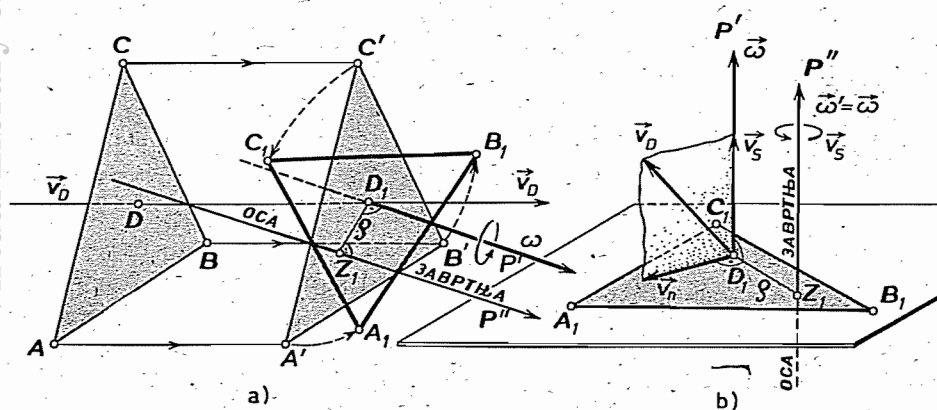
Могли смо најпре обрнути тело око једне његове непомичне тачке A , а затим извршити транслацију у жељени положај, резултујуће кретање

не би се променило, јер за ова два компонентна кретања важи закон комулације.

Уместо обртања око осе A_1P , можемо узети и два компонентна обртања око двеју оса које пролазе кроз непомићну тачку A_1 . Ако је троугао $\triangle ABC$ прешао транслацијом у положај $\triangle A_1B_1C_1$, можемо га око осе A_1P_1 преклопити у жељену раван ($\triangle A_1B''C''$), а затим око тачке A_1 у самој равни заокренути за угао ψ док не падне у положај $\triangle A_1B_1C_1$.

Прво обртање око осе A_1P_1 јесте обртање око *шрасе* — пресечне праве — обе равни. Друго обртање је обртање у самој равни око осе A_1P_2 , која је управна на раван, а пролази кроз непомићну тачку A_1 . *Ред обртања мора се одржавати*, јер би оса A_1P_2 била управна на раван троугла $\triangle A_1B_1C_1$ уместо на раван троугла $\triangle A_1B''C''$, што значи да закон комулације за слањање обртања са коначним уловима не важи, па, према томе, *правило сабирања двају коначних обртања не одговара правилу сабирања вектора*. Међутим, два бесконачно мала обртања могу се сабрати као два вектора.*

2^о *Превозићење једним завојним кретањем (заврћњем)*. — Нека је основни троугао $\triangle ABC$ транслацијом и обртањем прешао у положај $\triangle A_1B_1C_1$. Тада је произвољна тачка D прешла у положај D_1 . Можемо замислити да је ова тачка троугла непомићна, онда је троугао из положаја $\triangle ABC$ прешао у положај $\triangle A_1B_1C_1$ транслацијом и обртањем око осе D_1P' , која је паралелна првобитној оси A_1P . Замислимо да оса D_1P' и вектор брзине



Слика 149. — Завртањ

транслације \vec{v}_D леже у равни цртежа, онда ту брзину можемо разложити у правац осе D_1P' и управно на тај правац, то јест на компоненту у равни $A_1B_1C_1$. Транслација у овој равни и ротација око осе управне на раван јесу *комплана кретања* око тренутне осе паралелне осе ротације D_1P' . На

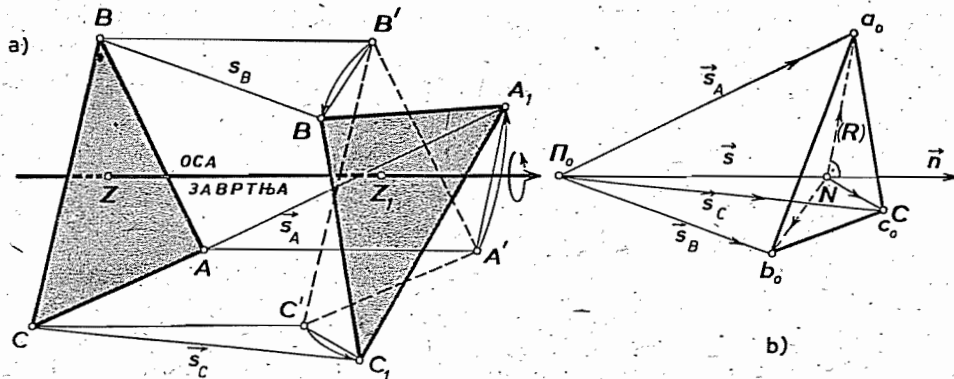
* А. Билимовић: Геометријске основе рачуна са дијадама. I Дијада и афинор. Београд 1930. године, стр. 219, сл. 51.

тај начин кретање се састоји из два кретања: *транслаторној*, у *правцу* осе D_1P' , и *комплананој кретања око осе* паралелне осе D_1P' . Ова нова оса продира раван $A_1B_1C_1$ у тачки Z_1 , а раван $A'B'C'$ у тачки Z . Оваква комбинација кретања: транслаторног и обртног, чија је оса колинеарна са правцем транслације, зове се *завојно кретање (завртња)* или, краће, *завртња*. Према томе можемо изразити Шалову теорему:

Свако круто тело може се превести из једној у друју произвољни положај обртњем око једне одређене осе, за извесан угао θ , и транслацијом \vec{s} у правцу те осе.

Ова оса (Z_1Z) зове се *оса завртња*. Раван троугла $\Delta A_1B_1C_1$ управна је на осу. Транслаторно померање тачке Z поклапа се, дакле, са осом завртња. То је *једина* тачка основног троугла чије померање пада у правац осе завртња (сл. 149 б).

Да бисмо одредили положај осе завртња, треба да одредимо положај тачке Z_1 , односно положај тачке Z (сл. 150 а). Претпоставимо да је основни троугао из положаја ΔABC помоћу завртња прешао у коначан положај $\Delta A_1B_1C_1$. Узајамни положаји тачака основног троугла одређени



Слика 150. — Одређивање положаја осе завртња

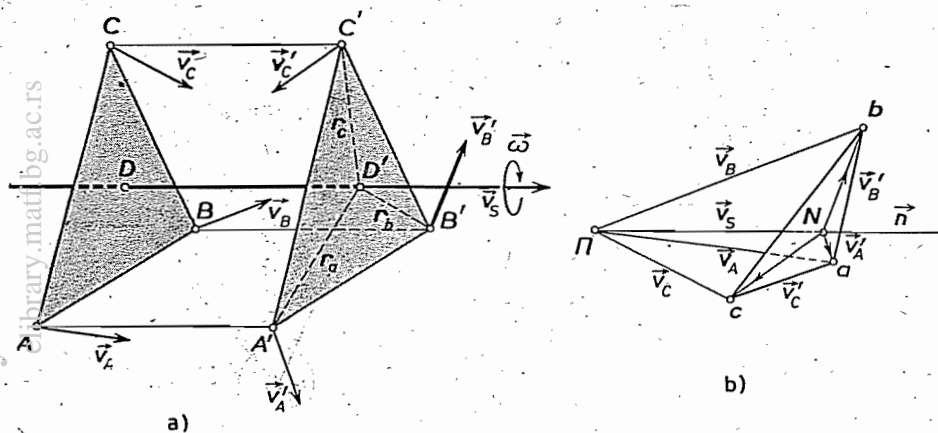
су векторима померања $\vec{s}_A, \vec{s}_B, \vec{s}_C$. Ако из пола P_0 (сл. 150 б) пренесемо ова померања и спојимо њихове завршне тачке, добићемо *план померања*. Када кроз тачке a_0, b_0, c_0 поставимо раван (R) и из пола спустимо нормалу на ту раван, онда се свако померање може разложити у две компоненте: у правцу нормале (P_0n) и у самој равни (R) :

$$\vec{s}_A = \vec{s} + \vec{Na}_0; \quad \vec{s}_B = \vec{s} + \vec{Nb}_0; \quad \vec{s}_C = \vec{s} + \vec{Nc}_0.$$

Када троугао ΔABC транслаторно померимо за s , доћи ће у положај $\Delta A'B'C'$, који је паралелан првом, јер су пројекције померања на нормалу равни (R) исте и износе \vec{s} (сл. 150 а).

Положај осе завртња одредићемо помоћу симетралних равни вектора померања \vec{Na}_0 , \vec{Nb}_0 , \vec{Nc}_0 . Као што су се при равном кретању симетрале померања секле у тренутном полу, тако се и овде, при општем кретању, симетралне равни компланих померања секу у оси завртња.

Ако су познате брзине трију тачака крутог тела A , B , C (сл. 151a), можемо графички одредити брзину translације и положај осе. Из пола



Слика 151. — Одређивање брзине translације

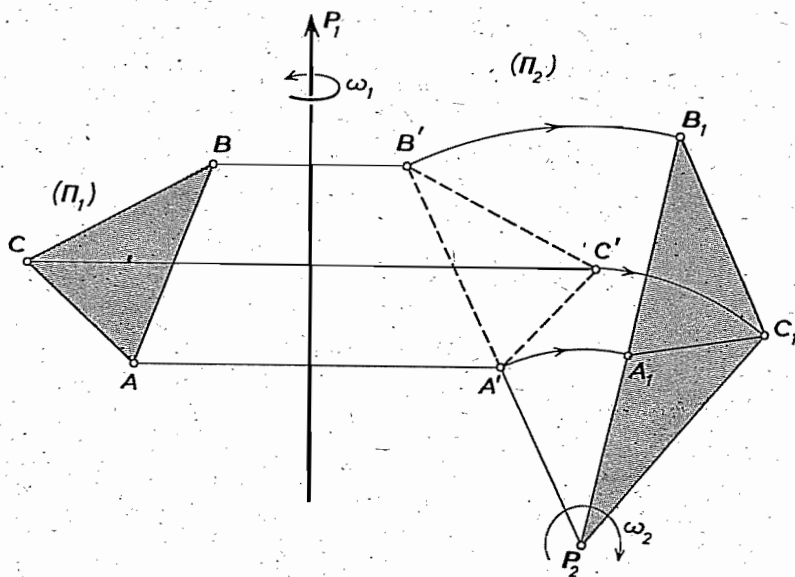
Π пренесимо ове брзине, добићемо план брзина a , b , c . Права ΠN , повучена нормално на раван (R') , представља translаторну брзину \vec{v}_s , док су \vec{Na} , \vec{Nb} , \vec{Nc} компоненте тих брзина, које леже у самој равни abc (сл. 151b), и представљају обимне брзине обртања тих тачака око осе-завртња.

Пројцирајмо троугао $\triangle ABC$ на раван паралелну равни плана брзина, добићемо $\triangle A'B'C'$. Ако у тачке A' , B' , C' пренесемо ове брзине обртања, управне повучене на њих секу се у тачки Z , кроз коју пролази оса завртња. Помоћу ових обимних брзина можемо лако одредити угаону брзину завртња ако познајемо растојања тачака A' , B' , C' од осе, наиме биће

$$\omega = \frac{v'_A}{r_A} = \frac{v'_B}{r_B} = \frac{v'_C}{r_C}.$$

3^o Превођење помоћу два обртања. — Круто тело може се из једног положаја превести у други и помоћу два обртања. Троугао $\triangle ABC$ из равни (R_1) можемо превести у произвољан положај у равни (R_2) ако га око осе P_1 , пресечне трасе обе равни, преклопимо у положај $\triangle A'B'C'$, а затим у тој равни, око осе P_2 , која је управна на раван (R_2) , заокремимо за угао φ док не падне у жељени положај $\triangle A_1B_1C_1$ (сл. 152). Ове две осе укрштају се под правим углом.

Дакле, круто тело може се превести из једног положаја у други обртањем око две осе које се укрштају под правим углом.



Слика 152. — Два обртања око укрштених оса.

У члану 13. проучићемо слагање кретања и уочити да се први и трећи случај свде такође на завртањ. Према томе, завртањ је најопштији вид кретања крутог тела, он је, дакле, специјална комбинација транслације и ротације, када оса ротације пада у правац транслаторног кретања. Да бисмо уочили ово кретање, треба да знамо и транслаторну и угаону брзину. Сваки од ових вектора одређен је са по три податка, па опште кретање крутог тела има шест степености слободе кретања.

11.2. Одређивање брзине тачке крутог тела. — Опште кретање крутог тела одређено је са шест података, те тело има шест степености слободе кретања. Које ћемо податке узети да бисмо одредили ово кретање — сасвим је свеједно, главно је да нам је потребно шест података — шест бројева. Положај тачака A , B , C основног троугла одређен је њиховим координатама, то јест са девет бројева, између којих постоје, због крутости тела, три везе, па је потребно свега шест података. За тих шест података можемо узети: брзину транслације, угаону брзину, координате продорне тачке осе завртања кроз непокретну раван Oxy и два угла: θ , који чини оса са том равни, и φ , који чини њена пројекција на Ox -раван са Ox -осом. Дакле, потребно је шест података: v_s , ω , x_0 , y_0 , θ и φ .

Нека је A произвољна тачка крутог тела које изводи опште кретање, а B друга произвољна тачка истог тела. Положај тачке B одређен је у

односу на непокретни координатни систем $Oxyz$ вектором положаја \vec{r} , а у односу на покретни координатни систем $A\xi\eta\zeta$, који је круто везан са телом, вектором поло-

жаја $\vec{\rho}$: Из троугла $\triangle OAB$

(сл. 153) следи

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho},$$

па су формуле трансформације координата:

$$x = x_A + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta;$$

$$y = y_A + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta;$$

$$z = z_A + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta.$$

Координате x , y , z , x_A , y_A , z_A мењају се са вре-

меном, док се координате ξ , η , ζ не мењају са временом, јер се триедар $A\xi\eta\zeta$ креће заједно са телом.

Косинуси смера $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ изражавају се помоћи Ојлерових углова, па зависе од времена.

Брзина произвољне тачке B биће:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\omega, \vec{r} - \vec{r}_A]. \quad (247)$$

Пројекције брзине на координатне осе су следеће:

а) *непокретној триедра:*

$$x = x_A + \omega_y(z - z_A) - \omega_z(y - y_A); \quad y = y_A + \omega_z(x - x_A) - \omega_x(z - z_A); \quad (247 a)$$

$$z = z_A + \omega_x(y - y_A) - \omega_y(x - x_A);$$

б) *покретној триедра:*

$$\begin{aligned} v_{\xi} &= (v_A)_{\xi} + \omega_{\eta} \zeta - \omega_{\zeta} \eta = \dot{x} \alpha_1 + \dot{y} \beta_1 + \dot{z} \gamma_1; \\ v_{\eta} &= (v_A)_{\eta} + \omega_{\zeta} \xi - \omega_{\xi} \zeta = \dot{x} \alpha_2 + \dot{y} \beta_2 + \dot{z} \gamma_2; \end{aligned} \quad (247 b)$$

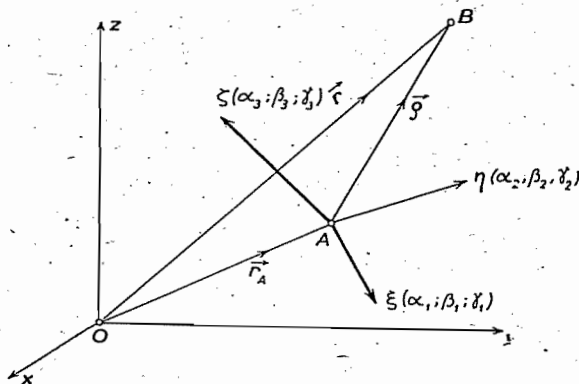
$$v_{\zeta} = (v_A)_{\zeta} + \omega_{\xi} \eta - \omega_{\eta} \xi = \dot{x} \alpha_3 + \dot{y} \beta_3 + \dot{z} \gamma_3,$$

где су компонентне угаоне брзине одређене Ојлеровим кинематичким једначинама, а формуле трансформације координата оба триедра дате изразима (224).

Пројекције брзине тачке A на осе покретног триедра биће:

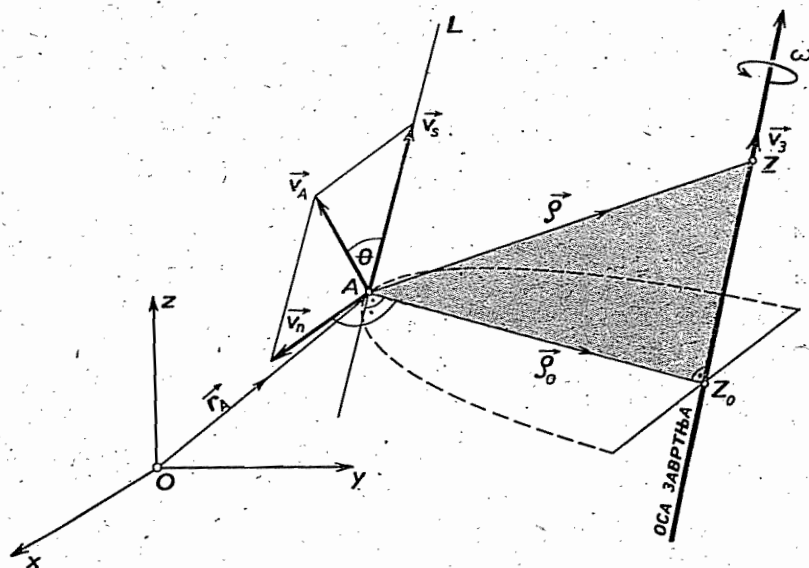
$$(v_A)_{\xi} = \dot{x}_A \alpha_1 + \dot{y}_A \beta_1 + \dot{z}_A \gamma_1; \quad (v_A)_{\eta} = \dot{x}_A \alpha_2 + \dot{y}_A \beta_2 + \dot{z}_A \gamma_2; \quad (247 c)$$

$$(v_A)_{\zeta} = \dot{x}_A \alpha_3 + \dot{y}_A \beta_3 + \dot{z}_A \gamma_3.$$



Слика 153. — Одређивање брзине и убрзања

11.3. Једначина осе завртња. — Нека је A тачка крутог тела које изводи опште кретање. Њену брзину, као и угаону брзину завртња, познајемо. Пошто је завртањ комбинација транслације и обртања, чија је оса колинеарна са транслаторном брзином, тачка A ће се налазити на изводници цилиндра. Све тачке које леже на тој изводници имају исте брзине.



Слика 154. — Оса завртња

Разложимо брзину тачке A у две компоненте: у правцу изводнице (L), паралелно осе завртња, и управно на изводницу:

$$v_s = v_A \cos \theta, \quad v_n = v_A \sin \theta,$$

онда је

$$\vec{v}_A = \vec{v}_s + \vec{v}_n. \quad (248)$$

Прва компонента представља *транслаторну брзину* завртња, а друга је компонента управна на изводницу; она је *обимна брзина* којом се тачка A обрће по кружној линији око осе завртња, па се на основу Ојлерове једначине може написати у облику

$$\vec{v}_n = [\vec{\rho}, \vec{\omega}], \quad (249)$$

где је $\vec{\rho}$ вектор положаја произвољне тачке Z на осе у односу на тачку A .

Услов колинеарности вектора $\vec{\omega}$ и \vec{v}_s изражава се векторским производом:

$$[\vec{\omega}, \vec{v}_s] = 0. \quad (250)$$

Ако векторску једначину (249) помножимо векторски са $\vec{\omega}$, с обзиром на услов колинеарности (250), биће:

$$[\vec{\omega}, \vec{v}_A] = [\vec{\omega}, \vec{v}_n] = [\vec{\omega}, [\vec{\rho}, \vec{\omega}]].$$

После развијања дуплог векторског производа

$$[\vec{\omega}, \vec{v}_A] = \omega^2 \vec{\rho} - (\vec{\omega}, \rho) \vec{\omega}$$

добићемо једначину осе заврћња у векторском облику:

$$\vec{\rho} = \frac{[\vec{\omega}, \vec{v}_A]}{\omega^2} + \frac{(\vec{\omega}, \rho)}{\omega^2} \vec{\omega} = \frac{[\vec{\omega}, \vec{v}_A]}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega},$$

где скалар

$$\lambda = \frac{(\vec{\omega}, \rho)}{\omega^2}$$

представља клизање тачке Z по оси.

Када из тачке A спустимо праву управну на осу, добићемо тачку Z_0 , чији је вектор положаја $\vec{\rho}_0$ у односу на тачку A одређен изразом

$$\vec{\rho}_0 = \frac{[\vec{\omega}, \vec{v}_A]}{\omega^2}, \quad (251)$$

пошто је, због ортогоналности вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{\rho}_0$, скаларни производ

$$(\vec{\omega}, \vec{\rho}_0) = 0.$$

Координате вектора положаја тачке Z_0 у оба триедра, $Oxyz$ и $A\xi\eta\zeta$, биће:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_A + \frac{1}{\omega^2} (\omega_y z_A - \omega_z y_A); & \xi_0 &= \frac{1}{\omega^2} (\omega_\eta v_{A\zeta} - \omega_\zeta v_{A\eta}); \\ y_0 &= y_A + \frac{1}{\omega^2} (\omega_z x_A - \omega_x z_A); & \eta_0 &= \frac{1}{\omega^2} (\omega_\zeta v_{A\xi} - \omega_\xi v_{A\zeta}); \\ z_0 &= z_A + \frac{1}{\omega^2} (\omega_x y_A - \omega_y x_A); & \zeta_0 &= \frac{1}{\omega^2} (\omega_\xi v_{A\eta} - \omega_\eta v_{A\xi}). \end{aligned} \quad (251')$$

Ова је тачка стална на оси, те она нема клизања; док је свака друга тачка осе одређена једначином

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \lambda \vec{\omega}, \quad (252)$$

која представља једначину осе заврћња у векторском облику.

Развијањем овог израза можемо добити једначину осе завртња за покретни триедар у облику

$$\frac{\xi - \xi_0}{\omega_\xi} = \frac{\eta - \eta_0}{\omega_\eta} = \frac{\zeta - \zeta_0}{\omega_\zeta}, \quad (252')$$

где су ξ_0, η_0, ζ_0 координате тачке Z_0 .

Све тачке (Z) осе завртња имају само транслаторну брзину. Дакле, *оса завртња је геометријско место тачака шела чије су брзине колинеарне са векторском ујаоном брзином.*

Из услова колинеарности тих вектора:

$$[\vec{v}_Z, \vec{\omega}] = 0,$$

користећи једначине (247b), једначина осе завртња може се написати и у овом облику:

$$\frac{(v_A)_\xi + \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta}{\omega_\xi} = \frac{(v_A)_\eta + \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta}{\omega_\eta} = \frac{(v_A)_\zeta + \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi}{\omega_\zeta} \quad (252'')$$

где је \vec{v}_A брзина произвољне тачке A крутог шела, а ξ, η, ζ координате произвољне тачке Z на осе завртња.

За *непокретни* триедар биће положај тачке Z на осе одређен вектором положаја:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho} = \vec{r}_A + \vec{\rho}_0 + \lambda \vec{\omega}, \quad (253)$$

па је скаларна једначина осе завртња

$$\frac{x - x_0}{\omega_x} = \frac{y - y_0}{\omega_y} = \frac{z - z_0}{\omega_z}, \quad (253')$$

односно

$$\frac{x_A + \omega_y(z - z_A) - \omega_z(y - y_A)}{\omega_x} = \frac{y_A + \omega_z(x - x_A) - \omega_x(z - z_A)}{\omega_y} = \frac{z_A + \omega_x(y - y_A) - \omega_y(x - x_A)}{\omega_z}. \quad (253'')$$

При обртању крутог тела око непомичне тачке тренутна оса пролази увек кроз непомичну тачку. Међутим, при општем кретању оса завртња стално мења свој положај у простору, јер се мења и положај тачке Z_0 .

Ако из једначина (252') и (253') елиминирамо време, добићемо површине које образује оса завртња у оба триедра. Оба *аксоида* — покретни и непокретни — јесу *праволинијске површине*.

При равном кретању аксоиди су били *цилиндричне површине*, при сферном кретању били су *конусне површине*, а при општем кретању су *правoliniјске површине*. Оне постају кретањем праве (*генератрисе*) по некој кривој линији (*вођиљ*).

У правoliniјске површине спадају: раван, цилиндричне и конусне површине, једнокрилни хиперболоид и хиперболички параболоид.

11.4. Кинематичке инваријанте. — Као што су у статисти у простору* биле две статичке инваријанте, исто тако имамо и две главне кинематичке инваријанте:

$$\mathbf{J}_1 = (\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \omega^2; \quad \mathbf{J}_2 = (\vec{\omega}, \vec{v}). \quad (254)$$

Прва главна инваријанта је, дакле, квадрат интензитета вектора угаоне брзине, а друга је скаларни производ вектора угаоне брзине и вектора брзине. Инваријантност прве је очигледна, а за другу можемо доказати ако развијемо скаларни производ:

$$(\vec{\omega}, \vec{v}) = \omega v \cos \theta = \omega v_s = \text{const.}, \quad (255)$$

пошто је угаона брзина за све тачке које се налазе на истој изводници цилиндра (L) иста, а транслаторна брзина завртња је такође иста.

Применом друге главне кинематичке инваријанте можемо одредити транслаторну брзину завртња:

$$v_s = \frac{(\vec{\omega}, \vec{v})}{\omega} = \frac{\mathbf{J}_2}{\omega} = \frac{\omega_\xi v_\xi + \omega_\eta v_\eta + \omega_\zeta \omega_\zeta}{\omega}. \quad (256)$$

Количник главних инваријанти зове се *параметар завртња*:

$$f = \frac{\mathbf{J}_2}{\mathbf{J}_1} = \frac{v_s}{\omega} \quad (257)$$

и има *димензију дужине***.

Пошто је $\cos \theta \leq 1$, тачке осе завртња имају најмању могућу брзину (v_s), па се *оса завртња може дефинисати као она обрћена оса за коју брзина \vec{v} има најмању вредност*.

Између угла θ и параметра завртња постоји овај однос:

$$f = \frac{v_s}{\omega} = \frac{v \cos \theta}{\omega} = \frac{v \sin \theta}{\omega \operatorname{tg} \theta} = \frac{\rho_0}{\operatorname{tg} \theta},$$

то јест

$$\rho_0 = f \operatorname{tg} \theta. \quad (258)$$

* Статика чл. 26.8

** Код десног завртња је $f > 0$, а код левог је $f < 0$.

Помоћу параметра f може се изразити и брзина произвољне тачке крутог тела, која се налази на растојању R од осе завртња:

$$\vec{v} = \vec{v}_s + [\vec{\omega}, \vec{R}],$$

па је, због управности вектора $\vec{\omega}$ и \vec{R} , квадрат брзине

$$v^2 = v_s^2 + (R\omega)^2.$$

С обзиром на (257) интензитет брзине произвољне тачке биће

$$v = \omega \sqrt{f^2 + R^2}. \quad (259)$$

Када се тело у времену t обрне за угао φ ($\varphi = \omega t$), произвољна тачка A прећи ће у правцу осе завртња пут ($z = v_s t$), па је*

$$z = \frac{v_s}{\omega} \varphi = f \varphi.$$

Померање тачке A паралелно осе завртња за време T , за које угао φ постане 2π , зове се *ход завојнице* и износи

$$h = 2\pi f = 2\pi \frac{v_s}{\omega} = 60 \frac{v_s}{n}, \quad (260)$$

где је n број обртаја у минути.

Ако је R растојање тачке од осе завртња, а α *најибни угао завојнице*, онда је $h = 2R\pi \operatorname{tg} \alpha$, па је**

$$f = R \operatorname{tg} \alpha. \quad (260')$$

С обзиром на (258) биће $\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha = 1$, па је $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \theta$.

Када је параметар завртња једнак нули ($f=0$), тада се кретање своди на чисто обртање, а за $f=\infty$ своди се на чисто транслаторно кретање.

Ако је h_m ход микрометарског завртња, а p број поделака диска нонијуса онда је тачност мерења

$$h' = i = \frac{h_m}{p}.$$

На пример, ако је $h_m = 0,5 \text{ mm}$, $p = 50$, онда је $h' = 0,01 \text{ mm}$.

*За $\varphi = 1 \text{ rad}$ ($\varphi^0 = 57^0 17' 44,8''$) биће $z = f$, те се параметар завртња назива *регуковани ход* (pas réduit, pitch, reduzierter Schraubengang).

**За $\alpha^0 = 45^0$ је $\operatorname{tg} \alpha = 1$, па је $f = R$.

Угаона брзина $\vec{\omega}$ и пројекција брзине \vec{v} на правац осе завртња не зависе од избора тачке A (сл. 153). Узмемо ли уместо A тачку A' , одређену вектором положаја \vec{r}' у односу на тачку (пол) A , онда је тачка B тела одређена вектором положаја $\vec{\rho}'$, па је

$$\vec{\rho} = \vec{r}' + \vec{\rho}'.$$

Брзина тачке B , с обзиром на оба пола (A и A'), биће

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = \vec{v}_{A'} + [\vec{\omega}', \vec{\rho}'],$$

где је $\vec{\omega}'$ нова угаона брзина. Како је брзина новог пола A' у односу на стари пол A :

$$\vec{v}_{A'} = \vec{v}_A + [\vec{\omega}', \vec{r}'],$$

изједначењем добијамо

$$[\vec{\omega}, \vec{\rho}] = [\vec{\omega}', \vec{\rho}' + \vec{r}'] = [\vec{\omega}', \vec{\rho}]; \quad [\vec{\omega} - \vec{\omega}', \vec{\rho}] = 0.$$

Пошто $\vec{\rho} \neq 0$, мора бити $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$.

С обзиром на претходни став биће

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = \vec{v}_{A'} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}'],$$

па је скаларни производ

$$(\vec{v}_B, \vec{\omega}) = (\vec{v}_A, \vec{\omega}) = (\vec{v}_{A'}, \vec{\omega}) = v_s \omega = J_2 = \text{const.}$$

константан, што значи да је пројекција брзине сваке тачке крутог тела на правац осе завртња константна величина и једнака је другој главној инваријанти*.

На основу изложеног можемо учити сличност између приказивања дејства просторног система сила на круто тело и кинематичких елемената општег кретања тог тела. Ово баш и даје јасну слику о предности приказивања проблема механике векторским рачунањем, које је сада свуда и уведено.

Познато нам је како се врши редукција просторног система сила на главни вектор и главни моменит. Први је био клизећи вектор, а други слободни вектор. Специјалан облик свођења торзера била је динама са централном осом. У кинематици општег кретања крутог тела добијамо аналогу трансформацију *транслајторне брзине* v_s (слободног вектора) и *угаоне брзине* ω (аксијалног вектора) у завртња, са осом и параметром завртња. Аналогија је потпуна, па теореме статике можемо изразити и у кинематици, измењујући улоге вектора према следећој табlici:

	Вектор		Главне инваријанте		Параметар J_2/J_1	Оса
			J_1	J_2		
Статика	\vec{F}_r	\vec{M}	(\vec{F}_r, \vec{F}_r)	(\vec{F}_r, \vec{M})	$p = \frac{M_c}{F_r}$	$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \lambda \vec{F}_r$
Кинематика	$\vec{\omega}$	\vec{v}	$(\vec{\omega}, \vec{\omega})$	$(\vec{\omega}, \vec{v})$	$f = \frac{v_s}{\omega}$	$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \lambda \vec{\omega}$

* Статика, чл. 26.1 и 26.8

Дефинишући силу као вектор, и статика и кинематика могу се, дакле, схватити као део геометрије вектора.

11.5. Одређивање убрзања тачке крутог тела. — Ако једначину (247), диференцирамо по времену добићемо убрзање тачке крутог тела које изводи опште кретање:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]],$$

односно, после развијања душлог векторског производа, у облику:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{\rho}. \quad (261)$$

Пројекције убрзања на осе *нейокрејној триедра Охуз* биће:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_A + \dot{\omega}_y (z - z_A) - \dot{\omega}_z (y - y_A) + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_x - \omega^2 (x - x_A); \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_A + \dot{\omega}_z (x - x_A) - \dot{\omega}_x (z - z_A) + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_y - \omega^2 (y - y_A); \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_A + \dot{\omega}_x (y - y_A) - \dot{\omega}_y (x - x_A) + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_z - \omega^2 (z - z_A); \end{aligned} \quad (261 a)$$

а на осе *окрејној триедра Аξηζ*: су:

$$\begin{aligned} a_\xi &= (a_A)_\xi + \dot{\omega}_\eta \zeta - \dot{\omega}_\zeta \eta + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_\xi - \omega^2 \xi; \\ a_\eta &= (a_A)_\eta + \dot{\omega}_\zeta \xi - \dot{\omega}_\xi \zeta + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_\eta - \omega^2 \eta; \\ a_\zeta &= (a_A)_\zeta + \dot{\omega}_\xi \eta - \dot{\omega}_\eta \xi + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_\zeta - \omega^2 \zeta, \end{aligned} \quad (216 b)$$

где је скаларни производ $(\vec{\omega}, \vec{\rho})$ облика

$$(\vec{\omega}, \vec{\rho}) = (x - x_A) \omega_x + (y - y_A) \omega_y + (z - z_A) \omega_z,$$

односно

$$(\vec{\omega}, \vec{\rho}) = \omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta.$$

Убрзање се састоји из три компоненте:

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{a}' + \vec{a}'' \quad (262)$$

Прва компонента представља *убрзање тачке А* координатног почетка покретног триедра, круто везаног са телом. Друга и трећа компонента настају услед обртања крутог тела око осе. Трећа компонента је *нормално убрзање*, а као што смо видели у чл. 10.5, друга компонента настаје услед *неравномерности обртања*. У овом случају настаје још само убрзање тачке А. Ово је *Ривалсова теорема*.

Примери. — 64. Одредити брзину и убрзање тачке B (чије су координате у непокретном триедру $2; 2; 4$ m) крутог тела које се налази у завојном кретању ако се оса завртња поклапа са Oz -осом, а координатни почетак A клизи по тој оси једнолико, брзином 6 msec^{-1} , и у датом тренутку је на раздаљини 2 m од тачке O . Угаона брзина обртања је 4 sec^{-1} .

Решење. — Угаона брзина је 4 sec^{-1} , а транслаторна брзина 6 msec^{-1} .

Пројекције брзине и убрзања тачке A јесу: $0, 0, 6; 0, 0, 0$.

Према (247a) и (261a) биће $x = -8; y = 8; z = 6; \ddot{x} = -32; \ddot{y} = -32; \ddot{z} = 0$, па су $v_B = \sqrt{41} \text{ msec}^{-1}$, $a_B = 32\sqrt{2} \text{ msec}^{-2}$.

За покретни триедар биће $v_\xi = -8; v_\eta = 8; v_\zeta = 6; a_\xi = -32; a_\eta = 32; a_\zeta = 0$, па добијамо исте вредности. Параметар завртња је $f = 1,5$ m.

65. Круто тело врши завојно кретање угаоном брзином чије су пројекције на осе покретног триедра $2; 3; 6 \text{ sec}^{-1}$. Координатни почетак A одређен је координатама $2; 2; 4$ m у односу на непокретни триедар, а има брзину чије су пројекције на осе покретног триедра $8; 4; 8 \text{ msec}^{-1}$. Написати једначину осе завртња за тај координатни систем. Колико је растојање тачке A од осе? Које углове гради оса завртња са координатним осама система $A\xi\eta\zeta$ и колика је брзина тачке A ?

У ком односу ова брзина са транслаторном брзином завртња? Колики је параметар завртња?

Решење. — Пошто су $\omega^2 = 49; v_A = 12$, вектор положаја тачке Z_0 одређен је једначином $\vec{r}_0 = \frac{1}{49} [\vec{\omega}, v_A]$, па су његове координате $0; \frac{32}{49}; -\frac{16}{49}$, а интензитет $r_0 = \frac{16}{49} \sqrt{5}$ m.

Једначина осе завртња је

$$\frac{\xi}{2} = \frac{\eta - \frac{32}{49}}{3} = \frac{\zeta + \frac{16}{49}}{6}$$

Друга главна инваријанта биће $J_2 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 8 = 76$, па је параметар завртња $\frac{76}{49}$. Транслаторна брзина је $v_s = J_2/\omega = \frac{76}{7} \text{ msec}^{-1}$.

66. Два крута тела истовремено изводе два завојна кретања око исте осе, истом угаоном брзином ω . Углови нагиба обе завојнице на растојању R од осе јесу α_1 и α_2 . На коме ће се растојању налазити две тачке ових тела после времена t ако су у почетном положају биле на истом месту, а на раздаљини R од осе?

Решење. — Између параметра завртња, угла пењања и растојања R од осе завртња постоји однос

$$R = f \operatorname{tg} \theta = f / \operatorname{tg} \alpha.$$

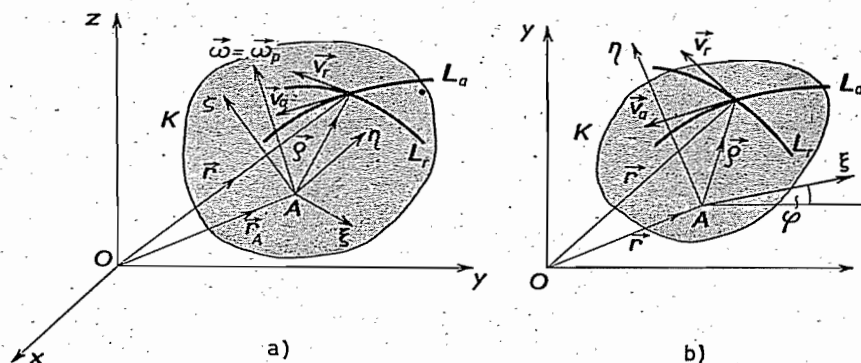
Како је $z = f\varphi = R\omega t \operatorname{tg} \alpha$, после времена t тачке ће се налазити на растојању Δz , које износи

$$\Delta z = z_2 - z_1 = R\omega t (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1).$$

12. РЕЛАТИВНО КРЕТАЊЕ

12.1. Релативно кретање тачке. — Нека је дато круто тело (K) и на њему тачка A (сл. 155a). Узмимо у њој Декартов координатни систем десне диспозиције $A\xi\eta\zeta$, који је круто везан са телом и креће се заједно с њим. Кретање крутог тела, можемо да проучавамо, као што смо видели, ако изаберемо још један стални (непокретни) координатни систем $Oxuz$.

Овај непокретни координатни систем зове се *ајсолућни* (инерцијални) *координатни систем*, а покретни систем је *релативни координатни систем*.



Слика 155. — Релативно кретање

Претпоставимо да произвољна тачка B тела K може да мења свој положај у односу на оба триедра — апсолутном и релативном, онда можемо да уочимо ова три кретања:

1° *Ајсолућно кретање* тачке B према апсолутном (непокретном) триедру $Oxyz$,

2° *Релативно кретање* тачке B према релативном (покретном) триедру $A\xi\eta\zeta$, и

3° *Преносно кретање*, кретање релативног триедра према апсолутном (непокретном) триедру, односно кретање оне тачке покретног триедра која се дајој именујка поклаја са покретном тачком B . Кретање те коинцидентне тачке у ствари је *кретање носача* (сујорша).

На пример, ако тачка (тело) клизи низ покретну стрму раван, она изводи релативно кретање према покретној равни и апсолутно кретање према непокретном систему; кретање стрме равни према непокретном систему је преносно кретање. Овде је стрма раван (клин) супорт. Путник који се креће по палуби брода (који плови) изводи релативно кретање према броду и апсолутно кретање према обали, коју сматрамо непомићном. У овом случају је брод супорт.

У раније изложеним кретањима кретао се и координатни систем $A\xi\eta\zeta$, али је положај произвољне тачке B према том триедру био непроменљив (сталан), те су координате тачке B биле независне од времена, стога тачка није имала ни брзине ни убрзања у односу на тај покретни триедар, а ми смо само проналазили пројекције брзине те тачке на осе покретног триедра. При релативном кретању положај тачке се мења у односу на оба триедра, те се мењају и координате тачке B у оба триедра, па тачка B има и брзину и убрзање у оба триедра. Тачка ће описивати

и две путање: *релативну* (L_r) у односу на релативни триедар и *апсолутну* (L_a) у односу на апсолутни триедар. Облик релативне путање зависи од врсте релативног кретања (праволинијско или криволинијско), а облик апсолутне путање зависи од оба кретања — релативног и преносног, па је њена једначина сложенија. На пример, нека се један кружни конус обрће око своје геометријске осе и нека се из његовог врха креће тачка по изводници ка основици, онда је релативна путања сама изводница (права линија), док је апсолутна путања просторна спирала.

Ако је триедар $A\xi\eta\zeta$ сталян, онда је триедар $Oxuz$ покретан, па је, према томе, промењена и улога апсолутног и релативног кретања. Апсолутност првог кретања је условљена избором непокретног триедра.

Положај тачке B одређен је векторима положаја \vec{r} и $\vec{\rho}$ у односу на апсолутни и релативни триедар, а координатни почетак релативног триедра одређен је вектором положаја \vec{r}_A у односу на апсолутни триедар, те из троугла OAB (сл. 155) следи ова векторска релација између вектора положаја $\vec{r}, \vec{\rho}, \vec{r}_A$:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}; \quad x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} + \xi\vec{i}' + \eta\vec{j}' + \zeta\vec{k}'. \quad (263)$$

Ако су x, y, z координате тачке B у односу на апсолутни триедар $Oxuz$, а ξ, η, ζ координате у односу на релативни триедар, и x_A, y_A, z_A координате тачке A у односу на апсолутни триедар, онда између тих координата постоје ови односи:

$$\begin{aligned} x &= x_A + \xi\alpha_1 + \eta\alpha_2 + \zeta\alpha_3; \\ y &= y_A + \xi\beta_1 + \eta\beta_2 + \zeta\beta_3; \\ z &= z_A + \xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3, \end{aligned} \quad (263')$$

односно

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_A)\alpha_1 + (y - y_A)\beta_1 + (z - z_A)\gamma_1; \\ \eta &= (x - x_A)\alpha_2 + (y - y_A)\beta_2 + (z - z_A)\gamma_2; \\ \zeta &= (x - x_A)\alpha_3 + (y - y_A)\beta_3 + (z - z_A)\gamma_3, \end{aligned} \quad (263'')$$

где су $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ косинуси углова које граде координатне осе оба координатна система. Они су дати схемом

		\vec{i}'	\vec{j}'	\vec{k}'	
		ξ	η	ζ	
\vec{i}	x	α_1	α_2	α_3	$\alpha_i = \cos \alpha_i;$
\vec{j}	y	β_1	β_2	β_3	$\beta_i = \cos \beta_i;$
\vec{k}	z	γ_1	γ_2	γ_3	$\gamma_i = \cos \gamma_i.$

Ако са $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ означимо ортове осе *непокретној триедре*, а са \vec{i}', \vec{j}' и \vec{k}' ортове осе *покретној триедре*, онда између њих, према претходној схеми, постоје ови односи:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \alpha_1 \vec{i}' + \alpha_2 \vec{j}' + \alpha_3 \vec{k}'; & \vec{i}' &= \alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j} + \gamma_1 \vec{k}; \\ \vec{j} &= \beta_1 \vec{i}' + \beta_2 \vec{j}' + \beta_3 \vec{k}'; & \vec{j}' &= \alpha_2 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \gamma_2 \vec{k}; \\ \vec{k} &= \gamma_1 \vec{i}' + \gamma_2 \vec{j}' + \gamma_3 \vec{k}'; & \vec{k}' &= \alpha_3 \vec{i} + \beta_3 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}.\end{aligned}\quad (263''')$$

При *равном релативном кретању* супорт изводи равно кретање (сл. 155 б), па добијемо следеће обрасце:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_A + \vec{\rho}; & x \vec{i} + y \vec{j} &= x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + \xi \vec{i}' + \eta \vec{j}'; \\ x &= x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; & \xi &= (x - x_A) \cos \varphi + (y - y_A) \sin \varphi; \\ y &= y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi; & \eta &= -(x - x_A) \sin \varphi + (y - y_A) \cos \varphi;\end{aligned}\quad (264)$$

		\vec{i}'	\vec{j}'
		ξ	η
\vec{i}	x	φ	$\varphi + 1/2 \pi$
\vec{j}	y	$-1/2 \pi + \varphi$	φ

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \vec{i}' \cos \varphi - \vec{j}' \sin \varphi; & \vec{i}' &= \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi; \\ \vec{j} &= \vec{i}' \sin \varphi + \vec{j}' \cos \varphi; & \vec{j}' &= -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi.\end{aligned}$$

12.2. Брзина тачке при релативном кретању. — Диференцирајући по времену векторску једначину

$$\vec{r} = \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}$$

добићемо

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\rho}} + [\omega, \vec{\rho}],$$

јер се извод вектора $\vec{\rho}$ састоји из два дела: *релативној дела* извода и *преносној дела*:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{\rho}} + [\omega, \vec{\rho}].$$

Извод $\dot{\vec{r}}$ представља брзину тачке B у односу на апсолутни триедар, то је дакле *апсолутна брзина тачке* ($\vec{v} = \vec{v}_a$); извод $\dot{\vec{\rho}}$ представља брзину покретне тачке у односу на релативни триедар, па је то *релативна брзина тачке* (\vec{v}_r). Извод $\dot{\vec{r}}_A$ представља брзину тачке A супорта у односу на непокретни триедар $Oxuz$, а члан $[\omega, \vec{\rho}]$ представља обимну брзину

Бне тачке супорта која се у датом тренутку поклапа са покретном тачком B . Према томе, прва брзина је *транслаторна брзина сујорша*, а друга је *обимна брзина*. Свака тачка супорта има исту такву транслаторну брзину, а обимна брзина је различита и зависи од вектора $\vec{\rho}$ пошто је угаона брзина, такозвана *преносна угаона брзина* ($\omega = \omega_p$), иста за све тачке супорта. Оба члана, дакле, представљају *преносну брзину*:

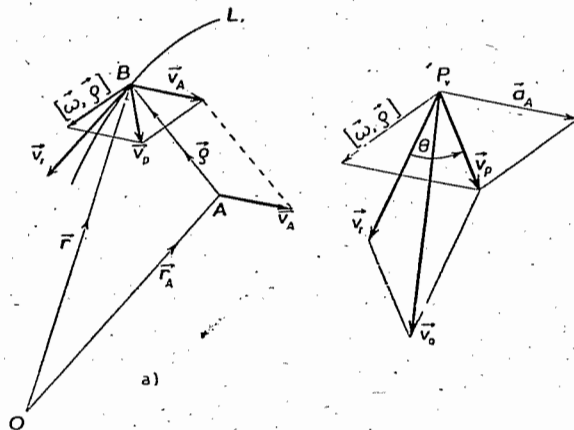
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_{rot} = \vec{v}_A + [\omega, \vec{\rho}] = \vec{v}_A + \vec{v}_B^{(A)}. \quad (265)$$

Ако се супорт транслаторно креће, онда је преносна брзина једнака првом члану (\vec{v}_A); ако се обрће око тачке A , онда има само брзину обртања $[\omega, \vec{\rho}]$. Према томе, она тачка (B') супорта која се поклапа са покретном тачком B имаће, уопште, две компоненте преносне брзине: *транслаторну* и *обимну*.

С обзиром на врсту релативног кретања тачке, и релативна брзина може бити двојака: *линијска* и *обимна*:

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \vec{\rho} = \rho; \\ \vec{v}_r &= [\omega_r, \vec{\rho}]; \\ \vec{v}_r &= \xi \vec{i}' + \eta \vec{j}' + \zeta \vec{k}', \end{aligned} \quad (266)$$

где је ω_r *релативна угаона брзина* ако се тачка B кружно креће.



Слика 156. — Брзине при релативном кретању

Из изложеног видимо да се апсолутна брзина тачке B састоји из два дела: релативне и преносне брзине, те је векторски збир тих брзина (сл. 156 а):

$$\vec{v}_a = \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p = \vec{\rho} + \vec{v}_A + [\omega, \vec{\rho}]; \quad (267)$$

он се може одредити помоћу *широуила брзина* (сл. 156 б). Према косинусној теорему следи

$$v_a^2 = v_r^2 + v_p^2 + 2 v_r v_p \cos \theta, \quad (268)$$

где је θ угао који граде вектори релативне и преносне брзине.

Ако би супорт мировао, онда би било $\vec{v}_a = \vec{v}_r$; обратно, ако би тачка мировала на супорту, онда би било $\vec{v}_a = \vec{v}_p$. Релативна брзина је, дакле, она брзина тачке B коју би имала *када би сујорит мировао*, те вектор ове брзине пада у правац тангенте на релативну путању (L_r). Релативној брзини тачке B морамо додати преносну брзину, то јест брзину оне тачке супорта која се у датом тренутку поклапа са покретном тачком B . Збир тих брзина даје апсолутну брзину, а вектор ове брзине пада у правац тангенте на апсолутну путању покретне тачке.

Векторској једначини (267) одговарају по три скаларне једначине за оба триедра, те су пројекције вектора апсолутне брзине:

a) у апсолутном триедру $Oxyz$:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = v_{rx} + \dot{x}_A + \omega_y(z - z_A) - \omega_z(y - y_A); & v_{rx} &= \xi \alpha_1 + \eta \alpha_2 + \zeta \alpha_3; \\ v_y &= \dot{y} = v_{ry} + \dot{y}_A + \omega_z(x - x_A) - \omega_x(z - z_A); & v_{ry} &= \xi \beta_1 + \eta \beta_2 + \zeta \beta_3; \\ v_z &= \dot{z} = v_{rz} + \dot{z}_A + \omega_x(y - y_A) - \omega_y(x - x_A); & v_{rz} &= \xi \gamma_1 + \eta \gamma_2 + \zeta \gamma_3; \end{aligned} \quad (268')$$

b) у релативном триедру $A\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned} v_\xi &= \dot{x} \alpha_1 + \dot{y} \beta_1 + \dot{z} \gamma_1 = \dot{\xi} + x_A \alpha_1 + y_A \beta_1 + z_A \gamma_1 + \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta; \\ v_\eta &= \dot{x} \alpha_2 + \dot{y} \beta_2 + \dot{z} \gamma_2 = \dot{\eta} + x_A \alpha_2 + y_A \beta_2 + z_A \gamma_2 + \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta; \\ v_\zeta &= \dot{x} \alpha_3 + \dot{y} \beta_3 + \dot{z} \gamma_3 = \dot{\zeta} + x_A \alpha_3 + y_A \beta_3 + z_A \gamma_3 + \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi. \end{aligned} \quad (268'')$$

При релативном кретању тачке у равни Oxy са покретним системом $A\xi\eta$, пошто је $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$, ови ће се изрази упростити, па ће бити:

a) у апсолутном систему Oxy :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\xi} \cos \varphi - \dot{\eta} \sin \varphi + \dot{x}_A - \omega(y - y_A); \\ \dot{y} &= \dot{\xi} \sin \varphi + \dot{\eta} \cos \varphi + \dot{y}_A + \omega(x - x_A); \end{aligned} \quad (269)$$

b) у релативном систему $A\xi\eta$:

$$\begin{aligned} v_\xi &= \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = \dot{\xi} + x_A \cos \varphi + y_A \sin \varphi - \omega \eta; \\ v_\eta &= -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi = \dot{\eta} - x_A \sin \varphi + y_A \cos \varphi + \omega \xi. \end{aligned} \quad (269')$$

Пример. — 67. Између два града, који леже на реци, на растојању 72 km, саобраћа пароброд који узводно пређе тај пут за 9 часова, а низводно за 4 часа.

a) Израчунати брзину реке и релативну брзину пароброда према води.

b) Чамац пређе реку ширине 500 m, крећући се управно на паралелне обале, за $2\sqrt{3}$ min. Одредити величину и правац релативне брзине чамца.

Решење. — a) Брзина пароброда узводно је 8 km/h, а низводно 18 km/h. Пошто су оба кретања *транслаторна*, апсолутна брзина једнака је алгебарском збиру релативне и преносне брзине:

$$v = v_r \pm v_p.$$

Из система једначина

$$8 = v_r - v_p, \quad 18 = v_r + v_p$$

добивамо

$$v_r = 13 \text{ km/h}, \quad v_p = 5 \text{ km/h}.$$

b) Апсолутна брзина је $v = 0,5 : 60/2 \sqrt{3} = 5 \sqrt{3} \text{ km/h}$.

Из троугла брзина одређујемо $v_r = 10 \text{ km/h}$, па угао који гради релативна брзина са правцем кретања износи 30° .

12.3. Убрзање тачке при релативном кретању. — Ако израз (267), који одређује апсолутну брзину покретне тачке, диференцирамо по времену, с обзиром на *шопални извод* вектора $\vec{\rho}$, добићемо

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, \vec{\rho} + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]$$

односно, после сређивања:

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{r}_A + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] + 2[\vec{\omega}, \vec{\rho}].$$

Други извод вектора положаја \vec{r} по времену представља *апсолутно убрзање* (\vec{a}_a), па је према томе први члан десне стране дате једначине *релативно убрзање тачке В* у односу на покретни триедар.

С обзиром на врсту релативног кретања тачке, релативно убрзање може бити двојак: *убрзање праволинијској или криволинијској кретања*:

$$\vec{a}_r = \vec{\rho} = \vec{\rho}; \quad \vec{a}_r = \vec{\rho} = [\vec{\omega}_r, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}_r, [\vec{\omega}_r, \vec{\rho}]] = \vec{a}_{rT} + \vec{a}_{rN}, \quad (270)$$

где је ω_r *релативна угаона брзина*, а $\vec{\omega}_r$ *релативно угаоно убрзање*. При криволинијском кретању тачке убрзање, уопште, има релативно тангенцијално и релативно нормално убрзање. Када је криволинијско кретање *једнолико* ($\omega_r = 0$) тада је релативно тангенцијално убрзање једнако нули ($\vec{a}_{rT} = 0$), па је релативно нормално убрзање једнако тоталном релативном убрзању. Релативно убрзање је оно убрзање покретне тачке коју би она имала када би супорт мировао ($v_A = 0$; $\omega = \omega_p = 0$). Други члан представља убрзање координатног почетка А, а трећи и четврти члан настају услед обртања тела у односу на апсолутни триедар, као што смо видели у члану 10.

Сва три чиниоца представљају компоненте убрзања носача и показују *преносно убрзање* (\vec{a}_p):

$$\vec{a}_p = \vec{r}_A + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]. \quad (271)$$

Када супорт врши *шранслаторно кретање*, тада су $\omega = 0$ и $\vec{\omega} = 0$, па је преносно убрзање једнако само првом члану и представља убрзање

транслаторног кретања. Ако супорт врши *обртно кретање*, онда је $\ddot{r}_A = 0$, па супорт има преносно тангенцијално и преносно нормално убрзање. Према томе, она тачка супорта (B') која се у датом тренутку поклапа са покретном тачком (B) имаће, уопште, убрзање од транслаторног и од обртног кретања супорта. При једноликом обртању супорта ($\dot{\omega} = 0$) губи се други члан.

Последњи члан је допунски и зове се *Кориолисово** (*G. Coriolis*, 1792—1843) убрзање:

$$\vec{a}_C = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]; \quad (272)$$

те се апсолутно убрзање тачке може представити векторским збиром *релативној, преносној и Кориолисовој убрзања* (*Кориолисова теорема*) у облику:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_C = \vec{a}_r + \vec{a}_A + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]. \quad (273)$$

Оно се може одредити дијагоналном паралелепипеда чије су ивице компонентна убрзања.

Пошто је Кориолисово убрзање представљено векторским производом (272), оно ће бити једнако нули у три случаја:

1^о ако је $\vec{\omega} = \vec{\omega}_p = 0$, *што јест* ако се носач (*триедар* $A\xi\eta\zeta$) *креће транслаторно*,

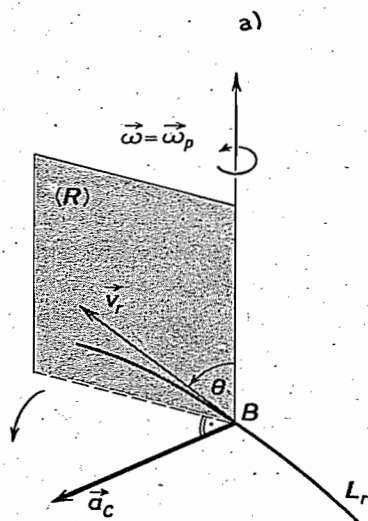
2^о ако је $\vec{v}_r = 0$, *што јест* када нема релативној кретања, и

3^о када су вектори $\vec{\omega}$ и \vec{v}_r *колинеарни или паралелни*, то јест када *падају у исти правац*.

Правец вектора Кориолисовог убрзања такав је да са векторима $\vec{\omega}$ и \vec{v}_r образује десни координатни триедар. Кориолисово убрзање управљено је на ону страну куда скреће крајња тачка вектора релативне брзине под утицајем преносне угаоне брзине (сл. 157).

Интензитет Кориолисовог убрзања износи

$$a_C = 2 \omega v_r \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_r) = 2 \omega v_r \sin \theta, \quad (272')$$



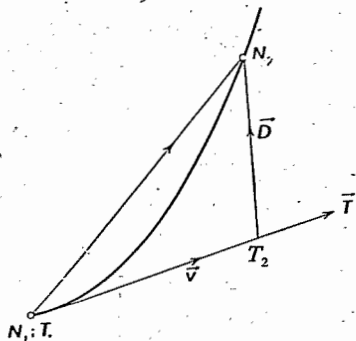
Слика 157. — Правец и смер Кориолисовог убрзања

* Ову једначину први је поставио *Clairaut* 1742. године, али ју је поново одредио *Coriolis* 1832. године („Mémoire sur les équations du mouvement relatif“).

да зависи од угла θ који граде вектори преносне угаоне брзине и релативне брзине. Оно је највеће када су та два вектора ортогонална, а једнако је нули када су ти вектори колинеарни или паралелни.

Кориолисова теорема може се доказати геометријски помоћу *девијације*.

Нека покретна тачка N , која је одређена вектором положаја \vec{r} , описује криволинијску путању брзином \vec{v} . У тренутку t она се налази у положају N_1 , а по истеку времена Δt биће у положају N_2 . Тачка T нека се креће по тангенти путање прве тачке једнолико, истом брзином \vec{v} . У тренутку t обе су се тачке налазиле у положају N_1 . По истеку времена Δt ова ће тачка стићи у положај T_2 (сл. 158). Вектор $\vec{T_2 N_2}$ показује *одступање тачке N од једноликог праволинијског кретања, због утицаја убрзања \vec{a} .*



Слика 158. — Девијација тачке

Из троугла $N_1 T_2 N_2$ следи

$$\vec{T_2 N_2} = \vec{N_1 N_2} - \vec{N_1 T_2} = \vec{D}.$$

Вектор $\vec{N_1 N_2}$ можемо изразити помоћу вектора положаја \vec{r} , развијањем у Тејлоров ред:

$$\vec{N_1 N_2} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{r}(t) \Delta t + \frac{\ddot{r}(t)}{2} \Delta t^2 + \dots,$$

а заустављањем до бесконачно малих величина другог реда, добиће се

$$\vec{N_1 N_2} = \vec{v} \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \Delta t^2.$$

Како је вектор $\vec{N_1 T_2} = \vec{v} \Delta t$, *девијација \vec{D}* (увео је *André Marie Ampère*, 1775 — 1836. године) одређена је изразом

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \vec{a} \Delta t^2 \tag{a}$$

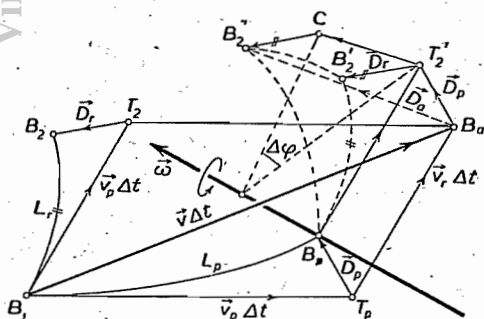
има *правац убрзања покретне тачке*.

Ако је тачка B , у релативном кретању, онда ће за прираштај времена Δt прећи из положаја B_1 по релативној путањи, у положај B_2 . Њена је девијација \vec{D}_r (сл. 159).

За исто време она тачка кругог тела која се поклапа са тачком B прећи ће у положај B_p . Њена је девијација \vec{D}_p . Слагањем ова два кретања по паралелограму добиће се апсолутна брзина кретања:

$$\vec{B_1 B_a} = \vec{v} \Delta t.$$

Ако би преносно кретање било транслаторно, релативна путања тачке B била би $B_p B_2'$, паралелна првобитној $B_1 B_2$. Како је преносно кретање и обртно, ова путања ће се заокренути за угао $\Delta \varphi = \omega \Delta t$ око осе која пролази кроз тачку B_p тако да ће пасти у положај $B_p B_2''$.



Слика 159. — Кориолисово убрзање одређено помоћу девијација

Спојимо ли тачку B_a са тачком B_2'' , добићемо

$$\overrightarrow{B_a B_2''} = \overrightarrow{B_a T_2'} + \overrightarrow{T_2' C} + \overrightarrow{C B_2''} = \overrightarrow{D_p} + [\omega \Delta t, \vec{v}_r \Delta t] + \overrightarrow{D_r} = \overrightarrow{D_a},$$

где је $\overrightarrow{D_a}$ айсолућна девијација. Ако, према обрасцу (а), овај израз помножимо са $2/\Delta t^2$, добићемо апсолутно убрзање:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + 2[\omega, \vec{v}_r], \quad (b)$$

које је једнако векторском збиру релативног, преносног и допунског (Кориолисовог) убрзања. На овај начин — геометријски — доказали смо постојање Кориолисовог убрзања (Кориолисову теорему).

Пројекције убрзања на осе оба координатна система биће

а) у айсолућном сисћему Охуз:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{\xi} \alpha_1 + \ddot{\eta} \alpha_2 + \ddot{\zeta} \alpha_3 + \ddot{x}_A + \dot{\omega}_y (z - z_A) - \dot{\omega}_z (y - y_A) + \\ &\quad + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_x - \omega^2 (x - x_A) + 2(\omega_y v_{rz} - \omega_z v_{ry}); \\ \ddot{y} &= \ddot{\xi} \beta_1 + \ddot{\eta} \beta_2 + \ddot{\zeta} \beta_3 + \ddot{y}_A + \dot{\omega}_z (x - x_A) - \dot{\omega}_x (z - z_A) + \\ &\quad + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_y - \omega^2 (y - y_A) + 2(\omega_z v_{rx} - \omega_x v_{rz}); \\ \ddot{z} &= \ddot{\xi} \gamma_1 + \ddot{\eta} \gamma_2 + \ddot{\zeta} \gamma_3 + \ddot{z}_A + \dot{\omega}_x (y - y_A) - \dot{\omega}_y (x - x_A) + \\ &\quad + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_z - \omega^2 (z - z_A) + 2(\omega_x v_{ry} - \omega_y v_{rx}), \end{aligned} \quad (273')$$

где су

$$(\vec{\omega}, \vec{\rho}) = \omega_x (x - x_A) + \omega_y (y - y_A) + \omega_z (z - z_A)$$

и пројекције релативне брзине и релативног убрзања на координатне осе овог триедра:

$$\begin{aligned} v_{rx} &= \dot{\xi} \alpha_1 + \dot{\eta} \alpha_2 + \dot{\zeta} \alpha_3; & a_{rx} &= \ddot{\xi} \alpha_1 + \ddot{\eta} \alpha_2 + \ddot{\zeta} \alpha_3; \\ v_{ry} &= \dot{\xi} \beta_1 + \dot{\eta} \beta_2 + \dot{\zeta} \beta_3; & a_{ry} &= \ddot{\xi} \beta_1 + \ddot{\eta} \beta_2 + \ddot{\zeta} \beta_3; \\ v_{rz} &= \dot{\xi} \gamma_1 + \dot{\eta} \gamma_2 + \dot{\zeta} \gamma_3; & a_{rz} &= \ddot{\xi} \gamma_1 + \ddot{\eta} \gamma_2 + \ddot{\zeta} \gamma_3; \end{aligned}$$

б) у релативном сисћему $A \xi \eta \zeta$:

$$\begin{aligned} a_\xi &= \ddot{\xi} + \ddot{x}_A \alpha_1 + \ddot{y}_A \beta_1 + \ddot{z}_A \gamma_1 + \dot{\omega}_\eta \zeta - \dot{\omega}_\zeta \eta + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_\xi - \omega^2 \xi + 2(\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta); \\ a_\eta &= \ddot{\eta} + \ddot{x}_A \alpha_2 + \ddot{y}_A \beta_2 + \ddot{z}_A \gamma_2 + \dot{\omega}_\xi \zeta - \dot{\omega}_\zeta \xi + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_\eta - \omega^2 \eta + 2(\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta); \\ a_\zeta &= \ddot{\zeta} + \ddot{x}_A \alpha_3 + \ddot{y}_A \beta_3 + \ddot{z}_A \gamma_3 + \dot{\omega}_\xi \eta - \dot{\omega}_\eta \xi + (\vec{\omega}, \vec{\rho}) \omega_\zeta - \omega^2 \zeta + 2(\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi), \end{aligned} \quad (273'')$$

где је

$$(\vec{\omega}, \vec{\rho}) = \omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta.$$

При релативном крећану у равни Оху ови ће се изрази упростити, с обзиром да је $\omega_x = \omega_y = 0$ а $\omega_z = \omega$, и биће:

a) у айсолућном сисћему Oxy :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{\xi} \cos \varphi - \ddot{\eta} \sin \varphi + \ddot{x}_A - \omega (y - y_A) - \omega^2 (x - x_A) - 2 \omega v_{ry}, \\ \ddot{y} &= \ddot{\xi} \sin \varphi + \ddot{\eta} \cos \varphi + \ddot{y}_A + \omega (x - x_A) - \omega^2 (y - y_A) - 2 \omega v_{rx};\end{aligned}\quad (274)$$

b) у релативном сисћему $A\xi\eta$:

$$\begin{aligned}a_{\xi} &= \ddot{\xi} + \ddot{x}_A \cos \varphi + \ddot{y}_A \sin \varphi - \omega \eta - \omega^2 \xi - 2 \omega \dot{\eta}, \\ a_{\eta} &= \ddot{\eta} - \ddot{x}_A \sin \varphi + \ddot{y}_A \cos \varphi + \omega \xi - \omega^2 \eta + 2 \omega \dot{\xi},\end{aligned}\quad (274')$$

где су

$$\begin{aligned}v_{rx} &= \dot{\xi} \cos \varphi - \dot{\eta} \sin \varphi; & a_{rx} &= \ddot{\xi} \cos \varphi - \ddot{\eta} \sin \varphi; \\ v_{ry} &= \dot{\xi} \sin \varphi - \dot{\eta} \cos \varphi; & a_{ry} &= \ddot{\xi} \sin \varphi - \ddot{\eta} \cos \varphi.\end{aligned}$$

При конкретном рѣшавању задатака најбоље је користити векторску методу, одредити све компоненте вектора апсолутне брзине и апсолутног убрзања (\vec{v}_r ; \vec{v}_p ; \vec{a}_r ; \vec{a}_p и \vec{a}_c), па онда извршити пројицирање на осе оба триедра.

12.4. Апсолутно кретање тачке у равни приказано методом релативног кретања. — Познато је из кинематике тачке да брзину и убрзање покретне тачке у равни можемо изразити помоћу поларних координата: *радијалне* и *циркуларне брзине*, односно *радијалној* и *циркуларној убрзања* (чл. 4.3. с):

$$\vec{v}_r = \dot{r} \vec{r}_0; \quad \vec{v}_c = r \dot{\varphi} \vec{c}_0; \quad \vec{a}_r = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{r}_0; \quad \vec{a}_c = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \cdot \vec{c}_0 = (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \vec{c}_0.$$

Ове компоненте брзине и убрзања можемо добити помоћу релативног кретања ако замислимо да је потег r крут штап који се обрће око пола O , а по њему се креће тачка N , чије су координате r и φ (сл. 160). Сместимо ли у тачки O релативни координатни систем $A\xi\eta$, чије се осе $A\xi$ и $A\eta$ поклапају са радијалним и циркуларним правцима оријентисаним ортовима \vec{r}_0 и \vec{c}_0 , онда су, према (267) и (273), апсолутна брзина и апсолутно убрзање

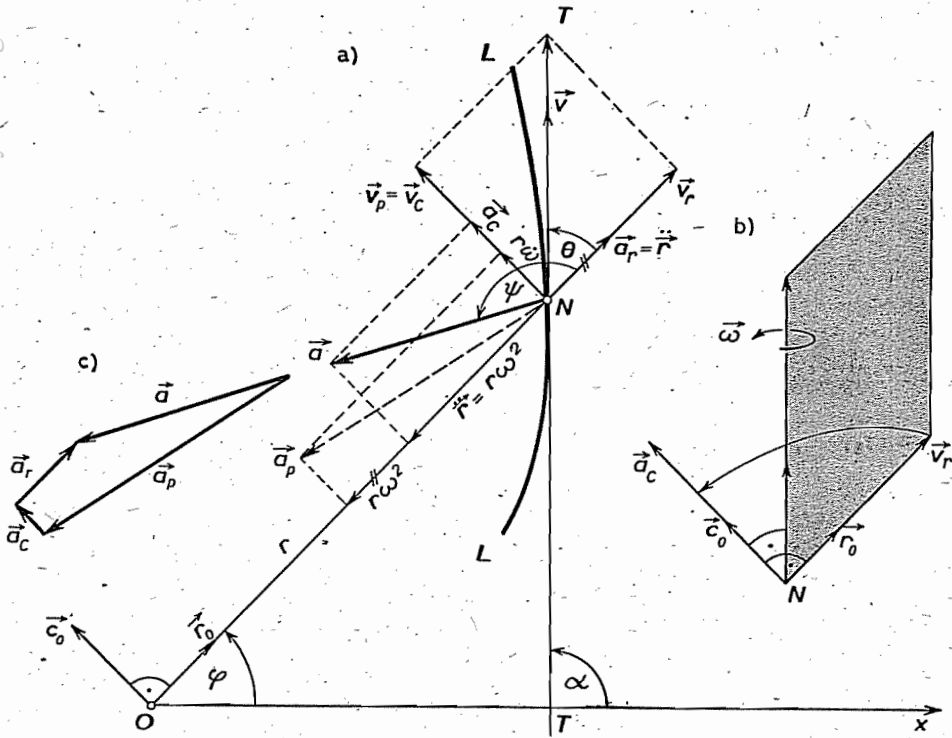
$$\begin{aligned}\vec{v}_a &= \vec{v}_r + \vec{v}_p = \vec{r} + [\omega, r] = \vec{r} + \omega r \vec{c}_0, \\ \vec{a}_a &= \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c = \vec{r} + [\omega, \dot{r}] + [\omega, r] + [\omega, r + [\omega, r]] = \vec{r} + [\omega, r] + \\ &+ [\omega, [\omega, r]] + 2 [\omega, \dot{r}] = \vec{r} + \omega r \vec{c}_0 - \omega^2 r + 2 \omega \dot{r} \vec{c}_0.\end{aligned}$$

Релативно кретање тачке је праволинијско, па су $\vec{r} = r \vec{r}_0$, $\dot{r} = \dot{r} \vec{r}_0$, а пошто супорт не врши транслаторно кретање ($v_A = a_A = 0$), већ само обртно

око осе Oz , угаonom брзином $\dot{\omega} = \dot{\omega}_p = \dot{\varphi}$ и угаоним убрзањем $\ddot{\omega} = \ddot{\omega}_p = \ddot{\varphi}$, добијамо релације:

$$\begin{aligned} \vec{v}_r = r \dot{\varphi} \vec{e}_0 = v_r \vec{e}_r; \quad \vec{v}_p = r \dot{\omega} \vec{c}_0 = r \dot{\varphi} \vec{c}_0 = v_c \vec{e}_c; \quad \vec{a}_r = r \ddot{\varphi} \vec{e}_r; \\ \vec{a}_p = r \dot{\omega} \vec{c}_0 - r \omega^2 \vec{r}_0 = -r \dot{\varphi}^2 \vec{r}_0 + r \ddot{\varphi} \vec{c}_0; \quad \vec{a}_C = 2 \dot{\omega} v_r \vec{c}_0 = 2 \dot{\varphi} v_r \vec{c}_0. \end{aligned} \quad (275)$$

Упоредјујући ове изразе са поларним компонентама вектора брзине и убрзања видимо: да је релативна брзина једнака радијалној брзини, а да је преносна брзина циркуларна брзина; први члан радијалног убрзања је релативно убрзање тачке; преносно убрзање има две компоненте: у



Слика 160. — Апсолутно кретање тачке у равни описано методом релативног кретања

радијалном и циркуларном правцу (то су у ствари нормално и тангенцијално убрзање оне тачке штапа која се у том тренутку поклапа са покретном тачком, а врши кружно кретање око тачке O или A); први члан циркуларног убрзања је Кориолисово убрзање, пошто вектор релативне брзине ($\vec{v}_r = r \dot{\varphi} \vec{e}_0$) скреће услед угаоне брзине ($\dot{\omega} = \dot{\omega} \vec{k}$), те пада у циркуларни правац, јер је овај управан на ортовима \vec{k} и \vec{r}_0 .

12.5. Апсолутно кретање тачке у простору приказано методом релативног кретања. — Када приказујемо кретање тачке у простору помоћу сферних координата, онда су компонентне брзине и убрзања одређене обрасцима:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\rho &= \dot{\rho} \vec{\rho}_0; & \vec{a}_\rho &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi - \rho \dot{\psi}^2) \vec{\rho}_0; \\ \vec{v}_c &= \rho \dot{\varphi} \cos \psi \vec{c}_0; & \vec{a}_c &= (2 \dot{\rho} \dot{\varphi} \cos \psi + \rho \ddot{\varphi} \cos \psi - 2 \rho \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi) \vec{c}_0; \\ \vec{v}_\psi &= \rho \dot{\psi} \vec{v}_0; & \vec{a}_\psi &= (2 \dot{\rho} \dot{\psi} + \rho \ddot{\psi} + \rho \varphi^2 \sin \psi \cos \psi) \vec{v}_0. \end{aligned}$$

Ове компоненте можемо упоредити са компонентама апсолутне брзине и апсолутног убрзања, претпостављајући да је штап ON везан у тачки O (A), а да се тачка креће по њему праволинијски у радијалном правцу*. Штап — супорт — изводи једновремено два обртања: око Oz -осе и око попречне осе, па је угаона брзина

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k} - \dot{\psi} \vec{c}_0 = \dot{\rho}_0 \dot{\varphi} \sin \psi - \dot{c}_0 \dot{\psi} + \dot{v}_0 \dot{\varphi} \cos \psi,$$

пошто потег ON десним обртањем долази до поклапања са Oz -осом, па угаона брзина пада у негативни правац циркуларног орта, а орт \vec{k} се може изразити помоћу ортова радијалног и меридионалног правца. Угаоно убрзање биће, према (58):

$$\vec{\omega} = \ddot{\varphi} \vec{k} - \ddot{\psi} \vec{c}_0 - \dot{\psi} \dot{c}_0 = (\ddot{\varphi} \sin \psi + \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi) \vec{\rho}_0 - \ddot{\psi} \vec{c}_0 + (\ddot{\varphi} \cos \psi - \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi) \vec{v}_0.$$

Апсолутна брзина биће

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_p = \dot{\rho} + [\omega, \rho] = \dot{\rho} \vec{\rho}_0 + \rho \dot{\varphi} \cos \psi \vec{c}_0 + \rho \dot{\psi} \vec{v}_0, \quad (276)$$

па је, због праволинијског кретања тачке, релативна брзина једнака радијалној, а преносна је векторски збир циркуларне и меридионалне брзине.

Због релативног праволинијског кретања тачке, а како је $v_A = a_A = 0$, апсолутно убрзање биће

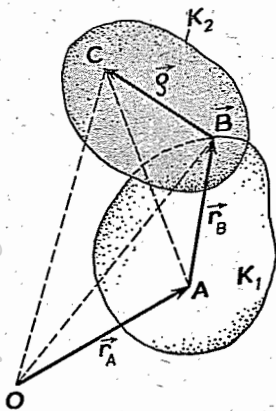
$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c = \ddot{\rho} \vec{\rho}_0 + [\omega, \rho] + [\omega, [\omega, \rho]] + 2[\omega, v_r],$$

па релативно, преносно и Кориолисово убрзање износе:

$$\begin{aligned} \vec{a}_r &= \ddot{\rho} \vec{\rho}_0; \\ \vec{a}_p &= [\omega, \rho] + \omega (\omega, \rho) - \omega^2 \rho = -\rho (\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2) \vec{\rho}_0 + (\rho \ddot{\varphi} \cos \psi - \\ &\quad - 2 \rho \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi) \vec{c}_0 + \rho (\ddot{\psi} + \varphi^2 \sin \psi \cos \psi) \vec{v}_0; \\ \vec{a}_c &= 2 (\dot{\rho} \dot{\varphi} \cos \psi \vec{c}_0 + \rho \dot{\psi} \vec{v}_0). \end{aligned} \quad (277)$$

* Д. Рашковић: Један векторски начин за одређивање сферних координата вектора брзине и убрзања. Математички институт САН, књ. 5, Београд 1956.

Из овога закључујемо да први члан радијалног убрзања представља релативно убрзање; први чланови циркуларног и меридионалног убрзања јесу компоненте Кориолисовог убрзања које лежи у тангенцијалној равни сфере, а остали чланови сферних компоненти вектора убрзања јесу компоненте преносног кретања — обртања — штапа ON око оса оријентисаних ортовима \vec{k} и $-\vec{c}_0$.



Слика 161. — Релативно кретање тела

12.6. Релативно кретање тела. — Нека се тело K_2 креће у односу на покретно тело — супорт — K_1 и нека се тачка C креће по телу K_2 (сл. 161), онда је кретање тела K_2 у односу на апсолутни триедар $Oxuz$ айсолујно, а у односу на супорт K_1 релативно, док је кретање тела K_1 према основном триедру $Oxuz$ преносно кретање тела. Апсолутна брзина тачке B тела K_2 у односу на $Oxuz$ је:

$$\vec{v}_B^{(O)} = \vec{v}_B^{(A)} + \vec{v}_A^{(O)} + [\omega_{10}, \vec{r}_B], \quad (278)$$

где је $\vec{v}_A^{(O)}$ апсолутна брзина тачке A према $Oxuz$; $\vec{\omega}_{10}$ преносна угаона брзина супорта K_1 , а $\vec{v}_B^{(A)}$ релативна брзина тачке B према тачки A .

Означимо са $\vec{\omega}_{20}$ апсолутну, а са $\vec{\omega}_{21}$ релативну угаону брзину тела K_2 према систему $Oxuz$ и телу K_1 , онда су релативна, преносна и апсолутна брзина тачке C тела K_2 :

$$\vec{v}_C^{(B)} = \vec{v}_C^{(A)} + [\omega_{21}, \vec{\rho}];$$

$$\vec{v}_C^{(A)} = \vec{v}_C^{(O)} + [\omega_{10}, \vec{r}_B + \vec{\rho}];$$

$$\vec{v}_C^{(O)} = \vec{v}_C^{(O)} + [\omega_{20}, \vec{\rho}] = \vec{v}_C^{(A)} + \vec{v}_C^{(B)}.$$

Уношењем у последњу једначину вредности из двеју претходних добија се:

$$\vec{v}_C^{(O)} = \vec{v}_B^{(O)} + [\omega_{20}, \vec{\rho}] = \vec{v}_A^{(O)} + \vec{v}_B^{(A)} + [\omega_{10}, \vec{r}_B] + [\omega_{10}, \vec{\rho}] + [\omega_{21}, \vec{\rho}],$$

па, с обзиром на (278), следи услов

$$[\omega_{20}, \vec{\rho}] = [\omega_{10}, \vec{\rho}] + [\omega_{21}, \vec{\rho}] = [\omega_{10} + \omega_{21}, \vec{\rho}].$$

Овај услов мора бити задовољен за произвољну вредност вектора $\vec{\rho} = \vec{BC}$, па мора бити задовољен услов и између угаоних брзина:

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21}, \quad (279)$$

који показује да је апсолутна угаона брзина тела K_2 према триедру $Oxuz$ једнака векторском збиру релативне угаоне брзине тела K_2 према телу K_1 и преносне угаоне брзине супорта (према триедру $Oxuz$).

Две једначине (278) и (279) дају везу између транслаторних и угаоних брзина апсолутног, преносног и релативног кретања тела.

Прецесионо кретање (сл. 143) можемо схватити као релативно кретање. Тело K_p обрће се око своје фигурне осе *релативном угаоном брзином*, $\omega_r = \omega_s = v$, и по непокретном конусу угаоном брзином прецесије, $\omega_p = \Omega$. Ова друга угаона брзина је *преносна угаона брзина*, па је апсолутна брзина обртања тела око непомицне тачке геометријски збир ових угаоних брзина:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_p; \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_s + \vec{\omega}_p = v \vec{k}' + \Omega \vec{k}. \quad (280)$$

Брзина ће бити

$$\vec{v} = \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_p = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = [\vec{\omega}_r, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}_p, \vec{\rho}]. \quad (281)$$

Релативна брзина је обимна брзина обртања тачке око тренутне осе, која, сматрамо, у том тренутку мирује. Преносна брзина је брзина оне тачке супорта — покретног конуса — која се поклапа са покретном тачком.

Убрзање ће износити

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_C = \vec{a}_{ob} + \vec{a}_{aks} = \vec{a}_T + \vec{a}_N + \vec{a}_d = \vec{a}_N + \vec{a}_d \\ = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]], \end{aligned}$$

јер је због $\omega = \text{const.}$, $\dot{\omega} = 0$ и $a_T = 0$, па је $\vec{a}_{ob} = \vec{a}_d$.

Први члан, због тога што је угаоно убрзање

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = [\vec{\omega}_p, \vec{\omega}_s] = [\vec{\omega}_p, \vec{\omega}_r] = [\vec{\omega}_p, \vec{\omega}],$$

представља обртно или допунско убрзање:

$$\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] = -[\vec{\rho}, [\vec{\omega}_p, \vec{\omega}_r]] = (\vec{\omega}_p, \vec{\rho}) \vec{\omega}_r - (\vec{\omega}_r, \vec{\rho}) \vec{\omega}_p = \vec{a}_{ob} = \vec{a}_d.$$

Због (280) и (281) други члан се може написати у облику

$$\begin{aligned} \vec{a}_N = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = [\vec{\omega}_r, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] + [\vec{\omega}_p, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = [\vec{\omega}_r, [\vec{\omega}_r, \vec{\rho}]] + [\vec{\omega}_p, [\vec{\omega}_p, \vec{\rho}]] + \\ + [\vec{\omega}_p, \vec{v}_r] + (\vec{\omega}_r, \vec{\rho}) \vec{\omega}_p - (\vec{\omega}_r, \vec{\omega}_p) \vec{\rho}. \end{aligned}$$

Збир ова два убрзања је

$$\vec{a} = [\vec{\omega}_r, [\vec{\omega}_r, \vec{\rho}]] + [\vec{\omega}_p, [\vec{\omega}_p, \vec{\rho}]] + [\vec{\omega}_p, \vec{v}_r] + (\vec{\omega}_p, \vec{\rho}) \vec{\omega}_r - (\vec{\omega}_r, \vec{\omega}_p) \vec{\rho},$$

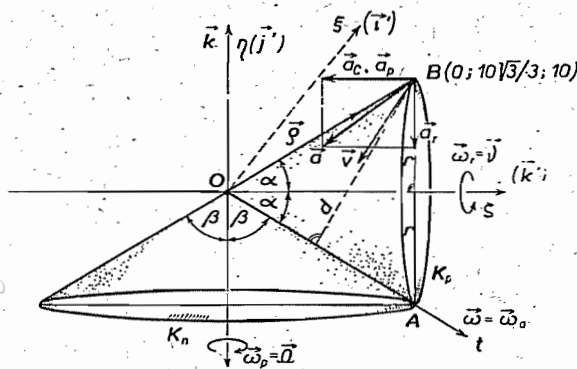
па је, због

$$[\vec{\omega}_p, \vec{v}_r] = [\vec{\omega}_p, [\vec{\omega}_r, \vec{\rho}]] = (\vec{\omega}_p, \vec{\rho}) \vec{\omega}_r - (\vec{\omega}_p, \vec{\omega}_r) \vec{\rho},$$

апсолутно убрзање

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_C = [\vec{\omega}_r, [\vec{\omega}_r, \vec{\rho}]] + [\vec{\omega}_p, [\vec{\omega}_p, \vec{\rho}]] + 2[\vec{\omega}_p, \vec{v}_r]. \quad (282)$$

Први члан, због $\omega_r = \text{const.}$, $\dot{\omega}_r = 0$, представља *релативно нормално убрзање* обртања око фигурне осе; други члан, због $\omega_p = \text{const.}$, $\dot{\omega}_p = 0$, представља *преносно нормално убрзање*, а трећи члан је *Кориолисово убрзање*.



Слика 162. — Прецесионо кретање описано методом релативног кретања

су $\vec{\omega}_r = (\Omega \text{ctg } \alpha) \vec{k}' = (4\sqrt{3}\pi) \vec{k}'$, па су релативна, преносна и апсолутна брзина тачке В (0; $10\sqrt{3}/3$; 10 cm):

$$\vec{v}_r = [\omega_r, \rho] = \omega_r [k', \rho] = -(\rho \omega_r \sin \alpha) \vec{i}' = -40 \pi \vec{i}';$$

$$\vec{v}_p = [\omega_p, \rho] = -40 \pi \vec{i}'; \quad \vec{v}_a = -80 \pi \vec{i}';$$

Све три брзине су усмерене, дакле, у негативном смеру осе $O\xi$.

Према (282) компонентна убрзања су

релативно: $\vec{a}_r = [\omega_r, [\omega_r, \rho]] = [\omega_r, \vec{v}_r] = -160\sqrt{3} \pi^2 \vec{j}'$;

преносно: $\vec{a}_p = [\omega_p, [\omega_p, \rho]] = [\omega_p, \vec{v}_p] = -160 \pi^2 \vec{k}'$;

Кориолисово: $\vec{a}_C = 2[\omega_p, \vec{v}_r] = 320 \pi^2 [j', i'] = -320 \pi^2 \vec{k}'$,

па је апсолутно убрзање

$$\vec{a}_a = -160\sqrt{3} \pi^2 \vec{j}' - 480 \pi^2 \vec{k}'; \quad a_a = 320\sqrt{3} \pi^2 \text{ cm/sec}^2.$$

Ове се вредности слажу са раније добијеним помоћу метода обртања тела око непомичне тачке (чл. 10. зад. 63. сл. 145 e, таблица).

Примери. — 68. Права цев креће се управно на своју геометријску осу брзином 10 m sec^{-1} . У њој се креће куглица по закону $y = 2 \sin 2\pi t$.

Одредити путању, брзину и убрзање апсолутног кретања куглице (сл. 163).

Решење. Компонентне брзине добићемо из једначина

$$x = 10 t; \quad y = 2 \sin 2\pi t,$$

у облику

$$x = 10; \quad y = 4 \pi \cos 2\pi t.$$

Из првог система једначина добићемо линију путање

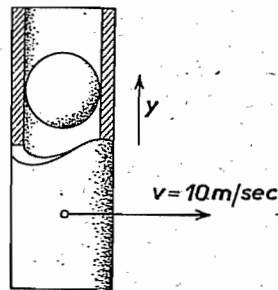
$$y = 2 \sin (1/\pi x),$$

Прва два су усмерена ка фигурној осе, односно осе прецесије, а треће је управно на векторима $\vec{\omega}_p$ и \vec{v}_r .

На пример, покретни конус K_p , висине $h = 10 \text{ cm}$, угла отвора 60° , обиђе у минутоу 120 пута непокретни конус, угла отвора 120° (сл. 162) обрћући се око своје осе ($O\xi$) у директном смеру. Пошто је брзина прецесије $\Omega = \pi n/30 = 4\pi \text{ sec}$, а усмерена је у негативном смеру Oz -осе, биће $\vec{\omega}_p = -4\pi \vec{k} = -4\pi \vec{j}'$. Даље

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & 4\sqrt{3}\pi \\ 0 & 10\sqrt{3}/3 & 10 \end{vmatrix} = -40\pi \vec{i}'$$

$$\vec{v}_p = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & -4\pi & 0 \\ 0 & 10\sqrt{3}/3 & 10 \end{vmatrix}$$



Слика 163. — Кретање куглице у транслаторно покретној цеви

а-из другог квадрат апсолутне брзине

$$v^2 = 4(25 + 4\pi^2 \cos^2 2\pi t).$$

Интензитет апсолутног убрзања је

$$a = \ddot{y} = 8\pi^2 \sin 2\pi t.$$

69. Коса раван (клин), дужине $2\sqrt{3}$ m, нагнута је под углом 30° према хоризонту, и креће се праволинијски, паралелно Ox -оси (сл. 164) константним убрзањем 1 m sec^{-2} . По њој се спушта из тачке A , без почетне брзине, тачка K релативним убрзањем 2 m sec^{-2} . Одредити путању, брзину и убрзање апсолутног кретања те тачке.

Решење. — Како је преносно убрзање $\ddot{x}_p = 1$, за почетне услове кретања је

$$x_p = \frac{1}{2} t^2.$$

Компонентна релативна убрзања за систем $A\xi\eta$, са осом $A\xi$ у правцу AB , јесу

$$\ddot{\xi} = 2; \quad \ddot{\eta} = 0,$$

па су за дате почетне услове:

$\xi = t^2; \quad \eta = 0$. (Релативна путања је права AB).

Како су

$$x = x_p + \xi \cos 30^\circ = \frac{1}{2} t^2 (1 + \sqrt{3});$$

$$y = h - \xi \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} t^2 + h,$$

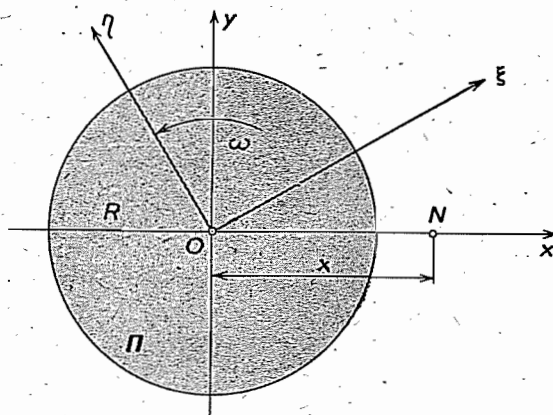
елиминисањем параметра t добијамо линију путање апсолутног кретања:

$$(1 + \sqrt{3})y + x = (1 + \sqrt{3})h \quad (\text{права линија}).$$

70. Тачка N креће се по правој Ox (сл. 165) хармонијски по закону

$$x = R \sin \pi t.$$

Одредити једначину путање релативног кретања тачке према плочи (Π), која се равномерно обрће са 30 o/min око осе O .



Слика 165. — Релативно хармонијско кретање

Решење. — Релативне координате тачке N јесу: (264)

$$\xi = R \sin \pi t \cos \pi t;$$

$$\eta = -R \sin \pi t \sin \pi t,$$

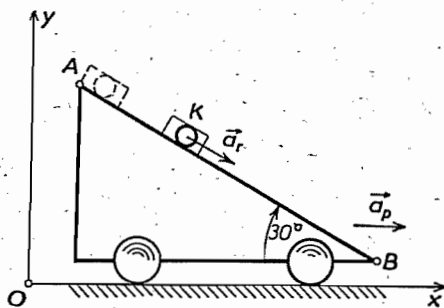
пошто је угаона брзина $\omega = \pi$.

Елиминисањем времена t из наведених једначина

$$t = \frac{1}{\pi} \left[\text{arctg} \left(\frac{\xi}{\eta} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

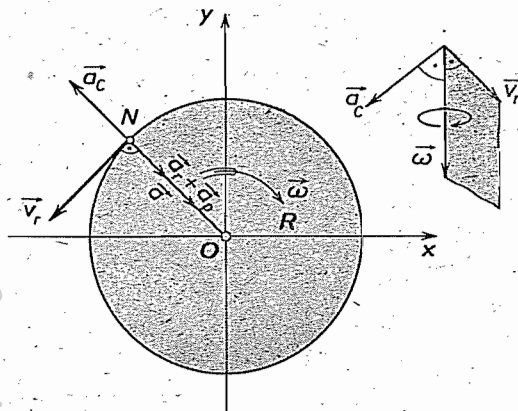
добићемо линију путање

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2 \sin^2 \pi t.$$



Слика 164. — Кретање тела низ стрму раван покретног клина

71. Тачка N креће се равномерно по обиму хоризонталне кружне плоче, полупречника $R = 10$ cm (сл. 166) са 30 обрта у минути, док се плоча обрће око вертикалне осе у противном смеру са 60 обрта у минути.



Слика 166. — Кретање тачке по ободу обртне плоче

Одредити апсолутно убрзање покретне тачке.

Решење. — Релативно убрзање тачке је

$$a_r = v^2/R = R \pi^2$$

у правцу потега ON , са смером ка средишту O , јер је тангенцијално убрзање једнако нули, пошто је $v = \text{const}$.

Како се и плоча обрће равномерно, преносно убрзање је $a_p = 4 \pi^2 R$ у правцу потега, са смером ка средишту O .

Пошто је обртање у хоризонталној равни око вертикалне осе, Кориолисово убрзање је

$$a_c = -2 \omega v = -4 \pi^2 R,$$

$$\omega = 2\pi f$$

у правцу потега, са смером од средишта O .

Према томе, апсолутно убрзање тачке N једнако је алгебарском збиру убрзања:

$$a = a_r + a_p + a_c = \pi^2 R = 98,6 \text{ cm sec}^{-2}$$

и пада у правац потега, са смером ка средишту O .

72. Тачка N креће се равномерно по обиму круга полупречника R (сл. 167). Иза круга налази се покретна раван (Π).

а) Одредити путању тачке N у односу на покретну раван која се креће константним брзином $v_p = v$.

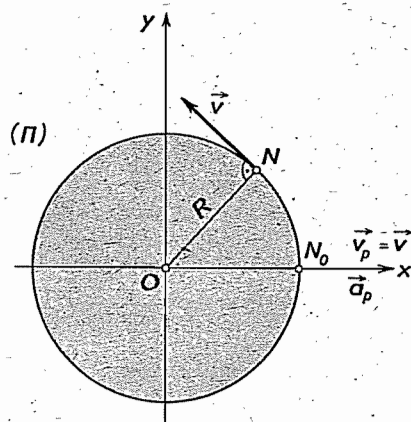
б) Одредити компоненте релативне брзине и убрзања за осе координатног система Ox ако се раван креће константним убрзањем a_p , без почетне брзине као и релативну путању тачке N у односу на покретну раван. Почетни положај тачке је у N_0 .

Решење. — а) Путања тачке N је циклоида чија је генератриса (производиља) круг полупречника R . Средиште круга креће се транслаторно, брзином v_p .

б) Пројекције убрзања су:

$$a_{rx} = -a_p - \frac{v^2}{R} \cos \varphi = -\frac{dv_{rx}}{dt};$$

$$a_{ry} = -\frac{v^2}{R} \sin \varphi = -\frac{dv_{ry}}{dt}.$$



Слика 167. — Кружно кретање у односу на покретну раван

Како је $v = R \frac{d\varphi}{dt}$, биће $t = \frac{R\varphi}{v}$ па је за дате почетне услове:

$$v_{rx} = -a_p t - v \sin \varphi = \frac{dx}{dt}; \quad x = -\frac{a_p t^2}{2} + R \cos \varphi,$$

$$v_{ry} = v \cos \varphi = \frac{dy}{dt}; \quad y = R \sin \varphi.$$

Како је $\varphi = \arcsin (y/R)$, а t је дато претходном релацијом, елиминисањем параметра φ добићемо једначину релативне путање тачке у облику

$$x = -\frac{a_p}{2} \frac{R^2}{v^2} \left(\arcsin \frac{y}{R} \right)^2 - \sqrt{R^2 - y^2}.$$

73. Права цев, дужине l , обрће се у хоризонталној равни угаоном брзином ω . У средини цеви налази се куглица, која је у том почетном положају била у миру (сл. 168). Одредити једначину апсолутне путање куглице у поларном систему са полом у O . Којом ће апсолутном и релативном брзином куглица напустити цев? (Joh. Bernoulli).

Решење. — Усвојимо ли покретни координатни систем као на слици 168, онда, према члану 12.4, релативно и Кориолисово убрзање износе

$$\ddot{r} = r\omega^2; \quad a_C = 2v_r\omega.$$

Прва је једначина хомогена са константним коефицијентима, па је њен општи интеграл

$$r = C_1 \omega t + C_2 e^{-\omega t}.$$

За почетне услове: за $t=0$; $r=1/2 l$; $\dot{r}=0$, константне су $C_1 = C_2 = 1/4 l$, те је једначина апсолутне путање $r = 1/4 l (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = 1/2 l \operatorname{Ch} \omega t$. Кориолисово убрзање је $a_C = 2\dot{r}\omega = l\omega^2 \operatorname{Sh} \omega t$, па, с обзиром на релације између хиперболичких функција, релативна брзина биће

$$\dot{r} = 1/2 l \omega \operatorname{Sh} \omega t = 1/2 \omega \sqrt{4r^2 - l^2}.$$

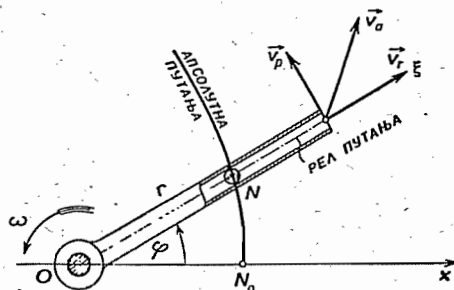
Релативна брзина при напуштању цеви износи

$$v_r = 1/2 \sqrt{3} l \omega,$$

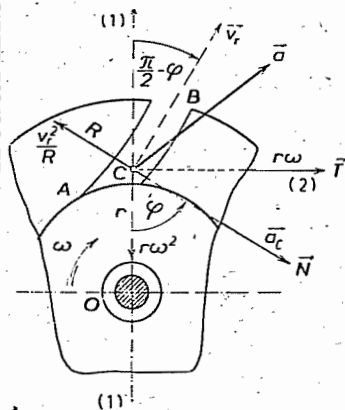
па је апсолутна брзина

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = 1/2 \sqrt{7} l \omega.$$

74. Турбина са криволинијским каналима обрће се равномерно, угаоном брзином ω , око вертикалне осовине O (сл. 169). Вода тече у каналима константном релативном брзином v_r . Наћи за делић воде који се налази у тачки C канала AB , ако је у тој тачки полупречник кривине канала R , пројекције апсолутне брзине и апсолутног убрзања на правце OC (1) и CT (2). Правац нормале CN гради са правцем OC угао φ , а $\overline{OC} = r$.

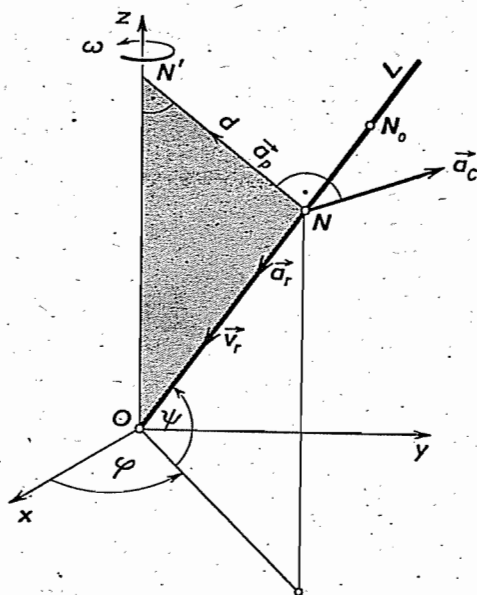


Слика 168. — Кретање куглице у обртној цеви



Слика 169. — Брзина делића воде у турбинском каналу

Решење. — Из плана брзина и убрзања биће:



Слика 170. — Кретање тачке по штапу који се обрће око осе

$$v_1 = v_r \sin \varphi; \quad v_2 = v_r \cos \varphi + r \omega,$$

$$a_1 = - \left[r \omega^2 + \left(2 v_r \omega - \frac{v_r^2}{R} \right) \cos \varphi \right],$$

$$a_2 = \left(2 v_r \omega - \frac{v_r^2}{R} \right) \sin \varphi.$$

75. По правој L , која је нагнута према Ox -равни под углом ψ , креће се тачка N , по закону $\frac{1}{2} a_r t^2$. У тренутку $t=0$ тачка се налази у положају N_0 (сл. 170). Права L , обрће се око Oz -осе угаоном брзином ω . Одредити убрзање покретне тачке N .

Решење. — Ако је $\overline{ON}_0 = s_0$ онда је $\overline{ON} = s_0 - \frac{1}{2} a_r t^2$, па је

$$\overline{NN'} = d = \overline{ON} \cos \psi.$$

Релативно убрзање тачке N је a_r , са смером ка O . Прејенсно убрзање је $\omega^2 d$, са смером од N ка осе Oz .

Релативна брзина тачке је $a_r t$, са смером ка тачки O , па је Кориолисово убрзање

$$a_c = 2 a_r t \omega \cos \psi,$$

и управно је на раван троугла ONN' .

76. Тачка M креће се једнако убрзано дуж изводнице вертикалног конуса, угла отвора 60° . из почетног положаја M_0 , $\overline{AM}_0 = s_0 = 10$ cm, ка основи, релативним убрзањем $a_r = 3$ cm/sec². Конус се обрће око осе OA једнако убрзано, угаоним убрзањем $1/2$ sec⁻², без почетне угаоне брзине (сл. 171 a). Одредити апсолутну брзину и апсолутно убрзање покретне тачке M у тренутку $t=2$ sec од почетка кретања. У почетном положају тачка је била у миру.

Решење. — Пошто је релативно кретање тачке једнако убрзано, биће

$$a_r = 3; \quad v_r = 3t; \quad s_r = \frac{3}{2}t^2 + 10;$$

$$r = s_r \sin 30^\circ = s_r/2.$$

И обртање супорта је једнако убрзано, те су

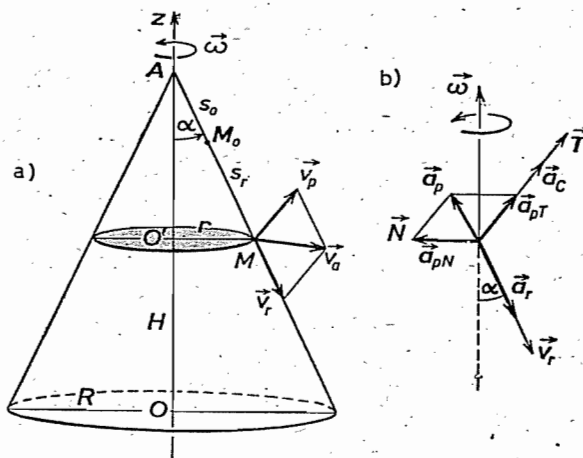
$$\omega_p = \frac{1}{2}; \quad \omega_p = \frac{1}{2}t.$$

За $t=2$ sec биће $a_r = 3$ cm/sec²; $s_r = 16$ cm; $r = 8$ cm,

$\omega_p = \frac{1}{2}$; $\omega_p = 1$ sec⁻¹; па су брзине

$$v_r = 6 \text{ cm/sec}; \quad v_p = r \omega_p = 8 \text{ cm/sec};$$

$$v_a = 10 \text{ cm/sec}.$$



Слика 171. — Кретање тачке дуж изводнице конуса који се обрће око осе

Убрзања су

$$\text{релативно: } a_r = 3 \text{ cm/sec}^2; \quad \vec{a}_r = 3 \vec{r}_0;$$

$$\text{преносно: } a_{pT} = r \omega_p = 4 \text{ cm/sec}^2; \quad a_{pN} = r \omega_p^2 = 8 \text{ cm/sec}^2;$$

$$\text{Кориолисово: } \vec{a}_C = 2 [\omega_p, \vec{v}_r] = (2 \omega_p v_r \sin \alpha) \vec{T} = 6 \vec{T},$$

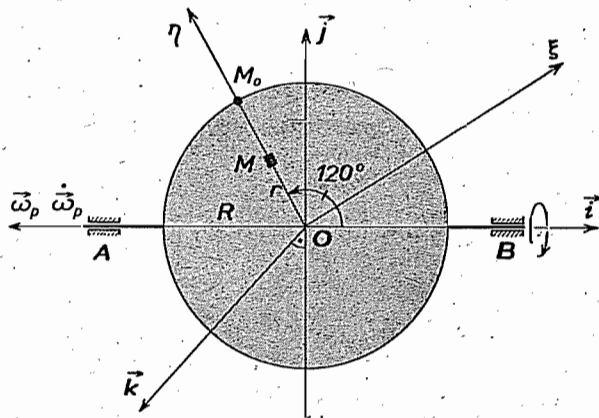
а је апсолутно убрзање (сл. 171 б):

$$\vec{a} = 3 \vec{r}_0 + 4 \vec{T} + 8 \vec{N} + 6 \vec{T} = 3 \vec{r}_0 + 10 \vec{T} + 8 \vec{N},$$

односно

$$a = \sqrt{9 + 100 + 64} = \sqrt{173} \text{ cm/sec}^2 = 13,15 \text{ cm/sec}^2.$$

77. Кружна плоча, полурадијуса R , обрће се око осе AB једнако убрзано у стању мировања, угаоним убрзањем 2 sec^{-2} у смеру кретања сатне казаљке. Дуж полурадијуса OM_0 (сл. 172) креће се из M_0 тачка према закону $OM = r = R \cos 2t$. Израчунати апсолутну брзину и апсолутно убрзање покретне тачке у тренутку када дође у положај $OM = r = R/2$ ако је $R = 12 \text{ cm}$.



Слика 172. — Кретање тачке по радијалном жлебу кружне плоче која се обрће

Решење. — Због $r = R \cos 2t$, релативна брзина и релативно убрзање биће

$$\dot{r} = -2R \sin 2t; \quad \ddot{r} = -4R \cos 2t = -4r.$$

Пошто је

$$\omega = 2, \text{ то је } \omega_p = \omega t = 2t, \quad \dot{\omega} = -2t \dot{i}.$$

Када је $r = R/2$, тада је $\cos 2t = 1/2$, то јест $2t = \pi/3$ односно $t = \pi/6$. Због тога су брзине

$$\vec{v}_r = -R\sqrt{3} \vec{r}_0; \quad \vec{v}_p = (-R \omega_p \sin 60^\circ/2) \vec{k} = (-R\sqrt{3} \pi/12) \vec{k},$$

$$v_a = \frac{R\sqrt{3}}{12} \sqrt{144 + \pi^2} \approx 21,47 \text{ cm/sec}.$$

Убрзања су:

$$\vec{a}_r = -2R \vec{r}_0; \quad \vec{a}_{pT} = (-R \dot{\omega} \sin 60^\circ/2) \vec{k} = (-R\sqrt{3}/2) \vec{k};$$

$$\vec{a}_{pN} = (-R \omega^2 \sin 60^\circ/2) \vec{j} = (-R\sqrt{3} \pi^2/36) \vec{j}; \quad \vec{a}_C = -(2 \omega v_r \sin 60^\circ) \vec{k} = -R \pi \vec{k};$$

$$\vec{a} = -2R \vec{r}_0 - \frac{R\sqrt{3}}{2} \vec{k} - \frac{R\sqrt{3}\pi^2}{36} \vec{j} - R \pi \vec{k} = -2R \vec{r}_0 - \frac{R(2\pi + \sqrt{3})}{2} \vec{k} - \frac{R\sqrt{3}\pi^2}{36} \vec{j}.$$

Пошто је $\vec{r}_0 = -\frac{1}{2}\vec{i} + (\sqrt{3}/2)\vec{j}$, апсолутно убрзање биће $\vec{a} = R\vec{i} - R \frac{\sqrt{3(36+\pi^2)}}{36}\vec{j} - R \frac{2\pi + \sqrt{3}}{2}\vec{k}$; $a = \frac{R}{6} [36^2 + (36 + \pi^2)^2 + 36 \cdot 9 (2\pi + \sqrt{3})^2]^{1/2} \approx 311 \text{ cm/sec}^2 \approx 3,11 \text{ m/sec}^2$.

78. Моренов (Morin) брег. — Код гасних мотора употребљавају се вентили који се покрећу помоћу брегасте (разводне) осовине која је у вези са радилицом. На брегастој осовини насађени су брегџови (палчеви), којих има разних типова. Брзина Мореновог брега мења се по закону праве линије, $v = ct$, где је $c = \text{const.}$, како би се избегли ударци на почетку и крају кретања. Константа c одређена је релацијом $c = \frac{1}{15} v_{\text{max}} n$, што значи да је брзина максимална за $t = 15/n$, а како је $tn = 60''$, где је n број обртаја у минути, брзина максимална биће за $\frac{1}{4}$ обртаја

$$v = \frac{v_{\text{max}} n}{15} t.$$

Убрзање је $a = \frac{v_{\text{max}} n}{15}$, а пут је $s = \int_0^t v dt = v_{\text{max}} n t^2 / 30$.

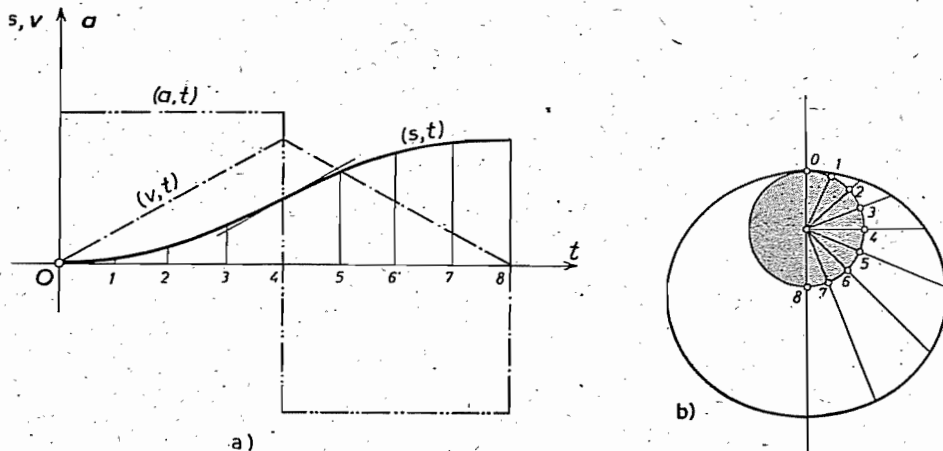
Путеви за $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ обртаја износе

$$s_{1/4} = \frac{v_{\text{max}} \cdot 15}{2n}; \quad s_{1/2} = s_{\text{max}} = \frac{v_{\text{max}} \cdot 15}{n}.$$

Због ових вредности може се убрзање написати и у овом облику:

$$a = s_{\text{max}} \frac{n^2}{225}.$$

Кинематички дијаграми приказани су сликом 173.



Слика 173. — Кинематички дијаграми и облик Мореновог брега

Да бисмо добили облик брега, поступићемо овако. У извесној размери нацртаћемо попречни пресек брегасте осовине, и обим пресека поделити на исти број делова на колико је делова подељена апсцисна оса. На полупречнике, кроз одговарајуће подеоне тачке, пренећемо, у истој размери, ординате дијаграма (s, t) . Ако све ове тачке спојимо линијом, добићемо облик брега. Поларна једначина је $r = R + s = R + \frac{1}{2} ct^2$ (поларна парабола). Због симетрије, довољно је нацртати дијаграме само за $\frac{1}{2}$ обрта.

Рђва особина овог брега је што убрзање скаче са вредности $+a$ на $-a$, као што се види из дијаграма (a, t) .

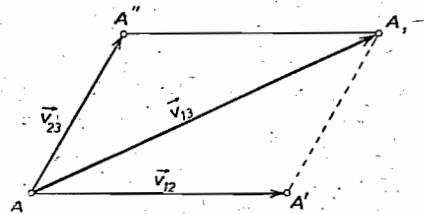
13. СЛАГАЊЕ КРЕТАЊА

Када неко тело врши истовремено више кретања, онда се ова појединачна кретања називају *саставна* или *компонентна* кретања, док се резултујуће кретање назива *сложено кретање тела*. Као што смо проучили у плану 12, апсолутно кретање тела је условљено избором једног непокретног тела према коме посматрамо кретање. Ако тело K_1 изводи истовремено два кретања, онда се оно креће према другом телу K_2 , које се такође креће према телу K_3 , које сматрамо непокретним.

Када се путник креће по пароброду који пливи по реци, онда је његово кретање у односу на земљу сложено и састоји се из компонентних — релативних — кретања: путника према броду, брода према води реке и воде према земљи, коју у овом случају сматрамо непокретном.

Пошто је кретање тела двојако: *транслаторно* и *обртно*, а ова се кретања могу сматрати компонентама општег кретања — завртња. Проучићемо слагање свих ових кретања, као и слагање више завртња, која ће у резултату дати опет један завртњак, па се он, дакле, с правом може назвати *оцишћеним кретањем кружој шела*.

13.1. Слагање транслација. — Нека се тело K_1 креће транслаторно према телу K_2 , које се такође креће транслаторно према непомићном телу K_3 . Кретање тела K_1 према телу K_3 јесте сложено кретање, а кретање према телу K_2 и кретање овог тела према телу K_3 јесу компонентна кретања. Нека је транслација праволинијска, онда ће тачка A тела K_1 , ако претпоставимо да је тело K_2 круто везано са телом K_3 , прећи у положај A' (сл. 174). Ако, пак, претпоставимо да је тело K_1 круто везано са телом K_2 , а да се ово креће праволинијски према телу K_3 , онда ће тачка A тела K_1 прећи из положаја A у положај A'' . Оба кретања су једновремена, па ће тачка A прећи у положај A_1 , који одређујемо дијагоналном паралелограма $AA'A_1A''$. Брзина сложеног кретања тела K_1 према непомићном телу K_3 једнака је векторском збиру брзина компонентних кретања:

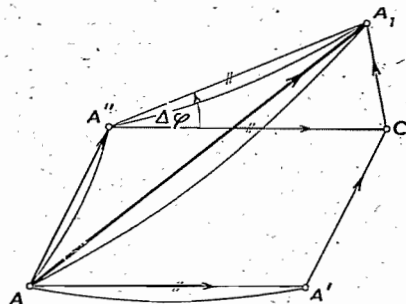


Слика 174. — Слагање праволинијских транслација

$$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23} \quad (283)$$

Да векторски закон сабирања брзина важи ако је транслација и криволинијска, доказаћемо на овај начин. За елемент времена Δt тачка A прећи ће, по кривој линији, у положај A' (сл. 175), ако посматрамо кретање тела K_1 у односу на тело K_3 . Ако посматрамо кретање тела

K_2 према K_3 , видимо да ће права AA' прећи у положај $A''A_1$, те ће при сложеном кретању тачка A прећи у положај A_1 . Нацртајмо тетиве ових путања, онда је, због кругости тела, $\overline{AA'} = \overline{A''A_1}$. Ако конструишемо паралелограм $AA'CA''$, онда следи



$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CA_1}.$$

Делећи овај израз са Δt и узимајући граничне вредности, с обзиром да се $\overline{CA_1}$ може сматрати бесконачно малим луком описаним из тачке A'' :

$$\widehat{CA_1} = \overline{A''A_1} \cdot \Delta \varphi,$$

Слика 175. — Слагање криволинијских транслација

и да је бесконачно мала величина вишег реда у односу на Δt , биће:

$$\lim \left(\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\Delta t} \right) = \lim \left(\frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t} \right) + \lim \left(\frac{\overrightarrow{AA''}}{\Delta t} \right) + \lim \left(\frac{\widehat{CA_1}}{\widehat{CA_1}} \right) \cdot \lim \left(\frac{\widehat{CA_1}}{\Delta t} \right)$$

односно

$$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}.$$

Дакле, брзине се могу сабрати векторски.

У случају да се тело K_1 креће према телу K_2 , ово тело према K_3 , тело K_3 према K_4, \dots , тело K_{n-1} према K_n , онда је кретање тела K_1 према непокретном телу K_n сложено из компонентних кретања, тако да је његова брзина једнака векторском збиру брзина компонентних кретања:

$$\vec{v}_{1n} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23} + \vec{v}_{34} + \dots + \vec{v}_{(n-1)n} = \sum_{12}^{(n-1)n} \vec{v}_{jk}. \quad (284)$$

Обратни задатак, то јест разлагање сложеног кретања на компонентна, можемо извршити само у случају кад су познати правци компонентних брзина, \vec{v}_{12} и \vec{v}_{23} .

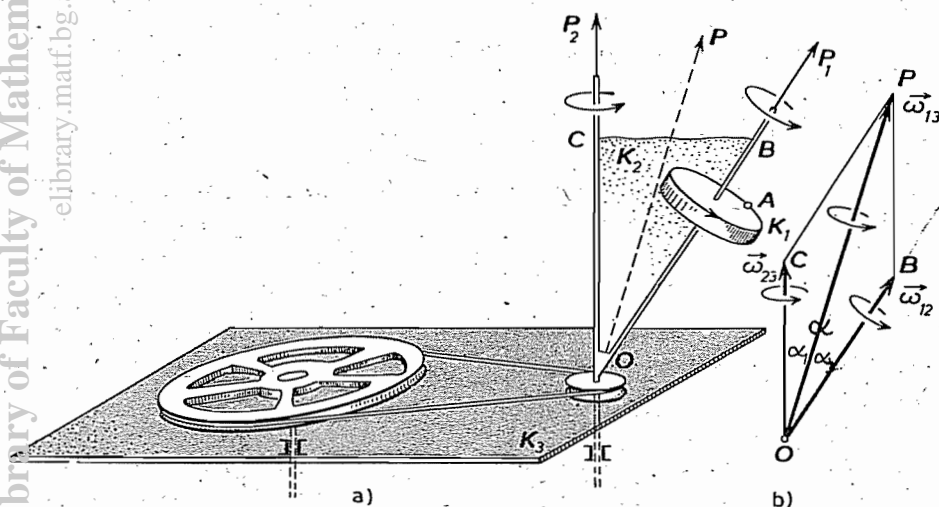
13.2. Слагање обртања. — Ако се тело K_1 обрће угаоном брзином ω_{12} око осе O_{12} , учвршћене у телу K_2 , које се обрће угаоном брзином ω_{23} око осе O_{23} , учвршћене у непомичном телу K_3 , онда је обртање тела K_1 око осе O_{23} сложено из два компонентна обртања око оса O_{12} и O_{23} . Брзина тачке A тела K_1 састоји се из релативне и преносне брзине:

$$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23} = [\vec{\omega}_{12}, \vec{r}_{12}] + [\vec{\omega}_{23}, \vec{r}_{23}], \quad (285)$$

где су \vec{r}_{12} и \vec{r}_{23} вектори положаја тачке A у односу на O .

Према положају обртних оса разликујемо три случаја слагања обртања: 1° обртине се осе секу, 2° обртине су осе паралелне и 3° обртине се осе укрштају. Трећи случај проучићемо засебно у члану 13.4.

1° Обртине се осе секу. — а) Нека се на штапу OB налази диск K_1 , који се око штапа обрће угаоном брзином ω_{12} . Штап OB везан је са штапом OC , који се обрће око осе OP_2 угаоном брзином ω_{23} . Оса OP_2 утврђена је у непомићном телу K_2 (сл. 176). Тачка A диска K_1 обрће се око штапа OB угаоном брзином ω_{12} и заједно са штапом OC угаоном брзином ω_{23} . Сложено кретање тачке A диска може се представити обртањем око осе OP , која пада у правац дијагонале паралелограма чије су стране угаоне брзине ω_{12} и ω_{23} . Оса OP је тренутна оса обртања. Да



Слика 176. — Слагање обртања око оса које се секу

бисмо доказали да је она заиста тренутна оса, изнађимо брзине тачке P услед угаоних брзина ω_{12} и ω_{23} . Брзина тачке P услед угаоне брзине ω_{12} може се представити моментом те брзине за тачку P :

$$\vec{v}_P' = [\vec{\omega}_{12}, \vec{OP}] = A \vec{n},$$

где је A површина паралелограма $OBPC$, а \vec{n} орт нормале на раван троугла OBP . Њена брзина услед угаоне брзине ω_{23} биће:

$$\vec{v}_P'' = [\vec{\omega}_{23}, \vec{OP}] = -A \vec{n}.$$

Пошто су обе брзине колинеарне, резултујућа брзина тачке P једнака је нули, што значи да је оса OP заиста тренутна оса. Из паралелограма угаоних брзина следе и ови односи:

$$\frac{\omega_{13}}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_{23}}{\sin \alpha_1} = \frac{\omega_{13}}{\sin \alpha}, \quad (286)$$

$$\frac{\omega_{12}}{\sin \alpha_1} = \frac{\omega_{23}}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_{13}}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{\omega_{13}}{\sin \alpha}$$

које смо срели при сабирању сила, па је угаона брзина $\vec{\omega}_{13}$ векторски збир угаоних брзина $\vec{\omega}_{12}$ и $\vec{\omega}_{23}$:

$$\vec{\omega}_{13} = \vec{\omega}_{12} + \vec{\omega}_{23}. \quad (287)$$

Да бисмо доказали да је брзина тачке A при оба обртања једнака брзини обртања око тренутне осе OP , угаоном брзином ω_{13} , узмимо уместо тачке A тачку B , која се налази на самој оси OP . Пошто је она на оси, њена је брзина услед угаоне брзине ω_{12} једнака нули, а услед брзине ω_{23} биће

$$\vec{v}_B'' = [\vec{\omega}_{23}, \vec{OB}] = A \vec{n},$$

где је A површина паралелограма $OBPC$. Она је управна на раван OBP . Њена брзина услед угаоне брзине ω_{13} биће

$$\vec{v}_B = [\vec{\omega}_{13}, \vec{OB}] = A \vec{n},$$

јер вектори угаоних брзина леже у истој равни. Што је важило за тачку B важиће и за сваку другу тачку тела K_1 . Брзина тачке A биће

$$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}.$$

Ако је дато n тела, од којих је последње *нејомично*, брзина тела K_1 одређена је векторским збиром

$$\vec{v}_{1n} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23} + \vec{v}_{34} + \dots + \vec{v}_{(n-1)n},$$

па се може представити обртањем око тренутне осе OP , чији је положај одређен угаоном брзином $\vec{\omega}_{1n}$, која је једнака векторском збиру

$$\vec{\omega}_{1n} = \vec{\omega}_{12} + \vec{\omega}_{23} + \vec{\omega}_{34} + \dots + \vec{\omega}_{(n-1)n}. \quad (288)$$

На основу изнетог можемо извести закључак:

Слајање обртања око оса које пролазе кроз једну нејомичну тачку своди се на обртање око осе која пролази кроз исту тачку. Угаона брзина обртања око те осе једнака је векторском збиру угаоних брзина свих комјонентних обртања. Дакле, сабирање обртања око оса које се секу у једној тачки своди се на сабирање вектора угаоних брзина.

Аксиди су *кружни конуси*, са врхом у непомичној тачки O . Додирна изводница је тренутна оса обртања, као што смо проучили код прецесионог кретања.

b) У члану 11.1. навели смо да се два *коначна* обртања не могу слагати као вектори у једно резултујуће обртање. Два коначна обртања око оса OA и OB слажу се

такође у једно обртање око осе OC , која пролази кроз исту тачку O , али не лежи у равни првих двеју оса обртања (сл. 177). У члану 8.4. представили смо Ојлеров образац (129) као кватернионски производ јединичних кватерниона. Ставимо ли у том обрасцу

уместо \vec{p} вектор $\vec{\rho}_1$, онда је вектор $\vec{\rho}_2$ постао обртањем вектора $\vec{\rho}_1$ око осе OA за угао φ_1 у директном смеру, па је

$$\vec{\rho}_2 = Q_1' \vec{\rho}_1 \overline{Q_1'}$$

где су

$$Q_1' = w_{01} + \vec{w}_1; \quad \overline{Q_1'} = w_{01} - \vec{w}_1;$$

$$w_{01} = \cos 1/2 \varphi_1; \quad w_1 = \sin 1/2 \varphi_1.$$

Вектор $\vec{\rho}_3$ постао је обртањем вектора $\vec{\rho}_2$ у директном смеру око осе OB за угао φ_2 , па је

$$\vec{\rho}_3 = Q_2' \vec{\rho}_2 \overline{Q_2'}$$

Унесемо ли у овај израз вредност за $\vec{\rho}_2$, биће:

$$\vec{\rho}_3 = Q_2' (Q_1' \vec{\rho}_1 \overline{Q_1'}) \overline{Q_2'}$$

па, с обзиром да асоцијативни закон кватернионског производа важи*, добијамо

$$\vec{\rho}_3 = Q_2' Q_1' \vec{\rho}_1 \overline{Q_1'} \overline{Q_2'}$$

Кватернионски производ јединичних кватерниона опет је јединични кватернион**, те је $Q_3' = Q_2' Q_1'$ и $\overline{Q_3'} = \overline{Q_1'} \overline{Q_2'}$; стога је

$$\vec{\rho}_3 = Q_3' \vec{\rho}_1 \overline{Q_3'}$$

то јест добили смо сличан образац*** као (138), који показује да је резултујуће обртање крутог тела око двеју оса које пролазе кроз непомићну тачку O у ствари обртање око треће осе, која пролази кроз исту тачку. *Како за кватернионски производ не важи закон комутирације* (Статика, обр. 344), *променом реда обртања мења се резултујуће обртање.*

Скалар и вектор јединичног кватерниона можемо одредити на овај начин:

$$Q_3' = Q_2' Q_1' = w_{03} + \vec{w}_3 = (w_{02} + \vec{w}_2) (w_{01} + \vec{w}_1) = w_{01} w_{02} + w_{01} \vec{w}_2 + w_{02} \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \vec{w}_1.$$

Кватернионски производ је

$$\vec{w}_2 \vec{w}_1 = -(\vec{w}_2, \vec{w}_1) + [\vec{w}_2, \vec{w}_1],$$

па је скалар кватерниона

$$w_{03} = w_{01} w_{02} - w_1 w_2 \cos \alpha,$$

где је α угао између оса обртања.

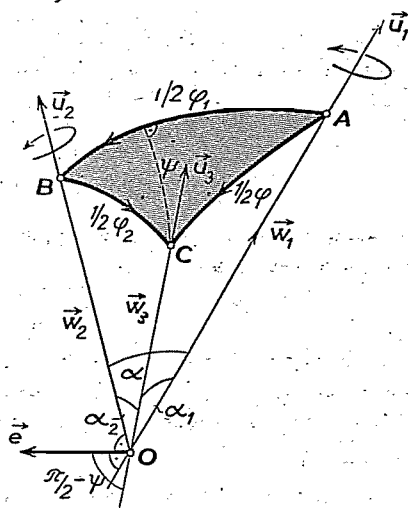
Вектор кватерниона \vec{w}_3 биће

$$\vec{w}_3 = w_{01} \vec{w}_2 + w_{02} \vec{w}_1 + [\vec{w}_2, \vec{w}_1].$$

* $\vec{i} \vec{j} \vec{k} = \vec{i} \vec{j} \vec{k} = \vec{i} \vec{j} \vec{k} = 1$ (Статика, обр. 343)

** $Q_3' = Q_1' Q_2' = (\cos \varphi + \vec{i} \sin \varphi) (\cos \theta + \vec{j} \sin \theta) = \cos \varphi \cos \theta + \vec{i} \sin \varphi \cos \theta + \vec{j} \sin \theta \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi \sin \theta$; $N_1 = 1$; $N_2 = 1$; $N_3 = 1$.

*** Страна 110.



Слика 177. — Слагање коначних обртања

Помножимо ли га скаларно ортом \vec{e} , који је управан на раван оса обртања OA и OB , биће:

$$(\vec{w}_3, \vec{e}) = w_3 \sin \psi = ([w_2, w_1], \vec{e}) = w_1 w_2 \sin \alpha,$$

где је ψ угао који чини оса OC са равни оса OA и OB . Унесемо ли у овај израз вредности за скаларе и векторе јединичних кватерниона Q'_1 , Q'_2 и Q'_3 , биће:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi}{2} &= \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \alpha; \\ \sin \frac{\varphi}{2} \sin \psi &= \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \alpha, \end{aligned}$$

те видимо да важе обрасци сферне тригонометрије за јединичну сферу (чл. 10.3), па постоји и овај однос

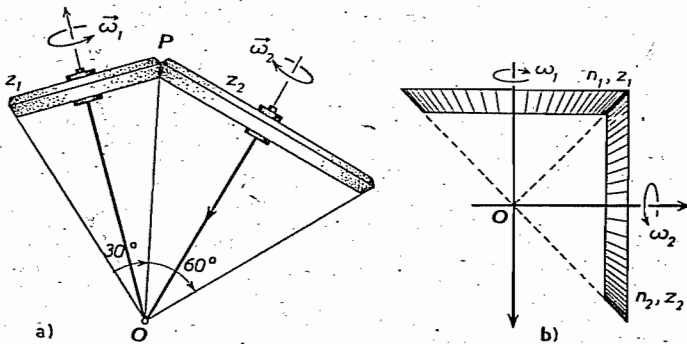
$$\frac{\sin \frac{1}{2} \varphi_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\sin \alpha}.$$

Сабирање коначних обртања може се, дакле, теоријски представити сабирањем лукова великих кругова јединичне сфере (сл. 177). Резултујући лук \widehat{AC} представља резултујуће обртање. Поларни сферни троугао $OABC$ својим шеменима одређује ортове оса обртања, \vec{u}_1 ; \vec{u}_2 ; \vec{u}_3 .

Сабирање коначних обртања може се представити као множење два вектора.*

Примери. — 79. а) Дата су два захваћена конична зупчаника са угловима отвора конуса 30° и 60° (сл. 178). Први зупчаник обрће се са 30 обртаја у минути. Одредити број обртаја другог зупчаника. У коме су односу бројеви зубаца оба зупчаника?

б) Ако су осе зупчаника управне (сл. 178 б), а бројеви зубаца задовољавају услов из претходног задатка, одредити релативну угаону брзину зупчаника.



Слика 178. — Конични зупчаници: а) са косим осама и б) са управним осама

Решење. — а) Осе зупчаника секу се под углом 45° . Оса OP је релативна (третутна) оса обртања оба покретна аксоида. По њој се додирују зупци оба зупчаника.

Из троугла угаоних брзина следи

$$\frac{\omega_1}{\sin 30^\circ} = \frac{\omega_2}{\sin 15^\circ},$$

па је преносни однос

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

* М. Lagally: Vektor-rechnung, 1934. године, чл. 153.

где z_i значи број зубаца зупчаника, те је

$$n_2 \approx 15 \text{ o/min.}$$

b) Релативна угаона брзина је

$$\omega_r = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \omega_1 \sqrt{1+k^2} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{5},$$

где је k преносни фактор:

$$k = \frac{1}{i} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}.$$

80. Точак, полупречника r , обиђе у минути пет пута обим круга полупречника R (сл. 179).

Одредити резултујућу угаону брзину обртања точка.

Решење. — Кретање се може сматрати котрљањем конуса OAB по хоризонталној равни. Тренутна оса је OA .

Из релације

$$2R\pi n = 2r\pi n_1,$$

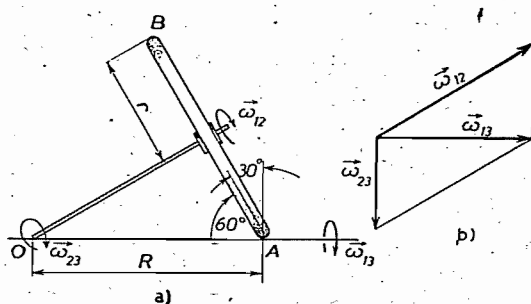
због $r = \frac{1}{2}R$, биће $n_1 = 10 \text{ o/min}$, па је

$$\omega_{12} = \frac{1}{3}\pi.$$

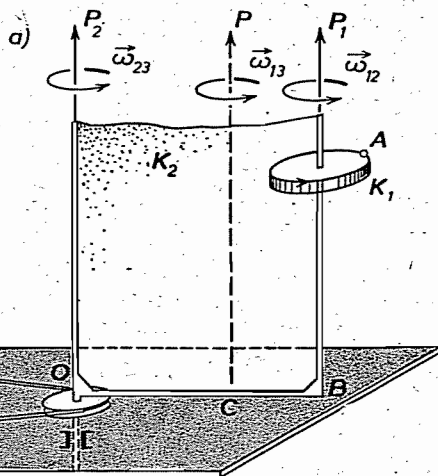
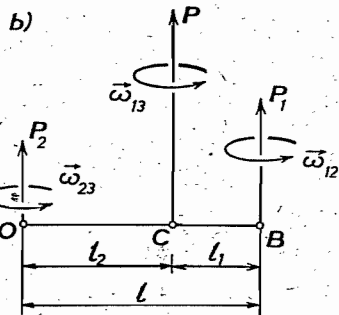
Из троугла угаоних брзина следи

$$\omega_{13} = \omega_{12} \cos 30^\circ = \frac{1}{6}\pi \sqrt{3} \text{ и } \omega_{23} = \frac{1}{6}\pi.$$

2° Обрћине су осе паралелне. — Нека се на штапу BP_1 налази диск K_1 , који се обрће око штапа угаоном брзином ω_{12} (сл. 180). Штап BP_1



Слика 179. — Тарни точак



Слика 180. — Слагање истосмерних обртања око паралелних оса

круто је везан штапом BO са штапом OP_2 , који се обрће угаоном брзином ω_{23} . Обе угаоне брзине су истосмерне. Тачка A диска K_1 обрће се око осе BP_1

угаоном брзином ω_{12} , а заједно са штапом OP_1 око штапа OP_2 угаоном брзином ω_{23} . Сложено кретање тачке A диска може се представити једним обртањем око осе CP , паралелне датим осама, угаоном брзином ω_{13} , која је једнака алгебарском збиру угаоних брзина компонентних обртања:

$$\omega_{13} = \omega_{12} + \omega_{23}. \quad (289)$$

Оса CP је тренутна оса обртања. Она пролази кроз тачку C , која дели растојање паралелних оса (l) обрнуто сразмерно интензитетима угаоних брзина.

Да докажемо да је оса CP заиста тренутна оса обртања, узмимо на њој тачку P . Пошто се она налази на оси, њена је брзина услед угаоне брзине ω_{12} :

$$v_P' = \omega_{12} l_1$$

и управна је на раван у којој леже све три осе. На исти начин одредимо и брзину тачке P услед угаоне брзине ω_{23} :

$$v_P'' = -\omega_{23} l_2.$$

Пошто је тачка P на тренутној оси, то је њена брзина једнака нули, те мора бити испуњен услов

$$\frac{\omega_{12}}{l_2} = \frac{\omega_{23}}{l_1} = \frac{\omega_{13}}{l}, \quad (290)$$

што значи да тачка C дели спојни штап OB обрнуто сразмерно интензитетима угаоних брзина.

Да бисмо доказали да је брзина тачке A услед оба обртања једнака брзини обртања око тренутне осе, узмимо на оси BP_1 неку тачку D . Пошто је она на оси, њена је брзина услед угаоне брзине ω_{12} једнака нули, а услед угаоне брзине ω_{23} износи

$$v_D'' = \omega_{23} l.$$

С обзиром на (290), њена брзина услед брзине ω_{13} биће:

$$v_D = \omega_{13} l_1 = l_1 (\omega_{12} + \omega_{23}) = v_D'',$$

те је угаона брзина једнака алгебарском збиру угаоних брзина:

$$\omega_{13} = \omega_{12} + \omega_{23}.$$

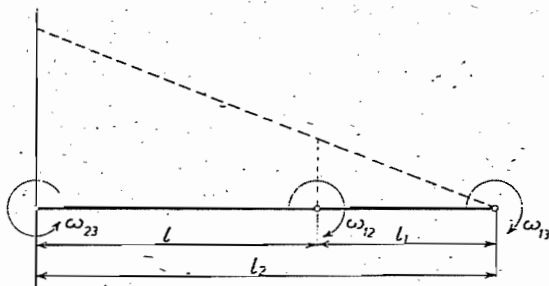
На основу изнетог можемо исказати овај став:

Два истосмерна обртања око паралелних оса слажу се у једно обртање око осе која је паралелна датим осама, а налази се између њих. Та оса ближе је оси чији је интензитет угаоне брзине већи и дели растојање оса обрнуто сразмерно интензитетима угаоних брзина. Обртање око те осе врши се угаоном брзином чији је интензитет једнак збиру интензитетних угаоних брзина компонентних обртања, и у истом смеру.

Као што видимо, за овај случај слагања обртања важи закон слагања паралелних сила из статике.

Потпуно и на исти начин долазимо и до слагања двају обртања око паралелних оса ако су угаоне брзине *супротних смерова*. За њих важи овај став:

Два обртања супротних смерова око паралелних оса слажу се у једно обртање око осе која је паралелна датим осама. Она се налази са стране осе угаоне брзине веће интензитета и дели растојање оса обрнуто сразмерно интензитетима угаоних брзина. Обртање око те осе врши се угаonom брзином чији је интензитет једнак разлици интензитета угаоних брзина компонентних обртања и у смеру веће угаоне брзине (сл. 181). Дакле, за сабирање ових обртања важи закон сабирања паралелних сила супротних смерова:

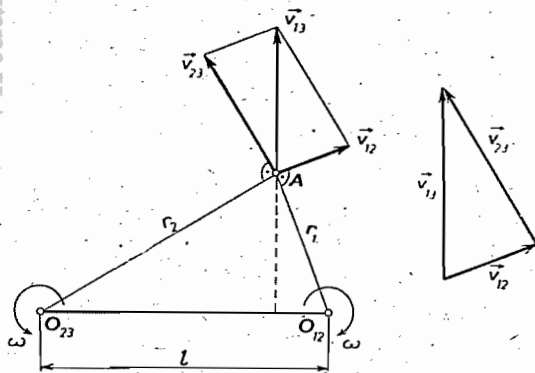


Слика 181. — Сабирање обртања супротних смерова око паралелних оса

$$\omega_{13} = \omega_{12} - \omega_{23}; \quad \frac{\omega_{12}}{l_2} = \frac{\omega_{23}}{l_1} = \frac{\omega_{13}}{l}. \quad (291)$$

У оба случаја обртања око паралелних оса аксоиди су *цилиндри*. Додирна изводница је тренутна оса обртања.

Специјалан случај овог слагања јесте када су угаоне брзине компонентних обртања истих интензитета а супротних смерова. Из претходног става увиђамо да је резултујућа угаона брзина једнака нули, а из обрасца (291) уочавамо да је тренутна оса у бесконачности. Као што смо раније навели, translација је специјалан случај обртања око осе која се налази у бесконачности.



Слика 182. — Кинематички (обртни) спрег

Ако је тачка A тела K_1 одређена векторима \vec{r}_1 и \vec{r}_2 (сл. 182), онда су њене брзине

$$v_{12} = -r_1 \omega; \quad v_{23} = r_2 \omega,$$

па из троугла брзина следи да је брзина \vec{v}_{13} управна на растојање обртних оса. Њен интензитет је

$$v_s = v_{13} = l \omega, \quad (292)$$

Образац (292) можемо извести и на овај начин: из троугла брзина, по косинусној теорему, биће:

$$v_{13}^2 = v_{12}^2 + v_{23}^2 + 2 v_{12} v_{23} \cos \alpha,$$

где је α угао између вектора брзина. Из троугла $\triangle O_{12} A O_{23}$, по истој теорему, биће:

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta,$$

где је θ угао између потега r_1 и r_2 . Како је $\alpha + \theta = 180^\circ$, а с обзиром да су брзине управне на потеге, биће

$$v_{13}^2 = \omega^2 (r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta) = l^2 \omega^2.$$

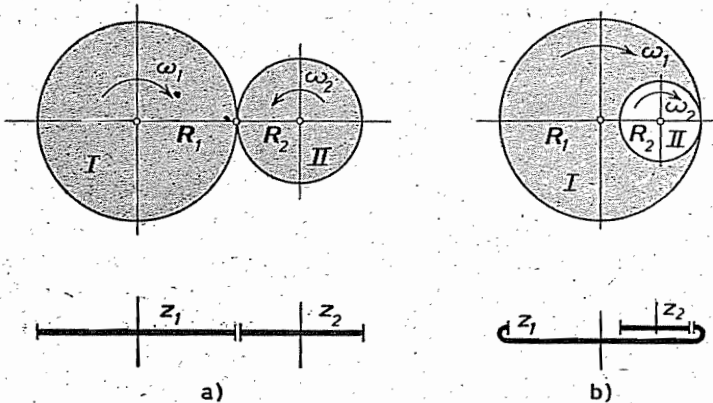
Ова транслаторна брзина је иста за све тачке крутог тела.

Два обртања око паралелних оса угаоним брзинама истих интензитета али супротних смерова слажу се у транслацију управну на раван ових оса. Интензитет транслаторне брзине једнак је производу угаоне брзине и најкраће растојања оса.

Оваква два обртања образују кинематички (обртни) сиреј који је једнак одређеној транслацији. Са обртним спрегом можемо оперисати потпуно на исти начин као и са спрегом сила.

Примери. — 81. Дата су два захваћена цилиндрична зупчаника, полупречника R_1 и R_2 (сл. 183). Одредити однос њихових угаоних брзина, као и релативну брзину зупчаника (2) према зупчанику (1) при спољашњем и унутрашњем захватању.

Решење. — Кретање ових зупчаника може се схватити као котрљање двеју цилиндричних



Слика 183. — Захваћени цилиндрични зупчаници — а) спољашње, б) унутрашње хватање

двичних површина са паралелним осама. Оба цилиндра додирују се по изводници паралелној обртним осама. Додирна тачка P има улогу релативног пола, те сва три пола (O_1, O_2, P) леже на једној правој.

При спољашњем захваћању (сл. 183 а) угаоне брзине су у односу

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_2}, \text{ то јест } i = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1}, \text{ па је } |\omega_2| > |\omega_1|.$$

Релативна угаона брзина зупчаника (2) у односу на зупчаник (1) једнака је

$$\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1 = -\omega_1 (R_1 + R_2)/R_2.$$

При унутрашњем захваћању (сл. 183 б) однос угаоних брзина је

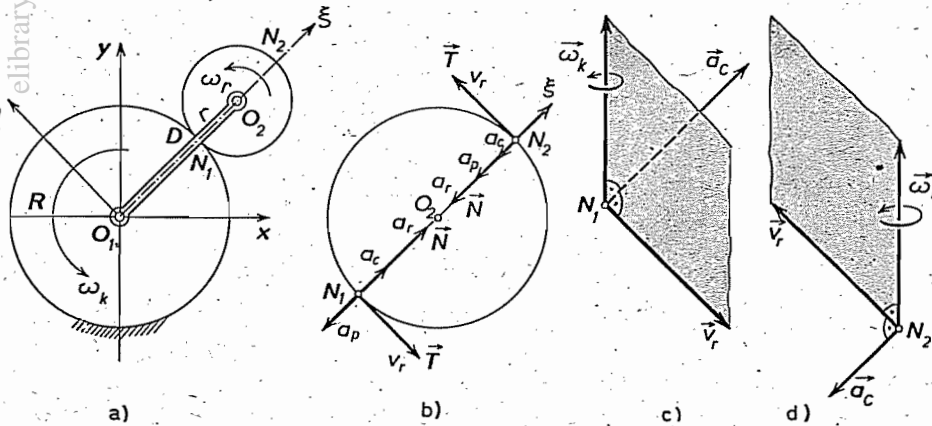
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}, \text{ те је } i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}, \text{ па је } \omega_2 > \omega_1.$$

Релативна угаона брзина биће

$$\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1 = \omega_1 (R_1 - R_2)/R_2.$$

На пример, ако је $n_1 = 100$ о/мин, $z_1 = 60$; $z_2 = 20$ зубаца, онда је $n_2 = 300$ о/мин.

82. Одредити брзине и убрзања тачака N_1 и N_2 зупчаника (2) полупречника r , ако се он котрља без клизања по непокретном зупчанику (1), полупречника R , када се криваја (k) $O_1 O_2$ обрће једнолико, угаоном брзином ω_k (сл. 184 а)*. Специјално за однос $r/R = 1/2$, $R = 4$ cm; $n_k = 30$ о/мин.



Слика 184. — Планетски зупчаници — спољашње захваћање

Решење. — Овај преносник је *планетски*, јер подсећа на кретање планете (зупчаника 2), у односу на непокретно „сунце“ (зупчаник 1). Криваја има улогу „Бутнове гравитационе силе“ између Сунца и планете (сателита).

Угаона брзина криваје је преносна угаона брзина, $\omega_p = \omega_k$, а угаона брзина сателита према криваји је релативна угаона брзина, $\omega_{pk} = \omega_r$, док је апсолутна угаона брзина сателита (2) према зупчанику (1), $\omega_a = \omega_{21} = \omega_2$. Тренутни пол (P) је на месту додира зупчаника, а пошто тачка O_2 припада и зупчанику и криваји, њена брзина је

$$v_2 = r \omega_2 = (R + r) \omega_k; \quad \omega_a = \omega_r + \omega_p; \quad \omega_2 = \omega_k + \omega_{2k}.$$

Преносни однос спољашње спреге ових зупчаника је $i = -r/R$, па се добија образац

$$i = \frac{-\omega_k}{\omega_2 - \omega_k} = \frac{-n_k}{n_2 - n_k}; \quad \omega_{2k} = \omega_2 - \omega_k = \frac{-\omega_k}{i}.$$

* R. Willis: Principles of mechanisms. London 1841. године.

Овај образац за угаоне брзине (односно за бројеве обртаја) важи и за унутрашње захватање, само треба узети преносни однос са својим предзнаком (– за спољашње и + за унутрашње захватање). Осим тога, сваку угаону брзину (односно минутни број обртаја) треба узети са њеним предзнаком, јер је образац* изведен под претпоставком директног обртања криваје и зупчаника (2).

Овде су

$$i = -1/2; \quad \omega_k = \pi \text{ sec}^{-1}; \quad \omega_2 = 3\pi \text{ sec}^{-1}; \quad \omega_{2k} = \omega_r = 2\pi \text{ sec}^{-1},$$

па су за тачку N_1 :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_r + \vec{v}_p = (r\omega_r - R\omega_k)\vec{T} = 0; \quad \vec{a} = (a_r - a_p + a_C)\vec{N} = (r\omega_r^2 - R\omega_k^2 + 2\omega_k v_r)\vec{N} = 12\pi^2 \vec{N};$$

за тачку N_2 :

$$\vec{v}_2 = 12\pi \vec{T}; \quad \vec{a} = -(a_r + a_p + a_C)\vec{N} = -24\pi^2 \vec{N}.$$

Смерови компонентних убрзања показани су на слици 184.

83. Криваја (k) сложеног диференцијалног преносника обрће се са 300 o/min у директној смеру, а погонски зупчаник (1) са 200 o/min у индиректној смеру. Одредити број обртаја и смер обртања зупчаника (4) ако су бројеви зубаца зупчаника z_i (редом) = 60; 20; 30; 50.

Решење. — Ако је код планетског преносника покретан и зупчаник „сунце“, онда се преносник назива *диференцијални*. Криваја је први, а зупчаник „сунце“ други погонски елемент. Апсолутној угаоној брзини сателита планетског преносника треба додати и угаону брзину услед обртања „сунца“, па је

$$\omega_2 = \frac{(i-1)}{i} \omega_k + \frac{\omega_1}{i}; \quad i = \frac{\omega_1 - \omega_k}{\omega_2 - \omega_k}.$$

Овај образац може се применити за сваки сателит спреге, те је

$$i = \frac{\omega_1 - \omega_k}{\omega_2 - \omega_k} = \frac{n_1 - n_k}{n_2 - n_k}.$$

Слика 185. — Сложени диференцијални преносник

Овде су: n_k број обртаја криваје, n_1 број обртаја зупчаника „сунце“, n_2 број обртаја сателита, i укупни преносни однос од „сунца“ ка сателиту. Све вредности треба узимати са њеним предзнаком.

За дате податке је

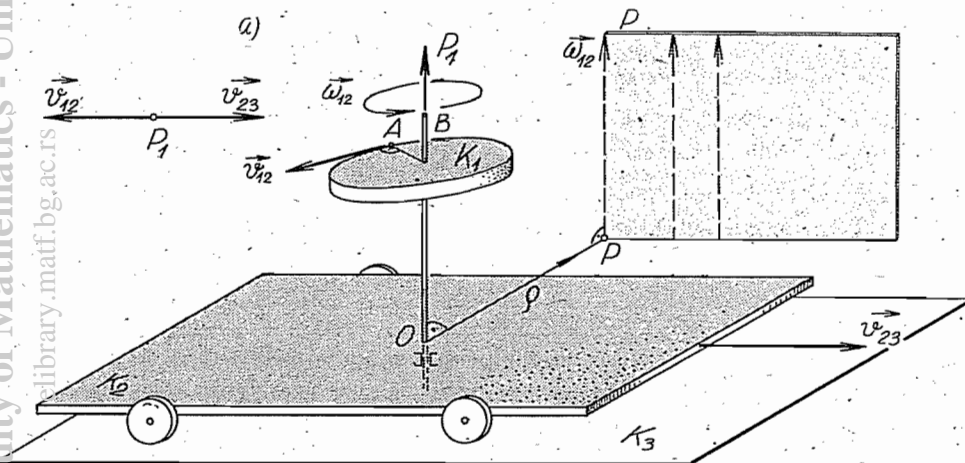
$$i = (n_1 - n_k)/(n_2 - n_k) = (-200 - 300)/(n_2 - 300) = (-z_2/z_1) \cdot (-z_4/z_3) = 20 \cdot 50/60 \cdot 30 = 5/9 = -500/(n_2 - 300), \text{ па је } n_2 = -600 \text{ o/min.}$$

13.3. Слагање обртања и транслације. — Нека се тело K_1 обрће угаоном брзином ω_{12} око осе у телу K_2 , и нека се тело K_2 креће транслаторно према телу K_3 , које је непомично, онда је кретање тела K_1 према телу K_3 сложено из два компонентна кретања: обртања и транслације. Према углу који транслаторна брзина гради са осом обртања разликоваћемо три случаја: 1° *транслација је ујавна на осу обртања*, 2° *транслација је паралелна оси обртања*, и 3° *транслација је коса према оси обртања*.

* За сложени планетски преносник биће:

$i = -\omega_k/(\omega_s - \omega_k)$, где је ω_s угаона брзина сателита, а i је укупни преносни однос од „сунца“ ка сателиту чија се брзина тражи.

1° Транслација је ујавна на осу обртања. — На вагону K_2 , који се транслаторно креће по шинама K_3 , круто је учвршћен штап OB , око кога се обрће диск K_1 угаоном брзином ω_{12} (сл. 186 а). Кретање тачке A диска сложено је из обртања око осе OB и транслације која је управна на осу обртања.



Слика 186 а) — Слагање обртања и транслације управне на осу обртања

Услед обртања њена брзина је

$$\vec{v}_{12} = [\vec{R}, \vec{\omega}_{12}]$$

и управна је на раван OAB , па лежи у равни диска.

Услед транслаторног кретања тела K_2 тачка A имаће брзину \vec{v}_{23} , тако да је њена апсолутна брзина

$$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23} \quad (293)$$

Кретање тачке A , дакле и диска K_1 , је *компланано*. Свако компланано кретање може се представити обртањем око тренутне осе (чл. 9) која је паралелна обртној оси OB . Све тачке тренутне осе имају брзину једнаку нули, $v_{13} = 0$, па за њих мора бити испуњен услов

$$v_{12} = -v_{23} = \omega_{12} \rho,$$

где је ω_{12} угаона брзина обртања око осе, а ρ одстојање тренутне осе од осе обртања OB . Тачка B осе OB има само транслаторну брзину v_{23} , али,

сматрајући да се она обрће око тренутне осе, њена брзина једнака је производу угаоне брзине обртања око те осе, ω'_{12} , и растојања ρ :

$$v_{23} = \omega'_{12} \rho,$$

па је

$$\omega'_{12} = \omega_{12}. \quad (294)$$

На тај начин можемо извести овај закључак:

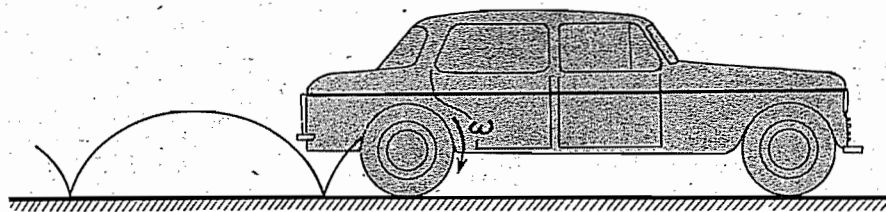
Обрћање тела око осе и трансляција управна на њу осу слажу се у обрћање са истом угаоном брзином око осе паралелне првобитној осе, само померене за њојше

$$\rho = \frac{v_{23}}{\omega_{12}} \quad (295)$$

у смеру обрћања.

Да ли ће оса $P-P$ бити лево или десно од првобитне осе, зависи од смера угаоне брзине ω_{12} . Геометријско место тренутних оса $P-P$ јесте раван паралелна трансляторној брзини.

Овај случај слагања кретања имамо код кола. Точак K_1 обрће се угаоном брзином ω_{12} око осовине везане са колима K_2 , која се транслаторно крећу по путу K_3 . Тренутна оса обртања је у додирној тачки P тачка и пута. Све тренутне осе леже, дакле, у самој равни пута. Тренутна оса је паралелна осовини тачкова, само је померена за величину R , једнаку полупречнику тачка (сл. 186 б).



Слика 186 б) — Кретање кола (аутомобила)

Слагање обртања и translације управне на осу обртања идентично је са слагањем силе и спрега управног на силу, као што смо видели у Статици (чл. 15.2).

2° *Транслација је паралелна осе обрћања.* — Нека се тело K_1 обрће око осе O_{12} угаоном брзином ω_{12} а тело K_2 се креће транслаторно, брзином v_{23} према непомићном телу K_3 (сл. 187). Транслаторна брзина тела K_2 паралелна је осе обртања O_{12} , која је у самом телу K_2 . Брзина производне тачке A тела K_1 , које изводи сложено кретање (*обрћање око осе и трансляцију заједно са телом K_2*), састоји се из брзине обртања око осе и брзине translације у правцу саме осе. Прва је њена релативна брзина,

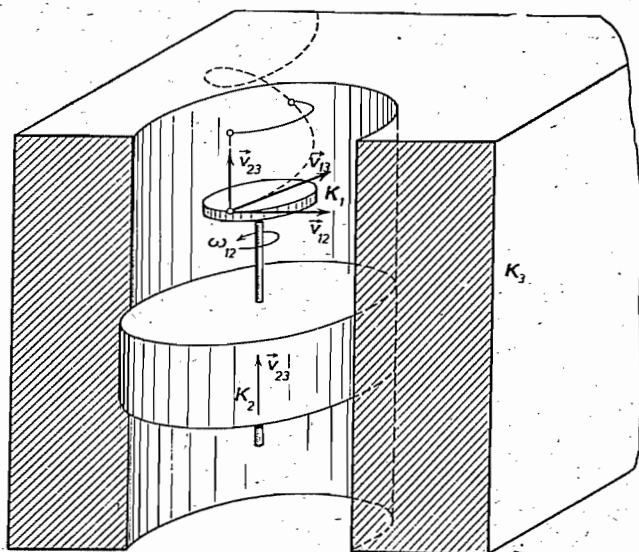
друга је преносна брзина, па је апсолутна брзина тачке A једнака векторском збиру компонентних брзина:

$$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}. \quad (296)$$

Квадрат брзине је

$$v_{13}^2 = v_{12}^2 + v_{23}^2 = v_{23}^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_{12}}{v_{23}} \right)^2 R^2 \right],$$

где је R растојање тачке од обртне осе.



Слика 187. — Слагање обртања и translације паралелне осе обртања. Завртањ

Из троугла брзина биће

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{12}}{v_{23}} = \frac{\omega_{12}}{v_{23}} R, \quad (297)$$

па је интензитет апсолутне брзине

$$v_{13} = v_{23} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}. \quad (298)$$

Ако је угао θ сталан, биће сталан и однос (297), па тачка A кругог тела K_1 описује *завојну линију* (*завојницу*), нагиба $\alpha = 1/2 \pi - \theta$.

Кретање сложено из обртања и translације паралелне осе обртања јесте *завојно кретање*, *завршањ*. Оса O_{12} , која припада телу K_2 , јесте *оса завршања*.

Параметар завртња је

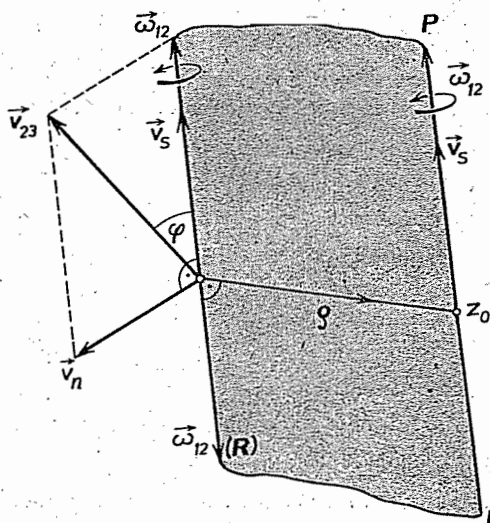
$$f = \frac{v_{23}}{\omega_{12}} = \frac{v_s}{\omega} \quad (299)$$

Када се угаона брзина мења и по правцу и по интензитету тако да је испуњен услов паралелности $\vec{\omega}_{12} \parallel \vec{v}_{23}$, онда говоримо о тренутном завртњу и о тренутној оси завртња.

3^e Транслација је коса према оси обртања. — Ако се круто тело K_1 обрће угаоном брзином ω_{12} око осе O_{12} у телу K_2 , које се транслаторно креће према телу K_3 , онда произвољна тачка A тела K_1 изводи сложено кретање: обртање око осе и транслацију са телом K_2 . Правац транслације је кос према обртној оси. Ако брзину транслације \vec{v}_{23} разложимо у две компоненте: у правцу осе обртања (\vec{v}_s) и управно на њу (\vec{v}_n), онда из троугла брзина (сл. 188) следи

$$v_s = v_{23} \cos \varphi; \quad v_n = v_{23} \sin \varphi, \quad (299')$$

где је $\varphi = \theta$ угао између правца транслације и осе обртања. Пошто је \vec{v}_n транслаторна брзина, која је управна на обртну осу, она се са обртањем слаже у обртање око нове осе PP , паралелне првобитној (чл. 13.3. 1^o), која је удаљена за потег



$$\rho = \frac{v_{23} \sin \varphi}{\omega_{12}} \quad (300)$$

На овај начин кретање се svelo на обртање око нове осе PP и на транслацију (брзине $v_{23} \cos \varphi$) паралелну оси обртања. Овај случај је већ изнет (2^o), па се та кретања слажу у завојно кретање око осе PP , осе завртња, са параметром

$$f = \frac{J_2}{J_1} = \frac{(\vec{v}_{23}, \vec{\omega}_{12})}{\omega_{12}^2} = \frac{v_{23} \cos \varphi}{\omega_{12}} = \frac{v_s}{\omega} \quad (301')$$

Слика 188. — Слагање обртања и транслације косе према обртној оси

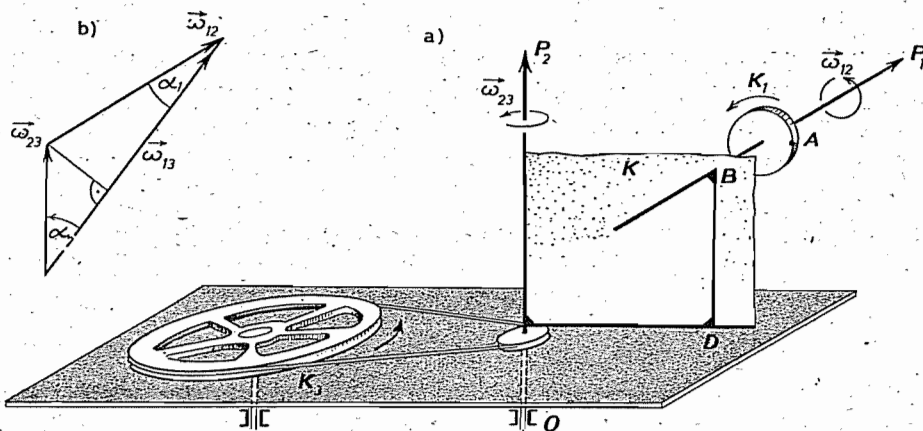
Дакле, можемо рећи ово:

Обрћање и трансляција коса према обртној оси слажу се у завојно кретање (заврћањ) око осе која је паралелна првобитној оси, само померена за величину ρ одређену изразом (300). Транслаторна брзина заврћања одређена је изразом (299), а угаона брзина остала је иста.

Слагање обртања и трансляције косе према обртној оси слично је редукцији просторној система сила (шорзера) на канонски вид — динаму. Транслаторна брзина одговара главном моменту, а угаона брзина главном вектору просторног система сила. Оса заврћања одговара централној оси система, а тачка Z_0 Хамилтоновом центру (в. Статику, чл. 26.4).

13.4. Слагање обртања око укрштених оса. — Проблем слагања обртања око укрштених оса аналоган је проблему редукције укрста сила на динаму (Статика чл. 27.2).

На штапу BP_1 налази се диск K_1 , који се око штапа обрће угаоном брзином ω_{12} . Штап BP_1 круто је везан помоћу штапова BD и OD са штапом OP_2 , који се обрће угаоном брзином ω_{23} у односу на непокретно тело K_3 (сл. 189а). Тачка A диска K_1 обрће се око осе BP_1 , угаоном брзином ω_{12} , и заједно с њом око штапа OP_2 , угаоном брзином ω_{23} . Њено кретање је, дакле, сложено из два обртања око укрштених оса BP_1 и OP_2 . Најкраће растојање укрштених оса је l , а угао укрштања је α .



Слика 189. — Слагање обртања око укрштених оса

Из тачке (пола) пренесимо, по правцу, смеру и величини, у извесној размери, векторе угаоних брзина, онда је угаона брзина обртања тачке A диска према телу K_3 представљена векторским збиром угаоних брзина (сл. 189b):

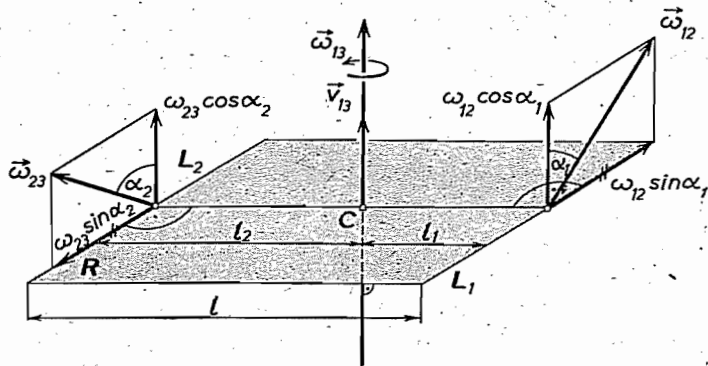
$$\vec{\omega}_{13} = \vec{\omega}_{12} + \vec{\omega}_{23},$$

(302)

те постоји однос

$$\frac{\omega_{12}}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_{23}}{\sin \alpha_1} = \frac{\omega_{13}}{\sin \alpha}. \quad (303)$$

Пошто ове три угаоне брзине образују троугао, носачи угаоних брзина, то јест обртне осе BP_1 и OP_2 , пројцираће се на раван (R) , управну на $\vec{\omega}_{13}$, као две паралелне праве линије, L_1 и L_2 (сл. 190), на растојању l једнаком најкраћем растојању укрштених оса.



Слика 190. — Оса завртња је управна на најкраће растојање укрштених оса

Ако угаоне брзине $\vec{\omega}_{12}$ и $\vec{\omega}_{23}$ разложимо у две компоненте: у правцу резултујуће угаоне брзине: $\omega_{12} \cos \alpha_1$, $\omega_{23} \cos \alpha_2$, и управно на њу: $\omega_{12} \sin \alpha_1$, $\omega_{23} \sin \alpha_2$, онда су ове друге две компоненте по интензитету једнаке, паралелне а супротних смерова, оне, дакле, образују *обртни спрег* (чл. 13.2), те врше translацију управну на раван тих оса; у овом случају управну на раван (R) .

Интензитет транслаторне брзине, с обзиром на (303'), биће

$$v_s = v_{13} = l \omega_{12} \sin \alpha_1 = l \omega_{23} \sin \alpha_2 = \frac{\omega_{12} \omega_{23}}{\omega_{13}} l \sin \alpha. \quad (304)$$

Прве две компоненте су паралелне и могу се, према члану 13.2, сложити у резултујућу угаону брзину $\vec{\omega}_{13}$, чија оса дели најкраће растојање укрштених оса обрнуто сразмерно интензитетима угаоних брзина:

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= \omega_{12} \cos \alpha_1 + \omega_{23} \cos \alpha_2, \\ \frac{\omega_{13}}{l} &= \frac{\omega_{23} \cos \alpha_2}{l_1} = \frac{\omega_{12} \cos \alpha_1}{l_2}. \end{aligned} \quad (305)$$

Пошто транслаторна брзина \vec{v}_{13} представља обртни спрег, она се као слободни вектор може пренети на носач угаоне брзине $\vec{\omega}_{13}$, па су ова два вектора колинеарна.

На тај начин можемо поставити ово правило:

Два обрћања око укрштених оса своде се на заврћања. Оса заврћања уједна је на најкраће растојање укрштених оса (Möbius-ова теорема).

Параметар заврћања је

$$f = \frac{J_2}{J_1} = \frac{v_{13}}{\omega_{13}} = \frac{\omega_{12} \omega_{23}}{\omega_{13}^2} l \sin \alpha. \quad (306)$$

Из израза (303), с обзиром на величину v_{13} , може се поставити и овај однос:

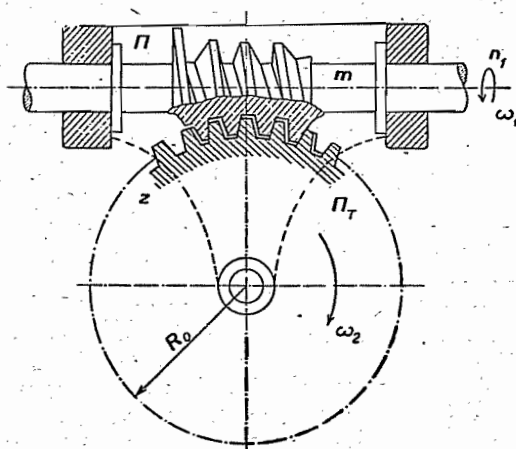
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_{23} \cos \alpha_2}{\omega_{13} \cos \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}. \quad (307)$$

Обрнутим поступком може се свако завојно кретање (заврћањ) разложити на обрћања око две укрштене осе, слично *редукцији динаме на окрсиј сила* (Статика, чл. 27.3). Док је свођење обрћања око укрштених оса једнозначно одређено једним потпуно одређеним заврћњем, докле је редукција заврћања на два обрћања око укрштених оса многозначна, те се може извршити на бесконачно много начина, као што је показао *Rodrigues* (Rodrigues) у теорема:*

Сваки заврћањ може се разложити на бесконачно много начина у два обрћања. При том, шестострука зајремена шестраедра образована над обрћним осама инваријантна је и једнака другој главној инваријанци:

$$6V = J_2 = \omega_{13} v_s = \\ = \omega_{12} \omega_{23} l \sin \alpha = \text{const.}$$

Слагање два обрћања око укрштених оса у једно завојно кретање јавља се код *ујужној преносника*** (сл. 191), који се састоји из *заврћања* — *ујужа* (Π) и *зубчаника* — *ујужној тачка* (Π_T). Ако је завојница пужа m -хода, онда ће се при једном обрћају пужа пужни тачак обрнути за m/z обрћаја.



Слика 191. — Пужни преносник

* O. Rodrigues: „Des lois géométriques qui régissent le déplacement d'un système solide dans l'espace“, 1840.

** Д. Витас: Машински елементи, III књ., Београд 1953, стр. 160.

Преносни однос овог преносника биће:

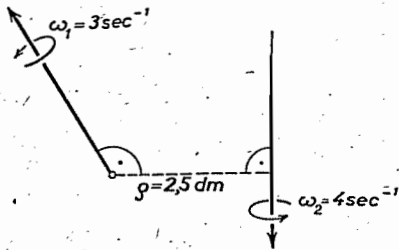
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1}{n_1 \frac{m}{z}} = \frac{z}{m}, \quad (308)$$

па је угаона брзина пужног зупчаника:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i} = k \omega_1 = \frac{m}{z} \omega_1; \quad n_2 = \frac{n_1}{i}, \quad (309)$$

где је k преносни фактор пужног преносника (реципрочна вредност преносног односа).

Пужни преносник примењује се много код универзалних подеоних апарата.



Слика 192. — Укрст угаоних брзина

На пример, ако је пуж једноходи ($m=1$) и чини 1 600 о/min, а пужни зупчаник има 40 зубаца, онда је $i=40$, па је $n_2=1\,600/40=40$ о/min.

Пример. — 84. Дата су два обртања око укрштених оса (сл. 192). Одредити положај осе резултујућег завртња и његов параметар.

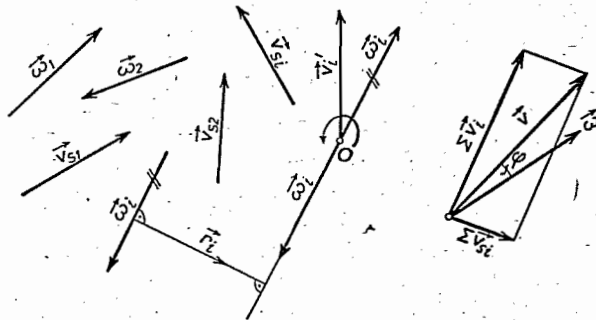
Решење. — Из наведених образаца следи:

$$\omega = 5 \text{ sec}^{-1}; \quad v = 6 \text{ dmsec}^{-1}; \quad \text{tg } \alpha_1 = 4/3; \quad \text{tg } \alpha_2 = 3/4;$$

$$l_1/l_2 = 16/9; \quad f = 6/5 \text{ dm}.$$

13.5. Слагање произвољног броја обртања и translација. — Истим поступком којим смо просторни систем произвољних сила редуковали на главни вектор и главни момент, то јест на *шорзер*, можемо и произвољан број обртања и translација свести на један једини завртња.

Нека је дат систем угаоних ($\vec{\omega}_i$) и транслаторних (\vec{v}_{si}) брзина, онда можемо изабрати једну редуccionу тачку (O) и у њој за сваку угаону



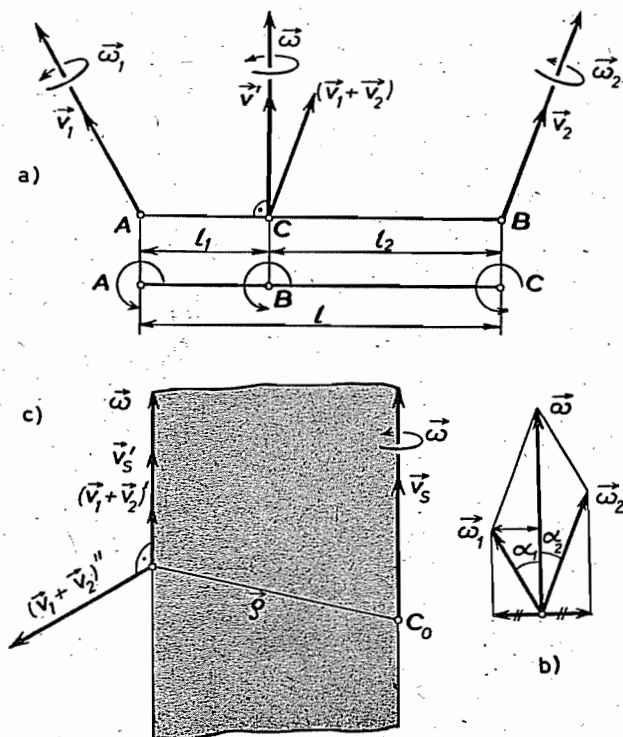
Слика 193. — Редуција система обртања и translација на завртња

брзину $\vec{\omega}_i$ додати по две угаоне брзине истих интензитета и праваца, али супротних смерова (сл. 193 а). На овај начин уместо једног обртања

добили смо $\vec{\omega}_i$. Међутим, како су два обртања по интензитету једнака, паралелна али супротног смера, она представљају обртни *сиреи*, то јест трансляцију управну на раван обртног спрега. На тај начин у тачки O добија се угаона брзина $\vec{\omega}_i$ и транслаторна брзина \vec{v}'_i . Поступимо ли свако са свим угаоним брзинама, добићемо у тачки O два прамена вектора: *угаоних брзина* $\vec{\omega}_i$, које можемо векторски сабрати у резултујући вектор $\vec{\omega}$, и *транслаторних брзина* \vec{v}'_i , које такође можемо сабрати у један једини вектор \vec{v} , коме треба додати збир транслаторних брзина \vec{v}_{si} . На тај начин систем се свео на *једну угаону* и *једну транслаторну брзину*:

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{\omega}_i; \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{\omega}_i, r_i] + \sum_{i=1}^{i=n} \vec{v}_{si}, \quad (310)$$

које у општем случају чине угао φ , па се, даље, на познати начин могу редукovati на завртањ.



Слика 194. — Слагање два завртања са укрштеним осама

Два завртања ($\vec{\omega}_1, \vec{v}_1$ и $\vec{\omega}_2, \vec{v}_2$) са укрштеним осама (сл. 194 a) свODE се на овај начин, такође на један једини завртањ. Угаоне брзине $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ са

укрштеним осама слажу се, према члану 13.4, у завртањ одређене угаоне брзине, $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, и одређене транслаторне брзине, \vec{v}_3' , са осом завртња управном на најкраће растојање оса компонентних завртња (сл. 194 б).

Транслаторне брзине, као слободне векторе, можемо сложити у једну транслаторну брзину, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, коју ћемо разложити у две компоненте: у правцу осе резултујућег завртња, $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)'$, и управно на њу, $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)''$.

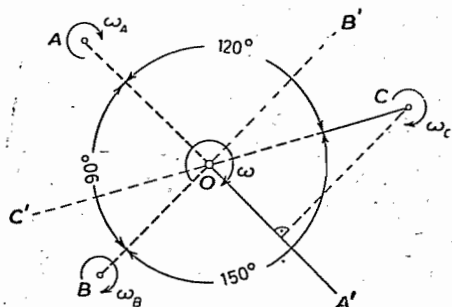
Ова друга компонента слаже се са угаоном брзином $\vec{\omega}$ у обртање око нове осе, померене паралелно првој за величину $|(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)''|/\omega$, а прва се као слободни вектор може пренети на ту осу (сл. 194 с).

На тај начин се два завртња са укрштеним осама слажу у један нови завртањ.

Ако је дат систем завртња, он се може поступно опет свести само на један једини завртањ.

Из изложеног увиђамо да се систем произвољних обртања и транслација, односно завртња, своди само на један једини завртањ. *Тиме још једном потврђујемо да је завојно кретање (завртањ) најопштије кретање кружног тела.*

Истовремено увиђамо да је оперисање са системима обртања и транслација истоветно са слагањем система сила и спрегова. У крајњем случају, ови се системи свде на динаму. Због тога се динама и назива динамички завртањ, јер је комбинација сила и спрегова, док је кинематички завртањ комбинација обртања и транслација. Угаона брзина одговара сили — она је клизећи вектор, а транслаторна брзина одговара спрегу сила, те је слободни вектор. Према томе и статика и кинематика су, као што смо у уводу Статике навели, гране геометрије вектора. Због ове аналогије данас се векторско интерпретирање проблема механике потпуно одомаћило.



Слика 195. — Разлагање вектора угаоне брзине

Примери. — 85. Угаону брзину ω за вертикалну осу кроз тачку O треба разложити у три компонентне брзине за паралелне осе кроз тачке A, B, C , чија су растојања

од тачке O позната, као и углови између потега (сл. 195): $\overline{OA} = 2 \text{ dm}$, $\overline{OB} = \sqrt{3} \text{ dm}$, $\overline{OC} = 4 \text{ dm}$.

Решење. — Узимајући моменте вектора угаоних брзина за потеге AA', BB' и CC' , биће:

$$\omega_A \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \omega_B \cdot \sqrt{3}; \quad \omega_A \cdot 2 = \omega_C \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ; \quad \omega_A \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \omega_B \cdot \sqrt{3} \sin 30^\circ,$$

па ћемо, с обзиром на везу

$$\omega = \omega_A + \omega_B + \omega_C,$$

добити вредности компонентних угаоних брзина:

$$\omega_A = \omega_C = \frac{1}{4} \omega; \quad \omega_B = \frac{1}{2} \omega.$$

86. Тело истовремено врши три обртања око координатних оса, угаоним брзинама показаним на слици 196. Одредити резултујуће кретање крутог тела.

Решење. — Пошто је кретање састављено из три обртања око оса које се секу у једној тачки, сложено кретање такође је обртање угаоном брзином

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \omega_1 \sqrt{14}$$

око осе која такође пролази кроз координатни почетак, а гради углове са координатним осама чији су косинуси:

$$\cos \alpha = 1/\sqrt{14}, \quad \cos \beta = 2/\sqrt{14}, \quad \cos \gamma = 3/\sqrt{14}.$$

87. Круто тело истовремено врши три обртања око оса које пролазе кроз тачке $A(0; 2; 3 \text{ dm})$, $B(-2; 0; 1 \text{ dm})$ и $O(0; 0; 0 \text{ dm})$. Прва оса је паралелна Ox -оси, а друга Oy -оси; трећа је Oz -оса.

Одредити транслаторну и угаону брзину завртња, као и његов параметар. Како гласи једначина осе завртња за непокретни систем $Oxyz$? Одредити продорну тачку осе кроз раван Oxy .

Решење. — Ако редукујемо угаоне брзине на координатни почетак O , угаона брзина биће $\omega = 12 \text{ sec}^{-1}$. Транслаторне брзине су: $v_x = 4$; $v_y = 0$, $v_z = 4 \cdot 2 - 8 \cdot 2 = -8$, па је $v = 4\sqrt{5} \text{ dm sec}^{-1}$. Ова два вектора граде угао φ , па је $\cos \varphi = \frac{(\vec{\omega}, \vec{v})}{\omega v} = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

Транслаторна брзина завртња је $v_s = \frac{(\vec{\omega}, \vec{v})}{\omega} = -\frac{8}{3} \text{ dm sec}^{-1}$.

Параметар завртња биће $f = v_s/\omega = -\frac{2}{9} \text{ dm}$.

Оса завртња је померена паралелно носачу угаоне брзине за величину

$$\rho = \frac{v \sin \varphi}{\omega} = \frac{\sqrt{41}}{9} \text{ dm}.$$

Једначина осе завртња је

$$\frac{x-2/9}{8} = \frac{y-2/3}{-4} = \frac{z-1/9}{8} \quad \text{или} \quad 9x-9z-1=0, \quad 18y+9z-13=0.$$

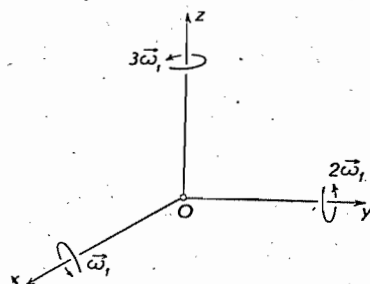
Продорна тачка осе кроз раван Oxy има координате $1/9 \text{ dm}$ и $13/18 \text{ dm}$.

88. Круто тело изводи истовремено три обртања око оса које пролазе кроз тачке $A(2; 1; 0 \text{ m})$, $B(3; 0; -2 \text{ m})$ и $C(2; 2; 0 \text{ m})$ угаоним брзинама:

$$\omega_A(2; 4; 1 \text{ sec}^{-1}), \quad \omega_B(1; 2; 4 \text{ sec}^{-1}), \quad \omega_C(-3; 1; -1 \text{ sec}^{-1}),$$

и транслацију брзином v_s чије су пројекције на координатне осе $(3; -6; 12 \text{ m/sec})$.

Одредити угаону и транслаторну брзину завртња, његов параметар и растојање његове осе од координатног почетка. Како гласи једначина осе завртња?



Слика 196. — Слагање три обртања

Решење. — Рачун спроводимо табеларно:

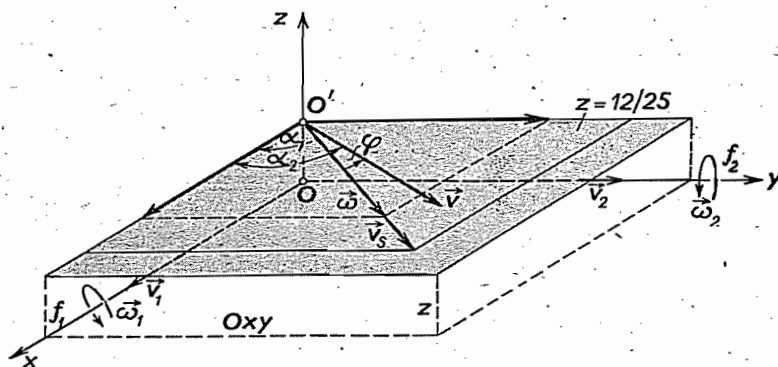
ω_i	Угаоне брзине			Координате			Транслаторне брзине		
	ω_x	ω_y	ω_z	x_i	y_i	z_i	v_x	v_y	v_z
ω_A	2	4	1	2	1	0	-1	2	-6
ω_B	1	-2	4	3	0	-2	4	14	-6
ω_C	-3	1	-1	2	2	0	2	-2	-8
v'_s							3	-6	12
Збир	0	3	4				8	8	4
Интензи- теги бр- зина	$\omega = 5 \text{ sec}^{-1}$			$\cos \varphi = \frac{2}{3}$ $\sin \varphi = \frac{1}{3} \sqrt{5}$			$v = 12 \text{ m/sec}$ $v_s = 8 \text{ m/sec}; f = \frac{8}{5} \text{ m}$ $v_n = 4 \sqrt{5} \text{ m/sec}$		

$$\rho = \frac{4}{5} \sqrt{5} \text{ m}; \quad -\frac{20}{25} \text{ m}; \quad \frac{32}{25} \text{ m}; \quad -\frac{24}{25} \text{ m},$$

па је једначина осе завртња:

$$100y - 75z - 200 = 0.$$

89. Круто тело истовремено изводи два завојна кретања око оса Ox и Oy (сл. 197) Први завртњај има угаону брзину $\omega_1 = 3 \text{ sec}^{-1}$ и параметар $f_1 = 2 \text{ m}$, а други $\omega_2 = 4 \text{ sec}^{-1}$ $f_2 = 3 \text{ m}$.



Слика 197. — Слагање два завртња са управним осама

Одредити положај осе резултујућег завртња и његов параметар.

Решење. — Транслаторне брзине компонентних завртња јесу

$$v_1 = \omega_1 f_1 = 6; \quad v_2 = 12 \text{ m/sec}.$$

Једначина осе завртња је

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-12/25}{0}.$$

Оса је права $y = \frac{4}{3}x$ у равни $z = \frac{12}{25}$, која је паралелна Oxy -равни.

Елементи резултујућег завртња јесу:

$$\text{угаона брзина } \omega = 5 \text{ sec}^{-1}; \quad \text{брзина тачке } v = 6\sqrt{5} \text{ m/sec},$$

па је транслаторна брзина:

$$v_s = v \cos \varphi = v \cos (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{66}{5}.$$

90. Круто тело изводи истовремено два завојна кретања око оса које чине угао $\theta = 60^\circ$ (сл. 198).

Кинематички елементи завртња су

$$\omega_1 = 2 \omega_2 = 4 \text{ sec}^{-1}; \quad v_2 = 2v_1 = 10 \text{ cm sec}^{-1}.$$

Одредити положај резултујућег завртња и његов параметар.

Решење. — Из троуглова $\triangle OA_1A_2$ и $\triangle OB_1B_2$, по косинусној и синусној теореме, биће

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \theta} = 2\sqrt{7} \text{ sec}^{-1},$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \theta} = 5\sqrt{7} \text{ cm sec}^{-1},$$

$$\frac{\sin (180^\circ - \theta)}{\omega} = \frac{\sin \alpha_1}{\omega_1};$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{3/7}; \quad \cos \alpha_1 = \frac{5}{14} \sqrt{7},$$

$$\frac{\sin (180^\circ - \theta)}{v} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2};$$

$$\text{па су} \quad \sin \alpha_2 = \sqrt{3/7}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{2}{7} \sqrt{7},$$

$$\cos \varphi = \cos (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{13}{14};$$

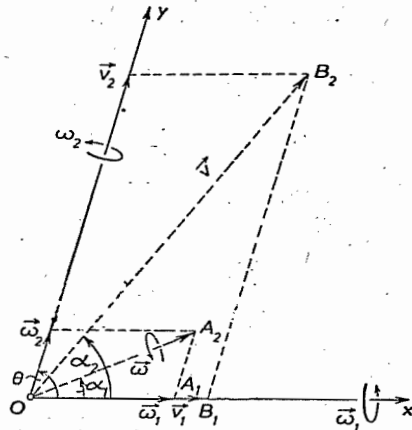
$$\sin \varphi = \frac{3}{14} \sqrt{3},$$

$$v_s = v \cos \varphi = \frac{65}{14} \sqrt{7};$$

$$v_n = v \sin \varphi = \frac{15}{14} \sqrt{21}.$$

Оса завртња лежи у равни паралелној Oxy -равни, на растојању од ње за $\rho = \frac{15}{28} \sqrt{3}$ cm.

Параметар је $f = \frac{65}{28}$ cm.



Слика 198. — Слагање два завртња са осама које се секу

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade

elibrary.matf.bg.ac.rs

Д О Д А Т А К

ВЕКТОРСКА АНАЛИЗА. ПРИМЕНА ВЕКТОРА У ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ГЕОМЕТРИЈИ. ОСНОВИ ТЕОРИЈА ПОЉА

I. Векторска анализа

1.1. Задатак векторске анализе. — Векторска анализа проучава примене диференцијалног и интегралног рачуна сматрајући вектор функцијом неких величина. Уопште, вектор може да зависи од једне или више независно променљивих величина, које могу бити *скаларне* или *векторске*. Ако вектор \vec{a} зависи од неког скалара t , значи да се са променом независне променљиве мења и сам вектор, то јест вектор \vec{a} зависи од тог скалара, па је функција независне променљиве t и обележава се симболом

$$\vec{a} = \vec{a}(t). \quad (1)$$

У Декартовом координатном систему $Oxyz$ вектор \vec{a} одређен је својим координатама, те су и оне функције исте независне променљиве t , па можемо написати:

$$a_x = f_1(t); \quad a_y = f_2(t); \quad a_z = f_3(t). \quad (1')$$

Ако је вектор \vec{a} функција више независно променљивих:

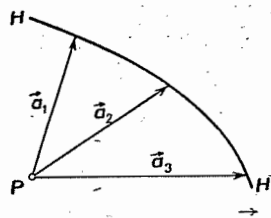
$$\vec{a} = \vec{a}(t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (1'')$$

онда су и његове координате функције истих независно променљивих:

$$\begin{aligned} a_x &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_n); & a_y &= f_2(t_1, t_2, \dots, t_n); \\ a_z &= f_3(t_1, t_2, \dots, t_n). \end{aligned} \quad (1''')$$

1.2. Ходограф векторске функције. —

Када вектор \vec{a} зависи од скаларне независно променљиве t , онда се он мења са њеном променом. Нека вредности променљиве t



Слика 1.—Ходограф вектора $\vec{a}(t)$

одговара вектор \vec{a} , тада ће другој вредности t_1 одговарати сасвим нов вектор \vec{a}_1 , коме су се променила сва три елемента: *интензитет*, *правац* и *смер*.

Да бисмо имали јасну представу промене вектора \vec{a} са променом независно променљиве t , изаберимо произвољну тачку — пол (P) и за разне вредности променљиве t нацртајмо одговарајуће векторе \vec{a}_i са почетном тачком у полу P . Геометријско место завршних тачака овако конструисаних вектора јесте просторна крива линија ($H-H$) која се назива *ходограф вектора $\vec{a}(t)$* (сл. 1). Тачка P зове се *пол ходографа*.

Када је интензитет вектора константан, али се мења правац вектора, то јест када је $|\vec{a}(t)| = \text{const.}$, тада је ходограф векторске функције $\vec{a}(t)$ *кру*, полупречника $R = |\vec{a}(t)|$.

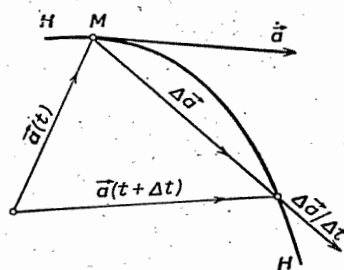
Ако се из једначина (1') елиминише време (t), добиће се једначина ходографа у координатном систему $Pxyz$ у облику криве линије:

$$f_1(x, y, z) = 0; \quad f_2(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

На пример, ходограф функције $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{b}$, где су $|\vec{a}| = \text{const.}$, $|\vec{b}| = \text{const.}$, јесте *права линија*. Ходограф функције $\vec{r} = \vec{a} \cos \varphi + \vec{b} \sin \varphi + \vec{c}$, где су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектори константних модула и где је $[\vec{a}, \vec{b}] \neq 0$, јесте *елипса* са средиштем у тачки \vec{c} . У случају да је $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2$, где су вектори константних модула и $[\vec{b}, \vec{c}] \neq 0$, ходограф је *парабола*.

Ако је вектор \vec{a} функција две независно променљиве, на пример u и v , онда је ходограф вектора $\vec{a}(u, v)$ *површина*.

1.3. Извод вектора. — Нека вектор \vec{a} зависи од скалара t . Када независно променљиву t променимо за Δt , тада ће се и вектор \vec{a} про-



Слика 2. — Прираштај вектора.

Извод вектора по скалару \vec{a}' јесте нови вектор истог правца са вектором $\Delta \vec{a} / \Delta t$, другог интензитета, а смер му зависи од знака променљиве t , односно од прираштаја Δt .

менили за вектор $\Delta \vec{a}$, који се зове *прираштај вектора \vec{a}* за *прираштај независно променљиве Δt* . Ако је познат ходограф вектора \vec{a} , онда је, према слици 2. прираштај вектора \vec{a} :

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t).$$

Количник прираштаја вектора и прира-

штаја независно променљиве, $\Delta \vec{a} / \Delta t$, јесте нови вектор истог правца са вектором $\Delta \vec{a}$, другог интензитета, а смер му зависи од знака променљиве t , односно од прираштаја Δt .

Гранична вредност овог количника, када прираштај независне променљиве Δt тежи нули, зове се *извод вектора \vec{a} по скалару t* , и симболички се обележава са

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\vec{a}} = \dot{\vec{a}}T. \quad (3)$$

Геометријско значење овог извода јасно је: *он је нови вектор који њага у правац тангенције на ходограф вектора \vec{a}* (сл. 2).

Ако се вектор \vec{a} напише у развијеном облику:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

онда је његов извод по скалару

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a}_x \vec{i} + \dot{a}_y \vec{j} + \dot{a}_z \vec{k}, \quad (4)$$

где су координате извода неког вектора по скалару изводи координата тог вектора по истом скалару.

На основу дефиниције првог извода можемо одмах добити други извод и више изводе вектора \vec{a} , пошто је први извод опет вектор који зависи од исте независне променљиве t . Други извод (извод другог реда) јесте први извод првог извода, те је

$$\frac{d^2 \vec{a}}{dt^2} = \ddot{\vec{a}}; \quad \frac{d^3 \vec{a}}{dt^3} = \overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{a}}; \quad \dots; \quad \frac{d^n \vec{a}}{dt^n} = \overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{a}}^{(n)}.$$

Ако вектор \vec{a} зависи од две променљиве, u и v , онда и његове координате зависе од тих променљивих, па су *делимични (парцијални) изводи вектора \vec{a} по скаларима u и v* :

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial u} = \frac{\partial a_x}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial u} \vec{k}, \quad \frac{\partial \vec{a}}{\partial v} = \frac{\partial a_x}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial v} \vec{k},$$

или уопште

$$\frac{\partial^{m+n} \vec{a}}{\partial u^m \partial v^n} = \frac{\partial^{m+n} a_x}{\partial u^m \partial v^n} \vec{i} + \frac{\partial^{m+n} a_y}{\partial u^m \partial v^n} \vec{j} + \frac{\partial^{m+n} a_z}{\partial u^m \partial v^n} \vec{k}.$$

1.4. Правила за добијање извода. — Пошто смо у векторској алгебри* проучили основне операције са векторима, наћи ћемо и њихове изводе.

а) *Извод збира вектора.* — Нека су дата два вектора, \vec{a} и \vec{b} , који зависе од исте независне променљиве t , то јест $\vec{a} = \vec{a}(t)$, $\vec{b} = \vec{b}(t)$, онда је извод њиховог збира (разлике):

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \pm \vec{b}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} \pm \frac{\vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t)}{\Delta t} \right),$$

* Статика — Додатак.

па се краће пише у овом облику:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}' + \vec{b}' = \vec{a}' + \vec{b}'. \quad (5)$$

Што важи за ова два вектора, важиће и за збир више вектора који зависе од исте независне променљиве t . Дакле, можемо рећи:

Извод збира (разлике) вектора једнак је збиру (разлици) извода свих вектора по истом скалару t .

б) Извод производа скалара и вектора. — Нека скалар λ и вектор \vec{a} зависе од исте независне променљиве t , онда је извод производа скалара и вектора

$$\frac{d}{dt}(\lambda \vec{a}) = \frac{d\lambda}{dt} \vec{a} + \lambda \vec{a}'. \quad (6)$$

Ако је скалар λ константан, онда је

$$\frac{d}{dt}(\lambda \vec{a}) = \lambda \vec{a}'. \quad (6')$$

На основу овог можемо лако добити извод вектора положаја тачке M по скалару t :

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \quad (7)$$

пошто су ортови координатних оса константни.

в) Извод скаларног производа. — Ако вектори \vec{a} и \vec{b} зависе од истог скалара t , онда ћемо извод скаларног производа ових вектора добити на овај начин. Променом скалара t за Δt промениће се вектори \vec{a} и \vec{b} за $\Delta \vec{a}$ и $\Delta \vec{b}$, а њихов скаларни производ за Δp :

$$\Delta p = (\vec{a}(t + \Delta t), \vec{b}(t + \Delta t)) - ((\vec{a}(t), \vec{b}(t))).$$

Ако десној страни додамо и одузмемо вредност $(\vec{a}(t), \vec{b}(t + \Delta t))$ и уредимо је, биће

$$\Delta p = (\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t), \vec{b}(t + \Delta t)) - (\vec{a}(t), \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t)).$$

Поделимо овај израз са Δt , онда је гранична вредност количника извод скаларног производа ових вектора:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}, \vec{b}) = p' = (\vec{a}', \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{b}'). \quad (8)$$

Ако су оба вектора једнака, онда је

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}, \vec{a}) = 2 (\vec{a}, \dot{\vec{a}}) = \frac{d}{dt} a^2 = 2 a \frac{da}{dt} = 2 a \dot{a}. \quad (9)$$

У случају да је модул вектор \vec{a} независан од скалара t , $|\vec{a}(t)| = \text{const.}$, овај је извод једнак нули, то јест

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\vec{a}, \vec{a}) = 0.} \quad (10)$$

То је познати услов ортогоналности ових вектора. Дакле, ако *променљиви вектор има константан интензитет, онда његов извод стоји нормално на самом вектору*. Ходограф вектора је круг полупречника a , па извод пада у правац тангенте повучене на круг. Према томе, једначина круга биће $(\vec{a}, \dot{\vec{a}}) = a^2$.

Када уместо вектора \vec{a} узмемо орт \vec{r}_0 , тада је једначина јединичног круга $(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0) = 1$, где је \vec{r}_0 орт правца полупречника круга. Пошто је интензитет орта константан, извод овог скаларног производа је

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0) = 0,} \quad (11)$$

што значи да ја извод орта управан на сам орт.

Ово можемо показати и геометријски.

Нека су \vec{r}_0 и $\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}_0$ ортови јединичног круга који одговарају аргументима t и $t + \Delta t$ независно променљиве t (сл. 3). Они граде угао $\Delta \varphi$. Троугао OAB је једнакокраки, па угао између вектора \vec{r}_0 и $\Delta \vec{r}_0 / \Delta t$ износи $1/2 (\pi - \Delta \varphi)$.

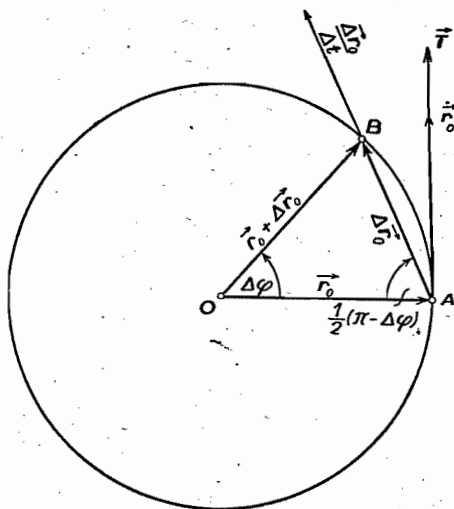
Када угао $\Delta \varphi$ тежи нули, тада вектор $\Delta \vec{r}_0 / \Delta t$ тежи тангенти круга.

Интензитет овог извода је

$$|\Delta \vec{r}_0| = 2 |\vec{r}_0| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2},$$

то јест

$$|\dot{\vec{r}}_0| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}_0}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(2 \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta \varphi}{2} \right) = \frac{d\varphi}{dt}.$$



Слика 3. — Извод орта стоји управно на орту

У овом случају је елемент лука $ds = d\varphi$, па је

$$\frac{d\vec{r}_0}{ds} = \vec{T}, \quad (12)$$

ше је извод орта по луку јединичног круга једнак орту тангенције.

d) *Извод векторског производа.* — Слично претходном поступку можемо извести образац за извод векторског производа два вектора који зависе од истог скалара:

$$\frac{d}{dt} [\vec{a}, \vec{b}] = [\dot{\vec{a}}, \vec{b}] + [\vec{a}, \dot{\vec{b}}]. \quad (13)$$

e) *Извод мешовитог производа.* — На основу изнетог начина добијања извода скаларног и векторског производа два вектора, извод мешовитог производа биће:

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\dot{\vec{a}}, [\vec{b}, \vec{c}]) + (\vec{a}, [\dot{\vec{b}}, \vec{c}]) + (\vec{a}, [\vec{b}, \dot{\vec{c}}]). \quad (14)$$

1.5. *Пројекција извода на сталну и покретну осу.* — Нека је дат вектор \vec{a} , који зависи од скалара t , и оса L , оријентисана ортом \vec{u} , који се такође мења са променом скалара t , то јест нека је оса *покретна*, онда је извод скаларног производа вектора \vec{a} и орта \vec{u} :

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}, \vec{u}) = (\dot{\vec{a}}, \vec{u}) + (\vec{a}, \dot{\vec{u}}),$$

па је

$$(\dot{\vec{a}}, \vec{u}) = \frac{d}{dt} (\vec{a}, \vec{u}) - (\vec{a}, \dot{\vec{u}}). \quad (15)$$

Пројекција извода неког вектора на покретну осу, оријентисану ортом \vec{u} , једнака је разлици извода пројекције вектора на осу и скаларног производа саме вектора и извода орта осе.

Извод орта \vec{u} по независно променљивој t зове се *брзина скрећања покретне осе.*

Када је оса стална, орт \vec{u} је константан, па је

$$(\dot{\vec{a}}, \vec{u}) = \frac{d}{dt} (\vec{a}, \vec{u}). \quad (15')$$

Пројекција извода вектора \vec{a} на ситалну осу једнака је изводу пројекције на исту осу, што смо и раније уочили.

1.6. Диференцијал вектора. — Извод вектора помножен диференцијалом независно променљиве dt зове се *диференцијал вектора* (диференцијал првог реда):

$$\boxed{d\vec{a} = \dot{\vec{a}} dt.} \tag{16}$$

Диференцијал вектора је такође вектор. Други диференцијал биће дакле,

$$d^2\vec{a} = d(d\vec{a}) = d(\dot{\vec{a}} dt) = \ddot{\vec{a}} dt^2,$$

како је на пример,

$$d^2\vec{a} = \ddot{\vec{a}} dt^2 = \vec{i} d^2 a_x + \vec{j} d^2 a_y + \vec{k} d^2 a_z, \tag{16'}$$

Када функције a_x , a_y и a_z имају изводе до реда n закључно, онда се може написати Тејлорова (Taylor) формула за вектор \vec{a} у облику:

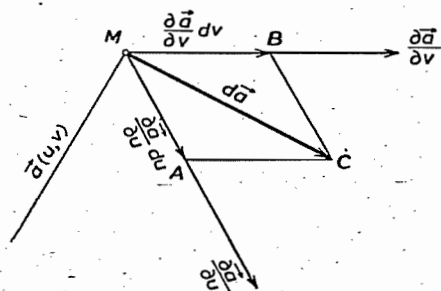
$$\Delta\vec{a} = d\vec{a} + \frac{1}{2!} d^2\vec{a} + \frac{1}{3!} d^3\vec{a} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1}\vec{a} + \vec{R}_n,$$

где је \vec{R}_n остатак реда.

Ако вектор \vec{a} зависи од више независно променљивих, онда је *тотални* (потпуни) *диференцијал* вектора:

$$d\vec{a} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t_i} dt_i, \tag{16''}$$

где су $\frac{\partial \vec{a}}{\partial t_i} dt_i$ парцијални диференцијали. Ако вектор зависи само од две независне променљиве величине, u и v , онда се тотални деференцијал може представити векторски вектором \vec{MC} (сл. 4).



Слика 4.—Тотални диференцијал вектора \vec{a}

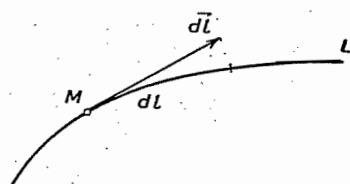
1.7. Вектор интеграл. — Ако је вектор \vec{b} једнак изводу вектора \vec{a} по скалару t , онда можемо рећи да је вектор \vec{a} неодређени интеграл вектора \vec{b} :

$$\vec{a} = \int \vec{b}(t) dt. \tag{17}$$

Као и у области скаларне променљиве, и овај неодређени интеграл садржи интеграциону константу, која је произвољни константни вектор

$$\vec{a} = \vec{F}(t) + \vec{c}. \quad (17')$$

Нека је дата крива (L) и уочимо на њој један *линијски елемент* $d\vec{l}$ (сл. 5). Бескрајно мали вектор $d\vec{l}$, који лежи на елементарном луку $d\vec{l}$,



Слика 5.—Управљени елемент криве

може потпуно да замени криву у околини те тачке, па се он назива *управљени елемент криве*. Ако скаларна функција U има различите вредности у разним тачкама криве, онда се збир производа $U d\vec{l}$ дуж те криве линије

$$\vec{J} = \int_L U d\vec{l} \quad (18)$$

зове *интеграл дуж криве* (L). Пошто је $d\vec{l}$ вектор, и овај интеграл је *вектор*.

Када уместо криве узмемо неку површину A и на њој површински елемент dA , онда ћемо *управљеним површинским елементом* назвати вектор $d\vec{A}$, који има ове особине:

- 1° *интензитет* му је једнак *површинском елементу*,
- 2° *његов је правац нормале на површину у тој тачки*, и
- 3° *има смер позитивне нормале* (сл. 6).

Ако скаларна функција U има различите вредности у тачкама површине, онда се израз

$$\vec{J} = \iint_A U d\vec{A} \quad (19)$$

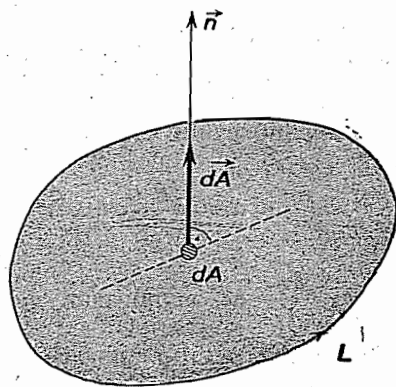
зове *површински интеграл* по површини A . Он је такође *вектор*.

Ако уместо скаларне функције U узмемо вектор \vec{a} , који има разне вредности у свим тачкама криве или површине, онда су интеграли

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{l}); \quad \int_L [\vec{a}, d\vec{l}], \quad (20)$$

$$\iint_A (\vec{a}, d\vec{A}); \quad \iint_A [\vec{a}, d\vec{A}], \quad (21)$$

линијски, односно површински интеграли. У једном случају су *скалари*, а у другом *вектори*, пошто је подинтегрална количина у првом случају скалар, а у другом вектор.



Слика 6. — Управљени површински елемент

Трећи интеграл је, дакле, скалар и представља *прошлицање (flux) вектора \vec{a} кроз површину A .*

Вектор-интеграле, као и векторе, можемо раставити у три компоненте дуж координатних оса и добити три скаларна интеграла.

Као и при диференцирању, тако и при интегрисању важе, дакле, сва *правила која су проучена при диференцирању и интегрисању скаларних функција.*

Примери. — 1. Ако је $\vec{r}(t) = \text{const.}$, доказати да је $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = -(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})$.

Решење. — Из $d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d r^2 = 0 = 2(\vec{r} \cdot d\vec{r})$ следи $(\vec{r} \cdot d\vec{r}) = 0$, па је $(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = 0$ и $(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) + (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = 0$.

2. Ако је $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, наћи извод $d(\vec{r}/\varphi)/dt$.

$$[(\vec{r}\dot{\varphi} - \dot{\vec{r}}\varphi)/\varphi^2].$$

3. Доказати да је услов $\vec{a} = \lambda \vec{a}$ довољан да је вектор \vec{a} константног правца.

Решење. — Ако је $\vec{a} = a\vec{u}$, $|\vec{u}| = 1$, тада је $\dot{\vec{a}} = \dot{a}\vec{u} + a\dot{\vec{u}} = \lambda a = \lambda a\vec{u}$, па је $\vec{u} = 0$, то јест $\dot{\vec{u}} \neq \dot{\vec{u}}(t)$.

4. Вектор $\vec{a}(t)$ управан је на раван $(\vec{r}, \vec{q}) = z$. Доказати да су вектори $\vec{a}, \dot{\vec{a}}, \ddot{\vec{a}}$ копланарни.

Решење. — Како је $(\vec{a}, \vec{q}) = 0$, биће $(\dot{\vec{a}}, \vec{q}) + (\vec{a}, \dot{\vec{q}}) = 0$, па мора бити $(\vec{a}, [\dot{\vec{a}}, \dot{\vec{q}}]) = 0$.

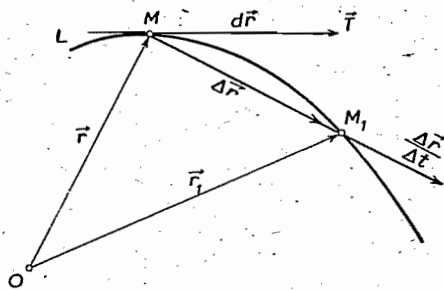
5. Израчунати интеграл $\int (\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi$.

$$[\frac{1}{2}\varphi \vec{i} + \frac{1}{4}(\vec{i} \sin 2\varphi - \vec{j} \cos 2\varphi) + C].$$

II. Примена вектора у диференцијалној геометрији

2.1. Извод вектора положаја. — Положај тачке M на кривој линији одређен је вектором положаја \vec{r} у односу на сталну тачку O (координатни почетак), па је $\vec{OM} = \vec{r}$ (сл. 7). Овај вектор је функција скалара t , па је сама крива (L) *ходограф вектора положаја*. Сваком вектору који зависи од једног скалара одговара, дакле, једна крива и обратно, свакој кривој одговара један вектор који зависи од једног скалара — то је вектор положаја њених тачака за сталну тачку — пол O .

Тачки M_1 криве одговара вектор положаја \vec{r}_1 , па је $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$, где



Слика 7. — Извод вектора положаја \vec{r}

је $\Delta \vec{r}$ елементарно померање тачке на кривој у односу на њену сталну тачку (M).

Координате вектора положаја $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ јесу функције променљивог скалара (t): $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$, па је извод вектора положаја по скалару t :

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{T}. \quad (22)$$

Он има правац тангенције на криву линију у завршној тачки вектора \vec{r} .

Његов интензитет је

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{ds}{dt},$$

те је:

$$|d\vec{r}| = dr = ds, \quad (23)$$

јер је

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}. \quad (23')$$

На тај начин можемо рећи: Диференцијал вектора положаја има правац тангенције на криву линију, а интензитет му је једнак елементу лука криве у тој тачки.

Ако орт тангенте означимо са \vec{T} , онда је

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad (24)$$

џе је орт тангенције криве линије једнак изводу вектора положаја по луку.

Усвојимо у тачки O Декартов правоугли координатни систем $Oxyz$, онда су координате орта тангенте:

$$(\vec{T}, \vec{i}) = \frac{dx}{ds} = \cos \alpha_1; \quad (\vec{T}, \vec{j}) = \frac{dy}{ds} = \cos \beta_1; \quad (\vec{T}, \vec{k}) = \frac{dz}{ds} = \cos \gamma_1, \quad (24')$$

једнаке косинусима углова које тангента криве гради са координатним осама.

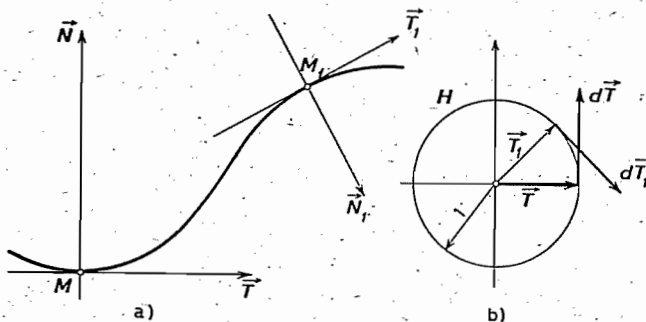
2.2. Вектор кривине. — Нека је дата равна крива линија $y = f(x)$,

онда је у свакој њеној тачки тангента одређена и оријентисана ортом \vec{T} (сл. 8а).

Како је интензитет орта једнак јединици, ходограф овог орта је круг полупречника 1 (сл. 8 *b*). Пошто је орт извод вектора положаја по луку, извод орта тангенте по луку пада у правац тангенте на ходограф, па је извод орта управан на сам орт, што значи да пада у правац нормале криве линије у датој тачки (сл. 8 *a*);

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{T} = K\vec{N},$$

где је K скалар, а \vec{N} орт нормале.



Слика 8. — Ходограф орта тангенте (\vec{T})

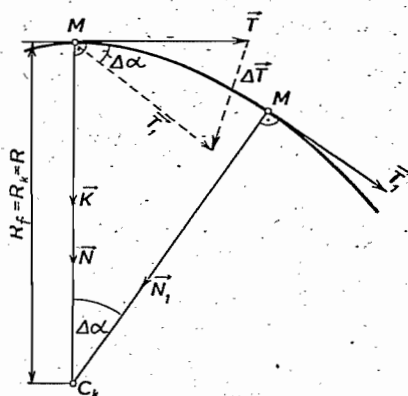
Интензитет овог извода одредићемо на овај начин. Повуцимо у двема оближњим тачкама криве тангенте \vec{T} и \vec{T}_1 , које граде угао $\Delta\alpha$, једнак углу између нормала у тим тачкама (сл. 9). Ове нормале секу се у средишту кривине C_k , а R_f је полупречник прве кривине (флексије). Ако у тачку M пренесемо и орт \vec{T}_1 , онда из троугла ΔMT_1 одређујемо прираштај орта тангенте:

$$\Delta\vec{T} = \vec{T}_1 - \vec{T}.$$

Негов интензитет је $\Delta T = \Delta\alpha$, па је

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \vec{N} = K\vec{N} = \vec{K},$$

јер у граничном положају правац вектора $\Delta\vec{T}$ тежи нормали криве.



Слика 9. — Извод орта тангенте по луку пада у правац нормале (\vec{N})

Извод орта тангенције по луку једнак је вектору кривине који пада у правац главне нормале:

$$\vec{K} = K\vec{N} = \frac{1}{R_f} \vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}. \quad (25)$$

Пошто су $dx/ds = \cos \alpha_1$, $dy/ds = \sin \alpha_1$, координате вектора кривине јесу

$$d^2x/ds^2 = -\sin \alpha_1 (d\alpha_1/ds); \quad d^2y/ds^2 = \cos \alpha_1 (d\alpha_1/ds),$$

па је интензитет вектора кривине (прва кривина — флексија):

$$K = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} = \frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{3/2}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \quad (26)$$

За просторну криву линију биће прва кривина:

$$K = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \quad (27)$$

$$A = y\ddot{z} - z\ddot{y}; \quad B = z\ddot{x} - x\ddot{z}; \quad C = x\ddot{y} - y\ddot{x}.$$

Као што је познато, полупречник кривине једнак је реципрочној вредности кривине (флексије): $R_f = 1/K$.

2.3. Природни триедар. — Природни (основни — фундаментални) триедар сачињавају: тангенција, главна нормала и бинормала, чији су ортови $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ортогонални и чине триедар десне диспозиције (сл. 10). Између њих постоје, дакле, исти односи као између ортова оса координатног система *Oxyz*, само су им интензитети пројекција једнаки косинусима смера углова које те осе граде са координатним осама:

$$\vec{T} = [\vec{N}, \vec{B}]; \quad \vec{N} = [\vec{B}, \vec{T}]; \quad \vec{B} = [\vec{T}, \vec{N}].$$

Ортове тангенте и главне нормале изразили смо помоћу првог, односно другог извода вектора положаја по луку:

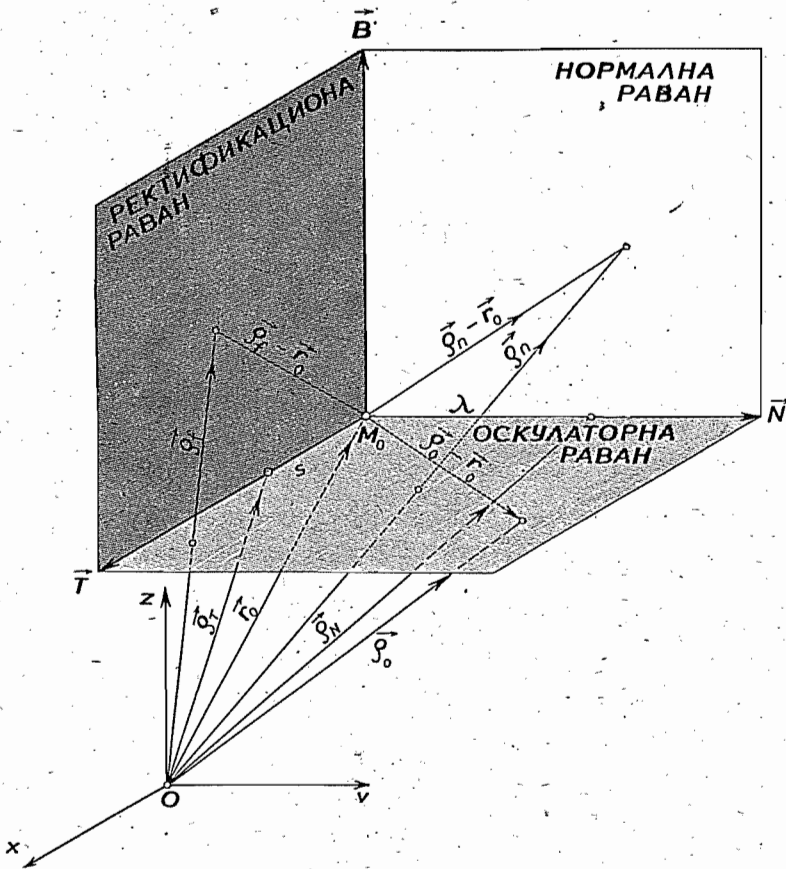
$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}; \quad \vec{N} = \frac{1}{K} \vec{K} = \frac{1}{K} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

Орт бинормале одредићемо из векторског производа

$$\vec{B} = [\vec{T}, \vec{N}] = \frac{1}{K} \left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right], \quad (28)$$

па се његове координате могу одредити из детерминанте:

$$\vec{B} = \frac{1}{K} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} \quad (29)$$



Слика 10. — Природни триедар

С обзиром на ортогоналност ортова триедра \$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\$, орт главне нормале може се написати и у овом облику:

$$\vec{N} = [\vec{B}, \vec{T}] = \frac{1}{K} \left[\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right], \frac{d\vec{r}}{ds} \right], \quad (30)$$

који се много примењује у кинематици крутог тела.

Векторске једначине оса природног триедра биће:

а) *тангенције*

$$\vec{\rho}_T = \vec{r}_0 + s \vec{T}, \quad (31)$$

где је $\vec{\rho}_T$ вектор положаја произвољне тачке на тангенти, \vec{r}_0 вектор положаја тачке M_0 , у којој је почетак природног триедра, а s скалар који показује клизање тачке по тангенти.

У развијеном облику, за Декартов координатни систем $Oxyz$, биће

$$\frac{x-x_0}{dx} = \frac{y-y_0}{dy} = \frac{z-z_0}{dz}; \quad (31')$$

у равни биће

$$\frac{x-x_0}{dx} = \frac{y-y_0}{dy}, \quad (31'')$$

односно

$$y-y_0 = y'(x-x_0). \quad (31''')$$

б) *главне нормале*

$$\vec{\rho}_N = \vec{r}_0 + \lambda \vec{N}, \quad (32)$$

односно у развијеном облику:

$$\frac{x-x_0}{d^2x} = \frac{y-y_0}{d^2y} = \frac{z-z_0}{d^2z}; \quad (32')$$

в) *бинормале* (добитоно из услова колинеарности вектора $\vec{\rho}_B - \vec{r}_0$ и \vec{B} , па је):

$$[\vec{\rho}_B - \vec{r}_0, \vec{B}] = 0, \quad (33)$$

односно у развијеном облику:

$$[\vec{\rho}_B - \vec{r}_0, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ B_x' & B_y' & B_z' \end{vmatrix} = 0; \quad \frac{x-x_0}{B_x'} = \frac{y-y_0}{B_y'} = \frac{z-z_0}{B_z'}, \quad (33')$$

где су имениоци детерминанте

$$A = B_x' = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}; \quad B = B_y' = \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2y & d^2x \end{vmatrix}; \quad C = B_z' = \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}. \quad (33'')$$

На исти начин одредићемо и једначине координатних равни природног триедра:

а) *нормалне равни* (добитоно из услова ортогоналности вектора $\vec{\rho}_n - \vec{r}_0$ и \vec{T}):

$$\left(\vec{\rho}_n - \vec{r}_0, \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = 0, \quad (34)$$

или у развијеном облику:

$$(x - x_0) dx + (y - y_0) dy + (z - z_0) dz = 0; \quad (34)$$

b) *оскулаторне равни* (добито смо из услова компланарности вектора $\vec{\rho}_0 - \vec{r}_0, \vec{T}, \vec{N}$):

$$\boxed{(\vec{\rho}_0 - \vec{r}_0, [\vec{T}, \vec{N}]) = 0; \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0; \quad (35)}$$

c) *ректификационе равни* (добито смо из услова компланарности вектора $\vec{\rho}_f - \vec{r}_0, \vec{T}$ и \vec{B} у облику):

$$\boxed{(\vec{\rho}_f - \vec{r}_0, [\vec{T}, \vec{B}]) = 0; \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ dx & dy & dz \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix} = 0. \quad (36)}$$

2.4. Флексија и торзија. — Видели смо да је флексија, или прва кривина, дефинисана изразом $\vec{K} = K \vec{N} = d\vec{T}/ds$, то јест *изводом орта тангенте по луку*. Ходограф орта тангенте је крива линија на сфери полупречника 1, па се зове сферна индикатриса тангената.

Флексија просторних кривих линија показује одступање криве линије од тангенте. Под вектором *торзије* (*друге кривине*) подразумева се извод орта бинормале по луку:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d}{ds} [\vec{T}, \vec{N}] = \left[\vec{T}, \frac{d\vec{N}}{ds} \right]. \quad (37)$$

Множењем претходног израза скаларно ортом тангенте следи

$$(\vec{T}, \vec{\tau}) = 0, \quad (37')$$

што значи да *вектор торзије пада у правац главне нормале*, па је

$$\boxed{\vec{\tau} = \pm \tau \vec{N} = -\tau \vec{N}. \quad (38)}$$

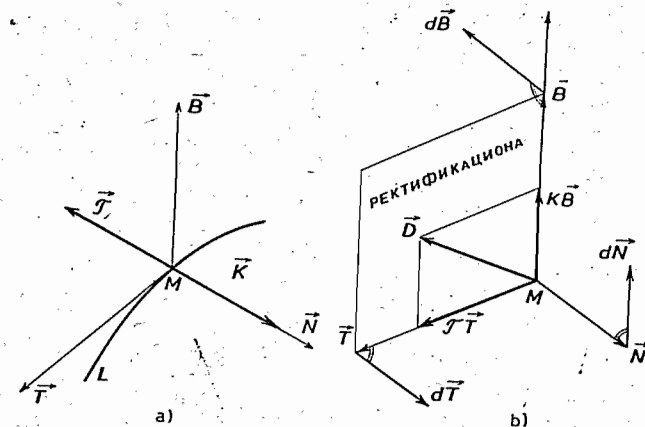
Флексија показује одступање криве од тангенте, а торзија *извијање* криве из оскулаторне равни (сл. 11а). Да бисмо израчунали торзију, узмимо пројекцију вектора торзије на орт главне нормале:

$$\tau = -(\vec{\tau}, \vec{N}) = \left(\left[\vec{T}, \frac{d\vec{N}}{ds} \right], \vec{N} \right) = \left(\vec{T}, \left[\vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds} \right] \right),$$

онда је

$$\mathfrak{I} = -(\vec{\mathfrak{I}}, \vec{N}) = \frac{1}{K^2} \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \left[\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right] \right),$$

те је торзија одређена изразом



Слика 11. — а) Прва и друга кривина, б) Дарбуов вектор

$$\mathfrak{I} = \frac{\Delta}{K^2 ds^6} = \frac{1}{B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}. \quad (39)$$

Полупречник торзије, као и полупречник флексије, дат је реципрочном вредношћу саме торзије:

$$R_f = \frac{1}{K}; \quad R_\tau = \frac{1}{\mathfrak{I}} = \frac{B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2}{\Delta}. \quad (40)$$

Векторска једначина завојнице на кружном ваљку (сл. 54) гласи:

$$\vec{r} = \vec{i} R \cos \varphi + \vec{j} R \sin \varphi + f \vec{k},$$

где је f параметар ($f = h/2\pi$). Диференцирањем добијамо

$$d\vec{r} = -\vec{i} R \sin \varphi d\varphi + \vec{j} R \cos \varphi d\varphi + \vec{k} f d\varphi,$$

па је метричка форма

$$dr^2 = ds^2 = (R^2 + f^2) d\varphi^2,$$

те је

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + f^2}} = C = \text{const.}$$

Према (24), орт тангенте биће

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = C(-\vec{i} R \sin \varphi + \vec{j} R \cos \varphi + \vec{k} f),$$

па је скаларни производ

$$(\vec{T}, \vec{k}) = Cf = \frac{f}{\sqrt{R^2 + f^2}} = \cos \theta = \sin \alpha = \text{const.},$$

из кога закључујемо да завојница сече све изводнице цилиндра под истим углом (наибши угла α је константан).

Према обрасцу (25), вектор прве кривине (флексије) биће

$$\vec{K} = \frac{d\vec{T}}{ds} = RC^2(-\vec{i} \cos \varphi - \vec{j} \sin \varphi) = K\vec{N},$$

па је прва кривина (флексија):

$$K = RC^2 = \frac{R}{R^2 + f^2} = \text{const.}$$

Орт главне нормале завојнице можемо написати у облику

$$\vec{N} = -\vec{i} \cos \varphi - \vec{j} \sin \varphi,$$

па је скаларни производ

$$(\vec{N}, \vec{k}) = 0,$$

што значи да је орт главне нормале управан на орт \vec{k} , ($\vec{N} \perp \vec{k}$), то јест управан је на осу Oz . Скаларни производи

$$(\vec{N}, \vec{i}) = -\cos \varphi; \quad (\vec{N}, \vec{j}) = -\sin \varphi$$

показују да је орт \vec{N} усмерен ка оси Oz .

Извод орта главне нормале по луку биће

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = C(\vec{i} \sin \varphi - \vec{j} \cos \varphi),$$

па је, према обрасцу (38), вектор друге кривине (торзије):

$$\vec{\mathfrak{T}} = \vec{i} C^2 f \cos \varphi + \vec{j} C^2 f \sin \varphi$$

и торзија

$$\mathfrak{T} = \mp C^2 f = \mp \frac{f}{R^2 + f^2} = \text{const.}$$

Из изложеног закључујемо да су и флексија и торзија завојнице константне. Код десне завојнице торзија је негативна, а код леве је позитивна.

Под шопалном кривином подразумева се извод орта главне нормале по луку $\vec{\mathfrak{Q}} = d\vec{N}/ds$. Њен износ се одређује по Ланкревој (Lancret) теорему из релације $\vec{N} = [\vec{B}, \vec{T}]$, па је

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{\mathfrak{Q}} = \left[\frac{d\vec{B}}{ds}, \vec{T} \right] + \left[\vec{B}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right].$$

С обзиром на једначине (37) и (25) биће

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{T} \vec{B} - K \vec{T}, \quad (41)$$

па је

$$\Omega^2 = K^2 + \mathfrak{I}^2. \quad (42)$$

Квадрат тојалне кривине (треће кривине) једнак је збиру квадрата флексије (прве кривине) и шорзије (друге кривине).

Према томе биће

$$\frac{1}{R_q^2} = \frac{1}{R_f^2} + \frac{1}{R_c^2}, \quad (43)$$

на за њу важи Питагорина теорема.

Све три кривине могу се представити помоћу Дарбуовој (*Darboux*) вектора \vec{D} , који лежи у ректификационој равни (сл. 12):

$$\vec{D} = \mathfrak{I} \vec{T} + K \vec{B}. \quad (44)$$

Његов интензитет једнак је тоталној кривини:

$$D = \frac{1}{R_q} = \Omega; \quad |\vec{D}| = \Omega.$$

Векторски производи Дарбуовог вектора са ортовима оса природног триедра дају кривине:

$$[\vec{D}, \vec{T}] = \vec{K}; \quad [\vec{D}, \vec{N}] = \pm \mathfrak{I} \vec{B} - K \vec{T}; \quad [\vec{D}, \vec{B}] = -\vec{\mathfrak{I}}. \quad (45)$$

2.5. Френеови обрасци. — Помоћу вектора кривина могу се врло лако извести *Френеови (Frenet)** обрасци, који показују везе између углова које тангента ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$), главна нормала ($\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$) и бинормала ($\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$) граде са координатним осама Ox, Oy и Oz , јер су:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{K} = K\vec{N}; \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -K\vec{T} + \mathfrak{I}\vec{B}; \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\mathfrak{I}\vec{N} \quad (46)$$

или у скаларном облику (са ознакама $\alpha_i = \cos \alpha_i; \dots$):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds} &= K\alpha_2; & \frac{d\alpha_2}{ds} &= -K\alpha_1 + \mathfrak{I}\alpha_3; & \frac{d\alpha_3}{ds} &= -\mathfrak{I}\alpha_2; \\ \frac{d\beta_1}{ds} &= K\beta_2; & \frac{d\beta_2}{ds} &= -K\beta_1 + \mathfrak{I}\beta_3; & \frac{d\beta_3}{ds} &= -\mathfrak{I}\beta_2; \\ \frac{d\gamma_1}{ds} &= K\gamma_2; & \frac{d\gamma_2}{ds} &= -K\gamma_1 + \mathfrak{I}\gamma_3; & \frac{d\gamma_3}{ds} &= -\mathfrak{I}\gamma_2. \end{aligned} \quad (46')$$

* *F. Frenet* (1816—1900): „Sur les courbes à double courbure“. Истовремено их је пронашао и *J. A. Serret* (1819—1825).

Када је крива дата системом једначина $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, треба претходно једну од променљивих (x, y, z) узети за независну променљиву, па израчунати диференцијале система имплицитних функција.

На пример, за криву $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, $x^2 - y^2 - 3 = 0$ биће $2x dx + z dz = 0$, $x dx - y dy = 0$, $d^2 y = 2 d^2 x - 3 d^2 z$; $d^2 z = -3 d^2 x - 2 d^2 y$, па је, према (35), једначина оскулаторне равни у тачки $M_0(2; 1; 2)$ облика $4x - y + z - 9 = 0$.

Примери. — 1. Написати једначине тангенте и нормале криве $x^3 y + y^3 x = 3 - x^2 y^2$ у тачки $M_0(1; 1)$.

Решење. — Због $(3x^2 y + y^3 + 2xy^2) dx + (x^3 + 3xy^2 + 2x^2 y) dy = 0$ биће $dx + dy = 0$, па су, према (31) и (32), једначине тангенте $x + y - 2 = 0$ и нормале $2x - y = 2$.

2. Одредити једначине тангенте и нормале криве $\cos xy = 2x + y$ у тачки $M_0(0; 1)$.

Решење. — Због $2 dx + dy = 0$ биће једначина тангенте $2x + y - 1 = 0$ и нормале $-2y + 2 = 0$.

3. Одредити све елементе криве $x = 6t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ у тачки $t = 1$.

Решење. — Како су $\dot{x} = 6$, $\dot{y} = 6t$, $\dot{z} = 6t^2$; $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 6$, $\ddot{z} = 12t$, то су у тачки $M_0(6; 3; 2)$ једначине тангенте $x - 6 = y - 3 = z - 2$; главне нормале $x = 6$, $2y - z - 4 = 0$; бинормале $(x - 6) = (y - 3) / -2 = (z - 2)$; нормалне равни $x + y + z - 11 = 0$; оскулаторне равни $x - 2y + z - 2 = 0$; ректификационе равни $x - z - 4 = 0$.

4. Одредити једначине тангенте и нормалне равни криве $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 25$ у тачки $M_0(1; 3; 4)$.

Решење. — Због $x dx + y dy = 0$ и $y dy + z dz = 0$ биће $(x - 1) / 12 = (y - 3) / -4 = (z - 4) / 3$ и $12x - 4y + 3z - 12 = 0$.

5. Израчунати лук криве $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ од тачке $(0; 0; 0)$ до тачке $(3; 3; 2)$.

Решење. — Пошто је $dy = \frac{2}{3} x dx$, $2y dx + 2x dy = 9 dz$, то јест $dz = \frac{2}{9} x^2 dx$, биће $ds = (2x^2 + 9) dx / 9$, па је лук $s = 5$.

6. Израчунати лук криве $x = 8t$, $y = 6t^2$, $z = 3t^3$ од координатног почетка од тачке $t = 1$.

Решење. — Овде су $\dot{x} = 8$, $\dot{y} = 12t$, $\dot{z} = 9t^2$, па је $ds = (9t^2 + 8) dt$, те је лук $s = 11$.

7. Израчунати прву кривину у координатном почетку криве $y + z = 1 - \cos x$, $x = \sin y - \sin z$.

Решење. — Овде су $y' + z' = \sin x$; $y' \cos y - z' \cos z = 1$; $y'' + z'' = \cos x$; $y'' \cos y - z'' \cos z - y'^2 \sin y + z'^2 \sin z = 0$; $ds^2 = (1 + y'^2 + z'^2) dx^2$, па је кривина $K = \sqrt{2/3}$.

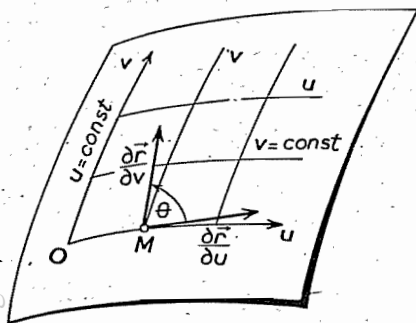
2.6. Основне квадратне форме површине. Гаусови параметри. — Ходограф векторске функције $\vec{r} = \vec{r}(t)$ јесте *линија* (сл. 1). Међутим, ходограф векторске функције $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, која зависи од два параметра, јесте *површина*. Свака тачка на површини, чија је векторска једначина

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \tag{47}$$

или скаларне једначине

$$x = f_1(u, v); \quad y = f_2(u, v); \quad z = f_3(u, v), \tag{47'}$$

одређена је са два податка — параметрима u и v , који се зову *Гаусови* (*K. Gauss*, 1777—1855) *параметри*. Ако се мења само један параметар, на пример u , добија се крива на површини дуж које је други параметар константан $v = \text{const.}$, и обратно, при промени параметра v добија се линија $u = \text{const.}$ (сл. 12). Ове криве на површини називају се *Гаусовим параметарским кривим линијама на површини*. Оне образују мрежу линија на тој површини.



Слика 12. — Гаусове параметарске криве на површини

Парцијални изводи вектора положаја \vec{r} произвољне тачке M на тој површини по параметрима u и v одређују правце тангенте на криве $u = \text{const.}$ и $v = \text{const.}$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial u} \vec{T}_u; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial v} \vec{T}_v.$$

На пример, векторска једначина сфере, полупречника $R = r$ (сл. 13), биће

$$\vec{r} = \vec{i} R \cos \psi \cos \varphi + \vec{j} R \cos \psi \sin \varphi + \vec{k} R \sin \psi,$$

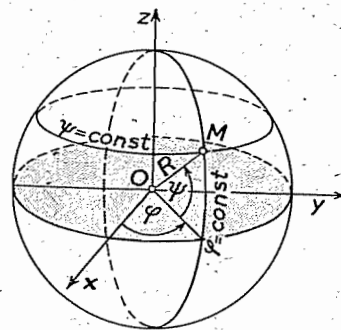
где смо за Гаусове параметре узели географске координате $u = \varphi$, $v = \psi$. Линије $\varphi = \text{const.}$ јесу *меридијани*, а линије $\psi = \text{const.}$ — *ујоредници*.

Парцијални изводи вектора положаја по параметрима φ и ψ износе:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R \cos \psi (-\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi) = \vec{c}_0 R \cos \psi;$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = R \psi (-\vec{i} \sin \psi \cos \varphi - \vec{j} \sin \psi \sin \varphi + \vec{k} \cos \psi) = R \psi \vec{v}_0,$$

где су \vec{c}_0 и \vec{v}_0 ортови радијалног и меридионалног правца (сл. 5b).



Слика 13. — Гаусове криве на сфери: ујоредници и меридијани

Из векторске једначине (47) диференцирањем добијамо

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv, \quad (48)$$

па је *квадрат елементија лука* — *метричка форма*:

$$ds^2 = dr^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) du dv + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

односно

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \Phi_1, \quad (49)$$

где су E, F, G Гаусове ознаке* које представљају изразе

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2; \\ F &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}; \\ G &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \quad (50)$$

Израз (49) зове се *прва основна квадранна форма површине* или *метричка форма површине*.

Ако је \vec{T} орт тангенте криве на површини, а \vec{n} орт нормале у тачки M површине, онда је испуњен услов $(\vec{T}, \vec{n}) = 0$, који показује да су орт тангенте криве на површини и орт нормале површине међусобно управни. Из тог услова диференцирањем по луку добијамо

$$\left(\frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{n}\right) + \left(\vec{T}, \frac{d\vec{n}}{ds}\right) = 0,$$

односно користећи образац (25):

$$\left(\frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{n}\right) = -\left(\vec{T}, \frac{d\vec{n}}{ds}\right) = \frac{(\vec{N}, \vec{n})}{R} = -\frac{(d\vec{r}, d\vec{n})}{ds^2}. \quad (51)$$

Скаларни производ

$$-(d\vec{r}, d\vec{n}) = -\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv, \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} dv\right),$$

односно

$$-(d\vec{r}, d\vec{n}) = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = \Phi_2, \quad (52)$$

где су уведене ознаке

$$L = -\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial u}\right); \quad 2M = -\left(\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial u}\right)\right); \quad N = -\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial v}\right), \quad (53)$$

зове се *друга основна квадранна форма површине*.

Величине E, F, G су *основне величине првога реда* теорије површина, јер у њима фигуришу изводи првога реда, а величине L, M и N су *основне величине другог реда*, јер се у њима јављају и други парцијални изводи вектора положаја тачке на површини.

* K. F. Gauss: „Disquisitiones generales circa superficies curvas“, Berlin, 1827. године

С обзиром на основне квадратне форме, израз (51) можемо написати у облику

$$\frac{(\vec{N}, \vec{n})}{R_f} = \frac{Ldu + 2Mdu dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \quad (54)$$

Често се једначина површине даје у експлицитном облику:

$$z = f(x, y),$$

где су сада Гаусови параметри $u = x$, $v = y$. Због тога су

$$E = 1 + p^2; \quad F = pq; \quad G = 1 + q^2;$$

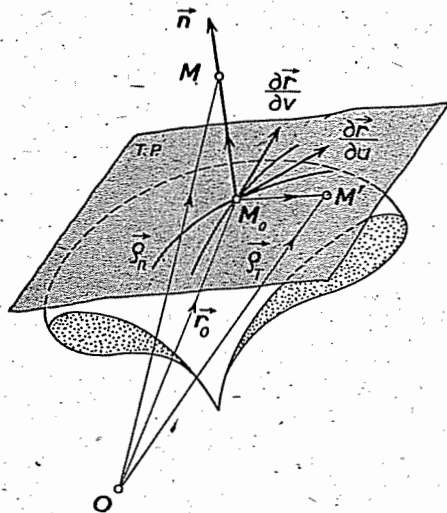
$$L = \frac{r}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}}; \quad M = \frac{s}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}}; \quad N = \frac{t}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}}, \quad (55)$$

где су

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (55')$$

познате Монжеове (Monge) ознаке.*

2.7. Тангенцијална раван и нормала површине. — Геометријско место тангената повучених на све криве линије које пролазе кроз тачку M_0 јесте тангенцијална раван површине у тој тачки. Нека је ова тачка одређена вектором положаја \vec{r}_0 у односу на координатни почетак O (сл. 14), а друга произвољна тачка M' у тангенцијалној равни вектором положаја $\vec{\rho}_T$, онда је вектор $\vec{M}_0 M' = \vec{\rho}_T - \vec{r}_0$ компланаран са вектором $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, па је векторска једначина тангенцијалне равни



Слика 14. — Тангенцијална раван и нормала површине

$$\left(\vec{\rho}_T - \vec{r}_0, \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right) = 0. \quad (56)$$

У скаларном облику биће

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0. \quad (56')$$

Ако је површина дата у експлицитном облику, $z = f(x, y)$, једначину тангенцијалне равни представљамо једначином

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (56'')$$

* G. Monge (1746 — 1818): „L'application de l'Analyse à la Géométrie“, Paris, 1795. године.

Права повучена кроз тачку M_0 управно на тангенцијалну раван зове се нормала површине у тој тачки. Ако на нормали (\vec{n}) узмемо произвољну тачку M , одређену вектором $\vec{\rho}_n$, онда из услова колинеарности вектора $\vec{\rho}_n$, \vec{r}_0 и \vec{n} добијамо векторску једначину нормале површине.

Орт нормале је управан на тангенцијалну раван, па је одређен изразом

$$\vec{n} = \frac{\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right]}{\left\| \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right\|} = \frac{\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (57)$$

где је, према Лагранжевом идентитету:

$$\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right]^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)^2 = EG - F^2. \quad (58)$$

Израз $EG - F^2$ зове се дискриминанта прве основне форме површине. Векторска једначина нормале површине биће

$$\left[\vec{\rho}_n - \vec{r}_0, \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right] = 0. \quad (59)$$

У скаларном облику је

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-z_0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (59')$$

Ако је површина дата у експлицитном облику, $z = f(x, y)$, једначина нормале биће

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{-1}, \quad (59'')$$

а косинуси углова које она гради са координатним осама Ox , Oy и Oz биће

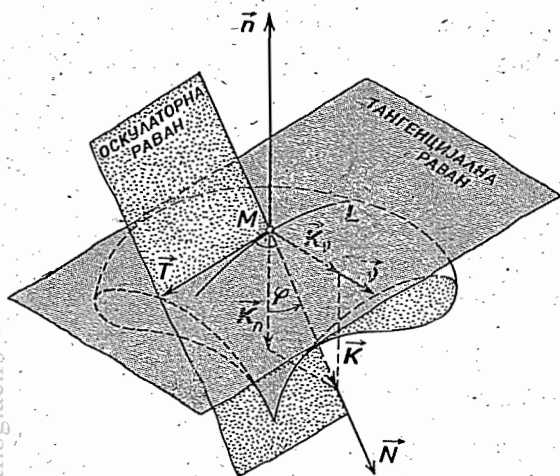
$$\cos \alpha_n = \frac{-p}{\lambda}, \quad \cos \beta_n = \frac{-q}{\lambda}, \quad \cos \gamma_n = \frac{1}{\lambda},$$

где је $\lambda = \sqrt{1+p^2+q^2}$.

На пример, једначине тангенцијалне равни и нормале елипсоида у тачки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ биће

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1; \quad \frac{a^2(x-x_0)}{x_0} = \frac{b^2(y-y_0)}{y_0} = \frac{c^2(z-z_0)}{z_0}.$$

2.8. Нормална кривина. Менијеова и Ојлерова теорема. — Природни триедар за површину приказан је на слици 15, па је триедар ортова \vec{T} , $\vec{\nu}$ и \vec{n} ортогоналан, десне диспозиције. У произвољној тачки M



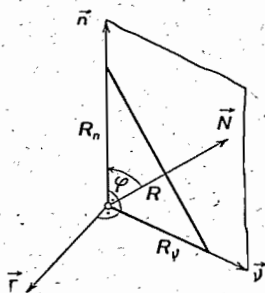
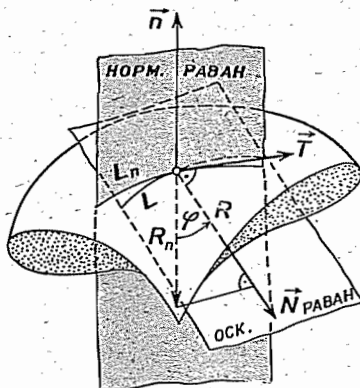
Слика 15. — Нормална и геодезијска кривина.

$$K_n = (\vec{K}, \vec{n}) = \frac{(\vec{N}, \vec{n})}{R_f} = \frac{\cos \varphi}{R_f} = \frac{1}{R_n};$$

$$K_v = (\vec{K}, \vec{v}) = \frac{(\vec{N}, \vec{v})}{R_f} = \frac{\sin \varphi}{R_f} = \frac{1}{R_v},$$
(60)

где су R_n и R_v пољупречници нормалне и геодезијске кривине.

Пошто је тангента управна на главну нормалу \vec{N} , нормалу површине \vec{n} и орт геодезијског правца \vec{v} , ова три орта леже у једној равни, па се односи између полупречника кривина могу геометријски представити (сл. 16).


 Слика 16. — Односи између полупречника кривина R , R_n и R_v


Слика 17. — Нормални пресек

Под нормалним пресеком површине подразумева се крива линија (L_n) добијена пресеком површине са равни која садржи нормалу површине (сл. 17)

и тангенту криве (L). У овом случају су ортови \vec{N} и \vec{n} *колинеарни*, па угао φ износи или 0 или π .

Из прве једначине (60) добијамо једначину

$$R_f = \pm R_n \cos \varphi, \quad (61)$$

која представља *Менијеову (Meusnier) теорему*,* према којој је *полупречник кривине ма које криве линије (L) на површини једнак пројекцији полупречника нормалне кривине (L_n) на раван косој пресека* (оскулаторну раван криве L).

Нормална кривина дата је изразом

$$K_n = \frac{1}{R_n} = \frac{(\vec{N}, \vec{n})}{R_f} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{rdx^2 + 2sdx dy + td y^2}{ds^2(1+p^2+q^2)}, \quad (62)$$

па њен знак зависи од бројилоца десне стране, јер је ds^2 увек позитивна величина.

Могу наступити три случаја.

1^о $a) M^2 - LN < 0$ ($rt - s^2 > 0$). — У овом случају бројилац не мења знак, па нормална кривина има увек *исти знак*, позитиван или негативан, што зависи од величине L (односно t). Не постоји ниједан правац у тачки M за који би нормална кривина била једнака нули. Овакве тачке зову се *елиптичке* (елипсоид).

$b) M = 0; L = N$ ($s = 0; r = t$). — У овом случају кривина је *константна*. Тачка се назива *сферна* или *уичаста* тачка (сфера или раван).

2^о $M^2 - LN > 0$ ($rt - s^2 < 0$). — У овом случају бројилац мења знак, па нормална кривина у једној тачки може бити или позитивна или негативна. Постоје два правца за која је нормална кривина једнака нули. Овакве тачке на површини зову се *хиперболичке* (седло хиперболичног параболоида).

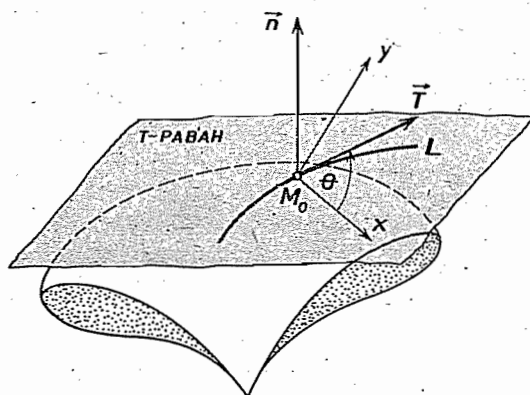
3^е $M^2 - LN = 0$ ($rt - s^2 = 0$).

— У овом случају бројилац је потпун квадрат. Постоји један правац за који је нормална кривина једнака нули. Овакве тачке називају се *параболичке* (кружни цилиндар).

Да бисмо лакше проучили промену нормалне кривине у једној тачки, претпоставимо да је површина дата у експлицитном облику, $z = f(x, y)$. Координатни систем *Охуз* *премесимо* у тачку M_0 , тако да се раван $M_0ху$

поклопи са тангенцијалном равни површине у тој тачки, а оса M_0z са нормалом површине (сл. 18). У овом случају орт нормале површине постаје

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} (-p\vec{i} - q\vec{j} + \vec{k}),$$



Слика 18. — Главни правци и главни полупречници нормалне кривине

* J. B. Meusnier (1754—1793): „Mémoire sur la courbure des surfaces“.

па су због управности ортова \vec{n} , \vec{i} , \vec{j} , скаларни производи $(\vec{n}, \vec{i}) = (\vec{n}, \vec{j}) = 0$, одакле закључујемо да је $p = q = 0$ и $\lambda = 1$, те је нормална кривина дата изразом

$$K_n = \frac{1}{R_n} = \frac{r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2}{ds^2}.$$

Нека тангента (\vec{T}) гради угао θ са осом M_0x , онда су

$$dx = ds \cos \theta, \quad dy = ds \sin \theta,$$

па нормална кривина зависи само од угла θ . Променом угла θ од 0 до 2π мењаће се и нормална кривина. Екстремне вредности нормалне кривине добићемо из једначине

$$\frac{dK_n}{d\theta} = -(r-t) \sin 2\theta + 2s \cos 2\theta = 0,$$

која је задовољена у два случаја:

- када је $r = t$, $s = 0$, а тада је K_n константно, то јест тачка је сферна;
- када је

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2s}{r-t}. \quad (63)$$

Ову једначину задовољавају два угла θ_m , која се разликују за $1/2\pi$. Једној вредности одговара највећа, а другој најмања кривина. Правци одређени овим вредностима зову се главни правци, а полупречници R_1 и R_2 , који одговарају овим правцима, зову се главни полупречници нормалне кривине. Узмемо ли да се осе M_0x и M_0y поклопе са главним правцима, онда су $\theta'_m = 0$ и $\theta''_m = 1/2\pi$, па је $s = 0$, и кривина је дата изразом

$$K_n = \frac{1}{R_n} = r \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta.$$

Због тога су главне кривине

$$K_{n \max} = K_1 = \frac{1}{R_1} = r; \quad K_{n \min} = K_2 = \frac{1}{R_2} = t,$$

па је

$$\boxed{\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}}. \quad (64)$$

Ова једначина назива се *Ојлерова једначина* и она показује како се може израчунати кривина нормалног пресека ако се знају главни полупречници кривине и угао θ који гради нормални пресек са осом M_0x .

Под *средњом кривином* подразумева се полубир главних кривина:

$$K_s = \frac{1}{2} (K_1 + K_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{2(1+p^2+q^2)^{1/2}}. \quad (65)$$

Површине чија је средња кривина једнака нули зову се *површине минима*. Код њих је, дакле, $R_1 = -R_2$.

Производ главних кривина назива се *Гаусова кривина*:

$$K_G = K_1 K_2 = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}. \quad (66)$$

Површине код којих је Гаусова кривина једнака нули зову се *развијне*. Њихова је диференцијална једначина $rt - s^2 = 0$.

Постоји и *шрећа основна квадрантна форма површине*. Она се дефинише на овај начин:

$$\Phi_3 = (d\vec{n}, d\vec{n}) = d\varphi^2 = \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} dv \right)^2 = P du^2 + 2Q du dv + R dv^2, \quad (67)$$

где су

$$P = \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} \right); \quad Q = \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} \right); \quad R = \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} \right), \quad (68)$$

и представља квадрат угла између две оближње тангенцијалне равни.

Ако су M_0x и M_0y главни правци у тачки M_0 (сл. 18), онда следе односи

$$d\vec{r}/ds = \vec{T}_1 \cos \theta + \vec{T}_2 \sin \theta = \vec{T}; \quad d\vec{n}/ds = -K_1 \cos \varphi \vec{T}_1 - K_2 \sin \varphi \vec{T}_2.$$

Множењем прве једначине са \vec{K}_1 а затим са \vec{K}_2 , добија се производ једначина

$$(d\vec{n} + K_1 d\vec{r})(d\vec{n} + K_2 d\vec{r}) = 0,$$

на између форми постоји однос

$$\Phi_3 - 2K_s \Phi_2 + K_G \Phi_1 = 0. \quad (69)$$

2.9. Карактеристичне криве линије на површини. — *а) Нивоске линије.* — Ако површину $f(x, y, z) = 0$ пресечемо равни $z = h$, добићемо нивоске линије. Оне су дате системом једначина

$$f(x, y, z) = 0; \quad z = h. \quad (70)$$

б) Линије највеће нагиба (пага). — Линије повучене на површини тако да су управне на нивоске линије зову се *линије највеће пага* према равни Oxy . Пројекције ових линија на раван Oxy јесу ортогоналне трајекторије пројекција нивоских линија на исту раван. Ако из претходног система једначина елиминисемо променљиву z , добићемо фамилију пројекција нивоских линија на раван Oxy , која је дата једначином $f(x, y, h) = 0$. Ортогоналне трајекторије ових линија дате су једначином $\varphi(x, y, C) = 0$, и уједно представљају фамилију пројекција линија највећег нагиба. Према томе, линије највећег нагиба одређене су системом једначина

$$f(x, y, z) = 0; \quad \varphi(x, y, C) = 0. \quad (71)$$

в) Линије кривине су оне линије на површини чије *тангенте* у свакој тачки *падају* у главне *правце*. Оне се могу дефинисати и као линије на површини дуж којих нормале

површине имају обвојницу (анVELOпу). У свакој тачки могу се повући две линије кривине, које су међусобно управне.

Из услова обвојнице добија се диференцијална једначина линија кривине:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ -p & -q & 1 \\ -dp & -dq & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (72)$$

где су:

$$dz = p dx + q dy; \quad dp = r dx + s dy; \quad dq = s dx + t dy.$$

д) Асимптотне линије су оне линије на површини које имају особину да се у њиховим тачкама оскулаћорна равна поклапа са танјенцијалном равни, односно да су бинормала криве и нормала површине колинеарне.

Према (28), диференцијална једначина асимптотних линија биће

$$[\vec{B}, \vec{n}] = [[d\vec{r}, d^2\vec{r}], \vec{n}] = -d\vec{r}(\vec{n}, d\vec{r}) = 0, \quad (73)$$

односно

$$(\vec{n}, d\vec{r}) = 0,$$

пошто је $\vec{n} \perp d\vec{r}$.

Ако је површина дата једначином $z = f(x, y)$, биће

$$\vec{n} = \frac{1}{\lambda} (-p\vec{i} - q\vec{j} + \vec{k}); \quad d\vec{r} = (\vec{i} + p\vec{k}) dx + (\vec{j} + q\vec{k}) dy; \quad d^2\vec{r} = \vec{k}(r dx^2 + t dy^2),$$

па је диференцијална једначина асимптотних линија

$$ty'^2 + 2sy' + r = 0. \quad (73')$$

е) Геодезијске линије имају особину да им је геодезијска кривина једнака нули, односно да нормала површине у свакој тачки криве лежи у оскулаћорној равни. Како је, према (60), геодезијска кривина

$$K_v = \frac{1}{R_f} (\vec{N}, \vec{v}) = \frac{1}{R_f} (\vec{n}, \vec{B}) = \frac{1}{R_f} (\vec{n}, [\vec{T}, \vec{N}]) = (\vec{n}, [d\vec{r}, d^2\vec{r}]),$$

диференцијална једначина геодезијских линија је следећа:

$$(\vec{n}, [\vec{T}, \vec{N}]) = (\vec{n}, [d\vec{r}, d^2\vec{r}]) = 0. \quad (74)$$

Ове линије су значајне у динамици, јер су трајекторије тачке која се креће инерцијски по површини.

2.10. Обртне површине. — Код обртне површине, постале обртањем око осе (Oz), упоредници су кружне линије управне на осу, а меридијани — криве које су полударне са генератрисом обртне површине. Сваки меридијан је заокренут у односу на основни меридијан (раван Oxz) за угао φ , а произвољна тачка $M(x, y, z)$ има поларно-цилиндричке координате r, φ, z . Једначина обртне површине је $z = f(r)$. Као Гаусове параметре на овој површини усвојићемо поларне координате $u = r, v = \varphi$, па су Декартове координате $x = u \cos v, y = u \sin v, z = f(u)$. Вектор положаја тачке на меридијану је

$$\vec{r} = \vec{OM} = \vec{i} u \cos v + \vec{j} u \sin v + \vec{k} f(u),$$

а су парцијални изводи

$$\begin{aligned} \vec{r}'/\partial u &= \vec{i} \cos v + \vec{j} \sin v + \vec{k} f'(u); & \vec{r}'/\partial v &= -\vec{i} u \sin v + \vec{j} u \cos v; \\ \partial^2 \vec{r}'/\partial u^2 &= f'' \vec{k}; & \partial^2 \vec{r}'/\partial u \partial v &= -\vec{i} \sin v + \vec{j} \cos v; & \partial^2 \vec{r}'/\partial v^2 &= -\vec{i} u \cos v - \vec{j} u \sin v \end{aligned}$$

и основне величине првог и другог реда

$$E = 1 + f'^2; \quad F = 0; \quad G = u^2; \quad f' = f'(u); \quad f'' = f''(u); \quad (75)$$

$$L = \frac{f''}{\Delta}; \quad M = 0; \quad N = \frac{u f'}{\Delta}; \quad \Delta = \sqrt{E} = \sqrt{1 + f'^2}.$$

Због тога су прва и друга квадратна форма површине

$$\Phi_1 = ds^2 = (1 + f'^2) du^2 + u^2 dv^2; \quad \Phi_2 = \frac{1}{\Delta} (f'' du^2 + u f' dv^2), \quad (76)$$

и нормала површине

$$\vec{n} = \frac{-1}{\Delta} (\vec{k} f' \cos v + \vec{j} f' \sin v - \vec{k}). \quad (77)$$

Орт нормале лежи у равни меридијана и сече обртну осу, те све нормале дуж истог меридијана образују раван, дакле *развојну површину*. Због тога су меридијани линије кривине површине. Друга фамилија линија кривине јесу упоредници.

Средња и Гаусова кривина дате су изразима

$$K_s = \frac{f'(1 + f'^2) + u f''}{2u(1 + f'^2)^{3/2}}; \quad K_G = \frac{f' f''}{u(1 + f'^2)^2}. \quad (78)$$

Примери. — 8. Написати једначину тангенцијалне равни и нормале у тачки (1; 2; 3) површине

$$x^3 + xyz + z^2 - 3xz + 2y - 11 = 0.$$

Решење.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + yz - 3z = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 5;$$

$$y + z - 5 = 0; \quad y - z + 1 = 0, \quad x = 1.$$

9. Написати једначину тангенцијалне равни и нормале површине

$$3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0 \text{ у тачки } (1; 1; 1).$$

Решење. $3x - 2y - 2z + 1 = 0; \quad (x - 1)/3 = (y - 1)/-2 = (z - 1)/-2.$

10. Одредити једначину тангенцијалне равни елипсоида $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ паралелну равни $x + 2y - z = 0$.

11. Одредити једначину тангенцијалне равни хиперболичког параболоида $z = xy$ у тачки (1; 1; 1).

$$[(x - 1) = (y - 1) = (1 - z)]$$

12. Израчунати средњу и Гаусову кривину површине из претходног задатка.

[Овде су $p=y$, $q=x$, $r=s=0$; $t=1$, па су $K_s=\sqrt{3}/9$, $K_G=0$].

13. Одредити главне кривине, средњу и Гаусову кривину елиптичког параболоида $9x^2+4y^2=72z$ у тачки (2; 3; 1).

[Пошто су $p=x/4$; $q=y/9$, биће $r=1/4$; $s=0$; $t=1/9$,

па су $K_1=1/4$; $K_2=1/9$; $K_3=13/72$; $K_G=1/36$].

14. Одредити кривине обртног параболоида $x^2+y^2=8z$ у тачки (2; 2; 1).

[Како су $p=x/4$; $q=y/4$; $r=1/4=t$; $s=0$, биће $K_1=K_2=1/6$; $K_3=1/6$; $K_G=1/36$].

15. Показати да крива $x=a \operatorname{Ch} t \sin t$, $y=a \operatorname{Ch} t \cos t$, $z=at$ лежи на површини $x^2+y^2=[a \operatorname{Ch}(z/a)]^2$ и да је у свакој тачки криве њена бинормала колинеарна са нормалом површине.

$$[f(x, y, z) = f(t) = 0; \quad A(\partial f / \partial x) = B(\partial f / \partial y) = C(\partial f / \partial z);$$

$$A = y\ddot{z} - z\ddot{y}; \quad B = z\ddot{x} - x\ddot{z}; \quad C = x\ddot{y} - y\ddot{x}.]$$

III. ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ПОЉА

3.1. Дефиниција поља. — Неограничени или ограничени простор чијој свакој тачки одговара одређена вредност једног скалара назива се *поље* тог скалара. Ако, пак, свакој тачки тог простора одговара по један одређени вектор, онда се тај простор зове *поље вектора*. Поља скалара су: поље температуре, поље потенцијала, а векторско поље је поље силе. Свакој тачки тог простора, дакле, одговара одређена вредност скалара или један вектор. Скалар и вектор мењају се од једне до друге тачке поља, они зависе од положаја те тачке, дакле, извесне су функције координата те тачке, односно вектора положаја тачке.

Овакве функције које зависе од положаја тачке у простору називају се *функције положаја*:

$$U = U(x, y, z); \quad \vec{a} = f(\vec{r}), \quad (79)$$

где U означава скалар, а \vec{a} вектор поља.

3.2. Скаларно поље. Градијент скалара. — Нека је скаларна функција, чије поље посматрамо, облика $U = U(x, y, z)$, онда свакој тачки поља одговара по једна одређена вредност овог скалара. Координате сваке тачке поља морају задовољавати ову функцију. Функција U мора бити *непрекидна*, то јест мора у свакој тачки имати коначну вредност и мора бити *диференцијабилна*. У некој тачки M_0 , њена је вредност U_0 , у оближњој тачки M_1 имаће вредност $U_1 = U_0 \pm k$. Геометријско место свих тачака прос-

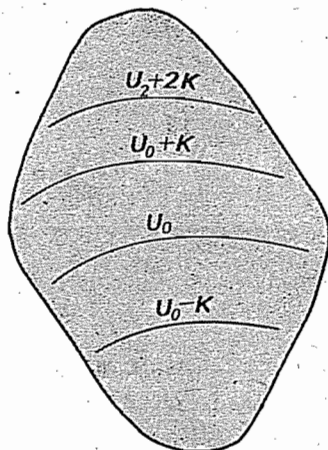
тора у којима скалар има вредност U_0 јесте, у тродимензионалном простору, површина $U(x, y, z) = U_0$. Исто тако, све тачке простора у којима скалар има вредност $U_1 = U_0 \pm k$ леже на једној површини. Ове површине називају се *еквискаларне површине* и дају слику распореда скалара у том пољу. Ако пресечемо све ове површине једном равни (R), онда ће пресеци површина и равни бити криве линије на којима скалари имају сталне вредности. Ове криве линије називају се *еквискаларне линије* (сл. 19).

На пример, *изојерме* су линије константне температуре, *изохије* — линије исте надморске висине, *изобаре* — истог притиска, итд.

Да бисмо проучили особине скаларног поља, уочимо једну његову тачку M , која је одређена вектором положаја \vec{r} у односу на сталну тачку O , координатни почетак Декартовог правоуглог координатног система. У тој тачки скалар има вредност U . Померимо ли се у пољу скалара у оближњу тачку M' , која је у односу на тачку M одређена релативним вектором положаја $d\vec{r}$, промениће се и вредност скалара U за dU (сл. 20). Како су \vec{r} и U функције положаја, добија се

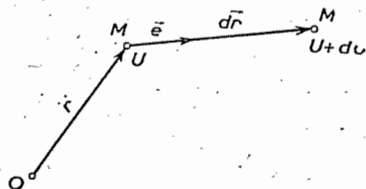
$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k};$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$



Слика 19. — Еквискаларне линије

Промена скалара једнака је тоталном диференцијалу скаларне функције U . Овај израз може се написати у облику скаларног производа вектора $d\vec{r}$ и једног вектора чије су координате једнаке парцијалним изводима скаларне функције U . Тај вектор назива се *градијент скалара U* или *градијент скаларног поља функције U* и обележава се са



Слика 20. — Прираштај функције $U(r)$

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}, \quad (80)$$

па се прираштај скалара може написати у облику

$$dU = (\text{grad } U, d\vec{r}). \quad (81)$$

У свакој тачки скаларног поља можемо, дакле, поставити векторе, те градијенти тог скалара образују једно векторско поље.

Пошто је градијент вектор, морамо знати три његова податка: интензитет, правац и смер. Из (80) одредићемо интензитет градијента:

$$|\text{grad } U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}; \quad (82)$$

косинуси углова које $\text{grad } U$ чини са координатним осама координатног система дати су изразима

$$\cos \alpha = \frac{\partial U / \partial x}{|\text{grad } U|}, \quad \cos \beta = \frac{\partial U / \partial y}{|\text{grad } U|}, \quad \cos \gamma = \frac{\partial U / \partial z}{|\text{grad } U|}. \quad (83)$$

Ови су изрази идентични са изразима за косинусе углова које нормала еквиסקаларне површине $U(x, y, z)$ гради са координатним осама, што значи да градијент пада у правац нормале на еквиסקаларну површину у посматраној тачки.

Ако је \vec{e} орт вектора $d\vec{r}$, онда се израз (81) може написати у облику

$$\frac{dU}{d\vec{r}} = (\text{grad } U, \vec{e}) \quad (84)$$

и показује извод скалара U у правцу орта \vec{e} . Пошто $\text{grad } U$ пада у правац нормале на еквиסקаларну површину, извод скалара у правцу те нормале износи

$$\frac{dU}{dn} = (\text{grad } U, \vec{n}) = |\text{grad } U| = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma, \quad (85)$$

па је $\text{grad } U$ усмерен у правцу пораста скалара.

На тај начин је $\text{grad } U$, као вектор потпуно одређен, те можемо рећи: Градијент неког скалара је вектор који стоји нормално на еквиסקаларној површини у дајој тачки, усмерен је у правцу пораста скалара, а интензитет му је једнак изводу тог скалара у правцу нормале на еквиסקаларну површину.

Градијент не зависи од избора координатног система, пошто ни распоред еквиסקаларних површина не зависи од избора система, али градијент зависи од положаја тачке на еквиסקаларној површини, јер је скалар U функција положаја тачке.

Пошто извод скалара у неком правцу карактерише промену тог скалара у том правцу, помоћу $\text{grad } U$ може се представити промена скалара у сваком правцу. У тачки M еквиסקаларне површине $U(x, y, z)$ поставимо $\text{grad } U$ (сл. 21) и над њим као пречником конструишимо лопту, па кроз тачку M повуцимо осу L оријентисану ортом \vec{a}_0 .

Из троугла MAB биће

$$\overline{MB} = |\text{grad } U| \cos \theta = (\text{grad } U, \vec{a}_0) = \frac{dU}{da}$$

то јест *тешива лопте пречника* $\text{grad } U$ *представља извод скалара у правцу тешиве*. Извод скалара је највећи у правцу нормале површине — пречника MA . Извод скалара у правцу тангенте еквискаларне линије једнак је нули.

Уочимо две оближње еквискаларне површине које се разликују за пораст скалара ΔU (сл. 22), онда је

$$\frac{dU}{dn} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n} = |\text{grad } U|,$$

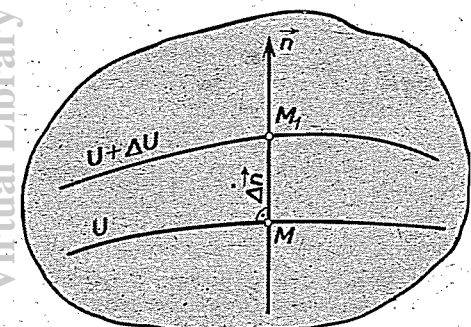
где је Δn најкраће растојање тих површина. *Интензитет градијента је, дакле, обрнуто сразмеран растојању еквискаларних површина* (упоредити изохипсе и нагиб).

Нека је дата тачка M , раван (R) и орт нормале \vec{n} те равни. Раздаљина тачке M од те равни је $\vec{r} = r\vec{n}$, где је r скалар. Скалар U зависи од скалара r , па се, по претпоставци, може написати у облику $U = U(r)$. Како је $r = (\vec{r}, \vec{n})$, то је $dr = (d\vec{r}, \vec{n})$. Стога је

$$\begin{aligned} dU &= U'(r) \cdot dr = (\text{grad } U, d\vec{r}) = \\ &= U'(r) \cdot (d\vec{r}, \vec{n}). \end{aligned}$$

Изједначењем ових израза добија се

$$\text{grad } U = U'(r) \cdot \vec{n}. \quad (86)$$

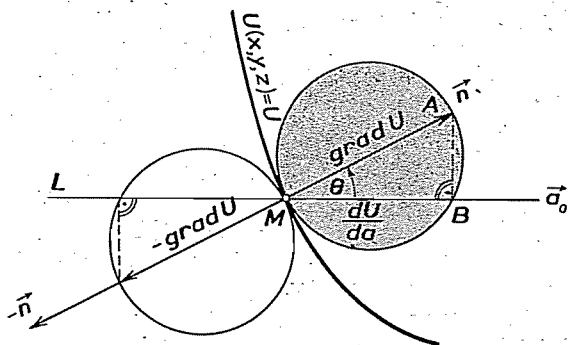


Слика 22. — $|\text{grad } U|$ зависи од растојања еквискаларних површина

Интензитет градијента функције раздаљине тачке од равни једнак је изводу те функције по скалару r — раздаљини тачке од равни. Еквискаларне површине су *паралелне равни* са ортом нормале \vec{n} .

Нека је раздаљина тачке M од неке сталне осе (L) вектор \vec{r} и нека скалар U зависи од растојања тачке од осе, $U = U(r)$, онда је

$$dU = U'(r) \cdot dr = (\text{grad } U, d\vec{r}),$$



Слика 21. — Представљање извода скалара

па, слично претходном извођењу, добиће се

$$\text{grad } U = U'(r) \cdot \vec{r}_0 = U'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (87)$$

Градијент функције раздаљине тачке од осе по интензитету једнак је изводу те функције по скалару r — раздаљини тачке од осе — и пада у правац тог потега, а у смеру пораста скалара. Еквискаларне површине су *коаксијални цилиндри* са осом (L). Правац градијента пада, дакле, у правац полупречника цилиндра.

На потпуно исти начин добићемо израз за градијент функције раздаљине тачке M од сталне тачке — пола O :

$$\text{grad } U = U'(r) \cdot \vec{r}_0 = U'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (88)$$

У овом случају еквискаларне површине су *концентричне сфере* са средиштем у полу O . Grad U пада у правац полупречника сфере.

За случај функција раздаљина тачке од сталне равни, осе или пола еквискаларне површине су, дакле, *паралелне равни, коаксијални цилиндри и концентричне сфере*.

Ако је, на пример, r интензитет вектора положаја тачке M у односу на координатни почетак O , онда је његов градијент

$$\text{grad } r = \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r},$$

где је \vec{r}_0 орт вектора положаја. Ову вредност можемо добити и помоћу обрасца (80), јер је квадрат интензитета вектора положаја

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

па су парцијални изводи

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \alpha; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \cos \beta; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \gamma,$$

где су α, β, γ углови које вектор положаја гради са координатним осама. Косинуси ових углова јесу координате орта вектора положаја за Декартове координатне осе у тачки O . Интензитет градијента једнак је *јединици*.

На исти начин добићемо и

$$\text{grad } \frac{1}{r} = \frac{-\vec{r}_0}{r^2} = \frac{-\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \text{grad } r,$$

где је \vec{r} вектор положаја тачке M , а \vec{r}_0 његов орт.

Помоћу градијента можемо лако одредити једначине нормале и тангенцијалне равни површине $f(x, y, z) = f(\vec{r}) = 0$ у тачки M_0 . Ако је положај тачке M_0 на тој површини, (сл. 14) одређен вектором положаја \vec{r}_0 у односу на координатни почетак O , а произвољне тачке M на нормали

вектором $\vec{\rho}_n$, односно произвољне тачке M' у тангенцијалној равни вектором $\vec{\rho}_T$, онда ћемо добити једначине:

a) *нормале површине*, из услова колинеарности вектора $\vec{\rho}_n - \vec{r}_0$ и \vec{p} , односно $\text{grad } f$:

$$[\vec{\rho}_n - \vec{r}_0, \text{grad } f] = 0, \quad (89)$$

одакле следи

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad (89')$$

b) *тангенцијалне равни*, из услова ортогоналности вектора $\vec{\rho}_T - \vec{r}_0$ и \vec{p} , односно $\text{grad } f$:

$$(\vec{\rho}_T - \vec{r}_0, \text{grad } f) = 0 \quad (90)$$

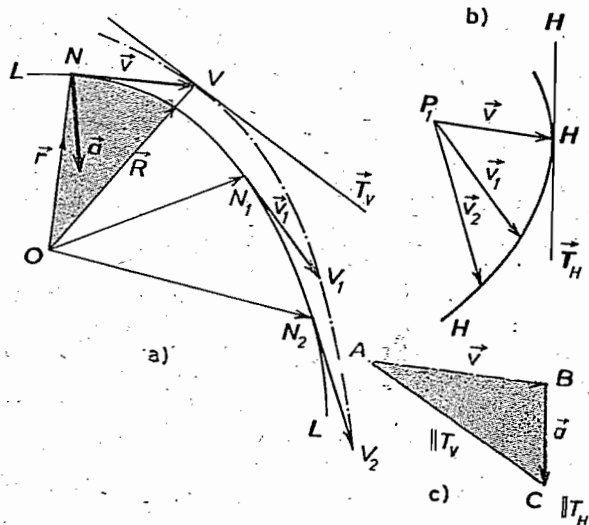
у облику

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y} + (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (90')$$

3.3. Векторско поље. — Ако свакој тачки једног поља одговара по

један одређен вектор, поље се зове векторско. Овај вектор (\vec{v}) зависи од положаја тачке N у том пољу те је функција положаја тачке. Нека тачки N_0 (сл. 23) одговара вектор \vec{v}_0 , оближњој тачки N_1 одговара вектор \vec{v}_1 , а тачки N_2 вектор \vec{v}_2 . На овај начин смо добили изломљену линију $N_0N_1N_2\dots$. Ако су одсечци N_0N_1, \dots бесконачно мали, изломљена линија прећи ће у континуалну криву линију, која има особину да је вектор поља колинеаран са управљеним линијским елементом, то јест да пада у правац тангенте на криву линију. Ове криве линије зову се *векторске линије*. Из услова колинеарности вектора $d\vec{r}$ и \vec{v} добијамо диференцијалну једначину ових линија у векторском облику

$$[d\vec{r}, \vec{v}] = 0, \quad (91)$$



Слика 23. — Векторска линија

па су скаларне диференцијалне једначине векторске линије:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (91')$$

Када су координате вектора \vec{v} познате функције координата x, y, z , интегрисањем (91') добићемо фамилију векторских линија.

Ако кроз сваку тачку неке затворене криве у том пољу повучемо векторску линију, онда ће оне ограничити један део поља који се зове *соленоид*. На тај начин помоћу векторских линија и соленоида можемо да представимо распоред вектора \vec{v} у том пољу.

Када ја вектор \vec{v} сила \vec{F} , онда се поље зове *поље силе \vec{F}* . Векторска линија овог поља зове се *линија силе*.

3.4. Дивергенција и ротор. — Градијент скалара U представили смо изразом (80), а можемо га представити и помоћу једног симболичког вектора:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (92)$$

који се зове *Хамилтонов оператор** (*nabla, atled, del*), у облику производа овог вектора и скалара U :

$$\text{grad } U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (93)$$

Помоћу векторских линија и соленоида представили смо распоред вектора \vec{v} у векторском пољу. Друге особине овог распореда одређују се помоћу *дивергенције*** и *ротора* вектора \vec{v} . Под дивергенцијом вектора \vec{v} подразумевамо скаларни производ Хамилтоновог оператора и вектора \vec{v} , што се симболички обележава овако:

$$\text{div } \vec{v} = (\nabla, \vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (94)$$

Пошто је дивергенција скаларни производ, она је *скалар*.

Под ротором вектора \vec{v} подразумева се векторски производ Хамилтоновог оператора и вектора \vec{v} , па се симболички обележава

$$\text{rot } \vec{v} = [\nabla, \vec{v}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (95)$$

* W. R. Hamilton, 1842. године.

** W. K. Clifford, 1878. године.

те се као сваки векторски производ може написати у облику детерминанте трећег реда.

Ако је \vec{v} вектор положаја \vec{r} тачке M , онда су

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3; \quad \operatorname{rot} \vec{r} = 0.$$

Дивергенција градијента неког скалара U дата је изразом

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = (\nabla, \nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U.$$

Увођењем ознаке:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (96)$$

такозваног *Лајласовој* (*Laplace*, 1749 — 1827) *оператора* (или *лајласијана*), може се написати овако:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U. \quad (97)$$

Помоћу ова два оператора могу се упростити многи изрази. При употреби Хамилтоновог оператора треба водити рачуна да он има диференцијални и векторски карактер и да подлеже дистрибутивном закону. Лајласов оператор примењен на скаларе даје скалар, а примењен на векторе даје вектор.

На пример, биће:

$$1) \operatorname{div} U\vec{v} = (\nabla, U\vec{v}) = U(\nabla, \vec{v}) + \vec{v}(\nabla U) = U \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} U;$$

$$2) \operatorname{rot} U\vec{v} = [\nabla, U\vec{v}] = U[\nabla, \vec{v}] + [\nabla U, \vec{v}] = U \operatorname{rot} \vec{v} + [\operatorname{grad} U, \vec{v}];$$

$$3) \Delta r = \frac{2}{r}, \text{ где је } r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ јер је } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3};$$

$$4) \operatorname{grad} \ln r = \frac{x}{r^2} \vec{i} + \frac{y}{r^2} \vec{j} + \frac{z}{r^2} \vec{k} = \frac{\vec{r}}{r^2};$$

$$5) \Delta \ln r = \operatorname{div} \operatorname{grad} \ln r = \frac{1}{r^2},$$

пошто је

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln r = \frac{x}{r^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}; \dots$$

Применом основних операција са векторима можемо лако извести ове обрасце:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} U &= [\nabla, \nabla U] = 0; & \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} &= (\nabla, [\nabla, \vec{v}]) = 0; \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} &= [\nabla, [\nabla \vec{v}]] = \nabla(\nabla \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \Delta \vec{v}. \end{aligned} \quad (98)$$

Ако је функција положаја одређена поларно-цилиндричким координатама $U = U(r, \varphi, z)$ или сферним $U = U(\rho, \varphi, \psi)$, њен градијент и Лапласов оператор одредићемо користећи се ставом да је извод скалара у неком правцу једнак пројекцији градијента на тај правац или помоћу једначине (80), користећи се формулама трансформација координата (Кинематика чл. 1). Када U зависи само од једне координате q , то јест ако је $U = U(q)$, онда је пројекција градијента на правац q дата изразом

$$|\nabla U|_q = \frac{dU}{dn} = \frac{\partial U}{\partial q} \frac{dq}{dn}, \quad (99)$$

где је dn елемент нормале еквискаларне површине.

а) *Поларно-цилиндрички систем.* — За $r = \text{const.}$ еквискаларна површина је кружни цилиндар (сл. 4) и нормала пада у правац полупречника, те је

$$|\nabla U|_r = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{dr}{dr} = \frac{\partial U}{\partial r}.$$

За $\varphi = \text{const.}$ она је меридионална равна, па је $\vec{n} \perp \vec{r}$ и $dn = r d\varphi$, стога је

$$|\nabla U|_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{rd\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \text{ за } z = \text{const.} \text{ биће } \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Дакле, биће

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{c}_0 + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (100)$$

Исти образац можемо добити и из формула трансформација (Кинематика, обр. 6') пошто је

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

а између ортова постоје односи:

$$\vec{r}_0 = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi; \quad \vec{c}_0 = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi; \quad \vec{k} = \vec{k}.$$

Хамилтонов и Лапласов оператор дати су изразима

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{c}_0 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k};$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (101)$$

b) *Сферни координатни систем.* — За $\rho = \text{const.}$ еквискаларна површина је сфера (Кинематика, чл. 1.4), \vec{n} пада у правац $\vec{\rho}$, па је $dn = d\rho$ и $\frac{d\rho}{dn} = 1$; за $\varphi = \text{const.}$ је меридионална равна, па је $dn = \rho \cos \psi d\varphi$ и

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{\rho \cos \psi}; \text{ за } \psi = \text{const.} \text{ је конус, па је } \frac{d\psi}{dn} = \frac{1}{\rho}.$$

тога је

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{c}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \psi} \vec{v}_0. \quad (102)$$

Исти образац добићемо и из формула трансформација (Кинематика, обр. 8'), јер су парцијални изводи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\rho} = \cos \psi \cos \varphi; & \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \cos \psi \sin \varphi; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin \varphi}{\rho \cos \psi}; & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos \varphi}{\rho \cos \psi}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{-xz}{\rho^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-\cos \varphi \sin \psi}{\rho}; & \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\rho}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \sin \psi; & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos \psi}{\rho}. \end{aligned}$$

та је, на пример:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\cos \psi \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\sin \varphi}{\rho \cos \psi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi \sin \psi}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \psi} \right),$$

између ортова оба система постоје односи

	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
$\vec{\rho}_0$	$\cos \psi \cos \varphi$	$\cos \psi \sin \varphi$	$\sin \psi$
\vec{v}_0	$-\sin \psi \cos \varphi$	$-\sin \psi \sin \varphi$	$\cos \psi$
\vec{c}_0	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0

Хамилтонов и Лапласов оператор дати су изразима:

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{c}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \vec{v}_0; \\ \Delta &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{2}{\rho^2 \cos^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{1}{\rho^2 \cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right). \end{aligned} \quad (103)$$

с) Генералисани координатни систем. — Хамилтонов и Лапласов оператор, као и дивергенцију и ротор неког вектора \vec{v} , можемо извести и у генералисаном координатном систему (Кинематика, чл. 3.3, 4.3, сл. 6). Координатне површине овог координатног система можемо сматрати еквискаларним површинама скалара q_1 , односно q_2 или q_3 . Нормале ових еквискаларних површина одређене су градијентима наведених скалара.

1° Градијент у генералисаним координатама. — Нека је дата скаларна функција $U = U(q_1, q_2, q_3)$, где су q_1, q_2, q_3 ортогоналне генералисане координате, онда је, према (81), прираштај скалара dU у правцу вектора померања $d\vec{r}$:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3} dq_3 = (\text{grad } U, d\vec{r}), \quad (104)$$

где је

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = \sum_{i=1}^3 A_i dq_i \vec{T}_i.$$

Изједначењем чланова са обе стране претходне једначине уз исте диференцијале dq_i добијамо

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = A_i (\text{grad } U, \vec{T}_i),$$

па је пројекција градијента скалара U на правац осе \vec{T}_i ортогоналног криволинијског координатног система дата изразом

$$|\text{grad } U|_{q_i} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

те је градијент

$$\text{grad } U = \frac{1}{A_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \vec{T}_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \vec{T}_2 + \frac{1}{A_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \vec{T}_3. \quad (105)$$

Из претходног израза непосредно се види да Хамилтонов оператор има облик

$$\nabla = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \vec{T}_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \vec{T}_2 + \frac{1}{A_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \vec{T}_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{T}_i. \quad (106)$$

2° Дивергенција у генералисаним координатама. — Нека векторска функција \vec{v} има ортогоналне генералисане координате v_1, v_2 и v_3 , онда можемо написати

$$\vec{v} = v_1 \vec{T}_1 + v_2 \vec{T}_2 + v_3 \vec{T}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{T}_i,$$

па, с обзиром на образац $\text{div } U \vec{v}$ (стр. 317), биће:

$$\text{div } \vec{v} = \left(\nabla, \sum_{i=1}^3 v_i \vec{T}_i \right) = \sum_{i=1}^3 v_i \text{div } \vec{T}_i + \sum_{i=1}^3 (\vec{T}_i, \text{grad } v_i), \quad (107)$$

где смо, краткоће ради, увели ознаке збира. Из те једначине видимо да

Треба претходно одредити дивергенције појединих ортова \vec{T}_i генералисаног система и градијенте ортогоналних генералисаних координата v_i . Због ортогоналности оса генералисаног система, дивергенција орта \vec{T}_i биће

$$\operatorname{div} \vec{T}_1 = \operatorname{div} [\vec{T}_2, \vec{T}_3] = (\nabla, [\vec{T}_2, \vec{T}_3]).$$

С обзиром на познату релацију векторске алгебре за мешовити производ три вектора*, наведени израз можемо написати у облику

$$(\nabla, [\vec{T}_2, \vec{T}_3]) = -(\vec{T}_2, [\nabla, \vec{T}_3]) + (\vec{T}_3, [\nabla, \vec{T}_2]),$$

односно

$$\operatorname{div} \vec{T}_1 = (\vec{T}_3, \operatorname{rot} \vec{T}_2) - (\vec{T}_2, \operatorname{rot} \vec{T}_3).$$

Да бисмо одредили роторе појединих ортова, претходно ћемо одредити градијент генералисане координате q_i непосредно из једначине (106), па је

$$\operatorname{grad} q_i = \nabla q_i = \frac{1}{A_i} \vec{T}_i, \text{ на пример } \nabla q_1 = \frac{1}{A_1} \vec{T}_1.$$

Због $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$ је и $\operatorname{rot} \operatorname{grad} q_i = 0$, па можемо, према обрасцу $\operatorname{rot} U \vec{v}$ (стр. 317), написати

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} q_i = \operatorname{rot} \frac{1}{A_i} \vec{T}_i = \frac{1}{A_i} \operatorname{rot} \vec{T}_i - \left[\vec{T}_i, \operatorname{grad} \frac{1}{A_i} \right] = 0,$$

па је

$$\operatorname{rot} \vec{T}_i = -\frac{1}{A_i} [\vec{T}_i, \operatorname{grad} A_i]. \quad (108)$$

пошто је**

$$\operatorname{grad} \frac{1}{U} = -\frac{1}{U^2} \operatorname{grad} U \quad \text{односно} \quad \operatorname{grad} \frac{1}{A_i} = -\frac{1}{A_i^2} \operatorname{grad} A_i.$$

С обзиром на једначину (106), градијент скалара A_i биће:

$$\nabla A_i = \operatorname{grad} A_i = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_i}{\partial q_1} \vec{T}_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_i}{\partial q_2} \vec{T}_2 + \frac{1}{A_3} \frac{\partial A_i}{\partial q_3} \vec{T}_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \vec{T}_i,$$

друга два добијају се на исти начин. Према томе, ротори ортова су:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{T}_1 &= -\frac{1}{A_1} [\vec{T}_1, \nabla A_1] = \frac{1}{A_3 A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \vec{T}_2 - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \vec{T}_3; \\ \operatorname{rot} \vec{T}_2 &= -\frac{1}{A_2} [\vec{T}_2, \nabla A_2] = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \vec{T}_3 - \frac{1}{A_2 A_3} \frac{\partial A_2}{\partial q_3} \vec{T}_1; \\ \operatorname{rot} \vec{T}_3 &= -\frac{1}{A_3} [\vec{T}_3, \nabla A_3] = \frac{1}{A_2 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial q_2} \vec{T}_1 - \frac{1}{A_3 A_1} \frac{\partial A_3}{\partial q_1} \vec{T}_2, \end{aligned} \quad (109)$$

* Статика, обр. 309.

** $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}_0}{r^2} = \frac{1}{r^2} \nabla r.$

а помоћу њих одређујемо и дивергенције:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{T}_1 &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{1}{A_3 A_1} \frac{\partial A_3}{\partial q_1}; & \operatorname{div} \vec{T}_2 &= \frac{1}{A_2 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2}; \\ \operatorname{div} \vec{T}_3 &= \frac{1}{A_3 A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} + \frac{1}{A_2 A_3} \frac{\partial A_2}{\partial q_3}. \end{aligned} \quad (110)$$

Пошто је, према (105),

$$\operatorname{grad} \vec{v}_1 = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_1}{\partial q_i} \vec{T}_i,$$

скаларни производ је

$$(\vec{T}_1, \nabla v_1) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1},$$

па се израз за дивергенцију може написати у облику

$$\operatorname{div} v_1 \vec{T}_1 = v_1 \operatorname{div} \vec{T}_1 + (\vec{T}_1, \nabla v_1) = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 A_3 v_1).$$

Цикличком пермутацијом могу се одредити и други збирови, па се израз за дивергенцију (107) може написати у дефинитивном облику:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 A_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 A_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 A_2 v_3) \right]. \quad (111)$$

3^e Роџор у генералисаним координатама. — Ротор збира вектора једнак је збору ротора појединих сабирака, па је

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} (v_1 \vec{T}_1) + \operatorname{rot} (v_2 \vec{T}_2) + \operatorname{rot} (v_3 \vec{T}_3).$$

Користећи образац за $\operatorname{rot} U \vec{v}$ (стр. 317), добиће се

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \sum_{i=1}^{i=3} v_i \operatorname{rot} \vec{T}_i + \sum_{i=1}^{i=3} -[\vec{T}_i, \operatorname{grad} v_i].$$

С обзиром на образце (109), за прва два сабирка биће

$$v_1 \operatorname{rot} \vec{T}_1 - [\vec{T}_1, \operatorname{grad} v_1] = -\frac{1}{A_1} \{v_1 [\vec{T}_1, \nabla A_1] + A_1 [\vec{T}_1, \nabla v_1]\} = -\frac{1}{A_1} [\vec{T}_1, \nabla (A_1 v_1)],$$

па се добија израз за ротор у ортогоналним генералисаним координатама

$$\operatorname{rot} \vec{v} = -\left\{ \frac{1}{A_1} [\vec{T}_1, \nabla (A_1 v_1)] + \frac{1}{A_2} [\vec{T}_2, \nabla (A_2 v_2)] + \frac{1}{A_3} [\vec{T}_3, \nabla (A_3 v_3)] \right\}, \quad (112)$$

помоћу кога се могу лако одредити пројекције на координатне осе генерализаног система скаларним множењем претходне једначине ортовима наведених оса.

4° Лапласов оператор у генерализаним координатама. — Због тога што је $\text{div grad } U = \Delta U$, из једначине (111), стављајући $\vec{v} = \text{grad } U$, добијамо ΔU , да је Лапласов оператор дат образцем

$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{A_3 A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{A_1 A_2}{A_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (113)$$

Цилиндрички и сферни координатни системи су ортогонални криволинијски системи, па су сви образци дати у следећој табlici.

\vec{T}_i	\vec{r}_0	\vec{c}_0	\vec{k}	$\vec{\rho}_0$	\vec{c}_0	\vec{v}_0
q_i	r	φ	z	ρ	φ	ψ
A_i	1	r	1	1	$\rho \cos \psi$	ρ
$A_1 A_2 A_3$	r			$\rho^2 \cos \psi$		
∇	Образац 101			Образац 103		
Δ	„			„		
$\text{div } \vec{v}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$			$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\rho^2 v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial(v_\psi \cos \psi)}{\partial \psi}$		
Пројекције \uparrow $\text{rot } \vec{v}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$	$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}$	$\frac{1}{\rho \cos \psi} \left[\frac{\partial(v_\varphi \cos \psi)}{\partial \psi} - \frac{\partial v_\psi}{\partial \varphi} \right]$	$\frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\rho v_\psi)}{\partial \rho}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\psi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \psi}$

3.5. Класификација векторских поља.* — Према вредности дивергенције и ротора, векторска поља деле се у четири групе:

1° *Потенцијално или безвртложно поље*, код кога су испуњени ови услови: $\text{rot } \vec{v} = 0$ свуда у пољу, $\text{div } \vec{v} \neq 0$ бар у неким тачкама поља. Ова поља се зову и *ламеларна*. Тачке поља у којима је $\text{div } \vec{v} > 0$ зову се *извори*, а тачке у којима је $\text{div } \vec{v} < 0$ јесу *јонори*.

2° *Вртложно или соленоидно поље*, код кога су испуњени ови услови: $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ бар у неким тачкама поља, $\text{div } \vec{v} = 0$ свуда у пољу.

3° *Лајласово поље*, код кога су свуда у пољу испуњени услови: $\text{rot } \vec{v} = 0$ и $\text{div } \vec{v} = 0$. Ово поље има особине прва два поља. Код њега је испуњен и услов $\Delta U = 0$. Функције које задовољавају овај услов, такозвану *Лајласову једначину*, зову се *хармонијске*. Таква је, на пример $U = 1/r$, где је r интензитет вектора положаја тачке у односу на стални пол O .

Да је ова функција хармонијска, можемо доказати ако узмемо да је

$$\Delta U = \text{div grad } \frac{1}{r} = \left(\nabla, -\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0.$$

4° *Сложено поље*, ако су у неким тачкама поља испуњени услови: $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ и $\text{div } \vec{v} \neq 0$.

У механици** је најважније прво поље. Оно се јавља при проучавању конзервативних сила, остала у хидромеханици, а Лапласово у теорији еластичности (*контурни проблеми* — *Randwertaufgaben*).**

3.6. Генерализација контраваријантне и коваријантне координате вектора брзине и убрзања. — У Статици**** смо видели да се један вектор може разложити у три компоненте у правцима оса три некомпланарна вектора на два начина: помоћу *контраваријантних (обичних) координата* (x^i) и помоћу *коваријантних координата* (x_i):

$$\vec{r} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 = x_1 \vec{e}^1 + x_2 \vec{e}^2 + x_3 \vec{e}^3; \quad x^i = (\vec{r}, \vec{e}^i), \quad x_i = (\vec{r}, \vec{e}_i). \quad (114)$$

Прве се добијају повлачењем паралела координатним осама, а друге су пројекције вектора положаја. Триедар вектора \vec{e}^i реципрочан је триедру вектора \vec{e}_i , и обратно. Први вектори се изражавају помоћу других на овај

* Детаљније видети: Т. Анђелић — Теорија вектора, Београд 1949,
D. Ivanović: Osnovi teorije vektora, Beograd 1948.

** Д. Рашковић: Динамика (Додатак II).

*** Ј. Хлитчијев: Поглавља из теорије еластичности, Београд 1948, стр. 47.

**** Додатак, чл. 16 сл. 396.

начин: $\vec{e}^i = [\vec{e}_j, \vec{e}_k] / \Delta$, $i \neq j \neq k$, где је $\Delta = (e_1, [e_2, e_3])$. Из (111) следи да су координате

$$x^i = (\vec{r}, \vec{e}^i) = g^{i1} x_1 + g^{i2} x_2 + g^{i3} x_3, \quad x_i = (\vec{r}, \vec{e}_i) = g_{i1} x^1 + g_{i2} x^2 + g_{i3} x^3, \quad (115)$$

где су g_{ik} вредности скаларних производа основних вектора који су показани у следећој схеми*:

(\vec{e}_i, \vec{e}_k)	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3	(\vec{e}^i, \vec{e}^k)	\vec{e}^1	\vec{e}^2	\vec{e}^3	$(\vec{e}_i, \vec{e}^k) = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$
\vec{e}_1	g_{11}	g_{12}	g_{13}	\vec{e}^1	g^{11}	g^{12}	g^{13}	
\vec{e}_2	g_{21}	g_{22}	g_{23}	\vec{e}^2	g^{21}	g^{22}	g^{23}	
\vec{e}_3	g_{31}	g_{32}	g_{33}	\vec{e}^3	g^{31}	g^{32}	g^{33}	

(116)

Квадрат вектора положаја је скаларни производ истог вектора израженог у коваријантном и контраваријантном облику, па се представља квадратном формом једних или других координата:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3) (x_1 \vec{e}^1 + x_2 \vec{e}^2 + x_3 \vec{e}^3) = (x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3) = \sum_{i=1}^3 x^i x_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 g^{ik} x_k \right) x_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g^{ik} x_i x_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik} x^i x^k; \end{aligned} \quad (117)$$

он се назива и *мејричком формом*.

За одређивање коваријантних и контраваријантних координата вектора брзине (\vec{v}) и убрзања (\vec{a}), за основне векторе (\vec{e}_i) узећемо парцијалне изводе вектора положаја (\vec{r}) по генералисаној координати (q_i): $\vec{e}_i = \partial \vec{r} / \partial q_i = A_i \vec{T}_i$, где су A_i Ламеови коефицијенти, а \vec{T}_i ортови координатних оса генералисаног координатног система. Како је диференцијал вектора положаја

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^3 A_i dq_i \vec{T}_i = A_1 dq_1 \vec{T}_1 + A_2 dq_2 \vec{T}_2 + A_3 dq_3 \vec{T}_3, \quad (117')$$

квадрант елементија лука, односно мејричка форма, гласиће:

$$\begin{aligned} ds^2 = dr^2 &= \sum_i \sum_k g_{ik} dq_i dq_k = g_{11} dq_1^2 + g_{22} dq_2^2 + g_{33} dq_3^2 + \\ &+ 2g_{12} dq_1 dq_2 + 2g_{13} dq_1 dq_3 + 2g_{23} dq_2 dq_3, \end{aligned} \quad (118)$$

* δ_i^k је Кронекеров (Kronecker) симбол.

где је

$$g_{ik} = (\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right) = A_i A_k (\vec{T}_i, \vec{T}_k). \quad (118')$$

Дакле, коефицијенти g_{ii} јесу квадрати Ламеових коефицијената (A_i^2), а g_{ik} су коефицијенти B_j (Кинематика, обр. 60).

Из (115) следи вектор брзине покретне тачке:*

$$\vec{v} = \sum_i A_i \dot{q}_i \vec{T}_i = \sum_i \dot{q}_i \vec{e}_i = \dot{q}_1 \vec{e}_1 + \dot{q}_2 \vec{e}_2 + \dot{q}_3 \vec{e}_3, \quad (119)$$

а из (116) квадрат вектора брзине:

$$v^2 = \sum_i \sum_k g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = g_{11} \dot{q}_1^2 + g_{22} \dot{q}_2^2 + g_{33} \dot{q}_3^2 + 2g_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2g_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2g_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3, \quad (119')$$

где је \dot{q}_i генералисана брзина.

Вектор брзине (119) може се представити у овом облику:

$$\vec{v} = \sum_i \dot{q}_i \vec{e}_i = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + v^3 \vec{e}_3 = v_1 \vec{e}^1 + v_2 \vec{e}^2 + v_3 \vec{e}^3, \quad (120)$$

па су контраваријантне координате вектора брзине

$$v^i = \dot{q}_i = (\vec{v}, \vec{e}^i). \quad (121)$$

Оне су, дакле, једнаке генералисаним брзинама.

Коваријантне координате вектора брзине биће

$$v_i = (\vec{v}, \vec{e}_i) = \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial (1/2 v^2)}{\partial \dot{q}_i}, \quad (122)$$

јер је $\partial \vec{r} / \partial q_i = \partial \vec{v} / \partial \dot{q}_i$.

За три ортогонална криволинијска координатна система биће

q_i	x	y	z	r	φ	z	ρ	φ	ψ
v^2	$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$			$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$			$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2$		
v^i	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}	\dot{r}	$r \dot{\varphi}$	\dot{z}	$\dot{\rho}$	$\rho \dot{\varphi}$	$\dot{\psi}$
v_i	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}	\dot{r}	$r^2 \dot{\varphi}$	\dot{z}	$\dot{\rho}$	$\rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi = r^2 \dot{\varphi}$	$\rho^2 \dot{\psi}$

* Кинематика, обр. 60.

Код Декартовог правоуглог система коваријантне и контраваријантне координате су једнаке, међутим код поларно-цилиндричког и сферног система коваријантне координате вектора брзине за циркуларну, односно циркуларну и меридионалну координату, јесу секторске брзине.

Како је убрзање $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, коваријантне координате вектора убрзања јесу

$$a_i = (\vec{a}, \vec{e}_i) = \left(\vec{a}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q_i} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q_i}, \quad (123)$$

јер су

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) + \left(\vec{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) + \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right),$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \quad d \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \right] / dt = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}.$$

Како су

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \sum_r \sum_k g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k; \quad \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k g_{ik} \dot{q}_k; \quad \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{\partial g_{rs}}{\partial q_i} \dot{q}_r \dot{q}_s,$$

биће

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k g_{ik} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \left[\frac{\partial g_{ir}}{\partial q_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial q_r} \right] \dot{q}_r \dot{q}_s.$$

Стога је, на пример,

$$\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q_1} = g_{11} \dot{q}_1 + g_{12} \dot{q}_2 + g_{13} \dot{q}_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial \dot{q}_1} \right) &= g_{11} \ddot{q}_1 + g_{12} \ddot{q}_2 + g_{13} \ddot{q}_3 + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial g_{11}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial g_{11}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \right) \dot{q}_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial g_{12}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \right) \dot{q}_2 + \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial g_{13}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial g_{13}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \right) \dot{q}_3, \end{aligned}$$

па је коваријантна координата

$$a_i = \sum_k g_{ik} \ddot{q}_k + \sum_r \sum_s \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ir}}{\partial q_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial q_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_r \dot{q}_s. \quad (124)$$

Она се може написати овако:

$$a_i = \sum_{k=1}^3 g_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \begin{bmatrix} r & s \\ & i \end{bmatrix} \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad (124')$$

где је

$$\begin{bmatrix} r & s \\ & i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ir}}{\partial q_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial q_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial q_i} \right]; \quad i = 1, 2, 3 \quad (125)$$

*Кристџофелов симбол прве врсте.**

Према (116), биће *контраваријантне* координате вектора убрзања

$$a^i = \sum_k^3 g^{ik} a_k = \sum_k^3 g^{ik} \left(\sum_i^3 g_{ki} \ddot{q}_i + \sum_r^3 \sum_s^3 [r_k \ s] \dot{q}_r \dot{q}_s \right). \quad (126)$$

Како је

$$(\vec{e}_i, \vec{e}^k) = \sum_i^3 g^{ik} g_{ik} = \delta_i^k \begin{cases} = 1; & i=k, \\ = 0; & i \neq k, \end{cases}$$

контраваријантна координата биће

$$a^i = \ddot{q}_i + \sum_r^3 \sum_s^3 \begin{bmatrix} r & s \\ & i \end{bmatrix} \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad (127)$$

где је

$$\begin{bmatrix} r & s \\ & i \end{bmatrix} = \sum_k^3 g^{ik} \begin{bmatrix} r & s \\ & k \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (128)$$

Кристџофелов симбол групе врсте.

За криволинијски правоугли координатни систем су:

$g_{ii} = A_i^2$; $g_{ik} = g_{ki} = 0$; $\vec{e}_i = A_i \vec{T}_i$; $\Delta = (\vec{e}_1, [\vec{e}_2, \vec{e}_3]) = A_1 A_2 A_3$; $e^1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3] / \Delta = -A_2 A_3 [\vec{T}_2, \vec{T}_3] / A_1 A_2 A_3 = A_1^{-1} \vec{T}_1$; $\vec{e}^i = A_i^{-1} \vec{T}_i$, па су $g^{ii} = 1/A_i^2$. Због тога се контраваријантне и коваријантне координате вектора убрзања могу, због (123) и (126), одредити помоћу образаца:

$$a_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q_i}; \quad a^i = g^{ii} a_i = \frac{a_i}{A_i^2}. \quad (129)$$

Резултати су изнети у следећој табlici. Из ње се види да је убрзање a_2 у поларно-цилиндричком систему двоструко секторско убрзање, а такође су и a_2 и a_3 у сферном систему двострука секторска убрзања.

* Christoffel; Journal für Mathematik, 1869.

i	1	2	3	1	2	3	1	2	3
q_i	x	y	z	r	φ	z	ρ	ψ	ψ
\dot{q}_i	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}	\dot{r}	$\dot{\varphi}$	\dot{z}	$\dot{\rho}$	$\dot{\psi}$	$\dot{\psi}$
\ddot{q}_i	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}	\ddot{r}	$\ddot{\varphi}$	\ddot{z}	$\ddot{\rho}$	$\ddot{\psi}$	$\ddot{\psi}$
A_i	1	1	1	1	r	1	1	$\rho \cos \psi$	ρ
$g_{ii} = A_i^2$	1	1	1	1	r^2	1	1	$\rho^2 \cos^2 \psi = r^2$	ρ^2
$g^{ii} = \frac{1}{A_i^2}$	1	1	1	1	$\frac{1}{r^2}$	1	1	$\frac{1}{\rho^2 \cos^2 \psi}$	$\frac{1}{\rho^2}$
v^2	$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$			$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$			$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \rho^2 \dot{\psi}^2$		
$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} v^2$	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}	\dot{r}	$r^2 \dot{\varphi}$	\dot{z}	$\dot{\rho}$	$\rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi$	$\rho^2 \dot{\psi}$
$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} v^2$	0	0	0	$r \dot{\varphi}^2$	0	0	$\rho \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \rho \dot{\psi}^2$	0	$-\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\psi$
a_i	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}	$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$	$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$	\ddot{z}	$\ddot{\rho} - \rho (\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2)$	$\frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi) = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$	$\frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\psi}) + \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\psi$
$a^i = \frac{a_i}{A_i^2}$	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}	$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$	\ddot{z}	a_1	$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi)$	$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\psi}) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin 2\psi$

Примери. — 1. Наћи вредност извода скалара $U = 3x^4 - xy + y^3$ у тачки (1; 2) у правцу који са позитивном x -осом чини угао 60° . (10)

2. Наћи извод скалара $U = xyz$ у тачки (1; 3; 6) у правцу тачке (5; 6; 18).

Решење.

$$\cos \alpha = \frac{4}{13}; \quad \cos \beta = \frac{3}{13}; \quad \cos \gamma = \frac{12}{13},$$

па је

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = yz = 18; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 3; \quad \frac{dU}{dr} = \frac{18}{13}(4+1+2) = \frac{126}{13}.$$

3. Дато је поље скалара $U = 4x + e^{yz}$. Израчунати интензитет градијента тог скалара у тачки (4; 0; -3).

Решење.

$$\text{grad } U = 4\vec{i} + ze^{yz}\vec{j} + ye^{yz}\vec{k} = 4\vec{i} - 3\vec{j},$$

па је

$$|\text{grad } U| = \sqrt{25} = 5.$$

4. Доказати да је $\text{div } \vec{r}_0 = \frac{2}{r}$ ако је $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Решење. — Како је

$$\vec{r}_0 = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k},$$

то је

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{r^2 - x^2}{r^3}; \dots;$$

односно

$$\text{div } \vec{r}_0 = \frac{1}{r^3} [3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] = \frac{2}{r}.$$

5. Координате вектора \vec{v} јесу: $x + y^2$, $z - xy$, $x - y - z$. Испитати да ли је тачка (-1; 3; 4) извор или понор. Колики је интензитет ротора вектора у тој тачки поља?

Решење.

$$\text{div } \vec{v} = -x = 1 > 0 \text{ (извор);} \quad \text{rot } \vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}; \quad |\text{rot } \vec{v}| = \sqrt{14}.$$

6. Доказати следеће једнакости:

$$a) \text{ grad } r^2 = 2\vec{r}; \quad b) \text{ grad } \frac{1}{r^2} = -2 \frac{\vec{r}_0}{r^3}; \quad c) \text{ div grad } r^2 = 6; \quad d) \text{ div } \frac{\vec{r}}{r^3} = 0,$$

где је

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Решење.

$$a) \text{ grad } r^2 = 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 2\vec{r}; \quad b) \text{ grad } \frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^4}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -2 \frac{\vec{r}_0}{r^3};$$

$$c) \text{ div grad } r^2 = 2 + 2 + 2 = 6; \quad d) v_x = \frac{x}{r^3} \text{ па је } \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \dots;$$

а због симетрије биће

$$\frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

7. Вектор \vec{F} је градијент скалара $U = (x^2 + y^2 + z^2)z^2 = r^2 z^2$. Доказати да је $\text{rot grad } U = 0$.

Решење.

$$\vec{F} = \text{grad } U = 2xz^2 \vec{i} + 2yz^2 \vec{j} + 2z(x^2 + y^2 + z^2) \vec{k},$$

па је

$$\text{rot } \vec{F} = (4zy - 4zy) \vec{i} + (4xz - 4xz) \vec{j} = 0.$$

8. Израчунати извод скалара $U = z \text{tg}(\pi y/4x)$ у правцу бинормале криве

$$x = 1 + t - t^2, \quad y = t - 1, \quad z = t^2 + 3t^2 - t + 2$$

тачки $M(t=0)$.

$$[x = 1 - 2t; \quad \dot{x} = -2; \quad y = 1; \quad \dot{y} = 0; \quad z = 3t^2 + 6t - 1; \quad \dot{z} = 6t + 6;$$

$$A = 6; \quad B = -4; \quad C = 2;$$

$$\cos \alpha_B = 3/\sqrt{14}; \quad -2/\sqrt{14}; \quad 1/\sqrt{14};$$

$$M(1; 1; -1);$$

$$\partial U/\partial x = \pi/2; \quad \partial U/\partial y = \pi/2; \quad \partial U/\partial z = 1; \quad dU/dB = (\pi + 1)/\sqrt{14}.]$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade

elibrary.matf.bg.ac.rs

Л И Т Е Р А Т У Р А

- Анђелић Т. — Теорија вектора. Београд 1949.
- Арновљевић И. — Основи теоријске механике, I и III део, Београд 1947.
- Autenrieth — Ensslin — Technische Mechanik, III Auflage, Berlin 1922.
- Базјанас Д. — Osnovi Teorije mehanizama, I dio, Tehnička knjiga, Zagreb 1954.
- Бeyer R. — Technische Kinematik, Leipzig, 1931.
- Билимовић А. — Рационална Механика, I, Београд 1939.
— Геометријске основе рачуна са диадама, I, Београд 1930.
— Рационална Механика III, I део-Механика чврстог тела, Научна књига, Београд 1954.
- Bricard R. — Leçons de Cinématique, Paris 1926.
- Drill A. — Vorlesungen über allgemeine Mechanik, München 1928.
- Духиљец Н. Н., Воронков И. М., Минаков А. П. — Сборник задач по Теоретической Механике. Гостехиздат, Москва 1949.
- Douligand G. — Leçons de Géométrie vectorielle, Paris 1936.
- Веселовский И. Н. — Курс Механики, Москва 1947.
- Christmann — Baer — Grundzüge der Kinematik, Berlin 1923.
- Gray A. and J. — Treatise on Dynamics, London 1911.
- Dobrovólný B. — Technická Mechanika, Praha 1946.
- Handbuch der Physik — Band III, Berlin 1928.
- Heun K. — Lehrbuch der Mechanik I Kinematik, Leipzig 1906.
- Hinkle T. R. — Kinematics of Machines, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 1960.
- Кабальский М. М., Кривошей В. Д., Савицкий Н. И., Чайковский Г. Н. — Типовые задачи по Теоретической Механике и методы их решения. Г. Из. Тех. Лит. УССР, Киев 1956.
- Кашанин Р. — Виша математика, I, Београд 1946.
- Kommerell V. und K. — Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, I, Berlin 1931.
- Lagally M. — Vektor-rechnung, Leipzig 1934.
- Lamb H. — Dynamics, Cambridge 1929.
Higher Mechanics, Cambridge 1929.
- Lambe C. G. — Applied Mathematics for Engineers and Scientists. Sir Graham Sutton, The English Universities Press LTD, London 1958.
- Лангау Л. Д., Лифшиц Е. М. — Механика. Г. Из. Ф. — М. Лит., Москва 1958.
- Langhaar H. L., Boresi A. P. — Engineering Mechanics. Mc. Graw-Hill Book Comp., New York, N. Y. 1959.

- Левенсон Л. Б. — Теория Механизмов и машин, Машгиз, Москва 1954.
- Лойцянский, Лурье — Курс теоретической механики, I, Москва 1948.
- Malsch F. — Zahl und Raum. 7. Heft. Verl. von Quell-Meyer, Leipzig 1927.
- Marcolongo R. — Theoretische Mechanik, I Kinematik und Statik (bearb. von. Timerding), Leipzig 1911.
- Marković Ž. — Uvod u Višu analizu, I i II, Zagreb 1947—48.
- Menge F. — Mechanik—Aufgaben, III, Leipzig 1938.
- Меицкерский И. В. — Сборник задач по теоретической механике, Москва 1947.
- Меицкерски И. В. — Збирка задатака из теоријске механике (превод М. Вречка), Београд 1947. и 1958.
- Миланковић М. — Небеска механика, Београд 1945.
- Некрасов И. А. — Курс теоретической Механики, I том, Москва 1945.
- Нордек А. П. — Краткий курс Дифференциальной Геометрии. Физматгиз, Москва 1958.
- Pöschl Th. — Lehrbuch der Technischen Mechanik, Berlin 1930.
- Рацевский П. К. — Курс Дифференциальной Геометрии. Г. ИЗ. Т. Т. Лит., Москва 1956.
- Riemann, Webèrs — Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig 1927.
- Routh E. J. — Die Dynamik der Systeme starrer Körper, I und II, Leipzig 1898.
- Shigley J. E. — Kinematic Analysis of Mechanisms. Mc. Graw-Hill Book Comp., New York, N. Y. 1959.
- Соколов Ф. А., Усов П. В. — Техническая Механика. Трудрезервиздат, Москва 1958.
- Sommerfeld A. — Mechanik, Leipzig 1943.
- Sonntag R. — Aufgaben aus der Technischen Mechanik, Springer-Verlag, Berlin 1955.
- Суслов К. Г. — Теоретическая Механика, Москва 1946.
- Szabó I. — Einführung in die Technische Mechanik, Springer Verlag, Berlin 1956.
- Šrejfr J. — Technická Mechanika, II, Praha 1947.
- Vogt H. — Éléments de mathématiques supérieures, I et II, Paris 1930.
- Webster A. G. — The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, Leipzig 1925.
- Whittaker E. T. — A treatise on the Analytical Dynamics, Cambridge 1937.
- Wittenbauer, Pöschl — Aufgaben aus der T. Mechanik, Berlin 1929.
- Зиновьев Вл. А. — Теория Механизмов и машин, Машгиз, Москва 1959.

РЕГИСТАР ИМЕНА

(Бројеви означавају стране)

Ампер (Ampère)	241	Лаплас (Laplace)	317
Аронхолд (Aronhold)	120	Лисажу (Lissajoux)	27
Архимед (Αρχιμήδης)	37, 53	Мебијус (Möbius)	272
Бернули (Bernoulli)	118, 251	Мемке (Mehmke)	121
Бинет (Binet)	66	Меније (Meusnier)	305
Брес (Bresse)	156	Монж (Monge)	302
Брикс (Brix)	180	Мор (Mohr)	183
Буч (Booth)	173	Морен (Morin)	254
Ват (Watt)	169	Њутн (Newton)	51
Вилис (Willis)	113, 265	Ојлер (Euler)	102, 141, 305
Витакер (Whittaker)	62	Паскал (Pascal)	94, 174
Гаус (Gauss)	300	Поансо (Poincot)	198
Грасхоф (Grashof)	168	Ривалс (Rivals)	211
Гриблер (Grübler)	168	Родриг (Rodrigues)	273
Даламбер (D' Alembert)	197	Савари (Savary)	141
Дарбу (Darboux)	298	Серс (Serret)	298
Декарт (Descartes)	9	Тејлор (Taylor)	282
Кардано (Cardano)	160, 217	Френе (Frenet)	298
Кенеди (Kennedy)	120	Хамилтон (Hamilton)	316
Клајн (Klein)	184	Хартман (Hartmann)	147
Клеро (Clairaut)	240	Хир (Hire)	156
Клифорд (Clifford)	316	Хук (Hooke)	217
Кориолис (Coriolis)	240	Чебишев	168
Кристофел (Christoffel)	328	Шал (Chasles)	117, 222
Кронекер (Kronecker)	325	Шиаци (Siacci)	69
Лагранж (Lagrange)	58		
Ламе (Lamé)	17, 39		
Ланкре (Lancret)	297		

СТВАРНИ РЕГИСТАР

(Бројеви означавају стране)

Абака	22	Брзина вредност	30
Аксијална брзина	36	— графичко одређивање	80
— убрзања	36	— димензија	30
Аксијални вектор	36	— запреминска	43
Аксонд непокретни	198, 228	— интензитет	30
— покретни	198, 228	— квадрат	34
Амперов став	241	— меридионална	37
Амплитуда	24	— обимна	45
Аналитичко одређивање брзине	31	— окренута	118
— — убрзања	32	— план (основа)	121
Анвелопа (обвојница)	157	— површинска	41
Аномалија ексцентрична	89	— покретне тачке	31
Апсолутна брзина	285	— пола	118
— девијација	241	— праволинијског кретања	31
— кретања	234, 243	— преносна	233
— убрзања	236	— пројекција	31
Апхел	68	— радијална	36
Архимедова спирала	37	— размера	31
Астероида	147, 163	— резања	30
	253	— релативна	233
База	139	— ротор	209
Балансијер	169	— секторска	42
Балистика	18	— средња	29
Било	24	— трансляторна	98
Бинеов образац	67	— тренутна	30
Бинормала	294	— угаона	44
Брегови	253	— укрсне главе	114
— Моренови	254	— управна (окренута)	118
Бресови кругови	156	— ходограф	46
Брзина		— циркуларна	37
— аксијална	36	Брикова метода	180
— алгебарска вредност	31	Ватов паралелограм	170
— аналитичко одређивање	31	— сложени механизам	170
— апсолутна	233	— строј	169
— војње	30		

Безано тело	95	Дијаграм	поларни	186
Вектор аксијалан	36	—	пут — време	72
— Дарбуов	298	—	статички	72
— делимични изводи	282	—	убрзање — брзина	75
— диференцијал	287	—	— — време	73
— интеграл	287	—	— — пут	75
— кривине	291	Динама		231
— положаја	9, 289	Дискриминанта полинома		26
— — извод	282	— прве осн. форме		301
— — ходограф	46, 282	Диференцирање вектора		281
— слободан	282	— графичко		77
Векторска анализа	281	Допунско убрзање		211
— генералисана брзина	17	Дуализам кретања		144
Векторско генералисано убрзање	39	Еволвента круга		144
Величине основне другог реда	300	Еволута		149
— првог реда	300	Ексцентрична аномалија		89
Велонида	62	Елемент лука криве		17, 39
Билисова формула	113	Елипсограф		162
Вођење са две криве	158	Елиптичка хармонијска осцилација		25
— тачке	158	Епициклиода		144
Врсте обртања	122	Завојница		91, 269
Гаусове параметарске криве	300	Завртањ		91, 221
Гаусови параметри	300	— динамички		221
Географска ширина	14	— кинематички		221, 269
Геодезијски правац	19	Закон живе силе		75
Геометријски облик	6	— пута		21
Главна нормала	294	Зглавкаста веза		171
Главни вектор	231	Зглавкasti четвороугао		171
— момент	231	Зглоб Кардана — Хука		217
Градијент скалара	312	Зупчаници диференцијални		266
Грасхофов став	168	— конични		260
График	22	— планетски		265
Графичко диференцирање	77	— цилиндрични		264
— интегрисање	80	Идентитет Лагранжев		58
— одређивање брзине	80	Извод вектора		282
— — убрзања	81	— вектора парцијални		282
Даламберова теорема	197	— — положаја		31, 289
Дарбуов вектор	298	— орта		285, 291
Девиијација	241	— скалара		312
— апсолутна	242	Изобара		311
Делимични извод вектора	282	Изотерма		311
Декремент	28	Инваријанта кинематичка		229
Деформација	95	Интеграл вектор		287
Дивергенција	316	— површински		288
Дијаграм брзина — време	72	Интеграф		82
— — — пут	72	Интегрисање графичко		80
— кинематички	72			
— кретања	72			

Интензитет брзине	30	Конечна једначина кретања	20
— вектора кривине	291	— кретања	20
— тоталног убрзања	57	— промена положаја	20
Једнако убрзано кретање	24	Контраваријантне координате	324
Једнолико кретање	102	Конусне површине	198
— обртање	102	Конхоида	151, 163
Једначина Лапласова	324	Конхоидограф	151, 165
— Ојлерова	102, 306	Координатни систем апсолутни	233
— Родригова	273	— — генералисани	15, 320
Једначине кретања коначне	20	— — Декартов	10
— — Ојлерове	102, 306	— — поларно-	
Канонски вид — динама	231	— — цилиндрички	11
Карданов круг	159	— — природни	18
— проблем	159	— — релативни	233
Кардиоида	145	— — сферни	17
Квадрат брзине	34	Кориолисово убрзање	240
Квадратна форма	301	Котрљање без клизања	139
Кватернион	259	Кретање апсолутно	233
Кинематика крутог тела	100	— векторска једначина	21
— механизма	22	— елементарно	21
— тачке	2	— елиптичко	51
Кинематичка инваријанта	229	— једнако убрзано	24
Кинематички дијаграми	72, 185	— — успорено	24
— елемент	166	— једнолико	23
— ланац	166	— квазипериодичко	27
— пар	166	— комплано	115
— (обртни) спрег	263	— коначна једначина	20
Клипни механизам	174	— коначно	20
Клајнова конструкција	184	— конст. сект. брзином	65
Коваријантне координате	324	— криволинијско	22
Координате генералисане	15	— кружно	23
— Декартове	10	— неједнолико	23
— коваријантне	324	— опште	219
— контраваријантне	324	— осцилаторно	24
— поларне	11	— параболичко	86
— поларно-цилиндричке	11	— по завојници	91
— природне	18	— — кардиоиди	92
— сферне	18	— — ланчаници	90
Константе интеграционе	32	— — хиперболи	90
Клипни механизам ексцентрични	190	— праволинијско	22
— — са обртним ци-		— пречесно	233
— — линдром	192	— пречесноно	199
— — специјални	189	— принудно	95, 157
— — центрични	175	— равно	115
Комплано кретање	115	— равномерно	23
Компоненте убрзања	55	— — криволинијско	22
— — природне	51	— релативно	233
		— реципрочно	144
		— ротационо	98
		— слагања	25, 255

Кретање сферно	197	Меридионална брзина	37
— транслаторно	98	Метода Бриксова	180
— хармонијско	24	— Клајнова	184
Криваја	169	— Морова	183
Криве Гаусове	300	— окренутих брзина	118
Кривина Гаусова	307	Метричка форма	300, 325, 340
— геодезијска	304	Механизам клипни	174
— друга	292	— кулисни	194
— нормална	304	Моментана оса обртања	305
— прва	292	Моментани пол	118
— средња	307	Морова метода	183
— торзије	292	Моторна полуга	176
— тотална	297	Мртва тачка	178
— трећа	298	Неједнолико кретање	23
— флексције	292	Непомерљива фигура	168
Кривине полупречник	292	Неравномерно обртање	98
Криволинијско кретање	22	Нормала главна	18
Критеријум Грасхофа	168	— површине	302
— Чебишева	168	Нормални пресек	304
Крмила	139	Нормално убрзање	57
Крет сила	231	Обвојница (анвелоп)	157
Круг Бресов	156	Обимна брзина	45
— Карданов	160	Образац Бинеов	67
— превојни	156	Обрасци Френеа	298
— прелазни	156	Обртање	98, 197
Кружна фреквенција	24	— једнолико	102
Кружно кретање	23	— неравномерно	103
Круто тело	95	— око непомичне осе	101
Кулиса	194	— — — тачке	197
Кулисни камен	194	— променљиво	102
— механизам	194	— равномерно	102
Лагранжев идентитет	58, 108	— слагање	256
Ламеови коефицијенти	17, 31	Обртна оса	101
Ланкреова теорема	297	— површина	308
Ланчаница	90	Обртни пол	118
Лапласијан	317	— спрег (кинематички)	263
Лемниската Бучева	173	— угао	117
Линија путање	21	Ознаке Гаусове	301
Линије асимптотне	308	— Монжеове	302
— векторске	315	Ојлер—Саваријева једначина	141
— геодезијске	308	Ојлерова једначина	107
— еквишкарне	311	Ојлерове кинематичке једначине	200
— кривине	307	— формуле	108
— највећег пада	307	Ојлерови углови	201
— нивоске	307	Окренуте брзине	118
— силе	316	Оператор Лапласов	317, 323
Логаритамска спирала	61	— Хамилтонов	316
Логаритамски декремент	28	Орт	11
Локсодрома	41	Ортодрома	41

Оса завртња	222	Поларно растојање	14
— обртања	106	Полигон тангената	81
— попречна	201	— тетива	81
— чворна	201	Полуга кретања	169
— централна	231	Полуга моторна — спојна	169
Оскулаторна равна	19	— разводна	139
Основни троугао	97	Полупречник кривине путање	300
Осцилаторно кретање	24	Полупречници кривине нормалне	304
Осцилација главна	24	— — — геодезијске	304
— опадајућа хармонијска	27	— — — главни	304
— период	24	Полходија — центроид	198
— пуна	24	Поље безвртложно	324
— секундарна	24	— векторско	315
— фаза	24	— вртложно	324
— цела	24	— Лапласово	324
— центар	24	— потенцијално	324
Пар завојни	166	— силе	316
— кинематички	166	— скаларно	310
— обртни	166	— сложено	324
— осцилаторни	166	— соленоидно	324
— реверзибилни	166	Померање тачке	29
— трансляторни	166	Постоље	171
Параболограф	150	Правац аксијални	12
Параметар завртња	91, 229	— главни	305
Параметарске криве	300	— геодезијски	19
Параметри Гаусови	300	— меридионалан	15
Паскалов пуж	93, 174	— радијалан	12
Период осциловања	24	— циркуларан	13
Перихел	68	Превојни круг	156
План (основа) брзина	121	Прелазни круг	156
— померања	222	Преносна брзина	233
— убрзања	182	— кретања	233
Планетско кретање	67	— убрзања	233
Плоча	115	Преносни однос	111
Поансоов став	198	Преносник зупчасти	112
Површина еквискаларна	312	— каишни	111
— минима	307	— пужни	273
— праволинијска	228	Прецесија прогресивна	199
— развојна	309	— регресивна	199
Површинске брзине	41	— регуларна	199
Пол моментни	118	Прецесионо кретање	199
— непокретне путање	118	Принудно кретање	95
— обртни	118	Принцип независности кретања	144
— релативни	120	— сличности	120
— система	120	Природне компоненте убрзања	57
— спирале	28	Проблем Кардана	160, 217
— тренутни	118	Прогресивна прецесија	199
— убрзања	134	Пројекција брзине	31
— ходографа	46	— извода вектора на осу	282
Поларни радијус	13	— убрзања	35

Променљиво обртање	103	Систем завртања	275
Прописана путања	95	— обртања — редукција	256
Протицање (флукс)	287	Скаларно поље тачака	324
Пут	21	— убрзање	155
— закон	21	Слагање кретања	25, 255
Путања (трајекторија)	20	— обртања	256
— пола покретна (полходија)	139	— — и транслације	266
— пола непокретна (херпол- ходија)	139, 188	— — око укр- штених оса	155 271
— прописана	95	— транслација	255
Пуж	273	Слободно тело	95
— Паскалов	93, 174	Спрег обртни (кинематички)	263
Пужни преносник	273	Спрега зупчаника	113
Пулзација	24	Став Грасхофа	168
Раван екватора	14	— Поансоа	198
— нормална	19	Стање брзине	116
— оскулаторна	19	— убрзања	118
— ректификациона	19	Степен померљивости	168
— тангенцијална	19, 302	— слободе	95
Равна фигура	115	Симбол Кристофелов	328
Равно кретање	115	— Кронекеров	328
Равномерно криволинијско кретање	22	Спирала Архимедова	37
— обртање	102	— логаритамска	61
— убрзано обртање	102	— синусна	68
Радијална брзина	36	Строфоида	152
— убрзања	38	Строфоидограф	152
Разводна полуга	131	Субнормала	73
Разлика фазна	25	Сферна индикатриса тангената	295
Размера за брзину	31	Сферно кретање	219
— — убрзање	37	Тангента	18, 292
Регресивна прецесија	199	Тангенцијална раван	19, 302
Редукција система обртања	256	Тангенцијално убрзање	57, 234
Ректификациона раван	19	Тачка елиптичка	305
Релативна брзина	234	— параболничка	305
Релативни пол	120	— пучаста	305
Релативно кретање	233	— сферна	305
— — тела	246	— хиперболичка	305
— — убрзање нормално	234	Тејлорова формула	282
— — тангенцијално	234	Тело везано	95
Ретроградна прецесија	199	— круто	95
Реципрочно кретање	144	— слободно	95
Ривалсова теорема	211	— чврсто	95
Ротација	98	Теорема Аронхолд—Кенедија	120
Ротор	209, 316	— Даламбера	197
Рулете	139, 188	— Кориолиса	240
Секторска брзина	42	— Ланкреова	297
Секторско убрзање	63	— Мебијуса	272
Сила	231	— Мемкеова	121
— укрст	231	— Менијеова	305
		— Ојлерова	306

Теорема Ривалсова	211	Укрсна глава брзина	174
— Шалова	117, 222	— — убрзање	184
Теорија механизма	22	— — ход	174
— поља	310	Упоредник	14
Торзер	231	Управљени елемент криве	288
Торзија	295	Управне брзине	118
— вектор	295	Услови кретања почетни	32
Тотално убрзање	57	Успорење	49
Трајекторија (путања)	20	Учестаност	24
Транслаторна брзина	98	Фаза осцилације	25
Транслација	98	Фазна разлика	25
— слагање	255	Флексија	295
Трансмисиони уређаји	111	Флуks (протицање)	287
Тренутни пол	118	Форма квадратна друга основна	301
Трзај	70, 188	— — прва основна	301
Триедар природни	18, 292	— — трећа основна	307
Трохиода	142	— метричка	325
Убрзање		Формула Вилиса	113
— аксијално	31	— Тејлора	287
— аксипетално	52	Фреквенција кружна	24
— аналитичко одређивање	31	Френеови обрасци	293
— апсолутно	233	Функција периодичка	27
— вредност	30	Хармонијско кретање	24, 76
— генералисано векторско	55	— опадајуће осциловање	27
— графичко одређивање	80	Херполходија	198
— допуско	211	Хипоциклоида	146
— другог реда	70	Хитац хоризонтални	86
— компоненте	51	Ход завојнице	91, 230
— Кориолисово	240	— завртња	91, 230
— нормално	57	— укрсне главе	174
— преносно	239	Ходограф брзине	46
— природне компоненте	57	— вектора положаја	20, 289
— радијално	52	— векторске функције	282
— размера	37	— орта тангенте	291
— релативно	37	Холономни параметри	207
— — нормално	234	Централна оса	208, 231
— — тангенцијално	234	Центар брзине	118
— секторско	63	— осциловања	24
— скаларно	155	— убрзања	134
— тангенцијално	57	Центрипетално убрзање	57
— тотално	57	Центроид	142
— угаоно	64	Циклоида	142
— центрипетално	57	Циркуларна брзина	37
— циркуларно	52	Чворна оса	201
Угаона брзина	44, 239	Шалова теорема	117, 222
Угаоно убрзање	213, 239	Шиафнев проблем	69
Угливи Ојлерови	201	Шап	115
— — нутације	201		
— — прецесије	201		
— — ротације	201		
Укрсна глава	174		

С А Д Р Ж А Ј

	Страна
Увод	5
0.1. Задатак кинематике	5
0.2. Мерење величина. Систем мера	6
0.3. Закон о мерним јединицама и мерилима	7

I ДЕО

КИНЕМАТИКА ТАЧКЕ

1. <i>Одређивање положаја тачке у простору</i>	9
1.1. Координатни системи. Координате. Вектор положаја	9
1.2. Декартов координатни систем	9
1.3. Поларно-цилиндрички координатни систем	11
1.4. Сферни координатни систем	13
1.5. Генералисани координатни систем	15
1.6. Природни триедри	18
a) Природни триедар за линију	18
b) Природни триедар за површину	19
2. <i>Коначне једначине кретања</i>	20
2.1. Кретање тачке	20
2.2. Путања. Линија путање	20
2.3. Закон пута	21
2.4. Главне врсте кретања	22
2.5. Хармонијско кретање	23
2.6. Опadaјућа хармонијска осцилација	27
Примери 1—2	28
3. <i>Брзина покретне тачке</i>	29
3.1. Померање тачке	29
3.2. Брзина тачке	29
3.3. Квадрат брзине	34
a) Декартов правоугли координатни систем	36
b) Поларно-цилиндрички координатни систем	36
c) Сферни координатни систем	37
d) Генералисани координатни систем	38
e) Односи између пројекција вектора брзине на осе разних система	40

	Страна
Примери 3—5	41
3.4. Секторска брзина	41
Пример 6	44
3.5. Угаона брзина. Кружно кретање	44
4. Убрзање покретне тачке	47
4.1. Ходограф брзине	47
Пример 7	48
4.2. Убрзање покретне тачке	49
4.3. Компоненте вектора убрзања	50
а) Декартов правоугли систем	51
Пример 8	51
б) Поларно-цилиндрички координатни систем	52
Пример 9	53
с) Сферни координатни систем	53
д) Генералисани правоугли координатни систем	54
е) Односи између пројекција вектора убрзања на осе разних система	56
ф) Природне компоненте вектора убрзања	56
Примери 10—13	60
4.4. Графичко одређивање убрзања. Велоцида	62
4.5. Секторско убрзање	63
4.6. Угаоно убрзање. Кинематичке једначине кружног кретања	64
4.7. Кретање константном секторском брзином	65
а) Бинеов образац	66
б) Синусне спирале	68
с) Тангенцијално и радијално убрзање (Siacciев проблем)	69
4.8. Убрзање другог реда	70
5. Дијаграми кретања	72
5.1. Кинематички дијаграми	72
Примери 14—15	77
5.2. Графичко диференцирање	77
5.3. Графичко интегрисање	80
Примери 16—18	83
5.4. Графичка конструкција (v , s) дијаграма	84
Примери кретања 19—35	85

II ДЕО

КИНЕМАТИКА КРУТОГ ТЕЛА

6. Кружно тело. Степени слободе кретања	95
7. Основне врсте кретања кружног тела	98
8. Обртање кружног тела око непокретне осе	101
8.1. Врсте обртања	101
Примери 36—38	103
8.2. Пројекције вектора брзине на осе непокретног триедра	103
Пример 39	105
8.3. Пројекције вектора убрзања на осе непокретног триедра	105
Пример 40	108
8.4. Ојлерове формуле	108

Страна

8.5.	Трансмисиони уређаји	111
8.5.1.	Каишни преносници	111
8.5.2.	Зупчasti преносници	112
	Примери 41—42	114
9.	<i>Равно кретање кружног шела</i>	115
9.1.	Компланo кретање плоче	115.
9.2.	Конaчнa промена положаја	116.
9.3.	Одређивање брзине покретне плоче	118
9.3.1.	Графичкo одређивање брзине	118
	а) Метода окренутих (управних) брзина	118
	б) Метода плана (основе) брзина	121
	Пример 43	123
9.3.2.	Аналитичкo одређивање брзине	124
9.4.	Одређивање убрзања тачака покретне плоче	128
9.4.1.	Графичкo одређивање убрзања	129
9.4.2.	Аналитичкo одређивање убрзања	133
	Примери 44—45	136
9.5.	Рулете	138
9.5.1.	Једначине рулета	138
9.5.2.	Ојлер — Саваријева једначина	141
9.5.3.	Конструкција путање помоћу рулета	141
	1° Циклоиде	142
	2° Кружна еволвента	144
	3° Епициклоиде	144
	4° Хипоциклоиде	146
9.5.4.	Конструкција еволуте путање помоћу рулета	147
	Примери 46—49	149
9.6.	Бресови кругови	153
	Пример 50	157
9.7.	Принудно кретање	157
9.8.	Карданов проблем	159
	Примери 51—53	164
9.9.	Кинематички парови и ланци. Зглавкasti четвороугао	166
	Примери 54—57	171
9.10.	Клипни (моторни) механизам	174
9.10.1.	Централни клипни механизам	115
9.10.1.1.	Аналитичкo одређивање брзине и убрзања укрсне главе	176
9.10.1.2.	Графичкo одређивање брзине укрсне главе	179
	1° Метода брзина клизања	179
	2° Метода окренутих брзина	179
	3° План брзина	180
	4° Вгихова метода	180
9.10.1.3.	Графичкo одређивање убрзања укрсне главе	182
	1° План убрзања	182
	2° Моћгова метода	183
	3° Клеипова метода	184
9.10.1.4.	Кинематички дијаграми	185
9.10.1.5.	Рулете клипног механизма	188
9.10.1.6.	Трзај	188

9.10.2.	Централни клипни механизам са $\lambda = 1$	189
9.10.3.	Ексцентрични клипни механизам	190
9.10.4.	Клипни механизам са обртним цилиндром	192
	Примери 58—59	193
9.11.	Кулисни механизам	194
10.	<i>Обрћање шела око нейомичне шачке</i>	197
10.1.	Представљање обртања	197
10.2.	Прецисионо кретање	199
	1° Прогресивна прецесија	199
	2° Регресивна прецесија	199
10.3.	Ојлерове кинематичке једначине	200
10.4.	Одређивање брзине тачке покретног тела	207
10.5.	Одређивање убрзања тачке покретног тела	210
	Примери 60—63	214
10.6.	Зглоб Кардана — Жука	217
11.	<i>Општије кретање кружој шела. Заврћањ</i>	219
11.1.	Геометријске основе општег кретања	219
11.2.	Одређивање брзине тачке крутог тела	224
11.3.	Једначина осе заврћања	226
11.4.	Кинематичке инваријанте	229
11.5.	Одређивање убрзања тачке крутог тела	232
	Примери 64—66	233
12.	<i>Релативно кретање</i>	233
12.1.	Релативно кретање тачке	233
12.2.	Брзина тачке при релативном кретању	236
	Пример 67	238
12.3.	Убрзање тачке при релативном кретању	239
12.4.	Апсолутно кретање у равни приказано методом релативног кретања	243
12.5.	Апсолутно кретање тачке у простору приказано методом релативног кретања	245
12.6.	Релативно кретање тела	246
	Примери 68—78	248
13.	<i>Слагање кретања</i>	255
13.1.	Слагање трансляција	255
13.2.	Слагање обртања	256
1°	Обртне се осе секу	257
	а) Слагање тренутних обртања	257
	б) Слагање коначних обртања	259
	Примери 79—80	260
2°	Обртне су осе паралелне	261
	Примери 81—83	264
13.3.	Слагање обртања и трансляције	266
1°	Транслација је управна на осу обртања	267
2°	Транслација је паралелна оси обртања	268
3°	Транслација је коса према оси обртања	270
13.4.	Слагање обртања око укрштених оса	271
	Пример 84	274
13.5.	Слагање произвољног броја обртања и трансляција	274
	Примери 85—90	276

ДОДАТАК

	Страна
I. Векторска анализа	281
1.1. Задатак векторске анализе	281
1.2. Ходограф векторске функције	281
1.3. Извод вектора	282
1.4. Правила за добијање извода	283
1.5. Пројекција извода на сталну и покретну осу	286
1.6. Диференцијали вектора	287
1.7. Вектор—интеграл	287
II. Примена вектора у диференцијалној геометрији	289
2.1. Извод вектора положаја	289
2.2. Вектор кривине	290
2.3. Природни триедар	292
2.4. Флексија и торзија	295
2.5. Френеови обрасци	298
Примери 1—7	298
2.6. Основне квадратне форме површине. Гаусови параметри	299
2.7. Тангенцијална раван и нормала површине	302
2.8. Нормална кривина. Менијеова и Ојлерова теорема	303
2.9. Карактеристичне криве линије на површини	307
a) Нивоске линије	307
b) Линије највећег нагиба (пада)	307
c) Линије кривине	307
d) Асимптотне линије	308
e) Геодезијске линије	308
2.10. Обртне површине	308
Примери 8—15	309
III. Основи теорије поља	310
3.1. Дефиниција поља	310
3.2. Скаларно поље. Градијент скалара	310
3.3. Векторско поље	315
3.4. Дивергенција и ротор	316
a) Поларно-цилиндрички систем	318
b) Сферни координатни систем	319
c) Генералисани координатни систем	320
1° Градијент у генералисаним координатама	320
2° Дивергенција у генералисаним координатама	320
3° Ротор у генералисаним координатама	322
4° Лапласов оператор у генералисаним координатама	323
3.5. Класификација векторских поља	324
3.6. Генералисане контраваријантне и коваријантне координате вектора брзине и убрзања	324
Примери 1—8	330
Литература	333
Рејсислар имена	335
Стиварни рејсислар	336

Др инж. ДАНИЛО РАШКОВИЋ

**МЕХАНИКА II
КИНЕМАТИКА**

ИЗДАВАЧ

Завод за издавање уџбеника
Социјалистичке Републике Србије
Београд, Обилаћев венац 5/1

Лектор

ЗДЕНКА ПИЕША

Технички уредник

БОРА ЈОВАНОВИЋ

Коректори

**МИЛЕНА ЈЕРЕМИЋ, ВИШЕСЛАВА НИКОЛИЋ
СОФИЈА ЧАБАРКАПА**

Рукопис предат у штампу новембра 1965. године;
штампање завршено јула 1966. године.

Обим: $21\frac{3}{4}$ штампарских табака

Тираж: 3.000 примерака

Формат 17 × 24 cm

Штампа Београдски графички завод, Београд,
Булевар војводе Мишића 17