УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ

Д. РАШКОВИЋ

ОСНОВИ
МАТРИЧНОГ РАЧУНАЊА

Научна књига • БЕОГРАД

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ

Др инж. ДАНИЛО РАШКОВИЋ

ОСНОВИ МАТРИЧНОГ РАЧУНАЊА

са применом на техничке проблеме

Научна књига
БЕОГРАД, 1971.

УНИВЕРЗИТЕТСКИ УЏБЕНИЦИ

Решењем ректора Универзитета у Нишу бр. 674/3 од 4. VI. 1969. год. одобрено да се штампа као стални уџбеник за студенте Техничког факултета

За издавача *Драгослав Јоковић*, уредник *Гордана Николић*, техн. уредник *Ђорђе Поповић*

Штампа: Граф. пред. „Радиша Тимотић“, Београд, Обилићев венац бр. 5, тел. 624-751.

САДРЖАЈ

1. ДЕТЕРМИНАНТЕ

1.1. Врсте детерминанти 1
1.2. Особине детерминанти 7
1.3. Множење детерминанти 15
1.4. Минори вишег реда. Ранг детерминанте 18
1.5. Систем линеарних једначина 21
  1.5.1. Детерминанта система је различита од нуле. Cramer-ово правило . 22
  1.5.2. Детерминанта система је једнака нули 23
    a) Систем једначина је противречан 23
    b) Систем једначина је неодређен 23
    c) Систем једначина је немогућ 24
    d) Систем са бескрајно решења 24
  1.5.3. Елиминанта (резултанта) система 25
  1.5.4. Систем хомогених једначина 26
  1.5.5. Gauss-ов алгоритам 28
    Clapyeron-ова једначина трију момената 30
1.6. Снижавање реда детерминанте 31
1.7. Диференцирање детерминанте 33
    Вежбања 35

2. ВРСТЕ И ОСОБИНЕ МАТРИЦА

2.1. Дефиниција и врсте матрица 37
2.2. Транспонована матрица 38
2.3. Симетрична и антисиметрична матрица 39
2.4. Дијагонална и јединична матрица 40
2.5. Троугласте матрице 41
2.6. Jacobi-јева матрица 41
2.7. Неке елементарне примене матрица 42

3. ОСНОВНЕ РАЧУНСКЕ ОПЕРАЦИЈЕ СА МАТРИЦАМА

3.1. Једнакост матрица 46
3.2. Сабирање матрица 46
3.3. Одузимање матрица 48

Јули 1973

3.4. Разлагање матрице на симетричну и кососиметричну 50
3.5. Множење матрице бројем 51
3.6. Множење матрица 53
3.7. Степеновање матрица 62
3.8. Партиција (раздељивање) матрице 64
3.9. Матрични полиноми 66
3.10. Детерминанта квадратне матрице 66
  3.10.1. Секуларна једначина 73
  3 10.2. Hurwitz-ова детерминанта 74
3.11. Ранг матрице 75
3.12. Ортогонална и унитарна матрица 76
3.13. Адјунгована матрица 77
3.14. Инверзна матрица. Дељење матрица 81
  3.14.1. Матрнца утицајних коефицијената 83
  Вежбања 85

4. ВЕКТОРИ И МАТРИЦЕ

4.1. Поље бројева 90
4.2. Појам вектора 95
4.3. Рачунске операције векторима 96
  4.3.1. Једнакост вектора 96
  4.3.2. Сабирање вектора 96
  4.3.3. Одузимање вектора 96
  4.3.4. Множење вектора бројем 97
4.4. Линеарна зависност вектора 97
4.5. Векторски простор 102
4.6. Скаларни производ два вектора 105
4.7. Јединични вектори 108
4.8. Ортонормирани систем вектора 109
4.9. Процес ортогонализације вектора основе векторског простора . . . 110
4.10. Gram-ова матрица и детерминанта 112
  Вежбања 113

5. ФОРМЕ И МАТРИЦЕ

5.1. Линеарне форме 116
5.2. Линеарна трансформација вектора 118
5.3. Ортогонална трансформација 123
5.4. Билинеарне форме 127
5.5. Квадратне форме 129
5.6. Конгруентна трансформација 132
5.7. Hermite-ова форма 133
  Вежбања 134

6. ТРАНСФОРМАЦИЈЕ МАТРИЦА

6.1. Елементарне трансформације матрица 136
6.2. Елементарне матрице 137
6.3. Еквивалентне матрице и еквивалентне трансформације 139
6.4. Канонска матрица. Hermite-ов нормални облик 142
6.5. Нормални облик матрице 143
6.6. Слична (колинеарна) трансформација 146
6.7. Конгруентна трансформација 147
6.8. Коњуктивна трансформација 148
6.9. Аутоморфне трансформације 148
6.10. Ранг производа матрица 148
6.11. Свођење матрице на троугласту матрицу 150
6.12. Разлагање матрице у производ две троугласте матрице 156
6.13. Матрично решавање система линеарних једначина 161
    6.13.1. Cramer-ово правило 161
    6.13.2. Gauss-ов алгоритам 162
    6.13.3. Banachiewicz-јева схема 164
    6.13.4. Метода Cholesky-ог 173
    6.13.5. Kronecker-Capelli-јев став 175
    6.13.6. Систем хомогених једначина 178
6.14. Израчунавање инверзних матрица 183
    6.14.1 Израчунавање инверзне матрице помоћу адјунговане 183
    6.14.2. Израчунавање инверзне матрице помоћу еквивалентних трансформација 184
    6.14.3. Израчунавање инверзне матрице помоћу субматрица 186
    6.14.4. Израчунавање инверзне матрице помоћу Banachiewicz-јеве схеме . 188
6.15. Свођење квадратне форме на канонски облик 190
Вежбања 197

7. ПОЛИНОМИ И МАТРИЦЕ

7.1. Основне релације о полиномима 202
7.2. Параметарске матрице 205
7.3. Диференцирање матрица 207
7.4. Smith-ов нормални облик матрице 208
Вежбања 211

8. ПРОБЛЕМИ СА СВОЈСТВЕНИМ ВРЕДНОСТИМА

8.1. Карактеристична матрица и карактеристични полином матрице . . . 214
8.2. Карактеристични бројеви матрице 215
8.3. Карактеристични вектори матрице 223
8.4. Frobenius-ова матрица 229
8.5. Jordan-ова матрица 230
8.6. Cayley-Hamilton-ова теорема 232
8.7. Минимални полином и минимална једначина 233

8.8. Модална матрица. Свођење матрице на „ламбда“ матрицу 235
8.9. Jordan-ов нормални (класични) облик матрице. Segre-ова карактеристика . 238
8.10. Rayleigh-ов количник. Екстремне вредности карактеристичних бројева . 241
8.11. Методе за убрзавање развоја карактеристичне једначине 243
  8.11.1. Метода Данилевског 244
  8.11.2. Разлагање једног вектора у правцима карактеристичних вектора . 245
  8.11.3. Криловљева метода 246
  8.11.4. Hessenberg-ова метода 251
8.12. Општи проблем са карактеристичним вредностима 256
  Вежбања 263

9. ПРИМЕНА МАТРИЦА У ТЕХНИЧКИМ ПРОБЛЕМИМА

9.1. Примена матрица у кинематици . . . . , 267
  9.1.1. Линеарна трансформација и ротација координатног система . . 267
  9.1.2. Обртање крутог тела око непомичне осе 271
  9.1.3. Обртање крутог тела око непомичне тачке 272
  9.1.4. Релативно кретање тачке у равни 275
  9.1.5. Равно кретање крутог тела 277
  9.1.6. Просторно релативно кретање тачке 278
  9.1.7. Завојно кретање 280
9.2. Примена матрица у динамици . . . . . , ... 281
  9.2.1. Динамички закони 281
  9.2.2. Euler-ове динамичке једначине 283
  8.2.3. Lagrange-ове једначине друге врсте 284
  9.2.4. Канонске једначине кретања . . . . , ... 287
9.3. Примена матрица у теорији осцилација 289
  9.3.1 Мале осцилације холономног конзервативног система 289
    9.3.1.1. Ланчани системи 292
    9.3.1.2. Торзијске осцилације дискова на лаком вратилу . . . 294
    9.3.1.3. Осцилације маса на струни 295
    9.3.1.4. Хомогени линеарни системи 296
    9.3.1.5. Попречне осцилације маса на лакој греди , . . . 299
      a) Статички одређени носачи 301
      b) Статички неодређени носачи 303
    9.3.1.6. Сложела клатна 308
  9.3.2. Мале осцилације неконзервативног система 312
  9.3.3. Трансверзалне осцилације хомогених греда 314
9.4 Примена матрица у теорији еластичности 317
  9.4.1. Напони. Cauchy-јеве и Navier-ове једначине 317
  9.4.2. Деформације 320
  9.4.3. Уопштени Hooke-ов закон 323
9.5 Примена матрица у електротехници 324
Литература 331
Регистар имена 335
Стварни регистар 336

ПРЕДГОВОР

Motto: „Mathematik ist die Kunst Rechnungen zu vermeiden“.

Матрично рачунање све више продире у разне техничке дисциплине: теорију осцилација, теорију механизама, статику конструкција, електротехнику, аутоматику и регулисање. Због тога се на многим техничким факултетима и високим техничким школама уводе основе овог рачунања које знатно упрошћава проблематику и много олакшава припрему за коришћење рачунских машина.

У циљу модернизовања наставе на редовном курсу студија и нарочито за постдипломске студије на техничким факултетима, средио сам овај уџбеник на основу мојих предавања која сам држао из предмета Теорија осцилација на Природно-математичком факултету у Београду, из предмета Теорија еластичности на Машинском одсеку Техничког факултета у Нишу и курса из овог рачунања који сам одржао инжењерима фабрике „Соко“ у Мостару. За разлику од чисто математичких курсева из ове области, уџбеник је писан у духу мојих уџбеника из механике и теорије осцилација како би текст био приступачан студентима технике и инжењерима. Стога су теоријска излагања увек пропраћена примерима, у циљу лакшег улажења у проблематику и могућност коришћења у разним техничким дисциплинама. Многе матричне операције пропраћене су цртежима и схемама.

С обзиром да се многи нумерички проблеми своде на развијање и израчунавање детерминанти то је истима поклоњена већа пажња.

Цртеже је брижљиво урадио Милован Васић, машински техничар предузећа „Соко“, на чему му се најсрдачније захваљујем.

Београд, Ниш, маја 1968. год. *Д. Р.*

1. ДЕТЕРМИНАНТЕ

1.1. Врсте детерминанти.— 1676. године *G. W. Leibniz* је опазио да се при решавању система линеарних алгебарских једначина са више непознатих јављају извесне карактеристичне комбинације коефицијената једначина помоћу којих се могу написати решења једначина. Ово је општије изнео 1678. године у делу* *„Specimen analyseos novae, qua errores vitantur, animus quasi manu ducitur, et facile progressiones inveniuntur“*. Ако систем има само две једначине са две непознате (x) и (y)

$$a_{11}\,x+a_{12}\,y=b_1; \quad a_{21}\,x+a_{22}\,y=b_2 \tag{1.1}$$

онда се множењем прве коефицијентом a_{22} а друге коефицијентом $-a_{12}$ и њиховим сабирањем добија прва непозната x. Обратно, множењем прве једначине коефицијентом a_{21} а друге коефицијентом $-a_{11}$ и сабирањем, добија се друга непозната (y). Непознате износе

$$x=\frac{b_1\,a_{22}-b_2\,a_{12}}{a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21}}; \quad y=\frac{a_{11}\,b_2-a_{21}\,b_1}{a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21}}. \tag{1.2}$$

У оба израза за непознате бројиоци су различити, али су имениоци *исти*. Од тога да ли је именилац $(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})$ различит од нуле или једнак нули зависи да ли ће систем имати или немати решења. Због тога је *Leibniz* овај именилац назвао *детерминантом (одредницом)*. Пошто систем има две једначине са две непознате, то је ова *детерминанта другог реда*. Коефицијенти a_{ik} су њени *елементи* или *чланови*. Елементи су означени са два индекса: први индекс (i) одређује положај елемента у *врсти* (једначини), а други (k) одређује положај коефицијента у *колони*, то јест редни број непознате рачунато слева удесно. Елементи a_{ii} леже на *главној дијагонали*, а елементи a_{12} и a_{21} на *споредној дијагонали*. Ова се детерминанта пише у симболичном облику помоћу схеме

$$\Delta_2=D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(a_{11}\,a_{22})-(a_{12}\,a_{21}), \tag{1.3}$$

---

* *„Пример нове анализе којом се отклањају грешке, која као руком води дух и којом се лако постижу напреци“.*

па се одмах види начин њеног израчунавања: *од производа елемената са главне дијагонале треба одузети производ елемената са споредне дијагонале*.

На пример, систем једначина $5x - 4y = 6$; $x + y = 3$ *има решења* $x = 2$; $y = 1$, јер је детерминанта $\Delta_2 = (5\cdot 1) - (-4\cdot 1) = 9$. Ове две једначине представљају у систему Oxy две праве линије које се *секу* у тачки $P(2;1)$.

Систем једначина $3x - 2y = 6$; $-6x + 4y = 4$ *нема решења*, јер је $\Delta_2 = 12 - (12) = 0$. Ово су *две паралелне праве*, коефицијента правца $m = 3/2$.

Систем једначина $3x - 2y = 6$; $-6x + 4y = -12$ има *бескрајно много решења*, јер је $\Delta_2 = 0$ а и бројиоци у (1.2) су једнаки нули. *Друга једначина је последица прве*, јер се добија из ње множењем коефицијентом -2. Обе једначине, дакле, представљају *исту праву*, па сваки пар вредности (x, y) који задовољава прву једначину решење је система једначина.

Ово се може уопштити. Систем алгебарских једначина са коефицијентима a_{ik} и непознатим x_k може се написати у облику

$$i \downarrow^{\rightarrow k} \sum_{i} \sum_{k} a_{ik}\, x_k = b_i; \quad i;\ k = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n. \tag{1.4}$$

Када су сви коефицијенти $b_i = 0$ систем је *хомоген*; у противном је *нехомоген*. Овај други је општији од првог а *непознате се могу одредити потпуно ако је број једначина једнак броју непознатих*; у првом случају непознате нису потпуно одређене.

Нехомогени систем од три једначине са три непознате има облик

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = b_1; \quad a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23} x_3 = b_2;$$

$$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3.$$

Када се трећа непозната (x_3) елиминише из прве две једначине а затим и из друге две, добија се систем од две једначине са две непознате облика:

$$(a_{11}\, a_{23} - a_{13}\, a_{21})\, x_1 + (a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22})\, x_2 = b_1\, a_{23} - b_2\, a_{13};$$

$$(a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31})\, x_1 + (a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32})\, x_2 = b_2\, a_{33} - b_3\, a_{23}.$$

Детерминанта овог система једначина је *детерминанта трећег реда* и износи

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{23} - a_{13}\, a_{21} & a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22} \\ a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31} & a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} -$$

$$- a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

Ова детерминанта има $3^2 = 9$ елемената, а када се развије биће $6 = 3!$ чланова. Одмах се види и начин формирања ових чланова: сваки је производ од три коефицијента; индекси првих коефицијената иду природним редом $(1, 2, 3, \ldots)$ а индекси друга два члана представљају њихове *пермутације*. Предзнак $+$ или $-$ испред члана одређује се према *броју инверзија* у дотичној пермутацији. Он је *позитиван* ако је број инверзија *паран*, у противном је *негативан*. Број инверзија се рачуна у односу на основну пермутацију (123).

Пермутације и број инверзија за три елемента 1, 2 и 3 су:

123 (0); **132** (1); **213** (1); **231** (2); **312** (2); **321** (1).

Горња детерминанта трећег реда може се у развоју написати овако:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+ \tag{1.6}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{11}S_{11}-a_{12}S_{12}+a_{13}S_{13}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}.$$

Детерминанте другог реда $S_{11}=M_{11}; S_{12}=M_{12}$ и $S_{13}=M_{13}$ зову се *субдетерминанте* или *минори елемената прве врсте* a_{11}, a_{12} и a_{13} детерминанте трећег реда. Ове се детерминанте лако добијају: треба прецртати елементе прве врсте и дотичне колоне елемента a_{1k}, остатак је детерминанта другог реда. Ова субдетерминанта је позитивна ако је елемент a_{1k} на *парном месту*, то јест ако је збир индекса $1+k$ паран; у противном је *непарна*. Када се субдетерминанта $S_{1k}=M_{1k}$ помножи са $(-1)^{1+k}$ она се назива *алгебарски комплемент — адјункта* A_{1k} или *кофактор* (K_{1k}) елемента a_{1k}. Овакво развијање детерминанте је *развијање по елементима прве врсте*, па је

$$\Delta_3=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}=a_{11}K_{11}+a_{12}K_{12}+a_{13}K_{13}. \tag{1.7.a}$$

Међутим, детерминанта се може написати и у овом облику

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+$$

$$+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}=a_{11}K_{11}+a_{21}K_{21}+a_{31}K_{31}. \tag{1.7.b}$$

Овде је *развој* детерминанте трећег реда извршен по *елементима прве колоне*. С обзиром на пермутације развој се може извршити по елементима ма које врсте или ма које колоне, те је

$$\Delta_3=a_{i1}K_{i1}+a_{i2}K_{i2}+a_{i3}K_{i3}=a_{k1}K_{k1}+a_{k2}K_{k2}+a_{k3}K_{k3}. \tag{1.8}$$

Појам детерминанте се може *уопштити*. Детерминанта n-ог реда има n^2 елемената a_{ik}, јер има n врста и n колона. Када се развије она има $n!$ чланова, сваки са по n елемената, па се може дефинисати збиром

$$\Delta_n = D_n = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i1}\, a_{i2} \dots a_{ik} \dots a_{in} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^i a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}. \qquad (1.9)$$

У овом збиру p_1, p_2, p_n представља једну од пермутација елемената индекса $1, 2, 3, \dots, n$ а број i означава *број инверзија* пермутације $p_1 p_2 \dots p_n$ у односу на основну пермутацију $123 \dots n$.

Детерминанта четвртог реда има $n^2=16$ елемената а када се развије имаће $4!=24$ члана, сваки са по 4 елемента јер је број пермутација од 4 елемента $4!=24$. Према томе је

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + \\ + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - \end{matrix}$$

$$- a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = \qquad (1.10)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

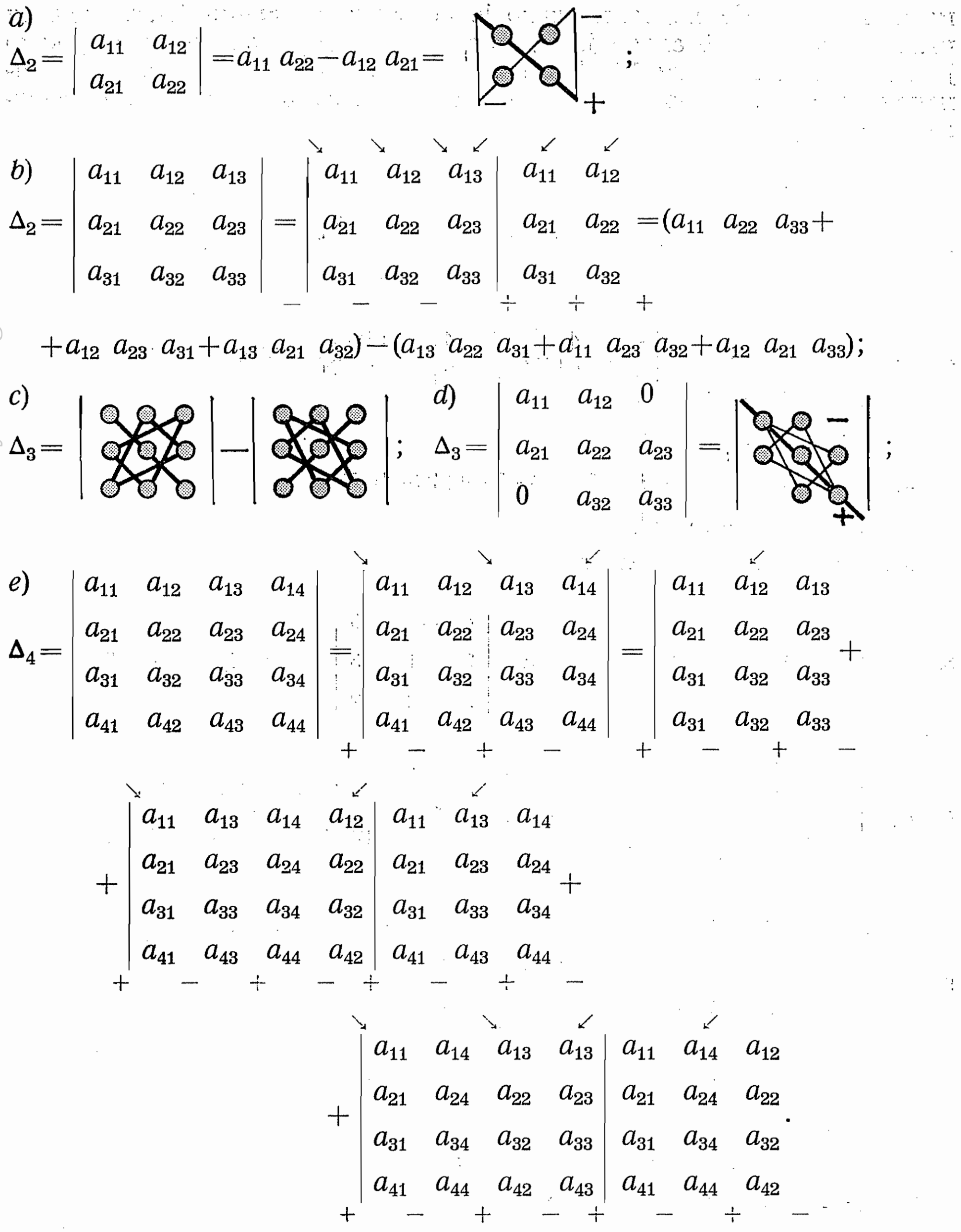
На основу изнетог може се рећи: *детерминанта n—ог реда има n^2 елемената распоређених у n врста и n колона; она представља број који се одређује обрасцем* (1.9) *у коме има $n!$ чланова, сваки са по n елемената, а њен се развој може извршити помоћу кофактора ма које врсте или ма које колоне.* Број могућих развоја је $2n$, али се увек добијају исти резултати. Дакле, биће:

$$\Delta_n = D_n = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{ik} \dots a_{in} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} K_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} K_{ki}; \qquad (1.11)$$

где је кофактор елемента a_{ik}:

$$K_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1k} & \dots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & | & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i1} - & a_{i2} - & a_{ik} - & a_{in} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & | & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nk} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

Развој детерминанти се врши по елементима неке врсте или колоне, а *само се детерминанта другог реда израчунава непосредно:* од производа елемената са главне дијагонале треба одузети производ елемената са споредне дијагонале (слика 1.1.*a*). Међутим, групишући засебно чланове (1.5) са знаком $+$, а засебно са знаком $-$, *Sarrus* је



a)

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21}=\quad;$$

b)

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{array}{ccc|cc}\searrow&\searrow&\searrow\ \swarrow&\swarrow&\swarrow\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{31}&a_{32}\\-&-&-\quad+&+&+\end{array}=(a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+$$

$$+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32})-(a_{13}\,a_{22}\,a_{31}+a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{12}\,a_{21}\,a_{33});$$

c)

$$\Delta_3=\quad-\quad;$$

d)

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\quad;$$

e)

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=\begin{array}{|cccc|}\searrow&\searrow&\swarrow&\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\\+&-&+&-\end{array}=\begin{array}{|ccc}&\swarrow&\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\+&-&+\quad-\end{array}+$$

$$+\begin{array}{|cccc|ccc}\searrow&&&\swarrow&&\swarrow&\\a_{11}&a_{13}&a_{14}&a_{12}&a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{23}&a_{24}&a_{22}&a_{21}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{33}&a_{34}&a_{32}&a_{31}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{43}&a_{44}&a_{42}&a_{41}&a_{43}&a_{44}\\+&-&+&-\quad+&-&+&-\end{array}+$$

$$+\begin{array}{|cccc|ccc}\searrow&&\searrow&\swarrow&&\swarrow&\\a_{11}&a_{14}&a_{13}&a_{13}&a_{11}&a_{14}&a_{12}\\a_{21}&a_{24}&a_{22}&a_{23}&a_{21}&a_{24}&a_{22}\\a_{31}&a_{34}&a_{32}&a_{33}&a_{31}&a_{34}&a_{32}\\a_{41}&a_{44}&a_{42}&a_{43}&a_{41}&a_{44}&a_{42}\\+&-&+&-\quad+&-&+&-\end{array}.$$

Слика 1.1. — Схематско развијање детерминанте другог, трећег и четвртог реда

показао да се и израчунавање детерминанте трећег реда може извршити непосредно: *треба детерминанти дописати десно две њене прве* *колоне, па од производа елемената на дијагоналама паралелним главној дијагонали одузети производе елемената на дијагоналама паралелним споредној дијагонали.* Наравно сваки елемент a_{ik} треба узети са својим предзнаком како је показано на слици 1.1.*b*. Ова се схема може и друкчије подесити како је показано на слици 1.1.*c*. Када су чланови $a_{13}=a_{31}=0$ схема је једноставнија („*Соломоново слово*“) како је показано на слици 1.1.*d*. Слично *Sarrus*-овом *правилу* за детерминанту трећег реда може се оно приказати и за *детерминанту четвртог реда* (слика 1.1.*e*).

Примери. —

1. $$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20-3=17; \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 17; \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -17.$$

2. $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 30+28-6=52;$$

$$\Delta_3 = \left|\begin{array}{rrr|rr} 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right. = 10+24+3-9+20+4=52;$$

$$\Delta_3 = (10+3+24)-(9-20-4)=52.$$

3. $$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 10+20+4=34; \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8-(-4)-(-24)=36.$$

4. $$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2+9+12)-(2+9+12)+ +(12+30+2)-(16+5+9)=14.$$

5. $$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrrr|rrr} 4 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 4 & 6 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 3 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right. +$$

$$+ \left|\begin{array}{rrrr|rrr} 4 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 & 3 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 3 & 4 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right. + \left|\begin{array}{rrrr|rrr} 4 & 3 & 2 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & -1 & 2 & 6 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 3 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 3 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right. =$$

$$= [(-12)-(8)+(0)-(162)+(-18)-(64)+(-72)-(0)]+[(-64)-(0)+(-45)-(36)+$$

$$+(-8)-(24)+(0)-(120)]+[(144)-(3)+(60)-(0)+(0)-(72)+(72)-(120)]=$$

$$= -336-297+81=-552.$$

1.2. Особине детерминанти. — Детерминанте су нашле велику примену у многим математичким и техничким дисциплинама због њихових једноставних особина од којих ћемо навести најглавније, ради лакшег рада са матрицама који је уско повезан са детерминантама.

1. *Када су елементи једне врсте (или колоне) једнаки нули и детерминанта је једнака нули.*

Ово је правило очигледно, јер ако се детерминанта развије по елементима те врсте (или колоне) онда су коефицијенти $a_{ik}=0$ па је и $\Delta_n=0$.

2. *Транспозицијом се вредност детерминанте не мења* ($\Delta=\Delta'=\Delta^t$).

Када се у некој детерминанти врсте узму за колоне а колоне за врсте у истом поретку тако да је $a_{ik}=a_{ki}$ каже се да је нова детерминанта *транспонована* у односу на претходну. Ова се математичка операција назива *транспозицијом*. Развој детерминанте у овом случају по некој врсти или колони остаје исти, па детерминанта не мења вредност и предзнак.

На пример,

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5;\quad \Delta_2'=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 4\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=\Delta_3'=\begin{vmatrix}5 & 1 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}=52.$$

3. *Када се у детерминанти замене елементи двеју врста (или колона) детерминанта мења предзнак али јој апсолутна вредност остаје иста* (*P. Laplace*, 1772).

Заменом двеју врста мења се једна пермутација индекса 1, 2, ..., па према (1.9) детерминанта мења предзнак.

На пример,

$$\begin{vmatrix}4 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=6;\quad \Big[\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=-6;\quad \begin{vmatrix}\overline{5} & 2 & \overline{4}\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=-6;\quad \begin{vmatrix}\overline{\overline{5}} & \overline{4} & \overline{2}\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=6.$$

4. *Када су у детерминанти једнаки елементи две врсте (или две колоне) детерминанта је једнака нули* (*A. T. Vandermonde*, 1772).

Када се замене те две врсте (или колоне) онда детерминанта према предњој особини мења предзнак и постаје $-\Delta$, а како је остала иста, то је $-\Delta=\Delta$, па је $2\Delta=0$, то јест $\Delta=0$.

5. *Детермината се множи бројем* (λ) *када се елементи једне ма које врсте (или ма које колоне) помноже тим бројем;* обратно, *заједнички чинилац елемената једне врсте (или колоне) може се изнети пред детерминанту.*

На пример,

$$2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 18 & 27 & 9 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

6. *Када су елементи једне врсте (или колоне) пропорционални елементима друге врсте (или колоне) детерминанта је једнака нули.*

Ово је правило последица претходног и четвртог правила, јер се изношењем коефицијента пропорционалности пред детерминанту добија детерминанта са две једнаке врсте (или колоне), па је она једнака нули.

На пример,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 8 & 4 & -12 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -6 \\ -5 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

7. *Збир производа елемената једне врсте (или колоне) са кофакторима елемената неке друге врсте (или колоне) једнак је нули.*

Помножимо елементе прве колоне детерминанте трећег реда са кофакторима елемената друге колоне добићемо

$$\Delta_3 = a_{11}K_{12} + a_{21}K_{22} + a_{31}K_{32} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{31}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{11} \\ a_{21} & a_{23} & a_{21} \\ a_{31} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} = 0,$$

па је **правило** доказано.

Према претходном правилу развој детерминанте износи

$$\Delta_n = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}K_{jr} = \sum_{r=1}^{n} a_{ri}K_{rj} = \delta_{ij}\Delta_n; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad i=j, \\ 0 & \quad\;\; i \neq j. \end{cases} \tag{1.13}$$

Овде је δ_{ij} *Kronecker*-ов *симбол.*

8. *Када су елементи једне врсте (колоне) збирови једнаког броја сабирака, детерминанта је једнака збиру онолико детерминанти истог реда колики је број сабирака у сваком елементу. Ове се детерминанте добијају тако што се у свакој детерминанти у одговарајућој врсти (колони) задржи само по један сабирак а остали елементи остају непромењени.*

За детерминанту трећег реда са три сабирка у другој врсти било би:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha+\delta & a_{22}+\beta+\varepsilon & a_{23}+\gamma+\nu \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \delta & \varepsilon & \nu \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Двоструком применом овог правила добили бисмо

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha & a_{12}+\beta \\ a_{21}+\gamma & a_{22}+\delta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \beta \\ a_{21} & \delta \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha & a_{12} \\ \gamma & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a+i & b+i \\ b-i & a-i \end{vmatrix}=a^2-b^2.$$

9. *Вредност детерминанте се не мења када се елементима једне врсте (колоне) додају одговарајући елементи неке друге врсте (колоне) умножени истим бројем* (C. G. *Jacobi*, 1841).

Када се елементи друге колоне детерминанте трећег реда помноже бројем λ и додају елементима прве колоне исте детерминанте, онда се на основу правила 8. добија

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\Delta+\lambda\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\Delta+\lambda\,(0)=\Delta.$$

Ово правило има велику *практичну вредност* за израчунавање детерминанти, јер се помоћу њега може постићи да се у некој врсти (колони) добије што више коефицијената једнаких нули, па се онда развој детерминанте врши по тој врсти (колони).

Примери. —

1. Множењем елемената друге врсте са -4 и додавањем елементима прве врсте, а затим множењем са -2 и додавањем трећој врсти добија се:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -10 & -11 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -10 & -11 \\ -6 & -6 \end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=6.$$

2. Одузимањем елемената прве колоне од елемената треће колоне добија се:

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -21.$$

3. Одузимањем елемената претходне (горње) врсте од наредне (доње) почев од прве врсте до последње, добија се да је детерминанта

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & k+1 & \cdots & n & n+1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \cdots & \cdot & \cdot \\ n-1 & n & n+1 & \cdots & k+n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & k+n & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

за $n > 2$.

10. *Када су сви елементи са једне стране главне дијагонале једнаки нули детерминанта је једнака производу елемената са главне дијагонале.*

Ово се лако доказује развијањем детерминанте и кофактора по елементима првих колона, па је

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdot & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} K_{11} = a_{11} a_{22} K_{22} = \cdots = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \quad (1.14)$$

Пошто коефицијенти изнад главне дијагонале не утичу на вредност предње детерминанте они могу бити и једнаки нули, а вредност детерминанте је опет једнака производу елемената са главне дијагонале, те је

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}; \qquad I_n = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (1.15)$$

11. *Детерминанти се може повисити ред а да се вредност детерминанте не промени када се на главној дијагонали допишу јединице а у врстама са једне стране те дијагонале нуле, и у колонама са друге стране дијагонале произвољни бројеви.*

Тако, од детерминанте трећег реда може постати детерминанта петог реда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| . \qquad (1.16)$$

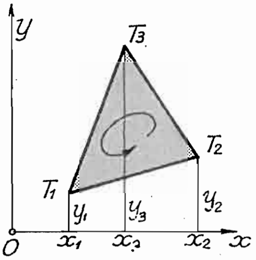
Двострука површина троугла у равни Oxy чија темена T_i имају координате x_i, y_i (слика 1.2) износи:

$$2A = (y_3+y_1)\ (x_3-x_1)+(y_2+y_3)\ (x_2-x_3)-$$

$$-(y_2+y_1)\ (x_2-x_1) = x_1\,(y_2-y_3)+x_2\,(y_3-y_1)+$$

$$+x_3\,(y_1-y_2) = (x_2-x_1)\ (y_3-y_1)-(y_2-y_1)\ (x_3-x_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$



Слика 1.2. — Површина троугла у равни Oxy

12. *Vandermonde-ова де̄терминан̄та има облик и вреднос̄т*

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \cdots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \cdots x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \cdots x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1} (x_j - x_i); \quad j > i; \qquad (1.17)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$j = 2, 3, \ldots, n.$$

Она је, дакле, једнака производу разлика елемената x_j и x_i чији индекси j и i образују *комбинације друге класе* без понављања природних бројева 1, 2, 3, ..., n. Према томе производ има $\binom{n}{2}$ чинилаца.

Предње ћемо доказати на детерминанти четвртог реда, одузимањем елемената прве врсте од сваке наредне врсте до последње (n), издвајањем заједничког чиниоца и понављањем поступка, како следи:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & x_2-x_1 & (x_2-x_1)\,(x_2+x_1) & (x_2-x_1)\,(x_2^2+x_2x_1+x_1^2) \\ 0 & x_3-x_1 & (x_3-x_1)\,(x_3+x_1) & (x_3-x_1)\,(x_3^2+x_3x_1+x_1^2) \\ 0 & x_4-x_1 & (x_4-x_1)\,(x_4+x_1) & (x_4-x_1)\,(x_4^2+x_4x_1+x_1^2) \end{vmatrix} =$$

$$=(x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\,(x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2+x_1 & x_2^2+x_2x_1+x_1^2 \\ 1 & x_3+x_1 & x_3^2+x_3x_1+x_1^2 \\ 1 & x_4+x_1 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\,(x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2+x_1 & x_2^2+x_2x_1+x_1^2 \\ 0 & x_3-x_2 & (x_3-x_2)\,(x_3+x_2+x_1) \\ 0 & x_4-x_2 & (x_4-x_2)\,(x_4+x_2+x_1) \end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\,(x_4-x_1)\,(x_3-x_2)\,(x_4-x_2)\begin{vmatrix} 1 & x_3+x_2+x_1 \\ 0 & x_4-x_3 \end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\,(x_4-x_1)\,(x_3-x_2)\,(x_4-x_2)\,(x_4-x_3);$$

$$C_2^2=21;\ 31;\ 41;\ 32;\ 42;\ 43.$$

13. *Jacobi-јева детерминанта има само елементе на главној дијагонали и на две дијагонале паралелне главној дијагонали, то јест она је детерминанта са елементима само на три паралелна реда у смеру главне дијагонале, средњи ред је сама дијагонала. Елементи на другим местима су једнаки нули.*

Њен се развој може вршити помоћу *рекурзивног обрасца,* па је

$$J_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdot & & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdot & & & & & & & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & 0 & a_{i,\,i-1} & a_{ii} & a_{i,\,i+1} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & 0 & a_{n-1,\,n-2} & a_{n-1,\,n-1} & a_{n-1,\,n} \\ & & & & & & & & 0 & 0 & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{nn}\,J_{n-1}-a_{n-1,\,n}\,a_{n,\,n-1}\,J_{n-2};\qquad J_1=a_{11};\qquad J_0=1. \tag{1.18}$$

Када су сви елементи *Jacobi*-јеве детерминанте *једнаки,* то јест када су $a_{ii}=a_{i,\,i+1}=a_{i,\,i-1}=a$, тада су ове детерминанте:

$$J_n=a\,J_{n-1}-a^2\,J_{n\ 2};\quad J_1=a;\quad J_0=1;$$

$$J_{2+3r}=0;\quad r=0;\ 1;\ 2;\ldots; \tag{1.19}$$

$$J_{3r+\alpha}=(-1)^r\,a^{3r+\alpha};\quad r=0;\ 1;\ 2;\ldots;\qquad \alpha=0 \text{ или } 1.$$

Примери. —

1. Детерминанта биномних коефицијената (*Pascal*-ов *троугао*), дијагонална и јединична детерминанта су:

$$P_n=\begin{vmatrix} 1 &&&&&& \\ 1 & 1 &&&&& \\ 1 & 2 & 1 &&&& \\ 1 & 3 & 3 & 1 &&& \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 && \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}=1;\quad \begin{vmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 2 &&&&&& \\ && 3 &&&&& \\ &&& 4 &&&& \\ &&&& \cdot &&& \\ &&&&& \cdot && \\ &&&&&& n-1 & \\ &&&&&&& n \end{vmatrix}=\prod_{1}^{n}\nu=n!;$$

$$\begin{vmatrix} 1^2 &&&&&& \\ & 2^2 &&&&& \\ && 3^2 &&&& \\ &&& \cdot &&& \\ &&&& \cdot && \\ &&&&& \cdot & \\ &&&&&& n^2 \end{vmatrix}=\prod_{1}^{n}\nu^2=(n!)^2;\quad \begin{vmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && \cdot &&&&& \\ &&& \cdot &&&& \\ &&&& \cdot &&& \\ &&&&& \cdot && \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \end{vmatrix}=I_n.$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 &&&& \cdot & \\ -1 & 1 & 1 &&& \cdot & \\ 1 & 1 & 2 & 1 && \cdot & \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 1 & \cdot & \\ 1 & 1 & 4 & 6 & 4 & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^{n+1} & 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdot & \binom{n-1}{n-2} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 &&&&& \\ 0 & 2 & 1 &&&& \\ 0 & 0 & 2 & 1 &&& \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 && \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2^{n-1};\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 &&&&&& \\ & 3 & 1 &&&&& \\ && 3 & 1 &&&& \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ &&&&&& \cdot & \\ &&&&&&& \cdot \\ &&&&&&& 3 \end{vmatrix}=3^{n-1};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 &&&&& \\ -1 & 1 & 1 &&&& \\ 1 & 1 & 2 & 1 &&& \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 1 && \\ 1 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ -1 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 &&&&& \\ 0 & 2 & 1 &&&& \\ 0 & 0 & 2 & 1 &&& \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 && \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2^5=32.$$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & k & \cdot & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \cdot & k & \cdot & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdot & k & \cdot & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k & k & k & k & \cdot & k & \cdot & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n & n & n & & n & & n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 &&&&&&& \\ & -1 &&&&&& \\ && -1 &&&&& \\ &&& \cdot &&&& \\ &&&& \cdot &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& \cdot & \\ &&&&&&& \cdot \\ &&&&&&& n \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\,n;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -4; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & \pm 1 & & & & \\ \pm 1 & 3 & \pm 2 & & & \\ & \pm 2 & 5 & \pm 3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 2n-3 & \pm(n-1) \\ & & & & \pm(n-1) & 2n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & 2n-3 & \\ & & & & & & & 2n-1 \end{vmatrix} = n!\,;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & 2 & 5 & 3 & \\ & & 3 & 7 & 4 \\ & & & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 5 \end{vmatrix} = 5! = 120.$$

5. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 2^2 & 5 & 1 & & & \\ & 3^2 & 7 & 1 & & \\ & & 4^2 & 9 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 3 & 1 & & & \\ & & 4 & 1 & & \\ & & & 5 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & n+1 \end{vmatrix} = (n+1)!\,;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 4 & 5 & 1 & & \\ & 9 & 7 & 1 & \\ & & 16 & 9 & 1 \\ & & & 25 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 4 & 1 & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 6 \end{vmatrix} = 6! = 720.$$

6. $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & & & \\ 2 & 2 & 2 & & \\ & 2 & 2 & 2 & \\ & & 2 & 2 & 2 \\ & & & 2 & 2 \end{vmatrix} = J_{2+3} = J_5 = 0; \quad J_4 = J_{3+1} = (-1)\,2^4 = -16.$$

7.

$$V_5=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 15 \\ 2 & 8 & 26 & 80 \\ 3 & 15 & 63 & 255 \\ 4 & 24 & 124 & 624 \end{vmatrix}=24\begin{vmatrix} 1 & 6 & 25 \\ 2 & 14 & 70 \\ 3 & 24 & 141 \end{vmatrix}=$$

$$=144\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 22 \end{vmatrix}=288=[(x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\,(x_4-x_1)\,(x_5-x_1)]\cdot$$

$$\cdot[(x_3-x_2)\,(x_4-x_2)\,(x_5-x_2)]\,[(x_4-x_3)\,(x_5-x_3)]\,[(x_5-x_4)]=$$

$$=(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\,(1\cdot 2\cdot 3)\,(1\cdot 2)\,(1)=288.$$

1.3. Множење детерминанти. — Производ двеју детерминанти другог реда може се представити детерминантом другог реда, јер следи

$$\Delta_a\cdot\Delta_b=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,(b_{11}\,b_{22}-b_{12}\,b_{21})=$$

$$=(a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21})\,(a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22})-(a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22})\,(a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21}),$$

те је

$$\Delta_a\cdot\Delta_b=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\Delta_c=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.20}$$

Елемент c_{11} једнак је збиру производа елемената прве врсте детерминанте Δ_a и елемената прве колоне детерминанте Δ_b; елемент c_{12} једнак је збиру производа елемената прве врсте прве и елемената друге колоне друге детерминанте; обратно, елемент c_{21} једнак је збиру производа елемената друге врсте прве детерминанте и елемената прве колоне друге детерминанте, и најзад елемент c_{22} једнак је збиру производа елемената друге врсте прве и елемената друге колоне друге детерминанте. Дакле, *елеменӣ* c_{ik} *једнак је збиру ӣроизвода елеменаӣа* i-те *врсӣе леве* (прве) *деӣерминанӣе и* k-те *колоне десне* (друге) *деӣерминанӣе.*

Из (1.20) следи да се производ двеју детерминанти другог реда може написати у једном облику од четири могуће комбинације, како следи:

$$\Delta_a\cdot\Delta_b=\begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11} & a_{11}\,b_{12} \\ a_{22}\,b_{21} & a_{22}\,b_{22} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12}\,b_{21} & a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11} & a_{21}\,b_{12} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{12} & a_{11}\,b_{21}+a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{12} & a_{21}\,b_{21}+a_{22}\,b_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11}+a_{21}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12}+a_{21}\,b_{22} \\ a_{12}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21} & a_{12}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11}+a_{21}\,b_{12} & a_{11}\,b_{21}+a_{21}\,b_{22} \\ a_{12}\,b_{11}+a_{22}\,b_{12} & a_{12}\,b_{21}+a_{22}\,b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}=\Delta_c.$$

Множење двеју детерминанти другог реда проширује се и на множење детерминанти n-ог реда. Елемент c_{ik} добија се на четири могућа начина сабирањем производа елемената:

1°) врсте (i) — колоне (k); 2°) врсте (i) — врсте (k); 3^e) колоне (i) — колоне (k) и 4°) колоне (i) — врсте (k).

Према томе су:

$$c_{ik}=\begin{cases} 1^\circ \quad a_{i1}\,b_{1k}+a_{i2}\,b_{2k}+\cdots+a_{in}\,b_{nk}=\sum\limits_{r=1}^{n} a_{ir}\,b_{rk}; \\ 2^\circ \quad a_{i1}\,b_{k1}+a_{i2}\,b_{k2}+\cdots+a_{in}\,b_{kn}=\sum\limits_{1}^{n} a_{ir}\,b_{kr}; \\ 3^e \quad a_{1i}\,b_{1k}+a_{2i}\,b_{2k}+\cdots+a_{ni}\,b_{nk}=\sum\limits_{1}^{n} a_{ri}\,b_{rk}; \\ 4^\circ \quad a_{1i}\,b_{k1}+a_{2i}\,b_{k2}+\cdots+a_{ni}\,b_{kn}=\sum\limits_{1}^{n} a_{ri}\,b_{kr}. \end{cases} \qquad i,k=1;2;\ldots n; \qquad (1.21)$$

Транспозицијом се не мења вредност детерминанте, па се транспозицијом елемената не мења производ детерминанти. Такође важи закон о *комутацији детерминанти* (чинилаца), те је

$$\Delta_c=\Delta_a\cdot\Delta_b=\Delta_a\cdot\Delta_b'=\Delta_a'\cdot\Delta_b=\Delta_b\cdot\Delta_a=\Delta_a'\cdot\Delta_b'=\Delta_b'\cdot\Delta_a'. \qquad (1.22)$$

Степеновање детерминанти своди се на множење. Парни степен детерминанте даје симетричну детерминанту у односу на елементе главне дијагонале; код непарног изложиоца то није случај. Тако је квадрат детерминанте другог реда:

$$\Delta_2^2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2=\Delta\cdot\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2 & a_{11}\,a_{21}+a_{12}\,a_{22} \\ a_{11}\,a_{21}+a_{12}\,a_{22} & a_{21}^2+a_{22}^2 \end{vmatrix}. \qquad (1.23)$$

Када су детерминанте чиниоци различитог реда треба их претходно према особини 11. довести да буду детерминанте истог реда. Тако је

$$\Delta_2\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.24)$$

Примери. —

1. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5\cdot 10=50=\begin{vmatrix} 8+1 & 4+3 \\ 12+4 & 6+12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 16 & 18 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 25 \end{vmatrix}=50=$$

$$=\begin{vmatrix} 8+2 & 2+3 \\ 12+8 & 3+12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 15 \end{vmatrix}=50\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8+3 & 4+9 \\ 4+4 & 2+12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 8 & 14 \end{vmatrix}=50=$$

$$=\begin{vmatrix} 8+6 & 4+8 \\ 2+9 & 1+12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 11 & 13 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 25 \end{vmatrix}=50.$$

2. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 15 \end{vmatrix}=50=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 8 & 14 \end{vmatrix}=50=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 14 & 11 \\ 12 & 13 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix}=50.$$

3. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=15\cdot 40=600=\begin{vmatrix} 15 & 7 & 15 \\ 20 & 18 & 25 \\ 14 & 2 & 16 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 15 & 7 & 0 \\ 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=600.$$

4. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}=25\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=25;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^3=\Delta^2\cdot\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 40 & 45 \\ 95 & 110 \end{vmatrix}=25\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=125.$$

5. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 14 & 16 & 17 \\ 16 & 29 & 13 \\ 17 & 13 & 26 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ 15 & 0 & 0 \end{vmatrix}=15^2=225.$$

6. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^4=(\Delta^2)^2=\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right)^2=\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}^2=$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 125 & 300 \\ 300 & 725 \end{vmatrix}=625.$$

7. $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{vmatrix} = 4; \quad \begin{vmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 2 \end{vmatrix} = 4.$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 4 \\ 20 & 15 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -40 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 200.$

1.4. Минори вишег реда. Ранг детерминанте. — Када у детерминанти пребришемо i-ту врсту и k-ту колону остатак је детерминанта $n-1$-ог реда која се назива *субдетерминанта* или *минор* елемента a_{ik}. Овај минор се назива *минор првог реда* елемента a_{ik} детерминанте Δ_n. Када се у детерминанти пребришу две врсте и две колоне оно што остане је детерминанта $n-2$-ог реда. Она се назива *минор другог реда*. Уопште под *минором p-ог реда детерминанте Δ_n подразумева се детерминанта $n-p$-ог* реда која се добија из прве када се *пребрише p врста* и *p колона*. На пример, различити минори су:

$$\Delta_3 = \begin{array}{c|ccc|c} & & \wr & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & & \wr & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & & \wr & & \\ \sim & a_{31}\sim & a_{32}\sim & a_{33} & \sim \\ & & \wr & & \end{array}; \quad M_1 = M_3^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad \Delta_4 = \begin{array}{c|cccc|c} & & & \wr & \wr & \\ \sim & a_{11}\sim & a_{12}\sim & a_{13}\sim & a_{14} & \sim \\ & & & \wr & \wr & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \\ & & & \wr & \wr & \\ \sim & a_{31}\sim & a_{32}\sim & a_{33}\sim & a_{34} & \sim \\ & & & \wr & \wr & \\ & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \\ & & & \wr & \wr & \end{array}; \tag{1.25}$$

$$M_2 = M_{1,\,3}^{3,\,4} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_5 = \begin{array}{c|ccccc|c} & & \wr & \wr & \wr & & \\ \sim & a_{11}\sim & a_{12}\sim & a_{13}\sim & a_{14}\sim & a_{15} & \sim \\ & & \wr & \wr & \wr & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \\ & & \wr & \wr & \wr & & \\ \sim & a_{31}\sim & a_{32}\sim & a_{33}\sim & a_{34}\sim & a_{35} & \sim \\ & & \wr & \wr & \wr & & \\ & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \\ & & \wr & \wr & \wr & & \\ \sim & a_{51}\sim & a_{52}\sim & a_{53}\sim & a_{54}\sim & a_{55} & \sim \\ & & \wr & \wr & \wr & & \end{array};$$

$$M_3 = M_{1,\,3,\,5}^{2,\,3,\,4} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{25} \\ a_{41} & a_{45} \end{vmatrix}; \quad M_p = M_\nu^k = M_{r\cdot\nu}^{r\cdot k}.$$

Минори вишег реда играју важну улогу при одређивању *ранга (карактеристике) детерминанте* (G. *Frobenius*, 1879). Када је детерминанта реда n различита од нуле $\Delta_n \neq 0$ каже се да јој је ранг n. Тако је $\Delta_2 \neq 0$ ранга 2; $\Delta_3 \neq 0$ је ранга 3.

Када је детерминанта *сингуларна*, то јест када је *једнака нули*, $\Delta_n = 0$, *ранг јој се одређује према минорима вишег реда. Ако јој је бар један минор реда p различит од нуле онда је она ранга $r = n - p$.* Када је $\Delta_3 = 0$ а бар један од минора првог реда (субдетерминанти другог реда) је различит од нуле детерминанта је ранга $r = 3 - 1 = 2$. Ако су и сви минори првог реда једнаки нули, а бар један од минора другог реда (појединих елемената) је различит од нуле, детерминанта је ранга $r = 3 - 2 = 1$.

Када је $\Delta_4=0$, а бар један од минора првог реда (субдетерминанти трећег реда) је различит од нуле ранг је $r=4-1=3$. Буду ли сви ови минори једнаки нули, а бар један минор другог реда је различит од нуле (детерминанте другог реда) онда је ранг $r=4-2=2$. И најзад, када су и ови минори једнаки нули али је бар један минор реда $p=3$ различит од нуле (то јест неки елемент је различит од нуле) онда је ранг $r=4-3=1$. Када су сви елементи $a_{ik}=0$ онда је и ранг детерминанте $r=0$.

Примери. —

1. $$\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}=0;\quad r=0;\qquad \begin{vmatrix}3&6\\2&4\end{vmatrix}=0;\quad r=1;\qquad \begin{vmatrix}1&-2\\4&-8\end{vmatrix}=0;\quad M_1=M_1^1=1\neq0;\quad r=1.$$

2. $$\begin{vmatrix}2&1&5\\3&2&1\\4&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8&-9&5\\1&0&1\\0&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8&-9&13\\1&0&0\\0&-1&2\end{vmatrix}=-(-18+13)=5;\ \Delta=5\neq0;\ r=3.$$

3. $$\begin{array}{c|ccc|c} & & \downarrow & & \\ & 2&3&1& \\ & 2&3&4& \\ \rightarrow & 4&6&5&\leftarrow \\ & &\uparrow& & \end{array}=0;\qquad \begin{vmatrix}2&1\\2&4\end{vmatrix}=6\neq0;\quad r=3-1=2;\qquad \begin{array}{c|ccc|c} & & & \downarrow & \\ & 2&1&4& \\ & -1&2&-7& \\ \rightarrow & 3&4&1&\leftarrow \\ & & &\uparrow& \end{array}=0;$$

$$M_3^3=\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}=5\neq0;\quad M_1\neq0;\quad r=3-1=2.$$

4. $$\begin{array}{c|ccc|c} & \downarrow & \downarrow & & \\ \rightarrow & 2&4&2&\leftarrow \\ \rightarrow & 3&6&3&\leftarrow \\ & 1&2&1& \\ & \uparrow&\uparrow& & \end{array}=0;\quad M_3^3=\begin{vmatrix}2&4\\3&6\end{vmatrix}=0;\quad M_2^3=\begin{vmatrix}2&4\\1&2\end{vmatrix}=0;\quad M_3^2=\begin{vmatrix}2&2\\3&3\end{vmatrix}=0;$$

$$M_2^2=\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix}=0;\quad M_3^1=\begin{vmatrix}4&2\\6&3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix}3&6\\1&2\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}3&3\\1&1\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}6&3\\2&1\end{vmatrix}=0;$$

$$M_1=0;\quad M_{1,2}^{1,2}=1\neq0;\quad M_2\neq0;\quad r=3-2=1.$$

5. $$\begin{vmatrix}1&3&2&0\\1&4&5&1\\2&1&3&0\\1&3&2&1\end{vmatrix}=14;\quad r=4;\qquad \begin{array}{c|cccc|c} & & & & \downarrow & \\ & 1&3&2&1& \\ & 1&4&5&1& \\ & 2&1&3&0& \\ \rightarrow & 1&3&2&1&\leftarrow \\ & & & &\uparrow& \end{array}=0;$$

$$M_4^4=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&4&5\\2&1&3\end{vmatrix}=14\neq0;\quad M_1\neq0;\quad r=3.$$

6. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad M_1 = 0; \quad M_4^4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_2^4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad M_4^3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \ldots;$$

$$M_{3,4}^{3,4} = M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad r = 4 - 2 = 2.$$

7. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad M_1 = 0; \quad M_2 = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \ldots;$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{1,2,3}^{1,2,3} = 6 \neq 0; \quad M_3 \neq 0; \quad r = n - m = 4 - 3 = 1.$$

Када је детерминанта реда n *ранга* $n-1$ *тада су елементи једне њене врсте (или колоне) линеарне комбинације елемената осталих врста (или колона).*

Ово правило покажимо на детерминанти трећег реда. Ако је $\Delta_3=0$, а бар један минор првог реда (субдетерминанта другог реда) је различит од нуле, онда је ранг $r=3-1=2$. Нека је минор првог елемента a_{11} различит од нуле, тада развијањем детерминанте по елементима прве колоне и користећи правило 7., образац (1.13), добијамо:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0; \quad K_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\Delta_3 = a_{11} K_{11} + a_{21} K_{21} + a_{31} K_{31} = 0;$$

$$\Delta_3 = a_{12} K_{11} + a_{22} K_{21} + a_{32} K_{31} = 0;$$

$$\Delta_3 = a_{13} K_{11} + a_{23} K_{21} + a_{33} K_{31} = 0.$$

Поделимо добијени систем једначина кофактором $K_{11} \neq 0$ добићемо елементе прве врсте детерминанте Δ_3:

$$a_{11} = \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{31}; \quad a_{12} = \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 a_{32}; \quad a_{13} = \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 a_{33},$$

где су коефицијенти пропорционалности

$$\lambda_1 = -K_{21}/K_{11}; \quad \lambda_2 = -K_{31}/K_{11}.$$

Ови коефицијенти *нису једновремено једнаки нули* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$, јер би тада коефицијенти прве врсте били једнаки нули $a_{1k}=0$, па су заиста елементи прве врсте ове детерминанте линеарне комбинације елемената осталих двеју врста исте детерминанте.

Доказ се лако проширује и на детерминанте вишег реда.

Примери. —

1. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{array}{lll} K_{11}=25-18=7; & \lambda_1=3/7; & a_{11}=12/7+\ 2/7=14/7=2; \\ K_{21}=-(15-12)=-3; & \lambda_2=2/7; & a_{12}=15/7+\ 6/7=21/7=3; \\ K_{31}=18-20=-2; & & a_{13}=18/7+10/7=28/7=4. \end{array}$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_4 = \begin{cases} a_{41}\, K_{41}+a_{42}\, K_{42}+a_{43}\, K_{43}+a_{44}\, K_{44}=0; \\ a_{31}\, K_{41}+a_{32}\, K_{42}+a_{33}\, K_{43}+a_{34}\, K_{44}=0; \\ a_{21}\, K_{41}+a_{22}\, K_{42}+a_{23}\, K_{43}+a_{24}\, K_{44}=0; \\ a_{11}\, K_{41}+a_{12}\, K_{42}+a_{13}\, K_{43}+a_{14}\, K_{44}=0; \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} K_{41}=\ \ 13; & \lambda_1=\ \ 13/2; & a_{44}=8; \\ K_{42}=-\ 7; & \lambda_2=-\ 7/2; & a_{34}=1; \\ K_{43}=\ \ 3; & \lambda_3=\ \ 3/2; & a_{24}=1; \\ K_{44}=-\ 2; & & a_{14}=2, \end{array}$$

1.5. Систем линеарних једначина. — Општи облик система нехомогених линеарних једначина је (1.4). Претпоставимо да систем има n једначина са n непознатих x_i, онда коефицијенти a_{ik} образују детерминанту n-ог реда која се зове *детерминанта система:*

$$\overset{k}{\longrightarrow}\!\!\!\!\underset{i}{\downarrow}\ \sum_i^n \sum_k^n a_{ik}\, x_k = b_i; \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1k}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdots a_{ik}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nk}\cdots a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\begin{array}{|l} a_{11}\, x_1+a_{12}\, x_2+\cdots+a_{1k}\, x_k+\cdots+a_{1n}\, x_n=b_1; \\ a_{21}\, x_1+a_{22}\, x_2+\cdots+a_{2k}\, x_k+\cdots+a_{2n}\, x_n=b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\, x_1+a_{i2}\, x_2+\cdots+a_{ik}\, x_k+\cdots+a_{in}\, x_n=b_i; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, x_1+a_{n2}\, x_2+\cdots+a_{nk}\, x_k+\cdots+a_{nn}\, x_n=b_n. \end{array} \tag{1.26}$$

Претпоставимо да је $\Delta_n \neq 0$ и да систем има решења $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$. Да бисмо одредили непознату x_k помножимо систем једначина кофакторима елемената k-те колоне, то јест кофакторима елемената a_{ik} и саберимо онда добијамо:

$$\begin{aligned} & x_1\, [a_{11}\, K_{1k}+a_{21}\, K_{2k}+\cdots+a_{n1}\, K_{nk}]+ \\ & +x_2\, [a_{12}\, K_{1k}+a_{22}\, K_{2k}+\cdots+a_{n2}\, K_{nk}]+ \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & +x_k\, [a_{1k}\, K_{1k}+a_{2k}\, K_{2k}+\cdots+a_{nk}\, K_{nk}]+ \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & +x_n\, [a_{1n}\, K_{1k}+a_{2n}\, K_{2k}+\cdots+a_{nn}\, K_{nk}]=b_1\, K_{1k}+b_2\, K_{2k}+\cdots+b_n\, K_{nk}. \end{aligned}$$

Према обрасцу (1.13) сви изрази уз непознате x_i једнаки су нули изузев израза уз непознату x_k који је једнак детерминанти система, те је

$$x_k\,(a_{1k}\,K_{1k}+a_{2k}\,K_{2k}+\cdots+a_{nk}\,K_{nk})=x_k\cdot\Delta=$$
$$=b_1\,K_{1k}+b_2\,K_{2k}+\cdots+b_n\,K_{nk}. \tag{1.27}$$

Израз на десној страни представља такође детерминанту која се добија из детерминанте система када се коефицијенти $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ уз непознату x_k *замене* апсолутним члановима b_i. Према томе је

$$x_k\cdot\Delta_n=\Delta_{(k)};\qquad x_k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1k}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2k}\ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nk}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots b_1\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots b_2\ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots b_n\ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.28}$$

Дакле, *непознате се одређују као количници детерминанти*

$$x_1=\frac{\Delta_{(1)}}{\Delta};\quad x_2=\frac{\Delta_{(2)}}{\Delta};\ldots;\quad x_k=\frac{\Delta_{(k)}}{\Delta};\ldots;\quad x_n=\frac{\Delta_{(n)}}{\Delta}. \tag{1.29}$$

Ове *формуле* називају се *Cramer*-ове *формуле.*

На пример, за систем нехомогених једначина од три једначине формуле би биле

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\qquad \Delta_{(1)}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{(2)}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};\qquad \Delta_{(3)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

С обзиром на то да ли је детерминанта система једначина различита од нуле или једнака нули, зависи да ли систем има или нема решења.

1.5.1. Детерминанта система је различита од нуле. Cramer-ово правило. — Када је детерминанта система различита од нуле $\Delta_n\neq 0$ она је ранга n, па систем једначина има *један* и *то само један систем решења* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Непознате (x_k) одређују се по *Cramer*-овим *формулама* (1.29). Оне представљају *Cramer*-ово *правило:*

Систем од n линеарних нехомогених једначина са n непознатих чија је детерминанта система различита од нуле има само један систем решења. Та су решења одређена количником чији је именилац *увек детерминанта система а бројилац детерминанта која се добија из детерминанте система када се у њој коефицијенти уз непознату која се тражи замене апсолутним члановима система једначина (то јест десним странама једначина нехомогеног система).*

Пример. — Систем од $n=4$ једначине са $n=4$ непознате

$$\begin{aligned} 5x_1+2x_2-3x_3+x_4&=4;\\ 2x_1-x_2+4x_3-5x_4&=12;\\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4&=8;\\ 3x_1-x_2+x_3+3x_4&=-1; \end{aligned} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 4 & -5\\ 1 & 3 & -2 & -2\\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -1 & -4 & -1\\ 5 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-175;$$

$$\Delta_{(1)}=-175;\quad \Delta_{(2)}=-525;\quad \Delta_{(3)}=-350;\quad \Delta_{(4)}=175,$$

има решења:

$$x_1=-175/-175=1;\quad x_2=3;\quad x_3=2;\quad x_4=-1.$$

1.5.2. Детерминанта система је једнака нули.

— Када је $\Delta_n=0$ решења зависе од ранга (r) детерминанте система и од детерминанти $\Delta_{(k)}$ које представљају бројиоце у *Cramer*-овим формулама. Разликује се више случајева решења.

a) Систем једначина је противречан. — Када је $\Delta_n=0$ али ранга $r=n-1$ (бар један минор првог реда је различит од нуле) а макар једна детерминанта $\Delta_{(k)}$ је различита од нуле, систем *нема решења,* јер је *противречан; што једне једначине тврде, друге то поричу.*

Пример. —

$$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3&=2;\\ x_1-x_2+2x_3&=1;\\ 3x_1+3x_2+6x_3&=4; \end{aligned} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}=\mathbf{0};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq\mathbf{0};\quad r=3-1=2;\quad \Delta_{(1)}=-8;\quad \Delta_{(2)}=0;\quad \Delta_{(3)}=-4.$$

Трећа једначина је противречна првој, јер даје резултат $x_1+x_2+2x_3=4/3\neq 2$, који је супротан резултату прве једначине.

b) Систем једначина је неодређен. — Када је $\Delta_n=0$ и ранга $r=n-1$ а све су детерминанте $\Delta_{(k)}=0$, систем *има бескрајно много решења.* Систем је *неодређен,* јер су једначине *зависне,* што неке тврде, то исто тврде и остале. Дакле, *има мање услова неголи непознатих.*

Пример. —

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=3;\\ 3x_1-x_2+2x_3&=-1;\\ 4x_1+x_2+x_3&=2; \end{aligned} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\qquad \begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-7\neq 0;\quad r=2;$$

$$\Delta_{(1)}=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0;\quad \Delta_{(2)}=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=0;\quad \Delta_{(3)}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Збир првих двеју једначина даје трећу једначину $4x_1+x_2+x_3=2$, те се она може одбацити, па остаје систем са две једначине и три непознате.

c) *Систем једначина је немогућ.* — Када је детерминанта система једнака нули $\Delta_n=0$ или је ранга $r=n-2$, а детерминанте су $\Delta_{(k)}=0$ или ранга $r_{(k)}=n-1$, онда су коефицијенти појединих једначина пропорционални, па је *систем немогућ.*

Пример. —

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\ x_3&=4;\\ 2x_1+2x_2+2x_3&=6;\\ 3x_1+3x_2+3x_3&=8;\end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}=0;\quad r=1;$$

$$\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 6 & 2 & 2\\ 8 & 3 & 3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}4 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0;\quad r_{(1)}=2;$$

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 6 & 2\\ 3 & 8 & 3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{vmatrix}\neq 0;\quad r_{(2)}=2;$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 6\\ 3 & 3 & 8\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 8\end{vmatrix}\neq 0;\quad r_{(3)}=2.$$

Коефицијенти a_{ik} друге и треће врсте пропорционални су коефицијентима прве врсте (коефицијенти пропорционалности су 2 и 3), али апсолутни чланови b_i нису, па је систем *немогућ.*

d) *Систем са бескрајно решења.* — Када су $\Delta_n=0$ и $\Delta_{(k)}=0$ али ранга $r=n-2$, систем има бескрајно много решења. Једначине су *зависне,* те се систем своди на систем од $n-2$ једначине са n непознатих.

Пример. —

$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+\ x_3&=\ 5;\\ 4x_1-6x_2+2x_3&=10;\\ 6x_1-9x_2+3x_3&=15;\end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -6 & 2\\ 6 & -9 & 3\end{vmatrix}=0;\quad r=1;$$

$$\begin{vmatrix}5 & -3 & 1\\ 10 & -6 & 2\\ 15 & -9 & 3\end{vmatrix}=0;\quad r_{(1)}=1;\quad \begin{vmatrix}2 & 5 & 1\\ 4 & 10 & 2\\ 6 & 15 & 3\end{vmatrix}=0;\quad r_{(2)}=1;\quad \begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ 4 & -6 & 10\\ 6 & -9 & 15\end{vmatrix}=0;\quad r_{(3)}=1.$$

Систем се своди само на прву једначину са три непознате $2x_1-3x_2+x_3=5$. Решења су: (4; 1; 0); (1; 1; 6); (5; 2; 1); итд.

1.5.3. Елиминанта (резултанта) система. — Када систем нехомогених једначина (1.26) има *више једначина него што има непознатих он се у општем случају не може решити.* Међутим, у специјалним случајевима ипак постоји решење.

Ради једноставности узмимо систем од четири једначине са три непознате

$$
\begin{aligned}
a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3&=b_1;\\
a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}\,x_3&=b_2;\\
a_{31}\,x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}\,x_3&=b_3;\\
a_{41}\,x_1+a_{42}\,x_2+a_{43}\,x_3&=b_4,
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

и направимо детерминанту четвртог реда (уопште $n+1$-ог реда, где је n број једначина а $n-1$ број непознатих) у којој су *елементи последње колоне апсолутни чланови* система једначина (десне стране система једначина)

$$
\Delta_e=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}. \tag{1.31}
$$

Помножимо једначине (1.30) редом кофакторима елемената последње колоне детерминанте (1.31) и саберимо, добићемо:

$$
\begin{aligned}
&x_1\,(a_{11}\,K_{14}+a_{21}\,K_{24}+a_{31}\,K_{34}+a_{41}\,K_{44})+\\
&+x_2\,(a_{12}\,K_{14}+a_{22}\,K_{24}+a_{32}\,K_{34}+a_{42}\,K_{44})+\\
&+x_3\,(a_{13}\,K_{14}+a_{23}\,K_{24}+a_{33}\,K_{34}+a_{43}\,K_{44})=b_1\,K_{14}+b_2\,K_{24}+b_3\,K_{34}+b_4\,K_{44}.
\end{aligned}
$$

Према (1.13) лева страна је једнака нули, а десна је детерминанта Δ_e. Услов

$$
\Delta_e=0 \tag{1.32}
$$

доказује да су елементи међусобно зависни, и да се та зависност изражава баш тим условом. Због тога се ова детерминанта назива *елиминанта* или *резултанта система.* Да би се добила решења непознатих треба из тог система *изоставити једну једначину* (ма коју) и добити систем од $n-1$ једначина са $n-1$ непознатом, који сигурно има решења. *Добијена решења су такође и решења изостављене једначине.*

Примери. —

1. Систем једначина нема решења

$$
\begin{aligned}
3\,x_1+\;\;x_2&=5;\\
6\,x_1-\;\;x_2&=3;\\
2\,x_1+5\,x_2&=8;
\end{aligned}
\qquad
\Delta_e=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5\\ 6 & -1 & 3\\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}=49\neq 0.
$$

2. Систем једначина има решења. Када се узму прве три једначине, добијају се решења која задовољавају и четврту једначину:

$$\left.\begin{array}{r} 2\,x_1+\;\;x_2+\;\;x_3=\;3\\ x_1-\;\;x_2-2\,x_3=\;1\\ 3\,x_1+2\,x_2-3\,x_3=10 \end{array}\right\}; \quad \begin{array}{r} \\ \\ \\ x_1+3\,x_2+4\,x_3=\;3\end{array} \qquad \Delta_e=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & -3 & 10\\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0; \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}=16;$$

$$\Delta_{(1)}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 10 & 2 & -3 \end{vmatrix}=16; \quad \Delta_{(2)}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & 10 & -3 \end{vmatrix}=32; \quad \Delta_{(3)}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix}=-16;$$

$$x_1=1; \quad x_2=2; \quad x_3=-1; \quad x_1+3\,x_2+4\,x_3=1+6-4=3\equiv 3.$$

1.5.4. Систем хомогених једначина. — Код хомогеног система су сви апсолутни чланови једнаки нули, $b_i=0$. Јасно је да су јединствена решења $x_i=0$. Ова се решења зову *идентичка* или *тривијална (очигледна)*. Поред ових тривијалних решења систем може имати и других решења различитих од нуле. Да бисмо их добили уведимо смену непознатих $y_k=x_k/x_n$ онда се добија систем од n нехомогених једначина са $n-1$ непознатом y_k:

$$\begin{array}{l}\overset{k}{\longrightarrow}\\ \underset{i}{\downarrow}\end{array}\sum_1^n\sum_1^n a_{ik}\,x_k=0\,; \qquad \begin{array}{l}\overset{k}{\longrightarrow}\\ \underset{i}{\downarrow}\end{array}\sum_1^n\sum_1^{n-1} a_{ik}\,y_k=-a_{in}; \quad y_k=x_k/x_n\,. \tag{1.33}$$

Он ће имати решења ако је елиминанта једнака нули, а она представља *детерминанту система*

$$\Delta_e=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n-1} & a_{2n}\\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\Delta_n=0. \tag{1.34}$$

Када се према **чл. 1.5.3.** сада узме систем од $n-1$ једначина са $n-1$ непознатом $\boldsymbol{y_k}$ добија се према *Cramer*-овом правилу:

$$\begin{array}{l}\overset{k}{\longrightarrow}\\ \underset{i}{\downarrow}\end{array}\sum_1^{n-1}\sum_1^{n-1} a_{ik}\,y_k=-a_{in}; \qquad y_k=\frac{x_k}{x_n}=\frac{\Delta_{(k)}^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}}. \tag{1.35}$$

Пошто су ове детерминанте

$$\Delta_{(k)}^{(n-1)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots -a_{1n} & \ldots a_{1,n-1}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots -a_{2n} & \ldots a_{2,n-1}\\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & \ldots -a_{n-1,n} & \ldots a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2,n-1} & a_{2n}\\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{vmatrix}=K_{nk}; \quad \Delta_{n-1}=K_{nn}$$

кофактори елемента a_{nk} детерминанте система и елемента a_{nn}, то ће бити:

$$y_1=\frac{x_1}{x_n}=\frac{\Delta_{(1)}^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}}=\frac{K_{n1}}{K_{nn}}\,; \quad y_2=\frac{x_2}{x_n}=\frac{K_{n2}}{K_{nn}}\,; \ldots ; \quad y_k=\frac{x_k}{x_n}=\frac{K_{nk}}{K_{nn}}\,; \ldots ;$$

$$y_{n-1}=\frac{x_1}{x_n}=\frac{K_{n,\,n-1}}{K_{nn}}\,,$$

па су *решења (непознате) одређена односима*:

$$\frac{x_1}{K_{n1}}=\frac{x_2}{K_{n2}}=\cdots=\frac{x_k}{K_{nk}}=\cdots=\frac{x_n}{K_{nn}}\,. \tag{1.36}$$

На основу изнетог можемо поставити ово правило:

Систем од n хомогених једначина са n непознатих има сем идентичког (тривијалног) решења и друга решења ако је детерминанта система једнака нули. Та решења нису потпуно одређена али су одређени њихови односи: решења су сразмерна кофакторима елемената ма које врсте детерминанте система једначина Δ_n, *или ма које колоне транспоноване детерминанте* Δ'_n.

На основу овог правила можемо бирати кофакторе како желимо, само увек треба узети кофакторе или једне врсте од Δ или једне колоне од Δ'. Ако су сви кофактори једнаки нули ($K_{nk}=0$) детерминанта система има ранг $r=n-2$, па систем, према **чл. 1.5.2.** *d*, има бескрајно много решења. Ово само потврђује да је услов $\Delta=0$ и *потребан и довољан за егзистенцију и других решења хомогеног система осим идентичких (тривијалних) решења.*

Примери. —

1.
$$\begin{aligned}2x_1+\ \ x_2+5x_3&=0;\\3x_1+2x_2+\ \ x_3&=0;\\4x_1+3x_2+2x_3&=0;\end{aligned} \quad \Delta=\begin{vmatrix}2&1&5\\3&2&1\\4&3&2\end{vmatrix}=5\neq0; \quad x_1=x_2=x_3\equiv0.$$

2.
$$\begin{aligned}2x_1+3x_2+4x_3&=0;\\4x_1+5x_2+6x_3&=0;\\x_1+3x_2+5x_3&=0;\end{aligned} \quad \Delta=\begin{vmatrix}2&3&4\\4&5&6\\1&3&5\end{vmatrix}=0; \quad \frac{x_1}{K_{31}}=\frac{x_2}{K_{32}}=\frac{x_3}{K_{33}}\,;$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix}3&4\\5&6\end{vmatrix}}=\frac{x_2}{-\begin{vmatrix}2&4\\4&6\end{vmatrix}}=\frac{x_3}{\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}}\,; \quad \frac{x_1}{-2}=\frac{x_2}{4}=\frac{x_3}{-2} \quad \text{или} \quad \frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{-2}=\frac{x_3}{1}\,;$$

$$\frac{x_1}{K_{21}}=\frac{x_2}{K_{22}}=\frac{x_3}{K_{23}}\,; \quad \frac{x_1}{-\begin{vmatrix}3&4\\3&5\end{vmatrix}}=\frac{x_2}{\begin{vmatrix}2&4\\1&5\end{vmatrix}}=\frac{x_3}{-\begin{vmatrix}2&3\\1&3\end{vmatrix}}\,; \quad \frac{x_1}{-3}=\frac{x_2}{6}=\frac{x_3}{-3}\,;$$

$$\frac{x_1}{K_{11}}=\frac{x_2}{K_{12}}=\frac{x_3}{K_{13}}; \quad \frac{x_1}{\begin{vmatrix}5 & 6\\ 3 & 5\end{vmatrix}}=\frac{x_2}{-\begin{vmatrix}4 & 6\\ 1 & 5\end{vmatrix}}=\frac{x_3}{\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}}; \quad \frac{x_1}{7}=\frac{x_2}{-14}=\frac{x_3}{7};$$

$$\Delta_n' = \begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 5 & 3\\ 4 & 6 & 5\end{vmatrix}=0; \qquad \frac{x_1}{K_{11}'}=\frac{x_2}{K_{21}'}=\frac{x_3}{K_{31}'};$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix}5 & 3\\ 6 & 5\end{vmatrix}}=\frac{x_2}{-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 6 & 5\end{vmatrix}}=\frac{x_3}{\begin{vmatrix}4 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}}; \quad \frac{x_1}{7}=\frac{x_2}{-14}=\frac{x_3}{7};$$

$$\frac{x_1}{K_{12}'}=\frac{x_2}{K_{22}'}=\frac{x_3}{K_{32}'}; \quad \frac{x_1}{-\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}}=\frac{x_2}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix}}=\frac{x_3}{-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}}; \quad \frac{x_1}{-3}=\frac{x_2}{6}=\frac{x_3}{-3};$$

$$\frac{x_1}{K_{13}'}=\frac{x_2}{K_{23}'}=\frac{x_3}{K_{33}'}; \quad \frac{x_1}{\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{vmatrix}}=\frac{x_2}{-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 6\end{vmatrix}}=\frac{x_3}{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}}; \quad \frac{x_1}{-2}=\frac{x_2}{4}=\frac{x_3}{-2}.$$

3.

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+x_4&=0;\\ x_1+4x_2+5x_3+x_4&=0;\\ 2x_1+x_2+3x_3&=0;\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4&=0; \end{aligned} \qquad \Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=0; \quad \frac{x_1}{K_{41}}=\frac{x_2}{K_{42}}=\frac{x_3}{K_{43}}=\frac{x_4}{K_{44}};$$

$$\frac{x_1}{-\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}}=\frac{x_2}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}}=\frac{x_3}{-\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{x_4}{\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}};$$

$$\frac{x_1}{0}=\frac{x_2}{-6}=\frac{x_3}{2}=\frac{x_4}{14}.$$

1.5.5. Gauss-ов алгоритам. — Када је број једначина и непознатих $n>4$ *Cramer*-ово правило постаје незгодно за примену. Тада се користи *Gauss*-ов *алгоритам* који се састоји у томе да се детерминанта система сведе на троугаону детерминанту, то јест да се у свакој једначини, почев од прве, поступно *смањује број непознатих* x_i, *тако да се на крају добије једна једначина са једном непознатом.* Тај поступак познат је под називом *Gauss*-ов *алгоритам.* Нека је дат систем нехомогених једначина

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2k}x_k+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nk}x_k+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n. \end{aligned} \qquad (1.37)$$

Претпоставимо да је коефицијент $a_{11} \neq 0$, што се може увек подесити *премештањем једначина.* Непознату x_1 елиминисаћемо из осталих једначина сем прве, ако елементе прве врсте помножимо са $-a_{21}/a_{11}$ и *додамо* елементима друге врсте, затим помножимо са $-a_{31}/a_{11}$ и додамо елементима треће врсте, уопште помножимо количником $-a_{i1}/a_{11}$ и додамо елементима i-те врсте. Систем (1.37) после *првог елиминисања* — првог поступка ($p=1$) — има облик

$$\begin{array}{rl}
a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1k}\,x_k+\cdots+a_{1n}\,x_n=b_1\ ; & \\
a_{22}^{(1)}\,x_2+\cdots+a_{2k}^{(1)}\,x_k+\cdots+a_{2n}^{(1)}\,x_n=b_2^{(1)}; & \\
a_{32}^{(1)}\,x_2+\cdots+a_{3k}^{(1)}\,x_k+\cdots+a_{3n}^{(1)}\,x_n=b_3^{(1)}; & \qquad (1.38) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
a_{n2}^{(1)}\,x_2+\cdots+a_{nk}^{(1)}\,x_k+\cdots+a_{nn}^{(1)}\,x_n=b_n^{(1)}, &
\end{array}$$

где су

$$\begin{array}{l} \quad\xrightarrow{k=2,\,3,\,\ldots,\,n} \\ \quad\downarrow \\ i=2,\,3,\,\ldots,\,n \end{array} \qquad a_{ik}^{(1)}=a_{ik}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1k}; \quad b_i^{(1)}=b_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1. \qquad (1.38\ )$$

Под претпоставком да је коефицијент $a_{22}^{(1)} \neq 0$, ако то није може се систем једначина преуредити, поступак треба *поновити*, па ће се после другог елиминисање ($p=2$) добити систем једначина:

$$\begin{array}{rl}
a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3+\cdots+a_{1k}\,x_k+\cdots+a_{1n}\,x_n=b_1\ ; & \\
a_{22}^{(1)}\,x_2+a_{23}^{(1)}\,x_3+\cdots+a_{2k}^{(1)}\,x_k+\cdots+a_{2n}^{(1)}\,x_n=b_2^{(1)}; & \\
a_{33}^{(2)}\,x_3+\cdots+a_{3k}^{(2)}\,x_k+\cdots+a_{3n}^{(2)}\,x_n=b_3^{(2)}; & \qquad (1.39) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
a_{n3}^{(2)}\,x_3+\cdots+a_{nk}^{(2)}\,x_k+\cdots+a_{nn}^{(2)}\,x_n=b_n^{(2)}; &
\end{array}$$

где су

$$\begin{array}{l} \quad\xrightarrow{k=3,\,4,\,\ldots,\,n} \\ \quad\downarrow \\ i=3,\,4,\,\ldots,\,n \end{array} \qquad a_{ik}^{(2)}=a_{ik}^{(1)}-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\ ; \quad b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\,b_2^{(1)}. \qquad (1.39')$$

После $p=n-1$ поступака (елиминација) најзад се добија систем једначина:

$$\begin{array}{rl}
a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3+a_{14}\,x_4+\cdots+a_{1k}\,x_k+\cdots+a_{1n}\,x_n=b_1\ ; & \\
a_{22}^{(1)}\,x_2+a_{23}^{(1)}\,x_3+a_{24}^{(1)}\,x_4+\cdots+a_{2k}^{(1)}\,x_k+\cdots+a_{2n}^{(1)}\,x_n=b_2^{(1)}; & \\
a_{33}^{(2)}\,x_3+a_{34}^{(2)}\,x_4+\cdots+a_{3k}^{(2)}\,x_k+\cdots+a_{3n}^{(2)}\,x_n=b_3^{(2)}; & \qquad (1.40) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
a_{nn}^{(n-1)}\,x_n=b_n^{(n-1)}. &
\end{array}$$

Овај систем једначина се назива *троугаони*. Свођење система (1.37) на троугаони систем (1.40) могуће је само у случају када је детерминанта троугаоног система различита од нуле, то јест када је

$$\Delta=\Delta_t=a_{11}\cdot a_{22}^{(1)}\cdot a_{33}^{(2)}\cdots a_{nn}^{(n-1)}\neq 0. \tag{1.41}$$

Систем се решава од последње једначине која има само једну непознату x_n, па редом до прве једначине.

Пример. — Решити систем једначина

$$1^0)\quad \begin{array}{rcl|l} 2x_1+4x_2+x_3-x_4 &=& 14 & \\ 4x_1-x_2+3x_3+x_4 &=& 10 & -2 \\ 6x_1+3x_2-x_3+2x_4 &=& 7 & -3 \\ 2x_1-2x_2+4x_3-3x_4 &=& 13 & -1 \end{array}$$

$$2^0)\quad \begin{array}{rcl|l} 2x_1+4x_2+x_3-x_4 &=& 14 & \\ -9x_2+x_3+3x_4 &=& -18 & \\ -9x_2-4x_3+5x_4 &=& -35 & -1 \\ -6x_2+3x_3-2x_4 &=& -1 & -6/9 \end{array}$$

$$3^0)\quad \begin{array}{rcl|l} 2x_1+4x_2+x_3-x_4 &=& 14 & \\ -9x_2+x_3+3x_4 &=& -18 & \\ -5x_3+2x_4 &=& -17 & \\ \frac{21}{9}x_3-\frac{36}{9}x_4 &=& \frac{99}{9} & \frac{21}{45} \end{array}$$

$$4^0)\quad \begin{array}{rcl} 2x_1+4x_2+x_3-x_4 &=& 14; \\ -9x_2+x_3+3x_4 &=& -18; \\ -5x_3+2x_4 &=& -17; \\ -\frac{138}{45}x_4 &=& \frac{138}{45}; \end{array}$$

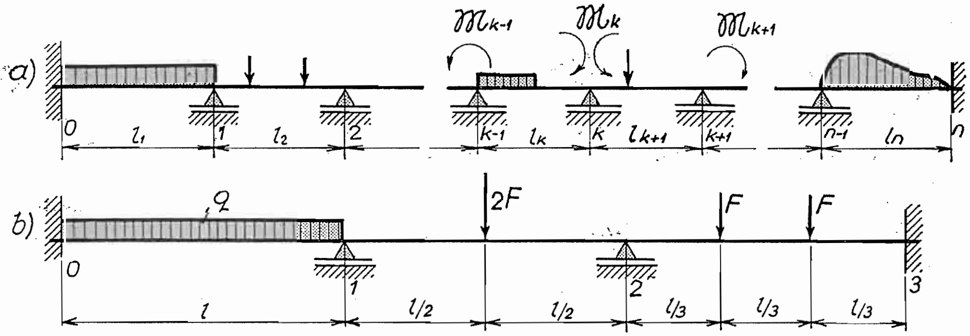
$$\Delta_t=2\cdot(-9)\cdot(-5)\cdot\left(-\frac{138}{45}\right)=-276=\Delta;$$

$x_4=-1;$

$x_3=-(-17+2)/5=3;$

$x_2=-(-18-3+3)/9=2;$

$x_1=(14-8-3-1)/2=1.$



Слика 1.3. — Статички неодређени носач — *Clapeyron*-ова једначина

Clapeyron-ова једначина трију момената статички неодређеног носача. — Она се решава на овај начин. За свака два поља треба поставити ову једначину (слика 1.3. *a*) од индекса $k=0$ до индекса $k=n$, те ће бити

$$\beta_k=\alpha_{k+1}\,;\quad \mathfrak{M}_{k-1}\frac{l_k}{\mathfrak{B}_k}+2\,\mathfrak{M}_k\left(\frac{l_k}{\mathfrak{B}_k}+\frac{l_{k+1}}{\mathfrak{B}_{k+1}}\right)+$$

$$+\,\mathfrak{M}_{k+1}\frac{l_{k+1}}{\mathfrak{B}_{k+1}}=6\,[(\Sigma\alpha_{k+1})-(\Sigma\beta_k)],$$

где је $\mathfrak{B}_k=EI_{xk}$ *савојна крутост греде,* α_{k+1} нагиб греде распона l_{k+1} на левом ослонцу (k), а β_k нагиб леве греде распона l_k на десном ослонцу (k); $\mathfrak{M}_k$ су *реактивни моменти.* Нагибе греда услед оптерећења треба узимати са *својим предзнаком* и за сваку врсту оптерећења, а реактивне моменте са смером као на слици. Ако се добије *позитивни резултат* за момент то значи да је смер реактивног момента *правилно претпостављен;* у противном, смер је *погрешан.*

Носач представљен на слици 1.3. *b* је 4 пута статички неодређен

$$k=0;\,1;\,2;\,3;\qquad \mathfrak{M}_{k-1}+4\,\mathfrak{M}_k+\mathfrak{M}_{k+1}=6\,\mathfrak{B}\,[\Sigma\,(\alpha_{k+1})-(\Sigma\,\beta_k)]/l\,;$$

$$ql=4\,F;\quad F=4\ \mathrm{Mp};\quad l=6\ \mathrm{m},$$

па следи систем једначина:

$$\begin{array}{lrl}
k=0; & 2\,\mathfrak{M}_0+\ \mathfrak{M}_1 & =\ 6\,\mathfrak{B}\,[\alpha_1-\beta_0]/l=ql^2/4=Fl=24;\\
k=1; & \mathfrak{M}_0+4\,\mathfrak{M}_1+\ \mathfrak{M}_2 & =\ 6\,\mathfrak{B}\,[\alpha_2-\beta_1]/l=(3\,Fl+ql^2)/4=7\,Fl/4=42;\\
k=2; & \mathfrak{M}_1+4\,\mathfrak{M}_2+\ \mathfrak{M}_3 & =\ 6\,\mathfrak{B}\,[\alpha_3-\beta_2]/l=17\,Fl/12=34;\\
k=3; & \mathfrak{M}_2+2\,\mathfrak{M}_3 & =\ 6\,\mathfrak{B}\,[\alpha_4-\beta_3]/l=\ 2\,Fl/3=16;
\end{array}$$

и њихова решења су:

$$\begin{array}{rl}
2\,\mathfrak{M}_0+\mathfrak{M}_1 = 24; & \mathfrak{M}_0=8{,}49\ \mathrm{Mpm};\\
7\,\mathfrak{M}_1+\ 2\,\mathfrak{M}_2 = 60; & \mathfrak{M}_1=7{,}02\ \mathrm{Mpm};\\
26\,\mathfrak{M}_2+\ 7\,\mathfrak{M}_3=178; & \mathfrak{M}_2=5{,}42\ \mathrm{Mpm};\\
45\,\mathfrak{M}_3=238; & \mathfrak{M}_3=5{,}29\ \mathrm{Mpm};
\end{array}\quad \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=45;\quad \Delta_{(1)}=382.$$

1.6. Снижавање реда детерминанте. — Детерминанта n-ог реда може се снизити на детерминанту $n-1$-ог реда *без развијања* по елементима неке врсте или колоне *помоћу методе Chiò*-а. Ова се метода много користи за лакше израчунавање детерминанте, па ћемо је показати на детерминанти 4.-ог реда. Детерминанта се мора довести на такав облик да јој је *један елемент једнак јединици.* Тај се елемент назива *стожерни.* Нека је то елемент $a_{23}=1=a_{rs}$. Та врста назива се *стожерна врста* $(r=2)$ а та колона је *стожерна колона* $(s=3)$. Из стожерне врсте извуцимо пред детерминанту те елементе тако да она има елементе једнаке јединици добиће се детерминанта чији су елементи количници елемената a_{ik} и одговарајућих елемената стожерне врсте (a_{21}, a_{22}, 1 и a_{24}):

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}=1} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{21}\,a_{22}\,a_{24}\begin{vmatrix} a_{11}/a_{21} & a_{12}/a_{22} & a_{13} & a_{14}/a_{24} \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ a_{31}/a_{21} & a_{32}/a_{22} & a_{33} & a_{34}/a_{24} \\ a_{41}/a_{21} & a_{42}/a_{22} & a_{43} & a_{44}/a_{24} \end{vmatrix}.$$

Сада одузмимо елементе стожерне колоне (овде треће) од елемената осталих колона и развијмо детерминанту по елементима стожерне врсте (стварно само по стожерном елементу) добићемо детерминанту $n-1$.-ог реда (овде трећег реда):

$$\Delta_4=\Delta_3^{(r)}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11}-a_{21}\,a_{13} & a_{12}-a_{22}\,a_{13} & a_{14}-a_{24}\,a_{13} \\ a_{31}-a_{21}\,a_{33} & a_{32}-a_{22}\,a_{33} & a_{34}-a_{24}\,a_{33} \\ a_{41}-a_{21}\,a_{43} & a_{42}-a_{22}\,a_{43} & a_{44}-a_{24}\,a_{43} \end{vmatrix}. \qquad (1.42)$$

Из овога се види начин формирања елемената детерминанте нижег реда *(редуковане детерминанте)*. Ако је a_{rs} стожерни елемент онда је предзнак редуковане детерминанте $(-1)^{r+s}$. У редукованој детерминанти изостављене су стожерна врста и стожерна колона, а сваки елемент нове детерминанте износи $a_{ik}^{(r)}=a_{ik}-a_{rk}\,a_{is}$, то јест једнак је разлици првобитног елемента и производа одговарајућих елемената стожерне врсте a_{rk} и стожерне колоне a_{is}.

Примери. —

1.
$$\Delta_4=\begin{array}{c}\\ \\ \\ \longrightarrow\\ \\ \end{array}\left|\begin{array}{cccc} \mathbf{4} & 2 & \overset{\downarrow}{0} & 3 \\ 6 & -1 & 2 & 4 \\ \mathbf{5} & 3 & \mathbf{1} & -2 \\ -1 & 4 & \underset{\uparrow}{3} & 3 \end{array}\right|\begin{array}{c}\\ \\ \\ \longleftarrow\\ \\ \end{array}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4-5\cdot0 & 2-3\cdot0 & 3+2\cdot0 \\ 6-5\cdot2 & -1-3\cdot2 & 4+2\cdot2 \\ -1-5\cdot3 & 4-3\cdot3 & 3+2\cdot3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -4 & -7 & 8 \\ -16 & -5 & 9 \end{vmatrix}=4\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \\ \\ \end{array}\left|\begin{array}{ccc} \overset{\downarrow}{\mathbf{1}} & 2 & 3 \\ -1 & -7 & 8 \\ \underset{\uparrow}{-4} & -5 & 9 \end{array}\right|\begin{array}{c}\longleftarrow\\ \\ \\ \end{array}=4\begin{vmatrix} -7+2\cdot1 & 8+3\cdot1 \\ -5+2\cdot4 & 9+3\cdot4 \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} -5 & 11 \\ 3 & 21 \end{vmatrix}=12\begin{array}{c}\\ \longrightarrow\end{array}\left|\begin{array}{cc} \overset{\downarrow}{-5} & 11 \\ \underset{\uparrow}{1} & 7 \end{array}\right|\begin{array}{c}\\ \longleftarrow\end{array}=12\,(-1)^3\,(11+5\cdot7)=-12\cdot46=-552.$$

2.

$$\Delta_5=\begin{array}{r|rrrrr|l} & & & & \downarrow & & \\ & 4 & 3 & 5 & 0 & 2 & \\ & -1 & 4 & 2 & 3 & 0 & \\ & 3 & 2 & -2 & 3 & -1 & \\ \rightarrow & -4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \leftarrow \\ & 5 & -1 & -1 & 0 & 3 & \\ & & & & \uparrow & & \end{array} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 11 & -5 & -4 & 0 \\ 15 & -7 & -8 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{array}{r|rrrr|l} & & & & \downarrow & \\ & 4 & 3 & 5 & -2 & \\ & 11 & -5 & -4 & 0 & \\ \rightarrow & 15 & -7 & -8 & 1 & \leftarrow \\ & 5 & -1 & -1 & -3 & \\ & & & & \uparrow & \end{array} = \begin{vmatrix} 34 & -11 & -11 \\ 11 & -5 & -4 \\ 50 & -22 & -25 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{array}{|rrr|l} 34 & \overset{\downarrow}{0} & 11 & \\ 11 & 1 & 4 & \leftarrow \\ 50 & \underset{\uparrow}{-3} & 25 & \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} 34 & 11 \\ 83 & 37 \end{vmatrix} = \begin{array}{r|rr|l} \rightarrow & \overset{\downarrow}{1} & 11 & \leftarrow \\ & \underset{\uparrow}{-28} & 37 & \end{array} =37-(-28\cdot 11)=345.$$

3.

$$\Delta_6=\begin{array}{r|rrrrrr|l} & & & & & & \downarrow & \\ & 3 & 2 & 4 & -1 & 3 & -3 & \\ & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & -2 & \\ & -1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 4 & \\ & 4 & 2 & 3 & 0 & 2 & -1 & \\ & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 2 & \\ \rightarrow & 0 & -2 & 2 & 2 & -1 & 1 & \leftarrow \\ & & & & & & \uparrow & \end{array} =(-1)^{(6+6)} \begin{array}{r|rrrrr|l} & & & & & \downarrow & \\ & 3 & -4 & 10 & 5 & 0 & \\ & 2 & -1 & 4 & 6 & 0 & \\ \rightarrow & -1 & 8 & -10 & -9 & 1 & \leftarrow \\ & 4 & 0 & 5 & 2 & 1 & \\ & 3 & 8 & -2 & -1 & 2 & \\ & & & & & \uparrow & \end{array} =$$

$$=(-1)^{3+5}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 10 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 6 \\ 5 & -8 & 15 & 11 \\ 5 & -8 & 18 & 17 \end{vmatrix} = \begin{array}{r|rrrr|l} & & & & \downarrow & \\ & 3 & -4 & 10 & 5 & \\ \rightarrow & -1 & 3 & -6 & 1 & \leftarrow \\ & 5 & -8 & 15 & 11 & \\ & 5 & -8 & 18 & 17 & \\ & & & & \uparrow & \end{array} =$$

$$=\begin{vmatrix} 8 & -19 & 40 \\ 16 & -41 & 81 \\ 22 & -59 & 120 \end{vmatrix} = \begin{array}{r|rrr|l} & & & \downarrow & \\ & 8 & -19 & 40 & \\ \rightarrow & 0 & -3 & 1 & \leftarrow \\ & 22 & -59 & 120 & \\ & & & \uparrow & \end{array} =-\begin{vmatrix} 8 & -109 \\ 22 & -301 \end{vmatrix} =10.$$

1.7. Диференцирање детерминанте. — Када су елементи a_{ik} детерминанте *функције неке променљиве* (x) тада је и *вредност детерми-*

нанте такође функција те промењиве (x). Када се детерминанта реда n развије она има $n!$ чланова од којих је сваки производ од n чинилаца (елемената). Да би се добио први извод детерминанте треба применити правила о диференцирању збира и производа функција. Када се сви ти изводи среде може се први извод написати у облику збира детерминанти истог реда у којима су диференцирани само елементи редне колоне док се други елементи не мењају. Тако ће бити:

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta}{\mathrm{d}\,x}[a_{ik}(x)]=\begin{vmatrix}\frac{\mathrm{d}\,a_{11}}{\mathrm{d}\,x} & a_{12}\ldots a_{1n}\\ \vdots & \vdots \quad\; \vdots\\ \frac{\mathrm{d}\,a_{n1}}{\mathrm{d}\,x} & a_{n2}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}a_{11}\ldots & \frac{\mathrm{d}\,a_{1k}}{\mathrm{d}\,x} & \ldots a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1n}\ldots & \frac{\mathrm{d}\,a_{nk}}{\mathrm{d}\,x} & \ldots a_{nn}\end{vmatrix}+$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix}a_{11}\ldots & a_{1k}\ldots & \frac{\mathrm{d}\,a_{1n}}{\mathrm{d}\,x}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1n}\ldots & a_{nk}\ldots & \frac{\mathrm{d}\,a_{nn}}{\mathrm{d}\,x}\end{vmatrix}. \tag{1.25}$$

На пример, биће:

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}x^2+2x & x\\ x^2+1 & x-1\end{vmatrix}=x^2-3x;\quad \frac{\mathrm{d}\,\Delta}{\mathrm{d}\,x}=\begin{vmatrix}2x+2 & x\\ 2x & x-1\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}x^2+2x & 1\\ x^2+1 & 1\end{vmatrix}=2x-3;$$

$$\Delta(\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}=1;\quad \frac{\mathrm{d}\,\Delta}{\mathrm{d}\,\varphi}=\begin{vmatrix}-\sin\varphi & -\sin\varphi\\ \cos\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\cos\varphi\\ \sin\varphi & -\sin\varphi\end{vmatrix}=0;$$

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}x^3 & x^2 & x\\ x^2 & x^3 & x^2\\ x & x & x^3\end{vmatrix}=x^9-x^7-x^6+x^4;\quad \frac{\mathrm{d}\,\Delta}{\mathrm{d}\,x}=\begin{vmatrix}3x^2 & x^2 & x\\ 2x & x^3 & x^2\\ 1 & x & x^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^3 & 2x & x\\ x^2 & 3x^2 & x^2\\ x & 1 & x^3\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}x^3 & x^2 & 1\\ x^2 & x^3 & 2x\\ x & x & 3x^2\end{vmatrix}=9x^8-7x^6-6x^5+4x^3.$$

ВЕЖБАЊА

1. Проверити вредности детерминанти:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 55;$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0;$ *c)* $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0;$ *e)* $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 286;$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2\,i \\ 1-i & 0 & 2-3\,i \\ 1-2i & 2+3\,i & 0 \end{vmatrix} = 6;$ *g)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 118;$

h) $\Delta_n - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\,(n-1) = 4;$ *i)* $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$

2. Решити системе једначина:

a) $x+y-z=1;$ $(y=a;\ \ z=b;\ \ x=1-a+b);$

b) $x+2\,y=5;$ $-3\,x+4\,y=5;$

c) $x+y+z=2;$ $2\,x-y-z=4;$ $(x=2;\ \ z=a);$ $(y=-a);$

d) $3\,x+2\,y-\ z=4;$ $x-\ y+2\,z=5;$ $x+3\,y-2\,z=1;$

e) $2\,x-\ y+3\,z=0;$ $3\,x+2\,y+\ z=0;$ $x-4\,y+5\,z=0;$

f) $x+2\,y+3\,z=0;$ $2\,x+\ y+3\,z=0;$ $3\,x+2\,y+\ z=0;$

g) $x+2\,y+\ z=2;$ $4\,x-3\,y-\ z=3;$ $2\,x+4\,y+2\,z=4;$ $3\,x+\ y-2\,z=1;$

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 30, \quad x=1;\ \ y=0;\ \ z=1.$$

3. Показати да је код датих детерминанти кофактор прве једнак свом елементу ($K_{ik}=a_{ik}$), а кофактор друге детерминанте једнак елементу одговарајуће колоне ($K_{ik}=a_{ki}$).

$$\Delta_3^{(1)}=\begin{vmatrix} -1/2 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3^{(2)}=\begin{vmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Диференцирати детерминанте:

a) $\begin{vmatrix} x^4 & x^3 & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} t^3+1 & t^2 & t \\ t^2 & t^2+1 & t^2 \\ t & t^2 & t+1 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} \mathrm{Ch}x & -\mathrm{Sh}x \\ \mathrm{Sh}x & \mathrm{Ch}x \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} x^4+x & x^3-x & x^2-x & x \\ x^3-x & x^2+x & x & x \\ x^2+x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$; *e)* $\dfrac{d\Delta}{dt}=\begin{vmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{vmatrix}=0.$

2. ВРСТЕ И ОСОБИНЕ МАТРИЦА

2. I. Дефиниција и врсте матрица. — У систему линеарних једначина (1.26) важну улогу играју коефицијенти a_{ik} и детерминанта система. Индекс i коефицијента-елемента a_{ik} одређује редни број једначине, а други индекс k одређује редни број непознате x_i рачунато слева надесно. У детерминанти система индекс i елемента a_{ik} одређује његову врсту а индекс k његову колону. Скуп ових елемената доводи се у везу са једним новим математичким оператором који се назива *матрица* и који нема одређену нумеричку вредност већ *представља одређени начин писања* елемената неког скупа.

Скуп $m \cdot n$ елемената a_{ik} поређаних у правоуглој схеми од *m врста* и *n колона* образује, према Sylvester*-у, *матрицу* типа (формата, димензије) $m \times n$ или (m, n), где први број m показује број *врста (редова)* а други (n) број *колона (ступаца)*. За писање матрица постоје различите ознаке, на пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ik})_m^n=(a_{ik}); \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| = \| a_{ik} \| ;$$

$$a_{11}=a=(a_{ik})_1^1 ; \tag{2.1}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\, a_{mn} \,]; \left\{ \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\} = \{ a_{ik} \} .$$

Ми ћемо задржати *масно слово* односно *прву ознаку*.

Када је $m \neq n$ матрица се назива *општа правоугаона матрица* или краће *правоугаона матрица*; када је $m=n$ матрица је *квадратна, реда n*. Једна врста матрице такође је матрица и она се зове *матрица врста*. Она је типа $(1, n)$. И свака колона матрице представља матрицу; она се зове *матрица колона* и типа је $(m, 1)$. Матрица са једним чланом a_{11} је типа $(1, 1)$.

---

* *J. J. Sylvester, Phil. Mag.* 37 (1850), *p.* 363.—370.

Коефицијенти a_{ik} јесу *елементи* или *координате матрице*. Када су елементи реални бројеви и матрица је *реална*; ако има комплексних елемената матрица је *комплексна*. Када су сви елементи матрице $a_{ik}=0$ матрица се зове *нула матрица* (O). Она игра улогу нуле у матричном рачуну као нула у нумеричком рачуну. Две квадратне матрице чији су одговарајући елементи *коњуговано-комплексни бројеви* зову се *коњуговане матрице* (Q) и ($\overline{\mathrm{Q}}$). Када су елементи $a_{ik}=\mathrm{const}$ матрица се зове *стална*; међутим, могу елементи бити функције неког скалара (t), па је и матрица *променљива*; она је функција променљивих елемената a_{ik}.

Наведени типови матрица су:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad (1 \;\; 2 \;\; 4); \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2i & 4 \\ -2 & i \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Q}=\begin{pmatrix} 2+i & 3+2i \\ 1-i & 4-i \end{pmatrix}; \quad \overline{\mathrm{Q}}=\begin{pmatrix} 2-i & 3-2i \\ 1+i & 4+i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

2.2. Транспонована матрица. — Као што се врши транспозиција елемената детерминанте (**чл. 1.2**), врши се и транспозиција матрице. Када се у матрици $\mathrm{A}=(a_{ik})$ све врсте узму за колоне у истом поретку, а све колоне за врсте такође у истом поретку добија се матрица $\mathrm{A}'=\mathrm{A}^t$ *транспонована матрица од матрице* A. Ако је матрица A типа (m, n) транспонована матрица A′ је типа (n, m). Према томе је

$$\mathrm{A}=(a_{ik})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{A}'=\mathrm{A}^t=(a_{ik}')=(a_{ki})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Матрица A′ је транспонована матрица од A, па се поновном транспозицијом добија полазна матрица:

$$(\mathrm{A}')'=\mathrm{A}; \quad (a_{ik}')'=(a_{ki})'=a_{ik}. \tag{2.3}$$

Елементи a_{ii} матрице налазе се на *главној дијагонали матрице*. Она друга дијагонала са елементима a_{1n}; $a_{2,n-1}$; ... ; $a_{m-1,2}$; a_{m1} је *споредна дијагонала*. У матричном рачунању често се говори само о главној дијагонали, која се кратко назива *дијагонала матрице*. Када је матрица **A** квадратна онда се њена транспонована матрица добија *пресликавањем елемената преко главне дијагонале*.

Транспонована матрица матрице врсте јесте матрица колона, и обратно.

Примери транспонованих матрица јесу:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad A'=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} 2+i & 1+i \\ 2-i & 1-i \end{pmatrix}; \quad A'=\begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}; \quad A=(1 \quad 3 \quad 2); \quad A'=\left\{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right\};$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонована матрица од коњуговане матрице једнака је коњугованој транспонованој матрици:

$$(\overline{Q})' = (\overline{Q'}). \tag{2.4}$$

На пример,

$$Q=\begin{pmatrix} 2+i & 3-2i \\ 4+3i & 1-i \end{pmatrix}; \qquad \overline{Q}=\begin{pmatrix} 2-i & 3+2i \\ 4-3i & 1+i \end{pmatrix}; \quad (\overline{Q})'=\begin{pmatrix} 2-i & 4-3i \\ 3+2i & 1+i \end{pmatrix};$$

$$Q'=\begin{pmatrix} 2+i & 4+3i \\ 3-2i & 1-i \end{pmatrix}; \quad (\overline{Q'})=\begin{pmatrix} 2-i & 4-3i \\ 3+2i & 1+i \end{pmatrix}=(\overline{Q})'.$$

2.3. Симетрична и антисиметрична матрица. — Квадратна матрица ($m=n$) је *симетрична* када су јој елементи *симетрични* у односу на главну дијагоналу једнаки, $a_{ik}=a_{ki}$. Ово значи да се транспозицијом не мења матрица, па је транспонована матрица симетричне матрице једнака полазној матрици

$$A=A'=A_s; \quad a_{ik}=a'_{ik}=a_{ki}. \tag{2.5}$$

Квадратна матрица је *антисиметрична* (*кososиметрична, коса* или *алтернирајућа*) ако је једнака негативној транспонованој матрици

$$A=-A'=A_k; \quad a_{ii}=0; \quad a_{ik}=-a_{ki}. \tag{2.6}$$

Код ње морају елементи на главној дијагонали бити једнаки нули $a_{ii}=0$.

Примери симетричних и антисиметричних матрица су:

$$A_s=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_k=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad A'_k=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}=-A_k.$$

Комплексна квадратна матрица је *ермитска (Hermite-ова,* према француском математичару *Charles Hermite-у,* 1822.—1901.) када је једнака транспонованој коњугованој матрици. Код ње су елементи на главној дијагонали *реални бројеви,* док су други елементи $h_{ik}=h_{ki}$. Дакле, ова матрица је

$$\mathrm{A}=\mathrm{Q};\quad \mathrm{Q}=(\overline{\mathrm{Q}})'=\mathrm{Q}^{+}=\mathrm{H};\quad h_{ii}=\alpha_{ii};\quad h_{ik}=\overline{h}_{ki};\quad i\neq k. \tag{2.7}$$

Матрица је *антиермитска (косоермитска)* када су задовољени услови

$$\mathrm{Q}=-(\overline{\mathrm{Q}})'=-\mathrm{Q}^{+}=\mathrm{H}_k;\quad h_{ii}=i\beta_{ii};\ h_{ik}=-\overline{h}_{ki}. \tag{2.8}$$

Она је, дакле, једнака негативној транспонованој коњугованој матрици. Елементи на главној дијагонали су *имагинарни бројеви* или су *једнаки нули.*

Примери ермитских и косоермитских матрица су:

$$\mathrm{H}=\begin{pmatrix}1 & 1-i & 2\\ 1+i & 3 & i\\ 2 & -i & 0\end{pmatrix};\qquad \overline{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}1 & 1+i & 2\\ 1-i & 3 & -i\\ 1 & i & 0\end{pmatrix};\qquad \mathrm{H}_k=\begin{pmatrix}i & 1-i & 2\\ -1-i & 3i & i\\ -2 & i & 0\end{pmatrix};$$

$$\overline{\mathrm{H}}_k=\begin{pmatrix}-i & 1+i & 2\\ -1+i & -3i & -i\\ -2 & -i & 0\end{pmatrix}.$$

2.4. Дијагонална и јединична матрица. — Квадратна матрица ($m=n$) која има само елементе на главној дијагонали $a_{ii}=d_{ii}$ док су сви остали једнаки нули $a_{ik}=0$ за $i\neq k$ зове се *дијагонална матрица* (**D**). При овоме међу елементима главне дијагонале мора бити и елемената d_{ii} различитих од нуле, јер би онда матрица била нула матрица. Специјална дијагонална матрица је јединична **I** (честа је ознака и **E**); код ње су сви елементи на главној дијагонали јединице ($d_{ii}=1$). Она се зове и *идентична матрица.* Она се може написати и у облику *Kronecker*-овог симбола. Често је потребно да се нагласи и ред јединичне матрица, I_n, он је ред квадратне матрице ($m=n$). Дијагонална матрица код које су сви елементи на главној дијагонали једнаки зове се *скаларна матрица* (**S**). Ознаке ових матрица су:

$$\mathrm{D}=(d_{ii})=\begin{bmatrix}d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn}\end{bmatrix};\qquad \mathrm{I}=(\delta_{ik})=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}; \tag{2.9}$$

$$\mathrm{S}=\begin{bmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{bmatrix}.$$

На пример:

$$D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix};\quad I_3=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix};\quad S_3=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}.$$

Пошто су ове матрице једнаке својим транспонованим ($D=D'$; $I=I'$; $S=S'$) то су све оне *симетричне*.

2.5. Троугласте матрице. — Троугласта матрица је квадратна матрица ($m=n$) код које су сви елементи изнад (или испод) главне дијагонале једнаки нули. При овоме међу елементима на главној дијагонали (a_{ii}) мора бити и елемената различитих од нуле. Када су сви елементи испод главне дијагонале једнаки нули ($a_{ik}=0$ за $k<i$) троугласта матрица је *десна* или *горња*; обратно, када су сви елементи изнад главне дијагонале једнаки нули ($a_{ik}=0$ за $k>i$) троугласта матрица је *лева* или *доња*. Облици ових матрица су:

$$T_d=T^{(g)}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{bmatrix};\quad T_l=T_{(d)}=\begin{bmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\a_{21}&a_{22}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}. \qquad (2.10)$$

Када се нека квадратна матрица доведе на троугласту матрицу онда се каже да је сведена на *канонски (нормални) облик.* Помоћу *Gauss*-овог алгоритма систем линеарних једначина своди се на канонски облик **(чл. 1.5.5)**.

Транспозицијом десна троугласта матрица постаје лева, и обратно, лева постаје десна.

На пример,

$$T_d=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&2\\0&0&4\end{pmatrix};\quad T'_d=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\3&2&4\end{pmatrix}=T_l;\quad T_l=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&4&0\\3&2&1\end{pmatrix};\quad T'_l=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&4&2\\0&0&1\end{pmatrix}=T_d.$$

2.6. Jacobi-јева матрица. — Ова матрица има исту схему као и *Jacobi*-јева *детерминанта* (1.18), то јест она има само елементе на главној дијагонали и на два реда паралелна главној дијагонали. У свакој врсти, изузев прве и последње, *има само по три елемента:* $a_{i,\,i-1}$; a_{ii}; $a_{i,\,i+1}$. У првој и последњој врсти јављају се само по два члана. Њен је облик:

$$J=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&0&0&\dots&0&\dots&0&0&0&\dots&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0&\dots&0&\dots&0&0&0&\dots&0&0\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}&\dots&0&\dots&0&0&0&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&0&\dots&a_{i,\,i-1}&a_{ii}&a_{i,\,i+1}&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&0&\dots&0&0&0&\dots&a_{n,\,n-1}&a_{nn}\end{bmatrix} \qquad (2.11)$$

Транспоновањем добија се опет *Jacobi*-јева матрица. Симетричне и скаларне *Jacobi*-јеве матрице (када су елементи појединих дијагоналних редова једнаки) играју важну улогу у осцилаторним проблемима.

На пример:

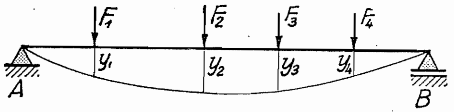
$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\3&4&1&0\\0&1&2&5\\0&0&2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&&\\3&4&1&\\&1&2&5\\&&2&6\end{bmatrix};\quad \mathbf{J}'=\begin{bmatrix}2&3&&\\1&4&1&\\&1&2&2\\&&5&6\end{bmatrix};\quad \mathbf{J}=\begin{bmatrix}a&c&&\\b&a&c&\\&b&a&c\\&&b&a\end{bmatrix}.$$

2.7. Неке елементарне примене матрица. — Матрице се много користе да би се упростило писање разних математичких израза, нарочито система једначина. Систем нехомогених линеарних једначина (1.26) може се прегледније представити помоћу три матрице: квадратне матрице система **A**, матрице колоне непознатих $\{x_i\}$ и матрице колоне апсолутних чланова $\{b_i\}$:

$$_{i}\!\downarrow\overset{\longrightarrow k}{\sum_{i}\sum_{k}}a_{ik}\;x_k=b_i;\quad \mathbf{A}\{x\}=\{b\};\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\cdot\cdot&\cdots&\cdot\cdot\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix};\;\{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{Bmatrix};\quad(2.12)$$

из самог система једначина види се како се добијају поједине врсте, односно једначине система.

Систем концентрисаних сила F_i (слика 2.1) на простој греди константног попречног пресека (крутости на савијање $\mathfrak{B}=EI_x$) произвешће *угибе* пресека испод сила. Према теорији еластичности између угиба (померања) y_i и сила (терета) F_i постоје *линеарни односи (линеарне зависности)* које се изражавају једначинама које се могу приказати матрично



Слика 2.1. — Однос између угиба и сила код просте греде—утицајни коефицијенти

$$y_1=\alpha_{11}\,F_1+\alpha_{12}\,F_2+\cdots+\alpha_{1n}\,F_n;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=\alpha_{n1}\,F_1+\alpha_{n2}\,F_2+\cdots+\alpha_{nn}\,F_n;$$

односно

$$\{y\}=\mathbf{A}\,\{F\}.\qquad(2.13)$$

Матрица **A** је квадратна симетрична матрица *Maxwell*-ових *утицајних коефицијената за померања* $(\alpha_{ik}=\alpha_{ki})$, док су матрице $\{y\}$ и $\{F\}$ матрице колоне.

Када се у предњем систему сматрају терети F_i за непознате, док су померања апсолутни чланови система једначина, решењем према *Cramer*-овом правилу, добијамо нови систем једначина:

$$\begin{array}{l} F_1=\beta_{11}\, y_1+\beta_{12}\, y_2+\cdots+\beta_{1n}\, y_n; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n=\beta_{n1}\, y_1+\beta_{n2}\, y_2+\cdots+\beta_{nn}\, y_n; \end{array} \qquad \{F\}=\mathbf{B}\{y\}; \quad \mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}. \tag{2.14}$$

Овде су $\beta_{ik}=\beta_{ki}$ *Maxwell-ови дуални утицајни коефицијенти за померања,* а матрица **B** је њихова матрица. Матрице $\{F\}$ и $\{y\}$ јесу матрице колоне. Пошто је систем једначина добијен инверзијом то је матрица **B** *инверзна матрица* матрице утицајних коефицијената **A**.

И систем *Clapeyron*-ових једначина (слика 1.3) може се написати у матричном облику:

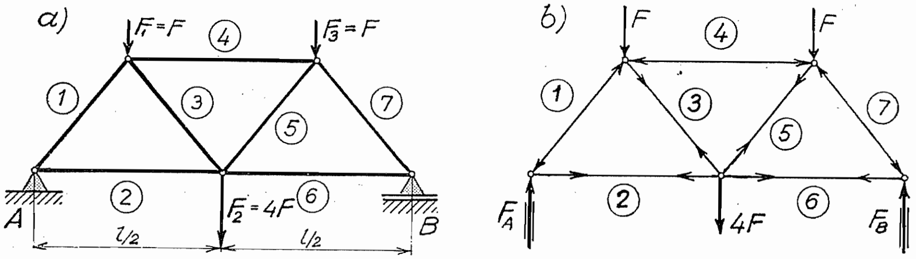
$$\mathbf{J}\,\{\mathfrak{M}\}=\{b\}; \quad \mathbf{J}=(l_k/\mathfrak{B}_k); \; \{b\}=\{6[(\Sigma\alpha_{k+1})-(\Sigma\beta_k)]\}, \tag{2.15}$$

где је **J** *Jacobi*-јева матрица, $\{\mathfrak{M}\}$ матрица колона *статичких непознатих*—реактивних момената ослонаца а $\{b\}$ матрица апсолутних чланова—разлике нагиба тангенте еластичне линије носача на сваком ослонцу.

У примеру чл. 1.5.5. (слика 1.3. *b*) систем једначинама би био:

$$\begin{array}{rl} 2\,\mathfrak{M}_0+\ \mathfrak{M}_1 & =24; \\ \mathfrak{M}_0+4\,\mathfrak{M}_1+\ \mathfrak{M}_2 & =42; \\ \mathfrak{M}_1+4\,\mathfrak{M}_2+\ \mathfrak{M}_3 & =34; \\ \mathfrak{M}_2+2\,\mathfrak{M}_3 & =16; \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \\ \mathfrak{M}_3 \\ \mathfrak{M}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 42 \\ 34 \\ 16 \end{Bmatrix}.$$

Раван решеткасти носач, статички одређен у погледу ослонаца и односа броја штапова и чворова, оптерећен је у чворовима терети-



Слика 2.2. — Раван решеткасти носач

ма F_i (слика 2.2). Отпори ослонаца A и B носача ($F=1$ Mp; $l=8$m; $\alpha=60^0$) износе:

$$F_A=(\sum F_i\, b_i)/l; \; F_B=(\sum F_i\, a_i)/l; \; F_A=F_B=3 \text{ Mp}.$$

Пошто је решетка у равнотежи, то ће по *принципу солидификације* и сваки њен чвор бити у равнотежи, па из услова за равнотежу чворова добијамо непознате силе у штаповима ($F_{ui}=S_i$) које се могу приказати и матрично:

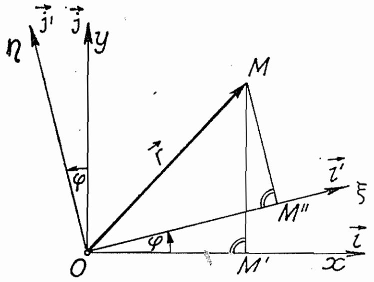
$$1)\quad S_1 \cos\alpha + S_2 = 0; \qquad F_A + S_1 \sin\alpha = 0;$$

$$2)\quad S_2 \cos\alpha + S_3 \cos\alpha + S_4 = 0; \qquad F_1 + S_1 \sin\alpha + S_3 \sin\alpha = 0;$$

$$\{S\} = \mathrm{A}\{F\}; \qquad \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{12} \begin{bmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \qquad (2.16)$$

Смерови унутрашњих сила приказани су на слици 2.2.*b*.

Када се координатни систем *Oxy заокрене* око координатног почетка *O* у директном смеру за угао φ прећи ће у положај *O*ξη (слика 2.3). Вектор положаја тачке *M* може се изразити помоћу *старих координата* (x, y) или *нових* (ξ, η) у облику:



Слика 2.3. — Ротација координатног система у равни

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \xi\vec{i}' + \eta\vec{j}'; \qquad \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathrm{T}\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \mathrm{T}^{-1}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}; \qquad \mathrm{T} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}; \qquad (2.17)$$

$$\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Матрица T је *квадратна матрица трансформације координата.* Она је у ствари матрица координата *ортова* $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ *нових оса мерених у старом систему Oxy*. Матрица T^{-1} је њена *инверзна* матрица односно њена транспонована матрица. Она је матрица *координата ортова* $\vec{i}$ и $\vec{j}$ *старих оса мерених у новом систему O*ξη, јер су

$$\vec{i} = \vec{i}' \cos\varphi - \vec{j}' \sin\varphi; \qquad \vec{j} = \vec{i}' \sin\varphi + \vec{j}' \cos\varphi;$$

$$\vec{i}' = \vec{i} \cos\varphi + \vec{j} \sin\varphi; \qquad \vec{j}' = -\vec{i} \sin\varphi + \vec{j} \cos\varphi.$$

Када је угао φ позитиван *ротација* је *позитивна (директна; десна)*, у противном је *негативна (индиректна; лева).*

На пример, при ротацији за угао $\varphi=45^\circ$ у директном смеру добијамо:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}; \qquad \begin{matrix} x=\sqrt{2}(\xi-\eta)/2; \\ y=\sqrt{2}(\xi+\eta)/2; \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}; \qquad \begin{matrix} \xi=\sqrt{2}(x+y)/2; \\ \eta=\sqrt{2}(-x+y)/2. \end{matrix}$$

Релација (2.17) важи и за простор. Када је триедар $Oxyz$ ротацијом око координатног почетка O прешао у положај $O\xi\eta\zeta$ трансформациона матрица T је матрица координата ортова новог триедра ($O\xi\eta\zeta$) мерених у односу на осе старог триедра $Oxyz$:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}=\mathrm{T}\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}=\mathrm{T}^{-1}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}; \quad \mathrm{T}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}. \qquad (2.17')$$

На пример:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 2/3 & -\sqrt{2}/2 & 1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & -4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & \sqrt{2}/2 & 1/3\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} 2\sqrt{2}\,\xi & -3\eta & +\zeta \\ \sqrt{2}\,\xi & & -4\zeta \\ 2\sqrt{2}\,\xi & +3\eta & +\zeta \end{Bmatrix}.$$

3. ОСНОВНЕ РАЧУНСКЕ ОПЕРАЦИЈЕ СА МАТРИЦАМА

3.1. Једнакост матрица. — *Две су матрице* $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ *једнаке ако и само ако су истог типа* (m,n) *и ако је сваки елемент од једне матрице једнак тачно одговарајућем елементу друге матрице.* Тада је

$$A=(a_{ik})_{mn};\quad B=(b_{ik})_{mn};\quad A=B;\quad a_{ik}=b_{ik}. \tag{3.1}$$

С обзиром на то да су у матрици врсте и колоне такође матрице, морају код једнаких матрица бити једнаке одговарајуће врсте и једнаке одговарајуће колоне.

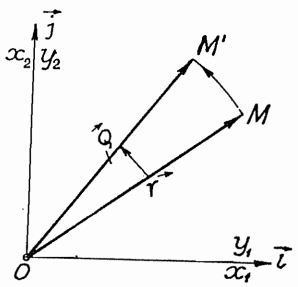
Матричној једнакости двеју матрица типа (m,n) одговара $m\cdot n$ бројних једнакости.

На пример:

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&4&0\\3&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&4&0\\3&2&4\end{pmatrix};\quad (1\quad 2)\neq\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&0&2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&0&2\end{pmatrix}\neq\begin{Bmatrix}1&4\\2&0\\3&2\end{Bmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix};\quad \begin{matrix}1=1; & 4=4;\\ 2=2; & 3=3.\end{matrix}$$

3.2. Сабирање матрица. — Означимо са x_1 и x_2 Декартове координате (x,y) тачке M односно вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, у систему $O\,\vec{i}\,\vec{j}$, где су $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ ортови тога координатног система. Заокренимо овај вектор у равни $O\,\vec{i}\,\vec{j}$ (то јест око орта $\vec{k}$) у директном смеру за угао φ без деформације, он ће прећи у положај $\overrightarrow{OM'}=\vec{\rho}$ (слика 3.1). *Формула ове чисте ротације без деформације* у равни је



Слика 3.1. — Линеарна трансформација вектора

$$\vec{\rho}=\vec{r}\cos\varphi+[\vec{k},\vec{r}]\ \sin\varphi=$$

$$=\vec{r}\cos\varphi+(-x_2\,\vec{i}+x_1\,\vec{j})\sin\varphi;\quad |\vec{r}|=|\vec{\rho}|. \tag{3.2}$$

Означимо са y_1 и y_2 координате тачке M', односно Декартове координате вектора $\vec{\rho}=\overrightarrow{OM'}$ у истом триедру $O\,\vec{i}\,\vec{j}$, онда ће бити:

$$y_1=x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi=a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2;$$
$$y_2=x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi=a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2;$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix};\quad \{y\}=\mathbf{A}\{x\}. \tag{3.3}$$

Пошто су односи између координата x_i и y_i *линеарни*, то се каже да је вектор $\vec{\rho}$ постао *линеарном трансформацијом* из вектора $\vec{r}$. *Матрица* **A** *је оператор линеарне трансформације.*

Посматрајмо два скупа линеарних трансформација матрицама

$$y_1=a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2;\qquad y_2=a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2;\qquad \{y\}=\mathbf{A}\{x\};$$

$$z_1=b_{11}\,x_1+b_{12}\,x_2;\qquad z_2=b_{21}\,x_1+b_{22}\,x_2;\qquad \{z\}=\mathbf{B}\{x\};$$

која одговарају ротацијама вектора $\vec{r}$ за углове φ и θ у равни $O\,\vec{i}\,\vec{j}$. Затим уведимо нове променљиве везом $u_i=y_i+z_i$, онда ће бити нова линеарна трансформација

$$\left.\begin{aligned} u_1&=y_1+z_1=(a_{11}+b_{11})x_1+(a_{12}+b_{12})x_2; \\ u_2&=y_2+z_2=(a_{21}+b_{21})x_1+(a_{22}+b_{22})x_2; \end{aligned}\right\}\quad \{u\}=\mathbf{C}\{x\};\ c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}. \tag{3.3'}$$

Елементи матрице **C** су, дакле, једнаки збиру елемената претходних матрица, па се на тај начин може дефинисати сабирање двеју матрица.

Збир двеју матрица истог типа (m,n) је трећа матрица истог типа (m,n) чији су елементи c_{ik} збирови одговарајућих елемената матрица сабирака:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C};\quad c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}. \tag{3.4}$$

Збир више матрица истог типа (m,n) опет је матрица истог типа (m,n):

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\cdots=\mathbf{R}. \tag{3.5}$$

За сабирање матрица истог типа (m,n) важе *комутативни* и *асоцијативни закони* алгебре:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A};\qquad \mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}). \tag{3.6}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 4+2 & 3+1 \\ -2+5 & 0+3 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Одузимање матрица. — Нула матрица може бити различитог типа (m, n), или реда када је квадратна нула матрица. O_{23} је нула матрица са две врсте и три колоне. O_2 је квадратна нула матрица другог реда, O_n је n-ог реда. Нула матрица типа (m,n) је једина матрица која сабрана са матрицом A истог типа даје исту матрицу. Тада је нула матрица *неутрални елемент* за сабирање

$$A+O=A. \tag{3.7}$$

Матрици A типа (m,n) одговара *супротна матрица* —A истог типа са елементима $(-a_{ik})$ ако је збир ове две матрице нула матрица

$$A+(-A)=O. \tag{3.8}$$

Операција одузимања матрица је супротна операцији сабирања. *Разлика двеју матрица истог типа (m,n)* је *трећа матрица истог типа (m,n) чији су елементи једнаки разлици елемената одговарајућих матрица:*

$$A-B=C; \quad c_{ik}=a_{ik}-b_{ik}. \tag{3.9}$$

Могу се сабирати и *одузимати само матрице истог типа;* тада се каже да су оне *сагласне за операције сабирања и одузимања.*

На пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 4-2 & 3-1 \\ -2-5 & 0-3 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -7 & -3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{Bmatrix}.$$

Транспонована матрица збира (разлике) двеју реалних или комплексних матрица једнака је збиру (разлици) транспонованих матрица сабирака:

$$(A \pm B)' = A' \pm B'; \quad (P \pm Q)' = P' \pm Q'. \tag{3.10}$$

За комплексне матрице важе и ове релације:

$$(\overline{P \pm Q}) = (\overline{P} \pm \overline{Q}). \tag{3.11}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2+i & 3-i \\ 4+2i & 5+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4-i & 2+2i \\ 1+i & 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5+i \\ 5+3i & 8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5+3i \\ 5+i & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 4+2i \\ 3-i & 5+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4-i & 1+i \\ 2+2i & 3-i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 8+5i & 4-2i \\ 3-2i & 6+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6-2i & 2+i \\ 1-i & 4+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+7i & 2-3i \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2+7i & 2-i \\ 2-3i & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+5i & 3-2i \\ 4-2i & 6+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6-2i & 1-i \\ 2+i & 4+2i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4+i & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-i & 2+i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2+2i \\ 1-2i & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2-2i \\ 1+2i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-i & -i \\ i & 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+i & 2-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3i & -2+i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4+3i & -2-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3i & 2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Збир комплексне квадратне матрице ($m=n$) и њене транспоноване коњуговане матрице је *ермитска* матрица; разлика је *косоермитска* матрица:

$$H = Q + (\overline{Q})'; \qquad H_k = Q - (\overline{Q})'. \tag{3.12}$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2+i & 1-i\\ 4+2i & 3-i\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 3+2i\\ 1+i & 4-i\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4+i & 4+i\\ 5+3i & 7-2i\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}i & -2-3i\\ 3+i & -1\end{pmatrix};$$

$$\overline{\mathbf{C}}=\begin{pmatrix}4-i & 4-i\\ 5-3i & 7+2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-i & 1+i\\ 4-2i & 3+i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3-2i\\ 1-i & 4+i\end{pmatrix};$$

$$\overline{\mathbf{D}}=\begin{pmatrix}-i & -2+3i\\ 3-i & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-i & 1+i\\ 4-2i & 3+i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3-2i\\ 1-i & 4+i\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q};\ \overline{\mathbf{Q}}'=\begin{pmatrix}2-i & 4-2i\\ 1+i & 3+i\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{Q}+\overline{\mathbf{Q}}'=\begin{pmatrix}4 & 5-3i\\ 5+3i & 6\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q}-\overline{\mathbf{Q}}'=\begin{pmatrix}2i & -3+i\\ 3+i & -2i\end{pmatrix}.$$

3.4. Разлагање матрице на симетричну и кососиметричну. — Симетрична матрица је једнака својој транспонованој матрици (2.5), а кососиметрична својој супротној транспонованој матрици (2.6), па се свака квадратна матрица да разложити на два сабирка: једну симетричну и једну кососиметричну матрицу истог реда n, пошто су према (3.10):

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_s+\mathbf{A}_k; \quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}_s'+\mathbf{A}_k'=\mathbf{A}_s-\mathbf{A}_k.$$

Стога се симетрична и кососиметрична матрица могу овако представити:

$$\mathbf{A}_s=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}'); \quad \mathbf{A}_k=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathrm{A}). \tag{3.13}$$

Ово важи и за ермитску и косоермитску матрицу, само треба узети транспоновану коњуговану матрицу:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{2}(\mathbf{Q}+\overline{\mathbf{Q}}'); \quad \mathbf{H}_k=\frac{1}{2}(\mathbf{Q}-\overline{\mathbf{Q}}'). \tag{3.14}$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 6 & 8 & 3\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}'=\begin{pmatrix}1 & 6 & 0\\ 4 & 8 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_s=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 5 & 8 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_k=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_s=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_k=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ -3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ -1 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ -3 & 3 & 4\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 2+i & 1-i \\ 5+3i & 3-i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}'=\begin{pmatrix} 2+i & 5+3i \\ 1-i & 3-i \end{pmatrix}; \quad (\overline{\mathbf{Q}})'=\begin{pmatrix} 2-i & 5-3i \\ 1+i & 3+i \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} 2 & 3-2i \\ 3+2i & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_k=\begin{pmatrix} i & -2+i \\ 2+i & -i \end{pmatrix}.$$

3.5. Множење матрице бројем. — Према (3.4) збир две једнаке матрице типа (m, n) је матрица истог типа (m, n) чији су елементи c_{ik} два пута већи од елемената a_{ik}, па је

$$\mathbf{A}+\mathbf{A}=(a_{ik}+a_{ik})=(2\,a_{ik})=2\,\mathbf{A}=\mathbf{C}.$$

Када се овом збиру дода још матрица $\mathbf{A}$ онда ће бити $c_{ik}=3\,a_{ik}$. Према томе је збир једнаких матрица типа (m, n) матрица истог типа чији су елементи увећани λ пута.

Из тога следи да се матрица *множи бројем када се сви њени елементи помноже тим бројем*. Обратно следи: *заједнички чинилац свих елемената матрице може се ставити испред матрице*. Према томе биће:

$$\mathbf{C}=\sum_{r=1}^{\lambda}\mathbf{A}_{(r)}=\mathbf{A}+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}=\lambda\,\mathbf{A}=\mathbf{A}\,\lambda=(\lambda\,a_{ik})=$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda\,a_{11} & \ldots & \lambda\,a_{1n} \\ \lambda\,a_{21} & \ldots & \lambda\,a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda\,a_{m1} & \ldots & \lambda\,a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

За $\lambda=0$ добија се *нула матрица* $\mathbf{O}$, за $\lambda=1$ је сама матрица $\mathbf{A}$, а за $\lambda=-1$ добија се *супротна матрица* $(-\mathbf{A})$. Код скаларне матрице (2.9) може се скалар извући испред матрице па остаје јединична матрица. Према томе важе релације:

$$\lambda\,\mathbf{A}=0\cdot\mathbf{A}=\mathbf{O}; \quad \lambda\,\mathbf{A}=\mathbf{A}; \quad -1\cdot\mathbf{A}=-\mathbf{A};$$

$$\mathbf{S}(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda &&&&& \\ & \lambda &&&& \\ && \cdot &&& \\ &&& \cdot && \\ &&&& \cdot & \\ &&&&& \lambda \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \cdot &&& \\ &&& \cdot && \\ &&&& \cdot & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix}=\lambda\mathbf{I}=\lambda\delta_{ik}. \tag{3.16}$$

За множење матрице бројевима (скаларима) λ и μ важе асоцијативни и дистрибутивни закони множења бројева, те је:

$$\lambda\mu\,\mathbf{A}=\lambda\,(\mu\,\mathbf{A})=\mu\,(\lambda\,\mathbf{A}); \quad (\lambda+\mu)\,\mathbf{A}=\lambda\,\mathbf{A}+\mu\,\mathbf{A};$$

$$\lambda\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\,\mathbf{A}+\lambda\,\mathbf{B}. \tag{3.17}$$

Примери за горње матрице су:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3\,A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -3 & 0 & 9 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{2}\,A=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 2 \\ -0{,}5 & 0 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 20 & -5 \\ 15 & 35 & 40 \\ 5 & 45 & 70 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & 9 & 14 \end{pmatrix};$$

$$2\cdot 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 & \\ & 5 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2+3)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$2\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

На исти се начин врши множење реалне или комплексне матрице комплексним или имагинарним бројем. Коњугована вредност производа комплексног броја $\lambda=a+i\,b$ и комплексне матрице $\mathbf{A}$ биће

$$\lambda=a+ib; \quad \mathbf{A}\,(a_{ik}+ib_{ik}); \quad (\overline{\lambda\,\mathbf{A}})=\overline{\lambda}\cdot\overline{\mathbf{A}}=(a-ib)\,\mathbf{A}\,(a_{ik}-ib_{ik}). \qquad (3.18)$$

Производ ермитске и косоермитске матрице реалним, имагинарним или комплексним бројем даће у резултату ермитску, косоермитску или комплексну матрицу, односно косоермитску, ермитску или комплексну матрицу.

На пример:

$$\lambda=2+i; \quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2+i & 1-i \\ 3+2i & 4+3i \end{pmatrix}; \quad \lambda\,\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3+4i & 3-i \\ 4+7i & 5+10i \end{pmatrix};$$

$$(\overline{\lambda\,\mathbf{A}})=\begin{pmatrix} 3-4i & 3+i \\ 4-7i & 5-10i \end{pmatrix}=(2-i)\begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 3-2i & 4-3i \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H}_k=\begin{pmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda=2; \quad \lambda=i; \quad \lambda=1+i; \quad 2\,\mathbf{H}=\mathbf{H}\,(2\,a_{ik}); \quad 2\,\mathbf{H}_k=\mathbf{H}_k\,(2\,a_{ik});$$

$$i\,\mathbf{H}=\begin{pmatrix} i & 1+i & -2i \\ -1+i & 3i & -1 \\ 2i & 1 & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{H}_k; \quad i\,\mathbf{H}_k=\begin{pmatrix} -1 & 1+i & 2i \\ 1-i & -3 & -1 \\ -2i & -1 & 0 \end{pmatrix}=-\mathbf{H};$$

$$(1+i)\,H=\begin{pmatrix}1+i & 2 & 2+2i\\ 2i & 3+3i & -1+i\\ 2+i & 1-i & 0\end{pmatrix};\qquad (1+i)\,H_k=\begin{pmatrix}-1+i & 2 & 2+2i\\ -2i & -3+3i & -1+i\\ -2-2i & -1+i & 0\end{pmatrix}.$$

3.6. Множење матрица. — Нека се координате x_i линеарно трансформишу у *нове* координате y_i, а затим ове координате у *нове* координате z_i, онда се и прве координате x_i линеарно трансформишу у координате z_i помоћу координата y_i. Према релацијама, на пример, за само две координате биће:

$$x_1=a_{11}\,y_1+a_{12}\,y_2;\qquad y_1=b_{11}\,z_1+b_{12}\,z_2;\qquad x_1=c_{11}\,z_1+c_{12}\,z_2;$$

$$x_2=a_{21}\,y_1+a_{22}\,y_2;\qquad y_2=b_{21}\,z_1+b_{22}\,z_2;\qquad x_2=c_{21}\,z_1+c_{22}\,z_2.$$

Нови коефицијенти — елементи c_{ik}

$$c_{11}=a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21};\qquad c_{12}=a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22};$$

$$c_{21}=a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21};\qquad c_{22}=a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22}$$

једнаки су збировима производа елемената првих двеју линеарних трансформација. *Резултујућа трансформација је*, дакле, *производ појединих трансформација*. Како је свака линеарна трансформација одређена матрицом трансформације, то уопште за трансформацију координата x_i у координате z_i преко координата y_i важи ова матрична релација:

$$\{x\}=\mathbf{A}\,\{y\};\quad \{y\}=\mathbf{B}\,\{z\};\quad \{x\}=\mathbf{AB}\,\{z\}=\mathbf{C}\,\{z\}.\tag{3.19}$$

Матрица **C** је производ матрица **A** и **B** које су *матрице чиниоци*. Елемент резултујуће матрице c_{ik} једнак је збиру производа елемената i-те врсте матрице **A** (првог чиниоца) и елемената k-те колоне матрице **B** (другог чиниоца), па је, дакле, за обе квадратне матрице реда n:

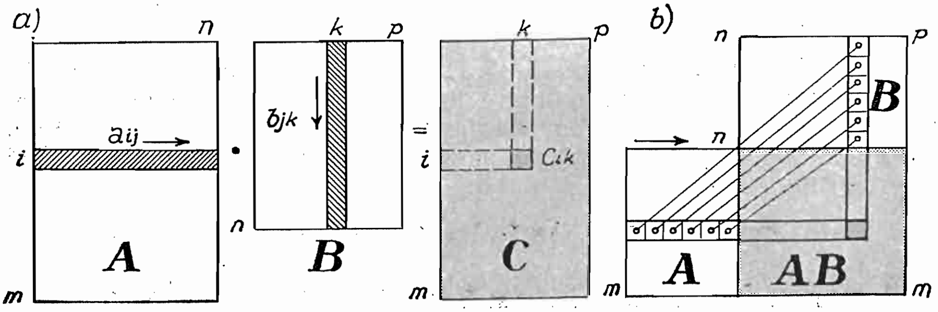
$$\mathbf{A}_n\,(a_{ik});\quad \mathbf{B}_n\,(b_{ik});\quad \mathbf{AB}=\mathbf{C};\quad c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,b_{jk};\quad \mathbf{C}_n\,(c_{ik}).\tag{3.20}$$

Појам производа матрица може се проширити и на правоугаоне матрице. Ако је прва матрица типа (m, n) онда друга мора бити типа (n, p) да би се могли одредити елементи c_{ik} резултујуће матрице. Дакле, *производ матрице типа* (m, n) и *матрице типа* (n, p) је *трећа матрица типа* (m, p):

$$\mathbf{AB}=\mathbf{C};\quad c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,b_{jk};\qquad (m, n)\cdot(n, p)=(m, p).\tag{3.21}$$

Овакве две правоугаоне матрице које се могу множити зову се *сагласне (компатибилне)*. Код сагласних матрица мора *десна матрица*

B *да има онолико врста* (*n*) *колико лева матрица* **A** *има колона* (*n*). Производ матрица може се приказати схематски: елемент c_{ik} резултујуће матрице једнак је збиру производа елемената i-те врсте (a_{ij}) леве матрице и елемената k-те колоне (b_{jk}) десне матрице.



Слика 3.2. — Схематско множење двеју матрица

На пример, производи матрица су:

$$a)\ \mathrm{AB}=\begin{pmatrix}2&1&6\\2&4&1\\3&2&5\\7&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&2\\1&7\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot5+1\cdot1+6\cdot4&2\cdot2+1\cdot7+6\cdot2\\2\cdot5+4\cdot1+1\cdot4&2\cdot2+4\cdot7+1\cdot2\\3\cdot5+2\cdot1+5\cdot4&3\cdot2+2\cdot7+5\cdot2\\7\cdot5+3\cdot1+1\cdot4&7\cdot2+3\cdot7+1\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35&23\\18&34\\37&30\\42&37\end{pmatrix},$$

$$b)\quad \begin{array}{c|ccc|cc|c} & & & & 2 & 4 & \\ & & \mathrm{B} & & 3 & 1 & \\ & & & & 6 & 7 & \\ \hline \mathrm{A} & 2 & 4 & 1 & 22 & 19 & \mathrm{C} \\ & 6 & 0 & 2 & 24 & 38 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc|ccc} & & 3 & 8 & 2 \\ & & 6 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 30 & 16 & 8 \\ 3 & 1 & 15 & 24 & 7 \\ 6 & 7 & 60 & 48 & 19 \end{array};$$

$$c)\quad \begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&5\\14&6\end{pmatrix};$$

$$d)\quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&1\\4&5\\2&6\end{pmatrix};\quad \begin{matrix}m=3;\\ n=2;\end{matrix}\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&6&8\\2&1&5\\4&3&2\end{pmatrix};\quad \nu=3;\quad p=3;\quad n\neq\nu;\quad \text{(нису сагласне).}$$

Закони множења бројева познати у алгебри могу се и овде применити.

1° *Закон комутације при множењу матрица не важи, јер се променом места чинилаца* **A** *и* **B** *мењају места елемената а то значи и резултат сабирања производа чинилаца.* Сем тога могу сагласне матрице изгубити сагласност множења. Због тога се код множења двеју матрица *„производ слева“* разликује од *„производа здесна“*. Дакле, биће

$$AB \neq BA. \tag{3.22}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 50 & 32 \\ 38 & 74 & 48 \\ 42 & 69 & 47 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 46 & 66 \\ 19 & 24 & 41 \\ 59 & 38 & 57 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 16 & 8 \\ 15 & 24 & 7 \\ 60 & 48 & 19 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 34 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}.$$

Међутим, код специјалних квадратних матрица може овај закон и да важи. *За такве се квадратне матрице каже да су комутативне.* Свака матрица реда n је комутативна са јединичном матрицом реда n. Ако закон комутације важи али са негативним предзнаком матрице се зову *антикомутативне.* Стога су обрасци:

$$AB = BA; \quad AI = IA = A; \quad AB = -BA. \tag{3.23}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 21 & 6 \end{pmatrix};$$

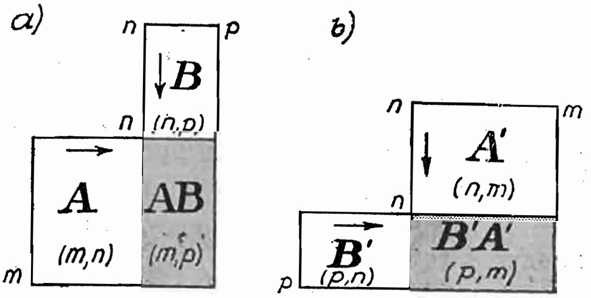
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Транспонована матрица производа двеју матрица је комутиран производ транспонованих матрица чинилаца:

$$(AB)' = B'A'. \tag{3.24}$$

Ово се може и схематски приказати као на слици 3.3.



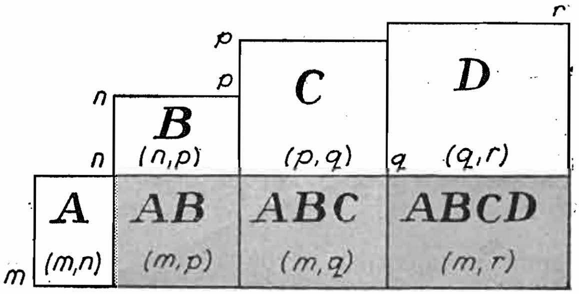
Слика 3.3. — Схематско одређивање транспоноване матрице производа матрица

На пример:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix};\quad AB=\begin{pmatrix}-8 & 5\\ 21 & 24\end{pmatrix};$$

$$(AB)'=\begin{pmatrix}-8 & 21\\ 5 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}.$$

2° *Множење матрица је асоцијативно, само ако су матрице сагласне за множење.*



Слика 3 4. — Схематско множење више матрица чиниоца

Према томе важи релација

$$ABC=(AB)\,C=$$
$$=A\,(BC).\qquad (3.25)$$

Производ матрице A типа (m, n) и матрице B типа (n, p) је матрица типа (m, p). Да би се могао овај производ помножити са трећом матрицом она мора имати p врста, то јест она је типа (p, q), па је резултујућа матрица ипа (m, q). За бројеве врста и колона матрица чиниоца важи релација *верижног правила*. Схематско множење више матрица показано је на слици 3.4.

На пример:

$$\begin{array}{ccc|cc|cc|cccc|}
 & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\
 & & & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & -1 & -1 & 4 \\
\hline
3 & 1 & 2 & 7 & 9 & 34 & 50 & 50 & 18 & -16 & 302 \\
4 & 2 & 1 & 10 & 13 & 49 & 72 & 72 & 26 & -23 & 435
\end{array};$$

$$(2,\ 3)\ (3,\ 2)\ (2,\ 2)\ (2,\ 4)=(2,4).$$

Дакле, у вишеструком производу мора се држати поретка *„слева удесно“* и свака наредна матрица мора да има онолико врста колико претходна матрица има колона.

За вишеструке производе важе ови обрасци за транспоновану вредност тога производа:

$$(ABC)'=C'B'A';\qquad (ABCD)'=D'C'B'A'.\qquad (3.26)$$

На пример:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix};\quad ABC=\begin{pmatrix}41 & 52\\ 30 & 35\end{pmatrix};$$

$$(ABC)'=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44 & 30\\ 52 & 35\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}7 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}21\\ 14\\ 10\end{Bmatrix};\quad (1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}7 & 5 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=(21\quad 14\quad 10).$$

3° *Дистрибутивни закон множења матрица важи,* па ће бити:

$$(A+B)\,C=AC+BC;\quad C\,(A+B)=CA+CB. \qquad (3.27)$$

На пример:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 6\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$(A+B)\,C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 9\\ 36 & 21\end{pmatrix};$$

$$C\,(A+B)=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33 & 24\\ 3 & 0\end{pmatrix}\neq(A+B)\,C.$$

Производ матрице $A_{m,n}$ са сагласном нула матрицом $O_{n,p}$ је нула матрица реда (m, p). Може се десити да је производ двеју квадратних матрица нула матрица иако матрице чиниоци нису нуле матрице. Такве матрице се зову *дивизори (делиоци) од нуле.* Ове су матрице *сингуларне,* јер су им детерминанте једнаке нули. Тада је

$$AO=O;\quad (m,n)\,(n,p)=(m,p);\quad A\neq O;\quad B\neq O;\quad AB=O. \qquad (3.28)$$

На пример:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\qquad |A|=0;\quad |B|=0;$$

И производ квадратне матрице n-тог реда са дијагоналном матрицом истог реда зависи од тога да ли је *„производ слева“* или *„производ здесна“*. Резултати у оба случаја су:

$$\mathbf{DA}=\begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} d_{11}\,a_{11} & d_{11}\,a_{12} & \dots & d_{11}\,a_{1n}\\ d_{22}\,a_{21} & d_{22}\,a_{22} & \dots & d_{22}\,a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ d_{nn}\,a_{n1} & d_{nn}\,a_{n2} & \dots & d_{nn}\,a_{nn}\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{AD}=\begin{pmatrix} a_{11}\,d_{11} & a_{21}\,d_{22} & \dots & a_{n1}\,d_{nn}\\ a_{21}\,d_{11} & a_{22}\,d_{22} & \dots & a_{n2}\,d_{nn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}\,d_{11} & a_{n2}\,d_{22} & \dots & a_{nn}\,d_{nn}\end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

У првом случају елементима d_{ii} множе се врсте; у другом колоне.

На пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 7\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4\\ 1 & 5 & 7\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 7\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 3 & -2\\ 2 & 5 & -7\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Производ две дијагоналне матрице истог реда је такође дијагонална матрица истог реда. Овај је производ *комутативан*. Производ матрице скаларном матрицом истог реда је комутативан и једнак производу матрице и скалара (λ). Према томе биће:

$$\mathbf{D}_1\,(a_{ii})\cdot\mathbf{D}_2\,(b_{ii})=\mathbf{D}_2\,\mathbf{D}_1=(a_{ii}\,b_{ii});\quad \mathbf{AS}=\mathbf{A}\,\lambda\,\mathbf{I}=\lambda\,\mathbf{AI}=\lambda\,\mathbf{A}=\mathbf{SA}. \tag{3.30}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}=3\,\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 9\\ 0 & 3 & -6\\ 12 & 15 & 18\end{pmatrix}.$$

Када се матрица типа (m, n) помножи матрицом колоном типа $(n, 1)$ добија се *матрица колона*; производ матрице врсте типа $(1, n)$ и матрице типа (n, p) је *матрица врста* типа $(1, p)$. Дакле, биће:

$$\mathbf{A}\{b\}=\{c\}; \quad (m, n)\ (n, 1)=(m, 1); \quad (b)\,\mathbf{A}=(c); \quad (1, n)\ (n, p)=(1, p). \tag{3.31}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 16 \\ 11 \\ 9 \end{matrix}\right\}; \qquad (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = (18 \quad 7 \quad 11);$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}\right\}.$$

Производ матрице врсте типа $(1, n)$ и матрице колоне типа $(n, 1)$ јесте бројна вредност — *скалар*, па се овај производ назива *скаларни производ*. Обратно, производ матрице колоне типа $(m, 1)$ и матрице врсте типа $(1, n)$ јесте матрица типа (m, n). Овај производ се зове *диадски*. Дакле, овде су:

$$(a)\cdot\{b\}=s=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\, b_{k1}; \qquad (1, n)\ (n, 1)=(1, 1);$$

$$\{a\}\ (b)=\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11}\, b_{11} & a_{11}\, b_{12} & \dots \\ a_{21}\, b_{11} & a_{21}\, b_{12} & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}; \tag{3.32}$$

$$(m, 1)\ (1, n)=(m, n).$$

На пример:

$$(1 \quad 2 \quad 4) \left\{\begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right\} = 3-2+8=9; \qquad \left\{\begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right\} (1 \quad 2 \quad 4) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\left\{\begin{matrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right\} (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Исти начин множења примењује се и код *комплексних матрица*. За њих важе ове релације:

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}; \quad \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} \neq \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}; \quad \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}}=\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}; \quad \overline{\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}}=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}; \quad \bar{\bar{\mathbf{A}}}=\mathbf{A}. \tag{3.33}$$

Реална матрица се зове нормална ако је комутативна са својом транспонованом матрицом. Комплексна матрица је нормална ако је комутативна са својом транспонованом коњугованом матрицом. Нормалне су матрице: реалне симетричне, реалне кососиметричне, дијагоналне, јединичне, ермитске и косоермитске. Дакле, за њих важе релације:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}'=A'\mathbf{A};\quad \mathbf{A}_s\mathbf{A}_s'=A_s'A_s;\quad \mathbf{Q}\overline{\mathbf{Q}}'=\overline{\mathbf{Q}}'\mathbf{Q};\quad \overline{\mathbf{Q}}'=\overline{\mathbf{Q}}^{+};\quad \mathbf{H}\overline{\mathbf{H}}'=\overline{\mathbf{H}}'\mathbf{H}. \qquad (3.34)$$

На пример:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2+i & 1-3i \\ 4+2i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ 4+3i & 2+2i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14-6i & 13-4i \\ 9+5i & 14 \end{pmatrix};$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 2+i & 1+i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 3+2i & 4-i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6+5i & 8+2i \\ 14+4i & 18-5i \end{pmatrix}\neq$$

$$\neq\begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 3+2i & 4-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+i & 1+i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-5i & 8-2i \\ 14-4i & 18+5i \end{pmatrix};$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 2-i & 1+3i \\ 4-2i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ 4-3i & 2-2i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14+6i & 13+4i \\ 9-5i & 14 \end{pmatrix};$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix};\qquad e)\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}=9\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix};$$

$$f)\ \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 5+5i \\ 5-5i & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix};$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}.$$

При нумеричком множењу матрица може се вршити *проба*. Она је тројака: *по врстама (Zeilensummenprobe)*, по *колонама (Spaltensummenprobe)* и *мешовита (Gemischtesummenprobe)*. Прикажимо прву пробу на матрицама другог реда што не утиче на општост излагања. Саберимо елементе појединих *врста друге матрице* **B**, добићемо матрицу колону. Производ матрице **A** и ове матрице колоне даје у резултату матрицу колону чији су елементи једнаки збировима елемената дотичне врсте матрице **C**. Дакле, биће:

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{C};\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\, b_{11}+a_{12}\, b_{21} & a_{11}\, b_{12}+a_{12}\, b_{22} \\ a_{21}\, b_{11}+a_{22}\, b_{21} & a_{21}\, b_{12}+a_{22}\, b_{22} \end{pmatrix},$$

па је

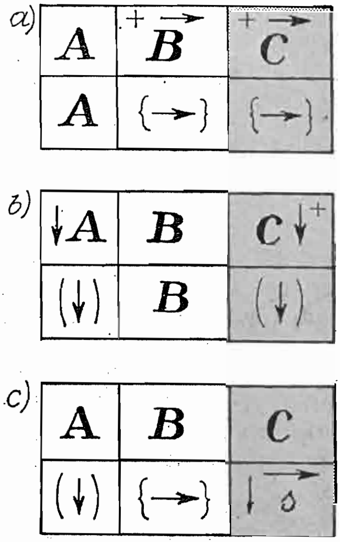
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} b_{11}+b_{12} \\ b_{21}+b_{22} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} a_{11}\,(b_{11}+b_{12})+a_{12}\,(b_{21}+b_{22}) \\ a_{21}\,(b_{11}+b_{12})+a_{22}\,(b_{21}+b_{22}) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} c_{11}+c_{12} \\ c_{21}+c_{22} \end{Bmatrix}. \qquad (3.35)$$

Проба по колонама врши се на сличан начин: треба сабрати све елементе сваке колоне матрице **A** и добиће се матрица врста; њен производ са матрицом **B** даје матрицу врсту чији су елементи збирови елемената сваке колоне матрице **C**. Овде је образац:

$$(a_{11}+a_{21}\quad a_{12}+a_{22})\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=(c_{11}+c_{21}\quad c_{12}+c_{22}). \qquad (3.36)$$

Мешовита проба обухвата једновремено обе прве две наведене пробе. Схематски приказ проба приказан је на слици 3.5.



Слика 3.5. — Схематски приказ вршења пробе множења матрица

На пример:

$a)$

$$\begin{array}{c|c|c}
\xrightarrow{+} & \begin{matrix}5&2\\1&3\\2&4\end{matrix} & \begin{Bmatrix}7\\4\\6\end{Bmatrix}\\ \hline
\begin{matrix}2&1&6\\3&4&2\\1&2&5\end{matrix} & \begin{matrix}23&31\\23&26\\17&28\end{matrix} & \begin{Bmatrix}54\\49\\45\end{Bmatrix}\\
 & \overset{\longrightarrow}{+} &
\end{array};$$

$b)$

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \begin{matrix}5&2\\1&3\\2&4\end{matrix} & \\ \hline
+\downarrow\begin{matrix}2&1&6\\3&4&2\\1&2&5\end{matrix} & \begin{matrix}23&31\\23&26\\17&28\end{matrix} & \downarrow+\\ \hline
(6\quad 7\quad 13) & (63\quad 85) &
\end{array};$$

$c)$

$$\begin{array}{c|c|c}
\xrightarrow{+} & \begin{matrix}5&2\\1&3\\2&4\end{matrix} & \begin{Bmatrix}7\\4\\6\end{Bmatrix}\\ \hline
+\downarrow\begin{matrix}2&1&6\\3&4&2\\1&2&5\end{matrix} & \begin{matrix}23&31\\23&26\\17&28\end{matrix} & \begin{Bmatrix}54\\49\\45\end{Bmatrix}\downarrow+\\ \hline
(6\quad 7\quad 13) & (63\quad 85) & 148\\
 & \overset{\longrightarrow}{+} &
\end{array}$$

$d)$

$$\begin{pmatrix}2&4&1\\6&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\3&2\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&19\\35&41\end{pmatrix};$$

$e)$

$$\begin{pmatrix}2&4&1\\6&3&5\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}6\\5\\5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}37\\76\end{Bmatrix};$$

$f)$

$$(8\quad 7\quad 6)\begin{pmatrix}1&5\\3&2\\4&1\end{pmatrix}=(53\quad 60);$$

$g)$

$$(8\quad 7\quad 6)\begin{Bmatrix}6\\5\\5\end{Bmatrix}=113;$$

h)
$$\begin{array}{rrrr|rrr|r}
 & & & & 3 & 1 & 2 & 6\\
 & & & & 2 & -1 & 0 & 1\\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 2\\
 & & & & 1 & 2 & -1 & 2\\
\hline
3 & 1 & 0 & 5 & 16 & 12 & 1 & 29\\
2 & -1 & 1 & 4 & 9 & 11 & 1 & 21\\
1 & 2 & -1 & 2 & 8 & 3 & -1 & 10\\
4 & 3 & 2 & 1 & 21 & 3 & 9 & 33\\
\hline
10 & 5 & 2 & 12 & 54 & 29 & 10 & 93
\end{array};$$

i)
$$\begin{array}{rrrrr|rr|r}
 & & & & & 4 & -1 & 3\\
 & & & & & 1 & 2 & 3\\
 & & & & & 0 & 1 & 1\\
 & & & & & 2 & -3 & -1\\
 & & & & & 1 & 2 & 3\\
\hline
2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 11 & 1 & 12\\
1 & 0 & 2 & -1 & 4 & 6 & 12 & 18\\
3 & 1 & 3 & 2 & 5 & 22 & 6 & 28\\
\hline
6 & 2 & 9 & 2 & 9 & 39 & 19 & 58
\end{array}.$$

3.7. Степеновање матрица. — Производ матрице $\mathbf{A}$ самом собом зове се *квадрат матрице.* Међутим, за производ двеју матрица $\mathbf{A}$ типа (m, n) и $\mathbf{B}$ типа (n, p), мора постојати њихова *сагласност* за множење, то јест мора бити $(m, n)\,(n, p)=(m, p)$. Међутим, код производа матрице типа (m, n) са истом матрицом биће $(m, n)\,(m, n)$ па горњи услов није задовољен, јер ове матрице *нису сагласне.* Оне ће бити такве само ако је $m=n$, јер је $(n, n)\,(n, n) = (n, n)$. Из овога изводимо закључак да се *степеновати могу само квадратне матрице.*

Степен (s) *квадратне матрице* $\mathbf{A}\,(a_{ik})$ типа (n, n) јесте производ s таквих матрица. Матрица $\mathbf{A}$ је *основа (база)* а s је *експонент (степен),* па је

$$\mathbf{A}^2=\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}}_{2};\quad \mathbf{A}^3=\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}}_{3};\quad \mathbf{A}^s=\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{s}. \tag{3.37}$$

За степеновање важе и ове релације:

$$\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s=\mathbf{A}^{(r+s)}=\underbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{r}\cdot\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{s};\quad (\mathbf{A}^r)^s=(\mathbf{A}^s)^r=\mathbf{A}^{rs};$$

$$\mathbf{A}^r\mathbf{B}^r\neq(\mathbf{A}\mathbf{B})^r;\quad \mathbf{D}^r=(d_{ii}{}^r);\quad \mathbf{I}^s=\mathbf{I}. \tag{3.38}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&15\\10&22\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}^3=\begin{pmatrix}7&15\\10&22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37&81\\54&118\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^2\,\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^5=\begin{pmatrix}7&15\\10&22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}37&81\\54&118\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1069&2337\\1558&3406\end{pmatrix};\quad (\mathbf{A}^2)^3=(\mathbf{A}^3)^2=\mathbf{A}^6=\begin{pmatrix}5743&12555\\8370&18298\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4&5\\0&9\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&10\\4&14\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}28&170\\40&248\end{pmatrix}\neq$$

$$\neq\begin{pmatrix}2&10\\4&14\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}44&160\\64&236\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&9\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}.$$

Квадратна матрица која није нула матрица ($a_{ik} \neq 0$) а има особину да је квадрат матрице једнак самој матрици (основи) назива се *идемпотентна матрица*. Ако је степен матрице која није нула матрица једнак нули матрици она се назива *нилпотентна матрица реда* s, где је $s > 1$. Према томе су:

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}; \quad \mathrm{I}^2 = \mathrm{I}; \quad \mathrm{A} \neq \mathrm{O}; \quad \mathrm{A}^s = \mathrm{O}; \quad s > 1. \tag{3.39}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}^3 = \mathrm{A}^2 A =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица чији је *квадрат* једнак јединичној матрици назива се *инволутивна матрица*. За ове матрице важе релације:

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}; \quad \mathrm{A}'\mathrm{A} = \mathrm{I}; \quad (\mathrm{I} - \mathrm{A})(\mathrm{I} + \mathrm{A}) = \mathrm{O}; \quad \bar{\mathrm{Q}}'\mathrm{Q} = \mathrm{I}. \tag{3.40a}$$

Назив потиче од пресликавања. Два узастопна пресликавања која доводе до идентичности (полазне слике) називају се *инволутивно пресликавање, инволутивна трансформација* или *инволуција*. Ова матрица је оператор тога пресликавања. Матрица је *полуинволутивна* када је

$$\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}; \quad \bar{\mathrm{Q}}'\mathrm{Q} = -\mathrm{I}. \tag{3.40b}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратно степеновању матрице дефинише се и *кореновање матрице*, па важе релације:

$$A^s = B; \quad A = B^{1/s}; \quad (A^r)^{1/s} = A^{r/s} = (A^{1/s})^r. \tag{3.41}$$

Пошто се одређивање корена своди на степеновање и решавање једначина, то *корен из матрице може имати више вредности.*

На пример:

$$\begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}^{1/2} = B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}; \quad B^2 = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+yz & y(x+u) \\ z(x+u) & yz+u^2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{matrix} x^2+yz=19; & z(x+u)=18; \\ y(x+u)=6; & yz+u^2=7; \end{matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.8. Партиција (раздељивање) матрице. — Када се из правоугаоне матрице A типа (m, n) узме ма којих r врста $(r < m)$ и ма којих s колона $(s < n)$ добиће се матрица типа (r, s) која се назива *субматрица* дате матрице. Она је такође правоугаона матрица типа (r, s) а када је $r = s$ биће квадратна реда r. Свака врста матрице је субматрица типа $(1, n)$; свака колона је субматрица типа $(m, 1)$. Сваки елемент матрице је такође субматрица реда 1. Из овога излази да се свака матрица може цртама између врста и цртама између колона поделити на субматрице A_{ik}, па се првобитна матрица састоји из субматрица као нових елемената. Због тога се она назива *суперматрица*, јер су јој елементи субматрице. Овакав поступак раздељивања матрице на субматрице назива се *партиција (раздељивање) матрице* или *подела матрице на блокове.*

Партиција матрица се нарочито изводи при множењу матрица са великим бројем врста и колона. *Раздељивање се мора тако извршити да субматрице буду сагласне за множење;* то јест, *треба леву поделити цртама између врста а десну цртама између колона, резултујућа матрица биће подељена по врстама као лева а по колонама као десна.* Међутим, друкчије је ако се оба чиниоца — обе матрице — деле цртама између врста и између колона. *Тада треба леву матрицу поделити вертикалним цртама* (у групе колона) *на исти начин као десну хоризонталним цртама* (у групе врста). *Подела леве матрице хоризонталним цртама и десне вертикалним произвољна је.* Оба случаја су представљена овако:

$$AB = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{42} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{44} \end{array}\right] =$$

$$=\begin{Bmatrix}\mathbf{A}_{11}\\ \mathbf{A}_{21}\\ \mathbf{A}_{31}\end{Bmatrix}(\mathbf{B}_{11}\ \ \mathbf{B}_{12}\ \ \mathbf{B}_{13})=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{B}_{13}\\ \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{B}_{13}\\ \mathbf{A}_{31}\,\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{31}\,\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{31}\,\mathbf{B}_{13}\end{bmatrix}; \qquad (3.42.\,a)$$

$$\mathbf{AB}=\left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\end{array}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \overset{\longrightarrow}{\mathbf{A}_{13}}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overset{\downarrow}{\mathbf{B}_{11}} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32}\end{pmatrix}. \qquad (3.42.\,b)$$

На пример:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1\\ \hline 0 & 1 & 0 & 2\\ \hline 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c} 4 & 1 & 2\\ \hline 6 & 3 & 4\\ \hline 9 & 3 & 7\end{array}\right]; \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ \hline 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{array}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{B}_{12}+A_{12}\,B_{22}\\ \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{B}_{12}+A_{22}\,B_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{Bmatrix}4\\ 6\end{Bmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\\ 9 & (3\ \ 7)\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc} 4 & 1 & 2\\ 6 & 3 & 4\\ \hline 9 & 3 & 7\end{array}\right);$$

$$\mathbf{AB}=\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & -1\\ \hline 2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 7\end{array}\right]\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 1\\ \hline -2 & 1 & 1\\ \hline 0 & 2 & 5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{B}_{21}+\mathbf{A}_{13}\,\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{B}_{22}+\mathbf{A}_{13}\,\mathbf{B}_{32}\\ \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{B}_{22}+\mathbf{A}_{23}\,\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{B}_{22}+\mathbf{A}_{23}\,\mathbf{B}_{32}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 3\end{Bmatrix}(3)+\begin{Bmatrix}2\\ 4\end{Bmatrix}(-2)+\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}(0) & \begin{Bmatrix}1\\ 3\end{Bmatrix}(4\ \ 1)+\begin{Bmatrix}2\\ 4\end{Bmatrix}(1\ \ 1)+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}(2\ \ 5)\\ \begin{Bmatrix}2\\ 0\end{Bmatrix}(3)+\begin{Bmatrix}4\\ 2\end{Bmatrix}(-2)+\begin{Bmatrix}2\\ 7\end{Bmatrix}(0) & \begin{Bmatrix}2\\ 0\end{Bmatrix}(4\ \ 1)+\begin{Bmatrix}4\\ 2\end{Bmatrix}(1\ \ 1)+\begin{Bmatrix}2\\ 7\end{Bmatrix}(2\ \ 5)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 1\end{Bmatrix} & \begin{pmatrix}8 & 8\\ 14 & 2\end{pmatrix}\\ \begin{Bmatrix}-2\\ -4\end{Bmatrix} & \begin{pmatrix}16 & 16\\ 16 & 37\end{pmatrix}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc} -1 & 8 & 8\\ 1 & 14 & 2\\ \hline -2 & 16 & 16\\ -4 & 16 & 37\end{array}\right].$$

3.9. Матрични полиноми. — Под матричним полиномом степена s квадратне матрице реда n подразумева се збир степена матрице

$$P\,(\mathbf{A}) = a_s\,\mathbf{A}^s + a_{s-1}\,\mathbf{A}^{s-1} + \cdots + a_r\,\mathbf{A}^r + \cdots + a_1\,\mathbf{A} + a_0\,\mathbf{I} = \sum_{r=0}^{s} a_{s-r}\,\mathbf{A}^{s-r}, \tag{3.43}$$

где су a_{s-r} коефицијенти полинома који су скалари.

Са два матрична полинома $P\,(\mathbf{A})$ и $Q\,(\mathbf{A})$ могу се вршити рачунске операције сабирања, одузимања и множења као и са скаларним полиномима $P\,(x)$ и $Q\,(x)$ исте променљиве x. Производи два полинома исте матрице су комутативни, па важи релација

$$P\,(\mathbf{A}) \cdot Q\,(\mathbf{A}) = Q\,(\mathbf{A}) \cdot P\,(\mathbf{A}). \tag{3.44}$$

На пример:

a) $P\,(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 4\,\mathbf{A} - 5\,\mathbf{I} = \mathbf{O};$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9-4-5 & 8-8 & 8-8 \\ 8-8- & 9-4-5 & 8-8 \\ 8-8- & 8-8 & 9-4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

b) $P\,(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 2\,\mathbf{A} + 3\,\mathbf{I} = \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix};$ *c*) $P\,(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 2\,\mathbf{A} - \mathbf{I}; \quad Q\,(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathbf{I};$

$PQ = \mathbf{A}^3 + 3\,\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - \mathbf{I} = QP.$

3.10. Детерминанта квадратне матрице. — Иако матрица нема одређене бројне вредности ипак се са њом може *рачунати* и могу јој се придодати неки одређени *изрази* или *бројеви*.

Свакој квадратној матрици реда n може се придодати *детерминанта* реда n образована од елемената саме матрице. Ова се детерминанта назива *детерминанта матрице* и обележава се симболично овако:

$$\det \mathbf{A}\,(a_{ik}) = |\,\mathbf{A}\,| = |\,a_{ik}\,| = A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.45}$$

Матрица чија је детерминанта различита од нуле $|\,\mathbf{A}\,| \neq 0$ зове се *регуларна (несингуларна, недегенеративна)*; када јој је детерминанта једнака нули она је *сингуларна (дегенеративна)*.

Детерминанта квадратне транспоноване матрице је једнака детерминанти матрице иако ове две матрице нису једнаке, јер се променом врста и колона (то јест транспозицијом) не мења вредност детерминанте. Помножити матрицу реда n бројем λ значи помножити сваки њен елемент тим бројем, па се добија (λa_{ik}). Међутим, детерминанта се множи бројем када се нека врста (или колона) помножи тим бројем. Због тога је детерминанта матрице $\lambda\,\mathbf{A}$ већа λ^n пута од детерминанте матрице $\mathbf{A}$. Детерминанта дијагоналне матрице је једнака производу елемената са главне дијагонале. Према томе је детерминанта јединичне матрице једнака јединици. За ове матрице, дакле, важе следеће релације:

$$A' \neq A;\quad |A'|=|A|;\quad |\lambda A|=\lambda^n|A|;$$
$$|D(d_{ii})| = \prod_{i=1}^{n} d_{ii};\quad |I|=1;\quad |S(\lambda)|=\lambda^n. \tag{3.46}$$

На пример:

$$A=\begin{pmatrix}4&5\\1&3\end{pmatrix};\quad A'=\begin{pmatrix}4&1\\5&3\end{pmatrix};\ |A|=|A'|=7;\ A=\begin{pmatrix}3&9\\2&6\end{pmatrix};\ |A|=\begin{vmatrix}3&9\\2&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0\\2&0\end{vmatrix}=0;$$

$$3A=3\begin{pmatrix}4&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&15\\3&9\end{pmatrix};\ |3A|=\begin{vmatrix}12&15\\3&9\end{vmatrix}=3\cdot3\begin{vmatrix}4&5\\1&3\end{vmatrix}=3^2|A|=9\cdot7=63;$$

$$2A=2\begin{pmatrix}2&-4&4\\1&5&0\\6&-2&4\end{pmatrix};\quad |A|=\begin{vmatrix}-4&-2&0\\1&5&0\\6&-2&4\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-4&-2\\1&5\end{vmatrix}=-72;$$

$$|2A|=2^3|A|=-576;$$

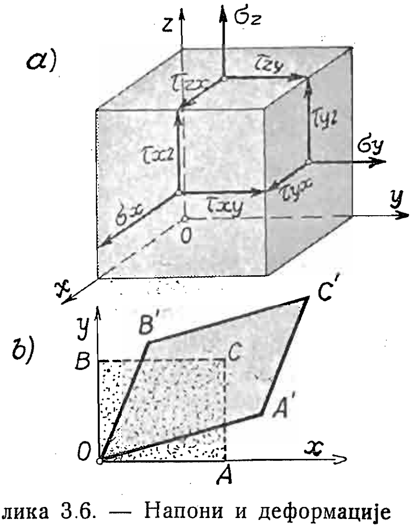
$$A=\begin{pmatrix}8&2&3\\0&2&1\\2&1&1\end{pmatrix};\quad |A|=\begin{vmatrix}8&-4&3\\0&0&1\\2&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}8&-4\\2&-1\end{vmatrix}=0;\quad D=\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&5\end{pmatrix};\ |D|=1\cdot4\cdot5=20$$

$$I=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix};\quad \det I=|I|=1;\quad S=\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix};\ |S|=4^3=64.$$

Збир елемената са главне дијагонале матрице (a_{ii}) назива се *траг матрице (Spur, trace)* или *први скалар матрице* и обележава се овако

$$\text{trag } A=\text{tr } A=\text{Sp } A=S_1=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}. \tag{3.47}$$

Стање напрегнутог тела одређено је са *девет* компонентних *напона* и *девет* компонентних *деформација* (слика 3.6). Међутим, због коњугованости напона и коњугованости деформација стање је одређено са *шест компонентних напона* и *шест компонентних деформација*. Три напона су *нормална* а три су *тангенцијална;* три деформације су *дилатације* а три су *клизања*. Ово стање је одређено са две *матричне схеме симетричних матрица тензора напона* и *тензора деформација*:



Слика 3.6. — Напони и деформације напрегнутог тела

$$(\sigma)=\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \tau_{xy}=\tau_{yx}; \\ \tau_{xz}=\tau_{zx}; \\ \tau_{yz}=\tau_{zy}; \end{matrix} \qquad (\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \gamma_{xy}=\gamma_{yx}; \\ \gamma_{xz}=\gamma_{zx}; \\ \gamma_{yz}=\gamma_{zy}. \end{matrix}$$

Трагови (први скалари) ових матрица су

$$S_1(\sigma)=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z; \qquad S_1(\varepsilon)=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_V$$

и представљају збир нормалних напона, односно збир дилатација *(запреминску дилатацију)*. Они представљају напонску и деформациону *инваријанту* (вредност независну од избора координатног система у тачки напрегнутог тела).

Нормом матрице назива се збир квадрата свих елемената матрице. Позитивна вредност квадратног корена из норме матрице јесте *модул матрице* или *интензитет матрице*. Код комплексне матрице треба узети квадрат апсолутне вредности сваког елемента a_{ik}. Према томе су ови елементи

$$\mathfrak{N}(\mathbf{A})=\sum_i^n \sum_k^n (a_{ik})^2; \qquad \mathfrak{M}(\mathbf{A})=+\sqrt{\mathfrak{N}(\mathbf{A})};$$

$$\mathfrak{N}(\mathbf{A})=\sum_i \sum_k |a_{ik}|^2=\sum_i \sum_k (\alpha_{ik}^2+\beta_{ik}^2)=\sum_i \sum_k (\alpha_{ik}+i\beta_{ik})(\alpha_{ik}-i\beta_{ik}).$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}|=22; \quad \mathfrak{N}=25+4+16+36=81; \; \mathfrak{M}=\sqrt{81}=9;$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}|=-10; \quad \mathfrak{N}=1+0+1+4+49+64+9+16+25=169; \; \mathfrak{M}=13;$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4+i & 5-i \\ 3+2i & 4-3i \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{N}=(16+1)+(25+1)+(9+4)+(16+9)=81; \; \mathfrak{M}=9.$$

Када се из квадратне матрице n-ог реда издвоји ма којих r врста и ма којих r колона добиће се квадратна матрица реда r. Ова матрица је *субматрица* (S) дате матрице а њој одговара детерминанта која се зове *субдетерминанта* или *минор*. Када се пресече i-та врста и k-та колона у пресеку се добија елемент a_{ik}. Он је *субматрица првог реда,* па је и минор првог реда. Међутим, оно што остане је такође субматрица реда $n-1$ па је и минор реда $n-1$. Када се прецрта r врста и r колона добиће се субматрица реда r и њен је минор реда r. Остатак је *комплементни минор* реда $n-r$. *Алгебарски комплемент* или *кофактор* је минор узет са својим предзнаком $+$ или $-$ што зависи од збира цифара индекса редних бројева врста (ν) и колона (k) које улазе у дотични минор. Тако би за матрицу петог реда имали:

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}\phantom{a_{11}}&&\wr&&\phantom{a_{13}}&&\wr&&\phantom{a_{15}}\end{array}\\ \begin{array}{c}\\ \\ \sim\\ \\ \\ \\ \sim\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccccccc}a_{11}&&a_{12}&&a_{13}&&a_{14}&&a_{15}\\ &&\wr&&&&\wr&&\\ a_{21}&\sim&a_{22}&\sim&a_{23}&\sim&a_{24}&\sim&a_{25}\\ &&\wr&&&&\wr&&\\ a_{31}&&a_{32}&&a_{33}&&a_{34}&&a_{35}\\ &&\wr&&&&\wr&&\\ a_{41}&\sim&a_{42}&\sim&a_{43}&\sim&a_{44}&\sim&a_{45}\\ &&\wr&&&&\wr&&\\ a_{51}&&a_{52}&&a_{53}&&a_{54}&&a_{55}\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ \sim\\ \\ \\ \\ \sim\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccccccc}\phantom{a_{11}}&&\wr&&\phantom{a_{13}}&&\wr&&\phantom{a_{15}}\end{array}\end{array};$$

$$\mathbf{S}^{2,4}_{2,4}=\begin{pmatrix}a_{22} & a_{24}\\ a_{42} & a_{44}\end{pmatrix}; \qquad K^{2,4}_{2,4}=(-1)^{\sum(\nu+k)}\,|\mathbf{S}^{2,4}_{2,4}|=+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{24}\\ a_{42} & a_{44}\end{vmatrix};$$

$$\mathbf{S}^{1,3}_{2,5}=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{51} & a_{53}\end{pmatrix}; \qquad K^{1,3}_{2,5}=(-1)^{2+5+1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{51} & a_{53}\end{vmatrix};$$

$$\mathbf{S}^{1,3,5}_{1,3,5}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{13} & a_{15}\\ a_{31} & a_{33} & a_{35}\\ a_{51} & a_{53} & a_{55}\end{pmatrix}; \qquad K^{1,3,5}_{1,3,5}=+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13} & a_{15}\\ a_{31} & a_{33} & a_{35}\\ a_{51} & a_{53} & a_{55}\end{vmatrix};$$

$$\mathbf{S}^{2,4,5}_{1,3,4}=\begin{pmatrix}a_{12} & a_{14} & a_{15}\\ a_{32} & a_{34} & a_{45}\\ a_{42} & a_{44} & a_{45}\end{pmatrix}; \qquad K^{2,4,5}_{1,3,4}=(-1)^{1+3+4+2+4+5}\,|\mathbf{S}^{2,4,5}_{1,3,4}|,$$

јер су збирови индекса у прва два случаја

$$\sum(\nu+k)=(2+2)+(4+4)=12 \quad \text{(паран број)};$$

$$\sum(\nu+k)=(1+3+5)+(1+3+5)=18 \quad \text{(паран број)}.$$

Када се, дакле, у детерминанти прецрта r врста и r колона добија се минор реда r и комплементни минор реда $n-r$. Предзнак кофактора ових минора зависи од збира $\sum(\nu+k)$ индекса редних бројева врста и колона које улазе у ред минора. Ако је збир *паран* број кофактор је *позитиван*, а ако је *непаран* број онда је *негативан*.

Развијање детерминанте по елементима једне врсте (или колоне) како је показано обрасцем (1.11) само је *специјални случај Laplace-овог развијања детерминанте (P. S. Laplace) по минорима* r-ог реда како је он извео 1772. године а које гласи: *Вредност детерминанте* n-ог *реда једнака је збиру производа свих минора* r-ог *реда који се* *могу начинити из било којих r враста детерминанте и одговарајућих њихових кофактора.* Дакле, биће:

$$|\mathbf{A}|=\sum_{p}(-1)^{s}\left|M\begin{matrix} k_1, & k_2, \dots, & k_r \\ \nu_1, & \nu_2, \dots, & \nu_r\end{matrix}\right|\cdot\left|M\begin{matrix} k_{r+1}, & k_{r+2}, \dots, & k_n \\ \nu_{r+1}, & \nu_{r+2}, \dots, & \nu_n\end{matrix}\right|;$$

$$s=\sum(\nu+k)=(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_r)+(k_1+k_2+\cdots+k_r); \tag{3.48}$$

$$p=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}=\binom{n}{r}.$$

За детерминанту четвртог реда *Laplace*-ово развијање по прве две врсте било би:

$$\begin{matrix} \sim \\ |\mathbf{A}|=\sim \end{matrix}\begin{vmatrix} a_{11}\sim a_{12}\sim a_{13}\sim a_{14} \\ a_{21}\sim a_{22}\sim a_{23}\sim a_{24} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \quad a_{34} \\ a_{41} \quad a_{42} \quad a_{43} \quad a_{44} \end{vmatrix}\begin{matrix} \sim=(-1)^{3+3}M_{1,2}^{1,2}M_{3,4}^{3,4}+(-1)^{3+4}M_{1,2}^{1,3}M_{3,4}^{2,4}+ \\ \sim+(-1)^{3+5}M_{1,2}^{1,4}M_{3,4}^{2,3}+(-1)^{3+5}M_{1,2}^{2,3}M_{3,4}^{1,4}+ \\ +(-1)^{3+6}M_{1,2}^{2,4}M_{3,4}^{1,3}+(-1)^{3+7}M_{1,2}^{3,4}M_{3,4}^{1,2}= \end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix};$$

$$p=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6.$$

На пример:

$$(\mathbf{A})=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=-286.$$

Прецртавањем врста и колона истог индекса добијају се *главни минори* (G_i). *Особина је ових минора да на својим дијагоналама имају елементе са главне дијагонале матрице.* Број главних минора је $\binom{n}{r}$, то јест једнак је броју комбинација без понављања r-те класе од n елемената.

За квадратну матрицу четвртог реда главни минори би били:

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad p_1=\binom{4}{1}=4; \quad G_1^1=a_{11}; \quad G_2^2=a_{22}; \quad G_3^3=a_{33}; \quad G_4^4=a_{44};$$

$$p_2=\binom{4}{2}=6; \quad G_{1,2}^{1,2}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad G_{1,3}^{1,3}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad G_{1,4}^{1,4}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$G_{2,3}^{2,3}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad G_{2,4}^{2,4}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad G_{3,4}^{3,4}=\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$p_3=\binom{4}{3}=4; \quad G_{1,2,3}^{1,2,3}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad G_{1,2,4}^{1,2,4}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}; \tag{3.49}$$

$$G_{1,3,4}^{1,3,4}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \qquad G_{2,3,4}^{2,3,4}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$p_4=\binom{4}{4}=1; \quad G_{1,2,3,4}^{1,2,3,4}=|\mathbf{A}|.$$

Збир главних минора r-ог реда је скалар r-ог реда матрице **A**. Према томе су скалари:

$$S_1=\sum G_i^i=\sum a_{ii}; \quad S_2=\sum G_{i,j}^{i,j}=\sum\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}; \tag{3.50}$$

$$S_3=\sum G_{i,j,k}^{i,j,k}=\sum\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}; \;\ldots\; ; S_n=|\mathbf{A}|.$$

Скалар првог реда је, дакле, траг матрице. Индекси $ijk\dots$ јесу комбинације без понављања r-ог реда коефицијената $1, 2, 3, \dots, n$.

На пример, за детерминанту трећег реда имали бисмо скаларе:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad S_1=4+3+5=12;$$

$$S_2=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=10+18+15=43; \qquad S_3=|\mathbf{A}|=40.$$

Међу главним минорима нарочито се истичу само први главни минори. Они се називају *основни главни минори (Hauptabschnittsdeterminanten, principal minors)* и лако се образују према доњој схеми:

$$|\mathbf{A}|=\left|\begin{array}{cccc}
\multicolumn{1}{c|}{a_{11}} & \multicolumn{1}{c|}{a_{12}} & \multicolumn{1}{c|}{a_{13}} & \dots\, a_{1n} \\ \cline{1-1}
a_{21} & \multicolumn{1}{c|}{a_{22}} & \multicolumn{1}{c|}{a_{23}} & \dots\, a_{2n} \\ \cline{1-2}
a_{31} & a_{32} & \multicolumn{1}{c|}{a_{33}} & \dots\, a_{3n} \\ \cline{1-3}
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots\, a_{nn}
\end{array}\right|;$$

$$\Delta_1=G_1^1=a_{11}; \qquad \Delta_2=G_{1,2}^{1,2}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad (3.51)$$

$$\Delta_3=G_{1,2,3,}^{1,2,3,}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \dots; \quad \Delta_n=|\mathbf{A}|.$$

На пример, за детерминанту четвртог реда имали бисмо скаларе и основне главне миноре:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cccc}
\multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{-4} & \multicolumn{1}{c|}{-1} & -4 \\ \cline{1-1}
2 & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{5} & -4 \\ \cline{1-2}
-1 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{-2} & 3 \\ \cline{1-3}
-1 & 4 & -1 & 6
\end{array}\right); \qquad S_1=1+0-2+6=5; \quad \Delta_1=1;$$

$$S_2=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=9; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=8;$$

$$S_3=\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$=-3+16-8+2=7; \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-3;$$

$$S_4=|\mathbf{A}|=2=\Delta_4.$$

Производ двеју квадратних матрица истог реда (n) је квадратна матрица истог реда чији су коефицијенти одређени по обрасцу (3.20). За матрице другог реда ти су коефицијенти облика (3.35). Производ две детерминанте другог реда дат је обрасцем (1.20). Ако се овај образац упореди са обрасцем (3.35), види се да је производ детерминанти Δ_a и Δ_b једнак детерминанти производа матрица **A** и **B** истих елемената. Из овога се закључује: *детерминанта производа матрица једнака је производу детерминанти матрица чиниоца:*

$$\mathbf{AB}=\mathbf{C}; \quad |\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{BA}|; \quad \mathbf{AB}\neq\mathbf{BA};$$
$$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A'B}|=|\mathbf{AB'}|=|\mathbf{A'B'}|. \tag{3.52}$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}; \ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ |\mathbf{A}|=-4; \quad |\mathbf{B}|=-17; \ |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|=68=|\mathbf{AB}|;$$

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 25 & 18 & 22 \\ 27 & 21 & 28 \\ 39 & 31 & 44 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{AB}|=2\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}=68;$$

$$\mathbf{A'B'}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 29 & 8 \\ 16 & 39 & 12 \\ 52 & 101 & 40 \end{pmatrix}; \ |\mathbf{A'B'}|=68.$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}; \ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \ |\mathbf{AB}|=28.$$

3.10.1. Секуларна једначина. — Примена скалара S_r матрице (3.50) је велика код *секуларне једначине* на коју је први наишао *Laplace* 1772. године при проучавању појаве *поремећаја* (*пертурбације*) *кретања планета.* Овој једначини одговара симетрична квадратна *секу-*

ларна матрица, па се секуларна једначина може помоћу скалара те матрице лако написати и без развијања детерминанте у облику:

$$P(x)=|\mathbf{A}-x\,\mathbf{I}|=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}S_r\,x^{n-r}=0, \tag{3.53}$$

где је S_r скалар r-ог реда матрице $\mathbf{A}$, а нулти скалар је $S_0=1$. Овај је полином n-ог степена и сви су му *корени реални ако је матрица* $\mathbf{A}$ *несингуларна* (то јест регуларна), $|\mathbf{A}|\neq 0$.

Према проширеним *Vietè*-овим (*François Viète,* 1540—1603) *условима* између корена и скалара постоје ове везе:

$$S_1=\sum C_1^n=\sum x_i;\quad S_2=\sum C_2^n=\sum x_i\cdot x_j;\ \dots\ ;$$
$$S_n=|\mathbf{A}|=\Pi\, x_1\cdot x_2\dots x_n. \tag{3.54}$$

На пример, за секуларну једначину трећег реда имамо:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ P(x)=\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}\begin{matrix} =-x^3+S_1\,x^2-S_2\,x+S_3=-x^3+8\,x^2- \\ -17\,x+10=0.\quad x_1=1;\quad x_2=2;\quad x_3=5; \end{matrix}$$

јер су

$$S_0=1;\quad S_1=4+2+2=8;\quad S_2=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7+7+3=17;\quad S_3=|\mathbf{A}|=10;$$

$$S_1=8=1+2+5;\quad S_2=17=1\cdot 2+1\cdot 5+2\cdot 5;\quad S_3=10=1\cdot 2\cdot 5.$$

Секуларна једначина четвртог реда је:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} P(x)=x^4-S_1\,x^3+S_2x^2-S_3\,x+S_4= \\ =x^4-5\,x^3+9x^2-7x+2=0; \\ x_1=1;\quad x_2=2;\quad x_3=1;\quad x_4=1. \end{matrix}$$

3.10.2. **Hurwitz-ова детерминанта.** — Основни главни минори играју важну улогу у теорији осцилација код испитивања *стабилности карактеристичног полинома осцилаторног система.* Нека је карактеристични полином једног *неконзервативног система* дат изразом

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n}A_{n-r}\,x^{n-r}=A_n\,x^n+A_{n-1}\,x^{n-1}+\dots+A_2\,x^2+A_1\,x+A_0=0 \tag{3.55}$$

онда се каже да је он *стабилан* ако су му *корени реални и негативни* ($x_s=-a_s$) или коњуговано комплексни са негативним реалним делом ($x_s=-\alpha_s+i\,\beta_s$, где је $i=\sqrt{-1}$). Доказује се да је полином стабилан ако су испуњени ови услови: 1^0 *ако су сви коефицијенти полинома* A_{n-r} *позитивни* и 2^0 *ако су сви основни главни минори Hurwitz-ове детерминанте позитивни.* Та се детерминанта формира према доњој схеми:

$$\Delta_{n-1}=H_{n-1}=\begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & A_{n-7} & \dots \\ A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & A_{n-6} & \dots \\ 0 & A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & \dots \\ 0 & A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & \dots \\ 0 & 0 & A_{n-1} & A_{n-3} & \dots \\ 0 & 0 & A_n & A_{n-2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}>0; \quad \begin{array}{l} \Delta_1>0; \\ \Delta_2>0; \\ \Delta_3>0; \\ \dots . \\ \Delta_{n-1}>0. \end{array} \qquad (3.55\ b)$$

На пример, полином $f(x)=x^5+8x^4+25x^3+40x^2+34x+12=0$ је *стабилан*, јер су испуњена оба услова $A_{n-r}>0$ и

$$H_4=\begin{vmatrix} 8 & 40 & 12 & 0 \\ 1 & 25 & 34 & 0 \\ 0 & 8 & 40 & 12 \\ 0 & 1 & 25 & 34 \end{vmatrix}=102\,000>0;$$

$\Delta_1=8>0;$

$\Delta_2=160>0;$

$\Delta_3=4320>0;$

корени су: -1; -2; -3; $-1\pm i$

Полиноми $f(x)=x^3+4x^2+x-6=0$, $f(x)=x^4+2x^3+4x^2+30x+27=0$ *нестабилни* су, јер код првог није задовољен први услов $(A_0=-6)$ а код другог други услов

$$H_3=\begin{vmatrix} 2 & 30 & 0 \\ 1 & 4 & 27 \\ 0 & 2 & 30 \end{vmatrix}=-768<0;$$

$\Delta_1=2>0$; 1) корени $1;\ -2;\ -3;$

$\Delta_2=-22<0$; 2) корени $-1;\ -3;\ 1\pm2\sqrt{2}$

И полином $f(x)=x^6+5x^5+20x^4+20x^3+32x^2+32x+16=0$ је нестабилан, јер није задовољен други услов:

$$H_5=\begin{vmatrix} 5 & 20 & 32 & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 32 & 16 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 32 & 0 \\ 0 & 1 & 20 & 32 & 16 \\ 0 & 0 & 5 & 20 & 32 \end{vmatrix}=-453888<0;$$

$\Delta_1=5>0;$

$\Delta_2=80>0;$

$\Delta_3=960>0;$

$\Delta_4=-9984<0.$

3.11. Ранг матрице. — *Квадратна матрица* **A** (a_{ik}) *реда n има ранг r ако међу њеним квадратним субматрицама има бар једна несингуларна субматрица реда r* (чија је детерминанта различита од нуле) *док су све остале крадратне субматрице вишег реда од r, ако постоје, сингуларне* (детерминанте су једнаке нули). Разлика између реда матрица и ранга, $d=n-r$, назива се *дегенерација (дефект, нулитет) матрице.* Квадратна регуларна (несингуларна) матрица има ранг $r=n$ и нулитет $d=0$. Нула матрица има ранг $r=0$. Сингуларна квадратна матрица $|\mathbf{A}|=0$ има ранг $r=1$ ако постоји бар један елемент различит од нуле а све су субдетерминанте реда 2 и вишег сингуларне. Сингуларна квадратна матрица је ранга $r=2$ ако постоји бар једна несингуларна субматрица другог реда, док су све остале вишег реда сингуларне.

Ранг правоугаоне матрице типа (m, n) може бити највише једнак једном од два броја m или n и то мањем ($r_{\max}=m$ ако је $m<n$ и $r_{\max}=n$ ако је $n<m$), ако је бар једна квадратна субдетерминанта реда m несингуларна. *Ранг је,* дакле, *једнак највећем реду квадратне субдетерминанте која се може образовати од матрице, а да је несингуларна.* Појам ранга је увео *Frobenius* 1879. године.

На пример, рангови матрица су:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; |\mathbf{A}|=10; \; r=n=3; \; \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \; |\mathbf{A}|=0; \; r=2; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1\neq 0;$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}|=0; \quad r=1; \quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix};$$

$$r=2; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & -7 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & -7 \end{vmatrix}=0$$

3.12. Ортогонална и унитарна матрица. — Реална квадратна матрица која задовољава услов

$$\mathbf{AA}'=\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{I}; \quad |\mathbf{AA}'|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}'|=|\mathbf{A}|^2=1; \quad |\mathbf{A}|=\pm 1 \qquad (3.56)$$

назива се *ортогоналном матрицом.* Она је увек *регуларна* матрица, а уз то је *унимодуларна јер јој је вредност детерминанте* ± 1. Пошто је комутативна са својом транспонованом матрицом она је и *нормална* матрица.

Производ двеју ортогоналних матрица истог реда је такође ортогонална матрица:

$$\mathbf{AA}'=\mathbf{A}'\mathbf{A}; \quad \mathbf{BB}'=\mathbf{B}'\mathbf{B}; \quad (\mathbf{AB})'(\mathbf{AB})=(\mathbf{B}'\mathbf{A}')(\mathbf{AB})=\mathbf{B}'(\mathbf{A}'\mathbf{A})\,\mathbf{B}=$$
$$=\mathbf{B}'(\mathbf{IB})=\mathbf{B}'\mathbf{B}=\mathbf{I}; \quad (\mathbf{BA})'(\mathbf{BA})=\mathbf{A}'(\mathbf{B}'\mathbf{B})\,\mathbf{A}=\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{I}. \qquad (3.57)$$

Ортогонална матрица је оператор *ортогоналне трансформације.* Ако је $|\mathbf{A}|=1$ ортогонална трансформација је *права—десна* (на пример, позитивна ротација у тродимензионом простору), а ако је $|\mathbf{A}|=-1$ трансформација је *неправа—лева* (на пример, ротација са огледањем, променом смера једне или све три осе).

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix};\ |\mathbf{A}|=1;\ \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix};\quad |\mathbf{A}|=1;\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix};\quad |\mathbf{A}|=-1;$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 \\ 2/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 \\ 1/3 & 0 & -4\sqrt{2}/6 \end{bmatrix};\quad |\mathbf{A}|=1;$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 \\ 2/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 \\ 1/3 & 0 & -4\sqrt{2}/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & -4\sqrt{2}/6 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix};\ |\mathbf{A}|=1;\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix};\quad |\mathbf{B}|=1;$$

$$\mathbf{AB}=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})'(\mathbf{AB})=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Комплексна матрица која задовољава услов

$$\mathbf{QQ}^{+}=\mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}}'=\bar{\mathbf{Q}}'\mathbf{Q}=\mathbf{I};\qquad |\mathbf{Q}|\,|\bar{\mathbf{Q}}'|=|\bar{\mathbf{Q}}'|\,|\mathbf{Q}|=1 \tag{3.57}$$

зове се *унитарна матрица*. Она је оператор *унитарне трансформације*. И детерминанта ове матрице је *унимодуларна*.

На пример:

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix};\ |\mathbf{Q}|=1;\quad |\bar{\mathbf{Q}}'|=1\,;$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -i\sin\varphi \\ -i\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.13. Адјунгована матрица. — Нека је квадратна матрица реда $n=3$ оператор линеарне трансформације којом се старе координате x_i трансформишу у нове координате y_i; $i=1,2,3$. Сматрајући нове координате y_i као апсолутне чланове могу се према *Cramer*-овом правилу старе координате изразити помоћу нових координата y_i на овај начин:

$$\mathbf{A}\,\{x\}=\{y\};\qquad \begin{array}{l} a_{11}\;x_1+a_{12}\;x_2+a_{13}\;x_3=y_1; \\ a_{21}\;x_1+a_{22}\;x_2+a_{23}\;x_3=y_2; \\ a_{31}\;x_1+a_{32}\;x_2+a_{33}\;x_3=y_3; \end{array}$$

$$\Delta=|\,\mathbf{A}\,|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0;$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left\{y_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-\right.$$

$$\left.-y_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+y_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right\};$$

$$x_1=\frac{1}{\Delta}\,(y_1\,K_{11}+y_2\,K_{21}+y_3\,K_{31});$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\,(y_1\,K_{12}+y_2\,K_{22}+y_3\,K_{32});$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\Big(y_1\;K_{13}+y_2\,K_{23}+y_3\,K_{33});\quad \Delta=|\,\mathbf{A}\,|,$$

где су K_{ki} *кофактори елемената* појединих колона матрице **A**. Ово нам показује да се старе координате x_i помножене детерминантом матрице $|\,\mathbf{A}\,|$ могу изразити као линеарна трансформација нове матрице $\mathbf{A}^*$ чији су елементи $\alpha_{ik}=K_{ki}$ једнаки кофакторима елемента a_{ki} са комутираним индексима елемента a_{ik} матрице **A**. Та нова матрица $\mathbf{A}^*$ назива се *адјунгована матрица матрице* **A**. Њена детерминанта $|\,\mathbf{A}^*\,|$ је *адјунгована детерминанта* детерминанте матрице. Према томе је:

$$\Delta^*\,\{y\}=\Delta\,\{x\};\qquad \mathbf{A}^*(\alpha_{ik})=\begin{vmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} & \ldots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} & \ldots & K_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ K_{1n} & K_{2n} & K_{3n} & \ldots & K_{nn} \end{vmatrix}= \tag{3.58}$$

$$=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

На пример, адјунгована матрица матрице A трећег реда биће:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}; \quad |\mathrm{A}|=50; \quad K_{11}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -3 & 0\end{vmatrix}=9; \quad K_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\end{vmatrix}=6;$$

$$K_{31}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=11; \quad K_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3; \quad K_{22}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2;$$

$$K_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-13; \quad K_{13}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-10;$$

$$K_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=10; \quad K_{33}=10; \quad \mathrm{A}^*=\begin{vmatrix}9 & 6 & 11\\ 3 & 2 & -13\\ -10 & 10 & 10\end{vmatrix}; \quad |\mathrm{A}^*|=2\,500.$$

Адјунгована матрица је *комутативна* са својом матрицом; тај производ је једнак скаларној матрици чији су елементи једнаки детерминанти матрице A. Када је матрица сингуларна тај је производ једнак нули. Дакле, биће:

$$\mathrm{AA}^*=\mathrm{A}^*\mathrm{A}=|\mathrm{A}|\,\mathrm{I}=\mathrm{S}(|\mathrm{A}|); \quad |\mathrm{AA}^*|=|\mathrm{A}|^n; \quad |\mathrm{A}^*|=|\mathrm{A}|^{n-1};$$

$$|\mathrm{A}|=\mathrm{O}; \quad \mathrm{AA}^*=\mathrm{A}^*\mathrm{A}=\mathrm{O}. \tag{3.59}$$

На пример,

$$\mathrm{AA}^*=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 6 & 11\\ 3 & 2 & -13\\ -10 & 10 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50 & & \\ & 50 & \\ & & 50\end{pmatrix}=50\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix};$$

$$|\mathrm{AA}^*|=50^3; \quad |\mathrm{A}^*|=50^2=2\,500;$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 3 & 1\\ 6 & 2 & -4\end{pmatrix}; \quad |\mathrm{A}|=0; \quad \mathrm{A}^*=\begin{pmatrix}-14 & 0 & 7\\ 22 & 0 & -11\\ -10 & 0 & 5\end{pmatrix};$$

$$|\mathrm{A}^*|=0; \quad \mathrm{AA}^*=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Адјунгована матрица производа матрица је једнака комутираном производу адјунгованих матрица чиниоца:

$$(\mathrm{AB})^*=\mathrm{C}^*=\mathrm{B}^*\mathrm{A}^*; \quad |(\mathrm{AB})^*|=|\mathrm{B}^*|\,|\mathrm{A}^*|=|\mathrm{B}|^{n-1}\,|\mathrm{A}|^{n-1}. \tag{3.60}$$

За адјунговане матрице важе ове релације:

a) адјунгована матрица скаларне матрице је скаларна матрица,

b) адјунгована матрица дијагоналне матрице је дијагонална матрица,

c) адјунгована матрица троугласте матрице је троугласта матрица,

d) ако је матрица **A** реда n и ранга $r < n-1$ онда је $\mathbf{A}^*$ нула матрица,

e) ако је матрица **A** симетрична онда је и матрица $\mathbf{A}^*$ симетрична матрица,

f) ако је матрица **H** ермитска онда је и $\mathbf{H}^*$ ермитска,

g) ако је матрица **A** кососиметрична реда n онда је матрица $\mathbf{A}^*$ симетрична или кососиметрична према томе да ли је n непаран или паран број.

На пример,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix};\quad \mathbf{AB}=\begin{pmatrix}16 & 6\\ 18 & 8\end{pmatrix};\quad (\mathbf{AB})^*=\begin{pmatrix}8 & -6\\ -18 & 16\end{pmatrix};\quad |(\mathbf{AB})^*|=20;$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix};\quad |\mathbf{A}^*|=10;\quad \mathbf{B}^*=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{pmatrix};\quad |\mathbf{B}^*|=2;\quad |\mathbf{B}^*|\cdot|\mathbf{A}^*|=20;$$

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}5 & \\ & 5\end{pmatrix};\quad \mathbf{S}^*=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix};\quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 3\end{pmatrix};\quad \mathbf{D}^*=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad \mathbf{T}^*=\begin{pmatrix}4 & -1 & -7\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 4 & 8 & 12\end{pmatrix};\quad |\mathbf{A}|=0;\quad r=1;$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}2 & 1+i\\ 1-i & 3\end{pmatrix};\quad \mathbf{H}^*=\begin{pmatrix}3 & -1-i\\ -1+i & 2\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_s=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_s^*=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_k=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_k^*=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_k=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_k^*=\begin{pmatrix}9 & -3 & -6\\ -3 & 1 & 2\\ -6 & 2 & 4\end{pmatrix};$$

3.14. Инверзна матрица. Дељење матрица. — Када је матрица A регуларна, то јест несингуларна, тада је $|A| \neq 0$, па се елементи њене адјунговане матрице могу помножити бројем $1/|A|$. Тада се добија нова матрица која се назива *инверзна* или *реципрочна матрица* матрице A, те је:

$$R(r_{ik}) = A^{-1}; \qquad r_{ik} = K_{ki}/|A|; \qquad A^{-1} = A^*/|A|. \tag{3.61}$$

На пример:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad |A| = 10; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}; \quad |A^{-1}| = \frac{1}{10};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = 1; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2. \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad |A^{-1}| = 1;$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad |A| = -1; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad |A^{-1}| = -1.$$

Свака квадратна несингуларна матрица комутативна је са својом реципрочном матрицом. Инверзна матрица производа двеју несингуларних квадратних матрица једнака је производу комутираних инверзних матрица чиниоца. Сем тога важе још неке релације, те ће бити:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \frac{AA^*}{|A|} = I; \qquad (AB)^{-1} = \frac{(AB)^*}{|AB|} = \frac{B^*A^*}{|B|\cdot|A|} = B^{-1}A^{-1};$$

$$(A^{-1})^{-1} = A; \quad A^{-s} = (A^{-1})^s; \quad A^{-r/s} = (A^{-r})^{1/s} = (A^{-1/s})^r. \tag{3.62}$$

На пример:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad |A| = 10; \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad |A^{-1}| = \frac{1}{10};$$

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-2} = (A^{-1})^2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 11 & -14 \\ -7 & 18 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad |B| = 20;$$

$$B^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 8\end{pmatrix};\quad AB=\begin{pmatrix}40 & 10\\ 20 & 10\end{pmatrix};\quad (AB)^{-1}=\frac{1}{200}\begin{pmatrix}10 & -10\\ -20 & 40\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{200}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{200}\begin{pmatrix}10 & -10\\ -20 & 40\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Из (3.58) следи да се при *линеарној трансформацији* старе координате x_i могу изразити помоћу нових координата y_i примењујући инверзну матрицу

$$|A|\neq 0;\quad A\{x\}=\{y\};\quad \{x\}=A^{-1}\{y\}. \tag{3.63}$$

На пример:

$$\begin{aligned} 4x_1+6x_2 \qquad &=y_1;\\ 2x_1+8x_2-10x_3&=y_2;\\ 4x_2+\ 2x_3&=y_3;\end{aligned}\qquad A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ 2 & 8 & -10\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix};\qquad |A|=200;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{200}\begin{pmatrix}56 & -12 & -60\\ -4 & 8 & 40\\ 8 & -16 & 20\end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} x_1&=(\ 56y_1-12y_2-60y_3)/200=(\ 14y_1-3y_2-15y_3)/50;\\ x_2&=(-\ 4y_1+\ 8y_2+40y_3)/200=(-y_1+2y_2+10y_3)/50;\\ x_3&=(\ 8y_1-16y_2+20y_3)/200=(\ 2y_1-4y_2+\ 5y_3)/50.\end{aligned}$$

Помоћу инверзних матрица може се дефинисати и *количник двеју регуларних матрица*. Нека су дате две матричне једначине са матрицама **A** и **B** истог реда n

$$AX=B;\qquad YA=B$$

у којима су матрице **X** и **Y** *непознате матрице* али истог реда. Помножимо прву матричну једначину слева а другу здесна матрицом A^{-1} онда, с обзиром на (3.62), добијамо

$$A^{-1}AX=IX=A^{-1}B;\quad YAA^{-1}=BA^{-1};\quad X=A^{-1}B;\quad Y=BA^{-1}\neq X. \tag{3.64}$$

Ове су две матрице различите, па је *производ једне матрице* (**B**) *инверзном матрицом* A^{-1} *различит* да ли се *множење врши „слева“* или *„здесна“*. Матрица **X** је *леви количник* (*преддивизија*) матрица **B** и **A**, а матрица **Y** је *десни количник* (*постдивизија*) матрица **B** и **A**. Због овога се мора водити рачуна о левом или десном количнику, па се дељење матрица не обележава са A/B или $A:B$ већ увек као *множење инверзном матрицом, слева* или *здесна*.

На пример:

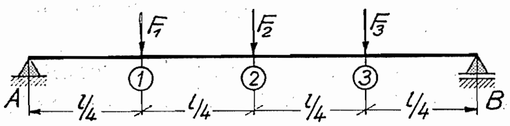
$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix};\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix};\quad \mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 8\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{X}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5 & -5\\ 0 & 20\end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4 & 4\\ -4 & 21\end{pmatrix}.$$

3.14.1. Матрица утицајних коефицијената. — Концентрисане силе $\vec{F}_i$ које дејствују на простој греди *AB* у пресецима (1, 2 и 3) производе угибе y_i (слика (3.7), па су према *Clapeyron*-овој и *Maxwell*-овој теореми:

$$\{y\}=\mathrm{A}\{F\};\qquad \{F\}=\mathrm{A}^{-1}\{y\};\qquad \mathrm{A}=\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\ \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\ \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\ \dots & \alpha_{nn}\end{Vmatrix} \tag{3.65}$$

где су $\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$ *утицајни коефицијенти за померања* (чл. 2.7.).



Слика 3.7. — Матрица утицајних коефицијената

За назначени распоред оптерећења и пресека, уз ознаку $u=l^3/768\,\mathfrak{B}$, где је $\mathfrak{B}=EI_x$ *савојна крутост* греде *AB*, биће:

$$\mathrm{A}=u\begin{pmatrix}9 & 11 & 7\\ 11 & 16 & 11\\ 7 & 11 & 9\end{pmatrix};\quad |\mathrm{A}|=28\,u^3;\quad \mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{28\,u}\begin{pmatrix}23 & -22 & 9\\ -22 & 32 & -22\\ 9 & -22 & 23\end{pmatrix};$$

$$y_1=u\,(\ 9\,F_1+11\,F_2+\ 7\,F_3);\qquad F_1=(\ 23\,y_1-22\,y_2+\ 9\,y_3)/28\,u;$$

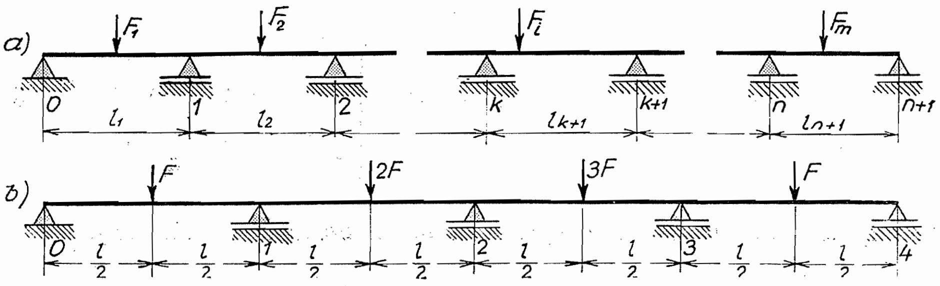
$$y_2=u\,(11\,F_1+16\,F_2+11\,F_3);\qquad F_2=(-22\,y_1+32\,y_2-22\,y_3)/28\,u;$$

$$y_3=u\,(\ 7\,F_1+11\,F_2+\ 9\,F_3);\qquad F_3=(\ \ 9\,y_1-22\,y_2+23\,y_3)/28\,u.$$

Континуални носач са n распона и $n+1$ *крутим ослонцем* на истој висини оптерећен вертикалним теретима F_i, $i=1,\ \dots,\ m$, је $s=n+1-2=n-1$-пут *статички неодређен*, јер има $n+1$ непознат отпор ослонца а само две једначине за равнотежу равног система паралелних сила $\Sigma F_i=0$ и $\Sigma M=0$ (слика 3.8. *а*). Замислимо да смо одстранили међуослонце (*k*) од индекса $s=1$ до индекса $s=n-1$ и њихове утицаје заменили *отпорима ослонаца (статичким непознатим)* Y_s, онда су *допунски услови* да су угиби носача на месту ослонаца једнаки нули, пошто су ослонци крути. Применом методе утицајних коефицијената добијамо за *k*-ти ослонац

$$f_k=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ki}F_i-\sum_{s=1}^{n-1}r_{ks}Y_s=0$$

где је α_{ki} утицајни коефицијент за померање на месту (*k*) услед јединичне силе $F_i=1$ која дејствује у пресеку (*i*); r_{ks} је утицајни



Слика 3.8. — Статички неодређени континуални носач

коефицијент за померање на ослонцу (*k*) услед јединичног отпора $Y_s=1$ ослонца *s*. Ово се да лако написати у матричном облику из кога одређујемо статичке непознате

$$\mathbf{A}\{F\}-\mathbf{R}\{Y\}=\{0\};\qquad \{Y\}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\{F\};$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \dots & \alpha_{n-1,m}\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,n-1}\\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2,n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ r_{n-1,1} & r_{n-1,2} & \dots & r_{n-1,n-1}\end{bmatrix}. \qquad (3.66)$$

При овоме је претпостављено: 1) да силе F_i дејствују *наниже*, 2) да су отпори Y_s усмерени *навише* и 3) да су утицајни коефицијенти α_{ki} и r_{ks} *позитивни*, што значи да треба терете и отпоре узимати са своjим предзнаком. Када се за статичку непознату (отпор) Y_s добиjе *позитивна вредност* онда значи да je њен смер (навише) *правилно претпостављен*; у противном треба мењати смер отпора.

На пример, носач представљен на слици 3.8. *b* je *трипут статички неодређен*, па за $F=4$ Mp, $L=4\,l$; $u=L^3/3\cdot 64^2\,\mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}=EI_x$, добиjамо:

$$A=u\begin{pmatrix}81 & 175 & 153 & 59\\ 94 & 234 & 234 & 94\\ 59 & 153 & 175 & 81\end{pmatrix};\qquad R=16\,u\begin{pmatrix}9 & 11 & 7\\ 11 & 16 & 11\\ 7 & 11 & 9\end{pmatrix};\qquad |R|=28\,(16\,u)^3;$$

$$R^{-1}=\frac{1}{28\cdot 16u}\begin{pmatrix}23 & -22 & 9\\ -22 & 32 & -22\\ 9 & -22 & 23\end{pmatrix};\qquad \{Y\}=\left\{\begin{matrix}Y_1\\ Y_2\\ Y_3\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{F}{28\cdot 16}\begin{pmatrix}23 & -22 & 9\\ -22 & 32 & -22\\ 9 & -22 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}81 & 175 & 153 & 59\\ 94 & 234 & 234 & 94\\ 59 & 153 & 175 & 81\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}1\\ 2\\ 3\\ 1\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{F}{224}\left\{\begin{matrix}345\\ 608\\ 499\end{matrix}\right\};\qquad \{Y\}=\left\{\begin{matrix}6{,}16\\ 10{,}86\\ 8{,}91\end{matrix}\right\}.$$

ВЕЖБАЊА

1. Одредити вредности $A+B$, $A-B$; $3\,A$; $-5\,A$ матрица

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Одредити производе матрица:

$$(3\quad 1\quad 2)\left\{\begin{matrix}4\\ 1\\ -1\end{matrix}\right\};\qquad \left\{\begin{matrix}4\\ 1\\ -1\end{matrix}\right\}(3\quad 1\quad 2);\qquad \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix};\qquad \begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}1\\ 0\\ 2\end{matrix}\right\}.$$

3. Одредити степене матрица:

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2;\quad \begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}^2;\quad \begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}^3;\quad \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}^4;\quad \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{1/2};$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^3;\quad \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^5;\quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^3.$$

4. Доказати да је $AB=AC$ за матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -2\\ 3 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

5. Доказати да је $(AB)\,C=A\,(BC)$ за матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

6. Одредити транспоноване матрице од матрице (AB):

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12\end{pmatrix}.$$

7. Партицијом показати да је

$$A^2=I_4 \quad \text{ако је} \quad A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

8. Показати да је свака матрица

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix};\quad i=\sqrt{-1},$$

антикомутативна са другом.

9. Да ли је матрица $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 4 & -3\\ -5 & 5 & -4\end{pmatrix}$ идемпотентна?

10. Да ли је матрица **A** нилпотентна и ако јесте кога је реда

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -8 & -4 & 6 & -2 \end{bmatrix} ?$$

11. Одредити вредности

$$A^2+2A-6I; \quad 3A^3-A^2+A-4I$$

за матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. Одредити ранг матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 10 & 15 \\ 4 & 5 & 6 & 11 & 16 \\ 5 & 6 & 7 & 12 & 17 \\ 6 & 7 & 8 & 13 & 18 \\ 7 & 8 & 9 & 14 & 19 \end{bmatrix}.$$

13. Одредити адјунговане матрице матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

14. Одредити инверзне матрице матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1-2i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

15. За комплексну матрицу Q одредити Q', $\overline{Q}$; $\overline{Q}'$; QQ'; $Q\overline{Q}$; $Q\overline{Q}'$; H; H_k; Q^2; ако је:

$$Q=\begin{pmatrix} 3+2i & 2-i & 1+i \\ 4-i & 6+2i & 2-2i \\ 3+3i & 2+i & 5-4i \end{pmatrix}.$$

16. Решити матричне једначине ако је матрица X квадратна матрица истог реда:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 13 & 10 & 13 \\ 7 & 8 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad X^2=4\,I.$$

17. Показати да је

$$(A^*)^*=|A|^{n-1}\cdot A$$

на матрицама:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

18. Проверити следеће резултате:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \ldots; \quad A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Ако је ермитска матрица $H=A+iB$, где су A и B реалне квадратне матрице, $|A|\neq 0$, $i=\sqrt{-1}$, доказати на матрицама

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

да важи релација

$$|H|^2=|A|^2\cdot|I+(A^{-1}B)^2|.$$

20. Показати да су детерминанте антисиметричне матрице парног реда различите од нуле а непарног реда једнаке нули

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

21. Показати да је следећа матрица A оротогонална а Q унитарна

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} (1+i)/2 & i/\sqrt{3} & (3+i)/2\sqrt{15} \\ -1/2 & 1/\sqrt{3} & (4+3i)/2\sqrt{15} \\ 1/2 & -i/\sqrt{3} & 5i/2\sqrt{15} \end{pmatrix}.$$

22. Ако је Q комплексна матрица ($q_{11}=0$; $q_{12}=1+i$, $q_{21}=-1+i$; $q_{22}=i$) показати да је матрица $U=(I-Q)(I+Q)^{-1}$ унитарна.

23. На матрицама

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

показати следеће релације:

$$(A+B)(A+B) \neq A^2+2\,AB+B^2; \quad (A+B)\ (A-B) \neq A^2-B^2.$$

24. За матрице

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

доказати следећу релацију:

$$\operatorname{tr} BAB^{-1}=\operatorname{tr} A.$$

25. На матрици A из претходног задатка и $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ доказати следеће релације:

$$C=(A+B)^{-1}(A-B); \quad A+B=C'(A+B)\,C; \quad A-B=C'(A-B).$$

4. ВЕКТОРИ И МАТРИЦЕ

4.1. Поље бројева. — Множина неких величина чини *скуй (множину, мноштво; класу, колекцију)* тих величина; оне су *елементи (чланови, тачке, објекти)* скупа. Скуп је састављен од елемената, и обратно, елементи датог скупа образују скуп као своју целину. Цели (Z) и разломљени позитивни и негативни бројеви (подразумевајући и нулу) образују *скуп рационалних бројева* (Q). Ирационални бројеви ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \ldots$) образују *скуп ирационалних бројева* (J). Сви рационални и ирационални бројеви чине *скуп реалних бројева* (R).

Скуп неких елемената x_i симболички се обележава овако

$$S=\{x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots ,\}. \tag{4.1}$$

Да елемент x_i припада скупу S а да елемент t није елемент скупа, обележава се симболички овако:

$$x_i \in S; \quad t \notin S; \quad t \overline{\in} S; \quad t_{\text{non}} \in S. \tag{4.2}$$

Скуп свих природних бројева 1, 2, 3, ..., (N), садржи и парне бројеве који такође образују скуп парних бројева P (2, 4, 6, 8, ...) који је *подскуп* скупа природних бројева (N). Ово се обележава ознаком $P \subset N$. Скуп B је *садржан* у скупу A то јест он је подскуп скупа A ако је сваки елемент скупа B такође и елемент скупа A; $x \in B$, $x \in A$ или $B \subset A$, односно $A \supset B$ *(инклузија)*. Тако је инклузија скупова $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Два су скупа *једнака* ако се састоје само из истих елемената $A=B$; у противном нису једнака $A \neq B$. *Унија (збир)* два скупа A и B је скуп свих елемената који се налазе бар у једном скупу. *Пресек (производ, заједнички део)* два скупа је скуп свих елемената који једновремено припадају и скупу A и скупу B. Ако скупови немају заједничких елемената они су *дисјунктни*. *Диференција (разлика)* два скупа A и B је скуп свих елемената првог скупа (A) који не припадају другом скупу (B). Ови појмови се обележавају овако:

$$A \cup B = A + B; \quad A \cap B = A \cdot B = AB; \quad A \cap B = \varnothing; \quad A \setminus B. \tag{4.3}$$

Према броју елемената скуп је *коначан* или *бескрајан* (бесконачан). Скуп без елемената зове се *празан (пуст) скуп*, $\varnothing = A \cap B$. За неки скуп $S\{x_i\}$ каже се да је *пребројив*, ако између елемената x_i тог скупа и природних бројева (скупа N) постоји биунивока кореспонденција, то јест ако сваком елементу x_i одговара један број. Пребројив скуп се може написати у облику

$$S \longleftrightarrow N; \quad S\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}. \tag{4.4}$$

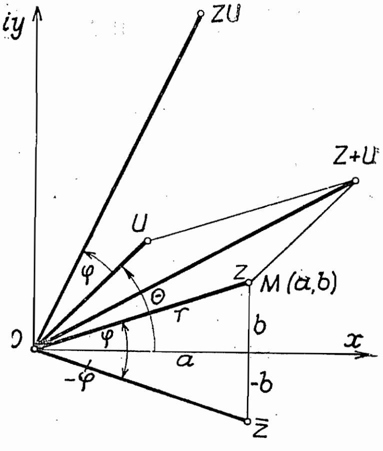
Код пребројивог скупа пребројив је и сваки његов подскуп. *Скуп целих бројева* (Z) је пребројив, а такође је пребројив и скуп рационалних бројева (Q).

Скуп бројева образује *поље бројева* или *тело* ако основне рачунске операције сабирања, одузимања, множења и дељења бројем различитим од нуле са два броја (r) и (s) тога скупа дају број који такође припада томе скупу бројева. Ако су, дакле, r и s елементи скупа S онда су и бројеви $r+s$, $r-s$, $r \cdot s$ и r/s, ако је $s \neq 0$, елементи истог скупа (S). Скуп рационалних бројева (Q), скуп реалних бројева (R) и скуп комплексних бројева (C), где су a и b реални бројеви и $i=\sqrt{-1}$, јесу поља бројева. Скуп $a+b\sqrt{2}$, где су a и b рационални бројеви такође је поље бројева. Скуп целих бројева (Z) није поље бројева јер уопште узев количник два цела броја није цео број. Овај скуп образује *прстен бројева*. Скуп бројева $b\sqrt{2}$, где је b рационалан број, такође није поље бројева.

Када су сви елементи неке матрице **A** на неком пољу, онда је и матрица **A** на том пољу. Тако су матрице:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 2/3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 3 & 1-2i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

где је $i=\sqrt{-1}$ а a и b су реални бројеви, на пољу рационалних бројева (Q), односно на пољу комплексних бројева (C), односно реалних бројева (R).



Слика 4.1 — Комплексни бројеви

Комплексни број $\mathfrak{z}=a+b\,i$, $i=\sqrt{-1}$, (слика 4.1), одређен је *паром* реалних бројева (a, b). Други комплексни број $\mathfrak{u}=c+d\,i$ одређен је паром бројева (c, d). Збир и производ комплексних бројева* су:

$$\mathfrak{z}+\mathfrak{u}=(a+c)+(b+d)\,i=m+n\,i; \tag{4.5.a}$$

$$\mathfrak{z}\,\mathfrak{u}=(ac-bd)+(ad+bc)\,i=p+q\,i.$$

Две квадратне матрице другог реда одређене паровима бројева (a, b) и (c, d) облика

$$\mathbf{Z}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U}=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \tag{4.5.b}$$

---

* Статика, 8. изд. Београд, 1968., Додатак, чл. **17.**, страна 380.

сабране и помножене дају матрице:

$$\mathbf{Z}+\mathbf{U}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Z}\mathbf{U}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}. \qquad (4.5.c)$$

Из предњег се види да матричне операције сабирања и множења матрица $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{U}$ одређују нове матрице са елементима m, n, односно p, q, као и код комплексних бројева (4.5. a). На овај се начин комплексни бројеви $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{u}$ *пресликавају на скаларне квадратне матрице другог реда* $\mathbf{Z}$ *и* $\mathbf{U}$, и *обратно*. Ова биунивока кореспонденција између бројева и скаларних матрица зове се *изоморфизам према операцијама сабирања и множења* и обележава се овако:

$$\mathfrak{z}+\mathfrak{u}\longleftrightarrow\mathbf{Z}+\mathbf{U};\quad \mathfrak{z}\,\mathfrak{u}\longleftrightarrow\mathbf{Z}\,\mathbf{U}. \qquad (4.6)$$

Скуп комплексних бројева ($\mathfrak{z}$) и скуп скаларних матрица ($\mathbf{Z}$) јесу два различита скупа бројева, али је сваки елемент једног скупа *слика* одговарајућег елемента другог скупа, и обратно. То значи да се матрице $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{U}$ могу *формално* сабирати и множити као и комплексни бројеви $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{u}$. Због тога се често ове матрице зову *комплексни бројеви*.

Број (0, 0) је *неутрални елемент* за сабирање, а број (1, 0) је неутрални елемент за множење у скупу комплексних бројева (C). Реални део комплексног броја је $\mathfrak{R}(\mathfrak{z})=(a, 0)=a$, а имагинарни је $\mathfrak{Im}(\mathfrak{z})=(0, b)$. Комплексни број $i=(0, 1)$ зове се *имагинарна јединица*, па је $i^2=-1$. С обзиром на ту релацију могу се довести у везу специјалне квадратне матрице другог реда:

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\qquad \mathbf{J}^2=\mathbf{J}\,\mathbf{J}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}=-\mathbf{I};$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\qquad \mathbf{K}^2=\mathbf{I}, \qquad (4.7)$$

па се комплексни број може написати у облику

$$\mathfrak{z}=a+b\,i\longleftrightarrow\mathbf{Z}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}=a\,\mathbf{I}+b\,\mathbf{J}. \qquad (4.8.a)$$

Комплексни број $\bar{\mathfrak{z}}=a-b\,i$ је *коњугован броју* $\mathfrak{z}=a+bi$, и обратно број $\mathfrak{z}$ је коњугован броју $\bar{\mathfrak{z}}$ па је $\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{z}$. С обзиром на предњу релацију биће

$$\bar{\mathfrak{z}}=a-bi\longleftrightarrow a\,\mathbf{I}-b\,\mathbf{J}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\mathbf{Z}'=\bar{\mathbf{Z}} \qquad (4.8.b)$$

где је $\bar{\mathbf{Z}}$ коњугована матрица.

Сваком реалном броју одговара *једна* и *само једна тачка* на оси реалних бројева и обратно (*Cantor*-ов *аксиом*). Тачки $M(a, b)$ у комплексној равни (*Gauss*-овој равни или $\mathfrak{z}$—равни) одговара комплексни број $\mathfrak{z}=a+bi$. Ова тачка $M(a, b)$ је *слика* комплексног броја $\mathfrak{z}$, а комплексни број $\mathfrak{z}=(a, b)$ је *афикс* тачке $M(a, b)$. Овим се успоставља биунивока кореспонденција између скупа комплексних бројева (C) и скупа тачака M комплексне равни. Вектор $\overrightarrow{OM}$ са координатама a, b одређује положај тачке $M(a, b)$ а тиме и комплексни број $\mathfrak{z}=a+bi$. Овај вектор се зове *верзор*. Модул овог вектора је модул комплексног броја, $\operatorname{mod}\mathfrak{z}=|\mathfrak{z}|=|\overrightarrow{OM}|=|\vec{r}|=r$. Тачки M одговарају поларне координате r и φ. Прва је модул комплексног броја, а друга *аргумент* (амплитуда, аркус), $\varphi=\arg\mathfrak{z}$. С обзиром на формуле трансформација координата може се комплексни број приказати у тригонометријском облику

$$\mathfrak{z}=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\operatorname{cis}\varphi=re^{i\varphi}=rE(\varphi), \tag{4.9. a}$$

где је $E(\varphi)$ *комплексна јединица*. Она се може довести у везу са матрицом ротације (обртања)

$$E(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}\longleftrightarrow\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=$$

$$=\mathbf{I}\cos\varphi+\mathbf{J}\sin\varphi. \tag{4.9. b}$$

Сада се комплексни број $\mathfrak{z}$ и њему коњуговани број $\bar{\mathfrak{z}}$ могу написати у облицима:

$$\mathfrak{z}=re^{i\varphi}\longleftrightarrow r\mathbf{R};\quad \bar{\mathfrak{z}}=re^{-i\varphi}\longleftrightarrow\mathbf{K}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{K}. \tag{4.9. c}$$

На пример:

$$2+3i\longleftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix};\quad 2-3i\longleftrightarrow\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}\longleftrightarrow 4i;$$

$$5\longleftrightarrow\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}=5\,\mathbf{I};\quad (2+3i)+(4+i)=(6+4i)\longleftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -4 & 6\end{pmatrix};\quad (1+3i)\,(1-3i)=4\longleftrightarrow 4\,\mathbf{I};$$

$$(2+3i)\,(4+i)=5+14i\longleftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 14\\ -14 & 5\end{pmatrix};$$

$$(3+4i)\,(3-4i)=25\longleftrightarrow\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}=25\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}=25\,\mathbf{J};$$

$$2-3i\longleftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{z}=4+3i;\quad |\mathfrak{z}|=\sqrt{16+9}=5\longleftrightarrow\mathfrak{M}(\mathbf{Z})=\sqrt{a^2+b^2}=5.$$

Кватернион[*] је збир ска́лара и вектора $\mathfrak{Q}=a_0+\vec{a}=a_0+a_1\vec{\mathrm{i}}+a_2\vec{\mathrm{j}}+a_3\vec{\mathrm{k}}$, па је одређен са *четири броја* (a_0, a_1, a_2, a_3). Између њега и специјалне квадратне матрице четвртог реда са истим елементима (Q) постоји биунивока кореспонденција, која је *изоморфизам* према операцијама сабирања и множења. Збир и производ два кватерниона биће:

$$\mathfrak{Q}_1=a_0+\vec{a};\quad \mathfrak{Q}_2=b_0+\vec{b};\quad \mathfrak{Q}_1+\mathfrak{Q}_2=(a_0+b_0)+(\vec{a}+\vec{b})\longleftrightarrow \mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_2; \tag{4.10.a}$$

$$\mathfrak{Q}_1\,\mathfrak{Q}_2=a_0\,b_0-(\vec{a},\,\vec{b})+a_0\,\vec{b}+b_0\,\vec{a}+[\vec{a},\,\vec{b}]\longleftrightarrow \mathrm{Q}_1\,\mathrm{Q}_2, \tag{4.10.b}$$

са матрицама:

$$\mathrm{Q}_1=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{Q}_2=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}. \tag{4.10.c}$$

Слично комплексном броју (4.8.*a*) може се кватернион написати помоћу матрица у облику

$$\mathfrak{Q}=a_0+\vec{a}\longleftrightarrow \mathrm{Q}=a_0\,\mathrm{I}_4+a_1\,\mathrm{K}_1+a_2\,\mathrm{K}_2+a_3\,\mathrm{K}_3, \tag{4.11.a}$$

где су кватернионске матрице

$$\mathrm{K}_1=\begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{J} \end{pmatrix};\quad \mathrm{K}_2=\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix};\quad \mathrm{K}_3=\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{J} \\ \mathbf{J} & \mathbf{O} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{I}_4=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix};\qquad \begin{gathered} \mathrm{K}_1^2=\mathrm{K}_2^2=\mathrm{K}_3^2=-\mathrm{I}_4; \\ \mathrm{K}_1\,\mathrm{K}_2=\mathrm{K}_3;\quad \mathrm{K}_2\,\mathrm{K}_3=\mathrm{K}_1;\quad \mathrm{K}_3\,\mathrm{K}_1=\mathrm{K}_2. \end{gathered} \tag{4.11.b}$$

Овде је **J** матрица (4.7) док су **O** и **I** нулта и јединична матрица другог реда.

---

[*] Статика, Додатак, чл. 18., страна 385.

На пример, збир и производ кватерниона $\mathfrak{Q}_1=2+(\vec{i}+3\,\vec{j}-\vec{k})$, $\mathfrak{Q}_2=3+(2\,\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$ биће:

$$\mathfrak{Q}_1+\mathfrak{Q}_2=5+(3\,\vec{i}+2\,\vec{j})\longleftrightarrow Q_1+Q_2;$$

$$\mathfrak{Q}_1\ \mathfrak{Q}_2=6-(2-3-1)+2\,(2\,\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+3\,(\vec{i}+3\,\vec{j}-\vec{k})+[\vec{i}+3\,\vec{j}-\vec{k},\quad 2\,\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}]=$$

$$=8+(9\,\vec{i}+4\,\vec{j}-8\,\vec{k})\longleftrightarrow Q_1\,Q_2;$$

$$Q_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix};\qquad Q_2=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\mathfrak{Q}_1+\mathfrak{Q}_2=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix};\qquad Q_1\ Q_2=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 4 & -8 \\ -9 & 8 & 8 & 4 \\ -4 & -8 & 8 & -9 \\ 8 & -4 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

4.2. Појам вектора. — Реалном броју (x) одговара на бројној $+\,Ox$-оси тачка X односно вектор $\overrightarrow{OX}=\vec{a}$. Уређеном пару бројева $(x=x_1,\ y=x_2)$ одговара у равни $Oxy\,(Ox_1\,x_2)$ тачка M односно њен вектор положаја $\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\vec{b}$. Први вектор је *једнодимензионалан,* други је *дводимензионалан вектор* или *вектор другог реда.* Два различита вектора другог реда $\vec{a}\,(x_{11},\,x_{12})$ и $\vec{b}\,(x_{21},\,x_{22})$ према *„правилу о паралелограму сила“* (вектора) дају трећи вектор који је *збир* ова два вектора:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(x_{11}+x_{21},\quad x_{12}+x_{22})=(x_{11}\ x_{21})+(x_{12}\ x_{22}). \tag{4.12}$$

Дакле, ако се вектор $\vec{a}$ сматра као матрица врста, типа (1. 2), онда се и резултујући вектор *—резултанта—* добија као матрица врста, типа (1. 2). Када се вектор $\vec{a}$ помножи скаларом λ добиће се вектор $\vec{b}$ коме је интензитет повећан λ-пута, па је

$$\vec{b}=\lambda\,\vec{a};\qquad b_i=\lambda\,a_i;\qquad (b_1,\,\ldots,\,b_n)=(\lambda\,a_1,\,\ldots,\,\lambda\,a_n). \tag{4.13}$$

Уопште, *уређени скуп од n бројева узетих из неког поља бројева зове се вектор n-ог реда на томе пољу.* Тако уређени поједини бројеви називају се *елементи* или *координате вектора.* Ако је вектор на пољу реалних бројева он је *реалан*; а ако је на пољу комплексних бројева он је *комплексан.* Ако су му координате стални бројеви и вектор је *сталан*; у противном је *променљив*. Уређени скуп бројева који представља вектор може да се напише *слева надесно у врсту*, па је *вектор врста*, или *одозго наниже у колону (стубац)*, па је *вектор колона*. Ови се вектори представљају овако:

$$\mathbf{a}=(a)=(a_1, a_2, \ldots, a_n); \quad \{b\}=\left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{matrix}\right\}; \quad (b)=\mathbf{b}^1=(b_1, \ldots, b_n). \tag{4.14}$$

Ова два вектора *нису једнака* иако могу да имају исте координате и да буду истог реда. О овоме се мора водити рачуна. Ако су истог реда и истих координата може се један схватити ка транспонирани други вектор.

Вектор n-ог реда обично се обележава *масним словом* или како је назначено у (4.14), а координате вектора обележавају се са једним или са два индекса.

4.3. Рачунске операције векторима.

— Вектор је уређен скуп бројева па се могу вршити рачунске операције.

4.3.1. Једнакост вектора. — Два су вектора *једнака* ако су истог облика, истог реда и истих елемената (координата):

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}; \quad (a)=(b); \quad \{a\}=\{b\}; \quad a_i=b_i. \tag{4.15}$$

Векторској једнакости одговара n скаларних једнакости, $a_1=b_1$; $a_2=b_2$; . . . ; $a_i=b_i$; . . . ; $a_n=b_n$, где је n ред вектора.

4.3.2. Сабирање вектора. — Збир два вектора истог облика и реда је трећи вектор истог облика и реда чије су координате једнаке збиру координата вектора сабирака:

$$(a)+(b)=(c); \quad \{a\}+\{b\}=\{c\}; \quad c_i=a_i+b_i. \tag{4.16}$$

На исти се начин дефинише и збир више вектора исте врсте и истог реда:

$$(r)=\sum (a)=(a_1)+(a_2)+\cdots+(a_n); \quad r_i=\sum_j a_{ij}. \tag{4.17}$$

Сабирање вектора је комутативно и асоцијативно, те важе релације:

$$(a)+(b)=(b)+(a); \quad (a)+((b)+(c))=((a)+(b))+(c). \tag{4.18}$$

4.3.3. Одузимање вектора. — Вектор (x) који треба додати вектору (a) да би се добио вектор (b) истог облика и реда зове се *разлика вектора* (b) и (a), те је:

$$(b)=(a)+(x); \quad (x)=(b)-(a); \quad \{x\}=\{b\}-\{a\}. \tag{4.19}$$

Ако су оба вектора једнака $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, онда је разлика $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, па је

$$(b)=(a)+(x)=(a)=(b); \quad (x)=(\mathbf{0})=0; \quad \{x\}=\{0\}. \tag{4.20}$$

Овај се вектор зове *нула вектор* или само *нула*. Он је у скупу од n вектора *неутрални елемент у погледу операције сабирања,* јер као сабирак не утиче на резултат.

Вектори чији је збир нула вектор зову се *супротни вектори*. Њихове координате су супротни бројеви:

$$(a)+(b)=(0); \quad (b)=-(a); \quad \{b\}=-\{a\}; \quad b_i=-a_i. \tag{4.21}$$

4.3.4. Множење вектора бројем. — Када се вектор **a** помножи бројем (скаларом) $\lambda \neq 0$ добија се вектор **b** чије су координате за $\lambda > 1$ *увећане* λ пута, а за $\lambda < 1$ *умањене* λ пута. Он је вектор *колинеаран* са првим вектором

$$\mathbf{b}=\lambda\,\mathbf{a}; \quad (b)=\lambda\,(a) \quad \{b\}=\lambda\,\{a\}; \quad b_i=\lambda\,a_i. \tag{4.22}$$

За ово множење важе сва три закона: комутативни, асоцијативни и дистрибутивни, те су релације:

$$\begin{aligned} &\lambda\,(a)=(a)\,\lambda; \quad \lambda\mu\,(a)=\lambda\,(\mu\,a)=\mu\,(\lambda\,a); \\ &(\lambda+\mu)\,(a)=\lambda\,(a)+\mu\,(a); \quad \lambda\,((a)+(b))=\lambda\,(a)+\lambda\,(b). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Кад се вектор помножи нулом добија се *нула вектор;* множење јединицом *не мења* сам вектор, а множењем са -1 добија се *супротни вектор:*

$$0\cdot(a)=(0); \quad 1\cdot(a)=(a); \quad -1\cdot(a)=(-a). \tag{4.24}$$

На пример:

$$(1,\,2,\,3)+(2,\,-1,\,4)=(3,\,1,\,7); \quad (6,\,4,\,2)-(1,\,2,1)=(5,\,2,\,1);$$

$$4\left\{\begin{matrix}1\\2\\-1\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}4\\8\\-4\end{matrix}\right\}; \quad 4\left\{\begin{matrix}2\\3\\-1\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}6\\12\\-2\end{matrix}\right\};$$

$$2\,(2,\,2,\,-3)+(-4,\,-4,\,6)=(0,\,0,\,0).$$

4.4. Линеарна зависност вектора. — Кака се вектор $(a)=\mathbf{a}=(a_x,\,a_y,\,a_z)$ помножи скаларом $\lambda \neq 0$ добиће се вектор $\mathbf{b}=\lambda\,\mathbf{a}$ који је колинеаран са првим јер су се само промениле координате вектора, пошто су се увећале λ пута. Оба, дакле, леже на истом носачу вектора (слика 4.2.*a*). Као што је познато из векторске алгебре колинеарност вектора може се у овом простору приказати векторским производом

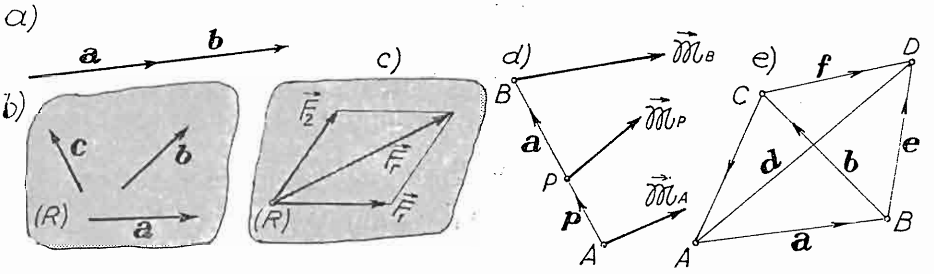
$$[\vec{b}, \vec{a}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}] = \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0; \quad \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda, \qquad (4.25)$$

што показује да је однос одговарајућих координата сталан број λ. Према томе се овај услов колинеарности вектора може написати и у овом облику

$$\mathbf{b} = \lambda\,\mathbf{a}; \quad \lambda\,\mathbf{a} - \mathbf{b} = \lambda_1\,\mathbf{a} + \lambda_2\,\mathbf{b} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda; \quad \lambda_2 = -1. \qquad (4.26)$$

Из њега видимо да оба коефицијента λ_1 и λ_2 *нису једновремено* једнака нули.

На пример, вектори (3, 2, 6) и (6, 4, 12) су линеарни зависни, јер је $\mathbf{b} = 2\,\mathbf{a}$



Слика 4.2. — Линеарно зависни вектори

У тродимензионом простору три вектора која леже у једној равни *компланарна су*, па је услов компланарности

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = 0; \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_1\,\mathbf{a} + \lambda_2\,\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} = 0; \quad \mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}. \qquad (4.27)$$

Овај услов је задовољен ако сва три коефицијента λ_i нису једновремено једнаки нули, а тада се може трећи вектор изразити помоћу прва два линеарном комбинацијом, па су ова три вектора *линеарно зависна* (слика 4.2. *b*).

Резултанта $\vec{F}_r$ двеју сила $\vec{F}_1$ (3; 2; 6) и $\vec{F}_2$ (5; 10; 10) је трећи вектор (8; 12; 16) који је компланаран са компонентама (слика 4.2. *c*) па је

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \qquad (\vec{F}_r, [\vec{F}_1, \vec{F}_2]) = \begin{vmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_1\,\vec{F}_1 + \lambda_2\,\vec{F}_2 + \lambda_3\,\vec{F}_r = 0.$$

Главни моменти просторног система сила за три колинеарне тачке A, B, P су линеарно зависни (слика 4.2.d), јер следи:

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A;\quad \overrightarrow{\mathfrak{M}}_B=\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A-[\vec{a},\ \vec{F}_r];\quad \overrightarrow{\mathfrak{M}}_P=\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A-[\vec{p},\ \vec{F}_r]=\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A+\lambda\,(\overrightarrow{\mathfrak{M}}_B-\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A)=$$

$$=\alpha\,\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A+\beta\,\overrightarrow{\mathfrak{M}}_B;\quad p=\lambda\,\vec{a};\quad \alpha=1-\lambda;\quad \beta=\lambda.$$

Појам линеарне зависности вектора може се проширити и на скуп вектора. Нека тај скуп има m вектора (a_k), $k=1, 2, \ldots, m$, у скупу вектора n-ог реда, где је $m\leqslant n$, тада су:

1° *вектори* (a_k) *линеарно зависни према пољу бројева ако постоји* m *бројева* λ_k *таквих да сви једновремено нису једнаки нули али је линеарна комбинација тих вектора једнака нули вектору*

$$\lambda_1\,\mathbf{a}_1+\lambda_2\,\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_m\,\mathbf{a}_m=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\,\mathbf{a}_k=\mathbf{o};\tag{4.28}$$

2° *вектори* (a_k) *су линеарно независни према пољу бројева ако је предња релација задовољена само у случају да су сви коефицијенти* λ_k *једновремено једнаки нули*

$$\lambda_1\,\mathbf{a}_1+\lambda_2\,\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_m\,\mathbf{a}_m=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\,\mathbf{a}_k\equiv\mathbf{o};\quad \lambda_k\equiv 0.\tag{4.29}$$

На пример:

$\mathbf{a}_1=(4,\ 2,\ 3);\ \lambda_1=\ 2:\quad \mathbf{a}_1=(3,\ 1,\ -4);\ \lambda_1=-2;$

$\mathbf{a}_2=(2,\ 0,\ 2);\ \lambda_2=-3;\quad \mathbf{a}_2=(2,\ 2,\ -3);\ \lambda_2=\ 3;$

$\mathbf{a}_3=(1,\ 2,\ 0);\ \lambda_3=-2;\quad \mathbf{a}_3=(0,\ -4,\ 1);\ \lambda_3=\ 1;$

$\mathbf{a}_1=(4,\ 1,\ 2,\ 0);\quad \mathbf{a}_2=(4,\ -3,\ 2,\ 4);$

$\mathbf{a}_3=(2,\ 1,\ 0,\ -1);\quad \mathbf{a}_4=(2,\ 2,\ 0,\ -2);$

$\lambda_i=1;\ -1;\ 4;\ -4.$

Да би се одредили коефицијенти λ_k из образаца (4.28) и (4.29) претпоставимо да је $r=m=n=3$, онда се, с обзиром на (4.14) да ли су вектори $\mathbf{a}_k$ врсте или колоне, изрази могу написати у облицима

$$\lambda_1\,(a_1)+\lambda_2\,(a_2)+\lambda_3\,(a_3)=0;\quad \lambda_1\,\{a_1\}+\lambda_2\,\{a_2\}+\lambda_3\,\{a_3\}=0,$$

односно у матричним облицима

$$(\mathrm{A}\,(a))\,\{\lambda\}=\begin{bmatrix}(a_1)\\(a_2)\\(a_3)\end{bmatrix}\{\lambda\}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix};\tag{4.30.a}$$

$$(\lambda)\,(\mathbf{A}'\{a\})=(\lambda)\,(\{a_1\}\,\{a_2\}\,\{a_3\})=(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}=(0,0,0). \quad (4.30.b)$$

Овим се систем своди на *систем хомогених линеарних једначина* са констангним коефицијентима. Према **чл. 1.5.4.** овај систем има или идентичка решења $\lambda_k=0$ или решења која нису потпуно одређена него су одређени њихови односи. У првом случају је детерминанта система $|\mathbf{A}|\neq 0$ па су вектори $\mathbf{a}_k$ вектори врсте или вектори колоне међусобно *независни*. У другом случају линеарна зависност вектора зависи од *ранга детерминанте*. Ако је ранг $r=2$, то јест ако је бар нека субдетерминанта другог реда различита од нуле, онда су *два* вектора линеарно независна а трећи је линеарно зависан. За случај да је матрица $\mathbf{A}$ изражена помоћу вектора врста (a) развијмо детерминанту по елементима колона, у другом случају детерминанту $|\mathbf{A}'|$ по елементима врста, онда, с обзиром на образац (1.13), добијамо:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\,K_{11}+a_{21}\,K_{21}+a_{31}\,K_{31}=0; &\quad& a_{11}\,K_{11}+a_{21}\,K_{12}+a_{31}\,K_{13}=0;\\
&a_{12}\,K_{11}+a_{22}\,K_{21}+a_{32}\,K_{31}=0; && a_{12}\,K_{11}+a_{22}\,K_{12}+a_{32}\,K_{13}=0;\\
&a_{13}\,K_{11}+a_{23}\,K_{21}+a_{33}\,K_{31}=0; && a_{13}\,K_{11}+a_{23}\,K_{12}+a_{33}\,K_{13}=0;
\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}
&a_{11}=\lambda_1\,a_{21}+\lambda_2\,a_{31}; &\quad& a_{11}=\lambda_1\,a_{21}+\lambda_2\,a_{31};\\
&a_{12}=\lambda_1\,a_{22}+\lambda_2\,a_{32}; && a_{12}=\lambda_1\,a_{22}+\lambda_2\,a_{32};\\
&a_{13}=\lambda_1\,a_{23}+\lambda_2\,a_{33}; && a_{13}=\lambda_1\,a_{23}+\lambda_2\,a_{33};\\
&\lambda_1=-K_{21}/K_{11};\quad K_{11}\neq 0; && \lambda_1=-K_{12}/K_{11};\quad K_{11}\neq 0;\\
&\lambda_2=-K_{31}/K_{11}; && \lambda_2=-K_{13}/K_{11};
\end{aligned}$$

или су: $\lambda_1/K_{11}=\lambda_2/K_{21}=\lambda_3/K_{31}$; $\quad \lambda_1/K_{11}=\lambda_2/K_{12}=\lambda_3/K_{13}$.

Коефицијенти λ_k нису једновремено једнаки нули, па су заиста елементи прве прсте (или прве колоне) линеарне комбинације елемената осталих двеју врста (односно колона). Дакле, *ранг детерминанте матрице* **A** *одређује број међусобно независних вектора врста или колона матрице. Ако су вектори* **a** *матрице представљени врстама* (a) *онда коефицијенти* λ_k *стоје у односу као кофактори елемената неке колоне,* и обратно, *ако су вектори представљени као вектори колоне* $\{a\}$ *онда коефицијенти стоје у односу као кофактори елемената неке врсте.* Треба бирати онај кофактор који је различит од нуле.

На пример:

$$\mathbf{A}=((\mathrm{a}))=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\quad |\mathbf{A}|=-5\neq 0;\quad \mathbf{r}=3;$$

сви су вектори линеарно независни;

$$\mathbf{A}=((\mathrm{a}))=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}|=0; \quad M^{1,\,2}_{1,\,2}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0; \quad \text{ранг} \quad r=2;$$

два вектора су линеарно независна, трећи је са њима линеарно зависан:

$$\frac{\lambda_1}{K_{11}}=\frac{\lambda_2}{K_{21}}=\frac{\lambda_3}{K_{31}}; \ \frac{\lambda_1}{4}=\frac{\lambda_2}{-8}=\frac{\lambda_3}{4}; \ \frac{\lambda_1}{1}=\frac{\lambda_2}{-2}=\frac{\lambda_3}{1}; \quad (1,2,9)-2\,(2,0,2)+(3,-2,-5)=0$$

$$\mathbf{A}'=(\{a\})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 9 & 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}'|=0; \quad r=2; \ \frac{\lambda_1}{K_{11}}=\frac{\lambda_2}{K_{12}}=\frac{\lambda_3}{K_{13}}; \ \frac{\lambda_1}{1}=\frac{\lambda_2}{-2}=\frac{\lambda_3}{1};$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Исти поступак се примењује и код *правоугаоне матрице* (**чл. 3 10**). Ако је она ранга r онда постоји r линеарно независних вектора док су осталих $m-r$ вектора линеарно зависни. Коефицијенти λ_k се одређују као кофактори елемената колоне (или врсте) детерминанте оне сингуларне квадратне субматрице реда $r+1$ али истог ранга r. Односа ових коефицијената према кофакторима мора имати онолико колики је нулитет (дегенерација) матрице А, што значи да треба толико узети и субматрица реда $r+1$. У њима се морају увек појавити они вектори који су узети као линеарно независни као и онај који је линеарно зависан.

На пример:

$$\mathbf{A}=(\{a\})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}|=0; \quad r=1; \quad d=n-r=2;$$

$$\mathbf{S}^{1,\,2}_{2,\,2}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \left|\mathrm{S}^{1,\,2}_{1,\,2}\right|=0; \ \frac{\lambda_1}{-1}=\frac{\lambda_2}{2}; \quad -\{a_1\}+2\{a_2\}=\{0\};$$

$$\mathbf{S}^{1,\,3}_{1,\,2}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad \frac{\lambda_1}{1}=\frac{\lambda_3}{2}; \quad \{a_1\}+2\{a_3\}=\{0\};$$

$$\mathbf{A}=((a))=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{pmatrix}; \quad r=2; \quad d=m-r=3-2=1;$$

$$\mathbf{S}^{1,\,2,\,3}_{1,\,2,\,3}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}; \quad r=2; \quad \frac{\lambda_1}{K_{11}}=\frac{\lambda_2}{K_{21}}=\frac{\lambda_3}{K_{31}};$$

$$\frac{\lambda_1}{2}=\frac{\lambda_2}{-1}=\frac{\lambda_3}{1}; \quad 2\,(a_1)-(a_2)+(a_3)=(0);$$

$$\mathrm{A}=\big((a)\big)=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad r=2; \quad \mathrm{S}_3=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad |\,\mathrm{S}_3\,|=0; \quad r=2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0; \quad \frac{\lambda_1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{\lambda_2}{-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{\lambda_3}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}};$$

$$\frac{\lambda_1}{1}=\frac{\lambda_2}{1}=\frac{\lambda_3}{-1}; \quad (a_1)+(a_2)-(a_3)=(0);$$

$$\mathrm{A}=\big((a)\big)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & -3 \end{bmatrix}; \quad r=2; \quad d=2; \quad \textit{независни} \quad (a_1) \text{ и } (a_2);$$

$$\mathrm{S}^{1,\,2,\,3}_{1,\,2,\,3}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad r=2; \quad \frac{\lambda_1}{-14}=\frac{\lambda_2}{-7}=\frac{\lambda_3}{7};$$

$$\frac{\lambda_1}{2}=\frac{\lambda_2}{1}=\frac{\lambda_3}{-1}; \quad 2\,(a_1)+(a_2)-(a_3)=(0);$$

$$\mathrm{S}^{1,\,2,\,3}_{1,\,2,\,4}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -3 \end{bmatrix}; \quad r=2; \quad \frac{\lambda_1}{-35}=\frac{\lambda_2}{14}=\frac{\lambda_4}{7};$$

$$\frac{\lambda_1}{5}=\frac{\lambda_2}{-2}=\frac{\lambda_4}{-1}; \quad 5\,(a_1)-2\,(a_2)-(a_4)=(0).$$

4.5. Векторски простор. — Скуп свих вектора одређеног реда (n) на неком пољу бројева који је *затворен* у оквиру сабирања и множења бројем (скаларом) зове се *линеарни систем вектора* или *линеарни простор,* односно *векторски простор.* Затвореност у погледу наведених математичких операција значи:

1° да је збир свака два вектора трећи вектор који припада скупу, $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$;

2° да производ сваког вектора скупа и неког скалара (броја) одређује вектор који такође припада скупу, $\lambda\,\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

Ако су (a_k), $k=1, 2, \ldots, m$, m вектора истог облика (или колоне или врсте) и истог реда (n) тада скуп свих могућих *линеарних комбинација* ових вектора

$$\mathbf{v}=\lambda_1\,\mathbf{a}_1+\lambda_2\,\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_m\,\mathbf{a}_m=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\,(a_k)\in V, \tag{4.31}$$

када се коефицијенти λ_k мењају на пољу бројева, одређују *векторски простор* (V). Вектор $\mathbf{v}$ је *елемент* тог простора, $\mathbf{v} \in V$, који вектори (a_k) *„одређују“* или *„растежу“*.

Један исти векторски простор (V) може да се одреди помоћу различитих скупова вектора (a_k) у истом или неком другом броју (m). Сви ти скупови вектора који одређују један те исти векторски простор (V) јесу *линеарно еквивалентни.*

Између тих линеарно еквивалентних скупова истог простора (V) уочимо скуп (U) вектора (u_s), $s=1, 2, \ldots, r$, који имају особине: 1) *да су линеарно независни вектори,* и 2) *да је сваки вектор* $\mathbf{x}$ *простора* (V) *линеарна комбинација вектора из скупа* (U), онда се скуп (U) назива *основа—база* [*координатни систем (репер)* или *систем референције*] *простора* V. Вектори (u_s) јесу *основни (базични) вектори,* па се сваки вектор $\mathbf{x}$ простора V може да изрази као линеарна комбинација основних вектора:

$$\mathbf{x}=\alpha_1 \mathbf{u}_1+\alpha_2 \mathbf{u}_2+\cdots+\alpha_r \mathbf{u}_r=\sum_{s=1}^{r} \alpha_s \mathbf{u}_s; \quad \mathbf{x}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r). \quad (4.32.a)$$

Основни вектори $\mathbf{u}$ могу се изразити као врсте или колоне, па се предњи израз може написати у матричном облику

$$(x)=(\alpha_s)\,\mathbf{U}; \quad \{x\}=\mathbf{U}'\{\alpha_s\}; \quad \mathbf{U}=((u_s)); \quad \mathbf{U}'=(\{u_s\}) \qquad (4.32.b)$$

где је матрица $\mathbf{U}$ матрица чије су врсте вектори (u_s) а матрица $\mathbf{U}'$ матрица чије су колоне вектори $\{u_s\}$. Овде су α_s *координате вектора* $\mathbf{x}$ у векторском простору (V) одређене према основи (u_s), $s=1, 2, \ldots r$, а изрази $\alpha_s(u_s)$ јесу *компоненте вектора* $\mathbf{x}$ према истој основи. Стога се овај поступак назива *разлагање вектора* $\mathbf{x}$ *на компоненте.* Из (4.32. b) следе координате вектора $\mathbf{x}$ у односу на основу вектора $\mathbf{u}_s$:

$$(\alpha_s)=(x)\mathbf{U}^{-1}; \quad \{\alpha_s\}=(\mathbf{U}')^{-1}\{x\}. \qquad (4.33.)$$

На пример, координате вектора $(x)=(1,\ 2,\ 1)$ у односу на основу вектора $(u_s)=(1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1),\ s=1,\ 2,\ 3$, према (4.33), биће:

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{U}|=|\mathbf{U}'|=-1; \quad r=3;$$

$$\mathbf{U}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{U}')^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=$$

$$=(1,\ 2,\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(0,\ -1,\ 2); \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Сваки векторски простор вектора (a_k) реда n, (V_n), образован на пољу бројева има неку основу (u_s) реда r при чему је $r \leqslant n$. *Пошто су вектори основе линеарно независни, може простор* (V_n) *да има више основа* (система референције), *али све оне морају имати исти број основних вектора. Према томе је број линеарно независних вектора једног векторског простора карактеристичан за тај простор, па се назива ранг* или *број димензија векторског простора* (V). *Он,* дакле, *представља највећи број линеарно независних вектора тог простора, па због тога не може бити већи од реда самих вектора који образују тај простор* $(r \leqslant n)$.

Када у векторском простору постоји само један вектор различит од нуле $\mathbf{a} \neq 0$, тада сви вектори $\mathbf{b}$ тога простора који су *линеарно зависни* од $\mathbf{a}$ јесу вектори $\mathbf{b} = \lambda\,\mathbf{a}$ колинеарни са њим. Они чине векторски потпростор (B), а вектор $\mathbf{a}$ је *основа. Простор је,* дакле, *једнодимензиони, а вектор* $\mathbf{a}$ *је његов основни вектор.*

У дводимензионом (двомерном) простору два су вектора линеарно зависна ако постоји однос $\lambda_1\,\mathbf{a} + \lambda_2\,\mathbf{b} = 0$; $\lambda_i \equiv 0$. Ако су $\lambda_i \neq 0$ онда је $\mathbf{b} = \lambda\,\mathbf{a}$, $\lambda = -\lambda_1/\lambda_2$, па су вектори колинеарни, то јест линеарно зависни. Ако је $\lambda_1 = 0$ али је $\lambda_2 \neq 0$ онда је $\mathbf{b} = 0$, док је $\mathbf{a} \neq 0$. Дакле, *у дводимензионом простору постоје само два вектора која су линеарно независна* и *они образују основу*. Сваки трећи вектор тог простора је линеарно зависан са њима, $\mathbf{c} = \lambda_1\,\mathbf{a} + \lambda_2\,\mathbf{b}$.

У тродимензионом (тромерном) простору постоје само три линеарно независна вектора која нису компланарна, $\lambda_1\,\mathbf{a} + \lambda_2\,\mathbf{b} + \lambda_3\,\mathbf{c} = 0$; $\lambda_i \not\equiv 0$. Ако су $\lambda_i \neq 0$ онда је $\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$, где су $\alpha = -\lambda_1/\lambda_3$, $\beta = -\lambda_2/\lambda_3$, па су вектори компланарни, то јест линеарно зависни. Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ а $\lambda_3 \neq 0$ онда је $\mathbf{c} = 0$. Када је $\lambda_1 = 0$ а $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, тада су вектори $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ колинеарни. Дакле, *постоје само три линеарно независна вектора који образују основу простора.* Сваки четврти вектор тог простора је са њима компланаран, $\mathbf{d} = \lambda_1\,\mathbf{a} + \lambda_2\,\mathbf{b} + \lambda_3\,\mathbf{c}$.

Код n-мерног простора (простора са n димензија) ранга r *постоји* r *линеарно независних вектора* који образују *основу простора*. Остали вектори овог простора су линеарно зависни са њима.

Када се из простора од n димензија (који има n линеарно независних вектора) издвоји њих r и образује нов простор V_r онда је овај простор *потпростор простора* V, па је $V_r \subset V$, при $r < n$. Може се образовати и више потпростора простора V. Нека је V_s такође потпростор од s димензија $(s < n)$, онда *унија (збир)* ових потпростора $V_r \cup V_s$ одређује збир вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, где је први вектор $\mathbf{a}$ ма који вектор потпростора V_r а $\mathbf{b}$ потпростора V_s. *Пресек* потпростора $V_r \cap V_s$ представља скуп вектора заједничких за оба потпростора. *Разлика* потпростора $V_r \setminus V_s$ је скуп вектора из V_r који нису једновремено и елементи потпростора V_s.

Просторни систем сила (векторски простор) своди се у свакој тачки простора на два вектора: *главни вектор* и *главни момент,* то јест на *торзер* (торзу). При томе главни вектор не зависи од избора редукционе тачке а главни момент зависи. Када се познају главни моменти за три неколинеарне тачке A, B, C (слика 4.2. e) онда су они линеарно независни вектори, па се помоћу њих може одредити и главни момент за сваку четврту тачку D (било у равни повученој кроз тачке A, B и C или у простору). Из слике и дефиниције главног вектора и главног момента следи:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{c}; \quad (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])=0; \quad \vec{F}_r=\sum\vec{F}_i; \quad \vec{\mathfrak{M}}=\sum\,[\vec{r}_i, \vec{F}_i];$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_A; \quad \vec{\mathfrak{M}}_B=\vec{\mathfrak{M}}_A-[\vec{a}, \vec{F}_r];$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_C=\vec{\mathfrak{M}}_A+[\vec{c}, \vec{F}_r]=\vec{\mathfrak{M}}_A+\alpha^*\,[\vec{a}, \vec{F}_r]+\beta\,[\vec{b}, \vec{F}_r]=\vec{\mathfrak{M}}_B-[\vec{b}, \vec{F}_r];$$

$$\lambda_1\,\vec{\mathfrak{M}}_A+\lambda_2\,\vec{\mathfrak{M}}_B+\lambda_3\,\vec{\mathfrak{M}}_C=0; \quad \lambda_1=1+\alpha; \quad \lambda_2=\beta-\alpha; \quad \lambda_3=-1-\beta;$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0; \quad \lambda_k\neq 0;$$

$$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c};$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_D=\vec{\mathfrak{M}}_A-[\vec{d}, \vec{F}_r]=\vec{\mathfrak{M}}_A-\alpha\,[\vec{a}, \vec{F}_r]-\beta\,[\vec{b}, \vec{F}_r]-\gamma\,[\vec{c}, \vec{F}_r]=\vec{\mathfrak{M}}_A+\alpha\,(\vec{\mathfrak{M}}_B-\vec{\mathfrak{M}}_A)+$$
$$+\beta\,(\vec{\mathfrak{M}}_C-\vec{\mathfrak{M}}_B)-\gamma\,(\vec{\mathfrak{M}}_C-\vec{\mathfrak{M}}_A)=\lambda_1\,\vec{\mathfrak{M}}_A+\lambda_2\,\vec{\mathfrak{M}}_B+\lambda_3\,\vec{\mathfrak{M}}_C;$$

$$\lambda_1=1-\alpha+\gamma; \quad \lambda_2=\alpha-\beta; \quad \lambda_3=\beta-\gamma; \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1; \quad \lambda_k\neq 0.$$

Из овога следи да је потребан и довољан услов за *равнотежу* просторног система сила да су *главни моменти за три неколинеарне тачке једнаки нули (Ritter-ова метода)*. И овим трима векторским условима одговара само шест независних скаларних услова за равнотежу, пошто између момената за две тачке постоје три релације о пројекцијама момената на спојну праву редукционих тачака

$$(\vec{\mathfrak{M}}_A, \vec{a})=(\vec{\mathfrak{M}}_B, \vec{a}); \quad (\vec{\mathfrak{M}}_B, \vec{b})=(\vec{\mathfrak{M}}_C, \vec{b}); \quad (\vec{\mathfrak{M}}_C, \vec{c})=(\vec{\mathfrak{M}}_A, \vec{c}).$$

4.6. Скаларни производ два вектора. — У тродимензионом простору под скаларним производом подразумева се скалар

$$(\vec{a}, \vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z=|a|\cdot|b|\cdot\cos\varphi \tag{4.34}$$

једнак збиру производа хомологих координата вектора, односно производу интензитета (модула) вектора и косинуса захваћеног угла између њих. Овај се појам проширује и на векторе истог реда са поља бројева, па је број (скалар) једнак збиру производа хомологих координата оба вектора

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=a_1\,b_1+a_2\,b_2+\cdots+a_n\,b_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\,b_k. \tag{4.35}$$

Свака матрица типа (m, n) састављена је из m врста и n колона, то јесте из m вектора врста или n вектора колона. Вектор врста је матрица типа $(1, n)$, а вектор колона типа $(m, 1)$. Производ матрице $\mathbf{A}$

типа (m, p) и матрице **B** типа (p, n) јесте матрица **C** типа (m, n). При томе се сваки елемент матрице c_{ik} добија као збир производа елемената једне врсте (i) леве матрице и једне колоне (k) десне матрице, то јест добија се као производ матрице врсте и матрице колоне. Овакав производ ова два вектора зове се *скаларни производ*

$$\mathbf{AB}=((a))\,(\{b\})=\mathbf{C};\quad (a)\,\{b\}=(a_1\,a_2\ldots a_n)\left\{\begin{matrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{matrix}\right\}=\sum_{k=1}^{n}a_k\,b_k. \tag{4.36}$$

За скаларни производ два вектора важе комутативни и дистрибутивни закон, а асоцијативни закон није ни дефинисан, те су:

$$(a)\,\{b\}=(b)\,\{a\};\quad (a)\,\{\{b\}+\{c\}\}=(a)\,\{b\}+(a)\,\{c\}. \tag{4.37}$$

На пример:

$$(1\quad 2\quad 3)\left\{\begin{matrix}4\\ 2\\ -1\end{matrix}\right\}=1\cdot4+2\cdot2+3\cdot-1=4+4-3=5;\quad (4\quad 2\quad -1)\left\{\begin{matrix}1\\ 2\\ 3\end{matrix}\right\}=4+4-3=5;$$

$$(1\quad 2\quad 3)\left(\left\{\begin{matrix}4\\ 2\\ -1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\\ 3\\ -2\end{matrix}\right\}\right)=5+(1+6-6)=6=(1\quad 2\quad 3)\left\{\begin{matrix}5\\ 5\\ -3\end{matrix}\right\}=6.$$

Скаларни производ два једнака вектора са поља реалних бројева, односно скаларни производ вектора самим собом, назива се *норма вектора;* позитивна вредност квадратног корена из норме јесте *интензитет (модул) вектора:*

$$(a)\,\{a\}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2;\quad |(a)|=|\{a\}|=|\mathbf{a}|=+\sqrt{(a)\ \{a\}}\,. \tag{4.38}$$

Два реална вектора **a** и **b**, реда n, образују у векторском простору међусобно угао φ који је одређен релацијом

$$(a)\,\{b\}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi;\quad \cos\varphi=\frac{(a)\,\{b\}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}. \tag{4.39}$$

Да вредност $\cos\varphi$ не може бити већа од јединице и у овом V_n простору доказаћемо на овај начин. Посматрајмо вектор $\lambda\,\mathbf{a}-\mathbf{b}$, онда је скаларни производ овог вектора самим собом норма тога вектора, која је увек позитивна, те је

$$(\lambda a-b)\,\{\lambda a-b\}=\lambda^2\,(a)\,\{a\}-2\lambda\cdot(a)\,\{b\}+(b)\,\{b\}>0.$$

Да би овај квадратни трином по λ био позитиван мора дискриминанта бити једнака нули или негативна, што значи да мора бити испуњен услов

$$((a)\,\{b\})^2\leqslant((a)\,\{a\})\cdot((b)\,\{b\});\quad |(a)\,\{b\}|^2\leqslant|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2;\quad |(a)\,\{b\}|\leqslant|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \tag{4.40}$$

који представља *Cauchy—Schwartz-ову неједначину.*

Два вектора су *ортогонална* кад им је скаларни производ једнак нули; тада је $\cos\varphi = 0$. Услов ортогоналности двају вектора у V_n простору је

$$(a)\{b\} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 0. \tag{4.41}$$

Векторски простор V_n у коме је дефинисан скаларни производ, а тиме и угао φ између два вектора, назива се *метрички простор* (M_n) или *Еуклидов простор* (E_n), јер се у тродимензионом простору (M_3) вектор представља као оријентисана дуж, па норма вектора представља квадрат те дужине, односно, модул вектора, његову дужину, или растојање почетне и завршне тачке вектора.

Када су вектори **a** и **b** на пољу комплексних бројева $(\alpha + i\beta)$, $(p + iq)$, онда се под скаларним производом ових вектора подразумева производ једног вектора и коњуговано-комплексног другог вектора. Стога овај производ има *две вредности:*

$$(a)\{\bar b\} = a_1 \bar b_1 + a_2 \bar b_2 + \cdots + a_n \bar b_n; \tag{4.42}$$

$$(\bar a)\{b\} = \bar a_1 b_1 + \bar a_2 b_2 + \cdots + \bar a_n b_n = \overline{(a)\{\bar b\}}.$$

Норма и интензитет комплексног вектора су

$$(a)\{\bar a\} = \sum_{k=1}^{n} a_k \bar a_k = \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{a}|^2; \quad |\mathbf{a}| = a = +\sqrt{(a)\{\bar a\}}. \tag{4.43}$$

Комплексни векторски простори у којима се може дефинисати скаларни производ два вектора према (4.42) назива се *унитарни простор*. Пошто је реални број специјалан случај комплексног броја то је и метрички простор специјалан случај унитарног простора.

На пример:

$(a) = (2,\ 3,\ 6);\quad (a)\{a\} = 4 + 9 + 36 = 49;\quad |(a)| = |\mathbf{a}| = a = 7;$

$$(a) = (2,\ 3,\ 6);\quad \{b\} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{matrix}\right\};\quad (a)\{b\} = 2 - 6 + 12 = 8;\quad |\mathbf{a}| = 7;\quad |\mathbf{b}| = 3;$$

$\cos\varphi = 8/7 \cdot 3 = 8/21 < 1;\quad |8| < 7 \cdot 3 = 21;$

$$(1,\ 4,\ 3,\ -2)\left\{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}\right\} = 1 - 4 + 9 - 6 = 0;\quad (1,\ 2,\ 2,\ 4)\left\{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{matrix}\right\} = 27;$$

$$\cos\varphi = \frac{27}{5 \cdot 6} = \frac{9}{10};\quad (a) = (1+i,\quad 3-i,\quad 3+2i);\quad \{b\} = \left\{\begin{matrix} 1+i \\ 2-2i \\ 5+i \end{matrix}\right\};$$

$$(a)\{\overline{a}\}=(1+i,\ 3-i,\ 3+2i)\begin{Bmatrix}1-i\\ 3+i\\ 3-2i\end{Bmatrix}=25;$$

$$(\overline{a})\{a\}=(1-i,\ 3+i,\ 3-2i)\begin{Bmatrix}1+i\\ 3-i\\ 3+2i\end{Bmatrix}=25;\quad |\mathbf{a}|=5;\quad |b|=6;$$

$$(a)\{\overline{b}\}=(1+i,\ 3-i,\ 3+2i)\begin{Bmatrix}1-i\\ 2+2i\\ 5-i\end{Bmatrix}=2+8+4i+17+7i=27+11i;$$

$$(\overline{a})\{b\}=(1-i,\ 3+i,\ 3-2i)\begin{Bmatrix}1+i\\ 2-2i\\ 5+i\end{Bmatrix}=2+8-4i+17-7i=27-11i=\overline{(a)\{\overline{b}\}}.$$

4.7. Јединични вектори. — Матрица **A** је састављена из вектора врста (a_i) или вектора колона $\{a_k\}$. Када је матрица $\mathbf{A}=\mathbf{I}$ јединична квадратна матрица реда n, тада су њени вектори врсте или вектори колоне *јединични вектори* (e) јер су им интензитети једнаки јединици. Према томе је

$$\mathbf{A}=((a_i))=(\{a_k\});\quad (a_i)=(a_{i1}\dots a_{in});\quad \{a_k\}=\begin{Bmatrix}a_{ik}\\ \vdots\\ a_{mk}\end{Bmatrix};$$

$$(e_k)=(0\ \ 0\dots1\dots0);\quad \{e_k\}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\end{Bmatrix};\quad (e_i)\ \{e_i\}=1. \tag{4.44}$$

Сви су ови вектори *линеарно независни*, јер, на пример, следи:

$$\lambda_1\{e_1\}+\lambda_2\{e_2\}+\cdots+\lambda_n\{e_n\}=\lambda_1\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{Bmatrix}+\lambda_2\begin{Bmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{Bmatrix}+$$

$$+\cdots+\lambda_n\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{Bmatrix};\quad \lambda_i=0. \tag{4.45}$$

Сваки вектор **a** чији је интензитет различит од нуле има свој јединични вектор који је одређен релацијом

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}. \tag{4.46}$$

Овим је вектор *нормиран.*

4.8. Ортонормирани систем вектора. — У метричком векторском простору са n димензија (n-мерном простору) увек се за *базу* (основу) узима скуп ортогоналних јединичних вектора који тада чине *ортонормирани скуп* вектора пошто су скаларни производи:

$$\begin{aligned}(e_1)&=(1\quad 0\ \dots\ 0);\\(e_2)&=(0\quad 1\ \dots\ 0);\\&\dots\dots\dots\dots\\(e_n)&=(0\quad 0\ \dots\ 1);\end{aligned}\qquad \{e_1\}=\left\{\begin{matrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{matrix}\right\};\quad \{e_2\}=\left\{\begin{matrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}\right\}\cdots;$$

$$(e_i)\,\{e_k\}=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & \text{за} \quad i=k,\\ 0 & \quad i\neq k,\end{cases} \tag{4.47}$$

где је δ_{ik} *Kronecker-ов симбол.* Ови јединични вектори чине, дакле, *ортонормирани систем основних вектора (правоугли n-тоедар* или *правоугли координатни систем векторског простора од n димензија).*

Помоћу овог ортонормираног скупа јединичних вектора може се изразити сваки вектор тога простора (M_n). Вектор $\mathbf{x}\,(x_1 \dots x_n)$ може се према (4.32.a) разложити на компоненте према тој основи (бази), те је

$$\mathbf{x}=x_1\,\mathbf{e}_1+x_2\,\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{e}_n=\sum_{k=1}^{n} x_k\,\mathbf{e}_k; \quad \mathbf{x}=(x)\,\mathbf{I}. \tag{4.48}$$

С обзиром на претходну релацију (4.47) скаларним множењем добијамо

$$(x)\,\{e_k\}=x_k. \tag{4.49}$$

Овај скаларни производ назива се *пројекција вектора* (x) на правац јединичног вектора $\{e_k\}$ или k-та *координата вектора* **x**.

Ако је дата и друга основа ортонормираних вектора $\{j_k\}$, онда се исти вектор **x** може изразити помоћу разлагања на компоненте према тој основи и могу се одредити његове координате (пројекције):

$$\mathbf{x}=\sum y_k\,\mathbf{j}_k; \quad (x)\,\{j_k\}=y_k. \tag{4.50}$$

Пошто је вектор **x** исти то се скаларним множењем јединичним векторима $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{j}_s$ добијају релације

$$x_r=(x)\,\{e_r\}=y_s\,(j_s)\,\{e_r\}; \quad y_s=x_r\,(e_r)\,\{j_s\} \tag{4.51}$$

које нам *представљају координате једног вектора у односу на једну основу изражене помоћу координата истог вектора према другој основи*. Скаларни производи јединичних вектора тих основа представљају косинусе углова између јединичних вектора обе основе. Ови обрасци (4.51), дакле, одређују *трансформацију координата* вектора x који је одређен према основи (e) у координате истог вектора према новој основи (j).

На пример, векторима $(a)=(1,\ 3,\ -1,\ 5)$ и $(b)=(1,\ 0,\ 2,\ 2)$ одговарају јединични вектори који нису ортогонални:

$$(a)\{a\}=1+9+1+25=36;\quad |\mathbf{a}|=6;\quad |\mathbf{b}|=3;$$

$$(e_1)=\frac{(a)}{|\mathbf{a}|}=\left(\frac{1}{6};\ \frac{3}{6};\ \frac{-1}{6};\ \frac{5}{6}\right);\quad (e_2)=\frac{(b)}{|\mathbf{b}|}=\left(\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right);$$

$$(e_1)\{e_2\}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

4.9. Процес ортогонализације вектора основе векторског простора. — Нека r вектора (u_s) чине основу (базу) једног векторског простора V. Ови су вектори линеарно независни. Често се тражи да се ова основа претвори у *ортонормирану основу* јединичних вектора. Овај *поступак* зове се *Gram—Schmidt-ова ортогонализација* и састоји се у следећем:

a) узети вектор $(v_1)=(u_1)$,

b) узети вектор $(v_2)=(u_2)-\lambda_{21}(v_1)$ управан на вектору (v_1); тада је

$$(v_2)\{v_1\}=(u_2)\{v_1\}-\lambda_{21}(v_1)\{v_1\}=0,$$

па је

$$\lambda_{21}=\frac{(u_2)\{v_1\}}{(v_1)\{v_1\}};\quad (v_2)=(u_2)-\frac{(u_2)\{v_1\}}{(v_1)\{v_1\}}(v_1);$$

c) узети вектор $(v_3)=(u_3)-\lambda_{31}(v_1)-\lambda_{32}(v_2)$ управан на векторима (v_1) и (v_2), тада је

$$(v_3)\{v_1\}=(u_3)\{v_1\}-\lambda_{31}(v_1)\{v_1\}=0;\quad \lambda_{31}=\frac{(u_3)\{v_1\}}{(v_1)\{v_1\}};$$

$$(v_3)\{v_2\}=(u_3)\{v_2\}-\lambda_{32}(v_2)\{v_2\}=0;\quad \lambda_{32}=\frac{(u_3)\{v_2\}}{(v_2)\{v_2\}};$$

па је

$$(v_3)=(u_3)-\frac{(u_3)\{v_1\}}{(v_1)\{v_1\}}(v_1)-\frac{(u_3)\{v_2\}}{(v_2)\{v_2\}}(v_2);$$

d) ако се поступак настави добиће се

$$(v_s)=(u_s)-\sum_{k=1}^{s-1}\frac{(u_s)\{v_k\}}{(v_k)\{v_k\}}(v_k);\quad s=1,\ 2,\ldots,\ r. \tag{4.52}$$

Јединични вектори

$$(e_1)=\frac{(\nu_1)}{|\mathbf{v}_1|}\,;\quad (e_2)=\frac{(\nu_2)}{|\mathbf{v}_2|}\,;\ldots;\quad (e_s)=\frac{(\nu_s)}{|\mathbf{v}_s|}\,;\ldots;\quad (e_r)=\frac{(\nu_r)}{|\mathbf{v}_r|}\,;\tag{4.53}$$

јесу *ортонормирани* и чине *нову ортонормирану основу тога простора.*

На пример, основни вектори основе $\mathbf{U}$ су $\mathfrak{u}_1=(1,\ 1,\ 1)$, $\mathfrak{u}_2=(1,\ -2,\ 1)$ и $\mathfrak{u}_3=$ $=(1,\ 2,\ 3)$ јер су линеарно независни па према (4.52) и (4.53) добијамо ортонормирану основу јединичних вектора:

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix};\quad |\,\mathbf{U}\,|=-6;\quad r=3;\quad (\nu_1)=(u_1)=(1,\ \ 1,\ \ 1);\quad (\nu_1)\{\nu_1\}=3;$$

$$(u_2)\{\nu_1\}=0;\quad (\nu_2)=(1,\ \ -2,\ \ 1)-\frac{0}{3}(1,\ \ 1,\ \ 1)=(1,\ \ -2,\ \ 1);\quad (\nu_2)\{\nu_2\}=6;$$

$$(u_3)\{\nu_1\}=6;\quad (u_3)\{\nu_2\}=0;$$

$$(\nu_3)=(1,\ \ 2,\ \ 3)-\frac{6}{3}(1,\ \ 1,\ \ 1)-\frac{0}{6}(1,\ \ -2,\ \ 1)=(-1,\ \ 0,\ \ 1);\quad (\nu_3)\{\nu_3\}=2;$$

$$(e_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right);\quad (e_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{-2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right);\quad (e_3)=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$(e_s)\{e_s\}=1;\quad (e_1)\{e_2\}=(e_1)\{e_3\}=(e_2)\{e_3\}=(0).$$

Исти поступак ортогонализације примењује се и за векторе на пољу комплексних бројева. Тада за скаларне производе важе обрасци (4.42) и (4.43), па су вектор и јединични вектор:

$$(\nu_s)=(u_s)-\sum_{k=1}^{s-1}\frac{(u_s)\{\overline{\nu_k}\}}{(\nu_k)\{\overline{\nu_k}\}}(\nu_k);\quad s=1,2,\ldots r;\quad (e_s)=\frac{(\nu_s)}{\sqrt{(\nu_s)\{\overline{\nu_s}\}}}.\tag{4.54}$$

На пример, основни вектори су $\mathfrak{u}_1=(1+i,\ \ i,\ \ 1)$; $\mathfrak{u}_2=(2,\ \ 1-2i,\ \ 2+i)$ и $\mathfrak{u}_3=$ $=(1\ -i,\ \ 0,\ \ -i)$, јер су линеарно независни па према (4,54) добијамо;

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1+i & i & 1\\ 2 & 1-2i & 2+i\\ 1-i & 0 & -i\end{pmatrix};\quad |\,\mathbf{U}\,|=-1+3i\neq 0;\quad r=3;$$

$$(\nu_1)=(u_1)=(1+i,\ \ i,\ \ 1);\quad (\nu_1)\{\overline{\nu_1}\}=(1+i,\ \ i,\ \ 1)\begin{Bmatrix}1-i\\ -i\\ 1\end{Bmatrix}=4;\quad (u_2)\{\overline{\nu_1}\}=2-2i;$$

$$(\nu_2)=(2,\ \ 1-2i,\ \ 2+i)-\frac{2-2\,i}{4}(1+i,\ \ i,\ \ 1)=$$

$$=\left(1,\ \ \frac{1-5\,i}{2},\ \frac{3+3\,i}{2}\right);\quad (\nu_2)\{\overline{\nu_2}\}=12;$$

$$(\nu_3)=(1-i,\quad 0,\quad -i)+\frac{3\,i}{4}(1+i,\quad i,\quad 1)+\frac{1+5\,i}{12\cdot 2}\left(1,\ \frac{1-5\,i}{2},\ \frac{3+3\,i}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{7-i}{24},\ \frac{-5}{24},\ \frac{-6+3\,i}{24}\right);\quad (u_3)\{\overline{\nu}_1\}=-3\,i;\quad (u_3)\{\overline{\nu}_2\}=-\frac{1+5\,i}{2};$$

$$(\nu_3)\{\overline{\nu}_3\}=5/24;$$

те су ортонормирани основни вектори:

$$(e_1)=\left(\frac{1+i}{2},\ \frac{i}{2},\ \frac{1}{2}\right);\quad (e_2)=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1-5\,i}{4\sqrt{3}},\ \frac{3+3\,i}{4\sqrt{3}}\right);$$

$$(e_3)=\left(\frac{7-i}{2\sqrt{30}},\ \frac{-5}{2\sqrt{30}},\ \frac{-6+3\,i}{2\sqrt{30}}\right).$$

4.10. Gram-ова матрица и детерминанта. — Квадратна реална матрица реда n може се представити као матрица њених вектора врста (a_i) а њена транспонована матрица $\mathbf{A}'$ као матрица вектора колона $\{a_k\}$. Производ ове две матрице назива се *Gram*-ова матрица матрице $\mathbf{A}$. Она је симетрична матрица. Елементи g_{ik} ове матрице јесу *скаларни производи* вектора (a_i) и вектора $\{a_k\}$. Према томе је

$$\mathbf{G}=\mathbf{A}\,\mathbf{A}'=\{(a_i)\}\ (\{a_k\})=\begin{vmatrix}(a_1)\{a_1\} & (a_1)\{a_2\}\cdots(a_1)\{a_n\}\\ (a_2)\{a_1\} & (a_2)\{a_2\}\cdots(a_2)\{a_n\}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (a_n)\{a_1\} & (a_n)\{a_2\}\cdots(a_n)\{a_n\}\end{vmatrix}. \qquad (4.55)$$

Детерминанта ове матрице зове се *Gram*-ова *детерминанта* и износи

$$|\mathbf{G}|=|\mathbf{AA}'|=|\mathbf{A}|\ |\mathbf{A}'|=|\mathbf{A}|^2. \qquad (4.56)$$

Када је матрица $\mathbf{A}$ регуларна детерминанта $|\mathbf{G}|$ је *позитивна,* а једнака је нули када је матрица $\mathbf{A}$ сингуларна. Тада има линеарно зависних вектора матрице $\mathbf{A}$. Норма матрице је *траг Gram*-ове *матрице:*

$$\mathfrak{N}(\mathbf{A})=\mathrm{tr}\,(\mathbf{AA}')=tr\,\mathbf{G}. \qquad (4.57)$$

За комплексну матрицу биће *Gram*-ова *матрица* и *норма*:

$$\mathbf{G}=\mathbf{Q}\,\overline{\mathbf{Q}}'=\begin{pmatrix}(q_1)\{\overline{q}_1\}\cdots(q_1)\{\overline{q}_n\}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (q_n)\{\overline{q}_1\}\cdots(q_n)\{\overline{q}_n\}\end{pmatrix};\quad \mathfrak{N}(\mathbf{Q})=\mathrm{tr}\,(\mathbf{Q}\,\overline{\mathbf{Q}}'). \qquad (4.58)$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix};\quad |\mathbf{A}|=6;\quad \mathbf{G}=\mathbf{AA}'=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}35 & -8 & 15\\ -8 & 8 & 6\\ 15 & 6 & 21\end{pmatrix};\qquad |\mathbf{G}|=36;$$

$$\mathfrak{N}(\mathrm{A})=25+9+1+4+0+4+1+4+16=64=35+8+21;$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix};\quad |\mathrm{A}|=0;\quad \mathrm{G}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 12 & 5\\ 12 & 24 & 10\\ 5 & 10 & 10\end{pmatrix};\qquad |\mathrm{G}|=0;$$

$$\mathrm{Q}=\begin{pmatrix}2+i & 1-2i\\ 4+3i & 3i\end{pmatrix};\quad |\mathrm{Q}|=-13+11i;\quad \mathrm{G}=\begin{pmatrix}2+i & 1-2i\\ 4+3i & 3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2-i & 4-3i\\ 1+2i & -3i\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}10 & 5-5i\\ 5+5i & 34\end{pmatrix}=\mathrm{H}.$$

$$|\overline{\mathrm{Q}}'|=-13-11i;\qquad |\mathrm{G}|=|\mathrm{Q}|\,|\overline{\mathrm{Q}}'|=170;\quad \mathfrak{N}(\mathrm{H})=\sum\sum a_{ik}\,\overline{a}_{ik}=44=10+34.$$

ВЕЖБАЊА

1. Показати да сви комплексни бројеви образују поље бројева (*C*).

$$\left[\begin{aligned}&(a+bi)\pm(c+di)=(a+c)\pm(b+d)i;\quad (a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i;\\ &(a+bi)/(c+di)=(ac+bd)/(c^2+d^2)+(bc-ad)\,i/(c^2+d^2).\end{aligned}\right]$$

2. Показати да скуп бројева $a+b\sqrt{6}$, где су a и b рационални бројеви, образује поље.

3. Одредити изоформизме вредностима:

$$4+2i;\quad 1-i;\quad 4i;\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0 & -5\\ 5 & 0\end{pmatrix}.$$

4. Дати су вектори $(x_1)=(2,\ 1,\ -3)$, $(x_2)=(4,\ -2,\ 5)$; $(x_3)=(2,\ -1,\ 1)$ и $(x_4)=-(-4,\ 3,\ 6)$ одредити:

a) збир вектора,

b) $(x_1)+(x_2)-(x_3)+(x_4)$;

c) $2\,(x_1)+5\,(x_2)-3\,(x_3)-(x_4)$.

5. Испитати линеарну зависност вектора:

a) $(2,\ -1,\ 3,\ 2)$; $(1,\ 3,\ 4,\ 2)$; $(3,\ -5,\ 2,\ 2)$;

b) $(1,\ 2,\ 3)$; $(4,\ 5,\ 6)$; $(1,\ 8,\ -3)$; $(2,\ 1,\ 4)$;

c) $\begin{Bmatrix}2\\ 1\\ 3\\ 2\\ -1\end{Bmatrix};\ \begin{Bmatrix}4\\ 2\\ 1\\ -2\\ 3\end{Bmatrix};\ \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 5\\ 6\\ -5\end{Bmatrix};\ \begin{Bmatrix}6\\ 3\\ -1\\ -6\\ 7\end{Bmatrix};$

d) $(1,\ 1+i,\ i)$; $(i,\ -i,\ 1-i)$;
$(1+2i,\ 1-i,\ 2-i)$;

e) $(1+i;\ 1-i,\ 1)$; $(2i,\ 1-2i,\ i)$;
$(2+i,\ 1-i,\ 1+i)$.

6. Показати да су вектори (1, 1, 1); (1, 2, 3); (1, 3, 2); (3, 2, 1) у простору $V_3(R)$.

7. Одредити основу векторског простора (1, 1, 1, 0); (4, 3, 2, −1); (2, 1, 0, −1) и (4, 2, 0, −2).

8. Вектор $(x)=(0, -1, 2)$ је у простору V_3 у односу на основу вектора чија је матрица I_3. Одредити координате овог вектора у истом простору основе (1, 1, 0); (1, 0, 1) и (1, 1, 1).

$$\Bigg[\ \{x\}=\mathrm{I}'\begin{Bmatrix}0\\-1\\2\end{Bmatrix}=\mathrm{U}'\begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{Bmatrix}=(\mathrm{U}')^{-1}\begin{Bmatrix}0\\-1\\2\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}0\\-1\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2\\1\\1\end{Bmatrix};$$

$$\mathrm{U}'=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix};\quad |\mathrm{U}'|=-1.\ \Bigg].$$

9. Вектор $\{x\}=\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}$ је у простору V_3 чија су основа вектори:

$$\begin{Bmatrix}2\\-1\\3\end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix}1\\2\\-1\end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix}1\\-1\\-1\end{Bmatrix}.$$

Одредити координате тога вектора у односу на основу ортонормираних вектора e_i (4.47).

$$\Bigg[\ \{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\mathrm{U}'\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}7\\0\\-2\end{Bmatrix}.\ \Bigg]$$

10. Вектор $\{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\6\\5\end{Bmatrix}$ лежи у простору V_4 чија је основа $\begin{Bmatrix}1\\1\\2\\3\end{Bmatrix};\ \begin{Bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{Bmatrix}.$

Одредити прве две координате вектора $\{x\}$.

$$\Bigg[\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix}x_1&1&1\\x_2&1&0\\6&2&-2\\5&3&1\end{pmatrix};\quad r=2;\quad \begin{vmatrix}x_1&1&1\\x_2&1&0\\6&2&-2\end{vmatrix}=-2x_1+4x_2-6=0;$$

$$\begin{vmatrix}x_1&1&1\\x_2&1&0\\5&3&1\end{vmatrix}=x_1+2x_2-5=0;\quad \begin{matrix}x_1=1\\x_2=2\end{matrix}\ \Bigg].$$

11. Израчунати скаларни производ вектора (2, −1, 0) и (1, −3, 5) у простору основе (0, 1, 0); (1, 1, 1) и (3, 2, 1).

$[(a)=(-2,\ -1,\ 1);\ \ (b)=(-6,\ 7,\ -2);\ \ (a)\ \{b\}=3.]$

12. Одредити ортонормалне основе простора V_3 основа:

a) $(2,\ 1,\ 3);\ (1,\ 2,\ 3);\ (1,\ 1,\ 1);$ *b*) $(1,\ -1,\ 0);\ (2,\ -1,\ -2);\ (1,\ -1,\ -2);$

c) $(1,\ 0,\ 1);\ (1,\ 3,\ 1);\ (3,\ 2,\ 1);$ *d*) $(0,\ -1,\ 2);\ (0,\ -1,\ 4);\ (-1,\ 0,\ 4).$

13. За комплексне векторе $(a)=(i,\ 2i,\ 1)$ $(b)=(1,\ 1+i,\ 0)$; $(c)=(i,\ 1-i,\ 2)$, одредити:

a) дужине вектора,
b) скаларне производе;
c) показати да је вектор $(d)=(1-i,\ -1,\ 1-i)$ управан на прва два вектора,
d) одредити вектор (e) управан на векторима (a) и (c).

[*a*) $\sqrt{6}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; *b*) $(a)\overline{\{b\}}=2+3i$; $(a)\overline{\{c\}}=1+2i$; $(b)\overline{\{c\}}=i$; *c*) $(-1\ \ -5i,\ i,\ 3-i)$].

14. Показати да су вектори $(1+i,\ i,\ 1)$; $(1-i,\ 1,\ 3i)$ и $(i,\ 1-i,\ 0)$ линеарно независни и међусобно ортогонални.

15. Одредити *Gram*-ову матрицу и детерминанту матрице A:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix};\quad \mathrm{AA}'=\mathrm{G};\quad |\mathrm{A}|=120;\quad |\mathrm{G}|=120^2.$$

16. Ако је дата матрица $\mathrm{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & i \end{pmatrix}$ показати да да је $|\mathrm{G}|=4.$

17. За матрице

$$\mathrm{I}-\mathrm{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1-i \end{pmatrix};\quad \mathrm{I}+\mathrm{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix}$$

одредити збир и производ *Gram*-ових матрица.

18. Одредити збир, разлику и производ кватерниона:

$$\mathfrak{Q}_1=11+(2,\ 3,\ 6)\ \text{и}\ \mathfrak{Q}_2=4+(1,\ -2,\ 2).$$

19. Одредити производ матрица из предњег задатка ако су

$$\mathfrak{Q}_1\longleftrightarrow \mathrm{Q}_1,\quad \mathfrak{Q}_2\longleftrightarrow \mathrm{Q}_2.$$

20. На кватерниону $\mathfrak{Q}_1$ из предњег задатка показати да за кватернионске матрице важе ове релације:

$$\mathrm{K}_1^2=\mathrm{K}_2^2=\mathrm{K}_3^2=-\mathrm{I};\quad \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2=\mathrm{K}_3,\quad \mathrm{K}_2\mathrm{K}_3=\mathrm{K}_1;\quad \mathrm{K}_3\mathrm{K}_1=\mathrm{K}_2;$$

$$\mathrm{K}_2\mathrm{K}_1=-\mathrm{K}_3;\quad \mathrm{K}_3\mathrm{K}_2=-\mathrm{K}_1;\quad \mathrm{K}_1\mathrm{K}_3=-\mathrm{K}_2.$$

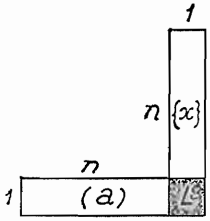
5. ФОРМЕ И МАТРИЦЕ

5.1. Линеарне форме. — Нека је дат стални вектор **a** n-ог реда $\mathbf{a}=(a_1\, a_2 \ldots\, a_n)$ и промењиви вектор x истог реда, $\mathrm{x}=(x_1\, x_2 \ldots\, x_n)$ на истом пољу бројева. Скаларни производ ова два вектора назива се *линеарна форма променљивих* x_i (слика 5.1):

$$L=(a)\,\{x\}=a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\,x_k=f\,(\mathrm{x}). \tag{5.1}$$

Стални вектор **a** зове се *коефицијент-вектор форме,* јер су његове координате a_k коефицијенти форме; вектор x је *вектор-променљива* форме.

Линеарна форма (L) је специјална скаларна функција вектора x. За ове форме важе обрасци:



Слика 5.1. — Линеарна форма

$$f\,(\mathrm{x}+\mathrm{y})=f\,(\mathrm{x})+f\,(\mathrm{y});\quad \mathrm{x}\in V,\ \mathrm{y}\in V; \tag{5.2}$$

$$f\,(\alpha\,\mathrm{x})=\alpha f\,(\mathrm{x});\quad \mathrm{x}\in V \text{ и за свако } \alpha. \tag{5.3}$$

Први образац показује да је линеарна форма збира вектора једнака збиру линеарних форми сабирака, а други да је линеарна форма производа вектора и скалара једнака производу скалара и линеарне форме тога вектора.

С обзиром на претходне релације уопште важи да је

$$f\,(\alpha_1\,\mathrm{x}_1+\alpha_2\,\mathrm{x}_2+\cdots+\alpha_k\,\mathrm{x}_k+\cdots+\alpha_n\,\mathrm{x}_n)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f\,(\mathrm{x}_k) \tag{5.4}$$

за све векторе $\mathrm{x}_k \in V$; $k=1, 2, \ldots n$ и све бројеве $\alpha_k\,(1,\ 2, \ldots,\ n)$.

Линеарна форма $f\,(\mathrm{x})$ је идентички једнака нули само ако је коефицијент вектор форме једнак нули $\mathbf{a}=0$, то јест ако су сви његови коефицијенти једнаки нули ($a_k=0$).

Нека је дато m линеарних форми L_i истих променљивих x_k ($k=1,\ 2, \ldots\ n$) са различитим коефицијент-векторима $\mathbf{a}_i\ (a_{i1}\, a_{i2} \ldots\ a_{in})$

може се формирати линеарна форма од ових линеарних форми

$$\mathfrak{L}=\sum_{i=1}^{m} L_i=(a_1)\,\{x\}+(a_2)\,\{x\}+\cdots+(a_m)\,\{x\}=\mathbf{A}\,\{x\};$$

$$\mathbf{A}=((a_i))=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{5.5}$$

Она се зове *линеарна комбинација* — или *линеарни композитум* — *линеарних форми* L_i. Матрица **A** је *коефицијент-матрица композитума*.

Линеарне форме L_i су *линеарно независне* ако постоји релација

$$\lambda_1 L_1+\lambda_2 L_2+\cdots+\lambda_i L_i+\cdots+\lambda_m L_m\equiv 0;\ i=1,\ 2,\ldots,\ m \tag{5.6}$$

само ако су сви коефицијенти $\lambda_i\equiv 0$; у противном су *линеарно зависне*. Када се у предњем изразу форма замени вредношћу $L_i=(a_i)\,\{x\}$ она постаје

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,(a_i)\,\{x\}=\sum(\lambda_i\,a_i)\,\{x\}=(\sum\lambda_i\,a_i)\,\{x\}\equiv 0$$

где је сада $\sum(\lambda_i\,a_i)$ резултујући коефицијент-вектор форме ($\mathfrak{L}$). Ова ће форма бити идентички једнака нули само ако је овај вектор једнак нули, а то значи ако су коефицијенти $\lambda_i\equiv 0$. Тада су коефицијент-вектори a_i *линеарно независни*. Према томе можемо закључити да су *линеарне форме* L_i *линеарно независне или зависне ако су њихови коефицијент-вектори линеарно независни или зависни*. Ти вектори образују коефицијент-матрицу, па се испитивање зависности своди на одређивање *ранга* ове матрице чије су врсте коефицијент-вектори форми L_i.

На пример, линеарне форме $L_1=5\,x_1+3\,x_2$; $L_2=x_1+2\,x_2+4\,x_3$; $L_3=2\,x_1+x_2+x_3$ су *линеарно независне*, јер је $|\,\mathbf{A}\,|=11\neq 0$.

Линеарне форме L_i, $i=1,\ 2,\ 3$, са коефицијент-векторима $\mathbf{a}_1\,(3,\ -1,\ 2,\ 4)$; $\mathbf{a}_2\,(2,\ 3,\ -1,\ 2)$; $\mathbf{a}_3\,(5,\ -9.\ 8,\ -1)$ су *линеарно зависне* јер је

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -9 & 8 & -1 \end{pmatrix};\qquad \begin{matrix} \lambda_1 L_1+\lambda_2 L_2+\lambda_3 L_3=0; \\ \\ r=2 \\ \\ \end{matrix}\qquad \begin{aligned} 3\,\lambda_1+2\,\lambda_2+5\,\lambda_3&=0; \\ -\lambda_1+3\,\lambda_2-9\,\lambda_3&=0; \\ 2\,\lambda_1-\lambda_2+8\,\lambda_3&=0; \\ \lambda_1+2\,\lambda_2-\lambda_3&=0; \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}=0;\qquad \frac{\lambda_1}{-18-15}=\frac{\lambda_2}{-(-27+5)}=\frac{\lambda_3}{11};\quad 3\,L_1-2L_2-L_3=0.$$

5.2. Линеарна трансформација вектора. — Нека су $\mathbf{x}=(x_1\, x_2 \dots x_n)$ и $\mathbf{y}=(y_1\, y_2 \dots y_n)$ два вектора векторског простора V_n са истог поља бројева чије су координате у односу на *исту основу*. Нека су координате вектора везане линеарним једначинама, односно матричном релацијом,

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1+a_{12}\, x_2+\cdots+a_{1n}\, x_n&=y_1; \\ a_{21}\, x_1+a_{22}\, x_2+\cdots+a_{2n}\, x_n&=y_2; \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n1}\, x_1+a_{n2}\, x_2+\cdots+a_{nn}\, x_n&=y_n; \end{aligned} \qquad \mathbf{A}\,\{x\}=\{y\}. \tag{5.7}$$

Ова се веза назива *линеарна трансформација променљивих* x_i *у променљиве* y_i или *линеарно пресликавање* вектора $\mathbf{x}$ у вектор $\mathbf{y}$ у истом простору V_n на истом пољу бројева. Квадратна матрица $\mathbf{A}$ је *оператор линеарне трансформације*, а вектор $\mathbf{y}$ је *„слика“* вектора $\mathbf{x}$ при тој трансформацији. Квадратна матрица $\mathbf{A}$ реда n је такође са поља истих бројева. Када је она регуларна и *трансформација је регуларна*. У противном је *сингуларна*.

Пошто је трансформација линеарна то важе ове релације:

$$\lambda\,\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,\{y\};\quad \mathbf{A}\,\{\lambda\, x\}=\{\lambda\, y\};\quad \mathbf{A}\,\{\alpha\, x+\beta\, y\}=\{\alpha\, u+\beta\, w\}. \tag{5.8}$$

Када се помоћу матрице $\mathbf{A}$ пресликава вектор $\{x\}$ у вектор $\{y\}$, затим помоћу матрице $\mathbf{B}$ вектор $\{y\}$ у вектор $\{z\}$ и овај вектор помоћу матрице $\mathbf{C}$ у вектор $\{w\}$ добија се резултујућа трансформација:

$$\mathbf{A}\,\{x\}=\{y\};\quad \mathbf{B}\,\{y\}=\{z\};\quad \mathbf{C}\,\{z\}=\{w\};\quad \mathbf{CBA}\,\{x\}=\{w\}. \tag{5.9}$$

Из овога закључујемо да је *резултујући оператор једнак производу матрица оператора компонентних линеарних трансформација.* Због тога је резултујућа трансформација опет *линеарна*.

Када је дат вектор $\{y\}$ и матрица оператор $\mathbf{A}$ онда се може одредити полазни вектор $\{x\}$ који је сада *„слика“* вектора $\{y\}$ у истом простору. Ова трансформација је *инверзна трансформација линеарној трансформацији*, па је

$$\{x\}=\mathbf{A}^{-1}\,\{y\}. \tag{5.10}$$

Ова трансформација постоји само онда када постоји инверзна матрица матрице оператора $\mathbf{A}$, а то ће бити када је $|\mathbf{A}|\neq 0$, то јест када је матрица $\mathbf{A}$ регуларна. Када је матрица $\mathbf{A}$ сингуларна онда се вектор $\{x\}$ пресликава у вектор $\{y\}$ са мање димензија пошто су због $|\mathbf{A}|=0$ њени вектори врсте (или колоне) линеарно зависни, па *обратна трансформација није једнозначно одређена.*

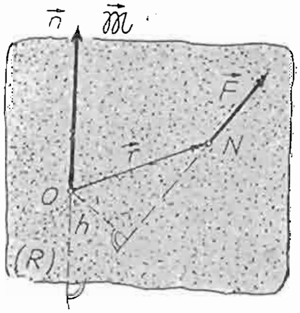
Помоћу вектора положаја нападне тачке силе $\vec{r}=\overrightarrow{ON}=(x, y, z)$ вектор силе $\vec{F}\,(X, Y, Z)$ се пресликава у момент те силе за тачку O то јест у вектор $\overrightarrow{\mathfrak{M}}\,(\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z)$. Векторска релација је *векторски про-*

извод вектора $\vec r$ и $\vec F$ која се може написати у матричном облику

$$\vec{\mathfrak{M}}=[\vec r, \vec F]=\mathbf r\times\mathbf F=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm i}&\vec{\mathrm j}&\vec{\mathrm k}\\ x&y&z\\ X&Y&Z\end{vmatrix}; \qquad \{\mathfrak M\}=\begin{Bmatrix}\mathfrak M_x\\ \mathfrak M_y\\ \mathfrak M_z\end{Bmatrix}=\mathbf A\{F\}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&-z&y\\ z&0&-x\\ -y&x&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{Bmatrix}=\left|\begin{matrix}yZ&-zY\\ zX&-xZ\\ xY&-yX\end{matrix}\right\}. \qquad (5.11)$$

Матрица оператор ове трансформације је *кососиметрична*, па је сингуларна $|\mathbf A|=0$. Због тога матрица $\mathbf A^{-1}$ није одређена. Прва трансформација $\{\mathfrak M\}=\mathbf A\{F\}$ је потпуно одређена, јер одређује момент силе $\vec F$ за тачку O (слика 5.2). Међутим, обратно, када се знају вектори $\vec{\mathfrak M}$ и $\vec r$, вектор силе $\vec F$ *није потпуно одређен*, већ постоји бескрајно много решења, пошто се једнодимензиони простор (вектор на правој) пресликава у дводимензиони простор (вектор у равни).



Слика 5.2. — Сингуларна линеарна трансформација

При линеарној трансформацији (5.7) вектор $\{x\}$ се пресликава у вектор $\{y\}$. Међутим, ова је трансформација праћена *деформацијом*, пошто се мења модул пресликаног вектора. Разлика модула вектора зове се *издужење*, а релативно издужење је *дилатација вектора*. При *издужењу* (*екстензији*) дилатација је *позитивна*, а при *скраћењу* (*компресији, контракцији*) она је *негативна*. Дакле, дилатација је

$$|\mathbf y|\neq|\mathbf x|;\qquad \varepsilon=\frac{|\mathbf y|-|\mathbf x|}{|\mathbf x|}\gtrless 0. \qquad (5.12)$$

Два вектора $\mathbf x$ и $\mathbf y$ у истом простору V_n одређују угао φ између њих који је одређен косинусом:

$$\cos\varphi=\frac{(x)\{y\}}{|\mathbf x|\;|\mathbf y|}=\frac{(y)\{x\}}{|\mathbf x|\;|\mathbf y|}. \qquad (5.13)$$

Међутим, ако се ова два вектора пресликају помоћу истог оператора у истом простору у векторе $\mathbf u$ и $\mathbf w$ онда ће се угао између пресликаних вектора променити, јер је

$$\{u\}=\mathbf A\{x\};\quad \{w\}=\mathbf A\{y\};\quad \cos\theta=\frac{(u)\{w\}}{|\mathbf u|\;|\mathbf w|}=\frac{(x)\mathbf A'\mathbf A\{y\}}{|\mathbf A\mathbf x|\cdot|\mathbf A\mathbf y|}\neq\cos\varphi. \qquad (5.14)$$

Ако су вектори **x** и **y** били ортогонални, њихове слике, вектори **u** и **w**, неће, уопште узев, бити ортогонални. Промена правог угла назива се *клизање*:

$$(x)\,\{y\}=0; \quad (u)\,\{\mathbf{w}\}=(x\mathbf{A}')\,\{\mathbf{A}y\}\neq 0. \tag{5.15}$$

На пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} = \{y\} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 27 \\ 17 \end{Bmatrix}; \qquad |\mathbf{A}|=-5; \qquad \{x\}=\mathbf{A}^{-1}\{y\}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 12 \\ 27 \\ 17 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 9 \\ 14 \end{Bmatrix} = \{w\}; \quad (x)\,\{y\}=(2 \quad 1 \quad -1)\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}=3;$$

$$\cos\varphi=3/\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}=3/2\sqrt{21}; \quad \cos\theta=69/3\sqrt{2}\cdot\sqrt{377};$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16 \\ 12 \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon=\frac{20-5}{5}=3;$$

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{Bmatrix}; \qquad \{y\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix}; \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (x)\,\{y\}=0;$$

$$\{u\}=\begin{Bmatrix} 21 \\ 8 \\ 7 \end{Bmatrix}; \quad \{w\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix}, \quad (u)\,\{w\}=67\neq 0.$$

Пошто се линеарном трансформацијом (5.7) вектор $\{x\}$ пресликава у истом простору V_n у вектор $\{y\}$, може се схватити да су x_i координате тачке M у n-мерном простору а y_i координате тачке N у истом простору, па се овом трансформацијом тачка M пресликава у тачку N истог простора V_n. Због услова линеарности (5.8) овом се трансформацијом *тачка* пресликава *у тачку, права у праву, а паралелне праве такође у паралелне праве*. Због тога је ова трансформација *афина*, па је и простор V_n *афини простор*.

Трансформација (5.7) може се и друкчије схватити. Вектор **x** простора V_n може се изразити према (4.32) различитим координатама у односу на две различите основе истог простора. Нека су те основе одређене векторима $\{u_s\}$ и $\{v_s\}$ онда ће бити

$$\{x\}=\sum_{s=1}^{n} x_s\{u_s\}=x_1\{u_1\}+x_2\{u_2\}+\cdots+x_n\{u_n\}=(\{u_1\}\quad\{u_2\}\cdots\{u_n\})\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{Bmatrix},$$

па је

$$\mathrm{x}=\mathrm{U}\{x\}=\mathrm{V}\{\bar{x}=\xi\};\qquad \mathrm{U}=(\{u_s\});\qquad \mathrm{V}=(\{v_s\});$$

$$\{x\}=\mathrm{T}\{\xi\};\qquad \mathrm{T}=\mathrm{U}^{-1}\mathrm{V}; \tag{5.15}$$

где су x_i координате вектора $\{x\}$ у односу на стару $\{u\}$ а $\bar{x}_i=\xi_i$ координате истог вектора у односу на нову основу $\{v\}$. Матрице U и V јесу матрице вектора колона $\{u_s\}$ и $\{v_s\}$ основних вектора обе основе. При овоме су вектори $\{v_s\}$ одређени у односу на прву основу. Матрица T зове се *матрица трансформације координата*.

Ово смо имали при ротацији координатног система у равни (слика 2.3):

$$\{x\}=\mathrm{I}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\mathrm{V}\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Bmatrix};\qquad \begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\mathrm{V}\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Bmatrix}=\left(\begin{Bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{Bmatrix}\ \begin{Bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{Bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Bmatrix}.$$

На пример, ако су дати основни вектори обе основе онда је:

$$\mathrm{U}=\begin{pmatrix}0&1&1\\ 1&1&2\\ 0&0&3\end{pmatrix};\qquad \mathrm{V}=\begin{pmatrix}1&1&1\\ 1&1&2\\ 0&1&1\end{pmatrix};\qquad |\mathrm{U}|=-3;\qquad |\mathrm{V}|=-1;$$

$$\mathrm{U}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&3&-1\\ 3&0&-1\\ 0&0&1\end{pmatrix};\qquad \mathrm{V}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 1&-1&1\\ -1&1&0\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}=\mathrm{U}^{-1}\mathrm{V}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-1&2\\ 3&2&2\\ 0&1&1\end{pmatrix};\qquad \mathrm{V}^{-1}\mathrm{U}=\mathrm{T}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\ -1&0&2\\ 1&0&1\end{pmatrix}.$$

Неки вектор $\begin{Bmatrix}1\\ 5\\ 3\end{Bmatrix}$ има координате у односу на обе основе:

$$\begin{Bmatrix}1\\ 5\\ 3\end{Bmatrix}=\mathrm{U}\{x\};\qquad \{x\}=\mathrm{U}^{-1}\begin{Bmatrix}1\\ 5\\ 3\end{Bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&3&-1\\ 3&0&-1\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 5\\ 3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\ 0\\ 1\end{Bmatrix};$$

$$\{\xi\}=\{\bar{x}\}=\mathrm{V}^{-1}\begin{Bmatrix}1\\5\\3\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1\\5\\3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2\\-1\\4\end{Bmatrix}=\mathrm{T}^{-1}\{x\}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}3\\0\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2\\-1\\4\end{Bmatrix}.$$

Нека матрица **A** одређује линеарну трансформацију вектора $\{x\}$ у вектор $\{y\}$, и нека се координате оба вектора у односу на две основе истог простора одређене основним векторима $\{u\}$ и $\{v\}$ трансформишу истом матрицом трансформације координата $\mathrm{T}=\mathrm{U}^{-1}\,\mathrm{V}$, онда ће бити:

$$\{y\}=\mathrm{A}\,\{x\};\qquad \{x\}=\mathrm{T}\,\{\xi\};\qquad \{y\}=\mathrm{T}\,\{\eta\};$$

$$\{\eta\}=\mathrm{T}^{-1}\,\{y\}=\mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{AT}\,\{\xi\}=\mathrm{B}\,\{\xi\};\quad \mathrm{B}=\mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{AT}, \tag{5.16}$$

па се координате вектора $\{\eta\}$ у односу на нову основу изражавају помоћу координата вектора $\{\xi\}$ у односу на исту нову основу. Вектор $\{x\}$ се помоћу матрице **A** пресликава у вектор $\{y\}$, а вектор $\{\xi\}$, посматран према новој основи, претвара се у вектор $\{\eta\}$ посматран такође према новој основи помоћу матрице **B** која се зове *матрица слична матрици* **A**. Дакле, трансформација вектора $\{x\}$ у вектор $\{y\}$ врши се матрицом **A**, а трансформација вектора $\{\xi\}$ у вектор $\{\eta\}$ сличном матрицом **B**. Матрица **T** је матрица трансформације основе **U** у основу **V**. Стога се ова трансформација зове *слична* или *колинеарна трансформација*. Трансформација матрицом TAT^{-1} је такође слична.

За ознаку сличности матрица употребљава се ознака $\sim$ и има особину: *a*) *рефлексивности*, *b*) *симетричности* и *c*) *транзитивности*:

$$a)\ \mathrm{A}\sim\mathrm{B};\quad \mathrm{A}\sim\mathrm{A};\quad b)\ \mathrm{A}\sim\mathrm{B}\ \therefore\ \mathrm{B}\sim\mathrm{A};$$

$$c)\ \mathrm{A}\sim\mathrm{B};\quad \mathrm{B}\sim\mathrm{C}\ \therefore\ \mathrm{A}\sim\mathrm{C}. \tag{5.17}$$

Сличне матрице имају исте *рангове, једнаке детерминанте* и *једнаке трагове*, јер је:

$$|\,\mathrm{B}\,|=|\mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{AT}|=\frac{1}{|\,\mathrm{T}\,|}\,|\,\mathrm{A}\,|\;|\,\mathrm{T}\,|=|\,\mathrm{A}\,|\,;$$

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{B}=\mathrm{tr}\;(\mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{A})\,\mathrm{T}=\mathrm{tr}\,\mathrm{PT}=\mathrm{tr}\,\mathrm{TP}=\mathrm{tr}\,\mathrm{A};\quad \mathrm{P}=\mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{A}. \tag{5.18}$$

Два вектора која су подвргнута истој линеарној трансформацији помоћу регуларне матрице зову се *когредијентна*. Међутим, трансформација основних вектора $\{u\}$ у векторе $\{v\}$ није иста као трансформација вектора $\{x\}$ у $\{\xi\}$ и вектора $\{y\}$ у $\{\eta\}$, те следи

$$\{x\}=\mathrm{T}\,\{\xi\};\quad \{\xi\}=\mathrm{T}^{-1}\,\{x\}:\quad \{\eta\}=\mathrm{T}^{-1}\,\{y\};\quad \mathrm{T}\,\{u\}=\{v\} \tag{5.19}$$

што значи да се трансформисање нове базе $\{u\}$ и нових координата $\{\xi\}$ не врши на исти начин. Овакви се вектори називају *контрагредијентни*.

На пример:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&1\\2&3&5\end{pmatrix};\quad |\mathrm{A}|=1;\quad \{x\}=\begin{Bmatrix}3\\1\\2\end{Bmatrix};\qquad \mathrm{U}=\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{V}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix};\quad \{y\}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&1\\2&3&5\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}3\\1\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}10\\7\\19\end{Bmatrix};$$

$$\mathrm{T}=\mathrm{U}^{-1}\,\mathrm{V}=\mathrm{V};\qquad \mathrm{T}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&7&-5\\-1&-1&2\\1&-2&1\end{pmatrix};\qquad \mathrm{B}=\mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{AT}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-17&-47&-36\\11&26&21\\7&19&15\end{pmatrix};\qquad \{\xi\}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&7&-5\\-1&-1&2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}3\\1\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix};$$

$$\{\eta\}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-17&-47&-36\\11&26&21\\7&19&15\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-12\\7\\5\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&7&-5\\-1&-1&2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}10\\7\\19\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-12\\7\\5\end{Bmatrix}.$$

5.3. Ортогонална трансформација. — Када је матрица оператор линеарне трансформације ортогонална матрица, трансформација се назива *ортогоналном*. Из (3.56) следе особине ортогоналне матрице

$$\mathrm{AA}'=\mathrm{I};\quad \mathrm{A}^{-1}=\mathrm{A}';\quad |\mathrm{AA}'|=|\mathrm{A}|^2=1;\quad |\mathrm{A}|=\pm 1. \tag{5.20}$$

Ова матрица је увек квадратна матрица, чија је инверзна матрица једнака транспонованој па је детерминанта увек једнака ±1.

Код ортогоналне трансформације се не мења *дужина вектора* нити *угао између два вектора*, те следи:

$$\mathrm{A}\,\{x\}=\{y\};\quad (y)\,\{y\}=(x)\,\mathrm{A}'\,\mathrm{A}\,\{x\}=(x)\,\{x\}=|\mathrm{x}|^2;\quad |\mathrm{x}|=|\mathrm{y}|;$$

$$\mathrm{A}\,\{x\}=\{u\};\quad \mathrm{A}\,\{y\}=\{v\}; \tag{5.21}$$

$$\cos\theta=\frac{(u)\,\{v\}}{|\mathbf{u}|\;|\mathrm{v}|}=\frac{(x)\,\mathrm{A}'\,\mathrm{A}\,\{y\}}{\mathrm{A}\,|\mathrm{x}|\;\mathrm{A}\,\{\mathrm{y}\}}=\frac{(x)\,\{y\}}{|\mathrm{x}|\;|\mathrm{y}|}=\cos\varphi.$$

На пример:

$$A=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad |A|=-1;$$

$$AA'=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$x=(2 \quad 6 \quad 3); \qquad |x|=7; \qquad A\{x\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{6+2\sqrt{2} \quad -3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{-12+2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{6+2\sqrt{2} \quad +3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \end{Bmatrix}=\{y\};$$

$$(y)\{y\}=\frac{294}{6}=49; \; |y|=7; \quad \cos\varphi=\frac{-5{,}79}{49\sqrt{6}};$$

Помоћу ортогоналне трансформације систем ортонормираних вектора претвара се такође у ортонормирани систем других вектора.

На пример:

$$\{e_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{e_2\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \; A=1;$$

$$\{c_1\}=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix}; \quad \{c_2\}=A\{e_2\}=\begin{Bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix};$$

$$|c_1|=\sqrt{1/4+3/4}=1; \qquad |c_2|=1; \qquad (c_1)\{c_2\}=0.$$

Геометријска особина ове трансформације је *обртање* (*ротација*) координатног система у равни или простору. Ротација основних ортонормираних вектора у равни за угао φ одређена је трансформацијом (слика 5.3.*а*):

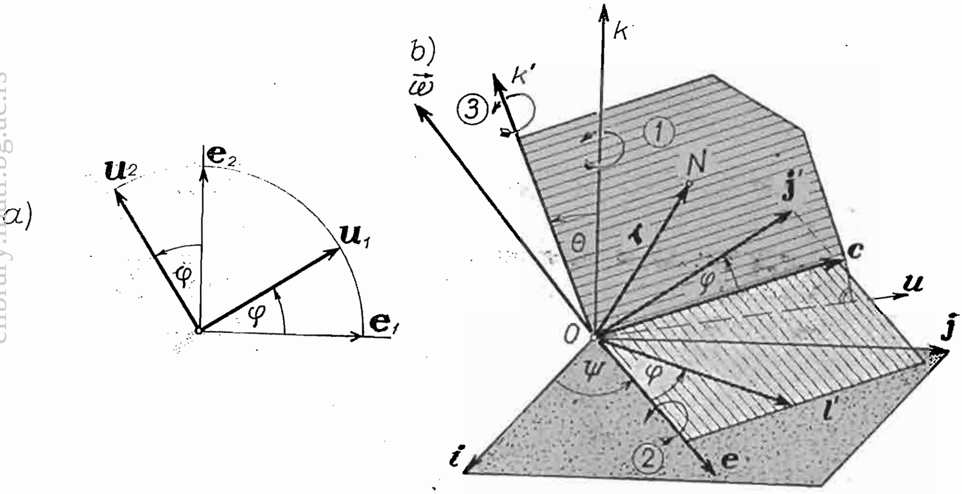
$$U=(\{u_1\}\,\{u_2\})=\left(\begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{Bmatrix}\right); \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{5.22}$$

$$\{x\}=T\{\xi\}; \quad T=U; \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}; \; \{\xi\}=T^{-1}\{x\}=T\{x\},$$

јер је матрица T ортогонална:

$$|T|=1.$$

Положај у простору крутог тела које може да се обрће око *једне нейомичне шачке* O (слика 5.3. *b*) може да се одреди помоћу три угла која се зову *Euler-ови углови*: *йрецесије* (ν), *нушације* (θ) *и сойсшвеног обршања* (φ). Помоћу три узастопна обртања може се триедар $Oxyz$ превести у триедар $O\xi\eta\zeta$. Прво обртање врши се око осе прецесије (Oz-осе) за угао ψ; друго је обртање око чворне осе за угао нутације (θ) и треће обртање око Oz-осе (фигурне осе) за угао сопственог обртања (φ). Прва основа непокретног триедра је основа јединичних ортогоналних вектора-ортова (**i j k**) која прелази у ортонормирану основу



Слика 5 3. — a) Ротација у равни, b) *Euler*-ови углови

вектора (**e u k**); затим ова прелази у основу (**e c k′**) и најзад ова у основу (**i′ j′ k′**) ортова оса покретног система. Орт **e** је орт чворне осе а ортови **u** и **c** су управни на њега, само је први у Oxy-равни а други $O\xi\eta$-равни. Према томе ће бити поступна обртања ортогоналним матрицама

$$\mathrm{I}=(\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k})=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad \mathrm{T}_1=(\mathbf{e}\,\mathbf{u}\,\mathbf{k})=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\mathrm{T}_2=(\mathbf{e}\,\mathbf{c}\,\mathbf{k}')=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix};$$

$$\mathrm{T}_3=(\mathbf{i}'\,\mathbf{j}'\,\mathbf{k}')=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (5.23\,a)$$

које одређују увек нову основу у односу на претходну основу. Резултујуће обртање биће:

$$\{r\}=\mathrm{T}_1\{r_1\}=\mathrm{T}_1\,\mathrm{T}_2\{r_2\}=\mathrm{T}_1\,\mathrm{T}_2\,\mathrm{T}_3\{\overline{r}\}=\mathrm{T}\{\overline{r}\}, \tag{5.23.b}$$

па су *формуле трансформација координата* непокретног и покретног триедра:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \tag{5.23.c}$$

Вектор угаоне брзине може се изразити помоћу извода *Euler*-ових углова по времену

$$\{\boldsymbol{\omega}\}=\dot{\theta}\{e\}+\dot{\psi}\{k\}+\dot{\varphi}\{k'\}=\mathrm{T}\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \tag{5.24}$$

па се лако добијају *Euler*-ове *кинематичке једначине** за непокретни и покретни систем када се основа T изрази помоћу ортонормираних основа $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ система:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & -\sin\theta\cos\psi \\ 0 & 1 & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \\ 0 & \cos\theta & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}. \tag{5.25}$$

Брзина неке тачке N, где је $\overrightarrow{ON}=\vec{r}$, биће:

$$\vec{v}=[\vec{\omega},\ \vec{r}];\quad \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \omega_y z & -\omega_z y \\ \omega_z x & -\omega_x z \\ \omega_x y & -\omega_y x \end{Bmatrix}; \tag{5.26.a}$$

---

* Д. Рашковић — Механика II (Кинематика), 3. издање, стр. 203; Београд, 1966.

$$\begin{Bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_\eta \; \zeta & -\omega_\zeta \; \eta \\ \omega_\zeta \; \xi & -\omega_\xi \; \zeta \\ \omega_\xi \; \eta & -\omega_\eta \; \xi \end{Bmatrix}. \qquad (5.26.b)$$

5.4. Билинеарне форме. — Ако су дата два система променљивих x_i (1, 2, . . . , m) и y_i (1, 2, . . . , n) онда се квадратна функција облика (слика 5.4):

$$\mathfrak{B}(x, y) = f(x, y) = \downarrow\!\rightarrow \sum_i^m \sum_k^n a_{ik}\, x_i\, y_k =$$

$$= a_{11}\, x_1\, y_1 + a_{12}\, x_1\, y_2 + \cdots + a_{1n}\, x_1\, y_n +$$

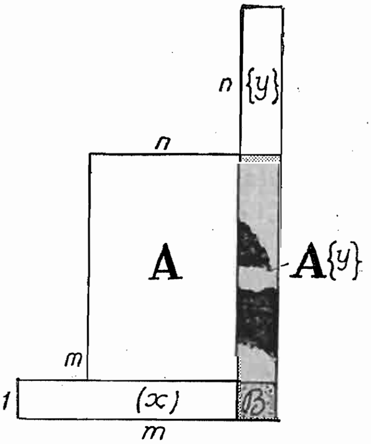
$$+ a_{21}\, x_2\, y_1 + a_{22}\, x_2\, y_2 + \cdots + a_{2n}\, x_2\, y_n +$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$+ a_{m1}\, x_m\, y_1 + a_{m2}\, x_m\, y_2 + \cdots + a_{mn}\, x_m\, y_n =$$

$$= (x)\; \mathbf{A}\; \{y\} \qquad (5.27)$$

назива *билинеарна форма* променљивих x_i и y_i. Матрица **A** је матрица форме, а њен ранг одређује и *ранг форме*.



Сл. 5.4. — Билинеарна форма

На пример, билинеарне су форме:

$$(x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = (x_1 \;\; x_2) \begin{Bmatrix} y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ 2y_1 - y_2 + 5y_3 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} x_1\, y_1 + 3x_1\, y_2 + 4x_1\, y_3 + \\ + 2x_2\, y_1 - x_2\, y_2 + 5x_2\, y_3\, ; \end{matrix}$$

$$(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \begin{Bmatrix} y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ 5y_1 + \;\; y_2 + \;\; y_3 \\ 3y_1 \qquad + 2y_3 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} (\;y_1 + 4y_2 + 2y_3)\, x_1 + \\ + (5y_1 + \;\; y_2 + \;\; y_3)\, x_2 + \\ + (3y_1 + 2y_3)\, x_3\, ; \end{matrix}$$

$$(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} (y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 2y_4)\, x_1 + \\ + (2y_1 - 2y_2 + y_3 + 3y_4)\, x_2 + \\ + 3y_1 \qquad + 4y_3 + y_4)\, x_3 . \end{matrix}$$

Билинеарна форма може се написати и као скаларни производ вектора (x) и вектора линеарних форми вектора $\{y\}$, те је

$$\sum_i^m x_i \left(\sum_k^n a_{ik}\, y_k \right) = \sum_i^m x_i\, L_i = (x)\, \{L\} = (x)\; \mathbf{A}\; \{y\} = (y)\; \mathbf{A}'\, \{x\} . \qquad (5.28)$$

На пример:

$$(x_1\, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = (x_1\, x_2)\begin{Bmatrix} y_1+3y_2 \\ 2y_1-y_3 \end{Bmatrix} = x_1(y_1+3y_2)+x_2(2y_1-y_3)=$$

$$=(y_1\, y_2\, y_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = (y_1\, y_2\, y_3)\begin{Bmatrix} x_1+2\,x_2 \\ 3\,x_1 \\ -x_2 \end{Bmatrix} = y_1(x_1+2\,x_2)+3\,y_2\,x_1-y_3\,x_2\,.$$

Када су вектори **x** и **y** истог реда (n) а матрица **A** јединична, онда се каже да је билинеарна форма сведена на *канонски облик*. Она је тада скаларни производ тих вектора, па је

$$\mathfrak{B}=(x)\,\mathrm{I}\,\{y\}=x_1\,y_1+x_2\,y_2+\cdots+x_n\,y_n. \tag{5.29}$$

Ако се вектори **x** и **y** линеарно трансформишу у векторе **u** и **v** онда ће билинеарна форма нових променљивих бити:

$$\mathrm{B}\,\{x\}=\{u\};\quad \mathrm{C}\,\{y\}=\{v\};\quad \mathfrak{B}=(x)\,\mathrm{A}\,\{y\}=u\,(\mathrm{B}^{-1})'\,\mathrm{A}\mathrm{C}^{-1}\cdot\{v\}. \tag{5.30}$$

На пример:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\qquad \mathrm{C}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\qquad \mathrm{B}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(\mathrm{B}^{-1})'=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};\qquad \mathrm{C}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};\qquad \mathfrak{B}=(x_1\, x_2)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=$$

$$=x_1(4y_1+y_2)+x_2(3y_1+2y_2)=(3u_1-2u_2)(3v_1-8v_2)+$$

$$+(-u_1+u_2)(v_1-v_2)=u_1(8v_1-23v_2)+u_2(-5v_1+15v_2);$$

јер су

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\mathrm{B}^{-1}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3u_1-2\,u_2 \\ -\,u_1+\,u_2 \end{Bmatrix};\qquad \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\mathrm{C}^{-1}\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} v_1-3\,v_2 \\ -v_1+4\,v_2 \end{Bmatrix};$$

$$(\mathrm{B}^{-1})'\,\mathrm{A}\mathrm{C}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -23 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Када се обе врсте координата x_i и y_i трансформишу на нове координате истом матрицом, то јест *когредијентно*, онда билинеарна форма постаје

$$\{x\}=\mathrm{B}\,\{\xi\};\quad \{y\}=\mathrm{B}\,\{\eta\};\quad \mathfrak{B}=(x)\,\mathrm{A}\,\{y\}=(\xi)\,\mathrm{B'AB}\,\{\eta\}. \tag{5.31}$$

У случају *контрагредијентне трансформације* координата добијамо

$$\{x\}=\mathrm{B}\,\{\xi\};\quad \{y\}=\mathrm{B}^{-1}\,\{\eta\};\quad \mathfrak{B}=(\xi)\,\mathrm{B'AB}^{-1}\,\{\eta\}. \tag{5.32}$$

5.5. Квадратне форме. — Када су у билинеарној форми вектори **x** и **y** једнаки, $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, она се претвара у квадратну форму промењивих x_i а њена матрица **A** је симетрична матрица. Према томе је (слика 5.5):

$$Q=\sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n} a_{ik}\,x_i\,x_k=(x)\,\mathrm{A}\,\{x\}; \tag{5.33}$$

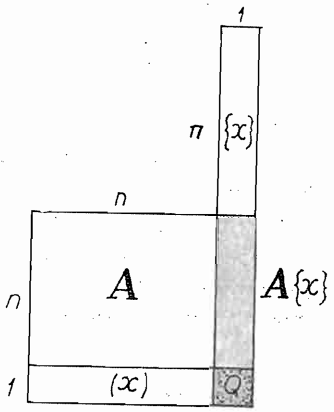
$$a_{ik}=a_{ki}.$$

Бинерне и тернерне квадратне форме су:

$$Q_2=(x_1\;x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=$$

$$=(x_1\;x_2)\begin{Bmatrix} a_{11}\;x_1+a_{12}\;x_2\\ a_{12}\;x_1+a_{22}\;x_2\end{Bmatrix}=$$

$$=a_{11}\,x_1^2+2\,a_{12}x_1\,x_2+a_{22}\,x_2^2; \tag{5.34}$$



Слика 5.5. — Квадратна форма

$$Q_3=(x_1\,x_2\,x_3)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=a_{11}\,x_1^2+2\,a_{12}\,x_1\,x_2+a_{22}\,x_2^2+$$

$$+2\,a_{13}\,x_1\,x_3+2\,a_{23}\,x_2\,x_3+a_{33}\,x_3^2. \tag{5.35}$$

На пример:

$$(x_1\;\;x_2)\begin{bmatrix} 3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=3\,x_1^2+2\,x_1\;\;x_2+2\,x_2^2;\qquad (x_1\;\;x_2\;\;x_3)\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=$$

$$=4\,x_1^2+\;4\,x_1\;\;x_2+x_2^2+2\,x_1\,x_3-2\,x_2\;\;x_3+x_3^2.$$

Детерминанта симетричне матрице **A** назива се *дискриминанта форме* $\Delta=|\mathrm{A}|$. Када је $|\mathrm{A}|\neq 0$ форма је *регуларна*; при $|\mathrm{A}|=0$ она је *сингуларна* (*дегенеративна*). Када је матрица **A** реална матрица тада је и форма којој је она аташирана *реална квадратна форма.* Она може бити тројака.

1° *Форма је дефинитна када за све могуће вредности реалних променљивих x_i има увек исти предзнак, а једнака је нули,* $Q=0$, *само када су све променљиве* $x_i \equiv 0$.

Форма позитивног предзнака $(+Q)$ је *позитивно дефинитна,* а негативног $(-Q)$ је *негативно дефинитна.*

2° *Форма је семидефинитна када за све вредности променљивих x_i има исти предзнак али може бити једнака нули ($Q=0$) и за неке вредности $x_i \neq 0$.*

3° *Форма је индефинитна када при промени променљивих мења предзнак.*

У техничкој пракси најважније су позитивно-дефинитне форме (на пример кинетичка и потенцијална енергија). За њих важе следећа правила:

1) *Реална квадратна форма је тада и само тада позитивно дефинитна форма када су сви основни главни минори њене матрице позитивни (Sylvester-*ов *критеријум).*

2) *Када је квадратна форма позитивно дефинитна тада је дискриминанта форме мања—или бар једнака—од производа елемената њене главне дијагонале (Hadamard-*ова *неједначина).*

На пример:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 3 & \multicolumn{1}{|c|}{2} & 1 \\ \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c|}{4} & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 3 & 5 \end{array}\right); \qquad \Delta_1=3; \qquad \Delta_2=8; \qquad \Delta_3=|\,A\,|=21 < 3\cdot4\cdot5=60;$$

$$Q=3x_1^2+4x_1\ x_2+4x_2^2+2x_1\ x_3+6x_2\ x_3+5x_3^2; \qquad Q\,(x_i=0)=0;$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 5 & \multicolumn{1}{|c|}{3} & 2 \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c|}{1} & 1 \\ \cline{1-2} 2 & 1 & 4 \end{array}\right); \qquad \Delta_1=5; \qquad \Delta_2=5-9=-4<0; \qquad |\,A\,|=\Delta_3=-13;$$

$$Q=5x_1^2+6x_1\ x_2+x_2^2+4x_1\ x_3+2x_2\ x_3+4x_3^2.$$

Двострука кинетичка и двострука потенцијална енергија трогубог хомогеног математичког клатна (слика 5.6) јесу хомогене квадратне форме генералисаних брзина односно генералисаних координата, јер су

$$E_k=\frac{1}{2}\,ml^2\,\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}\,m\,(l\dot{\varphi}_1+l\dot{\varphi}_2)^2+\frac{1}{2}\,m\,(l\dot{\varphi}+l\dot{\varphi}_2-l\dot{\varphi}_3)^2;$$

$$E_p=\frac{1}{2}\,mgl\varphi_1^2+\frac{1}{2}\,mg\,(l\varphi_1^2+l\varphi_2^2)+\frac{1}{2}\,mg\,(l\varphi_1^2+l\varphi_2^2+l\varphi_3^2),$$

односно:

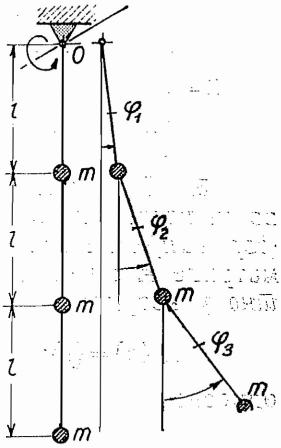
$$2E_k=(\dot{\varphi})\,\mathrm{A}\,\{\dot{\varphi}\};\quad 2E_p=(\varphi)\,\mathrm{B}\,\{\varphi\};\quad \mathrm{A}=ml^2\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix};\qquad \mathrm{B}=mgl\begin{pmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

Према Clapeyron-овој *теореми* деформациони рад савијене греде (слика 3.6) биће:

$$\mathrm{A}_{df}=\sum\frac{1}{2}F_i f_i=\frac{1}{2}\sum F_i y_i;\quad 2\,\mathrm{A}_{df}=(F)\,\mathrm{A}\,\{F\};\quad \mathrm{A}=(\alpha_{ik}=\alpha_{ki});\quad 2\,\mathrm{A}_{df}=(y)\,\mathrm{A}^{-1}\{y\};$$

$$\mathrm{A}=u\begin{pmatrix}9 & 11 & 7\\ 11 & 16 & 11\\ 7 & 11 & 9\end{pmatrix};\qquad \mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{28u}\begin{pmatrix}23 & -22 & 9\\ -22 & 32 & -22\\ 9 & -22 & 23\end{pmatrix};$$

$$|\mathrm{A}|=28u^3<1296u^3;\qquad |\mathrm{A}^{-1}|=\frac{11}{56u^3}.$$



Слика 5.6. — Трогубо математичко клатно

Нека се координате $\{x\}$ трансформишу помоћу матрице трансформације T онда ће квадратна форма у новим координатама $\{\bar{x}\}=\{\xi\}$ бити:

$$\{x\}=\mathrm{T}\{\bar{x}\}=\mathrm{T}\{\xi\};\quad Q=(x)\,\mathrm{A}\,\{x\}=(\xi)\,\mathrm{T}'\,\mathrm{A}\mathrm{T}\,\{\xi\}=$$
$$=(\xi)\,\mathrm{K}\,\{\xi\};\quad \mathrm{K}=\mathrm{T}'\mathrm{A}\mathrm{T}=\mathrm{K}'\cong\mathrm{A}.\qquad (5.36)$$

Матрица K је *конгруентна* матрица матрице A. Због тога се ова трансформација назива *конгруентном*. Матрица K је остала такође симетрична матрица и истог ранга. Ознака за конгруентне матрице је знак подударности троуглова из геометрије.

Када је матрица K дијагонална онда се каже да је квадратна форма сведена на *канонски облик*; тада се у њој јављају само квадрати координата помножени елементима дијагоналне матрице те је:

$$Q=(x)\,\mathrm{A}\,\{x\};\quad \mathrm{K}=\mathrm{T}'\mathrm{A}\mathrm{T}=\mathrm{D};\quad Q=(\xi)\,\mathrm{D}\,\{\xi\}=d_1\xi_1^2+d_2\xi_2^2+\cdots+d_n\xi_n^2.\qquad (5.37)$$

Специјалан је случај када је дијагонална матрица јединична (**D**=**I**).

На пример:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix};\qquad \{x\}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Bmatrix};\qquad \mathrm{T}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\qquad \mathrm{T}'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{K}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27 & 17\\ 17 & 11\end{pmatrix};\qquad Q=4x_1^2+4x_1\,x_2+3x_2^2=$$

$$=4(2\xi_1+\xi_2)^2+4(2\xi_1+\xi_2)\,(\xi_1+\xi_2)+3\,(\xi_1+\xi_2)^2=27\,\xi_1^2+34\,\xi_1\,\xi_2+11\,\xi_2^2=$$

$$=(\xi_1\ \ \xi_2)\begin{pmatrix}27 & 17\\ 17 & 11\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Bmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}; \qquad T=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix};$$

$$K=\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 5\end{pmatrix};$$

$$Q=3\,x_1^2+2\,x_1\;x_2+2x_2^2=\xi_1^2+5\,\xi_2^2.$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}; \qquad T=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix};$$

$$K=\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}; \qquad Q=\xi_1^2+\xi_2^2\,.$$

5.6. Конгруентна трансформација. — Трансформација која се врши конгруентном матрицом (5.36) назива се *конгруентном трансформацијом*. Нека се вектор $\{x\}$ трансформише у вектор $\{y\}$ помоћу матрице **A** и нека се координате x_i и y_i трансформишу *контрагредиентно* у координате ξ_i и η_i онда се добија:

$$A\,\{x\}=\{y\}; \qquad \{x\}=T\,\{\xi\}; \qquad \{\eta\}=T'\{y\}=T'\,A\,\{x\}; \qquad |\,T\,|\neq 0;$$

односно

$$\{\eta\}=T'AT\,\{\xi\}=K\,\{\xi\}; \quad K=T'AT. \tag{5.38}$$

Дакле, трансформат $\{\xi\}$ вектора $\{x\}$ претвара се у трансформат $\{\eta\}$ вектора $\{y\}$ помоћу конгруентне матрице **K**.

Матрица K је симетрична матрица па се оваквом трансформацијом чува *симетричност матрице*. Сем тога се овом трансформацијом *не мења скаларни производ вектора*, те је

$$(x)\,\{y\}=(\xi)\,T'\,(T')^{-1}\,\{\eta\}=(\xi)\,I\,(\eta\}=(\xi)\,\{\eta\}. \tag{5.39}$$

На пример:

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}4\\ 1\end{Bmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}; \qquad T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}; \qquad T'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 26\\ 26 & 53\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}9\\ 9\end{Bmatrix}; \qquad \{\eta\}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}2\,x_1+\;x_2\\ x_1+5\,x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}27\\ 36\end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}17 & 26\\ 26 & 53\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}27\\ 36\end{Bmatrix};\qquad \{\xi\}=\begin{Bmatrix}11/5\\ -2/5\end{Bmatrix};$$

$$(x)\ \{y\}=(4\ \ 1)\begin{Bmatrix}9\\ 9\end{Bmatrix}=45=\begin{bmatrix}\frac{11}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}27\\ 36\end{Bmatrix}=\frac{225}{5}=45\,.$$

5.7. Hermite-ова форма. — Када је у квадратној форми (5.33) матрица A ермитска ($H=Q=\overline{Q}'$) а вектор $\{x\}$ комплексни вектор $\{\mathfrak{z}\}$ онда се таква форма назива *ермитска форма*:

$$\mathfrak{H}=(\overline{\mathfrak{z}})\,H\,\{\mathfrak{z}\};\qquad H=\overline{H}'=H^{+};\qquad h_{ik}=\overline{h}_{ki}.$$

Ова форма одређује реални број, јер је

$$\overline{\mathfrak{H}}'=((\overline{\mathfrak{z}})\,H\,\{\mathfrak{z}\})'=((\mathfrak{z})\,\overline{H}\,\{\overline{\mathfrak{z}}\})'=(\overline{\mathfrak{z}})\,\overline{H}'\,\{\mathfrak{z}\}=(\overline{\mathfrak{z}})\,H\,\{\mathfrak{z}\}=\mathfrak{H}.\tag{5.41}$$

Ермитска матрица се може написати као збир реалне матрице A и чисто имагинарне матрице iB, па се добија

$$H=A+iB=\overline{H}'=A'-iB';\quad .\cdot.\quad A=A';\quad B=-B'.\tag{5.42}$$

Из тога се може закључити да је реални део ермитске матрице симетрична матрица A а имагинарни део кососиметрична матрица B. Пошто се и комплексни вектор може приказати као збир реалног и имагинарног вектора то се ермитска форма може написати и у овом облику

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{z}\}=\{x\}+i\{y\};\qquad \mathfrak{H}&=((x)-i\,(y))\,(A+iB)\,(\{x\}+i\,\{y\})=\\ &=(x)\,A\,\{x\}+(y)\,A)\,\{y\}-2\,(x)\,B\,\{y\},\end{aligned}\tag{5.43}$$

јер важе ове релације

$$\begin{aligned}(x)\,A\,\{y\}=(y)\,A\,\{x\};\qquad (x)\,B\{y\}=-(y)\,B\,\{x\};\\ (x)\,B\,\{x\}=(y)\,B\,\{y\}=0.\end{aligned}\tag{5.44}$$

На пример:

$$\{\mathfrak{z}\}=\begin{Bmatrix}2+i\\ 1-i\end{Bmatrix};\qquad H=\begin{pmatrix}2 & 1+i\\ 1-i & 4\end{pmatrix};\qquad \mathfrak{H}=(2-i\quad 1+i)\begin{bmatrix}2 & 1+i\\ 1-i & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2+i\\ 1-i\end{Bmatrix}=$$

$$=(2-i\quad 1+i)\begin{Bmatrix}6+2i\\ 7-5i\end{Bmatrix}=26;\qquad \{\mathfrak{z}\}=\begin{Bmatrix}2+i\\ 1-i\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\ 1\end{Bmatrix}+i\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix};$$

$$H=A+i\ B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix};\qquad \mathfrak{H}=(2\ \ 1)\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2\\ 1\end{Bmatrix}+$$

$$+(1\quad -1)\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}-2\ (2\ \ 1)\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}=16+4+6=26.$$

Форма је *косоермитска* ако је матрица H косоермитска, па је

$$\mathfrak{K}=(\overline{\mathfrak{z}})\,\mathrm{H}_k\{\mathfrak{z}\};\qquad \mathrm{H}_k=-\overline{\mathrm{H}}'. \tag{5.45}$$

Ова је форма чисто *имагинарна*.

На пример:

$$\{\mathfrak{z}\}=\begin{Bmatrix}2+i\\1-i\end{Bmatrix};\qquad \mathrm{H}_k=\begin{bmatrix}2i & 1-i\\-1-i & 4i\end{bmatrix}.\qquad \mathfrak{K}=(2-i\quad 1+i)\begin{bmatrix}2i & 1-i\\-1-i & 4i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2+i\\1-i\end{Bmatrix}=$$

$$=(2-i\quad 1+i)\begin{Bmatrix}-2+2i\\3+i\end{Bmatrix}=10\,i.$$

ВЕЖБАЊА

1. Показати да су следеће линеарне форме линеарно зависне:

a) $L_1=x_1+x_2+2\,x_3;\qquad L_2=x_1-x_2+2\,x_3;\qquad L_3=3\,x_1+3\,x_2+6\,x_3;$

b) $L_1=2\,x_1-3\,x_2+x_3;\qquad L_2=4\,x_1-6\,x_2+2\,x_3;\qquad L_3=6\,x_1-9\,x_2+3\,x_3\,.$

2. Трансформисати вектор x помоћу матрице A у вектор y у истом простору:

a) $\mathrm{x}=(2\quad 3\quad -1)$; *b*) $\mathrm{x}=(3\quad 1\quad 0\quad 2)$; *c*) $\mathrm{x}=(1\quad 0\quad 0\quad 3\quad 4)$

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 2 & 1\\3 & 1 & 5\end{bmatrix};\qquad \mathrm{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 1\\1 & 0 & 4 & 2\\3 & 2 & 3 & 1\\4 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix};\qquad \mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\2 & 3 & 4 & 5 & 1\\3 & 4 & 5 & 1 & 2\\4 & 5 & 1 & 2 & 3\\5 & 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

3. У предњем примеру одредити дилатацију вектора x и y.

4. Колики је угао између тих вектора?

5. Вектор $\mathrm{x}=(2\quad 3\quad 6)$ одређен је према основи вектора $(2\quad 2\quad 1)$; $(1\quad 1\quad 1)$ и $(-1\quad -2\quad 2)$. Одредити тај вектор према основи $(4\quad 3\quad 0)$, $(-2\quad 1\quad -2)$ и $(3\quad 3\quad -3)$.

6. Дате су матрице A и T одредити сличну матрицу B:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 2\end{pmatrix};\qquad \mathrm{T}=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{pmatrix};\qquad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 2 & 3\\4 & 1 & 2\end{pmatrix};\qquad \mathrm{T}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

7. Вектор $\mathrm{x}=(3\quad -2\quad 6)$ трансформисати ортогоналним матрицама:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix};\qquad \mathrm{A}=\begin{bmatrix}2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14}\\-4/\sqrt{42} & 5/\sqrt{42} & 1/\sqrt{42}\\1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

8. Написати билинеарну форму и квадратну форму за матрице:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}.$$

9. Написати ермитску и косоермитску форму за матрице:

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}; \qquad H_k=\begin{bmatrix} i & 1+2i & 2-3i \\ -1+2i & 5i & -4-2i \\ -2-3i & 4-2i & 13i \end{bmatrix}.$$

10. Одредити конгруентне матрице за матрице:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}; \qquad T=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix};$$

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad T=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. ТРАНСФОРМАЦИЈЕ МАТРИЦА

6.1. Елементарне трансформације матрица. — Елементарне трансформације матрице не мењају *нити ред* нити *ранг матрице*. Њих има *три* и врше се и на врстама и на колонама матрице, те су:

1° *a*) замена i-те и j-те врсте, са ознаком V_{ij};

b) замена k-те и l-те колоне, са ознаком K^{kl};

2° *c*) множење сваког елемента i-те врсте скаларом $\lambda \neq 0$, ознаке $V_i(\lambda)$;

d) множење сваког елемента k-те колоне скаларом $\lambda \neq 0$, ознаке $K^k(\lambda)$;

3° *e*) додавање елементима i-те врсте елемената j-те врсте помножених скаларом $\lambda \neq 0$, ознаке $V_{ij}(\lambda)$;

f) додавање елементима l-те колоне елемената k-те колоне помножених скаларом $\lambda \neq 0$, ознаке $K^{kl}(\lambda)$.

Свакој елементарној трансформацији матрице одговара *инверзна трансформација* која враћа матрицу на првобитни облик. Ове инверзне трансформације су такође *елементарне трансформације*. У првом случају треба трансформацију још једном поновити па ће се добити првобитна матрица; у другом случају треба множити бројем $1/\lambda$, а у трећем случају узети негативни множилац $(-\lambda)$.

На пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = 12; \quad r = 3; \quad V_{12} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad |V_{12}| = -12;$$

$$K^{23} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}; \quad V_2(2) = \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad |V_2(2)| = 24; \quad K^3(3) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$V_{23}(2)=\begin{array}{c} \\ \to \\ \to \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=B; \quad |V_{23}(2)|=12; \quad K^{31}(-1)=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$|K^{31}(-1)|=12; \qquad V_{23}(-2)=A.$$

6.2. Елементарне матрице. — Када се елементарне трансформације примене на јединичну матрицу I_n добијају се *елементарне матрице*. Оне могу бити елементарне матрице по врсти или по колони према томе да ли се елементарна трансформација врши на врстама или на колонама. Прва елементарна трансформација замена двеју врста (или двеју колона) даје *пермутациону матрицу*. Елементарне матрице су истог реда као и јединична матрица. Оне су облика:

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}; \qquad E_{ij}=\begin{array}{c} \\ i\to \\ j\to \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$E^{kl}=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} & k & l & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \end{array}$$

$$E^{kl}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad E_i(\lambda)=\begin{array}{c} \\ \\ \\ i\to \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}=E^i(\lambda); \tag{6.1}$$

$$E_{ij}(\lambda)=\begin{array}{c} \\ i\to \\ j\to \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad E^{kl}(\lambda)=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & l \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} \end{array}.$$

Детерминанте ових матрица износе

$$|E_{ij}|=-1; \qquad |E_i(\lambda)|=\lambda; \qquad |E_{ij}(\lambda)|=1, \tag{6.2}$$

па су стога елементарне матрице *регуларне*.

Елементарне трансформације матрице A могу се свести на *множење* те матрице елементарним матрицама (6.1). *Елементарна трансформација на врстама врши се множењем матрице* A *слева елементарном матрицом врста, а на колонама множењем матрице* A *здесна елементарном матрицом колона.* На овај начин видимо да се елементарне матрице могу сматрати као *оператори елементарних трансформација,* те ће бити:

$$E_{ij}\,A = V_{ij};\quad AE^{kl} = K^{kl};\quad E_i(\lambda)A = V_i(\lambda);\quad AE^k(\lambda) = K^k(\lambda);$$

$$E_{ij}(\lambda)\,A = V_{ij}(\lambda);\quad AE^{kl}(\lambda) = K^{kl}(\lambda). \tag{6.3}$$

С обзиром на (6.2) следи да *свака регуларна* матрица A и после елементарних трансформација *остаје регуларна,* јер су детерминанте:

$$|E_{ij}\,A| = |AE_{lj}| \neq 0;\qquad |E_i(\lambda)\,A| = |AE_i(\lambda)| \neq 0;$$

$$|E_{ij}(\lambda)\cdot A| = |AE_{ij}(\lambda)| \neq 0. \tag{6.4}$$

Пошто елементарне матрице нису комутативне, то се приликом узастопних елементарних трансформација *мора одржати ред трансформација.* Због тога се мора водити рачуна о писању редоследа трансформација: *прва трансформација је представљена оператором* (елементарном матрицом) *уз саму матрицу* A, *друга је удаљена од претходног оператора за једно место,* и тако редом. Једна таква сложена елементарна трансформација је облика

$$E_{21}(2)\cdot E_2(-1)\cdot E_{12}\cdot A = B;\quad A\cdot E^1(2)\cdot E^{23}\cdot E^{12}(-2) = C. \tag{6.5}$$

На пример, за матрицу A биле би елементарне трансформације на врстама односно на колонама:

$$A = \begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&8\\1&4&7\\3&6&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&8\\-1&-4&-7\\3&6&9\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2&5&8\\3&6&9\\3&6&9\end{pmatrix} = B;\quad \begin{pmatrix}2&5&8\\1&4&7\\3&6&9\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}2&5&8\\-1&-4&-7\\3&6&9\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}2&5&8\\3&6&9\\3&6&9\end{pmatrix} = B;$$

$$\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&7\\4&5&8\\6&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7&4\\4&8&5\\6&9&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&4\\4&0&5\\6&-3&6\end{pmatrix}=C;\quad \begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}2&4&7\\4&5&8\\6&6&9\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2&7&4\\4&8&5\\6&9&6\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}2&3&4\\4&0&5\\6&-3&6\end{pmatrix}=C;\qquad |A|=|B|=|C|=0;$$

ранг $r=2$, јер су,

$$\begin{vmatrix}1&4\\2&5\end{vmatrix}\neq 0;\quad \begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}\neq 0;\quad \begin{vmatrix}2&3\\4&0\end{vmatrix}\neq 0.$$

6.3. Еквивалентне матрице и еквивалентне трансформације. — Две матрице A и B називају се *еквивалентне* ако је једна добијена из друге помоћу низа узастопних елементарних трансформација било по врстама било по колонама, или и по врстама и по колонама. Свака је матрица сама себи еквивалентна; ако је матрица B еквивалентна матрици A, онда је и матрица A еквивалентна матрици B, јер се обрнутим елементарним трансформацијама може добити из ње. Еквивалентне матрице се обележавају на овај начин:

$$A \to B;\quad B \to A;\quad rang\, A = rang\, B. \tag{6.6}$$

Еквивалентне су матрице *истог реда* и *истог ранга.*

На пример:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&3&5&1\\1&3&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&-1&-1&-3\\0&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&0&0&0\\0&1&1&3\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&3\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right)=B;\quad r=2;$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&3&2&2\\2&4&3&4\\3&7&4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right);\quad r=3;$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1+i & -i\\ 0 & i & 1+2i\\ 1 & 1+2i & 1+i\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 1+2i\\ 1 & i & 1+2i\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 1+2i\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{B};\qquad r=2.$$

Када се врше елементарне трансформације на врстама онда *са* матрица **A** *множи слева операторима — елементарним матрицаме* (6.1), а када се врши трансформација на колонама, онда се она множи *здесна* елементарним матрицама. Производи оператора са обе стране матрице **A** даће по једну регуларну матрицу, па се еквивалентне матрице могу написати у овом облику

$$V=\Pi\, E_{mn}(\lambda)\cdot E_r(\alpha)\cdot E_{ij};\qquad K=\Pi\, E^{qu}(\lambda)\cdot E^{p}(\beta)\cdot E^{kl};$$

$$VAK=B;\quad |V|\neq 0;\quad |K|\neq 0;\quad A\rightarrow B. \tag{6.7}$$

Две су матрице **A** *и* **B** *еквивалентне тада и само тада ако постоје две несингуларне матрице* **V** *и* **K** *одређене горњом релацијом као производи елементарних матрица врста односно колона, тако да је задовољен услов* (6.7).

На пример:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix};\quad V=\mathbf{E}_{21}(-1)\,.\,\mathbf{E}_{31}(-1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$|V|=1;\quad K=\mathbf{E}^{12}(-3)\cdot\mathbf{E}^{13}(-3)=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$|K|=1;\quad |A|=1;\quad r=3;\quad VAK=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3;$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix};\quad |A|=0;\quad r=2;\quad V=\mathbf{E}_{13}\cdot\mathbf{E}_2(-1)\cdot\mathbf{E}_{12}(1)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$|V|=1; \quad K=E^{12}\cdot E^{31}(-2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad |K|=-1;$$

$$VAK\to B=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 6 \\ 7 & -2 & -6 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad |B|=0; \quad r=2.$$

Када је матрица A правоугаона типа (m, n) тада оператор V мора бити квадратна матрица типа (m, m), а оператор K такође квадратна матрица типа (n, n) пошто је $(m, m)\cdot(m, n)\cdot(n, n)=(m, n)$. Обе матрице оператори морају бити *регуларне матрице*, па се множењем матрице A њима не мења њен ранг.

На пример:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}; \quad V=E_{12}\cdot E_2(2)\cdot E_{21}(-1)=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad |V|=-2\neq 0; \quad r=2;$$

$$K=E^{13}\cdot E^{2}(-1)\cdot E^{12}(2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad |K|=1\neq 0;$$

$$VAK\to B=\begin{pmatrix} -8 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -5 & 2 & 10 \end{pmatrix}; \quad r=2; \quad (3, 3)\,(3, 4)\,(4, 4)=(3, 4).$$

Из (6.7) следе ове особине еквивалентних матрица:

1° *Свака матрица је еквивалентна самој себи*

$$A=IAI\to A; \qquad V=I; \qquad K=I; \tag{6.8. a}$$

2° *Када је матрица* B *еквивалентна матрици* A, *тада је и матрица* A *еквивалентна матрици* B:

$$VAK\to B; \qquad V^{-1}BK^{-1}\to A; \tag{6.8. b}$$

3° *Када је матрица* A *еквивалентна матрици* B *а ова еквивалентна матрици* C *тада је и матрица* A *еквивалентна матрици* C:

$$VAK\to B; \qquad WBQ\to C; \qquad (WV)\,A\,(KQ)\to C. \tag{6.8.c}$$

Овакве трансформације састављене од коначног броја елементарних трансформација било на врстама, било на колонама називају се *еквивалентне трансформације*.

6.4. Канонска матрица. Hermite-ов нормални облик. — Помоћу елементарних трансформација *само по врстама* може се свака матрица ранга r која није нула матрица свести на *канонску матрицу* **C**. Код ове матрице елементи првих r врста нису сви једнаки нули, док су елементи свих даљњих врста од ($r+1$ до m) једнаки нули. У r-ој врсти први елемент различит од нуле једнак је јединици ($a_{rk}=1$) док су сви остали елементи те колоне (r) једнаки нули. Дакле, биће:

$$r<n;\qquad \mathbf{VA}\to\mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & 0 & 0 & \cdots & c_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 1 & & c_{rn}\\ 0 & 0 & 0 & & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

Ако први елемент r-те врсте различит од нуле није једнак јединици, онда се множењем елемената те врсте реципрочном вредношћу добија да је тај елемент једнак јединици.

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix};\quad r=2;\quad \mathbf{E}_{32}(-5)\cdot\mathbf{E}_{12}(1)\cdot\mathbf{E}_2\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\mathbf{E}_{21}(-2)\cdot\mathbf{E}_{31}(1)\,\mathbf{A}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -3/5\\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5\\ 0 & 0 & 1 & -\ 3/5\\ 0 & 0 & 5 & -\ 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5\\ 0 & 0 & 1 & 3/5\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{C};$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 3\\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6\\ 0 & -4 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\mathbf{C}.$$

Код квадратне матрице може се канонска матрица тако подесити да су елементи на главној дијагонали јединице или једнаки нули. Овакав се облик матрице назива *Hermite*-ов нормални облик матрице. *Број јединица на главној дијагонали одређује ранг матрице, а број* *нула дегенерацију.* Линеарно независни вектори одговарају оним врстама чији су главни дијагонални елементи јединице, линеарно зависни вектори одговарају врстама чији су елементи једнаки нули. Схема овакве нормалне матрице четвртог реда је:

$$\mathrm{VA}=\mathfrak{E}=\begin{bmatrix} 1 & e_{12} & 0 & e_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

Када је матрица A *регуларна*, тада се сви елементи на главној дијагонали могу елементарним трансформацијама претворити у јединице а остали у нуле, па се матрица A трансформише у *јединичну*. Дакле, *Hermite-ов нормални облик регуларне матрице је јединична матрица.* Међутим, сингуларна матрица A се *не може* само овим трансформацијама (по врстама) свести на дијагонални облик.

На пример:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathrm{A}|=4;$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad r=2; \quad d=1.$$

6.5. Нормални облик матрице. — Помоћу елементарних трансформација по врстама и колонама може се свака правоугаона матрица типа (m, n), ранга r, свести на један од облика

$$\mathrm{VAK}\to\mathrm{N}\to\mathrm{I}_r; \quad (\mathrm{I}_r, \mathrm{O}); \quad \begin{Bmatrix} \mathrm{I}_r \\ \mathrm{O} \end{Bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}\to\mathfrak{D} \tag{6.11}$$

који се зове *нормални облик матрице* A. У последњем облику — *дијагоналном* — јединична матрица I_r је реда r а нулте матрице су типа

$(r, n-r)$; $(m-r, r)$ и $(m-r, n-r)$. Матрица нула је сопствени нормални облик. Пошто се елементарне трансформације врше помоћу регуларних матрица **V** и **K** то је *ранг* матрице **N** *исти као и ранг матрице* **A**.

На пример:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}| = 0; \quad r = 2; \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix};$$

$$|\mathbf{V}| = -1; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3/5 & 1 \\ 0 & -2/5 & 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{K}| = -1;$$

$$\mathbf{VAK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3/5 & 1 \\ 0 & -2/5 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3/5 & 1 \\ 0 & -2/5 & 1 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

c)

$$\begin{matrix} \mathbf{A} = \\ (r = 3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Помоћу елементарних трансформација на врстама и на колонама, односно помоћу регуларних матрица V и K, може се свака матрица A свести на нормални еквивалентни дијагонални облик код кога се према (6.11) на главној дијагонали појављују јединице и нуле, $VAK \overset{\cdot}{\rightarrow} \mathfrak{D}$. Помоћу дијагоналног нормалног облика могу се одредити регуларне матрице оператори V и K. Производ следећих супер-матрица износи

$$\begin{pmatrix} V & O \\ O & I \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & O \\ O & K \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V & VA \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ O & K \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V & VAK \\ O & K \end{pmatrix}$$

па је матрица

$$\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} V & VAK \\ O & K \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} V & \mathfrak{D} \\ O & K \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

из које се могу одредити матрице оператори V и K. Ако се матрица A познатим трансформацијама на врстама и на колонама своди на нормални дијагонални облик $\mathfrak{D}$, онда се матрице оператори V и K добијају истим трансформацијама из јединичне матрице. Дакле, *лева горња јединична матрица трансформише се по врстама у матрицу* V *на исти начин као што се трансформише и матрица* A *по врстама, а десна доња јединична матрица трансформише се по колонама у матрицу* K *на исти начин као што се трансформише по колонама и матрица* A.

На пример:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 4 \\ \hline & O & & & I & \end{array}\rightarrow\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 4 \\ \hline & O & & & I & \end{array}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline & O & & & I & \end{array}\rightarrow\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline & O & & & I & \end{array}\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\mathbf{O}} & \multicolumn{3}{c}{\mathbf{I}} \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5/4 & -1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\mathbf{O}} & \multicolumn{3}{c}{\mathbf{I}} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{V} & 0 & 1 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{O} & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{V} & 0 & 1 & 0 \\ \cline{2-4} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{O} & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array};$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \\ 5/4 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}| = 0; \quad r = 2; \quad d = 1.$$

6.6. Слична (колинеарна) трансформација. — Ову смо трансформацију приказали при трансформацији вектора (**чл. 5.2**). Међутим, ако су матрице **V** и **K** регуларне матрице везане релацијом $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{K}$ онда се трансформација матрице **A** у матрицу **B** остварена релацијом

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{K}; \quad \mathbf{VK} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{AV} = \mathbf{B}; \quad \mathbf{A} \sim \mathbf{B}; \quad \mathbf{VAV}^{-1} = \mathbf{C}, \tag{6.13}$$

назива *слична* или *колинеарна трансформација.* Матрице **A** и **B** су *сличне матрице.* Ове матрице припадају групи еквивалентних матрица, односно еквивалентних трансформација. Пошто су матрице **V** и **K** регуларне матрице то слична трансформација *не мења ранг* трансформисане матрице. Сем тога, како смо видели (5.18), сличне матрице имају *исте детерминанте* и *исте трагове.*

На пример:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{V}| = 1; \quad \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{V} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -13 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix};$$

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 = |\mathrm{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$\operatorname{tr} \mathrm{A} = 1+4+5 = 10 = \operatorname{tr} \mathrm{B} = 5+4+1 = 10; \quad |\mathrm{C}| = 3; \quad \operatorname{tr} \mathrm{C} = -3+1+12 = 10.$$

6.7. Конгруентна трансформација. — Када је симетрична матрица A несингуларна, $|\mathrm{A}| \neq 0$, матрица B која се добија трансформацијом

$$\mathrm{B} = \mathrm{V}'\mathrm{A}\mathrm{V}; \qquad \mathrm{B} \cong \mathrm{A}; \qquad \mathrm{C} \cong \mathrm{V}\mathrm{A}\mathrm{V}' \tag{6.14}$$

је *конгруентна матрица* матрици A. Оваква трансформација је *конгруентна трансформација.* И она спада у групу еквивалентних трансформација, а пошто је $\mathrm{V} = \mathrm{K}'$ то се *исте елементарне трансформације врше и на врстама и на колонама.* При овој трансформацији симетричност матрице остаје очувана. Свака симетрична матрица може се само овом трансформацијом свести на дијагонални облик.

На пример:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathrm{A}| = 1; \quad \mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathrm{V}| = 1;$$

$$\mathrm{B} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 12 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 34 & -1 \\ 34 & 45 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{A} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{C} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 18 & 1 \\ 5 & 13 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 31 & 0 \\ 31 & 75 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathrm{B}.$$

6.8. Коњуктивна трансформација. — Две *комплексне матрице* A и B везане релацијом

$$B=\bar{V}'AV=V^{+}AV, \tag{6.15}$$

јесу *ермитски конгруентне* или *коњуктивне*. Оваква трансформација се назива *коњуктивна трансформација*. Ако је матрица **A** ермитска онда је и матрица **B** ермитска; када је матрица **A** косоермитска таква ће бити и матрица **B**. Ове се матрице, дакле, добијају елементарним трансформацијама, чији сваки пар се састоји из трансформације по колонама и одговарајуће коњуговане трансформације по врстама.

На пример:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1-i & 2+2i \\ 1+i & 3 & 4 \\ 3+i & 2 & 1+i \end{pmatrix}; \quad V=\begin{pmatrix} 2+i & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-i \\ i & 1 & i \end{pmatrix};$$

$$\bar{V}'=\begin{pmatrix} 2-i & i & -i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 2+i & -i \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1+12i & 13+3i & 3+2i \\ 9+13i & 24+2i & 18+8i \\ 4+9i & 19+5i & 9+12i \end{pmatrix}.$$

6.9. Аутоморфне трансформације. — Регуларне матрице **V** (или комплексно регуларне матрице **V**) које дату реалну (или комплексну) матрицу трансформишу *у саму себе* представљају *аутоморфну трансформацију*. За овакве трансформације важе релације

$$V^{-1}AV=A; \quad V'AV=A; \quad \bar{V}'AV=A; \quad \bar{V}'=V^{+}. \tag{6.16}$$

Када је матрица **A** јединична матрица тада су матрице **V** ортогоналне односно унитарне матрице (**чл. 3.11**):

$$A=I; \quad V'I\,V=V'V=I; \quad \bar{V}'IV=\bar{V}'V=I. \tag{6.17}$$

Међутим, у општем случају доста је тешко одредити матрице **V**, јер треба решити матричну једначину (6.16).

6.10. Ранг производа матрица. — У **чл. 3.10.** изнели смо правило о одређивању ранга правоугаоне матрице типа (m, n): он је једнак реду највеће квадратне несингуларне субдетерминанте која се може образовати од врста и колона матрице. Дакле, биће $r_{\max}=m$ ако је $m<n$ и $r_{\max}=n$ ако је $n<m$. У **чл. 4.5.** видели смо да ранг или број димензија векторског простора (V_n) представља највећи број линеарно независних вектора тога простора. Свака матрица се може представити помоћу вектора: свака врста образује вектор врсту, а свака колона образује вектор колону, па се матрица **A** представља

као матрица колона вектора врста и обратно као матрица врста вектора колона. За квадратну матрицу реда n било би

$$\mathbf{A}=\begin{Bmatrix}(a_1)\\ \vdots\\ (a_i)\\ \vdots\\ (a_n)\end{Bmatrix}; \quad \mathbf{A}=(\{a_1\}\ \ldots\ \{a_k\}\ \ldots\ \{a_n\}). \tag{6.18}$$

Нека ранг система вектора $\mathbf{a}_i$ буде r онда је $r<n$, те постоји r међусобно независних вектора, па је њихова линеарна комбинација

$$\lambda_1\,\mathbf{a}_1+\lambda_2\,\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_i\,\mathbf{a}_i+\cdots+\lambda_r\,\mathbf{a}_r. \tag{6.19}$$

Променом места двама векторима, односно множењем елементарном матрицом $\mathbf{E}_{ij}$, ранг векторског простора неће се променити, па матрице $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}_{ij}\,\mathbf{A}$, или $\mathbf{A}\mathbf{E}^{kl}$, *имају исти ранг.* Множењем неке врсте (или колоне) бројем $\lambda\neq 0$ неће се променити ранг, јер ранг матрице $\mathbf{A}$ је исти као и матрице $\mathbf{E}_i(\lambda)\cdot\mathbf{A}$, односно $\mathbf{A}\mathbf{E}^k(\lambda)$, пошто се не мења ни линеарна комбинација (6.19). При множењу вектора $\mathbf{a}_i$ скаларом λ може се неки скалар λ_i заменити скаларом $\lambda_i\lambda/\lambda=\lambda_i$. Када се вектор $\mathbf{a}_j$ помножи скаларом λ и дода вектору $\mathbf{a}_i$ неће се ранг променити, пошто се матрица $\mathbf{A}$ множи елементарном матрицом $\mathbf{E}_{ij}(\lambda)$, односно матрицом $\mathbf{E}^{kl}(\wedge)$, јер се не мења ни линеарна комбинација (6.19) која сада постаје $\lambda_1\,\mathbf{a}_1+\cdots+\lambda_i\,\mathbf{a}_i+(\lambda\lambda_i+\lambda_j)\,\mathbf{a}_j+\cdots+\lambda_r\,\mathbf{a}_r$. Дакле, елементарним трансформацијама неће се променити ранг матрице $\mathbf{A}$ која је представљена векторима врстама или колонама. Видели смо такође да се елементарним трансформацијама не мења ранг матрице дефинисан према њеној детерминанти, јер се првом елементарном трансформацијом мења само предзнак детерминанте, а другом се детерминанта повећава λ пута а такође и све њене субдетерминанте; трећа трансформација не мења вредност детерминанте нити вредност њених субдетерминанти, па се не мења ни ранг. Из овога излази да је *ранг матрице — дефинисан према реду њене највише квадратне субдетерминанте или према броју линеарно независних вектора којима је одређена матрица — увек исти број. Он не зависи од тога да ли се трансформације врше по врстама или по колонама.* Ово значи да је *ранг матрице инваријанта еквивалентне трансформације, јер се не мења при тој трансформацији.*

На основу изнетог може се закључити да *производ матрице* $\mathbf{A}$ *неком регуларном матрицом било слева било здесна не мења њен ранг.* Стога можемо извести два закључка:

1° *ранг производа двеју регуларних квадратних матрица остаје непромењен и једнак рангу матрица чиниоца;* и

2° *ранг производа регуларне и сингуларне матрице једнак је рангу сингуларне матрице.*

На пример:

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&11\\11&12\end{pmatrix};\quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}18&7\\13&7\end{pmatrix};\quad r=2;\quad s=2;\quad \rho=2;$$

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}4&1&1\\3&2&1\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&7&17\\10&8&19\\20&12&36\end{pmatrix};\quad \begin{array}{l}|\mathbf{A}|=15;\quad r=3;\quad s=2;\\ |\mathbf{B}|=0;\quad \rho=2;\quad |\mathbf{AB}|=0.\end{array}$$

Када су матрице сингуларне онда се ранг не може тачно одредити али се може одредити размак у коме се он налази према *Sylvester-овом закону нулитета* који гласи:

Ако су **A** *и* **B** *две квадратне матрице реда n рангова r и s, нулитета $d=n-r$ и $\delta=n-s$, онда ранг ρ и нулитет (дегенерација) D производа матрица задовољавају ове неједнакости:*

$$\rho\geqslant r+s-n;\qquad \rho\leqslant r;\qquad D\geqslant d;\qquad D\geqslant\delta;$$

$$d+\delta\geqslant D\geqslant d;\qquad r\leqslant s. \tag{6.20}$$

На пример:

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&3&1&2\\1&2&0&0\\0&-1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&3&5&8\\3&5&8&10\\2&8&10&-8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}23&56&79&22\\14&32&46&20\\5&8&13&18\\-9&-24&-33&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3&0&0\\9&15&0&-88\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};$$

$|\mathbf{A}|=0;\quad r=2;\quad |\mathbf{B}|=0;\quad s=3;\quad |\mathbf{AB}|=0;\quad \rho\geqslant 2+3-4=1;\quad \rho=2;$

$D=4-2=2;\quad d=4-2=2;\quad \delta=4-3=1.$

6.11. Свођење матрице на троугласту матрицу. — Троугласти облик матрице је такође један од нормалних или канонских облика, па се свака квадратна матрица реда n може свести на троугласту матрицу: *леву-доњу* или *десну-горњу*, (чл. **2.5**). Ово свођење се може извршити и са регуларном и са сингуларном квадратном матрицом, и то елементарним трансформацијама и по врстама и по колонама.

Да бисмо квадратну матрицу **A**, реда n, претворили у десну (горњу) троугласту матрицу применићемо *Gauss-ов алгоритам* (чл. **1.5**). Претпоставимо да је коефицијент $a_{11}\neq 0$; помножимо елементе прве врсте са $-a_{i1}/a_{11}$ и додајмо елементима осталих врста (i) постићи ћемо да су сви елементи прве колоне једнаки нули изузев првог члана a_{11}. Ова трансформација је еквивалентна множењу матрице **A** слева троугаоном матрицом — оператором овакве трансформације, па се добија:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1k}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2k}\ \ldots\ a_{2n} \\ \hdashline a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{ik}\ \ldots\ a_{in} \\ \hdashline a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nk}\ \ldots\ a_{nn} \end{array}\right]; \qquad \mathbf{T}_1 = \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -a_{i1}/a_{11} & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline -a_{n1}/a_{11} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

$$\mathbf{T}_1\,\mathbf{A} \to \mathbf{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \hdashline 0 & a_{i2}^{(1)} \ldots & a_{in}^{(1)} \\ \hdashline 0 & a_{n2}^{(1)} \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{array}\right]. \tag{6.21}$$

Нека је коефицијент $a_{22}^{(1)} \neq 0$ онда поновимо поступак са другом врстом и другом колоном, то јест помножимо елементе друге врсте са $-a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и додајмо елементима свих осталих врста постићи ћемо да су елементи друге колоне испод елемента $a_{22}^{(1)}$ сви једнаки нули. Ова трансформација је једнака производу матрице $\mathbf{A}^{(1)}$ оператором $\mathbf{T}_2$, па се добија нова матрица:

$$\mathbf{T}_2\,\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_1\,\mathbf{A} \to \mathbf{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ \hdashline 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{array}\right];$$

$$\mathbf{T}_2 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \ldots\ldots \\ 0 & 1 & \ldots\ldots \\ 0 & -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & \ldots \\ \hdashline 0 & -a_{n3}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & \ldots\ 1 \end{array}\right]. \tag{6.22}$$

Сада ћемо овај поступак — познат као *Gauss-ов поступак* или *алгоритам* — поновити са коефицијентом $a_{33}{}^{(2)}$ ако је он различит од нуле, односно помножићемо матрицу $\mathbf{A}^{(2)}$ оператором $\mathbf{T}_3$. У неком p-том поступку са p-том врстом имали бисмо оператор облика p:

$$\mathrm{T}_p = p \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & & & -a_{p+1,p}^{(p-1)} & / \, a_{pp}^{(p-1)} & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n,p}^{(p-1)} & /a_{pp}^{(p-1)} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (6.23)$$

Оваквих оператора биће $n-1$, па се тако матрица **A** трансформише на десну (горњу) троугласту матрицу, те је

$$\mathrm{TA} \rightarrow \mathrm{B}^{(d)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathrm{T} = \mathrm{T}_{n-1}\,\mathrm{T}_{n-2} \dots \mathrm{T}_p \dots \mathrm{T}_2\,\mathrm{T}_1, \qquad (6.24)$$

где је матрица **T** оператор ове трансформације. Ова матрица је производ појединачних оператора; *она је увек регуларна; детерминанте јединице*

$$|\mathrm{T}| = |\mathrm{T}_{n-1}| \cdot |\mathrm{T}_{n-2}| \dots |\mathrm{T}_p| \dots |\mathrm{T}_2| \cdot |\mathrm{T}_1| = 1. \qquad (6.25)$$

Вредност детерминанте троугласте матрице (**B**) једнака је производу елемената главне дијагонале и не зависи од осталих њених елемената. Елементи троугласте матрице повезани су са главним минорима **(члан 3.9)** матрице **A** овим релацијама:

$$b_{11} = a_{11} = \Delta_1; \quad b_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{1}{b_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad b_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{\Delta_3}{b_{11}\,b_{22}};$$

$$b_{ii} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} = \frac{\Delta_i}{b_{11}\,b_{22} \dots b_{i-1,\,i-1}}; \qquad (6.26)$$

$$\Delta_n = |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = \prod_{i=1}^{n} b_{ii} = b_{11}\,b_{22} \dots b_{ii} \dots b_{nn}.$$

На пример:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad |\mathrm{A}| = 160; \quad \mathrm{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$|\mathrm{T}_1| = 1; \quad \mathrm{T}_1\,\mathrm{A} = \mathrm{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -16 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{T}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&1&1&\\0&1&0&1\end{pmatrix};\quad |\mathrm{T}_2|=1;\quad \mathrm{T}_2\,\mathrm{A}^{(1)}=\mathrm{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}1&1&5&2\\0&-2&-16&-5\\0&0&-20&-8\\0&0&-20&-4\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\0&0&-1&1\end{pmatrix};\quad |\mathrm{T}_3|=1;\quad \mathrm{T}_3\,\mathrm{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}1&1&5&2\\&-2&-16&-5\\&&-20&-8\\&&&4\end{pmatrix}=\mathrm{B};$$

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}_3\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&1&1&\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\-4&1&&\\-2&0&1&\\-1&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&&&\\-4&1&&\\-6&1&1&\\1&0&-1&1\end{pmatrix};\quad |\mathrm{T}|=1;\quad \mathrm{TA}=\begin{pmatrix}1&1&5&2\\&-2&-16&-5\\&&-20&-8\\&&&4\end{pmatrix};$$

$$b_{11}=1;\quad b_{22}=(2-4)/1=-2;\quad b_{33}=[(12-16)-4\,(6-20)+2\,(4-10)]/-2=-20;$$

$$b_{44}=|\mathrm{A}|/40=4;\quad \Delta_1=1;\quad \Delta_2=-2;\quad \Delta_3=40;\quad \Delta_4=|\mathrm{A}|=160;$$

$$|\mathrm{B}|=1\cdot-2\cdot-20\cdot4=160=|\mathrm{A}|.$$

Када је неки елемент на главној дијагонали једнак нули $a^{(p)}_{p+1,\,p+1}=0$, тада се не може вршити дељење. У овом случају треба видети да ли је неки елемент те колоне *испод* тог елемента различит од нуле, па извршити елементарну трансформацију по тим врстама и поступак наставити, јер то не утиче иа троугласти облик матрице. Ако су пак сви елементи те колоне испод тог елемента једнаки нули, треба поступак продужити са субматрицом елемента $a^{(p)}_{p+2,\,p+2}$ наредне врсте или ће се на месту претходног елемента појавити нула. У овом случају, дакле, биће на дијагонали елемент нула, па је матрица сингуларна, $|\mathrm{A}|=0$. *Број нула показује дегенерацију матрице* **A**, *а њен је ранг* $r=n-d$.

На пример:

а)

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&5\\2&4&8\end{pmatrix};\quad |\mathrm{A}|=0;\quad r=2;\quad \mathrm{T}_1=\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\-2&0&1\end{pmatrix};\quad \mathrm{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}1&2&3\\&0&2\\&0&2\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}_2=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&0&1\end{pmatrix};\quad \mathrm{T}_2\,\mathrm{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}1&2&3\\&0&2\\&&2\end{pmatrix}=\mathrm{B};\quad d=1;\quad r=3-1=2;\quad |\mathrm{B}|=0.$$

b) $$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{T}_1=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -1 & 0 & 1 & \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{A}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{E}_{23}\,\mathrm{A}^{(1)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{T}_2=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{A}^{(2)}=\mathrm{T}_2\,\mathrm{E}_{23}\,\mathrm{A}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{E}_{34}\,\mathrm{A}^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}=\mathrm{B}; \quad d=1; \quad r=4-1=3.$$

Када се хоће да се матрица **A** трансформише на *леву (доњу) матрицу* **B** *треба применити исти поступак само по колонама.* Тада се матрица **A** множи операторима $\mathrm{T}^{(k)}$ здесна, па ће бити:

$$\mathrm{AT}=\mathrm{B}_{(l)}; \quad \mathrm{T}=\mathrm{T}^{(1)}\,\mathrm{T}^{(2)}\,\ldots\,\mathrm{T}^{(p)}\,\ldots\,\mathrm{T}^{(n-2)}\,\mathrm{T}^{(n-1)}. \tag{6.27}$$

Облици оператора су:

$$\mathrm{T}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & -a_{12}/a_{11} & \ldots & -a_{1n}/a_{11} \\ & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ & & & 1 \end{pmatrix}; \quad \ldots;$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \downarrow & \end{array} \\ \mathrm{T}^{(p)}=\rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & -a_{p+1,\,p}^{(p-1)}/a_{pp}^{(p-1)} & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.28}$$

На пример:

a) $$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathrm{A}|=88; \quad r=4; \quad \Delta_1=1; \quad \Delta_2=-1; \quad \Delta_3=36; \quad \Delta_4=|\mathrm{A}|=88;$$

$$\mathrm{T}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -3 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{AT}^{(1)}=\mathrm{A}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -11 & -3 & -7 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 3 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & -1 & & \\ 3 & -11 & -36 & 4 \\ 1 & -6 & -14 & 4 \end{pmatrix};$$

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1/9 \\ & & & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^{(2)}\,T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & -1 & & \\ 1 & -11 & -36 & \\ 1 & -6 & -14 & 22/9 \end{pmatrix} = B_{(l)};$$

$$b_{11} = 1; \quad b_{22} = -1/1 = -1; \quad b_{33} = 36/-1 = -36; \quad b_{44} = 88/36 = 22/9 = |\,B\,| = \Pi b_{ii}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} \qquad & \downarrow & \qquad \downarrow & \qquad \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -8 & 3 \\ 6 & -4 & -11 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & -8 & -4 & 3 \\ 6 & -11 & -4 & 5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & -3 & 0 & \\ 3 & -8 & -4 & -7/3 \\ 6 & -11 & -4 & -7/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & -3 & & \\ 3 & -8 & -4 & \\ 6 & -11 & -4 & 0 \end{pmatrix} = B_{(l)};$$

$$|\,A\,| = |\,B\,| = 1 \cdot -3 \cdot -4 \cdot 0 = 0; \qquad d = 1; \qquad r = 3.$$

Применом оператора **T** по врстама и по колонама, то јест са леве и десне стране, може се матрица **A** свести на *дијагоналну матрицу*. Дакле, било би:

$$T_{n-1}\,T_{n-2}\,\ldots\,T_2\,T_1\,AT^{(1)}\,T^{(2)}\,\ldots\,T^{(n-2)}\,T^{(n-1)} = D. \tag{6.29}$$

На пример:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1\,| & 4\,| & 5 \\ \cline{1-1} 2 & 6\,| & 8 \\ \cline{1-2} 3 & 9 & 18 \end{array}\right); \qquad |\,A\,| = -12; \qquad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T_1\,A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{(2)} = T_1\,AT^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T_2\,A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=A^{(3)};\quad T^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix};$$

$$|\,D\,|=1\cdot(-2)\cdot 6=-12=|\,A\,|;\quad b_{11}=\Delta_1=1;\quad b_{22}=6-8=-2;\quad b_{33}=-12/-2=6.$$

6.12. Разлагање матрице у производ две троугласте матрице. — Из једначине (6.24) следе ове матричне релације:

$$TA=B;\quad A=T^{-1}\,B=CB;\quad A-CB=O, \tag{6.30}$$

где смо матрицу T^{-1} означили као леву (доњу) троугласту матрицу C. Овим се *квадратна матрица* A *може разложити у производ две троугласте матрице — једне доње* (C) *и друге горње* (B), *те ће бити:*

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn}\end{Vmatrix}=$$

$$\downarrow$$

$$\overset{=}{\rightarrow}\begin{Vmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ii} & \dots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{ni} & \dots & c_{nn}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \dots & b_{ik} & \dots & b_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{nn}\end{Vmatrix}. \tag{6.31}$$

Између коефицијената матрица следе познате релације за производ

$$a_{ik}=\sum_{r=1}^{i-1} c_{ir}\,b_{rk}=(c_{i1}\,c_{i2}\,\dots\,c_{ir}\,\dots)\begin{Bmatrix} b_{1k}\\ b_{2k}\\ \vdots\\ b_{ik}\\ \vdots\end{Bmatrix};\quad r=1,2,\dots,\ i-1. \tag{6.32}$$

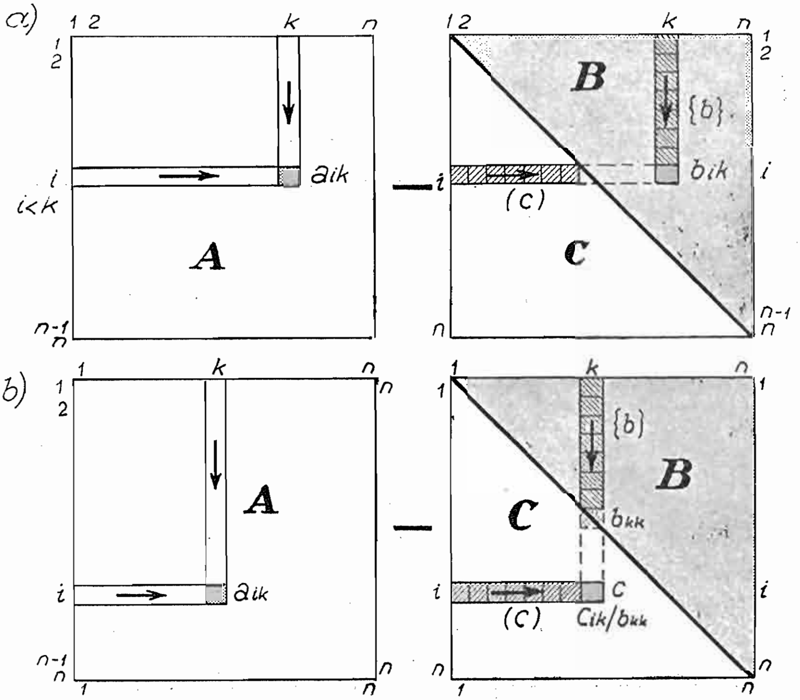
Квадратна матрица A реда n има n^2 коефицијената; свака троугласта матрица има укупан број елемената једнак збиру природних бројева $1+2+3+\cdots+n-1+n=(n+1)\,n/2$. Број једначина (6.32) је n^2, а укупан број непознатих c_{ik} и b_{ik} износи $(n+1)\,n=n^2+n$. Због тога се n непознатих може узети произвољно, па се обично узима да су коефицијенти $c_{ii}=1$. Пошто су тада коефицијенти матрице A:

$$\begin{array}{lll} a_{11}=c_{11}\ b_{11}; & a_{21}=c_{21}\ b_{11}; & a_{31}=c_{31}\ b_{11};\\ a_{12}=c_{11}\ b_{12}; & a_{22}=c_{21}\ b_{12}+c_{22}\ b_{22}; & a_{32}=c_{31}\ b_{12}+c_{32}\ b_{22};\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1k}=c_{11}\ b_{1k}; & a_{2k}=c_{21}\ b_{1k}+c_{22}\ b_{2k}; & a_{3k}=c_{31}\ b_{1k}+c_{32}\ b_{2k}+c_{33}\ b_{3k};\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}=c_{11}\ b_{1n}; & a_{2n}=c_{21}\ b_{1n}+c_{22}\ b_{2n}; & a_{3n}=c_{31}\ b_{1n}+c_{32}\ b_{2n}+c_{33}\ b_{3n}; \end{array}$$

то се непознати коефицијенти матрица c_{ik} и b_{ik} одређују обрасцима

$$
\begin{aligned}
&a)\ c_{ii}=1; \quad c_{i1}=\frac{a_{i1}}{a_{11}}; \quad b_{1k}=a_{1k};\\
&b)\ i\leqslant k; \quad b_{ik}=a_{ik}-(c_{ir})\{b_{rk}\}; \quad r=1,2,\ldots,i-1; \qquad (6.33)\\
&c)\ i>k; \quad b_{kk}\,c_{ik}=a_{ik}-(c_{is})\{b_{sk}\}; \quad s=1,2,\ldots,k-1.
\end{aligned}
$$

Дијагонални елементи матрице **C** једнаки су *јединици*, а елементи њене прве колоне количници су одговарајућег елемента прве колоне матрице **A** и првог елемента a_{11}. Елементи прве врсте матрице **B** једнаки су одговарајућим елементима прве врсте матрице **A**. Елементи b_{ik} матрице **B** добијају се када се од елемента a_{ik} одузме скаларни производ вектора врсте (c_{ir}) и вектора колоне $\{b_{rk}\}$; при томе се елементи c_{ir} узимају до дијагоналног елемента а елементи b_{rk} до траженог елемента (b_{ik}). Елементи матрице **C** помножени елементом b_{kk} добијају се када се од елемента a_{ik} одузме скаларни производ вектора врсте $(c_{\cdot s})$ и вектора колоне $\{b_{sk}\}$; при томе се елементи колоне узимају до дијагоналног члана а елементи врсте до траженог елемента c_{ik}. Ово је приказано и схематски на слици 6.1. *a*, *b*.



Слика 6.1. — Схематски приказ разлагања матрице у производ две троугласте матрице

На пример:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5&2\\4&2&4&3\\2&4&6&1\\1&3&1&3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&1&0&0\\2&c_{32}&1&0\\1&c_{42}&c_{43}&1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1&1&5&2\\0&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\0&0&b_{33}&b_{34}\\0&0&0&b_{44}\end{bmatrix};$$

$$b_{22}=2-(4)\{1\}=-2;\qquad b_{23}=4-(4)\{5\}=-16;\qquad b_{24}=3-(4)\{2\}=-5;$$

$$-2\,c_{32}=4-(2)\{1\}=2;\qquad b_{33}=6-(2-1)\left\{\begin{matrix}5\\-16\end{matrix}\right\}=6-10-16=-20;$$

$$b_{34}=1-(2-1)\left\{\begin{matrix}2\\-5\end{matrix}\right\}=1-4-5=-8;$$

$$-2\,c_{42}=3-(1)\{1\}=2,\qquad -20\,c_{43}=1-(1-1)\left\{\begin{matrix}5\\-16\end{matrix}\right\}=1-5-16=-20;\qquad c_{43}=1;$$

$$b_{44}=3-(1-1\quad 1)\left\{\begin{matrix}2\\-5\\-8\end{matrix}\right\}=3-2-5+8=4;$$

$$A=CB;\quad \begin{pmatrix}1&1&5&2\\4&2&4&3\\2&4&6&1\\1&3&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&1&0&0\\2&-1&1&0\\1&-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&5&2\\0&-2&-16&-5\\0&0&-20&-8\\0&0&0&4\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc}1&1&5&2\\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{c|}{4}&-2&-16&-5\\ \cline{2-2} 2&\multicolumn{1}{c|}{-1}&-20&-8\\ \cline{3-3} 1&-1&\multicolumn{1}{c|}{1}&4\end{array}\right);\qquad |A|=160=|C|\cdot|B|=1\cdot(1\cdot-2\cdot-20\cdot4)=160.$$

Овим поступком који је основан на *Gauss*-овом *алгоритму*, односно свођењу матрице на троугласту матрицу, може се свака матрица представити као производ двеју троугластих матрица различитих схема; једна је доња (лева) а друга горња (десна). На ово је прво наишао *Cholesky** код симетричних матрица али је *Banachiewicz*** уопштио за произвољне квадратне матрице. Стога се ова схема назива *Banachiewicz-јева схема*.

Поступак за *симетричне матрице* је упростио *Cholesky* полазећи од чињенице да у симетричној квадратној матрици реда n има $(n+1)\,n/2$ коефицијената a_{ik}, пошто је $a_{ik}=a_{ki}$. Тада је матрица C

---

* *Benoit* — Sur une méthode de résolution des équations normales (procédé du commandant Cholesky), Bull. géodesique vol. **2**, 1924.

** T. Banachiewicz, Bull. internat. acad. polon. sci. Ser. A, 1938.

у ствари транспонована матрица **B**, па се матрица **A** разлаже у производ двеју транспонованих троугластих матрица, те је

$$\mathbf{A}_s=\mathbf{B}'\mathbf{B};\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \hdashline a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \hdashline b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \hdashline 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}. \tag{6.34}$$

Из овог система следи:

$$a_{11}=b_{11}^2; \qquad a_{22}=b_{12}^2+b_{22}^2; \qquad a_{33}=b_{13}^2+b_{23}^2+b_{33}^2;$$

$$a_{12}=b_{11}\,b_{12}; \qquad a_{23}=b_{12}\,b_{13}+b_{22}\,b_{23}; \qquad a_{34}=b_{13}\,b_{14}+b_{23}\,b_{24}+b_{33}\,b_{34};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{1n}=b_{11}\,b_{1n}; \qquad a_{2n}=b_{12}\,b_{1n}+b_{22}\,b_{2n}; \qquad a_{3n}=b_{13}\,b_{1n}+b_{23}\,b_{2n}+b_{33}\,b_{3n};\quad \ldots;$$

па се коефицијенти одређују по обрасцима:

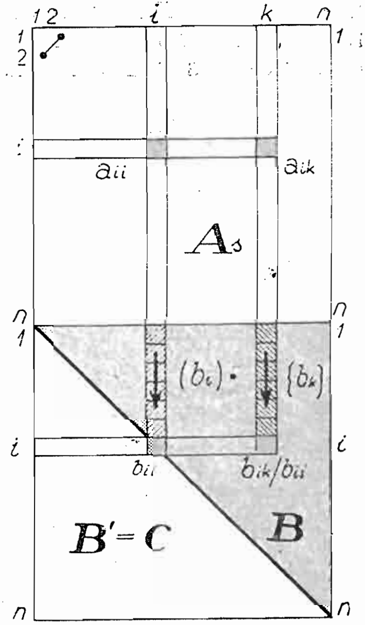
$$a)\ \ b_{11}=\sqrt{a_{11}}\,;\quad b_{1k}=\frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{11}}}\,;$$

$$b)\ \ b_{ii}\,b_{ik}=a_{ik}-\sum(b_{ri})\,(b_{rk})=a_{ik}-$$

$$-(b_i)\,\{b_k\};\ i\neq k;\ r=1,2,\ \ldots,\ i-1; \tag{6.35}$$

$$c)\ \ b_{ii}^2=a_{ii}-\sum(b_{ir})^2=a_{ii}-(b_i)\,\{b_i\};$$

$$i=k;\ r=1,2,\ldots,\ k-1.$$



Слика 6.2. — Схематски приказ *Cholesky*-јевог поступка за симетричне квадратне матрице

Елементи b_{ik} се одређују тако да се разлика коефицијента a_{ik} и скаларног производа вектора **b** колоне (i) и истог вектора колоне (k) подели дијагоналним чланом b_{ii}, при томе се елементи вектора i-те колоне *узимају до дијагоналног члана*, а k-те *колоне до траженог елемента* b_{ik}. Дијагонални елемент b_{ii} одређују се лакше; његов квадрат је једнак разлици елемента a_{ii} и скаларног производа вектора **b** са колоне (i) самим собом. Све се ово може спровести схематски како је показано на слици 6.2.

Помоћу овог разлагања лако се одређује детерминанта матрице А, она је једнака квадрату детерминанте матрице В, односно квадрату производа елемената са главне дијагонале једне матрице В:

$$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|^2=(b_{11}\,b_{22}\,\ldots\,b_{ii}\,\ldots\,b_{nn})^2=\left(\prod_{i=1}^{n} b_{ii}\right)^2. \tag{6.36}$$

На пример:

	4	2	−6
A	2	5	7
	−6	7	−2
	2	1	−3
	1	2	5
	−3	5	6*i*

$|\mathbf{A}|=-576=(2\cdot 2\cdot 6i)^2=(24i)^2=-576;$

$b_{11}=\sqrt{4}=2;\quad b_{12}=2/2=1;\quad b_{13}=-6/2=-3;$

$b_{22}^2=5-(1)\{1\}=4;\quad b_{22}=2;\quad b_{22}\,b_{23}=2b_{23}=7-(1)\{-3\}=10;$

$b_{23}=5;\quad b_{33}^2=-2-(-3\quad 5)\begin{Bmatrix}-3\\ 5\end{Bmatrix}=-2-34=-36;$

$b_{33}=6i;\quad i=\sqrt{-1}.$

Cholesky-јев поступак обично се примењује на *позитивно дефинитне матрице* код којих су основни главни минори (Δ_i) њене детерминанте *позитивни* (**члан 3.9**). Пошто је матрица В трансформат матрице А то морају бити испуњени следећи услови да би матрица А била позитивно дефинитна:

$$\Delta_1=b_{11}>0;\qquad \Delta_2=b_{11}\,b_{22}>0;\qquad \Delta_3=b_{11}\,b_{22}\,b_{33}>0;$$

$$\Delta_n=|\mathbf{A}|=\Pi\, b_{ii}>0. \tag{6.37}$$

На пример:

4	6	2
6	25	11
2	11	14
2	3	1
3	4	2
1	2	3

$\Delta_1=4;\quad \Delta_2=64;\quad \Delta_3=-\begin{vmatrix}0 & 0 & 36\\ 0 & 8 & 23\\ 2 & 11 & 3\end{vmatrix}=576;$

$b_{11}=2;\quad b_{12}=6/2=3;\quad b_{13}=1;$

$b_{22}^2=25-(3)\{3\}=16;\quad b_{22}=4;\quad 4\,b_{23}=11-(3)\{1\}=8;\quad b_{23}=2;$

$b_{33}^2=14-(1\quad 2)\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}=9;\quad b_{33}=3;$

$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|^2=(2\cdot 4\cdot 3)^2=(24)^2=576.$

Када је матрица А *сингуларна*, $|\mathbf{A}|=0$, поступак је углавном исти само се на дијагонали јављају елементи *једнаки нули*. Број нула једнак је броју дегенерације, па је ранг $r=n-d$. У овом случају мора се матрица А онолико пута трансформисати елементарним трансформацијама колики је степен дегенерације.

На пример, дата матрица **A** је сингуларна $|\mathbf{A}|=0$, ранга $r=3$, дегенерације $d=1$. Како је $b_1=\Delta_1=1$, $b_2=\Delta_2/1=0$, то ће се извршити само једна елементарна трансформација на другој и трећој колони:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$|\mathbf{A}|=0;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{array}{c|cccc|}
\mathbf{A}E^{23} & 1 & 3 & 2 & 0 \\
 & 2 & 3 & 4 & 2 \\
 & 3 & 1 & 2 & 3 \\
 & 6 & 7 & 8 & 5 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ \cline{2-2}
 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{-3} & 0 & 2 \\ \cline{3-3}
 & 3 & 8/3 & \multicolumn{1}{|c}{-4} & -7/3 \\ \cline{4-4}
 & 6 & 11/3 & 1 & \multicolumn{1}{|c|}{0}
\end{array}$$

$$c_{ii}=1; \qquad b_{1k}=1;\ \ 3;\ \ 2;\ \ 0;\ \ c_{i1}=1;\ \ 2;\ \ 3;\ \ 6;$$

$$b_{22}=3-(2)\{3\}=-3; \qquad b_{23}=4-(2)\{2\}=0;$$

$$b_{24}=2-(2)\{0\}=2;$$

$$-3\,c_{32}=1-(3)\{3\}=-8; \qquad c_{32}=8/3;$$

$$b_{33}=2-(3\quad 8/3)\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}=-4; \quad b_{34}=3-(3\quad 8/3)\begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}=-7/3;$$

$$-3\,c_{42}=7-(6)\{3\}=-11; \quad c_{42}=11/3;$$

$$-4\,c_{43}=8-(6\quad 11/3)\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}=-4; \quad c_{43}=1;$$

$$b_{44}=5-(6\quad 11/3\quad 1)\begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7/3 \end{Bmatrix}=0.$$

6.13. Матрично решавање система линеарних једначина.

— У чл. **1.5.** изнете су методе за решавање система линеарних једначина, па било да је он *нехомоген* или *хомоген*, помоћу детерминанти а на основу *Cramer-овог правила*. Међутим, многи важни технички проблеми везани су за систем линеарних једначина, па су се појавиле и разне методе за решавање таквих једначина. При овоме се показао матрични рачун као врло подесан за трансформације система једначина, па ћемо овде, за разлику од оног изнетог у **чл. 1.5.**, изнети матричне методе које се данас највише примењују у техничкој пракси.

6.13.1. Cramer-ово правило.

— Општи облик нехомогеног линеарног система од n једначина са n непознатих (1.26) може се приказати и у матричном облику:

$$\begin{smallmatrix} k \\ \longrightarrow \\ \downarrow \\ i \end{smallmatrix}\ \sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n} a_{ik}\,x_k=b_i; \qquad \mathbf{A}\{x\}=\{b\}. \tag{6.38}$$

Овде је матрица **A** *матрица коефицијената* a_{ik}, $\{x\}$ матрица колона *непознатих* x_i а $\{b\}$ матрица колона *независних чланова*. Када је вектор $\{b\}\neq 0$ систем је *нехомоген*, а када је $\{b\}=0$ тада је *хомоген*. Решења система (6.38) зависе од матрице A. Ако је она *регуларна*, тада је $|\mathrm{A}|\neq 0$, па постоји и њена инверзна (реципрочна) матрица. Ово нам показује да су тада једначине линеарног система међусобно *линеарно независне*, те између њих не постоје линеарне комбинације. Када се реши систем (6.38) тада се добија

$$\{x\}=\mathrm{A}^{-1}\{b\}=\mathrm{R}\{b\};\quad \mathrm{R}\,(r_{ik})=\mathrm{A}^{-1};\quad r_{ik}=K_{ki}/|\mathrm{A}|. \tag{6.39}$$

Матрица R је инверзна матрица матрице A, а њени елементи су једнаки количнику кофактора пермутованих индекса и детерминанте матрице A. Ово правило је *Cramer-ово правило* **(чл. 1.5.1)** само изражено матричним путем. У овом се случају проблем своди на израчунавање инверзне матрице, тј. одговарајућих кофактора и детерминанте матрице A. Систем од n једначина има n^2 коефицијената a_{ik} а такође и коефицијената r_{ik}, па треба толико одредити кофактора детерминанте матрице A. Ови су кофактори детерминанте реда $n-1$. Овоме треба додати и одређивање детерминанте матрице A, те се одмах види да је *нумерички посао огроман*; стога се ова метода не употребљава у случају великог броја непознатих (n).

На пример:

$$\begin{aligned} x_1+2x_1+\ x_3&=\ \ 4;\\ 2x_1-\ x_2+3x_3&=-\ 3;\\ 3x_1+4x_2-\ x_3&=\ 12;\end{aligned}\qquad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&3\\3&4&-1\end{pmatrix};\qquad |\mathrm{A}|=22;$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-11&6&7\\11&-4&-1\\11&2&-5\end{pmatrix};\qquad \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-11&6&7\\11&-4&-1\\11&2&-5\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}4\\-3\\12\end{Bmatrix};$$

$$\begin{aligned}x_1&=(-44-18+84)/22=\ \ 1;\\ x_2&=(\ \ 44+12-12)/22=\ \ 2;\\ x_3&=(\ \ 44-\ 6-60)/22=-1;\end{aligned}\qquad \{x\}=\begin{Bmatrix}1\\2\\-1\end{Bmatrix}.$$

6.13.2. Gauss-ов алгоритам. — Овај алгоритам је описан у члану **1.5.5.** Са гледишта матричног рачуна он се састоји у томе да се матрица A трансформише на горњу троугаону матрицу B. При томе трансформације треба вршити и на вектору $\{b\}$ слободних коефицијената, па ће бити:

$$\begin{gathered}\mathrm{A}\{x\}=\{b\};\quad \mathrm{TA}\{x\}=\mathrm{T}\{b\};\quad \mathrm{TA}=\mathrm{B};\quad \mathrm{T}\{b\}=\{c\};\\ \mathrm{B}\{x\}=\{c\};\quad \mathrm{T}=\mathrm{T}_{n-1}\,\mathrm{T}_{n-2}\,\ldots\,\mathrm{T}_p\,\ldots\,\mathrm{T}_2\,\mathrm{T}_1.\end{gathered} \tag{6.40}$$

Непознате се одређују почев од последње врсте по обрасцима

$$x_n=\frac{c_n}{b_{nn}};\quad b_{ii}\,x_k=b_{kk}\,x_k=c_i-\sum_r b_{ir}\,x_r;\quad r=i+1,\,\ldots,\,n, \tag{6.41}$$

Решења x_k задовољавају сваку од једначина система, па треба извршити пробе

$$\begin{array}{l}\xrightarrow{k}\\ \downarrow i\end{array}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_k=b_i;\quad (a_i)\,\{x_i\}=b_i,\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,n; \tag{6.42. a}$$

односно

$$\mathbf{A}\,\{x_i\}=\{b\};\qquad \mathbf{B}\,\{x_i\}=\{c\}. \tag{6.42. b}$$

На пример:

a)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4\\ 1 & -1 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 3\\ 3 & 4 & 5 & -2\end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}15\\-\ 5\\14\\-\ 1\end{matrix}\right\};\quad |\,\mathbf{A}\,|=-106;$$

$$\mathbf{T}_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -{}^{1}/_{2} & 1 & & \\ -{}^{1}/_{2} & 0 & 1 & \\ -{}^{3}/_{2} & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\qquad \mathbf{T}_1\,\mathbf{A}=\mathbf{A}^{(1)}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4\\ & -{}^{5}/_{2} & 1 & -3\\ & {}^{1}/_{2} & -3 & 1\\ & -{}^{1}/_{2} & -1 & -8\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}_1\,\{b\}=\{b^{(1)}\}=\left\{\begin{matrix}15\\ -{}^{25}/_{2}\\ {}^{13}/_{2}\\ -{}^{47}/_{2}\end{matrix}\right\};\qquad \mathbf{T}_2=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & {}^{1}/_{5} & 1 & \\ 0 & -{}^{1}/_{5} & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}_2\,\mathbf{A}^{(1)}=\mathbf{A}^{(2)}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4\\ & -{}^{5}/_{2} & 1 & -3\\ & & -{}^{14}/_{5} & {}^{2}/_{5}\\ & & -\ {}^{6}/_{5} & -{}^{37}/_{5}\end{bmatrix};\qquad \mathbf{T}_2\,\{b^{(1)}\}=\{b^{(2)}\}=\left\{\begin{matrix}15\\ -{}^{25}/_{2}\\ 4\\ -21\end{matrix}\right\};$$

$$\mathbf{T}_3=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -{}^{3}/_{7} & 1\end{bmatrix};\qquad \mathbf{T}_3\,\mathbf{A}^{(2)}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4\\ & -{}^{5}/_{2} & 1 & -3\\ & & -{}^{14}/_{5} & {}^{2}/_{5}\\ & & & -{}^{53}/_{7}\end{bmatrix}=\mathbf{B};$$

$$\mathbf{T}_3\,\{b^{(2)}\}=\left\{\begin{matrix}15\\ -{}^{25}/_{2}\\ 4\\ -{}^{159}/_{7}\end{matrix}\right\}=\{c\};\qquad \mathbf{B}\,\{x\}=\{c\};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4\\ & -{}^{5}/_{2} & 1 & -3\\ & & -{}^{14}/_{5} & {}^{2}/_{5}\\ & & & -{}^{53}/_{7}\end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}15\\ -{}^{25}/_{2}\\ 4\\ -{}^{159}/_{7}\end{matrix}\right\};$$

$$x_1 = \left[15 - (3 \quad 4 \quad 4) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix} \right\} \right] / 2 = 2;$$

$$x_2 = \left[-{}^{25}/_{2} - (1 \quad -3) \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \right\} \right] / (-{}^{5}/_{2}) = 1; \qquad \{x\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix} \right\}.$$

$$x_3 = (4 \quad -{}^{2}/_{5} \cdot 3)/(-{}^{14}/_{5}) = -1;$$

$$x_4 = (-{}^{159}/_{7}) : (-{}^{53}/_{7}) = 3;$$

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = (2 \cdot -{}^{5}/_{2} \cdot -{}^{14}/_{5} \cdot -{}^{53}/_{7}) = -106;$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 15 \\ -5 \\ 14 \\ -1 \end{matrix} \right\};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ & -{}^{5}/_{2} & 1 & -3 \\ & & -{}^{14}/_{5} & {}^{2}/_{5} \\ & & & -{}^{53}/_{7} \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 15 \\ -{}^{25}/_{2} \\ 4 \\ -{}^{159}/_{7} \end{matrix} \right\}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \right\};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ & -7 & -6 & -3 \\ & & -{}^{23}/_{7} & -{}^{22}/_{7} \\ & & & {}^{406}/_{7 \cdot 23} \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -{}^{2}/_{7} \\ -{}^{812}/_{7 \cdot 23} \end{matrix} \right\}; \quad \{x\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{matrix} \right\}.$$

6.13.3. Banachiewicz-jeва схема. — *Banachiewicz*-jeва схема за разлагање матрице $\mathbf{A}$ у производ двеју троугластих матрица различитих схема, једне леве и друге десне, састоји се у томе да се инверзна трансформациона матрица T^{-1} замени негативном троугластом левом матрицом C и да се обе троугласте матрице C и B здруже у једну матрицу $\mathrm{C} \top \mathrm{B}$. Тада је

$$\mathrm{TA} = \mathrm{B}; \qquad \mathrm{A} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{B} = -\mathrm{CB}; \qquad \mathrm{A} + \mathrm{CB} = \mathrm{O}, \qquad (6.43)$$

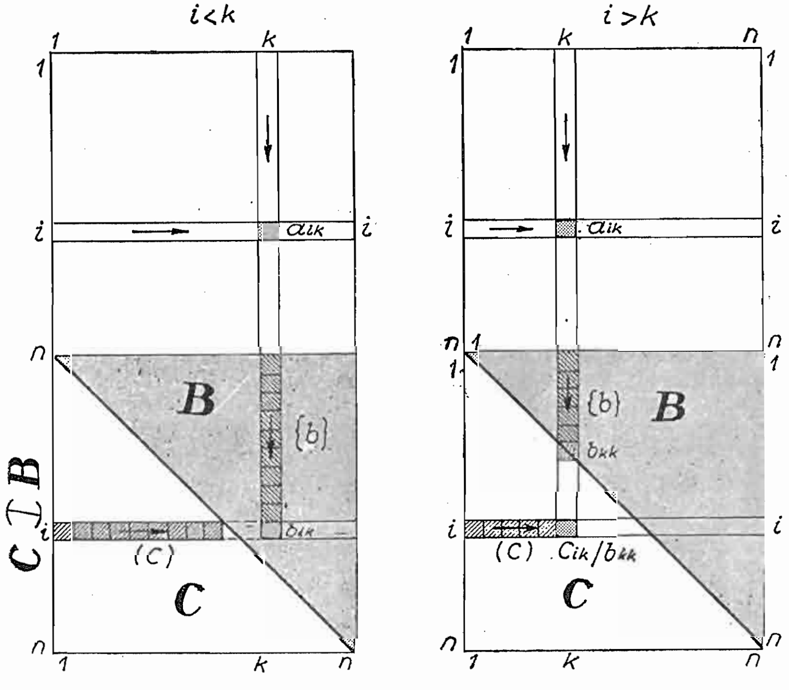
односно

$$\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right) +$$

$$
+\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ c_{21} & -1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \ldots & -1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nk} & \ldots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & b_{ii} & \ldots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.44}
$$

У овоме случају обрасци (6.33) постају:

$$
\begin{aligned}
&a)\ c_{ii}=-1; \quad c_{i1}=-a_{i1}/a_{11}; \quad b_{1k}=a_{1k};\\
&b)\ i\leqslant k; \quad b_{ik}=a_{ik}+(c_{ir})\{b_{rk}\}; \qquad r=1,\ 2,\ \ldots,\ i-1;\\
&c)\ i>k; \quad b_{kk}\,c_{ik}=-[a_{ik}+(c_{is})\{b_{sk}\}]; \qquad s=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1.
\end{aligned}
\tag{6.45}
$$



Слика 6.3. — *Banachiewicz*-јева схема за троугласте матрице

Из ових образаца види се да се уместо *разлике узимају збирови скаларних производа* што је погодније за примену машина за рачунање. Сем тога рад се може схематски приказати (слика 6.3).

На пример:

A	1	1	5	2
	4	2	4	3
	2	4	6	1
	1	3	1	3
$\mathbf{C}\,\overset{\frown}{\underset{\smile}{\mid}}\,\mathbf{B}$	1	1	5	2
	−4	−2	−16	−5
	−2	1	−20	−8
	−1	1	−1	4

$c_{ii}=-1;\quad c_{i1}=-a_{i1}=-1;\quad -4;\quad -2;\quad -1;$

$b_{1k}=a_{1k}=1;\quad 1;\quad 5;\quad 2;$

$b_{22}=2+(-4)\{1\}=-2;\quad b_{23}=4+(-4)\{5\}=-16;$

$b_{24}=3+(-4)\{2\}=-5;$

$c_{32}=-[4+(-2)\{1\}]/(-2)=1;$

$$b_{33}=6+(-2\quad 1)\begin{Bmatrix}5\\-16\end{Bmatrix}=-20;$$

$$b_{34}=1+(-2\quad 1)\begin{Bmatrix}2\\-5\end{Bmatrix}=-8;$$

$c_{42}=-[3+(-1)\{1\}]/(-2)=1;$

$$c_{43}=-\left[1+(-1\quad 1)\begin{Bmatrix}5\\-16\end{Bmatrix}\right]/(-20)=-1;$$

$$b_{44}=3+(-1\quad 1\quad -1)\begin{Bmatrix}2\\-5\\-8\end{Bmatrix}=4.$$

Banachiewicz-јева схема за решавање система линеарних једначина у ствари је *Gauss-ов алгоритам у матричном облику*. Када се уместо матрице **A** реда n узме матрица $\mathbf{P}=(\mathbf{A}\,\overset{\frown}{\mid}\,\mathbf{b})$ којој је додата једна колона независних чланова $\{b\}$ она постаје правоугаона, типа $(n,\ n+1)$, али се тиме ранг матрице **A** није променио и остаје n. Матрица **B** је троугласти трансформат матрице **A**, а вектор $\{c\}$ је трансформат исте операције вектора $\{b\}$. Због тога се матрица **B** може проширити последњом колоном — вектором $\{c\}$, па се добија матрица $\mathbf{Q}=(\mathbf{B}\,\underset{\smile}{\mid}\,\mathbf{c})$. *Banachiewicz*-јев поступак састоји се сада у томе да се уместо матрица **A** и **B** ради са матрицама **P** и **Q**, па ће бити

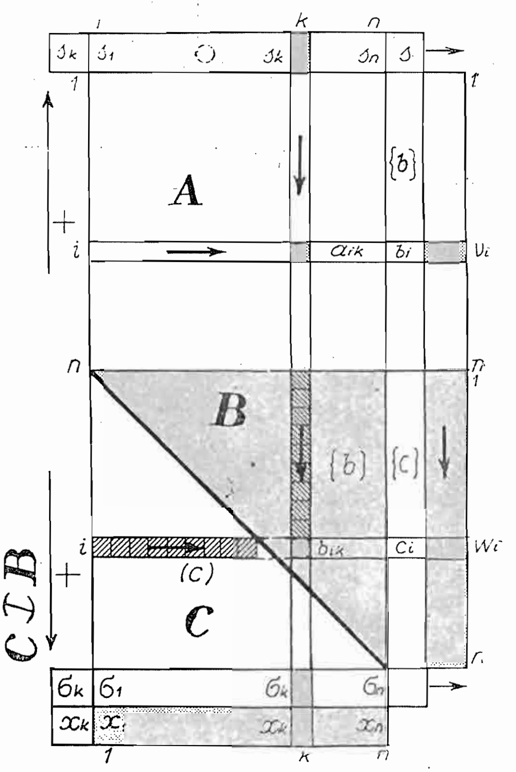
$$\mathbf{A}\{x\}=\{b\};\qquad \mathbf{TA}\{x\}=\mathbf{T}\{b\};\qquad \mathbf{B}\{x\}=\{c\};$$
$$\mathbf{A}=-\mathbf{CB};\qquad \mathbf{P}+\mathbf{CQ}=(\mathbf{A}\,\underset{\smile}{\mid}\,b)+\mathbf{C}(\mathbf{B}\,\underset{\smile}{\mid}\,\mathbf{c})=\mathbf{O}, \tag{6.46}$$

односно

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} -1 & & \\ c_{21} & -1 & \\ \dots & \dots & \dots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1\\ & b_{22} & \dots & b_{2n} & c_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ & & & b_{nn} & c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.47}$$

За одређивање здружене матрице $\mathbf{C}\,\mathrm{I}\,\mathbf{Q}$ примењује се претходни поступак. Коефицијент b_i је сада коефицијент $a_{i,\,n+1}$ а коефицијент c_i је $b_{i,\,n+1}$ па ће према (6.45) бити коефицијенти:



Слика 6.4. — *Banachiewicz*-јева схема за решавање линеарних једначина

a) $c_{ii}=-1$; $\quad c_{i1}=-a_{i1}/a_{11}$;

$b_{1k}=a_{1k}$;

b) $i \leqslant k$;

$b_{ik}=a_{ik}+(c_{ir})\,\{b_{rk}\}$;

$r=1,\,\dots,\,i-1$; $\qquad$ (6 48)

c) $i>k$;

$b_{kk}\,c_{ik}=-[a_{ik}+(c_{is})\,\{b_{sk}\}]$;

$s=1,\,\dots,\,k-1$;

d) $c_i=b_\iota+(c_{ir})\,\{c_r\}$;

$r=1,\,\dots,\,i-1$.

Непознате x_k одређују се почев од последње до прве по обрасцу

$$x_n=c_n/b_{nn}\,;$$

$$b_{ii}\,x_k=c_\iota-(b_{ir})\,\{x_r\}, \quad (6.49)$$

$$r=i+1,\,\dots,\,n.$$

Прво се лако одређују елементи прве врсте b_{1k} и прве колоне c_{i1} здружене матрице **P**; затим елементи друге врсте b_{2k} и друге колоне $c_{\cdot 2}$, и тако редом, b_{3k}, $c_{\cdot 3}$, . . . , . После тога се одређују трансформисани независни чланови c_i а потом корени x_k. Скаларни производи се могу одређивати лакше схематски како је показано на слици 6.4.

На пример:

$$\begin{aligned} x_1+\ \ x_2+5\,x_3+2\,x_4&=\ 2;\\ 4\,x_1+2\,x_2+4\,x_3+3\,x_4&=13;\\ 2\,x_1+4\,x_2+6\,x_3+\ \ x_4&=11;\\ x_1+3\,x_2+\ \ x_3+3\,x_4&=13; \end{aligned} \qquad |\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -16 & -5\\ 0 & 0 & -4\\ 0 & -20 & -4 \end{vmatrix}=160;$$

	1	1	5	2	2	
A	4	2	4	3	13	$\{b\}$
	2	4	6	1	11	
	1	3	1	3	13	
	1	1	5	2	2	
$\mathbf{C}\ \overset{\frown}{\underset{\smile}{\vert}}\ \mathbf{B}$	−4	−2	−16	−5	5	$\{c\}$
	−2	1	−20	−8	12	
	−1	1	− 1	4	4	
x_k	2	3	− 1	1	←	

$$c_{ii}=-1;\quad b_{1k}=a_{1k};\quad c_{i1}=-a_{i1}/a_{11}=-a_{i1};$$

$$b_{22}=2+(-4)\ \{1\}=-2;\quad b_{23}=4+(-4)\ \{5\}=-16;$$

$$b_{24}=3+(-4)\ \{2\}=-5;$$

$$b_{22}\ c_{32}=-[4+(-2)\ \{1\}]=-2;\quad c_{32}=1;\quad b_{33}=6+(-2\quad 1)\left\{\begin{matrix}5\\-16\end{matrix}\right\}=-20;$$

$$b_{34}=1+(-2\quad 1)\left\{\begin{matrix}2\\-5\end{matrix}\right\}=-8;$$

$$b_{22}\ c_{42}=-[3+(-1)\ \{1\}]=-2;\quad c_{42}=1;$$

$$b_{33}\ c_{43}=-\left[1+(-1\quad 1)\left\{\begin{matrix}5\\-16\end{matrix}\right\}\right]=20;\quad c_{43}=-1;$$

$$b_{44}=3+(-1\quad 1\quad -1)\left\{\begin{matrix}2\\-5\\-8\end{matrix}\right\}=4;$$

$$c_1=2;\quad c_2=13+(-4)\ \{2\}=5;\quad c_3=11+(-2\quad 1)\left\{\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right\}=12;$$

$$c_4=13+(-1\quad 1\quad -1)\left\{\begin{matrix}2\\5\\12\end{matrix}\right\}=4;$$

корени су:

$$x_4=\frac{4}{4}=1;\qquad x_3=\frac{12-(-8)\ \{1\}}{-20}=-1;$$

$$x_2=\frac{5-(-16\quad -5)\left\{\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right\}}{-2}=3;\qquad x_1=\frac{2-(1\quad 5\quad 2)\left\{\begin{matrix}3\\-1\\1\end{matrix}\right\}}{1}=2.$$

Проба: $\sum a_{1k}\,x_k=2;\quad 2+3-5+2=2;\quad \sum a_{2k}\ x_k=13;\quad \sum a_{3k}\,x_k=11;\quad \sum a_{4k}\,x_k=13.$

Предност овог поступка је у томе што се могу у току рада вршити *међуконтроле* и *крајња проба*, јер корени x_k морају задовољити сваку једначину система. Када се уместо скаларних производа у обрасцима (6.48) ставе збирови добиће се коефицијенти у облику:

$$b_{ik}=a_{ik}+\sum_r c_{ir}\,b_{rk}; \qquad -b_{kk}\,c_{ik}=a_{ik}+\sum_s c_{is}\,b_{sk};$$

$$c_i=b_i+\sum_r c_{ir}\,c_r; \quad r=1,\,\ldots,\,i-1; \quad s=1,\,\ldots,\,k-1. \tag{6.50. a}$$

Збирови елемената колона матрица **A** и **C**, и збирови елемената врста проширених матрица $(\mathbf{A} \mathbin{\rceil\!\lfloor} \mathbf{b})$ и $(\mathbf{B} \mathbin{\rceil\!\lfloor} \mathbf{c})$, с обзиром да су елементи матрице **B** испод дијагонале једнаки нули, а матрице **C** изнад дијагонале једнаки нули и коефицијенти $c_{ii}=-1$, биће:

$$(\uparrow)\ \ s_k=\sum_{i=n}^{i=1} a_{ik}; \qquad (\downarrow)\ \ \sigma_k=\sum_{k=1}^{n} c_{ik}; \qquad (\rightarrow)\ \ v_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}+b_i;$$

$$(\rightarrow)\ \ w_i=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}+c_i; \qquad \sum_{i=n}^{1} b_i=s; \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i=\sigma. \tag{6.51}$$

Сабирањем елемената b_{ik} из (6.50. *a*), с обзиром на (6.51), добија се релација

$$\sum_k b_{ik}=\sum_k a_{ik}+\sum_k\sum_r c_{ir}\,b_{rk}; \qquad w_i-c_i=v_i-b_i+\sum_r c_{ir}\sum_k b_{rk}=$$

$$=v_i-b_i+\sum_r c_{ir}\,(w_r-c_r)=v_i-b_i-\sum_r c_{ir}\,c_r+\sum_r c_{ir}\,w_r=$$

$$=v_i-b_i-(c_i-b_i)+\sum_r c_{ir}\,w_r=v_i-c_i+\sum_r c_{ir}\,w_r,$$

$$k=1,\,\ldots,\,n; \quad r=1,\,\ldots,\,i-1;$$

па је *прва контролна релација*

$$w_i=v_i+\sum_r c_{ir}\,w_r=v_i+(c_{ir})\,\{w_r\}; \qquad r=1,\,2,\,\ldots,\,i-1. \tag{6.52}$$

Сабирањем других израза из (6.50. *a*)

$$-\sum_i b_{kk}\,c_{ik}=\sum_i a_{ik}+\sum_i\sum_s c_{is}\,b_{sk}=\sum_i a_{ik}+\sum_s b_{sk}\sum_i c_{is};$$

$$i=1,\,\ldots,\,n; \quad s=1,\,\ldots,\,k-1,$$

добија се *друга контролна релација*

$$-b_{kk}\,\sigma_k=s_k+\sum_s \sigma_s\,b_{sk}=s_k+(\sigma_s)\,\{b_{sk}\}; \quad s=1,\,2,\,\ldots,\,k-1. \tag{6.53}$$

Последња контролна релација је

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_k - b_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_k - \sum_{i=1}^{n} b_i = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} s_k x_k - s = 0. \tag{6.54}$$

Продужена матрица $\mathbf{P} = (\mathbf{A} \,\underline{\top}\, \mathbf{b})$ допуњује се предпрвом врстом елемената s_k, а здружена матрица $(\mathbf{C} \,\underline{\top}\, \mathbf{B}, \,\underline{\top}\, \mathbf{c})$ последњом врстом $(n+1)$ коефицијената σ_k, па су добијене матрице квадратне, реда $(n+1)$.

Матрична схема за систем од четири једначине била би:

s_k	s_1	s_2	s_3	s_4	s	$\rightarrow$	Пробе		
↑	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	v_1	**2.** (6.53)	**3.** (6.54)	(6.50.b)
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	v_2			
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3	v_3			
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4	v_4			
↓	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	c_1	w_1	**1.** (6.52)		
	c_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	c_2	w_2			
	c_{31}	c_{32}	b_{33}	b_{34}	c_3	w_3			
	c_{41}	c_{42}	c_{43}	b_{44}	c_4	w_4			
σ_k	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ	$\rightarrow$			
x_k	x_1	x_2	x_3	x_4					

Пробе које треба унети у претходну таблицу (6.50. b) су:

2.	$-b_{11}\ \sigma_1=s_1$ $-b_{22}\ \sigma_2=s_2+\sigma_1\ b_{12}$ $-b_{33}\ \sigma_3=s_3+\sigma_1\ b_{13}+\sigma_2\ b_{23}$ $-b_{44}\ \sigma_4=s_4+\sigma_1\ b_{14}+\sigma_2\ b_{24}+\sigma_3\ b_{34}$	$\sum a_{1k}\ x_k=b_1$ $\sum a_{2k}\ x_k=b_2$ $\sum a_{3k}\ x_k=b_3$ $\sum a_{4k}\ x_k=b_4$	**3.** (6.50. c)
1.	$=v_1$ $=v_2+c_{21}\ w_1$ $=v_3+c_{31}\ w_1+c_{32}\ w_2$ $=v_4+c_{41}\ w_1+c_{42}\ w_2+c_{43}\ w_3$	$\sum s_k\ x_k=s$ $\mathbf{A}\,\{x_i\}=\{b_i\}$ $\lvert\mathbf{A}\rvert=\lvert\mathbf{B}\rvert=$ $=\Pi\, b_{ii}$	

На пример:

$$a)\quad \mathrm{A}\{x\}=\{b\};\qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \end{Bmatrix};$$

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8;\qquad r=4;$$

s_k	4	2	2	2	2	→	Пробе:	
↑	1	1	1	1	0	4	$-1\cdot-4=4$	2.
	1	−1	1	1	2	4	$2\cdot-1=2-4\cdot1=-2$	
	1	1	−1	1	−4	−2	$2\cdot-1=2-4\cdot1-1\cdot0=-2$	
	1	1	1	−1	4	6	$2\cdot-1=2-4\cdot1-1\cdot0-1\cdot0=-2$	
↓	1	1	1	1	0	4	$=4$	1.
	−1	−2	0	0	2	0	$=4+(-1\cdot4)=0$	
	−1	0	−2	0	−4	−6	$=-2+(-1\cdot4)+(0\cdot2)=-6$	
	−1	0	0	−2	4	2	$=6+(-1\cdot4)+(0\cdot0)+(0\cdot-6)=2$	
σ_k	−4	−1	−1	−1	2	→		
x_k	1	−1	2	−2				

Пробе:

$1-1+2-2=0$ $1+1+2-2=2$ $1-1-2-2=-4$ $1-1+2+2=4$	$4\cdot1+2\cdot-1+2\cdot2+2\cdot-2=2$	3.
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \end{Bmatrix}$	$\|\mathrm{A}\|=\|\mathrm{B}\|=1\cdot-2\cdot-2\cdot-2=-8$	4.

b)

s_k	8	3	4	3	-3	20	→
↑	1	2	-1	2	1	5	10
	2	1	4	-1	-2	8	12
	3	-2	1	3	3	18	26
	1	3	-2	-2	-4	-12	-16
	1	-1	2	1	-1	1	3
↓	1	2	-1	2	1	5	10
	-2	-3	6	-5	-4	-2	-8
	-3	$-\frac{8}{3}$	-12	$\frac{31}{3}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{52}{3}$
	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{173}{36}$	$-\frac{196}{36}$	$-\frac{611}{36}$	$-\frac{980}{36}$
	-1	-1	$-\frac{3}{12}$	$\frac{51}{173}$	$-\frac{14148}{173\cdot 36}$	$-\frac{56592}{173\cdot 36}$	$-\frac{70740}{173\cdot 36}$
σ_k	-8	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{14}{12}$	$-\frac{122}{173}$	-1		→
x_k	3	1	2	-1	4		

Пробе:

$-1\cdot -8=8$

$3\cdot -\frac{13}{3}=3-8\cdot 2=-13$

$12\cdot -\frac{14}{12}=4+8-26=-14$

$\frac{173}{36}\cdot -\frac{122}{173}=3-16+\frac{65}{3}-\frac{217}{18}=-\frac{61}{18}$

$-\frac{14148}{173\cdot 36}\cdot -1=-3-8+\frac{52}{3}-\frac{112}{9}+\frac{122\cdot 196}{173\cdot 36}$

2.

1.	$10;\quad 8\cdot3+3\cdot1+4\cdot2+3\cdot-1-3\cdot4=20$ $12+(-2\cdot10)=-8$ $26+(-3\cdot10)+\left(-\frac{8}{3}\cdot-8\right)=\frac{52}{3}$ $-16+(-1\cdot10)+\left(\frac{1}{3}\cdot-8\right)+\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{52}{3}\right)$ $3+(-1\cdot10)+(-1\cdot-8)+\left(-\frac{3}{12}\cdot\frac{52}{3}\right)$	$8\cdot3+3\cdot1+4\cdot2+3\cdot(-1)+$ $+(-3)\cdot4=20$
3.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \\ 18 \\ -12 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\lvert \mathbf{A} \rvert = \lvert \mathbf{B} \rvert = 1\cdot-3\cdot-12\cdot-$ $-\frac{173}{36}\cdot-\frac{14148}{173\cdot36}=393.$

6.13.4. Метода Cholesky-ог. — Ова се метода примењује када је матрица $\mathbf{A}$ симетрична ($a_{ik}=a_{ki}$). Ову матрицу треба разложити у производ двеју троугластих матрица десне $\mathbf{B}$ и леве $\mathbf{B}'$ која је транспонована првој. Сменом променљивих добијају се два система једначина са троугластим матрицама истог реда. Дакле, биће:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_s;\qquad \mathbf{A}\{x\}=\{b\};$$

$$\mathbf{B}'\mathbf{B}\{x\}=\mathbf{B}'\{y\}=\{b\};$$

$$\mathbf{B}\{x\}=\{y\}. \tag{6.55}$$

Елементи се одређују по обрасцима:

$$b_{ii}\,y_i=b_i-(b_{kr})\{y_r\};\quad k=i;$$

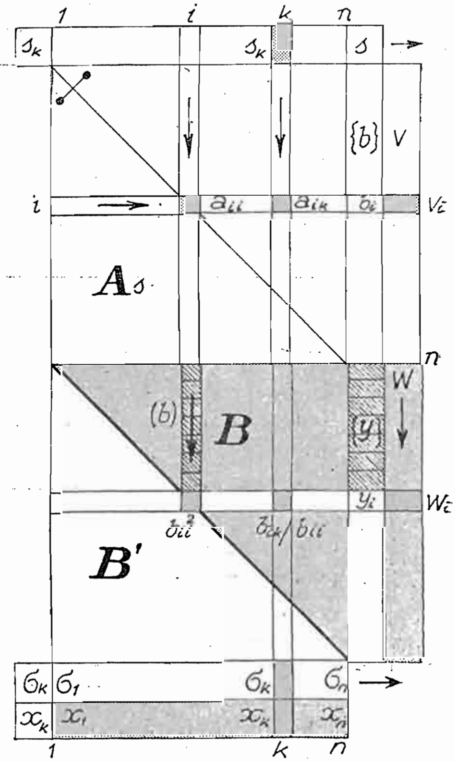
$$r=1,\ 2,\ \ldots,\ i-1, \tag{6.56}$$

а непознате $\{x\}$ по следећим обрасцима

$$x_n=y_n/b_{nn};\quad b_{ii}\,x_i=y_i-(b_{ir})\{x_r\};$$

$$k=i;\quad r=i+1,\ \ldots,\ n. \tag{6.57}$$

Поступак је схематично приказан на слици 6.5.



Слика 6.5. — *Cholesky*-јева схема за решавање система линеарних једначина са симетричним коефицијентима

Слично ранијем поступку из образаца (6.35) и (6.56), с обзиром да су матрице **B** и **B**′ троугласте, сабирањем добијају се следеће *контролне релације:*

$$\begin{aligned}
&a)\ b_{ii}\, w_i = v_i - (b_{ir})\,\{w_r\}; && r=1,\ 2,\ \ldots,\ i-1;\\
&b)\ b_{ii}\, \sigma_k = s_k - (\sigma_r)\,\{b_{rk}\}; && r=1,\ 2,\ \ldots,\ i-1;\\
&c)\ (s_k)\,\{x_k\} - s = 0;\\
&d)\ \mathbf{A}\,\{x_k\} = \{b\};\quad \mathbf{B}'\{y\} = \{b\};\quad |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|^2 = (b_{11}\cdot b_{22}\,\cdots\, b_{nn})^2.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

На пример:

a)

s_k	16	17	67	82	228	→	Пробе	
$\mathbf{A}_s$ ↑	4	2	4	6	24	40	**2.**	**3.**
	2	2	5	8	25	42		
	4	5	29	29	71	138		
	6	8	29	39	108	190		
B ↓	2	1	2	3	12	20	**1.**	
	1	1	3	5	13	22		
	2	3	4	2	2	8		
	3	5	2	1	3	4		
σ_k	8	9	6	1	30	→		
x_k	2	1	—1	3				

Пробе:

2.	$2\cdot 8=16=16$ $1\cdot 9=9=17-8\cdot 1=9$ $4\cdot 6=24=67-8\cdot 2-9\cdot 3=24$ $2\cdot 1=2=82-8\cdot 3-9\cdot 5-6\cdot 2=1$
1.	$2\ \ w_1=40$ $1\cdot w_2=42-1\cdot 20=22$ $4\ \ w_3=138-2\cdot 20-3\cdot 22=32$ $1\cdot w_4=190-3\cdot 20-5\cdot 22-2\cdot 8=4$
3.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3\\ & 1 & 3 & 5\\ & & 4 & 2\\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2\\ 1\\ -1\\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12\\ 13\\ 2\\ 3 \end{Bmatrix};$ $16\cdot 2+17\cdot 1-67\cdot 1+82\cdot 3-228=0$ $\lvert\mathbf{A}\rvert = \lvert\mathbf{B}\rvert^2=(2\cdot 1\cdot 4\cdot 1)^2=8^2=64.$

b)

s_k	11	44	65	111	53	60	→	Пробе
	1	2	3	4	1	5	16	$\sigma_1=11$
		8	10	18	6	16	60	$2\,\sigma_2=44-11\cdot2=22$
↑			17	22	13	7	72	$2\,\sigma_3=65-11\cdot3-11\cdot2=10$
				50	17	41	152	$3\,\sigma_4=111-11\cdot4-11\cdot5-5\cdot0=12$
					16	-9	44	$\sigma_5=53-11-22-15-4=1$
	1	2	3	4	1	5	16	$w_1=16$
		2	2	5	2	3	14	$2\,w_2=60-2\cdot16=28$
↓			2	0	3	-7	-2	$2\,w_3=72-3\cdot16-2\cdot14=-4$
				3	1	2	6	$3\,w_4=152-4\cdot16-5\cdot14-0\cdot2=18$
					1	-1	0	$w_5=44-1\cdot16-2\cdot14+3\cdot2-1\cdot6=0$
σ_k	11	11	5	4	1		→	$\sum a_{1k}\,x_k=b_1;\quad 4+4-6+4-1=5$
x_k	4	2	-2	1	-1	$\lvert \mathbf{A}\rvert=(12)^2=144$		$\sum s_k\,x_k=44+88-130+111-53=60.$

6.13.5. Kronecker-Capelli-јев став. — Када је матрица коефицијената *сингуларна*, $|\mathbf{A}|=0$, тада решења нехомогеног линеарног система једначина зависе од ранга матрице $\mathbf{A}$ и рангова детерминанти које се јављају као бројиоци у *Cramer*-овим обрасцима (6.59). У овоме случају користи се *Kronecker-Capelli-јев став о сагласности (компатибилности) система.*

За систем од m линеарних једначина са n непознатих облика

$$\overset{\longrightarrow k}{\underset{i}{\downarrow}}\ \sum_{k} a_{ik}\,x_k=b_i;\quad \mathbf{A}\,\{x\}=\{b\};\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\qquad (6.59)$$

каже се да је сагласан (компатибилан) ако постоји бар један скуп вредности

$$x_1=\xi_1,\qquad x_2=\xi_2,\ \ldots,\ x_n=\xi_n,$$

за који је задовољена релација

$$\overset{\longrightarrow k}{\underset{i}{\downarrow}}\ \sum_{k} a_{ik}\,\xi_k=b_i;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.\qquad (6.60)$$

Скуп вредности $x_k=\xi_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, *који задовољава предњи услов* (6.60) *зове се решење система линеарних једначина* (6.59).

За систем једначина (6.59) важи *Kronecker-Capelli*-јев* став који гласи:

Систем нехомогених линеарних једначина (6.59) *сагласан је* (то јест има решења) *тада и само тада када је ранг матрице коефицијената* **A** *једнак рангу проширене матрице која се добија када* **се** *матрици коефицијената* **A** *допишу као последња колона независни чланови* , $(\mathbf{A} \top \mathbf{b})$.

Матрице су облика:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad (\mathbf{A} \top \mathbf{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Дакле, мора бити

$$\operatorname{rang} \mathbf{A}=\operatorname{rang}(\mathbf{A} \top \mathbf{b}). \tag{6.61}$$

Овај услов је *потребан* и *довољан*. Сменом $\{x\}=\mathbf{K}\{y\}$, где је **K** регуларна матрица, $|\mathbf{K}| \neq 0$, једначина (6. 9) постаје $\mathbf{AK}\{y\}=\{b\}$. Ако се сада предња релација помножи слева регуларном матрицом **V**, $(|\mathbf{V}| \neq 0)$, добиће се $\mathbf{VAK}\{y\}=\mathbf{V}\{b\}=\{c\}$, односно $\mathbf{N}\{y\}=\{c\}$, где је, према (6.12), **N** нормална матрица, па је ранг остао непромењен, $\operatorname{rang} \mathbf{A}=\operatorname{rang} \mathbf{N}=r$, јер еквивалентна трансформација оставља ранг непромењен (6.7). Када се матрица **A** здружи са вектором **b**, тада се и матрица **AK** здружи са **b**, па ће бити

$$(\mathbf{A} \top \mathbf{b})\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 1 \end{pmatrix}=(\mathbf{AK} \top \mathbf{b}); \quad \begin{vmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 1 \end{vmatrix}=|\mathbf{K}| \neq 0; \quad \operatorname{rang}(\mathbf{A} \top \mathbf{b})=\operatorname{rang}(\mathbf{AK} \top \mathbf{b}),$$

јер множење регуларном матрицом не мења ранг. Ако се сада здружена матрица $(\mathbf{AK} \top \mathbf{b})$ помножи слева регуларном матрицом **V**, биће:

$$\mathbf{V}(\mathbf{AK} \top \mathbf{b})=(\mathbf{VAK} \top \mathbf{Vb})=(\mathbf{N} \top \mathbf{c}); \quad \operatorname{rang}(\mathbf{AK} \top \mathbf{b})=\operatorname{rang}(\mathbf{N} \top \mathbf{c}).$$

С обзиром на (6.12) добија се

$$\mathbf{N}\{y\}=\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \{y_i\} \\ \{y_s\} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \{c_i\} \\ \{c_s\} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \mathbf{I}_r\{y_i\}=\{c_i\}; & i=1, 2, \ldots, r; \\ \mathbf{O}\{y_s\}=\{c_s\}=\{0\}; & s=r+1, \ldots, n, \end{matrix}$$

што значи да ће предњи систем бити сагласан ако је $\{c_s\}=\{0\}$, а тада је:

$$\operatorname{rang} \mathbf{N}=\operatorname{rang}(\mathbf{N} \top \mathbf{c})=\operatorname{rang}(\mathbf{A} \top \mathbf{b})=\operatorname{rang} \mathbf{A}=r.$$

А ово је и требало доказати.

---

* Овај став се зове и *Rouché-Capelli-јев став*; међутим први га је поставио *Fontené*.

Дакле, систем једначина (6.59) је *сагласан* ако је ранг матрице $\mathbf{A}$ једнак рангу проширене матрице $(\mathbf{A} \top \mathbf{b})$. Ако је систем ранга r, онда се може да израчуна само r непознатих x_i, $i=1, 2, \ldots r$, остале $n-r$ непознате су *неодређене и могу се узети произвољно*. Те непознате најбоље је тако узети да систем од r непознатих има ранг r. Елементарним трансформацијама треба матрицу $(\mathbf{A} \top \mathbf{b})$ свести на канонски облик $(\mathbf{C} \top \mathbf{c})$, па се види да при $r<n$ *систем има бескрајно много решења.*

На пример:

a) $$\begin{aligned} 3x_1+x_2-2x_3&=1;\\ x_1+2x_2+x_3&=2;\\ 4x_1-3x_2-x_3&=3;\\ 2x_1+4x_2+2x_3&=4; \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 30 \neq 0;$$

$$r(\mathbf{A})=3=n; \qquad m=4;$$

$$(\mathbf{A} \top \mathbf{b})=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]; \quad r(\mathbf{A} \top \mathbf{b})=3; \quad \{x\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{Bmatrix}; \quad (\mathbf{A} \top \mathbf{b})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad r(\mathbf{A} \top \mathbf{b})=3; \qquad d=n-r=1;$$

$$r(\mathbf{A})=3; \qquad x_4=0; \qquad x_3=a; \qquad x_1=10+11a; \qquad x_2=-2-4a.;$$

c) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}; \qquad m=3; \qquad n=5;$$

$$\mathbf{A} \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \operatorname{rang} \mathbf{A} = 3; \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \operatorname{rang} (\mathbf{A} \,\underset{\smile}{\top}\, \mathbf{b}) = 3; \qquad d = n - r = 2;$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_5 &= 1; \\ -x_2 + 2\,x_3 &= 0; \\ x_4 &= 0; \end{aligned} \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} 1-3\,b \\ 2a \\ a \\ 0 \\ b \end{Bmatrix};$$

d) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{Bmatrix}; \qquad \mathbf{A} \to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad r = 2;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad r = 3;$$

систем није сагласан те нема решења.

e) На примеру показати да ако је број једначина за један већи од броја непознатих ($m = n + 1$) и ако је матрица A ранга n, да је тада детерминанта здружене матрице ($\mathbf{A} \,\underset{\smile}{\top}\, \mathbf{b}$) једнака нули (обрнуто не важи):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}; \qquad \mathbf{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad r = 3;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad r = 3; \qquad |\,\mathbf{A} \,\underset{\smile}{\top}\, \mathbf{b}\,| = 0.$$

6.13.6. Систем хомогених једначина. — Пошто је $\{b\} = 0$ то је овај систем *увек сагласан* јер је ранг проширене матрице $(\mathbf{A} \,\underset{\smile}{\top}\, \mathbf{b}) = (\mathbf{A} \,\underset{\smile}{\top}\, 0)$ једнак рангу матрице A, па је задовољен *Kronecker-Capelli*-јев став. Систем има решења која се зову *тривијална (идентичка)* решења, па је:

$$\mathbf{A}\,\{x\} = \{0\}; \qquad \{x\} \equiv \{0\}; \qquad x_k \equiv 0; \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.63}$$

У овоме случају важно је потражити у скупу решења x_k бар једно решење различито од нуле како би био вектор $\{x\} \neq 0$. Ако систем има једно такво решење онда их има *бескрајно много*, па *решење није једнозначно*. Ако је $\{x_1\}$ једно такво решење са координатама $x_{1i} \neq 0$ онда је вектор $\{\lambda x_1\}$, где је λ произвољни број, такође решење, јер је $\mathbf{A}\{\lambda x_1\} = \lambda \mathbf{A}\{x_1\} = \{0\}$. Ако су вектори $\{x_1\}$ и $\{x_2\}$ решења система (6.63), онда је и збир вектора $\{x_1\} + \{x_2\}$ такође решење, јер је

$$\mathbf{A}(\{x_1\}+\{x_2\}) = \mathbf{A}\{x_1\} + \mathbf{A}\{x_2\} = \{0\}.$$

Ово показује да *је свака линеарна комбинација нетривијалних решења система, такође његово решење.*

Матрица коефицијената $\mathbf{A}$ може се представити као вектор-врста вектора колона $\{a_k\}$, па се систем (6.63) да написати у облику:

$$\mathbf{A}\{x\} = \{0\}; \quad \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right] \left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix}\right\} =$$

$$= (\{a_1\}\{a_2\} \dots \{a_n\}) \left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix}\right\} = \{0\}, \quad \{a_k\} = \left\{\begin{matrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots\dots \\ a_{..k} \end{matrix}\right\},$$

односно

$$x_1\{a_1\} + x_2\{a_2\} + \cdots + x_n\{a_n\} = 0.$$

Овде могу бити два случаја: 1° сва су решења $x_k \equiv 0$, што значи да су вектори колоне $\{a_k\}$ матрице $\mathbf{A}$ *линеарно независни* (4.30), па је $|\mathbf{A}| \neq 0$, те је матрица коефицијената регуларна, и 2° да постоји бар једно решење $x_k \neq 0$, а то значи да су вектори колоне матрице $\mathbf{A}$ линеарно зависни (4.29), па је $|\mathbf{A}| = 0$, те је матрица $\mathbf{A}$ сингуларна. Ови резултати се могу овако изразити:

Линеарни хомогени систем једначина (6.63) *са n непознатих x_k има само тада нетривијална решења ако су вектори колоне матрице коефицијената система $\{a_k\}$ линеарно зависни. Ранг система је $r < n$ ако систем има позитиван дефект $d = n - r > 0$. Када су вектори колоне $\{a_k\}$ линеарно независни тада систем једначина има само тривијална решења.*

Из овога става следе и следећа два става:

1° *Хомогени систем линеарних једначина са мањим бројем једначина од броја непознатих* $(m < n)$ *има увек нетривијална решења, јер је ранг $r \leqslant m < n$;*

2° *Хомогени систем од n линеарних једначина са n непознатих има тада и само тада нетривијална решења ако је његова квадратна матрица коефицијената сингуларна, то јест ако је* $|\mathbf{A}| = 0$.

Када је матрица коефицијената сингуларна или ранга $r < n$, где је n број непознатих x_k, тада постоје нетривијална решења. Њих има r, па је r непознатих x_k *одређено* односно *условљено*; остале непознате су *неодређене* или *слободне непознате*. Број одређених непознатих једнак је рангу (r), а број слободних непознатих једнак је степену дегенерације $d=n-r$. Ако је вектор $\{x_s\}$ решење система онда се обично његових првих r координата узима за условљене координате x_{s1}, x_{s2}, ..., x_{sk}, ..., x_{sr}, док су координате $x_{s,r+1}$, $x_{s,r+2}$, ..., $x_{s,n-r}$ слободне. Избор ових слободних координата је потпуно *произвољан*; обично се узимају да су оне координате јединичних вектора $\{e_k\}$ реда $d=n-r$, па се добија тачно $d=n-r$ линеарно независних решења $\{x_s\}$, где је $s=1, 2, \ldots, n-r$, како је показано у доњој схеми. Дакле, вектор $\{x_s\}$ има координате x_{s1}, x_{s2}, ..., x_{sr}, 0, 0, ..., 1, ..., 0. Ова решења $\{x_s\}$ чине *основни систем решења хомогеног линеарног система*. *Опште решење хомогеног система* је линеарна комбинација основног система па је

$$\mathbf{A}\{x\}=\{0\}; \quad \{x\}=\lambda_1\{x_1\}+\lambda_2\{x_2\}+\cdots+\lambda_{n-r}\{x_{n-r}\}. \tag{6.64}$$

При решавању система користи се *Gauss*-ов алгоритам у *Banachiewicz-јевој* схеми, како следи:

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|}
\cline{2-9}
 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \ldots & b_{1n}\\
 & c_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \ldots & b_{2n}\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
 & c_{r1} & c_{r2} & \ldots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \ldots & b_{rn}\\
\cline{2-9}
 & c_{r+1,1} & c_{r+1,2} & \ldots & c_{r+1,r} & 0 & 0 & \ldots & 0\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
 & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nr} & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{\{x_1\}} & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0\\
\multicolumn{1}{|c|}{\{x_2\}} & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2r} & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\multicolumn{1}{|c|}{\cdots} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\multicolumn{1}{|c|}{\{x_{n-r}\}} & x_{n-r,1} & x_{n-r,2} & \ldots & x_{n-r,r} & 0 & 0 & \ldots & 1\\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{x_k} & x_1 & x_2 & \ldots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \ldots & x_n\\
\hline
\end{array} \tag{6.65}$$

Решавање једначина врши се од *последње* (r-те) врсте условљених непознатих, а затим се продужи навише, од x_{sr} до x_{s1}, те ће бити:

$$\begin{gathered}
b_{rr}\,x_{1r}+b_{r,r+1}=0; \quad x_{1r}=-b_{r,r+1}/b_{rr}; \quad x_{2r}=-b_{r,r+2}/b_{rr};\\
b_{r-1,r-1}\,x_{1,r-1}+b_{r-1,r}\,x_{1r}+b_{r-1,r+1}=0;\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_{r-1,r-1}\,x_{2,r-1}+b_{r-1}\,x_{2r}+b_{r-1,r+2}=0;\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{6.66}$$

Када се одреди основни систем решења онда се опште решење одређује по обрасцу (6.64).

На пример

$$a)\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \{0\}; \quad \mathbf{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ & -1 & 11 & 9 \\ & & 40 & 40 \\ & & & 3 \end{bmatrix}; \quad |\mathbf{A}| = -120 \neq 0; \quad x_k \equiv 0;$$

$$b)\quad \begin{array}{c|cc|c} & 1 & -4 & 5 \\ & 2 & -1 & 3 \\ & 3 & 2 & 1 \\ \cline{2-4} & 1 & -4 & 5 \\ & -2 & 7 & -7 \\ \cline{2-4} & -3 & -2 & 0 \\ \hline \mathbf{x_1} & -1 & 1 & 1 \\ \hline x_k & -1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{A} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad r=2; \quad d=n-r=1; \quad |\mathbf{A}|=0;$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}};$$

$$\frac{x_1}{-7} = \frac{x_2}{7} = \frac{x_3}{7};$$

$$c)\quad \begin{array}{c|cc|cc|} & 2 & 3 & -1 & -2 \\ & 4 & -1 & 2 & 1 \\ & 2 & -11 & 7 & 8 \\ & & 7 & -4 & -5 \\ \cline{2-5} & 2 & 3 & -1 & -2 \\ & -2 & -7 & 4 & 5 \\ \cline{2-5} & -1 & -2 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \{x_1\} & -\frac{5}{14} & \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ \{x_2\} & -\frac{1}{14} & \frac{5}{7} & 0 & 1 \\ \hline x_k & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$|\mathbf{A}|=0; \quad \mathbf{A} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ & -7 & 4 & 5 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}; \quad r=2; \quad d=2;$$

$$\{x\} = \lambda_1 \begin{Bmatrix} -5/14 \\ 8/14 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \lambda_2 \begin{Bmatrix} -1/14 \\ 10/14 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(5\lambda_1+\lambda_2)/14 \\ (8\lambda_1+10\lambda_2)/14 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix};$$

$$x_1 = -(5x_3+x_4)/14;$$

$$x_2 = (8x_3+10x_4/14.$$

Када је број непознатих већи од броја једначина систем једначина се може *допунити* са $n-m$ једначина које су линеарне комбинације датих једначина и тада треба применити предњи поступак.

На пример:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \{0\};$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -2 & 3 \\ \mathbf{A} = & 2 & 5 & 6 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 3 \\ & -2 & 9 & 0 \\ \hline \{x\} & 0 & 0 & 0 \\ & -3 & 0 & 1 \end{array} \qquad r=2; \quad d=1; \quad \{x_1\}=\{x\}=\begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = 0; \quad r=2; \quad d=2; \quad \{x\}=\begin{Bmatrix} -a+4\,b \\ -a-3\,b \\ a \\ b \end{Bmatrix};$$

$$(x_1)=(-1 \quad -1 \quad 1 \quad 0); \qquad (x_2)=(4 \quad -3 \quad 0 \quad 1).$$

Нека је систем једначина $\mathbf{A}\{x\}=\{b\}$ сагласан али неодређен и нека су $\{x_r\}$ и $\{x_s\}$ два различита решења тог система, онда је $\mathbf{A}\{x_r\}-\mathbf{A}\{x_s\}=\mathbf{A}(\{x_r\}-\{x_s\})=\mathbf{A}\{y\}=0$, па је $\{y\}=\{x_r\}-\{x_s\}$ нетривијално решење одговарајућег хомогеног система.

На пример:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad r=2; \quad \{x_r\}=\begin{Bmatrix} (10+a)/10 \\ (-10+7a)/10 \\ a \end{Bmatrix};$$

$$\{x_s\}=\begin{Bmatrix} (8+b)/7 \\ b \\ (10+10\,b)/7 \end{Bmatrix}; \quad \{y\}=\begin{Bmatrix} -(^1/_7)+(a/10)-(b/7) \\ -1+(7\,a/10)-b \\ -(^{10}/_7)+a-(10\,b/7) \end{Bmatrix}.$$

Сагласан али неодређен нехомогени систем линеарних једначина има бескрајно много решења. Нека је $\{x_p\}$ једно *партикуларно решење*, онда је $\mathbf{A}\{x_p\}=\{b\}$. Нека је $\{y\}$ опште решење одговарајућег хомогеног система $\mathbf{A}\{y\}=\{0\}$. Ово се решење може према (6.64) изразити помоћу основног система решења $\{y\}=\lambda_1\{y_1\}+\lambda_2\{y_2\}+\cdots+\lambda_{n-r}\{y_{n-r}\}$, где су λ_k произвољни бројеви, r ранг матрице $\mathbf{A}$ и проширене матрице $(\mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{b})$ и $d=n-r$ степен дегенерације. Тада је $\{x\}=\{x_p\}+\{y\}$ опште решење нехомогеног система, јер је

$$\mathbf{A}\{x\}=\mathbf{A}(\{x_p\}+\{y\})=\mathbf{A}\{x_p\}+\mathbf{A}\{y\}=\{b\}+\{0\}=\{b\}.$$

Дакле, *збир партикуларног решења $\{x_p\}$ нехомогеног система једначина и општег решења $\{y\}$ одговарајућег хомогеног система је опште решење нехомогеног система.*

На пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix}; \quad r=2; \quad d=1; \quad \{x_p\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix};$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} -2a \\ 0 \\ a \end{Bmatrix}; \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} 1-2\,a \\ 0 \\ 2+a \end{Bmatrix}.$$

Систем једначина $x_1+2\,x_2=3$; $3x_1+6\,x_2=10$ *није сагласан*, јер је матрица **A** ранга $r=1$, а проширена матрица ранга 2. Због тога је систем *немогућ*, јер следи $0 \cdot x_1+0 \cdot x_2=1$, па нема решења. Пошто су леве стране линеарно зависне морају бити и десне стране линеарно зависне (на пример, 3 и 9). Нека систем има n једначина са n непознатих, ранга $r<n$, онда сигурно између једначина постоји линеарна веза. Коефицијенти сваке врсте јесу вектори врсте матрице **A** па ће бити $\lambda_1(a_1)+\lambda_2(a_2)+\cdots+\lambda_n(a_n)=0$, где су λ_k константе између којих је бар једна различита од нуле. Дакле, релација $\mathbf{A}\{x\}=\{b\}$ сада постаје $(\lambda_1(a_1)+\cdots+\lambda_n(a_n))\{x\}=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\cdots+\lambda_n b_n=0 \cdot \{x\}$, па мора бити и десна страна једнака нули. Оба услова се могу написати у матричном облику

$$\mathbf{A}'\{y\}=0; \qquad (b)\{y\}=0.$$

Из овога следи овај закључак: *Нехомогени систем једначина* $\mathbf{A}\{x\}=\{b\}$ *биће тада и само тада сагласан* (то јест може се решити) *ако је вектор* $\{b\}$ *независних коефицијената управан* (ортогоналан) *на вектору општег решења* $\{y\}$ *транспонованог хомогеног система линеарних једначина.*

На пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{Bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = 0;$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} 2a \\ -a \\ a \end{Bmatrix}; \quad (1 \quad 6 \quad 4) \begin{Bmatrix} 2a \\ -a \\ a \end{Bmatrix} = 0.$$

6.14. Израчунавање инверзних матрица. — За израчунавање инверзних матрица постоји више метода. Неке ћемо изнети јер је овај проблем важан у матричном рачуну.

6.14.1. Израчунавање инверзне матрице помоћу адјунговане. — У чл. **3.14.** дефинисали смо инверзну матрицу. Њени елементи су једнаки елементима адјунговане матрице подељеним вредношћу детерминанте матрице, те је према обрасцу (3.61):

$$A^{-1}=R=\frac{A^*}{|A|}\,;\qquad r_{ik}=\frac{K_{ki}}{|A|}\,;\qquad AA^{-1}=I. \tag{6.67}$$

На пример:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix};\quad |A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

6.14.2. Израчунавање инверзне матрице помоћу еквивалентних трансформација. — Према обрасцу (6.8), **члана 6.5.,** свака се матрица може претворити у еквивалентну матрицу ако постоје две несингуларне матрице V и K које представљају производе елементарних матрица врста, односно колона. Пошто је производ матрице A и њене инверзне матрице јединична матрица, то је јединична матрица I еквивалентна матрици A, те следи

$$VAK\to I;\qquad KV=A^{-1}, \tag{6.68}$$

јер се множењем слева матрицом K а затим здесна прво матрицом K^{-1}, а затим матрицом A^{-1}, добија предња релација:

$$KVAK=KI=K;\qquad KVAKK^{-1}=KVA=KK^{-1}=I;$$

$$KVAA^{-1}=IA^{-1}=A^{-1};\qquad KV=A^{-1}.$$

Када је матрица A *регуларна* тада се може према (6.12) претворити у нормални еквивалентни облик

$$VAK\to I;\quad \begin{pmatrix}I&A\\O&I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}V&I\\O&K\end{pmatrix};\quad KV=A^{-1}. \tag{6.69}$$

Ако се матрица A на познати начин помоћу елементарних трансформација на врстама и колонама своди на јединичну матрицу I, онда се матрице V и K изводе из јединичне матрице истим трансформацијама као и A, само прва матрица по врстама а друга по колонама, јер множењем следи:

$$\begin{pmatrix}V&O\\O&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&A\\O&I\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}I&O\\O&K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V&VA\\O&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&O\\O&K\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}V&VAK\\O&K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V&I\\O&K\end{pmatrix}.$$

На пример:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & \mathrm{O} & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & \mathrm{O} & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & 1 & -3 & -3 \\ & \mathrm{O} & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$A^{-1} = KV = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пошто је матрица **A** *регуларна* може се прећи на нормални еквивалентни облик трансформацијама *само по врстама* или *само по колонама.* Тада ће бити:

$$\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} V & VA \\ O & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} V & \\ O & I \end{pmatrix}; \quad VA = I; \quad V = A^{-1}; \quad (IA) = (A^{-1}\, I); \tag{6.70}$$

$$AK = I; \quad K = A^{-1}; \quad (IA) = (A^{-1}\, I).$$

На пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

6.14.3. Израчунавање инверзне матрице помоћу субматрица. — Нека је матрица A несингуларна квадратна матрица реда n, онда се она може партицијом поделити на субматрице. Обично се узима да је матрица A_{11} реда $n-1$. Истим поступком се врши раздељивање (партиција) и матрице $B=A^{-1}$, па ће бити

$$AB=I; \qquad \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & I_s \end{pmatrix}. \tag{6.71}$$

При томе морају субматрице A_{ik} и B_{ik} бити истог облика. Решавањем предње матричне једначине, добијају се релације

$$A_{11}\,B_{11}+A_{12}\,B_{21}=I_r; \qquad A_{11}\,B_{12}+A_{12}\,B_{22}=O;$$

$$A_{21}\,B_{11}+A_{22}\,B_{21}=O; \qquad A_{21}\,B_{12}+A_{22}\,B_{22}=I_s,$$

где је $r+s=n$. Уводећи смене

$$\begin{gathered} X=A_{11}^{-1}\,A_{12}; \qquad Y=A_{21}\,A_{11}^{-1}; \\ Z=A_{22}-Y\,A_{12}=A_{22}-A_{21}\,A_{11}^{-1}\,A_{12} \end{gathered} \tag{6.72}$$

добијају се коефицијенти реципрочне матрице што се може приказати и схематски:

$$\begin{array}{l} B_{11}=A_{11}^{-1}+XZ^{-1}Y \\ \\ B_{12}=-XZ^{-1} \\ \\ B_{21}=-Z^{-1}Y \\ \\ B_{22}=Z^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|cc} & A_{21} & A_{22} \\ & \downarrow & \\ X=A_{11}^{-1}A_{12} & \longrightarrow\; A_{11}^{-1} & \nearrow A_{12} \\ \hline Z^{-1} & Y=A_{21}\,A_{11}^{-1} & Z=A_{22}-YA_{12} \\ \hline A^{-1} & A_{11}^{-1}+XZ^{-1}\,Y & -XZ^{-1} \\ & -Z^{-1}\,Y & Z^{-1} \end{array} \tag{6.73}$$

Дакле, ако се узме да је субматрица A_{11} реда $n-1$, онда је матрица A_{21} *матрица врста*, а субматрица A_{12} *матрица колона*, док је матрица A_{22} *скалар*.

На пример:

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{array}\right); \qquad \begin{array}{|c|c|c|} & (1\quad 3) & 4 \\ \hline \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ \hline 1 & (1\quad 0) & 1 \\ \hline A^{-1} & \begin{matrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} & \end{array};$$

$$\mathrm{B}_{11} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 1 \cdot (1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{B}_{12} = -\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} (1) = \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\mathrm{B}_{21} = -(1)\,(1 \quad 0) = (-1 \quad 0); \qquad \mathrm{B}_{22} = 1.$$

Како је субматрица A_{11} главна субдетерминанта, то се може схема (6.73) поступно примењивати да би се израчунала инверзна матрица прве субматрице. Поступак би изгледао овако:

$$\mathrm{G}_1 = (a_{11}); \quad \mathrm{G}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathrm{G}_2^{-1} = \frac{1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{G}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{\mathrm{G}_2} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]; \qquad \mathrm{Z}_i = \frac{|\mathrm{G}_i|}{|\mathrm{G}_{i-1}|}.$$

На пример:

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ \cline{1-1} 1 & 1 & 2 & 3 \\ \cline{1-2} 2 & 2 & 2 & 3 \\ \cline{1-3} 2 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]; \qquad \mathrm{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{G}_2^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{G}_3 = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{G}_2} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \\ \hline 2 & 2 & 2 \end{array}\right);$$

$$\begin{array}{r|rr:r|}
 & 2 & 2 & 2 \\ \hdashline
0 & -1 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline
-\frac{1}{2} & 0 & 2 & -2 \\ \hline
 & -1 & 1 & 0 \\
\mathrm{G}_3^{-1} & 1 & -2 & 1 \\ \hdashline
 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|rrr|c|}
 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline
 & -1 & 1 & 0 & \\
\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3/2 \end{Bmatrix} & 1 & -2 & 1 & \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \\
 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \\ \hline
-2 & \multicolumn{3}{c|}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}} & -\frac{1}{2} \\ \hline
\mathrm{A}^{-1} & \multicolumn{4}{c|}{\begin{matrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{matrix}}
\end{array}.$$

Проба:

$$AA^{-1}=I; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ако се деси да је главна субдетерминанта G_i сингуларна онда треба ту врсту (i) заменити са последњом врстом помоћу елементарне матрице и посао наставити. Инверзна матрица се добија када се на крају резултат помножи *здесна* (*постмултипликација*) истом том елементарном матрицом.

На пример:

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 5 & 6 \end{array}\right); \quad G_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad |G_2|=0; \quad B=E_{23}A; \quad A^{-1}=B^{-1}E_{23};$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ \mathbf{3} & 5 & 6 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array}\right);$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

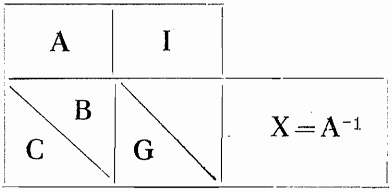
$$\begin{array}{r|rr|r|} & 2 & 4 & 5 \\ \cline{2-4} -3 & -5 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \\ \hline -1 & \mathbf{2} & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & -3 \\ & -3 & -1 & 3 \\ & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

$$AA^{-1}=I.$$

6.14.4. Израчунавање инверзне матрице помоћу Banachiewicz-јеве схеме. — Пошто је производ матрице и њене инверзне матрице јединична матрица, то с обзиром на примену *Banachiewicz-јеве* схеме према (6.43), добијамо:

$$AA^{-1}=I; \quad A^{-1}=X\,(x_{ik}); \quad AX=I; \quad G=BX;$$

$$TA=B; \quad A=T^{-1}B=-CB; \quad -CBX=-CG=I;$$



(6.74)

Овде треба решити три задатка:

1° матрицу **A** представити помоћу састављене матрице тако да је $\mathbf{A} = -\mathbf{C} \underset{\smile}{\top} \mathbf{B}$,

2° одредити матрицу **G**, и

3^e одредити непознате елементе матрице **X**.

Овде су ти сви елементи:

$a)\ c_{ii} = -1;\quad c_{i1} = -a_{i1}/a_{11};\quad b_{1k} = a_{1k};$

$$b)\ i \leqslant k;\quad b_{ik} = a_{ik} + (c_{ir})\{b_{rk}\};\qquad r = 1, \ldots, i-1; \tag{6.75}$$

$c)\ i > k;\quad b_{kk}\, c_{ik} = -[a_{ik} + (c_{is})\{b_{sk}\}];\qquad s = 1, 2, \ldots, k-1;$

$d)\ g_{ii} = 1;$

$e)\ g_{ik} = (c_{i\rho})\{g_{\rho k}\};\qquad \rho = k, \ldots, i-1;$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{X};\quad \begin{Vmatrix} 1 & & \\ g_{21} & 1 & \\ g_{31} & g_{32} & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & b_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{Vmatrix}.$$

Непознате се одређују од последње x_{nn}, па редом до прве x_{11}. На пример, за $n=3$ добија се:

$b_{33}\ x_{33} = 1;$ $\qquad$ $b_{33}\ x_{32} = g_{32};$

$b_{22}\ x_{23} + b_{23}\ x_{33} = 0;$ $\qquad$ $b_{22}\ x_{22} + b_{23}\ x_{32} = 1;$

$b_{11}\ x_{13} + b_{12}\ x_{23} + b_{13}\ x_{33} = 0;$ $\qquad$ $b_{11}\ x_{12} + b_{12}\ x_{22} + b_{13}\ x_{32} = 0;$

$$b_{33}\ x_{31} = g_{31};$$

$$b_{22}\ x_{21} + b_{23}\ x_{31} = g_{21};$$

$$b_{11}\ x_{11} + b_{12}\ x_{21} + b_{13}\ x_{31} = 1.$$

На пример:

						I						
A	1	2	3	1	1							
	1	3	3	2	0	1						
	2	4	3	3	0	0	1					
	1	1	1	1	0	0	0	1				
$\mathbf{C} \underset{\smile}{\top} \mathbf{B}$	1	2	3	1	1				1	−2	1	0
	−1	1	0	1	−1	1			1	−2	2	−3
	−2	0	−3	1	−2	0	1		0	1	−1	1
	−1	1	$-^2/_3$	$^1/_3$	$-^2/_3$	1	$-^2/_3$	1	−2	3	−2	3
						G				$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$		

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & -3 & 1 \\ & & & {}^1/_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix};$$

јер је

$$\mathrm{BX}=\mathrm{G}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & -3 & 1 \\ & & & {}^1/_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & 0 & 1 & \\ -{}^2/_3 & 1 & -{}^2/_3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{3}x_{44}=1; \quad x_{44}=3; \quad \frac{1}{3}x_{43}=-\frac{2}{3}; \quad x_{43}=-2; \quad \frac{1}{3}x_{42}=1; \quad \frac{1}{3}x_{41}=-\frac{2}{3};$$

$(x_4)=(-2;\ \ 3;\ \ -2;\ \ 3);$

$-3\,x_{34}+3=0; \qquad -3\,x_{33}-2=1; \qquad -3\,x_{32}+3=0;$

$-3\,x_{31}-2=-2; \qquad (x_3)=(0;\ \ 1;\ \ -1;\ \ 1);$

$$(1\ \ 0\ \ 1) \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = (-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0);$$

$x_{21}-2=-1; \qquad x_{23}-2=0;$

$x_{22}+3=1; \qquad x_{24}+3=0; \qquad (x_2)=(1;\ \ -2;\ \ 2;\ \ -3).$

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 1) \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0);$$

$x_{11}+2-2=1; \qquad x_{12}-4+3+3=0; \qquad (x_1)=(1;\ \ -2;\ \ 1;\ \ 0).$

$x_{13}+4-3-2=0; \qquad x_{14}-6+3+3=0;$

Проба: $\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{I}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

6.15. Свођење квадратне форме на канонски облик. — У чл. 5.5. видели смо како се једна квадратна форма може помоћу конгруентне трансформације свести на *канонски облик* у коме се јављају нове координате само као квадрати док нема мешовитих чланова, па је

$$Q = \sum_i^n \sum_k^n a_{ik}\, x_i\, x_k = \sum_i^n d_{ii}\, y_i^2;$$

$$Q = (x)\,\mathbf{A}\,\{x\} = (y)\,\mathbf{D}\,\{y\}\,; \qquad a_{ik} = a_{ki}\,. \tag{6.76}$$

Дакле, симетрична матрица **A** се трансформише у дијагоналну матрицу са коефицијентима d_{ii}. Ова трансформација је основана на *Lagrange-овом поступку* који ћемо приказати на тернерној форми:

$$\begin{aligned} Q = a_{11}\; x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 &+ 2\,a_{13}\,x_1\,x_3 + \\ + \;\; a_{22}\,x_2^2 \quad &+ 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 + \\ &+ \;\; a_{33}\,x_3^2. \end{aligned}$$

Прва врста предњег израза може се написати у облику

$$\begin{aligned} &a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + 2\,a_{13}\,x_1\,x_3 = \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}\,x_3\right)^2 - \frac{1}{a_{11}}\,(a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3)^2 \end{aligned}$$

па се квадратна форма може представити овако

$$Q = a_{11}\,y_1^2 + Q_1$$

где је

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}\,x_3;$$

а

$$Q_1 = a_{22}\,x_2^2 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 + a_{33}\,x_3^2 - \frac{1}{a_{11}}\,(a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3)^2 =$$

$$= \frac{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}\;x_2^2 + 2\,\frac{a_{11}\,a_{23} - a_{12}\,a_{13}}{a_{11}}\;x_2\,x_3 + \frac{a_{11}\,a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}}\;x_3^2 =$$

$$= a\,{}^{(1)}_{22}\,x_2^2 + 2\,a\,{}^{(1)}_{23}\,x_2\,x_3 + a\,{}^{(1)}_{33}\,x_3^2$$

је форма од $n-1$ промењљивих $x_2, \ldots, x_n$.

Када се исти поступак примени на форму Q_1 добија се за први члан:

$$a_{22}^{(1)}\,x_2^2 + 2\,a_{23}^{(1)}\,x_2\,x_3 = a_{22}^{(1)}\left(x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\;x_3\right)^2 - \frac{1}{a_{22}^{(1)}}\,[a_{23}^{(1)}\,x_3]^2;$$

па су:

$$Q_1 = a_{22}^{(1)}\,y_2^2 + Q_2; \qquad y_2 = x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\,x_3.$$

Даље ће бити

$$Q_2 = a_{33}^{(2)}\, y_3^2 ; \qquad y_3 = x_3 ; \qquad a_{33}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)}\, a_{33}^{(1)} - [a_{23}^{(1)}]^2}{a_{22}^{(1)}} ,$$

па је квадратна форма сведена на *канонски облик.*

Када се матрица **A** сведе на горњи троугласти облик онда се добија

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} ;$$

$$a_{22}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} ; \quad a_{23}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{23} - a_{12}\, a_{13}}{a_{11}} ; \quad a_{33}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}} ;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} ;$$

$$a_{33}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)}\, a_{33}^{(1)} - [a_{23}^{(1)}]^2}{a_{22}^{(1)}} .$$

Дакле, елементи нове квадратне форме јесу:

$$d_{11} = a_{11} ; \qquad d_{22} = a_{22}^{(1)} ; \qquad d_{33} = a_{33}^{(2)} ; \quad \ldots ; \quad d_{nn} = a_{nn}^{(t-1)} . \tag{6.77}$$

Они су једнаки елементима са главне дијагонале троугласте матрице на коју се своди матрица **A** *Gauss-овим алгоритмом.*

Ако је T оператор који матрицу **A** своди на троугласту матрицу (**B**), онда се линеарном трансформацијом координата квадратна форма Q своди на канонски облик:

$$\begin{gathered} \{y\} = (\mathrm{T}')^{-1}\{x\} ; \quad \{x\} = \mathrm{T}'\{y\} ; \quad \{x\} = (\mathrm{T}'\{y\})' ; \quad (x) = (y)\,\mathrm{T} ; \\ Q = (x)\,\mathbf{A}\,\{x\} = (y)\,\mathbf{TAT}'\,\{y\} = (y)\,\mathbf{D}\,\{y\} . \end{gathered} \tag{6.78}$$

На пример:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} ; \qquad Q = x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 6\,x_2^2 + 8\,x_2\,x_3 + 5\,x_3^2 ;$$

$$\mathrm{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{T}_1\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 2 & 2 \\ & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}_2\,\mathrm{T}_1\,\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 2 & 2 \\ & & 2 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{T} = \mathrm{T}_2\,\mathrm{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{TAT}' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}; \qquad Q = y_1^2 + 2\,y_2^2 + 2\,y_3^2\,;$$

$$\mathrm{T}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}; \quad (\mathrm{T}')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}; \qquad \{x\} = \mathrm{T}'\{y\};$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 - 2\,y_2 + y_3 \\ y_2 - y_3 \\ y_3 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + 2\,x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{Bmatrix};$$

$$Q = (y_1 - 2\,y_2 + y_3)^2 + 4\,(y_1 - 2\,y_2 + y_3)\;(y_2 - y_3) + 2\,(y_1 - 2\,y_2 + y_3)\,y_3 + 6\,(y_2 - y_3)^2 +$$
$$+ 8\,(y_2 - y_3)\,y_3 + 5\,y_3^2 \equiv y_1^2 + 2\,y_2^2 + 2\,y_3^2.$$

Према *Banachiewicz*-јевој схеми следи

$$\mathrm{TA} = \mathrm{B}; \qquad \mathrm{A} = \mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{B} = -\,\mathrm{CB}; \qquad -\mathrm{C} = \mathrm{T}^{-1};$$
$$\{y\} = -\,\mathrm{C}'\,\{x\} = (\mathrm{T}')^{-1}\,\{x\}, \tag{6.79}$$

па се лако одређују нове координате, тзв. *главне координате* $\{y\}$.

На пример:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 6 & 20 & 4 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}; \qquad Q = 2\,x_1^2 + 12\,x_1\,x_2 + 4\,x_1\,x_3 + 20\,x_2^2 + 8\,x_2\,x_3 + 12\,x_3^2\,;$$

$$\begin{array}{ccc|}
2 & 6 & 2 \\
6 & 20 & 4 \\
2 & 4 & 12 \\
\hline
2 & 6 & 2 \\
\cline{1-1}
-3 & \multicolumn{1}{|c}{2} & -2 \\
\cline{2-2}
-1 & \multicolumn{1}{|c|}{1} & 8
\end{array}
\qquad
\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}; \quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 + 3x_2 + x_3; \\ y_2 &= x_2 - x_3; \\ y_3 &= \phantom{x_1 + 3x_2 -{}} x_3; \end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ -3 & -1 & \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad Q = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 8y_3^2 = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + {} \\ + 4x_1x_3 + 20x_2^2 + 8x_2x_3 + 12x_3^2 .$$

Овај се поступак може применити и у случају када је матрица **A** сингуларна. Тада је квадратна форма Q *дегенеративна*. Ако је ранг матрице **A** једнак r, онда се на главној дијагонали матрице **B** појављује $n-r=d$ нула и канонски облик квадратне форме је дегенерисан, пошто сада *има само* r *нових променљивих* y_i.

На пример:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 11 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad rang\, r = 2; \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0;$$

$$\begin{array}{|ccc|}
5 & 3 & 2 \\
3 & 4 & -1 \\
2 & -1 & 3 \\
\hline
5 & 3 & 2 \\
\cline{1-1}
-{}^3/_5 & \multicolumn{1}{|c}{{}^{11}/_5} & -{}^{11}/_5 \\
\cline{2-2}
-{}^2/_5 & \multicolumn{1}{|c|}{1} & 0
\end{array}
\qquad
\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^3/_5 & {}^2/_5 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + {}^3/_5\, x_2 + {}^2/_5\, x_3 \\ x_1 - \quad x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix};$$

$$Q = 5y_1^2 + \frac{11}{5}\, y_2^2 = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 - {} \\ - 2x_2x_3 + 3x_3^2 .$$

Према коефицијентима b_{ii} матрице **B** здружене матрице $\mathbf{C} \underset{\smile}{\top} \mathbf{B}$, односно матрице **D** $(d_{ii}=b_{ii})$, може се закључити о врсти квадратне форме. Ако су, дакле, сви елементи b_{ii} различити од нуле форма *није дегенеративна*, односно матрица **A** је *регуларна*; ако су неки елементи b_{ii} једнаки нули форма је *дегенеративна*, а матрица **A** је *сингуларна*. Број нула на главној дијагонали одређује *степен дегенеративности*, $d = n - r$.

Недегенеративна квадратна форма је *позитивно дефинитна* када су сви елементи b_{ii} *позитивни* $(b_{ii} > 0)$; тада су и сви главни минори детерминанте матрице **A** позитивни; $\Delta_i > 0$. Када су сви елементи b_{ii} *негативни* $(b_{ii} < 0)$ форма је *негативно дефинитна*. Буду ли елементи b_{ii} и позитивни и негативни али различити од нуле, квадратна недегенеративна форма је *индефинитна*.

Код дегенеративне форме поступа се на исти начин али према коефицијентима којих сада има $d=n-r$, где је d степен дегенеративности.

Квадратна форма може да има и позитивних и негативних коефицијената. Број позитивних коефицијената назива се *индекс форме*, а разлика броја позитивних (p) и негативних коефицијената (q) зове се *сигнатура форме* ($s=p-q$). Пошто је ранг форме $r=p+q$, то је сигнатура $s=p-(r-p)$, па је увек $|s| \leqslant r$. *Апсолутна вредност сигнатуре квадратне форме највише је једнака рангу матрице форме.*

Квадратна форма може се помоћу различитих несингуларних линеарних трансформација свести на канонски вид. Међутим, при овим трансформацијама *остају инваријантни и ранг и индекс*, односно *ранг и сигнатура*, форме. Ово је израз *Sylvester-овог закона о инерцији квадратних форми*: *Ранг и индекс* (*односно ранг и сигнатура*) *квадратне форме не зависе од регуларне трансформације којом се форма своди на канонски облик.*

Из овога следи и овај закључак:

Две реалне квадратне форме од n променљивих су еквивалентне на реалном пољу ако и само ако имају исти ранг и исти индекс, односно исти ранг и исту сигнатуру.

На пример:

a)

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}|=0; \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-32 \neq 0; \quad r=3;$$

$$Q=2x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_1x_4+8x_2^2+4x_2x_3+4x_3x_4+6x_3^2+8x_3x_4+2x_4^2;$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & -2 & 0 \\ -2 & 1/3 & -8/3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|; \qquad \left\{\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} x_1+x_2+2x_3+x_4 \\ x_2-\frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\};$$

$$Q=2y_1^2+6y_2^2-\frac{8}{3}y_3^2; \qquad p=2; \quad q=1; \quad s=2-1=1<r=3.$$

b)

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}; \quad Q=x_1^2-4x_1x_2+8x_1x_3+2x_2^2-7x_3^2; \quad p=3; \quad q=2; \quad s=1;$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \\ \hline 1 & -2 & 4 \\ \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{|c}{-2} & 8 \\ \cline{2-2} -4 & 4 & \multicolumn{1}{|c}{9} \end{array}\right|;$$

$$Q=y_1^2-2y_2^2+9y_3^2; \quad \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ & 1 & -4 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}; \quad Q=z_1^2+9z_2^2-2z_3^2; \quad s=2-1=1;$$

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2/3 \\ u_3/\sqrt{2} \end{Bmatrix}; \quad Q=u_1^2+u_2^2-u_3^2; \quad s=2-1=1.$$

Ако је квадратна форма *без квадратних чланова,* онда је њена матрица *индефинитна,* јер су јој елементи $a_{tt}=0$. Тада треба погодним сменама довести матрицу на такав облик да нова форма има квадратне чланове, па применити досадашњи поступак.

На пример:

a)

$$Q=(x)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\{x\}=4x_1x_2+8x_1x_3+6x_2x_3; \quad \Delta_1=0; \quad \Delta_2=-4; \quad |\mathbf{A}|=\Delta_3=48;$$

$$Q(1;\ 1;\ 2)=32; \qquad Q(1;\ -1;\ -2)=-8; \qquad Q(1;\ 1/2;\ -2/11)=0;$$

сменама

$$x_1=\xi_1; \qquad x_2=\xi_1+\xi_2; \qquad x_3=\xi_3$$

добија се

$$Q=4\xi_1^2+4\xi_1\xi_2+14\xi_1\xi_3+6\xi_2\xi_3,$$

па су

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 7 \\ \cline{1-1} -\frac{1}{2} & \multicolumn{1}{|c}{-1} & -\frac{1}{2} \\ \cline{2-2} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & \multicolumn{1}{|c}{-12} \end{array}\right|; \quad \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 & {}^1/_2 & {}^7/_4 \\ & 1 & {}^1/_2 \\ & & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \xi_1+{}^1/_2\,\xi_2+{}^7/_4\,\xi_3 \\ \xi_2+{}^1/_2\,\xi_3 \\ \xi_3 \end{Bmatrix};$$

те је канонски облик

$$Q=4y_1^2-y_2^2-12y_3^2; \qquad |\mathrm{A}|=48.$$

Другим сменама

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2; \qquad x_2 = \xi_1 - \xi_2; \qquad x_3 = \xi_3$$

биће

$$Q = 4\xi_1^2 - 4\xi_2^2 + 14\xi_1\xi_3 + 2\xi_2\xi_3;$$

па су

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 7 \\ \hline 0 & -4 & 1 \\ -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -12 \end{array}\right|; \qquad Q = 4y_1^2 - 4y_2^2 - 12y_3^2; \qquad |\mathbf{A}| = 192;$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/4 \\ & 1 & -1/4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 + 7/4\,\xi_3 \\ \xi_2 - 1/4\,\xi_3 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}.$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad Q = x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3; \qquad |\mathbf{A}| = -1;$$

сменама

$$x_1 = \xi_1 + \xi_3; \qquad x_2 = \xi_2; \qquad x_3 = \xi_1 - \xi_3;$$

добија се

$$Q = 5\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 4\xi_1\xi_2 - 6\xi_1\xi_3 + 4\xi_2\xi_3$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & -2 & -3 \\ \hline 3/5 & 1/5 & 4/5 \\ 3/5 & -4 & -4 \end{array}\right|; \qquad Q = 5y_1^2 + \frac{1}{5}y_2^2 - 4y_3^2; \qquad |\mathbf{A}| = -4;$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & -2/5 & -3/5 \\ & 1 & 4 \\ & & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \lambda_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$$

ВЕЖБАЊА

1. Помоћу елементарних трансформација одредити ранг матрица:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \\ 4 & -5 & 6 & -7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Свести матрице на канонске матрице:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Дате матрице свести на нормалне облике:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Дате матрице свести на нормални еквивалентни облик:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Дате матрице свести на еквивалентну дијагоналну матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Одредити матрице сличне матрици A:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Одредити матрице конгруентне матрици A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ -3 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Одредити матрице коњуктивне матрици **A**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i & -3+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ -3-2i & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 0 & 1-i \\ -1+i & -1-i & 3i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2i & 1+i & 2-i \\ 1+i & 2+i & -1-i \\ 2-i & -1-i & -2-i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i & -1 & 1+i \\ 1 & 2i & i \\ -1+i & & 3i \end{pmatrix}.$$

9. Одредити ранг производа матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ -4 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Дате матрице **A** свести на троугласти облик:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 8 & 3 \\ 12 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

11. Дату матрицу разложити у производ двеју троугластих матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

12. Решити системе нехомогених линеарних једначина:

a)
$$5x_1+2x_2+\ x_3=11;$$
$$4x_1-\ x_2-4x_3=11;$$
$$3x_1+2x_2-3x_3=11;$$

b)
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \{b\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{Bmatrix};$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}\{x\}=\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix};$$

d)
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\{x\}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \\ 5 \\ 11 \\ 11 \end{Bmatrix};$$

e)
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\{x\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}.$$

13. Решити системе хомогених једначина:

a)
$$x_1+2x_2+3x_3=0;$$
$$2x_1+\ x_2+3x_3=0;$$
$$3x_1+2x_2+\ x_3=0;$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\{x\}=\{0\};$$

c)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\{x\}=\{0\};$$

d)
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}\{x\}=\{0\};$$

e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\{x\}=\{0\};$$

f)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}=0.$$

14. Израчунати инверзну матрицу матрице A:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} -115 & 145 & -64 & -18 \\ 50 & -60 & 26 & 7 \\ 5 & -10 & 6 & 2 \\ 10 & -10 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

15. Квадратне форме свести на канонски облик:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & -4 \\ 6 & 9 & 19 & -8 \\ 4 & -4 & -8 & -24 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2;$$

$$Q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2^2 + 12x_2x_3 + 6x_2x_4 + 9x_3^2 + 4x_3x_4 + 5x_4^2;$$

$$Q = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

7. ПОЛИНОМИ И МАТРИЦЕ

7.1. Основне релације о полиномима. — Нека је x апстрактни симбол за који се претпоставља да је комутативан са самим собом и са елементима поља, онда се израз

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_{n-r} x^{n-r}+\cdots+a_1 x+a_0=$$

$$=\sum_{r=0}^{n} a_{n-r} x^{n-r}=(a_n \ \cdots \ a_0)\begin{Bmatrix} x^n \\ x^{n-r} \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{7.1}$$

назива *полином* по x на пољу F. Овде је n природни број или нула, док су a_i *коефицијенти полинома* уопште узев комплексни бројеви. Први коефицијент a_n ако је различит од нуле, $a_n \neq 0$, је *најстарији* (*водећи*, *„leading"*) *коефицијент;* члан a_0 је *независни члан* и добија се када се у $P(x)$ стави да је $x=0$; $P(0)=a_0$. Када је $a_n \neq 0$ онда је n *степен полинома* $[n=dg\, P(x)]$. Полином $P(x)=a_0 \neq 0$ је *нултог степена*. Полином $P(x)=a_0=0$ је *нула полином;* његов степен је неодређен. Када је коефицијент $a_n=1$ онда се каже да је полином *моничан*. Према коефицијентима (a_i) полином је *реалан* или *комплексан*. Скуп свих полинома $P(x)$ зове се *полиномски домен* $[F(x)]$ на пољу F.

Посматрајући појединачне полиноме од $[F(x)]$ као елементе бројног система, полиномски домен има доста, ако не и све, особине самог поља. Збир и производ полинома опет су полиноми:

$$P_m(x)+Q_n(x)=Q_n(x)+P_m(x)=S(x), \quad \text{степена} \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \text{ако је} \begin{matrix} m>n; \\ m<n; \end{matrix} \tag{7.2}$$

$$P_m(x)\cdot Q_n(x)=Q_n(x)\cdot P_m(x)=R_{m+n}(x).$$

Ако су $P(x)$ и $Q(x) \neq 0$ два полинома на пољу $F(x)$, тада постоје на истом пољу два полинома $q(x)$ и $R(x)$ који задовољавају релацију

$$P(x)=q(x)\cdot Q(x)+R(x). \tag{7.3}$$

Полином $q(x)$ је *количник полинома* $P(x)$ и $Q(x)$, а полином $R(x)$ је *остатак*. Он је или нула полином или полином реда нижег од полинома $Q(x)$. Када се дељење врши без остатка, $R(x)=0$, тада се полиноми $Q(x)$ и $q(x)$ називају *фактори* (*чиниоци*) *полинома* $P(x)$. Ако је у том случају полином $Q(x)=c=\text{const}$ факторизација се зове *тривијална*, па је полином $P(x)$ *недељив* (*иредуцибилан*).

Полином сведен на нулу представља *алгебарску једначину* n-ог *степена* (реда). Полином $P(x)$ зове се тада *полином једначине:*

$$f(x)=P(x)=\sum_{r=0}^{n} a_{n-r}\, x^{n-r}=0. \tag{7.4}$$

Комплексни број $\mathfrak{z}_k$ који задовољава предњу једначину односно који полином своди на нулу зове се *нула* или *корен полинома*, $P(\mathfrak{z})$ јер је $P(\mathfrak{z}_k)=0$. Свака нула полинома је решење или корен алгебарске једначине тога полинома. *Основни став алгебре је: „Сваки полином степена* $n\geqslant 1$ *има бар једну реалну или комплексну нулу"*. Разлика $x-x_k$ зове се *корени чинилац* или *линеарни фактор* полинома. Полином је дељив својим кореним фактором без остатка, те следи

$$P(x)=(x-x_k)\,P_{n-1}(x); \quad q(x)=P_{n-1}(x). \tag{7.5}$$

Количник је, дакле, полином од x али реда нижег за један. Оваква нула се зове *једнострука* или *проста* (*једнострука* или *прости корен*). Међутим, нула може бити *вишег реда* или *вишеструка нула*. На пример, нула другог реда ствара чинилац $(x-x_k)^2$. Уопште, нула r-ог реда даје као количник полином $n-r$-ог реда, те следи

$$P(x)=(x-x_k)^r\,P_{n-r}(x). \tag{7.6}$$

Сваки се полином може представити производом најстаријег елемента a_n и производа корених чинилаца

$$P_n(x)=a_n\prod_{k=1}^{n}(x-x_k); \quad P_n(x)=a_n\prod_{s=1}^{\nu}(x-x_k)^{r_s}\ ; \sum_{r=1}^{\nu} r_s=n. \tag{7.7}$$

На пример:

$(2x^2+x+3)+(x^2-2x+1)=3x^2-x+4; \qquad (2x^2+x+3)(x^2-2x+1)=2x^4-3x^3+3x^2-5x+3;$

$\dfrac{3x^3+5x^2+4x+2}{3x^2+2x+2}=x+1; \qquad 3x^3+7x^2+5x+1=(x+1)(3x^2+2x+2)+(2x^2+x-1);$

$P(x)=2x^3-x^2+2x-3=(x-1)(2x^2+x+3); \qquad 2x^4-3x^3+3x^2-5x+3=(x-1)^2(2x^2+x+3);$

$P(x)=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3); \qquad x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2).$

$P(x)=6x^2-5x+1=6(x-1/2)(x-1/3); \qquad P(x)=2x^3-x^2-2x+1=2(x-1)(x+1)(x-1/2).$

Изједначујући изразе (7.4) и (7.7) добијају се проширени *Viète*-ови *услови* као веза између коефицијената полинома и корена:

$$\sum_{r=0}^{n} a_{n-r}\,x^{n-r}=a_n\prod_{k=1}^{n}(x-x_k); \ \sum_{1}^{n} x_k=\sum C_1^n\,x_k=-a_{n-1}/a_n; \sum C_2^n\,x_k=a_{n-2}/a_n; \tag{7.8}$$

$$\sum C_3^n\,x_k=-a_{n-3}/a_n,\ldots, \ \sum \ C_r^n\,x_r=(-1)^r\,(a_{n-r}/a_n; \ \ \Pi\, x_1\cdots x_n=(-1)^n\,a_0/a_n.$$

За полином трећег и четвртог степена *Viète*-ови услови били би.

$$P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0;$$
$$x_1+x_2+x_3=-a_2/a_3;$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a_1/a_3;$$
$$x_1x_2x_3=-a_0/a_3;$$

$$P_4(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0;$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=-a_3/a_4;$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+$$
$$+x_3x_4=a_2/a_4;$$
$$x_1x_2(x_3+x_4)+x_1x_3x_4+$$
$$+x_2x_3x_4=-a_1/a_4;$$
$$x_1x_2x_3x_4=a_0/a_n.$$

На пример:

a) $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$;

$1+2+3=+6/1-6$; $1\cdot2+1\cdot3+2\cdot3=11$; $1\cdot2\cdot3=+6$;

b) $2x^3-x^2-2x+1=2(x-1)(x+1)(x-1/2)$;

$1-1+{}^1/_2={}^1/_2$; $1\cdot(-1)+1\cdot1/2+(-1)\cdot1/2=-1$;

$1\cdot(-1)(1/2)=-1/2$.

Када се уместо x стави вредност $x=a$ добија се вредност $P(a)$. Ако се полином подели вредношћу $(x-a)$ онда је количник полином реда $n-1$ а остатак је вредност $R=P(a)$. Овај став је познат као *Bézout*-ов *став из алгебре*.

На пример:

$(2x^2+3x+2):(x-1)$; $2x^2+3x+2=(x-1)(2x+5)+7$; $R(x)=7=P(1)$.

Коефицијенти количника и остатак R одређују се најлакше помоћу *Horner*-ове *схеме* која непосредно следи из изједначавања коефицијената полинома

$$P(x)=\sum_{r=0}^{n}a_{n-r}\,x^{n-r}=(x-a)P_{n-1}(x)+R=(x-a)\sum_{r=0}^{n-1}b_{n-r}\,x^{n-1-r}$$

па ће бити:

$$b_n=a_n;\quad b_{n-1}=ab_n+a_{n-1};\ \dots;\quad b_{n-r}=a\,b_{n-r-1}+a_{n-r}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc} a=x_0 & a_n & & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-r} & \dots & a_1 & a_0 \\ & & \downarrow & b_n a & b_{n-1}a & \dots & b_{n-1-r}a & \dots & b_2 a & ab_1 \\ \hline & a_n=b_n & & b_{n-1} & b_{n-2} & & b_{n-r} & & b_1 & P(a)=R \end{array} \tag{7.9}$$

На пример:

$12x^4-10x^3+7x^2-2x+5=(x-1)(12x^3+2x^2+9x+7)+12$.

$a=x_0=1$	12	-10	7	-2	5
		12	2	9	7
b_{n-r}	12	2	9	7	12
$P_{n-1}(x)$	$12x^3$	$+2x^2$	$+9x+$	7	$R=P(1)$

Полином $P(x)$ може се развити по степенима основе $(x-a)$ такође помоћу *Horner*-ове *схеме*, јер се коефицијенти добијају упоређивањем оба израза за полиноме

$$P(x)=\sum_{r=0}^{n} a_{n-r}\,x^{n-r}=\sum A_{n-r}(x-a)^{n-r}. \tag{7.10}$$

На пример:

$$P(x)=x^4-6x^3+9x^2-5x+3=A_4(x-2)^4+A_3(x-2)^3+A_2(x-2)^2+A_1(x-1)+A_0;$$

$a=x_0=2$	1	-6	9	-5	3
		2	-8	$+2$	-6
	1	-4	1	-3	-3
		2	-4	-6	A_0
	1	-2	-3	-9	
		2	0	A_1	
	1	0	-3		
		2	A_2		
	1	2			
	A_4	A_3			

$$P(x)=(x-2)^4+2(x-2)^3-3(x-2)^2-$$
$$-9(x-2)-3.$$

$A_0=P(2)=-3;$

$1!\ A_1=P'(x=2)=-9;$

$P'=4x^3-18x^2+18x-5;$

$2!\ A_2=P''(x=2)=-6;$

$P''=12x^2-36x+18;$

$3!\ A_3=P'''(x=2)=12;\quad P'''=24x-36;$

$4!\ A_4=P^{(4)}(x=2)=24;\quad P^{(4)}=24.$

7.2. Параметарске матрице. — Елементи матрице a_{ik} могу да зависе од више промењивих, па је онда матрица *матрична функција*. Важан је случај у пракси када елементи матрице зависе *само од једне промењиве* (једног параметра, x). Тада је матрична функција

$$\mathrm{A}(x)=(a_{ik}(x))=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

Оваква матрица се назива *параметарска*. Често неки писци обележавају овај параметар са λ па се ове матрице зову *„ламбда матрице“*. Међутим, ми ћемо их звати *параметарске матрице* или *промењиве матрице*. Од параметарских матрица важне су оне чији су елементи *полиноми*. Нека је код квадратне матрице реда n највећи степен s полинома $a_{ik}(x)$, онда се матрица може написати у облику *матричног* *полинома* чији су коефицијенти квадратне матрице n-ог реда:

$$\mathbf{A}\,(x)=\mathbf{A}_s\,x^s+\mathbf{A}_{s-1}\,x^{s-1}\cdots+\mathbf{A}_1\,x+\mathbf{A}_0. \tag{7.12}$$

Квадратна матрица $\mathbf{A}\,(x)$ је *регуларна* или *сингуларна* према томе да ли је

$$det\ \mathbf{A}\,(x)=|\,\mathbf{A}\,(x)\,|\neq 0 \text{ или је } |\,\mathbf{A}\,(x)\,|=0.$$

На пример:

$$\mathbf{A}\,(x)=\begin{pmatrix} x^4+2\,x^2+1 & x^3-2\,x^2+x+2 \\ x-1 & x^2-x+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x^4+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x^3+\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

И са матричним полиномима могу се вршити рачунске операција као са матрицама. Дакле, добијамо:

$$\mathbf{A}\,(x)=\sum_{\mu=1}^{r}\mathbf{A}_{r-\mu}\,x^{r-\mu};\qquad \mathbf{B}\,(x)=\sum_{\nu=1}^{s}\mathbf{B}_{s-\nu}\,x^{s-\nu};$$

$$\mathbf{A}\,(x)=\mathbf{B}\,(x);\qquad \mathbf{A}_{r-\mu}=\mathbf{A}_{s-\nu};\qquad r=s; \tag{7.13}$$

$$\mathbf{A}\,(x)+\mathbf{B}\,(x)=\mathbf{C}\,(x);\qquad \mathbf{A}\,(x)\cdot\mathbf{B}\,(x)=\mathbf{C}\,(x).$$

На пример:

$$\mathbf{A}\,(x)=\begin{pmatrix} x^2+2\,x+1 & x+2 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix};\quad \mathbf{B}\,(x)=\begin{pmatrix} 2\,x^2+x-2 & x^2+x-1 \\ x+2 & x-1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3\,x^2+3\,x-1 & x^2+2\,x+1 \\ 2\,x+1 & x \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -x^2+x+3 & -x^2+3 \\ -3 & 2\ -x \end{pmatrix};\quad \mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 2\,x^4+5\,x^3+3\,x^2+x+2 & x^4+3\,x^3+3\,x^2-3 \\ 2\,x^3-x^2-2\,x+4 & x^3-x \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 2\,x^4+6\,x^3+2\,x^2-5\,x-1 & 2\,x^3+6\,x^2+x-5 \\ x^3+5\,x^2+3\,x+3 & x^2+5\,x+3 \end{pmatrix}\neq\mathbf{AB}.$$

Када се параметар x замени квадратном матрицом $\mathbf{B}$ истог реда кога је и матрица $\mathbf{A}$, добијају се две вредности матрице $\mathbf{A}\,(\mathbf{B})$, *лева* и *десна* које се међусобно разликују, јер је

$$\mathbf{A}_l\,(\mathbf{B})=\sum_{r=0}^{s}\mathbf{B}^{s-r}\,\mathbf{A}_{s-r};\qquad \mathbf{A}_d\,(\mathbf{B})=\sum_{r=0}^{s}\mathbf{A}_{s-r}\,\mathbf{B}^{s-r}. \tag{7.14}$$

На пример:

$$\mathbf{A}\,(x)=\begin{pmatrix} x^2+x & x^2 \\ x+1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(x)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\quad (x)^2=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A_l(B)=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix};$$

$$A_d(B)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Количник два матрична полинома $A(x)$ и $B(x)$ од којих овај други није сингуларан, дефинише се на два начина као *„десни“* и *„леви количник“*:

$$A(x)=Q_1(x)\,B(x)+R_1(x);\quad A(x)=B(x)\,Q_2(x)+R_2(x). \tag{7.15}$$

Када је остатак једнак нули $R_i(x)=0$ тада је полином $B(x)$ *„десни“* или *„леви делилац“ матричног полинома* $A(x)$.

На пример:

$$A=Q_1\,B+R_1;\quad \begin{pmatrix}x^4+x^2+x-1 & x^3+x^2+x+2\\ 2x^3-x & 2x^2+2x\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x^2-1 & x-1\\ 2x & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2+1 & 1\\ x & x^2+x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x & 2x+3\\ -5x & -2x\end{pmatrix};$$

$$A=B\,Q_2+R_2;\quad \begin{pmatrix}x^4+x^2+x-1 & x^3+x^2+x+2\\ 2x^3-x & 2x^2+2x\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x^2+1 & 1\\ x & x^2+x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2 & x+1\\ x-1 & 1\end{pmatrix};\quad R_2=0.$$

7.3. Диференцирање матрица. — Када су елементи $a_{ik}(x)$ диференцијабилне функције параметра x, тада се дефинише извод матрице по x или диференцијални количник, односно диференцијал, према следећем:

$$\frac{dA}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\left(\frac{d\,a_{ik}}{dx}\right);\quad dA=(d\,a_{ik}). \tag{7.16}$$

За диференцирање матрице важе ове релације:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}(A\pm B)=\frac{dA}{dx}\pm\frac{dB}{dx};\qquad \frac{d(AB)}{dx}=\frac{dA}{dx}B+A\frac{dB}{dx};\\ \frac{d}{dx}(AA)=\frac{dA}{dx}A+A\frac{dA}{dx}\neq 2A\frac{dA}{dx}.\end{gathered} \tag{7.17}$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2x^2+x-1 & x+1 \\ x+2 & x^2-x-1 \end{pmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{A}}{dx}=\begin{pmatrix} 4x+1 & 1 \\ 1 & 2x-1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{AA})=\begin{pmatrix} 4x+1 & 1 \\ 1 & 2x-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x^2+x-1 & x+1 \\ x+2 & x^2-x-1 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 2x^2+x-1 & x+1 \\ x+2 & x^2-x-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4x+1 & 1 \\ 1 & 2x-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8x^3+6x^2-2x+1 & 5x^2+4x \\ 4x^2+4x-3 & 2x^3-3x^2+2 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 8x^3+6x^2-2x & 4x^2+2x-2 \\ 5x^2+8x+ & x^3-3x^2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16x^3+12x^2-4x+1 & 9x^2+6x-2 \\ 9x^2+12x-2 & 4x^3-6x^2+5 \end{pmatrix}.$$

За детерминанту матрице важе ове релације:

$$|\mathbf{A}|=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}K_{ik}; \quad \frac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{ik}}=K_{ik}; \qquad |\mathbf{A}|=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\frac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{ik}}; \tag{7.18}$$

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx}=\sum_i\sum_k K_{ik}\frac{da_{ik}}{dx}.$$

На пример:

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 2x^2+x+2 & x-1 \\ x+1 & x^2-1 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}; \quad \frac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{11}}=a_{22}=K_{11}; \quad \frac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{12}}=-a_{21}=K_{12};$$

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dx}=\frac{d}{dx}(2x^4+x^3-x^2-x-1)=8x^3+3x^2-2x-1=K_{11}\frac{da_{11}}{dx}+K_{12}\frac{da_{12}}{dx}+K_{21}\frac{da_{21}}{dx}+$$

$$+K_{22}\frac{da_{22}}{dx}=(x^2-1)(4x+1)-(x+1)\cdot 1-(x-1)\cdot 1+(2x^2+x+2)\,2x=8x^3+3x^2-2x-1.$$

7.4. Smith-ов нормални облик матрице. — Са параметарском матрицом **A**(x) могу се вршити исте елементарне трансформације као и са обичном матрицом **(чл. 6.1)** само се трећа врста трансформација разликује у томе што скалар λ треба заменити полиномом. И овде треба истаћи раније особине: 1° свака елементарна матрица у пољу $F(x)$ има инверзну матрицу која враћа матрицу на првобитни облик; 2° свака несингуларна матрица A(x) може се изразити као производ елементарних матрица и 3^e при елементарним трансформацијама не мења се ранг матрице A(x).

Две матрице A(x) и B(x) су *еквивалентне* ако постоје у пољу $F(x)$ две несингуларне матрице V(x) и K(x) такве да је задовољена релација

$$\mathrm{A}(x)\rightarrow\mathrm{B}(x); \quad \mathrm{V}(x)\cdot\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{K}(x)\rightarrow\mathrm{B}(x). \tag{7.19}$$

Из овога следи да су две *параметарске правоугаоне матрице типа* m, n) *тада и само тада еквивалентне када имају исти ранг.*

Полином $M(x)$ који се садржи без остатка у полиномима $P(x)$ и $Q(x)$ зове се њихов *заједнички делилац*. Ових делилаца може бити и више, али постоји један $D(x)$ који се зове *највећи заједнички делилац тих полинома*. Овај делилац задовољава следеће услове: 1° *он је моничан*, 2° *он је заједнички делилац оба полинома* и 3^e *сваки заједнички делилац полинома уједно је и делилац полинома* $D(x)$. Из ових особина следи да у истом пољу постоје два полинома $p(x)$ и $q(x)$ таква да је задовољен услов

$$D(x)=p(x)\cdot P(x)+q(x)\cdot Q(x). \tag{7.20}$$

Само онда када су заједнички делиоци оба полинома *константе*, тада је њихов највећи заједнички делилац једнак *јединици*, $D(x)=1$. Ако су полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ степена $n>0$ и $m>0$, а њихов највећи заједнички делилац $D(x)\neq 1$, тада се релација (7.20) своди *на нулу*, али је полином $p(x)$ реда $<m$, док је полином $q(x)$ реда $<n$.

На пример:

a) $P(x)=x^4+3x^3+9x^2+12x+20;\qquad Q(x)=x^4+3x^3+4x^2-3x-5;$

$$P=(x^2+4)(x^2+3x+5);\qquad Q(x)=(x^2-1)(x^2+3x+5);\ D(x)=x^2+3x+5;$$

$$D(x)=x^2+3x+5=\frac{1}{5}P(x)-\frac{1}{5}Q(x);\ p(x)=\frac{1}{5};\quad q(x)=-\frac{1}{5};$$

b) $P(x)=x^4-x^3-3x^2-11x+6;\qquad Q(x)=x^3-2x^2-2x-3;$

$$D(x)=x-3=-\frac{1}{13}(x+4)P(x)+\frac{1}{13}(x^2+5x+5)Q(x).$$

Нека је матрица $\mathbf{A}(x)$ квадратна, реда n, ранга $r\leqslant n$. Нека је M_m минор m-ог реда детерминанте матрице $|\mathbf{A}(x)|$, тако да је $m\leqslant r$. Од свих ових минора реда m *мора бити бар један различит од нуле*, јер по дефиницији тада матрица не би имала тај ранг. Може тада постојати највећи заједнички делилац свих ових минора реда m. Овакав највећи заједнички делилац свих квадратних минора реда m једне матрице зове се *детерминантни делилац матрице* $D_m(x)$. Када су минори M_m релативно прости, тада је према напред изнетом овај делилац $D_m=1$. Ови делиоци, дакле, постоје за све квадратне миноре реда $m\leqslant r$, а не постоје за миноре реда $m>r$, јер би тада био $D_m=0$ пошто су сви минори реда m једнаки нули. Детерминантни делилац $D_1(x)$ је највећи заједнички делилац свих минора првог реда (то јест елемената матрице) детерминанте матрице $|\mathbf{A}(x)|$. Делилац $D_2(x)$ је н. з. д. свих минора другог реда детерминанте $|\mathbf{A}(x)|$. Према рангу и ових делилаца има r, $D_1,\ldots,D_r$. Када је $r=n$, тада је $D_r(x)=D_n(x)=|\mathbf{A}(x)|$, само што је он монични полином.

Матрица $\mathbf{B}(x)$ еквивалентна је матрици $\mathbf{A}(x)$, јер је из ње постала елементарним трансформацијама. Према томе оне су *истог ранга*. Сем тога оне имају исте детерминантне делиоце $D_1(x)$, $D_2(x),\ldots D_r(x)$. Елементарном трансформацијом V_{ij} или K^{kl} не мења се детерминантни делилац неког минора јер се овим трансформацијама мењају само поједине врсте односно колоне матрице. Елементарне трансформације $V_i(\lambda)$ и $K^k(\lambda)$ не мењају детерминантни делилац, пошто је он моничан, па множење неке врсте или колоне бројем λ не утиче на делилац. Трећа елементарна трансформација $V_{ij}(P)$ и $K^{kl}(P)$ разликује се од оне у **чл. 6.1** што се сада уместо скалара јавља полином $P(x)$, али се детерминантни делилац неће променити, пошто се могу само јавити збирови минора истог реда.

Минор реда $m+1$ може се према *Laplace*-у развити по минорима реда M_m, па ако је D_{m+1}највећи делилац матрице $A(x)$ онда је делилац D_m такође делилац и од D_{m+1}. На исти начин закључујемо да је детерминантни делилац D_{m-1} делилац детерминантног делиоца D_m и тако редом, па су количници делилаца

$$D_r/D_{r-1}=J_r;\ D_{r-1}/D_{r-2}=J_{r-1};\ldots;\ D_{r-s}/D_{r-s-1}=J_{r-s};\ldots;$$
$$D_2/D_1=J_2;\quad D_1=J_1 \tag{7.21}$$

те је

$$D_s=J_1 J_2 J_3\ldots J_s;\quad s=1,\ 2,\ldots,\ r.$$

Полиноми $J_s(x)$ су сви монични. Њих има онолико колики је ранг матрице $A(x)$ чији су елементи a_{ik} полиноми по x. Сви су полиноми $J_s(x)$ *различити од нуле*. Ови се полиноми називају *инваријантни фактори параметарске матрице* $A(x)$, јер не зависе од линеарне трансформације (инваријантни су). Дакле, *еквивалентне параметарске матрице имају једнаке инваријантне факторе.*

Инваријантни фактори једнозначно одређују *елементарне делиоце матрице.*

Помоћу елементарних трансформација може се свака квадратна параметарска матрица $A(x)$, реда n, ранга $0<r\leqslant n$, свести на дијагоналну параметарску матрицу чији су елементи инваријантни фактори и нуле. Овај облик зове се *Smith*-ов *нормални облик параметарске матрице*

$$S_m=\begin{Vmatrix} J_1 & & & & & & & \\ & J_2 & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & J_r & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & 0 \end{Vmatrix}. \tag{7.23}$$

Према (7.22) следи да инваријантни фактори *једнозначно* одређују делиоце, и обратно, делиоци одређују инваријантне факторе. Због тога су фактори дељиви, наредни је дељив претходним фактором, J_s/J_{s-1}, $s=1,\ 2,\ldots,\ r$. Ово показује да је *Smith*-ов нормални облик једнозначно одређен матрицом $A(x)$.

На пример:

a)
$$\mathrm{A}(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x+1 & x+3 \\ x^3+2x^2+x & x^3+x^2+x & 2x^3+3x^2+x \\ x^2+3x+2 & x^2+2x+1 & 3x^2+6x+3 \end{pmatrix};$$

$$D_1(x)=1; \qquad J_1=1$$
$$D_2(x)=x; \qquad J_2=x \qquad \mathrm{S}_m=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & x & \\ & & x^2+x \end{pmatrix};$$
$$D_3(x)=x^2(x+1); \qquad J_3=x(x+1);$$

$$|\mathrm{A}(x)|=x^2(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x^2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} &\mathrm{V}_{12}(-1)\cdot\mathrm{V}_{23}(-1)\cdot\mathrm{V}_{31}(-x)\cdot\mathrm{V}_{21}(-x^2)\cdot\mathrm{A}\cdot \\ &\cdot\mathrm{K}^{21}(-1)\cdot\mathrm{K}^{13}(-1)\cdot\mathrm{K}^{23}(-1)\cdot \\ &\cdot\mathrm{K}^{13}(x^3)\cdot\mathrm{K}^{23}(-x^2)=\mathrm{S}_m. \end{aligned}$$

Елементарни делиоци су: x, x, $(x+1)$.

b)
$$\mathrm{A}(x)=\begin{pmatrix} x^2+1 & x^3+x & 2x^3-x^2+x \\ x-1 & x^2+1 & x^2-2x+1 \\ x^2 & x^3 & 2x^3-x^2+1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & x & x-1 \\ x-1 & x^2+1 & x^2-2x+1 \\ x^2 & x^3 & 2x^3-x^2+1 \end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & x & x-1 \\ -1 & 1 & -x+1 \\ x^2 & x^3 & 2x^3-x^2+1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & x & x-1 \\ 0 & x+1 & 0 \\ x^2 & x^3 & 2x^3-x^2+1 \end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & x & x-1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+1 \end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & & \\ & x+1 & \\ & & x^3+1 \end{pmatrix}=\mathrm{S}_m;$$

$$D_1=1; \quad D_2=x+1; \quad D_3=(x+1)(x^3+1); \quad J_2/J_1=x+1; \quad J_3/J_2=x^2-x+1.$$

Елементарни делиоци су: $x+1$, $x-1$, x^2+x+1.

В Е Ж Б А Њ А

1. Дату матрицу свести на *Smith*-ов нормални облик

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} x & -x & 0 \\ 0 & x^2-x & x^3-x^2 \\ x^3 & -x^2 & x^4-x \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} &D_1=x; \quad D_2=(x-1)x^2; \quad D_3=x^3(x-1)(x^2-1); \\ &J_1=x; \quad J_2=x(x-1); \quad J_3=x(x^2-1); \end{aligned}$$

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & x^2-x & x^3-x^2\\ x^3 & x^3-x^2 & x^4-x\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & x^2-x & x^3-x^2\\ 0 & x^3-x^2 & x^4-x\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & x(x-1) & 0\\ 0 & x^3-x^2 & x^3-x\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & x(x-1) & 0\\ 0 & 0 & x(x^2-1)\end{pmatrix}=S_m;$$

$D_1=x;\quad D_2=x^2(x-1);\quad D_3=x^3(x-1)(x^2-1).$

2. Одредити детерминантне делиоце дате матрице

$$A=\begin{pmatrix} x & x & x-1\\ x^2+x & x^2+2x & x^2-1\\ 2x^2-2x & x^2-2x & 2x^2-3x+2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & x-1\\ x+1 & 2x+1 & x^2-1\\ x-2 & -x^2+x-2 & 2x^2-3x+2\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1\\ x+1 & x & x^2-1\\ x-2 & -x^2 & 2x^2-3x+2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1\\ 1 & x & x-1\\ -2 & -x^2 & x^2-2x+2\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1\\ 0 & x & 0\\ 0 & -x^2 & x^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x^2\end{pmatrix}=S_m;$$

$D_1=1;\quad D_2=x;\quad D_3=x^3.$

3. Дату матрицу свести на *Smith*-ов нормални облик

$$A=\begin{bmatrix} x^2+2x+1 & x^2+x & x^3+x^2+x-1 & x^2+x\\ x^2+x+1 & x^2+1 & x^3 & x^2-1\\ x^2+x & x^2 & x^3+x-1 & x^2\\ x^3+x^2 & x^3 & x^4 & x^3+x^2-1\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} x & x-1 & x^2+x-1 & x+1\\ 1 & 1 & -x+1 & -1\\ x^2+x & x^2 & x^3+x-1 & x^2\\ 0 & 0 & -x^2+x & x^2-1\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & x-1 & -1 & x+1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ x & x^2 & x-1 & x^2 \\ 0 & 0 & -x^3-x^2 & x^2-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 2x-1 & 0 \\ 0 & 0 & -x^3-1 & x^2-1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & x-1 & \\ & & & x^2-1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_m.$$

4. Показати да је *Smith*-ов нормални облик дате матрице јединична матрица. Каква је детерминанта $|\mathbf{A}(x)|$?

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 2x+1 & x \\ 2x^2+x+6 & x^2+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x+1 & x \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2;$$

$|\mathbf{A}| = 3.$

5. Показати да је *Smith*-ов нормални облик дате матрице **A** јединична матрица трећег реда:

$$\begin{pmatrix} x+1 & 2x-1 & x+1 \\ x+2 & 2x+1 & x-1 \\ x^2+x & 2x^2-x & x^2+x+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+1 & 2x-1 & x+1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_m; \quad |\mathbf{A}| = 3.$$

8. ПРОБЛЕМИ СА СВОЈСТВЕНИМ ВРЕДНОСТИМА

8.1. Карактеристична матрица и карактеристични полином матрице. — У члану **5.2.** видели смо да се помоћу квадратне матрице **A**, реда n, вектор $\{x\}$ *пресликава* на истом пољу бројева у вектор $\{y\}$, односно да се променљиве x_i *линеарно трансформишу* у променљиве y_i. Међутим, када се трансформација врши тако да је вектор $\{y\}$ *колинеаран* са вектором $\{x\}$, то јест да је $\{y\}=\boldsymbol{\lambda}\{x\}$, где је λ неки *скалар*, линеарна трансформација има облик

$$\mathbf{A}\{x\}=\{y\}=\lambda\{x\}; \quad (\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{I})\{x\}=\{0\}; \quad \mathfrak{K}\{x\}=\{0\}; \quad \mathfrak{K}=\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{I}. \tag{8.1}$$

Оваква матрица $\mathfrak{K}$ назива се *карактеристична матрица матрице* **A**, јер се помоћу ње стварно одређују *инваријантни правци* тога простора у односу на линеарну трансформацију оператором **A**.

Овим се овај проблем свео на систем хомогених линеарних једначина са n непознатих (x_i) координата вектора $\{x\}$, а он ће имати *нетривијална решења* само у случају ако је детерминанта система једнака нули

$$\Delta(\boldsymbol{\lambda})=f(\lambda)=|\,\mathfrak{K}\,|=|\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\,|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{8.2}$$

Ова се једначина назива *карактеристична једначина матрице* **A** или *„λ — једначина“*.

Када је матрица **A** реална онда се множењем са $(-1)^n$ може написати у облику

$$P(\boldsymbol{\lambda})=(-1)^n f(\lambda)=|\,\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|=\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r S_r\,\lambda^{n-r}=\lambda^n-S_1\,\lambda^{n-1}+$$

$$+S_2\,\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^n S_n=0, \qquad 8.3)$$

где су S_r *главни скалари реда* r *матрице* **A**:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}; \qquad \begin{aligned} S_1 &= a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\Sigma a_{ii}; \\ S_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \cdots \\ &\quad \cdots + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \cdots; \\ S_n &= |\,\mathbf{A}\,|. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Скалар S_r је збир главних минора r-ог реда; њих има укупно $\binom{n}{r}=\Sigma C_n^r$.

Када је матрица **A** *симетрична* ($a_{ik}=a_{ki}$) једначина (8.2) зове се *секуларна једначина* (чл. 3.9.1).

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}; \quad S_1=1+0-2+6=5;$$

$$S_2=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=9;$$

$$S_3=\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}=7;$$

$$S_4=|\,\mathbf{A}\,|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 8 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{vmatrix}=2;$$

$$P(\lambda)=\lambda^4-5\lambda^3+9\lambda^2-7\lambda+2=0.$$

8.2. Карактеристични бројеви матрице. — Колинеарна трансформација вектора $\{x\}$ у вектор $\lambda\{x\}$ могућа је за извесне вредности скалара λ_s

која су *решења* карактеристичне једначине (8.2) односно карактеристичног полинома (8.3). Ова решења се зову *карактеристични бројеви* или *карактеристичне вредности* односно *својствене* (*сопствене*) *вредности матрице* **A** (latent roots, eigenvalues, characteristic roots, valeur propre, Eigenwerte, собственные значения, характеристические числа). Скуп ових решења чини *спектар дате матрице* (**A**).

Између својствених вредности (λ_s) и коефицијената карактеристичног полинома (8.3) постоје релације према проширеним *Viète*-овим условима:

$$S_1=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s+\cdots+\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i;$$

$$S_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\cdots+\lambda_2\lambda_3+\cdots+\lambda_r\lambda_s+\cdots=\Sigma\,\lambda_i\lambda_j;\quad i\neq j;$$

$$S_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\cdots+\lambda_p\lambda_r\lambda_s+\cdots=\Sigma\,\lambda_i\lambda_j\lambda_k;\quad i\neq j\neq k; \tag{8.5}$$

....

$$S_n=|\mathbf{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s\cdots\lambda_n=\Pi\,\lambda_i;\quad i=1,2,\ldots,n.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix};\quad \begin{aligned}&S_1=1+2+3=6;\\ &S_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=2+5+4=11;\\ &S_3=|\mathbf{A}|=6;\quad \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0;\quad \lambda_1=1;\quad \lambda_2=2;\quad \lambda_3=3;\end{aligned}$$

$$S_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=6;\quad S_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=11;\quad S_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=6.$$

За својствене вредности матрице важе следећа правила.

1. *Квадратној матрици реда n одговара n реалних или комплексних карактеристичних (својствених) вредности.*

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix};\quad \begin{aligned}&S_1=2;\\ &S_2=3-1-3=-1;\\ &S_3=-2;\end{aligned}$$

$$P(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0;\quad \lambda_s=-1;\quad 1;\quad 2.$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix};\quad \begin{aligned}&S_1=-1;\\ &S_2=1;\\ &S_3=-1;\end{aligned}$$

$$P(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0;\quad \lambda_s=-1;\quad i;\quad -i.$$

2. *Када је матрица сингуларна тада и само тада има бар једну својствену вредност једнаку нули.*

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 8 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{l} S_1=7; \\ S_2=6; \\ S_3=|\,\mathbf{A}\,|=0; \quad P(\lambda)=\lambda^3-7\,\lambda^2+6\,\lambda=0; \quad \lambda_s=0; \quad 1, \quad 6. \end{array}$$

3. *Својствене вредности реалне симетричне матрице и Hermite-ове матрице су реалне.*

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{l} \lambda^3-8\,\lambda^2+17\,\lambda-10=0; \\ \lambda_s=1; \quad 2; \quad 5; \end{array}$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{l} \lambda^3-4\,\lambda^2-4\,\lambda+9=0; \\ \lambda_s=1{,}23; \quad -1{,}70; \quad 4{,}47. \end{array}$$

4. *Својствене вредности кososиметричне и косоермитске матрице су чисто имагинарне или једнаке нули.*

Како је

$$-\mathbf{A}'=\mathbf{A} \quad \text{биће} \quad \mathbf{A}\{x\}=\lambda\{x\}, \quad \mathbf{A}\{\overline{x}\}=\overline{\lambda}\{\overline{x}\},$$

па је

$$(\overline{x})\,\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,(\overline{x})\,\{x\}=-(x)\,\mathbf{A}\,\{\overline{x}\}, \quad (x)\,\mathbf{A}\,\{\overline{x}\}=\overline{\lambda}\,(x)\,\{\overline{x}\},$$

јер је

$$(\overline{x})\,\mathbf{A}\,\{x\}=-(\overline{x})\,\mathbf{A}'\,\{x\}=-((\overline{x})\,\mathbf{A}'\,\{x\})'=-(x)\,\mathbf{A}\,\{\overline{x}\}.$$

Сабирањем се добија

$$(\lambda+\overline{\lambda})\,(x)\,\{\overline{x}\}=0; \quad \lambda+\overline{\lambda}=(\alpha+\beta\,i)+(\alpha-\beta\,i)=2\,\alpha=0; \quad \lambda=\beta i \text{ или } \lambda=0;$$

пошто је

$$(x)\,\{\overline{x}\}=(\overline{x})\,\{x\}\neq 0.$$

На пример:

$$\mathbf{A}_k=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{l} \lambda^3+21\,\lambda=0; \\ \lambda_s=0; \pm i\sqrt{21}; \end{array}$$

$$\mathbf{H}_k=\begin{pmatrix} 2\,i & 1+i & 0 \\ -1+i & 2\,i & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{l} \lambda^3-4\,i\,\lambda^2-\lambda-2\,i=0; \\ \lambda_s=i; \ \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\,i\,. \end{array}$$

5. *Својствене вредности дијагоналне матрице једнаке су тим дијагоналним елементима.*

На пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^3-6\,\lambda^2+11\,\lambda-6=0; \\ \lambda_s=1; \quad 2; \quad 3; \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & & \\ & 2-\lambda & \\ & & 3-\lambda \end{vmatrix} =0;$$

$$\begin{vmatrix} i-\lambda & & \\ & 2-\lambda & \\ & & 1-i-\lambda \end{vmatrix} = 0; \qquad \lambda_s = \begin{Bmatrix} i \\ 2 \\ 1-i \end{Bmatrix}.$$

6. *Својствене вредности ортогоналне* ($\mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1}$) *и унитарне матрице* ($\overline{\mathbf{H}}'=\mathbf{H}^{-1}$) *су све јединичног модула.*

Овде ће бити:

$$\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,\{x\}$$

$$(\mathbf{A}\,\{x\})'=(x)\,\mathbf{A}'=\lambda\,(x);$$

$$(x)\,\mathbf{A}'\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda^2\,(x)\,\{x\}\,; \quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1};$$

$$(x)\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\,\{x\}=(x)\ \mathbf{I}\{x\}=(x)\,\{x\}=\lambda^2\,(x)\,\{x\};$$

$$\lambda^2=1;$$

$$\mathbf{H}\{x\}=\lambda\{x\}; \quad \overline{\mathbf{H}}\{\overline{x}\}=\overline{\lambda}\{\overline{x}\};$$

$$(\overline{\mathbf{H}}\{\overline{x}\})'=(\overline{x})\overline{\mathbf{H}}'=\overline{\lambda}\,(\overline{x});$$

$$(\overline{x})\,\overline{\mathbf{H}}'\,\mathbf{H}\{x\}=\lambda\ \overline{\lambda}\,(\overline{x})\,\{x\};$$

$$(\overline{x})\ \mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{H}\,\{x\}=(\overline{x})\,\mathbf{I}\ \{x\}=\lambda\,\overline{\lambda}\,(\overline{x})\,\{x\};$$

$$\lambda\ \overline{\lambda}=1=\alpha^2+\beta^2; \quad |\,\lambda\,|=1.$$

7. *Својствене вредности реалне ортогоналне матрице су коњуговано комплексни бројеви а њена карактеристична једначина је реципрочна.*

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1}; \quad |\,\mathbf{A}\,| \neq 0; \quad |\,\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{A}\,\mathbf{I}\,\mathbf{A}^{-1}\,|=|\,\lambda\,\mathbf{A}\left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{I}-\mathbf{A}^{-1}\right)|=$$

$$=|\,\lambda\,\mathbf{A}|\cdot\left|\frac{1}{\lambda}\mathbf{I}-\mathbf{A}'\right| = \pm\lambda^n\left|\frac{1}{\lambda}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right| = \pm\,\lambda^n P\,\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} \lambda^2-\lambda+1=0; \\ \lambda_s=\dfrac{1}{2}\mp i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,; \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} \lambda^3-(1+\sqrt{2})\,\lambda^2+(1+\sqrt{2})\,\lambda-1=0; \\ \lambda_s=1;\ \ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1\mp i). \end{matrix}$$

8. *Карактеристични бројеви матрица* **A** *и* **A′** *су једнаки.*

Овде следи:

$$\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,\{x\}; \quad \mathbf{A}'\,\{y\}=\mu\,\{y\}; \quad (y)\,\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,(y)\,\{x\};$$

$$\{x\}\,\mathbf{A}'\,\{y\}=\mu\,(x)\,\{y\}=(y)\,\mathbf{A}\,\{x\}; \quad ((x)\,\mathbf{A}'\,\{y\})'=(y)\,\mathbf{A}\,\{x\};$$

$$\lambda\,(y)\,\{x\}-\mu\,(x)\,\{y\}=0; \quad \lambda=\mu; \quad (y)\,\{x\}=(x)\,\{y\}\neq 0.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} \lambda^3-6\,\lambda^2+11\,\lambda-6=0; \\ \lambda_s=1;\ \ 2;\ \ 3; \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} S_1'=6;\ \ S_2'=2+5+4=11; \\ |\,\mathbf{A}'\,|=|\,\mathbf{A}\,|=6;\ \ \lambda^3-6\,\lambda^2+11\,\lambda-6=0. \end{matrix}$$

9. *Карактеристични бројеви инверзне матрице* $\mathbf{A}^{-1}$ *једнаки су реципрочним вредностима полазне матрице* **A.**

Доказ је врло лак, јер је

$$\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,\{x\}; \quad \mathbf{A}^{-1}\,\{x\}=\frac{1}{\lambda}\,\{x\}=\mu\,\{x\}; \quad \mu=1/\lambda.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} \lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0;\ |\,\mathbf{A}\,|=-2; \\ \lambda_s=-1;\ \ 1;\ \ 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} 2\,\mu^3-\mu^2-2\,\mu+1=0; \\ \mu_s=-1;\ \ 1;\ \ 1/2=1/\lambda_s. \end{matrix}$$

10. *Карактеристични бројеви комплексних матрица* $\overline{\mathbf{A}}$ *и* $\overline{\mathbf{A}}'$ *јесу коњуговани бројеви карактеристичних бројева комплексне матрице* **A.**

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4\,i & 2-i \\ 1+i & 2\,i \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^2-6\,i\,\lambda-(11+i)=0; \\ \lambda_s=3\,i\pm\sqrt{2+i}; \end{matrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} -4\,i & 2+i \\ 1-i & -2i \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^2+6\,i\,\lambda-(11-i)=0; \\ \lambda_s=-3\,i\pm\sqrt{2-i}; \end{matrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}}'=\mathbf{A}+=\begin{pmatrix} -4\,i & 1-i \\ 2+i & -2\,i \end{pmatrix}; \quad \lambda^2+6\,i\,\lambda-(11-i)=0;\ \lambda_s=-3\,i\pm\sqrt{2-i}.$$

11. *Својствене вредности матрице* $k\,\mathbf{A}$, *где је* k *неки скалар, јесу* $k\,\lambda$.

12. *Својствене вредности матрице* $\mathbf{A}-k\,\mathbf{I}$, *где је* k *неки скалар, јесу* $\lambda-k$.

13. *Својствене вредности адјунговане матрице* $\mathbf{A}^*$ *јесу* $|\,\mathbf{A}\,|/\lambda$.

Докази се изводе врло лако, јер су:

a) $\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,\{x\};\quad k\,\mathbf{A}\,\{x\}=k\,\lambda\,\{x\};$

b) $\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,\{x\};\quad (\mathbf{A}-k\,\mathbf{I})\,\{x\}=\mathbf{A}\,\{x\}-k\,\mathbf{I}\,\{x\}=(\lambda-k)\,\{x\};$

c) $\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,\{x\};\quad \mathbf{A}^{-1}\,\{x\}=\dfrac{1}{\lambda}\,\{x\}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\,\mathbf{A}\,|}\,\{x\};\ \mathbf{A}^*\{x\}=\dfrac{|\,\mathbf{A}\,|}{\lambda}\,\{x\}.$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^3-6\,x^2+11\,\lambda-6=0; \\ \lambda_s=1;\ \ 2;\ \ 3; \end{matrix}$$

$$2\,\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^3-12\,\lambda^2+44\,\lambda-48=0 \\ \lambda_s=2;\ \ 4;\ \ 6; \end{matrix}$$

$$(\mathbf{A}-4\,\mathbf{I})=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^3+6\,\lambda^2+11\,\lambda+6=0; \\ \lambda_s=-3;\ \ -2;\ \ -1; \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^3-11\,\lambda^2+36\,\lambda-36=0; \\ \lambda_s=6;\ \ 3;\ \ 2. \end{matrix}$$

14. *Својствене вредности степена матрице* $\mathbf{A}^p$ *јесу* λ^p.

Пошто је

$$\mathrm{A}\{x\}=\lambda\{x\}$$

биће

$$\mathbf{A}^2\{x\}=\lambda\,\mathbf{A}\{x\}=\lambda^2\{x\};\quad \mathbf{A}^3\{x\}=\lambda^2\,\mathbf{A}\{x\}=\lambda^3\{x\};\ \dots;\ \mathbf{A}^p\{x\}=\lambda^p\{x\}.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix};\qquad \begin{aligned}&\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0,\\ &\lambda_s=1;\ \ 2;\ \ 3;\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ 5 & 6 & 4\\ 10 & 10 & 9\end{pmatrix};\qquad \begin{aligned}&\lambda^3-14\lambda^2+49\lambda-36=0;\\ &\lambda_s=1;\ \ 4;\ \ 9.\end{aligned}$$

15. *Својствене вредности производа матрица* **AB** *и* **BA** *једнаке су.*

Доказ се изводи на овај начин:

$$\mathbf{BA}-\lambda\mathbf{I}=\mathbf{I}\,\mathbf{BA}-\lambda\,\mathbf{I}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{ABA}-\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\,\lambda\,\mathbf{I}=\mathbf{A}^{-1}\,(\mathbf{AB}-\lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{A};$$

$$|\,\mathbf{BA}-\lambda\,\mathbf{I}\,|=|\,\mathbf{A}^{-1}\,|\cdot|\,\mathbf{AB}-\lambda\,\mathbf{I}\,|\cdot|\mathbf{A}|=|\mathbf{AB}-\lambda\,\mathbf{I}\,|\,.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad \mathbf{AB}=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 6 & 5\end{pmatrix};\quad \begin{aligned}&\lambda^2-15\lambda+14=0;\\ &\lambda_s=1;\ \ 14;\end{aligned}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix};\quad \begin{aligned}&\lambda^2-15\lambda+14=0;\\ &\lambda_s=1;\ \ 14.\end{aligned}$$

16. *Ако је* λ_s *један прост корен карактеристичног полинома* $P(\lambda_s)=0$ *квадратне матрице* **A**, *онда је карактеристична матрица за ту својствену вредност* $\mathfrak{K}\,(\lambda_s)=(\mathbf{A}_s-\lambda_s\,\mathbf{I})$ *сингуларна, ранга* $r=n-1$, *дегенерације* $d=1$.

Пошто је λ_s својствена вредност то је $P\,(\lambda_s)=0$ или $|\,\mathfrak{K}\,(\lambda_s)\,|=|\,\mathfrak{K}_s\,|=|\,\mathbf{A}-\lambda_s\,\mathbf{I}\,|=0$. Како је *корен прост*, то је $\mathrm{d}\,P/\mathrm{d}\,\lambda_s\neq 0$. Према обрасцу (7.18), пошто су коефицијенти $a_{ik}=\mathrm{const}$ за $i\neq k$, и $a_{ii}-\lambda_s$ то је први извод детерминанте карактеристичне матрице

$$\frac{\mathrm{d}\,P\,(\lambda_s)}{\mathrm{d}\,\lambda_s}=\frac{\mathrm{d}\,(\mathbf{A}-\lambda_s\,\mathbf{I})}{\mathrm{d}\,\lambda_s}=-\sum_i K_{ii}\neq 0,$$

где су K_{ii} минори $(n-1)$ реда. Како они сви нису једнаки нули, то је ранг карактеристичне матрице $r=n-1$, док је $d=1$.

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix};\quad \begin{matrix}P=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0;\\ P'=3\lambda^2-12\lambda+11;\end{matrix}$$

$$\lambda_s=\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix};\quad \begin{matrix}P(1)=P(2)=P(3)=0;\\ P'(1)=2;\ P'(2)=-1;\ P'(3)=2;\end{matrix}$$

$$\mathfrak{K}_s=\begin{pmatrix}1-\lambda_s&0&-1\\1&2-\lambda_s&1\\2&2&3-\lambda_s\end{pmatrix};\quad |\mathfrak{K}_s|=0;\quad \underset{r=2}{|\mathfrak{K}_1|=}\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&1&1\\2&2&2\end{vmatrix};$$

$$\underset{r=2}{|\mathfrak{K}_2|=}\begin{vmatrix}-1&0&-1\\1&0&1\\2&2&1\end{vmatrix};\quad \underset{r=2}{|\mathfrak{K}_3|=}\begin{vmatrix}-2&0&-1\\1&-1&1\\2&2&0\end{vmatrix}.$$

17. *Извод m-ог реда по својственој вредности λ полинома $P(\lambda)=(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ квадратне матрице* $\mathbf{A}$ реда n износи:

a) $d^m P/d\lambda^m=m!\ \Sigma G_{n-m}$, за $m<n$;

b) $d^m P/d\lambda^m=n!$ за $m=n$;

c) $d^m P/d\lambda^m=0$ за $m>n$,

где је G_{n-m} главни минор реда $n-m$ карактеристичне матрице $\mathfrak{K}(\lambda)=(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$.

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix};\quad \begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\-1&\lambda-2&-1\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0;\quad \lambda_s=\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix};$$

$$P=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6;$$

$$P'=3\lambda^2-12\lambda+11=1!\ \Sigma G_2=[(\lambda^2-3\lambda+2)+(\lambda^2-4\lambda+5)+(\lambda^2-5\lambda+4)]=$$
$$=3\lambda^2-12\lambda+11;$$

$$P''=6\lambda-12=2!\ \Sigma G_1=2(\lambda-1+\lambda-2+\lambda-3)=2(3\lambda-6);$$

$$P'''=6=3!;\quad P^{\mathrm{IV}}=0.$$

18. *Ако је λ_s вишеструки корен реда ν карактеристичне једначине $P(\lambda)=0$, тада ранг карактеристичне матрице $\mathfrak{K}_s=(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})$ није мањи од $n-\nu$, где је n ранг квадратне матрице $\mathbf{A}$. Карактеристична матрица не мора бити вишеструко дегенеративна. Међутим, ако је ранг карактеристичне матрице $n-\nu$, онда мора бити бар ν корена једнаких.*

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} P(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0; \\ \lambda_s=1;\ \ 1;\ \ 2;\ r=3; \end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathfrak{K}_1= \\ r=2\end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & -5 & 5 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix}\mathfrak{K}_3= \\ r=2\end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 10 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^3-18\lambda^2+81\lambda-108=0; \\ \lambda_s=3;\ 3;\ \ 12; \end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathfrak{K}_1= \\ r=1;\ d=2\end{matrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix}\mathfrak{K}_3= \\ r=2;\ d=1\end{matrix}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix}\mathbf{A}= \\ r=4\end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^4-5\lambda^3+9\lambda^2-7\lambda+2=0; \\ \lambda_s=1;\ \ 1;\ \ 1;\ \ 2; \end{matrix}$$

$$\mathfrak{K}_1=\begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad r=3;\quad d=1;$$

$$\mathfrak{K}_4=\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad r=3;\quad d=1.$$

8.3. Карактеристични вектори матрице. — Реални $\{x_s\}$ или комплексни вектор $\{\mathfrak{z}_s\}$ који задовољава карактеристичну једначину (8.2) зове се *карактеристични (својствени)* или *модални вектор матрице* **A**:

$$(\mathbf{A}-\lambda_s\,\mathbf{I})\,\{x_s\}=0; \qquad \{x_s\}=\{x_{si}\}; \quad (\mathbf{A}-\lambda_s\,\mathbf{I})\,\{\mathfrak{z}_s\}=0. \tag{8.6}$$

Сваком карактеристичном броју (λ_s) одговара по један вектор $\{x_s\}$, па, дакле, карактеристичних вектора има n колико и својствених вредности.

Обично се ови вектори *нормирају*, те им се одређује *модул*, а могу се одредити и јединични вектори

$$|\,\{x_s\}\,|=\sqrt{(x_s)\ \{x_s\}};\ \{e_s\}=\{x_s\}:\ |\,\{x_s\}\,|;\ |\,\{\mathfrak{z}_s\}\,|=\sqrt{(\overline{\mathfrak{z}_s})\ \{\mathfrak{z}_s\}}. \tag{8.7}$$

Реални вектори имају тада неодређен *предзнак* („смер“), а комплексни су вектори неодређени до на неки фактор облика комплексне јединице $e^{i\varphi}$.

За карактеристичне векторе важе следећа правила.

1. *Када су карактеристични бројеви матрице* **A** *међусобно различити тада су карактеристични вектори линеарно независни.*

Ови се вектори тада могу написати у облику линеарне везе

$$u_1\{x_1\}+u_2\{x_2\}+\dots+u_k\{x_k\}+\dots+u_n\{x_n\}=0, \quad u_k\equiv 0,$$

где су u_k бројеви који су *сви једнаки нули* ($u_k\equiv 0$). Претпоставимо да су ови вектори линеарно зависни онда сви бројеви u_k нису једнаки нули. Множењем једначине (8.6) редом матрицама **A**, **A**², ..., **A**$^{n-1}$, добија се систем једначина:

$$\begin{array}{ll}
 & u_1\{x_1\}+u_2\{x_2\}+\cdots+u_n\{x_n\}=0; \\
\mathbf{A}\{x_s\}=\lambda_s\{x_s\}; & u_1\lambda_1\{x_1\}+u_2\lambda_2\{x_2\}+\dots+u_n\lambda_n\{x_n\}=0; \\
\mathbf{A}^2\{x_s\}=\lambda_s^2\{x\}; & u_1\lambda_1^2\{x_1\}+u_2\lambda_2^2\{x_2\}+\cdots+u_n\lambda_n^2\{x_n\}=0; \\
\hline
\mathbf{A}^{n-1}\{x_s\}=\lambda_s^{n-1}\{x_s\}; & u_1\lambda_1^{n-1}\{x_1\}+u_2\lambda_2^{n-1}\{x_2\}+\dots+u_n\lambda_n^{n-1}\{x_n\}=0.
\end{array}$$

Ако се у овом хомогеном систему сматрају као непознете $y=u_s\{x_s\}$; а λ_s^p као коефицијенти, онда је детерминанта коефицијената

$$\Delta=\mathbf{V}=\begin{vmatrix}
1 & 1\dots 1 & \dots 1 \\
\lambda_1 & \lambda_2\dots\lambda_k & \dots\lambda_n \\
\lambda_1^2 & \lambda_2^2\dots\lambda_k^2 & \dots\lambda_n^2 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1}\dots\lambda_k^{n-1} & \dots\lambda_n^{n+1}
\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_j-\lambda_i)>0;\quad j>i;$$

$$i=1,2,\dots,n-1$$
$$j=2,3,\dots,n.$$

Ова детерминанта је *Vandermonde*-ова (1.17) и различита је од нуле. Дакле, морају тада бити једнаки нули непознате $u_s\{x_s\}$. Пошто вектори $\{x_s\}$ нису сви једнаки нули, то морају бити једнаки нули коефицијенти $u_s\equiv 0$, што значи да су карактеристични вектори *линеарно независни*, а то је и требало доказати. Пошто је дегенерација $d=n-(n-1)=1$ то се *једна координата* овог вектора узима *као произвољна* ($x_{sn}=1$). Ова је координата слободна, а преосталих $n-1$ координата вектора $\{x_s\}$ су тада одређене. Истина, ове координате нису потпуно одређене него су одређени односи према слободној координати $x_{si}/x_{sn}=c_s$, $i=1,2,\dots,n-1$. Овим су одређени *инваријантни правци* дате матрице **A**-оператора линеарне трансформације (8.11).

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix}\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6 \quad 0;\\ \lambda_s=1;\ 2;\ 3;\end{matrix}$$

$$|\mathfrak{R}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2\\ 1 & 1-\lambda & 2\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0; \qquad \begin{pmatrix} 2-\lambda_s & 0 & 2\\ 1 & 1-\lambda_s & 2\\ 1 & -1 & 3-\lambda_s\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_{s1}\\ x_{s2}\\ x_{s3}\end{Bmatrix}=0;$$

$$\mathfrak{R}_s\{x_s\}=0; \quad \underset{r=2}{\mathfrak{R}_1\{x_1\}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\end{Bmatrix}-0;$$

$$\{x_1\}=\begin{Bmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{Bmatrix}; \quad \{x_2\}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}; \quad \{x_3\}=\begin{Bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{Bmatrix};$$

$$\begin{array}{c|cc|c|} & 1 & 0 & 2\\ \mathfrak{R}_1 & 1 & -1 & 2\\ & 1 & 0 & 2\\ \hline & 1 & 0 & 2\\ & -1 & -1 & 0\\ & -1 & 0 & 0\\ \hline \{x_1\} & -2 & 0 & 1\end{array}; \qquad \begin{matrix}|\{x_1\}|=\sqrt{5}; & |\{x_2\}|=\sqrt{2}; & |\{x_3\}|=3;\\ \{e_1\}=\begin{Bmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 0\\ 1/\sqrt{5}\end{Bmatrix}; & \{e_2\}=\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{Bmatrix}; & \{e_3\}=\begin{Bmatrix}2/3\\ 2/3\\ 1/3\end{Bmatrix}.\end{matrix}$$

2. *Број линеарно независних вектора* $\{x_s\}$ *који одговарају вишеструком карактеристичном броју* λ_s, *реда* ν *дате матрице* $\mathbf{A}$, *није већи од броја* ν $(1\leqslant r\leqslant\nu)$. *Дакле, може их бити један а највише* ν.

Ако је дегенерација $d=2$ карактеристичне матрице, $\mathfrak{R}_s=(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})$, то значи да су два карактеристична броја λ_s једнака, то јест тај је корен *двострук*, па су највише два вектора линеарно независна а остали су зависни. Ако вектори $\{x_s\}^{(1)}$ и $\{x_s\}^{(2)}$ чине основни систем решења, онда је опште решење $\{x_s\}=c_1\{x_s^{(1)}\}+c_2\{x_s^{(2)}\}$, где су c_1 и c_2 произвољни бројеви. Ова два вектора образују *раван* која је сада инваријантна у том простору од n димензија. Ако је ранг карактеристичне матрице $\mathfrak{R}_s$ једнак $\nu\leqslant n$ онда је корен λ_s *вишеструки*, реда ν. Тада је $n-\nu=d$ променљивих слободно а могу се само одредити ν координата, па је и ν број независних вектора. Опште решење је $\{x_s\}=c_1\{x_s^{(1)}\}+c_2\{x_s^{(2)}\}+\cdots+c_{n-\nu}\{x_s^{(n-\nu)}\}$. Овај систем вектора за различите вредности c_i, $i=1, 2, \ldots, n-\nu$, одређује *потпростор* од $n-\nu$ димензија који је инваријантан у простору од n димензија. Дакле, *линеарна трансформација* $\mathbf{A}\{x\}$ *вектора* $\{x\}$ *неког векторског простора од* n *димензија одређена оператором* $\mathbf{A}$ *може да оствари инваријантан правац, инваријантну раван и инваријантни потпростор од* $n-\nu$ *димензија у простору* V_n.

На пример:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{matrix}\right); \qquad \begin{matrix} \lambda^4-7\lambda^3+17\lambda^2-17\lambda+6=0; \\ \lambda_s=1;\ 1;\ 2;\ 3; \end{matrix}$$

$$S_1=3+3+2-1=7; \qquad S_2=5+4+5+4-1=17; \qquad S_3=17; \qquad S_4=|\,\mathbf{A}\,|=6;$$

		$\longrightarrow$		
$\mathfrak{K}_1$	$\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{matrix}$	$\mathfrak{K}_3$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{matrix}$
		$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ -2 & -3 & -2 & 7 \\ -1 & -1/3 & -4/3 & 2/3 \\ -2 & -2/3 & -1/2 & 0 \end{matrix}$
	$\{x_1^{(1)}\}$ $\{x_1^{(2)}\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\{x_3\}$	$\begin{matrix} -1 & 2 & 1/2 & 1 \end{matrix}$
	$\{e_1^{(1)}\}$ $\{e_1^{(2)}\}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\{e_3\}$	$-\frac{2}{5}\ \ \frac{4}{5}\ \ \frac{1}{5}\ \ \frac{2}{5}$

		$\longrightarrow$
$\mathfrak{K}_4$	$\begin{matrix} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -4 \end{matrix}$
		$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & -2/3 & 0 \end{matrix}$
	$\{x_4\}$	$\begin{matrix} 0 & 3/2 & 1/2 & 1 \end{matrix}$
	$\{e_4\}$	$0\ \ \frac{3}{\sqrt{14}}\ \ \frac{1}{\sqrt{14}}\ \ \frac{1}{\sqrt{14}}$

3. *Карактеристични вектори симетричне* ($A'=A$) *или кососиметричне* ($A'=-A$) *квадратне матрице за два различита карактеристична броја ортогонални су.*

Овде ће бити:

$$A\{x_r\}=\lambda_r\{x_r\};\quad A\{x_s\}=\lambda_s\{x_s\};\quad \lambda_r\neq\lambda_s;$$

$$(x_s)A\{x_r\}=\lambda_r(x_s)\{x_r\};\quad (x_r)A\{x_s\}=\lambda_s(x_r)\{x_s\}=((x_r)A\{x_s\})'=$$
$$=(x_s)A'\{x_r\}=(x_s)A\{x_r\};$$

$$(\lambda_r-\lambda_s)(x_s)\{x_r\}=0;\quad (x_s)\{x_r\}=(x_r)\{x_s\}=0.$$

На пример:

$$A=\begin{pmatrix}-3&2&1\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=A';\quad \begin{matrix}\lambda^3+\lambda^2-10\lambda+8=0;\\ \lambda_s=1;\ 2;\ -4;\end{matrix}\qquad |A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-3-\lambda_s&2&1\\2&1-\lambda_s&0\\1&0&1-\lambda_s\end{vmatrix}=0;$$

$$\{x_1\}=\begin{Bmatrix}0\\1\\-2\end{Bmatrix};\quad \{x_2\}=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix};\quad \{x_3\}=\begin{Bmatrix}5\\-2\\-1\end{Bmatrix};\ (x_1)\{x_2\}=(x_1)\{x_3\}=(\mathbf{x}_2)\{x_3\}=0;$$

$$A=\begin{pmatrix}0&3&-2\\-3&0&-6\\2&6&0\end{pmatrix}=-A';\quad \begin{matrix}\lambda(\lambda^2+49)=0;\\ \lambda_s=0;\ \pm 7i;\end{matrix}$$

$$\{x_1\}=\begin{Bmatrix}-6\\2\\3\end{Bmatrix};\ \{x_2\}=\begin{Bmatrix}(9+7i)/10\\(-3+21i)/10\\2\end{Bmatrix};\ \{x_3\}=\begin{Bmatrix}(9-7i)/10\\(-3-21i)/10\\2\end{Bmatrix};\quad \begin{matrix}(x_1)\{x_2\}=0;\\(x_1)\{x_3\}=0;\\(\overline{x_2})\{x_3\}=0.\end{matrix}$$

4. *Карактеристични вектори за две различите својствене вредности ермитске и косоермитске матрице ортогонални су.*

Овде ће бити:

$$H\{x_r\}=\lambda_r\{x_r\};\qquad \overline{H}\{\overline{x}_s\}=\lambda_s\{\overline{x}_s\};\qquad ((\overline{x}_s)H\{x_r\})-((x_r)\overline{H}\{\overline{x}_s\})=$$
$$=\lambda_r(\overline{x}_s)\{x_r\}-\lambda_s(x_r)\{\overline{x}_s\}=(\lambda_r-\lambda_s)(x_r)\{\overline{x}_s\}=0;\quad (x_r)\{\overline{x}_s\}=0;\quad r\neq s.$$

На пример:

$$H=\begin{pmatrix}2&-i&i\\i&2&-i\\-i&i&2\end{pmatrix};\quad \begin{matrix}\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-2=0;\\ \lambda_s=2;\ 2\pm\sqrt{3};\end{matrix}$$

$$\{x_1\}=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix};\quad \{\mathbf{x}_2\}=\begin{Bmatrix}1-i\sqrt{3}\\1+i\sqrt{3}\\-2\end{Bmatrix};\quad \{x_3\}=\begin{Bmatrix}1+i\sqrt{3}\\1-i\sqrt{3}\\-2\end{Bmatrix};\quad \begin{matrix}(x_1)\{x_2\}=0;\\(x_1)\{x_3\}=0;\\(x_2)\{\overline{x}_3\}=0;\end{matrix}$$

$$\mathbf{H}_k=\begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ -1+i & 2i & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda^3-4i\lambda^2-\lambda-2i=0; \\ \lambda_s=i;\ \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}i; \end{matrix} \qquad \{x_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -(1+i)/2 \\ -(1+i)/2 \end{Bmatrix};$$

$$\{x_2\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{(1+i)(\sqrt{17}-1)}{4} \\ \dfrac{(1+i)(\sqrt{17}+3)(\sqrt{17}+1)}{16} \end{Bmatrix}; \quad \{x_3\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{(1+i)(\sqrt{17}+1)}{-4} \\ \dfrac{(1+i)(\sqrt{17}-3)(\sqrt{17}-1)}{16} \end{Bmatrix}.$$

5. *Различитим својственим вредностима ортогоналне и унитарне матрице одговарају ортогонални карактеристични вектори.*

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_s=\frac{1\ \pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$\{x_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -i \end{Bmatrix}; \quad \{x_2\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ i \end{Bmatrix}; \ (x_1)\{\bar{x}_2\}=(1-i)\begin{Bmatrix} 1 \\ -i \end{Bmatrix}=0.$$

6. *Карактеристични вектори реалних матрица* **A** *и* **A′** *за две различите својствене вредности ортогонални су.*

Овде следи:

$$\mathbf{A}\{x_r\}=\lambda_r\{x_r\}; \quad \mathbf{A}'\{y_s\}=\lambda_s\{y_s\}; \quad (y_s)\,\mathbf{A}\{x_r\}=\lambda_r(y_s)\{x_r\};$$

$$(x_r)\,\mathbf{A}'\{y_s\}=\lambda_s(x_r)\{y_s\}=((x_r)\,\mathbf{A}'\ \{y_s\})'=(y_s)\,\mathbf{A}\{x_r\}=\lambda_s\{y_s\}\{x_r\};$$

$$0=(\lambda_r-\lambda_s)(y_s)\{x_r\}; \quad \lambda_r\neq\lambda_s; \quad (y_s)\{x_r\}=(x_r)\{y_s\}=0.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \{\lambda_s\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}; \quad \{x_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{x_2\}=\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}; \quad \{x_3\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \{\lambda_s\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}; \quad \{y_1\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \{y_2\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{y_3\}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

$$(x_1)\{y_2\}=0; \quad (x_2)\{y_1\}=0; \quad (x_1)\{y_3\}=0; \quad (x_3)\{y_1\}=0; \quad (x_2)\{y_3\}=0; \quad (x_3)\{y_2\}=0.$$

7. *Када је матрица* **A** *симетрична тада су карактеристични вектори матрица* **A** *и* **A'** *једнаки.*

Пошто је $\mathbf{A}=\mathbf{A}'$ то је $\{x_s\}=\{y_s\}$.

8. *Карактеристични вектори регуларних матрица* **A** *и* $\mathbf{A}^{-1}$ *једнаки су.*

Доказ је једноставан, јер је

$$\mathbf{A}\,\{x\}=\lambda\,\{x\};\quad \lambda^{-1}\{x\}=\mathbf{A}^{-1}\{x\}=\mu\,\{x\}.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};\quad \{\lambda_s\}=\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix};\qquad \mathbf{X}=(\{x_s\})=\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix};\quad \{\mu_s\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{Bmatrix};\quad \{x_s\}=\{y_s\}.$$

9. *Карактеристични вектори производа матрица* **AB** *и* **BA** *једнаки су само тада када су те матрице комутативне.*

Овде ће бити:

$$\mathbf{AB}\,\{x\}=\lambda\,\{x\};\quad \mathbf{BA}\,\{y\}=\lambda\,\{y\};\quad \{x\}=\{y\};\quad (\mathbf{AB}-\mathbf{BA})\,\{x\}=0;\quad \mathbf{AB}=\mathbf{BA}.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};\quad \mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};\quad \begin{matrix} \lambda^2-6\,\lambda-8=0; \\ \lambda_s=3\pm\sqrt{17}; \end{matrix}$$

$$\{x_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{Bmatrix};\quad \{x_2\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \end{Bmatrix}.$$

8.4. Frobenius-ова матрица. — Свака алгебарска једначина $P(\lambda)=0$, реда n, са реалним коефицијентима a_{n-r} који нису сви једнаки нули, карактеристична је једначина

$$P(\lambda)=\sum_{r=0}^{n} a_{n-r}\lambda^{n-r}=|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{F}|=0;\quad a_n=1;$$

квадратне матрице **F** облика

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{8.8}$$

Ова се матрица F *зове Frobenius-ова матрица* или *матрица пратилица,* односно *матрица придружена* (*аташирана*) *полиному* $P(\lambda)$.

За полином трећег степена било би:

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix};$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \lambda + a_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \lambda(\lambda^2 + a_2\lambda + a_1) + a_0 = \\ = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \end{matrix}$$

На пример:

$$F_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}; \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -4 & -1 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda & -1 \\ -4 & 2\lambda - 1 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & -1 \\ 2\lambda^2 - \lambda - 4 & 2\lambda - 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \lambda^4 - 3\lambda^3 + \\ + 2\lambda^2 - \lambda - \\ - 4 = 0. \end{matrix}$$

8.5. Jordan-ова матрица — **Када су сви коефицијенти a_{n-r} полинома $P(\lambda)$ реални а карактеристични су корени различити и вишеструки, онда му се може придружити специјална дијагонала суперматрица облика:**

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{\nu_s} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k} = |\,\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}\,|;$$

$$\sum_s \nu_s = n; \quad s = 1, 2, \ldots, k < n;$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} \ldots \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 \ldots \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \cdots \mathbf{J}_s \ldots & \mathbf{O} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \ldots \mathbf{O} \ldots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \lambda_s & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda_s & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_s \end{bmatrix} = \lambda_s \mathbf{I}_{\nu_s} + \mathbf{V}_{\nu_s};$$

$$V_{\nu_s}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

Матрица $\mathbf{J}$ зове се *Jordan*-ова *матрица**, а њени дијагонални елементи $\mathbf{J}_s$ су *Jordan*-ови *блокови*. Карактеристични полином сваког блока има облик

$$|\lambda \mathbf{I}-\mathbf{J}_s|=(\lambda-\lambda_s)^{\nu_s}, \tag{8.10}$$

а својствене вредности су му једнаке.

На пример:

$$P(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda-2)^3=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}|=\begin{vmatrix} \lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}_1 & & \\ & \lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}_2 & \\ & & \lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}_3 \end{vmatrix}=|(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}_1)(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}_2).$$

$$\cdot(\lambda\mathbf{I}-J_3)|=|\lambda-1|\cdot\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda^6-5\lambda^5+5\lambda^4+ +9\lambda^3-14\lambda^2-4\lambda+8;$$

$$\mathbf{J}_1=(1);$$

$$\mathbf{J}_2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{J}_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & 0 & -1 & & & \\ & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}_1)=(\lambda-1);$$

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}_2)=\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}_3)=\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$

---

* Jordan C., Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris, 1890.

8.6. Cayley-Hamilton-ова теорема. — Када се у карактеристични полином (8.3) уместо сопствене вредноста λ стави матрица A онда је задовољена матрична једначина

$$P(\mathrm{A})=\mathrm{A}^n-S_1\,\mathrm{A}^{n-1}+S_2\,\mathrm{A}^{n-2}+\cdots+(-1)^n S_n\,\mathrm{I}=\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r S_r\,\mathrm{A}^{n-r}=\mathrm{O} \qquad (8.11)$$

која је израз *Cayley-Hamilton-ове теореме: Свака квадратна матрица* **(A)** *задовољава свој карактеристични полином.*

Доказ ћемо извести користећи се особинама адјунговане матрице

$$\mathrm{AA}^*=\mathrm{A}^*\mathrm{A}=|\,\mathrm{A}\,|\cdot\mathrm{I};\qquad \mathrm{C}=(\lambda\,\mathrm{I}-\mathrm{A});\qquad \mathrm{C}^*=(\lambda\,\mathrm{I}-\mathrm{A})^*;$$

$$\mathrm{CC}^*=|\,\mathrm{C}\,|\,\mathrm{I}=P(\lambda)\cdot\mathrm{I}.$$

Ако су елементи матрице A полиноми n-ог реда, пошто су елементи α_{ik} адјунговане матрице A^* кофактори (K_{ki}) првобитне матрице A, биће кофактори реда $n-1$, па се адјунгована матрица може написати у облику

$$\mathrm{C}^*=\mathrm{C}_0+\mathrm{C}_1\,\lambda_i+\mathrm{C}_2\,\lambda^2+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}\,\lambda^{n-1},$$

где су C_s матрице које не зависе од λ.

Ради лакшег доказа узмимо да је $n=4$, што не утиче на општост расуђивања, имаћемо

$$\mathrm{C\,C}^*=(\lambda\,\mathrm{I}-\mathrm{A})\,(\mathrm{C}_0+\mathrm{C}_1\,\lambda+\mathrm{C}_2\,\lambda^2+\mathrm{C}_3\,\lambda^3)=P\,(\lambda)\cdot\mathrm{I}=$$

$$=(\lambda^4-S_1\,\lambda^3+S_2\,\lambda^2-S_3\,\lambda+S_4)\,\mathrm{I}.$$

Изједначењем вредности уз исте степене, множењем и сабирањем следи:

$$\begin{array}{l} -\mathrm{A\,C}_0=S_4\,\mathrm{I};\\ \mathrm{C}_0-\mathrm{AC}_1=-S_3\,\mathrm{I};\\ \mathrm{C}_1-\mathrm{AC}_2=S_2\,\mathrm{I};\\ \mathrm{C}_2-\mathrm{AC}_3=-S_1\,\mathrm{I};\\ \mathrm{C}_3=\mathrm{I}; \end{array} \quad + \quad \left(\begin{array}{ll} -\mathrm{A\,C}_0 & =\quad S_4\,\mathrm{I}\\ \mathrm{A}\ \ (\mathrm{C}_0-\mathrm{AC}_1) & =-S_3\,\mathrm{A}\\ \mathrm{A}^2\,(\mathrm{C}_1-\mathrm{AC}_2) & =\quad S_2\,\mathrm{A}^2\\ \mathrm{A}^3\,(\mathrm{C}_2-\mathrm{AC}_3) & =-S_1\,\mathrm{A}^3\\ \mathrm{A}^4\ \ \mathrm{C}_3 & =\quad \mathrm{A}^4\\ \hline \end{array}\right) \ +;$$

$$\mathrm{O} \qquad =\mathrm{A}^4-S_1\,\mathrm{A}^3+S_2\,\mathrm{A}^2-$$

$$-S_3\mathrm{A}+S_4\mathrm{I}=P\,(\mathrm{A}).$$

Ако је матрица A квадратна са поља бројева, онда су матрице I_n, A, A^2, $\ldots$, A^r, *$r\leqslant n$, линеарно зависне,* те ће бити $\mathrm{A}^r+c_1\,\mathrm{A}^{r-1}+\cdots+c_r\,\mathrm{I}=\mathrm{O}$.

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}^2=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 10 & 10 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^3=\begin{pmatrix} -11 & -12 & -13 \\ 19 & 20 & 13 \\ 38 & 38 & 27 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_s=\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right. ;$$

$$P(\lambda)=\lambda^3-6\,\lambda^2+11\,\lambda-6=0; \quad P(\mathbf{A})=\mathbf{A}^3-6\,\mathbf{A}^2+11\,\mathbf{A}-6\,\mathbf{I}=\mathbf{O};$$

$$\begin{pmatrix} -11 & -12 & -13 \\ 19 & 20 & 13 \\ 38 & 38 & 27 \end{pmatrix} -6\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 10 & 10 & 9 \end{pmatrix} +11\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} -$$

$$-6\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.7. Минимални полином и минимална једначина. — Према претходној теореми свака квадратна матрица реда n задовољава свој карактеристични полином $P(\lambda)=0$, степена n. Монични полином $M(\lambda)$ најмањег степена (m) који задовољава релацију $M(\mathbf{A})=0$ зове се *минимални полином матрице* **A**, а једначина $M(\lambda)=0$ је *минимална једначина матрице* **A**. Према томе биће:

$$M(\lambda)=\lambda^m+a_{m-1}\,\lambda^{m-1}+\cdots+a_0=0;$$
$$M(\mathbf{A})=\mathbf{A}^m+a_{m-1}\,\mathbf{A}^{m-1}+\cdots+a_0\,\mathbf{I}=\mathbf{O}. \tag{8.12}$$

Степен (m) минималног полинома зове се *индекс матрице* **A**. Његова *највећа вредност* је n, а *најмања јединица*, те је увек $1\leqslant m\leqslant n$. Када је индекс $m<n$ за матрицу **A** се каже да је *сводљива* или *сужена*.

Када су сви карактеристични корени међусобно различити, тада је и само тада минимални полином једнак карактеристичном полиному. У сваком другом случају су *различити*, али је минимални полином *делилац* карактеристичног полинома. *Сваки корен минималног полинома је уједно и корен карактеристичног полинома.*

Свакој квадратној матрици **A** одговара само један минимални полином, јер ако би била два полинома $M_1(\lambda)$ и $M_2(\lambda)$, онда би њихова разлика морала бити једнака нули, јер матрица **A** задовољава оба полинома, па је $M_1(\lambda)=M_2(\lambda)$.

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad P(\lambda)=M(\lambda)=\lambda^3-6\,\lambda^2+11\,\lambda-6=0; \quad \lambda_s=\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right. ;$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix};\quad \begin{array}{l}P(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)^2;\\ M(\lambda)=(\lambda-5)(\lambda+1)=\lambda^2-4\lambda-5;\\ \lambda=-1;\quad -1;\quad 5;\end{array}$$

$$M(A)=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=O.$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\4&2&3&0\\-6&-2&-3&-2\\-3&-1&-1&-2\end{bmatrix};\quad \begin{array}{l}P(\lambda)=\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)^2;\\ \lambda_s=0;\quad 1;\quad -1;\quad -1;\\ M(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)=\lambda(\lambda^2-1)=\lambda^3-\lambda;\\ M(A)=A(A^2-I)=O;\end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&1&1&-2\\-2&2&1&-2\\4&-2&-1&4\\2&-1&-1&3\end{bmatrix};\qquad A(A^2-I)=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\4&2&3&0\\-6&-2&-3&-2\\-3&-1&-1&-2\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}-2&1&1&-2\\-2&1&1&-2\\4&-2&-2&4\\2&-1&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix};\qquad \lambda_m=0;\ 1;\quad -1.$$

Највећи детерминантни делилац D_n карактеристичне матрице $(\lambda I-A)$, пошто је овде $r=n$, једнак је карактеристичном полиному $P(\lambda)$, док је делилац D_{n-1} највећи заједнички делилац свих минора $(n-1)$ ог реда, па је минимални полином матрице (A) једнак n-том инваријантном фактору (7.21):

$$\frac{D_n}{D_{n-1}}=J_n=M(\lambda). \tag{8.13}$$

На пример:

$$\underset{\substack{r=1\\ d=2}}{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix};\ (\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-2\\-1&\lambda-1&-2\\-1&-1&\lambda-2\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda&-1&0\\-\lambda&\lambda-1&-2\lambda\\0&-1&\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda&-1&0\\-\lambda&\lambda-3&0\\0&-1&\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda-4&0\\0&-1&\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda-4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&-1&\lambda\\0&\lambda-4&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda-4\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-4\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-4\lambda \end{pmatrix}; \quad J_3=\lambda^2-4\lambda=M(\lambda); \quad M(A)=$$

$$=A^2-4A=A(A-4I)=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_m=0;\ 4;$$

$$P=\lambda^2(\lambda-4)=0; \quad \lambda_s=0; \quad 0; \quad 4.$$

8.8. Модална матрица. Свођење матрице на „ламбда“ матрицу. — *У* **чл. 6.6.** изнели смо сличну или колинеарну трансформацију матрице **A** у матрицу **B** помоћу регуларне матрице **V**, (6.13). Ова трансформација не мења карактеристичну једначину матрице, јер је

$$V^{-1}AV=B; \quad A \sim B; \quad |\lambda I-B|=|\lambda I-V^{-1}AV|=|\lambda V^{-1}V-V^{-1}AV|=$$

$$=|V^{-1}(\lambda I-A)V|=|V^{-1}|\cdot|\lambda I-A|\cdot|V|=|\lambda I-A|; \quad |V| \neq 0;$$

па је

$$V^{-1}AV=B \sim A; \quad |\lambda I-B|=|\lambda I-A|. \tag{8.14}$$

Сличне матрице имају исте рангове, детерминанте и трагове, па ће бити и исти карактеристични бројеви, пошто су им исте карактеристичне једначине. Нека су $\{x\}$ и $\{y\}$ карактеристични вектори сличних матрица $A \sim B$, онда је

$$A\{x\}=\lambda\{x\}; \quad B\{y\}=\lambda\{y\}; \quad V^{-1}AV\{y\}=\lambda\{y\}; \quad AV\{y\}=\lambda V\{y\}$$

па је однос између карактеристичних вектора:

$$V\{y\}=\{x\}; \quad \{y\}=V^{-1}\{x\}. \tag{8.15}$$

На пример:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0;$$

$$\lambda_s=1; \quad 2; \quad 3; \qquad \{x_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{x_2\}=\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}; \quad \{x_3\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix};$$

$$V=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad V^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} -33 & -8 & -16 \\ 41 & 11 & 19 \\ 58 & 14 & 28 \end{pmatrix}; \quad |A|=|B|=6; \quad \mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}\,B=6; \quad \lambda_s=1; \quad 2; \quad 3;$$

$$|\lambda \mathrm{I}-\mathrm{B}|=\begin{vmatrix} \lambda+33 & 8 & 16 \\ -41 & \lambda-11 & -19 \\ -58 & -14 & \lambda-28 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{array}{r} (\lambda+33)\,y_1+\quad 8\,y_2=-16\,y_3; \\ -41\,y_1+(6\lambda-11)\,y_2=-19\,y_3; \end{array}$$

$$\{y_1\}=\begin{Bmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{Bmatrix}=\mathrm{V}^{-1}\{x_1\}; \qquad \{y_2\}=\begin{Bmatrix} 8 \\ -9 \\ -13 \end{Bmatrix}; \qquad \{y_3\}=\begin{Bmatrix} 10 \\ -9 \\ -13 \end{Bmatrix}=\mathrm{V}^{-1}\{x_3\}.$$

Матрица образована од линеарно *независних карактеристичних вектора* матрице **A** назива се *модална матрица* или *матрица карактеристичних вектора:*

$$\mathrm{X}=(\{x_1\}\cdots\{x_s\}\cdots\{x_n\})=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{s1} & \ldots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{s2} & \ldots & x_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{sn} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix}. \tag{8.16}$$

Помоћу ове матрице може се дата матрица **A** свести на *сличну дијагоналну матрицу* чију су елементи *својствени* (карактеристични) *корени* карактеристичне матрице $\mathfrak{K}$ матрице **A**. Ово следи из следећег расматрања:

$$\mathrm{A}\{x\}=\lambda\{x\}; \quad \mathrm{AX}=(\mathrm{A}\{x_1\},\ \mathrm{A}\{x_2\},\ \ldots,\mathrm{A}\{x_s\},\ldots,\mathrm{A}\{x_n\})=$$
$$=(\lambda_1\{x_1\},\ \lambda_2\{x_2\},\ldots,\ \lambda_s\{x_s\},\ \ldots,\ \lambda_n\{x_n\})=\mathrm{X}[\Lambda],$$

па је

$$\mathrm{AX}=\mathrm{X}[\Lambda]; \quad \mathrm{X}^{-1}\mathrm{AX}=[\Lambda]=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{8.17}$$

Матрица $[\Lambda]$ *дијагонално слична* матрици **A** зове се *„ламбда" матрица*, пошто су јој елементи $d_{ii}=\lambda_s$ једнаки својственим бројевима карактеристичног полинома те матрице.

На пример:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \ \lambda_s=\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}; \ \mathrm{X}=(\{x_1\}\{x_2\}\{x_3\})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \ |\mathrm{X}|=-2;$$

$$X^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & {}^1/_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -{}^1/_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

Помоћу модалне матрице карактеристичних вектора може се *квадратна форма* која одговара матрици **A** свести на *канонски облик*. Пошто је матрица **A** симетрична, карактеристични вектори су ортогонални. Сменом $\{x\} = X\{y\}$ матрица се своди на дијагонални облик

$$Q = (x)\,A\,\{x\} = (y)\,D\,\{y\}; \quad \{x\} = X\{y\}; \quad (x) = (y)\,X'; \quad D = X'AX. \qquad (8.18)$$

Ови правци $\{y\}$ су главне осе. Код површина другог реда тај би систем оса био *дијаметарски систем координата*.

На пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{aligned} &P(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0; \\ &\lambda_s = 1;\ 2;\ 5. \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X'AX = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 6 & \\ & & 30 \end{pmatrix},$$

$$\{x\} = X\{y\}; \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \\ -y_2 + 2y_3 \end{Bmatrix};$$

$$Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 2y_1^2 + 6y_2^2 + 30y_3^2.$$

Када се својствени вектори *нормирају* они постају *јединични* вектори који су сада *ортонормирани* (ортогонални и нормирани), па се помоћу њих дијагонална матрица (8.18) своди на *„ламбда матрицу“*. Ове нове координате зову се *главне нормалне координате*. Дакле, биће:

$$Q = (x)\,A\,\{x\} = (\eta)\,[\Lambda]\,\{\eta\}; \quad \{x\} = E\{\eta\}; \quad EE' = I; \quad E'AE = [\Lambda]. \qquad (8.19)$$

У предњем примеру биће:

$$E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \qquad E' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{EE}'=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix};\quad \mathrm{E}'\,\mathrm{A}\,\mathrm{E}=\begin{Bmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{Bmatrix}=[\Lambda],$$

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\\0&-1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Bmatrix}\sqrt{3}\,\eta_1+\sqrt{2}\,\eta_2+\eta_3\\-\sqrt{3}\,\eta_1+\sqrt{2}\,\eta_2+\eta_3\\-\sqrt{2}\,\eta_2+2\,\eta_3\end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Bmatrix}\sqrt{3}\,x_1-\sqrt{3}\,x_2\\\sqrt{2}\,x_1+\sqrt{2}\,x_2-\sqrt{2}\,x_3\\x_1+x_2+2\,x_3\end{Bmatrix};$$

$$Q=2\,x_1^2+2\,x_2^2+4\,x_3^2+2\,x_1\,x_2+2\,x_1\,x_3+2\,x_2\,x_3=\eta_1^2+2\,\eta_2^2+5\,\eta_3^2.$$

Квадратна форма $Q(y)=(y)\,\mathrm{A}\,\{y\}$, са матрицом коефицијената $a_{11}=1$, $a_{22}=a_{33}=a_{44}=-1$, $a_{ik}=0$ за $i\neq k$, која се зове *Lorentz*-ова *матрица*, помоћу *Lorentz*-ове трансформације $\{y\}=\mathfrak{L}\{x\}$ оставља квадратну форму непромењену $Q(y)=Q(x)$, те је:

$$Q(y)=(y)\,\mathrm{A}\,\{y\}=y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2=(x)\,\mathfrak{L}'\mathrm{A}\mathfrak{L}\,\{x\}=(x)\,\mathrm{A}\,\{x\}=$$
$$=Q(x)=x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2\,;$$

$$\{y\}=\mathfrak{L}\,\{x\};\quad 0<\beta^2<1;\ \beta=v/c;\quad \begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1/\sqrt{1-\beta^2}&\beta/\sqrt{1-\beta^2}&0&0\\\beta/\sqrt{1-\beta^2}&1/\sqrt{1-\beta^2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix};$$

$$\mathrm{A}=\begin{vmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{vmatrix}.$$

8.9. Jordan-ов нормални (класични) облик матрице. Segre-ова карактеристика. — Помоћу модалне матрице X линеарно независних карактеристичних вектора — када су својствене вредности различите — матрица A се своди на дијагонални сличан облик. Ако има вишеструких корена матрица се такође може свести на тај облик, само ако је дегенерација карактеристичне матрице за ту својствену вредност (λ_s) једнака вишеструкости тога корена. Карактеристична матрица матрице $\mathfrak{K}$ може се свести на *Smith*-ов нормални облик (7.23), а сваки се инваријантни фактор може разложити на *елементарне делиоце* (просте чиниоце) који су монични. Степени ових чиниоца су цели бројеви или нуле, па је

$$J_k=(\lambda-\lambda_1)^{p_{k1}}(\lambda-\lambda_2)^{p_{k2}}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{p_{ks}};\quad p_{k1}+p_{k2}+\cdots+p_{ks}=\nu_s,$$

где је ν_s ред вишеструкости те својствене вредности. Карактеристични полином је одређен релацијом

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\nu_2}\ldots(\lambda-\lambda_n)^{\nu_n}=J_n J_{n-1}\ldots J_1;\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=n,$$

а минимални полином релацијом

$$M(\lambda)=\sum_{r=0}^{m}a_{m-r}\lambda^{m-r}=J_n=(\lambda-\lambda_1)^{p_{n1}}(\lambda-\lambda_2)^{p_{n2}}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{p_{ns}};\quad a_m=1;$$

где је збир $p_{n1}+p_{n2}+p_{n3}+\ldots+p_{ns}=m$ једнак степену минималног полинома.

С обзиром на експоненте елементарних делиоца (простих чиниоца) могу се поставити ова два става:

1° *Степен дегенерације матрице $\mathfrak{R}_s$ за својствену вредност λ_s једнак је броју од нуле различитих експонената (p_s) елементарних делиоца који одговарају том својственом броју;*

2° *Степен дегенерације матрице $\mathfrak{R}_s$ вишеструког корена λ_s реда ν, биће само тада једнак вишеструкости ν_s када су сви елементарни делиоци који одговарају тој вредности λ_s линеарни у свим инваријантним факторима J_s.*

Може се десити да је степен дегенерације матрице $\mathfrak{R}_s$ *мањи* од степена вишеструкости тога корена, па се оператором **A** тада простор од n димензија трансформише у простор од $m<n$ димензија. Таква матрица **A** се не може свести сличном трансформацијом на дијагонални облик, јер се не може образовати модална матрица **X** пошто има $m<n$ карактеристичних вектора.

У овом случају датој матрици **A** као слични облик одговара *Jordan*-ов *нормални (класични) облик* или *супердијагонална Jordan*-ова *матрица*. Код те *матрице елементи на главној дијагонали су једнаки* -1, а *елементи на супердијагонали* (косом реду паралелном главној дијагонали и изнад ње) *јесу јединице или нуле*. Таквих облика има много и за одређивање стварног облика служи *Segre*-ова карактеристика матрице* (**A**). Она се пише у облику

$$C=[(p_{n1};\ p_{n-1,1};\ldots)(p_{n2};\ p_{n-1,2};\ldots)\ldots(p_{ns};\ p_{n-1,s};\ldots)]$$

где су p_{ns} експоненти елементарних делиоца у свим инваријантним факторима. Нека је матрица реда $n=6$ са три различита корена $s=1$, **2**, 3, са вишеструкостима $\nu_1=3$, $\nu_2=2$ и $\nu_3=1$ и карактеристика облика [(21) (11) 1] онда се тада може схематски овако представити:

---

* Segre C., Atti Accad. naz. Lincei, Mem. III., 19 (1884).

	λ_1	λ_2	λ_3	→
J_3	2	1	1	$m=4$
J_2	1	1		
J_1				
ν_s	3	2	1	→ $n=6$
d_s	2	1	0	$d=3$

→

$$M(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=J_3;$$

$$J_2=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2);$$

$$J_1=1;$$

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_2)^2(\lambda-\lambda_3);$$

$$P(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}|=$$

$$=\lambda\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1\end{matrix}} &&&& \\ & \boxed{\lambda_1} &&& \\ && \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2\end{matrix}} && \\ &&& \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}=0.$$

Segre-ова карактеристика матрице **A** може се одредити када се претходно одреде карактеристични бројеви и елементарни делиоци. Карактеристичну матрицу $\mathfrak{K}=(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ треба претходно свести на *Smith*-ов *нормални облик* (7.23). Овим су одређени инваријантни фактори J_k а они се могу раставити на елементарне чиниоце.

На пример:

a)
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{K}=\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 & -3 \\ -10 & \lambda+4 & -5 \\ -5 & 4 & \lambda-6 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 && \\ & \lambda-2 & \\ && (\lambda-1)^2 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_s=\begin{cases} 1 \\ 1\ ; \\ 2 \end{cases}$$

	$\lambda_1=1$	$\lambda_2=2$	
3	2	0	$m=2$
2	0	1	
1			
ν	2	1	$n=3$
d	1	1	$d=2$

$M(\lambda)=(\lambda-1)^2=J_3;$

$J_2=(\lambda-2);\quad J_1=1;$

$P(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2);$

$$\mathbf{J}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ \hline & & \boxed{2} \end{array}\right);$$

$$\mathfrak{K}=\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix};$$

b)

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix};\qquad \mathfrak{K}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda-2 & \\ & & & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix};$$

	1	2	
4	3	0	$m=3$
3	0	1	
ν	3	1	$n=4$
d	1	1	2

$$\mathbf{J}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & \boxed{2} \end{array}\right);$$

$P(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda-2);\quad M(\lambda)=(\lambda-1)^3=J_4;\quad J_3=(\lambda-2).$

8.10. Rayleigh-ов количник. Екстремне вредности карактеристичних бројева. — Карактеристични бројеви реалних симетричних и ермитских матрица су увек *реални* што се може најлакше приказати *Rayleigh*-овим *количником*. Он је количник квадратне форме матрице **A** и норме вектора $\{x\}$, односно ермитске форме $\mathfrak{H}$ (5.40) и норме комплексног вектора $\{\mathfrak{z}\}$, те је:

$$\mathfrak{R}[\{x\}]=\frac{Q}{\mathfrak{N}}=\frac{(x)\,\mathbf{A}\,\{x\}}{(x)\,\{x\}}\;;\quad \mathfrak{R}[\{\mathfrak{z}\}]=\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{N}}=\frac{(\overline{\mathfrak{z}})\,\mathbf{H}\,\{\mathfrak{z}\}}{(\overline{\mathfrak{z}})\,\{\mathfrak{z}\}}\,. \tag{8.19}$$

Именилац овог количника је као норма вектора увек позитиван, јер је $(x)\{x\}>0;\;(\overline{\mathfrak{z}})\{\mathfrak{z}\}=\Sigma\,|\,\mathfrak{z}_i\,|^2>0$. У случају реалне симетричне матрице **A** бројилац је такође реалан ако је вектор $\{x\}$ реалан. Ако је вектор $\{x\}$

комплексан може се ставити $\{x\}=\{u\}+i\,\{v\}$, где су $\{u\})$ и $\{v\}$ реални вектори, па ће бити;

$$(\bar{x})\ \mathrm{A}\ \{x\}=(u)\ \mathrm{A}\ \{u\}+(v)\ \mathrm{A}\ \{v\}+i\ ((u)\ \mathrm{A}\ \{v\}-(v)\ \mathrm{A}\ \{u\})=(u)\mathrm{A}\ \{u\}+(v)\ \mathrm{A}\ \{v\},$$

реалан, јер је због $\mathrm{A}'=\mathrm{A}$ и $((u)\ \mathrm{A}\ \{v\})'=(v)\ \mathrm{A}'\ \{u\}=(v)\ \mathrm{A}\ \{u\}$. Према (5.41) ермитска форма једнака је коњугованој, $\mathfrak{H}=(\bar{\mathfrak{z}})\ \mathrm{H}\ \{\mathfrak{z}\}=\bar{\mathfrak{H}}'$, па је реалан број. Дакле, *Rayleigh*-ов *количник симетричне* или *ермитске матрице је увек реалан.*

Овај количник *образован за неки својствени вектор једнак је тој својственој вредности*

$$\mathfrak{R}\,[\{x_s\}]=\frac{(x_s)\ \mathrm{A}\ \{x_s\}}{(x_s)\ \{x_s\}}=\lambda_s, \tag{8.20}$$

јер је

$$(x_s)\ \mathrm{A}\ \{x_s\}=(x_s)\ \lambda_s\ \{x_s\}=\lambda_s\,(x_s)\ \{x_s\}.$$

Из овога следи да су карактеристични бројеви реалне симетричне или ермитске матрице увек *реални*. Ако су ове матрице *позитивно дефинитне*, или *семидефинитне*, карактеристични бројеви су *позитивни*, односно *негативни* (то јест позитивни или нуле). Када је ранг матрице r, тада је $n-r$ карактеристичних бројева *једнако нули*. Из овога се закључује да су карактеристични вектори реалне симетричне матрице такође *реални*. За два различита својствена корена $(\lambda_r \neq \lambda_s)$ карактеристични вектори симетричне матрице су *ортогонални*, а ермитске *унитарни*.

На пример:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_s=\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 5 \end{cases}; \quad \mathrm{X}=(\{x\})=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \ (x_r)\,\{x_s\}=0; \quad r\neq s;$$

$$Q\ \ -2\,x_1^2+2\,x_2^2+4\,x_3^2+2\,x_1\,x_2+2\,x_1\,x_3+2\,x_2\,x_3;$$

$$Q\,(\{x_1\})=2\,x_{11}^2+2\,x_{12}^2+4\,x_{13}^2+2\,x_{11}\,x_{12}+2\,x_{11}\,x_{13}+2\,x_{12}\,x_{13}=2;$$

$$\mathfrak{R}\,(\{x_1\})=(x_1)\,\{x_1\}=2;\ \ \mathfrak{R}\,(\{x_1\})=1;$$

$$Q\,(\{x_2\})=2+2+4+2-2-2=6; \quad (x_2)\,\{x_2\}=3; \quad \mathfrak{R}\,[\{x_2\}]=2=\lambda_2;$$

$$Q\,(\{x_3\})=2+2+16+2+4+4=30; \quad (x_3)\,\{x_3\}=6; \quad \lambda_3-5;$$

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda^2\,(\lambda-6)=0; \quad \lambda_s=0; \quad 0; \quad 6;$$

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} (x_1)\,\mathrm{A}\,\{x_1\}=0; \quad x_2=x_1; \\ \mathfrak{R}\,[\{x_3\}]=\dfrac{(x_3)\ \mathrm{A}\ \{x_3\}}{(x_3)\ \{x_3\}}=\dfrac{36}{6}=6. \end{array}$$

Квадратна форма је функција координата x_i вектора $\{x\}$ који се може изразити помоћу њих, те се може одредити и његов извод по координати x_i

$$\{x\}=x_1\{e_1\}+x_2\{e_2\}+\cdots+x_n\{e_n\};\qquad \frac{\partial\{x\}}{\partial x_i}=\{e_i\}. \tag{8.21}$$

Дакле, извод вектора по координати једнак је јединичном вектору. С обзиром на то *извод квадратне форме* по координати x_i биће

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}((x)\,\mathrm{A}\,\{x\})=(e_i)\,\mathrm{A}\,\{x\}+(x)\,\mathrm{A}\,\{e_i\}=2\,(e_i)\,\mathrm{A}\,\{x\}, \tag{8.22}$$

пошто је матрица A симетрична, па је $\mathrm{A}'=\mathrm{A}$ и $((x)\,\mathrm{A}\,\{e_i\})'=((\mathrm{A}\,\{e_i\})'\{x\}==(e_i)\,\mathrm{A}'\{x\}=(e_i)\,\mathrm{A}\,\{x\}$. Сем тога је градијент форме (скаларне функције) Q:

$$\operatorname{grad} Q=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\{e_i\}=2\,\mathrm{A}\,\{x\}=\frac{\partial Q}{\partial\{x\}} \tag{8.23}$$

једнак изводу квадратне форме по својственом вектору $\{x\}$.

Норма вектора је квадратна форма са јединичном матрицом $\mathfrak{N}==(x)\,\mathrm{I}\,\{x\}$, а *Rayleigh*-ов количник је количник форми, па диференцирањем добијамо услов *стационарности Rayleigh*-овог количника као функције од n реалних промењљивих x_i:

$$\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\{x\}}=2\,\{x\};\qquad \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\{x\}}=\frac{\partial}{\partial\{x\}}\,\frac{Q}{\mathfrak{N}}=\frac{1}{\mathfrak{N}^2}[2\,\mathrm{A}\,\{x\}\cdot\mathfrak{N}-Q\cdot 2\,\{x\}]= \tag{8.24}$$

$$=\frac{2}{\mathfrak{N}}\left[\mathrm{A}\,\{x\}-\frac{Q}{\mathfrak{N}}\{x\}\right]=0;\quad \mathrm{A}\,\{x\}=\mathfrak{R}\,\{x\}=\lambda\,\{x\};\quad \mathrm{A}\,\{x_s\}=\lambda_s\,(x_s\}.$$

Карактеристични корен λ_s симетричне матрице A је *стационарна вредност Rayleigh*-овог *количника за карактеристични вектор* $\{x_s\}$.

Према томе су екстремне вредности карактеристичног броја

$$\lambda_1=\lambda_{\min}=\mathfrak{R}\,[\{x_1\})];\quad \lambda_n=\lambda_{\max}=\mathfrak{R}\,[\{x_n\}];\quad \lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n. \tag{8.25}$$

Када су карактеристични вектори *ортонормирани*, тада се матрица A трансформише на дијагоналну сличну *„ламбда“ матрицу*, па су карактеристични корени тада једнаки коефицијентима уз нормалне координате:

$$\{x\}=\mathrm{E}\,\{\eta\};\quad Q=(x)\,\mathrm{A}\,\{x\}=(\eta)\,[\Lambda]\,\{\eta\}=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\,\eta_s^2;\quad [\Lambda]=\mathrm{E}'\,\mathrm{A}\mathrm{E}. \tag{8.26}$$

8.11. Методе за убрзавање развоја карактеристичне једначине. — Карактеристична једначина и карактеристични полином играју важну улогу у многим техничким проблемима. Из досадашњих излагања може се уочити да је први коефицијент полинома једнак јединици, то јест да је карактеристични полином *моничан*. Други коефицијент је једнак *трагу матрице*, а последњи *детерминанти матрице* **A**. Трећи коефицијент може се лако одредити без развијања детерминанте, помоћу трага квадрата матрице, те су:

$$a_n=1;\quad a_{n-1}=-tr\,\mathbf{A};\quad a_{n-2}=\frac{1}{2}\,[(tr\,\mathbf{A})^2-tr\,\mathbf{A}^2];\quad a_0=(-1^n)\,|\,\mathbf{A}\,|.$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix};\qquad \mathbf{A}^2=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 10 & 10 & 9 \end{pmatrix};\qquad (8.27)$$

$$a_3=1;\quad a_2=-tr\,\mathbf{A}=-6;\quad a_1=\frac{1}{2}(36-14)=11;\quad a_0=-|\,\mathbf{A}\,|=-6;$$

$$P(\lambda)=\lambda^3-6\,\lambda^2+11\,\lambda-6=0.$$

За сваки наредни коефицијент полинома мора се вршити развој детерминанте. Овај рачунски посао је *огроман,* нарочито при великом реду матрице, јер је познато да је број минора r-ог реда квадратне матрице једнак броју комбинација без понављања r-те класе из n основака, то јест $\binom{n}{r}$. На пример, за миноре реда $r=4$ матрице реда $n=6$ било би 15 детерминанти; за матрицу реда $n=10$ било би 210 детерминанти, а за матрицу 20-ог реда 4845 детерминанти четвртог реда. Овај посао је огроман ако се има и машина за рачунање. Због тога су се тражиле многе методе које би *олакшале развијање детерминанте* карактеристичне једначине, па ћемо навести оне најглавније које се примењују у техничкој пракси.

8.11.1. Метода Данилевског. — Ова се метода* састоји у томе да се матрица **A** сведе на *Frobenius*-ову матрицу (8.8), па је карактеристични полином

$$P(\lambda)=|\,\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}\,|=|\,\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{F}\,|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \lambda+a_{n-1} \end{vmatrix}=0.\qquad (8.28)$$

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};\quad P(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \lambda+a_2 \end{vmatrix};$$

---

* А. М. Данилевский — Мат. сб. 1937., т. 2/44, № 1.

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -\lambda+1 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2\lambda+3 & \lambda-2 & -\lambda+1 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 3 & \lambda-4 & -\lambda+1 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-5 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & -2 \\ 2\lambda-5 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & -1 \\ 4\lambda-10 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4\lambda-10 & -5\lambda+13 & \lambda-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -10 & -5\lambda+17 & \lambda-3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -10 & 17 & \lambda-8 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} P(\lambda)=\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-10; \\ \lambda_s=1;\ 2;\ 5. \end{array}$$

8.11.2. Разлагање једног вектора у правцима карактеристичних вектора. — Систем n карактеристичних вектора који одговарају матрици $\mathbf{A}$, реда n, образује векторски простор V_n. Неки вектор $z \neq 0$ из тога простора, може се *разложити у компоненте* у правцима карактеристичних вектора $\{x\}$, те се може написати у облику

$$\{z\}=c_1\{x_1\}+c_2\{x_2\}+\cdots+c_s\{x_s\}+\cdots+c_n\{x_n\}=\mathbf{X}\{c\}, \tag{8.29}$$

где је $\mathbf{X}$ модална матрица (матрица карактеристичних вектора). Коефицијенти развијања се одређују релацијом

$$\{c\}=\mathbf{X}^{-1}\{z\}. \tag{8.30}$$

Нека је $\{z_0\}$ неки *почетни реални вектор*, онда се множењем матрицом $\mathbf{A}$ може написати следећи низ итерирајућих вектора:

$$\{z_0\};\ \{z_1\}=\mathbf{A}\{z_0\};\ \{z_2\}=\mathbf{A}\{z_1\}=\mathbf{A}^2\{z_0\}, \ldots,\ \{z_n\}=\mathbf{A}\{z_{n-1}\}=\mathbf{A}^n\{z_0\}. \tag{8.31}$$

Када се ови вектори помноже редом коефицијентима a_s карактеристичног полинома $P(\lambda)$, и сви саберу, добија се векторски полином који је у вези са матричним полиномом:

$$P[\{z_0\}]=\{z_n\}+a_{n-1}\{z_{n-1}\}+\cdots+a_1\{z_1\}+a_0\{z_0\}=\sum_{r=0}^{n} a_{n-r}\{z_{n-r}\}=$$

$$=(\mathbf{A}^n+a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}+\cdots+a_1\mathbf{A}+a_0\mathbf{I})\ \{z_0\}=(P[\mathbf{A}])\cdot\{z_0\}=0. \tag{8.32}$$

Због особине A $\{x_s\}=\lambda_s\{x_s\}$ низ вектора (8.31) постаје:

$$\{z_0\}= c_1\{x_1\}+ c_2\{x_2\}+\cdots+c_n\{x_n\}=\sum_{s=1}^{n} c_s\{x_s\}; \qquad \mathbf{A}\{x_s\}=\lambda_s\{x_s\};$$

$$\{z_1\}=\lambda_1 c_1\{x_1\}+\lambda_2 c_2\{x_2\}+\cdots+\lambda_n c_n\{x_n\}=\mathbf{A}\, z_0=\sum_{s}\lambda_s c_s\{x_s\};$$

$$\{z_2\}=\lambda_1^2 c_1\{x_1\}+\lambda_2^2 c_2\{x_2\}+\cdots+\lambda_n^2 c_n\{x_n\}=\sum_{s}\lambda_s^2 c_s\{x_s\};$$

. . . .

$$\{z_n\}=\lambda_1^n c_1\{x_1\}+\lambda_2^n c_2\{x_2\}+\cdots+\lambda_n^n c_n\{x_n\}=\sum_{s}\lambda_s^n c_s\{x_s\}.$$

Када се ови изрази помноже редом коефицијентима карактеристичног полинома a_0, a_1, a_2, . . . , a_{n-1}, $a_n=1$ и саберу биће:

$$P[\{z_0\}]=\sum_{r=0}^{n} a_{n-r}\{z_{n-r}\}=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{n-r}\lambda_s^{n-r} c_s\{x_s\}=\sum_{s=1}^{n}[P(\lambda_s)]\, c_s\{x_s\}=0,$$

пошто је карактеристични полином $P(\lambda_s)=0$.

Дакле, вектори предњег низа од $\{z_0\}$ до $\{z_n\}$ су *линеарно зависни*, пошто их има $n+1$, а у простору V_n од n димензија *највише* може бити n линеарно независних вектора. У овом случају, дакле, постоји специјална линеарна зависност изражена обрасцем (8.32).

Полином $M(\lambda)$ најмањег степена за који је задовољен услов (8.32) зове се *минимални полином вектора* $\{z_0\}$ за матрицу **A**:

$$M(\lambda)=0; \quad [M(\mathbf{A})]\cdot\{z_0\}=0. \tag{8.33}$$

8.11.3. Криловљева метода. — Ова метода[*] за одређивање коефицијената a_{n-r} карактеристичног полинома оснива се на особености карактеристичне матрице да јој елементи на главној дијагонали садрже λ на првом степену, па се сличном трансформацијом може свести на матрицу која ће имати степене од карактеристичног корена само у једној врсти (или колони). У ствари та метода представља одређивање коефицијената минималног полинома за дати вектор $\{z_0\}$:

$$P[\{z_0\}]=(P[\mathbf{A}])\cdot\{z_0\}=\{z_n\}+a_{n-1}\{z_{n-1}\}+\cdots+a_1\{z_1\}+a_0\{z_0\}=0. \tag{8.34}$$

Вектори $\{z_0\}$, $\{z_1\}$, . . . , $\{z_{n-2}\}$, $\{z_{n-1}\}$ су *линеарно независни*, па је њихова матрица регуларна, те је њена детерминанта различита од нуле. Коефицијенти полинома $P(\lambda)$ који је идентичан са минималним полиномом вектора $\{z_0\}$ када је $m=n$, одређују се из система нехомогених једначина:

$$\mathbf{Z}=(\{z_0\},\ldots,\{z_{n-1}\}); \quad \mathbf{Z}\{a\}+\{z_n\}=\{0\}; \quad |\mathbf{Z}|\neq 0; \quad \{a\}=\left\{\begin{matrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ a_n=1\end{matrix}\right\} \tag{8.35}$$

---

[*] А. Н. Крылов, 1931. год.

Пошто вектор $\{z\}$ има n координата, то систем има n једначина, па се непознате могу одредити када се познаје матрица $\mathbf{A}$ и изабере вектор $\{z_0\}$.

Нехомогене једначине (8.35) могу се свести на нулу додајући још једну једначину која представља карактеристични полином, те ће бити

$$\mathbf{Z}\{a\}+\{z_n\}=\{0\}; \qquad a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n-P(\lambda)=0;$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 z_{01}+a_1 z_{11}+\cdots+a_k z_{k1}+\cdots+z_{n1}=0;\\ a_0 z_{02}+a_1 z_{12}+\cdots+a_k z_{k2}+\cdots+z_{n2}=0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_0 z_{0n}+a_1 z_{1n}+\cdots+a_k z_{kn}+\cdots+z_{nn}=0;\\ a_0+a_1\lambda+\cdots+a_k\lambda^k+\cdots+(\lambda^n-P)=0; \end{array}\right. \qquad a_n=1. \qquad (8.36)$$

Да би овај систем хомогених једначина имао сем тривијалних и друга решења мора детерминанта система бити једнака нули. Због последњег члана она се може написати у виду збира двеју детерминанти:

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2=\left|\begin{array}{cccccc} z_{01} & z_{11} & \ldots & z_{k1} & \ldots & z_{n-1,1} & z_{n,1}\\ z_{02} & z_{12} & \ldots & z_{k2} & \ldots & z_{n-1,2} & z_{n2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ z_{0n} & z_{1n} & \ldots & z_{kn} & \ldots & z_{n-1,n} & z_{nn}\\ 1 & \lambda & \ldots & \lambda^k & \ldots & \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{array}\right|+$$

$$+\left|\begin{array}{ccccc} z_{01} & z_{11} & \ldots & z_{n-1,1} & 0\\ z_{02} & z_{12} & \ldots & z_{n-1,2} & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ z_{0n} & z_{1n} & \ldots & z_{n-1,n} & 0\\ 1 & \lambda & \ldots & \lambda^{n-1} & -P(\lambda) \end{array}\right|=0.$$

Друга детерминанта је производ $P(\lambda)$ и детерминанте $|\mathbf{Z}|\neq 0$, па ће бити

$$P(\lambda)=\frac{1}{|\mathbf{Z}|}\begin{vmatrix} z_{01} & z_{11} & \dots & z_{k1} & \dots & z_{n-1,1} & z_{n1}\\ z_{02} & z_{12} & \dots & z_{k2} & \dots & z_{n-1,2} & z_{n2}\\ . & . & . & . & . & . & .\\ z_{0n} & z_{1n} & \dots & z_{kn} & \dots & z_{n-1,n} & z_{nn}\\ 1 & \lambda & \dots & \lambda^{k} & \dots & \lambda^{n-1} & \lambda^{n} \end{vmatrix}=\sum_{r=0}^{n} a_{n-r}\lambda^{n-r}=0;\quad a_n=1. \tag{8.37}$$

Ова детерминанта је сличан трансформат карактеристичне детерминанте, само се карактеристични бројеви λ^k налазе *у последњој врсти.* Развијањем ове детерминанте по елементима последње врсте добија се карактеристични полином $P(\lambda)=0$.

Сада треба по познатим алгебарским методама *одредити карактеристичне бројеве*, а онда и *карактеристичне векторе* према релацији $\mathbf{A}\{x_s\}=\lambda_s\{x_s\}$. Пошто је ово велики рачунски посао, могу се карактеристични вектори одредити помоћу Криловљеве методе када се карактеристични вектор $\{x\}$ разложи у компоненте у правцима линеарно независних вектора $\{z_0\}$, $\{z_1\}$, ..., $\{z_{n-1}\}$:

$$\{x\}=c_0\{z_0\}+c_1\{z_1\}+\dots+c_{n-1}\{z_{n-1}\}=\mathbf{Z}\{c\};\quad \{c\}=\begin{Bmatrix} c_0\\ \vdots\\ c_{n-1}\end{Bmatrix}. \tag{8.38}$$

Када се овај израз унесе у релацију $\mathbf{A}\{\boldsymbol{x}\}=\lambda\{x\}$, онда, с обзиром на (8.34) и предњу релацију (8.31), следи:

$$\mathbf{A}\{x\}=\sum_{r=0}^{n-1}\mathbf{A}\,c_r\{z_r\}=\mathbf{A}\,c_0\{z_0\}+\dots+\mathbf{A}\,c_{n-1}\{z_{n-1}\}=c_0\{z_1\}+c_1\{z_2\}+$$

$$+\dots+c_{n-2}\{z_{n-1}\}+c_{n-1}\{z_n\}=\lambda[c_0\{z_0\}+c_1\{z_1\}+\dots+c_{n-1}\{z_{n-1}\}];$$

$$\{z_1\}=\mathbf{A}\{z_0\};\quad \{z_2\}=\mathbf{A}\{z_1\};\ \dots\ ;.$$

Пошто се карактеристични вектор одређује до на неки стални фактор, а будући да мора бити $c_{n-1}\neq 0$, јер би за $c_{n-1}=0$ испало да су вектори $\{z_0\}$, ..., $\{z_{n-1}\}$ линеарно зависни, узећемо да је овај коефицијент једнак *јединици*, па ће бити:

$$c_0\{z_1\}+c_1\{z_2\}+\dots+c_{n-2}\{z_{n-1}\}+[-a_0\{z_0\}-a_1\{z_1\}-\dots-a_{n-1}\{z_{n-1}\}]=$$

$$=\lambda[c_0\{z_0\}+c_1\{z_1\}+\dots+c_{n-1}\{z_{n-1}\}]. \tag{8.39}$$

Упоређењем вредности уз исте векторе добија се:

$$\begin{array}{lll} c_{n-1}=1; & c_{n-k}=\lambda\,c_{n-k-1}+a_{n-k-1}; & \\ c_{n-2}=\lambda\,c_{n-1}+a_{n-1}; & . \ . \ . \ . \ . \ . \ . & c_0=\lambda\,c_1+a_1;\\ c_{n-3}=\lambda\,c_{n-2}+a_{n-2} & c_2=\lambda\,c_3+a_3; & 0=\lambda\,c_0+a_0.\\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . & c_1=\lambda\,c_2+a_2; & \end{array} \tag{8.40}$$

Када се одреде коефицијенти c_k онда се помоћу (8.38) одређује карактеристични вектор $\{x_s\}$ и то за сваки карактеристични корен (λ_s).

Цео поступак се може спровести схематски — табеларно — како ћемо показати на једном лаком примеру да би се лакше схватила метода рада.

На пример:

					A $\{z_0\}$	A $\{z_1\}$	A $\{z_2\}$
	A			$\{z_0\}$	$\{z_1\}$	$\{z_2\}$	$\{z_3\}$
	4	1	1	1	3	11	47
	1	2	1	−1	−1	1	15
	1	1	2	0	0	2	16
	$P(\lambda)$				λ	λ^2	λ^3
	a_{n-r}			−10	17	−8	1
λ_s	1	2	5	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	
c_0	10	5	2	0	−2	4	
c_1	−7	−6	−3	−2	2	2	
c_2	1	1	1	2	2	2	

$$|Z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0;$$

$$P(\lambda) = \frac{1}{4} \left[\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \lambda^3 - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 47 \\ -1 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} \lambda^2 + \begin{vmatrix} 1 & 11 & 47 \\ -1 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 16 \end{vmatrix} \lambda - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 3 & 11 & 47 \\ -1 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 16 \end{vmatrix} \right] = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0; \quad \lambda_s = (1;\ \ 2;\ \ 5).$$

Карактеристични вектори су (према 8.40):

$\{x\} = c_0\{z_0\} + c_1\{z_1\} + c_2\{z_2\} = c_0\{z_0\} + c_1\{z_1\} + \{z_2\};$

$$\begin{array}{llll}
c_2=1; & & c_2=1 & & c_2=1 \\
c_1=\lambda\, c_2+a_2; & \lambda=1; & c_1=1-8=-7; & \lambda=2; & c_1=2-8=-6; \\
c_0=\lambda\, c_1+a_1; & & c_0=-7+17=10; & & c_0=-12+17=5;
\end{array}$$

$$\mathbf{X}=\mathbf{ZC}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ -7 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (x_r)\{x_s\}=0; \quad r\neq s.$$

Ако би се изабрао такав вектор $\{z_0\}$ да је матрица $\mathbf{Z}$ сингуларна, $|\mathbf{Z}|=0$, онда би вектори $\{z_0\}$, $\{z_1\}, \ldots, \{z_{n-1}\}$ били линеарно зависни, па би се добио *минимални полином* за тај вектор $\{z_0\}$. Како су корени минималног полинома уједно и корени карактеристичног полинома лако је одредити и следећи корен.

На пример, у предњем примеру имали бисмо:

	A			$\{z_0\}$	$\{z_1\}$	$\{z_2\}$	$\{z_3\}$
	4	1	1	1	5	25	125
C	1	2	1	1	3	13	63
	1	1	2	0	2	12	62
				1	5	25	
				-1	-2	-12	
				0	$-\frac{3}{2}$	-13	
	$M(\lambda)$			5	-6	1	

$$|\mathbf{Z}|=0; \quad P(\lambda)=\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-10=0;$$

$$M(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+5=0;$$

$$\lambda=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=1; \quad 5$$

$$tr\,\mathbf{A}=8=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3; \quad \lambda_3=2.$$

Ако је корен *вишеструк*, добиће се за тај корен *само један карактеристични вектор*, када се узме полазни вектор $\{z_0\}$. Да би се добили и други линеарно независни вектори који одговарају истом карактеристичном броју, мора се узети нови полазни вектор $\{u_0\}$ и поступак обновити.

На пример:

	A				$\{z_0\}$	$\{z_1\}$	$\{z_2\}$	$\{z_3\}$	$\{z_4\}$	$\{u_0\}$	$\{u_1\}$
A	3	2	2	-4	1	3	7	15	31	1	5
	2	3	2	-1	-1	1	11	49	179	1	5
	1	1	2	-1	1	2	6	20	66	0	2
	2	2	2	-1	0	2	10	38	130	0	4
C	6	3	2		1	3	7	15	31		
	-5	-4	-3		1	4	18	64	210	$\{x_4\}=c_0\{u_0\}+$	
	1	1	1		-1	$1/4$	$7/2$	21	$175/2$	$+u_1;\ c_1=1;$	
					0	$-1/2$	$-2/7$	0	0	$c_0=\dfrac{-b_0}{\lambda}=6$	
λ_s	1	2	3	1	-6	11	-6	1	—	$\lambda_4=1$	
					b_0	b_1	b_2	b_3			

$M(\lambda)=\lambda^3--6\lambda^2+11\lambda-6=0;$ $\qquad$ $P(\lambda)=\lambda^4-7\lambda^3+17\lambda^2-17\lambda+6=0;$

$$\mathrm{X}_3=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix};\ \{x_4\}=6\{u_0\}+\{u_1\};$$

$$|\mathrm{X}|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}=10\neq 0.$$

8.11.4. Hessenberg-ова метода. — Ова је метода подешена за рачунање на *рачунским машинама*. Систем вектора $\{z\}$ који се узимају код методе Крилова, *Hessenberg* узима са допунским условима, тако да је

$$\{z_1\};\quad \{z_2\}=(\mathbf{A}+h_{11}\,\mathbf{I})\{z_1\};\quad \{z_3\}=h_{12}\,\mathbf{I}\,\{z_1\}+(\mathbf{A}+h_{22}\,\mathbf{I})\{z_2\};$$

$$\{z_4\}=h_{13}\{z_1\}+h_{23}\{z_2\}+(\mathbf{A}+h_{33}\,\mathbf{I})\{z_3\};\ \ldots;. \tag{8.41}$$

Полазни вектор $\{z_1\}$ узме се јединични вектор n-ог реда $(z_1)=(1;\ 0;\ \ldots,\ 0)$, а коефицијенти h_{ik} се бирају тако да матрица вектора $\{z\}$ буде доња троугласта матрица, $z_{12}=0$; $z_{13}=z_{23}=0$, итд. На овај се начин матрици **A** додељују две матрице: **Z** вектора $\{z\}$ и *Hessenberg*-ова матрица H_e (h_{ik}). Ове су матрице облика

$$Z=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & z_{22} & 0 & . & 0 \\ 0 & z_{23} & z_{33} & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & z_{2n} & z_{3n} & . & z_{nn} \end{bmatrix};\quad H_e=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & . & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ -1 & h_{22} & h_{23} & . & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ 0 & -1 & h_{33} & . & h_{3,n-1} & h_{3n} \\ 0 & 0 & -1 & . & . & . \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & & -1 & h_{nn} \end{bmatrix}. \tag{8.42}$$

Горе наведене операције задовољавају матричну релацију

$$AZ+ZH_e=O;\quad Z^{-1}\,AZ=-H_e;\quad A\sim -H_e, \tag{8.43}$$

па се коефицијенти могу поступно израчунавати. За случај да је $n=4$ имали бисмо:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} & & & & (1) & (2) & (3) & (4) & (1) & (2) & (3) & (4) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 1 & 0 & 0 & 0 & h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & z_{22} & 0 & 0 & -1 & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & z_{23} & z_{33} & 0 & 0 & -1 & h_{33} & h_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & z_{24} & z_{34} & z_{44} & 0 & 0 & -1 & h_{44} \end{array}\right]=O, \tag{8.43'}$$

па добијамо систем од n^2 једначина које се лако решавају:

$$\begin{array}{ll} \text{(1. колона)} & \text{(2. колона)} \\ a_{11}+h_{11}=0; & a_{12}\,z_{22}+a_{13}\,z_{23}+a_{14}\,z_{24}+h_{12}=0; \\ a_{21}-z_{22}=0; & a_{22}\,z_{22}+a_{23}\,z_{23}+a_{24}\,z_{24}+z_{22}\,h_{22}=0; \\ a_{31}-z_{23}=0; & a_{32}\,z_{22}+a_{33}\,z_{23}+a_{34}\,z_{24}+z_{23}\,h_{22}-z_{33}=0; \\ a_{41}-z_{24}=0; & a_{42}\,z_{22}+a_{43}\,z_{23}+a_{44}\,z_{24}+z_{24}\,h_{22}-z_{34}=0; \end{array} \tag{8.43''}$$

$$\begin{array}{cc} \text{(3. колона)} & \text{(4. колона)} \\ A\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{33} \\ z_{34} \end{Bmatrix}+Z\begin{Bmatrix} h_{13} \\ h_{23} \\ h_{33} \\ -1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; & A\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{44} \end{Bmatrix}+Z\begin{Bmatrix} h_{14} \\ h_{24} \\ h_{34} \\ h_{44} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{array}$$

Из (8.41) можемо добити релације:

$$\{z_2\}=(h_{11}\,\mathrm{I}+\mathrm{A})\,\{z_1\}=[f_1\,(\mathrm{A})]\cdot\{z_1\};$$

$$\{z_3\}=h_{12}\,\{z_1\}+(h_{22}\,\mathrm{I}+\mathrm{A})\,\{z_2\}=[f_2\,(\mathrm{A})]\,\{z_1\};$$

$$\{z_4\}=h_{13}\,\{z_1\}+h_{23}\,\{z_2\}+(h_{33}\,\mathrm{I}+\mathrm{A})\,\{z_3\}=[f_3\,(\mathrm{A})]\,\{z_1\};$$

……………………………………………………………………………

$$\{z_n\}=h_{1\text{-}n-1}\,\{z_1\}+h_{2,n-1}\,\{z_2\}+\cdots+(h_{n-1,\,n-1}\,\mathrm{I}+\mathrm{A})\,\{z_{n-1}\}=[f_{n-1}\,(\mathrm{A})]\,\{z_1\};$$

$$\{z_{n+1}\}=h_{1n}\,\{z_1\}+h_{n2}\,\{z_2\}+h_{n3}\,\{z_3\}+\cdots+(h_{nn}\,\mathrm{I}+\mathrm{A})\,\{z_n\}=[f_n\,(\mathrm{A})]\,\{z_1\}=0.$$

За матрицу n-ог реда постоји n вектора $\{z\}$ који су *линеарно независни,* па је сваки следећи вектор линеарно зависан, те је једнак нули, стога мора бити полином $f_n\,(\mathrm{A})=0$. Према *Cayley-Hamilton*-овој једначини овај матрични полином је уједно и карактеристични полином, те следи, пошто су матрице A и $-\mathrm{H}_e$ сличне, да оне имају исте карактеристичне полиноме и исте карактеристичне корене. Када се уместо A стави својствена вредност λ добија се карактеристични полином

$$P\,(\lambda)=|\,\lambda\,\mathrm{I}-\mathrm{A}\,|=|\,\lambda\,\mathrm{I}+\mathrm{H}_e\,|=f_n\,(\lambda)=0. \tag{8.44}$$

Полином $f_n\,(\lambda)$ одређујемо поступно:

$$\begin{aligned}
&f_1\,(\lambda)=h_{11}+\lambda;\\
&f_2\,(\lambda)=h_{12}+(h_{22}+\lambda)\,f_1\,(\lambda);\\
&f_3\,(\lambda)=h_{13}+h_{23}\,f_1\,(\lambda)+(h_{33}+\lambda)\,f_2\,(\lambda);\\
&f_4\,(\lambda)=h_{14}+h_{24}\,f_1\,(\lambda)+h_{34}\,f_2\,(\lambda)+(h_{44}+\lambda)\,f_3\,(\lambda);
\end{aligned} \tag{8.45}$$

……………………………………………………………………………

$$f_n\,(\lambda)=h_{1n}+h_{2n}\,f_1\,(\lambda)+h_{3n}\,f_2\,(\lambda)+\cdots+h_{n-1,n}\,f_{n-2}\,(\lambda)+(h_{nn}+\lambda)\,f_{n-1}\,(\lambda).$$

Карактеристични вектори матрица A и $-\mathrm{H}_e$ нису једнаки, али се лако добијају због трансформације:

$$(\lambda\,\mathrm{I}+\mathrm{H})\,\{y\}=0;\quad \{x\}=\mathrm{Z}\,\{y\}. \tag{8.46}$$

На пример:

A			Z			H$_e$		
1	−1	0	1	0	0	−1	1	0
1	1	2	0	1	0	−1	−5	6
2	3	2	0	2	−3	0	−1	2

Проба

$$\mathrm{AZ}+\mathrm{Z\,H}_e=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 5 & -6\\ 2 & 7 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & -5 & 6\\ -2 & -7 & 6\end{pmatrix}=\mathrm{O};$$

$$1\cdot 1+h_{11}=0; \qquad -1+h_{12}=0; \qquad 0+h_{13}=0;$$

$$1\cdot 1-z_{22}=0; \qquad 5+h_{22}=0; \qquad -6+h_{23}=0;$$

$$2\cdot 1-z_{23}=0; \qquad 7+2\,h_{22}-z_{33}=0; \qquad -6+2\,h_{23}-3\,h_{33}=0;$$

$$f_1(\lambda)=-1+\lambda;$$

$$f_2(\lambda)=1+(-5+\lambda)(-1+\lambda)=\lambda^2-6\,\lambda+6;$$

$$f_3(\lambda)=0+6\,(-1+\lambda)+(2+\lambda)\,(\lambda^2-6\,\lambda+6)=\lambda^3-4\,\lambda^2+6=P\,(\lambda)=0;$$

Horner

1,5	1	−4	0	6
		1,5	−3,75	−5,63
	1	−2,5	−3,75	0,37
		1,5	−1,50	
	1	−1,0	−5,25	$\Delta=\dfrac{0{,}37}{5{,}25}=0{,}07$
				$\lambda=1{,}57$

$$\lambda_s \begin{cases} -1{,}09 \\ 1{,}57\,; \\ 3{,}52 \end{cases} \begin{pmatrix} \lambda_s-1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda_s-5 & 6 \\ 0 & -1 & \lambda_s+2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_{s1} \\ y_{s2} \\ y_{s3} \end{Bmatrix}=0;$$

$$\{y_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2{,}09 \\ 2{,}29 \end{Bmatrix}; \quad \{y_2\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}57 \\ -0{,}16 \end{Bmatrix}; \quad \{y_3\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}52 \\ -0{,}46 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{Y}=(\{y_1\}\,\{y_2\}\,\{y_3\});$$

$$\mathbf{X}=(\{x_1\}\,\{x_2\}\,\{x_3\})=\mathbf{ZY}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}09 & -0{,}57 & -2{,}52 \\ 2{,}29 & -0{,}16 & -0{,}46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}09 & -0{,}57 & -2{,}52 \\ -2{,}69 & -0{,}66 & -3{,}66 \end{pmatrix}.$$

Може да се деси да један вектор $\{z_k\}$ буде једнак нули, тада су они линеарно зависни, па је $|\mathbf{Z}|=0$. Сада треба *разместити* матрицу **A**, под условом да се *не мењају* њени *главни скалари*, па ће се добити прави карактеристични полином.

На пример:

A	Z	H_e	Проба
$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -4 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}$
$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -8 \end{pmatrix} = \mathbf{O}$

$$f_1 = -2+\lambda;$$

$$f_2 = -2+(-3+\lambda)\,(-2+\lambda) = \lambda^2-5\lambda+4;$$

$$f_3 = -2-2\,(-2+\lambda)+(-3+\lambda)\,(\lambda^2-5\,\lambda+4) = \lambda^3-8\,\lambda^2+17\,\lambda-10=0,$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_{2,3} = 4;\ 1 \end{matrix} \qquad \lambda_s = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 5 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_s-2 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda_s-3 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda_s-3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_{s1} \\ y_{s2} \\ y_{s3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{X} = \mathrm{ZY} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(x_r)\ \{x_s\} = 0; \quad r \neq s.$$

Уместо предњег поступка треба узети једну координату тога вектора једнаку јединици то јест $\{z_k\}=\{e_1\}$, а коефицијент $h_{k,k-1}=0$ уместо 1, па рачун продужити. Сада ће се добити минимални полином, па када му се одреде корени онда је лако помоћу трага матрице A одредити последњи корен. Минимални полином помножен овим фактором $(\lambda-\lambda_n)$ даје карактеристични полином.

На пример:

A	Z	H_e	Проба
3 2 2 −4	1 0 0 0	−3 2 −6 0	
2 3 2 −1	0 2 0 0	−1 −3 0 0	
1 1 2 −1	0 1 −1 0	0 −1 0 0	
2 2 2 −1	0 2 −2 0	0 0 −1 0	
	1 0 0 0	−3 2 −6 4	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 & -4 \\ -2 & -6 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = O;$
	0 2 0 0	−1 −3 0 $^1/_2$	
	0 1 −1 0	0 −1 0 $-^1/_2$	
	0 2 −2 1	0 0 0 −1	

$$f_1 = -3+\lambda;$$

$$f_2 = 2+(-3+\lambda)(-3+\lambda) = \lambda^2-6\lambda+11;$$

$$f_3 = -6+0(-3+\lambda)+(0+\lambda)(\lambda^2-6\lambda+11) = \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6 = 0 = M(\lambda);$$

$$\lambda_m = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases};\quad tr\,\mathrm{A} = 7 = \sum \lambda_i = 6+\lambda_4;\quad \lambda_4 = 1;$$

$$P(\lambda) = M(\lambda)\cdot(\lambda-1) = \lambda^4-7\lambda^3+17\lambda^2-17\lambda+6 = 0.$$

8.12. Општи проблем са карактеристичним вредностима. — Општи проблем са својственим вредностима састоји се у томе да постоје *две матрице* A и B, такве да се вектор $\{x\}$ помоћу матрице A пресликава у вектор $\lambda\,\mathrm{B}\{x\}$ колинеаран са $\{x\}$, па је карактеристична матрица

$$\mathrm{A}\{x\} = \lambda\,\mathrm{B}\{x\};\quad (\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{B})\{x\} = \mathfrak{K}\{x\} = \{0\}. \tag{8.47}$$

Ова једначина има решења различита од тривијалних, само ако је детерминанта једнака нули:

$$f(\lambda) = |\,\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{B}\,| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda\,b_{11} & a_{12}-\lambda\,b_{12} & \dots & a_{1n}-\lambda\,b_{1n} \\ a_{21}-\lambda\,b_{21} & a_{22}-\lambda\,b_{22} & \dots & a_{2n}-\lambda\,b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-\lambda\,b_{n1} & a_{n2}-\lambda\,b_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\,b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} a_{n-r}\,\lambda^{n-r} = 0. \tag{8.48}$$

Она представља *карактеристичну једначину* пара матрица **A** и **B**. Карактеристична једначина има n корена λ_s који су *карактеристични бројеви*, а њима одговарајући вектори јесу *карактеристични вектори* $\{x_s\}$ овог пара матрица.

Када је матрица **B** несингуларна биће:

$$|\mathbf{B}| \neq 0; \quad f(\lambda) = |\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = |\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}| = 0; \quad \mathbf{P} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}. \qquad (8.49)$$

Проблем се сада свео на специјални проблем али са матрицом **P** која *није више симетрична*. Карактеристични полином је

$$f(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}| = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r \lambda^{n-r} = 0, \qquad (8.50)$$

где су сада S_r главни скалари матрице **P**. Буде ли **B**=**I**, тада је **P**=**A**, па је проблем са једном матрицом заиста специјални проблем када постоје обе матрице.

Када је матрица **B** *сингуларна*, тада нема члана са λ^n, а могу *недостајати* још неки чланови карактеристичног полинома. Може се чак десити и поред тога што је матрица **A** регуларна да се карактеристични полином сведе само на слободни члан (a_0). Тада је колинеарна трансформација помоћу овог пара матрица *немогућа*.

Када је матрица **A** сингуларна тада је $|\mathbf{A}| = 0$, па полином нема слободног члана $a_0 = 0$. Тада постоји бар један карактеристични корен једнак нули. Међутим, може да се деси да су отпали још неки чланови при крају полинома, тада ће бити вишеструких корена једнаких нули.

Када је **B** сингуларна а **A** реална матрица, тада треба увести реципрочну вредност карактеристичног броја $u = 1/\lambda$, и доћи до решења.

Матрица $\mathbf{P} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ је симетрична у случајевима: 1°) када су матрице **A** и **B** симетричне и комутативне а матрица **B** је и регуларна, и 2°) када је симетрична матрица **B** позитивно дефинитна, па се може представити у облику производа реалне регуларне матрице **C** и њене транспоноване матрице **C'**. Дакле, матрица **P** биће симетрична у случајевима:

$$\mathbf{P}\,(p_{ik} = p_{ki}); \quad 1^0)\ |\mathbf{B}| \neq 0; \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA}; \quad 2^0\ |\mathbf{B}| > 0; \quad \mathbf{B} = \mathbf{C'C}. \qquad (8.51)$$

На пример:

$$1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad f(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-2\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda+2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0; \quad \lambda_s = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases};$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

2) $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad f(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=2(1-\lambda)=2-2\lambda=0; \qquad \lambda_s=1.$$

3) $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad f(\lambda)=\begin{vmatrix} 4-2\lambda & 2-\lambda \\ 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda(\lambda-2)=0; \quad \lambda_s=\begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}.$$

4) $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad f(u)=\begin{vmatrix} 3u-4 & u-2 \\ u-2 & u-1 \end{vmatrix}=$$

$$=2u^2-3u=u(2u-3)=0; \qquad u=\begin{cases} 0 \\ 3/2 \end{cases}.$$

5) $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4-3\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=2\lambda^2-8\lambda+7=0; \quad f(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+\frac{7}{2}=0;$$

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}=\mathbf{P};$$

$$f(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+\frac{7}{2}=0.$$

6) $\mathbf{B}=\mathbf{C}'\mathbf{C}; \quad \mathbf{A}\{x\}=\lambda\,\mathbf{B}\{x\}=\lambda\,\mathbf{C}'\mathbf{C}\{x\}; \quad \mathbf{C}'^{-1}\mathbf{A}\{x\}=\lambda\,\mathbf{C}'^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{C}\{x\}=\lambda\,\mathbf{C}\{x\};$

$\mathbf{C}'^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\{x\}=\mathbf{P}\,\mathbf{C}\{x\}=\mathbf{P}\{y\}=\lambda\{y\}; \quad \mathbf{P}=\mathbf{P}'=(\mathbf{C}'^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1})'; \quad \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{I};$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}'^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{C}'^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 24 & -4 & -12 \\ -4 & 10 & -18 \\ -12 & -18 & 50 \end{pmatrix};$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{84}{16}\lambda^2 + \frac{1456}{16^2}\lambda - \frac{16.16}{16^3} = 0;$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{21}{4}\lambda^2 + \frac{91}{16}\lambda - \frac{1}{16} = 0.$$

За карактеристичне бројеве и карактеристичне векторе важе ови ставови.

1) *Када су матрице* **A** *и* **B** *реалне симетричне квадратне матрице реда* n, *а матрица* **B** *је позитивно дефинитна, тада су карактеристични бројеви и карактеристични вектори реални.*

2) *Када су квадратне форме тих матрица позитивно дефинитне, тада су карактеристични бројеви позитивни.*

Нека су форме

$Q_1 = (x)\,\mathbf{A}\,\{x\}$; $\quad Q_2 = (x)\,\mathbf{B}\,\{x\}$, онда из услова $\mathbf{A}\,\{x\} = \lambda\,\mathbf{B}\,(x)$,

множењем скаларно са (x), следи:

$(x)\,\mathbf{A}\,\{x\} = (x)\,\lambda\,\mathbf{B}\,\{x\}$; $\quad Q_1 = \lambda\,Q_2$; $\quad \lambda > 0$, јер су $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$.

3) *Када су квадратне форме матрица* **A** *и* **B** *позитивно дефинитне тада је задовољена релација*

$$P(\lambda) = |\,\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{B}\,| = |\,\mathbf{B}\,|\,(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\ldots\,(\lambda - \lambda_n) = 0. \tag{8.52}$$

4) *Карактеристични број једнак је уопштеном Rayleigh-овом количнику квадратних форми које одговарају тим матрицама*

$$\Re\,[\{x\}] = \frac{(x)\,\mathbf{A}\,\{x\}}{(x)\,\mathbf{B}\,\{x\}} = \frac{Q_1}{Q_2} = \lambda; \quad \mathbf{A}\,\{x\} = \lambda\,\mathbf{B}\,\{x\}. \tag{8.53}$$

5) *Сваком карактеристичном броју одговара карактеристични вектор. Ови су вектори линеарно независни када су матрице реалне, симетричне,* n*-ог реда, а матрица* **B** *је позитивно дефинитна.*

6) *Карактеристични вектори нису ортогонални у обичном смислу, већ у смислу „проширене ортогоналности“:*

$$(x_r)\,\{x_s\} \neq 0; \quad (x_r)\,\mathbf{A}\,\{x_s\} = 0; \quad (x_r)\,\mathbf{B}\,\{x_s\} = 0; \quad \lambda_r \neq \lambda_s. \tag{8.54}$$

Из релација

$$\mathbf{A}\,\{x_r\} = \lambda_r\,\mathbf{B}\,\{x_r\}; \quad \mathbf{A}\,\{x_s\} = \lambda_s\,\mathbf{B}\,\{x\}$$

множењем прве скаларно са (x_s) а друге са (x_r) и одузимањем, због тога што је $\lambda_r \neq \lambda_s$, биће задовољени горњи услови:

$$(x_s)\,\mathbf{A}\,\{x_r\} - (x_r)\,\mathbf{A}\,\{x_s\} = 0 = (\lambda_r - \lambda_s)\,(x_r)\,\mathbf{B}\,\{x_s\}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}'; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}'.$$

7) *Карактеристични вектори се ортонормирају у погледу матрице* B, *па је услов ортонормираности:*

$$(y_r)\,\mathrm{B}\,\{y_s\}=0;\quad r\neq s;\quad Q_2=(y_r)\,\mathrm{B}\,\{y_r\}=1;$$

$$Q_2=(y_r)\,\mathrm{B}\,\{y_s\}=\delta_{rs}=\begin{cases}1; & r=s;\\ 0; & r\neq s.\end{cases}\tag{8.55}$$

8) *Квадратне форме које одговарају матрицама* A *и* B, *а када је форма матрице* B *позитивно дефинитна, могу се конгруентном трансформацијом сопствених карактеристичних вектора свести на канонске облике*:

$$\{x\}=\mathrm{Y}\,\{\eta\};\quad \mathrm{Y}=(\{y_1\}\,\{y_2\}\cdots\{y_n\});\quad (\mathrm{A}-\lambda_s\,\mathrm{B})\,\{y_s\}=0;\quad (y_r)\,\mathrm{B}\,\{y_r\}=1;$$

$$Q_1=(x)\,\mathrm{A}\,\{x\}=(\eta)\,[\Lambda]\,\{\eta\};\quad Q_2=(\eta)\,\mathrm{I}\,\{\eta\};\quad [\Lambda]=\mathrm{Y'AY};\quad \mathrm{I}=\mathrm{Y'BY}.\tag{8.56}$$

На пример:

$$1)\quad \mathrm{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix};\quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix};$$

$$Q_1=4\,x_1^2+2\,x_2^2+2\,x_3^2+2\,x_1\,x_2+2\,x_1\,x_3+2\,x_2\,x_3;$$

$$Q_2=2\,x_1^2+2\,x_2^2+x_3^2+2\,x_1\,x_2+2\,x_1\,x_3+2\,x_2\,x_3;$$

$$f(\lambda)=|\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{B}|=\begin{vmatrix}4-2\,\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 2-2\,\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1-\lambda & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ -1+\lambda & 3-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\,(\lambda^2-7\,\lambda+10)=(\lambda-1)\,(\lambda-2)\,(\lambda-5)=0;$$

$$\lambda_s=(1;\ 2;\ 5);\quad |\,\mathrm{A}\,|=10;\quad |\,\mathrm{B}\,|=1;\qquad P(\lambda)=\lambda^3-8\,\lambda^2+17\,\lambda-10=0=f(\lambda);$$

$$\mathrm{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix};\quad \mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A}=\mathrm{P}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix};$$

$$f(\lambda)=|\mathrm{B}|\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)\,(\lambda-5)=0;$$

$$\frac{x_{s1}}{-(1-\lambda_s)}=\frac{x_{s2}}{\lambda_s{}^2-6\,\lambda_s+7}=\frac{x_{s3}}{-(1-\lambda_s)\,(3-\lambda_s)};$$

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix};\quad |\,\mathrm{X}\,|=12;\quad (x_r)\,\{x_s\}\neq 0;\quad \lambda_r\neq\lambda_s;$$

$$\Re\,[\{x_1\}]=\frac{(x_1)\,\mathrm{A}\,\{x_1\}}{(x_1)\,\mathrm{B}\,\{x_1\}}=\frac{8}{8}=1;\quad \Re\,[\{x_2\}]=\frac{4+2+2-2+2-2}{2+2+1-2+2-2}=\frac{6}{3}=2;\quad \Re\,[\{x_3\}]=\frac{30}{6}=5;$$

$$(x_1)\,\mathrm{A}\,\{x_2\} = (0\ 2\ 0)\begin{pmatrix}4&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-1\\1\end{Bmatrix} = (0\ \ 2\ \ 0)\begin{Bmatrix}4\\0\\2\end{Bmatrix} = 0;$$

$$(x_1)\,\mathrm{A}\,\{x_3\} = (0\ \ 2\ \ 0)\begin{Bmatrix}5\\0\\-5\end{Bmatrix} = 0;\quad (1\quad -1\quad 1)\begin{Bmatrix}5\\0\\-5\end{Bmatrix} = 0;$$

$$(x_1)\,\mathrm{B}\,\{x_2\} = (0\ \ 2\ \ 0)\begin{Bmatrix}2\\0\\1\end{Bmatrix} = 0;\quad (x_1)\,\mathrm{B}\,\{x_3\} = 0;\quad (x_2)\,\mathrm{B}\,\{x_3\} = 0.$$

Сопствени нормирани вектори морају задовољити услове *ортонормираности*, а пошто су карактеристични вектори то координате имају исте односе као и вектори $\{x_s\}$, те ће бити

$$(\mathrm{A}-\lambda_s\,\mathrm{B})\,\{y_s\} = \{0\};\quad \{y_1\} = \begin{Bmatrix}0\\y_{12}\\0\end{Bmatrix};\quad Q_2 = 2\,y_{12}^2 = 1;\qquad y_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\{y_1\} = \begin{Bmatrix}0\\\sqrt{2}/2\\0\end{Bmatrix};\qquad\qquad Q_2 = (y_s)\,\mathrm{B}\,\{y_s\} = 1;$$

$$\{y_2\} = \begin{Bmatrix}y_{21}\\-y_{21}\\y_{21}\end{Bmatrix};\quad 1 = (5-2+2-2)\,y_{21}^2 = 3\,y_{21}^2;\quad \{y_2\} = \begin{Bmatrix}\sqrt{3}/3\\-\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\end{Bmatrix};$$

$$\{y_3\} = \begin{Bmatrix}2\,y_{32}\\y_{32}\\-4\,y_{32}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\\-4\sqrt{6}/6\end{Bmatrix};$$

$$\mathrm{Y} = (\{y_1\}\,\{y_2\}\,\{y_3\}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{6}\\ 3\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & \sqrt{6}\\ 0 & 2\sqrt{3} & -4\sqrt{6}\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Y}' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3\sqrt{2} & 0\\ 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{6} & \sqrt{6} & -4\sqrt{6}\end{pmatrix};\qquad |\,\mathrm{Y}\,| = 1;$$

$$\mathrm{Y}'\mathrm{AY} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}0 & 3\sqrt{2} & 0\\ 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{6} & \sqrt{6} & -4\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{6}\\ 3\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & \sqrt{6}\\ 0 & 2\sqrt{3} & -4\sqrt{6}\end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 8\sqrt{3} & 0 & 4\sqrt{3}\\ 5\sqrt{6} & 0 & -5\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

3. Показати да у примеру **2.** важи *Cayley-Hamilton*-ова теорема.

4. Одредити минималне полиноме матрица из примера **2.**

5. Одредити *Jordan*-ове матрице за полиноме:

$$P(\lambda)=\lambda^5-8\lambda^4+25\lambda^3-38\lambda^2+28\lambda-8=0;\quad P(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0;$$

$$P(\lambda)=\lambda^5-6\lambda^4+13\lambda^3-12\lambda^2+4\lambda=0;\quad P(\lambda)=(\lambda^4-2\lambda^2+1)(\lambda-2)^2=0.$$

6. Методом Данилевског развити карактеристичне полиноме матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \\ -11 & 10 & 9 & 8 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ -9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} -5 & 4 & -6 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Методом Крылова развити карактеристичне полиноме матрица:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Одредити нормалне *Jordan*-ове облике за карактеристичне матрице чији су полиноми:

$$(\lambda+1)^3;\quad (\lambda-1)^3;\quad (\lambda+1)^4;\quad (\lambda-1)^4;\quad \lambda^2(\lambda^2+1);$$

$$(\lambda+3)(\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8);\quad (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda+1)^3.$$

9. Инваријантни фактори су:

$$1;\ 1;\ (\lambda-1)(\lambda^2+1);\quad (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda;\quad (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3),$$

одредити елементарне делиоце, *Segre*-ову карактеристику, карактеристични полином, минимални полином и *Jordan*-ову матрицу.

10. Елементарни делиоци једне квадратне матрице ранга $r=6$ јесу:

$$\lambda^5;\ \lambda^3;\ \lambda;\quad (\lambda+2)^5;\ (\lambda+2)^4;\ (\lambda+2)^2.$$

Одредити инваријантне факторе и *Jordan*-ов нормални облик матрице.

11. Одредити карактеристичне бројеве и карактеристичне векторе пара матрица A и B и свести квадратне форме на канонске нормалне облике:

$$\text{A)}\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. У предњем задатку одредити уопштене *Rayleigh*-ове количнике.

13. Како је за реалну симетричну матрицу $X^{-1}AX=[\Lambda]$, то је $A=X[\Lambda]X^{-1}$. Ако се стави $[\Lambda]=\Sigma\lambda_s D_s$, где је D_s дијагонална матрица чији су елементи нуле а елемент $d_{ss}=1$, и уведе смена $E_s=XD_sX^{-1}$ биће

$$A=\lambda_1E_1+\lambda_2E_2+\lambda_3E_3+\cdots=\sum_{s=1}^{n}\lambda_sE_s.$$

Овај се облик назива *спектрална декомпозиција матрице* (A).

Матрице E_s имају ове особине:

1) $E_rE_s=0$ за $r\neq s$;

2) оне су идемпотентне ($E_s^2=E_s$);

3) њихов збир је јединична матрица ($\sum_s E_s=1$; $s=1, 2, \ldots, n$);

4) $(\lambda_sI-A)E_s=0$; $s=1, 2, \ldots, n$.

Извршити спектралну декомпозицију следећих матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Матрице A и B су реалне симетричне. Одредити својствене бројеве матрица $P=AB$ и $R=AB-BA$, ако су матрице A и B из задатка 11.

15. Ако ортогонална матрица B нема карактеристични број $\lambda_s = -1$ она се може представити у облику

$$B = (I + A)(I - A^{-1}),$$

а ако нема карактеристични број $\lambda_s = 1$ онда у облику

$$C = (I + A)^{-1}(I - A),$$

где је A реална кососиметрична матрица ($A'_k = -A$).

Одредити карактеристичне бројеве ортогоналних матрица за случај да је дата матрица A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Када су матрице A, B, C реалне, симетричне и позитивно дефинитне, тада карактеристична једначина

$$|\lambda^2 A + \lambda B + C| = 0$$

има карактеристичне бројеве са негативним реалним делом.

Показати ово на матрицама:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

b $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

9. ПРИМЕНА МАТРИЦА У ТЕХНИЧКИМ ПРОБЛЕМИМА

Матрице су нашле широку примену у многим техничким проблемима као разни *оператори* трансформација а и због могућности да се рад обави машинама за рачунање. У наредном изложићемо неке примене матрица, како би се читаоци могли даље служити тим резултатима.

9.1. Примена матрица у кинематици. — 9.1.1. Линеарна трансформација и ротација координатног система. — Линеарна трансформација **(чл. 5.2.)**

$$\mathbf{A}\{x\}=\{y\};\quad \{x\}=\mathbf{A}^{-1}\{y\};\quad |\mathbf{A}|\neq 0 \tag{9.1}$$

пресликава вектор $\{x\}$ у вектор $\{y\}$, односно координате x_i у координате y_i. Матрица **A** је оператор линеарне трансформације. Обратно, када је матрица **A** регуларна, $|\mathbf{A}|\neq 0$, вектор $\{y\}$ претвара се у вектор $\{x\}$, то јест координате y_i претварају се у координате x_i. Реална матрица која задовољава услов

$$\mathbf{AA}'=\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{I};\quad \mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}';\quad |\mathbf{A}'|\,|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|^2=1;\quad |\mathbf{A}|=\pm 1, \tag{9.2}$$

је *ортогонална матрица*, а трансформација оваквом матрицом је *ортогонална трансформација*. Трансформација координата при ротацији координатног система Ox_1x_2 у равни око Ox_3-осе за угао φ (сл. 9.1.*a*) дата је следећом матричном релацијом:

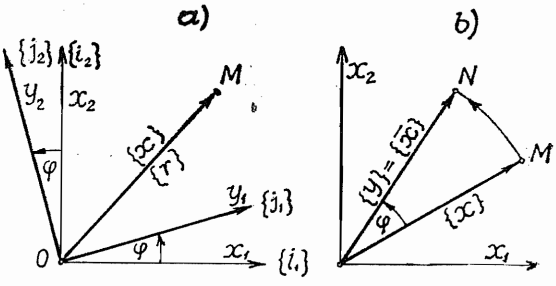
$$\{y\}=\mathbf{A}\{x\}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\{x\}. \tag{9.3}$$

Матрица **A** је очигледно ортогонална матрица, јер је:

$$|\mathbf{A}|=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1;$$

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \tag{9.4}$$

$$\mathbf{AA}'=\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}.$$



Слика 9.1. — *a*) Ротација триедра, *b*) Афина трансформација

Она је матрица вектора врста који представљају јединичне векторе *нових оса* изражених у старом систему, или обратно, матрица вектора колона јединичних вектора старог триедра изражених у новом систему:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}(j_1)\\(j_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix};\qquad \mathbf{A}=(\{i_1\}\,\{i_2\})=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Пошто је детерминанта матрице $+1$ то је обртање (ротација) у *директном смеру — десна ротација*; у противном би ротација била *лева* (индиректна, обратна).

Трансформација (9.1) може се представити геометријски и на други начин. Нека вектор $\{x\}$ гради са Ox_1-осом угао θ и нека се заокрене око координатног почетка O у директном смеру за угао φ без промене дужине (модула) вектора, добиће се нови вектор $\{y\}=\{\bar{x}\}$ који се може приказати својим координатама (сл. 9.1.b) у односу на систем $Ox_1\,x_2$:

$$|\{y\}|=|\{x\}|;\quad \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=|\{x\}|\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}=|\{y\}|\begin{Bmatrix}\cos(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi)\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{Bmatrix};$$

или

$$\{y\}=\mathbf{A}'\{x\};\quad \{x\}=(\mathbf{A}')^{-1}\{y\}=(\mathbf{A}')'\{y\}=\mathbf{A}\{y\};\quad \{y\}=\{\bar{x}\}. \tag{9.6}$$

Оваква се трансформација назива *афина*; њоме се тачка M пресликава у тачку N у истом базису, односно у истом простору V_n, или, пак, тачка N у тачку M. Истом трансформацијом се нека *права* пресликава *у праву*; а *паралелне праве у паралелне праве*. Ова трансформација је *афина,* па је и простор V_n *афини простор.*

Нека се триедар Oy_1y_2 обрће једнолико угаоном брзином ω око осе Ox_3, онда су закон промене угла φ и изводи матрица:

$$\varphi=\omega t;\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix};\qquad \dot{\mathbf{A}}=\omega\begin{pmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi\\ -\cos\varphi & -\sin\varphi\end{pmatrix};$$

$$\dot{\mathbf{A}}'=\dot{\mathbf{A}}^{-1}=\omega\begin{pmatrix}-\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & -\sin\varphi\end{pmatrix}; \tag{9.7}$$

па важе следеће релације:

$$\mathbf{A}\,\dot{\mathbf{A}}'=\dot{\mathbf{A}}'\mathbf{A}=\mathbf{A}\,\dot{\mathbf{A}}^{-1}=\dot{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{A}=\omega\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}=[\omega];$$

$$\dot{\mathbf{A}}'=\dot{\mathbf{A}}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}[\omega]; \tag{9.8}$$

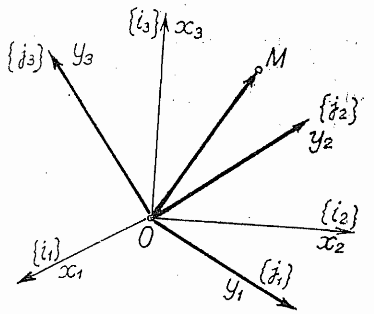
$$\mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{A}'\dot{\mathbf{A}}=\dot{\mathbf{A}}\,\mathbf{A}'=\dot{\mathbf{A}}\,\mathbf{A}^{-1}=\omega\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{pmatrix}=-[\omega].$$

Нека је $\{x\}=\{r\}=\{OM\}$ вектор положаја тачке M у покретној равни Oy_1y_2 (сл. 9.1.*a*), онда се он може изразити помоћу координата x_i у односу на триедар Ox_1x_2 и са y_i у односу на триедар Oy_1y_2 матрицом трансформација координата (9.1). Пошто матрица **A** зависи од угла φ, то јест од времена t, диференцирањем добијамо:

$$\{y\}=\mathbf{A}\,\{x\};\quad \{\dot{y}\}=\dot{\mathbf{A}}\{x\}+\mathbf{A}\,\{\dot{x}\};\quad \mathbf{A}\,\{\dot{x}\}=\{\dot{y}\}+[\omega]\,\{y\}. \tag{9.9}$$

Израз $\mathbf{A}\,\{\dot{x}\}$ представља компоненте вектора брзине тачке M, или вектора $\{x\}$ односно $\{r\}$, мерених у смеру оса покретног триедра Oy_1y_2.

Када триедар $Ox_1x_2x_3$ обртањем пређе у положај $Oy_1y_2y_3$ онда је обртање извршено око неке осе која пролази кроз тачку O (сл. 9.2). Ортови покретних оса $\{j_s\}$ одређени су у односу на ортове (јединичне векторе) $\{i_s\}$ непокретног система *косинусима смера*. Стога се вектор положаја тачке M у покретном простору може одредити у односу на оба триедра, те је матрица трансформације координата:



Слика 9.2. — Ротација просторног триедра

$$\{y\}=\mathbf{A}\,\{x\};\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}(j_1)\\(j_2)\\(j_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{bmatrix};\quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}. \tag{9.10}$$

Положај новог триедра у односу на стари одређен је са *девет углова* између којих постоји *шест веза* због ортогоналности триедра и нормираности јединичних вектора (ортова), па остају само три *независна* угла, те тело има три степена слободе обртања око непомичне тачке. Услови веза су:

$$\begin{gathered}\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1;\quad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1;\quad \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1;\\ \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0;\quad \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0;\\ \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0.\end{gathered} \tag{9.11}$$

Због ових веза матрица **A** је *ортогонална*, те следи:

$$\mathrm{AA'}=\mathrm{A'A}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix};$$

$$|\mathrm{A\,A'}|=|\mathrm{A}|\quad |\mathrm{A'}|=|\mathrm{A}|^2=1;\quad |\mathrm{A}|=1;\quad \mathrm{A'}=\mathrm{A}^{-1}. \tag{9.12}$$

Из кинематике* је познато да је вектор брзине неке тачке крутог тела које се обрће око непомичне тачке дат *Euler*-овом једначином. Тај је вектор једнак негативној вредности момента вектора угаоне брзине за тачку O, па се, према обрасцу (5.11), може написати у матричном облику:

$$\vec{v}=-[\vec{r},\ \vec{\omega}];\quad \vec{v}=-[\vec{\rho},\ \vec{\omega}];\quad \{\dot{x}\}=[\omega]\{x\};\ \{\dot{y}\}=[\Omega]\{y\};$$

где су

$$[\omega]=\begin{pmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{pmatrix};\quad [\Omega]=\begin{pmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{pmatrix}. \tag{9.13}$$

Вектори $\{\omega\}$ и $\{\Omega\}$ јесу *један те исти вектор* само приказан у два триедра.

Да бисмо одредили векторе угаоних брзина у оба триедра послужимо се познатом векторском релацијом за брзину јединичног вектора, па ћемо трансформацијама добити:

$$\dot{\vec{j}}_1=[\vec{\Omega},\vec{j}_1];\quad \dot{\vec{j}}_2=[\vec{\Omega},\ \vec{j}_2];\quad \dot{\vec{j}}_3=[\vec{\Omega},\ \vec{j}_3];$$

$$[\vec{j}_1,\ \dot{\vec{j}}_1]=\vec{\Omega}-\vec{j}_1\,(\vec{\Omega},\vec{j}_1);$$

$$(\vec{j}_2,\ [\vec{j}_1,\ \dot{\vec{j}}_1])=-(\dot{\vec{j}}_1,\ \vec{j}_3)=(\vec{\Omega},\ \vec{j}_2)=\Omega_2=(\dot{\vec{j}}_3,\ \vec{j}_1)$$

или

$$\Omega_1=(\dot{\vec{j}}_2,\ \vec{j}_3)=-(\dot{\vec{j}}_3,\ \vec{j}_2)=(\dot{\alpha}_2\ \dot{\beta}_2\ \dot{\gamma}_2)\begin{Bmatrix}\alpha_3\\ \beta_3\\ \gamma_3\end{Bmatrix}=-(\dot{\alpha}_3\ \dot{\beta}_3\ \dot{\gamma}_3)\begin{Bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{Bmatrix};$$

$$\Omega_2=(\dot{\vec{j}}_3,\ \vec{j}_1)=-(\dot{\vec{j}}_1,\ \vec{j}_3)=(\dot{\alpha}_3\ \dot{\beta}_3\ \dot{\gamma}_3)\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{Bmatrix}=-(\dot{\alpha}_1\ \dot{\beta}_1\ \dot{\gamma}_1)\begin{Bmatrix}\alpha_3\\ \beta_3\\ \gamma_3\end{Bmatrix}; \tag{9.14}$$

---

* Кинематика, 3. издање, страна 208.

$$\Omega_3=(\dot{\vec{j}}_1,\ \vec{j}_2)=-(\dot{\vec{j}}_2,\ \vec{j}_1)=(\dot\alpha_1\ \dot\beta_1\ \dot\gamma_1)\begin{Bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{Bmatrix}=-(\dot\alpha_2\ \dot\beta_2\ \dot\gamma_2)\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{Bmatrix}.$$

Ако сада замислимо да су ортови система $O\,x_1\,x_2\,x_3$ *променљиви*, онда уместо Ω треба ставити $-\omega$, те непосредно из горњих једначина добијамо:

$$-\omega_1=(\dot{\vec{i}}_2,\ \vec{i}_3)=-(\dot{\vec{i}}_3,\ \vec{i}_2)=(\dot\beta_1\ \dot\beta_2\ \dot\beta_3)\begin{Bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{Bmatrix}=-(\dot\gamma_1\ \dot\gamma_2\ \dot\gamma_3)\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{Bmatrix};$$

$$-\omega_2=(\dot{\vec{i}}_3,\ \vec{i}_1)=-(\dot{\vec{i}}_1,\ \vec{i}_3)=(\dot\gamma_1\ \dot\gamma_2\ \dot\gamma_3)\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{Bmatrix}=-(\dot\alpha_1\ \dot\alpha_2\ \dot\alpha_3)\begin{Bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{Bmatrix}; \qquad (9.15)$$

$$-\omega_3=(\dot{\vec{i}}_1,\ \vec{i}_2)=-(\dot{\vec{i}}_2,\ \vec{i}_1)=(\dot\alpha_1\ \dot\alpha_2\ \dot\alpha_3)\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{Bmatrix}=-(\dot\beta_1\ \dot\beta_2\ \dot\beta_3)\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{Bmatrix};$$

јер је

$$\frac{d}{dt}(\vec{i}_1,\ \vec{i}_2)=(\dot{\vec{i}}_1,\ \vec{i}_2)+(\vec{i}_1,\ \dot{\vec{i}}_2)=0;\qquad (\dot{\vec{i}}_1,\ \vec{i}_2)=-(\dot{\vec{i}}_2,\ \vec{i}_1)=-(\vec{i}_1,\ \dot{\vec{i}}_2).$$

На основи ових релација могу се матрице вектора угаоних брзина написати у овим облицима:

$$[\omega]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & (\dot{i}_1)\,\{i_2\} & (\dot{i}_1)\,\{i_3\}\\ (\dot{i}_2)\,\{i_1\} & 0 & (\dot{i}_2)\,\{i_3\}\\ (\dot{i}_3)\,\{\dot{i}_1\} & (\dot{i}_3)\,\{i_2\} & 0\end{bmatrix}=\dot{A}'A=\dot{A}^{-1}A;$$

$$(9.16)$$

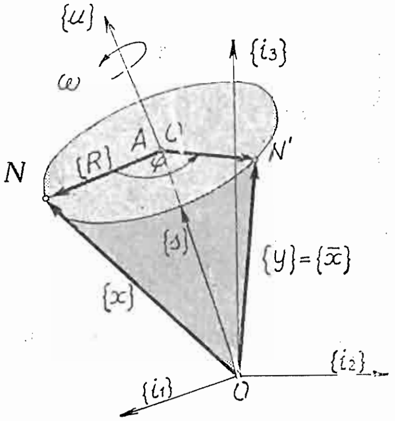
$$[\Omega]=\begin{bmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & (\dot{j}_1)\,\{j_2\} & (\dot{j}_1)\,\{j_3\}\\ (\dot{j}_2)\,\{j_1\} & 0 & (\dot{j}_2)\,\{j_3\}\\ (\dot{j}_3)\,\{j_1\} & (\dot{j}_3)\,\{j_2\} & 0\end{bmatrix}=-\dot{A}A'=-\dot{A}A^{-1}.$$

9.1.2. Обртање крутог тела око непомичне осе. — Када се круто тело заокрене око непомичне осе оријентисане ортом $\vec{u}$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ у односу на непокретни триедар $Ox_1x_2x_3$ онда ће вектор положаја неке тачке N крутог тела прећи у положај $\{\bar{x}\}=\{y\}$ не мењајући своју дужину $(\overline{ON}=\overline{ON'})$. Завршна тачка N вектора креће се по кругу, полупречника R, у равни управној на осу (слика 9.3). Ова је ротација представљена *верзорском* схемом[*] која се може и овако представити

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \cos\varphi + \begin{Bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \sin\varphi + \tag{9.17}$$

$$+(\alpha \;\; \beta \;\; \gamma) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} (1-\cos\varphi) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix},$$

где су α, β, γ косинуси углова које оса (Ou) гради са осама триедра $Ox_1x_2x_3$.



Слика 9.3. — Обртање крутог тела око непомичне осе (Ou)

Када се уведу скалар w_0 и вектор $\{w\}$ ова ротација се може представити кватернионском релацијом. Пошто се кватернион може представити матрицом (**чл. 4.1**, образац 4.10. *c*), то је

$$w_0=\cos\frac{\varphi}{2}\,; \quad \{w\}=\{u\}\sin\frac{\varphi}{2}\,;$$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} \sin\frac{\varphi}{2}\,; \quad \mathfrak{Q}=w_0+\{w\};$$

$$\bar{\mathfrak{Q}}=w_0-\{w\}\,; \tag{9.13}$$

$$\{y\}=\{\bar{x}\}=\mathfrak{Q}\,\{x\}\,\bar{\mathfrak{Q}};$$

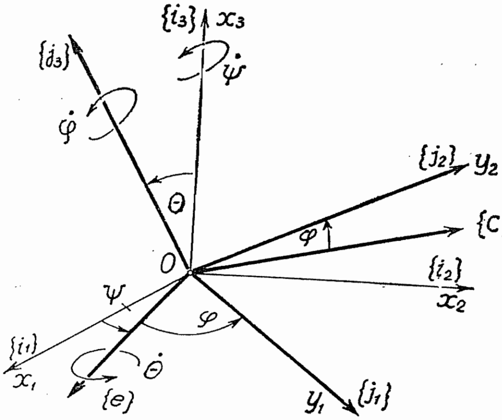
$$\begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ -w_1 & w_0 & -w_3 & w_2 \\ -w_2 & w_3 & w_0 & -w_1 \\ -w_3 & -w_2 & w & w_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 & -w_1 & -w_2 & -w_3 \\ w_1 & w_0 & w_3 & -w_2 \\ w_2 & -w_3 & w_0 & w_1 \\ w_3 & w_2 & -w_1 & w_0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

9.1.3. Обртање крутог тела око непомичне тачке. — За три независна параметра косинусне матрице (9.10) *Euler* је увео три специјална

---

[*] Кинематика, чл. 8.4.

угла, па се триедар $O\,x_1 x_2 x_3$ може помоћу три узастопне ортогоналне трансформације превести у триедар $O\,y_1\,y_2\,y_3$ са заједничким почетком (О). За разлику од раније изнетог поступка (слика 5.3) овде ћемо извршити трансформацију координата (слика 9.4). Прва трансформација је обртање око Ox_3-осе за *угао прецесије* (ψ). Трансформациона матрица је $\mathbf{A}_1$-матрица јединичних вектора врста $(\mathbf{e},\ \mathbf{u},\ \mathbf{i}_3)'$ нових оса изражених у старом систему $(O\,x_1\,x_2\,x_3)$.



Слика 9.4. — Обртање крутог тела око непомичне тачке (О)

Друго обртање је око чворне осе $\{e\}$ за *угао нутације* (θ), матрицом $\mathbf{A}_2$ јединичних вектора врста $(\mathbf{e}\ \mathbf{c}\ \mathbf{j}_3)'$ мерених у претходном триедру $(\mathbf{Oeui}_3)$. Треће обртање је око Oy_3-осе за *угао сопственог обртања* (φ), матрицом $\mathbf{A}_3$ јединичних вектора $(\mathbf{j}_1\ \mathbf{j}_2\ \mathbf{j}_3)'$ мерених у односу на претходни триедар $(O\,\mathbf{e}\,\mathbf{c}\,\mathbf{j}_3)$. Све су ове матрице ортогоналне, па је и укупна матрица $\mathbf{A}$ ортогонална. Према томе ће бити:

$$\{y\}=\mathbf{A}_3\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_1\,\{x\}=\mathbf{A}\,\{x\}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix};\qquad (9.19)$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_3\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_1;\quad \mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}(\mathbf{e})\\ (\mathbf{u})\\ (\mathbf{i}_3)\end{bmatrix};\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}(\mathbf{e})\\ (\mathbf{c})\\ (\mathbf{j}_3)\end{bmatrix};\quad \mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}(\mathbf{j}_1)\\ (\mathbf{j}_2)\\ (\mathbf{j}_3)\end{bmatrix}.$$

Euler-ове *кинематичке једначине* могу се овако изразити за оба триедра:

$$\{\omega\}=\mathbf{E}\begin{Bmatrix}\dot\theta\\ \dot\psi\\ \dot\varphi\end{Bmatrix};\qquad \begin{Bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & \sin\theta\cdot\sin\psi\\ \sin\psi & 0 & -\sin\theta\,\cos\psi\\ 0 & 1 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot\theta\\ \dot\psi\\ \dot\varphi\end{Bmatrix};\qquad (9.20.a)$$

$$\begin{Bmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\theta\,\sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \sin\theta\,\cos\varphi & 0\\ 0 & \cos\theta & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot\theta\\ \dot\psi\\ \dot\varphi\end{Bmatrix}. \qquad (9.20.\,b)$$

Вектор угаоне брзине је исти, само је обележен другим словом због другог триедра; E је *Euler-ова матрица*; она није ортогонална, јер је $\det E=|E|=\sin\theta$. Ова је матрица матрица вектора колона јединичних вектора оса око којих се врше обртања изражених у односу на непокретни $(O\,x_1x_2x_3)$ или покретни триедар $(O\,y_1y_2y_3)$:

$$\{\omega)=\dot\theta\,\{e\}+\dot\psi\,\{i_3\}+\dot\varphi\,\{j_3\};\quad E=(\{e\}\ \{i_3\}\ \{j_3\}). \qquad (9.21)$$

Пројекције вектора брзине неке тачке крутог тела су:

$$\vec v=[\vec\omega,\vec\rho];\ \{\dot x\}=[\omega]\{x\};\quad \begin{Bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & -\omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}; \qquad (9.22.\,a)$$

$$\{\dot y\}=[\Omega]\{y\};\quad \begin{Bmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\\ \dot y_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{Bmatrix}; \qquad (9.22.\,b)$$

а пројекције вектора убрзања су:

$$\vec a=[\dot{\vec\omega},\vec\rho]+[\vec\omega,[\vec\omega,\vec\rho]];$$

$$\{\ddot x\}=[\dot\omega]\,\{x\}+[\omega]^2\,\{x\};\qquad \{\ddot y\}=[\dot\Omega]\,\{y\}+[\Omega]^2\,\{y\}; \qquad (9.23)$$

где су

$$[\dot\omega]=\begin{bmatrix}0 & -\dot\omega_3 & \dot\omega_2\\ \dot\omega_3 & 0 & -\dot\omega_1\\ -\dot\omega_2 & \dot\omega_1 & 0\end{bmatrix};\quad [\omega]^2=\begin{bmatrix}-\omega_3^2-\omega_2^2 & \omega_1\,\omega_2 & \omega_1\,\omega_3\\ \omega_1\,\omega_2 & -\omega_3^2-\omega_1^2 & \omega_2\,\omega_3\\ \omega_1\,\omega_3 & \omega_2\,\omega_3 & -\omega_2^2-\omega_1^2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\omega_1^2-\omega^2 & \omega_1\,\omega_2 & \omega_1\,\omega_3\\ \omega_1\,\omega_2 & \omega_2^2-\omega^2 & \omega_2\,\omega_3\\ \omega_1\,\omega_3 & \omega_2\,\omega_3 & \omega_3^2-\omega^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_1\,\omega_1 & \omega_1\,\omega_2 & \omega_1\,\omega_3\\ \omega_1\,\omega_2 & \omega_2\,\omega_2 & \omega_2\,\omega_3\\ \omega_1\,\omega_3 & \omega_2\,\omega_3 & \omega_3\,\omega_3\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix};$$

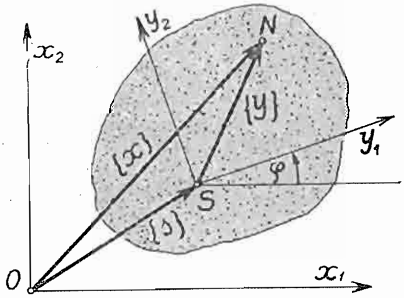
$$\omega^2=(\omega)\,\{\omega\}=\dot\theta^2+\dot\psi^2+\dot\varphi^2+2\dot\psi\,\dot\varphi\cos\theta,$$

те су

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_3 & \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 & 0 & -\dot{\omega}_1 \\ -\dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_1 (\omega) \{x\} \\ \omega_2 (\omega) \{x\} \\ \omega_3 (\omega) \{x\} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Omega}_3 & \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_3 & 0 & -\dot{\Omega}_1 \\ -\dot{\Omega}_2 & \dot{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} + (\Omega) \{y\} \cdot \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{Bmatrix} - \Omega^2 \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}. \tag{9.24}$$

9.1.4. Релативно кретање тачке у равни. — У тачки S супорта (плоче, слика 9.5) усвојићемо покретни триедар $Sy_1\,y_2$. Тада је положај тачке N која изводи релативно кретање одређен *апсолутним вектором положаја* $\{x\}$ и *релативним* $\{y\}$ у односу на оба триедра. Положај тачке S према тачки O одређен је вектором $\overrightarrow{OS} = \{s\}$. Трансформација је дата релацијама:



Слика 9.5. — Релативно кретање тачке у равни ($Ox_1\,x_2$)

$$\{x\} = \{s\} + \{y\}; \quad \{y\} = \mathbf{A}\,\{x\} - \mathbf{A}\,\{s\};$$

$$\{x\} = \{s\} + \mathbf{A}^{-1}\,\{y\}; \tag{9.25}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'.$$

Матрица $\mathbf{A}$ је матрица врста ортова покретног система мерених у непокретном систему. Ова је матрица ортогонална (образац 9.3).

Диференцирањем предњег израза, с обзиром на (9.8) и (9.9), добијају се *апсолутна* и *релативна брзина*, јер израз $\mathbf{A}\,\{\dot{x}\}$ представља компоненте вектора брзине у правцима покретних оса. Преносна брзина има два дела: *преносну транслаторну* и *преносну обимну брзину*. Према томе ће бити:

$$\{\dot{x}\} = \{\dot{s}\} + \dot{\mathbf{A}}'\,\{y\} + \mathbf{A}'\,\{\dot{y}\} = \mathbf{A}'\,\{\dot{y}\} + \{\dot{s}\} + \dot{\mathbf{A}}'\,\mathbf{A}\,(\{x-s\}) =$$

$$= \mathbf{A}'\,\{\dot{y}\} + \{\dot{s}\} + [\omega]\,(\{x-s\}) = \{v_r\} + \{v_{pt}\} + \{v_{po}\};$$

односно:

$$\{\dot{x}\} = \mathbf{A}'\,\{\dot{y}\} + \{\dot{s}\} + [\omega]\,(\{x-s\});$$

$$\mathbf{A}\{\dot{x}\} = \{\dot{y}\} + \mathbf{A}\,\{\dot{s}\} + [\omega]\,\{y\}, \tag{9.26}$$

или

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 - s_1 \\ x_2 - s_2 \end{Bmatrix}; \tag{9.27}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Поновним диференцирањем следи:

$$\begin{aligned} \{\ddot{x}\} &= \dot{\mathbf{A}}'\{\dot{y}\} + \mathbf{A}'\{\ddot{y}\} + \{\ddot{s}\} + [\dot{\omega}](\{x-s\}) + [\omega](\{\dot{x}-\dot{s}\}) = \\ &= \dot{\mathbf{A}}'\{\dot{y}\} + \mathbf{A}'\{\ddot{y}\} + \{\ddot{s}\} + [\dot{\omega}](\{x-s\}) + [\omega](\mathbf{A}'\{\dot{y}\} + [\omega](\{x-s\})) = \\ &= \mathbf{A}'\{\ddot{y}\} + \{\ddot{s}\} + [\dot{\omega}](\{x-s\}) + [\omega]^2(\{x-s\}) + 2[\omega]\mathbf{A}'\{\dot{y}\} \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} \{\ddot{x}\} &= \mathbf{A}'\{\ddot{y}\} + \{\ddot{s}\} + [\dot{\omega}](\{x-s\}) + [\omega]^2(\{x-s\}) + 2[\omega]\mathbf{A}'\{\dot{y}\} = \\ &= \{a_r\} + \{a_{pT}\} + \{a_{pN}\} + \{a_C\}; \end{aligned} \tag{9.28}$$

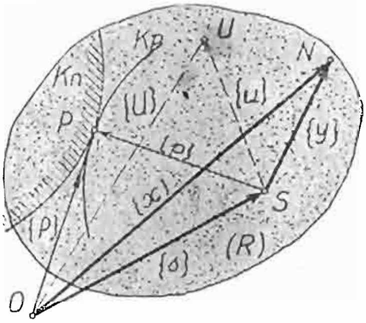
$$\mathbf{A}\{\ddot{x}\} = \{\ddot{y}\} + \mathbf{A}\{\ddot{s}\} + [\dot{\omega}]\{y\} + [\omega]^2\{y\} + 2[\omega]\{\dot{y}\} \tag{9.29}$$

или

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega} \\ \dot{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 - s_1 \\ x_2 - s_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 - s_1 \\ x_2 - s_2 \end{Bmatrix} + \\ &+ 2\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix}; \end{aligned} \tag{9.30}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega} \\ \dot{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

9.1.5. Равно кретање крутог тела. — Кретање крутог тела назива се *равно* (*раванско*) када су брзине свих његових тачака паралелне једној сталној равни (R_0). Пресеком тела равни (R) паралелној тој сталној равни добија се танка плоча која се креће у тој равни. Као и код релативног кретања усвојићемо два триедра: непокретни $Ox_1\,x_2$ и покретни $Sy_1\,y_2$ (слика 9.6), само је сада тачка N произвољна тачка супорта (тела) који се креће у равни $O\,x_1\,x_2$, па се вектор $\{y\}$ не мења у току времена. Због тога из образаца **члана 9.1.4.** непосредно добијамо изразе за брзину и убрзање неке тачке N тела у оба триедра:



Слика 9.6. — Равно кретање крутог тела

$$\{x\}=\{s\}+\mathbf{A}'\,\{y\};$$

$$\{y\}=\mathbf{A}\{x\}-\mathbf{A}\,\{s\};\quad \mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}';$$

$$\{\dot{x}\}=\{\dot{s}\}+\dot{\mathbf{A}}'\,\{y\}=\{\dot{s}\}+[\omega]\,(\{x\}-\{s\});\quad \mathbf{A}\,\{\dot{x}\}=\mathbf{A}\,\{\dot{s}\}+[\omega]\,\{y\};$$

$$\{\ddot{x}\}=\{\ddot{s}\}+[\dot{\omega}](\{x\}-\{s\})+[\omega]^2\,(\{x\}-\{s\});\quad \mathbf{A}\,\{\ddot{x}\}=\mathbf{A}\,\{\ddot{s}\}+[\dot{\omega}]\,\{y\}+[\omega]^2\,\{y\}, \tag{9.31}$$

па развијањем следе познати скаларни обрасци за ово кретање:

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1-s_1\\ x_2-s_2\end{Bmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}+\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\ddot{s}_1\\ \ddot{s}_2\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\dot{\omega}\\ \dot{\omega} & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1-s_1\\ x_2-s_2\end{Bmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-\omega^2 & 0\\ 0 & -\omega^2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1-s_1\\ x_2-s_2\end{Bmatrix}; \tag{9.32}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{s}_1\\ \ddot{s}_2\end{Bmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0 & -\dot{\omega}\\ \dot{\omega} & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}-\omega^2 & 0\\ 0 & -\omega^2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}.$$

Пол брзине—тренутни пол — је она тачка P плоче чија је брзина у томе тренутку једнака нули. Тада из друге једначине (9.31) добијамо

$$\{P\}=\{s\}-[\omega]^{-1}\{\dot{s}\};\quad \{p\}=[\omega]^{-1}\,\mathbf{A}\,\{\dot{s}\};\quad [\omega]^{-1}=\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \tag{9.33}$$

односно

$$\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}s_1\\ s_2\end{Bmatrix}-\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{s}_1\cos\varphi & +\dot{s}_2\sin\varphi\\ -\dot{s}_1\sin\varphi & +\dot{s}_2\cos\varphi\end{Bmatrix}. \tag{9.34}$$

Пол убрзања (центар убрзања) је она тачка плоче која у датом тренутку нема убрзања, па из треће једначине (9.31) добијамо:

$$\{U\}=\{s\}-([\dot{\omega}]+[\omega]^2)^{-1}\{\ddot{s}\};\quad \{u\}=-([\dot{\omega}]+[\omega]^2)^{-1}\,\mathbf{A}\,\{\ddot{s}\}, \tag{9.35}$$

односно после развијања

$$\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}s_1\\ s_2\end{Bmatrix}-\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}-\omega^2 & \dot{\omega}\\ -\dot{\omega} & -\omega^2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{s}_1\\ \ddot{s}_2\end{Bmatrix};$$

$$([\dot{\omega}]+[\omega]^2)^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}-\omega^2 & \dot{\omega}\\ -\dot{\omega} & -\omega^2\end{pmatrix};\quad \Delta=\omega^4+\dot{\omega}^2; \tag{9.36}$$

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\omega^2 & -\dot{\omega}\\ \dot{\omega} & \omega^2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{s}_1\cos\varphi & +\ddot{s}_2\sin\varphi\\ -\ddot{s}_1\sin\varphi & +\ddot{s}_2\cos\varphi\end{Bmatrix}.$$

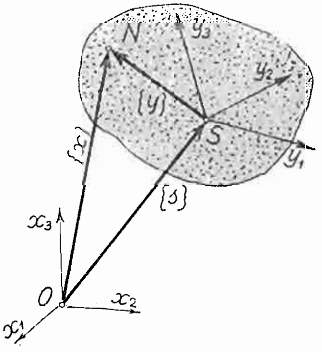
9.1.6. Просторно релативно кретање тачке. — Обрасци из **члана 9.1.4.** остају исти само за матрице угаоних брзина важе релације (9.16), пошто су сада вектори $\{x\}$ и $\{y\}$ просторни (сл. 9.7). Према томе биће изрази за брзину и убрзање у оба триедра:

а) за брзину

$$\{\dot{x}\}=\mathbf{A}'\{\dot{y}\}+\{\dot{s}\}+[\omega](\{x-s\});$$

$$\tag{9.37}$$

$$\mathbf{A}\{\dot{x}\}=\{\dot{y}\}+\mathbf{A}\{\dot{s}\}+[\Omega]\{y\};$$



Слика 9.7. — Просторно релативно кретање тачке

односно

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1-s_1 \\ x_2-s_2 \\ x_3-s_3 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}; \qquad (9.38)$$

b) убрзање добијамо диференцирањем првог израза (9.37)

$$\{\ddot{x}\} = \dot{\mathbf{A}}' \{\dot{y}\} + \mathbf{A}' \{\ddot{y}\} + \{\ddot{s}\} + [\dot{\omega}] (\{x-s\}) + [\omega] \{\dot{x}-\dot{s}\});$$

$$\{\dot{x}-\dot{s}\} = \dot{\mathbf{A}}' \{y\} + \mathbf{A}' \{\dot{y}\}; \quad \dot{\mathbf{A}}' = [\omega] \mathbf{A}';$$

односно

$$\{\ddot{x}\} = \mathbf{A}' \{\ddot{y}\} + \{\ddot{s}\} + [\dot{\omega}] (\{x-s\}) + [\omega]^2 (\{x-s\}) + 2 [\omega] \mathbf{A}' \{\dot{y}\}, \qquad (9.39)$$

а множењем матрицом **A** биће:

$$\mathbf{A} \{\ddot{x}\} = \{\ddot{y}\} + \mathbf{A} \{\ddot{s}\} + [\dot{\Omega}] \{y\} + [\Omega]^2 \{y\} + 2 [\dot{\Omega}] \{y\}. \qquad (9.40)$$

Пошто су матрице угаоног убрзања и квадрати матрица угаоних брзина

$$[\dot{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_3 & \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 & 0 & -\dot{\omega}_1 \\ -\dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix}; \; [\omega]^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2-\omega^2 & \omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_3 \\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2-\omega^2 & \omega_2\omega_3 \\ \omega_1\omega_3 & \omega_2\omega_3 & \omega_3^2-\omega^2 \end{bmatrix};$$

$$[\Omega] = [\omega] \; (\Omega_s = \omega_s); \quad \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \qquad (9.41)$$

добијамо пројекције вектора убрзања тачке N на непокретне и покретне осе:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \ddot{s}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_3 & \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 & 0 & -\dot{\omega}_1 \\ -\dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1-s_1 \\ x_2-s_2 \\ x_3-s_3 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \omega_1^2-\omega^2 & \omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_3 \\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2-\omega^2 & \omega_2\omega_3 \\ \omega_1\omega_3 & \omega_2\omega_3 & \omega_3^2-\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1-s_1 \\ x_2-s_2 \\ x_3-s_3 \end{Bmatrix} + \qquad (9.42)$$

$$+2\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \ddot{s}_3 \end{Bmatrix} + \tag{9.42}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Omega}_3 & \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_3 & 0 & -\dot{\Omega}_1 \\ -\dot{\Omega}_2 & \dot{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} \Omega_1^2-\Omega^2 & \Omega_1\Omega_2 & \Omega_1\Omega_3 \\ \Omega_1\Omega_2 & \Omega_2^2-\Omega^2 & \Omega_2\Omega_3 \\ \Omega_1\Omega_3 & \Omega_2\Omega_3 & \Omega_3^2-\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}.$$

9.1.7. Завојно кретање. — Ово је специјални случај просторног релативног кретања када се вектор положаја тачке $\{y\}$ у односу на покретни триедар $Sy_1\,y_2\,y_3$ *не мења* са временом, те, с обзиром на **члан 9.1.6,** добијамо изразе за брзину и убрзање:

$$\{y\}=\mathbf{A}\,(\{x-\mathbf{s}\});\quad \{x\}=\{s\}+\mathbf{A}'\,\{y\};\qquad \mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1};$$

$$\{\dot{x}\}=\{\dot{s}\}+[\omega]\{x-s\};\quad \mathbf{A}\,\{\dot{x}\}=\mathbf{A}\{\dot{s}\}+[\Omega]\,\{y\};\tag{9.43}$$

$$\{\ddot{x}\}=\{\ddot{s}\}+[\dot{\omega}]\,\{x-s\}+[\omega]^2\,\{x-s\};$$

$$\mathbf{A}\,\{\ddot{x}\}=\mathbf{A}\,\{\ddot{s}\}+[\dot{\Omega}]\,\{y\}+[\Omega]^2\,\{y\}.$$

Геометријско место тачака чије су транслаторне брзине колинеарне са вектором угаоне брзине јесте *оса завртња.* Нека су сада вектори положаја тачке N на оси вектори $\{x\}$ и $\{y\}$, онда из услова колинеарности следи матрична једначина осе завртња:

$$\{\dot{s}\}+[\omega]\,\{x-s\}=\lambda\,\{\omega\};\quad \mathbf{A}\,\{\dot{s}\}+[\Omega]\,\{y\}=\lambda\,\{\Omega\},\tag{9.44}$$

те се развијањем добијају скаларне једначине:

$$\frac{\dot{s}_1+\omega_2\,(x_3-s_3)-\omega_3\,(x_2-s_2)}{\omega_1}=\frac{\dot{s}_2+\omega_3\,(x_1-s_1)-\omega_1\,(x_3-s_3)}{\omega_2}=$$

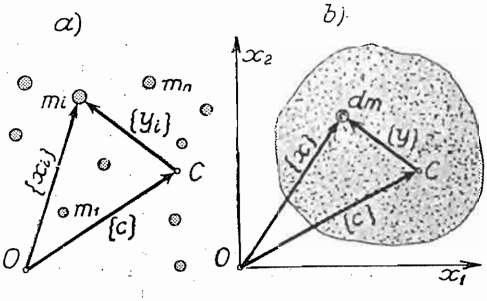
$$=\frac{\dot{s}_3+\omega_1\,(x_2-s_2)-\omega_2\,(x_1-s_1)}{\omega_3};\tag{9.45.a}$$

односно

$$[(\dot{s}_1\,\alpha_1+\dot{s}_2\,\beta_1+\dot{s}_3\,\gamma_1)+\Omega_2\,y_3-\Omega_3\,y_2]/\Omega_1=[(\dot{s}_1\,\alpha_2+\dot{s}_2\beta_2+ \tag{9.45. b}$$

$$+\dot{s}_3\,\gamma_2)+\Omega_3\,y_1-\Omega_1\,y_3]/\Omega_2=[(\dot{s}_1\,\alpha_3+\dot{s}_2\beta_3+\dot{s}_3\,\gamma_3)+\Omega_1\,y_2-\Omega_2\,y_1]/\Omega_3\,.$$

9.2. Примена матрица у динамици. — 9.2.1. Динамички закони. — Средиште материјалног система је она тачка (С) у којој можемо сматрати да је сажета целокупна маса система (сл. 9.8.*a*). При транслацији може се сматрати да је ова тачка заступник целог материјалног система, односно крутог тела.



Слика 9.8. — Материјални систем

Диференцијална једначина кретања једне материјалне тачке, према другом *Newton*-овом закону, је

$$m\{x\}=\{F\}=\{X\}. \tag{9.46}$$

Средиште материјалног система одређује се по закону:

$$M\{c\}=\sum_{i=1}^{n}\{m_i\,x_i\};\qquad M\{c\}=\iiint\limits_{(V)}\{x\}\,\mathrm{d}m. \tag{9.47}$$

Диференцирањем предњег израза следи да је *количина кретања система* једнака количини кретања средишта. Поновним диференцирањем следи закон о количини кретања:

$$M\{\dot{c}\}=\sum\{m_i\,\dot{x}_i\};\quad \{K\}=\sum\{K_i\};\quad M\{\ddot{c}\}=\sum\{m_i\,\ddot{x}_i\}=\sum X_i=X_r\,. \tag{9.48}$$

Замах система се дефинише као момент количине кретања, а извод замаха по времену је *главни момент спољашњих* сила за исту моментну-редукциону-тачку (О), па је:

$$\{L_O\}=\sum\begin{bmatrix}0 & -x_{i3} & x_{i2}\\ x_{i3} & 0 & -x_{i1}\\ -x_{i2} & x_{i1} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}m_i\,\dot{x}_{i1}\\ m_i\,\dot{x}_{i2}\\ m_i\,\dot{x}_{i3}\end{Bmatrix}=$$

$$=\sum m_i\begin{Bmatrix}x_{i2}\,\dot{x}_{i3}-x_{i3}\,\dot{x}_{i2}\\ x_{i3}\,\dot{x}_{i1}-x_{i1}\,\dot{x}_{i3}\\ x_{i1}\,\dot{x}_{i2}-x_{i2}\,\dot{x}_{i1}\end{Bmatrix};\quad \{\dot{L}_O\}=\{\mathfrak{M}_O\}\,; \tag{9.49}$$

Када се триедар $Ox_1\,x_2\,x_3$ преведе у триедар $Oy_1\,y_2\,y_3$ брзина је дата обрасцем (9.13), па је замах крутог тела:

$$\{L_O\}=\iiint\limits_{(V)}\begin{bmatrix}0 & -y_3 & y_2\\ y_3 & 0 & -y_1\\ -y_2 & y_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{Bmatrix}\mathrm{d}m=$$

$$=\iiint\limits_{(V)}\begin{bmatrix}0 & -y_3 & y_2\\ y_3 & 0 & -y_1\\ -y_2 & y_1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Omega_2\,y_3-\Omega_3\,y_2\\ \Omega_3\,y_1-\Omega_1\,y_3\\ \Omega_1\,y_2-\Omega_2\,y_1\end{Bmatrix}\mathrm{d}m,$$

односно

$$\{L_O\}=\mathrm{J}\,\{\Omega\};\quad \begin{Bmatrix}L_{O1}\\ L_{O2}\\ L_{O3}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11} & -J_{12} & -J_{13}\\ -J_{12} & J_{22} & -J_{23}\\ -J_{13} & -J_{23} & J_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{Bmatrix}; \tag{9.50.a}$$

где је

$$\mathrm{J}=\begin{bmatrix}J_{11} & -J_{12} & -J_{13}\\ -J_{12} & J_{22} & -J_{23}\\ -J_{13} & -J_{23} & J_{33}\end{bmatrix}. \tag{9.50.b}$$

Матрица **J** назива се *инерцијска матрица*; она карактерише масени распоред крутог тела; J_{ii} су *аксијални моменти инерције* а J_{ik}, за $i\neq k$, су *центрифугални моменти*.

Кинетичка енергија једне материјалне тачке је

$$E_k=\frac{1}{2}\,mv^2=\frac{1}{2}\,m\,(v)\,\{v\};\qquad 2\,E_k=(\dot{x})\,m\,\{\dot{x}\}=m\,(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2), \tag{9.51}$$

па је *хомогена квадратна форма компонентних брзина* покретне тачке.

У случају равног кретања (сл. 9.6) брзина је дата обрасцем (9.31), па с обзиром на транспозицију производа матрица, добијамо

$$2\,E_k=\iint(\mathrm{A}\,\{\dot{c}\}+[\omega]\{y\})'\,(\mathrm{A}\,\{\dot{c}\}+[\omega]\,\{y\})\,\mathrm{d}m=$$

$$=\iint((\dot{c})\,\mathrm{A}'+(y)\,[\omega'])\,(\mathrm{A}\,\{\dot{c}\}+[\omega]\,\{y\})\,\mathrm{d}\,m=$$

$$=\mathrm{A}'\mathrm{A}\,(\dot{c})\,\{\dot{c}\}\,M+[\omega']\,\mathrm{A}\,\{\dot{c}\}\iint(y)\mathrm{d}m+\mathrm{A}'[\omega](\dot{c})\iint\{y\}\,\mathrm{d}\,m+[\omega'].[\omega]\iint(y)\,\{y\}\mathrm{d}m,$$

па следи теорема *S. König*-a (сл. 9.8. *b*):

$$2\,E_k=(\dot{c})\,M\,\{\dot{c}\}+(\omega)\,\mathrm{J}\,\{\omega\};\quad \mathrm{J}=\mathrm{J}_s;\quad [\omega']\,\omega^2=[\omega]^2\,\mathrm{I}. \tag{9.52}$$

9.2.2. Euler-ове динамичке једначине. — Брзина неке тачке крутог тела које се обрће око непомичне тачке (O) дата је обрасцем (9.22), па је кинетичка енергија тела:

$$2E_k=\iiint\limits_{(V)}(\dot{y})\,\{\dot{y}\}\,dm=\iiint\limits_{(V)}(y)\,[\Omega']\,[\Omega]\,\{y\}dm=$$

$$=\iiint\limits_{(V)}(y_1\ y_2\ y_3)\begin{bmatrix}\Omega_2^2+\Omega_3^2 & -\Omega_1\Omega_2 & -\Omega_1\Omega_3\\ -\Omega_1\Omega_2 & \Omega_3^2+\Omega_1^2 & -\Omega_2\Omega_3\\ -\Omega_1\Omega_3 & -\Omega_2\Omega_3 & \Omega_1^2+\Omega_2^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{Bmatrix}dm=$$

$$=\Omega_1^2J_{11}+\Omega_2^2J_{22}+\Omega_3^2J_{33}-2\,[\Omega_1\Omega_2J_{12}+\Omega_1\Omega_3J_{13}+\Omega_2\Omega_3J_{23}]$$

односно (9.53)

$$2E_k=(\Omega)\,\mathbf{J}\,\{\Omega\};\qquad \frac{\partial E_k}{\partial\{\Omega\}}=\mathbf{J}\,\{\Omega\}=\mathrm{grad}\,2E_k,$$

где је $\mathbf{J}$ инерцијска матрица.

Из (9.50) следи да је скаларни производ вектора угаоне брзине и вектора замаха једнак двострукој кинетичкој енергији („живој сили“)

$$(\Omega)\,\{L_O\}=(\Omega)\,\mathbf{J}\,\{\Omega\}=2E_k. \tag{9.54}$$

Вектор замаха $\{L_O\}$ уопште узев мења и своју величину и свој правац, па се његова брзина, према (9.37), састоји из релативног дела и преносног дела. Према закону о замаху овај је извод једнак главном моменту система сила за ту тачку (O), те ће, према (9.50), бити:

$$\mathbf{A}\,\{\dot{L}_O\}=\{\dot{L}_O\}+[\Omega]\,\{L_O\}=\mathbf{J}\,\{\dot{\Omega}\}+[\Omega]\,\mathbf{J}\,\{\Omega\}=\{\mathfrak{M}_O\}. \tag{9.55}$$

Ове једначине представљају *Euler*-ове *динамичке једначине обртања крутог тела око непомичне тачке* (O) у односу на покретни триедар $(Oy_1y_2y_3)$. Скаларизовањем добијају се *Euler*-ове скаларне једначине

$$\begin{bmatrix}J_{11} & -J_{12} & -J_{13}\\ -J_{12} & J_{22} & -J_{23}\\ -J_{13} & -J_{23} & J_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\Omega}_1\\ \dot{\Omega}_2\\ \dot{\Omega}_3\end{Bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{11} & -J_{12} & -J_{13}\\ -J_{12} & J_{22} & -J_{23}\\ -J_{13} & -J_{23} & J_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathfrak{M}_1\\ \mathfrak{M}_2\\ \mathfrak{M}_3\end{Bmatrix}. \tag{9.56}$$

Euler-ове динамичке једначине су знатно простије када се узму за координатне осе *главне осе инерције* за непомичну тачку (O). За те осе центрифугални моменти су једнаки нули $(J_{12}=J_{23}=J_{31}=0)$, док су аксијални моменти $J_{ii}=J_i$, па ће бити:

$$\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_3 \end{matrix}\right\} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \\ \mathfrak{M} \end{matrix}\right\};$$

односно

$$\left\{\begin{matrix} J_1\, \dot{\Omega}_1 - (J_2 - J_3)\, \Omega_2\, \Omega_3 \\ J_2\, \dot{\Omega}_2 - (J_3 - J_1)\, \Omega_3\, \Omega_2 \\ J_3\, \dot{\Omega}_3 - (J_1 - J_2)\, \Omega_1\, \Omega_2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \\ \mathfrak{M}_3 \end{matrix}\right\}. \tag{9.57}$$

9.2.3. Lagrange-ове једначине друге врсте. — Материјални систем од N материјалних тачака креће се под утицајем h *холономних* (целих, коначних) *веза*, па је *број степени слободе кретања система* $n=3N-h$, те је за проучавање кретања потребно изабрати n *независних параметара—генералисаних координата* q_i, $i=1,2,\ldots,n$. Вектор положаја сваке тачке m_s, $s=1, 2, \ldots, N$, је функција генералисаних координата и времена, $\{x_s\}=\{f_s\ (q_1, q_2, \ldots, q_n, t)\}$, па је брзина те тачке $\{v_s\}=\{\dot{x}_s\}=(\partial f_s/\partial t)+(\partial f_s/\partial q_i)\ \{\dot{q}_i\}$, $i=1, 2, \ldots, n$. Вектори брзина свих тачака система могу се приказати следећом матричном релацијом

$$\left\{\begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{matrix}\right\} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{Nn} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{matrix}\right\};$$

$$\{x\}=\{f\}; \quad \{\dot{x}\}=\{\dot{f}\}+\mathrm{F}\,\{\dot{q}\}; \quad \dot{f}=\frac{\partial f}{\partial t}; \quad f_{ik}=\frac{\partial f_i}{\partial q_k}.$$

Матрице $\{\dot{x}\}$ и $\{\dot{f}\}$ јесу матрице колоне типа $(N, 1)$, матрица F је правоугаона, типа (N, n), а матрица $\{\dot{q}\}$ је матрица колона, типа $(n, 1)$.

С обзиром на предње кинетичка енергија система може се написати у облику*

$$2E_k=(\dot{x})\ \mathrm{M}\ \{\dot{x}\}=((\dot{f})+(\dot{q})\ \mathrm{F}')\ \mathrm{M}\ (\{\dot{f}\}+\mathrm{F}\{\dot{q}\}),$$

односно

$$E_k=\frac{1}{2}(\dot{q})\ \mathrm{A}\ \{\dot{q}\}+(\dot{q})\ \{B\}+\frac{1}{2}\,\mathrm{C} \tag{9.58.a}$$

---

* Динамика, члан **14.3.**

где су

$$\mathrm{A}=\mathrm{F}'\,\mathrm{M}\,\mathrm{F};\quad \{B\}=\mathrm{F}'\mathrm{M}\,\{\dot{f}\};\quad C=(\dot{f})\,\mathrm{M}\{\dot{f}\}. \tag{9.58.b}$$

Овде је M матрица маса система; она је дијагонална матрица реда N; матрица $\{B\}$ је матрица колона а C је скалар.

Из израза за брзину следе ове релације:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\,\{\dot{x}\}=\mathrm{F}\,;\qquad \frac{\partial}{\partial q}\,\{\dot{x}\}=\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{F}}{\mathrm{d}\,t}=\dot{\mathrm{F}}.$$

Пошто је двострука кинетичка енергија квадратна форма то су према (8.23) њени изводи:

$$2\,E_k=(\dot{x})\,\mathrm{M}\,\{\dot{x}\};$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\,\{\dot{q}\}}=(\dot{x})\,\mathrm{MF};\qquad\qquad \frac{\partial E_k}{\partial\,\{q\}}=(\dot{x})\,\mathrm{M}\left\{\frac{\partial\,\dot{x}}{\partial\,q}\right\}=(\dot{x})\,\mathrm{M}\dot{\mathrm{F}},$$

па је

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\mathrm{t}}\,\frac{\partial E_k}{\partial\{\dot{q}\}}=(\ddot{x})\,\mathrm{MF}+(\dot{x})\,\mathrm{M}\dot{\mathrm{F}};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial E_k}{\partial\{\dot{q}\}}-\frac{\partial E_k}{\partial\,\{q\}}=(\ddot{x})\,\mathrm{MF}=\mathrm{F}'\,\mathrm{M}\{\ddot{x}\}.$$

Ако је $\{X\}$ главни вектор система сила онда је динамичка једначина кретања система $M\,\{\ddot{x}\}=\{X\}$. Виртуални рад сила на виртуалним померањима $\{\delta x\}$ биће

$$\delta\,\mathrm{A}=(X)\,\{\delta x\}=(X)\,\mathrm{F}\,\{\delta\,q\}=(Q)\,\{\delta\,q\};$$

$$(Q)=(X)\,\mathrm{F};\qquad \{Q\}=\mathrm{F}'\,\{X\},$$

где је $\{Q\}$ вектор *генералисаних сила*. Према горњем биће $\{Q\}=\mathrm{F}'M\{\ddot{x}\}$, па се добија систем *Lagrange*-ових диференцијалних једначина за холономни систем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial E_k}{\partial\{\dot{q}\}}-\frac{\partial E_k}{\partial\{q\}}=\{Q\}. \tag{9.59}$$

Ове су једначине дефинисане само за холономне системе и њих има онолико колики је број степени слободе кретања система, то јест колики је број независних генералисаних координата (q_i). У ове једначине не улазе *реакције веза* које се морају одредити помоћу *Lagrange*-*ових једначина прве врсте* (са множиоцима веза).

Ако је $E_p=-U$ потенцијална енергија система и ако се уведе *кинетички потенцијал* (или *Lagrange*-ова *функција*) $\mathfrak{L}=E_k-E_p=E_k+U$

онда се предње једначине могу написати у облику

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\{\dot{q}\}}-\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\{q\}}=\{Q^{*}\} \tag{9.61}$$

где је $\{Q^{*}\}$ генералисана неконзервативна сила и $Q=\partial\,U/\partial\,q=-\partial\,E_p/\partial\,q$.

Када је систем *склерономан* тада везе не зависе експлицитно од времена (сталне су, склерономне), па је тада кинетичка енергија хомогена квадратна форма $2\,E_k=(\dot{q})\;\mathrm{A}\,\{\dot{q}\}$. Пошто је $\partial\,E_k/\partial\,\{\dot{q}\}=\mathrm{A}\,\{\dot{q}\}$, то *Lagrange*-ове једначине (9.59) постају:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial\,E_k}{\partial\{\dot{q}\}}-\frac{\partial\,E_k}{\partial\,\{q\}}=\mathrm{A}\,\{\ddot{q}\}+\left(\frac{\partial\,\mathrm{A}}{\partial\,q}\,\dot{q}\right)\left\{\,\dot{q}\,\right\}-\frac{1}{2}\left\{(\,\dot{q}\,)\,\frac{\partial\,\mathrm{A}}{\partial\,q}\left\{\,\dot{q}\,\right\}\right\}=\{Q\}.$$

На пример, за два степена слободе кретања било би:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{\partial\,A_{11}}{\partial\,q_1}\,\dot{q}_1+\frac{\partial\,A_{11}}{\partial\,q_2}\,\dot{q}_2 & \frac{\partial\,A_{12}}{\partial\,q_1}\,\dot{q}_1+\frac{\partial\,A_{12}}{\partial\,q_2}\,\dot{q}_2 \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial q_1}\,\dot{q}_1+\frac{\partial\,A_{21}}{\partial\,q_2}\,\dot{q}_2 & \frac{\partial\,\mathrm{A}_{22}}{\partial\,q_1}\,\dot{q}_1+\frac{\partial\,A_{22}}{\partial\,q_2}\,\dot{q}_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}-$$

$$-\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathrm{A}_{11}}{\partial\,q_1}\,\dot{q}_1^2+2\,\frac{\partial\,A_{12}}{\partial\,q_1}\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2+\frac{\partial\,A_{22}}{\partial\,q_1}\,\dot{q}_2^{\,2} \\ \frac{\partial\,A_{11}}{\partial\,q_2}\,\dot{q}_1^2+2\,\frac{\partial A_{12}}{\partial\,q_2}\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2+\frac{\partial\,A_{12}}{\partial\,q_2}\,\dot{q}_2^{\,2} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix};\quad A_{12}=A_{21}\,.$$

Ово се може уопштити када се уведу *Christoffel*-ови *симболи прве врсте*[*]

$$C^{r}_{ik}=\begin{bmatrix} i\,k \\ r \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\,A_{ri}}{\partial\,q_k}+\frac{\partial\,A_{rk}}{\partial\,q_i}-\frac{\partial\,A_{ik}}{\partial\,q_r}\right\},$$

па је систем диференцијалних једначина кретања система:

$$\mathrm{A}\{\ddot{q}\}+\begin{Bmatrix} (\dot{q})\;\;C^{1}_{ik}\left\{\,\dot{q}\,\right\} \\ (\dot{q})\;\;C^{2}_{ik}\left\{\,\dot{q}\,\right\} \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ (\dot{q})\;\;C^{\nu}_{ik}\left\{\,\dot{q}\,\right\} \end{Bmatrix}=\{Q\}. \tag{9.61}$$

На пример, за два степена слободе било би:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} C^{1}_{11}\,\dot{q}_1^2+C^{1}_{12}\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2+C^{1}_{21}\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2+C^{1}_{22}\,\dot{q}_2^2 \\ \\ C^{2}_{11}\,\dot{q}_1^2+C^{2}_{12}\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2+C^{2}_{21}\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2+C^{2}_{22}\,\dot{q}_2^2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix};$$

---

[*] Кинематика, 3. изд., страна 328.

где су

$$C_{11}^{1}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial A_{11}}{\partial q_1};\quad C_{12}^{1}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2}=C_{21}^{1};$$

$$C_{22}^{1}=\frac{\partial A_{12}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial A_{22}}{\partial q_1}.$$

9.2.4. Канонске једначине кретања. — *Генералисани импулс* (количина кретања или замах) јесте извод кинетичке енергије по генералисаној брзини односно извод *Lagrange*-ове функције по генералисаној брзини, па је:

$$\{p\}=\mathrm{M}\{\dot{x}\}=\frac{\partial E_k}{\partial\{\dot{q}\}}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\{\dot{q}\}};\quad E_k=\frac{1}{2}(p)\,\mathrm{M}^{-1}\{p\}.$$

Када се кинетичка енергија изрази у облику (9.58.*a*), пошто је матрица $\mathbf{A}$ симетрична и регуларна, $|\mathbf{A}|\neq 0$, биће:

$$\{p\}=\mathbf{A}\,\{\dot{q}\}+\{B\};\quad \{\dot{q}\}=\mathbf{A}^{-1}\,(\{p\}-\{B\});$$

$$(\dot{q})=(p)-(B))\,\mathbf{A}^{-1};\quad \mathbf{A}=\mathbf{A}';\quad (\mathbf{A}^{-1})'=\mathbf{A}^{-1}.$$

Уместо *Lagrange*-ове *функције* (кинетичког потенцијала) узима се *Hamilton*-ова *функција**

$$\mathfrak{H}=(\dot{q})\,\{p\}-\mathfrak{L}=(\dot{q})\,\{p\}-E_k+E_p=\frac{1}{2}((p)-(B))\,\mathbf{A}^{-1}\,(\{p\}-\{B\})-C+E_p.$$

Lagrange-ова *функција* је функција *Lagrange*-ових *променљивих* $(q, \dot{q})$ и времена, а *Hamilton*-ова *функција* је функција *Hamilton*-ових *променљивих* (q, p) и времена. Координате q и p су међусобно независне и представљају *фазни простор* и фазне су координате тачке која репрезентује кинематичко стање система. Диференцирањем предње *Hamilton*-ове функције по *Hamilton*-овим променљивим добија се систем диференцијалних једначина:

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\{p\}}=\mathbf{A}^{-1}\,(\{p\}-\{B\})=\{\dot{q}\};$$

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\{q\}}=-\frac{\partial E_k}{\partial\{q\}}+\frac{\partial E_p}{\partial\{q\}}=\{\mathrm{Q}\}+\{\mathrm{Q}^*\}-\{\dot{p}\}-\{\mathrm{Q}\}=\{\mathrm{Q}^*\}-\{\dot{p}\};\qquad(9.62)$$

где је $\{\mathrm{Q}\}=-\partial E\,/\partial\{q\}$ генералисана конзервативна сила, $\{Q^*\}$ генералисана неконзервативна сила, и $\mathrm{d}\,(\partial E_k/\partial\{\dot{q}\})/\mathrm{d}t=\mathrm{d}\,(\{p\})/\mathrm{d}\,t)=\{\dot{p}\}$. Ове се једначине зову *канонске једначине* или *Hamilton*-ове *једначине*. Оне су диференцијалне једначине првог реда по непознатим q и p; има их $2n$ колико и *Hamilton*-ових променљивих (q, p).

Када је конзервативни систем *склерономан* (стационаран) кинетичка енергија и *Lagrange*-ова функција не зависе експлицитно од времена, па је $\mathfrak{H}=\frac{1}{2}(p)\,\mathbf{A}^{-1}\,\{p\}+E_p=E_k+E_p=\mathbf{E}$, то јест *Hamilton*-ова функција је једнака *тоталној механичкој енергији система.*

---

* **Динамика, чл. 14.6.3.**

При познатом распореду наелектрисања (товара, количине електрицитета) и струја, стање електромагнетског поља може се описати *Maxwell-Lorentz*-овим једначинама:

$$\operatorname{rot}\{H\}-c^{-1}\{\dot{E}\}=4\pi\, c^{-1}\rho\,\{\nu\};\quad \operatorname{rot}\{E\}+c^{-1}\{\dot{H}\}=0;$$

$$\operatorname{div}\{H\}=0;\quad \operatorname{div}\{E\}=4\pi\rho\,;\quad \{\dot{E}\}=\left\{\frac{\partial E}{\partial t}\right\}$$

где су: $\{H\}$ јачина магнетског поља, $\{E\}$ јачина електричног поља, c брзина светлости ($\approx 300\,000\,\mathrm{km/sec}=3\cdot 10^{10}\mathrm{cm/sec}$); ρ густина наелектрисања (електрона), $\{\nu\}$ брзина електрона. Једначина кретања електрона у спољашњем пољу је

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\{\nu\}\right)=\{F\}=e\,\{E\}+\frac{e}{c}\,\mathrm{V}\,\{H\};\qquad \mathrm{V}=\begin{bmatrix} 0 & -\nu_3 & \nu_2 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 \end{bmatrix},$$

где су: m_0 маса мировања честице, $\beta=\nu/c$, e наелектрисање (товар, количина електрицитета, $\{F\}$ *Lorentz*-ова сила.

Lagrange-ова функција, импулс електрона и генералисана сила која дејствује на електрон су:

$$\mathfrak{L}=-m_0c^2\sqrt{1-\beta^2}-e\,\Phi+ec^{-1}(\nu)\,\{A\};\quad \{H\}=\operatorname{rot}\{A\};$$

$$\{E\}=-\nabla\Phi-c^{-1}\{\dot{A}\};\quad \dot{A}=\partial A/\partial t;$$

$$\{p\}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\{\dot{q}\}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\{\dot{q}\}+\frac{e}{c}\,\{A\};$$

$$\{Q\}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\{q\}}=-\,e\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\{q\}}\right\}+\frac{e}{c}\left\{(\nu)\left\{\frac{\partial A}{\partial\{q\}}\right\}\right\},$$

где су: Φ скаларни потенцијал а $\{A\}$ векторски потенцијал електромагнетског поља; који су повезани *Lorentz*-овим условом

$$\operatorname{div}\{A\}+c^{-1}\dot{\Phi}\,;\quad \dot{\Phi}=\partial\,\Phi/\partial\,t.$$

Hamilton-ова *функција* је облика

$$\mathfrak{H}=(\dot{q})\,\{p\}-\mathfrak{L}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+e\Phi=c\sqrt{(P)\,\{P\}+(m_0c)^2}+e\,\Phi,$$

где је

$$\{P\}=\{p\}-\frac{e}{c}\{A\}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\{\dot{q}\}\,;\quad (P)\,\{P\}=\frac{m_0^2\nu^2}{1-\beta^2}\,.$$

9.3. Примена матрица у теорији осцилација. — Матрице су нашле нарочито велику примену у теорији осцилација материјалних система, са коначним и бесконачно великим бројем степени слободе осциловања*. Први системи се зову *материјални системи* а други *еластична тела.* Помоћу матрица могу се једначине осциловања много прегледније написати, а оне се могу схватити као оператори који представљају утицаје масеног распореда материјалног система и распореда сила које дејствују на поједине масе система.

9.3.1. Мале осцилације холономног конзервативног система. — Нека материјални систем има n степени слободе осциловања и нека су q_i, $i=1, 2, \ldots, n$, n међусобно независних генералисаних координата потребних за описивање кретања система. Ако су везе којима је подвргнут материјални систем *холономне,* то јест *коначне везе стационарне* (не зависе експлицитно од времена) а *диференцијалне везе хомогене* (јер је само тада могућ *стабилан равнотежни положај система* који узимамо да је одређен вредностима q_{i0} генералисаних координата), онда је, према (9.58.a), двострука кинетичка енергија материјалног система *позитивно дефинитна квадратна форма* генералисаних брзина и може се написати у матричном облику:

$$\Phi_1 = 2E_k = (\dot{q})\,\mathbf{A}\,\{\dot{q}\}; \quad \mathbf{A} = (a_{ik}); \quad a_{ik} = a_{ki}. \tag{9.63.a}$$

Матрица **A** је такозвана *инерцијска матрица* јер карактерише масени распоред система (маса или масених момената инерције). Она је квадратна, симетрична матрица ($a_{ik}=a_{ki}$), реда n, увек је *позитивно дефинитна,* јер је кинетичка енергија материјалног система увек позитивна величина ($E_k > 0$), а једнака је нули само када су једновремене све генералисане координате једнаке нули ($q_i=0$). Ово значи да су њени основни главни минори позитивни ($\Delta_i > 0$), па тиме она испуњава *Sylvester*-ов *критеријум* за позитивно-дефинитне форме (**члан 5.5.**).

Конзервативне силе имају *функцију силе* (U) или *потенцијалну функцију* (потенцијал) или *потенцијалну енергију* $E_p = -U$, која је, када је стационарна, функција само од координата; $E_p = f(q_i)$. Како посматрамо мале осцилације система око стабилног равнотежног положаја можемо узети да је $E_p(0) = 0$. Према *Lejeune-Dirichlet*-овој теореми у овом равнотежном положају ова енергија има екстремну вредност и то *минимум,* па су и генералисане силе у томе положају једнаке нули $Q_i(0)=0$. Због даљне претпоставке да се проучавају мале осцилације и ова енергија је хомогена квадратна форма генералисаних координата q_i, па се може представити у матричном облику

$$\Phi_2 = 2E_p = (q)\,\mathbf{C}\,\{q\}; \quad \mathbf{C} = (c_{ik}); \quad c_{ik} = c_{ki}. \tag{9.63.b}$$

Матрица **C** је *квазиеластична матрица* а коефицијенти c_{ik} су *квазиеластични коефицијенти* или *коефицијенти успостављања,* јер карактеришу утицаје *сила* којима је подвргнут материјални систем. Да би и потенцијална енергија била хомогена квадратна позитивно дефинитна форма мора матрица **C** задовољавати такође *Sylvester*-ов критеријум (**чл. 5.5.**).

---

* Теорија осцилација, чл. **14.**

Применом *Lagrange*-ових једначина друге врсте за наш систем (9.59) добија се систем диференцијалних једначина у матричном облику

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}+\frac{\partial E_p}{\partial q_i}=0;$$

$$\mathbf{A}\,\{\ddot{q}\}+\mathbf{C}\,\{q\}=0;\quad \{\ddot{q}\}+\mathbf{P}\,\{q\}=0;\quad \mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C};\quad p_{ik}\neq p_{ki}; \qquad (9.63\,c)$$

где је **P** *динамичка матрица* чији елементи нису више симетрични. Пошто су матрице **A** и **C** несингуларне матрице, то увек постоји инверзна матрица $\mathbf{A}^{-1}$, па постоји и матрица **P**. Овим се проблем свео на проблем са својственим вредностима (**чл. 8.1**) са матрицом **P**, односно на општи проблем (**чл. 8.11**) где су само матрице **A** и **B** сада матрице **C** и **A**.

Пошто су енергије позитивне дефинитне форме а посматрамо мале осцилације око стабилног равнотежног положаја система, претпоставићемо да све масе m_k система врше *хармонијска осциловања* око тога положаја истим кружним фреквенцијама ω и померањима фаза α али различитим амплитудама, то јест по закону осциловања:

$$\{q\}=\{r\}\,e^{i(\omega t+\alpha)}=\{A\}\,e^{i(\omega t+\alpha)};\qquad q_k=A_k\cos(\omega t+\alpha); \qquad (9.64.a)$$

где је $\{r\}=\{A\}$ *амплитудни вектор* са координатама A_k. Диференцирајући координату q_k два пута по времену пошто је $\{\ddot{q}\}=-\omega^2\{r\}$ систем диференцијалних једначина своди се на систем алгебарских једначина са непознатим амплитудама A_k:

$$(\mathbf{C}-\lambda\,\mathbf{A})\,\{r\}=0;\qquad \lambda=\omega^2 \qquad (9.64.b)$$

па је *фреквентна једначина* осцилаторног система

$$f(\lambda)=|\,\mathbf{C}-\lambda\,\mathbf{A}\,|=|\,\mathbf{P}-\lambda\,\mathbf{I}\,|=|\,\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{P}\,|=0. \qquad (9.65\,a)$$

где је $\lambda=\omega^2$ *карактеристични број* (својствена вредност) а $\{r\}$ карактеристични (својствени, сопствени) вектори.

С обзиром на (8.30) фреквентни полиним је облика

$$f(\lambda)=|\,\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{P}\,|=|\,\lambda\,\mathbf{A}-\mathbf{C}\,|=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r S_r\,\lambda^{n-r}=$$

$$=\lambda_n-S_1\,\lambda^{n-1}+S_2\,\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^n\,S_n=0. \qquad (9.65.b)$$

Пошто су матрице **A** и **C** симетричне квадратне матрице то су корени полинома реални, а будући да су форме ових матрица позитивно дифинитне то су корени полинома *позитивни*, па ће према (8.53) бити:

$$\lambda_1<\lambda_2\cdots<\lambda_s<\cdots<\lambda_n;$$

$$\lambda_s=\frac{(q)\,\mathbf{C}\,\{q\}}{(\dot{q})\,\mathbf{A}\,\{\dot{q}\}}=\Re\,[q,\ \dot{q}]=\frac{\Phi_2}{\Phi_1}. \qquad (9.66)$$

Из (9.63) види се да карактеристични вектори нису потпуно одређени, него су одређени њихови односи за сваки карактеристични број

$$\frac{A_{s1}}{K_{n1}^{(s)}}=\frac{A_{s2}}{K_{n2}^{(s)}}=\cdots=\frac{A_{sk}}{K_{nk}^{(s)}}=\cdots=\frac{A_{sn}}{K_{nn}^{(s)}}=C_s. \tag{9.67}$$

Свакој својственој вредности λ_s одговара једно решење, па је $q_{ks}=A_{ks}\cos(\omega_s t+\alpha_s)$. Пошто су једначине кретања *линеарне*, то је и збир решења такође решење једначине, те је закон осциловања

$$q_k=\sum_s q_{ks}=\sum_{s=1}^{n} A_{sk}\cos(\omega_s t+\alpha_s);\quad \{q\}=(A_{sk}).\ \{\cos(\omega_s t+\alpha_s)\}, \tag{9.68}$$

односно

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1k}\cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\cdots A_{2k}\cdots A_{2n} \\ \vdots\ \cdots & \vdots\ \cdots\ \vdots\ \cdots\ \vdots \\ A_{k1} & A_{k2}\cdots A_{kk}\cdots A_{kn} \\ \vdots & \vdots\ \cdots\ \vdots\ \cdots\ \vdots \\ A_{n1} & A_{n2}\cdots A_{nk}\quad A_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \cos(\omega_1 t+\alpha_1) \\ \cos(\omega_2 t+\alpha_2) \\ \vdots \\ \cos(\omega_k t+\alpha_k) \\ \vdots \\ \cos(\omega_n t+\alpha_n) \end{Bmatrix}.$$

Свакој сопственој вредности λ_s одговара један карактеристични вектор па у систему има n константи $A_{sk}=C_s K_{nk}^{(s)}$ и n константи α_s које се одређују из почетних услова кретања: у почетном тренутку $t_0=0$ познат је почетни вектор $\{q_0\}$ и почетна брзина $\{\dot{q}_0\}$.

Карактеристични вектори за две различите карактеристичне вредности $\lambda_r\neq\lambda_s$ *нису ортогонални*, $(q_r)\ \{q_s\}\neq 0$. Они су ортогонални у смислу „проширене ортогоналности“ (8.54) и ортонормирају се у погледу матрице **A**, тако да је:

$$(\mathbf{C}-\lambda_s\,\mathbf{A})\,\{y_s\}=0;\quad (y_r)\,\mathbf{A}\,\{y_s\}=0;\quad (y_r)\,\mathbf{A}\,\{y_s\}=\delta_{rs}=\begin{cases}1; & r=s;\\ 0; & r\neq s.\end{cases} \tag{9.69}$$

Вектори $\{y\}$ јесу *главни вектори* система.

Када је матрица **C** позитивно дефинитна, обе су енергије позитивно дефинитне квадратне хомогене форме, па се конгруентном трансформацијом карактеристичних вектора $\{y\}$ енергије могу свести на канонске облике

$$\{q\}=\mathbf{Y}\,\{\eta\};\quad \mathbf{Y}=(\{y_1\};\ \{y_2\};\cdots\ \{y_n\});\quad \mathbf{I}=\mathbf{Y}'\,\mathbf{A}\mathbf{Y};\quad [\Lambda]=\mathbf{Y}'\,\mathbf{C}\mathbf{Y};$$

$$2E_k=(\dot{\eta})\,\mathbf{I}\,\{\dot{\eta}\};\quad 2E_p=(\eta)\,[\Lambda]\{\eta\};\quad \{\ddot{\eta}\}+[\Lambda]\,\{\eta\}=\{0\}. \tag{9.70}$$

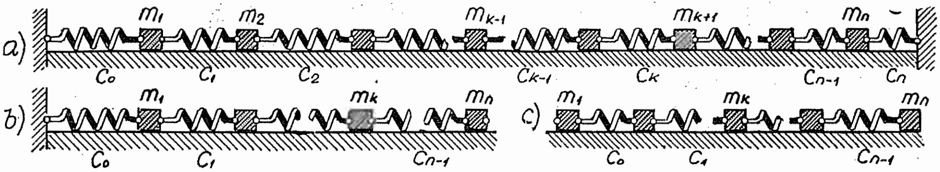
Ове нове координате зову се *нормалне (главне) координате*. Оне имају улогу да се помоћу њих систем од n-степени спрегнутих осцилација разбија на n система са по једним степеном слободе, па свака тачка система осцилује својом сопственом фреквенцијом, те су:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{Bmatrix} = 0;$$

односно

$$\begin{array}{lll} \ddot{\eta}_1+\lambda_1\eta_1=0; & \lambda_1=\omega_1^2; & \eta_1=A_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1); \\ \ddot{\eta}_2+\lambda_2\eta_2=0; & \lambda_2=\omega_2^2; & \eta_2=A_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2); \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \ddot{\eta}_n+\lambda_n\eta_n=0; & \lambda_n=\omega_n^2; & \eta_n=A_n\cos(\omega_n t+\alpha_n). \end{array} \qquad (9.71)$$

9.3.1.1. Ланчани системи. — Код ланчаног система (сл. 9.9. *a*) са n маса и $n+1$ опругом, крутости c_k, k-та маса m_k изложена је дејству



Слика 9.9. — Ланчани систем

двеју реституционих сила — сила еластичности опруга, па је

$$X_r=-c_{k-1}(x_k-x_{k-1})+c_k(x_{k+1}-x_k)$$

те су енергије

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\dot{x}_k^2; \quad E_p=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}c_{k-1}(x_k-x_{k-1})^2;$$

и матрице:

$$\mathrm{A}=\mathrm{M}=\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{C}=\begin{bmatrix} c_0+c_1 & -c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 & \cdots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & -c_2 & c_2+c_3 & \cdots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & & -c_{n-1} & c_{n-1}+c_n \end{bmatrix}. \qquad (9.72)$$

Инерцијска матрица **A** је *дијагонална*, па је овај систем *сйрегнуш силама*. Када је последња маса система слободна (полувезани ланчани систем) тада се мења само последњи елемент у матрици **C**; код ланца са слободним крајњим масама (невезани ланац) мењају се у овој матрици први и последњи елемент. У овом случају систем *дегенерише* за *један сшейен* слободе осциловања, пошто је количина кретања система константна.

Фреквентна једначина је облика *Jacobi*-јеве детерминанте:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} c_0+c_1-m_1\lambda & -c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -c_1 & c_1+c_2-m_2\lambda & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -c_2 & c_2+c_3-m_3\lambda & -c_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-2} & c_{n-2}+c_{n-1}-m_{n-1}\lambda & -c_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{n-1} & c_{n-1}+c_n-m_n\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{9.73}$$

На пример, за везани ланац са три масе (сл. 9.9. *a*), где су

$$m_1=5\,m,\quad m_2=m_3=m;\qquad c_0=5c;\quad c_1=c_3=3c;\quad c_2=2\,c,$$

имали бисмо:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 8\,c-5\,m\lambda & -3\,c & 0\\ -3\,c & 5\,c-m\lambda & -2\,c\\ 0 & -2\,c & 5\,c-m\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 8-5u & -3 & 0\\ -3 & 5-u & -2\\ 0 & -2 & 5-u \end{vmatrix}=5\,u^3-58\,u^2+176\,u-123=0;$$

$$u=\frac{m\lambda}{c}=\frac{m\,\omega^2}{c};\quad u_1=1;\qquad u_2=3{,}44;\qquad u_3=7{,}16;$$

$$\sum u_i=1+3{,}44+7{,}16=11{,}60={}^{58}/_5;$$

$$\frac{A_{s1}}{6}=\frac{A_{s2}}{2\,(8-5\,u_s)}=\frac{A_{s3}}{(8-5\,u_s)\,(5-u_s)-9}=C_s;$$

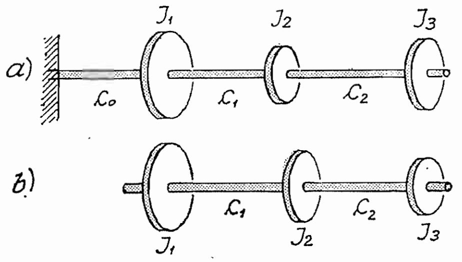
$$\frac{A_{11}}{2}=\frac{A_{12}}{2}=\frac{A_{13}}{1}=C_1;\quad \{x_1\}=\begin{Bmatrix}2\\2\\1\end{Bmatrix};$$

$$\frac{A_{21}}{3}=\frac{A_{22}}{-9,70}=\frac{A_{23}}{-13,46}=C_2\,; \qquad \frac{A_{31}}{3}=\frac{A_{32}}{-27,80}=\frac{A_{33}}{25,52}=C_3\,;$$

$$\left|\begin{aligned}&(8-5\,u_s)\,y_{s1}-3\,y_{12}=0;\\&-3\,y_{s1}+(5-u_s)\,y_{s2}-2\,y_{s3}=0;\\&-2\,y_{s2}+(5-u_s)\,y_{s3}=0;\\&5\,y_{s1}^2+y_{s2}^2+y_{s3}^2=1;\end{aligned}\right.$$

$$\{y_1\}=\begin{Bmatrix}2/5\\2/5\\1/5\end{Bmatrix}; \qquad \{y_2\}=\begin{Bmatrix}1/4\\-3/4\\\sqrt{2}/4\end{Bmatrix}; \qquad \{y_s\}=\begin{Bmatrix}12,82\\-118,84\\110\end{Bmatrix}.$$

9.3.1.2. Торзијске осцилације дискова на лаком вратилу. — Фреквентна једначина (9.73) важи и у случају торзијских осцилација дискова на лаком вратилу (слика 9.10). Овде су инерцијски коефицијенти a_{ik} *аксијални моменти инерције дискова* J за осу вратила (Az-осу), док су коефицијенти c_{ik} торзијске крутости делова вратила између појединих дискова. У случају да су крајеви вратила слободни, систем смањује један степен осциловања, пошто је *замах система констан̄тан*.



Слика 9.10. — Торзијске осцилације дискова на лаком вратилу

На пример, за конзолно вратило са три диска (слика 9.10. *a*), где су $J_1=5\,J$; $J_2=J_3=2\,J$; $c_0=c_1=2\,c$; $c_3=c$, према (9.73), имали бисмо:

$$f(\lambda)=|\,\mathbf{C}-\lambda\,\mathbf{A}\,|=\begin{vmatrix}4\,c-5\,J\,\lambda & -2\,c & 0\\-2\,c & 3\,c-2\,J\,\lambda & -c\\0 & -c & c-2\,J\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4-5\,u & -2 & 0\\-2 & 3-2\,u & -1\\0 & -1 & 1-2\,u\end{vmatrix}=10\,u^3-28\,u^2+17\,u-2=0;$$

$$u_1=\frac{4-\sqrt{6}}{10}=0,155; \qquad u_2=\frac{4+\sqrt{6}}{10}=0,645; \quad u_3=2\,; \qquad u=\frac{J\lambda}{c}=\frac{J\,\omega^2}{c}\,;$$

$$\frac{A_{s1}}{2}=\frac{A_{s2}}{4-5\,u_s}=\frac{A_{s3}}{\begin{vmatrix}4-5\,u_s & -2\\-2 & 3-2u_s\end{vmatrix}}\,;$$

$$\frac{A_{11}}{1}=\frac{A_{12}}{1,61}=\frac{A_{13}}{2,34}\,;\quad \frac{A_{21}}{1}=\frac{A_{22}}{0,39}=\frac{A_{23}}{-1,34}\,;\quad \frac{A_{31}}{1}=\frac{A_{32}}{-3}=\frac{A_{33}}{1}\,.$$

Код слободног вратила са три диска (слика 9.10. *b*), где су $J_1-2\,J$; $J_2=J_3=J$; $c_0=0$; $c_1=2\,c$; $c_2=c$, имали бисмо:

$$f\,(u=J\omega^2/c)=|\,\lambda\,\mathbf{A}-\mathbf{C}\,|=\begin{vmatrix} 2\,u-3 & 2 & 0 \\ 2 & u-3 & 1 \\ 0 & 1 & u-1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2\,u & u & u \\ 2 & u-3 & 1 \\ 0 & 1 & u-1 \end{vmatrix}=u\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & u-3 & 1 \\ 0 & 1 & u-1 \end{vmatrix}=$$

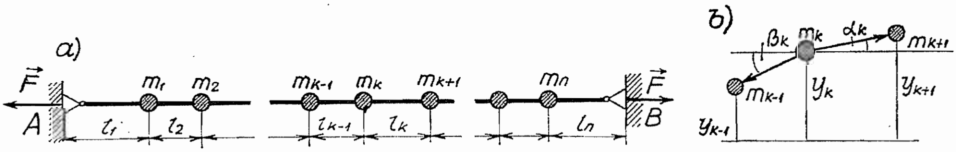
$$=u\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & u-4 & 0 \\ 0 & 1 & u-1 \end{vmatrix}=2\,u\,(u-1)\,(u-4)=0;\qquad u_1=0;\quad u_2=1;\quad u_3-4\,;$$

$$\frac{A_{s1}}{2}=\frac{A_{s2}}{2-2\,u_s}=\frac{A_{s3}}{2\begin{vmatrix} u_s-1 & 1 \\ 2 & u_s-3 \end{vmatrix}}\,;$$

$$\frac{A_{11}}{1}=\frac{A_{12}}{1}=\frac{A_{13}}{1}\,;\quad \frac{A_{21}}{1}=\frac{A_{22}}{0}=\frac{A_{23}}{-2}\,;\quad \frac{A_{31}}{1}=\frac{A_{32}}{-3}=\frac{A_{33}}{2}$$

$$(\mathrm{X})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.3.1.3. Осцилације маса на струни. — На струни *AB*, затегнутој силама *F* на крајевима, налази се више концентрисаних маса m_k (слика 9.11. *a*). Када се масе изведу из равнотежног положаја и пусте наступиће мале осцилације услед промене правца силе, односно услед вертикалних сила



Слика 9.11. — Мале осцилације маса на струни

$$Y_k=F\sin\alpha_k\approx F\,(y_{k+1}-y_k)/l_k=F\cdot\Delta\,y_k/l_k\,.$$

Ове компоненте на померањима $\Delta\,y_k$ врше деформациони рад, (сл. 9.11. *b*), па су енергије материјалног система:

$$2E_k=\sum_k m_k\dot{y}_k^2=(\dot{y})\,\mathbf{A}\,\{\dot{y}\};$$

$$\mathrm{A}_{de}=E_p=\sum\frac{1}{2}Y_k\Delta y_k=\sum_k\frac{F\,(y_{k+1}-y_k)^2}{2\,l_k};\quad 2E_p=(y)\,\mathbf{C}\,\{y\}. \tag{9.74}$$

Овим се проблем свео на ланчани систем. Инерцијски коефицијенти су масе $a_{ik}=m_k$ а коефицијенти $c_{ik}=c_k=F/l_k$ су крутости делова струне.

9.3.1.4. Хомогени линеарни системи. — Када су код ланчаног система, односно торзијског система, или код струне са масама, сви инерцијски коефицијенти једнаки $a_{ik}=a_{ii}=m$ (или J), а такође и сви коефицијенти $c_{ik}=c_{ki}=c$, онда се матрица **A** своди на јединичну матрицу **I**, а матрица **C** на *Jacobi*-јеву матрицу **J**, те добијамо за случај везаног ланчаног система, односно вратила уклештеног на крајевима или код струне (слика 9.9.*a*, слика 9.11*a*):

$$f\,(u=\omega^2\,a_{ii}/c_{ii})=(\mathbf{J}-u\,\mathbf{I})\,\{r\}=0;\quad |\mathbf{J}-u\,\mathbf{I}|=|u\,\mathbf{I}-\mathbf{J}|=0;$$

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{9.75}$$

Свака диференцијална једначина за масу m_k (односно диск J_k), изузев прве и последње, има облик

$$-A_{k-1}+(2-u)\,A_k-A_{k+1}=0, \tag{9.76}$$

где су A_k непознате амплитуде. Ова једначина је слична *Clapeyron*-овој *једначини трију момената*, па се може применити *метода једначина коначних разлика*, те је решење предње једначине

$$A_k=A\cos k\varphi+B\sin k\varphi.$$

Ова релација мора идентички да задовољи једначину (9.76), па пошто константе A и B нису једновремено једнаке нули, добијају се две релације

$$(2-u)\cos k\varphi=\cos\,(k-1)\,\varphi+\cos\,(k+1)\,\varphi=2\cos k\varphi\cos\varphi;$$

$$(2-u)\sin k\varphi=2\sin\,(k-1)\,\varphi+\sin\,(k+1)\,\varphi=2\sin k\varphi\cos\varphi$$

из којих следи да мора бити $2-u=2\cos\varphi$. Константе A и B одређујемо из *граничних услова* пошто су $A_0=A_{n+1}=0$, то јест за масе m_1 и m_n, односно за $k=1$ и $k=2$, те ће бити:

$k=1;\quad (2-u)\,\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2=0;$

$$2\cos\varphi\,(A\cos\varphi+B\sin\varphi)-(\mathrm{A}\cos 2\varphi+B\sin 2\varphi)=0;$$

$k=n;\quad -A_{n-1}+(2-u)\,A_n=0;$

$$-[A\cos\,(n-1)\,\varphi+B\sin\,(n-1)\,\varphi]+2\cos\varphi\,(A\cos n\varphi+B\sin n\varphi)=0$$

Пошто константе A и B нису једновремено једнаке нули, мора бити:

$$\left|\begin{array}{l} A\,(2\cos^2\varphi-\cos 2\varphi)+B\,(2\sin\varphi\cos\varphi-\sin 2\varphi)=0; \\ A\,[2\cos\varphi\cos n\varphi-\cos\,(n-1)\,\varphi]+B\,[2\cos\varphi\sin n\varphi-\sin\,(n-1)\varphi]=0; \end{array}\right.$$

односно

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\,(n+1)\,\varphi & \sin\,(n+1)\,\varphi \end{vmatrix}=0,$$

па су: *a*) фреквентна једначина

$$\sin\,(n+1)\,\varphi=0 \quad \varphi_s=\frac{s\pi}{n+1}; \quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ n; \tag{9.77}$$

b) својствене вредности

$$u_s=\frac{m\,\omega_s^2}{c}=2-2\cos\varphi_s=4\sin^2\frac{s\pi}{2\,(n+1)};$$

$$\omega_s=2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{s\pi}{2\,(n+1)}; \quad A=0; \quad B\neq 0, \tag{9.78}$$

c) и односи амплитуда

$$q_{ks}=A_{ks}\cos\,(\omega_s t+\alpha_s)=B_s\sin k\varphi_s\cos\,(\omega_s t+\alpha_s); \qquad \frac{A_{sk}}{\sin k\,\varphi_s}=B_s=C_s.$$

Сопствени вектори су ортогонални, јер је производ

$$A_{kr}\,A_{ks}=\sin\frac{kr\pi}{n+1}\sin\frac{ks\pi}{n+1}=0; \quad r\neq s; \quad (r_r)\,\mathrm{J}\,\{r_s\}=0. \tag{9.79}$$

На пример, за $n=5$ (слика 9.12.*a*), имаћемо

$$\varphi_s=\frac{s\pi}{6}; \quad \varphi_s=\frac{\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{2}; \quad \frac{2\pi}{3}; \quad \frac{5\pi}{6}; \quad u_s=2-2\cos\varphi_s;$$

$$u_1=2-\sqrt{3}; \qquad u_2=1; \qquad u_3=2; \qquad u_4=3; \qquad u_5=2+\sqrt{3};$$

$$\frac{A_{s1}}{\sin\varphi_s}=\frac{A_{s2}}{\sin 2\varphi_s}=\frac{A_{s3}}{\sin 3\varphi_s}=\frac{A_{s4}}{\sin 4\varphi_s}=\frac{A_{s5}}{\sin 5\varphi_s}=C_s;$$

$$\{r_1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \{r_2\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad \{r_3\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

$$\{r_4\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad \{r_5\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix};$$

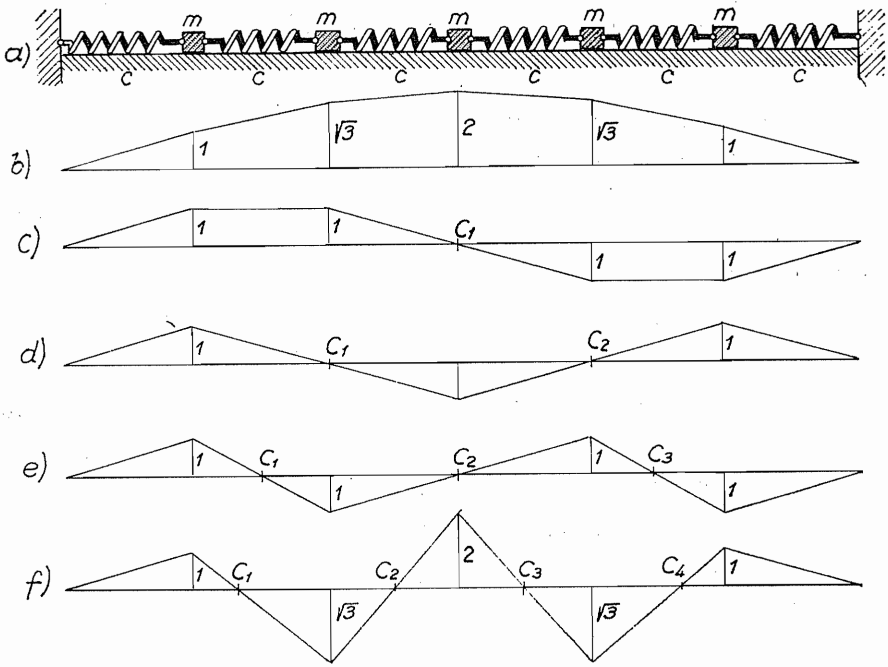
$(r_1)\ \{r_2\}=0; \quad (r_1)\ \mathrm{J}\,\{r_2\}=0.$

$(r_1)\ \{r_3\}=0;$

$(r_2)\ \{r_4\}=0;$

$(r_3)\ \{r_5\}=0;$

Главни облици осциловања приказани су на слици 9.12. *b-f*. Први хармоник ($s=1$) је без чворова, виши хармоници имају чворове и то онолико чворова кога је реда виши хармоник; други хармоник има један чвор јер је виши хармоник првог реда. Ако је h ред хармоника онда је број чворова ($h-1$).



Слика 9.12. — Хомогени линеарни систем

Код полувезаног ланца (сл. 9.9. *b*) и слободног ланца (сл. 9.9. *c*) мењају се гранични услови, па, слично предњем извођењу, добијамо фреквентне једначине за конзолни систем (k) и за слободни систем (s):

$$(k)\quad \left|\begin{aligned} &(2-u)\,A_1-A_2=0;\\ -&A_{n-1}+(1-u)\,A_n=0;\end{aligned}\right. \qquad \cos\frac{2\,n+1}{2}\,\varphi=0; \qquad \varphi_s=\frac{(2\,s-1)\,\pi}{2\,n+1}\,;$$

$$u_s=2-2\cos\varphi_s\,; \qquad \frac{A_{sk}}{\cos k\,\varphi_s}=C_s; \tag{9.80}$$

$$(s)\quad \left|\begin{aligned} &(1-u)\,A_1-A_2=0;\\ -&A_{n-1}+(1-u)\,A_n=0;\end{aligned}\right. \qquad \sin n\,\varphi=0; \qquad \varphi_s=\frac{s\,\pi}{n}$$

$$u_s=2-2\cos\varphi_s; \qquad \frac{A_{sk}}{\sin k\,\varphi_s}=C_s\,. \tag{9.81}$$

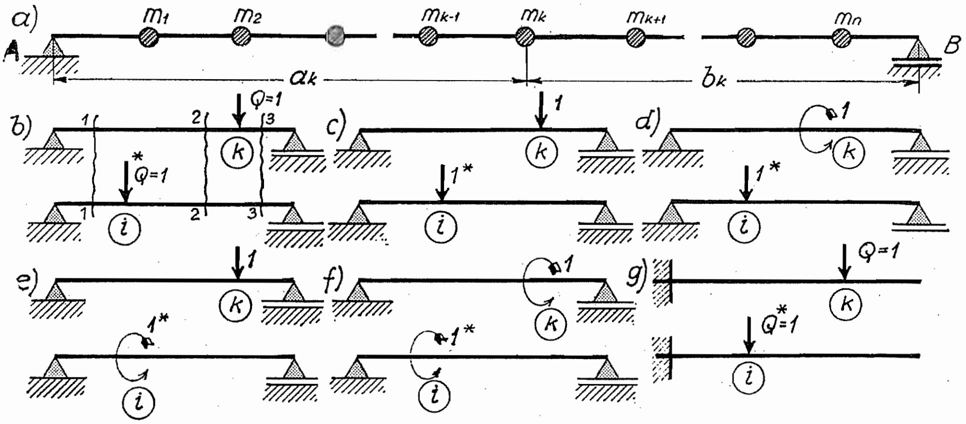
На пример:

$k)$ $n=4;$ $\varphi_s=\frac{2s-1}{9}\pi;$ $\varphi_s=\frac{\pi}{9};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{9};\ \frac{7\pi}{9};$ $u_s=0{,}122;\ 1;\ 2{,}348;\ 3{,}532;$

$s)$ $n=4;$ $\varphi_s=\frac{s\pi}{4};$ $\varphi_s=\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}$

$$u_s=2-\sqrt{2};\quad \mathbf{2};\quad 2+\sqrt{2};\quad \mathbf{R}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -2\\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

9.3.1.5. Попречне осцилације маса на лакој греди. — Када се на лакој греди, чију масу занемарујемо, налази више концентрисаних маса (m_k) онда ће услед тежина наступити *попречне* (трансверзалне, вертикалне) *осцилације* (слика 9.13. *a*). Систем има онолико степени слободе осциловања колико је насађено маса (m_k) на носачу.



Слика 9.13. — Попречне осцилације маса на лакој греди

Услед тежине F_k масе m_k греда у пресеку (i) испод масе m_i добија угиб сразмеран, према обрасцу (2.13), сили F_k и њеном утицајном коефицијенту α_{ik}. С обзиром на принцип независности дејства укупан угиб пресека (i) услед свих маса једнак је збиру угиба услед свих појединачних сила. Према *Clapeyron*-овој теореми силе на померањима врше радове, а укупни рад је једнак потенцијалној енергији деформације. Стога су енергије:

$$2E_k=(\dot{y})\,\mathbf{M}\,\{\dot{y}\};\quad y_i=\sum_k \alpha_{ik}F_k;\quad \{y\}=\mathbf{A}\,\{F\};\qquad (9.82.a)$$

$$2E_p=2\,\mathbf{A}_{df}=(y)\,\{F\}=(y)\,\mathbf{A}^{-1}\,\{y\}=(y)\,\mathbf{C}\,\{y\}.\qquad (9.82.b)$$

Овде су: $\mathbf{M}$ инерцијска матрица маса (m_k) која је дијагонална матрица; а матрица $\mathbf{A}$ је матрица утицајних коефицијената за померања α_{ik} услед сила. Она је реална, симетрична квадратна матрица. Њена реципрочна матрица $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{C}$ је квазиеластична матрица.

Lagrange-ове диференцијалне једначине друге врсте дају систем диференцијалних једначина

$$\mathbf{M}\{\ddot{y}\}+\mathbf{A}^{-1}\{y\}=0; \quad \mathbf{P}\{\ddot{y}\}+\mathbf{I}\{y\}=0, \tag{9.83}$$

где је $\mathbf{P}$ *динамичка матрица* која није симетрична, са коефицијентима $p_{ik}=\alpha_{ik}\,m_k \neq p_{ki}$. Када се решење претпостави у облику (9.64.*a*) добија се систем алгебарских једначина

$$(\mathbf{I}-\lambda\,\mathbf{P})\;\{r\}=0; \quad (u\,\mathbf{I}-\mathbf{P})\;\{r\}=0 \tag{9.84}$$

са својственим вредностима $\lambda=\omega^2$ односно $u=1/\lambda=1/\omega^2$.

Фреквентни полиноми су

$$|\,\mathbf{I}-\lambda\,\mathbf{P}\,|=0; \quad |\,u\,\mathbf{I}-\mathbf{P}\,|=\sum(-1)^r\,S_r\,u^{n-r}=0, \tag{9.85}$$

са коренима

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n; \quad u_1>u_2>u_3>\cdots>u_n, \tag{9.86.a}$$

од којих је

$$\lambda_{\min}=\lambda_1 \quad \text{и} \quad u_{\max}=u_1; \quad u_{\min}=u_n. \tag{9.86.b}$$

Проблем се, дакле, свео на одређивање утицајних коефицијената, множење матрица $\mathbf{A}$ и $\mathbf{M}$ и тражење скалара матрице $\mathbf{P}$. Генералисана јединична сила $Q_k=1$ (сила или спрег) изазива у пресеку (i) генералисану јединичну деформацију q_{ik} (померање или обртање). Ови се утицајни коефицијенти најлакше одређују методом деформационог рада: треба у пресеку (k) приложити *узрочну* јединичну генералисану силу $Q=1$ а у пресеку (i) *последичну* јединичну генералисану силу Q^* у смеру тражене деформације (сл. 9.13.*b*), па се генералисани утицајни коефицијент одређује по обрасцу

$$q_{ik}=q_{ki}=\sum\frac{1}{\mathfrak{B}}\int M\,M^*\,\mathrm{d}z, \tag{9.87}$$

где су M и M^* моменти савијања услед сила Q и Q^* у појединим пресецима где се мењају ти моменти (пресеци 1, 2 и 3). Јединична сила у пресеку (k) може да изазове у пресеку (i) или *померање* или *обртање*, и обратно, јединични спрег у пресеку (k) може да изазове у пресеку (i) или померање или обртање, тако да постоје *четири врсте утицајних коефицијената* који имају различите мерне јединице:

a) за померање од силе (сл. 9.13.*c*):

$$Q=1\,\mathrm{kp}; \quad Q^*=1\,\mathrm{kp}; \quad \alpha_{ik}=\alpha_{ki}; \quad [\mathrm{cm/kp}]; \tag{9.88.a}$$

b) за померање од спрега (сл. 9.13.*d*):

$$Q=1\,\mathrm{kp\,cm}; \quad Q^*=1\,\mathrm{kp}; \quad \delta_{ik}=\delta_{ki}; \quad [1/\mathrm{kp}]; \tag{9.88.b}$$

c) за обртање од силе (сл. 9.13.*e*):

$$Q=1\,\mathrm{kp};\quad Q^{*}=1\,\mathrm{kpcm};\quad \nu_{ik}=\nu_{ki};\quad [\mathrm{rad/kp}]; \qquad (9.88.c)$$

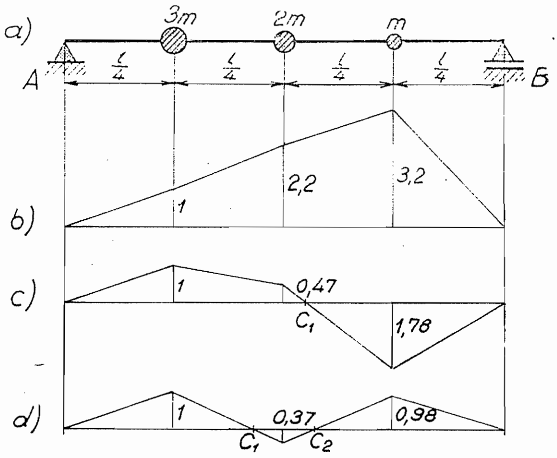
d) за обртање од спрега (сл. 9.13.*f*):

$$Q=1\,\mathrm{kpcm};\quad Q^{*}=1\,\mathrm{kp\,cm};\quad \gamma_{ik}=\gamma_{ki};\quad [\mathrm{rad/kpcm}]. \qquad (9.88.d)$$

Сваки коефицијент помножен утицајном генералисаном силом даје генералисану деформацију: угиб (cm) или нагиб тангенте еластичне линије савијене греде (rad).

С обзиром на статичку одређеност носачи могу бити статички одређени (прости) и статички неодређени (континуални) носачи.

а) Статички одређени носачи. — У овом случају треба одредити утицајне коефицијенте према (9.87) за просту греду, конзолу или греду са препустом и применити образац (9.85). Затим одредити својствене вредности и главне облике осциловања. Најнижи хармоник (за $u_{\max}$) нема чворова, сваки остали хармоник реда h има $h-1$ чворова.



Слика 9.14. — Проста греда са концентрисаним масама

На пример *проста греда AB*, распона l, оптерећена је са три масе $3m$, $2m$ и m на растојањима по $l/4$ (слика 9.14.*a*). Утицајни коефицијенти за померања су ($a=z_i$; $b=l-z_k$):

$$\alpha_{ii}=\frac{k}{3}\left(\frac{a}{l}\right)^{2}\ \left(\frac{b}{l}\right)^{2};$$

$$\alpha_{ik}=\frac{k}{6}\ \frac{a}{l}\ \frac{b}{l}\left[1-\left(\frac{b}{l}\right)^{2}-\left(\frac{a}{l}\right)^{2}\right];\quad \mathbf{A}=\frac{k}{768}\begin{pmatrix}9 & 11 & 7\\ 11 & 16 & 11\\ 7 & 11 & 9\end{pmatrix};$$

коефицијент $k=l^3/\mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}=EI_x$, је *коефицијент гипкости греде*.

Према томе биће:

$$\mathbf{M}=m\begin{pmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix};\quad \mathbf{P}=\mathbf{AM}=\frac{mk}{768}\begin{pmatrix}27 & 22 & 7\\ 33 & 32 & 11\\ 21 & 22 & 9\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}=\frac{mk}{768}\mathbf{K}; \qquad u=\frac{768}{mk\omega^2};$$

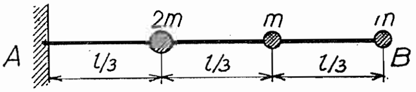
$$f(u)=|u\mathbf{I}-\mathbf{K}|=u^3-S_1u^2+S_2u-S_3=u^3-68u^2+280u-168=0;$$

$$f(1/2)<0; \qquad f(1)>0; \qquad u_1=63{,}61; \qquad u_2=3{,}67; \qquad u_3=0{,}72;$$

$$\frac{A_{11}}{1}=\frac{A_{12}}{2{,}2}=\frac{A_{13}}{3{,}2}; \quad \frac{A_{21}}{1}=\frac{A_{22}}{0{,}47}=\frac{A_{23}}{-1{,}78}; \quad \frac{A_{31}}{1}=\frac{A_{32}}{-0{,}37}=\frac{A_{33}}{0{,}98}.$$

Главни облици осциловања приказани су на слици 9.14.*b*, *c*, *d*.

На пример, за случај маса на лакој *конзоли* (слика 9.15.*a*) имали бисмо ($a \;\; z_i$; $b=l-z_k$):



Слика 9.15. — Осцилације маса на конзоли

$$\alpha_{ii}=\frac{k}{3}\left(\frac{a}{l}\right)^3;$$

$$\alpha_{ik}=\frac{k}{6}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left[3-3\left(\frac{b}{l}\right)-\frac{a}{l}\right];$$

$$\mathbf{A}=\frac{k}{162}\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\\ 5 & 16 & 28\\ 8 & 28 & 54\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{M}=m\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}; \quad \mathbf{AM}=\frac{mk}{162}\begin{pmatrix}4 & 5 & 8\\ 10 & 16 & 28\\ 16 & 28 & 54\end{pmatrix}=\frac{mk}{162}\mathbf{K};$$

$$f\left(u=\frac{162}{mk\omega^2}\right)=|u\mathbf{I}-\mathbf{K}|=u^3-74u^2+182u-52=0; \quad u_s=71{,}44; \qquad 2{,}23; \quad 0{,}33.$$

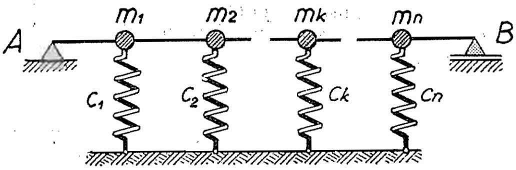
Ако су масе m_k на греди везане опругама крутости c_k за земљу (слика 9.16), имали бисмо енергије и фреквентну једначину

$$2E_k=(\dot{y})\,\mathbf{M}\,\{\dot{y}\};$$

$$2E_p=(y)\,(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{C})\,\{y\}; \tag{9.89}$$

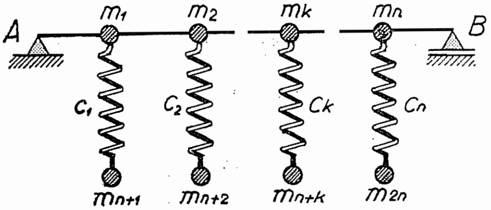
$$\mathbf{M}\,\{\ddot{y}\}+(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{C})\,\{y\}=0;$$

$$\left|\frac{1}{\lambda}(\mathbf{I}+\mathbf{AC})-\mathbf{AM}\right|=0.$$



Слика 9.16. — Масе на греди везане опругама за земљу

У случају *двоструког* материјалног система (слика 9.17) код кога су масе на греди (m_k) помоћу опруга крутости c_k



Слика 9.17. — Двоструки материјални систем

везане за масе m_{n+k}, имаћемо енергије и фреквентну једначину:

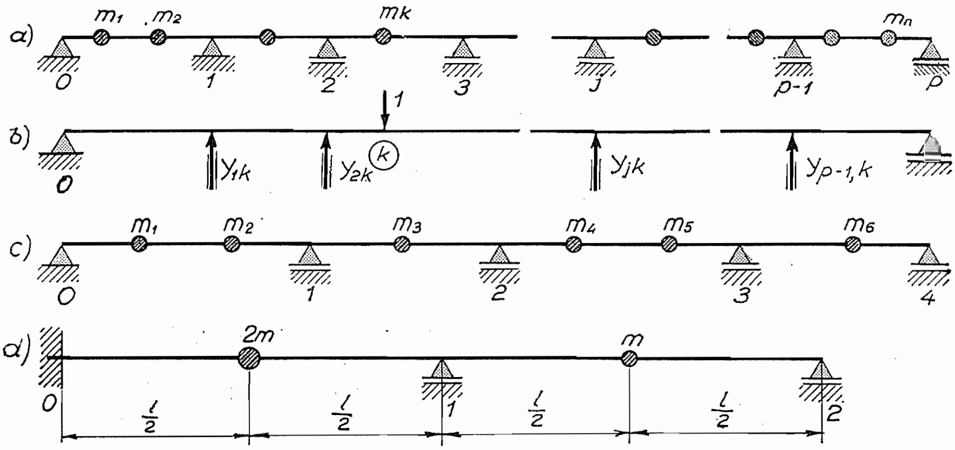
$$2E_k=(\dot{y})\,\mathrm{M}\,\{\dot{y}\}+(\dot{\eta})\,\mathrm{M}^*\,\{\dot{\eta}\};\quad 2E_p=(y)\,\mathrm{A}^{-1}\,\{y\}+\sum_k c_k\,(\eta_k-y_k)^2=$$

$$=(y)\,\mathrm{A}^{-1}\,\{y\}+(y\;\;\eta)\begin{pmatrix}\mathrm{C} & -\mathrm{C}\\ -\mathrm{C} & \mathrm{C}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}y\\ \eta\end{Bmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\mathrm{M} & \\ & \mathrm{M}^*\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}\\ \ddot{\eta}\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}\mathrm{C} & -\mathrm{C}\\ -\mathrm{C} & \mathrm{C}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}y\\ \eta\end{Bmatrix}+\mathrm{A}^{-1}\begin{Bmatrix}y\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix};\tag{9.90}$$

$$\left|\lambda\begin{pmatrix}\mathrm{AM} & \\ & \mathrm{AM}^*\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathrm{I} & \\ & \mathrm{O}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathrm{AC} & -\mathrm{AC}\\ -\mathrm{AC} & \mathrm{AC}\end{pmatrix}\right|=0.$$

b) Статички неодређени носачи. — Носач са p распона и са $p+1$ крутим ослонцем на истој висини оптерећен са n концентрисаних маса у разним распонима је $p+1-2=p-1$ *пут статички неодређен,* а има n степени слободе осциловања (слика 9.18. a). Због статичке неодређености континуалног носача морају се при одређивању утицајних коефицијената α_{ik} узети у обзир и утицаји статичких непознатих. Због тога ћемо континуални носач претворити у просту греду (ређе у конзолу) са лежиштима (0) и (p). Нека у пресеку (k) дејствује јединична



Слика 9.18. — Статички неодређени континуални носач

сила $F=1\,\mathrm{kp}$ онда ће се услед њеног дејства јавити *отпори међуослонаца* као статичке непознате (Y_{jk}) које одређујемо из услова да су угиби ослонаца једнаки нули, па ће бити за ослонац j (слика 9.18.b):

$$f_{jk}=u_{jk}-r_{j1}\,Y_{1k}-r_{j2}\,Y_{2k}-\cdots-r_{j,s}\,Y_{js}-\cdots-r_{j,p-1}\,Y_{p-1,k}=$$

$$=u_{jk}-\sum_{s=1}^{p-1} r_{js}\, Y_{sk}=u_{jk}-(r_{js})\,\{Y_{sk}\}=u_{jk}-(r_{j1},\cdots,r_{j,\,p-1})\begin{Bmatrix} Y_{1k} \\ Y_{2k} \\ \cdot \\ \vdots \\ Y_{p-1,\,k}\end{Bmatrix}.$$

Овде су: u_{jk} утицајни коефицијент на месту ослонца j (статичке непознате Y_{jk}) услед јединичне силе која дејствује у пресеку (k) греде; r_{js} јесте *реактивни утицајни коефицијент* на лежишту (j) услед статичке непознате $Y_{.k}$ на лежишту (s), где је $s=1,2,\cdots,p-1$. За све међуослонце имали бисмо матричну релацију:

$$\mathrm{U}=\mathrm{RY};\quad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1s} & \cdots & u_{1,p-1} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2s} & \cdots & u_{2,p-1} \\ \hdashline u_{p-1,1} & u_{p-1,2} & \cdots & u_{p-1,s} & \cdots & u_{p-1,p-1}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1,p-1} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2,p-1} \\ \hdashline r_{p-1,1} & r_{p-1,r} & \cdots & r_{p-1,p-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots \\ \hdashline Y_{p-1,1} & Y_{p-1,2} & \cdots\end{bmatrix}. \qquad (9.91)$$

На пример, за носач са 4 распона и шест маса (слика 9.18.c) било би:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} & u_{26} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} & u_{36}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36}\end{pmatrix}.$$

Матрица U је правоугаона са $s=p-1$ врста и n колона. Матрица **R** је квадратна матрица реда $p-1$, док је матрица Y правоугаона истог облика као и матрица U. Према томе је $(p-1;\ n)=(p-1;\ p-1)\cdot(p-1,\ n)$. Пошто је матрица R квадратна несингуларна матрица, то се из (9.91) одређују статичке непознате:

$$\mathrm{Y}=\mathrm{R}^{-1}\,\mathrm{U}. \qquad (9.92)$$

Овим је носач постао статички одређен, па су утицајни коефицијенти:

$$\overset{*}{\alpha}_{u}=\alpha_{ii}-\sum_{s} u_{is}\, Y_{si};\quad \overset{*}{\alpha}_{ik}=\alpha_{ik}-\sum_{s} u_{is}\, Y_{sk}.$$

У општем облику биће матрица утицајних коефицијената статички неодређеног носача:

$$A^{(*)}\,(\overset{*}{\alpha}_{ik})=A-U'R^{-1}U\,. \tag{9.93}$$

На пример, континуални носач (слика 9.18*d*) претворићемо у конзолни носач, па добијамо:

$$M=m\begin{pmatrix}2&\\&1\end{pmatrix};\quad A=\frac{k}{384}\begin{pmatrix}2&8\\8&54\end{pmatrix};\quad R=\frac{k}{384}\begin{pmatrix}16&40\\40&128\end{pmatrix};$$

$$|R|=7\cdot64\left(\frac{k}{384}\right)^2\;;\quad R^{-1}=\frac{384}{56k}\begin{pmatrix}16&-5\\-5&2\end{pmatrix};$$

$$U=\frac{k}{384}\begin{pmatrix}5&28\\11&81\end{pmatrix};\quad U'=\frac{k}{384}\begin{pmatrix}5&11\\28&81\end{pmatrix};\quad U'R^{-1}U=\frac{k}{56\cdot384}\begin{pmatrix}92&457\\457&2986\end{pmatrix};$$

$$A(^*)=\frac{k}{56\cdot384}\begin{pmatrix}20&-9\\-9&38\end{pmatrix};\quad A(^*)M=\frac{mk}{56\cdot384}\begin{pmatrix}40&-9\\-18&38\end{pmatrix};\quad K=\begin{pmatrix}40&-9\\-18&38\end{pmatrix};$$

$$f\left(u=\frac{56\cdot384}{m\,k\,\omega^2}\right)=|\,u\,I-K\,|=\begin{vmatrix}u-40&9\\18&u-38\end{vmatrix}=u^2-78\,u+1358=0;$$

$$u_s=39\pm\sqrt{163}\approx51{,}77;\quad 26{,}23\approx52;\quad 26;\quad \{r_1\}=\begin{Bmatrix}1\\14/9\end{Bmatrix};\quad \{r_2\}=\begin{Bmatrix}1\\-4/3\end{Bmatrix}.$$

Када је континуални носач на *крајевима уклештен* тада се за статичке непознате узимају реактивни моменти ослонаца и уклештења (сл. 9.19.*a*) јер се носач раставља на просте греде. За два оближња распона према *Clapeyron*-овој *теореми трију момената* имамо услов (слика 9.19.*b*):

$$\beta_k=\alpha_{k+1};\qquad \Upsilon_{k,\,k-1}\,\mathfrak{M}_{k-1,\,s}+2\,\Upsilon_{kk}\,\mathfrak{M}_{ks}+\Upsilon_{k,\,k+1}\,\mathfrak{M}_{k+1,\,s}=\cdots\nu^{l}_{ks}\,; \tag{9.94}$$

$$(\Upsilon_{k,\,k-1}\;\;2\,\Upsilon_{kk}\;\;\Upsilon_{k,\,k+1})\begin{Bmatrix}\mathfrak{M}_{k-1,\,s}\\\mathfrak{M}_{ks}\\\mathfrak{M}_{k+1,\,s}\end{Bmatrix}=(\nu^{l}_{ks}).$$

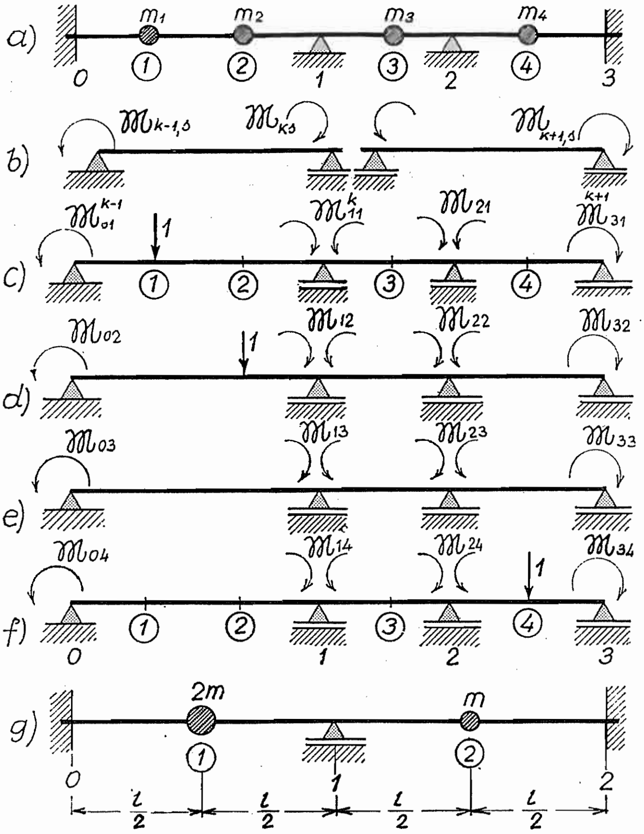
За носач оптерећен као на слици 9.19.*a* треба узети горње једначине за свако k и за сваку масу (слика 9.19. *c*, *d*, *e*, *f*) и биће:

$$\begin{bmatrix}\Upsilon_{00}&\Upsilon_{01}&0&0\\\Upsilon_{10}&2\Upsilon_{11}&\Upsilon_{12}&0\\0&\Upsilon_{21}&2\Upsilon_{22}&\Upsilon_{23}\\0&0&\Upsilon_{32}&\Upsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathfrak{M}_{01}&\mathfrak{M}_{02}&\mathfrak{M}_{03}&\mathfrak{M}_{04}\\\mathfrak{M}_{11}&\mathfrak{M}_{12}&\mathfrak{M}_{13}&\mathfrak{M}_{14}\\\mathfrak{M}_{21}&\mathfrak{M}_{22}&\mathfrak{M}_{23}&\mathfrak{M}_{24}\\\mathfrak{M}_{31}&\mathfrak{M}_{32}&\mathfrak{M}_{33}&\mathfrak{M}_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nu_{01}&\nu_{02}&0&0\\\nu_{11}&\nu_{12}&\nu_{13}&0\\0&0&\nu_{23}&\nu_{24}\\0&0&0&\nu_{34}\end{bmatrix}.$$

Сасвим уопште биће за цео систем

$$\Gamma\,\mathfrak{M}=N;\qquad \mathfrak{M}=\Gamma^{-1}\,N. \tag{9.95}$$

пошто је матрица Г несингуларна. Она представља матрицу утицајних коефицијената за нагибе над ослонцима услед реактивних спрегова, док је матрица N матрица утицајних коефицијената за нагибе услед сила у сваком распону.



Слика 9.19. — Обострано континуални носач

Реактивни спрегови и јединичне силе изазивају угибе маса у сваком оптерећеном пресеку, па ће за тај случај бити:

$$A^{(*)} = A - \mathfrak{D}\mathfrak{M} = A - \mathfrak{D}\,\Gamma^{-1} N; \quad P = A^{(*)} M. \tag{9.96}$$

У предњем примеру је:

$$\begin{Vmatrix} \overset{*}{\alpha}_{11} & \overset{*}{\alpha}_{12} & \overset{*}{\alpha}_{13} & \overset{*}{\alpha}_{14} \\ \overset{*}{\alpha}_{21} & \overset{*}{\alpha}_{22} & \overset{*}{\alpha}_{23} & \overset{*}{\alpha}_{24} \\ \overset{*}{\alpha}_{31} & \overset{*}{\alpha}_{32} & \overset{*}{\alpha}_{33} & \overset{*}{\alpha}_{34} \\ \overset{*}{\alpha}_{41} & \overset{*}{\alpha}_{42} & \overset{*}{\alpha}_{43} & \overset{*}{\alpha}_{44} \end{Vmatrix} = \left\Vert \begin{array}{cc|c|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \cline{3-3} 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{array} \right\Vert -$$

$$-\left(\begin{array}{cccc} \delta_{10} & \multicolumn{1}{c|}{\delta_{11}} & 0 & 0 \\ \delta_{20} & \multicolumn{1}{c|}{\delta_{21}} & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{0} & \delta_{31} & \multicolumn{1}{c|}{\delta_{32}} & 0 \\ \cline{2-3} 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} & \delta_{42} & \delta_{43} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} \mathfrak{M}_{01} & \mathfrak{M}_{02} & \mathfrak{M}_{03} & \mathfrak{M}_{04} \\ \mathfrak{M}_{11} & \mathfrak{M}_{12} & \mathfrak{M}_{13} & \mathfrak{M}_{14} \\ \mathfrak{M}_{21} & \mathfrak{M}_{22} & \mathfrak{M}_{23} & \mathfrak{M}_{24} \\ \mathfrak{M}_{31} & \mathfrak{M}_{32} & \mathfrak{M}_{33} & \mathfrak{M}_{34} \end{array}\right).$$

Из овога се види да статичке непознате *не треба рачунати.* Матрица $\mathbf{A}^{(*)}$ је квадратна реда n колико има маса система. Матрице $\mathbf{A}$ узимају се за сваки распон а такође и матрица $\mathfrak{D}$. Матрица $\mathbf{\Gamma}$ је квадратна реда $p-1$ који одговара степену статичке неодређености. Даљи поступак се своди на статички одређени носач и поступа се према обрасцу (9.85), односно (9.86).

За случај приказан на слици 9.19. g биће:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c|c} \alpha_{11} & \\ \hline & \alpha_{22} \end{array}\right)=\frac{k}{48}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}; \quad k=\frac{l^3}{\mathfrak{B}}; \quad \mathbf{N}=\begin{pmatrix} \nu_{01} & 0 \\ \nu_{11} & \nu_{12} \\ 0 & \nu_{22} \end{pmatrix}=\frac{b}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b=\frac{l^2}{\mathfrak{B}}; \quad \mathfrak{D}=\begin{pmatrix} \delta_{10} & \delta_{11} & 0 \\ 0 & \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}=\frac{b}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{\Gamma}=\begin{pmatrix} \Upsilon_{00} & \Upsilon_{01} & 0 \\ \Upsilon_{10} & 2\Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} \\ 0 & \Upsilon_{21} & \Upsilon_{22} \end{pmatrix}=\frac{a}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{\Gamma}|=\frac{a^3}{18};$$

$$\mathbf{\Gamma}^{-1}=\frac{1}{2a}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}; \quad a=\frac{l}{\mathfrak{B}}; \quad \mathbf{A}^{(*)}=\begin{pmatrix} \overset{*}{\alpha}_{11} & \overset{*}{\alpha}_{12} \\ \overset{*}{\alpha}_{21} & \overset{*}{\alpha}_{22} \end{pmatrix}=\frac{k}{48}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}-$$

$$-\frac{b^2}{32\cdot 16\cdot a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -7 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{k}{6\cdot 16^2}\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}=m\begin{pmatrix} 2 & \\ & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{A}^{(*)}\,\mathbf{M}=\frac{km}{6\cdot 16^2}\begin{pmatrix} 22 & -3 \\ -6 & 8 \end{pmatrix};$$

$$|\,u\,\mathbf{I}-\mathbf{K}\,|=\begin{vmatrix} u-22 & 3 \\ 6 & u-8 \end{vmatrix}=u^2-30\,u+158=0;$$

$$u=\frac{6\cdot 16^2}{km\,\omega^2}\ ;\quad u=15\pm\sqrt{67};\quad u_1=23{,}19\approx 23;\quad u_2=6{,}81\approx 7;$$

$$\{r_1\}=\begin{Bmatrix}1\\5\end{Bmatrix};\quad \{r_2\}=\begin{Bmatrix}1\\-1/3\end{Bmatrix}.$$

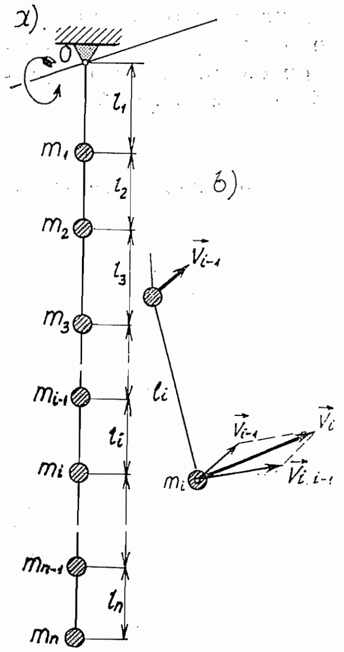
9.3.1.6. Сложена клатна. — Систем математичких клатна, маса m_i и дужина l_i, представља систем везан *динамичким везама*, односно *убрзањима* (сл. 9.20. *a*). Издвојимо из система неко i-то клатно, онда га можемо сматрати штапом које врши равно кретање, па је брзина i-те масе (слика 9.20. *b*):

$$\vec{\nu}_i=\vec{\nu}_{i-1}+\vec{\nu}_{i,i-1};\qquad \nu_i\approx\nu_{i-1}+\nu_{i,i-1};$$

где је $\vec{\nu}_{i-1}$ *преносна брзина*,

$$\nu_i=l_{i-1}\,\dot{\varphi}_{i-1}+l_i\,\dot{\varphi}_i,$$

брзина кретања масе m_{i-1}, а $\vec{\nu}_{i,i-1}=\nu_{ri}$ *релативна брзина* масе m_i у односу на претходну масу m_{i-1}. Због малих осцилација овај векторски збир можемо заменити *скаларним збиром.* Маса m_{i-1} подићи ће се од равнотежног положаја за висину $h_{i-1}\approx l_{i-1}\,\varphi_{i-1}^2/2$, пошто је $h_{i-1}=$ $=l_{i-1}\,(1-\cos\varphi_{i-1})=2\,l_{i-1}\sin^2(\varphi_{i-1}/2)^2$. Маса m_i подићи ће се за $h_i=h_{i-1}+h_{i,i-1}=$ $=(l_{i-1}\,\varphi_{i-1}^2+l_i\,\varphi_i^2)/2$, где је $h_{i,i-1}$ релативно подизање. Поступно добили бисмо изразе за брзину и подизање за сваку материјалну тачку-клатно, те је



Слика 9.20. — Сложено математичко клатно

$$\nu_i=(l_1\,\dot{\varphi}_1+l_2\,\dot{\varphi}_2+\cdots+l_i\,\dot{\varphi}_i);\qquad h_i=(l_1\,\varphi_1^2+l_2\,\varphi_2^2+\cdots+l_i\,\varphi_i^2)$$

па су енергије и одговарајуће матрице:

$$2\,E_k=(\dot{\varphi})\,\mathbf{A}\,\{\dot{\varphi}\};\quad 2E_p=(\varphi)\,\mathbf{C}\,\{\varphi\};\tag{9.97. a}$$

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} l_1^2\sum\limits_1^n m_k & l_1\,l_2\sum\limits_2^n\ m_k\ldots l_1\,l_k\ \sum\limits_k^n m_k\ldots l_1\,l_n\,m_n\\ l_2\,l_1\sum\limits_2^n m_k & l_2^2\ \sum\limits_2^n\ m_k\ldots l_2\,l_k\ \sum\limits_k^n m_k\ldots l_2\,l_n\,m_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ l_n\,l_1\,m_n & l_n\,l_2\ \ m_n\ \ldots\ l_n\,l_k\ m_n\ \ \ \ldots\,l_n^2\,m_n\end{vmatrix};\tag{9.97. b}$$

$$\mathbf{C}=g\begin{pmatrix} l_1\sum_1^n m_k & & & & \\ & l_2\sum_2^n m_k & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & l_n m_n \end{pmatrix}. \qquad (9.97.c)$$

Овим се проблем свео на ранији случај проблема са паром матрица.

На пример: ако су $l_i=l;\ 2\,l;\ l;\ m_i=2\,m;\ m;\ m;$ имали бисмо:

$$\mathbf{A}=ml^2\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C}=mgl\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

$$|\,mgl\,\mathbf{D}-ml^2\omega^2\,\mathbf{K}\,|=|\,u\,\mathbf{I}-\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{D}\,|=0; \qquad u=\frac{l\omega^2}{g};$$

$$\mathbf{K}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 16 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$f\,(u)=2\,u^3-11\,u^2+16\,u-4=0; \quad u_s=0{,}31;\ 2;\ 3{,}19;$

$r_s\,(1;\ 1{,}69;\ 2{,}02);\ (1;\ 0;\ -2);\ (1;\ -1{,}19;\ 2{,}06).$

У случају *хомогеног сложеног клатна*, када су све масе једнаке $m_i=m$ и све дужине једнаке $l_i=l$, проблем се упроштава. Ако се друга врста *одузме* од прве, трећа од друге, и тако редом до последње, а затим друга колона *одузме* од прве, затим трећа од друге и тако редом до последње, фреквентна детерминанта своди се на *Jacobi*-јеву детерминанту:

$$\mathbf{A}=ml^2\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C}=mgl\begin{pmatrix} n & & & & & \\ & n-1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix};$$

$$|\,u\,\mathbf{K}-\mathbf{D}\,|=0; \qquad u=\frac{l\,\omega^2}{g}; \qquad (9.98)$$

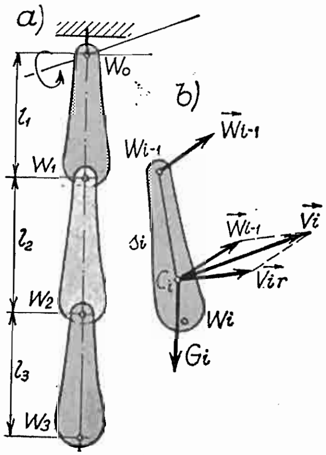
$$f(u)=\begin{vmatrix} u-(2n-1) & n-1 & & & \\ n-1 & u-(2n-3) & & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & 2 & u-3 & 1 \\ & & 0 & 1 & u-1 \end{vmatrix}=0$$

а фреквентни полином је *Laguerre*-ов *полином*

$$f(u)=|u\,\mathbf{K}-\mathbf{D}|=|u\,\mathbf{I}-\mathbf{J}|=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{n!}{(n-r)!}u^{n-r}=0. \tag{9.99}$$

На пример:

$$f_0=1;\quad f_1=u-1=0;\quad f_2=u^2-4\,u+2=0;\quad f_3=u^3-9\,u^2+18\,u-6=0.$$



Слика 9.21. — Сложено физичко клатно

Нека су M_i масе физичких клатна, l_i дужине између тачака вешања (W_i) и s_i растојања тежишта C_i од тачака вешања, (слика 9.21. *a*), онда је брзина тежишта сваког клатна једнака векторском збиру преносне брзине тачке вешања ($\vec{w}_{i-1}$) и релативне брзине у односу на ту тачку, јер клатно врши равно кретање. Подизање тежишта (C_i) једнако је збиру подизања тачке вешања (W_{i-1}) и подизања тежишта. За мале осцилације биће

$$\vec{v}_i=\vec{w}_{i-1}+\vec{v}_{i,r};\quad v_i\approx w_{i-1}+v_{ir}=s_i\,\dot{\varphi}_i+$$

$$+\sum_{k=1}^{i-1}l_k\dot{\varphi}_k;\quad h_i\approx\frac{1}{2}\,s_i\,\varphi_i^2+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{2}\,l_k\,\varphi_k^2.$$

Кинетичка енергија састоји се из енергије транслације и енергије обртања, те ће бити:

$$2\,E_k=\sum_{i=1}^{n}\left\{M_i\left[s_i\dot{\varphi}_i+\sum_{k=1}^{i-1}l_k\,\dot{\varphi}_k\right]^2+J_i\,\dot{\varphi}_i^2\right\};$$

$$2\,E_p=g\sum_{i=1}^{n}\left\{M_i\left[s_i\,\varphi_i^2+\sum_{k=1}^{i-1}l_k\,\varphi_k^2\right]\right\}; \tag{9.100}$$

$$2\,E_k=(\dot{\varphi})\,\mathbf{A}\,\{\dot{\varphi}\};\quad 2\,E_p=(\varphi)\,\mathbf{C}\,\{\varphi\};$$

где су матрице:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cccc} J_1+M_1 s_1^2+l_1^2 \sum\limits_2^n M_k & l_1 s_2 M_2+l_1 l_2 \sum\limits_3^n M_k & \dots & l_1 s_n M_n \\ a_{12} & J_2+M_2 s_2^2+l_2^2 \sum\limits_3^n M_k & \dots & l_2 s_n M_n \\ \hdashline a_{1n} & a_{2n} & & J_n+M_n s_n^2 \end{array}\right); \tag{9.101,}$$

$$\mathbf{C}=g\begin{pmatrix} M_1 s_1+l_1 \sum\limits_2^n M_k & & \\ & M_2 s_2+l_2 \sum\limits_3^n M_k & \\ & & M_n s_n \end{pmatrix}.$$

Овим се проблем свео на ранији случај.

У случају хомогеног сложеног клатна (када су све масе једнаке $M_i=M$, сопствени моменти инерције J_i и дужине између тачака вешања) фреквентна детерминанта може се свести на *Jacobi*-јеву детерминанту.

На пример, за сложено физичко клатно облика *штапова* имали бисмо:

$$J_i=\frac{1}{12}Ml^2;\quad s_i=\frac{l}{2};\quad J_i+M_i s_i^2=\frac{1}{3}Ml^2;$$

$$\mathbf{A}=\frac{Ml^2}{6}\left(\begin{array}{cccccc} 6n-4 & 3(2n-3) & 3(2n-5) \dots & 15 & 9 & 3 \\ 3(2n-3) & 6n-10 & 3(2n-5) \dots & 15 & 9 & 3 \\ \hdashline 15 & 15 & 15 \dots & 14 & 9 & 3 \\ 9 & 9 & 9 \dots & 9 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \dots & 3 & 3 & 2 \end{array}\right);$$

$$\mathbf{C}=\frac{Mgl}{2}\begin{pmatrix} 2n-1 & & & & & & & \\ & 2n-3 & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & 7 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 3 \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix};$$

$$f\left(u=\frac{\omega^2 l}{3\,\mathrm{g}}\right)=|\,\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{A}\,|=|\,u\,\mathbf{I}-\mathbf{J}\,|=$$

$$=\left|\begin{array}{ccccc} 4\,[u-(n-1)] & u+(2\,n-3) & & & \\ u+(2\,n-3) & 4\,[u-(n-2)] & u+(2\,n-5) & & \\ & u+(2\,n-5) & 4\,[u-(n-3)] & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & u+3 & 4\,(u-1) & u+1 \\ & & & u+1 & 2\,u-1 \end{array}\right|=0;$$

$$f_0=1;\quad f_1=2\,u-1=0;\quad f_2=4\,(u-1)\,(2\,u-1)-(u+1)^2=7\,u^2-14\,u+3=0;$$

$$f_3\,(u)=26\,u^3-123\,u^2+112\,u-15=0;\quad u_s=0{,}151;\quad 1;\quad 3{,}312.$$

9.3.2. Мале осцилације неконзервативног система.

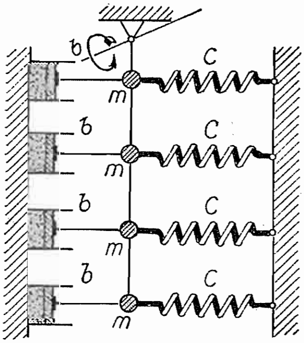
— Претпоставља се да су неконзервативне отпорне силе линеарне функције генералисаних брзина и да постоји *функција расипања*, тако да су енергије и та функција:

$$2\,E_k=(\dot{q})\ \mathbf{A}\,\{\dot{q}\};\qquad 2\,\Phi=(\dot{q})\,\mathbf{B}\{\dot{q}\};\quad 2E_p=(q)\ \mathbf{C}\,\{q\}. \qquad (9.102)$$

Матрица **B** је *дисипативна матрица*; она је квадратна симетрична матрица.

Lagrange-ове једначине друге врсте дају систем линеарних диференцијалних једначина другог реда са константним коефицијентима

$$\mathbf{A}\,\{\ddot{q}\}+\mathbf{B}\,\{\dot{q}\}+\mathbf{C}\,\{q\}=0. \qquad (9.103)$$



Слика 9.22. — Сложено клатно са опругама и пригушницама

Када се решење претпостави у облику $\{q\}=\{r\}\ (\exp\lambda\,t)$, где је λ *својствена вредност*, добија се систем хомогених линеарних једначина и карактеристични полином

$$(\lambda^2\,\mathbf{A}+\lambda\,\mathbf{B}+\mathbf{C})\,\{r\}=0;$$

$$f\,(\lambda)=|\,\lambda^2\,\mathbf{A}+\lambda\,\mathbf{B}+\mathbf{C}\,|=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{2\,n}a_\nu\cdot\lambda^{2\,n-\nu}=0. \qquad (9.104)$$

Он је полином $2\,n$-ог степена по својственој вредности λ, а корени му могу бити реални, имагинарни и коњуговано-комплексни.

Систем је *стабилан*, ако су корени карактеристичног полинома негативни, реални или коњуговано-комплексни са негативним реалним делом. Такав полином је *Hurwitz*-ов *полином*. Он мора да задовољи ове услове: 1^0 *да су сви коефицијенти полинома позитивни*, и 2^0 *да су Hurwitz-ове детерминанте позитивне*.

На пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} 3\lambda^2+\lambda+2 & 2\lambda^2+\lambda+1 \\ 2\lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^2+2\lambda+1 \end{vmatrix}=0;$$

$$f(\lambda)=2\lambda^4+4\lambda^3+4\lambda^2+3\lambda+1=0; \quad A_i>0;$$

$$H_3=\left|\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 3 \end{array}\right|=14>0; \quad H_2=16-6=10>0 \quad H_1=4>0;$$

полином је *стабилан*; корени су $\lambda_s=-0{,}650; \quad -1; \quad -0{,}175 \pm 0{,}858\, i.$

За случај хомогеног система математичких клатна са опругама и пригушницама (слика 9.22) имали бисмо:

$$\mathbf{A}=ml^2\,\mathbf{K}; \quad \mathbf{B}=bl^2\,\mathbf{K}; \quad \mathbf{C}=\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2=mgl\,\mathbf{D}+cl^2\,\mathbf{K};$$
$$2\,\delta=b/m; \quad \omega^2=c/m; \quad \Omega^2=g/l;$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix};$$

$$|\,u\mathbf{K}+\mathbf{D}\,|=\begin{vmatrix} 4u+4 & 3u & 2u & u \\ 3u & 3u+3 & 2u & u \\ 2u & 2u & 2u+2 & u \\ u & u & u & u+1 \end{vmatrix}=0; \quad u=\frac{\lambda^2+2\,\delta\lambda+\omega^2}{\Omega^2}.$$

Поступајућу као и у случају хомогеног сложеног клатна — одузимањем ниже врсте од више и десне колоне од претходне леве, карактеристични полином своди се на *Jacobi*-јеву детерминанту:

$$|\,u\,\mathbf{K}+\mathbf{J}\,|=|\,u\,\mathbf{I}+\mathbf{J}\,|=\begin{vmatrix} u+7 & -3 & & \\ -3 & u+5 & -2 & \\ & -2 & u+3 & -1 \\ & & -1 & u+1 \end{vmatrix}=0. \tag{9.105}$$

Карактеристични полиноми су *Laguerre*-ови полиноми за променљиву $-u$:

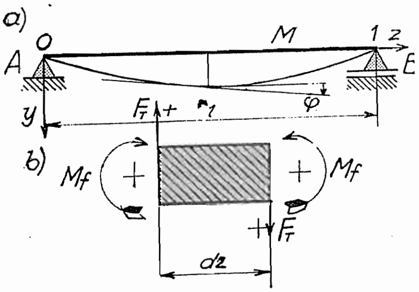
$$f(u)=|\,u\,\mathbf{I}+\mathbf{J}\,|=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{n!}{(n-\nu)!}\binom{n}{\nu}u^{n-\nu}=0. \tag{9.106}$$

На пример:

$f_0=1; \quad f_1=u+1=0; \quad f_2=u^2+4u+2=0; \quad f_3=u^3+9u^2+18u+6=0; \ \ldots;.$

9.3.3. Трансверзалне осцилације хомогених греда. — Из графостатике је познато да постоје следеће везе између статичких елемената: специфичног оптерећења, трансверзалне силе и момента савијања $\mathfrak{B}\,y^{\mathrm{IV}}=q\,(z)$; $\mathfrak{B}\,y'''=-F_T$; $\mathfrak{B}\,y''=-M_f$, где је $\mathfrak{B}=EI_x$ *савојна крутост греде*. Занемарујући утицај обртања и инерције, једначина трансверзалних осцилација изводи се само за транслаторно кретање (слика 9.23. *a*), па је

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}=0, \qquad (9.107)$$



Слика 9.23. — Трансверзалне осцилације хомогене греде

где је $c=\sqrt{\mathfrak{B}/\rho A}=\sqrt{\mathfrak{B}\,l/M}$ *брзина простирања таласа*. Решење редње једначине потражићемо у облику производа двеју функција

$$y=Z\,(z)\cdot T\,(t),$$

од којих прва задовољава *граничне услове (нормална функција)* а друга почетне кинематичке услове. Тада се парцијална једначина (9.107) своди на две обичне диференцијалне једначине

$$T''+\omega^2\,T=0;\;\; Z^{\mathrm{IV}}-k^4\,Z=0;\;\; \omega^2=k^4\,c^2;\;\; \omega=k^2\sqrt{\mathfrak{B}\,lg/G};\;\; c^2=\mathfrak{B}\,lg/G; \qquad (9.108)$$

са решењима

$$\begin{aligned} T&=C_1\cos\omega\,t+C_2\sin\omega\,t;\\ Z&=A\,\mathrm{S}\,(kz)+B\,\mathrm{T}\,(kz)+C\,\mathrm{U}\,(kz)+D\,\mathrm{V}\,(kz)\end{aligned} \qquad (9.109)$$

где су уведене *Cauchy*-јеве функције

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\,(kz)&=(\mathrm{Ch}\,kz+\cos\,kz)/2;\\ \mathrm{T}\,(kz)&=(\mathrm{Sh}\,kz+\sin\,kz)/2;\\ \mathrm{U}\,(kz)&=(\mathrm{Ch}\,kz-\cos\,kz)/2;\\ \mathrm{V}\,(kz)&=(\mathrm{Sh}\,kz-\sin\,kz)/2;\end{aligned}$$

чије су особине: (9.110)

Z	S	T	U	V	$=y;$	$z=0;$
Z'	$k\;\mathrm{V}$	$k\;\mathrm{S}$	$k\;\mathrm{T}$	$k\;\mathrm{U}$	$=\varphi;$	$\mathrm{S}_0=1;$
Z''	$k^2\mathrm{U}$	$k^2\mathrm{V}$	$k^2\,\mathrm{S}$	$k^2\,\mathrm{T}$	$=M_f/\mathfrak{B};$	$\mathrm{T}_0=\mathrm{U}_0=$
Z'''	$k^3\,\mathrm{T}$	$k^3\,\mathrm{U}$	$k^3\mathrm{V}$	$k^3\,\mathrm{S}$	$=F_T/\mathfrak{B};$	$=\mathrm{V}_0=0.$

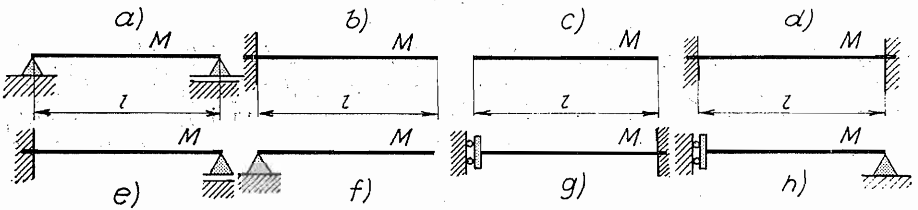
Гранични услови се састоје у одређеним вредностима статичких величина на почетку и на крају распона греде (слика 9.23. *b*): угиба, нагиба тангенте еластичне линије, трансверзалне силе и нападног момента (момента савијања). Ове величине свешћемо на дужинске па ћемо одредити вектор граничних услова $\{g\}$. Између ових вектора на почетку $\{g_0\}$ и крају $\{g_1\}$ распона постоји линеарна веза одређена, према (9.110), *Rayleigh*-овом *матрицом* дотичног распона (Feldmatrix; feeldmatrix):

$$Z = Z_0\,\mathbf{S}\,(kz) + \frac{1}{k}\,Z_0'\,\mathbf{T}\,(kz) + \frac{1}{k^2}\,Z_0''\,\mathbf{U}\,(kz) + \frac{1}{k^3}\,Z_0'''\,\mathbf{V}\,(kz); \qquad (9.111)$$

$$\{g_1\} = \mathbf{R}\,\{g_0\}; \quad \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_1'\,l \\ Z_1''\,l^2 \\ Z_1'''\,l^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{T}_1/\alpha & \mathbf{U}_1/\alpha^2 & \mathbf{V}_1/\alpha^3 \\ \alpha\;\mathbf{V}_1 & \mathbf{S}_1 & \mathbf{T}_1/\alpha & \mathbf{U}_1/\alpha^2 \\ \alpha^2\,\mathbf{U}_1 & \alpha\;\mathbf{V}_1 & \mathbf{S}_1 & \mathbf{T}_1/\alpha \\ \alpha^3\,\mathbf{T}_1 & \alpha^2\,\mathbf{U}_1 & \alpha\,\mathbf{V}_1 & \mathbf{S}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_0 \\ Z_0'\,l \\ Z_0''\,l^2 \\ Z_0'''\,l^3 \end{Bmatrix}; \quad \alpha = kl.$$

Елементи ове матрице су симетрични у односу на споредну дијагоналу.

За осам карактеристичних случајева ослањања греде (слика 9.24) услови и фреквентне једначине дати су у доњој таблици:



Слика 9.24. — Карактеристични случајеви ослањања греда

Слика 9.24	Гранични услови		Фреквентна једначина $(\alpha=kl)$	
	$z=0$	$z=l$		
a)	$Z=Z''=0$	$Z=Z''=0$	$\mathrm{T}_1^2-\mathrm{V}_1^2=0$	$\mathrm{Sh}\,\alpha\cdot\sin\alpha=0;\ \sin\alpha=0;\ \alpha=n\pi$
b)	$Z=Z'=0$	$Z''=Z'''=0$	$\mathrm{S}_1^2-\mathrm{T}_1\,\mathrm{V}_1=0$	$1+\mathrm{Ch}\,\alpha\,\cos\alpha=0$
c)	$Z''=Z'''=0$	$Z''=Z'''=0$	$\mathrm{U}_1^2-\mathrm{T}_1\,\mathrm{V}_1=0$	$1-\mathrm{Ch}\,\alpha\,\cos\alpha=0$
d)	$Z=Z'=0$	$Z=Z'=0$	$\mathrm{U}_1^2-\mathrm{T}_1\,\mathrm{V}_1=0$	$1-\mathrm{Ch}\,\alpha\,\cos\alpha=0$
e)	$Z=Z'=0$	$Z=Z''=0$	$\mathrm{T}_1\,\mathrm{U}_1-\mathrm{S}_1\,\mathrm{V}_1=0$	$\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{Th}\,\alpha$
f)	$Z=Z''=0$	$Z''=Z'''=0$	$\mathrm{V}_1\,\mathrm{S}_1-\mathrm{U}_1\,\mathrm{T}_1=0$	$\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{Th}\,\alpha$
g)	$Z'=Z'''=0$	$Z=Z'=0$	$\mathrm{S}_1\,\mathrm{T}_1-\mathrm{U}_1\,\mathrm{V}_1=0$	$\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{Th}\,\alpha-0$
h)	$Z'=Z'''=0$	$Z=Z''=0$	$\mathrm{S}_1^2-\mathrm{U}_1^2=0$	$\mathrm{Ch}\,\alpha\quad\cos\alpha=0;\quad\cos\alpha=0.$

(9.112)

У случају да је код просте греде десни ослонац еластичан са опругом крутости c_1 (слика 9.25 *a*), мења се на томе крају гранични услов и он постаје

$$Z_1 = Y/c_1 = (-F_T)/c_1 = \mathfrak{B}\,Z'''/c_1,$$

па је фреквентна једначина

$$\mathrm{V}_1^2-\mathrm{T}_1^2=s\,(\mathrm{S}_1\,\mathrm{V}_1-\mathrm{T}_1\,\mathrm{U}_1);\quad s=\mathfrak{B}\,k^3/c_1.$$

Када је на слободном крају конзоле додата концентрисана маса m (слика 9.25. b) онда се на томе крају (1) мења гранични услов, јер је сада трансверзална сила једнака *сили инерције* масе (m). Дакле, услови и фреквентна једначина јесу:

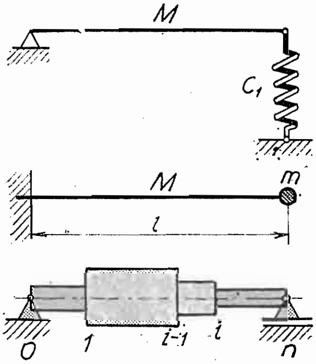
$$Z_0=Z'=0;\ Z_1''=0;\ -m\,\omega^2\,Z_1=F_T=+\mathfrak{B}\,Z''';$$

$$F_T=-(-\mathfrak{B}\,Z''');$$

$$m\,\omega^2\,(\mathrm{S}_1\,\mathrm{V}_1-\mathrm{U}_1\,\mathrm{T}_1)=\mathfrak{B}\,k^3\,(\mathrm{T}_1\,\mathrm{V}_1-\mathrm{S}_1^2).$$

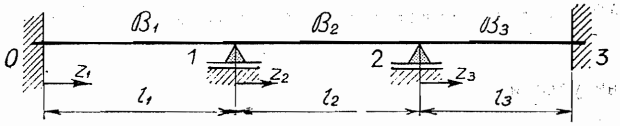
Ако је греда променљивог пресека (слика 9.25. c) онда треба у сваком делу распона где се мењају координате вектора $\{g\}$ узети нови вектор и одговарајућу *Rayleigh*-ову *матрицу*, па ће на крају бити:

$$\{g_n\}=\mathrm{R}\,\{g_0\}=\mathrm{R}_n\,\mathrm{R}_{n-1}\cdots\mathrm{R}_2\,\mathrm{R}_1\,\{g_0\}.\qquad(9.113)$$



Слика 9.25 — Допунски гранични услови

Код *континуалног носача* треба поставити у сваком пољу (r) једначину (9.109). Константе — односно фреквентна једначина — одређују се из граничних услова на крајњим ослонцима и на *међуослонцима* који долазе због континуалности еластичне линије носача.



Слика. 9.26 — Континуални носач

На пример, за случај носача представљеног на слици 9.26. који је $s=6-2=4$ пута статички неодређен има 12 граничних услова:

$$Z_r=A_r\,\mathbf{S}\,(k_r\,z_r)+B_r\mathbf{T}\,(k_r\,z_r)+C_r\,\mathbf{U}\,(k_r\,z_r)+D_r\,\mathbf{V}\,(k_r\,z_r);\ r=1;\ 2;\ 3;$$

$$\begin{array}{lllll}
\left.\begin{array}{l}1)\\2)\end{array}\right. z_1=0\left\{\begin{array}{l}Z_1=0\\Z_1'=0\end{array}\right. & & \left.\begin{array}{l}4)\ z_1=l_1\\5)\ z_2=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}Z_1'=Z_2'\\Z_1''=Z_2''\end{array} & & \\
3)\ z_1=l_1;\quad Z_1=0 & & 6)\ z_2=0;\ Z_2=0 & & (9.114)\\
7)\ z_2=l_2;\quad Z_2=0; & & 10)\ \ z_3=0;\quad Z_3=0, & & \\
\left.\begin{array}{l}8)\ z_2=l_2\\9)\ z_3=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}Z_2'=Z_3';\\Z_2''=Z_3'';\end{array} & & \left.\begin{array}{l}11)\\12)\end{array}\ z_3=l_3\right\}\begin{array}{l}Z_3=0.\\Z_3'=0.\end{array} & &
\end{array}$$

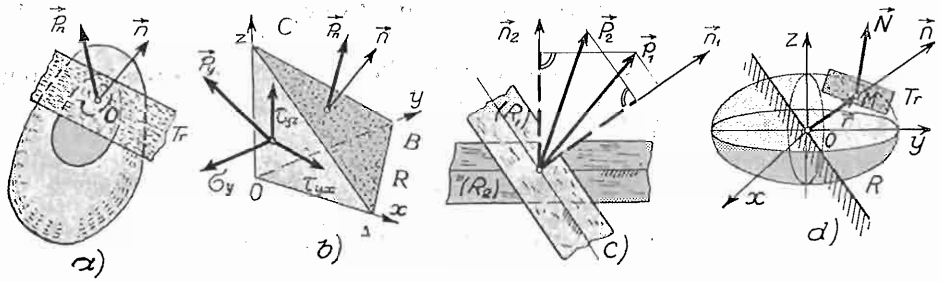
На пример, за случај носача са два распона и три ослонца имали бисмо;

$$\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_2=\mathfrak{B};\quad l_1=l_2=l;\quad k_1=k_2;\quad k\,l=\alpha;$$

$$4\,(\mathrm{T}_1^2-\mathrm{V}_1^2)\;(\mathrm{T}_1\,\mathrm{U}_1-\mathrm{S}_1\,\mathrm{V}_1)=0;\quad \sin\alpha\,(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{Th}\,\alpha)=0.$$

9.4. Примена матрица у теорији еластичности. — Једначине теорије еластичности могу се прегледније писати и лакше изводити применом матрица, јер симетричном тензору одговара његова матрица.

9.4.1. Напони. Cauchy-јеве и Navier-ове једначине. — Део запремине V_1 обухваћен омотачем S_1, извађен из напрегнутог тела (слика 9.27. *a*) изложен је дејству запреминских и унутрашњих сила које сада дејствују као спољашње површинске силе и представљају утицај одстрањеног дела тела на део V_1. Када се на омотачу (S_1) уочи тачка O и око ње мала површ ΔA са спољашњом нормалом $\{n\}$ онда се силе које дејствују на том малом елементу редукују у тачки O на главни вектор и главни момент. Пошто су растојања појединих сила у односу на O мала то се главни момент занемарује па остаје само главни вектор $\{\Delta F\}$. Гранична вредност количника $\{\Delta F\}/\Delta A$ назива се *напон (тотални напон)* $\{p_n\}=\lim\,(\{\Delta F\}/\Delta A)$, $\Delta A\to 0$, у тачки O а за раван (R) чија је нормала $\{n\}$. Овај напон није, уопште узев, колинеаран са нормалом, па се може разложити у две компоненте: *нормални напон* $\{\sigma_n\}$ у правцу нормале и *тангенцијални напон* $\{\tau_n\}$ у равни (R). Овај други напон може се даље разложити у тој равни у две управне компоненте $\{\tau_{nT}\}$ и $\{\tau_{nN}\}$.



Слика 9.27. — Напонско стање

Стање напона се познаје када се познају напони у свим тачкама напрегнутог тела и за све равни кроз те тачке. Нека је тачка O произвољна тачка напрегнутог тела. Усвојимо у њој триедар $Oxyz$ и раван $ABC\,(R)$ врло блиску тачки O са нормалом $\{n\}$ која гради углове са осама триедра чији су косинуси α, β, γ. Напон за раван (R) се врло мало разликује од напона у тачки O а за раван са истом нормалом $\{n\}$, која је и нормала равни ABC тетраедра $OABCO$, (слика 9.22. *b*). Напон за координатну раван OBC чија је нормала Ox-оса је $\{p_x\}$ па се може разложити у три управне компоненте величина σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}. На исти начин добијају се и компоненте напона за остале две координатне равни a може се и тотални напон разложити на компоненте у правцима оса триедра $Oxyz$, па ће бити:

$$\{p_n\}=\begin{Bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{Bmatrix}; \quad \{p_x\}=\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}; \quad \{p_y\}=\begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \{p_z\}=\begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}. \tag{9.115}$$

Дакле, *напонско стање* у некој тачки тела одређено је са *девет компонентних напона* за три међусобно управне равни кроз ту тачку. Ако је dA површина равни ABC онда је њена пројекција на Ox-осу површина $\mathrm{d}A_x=\mathrm{d}A\cdot\alpha$. Услов равнотеже сила које нападају тетраедар $OABCO$ дају релацију:

$$\{p_n\}\,\mathrm{d}A-\{p_x\}\,\mathrm{d}A_x-\{p_y\}\,\mathrm{d}A_y-\{p_z\}\,\mathrm{d}A_z=0,$$

односно

$$\{p_n\}=\{p_x\}\,\alpha+\{p_y\}\,\beta+\{p_z\}\,\gamma, \tag{9.116}$$

С обзиром на претходне релације (9.105) могу се *Descartes*-ове координате вектора напона $\{p_n\}$ изразити помоћу координата напона за координатне равни матричном релацијом

$$\{p_n\}=\mathrm{N}\,\{n\}; \quad \begin{Bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}=\{F_n'\}; \tag{9.117}$$

где је N *напонска матрица*. Ово су познате *Cauchy-јеве једначине*. За тачке на контури тела треба уместо компонентних напона $\{p_n\}$ ставити *компонентне површинске јединичне силе* $\{F_n'\}$.

Нека су (R_1) и (R_2) равни са нормалама $\{n_1\}$ и $\{n_2\}$ кроз исту тачку O, (сл. 9.27. c) онда следи ова релација:

$$\begin{gathered} \{p_1\}=\mathrm{N}\,\{n_1\}; \quad \{p_2\}=\mathrm{N}\,\{n_2\}; \\ (n_2)\,\{p_1\}=(n_2)\,\mathrm{N}\,\{n_1\}=(n_1)\,\mathrm{N}\,\{n_2\}=(n_1)\,\{p_2\}. \end{gathered} \tag{9.118}$$

Она представља *основно правило о коњугованости напона*: *пројекција напона* $\{p_1\}$ за раван (R_1) на правац нормале $\{n_2\}$ равни (R_2), једнака је пројекцији напона $\{p_2\}$ за раван (R_2) на правац $\{n_1\}$ нормале равни (R_1). Из овога следи да је $(j)\,\{p_x\}=(i)\,\{p_y\}$, $(0\;\;1\;\;0)\,\{p_x\}=(1\;\;0\;\;0)\,\{p_y\}$, то јест $\tau_{xy}=\tau_{yx}$. На исти се начин добијају још два *коњугована тангенцијална напона* $\tau_{xz}=\tau_{zx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, па је напонско стање одређено са *шест компонентних напона*, те је матрица N симетрична квадратна матрица трећег реда.

Када се узму у обзир и запреминске силе онда је једначина равнотеже за део V_1 издвојеног дела тела омеђеног омотачем (S_1):

$$\iiint\limits_{(V_1)} \{F'_V\}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{(S_1)} \{p_n\}\,\mathrm{d}A = 0.$$

Када се ова једначина пројицира на Ox-осу и када се примени *Gauss*-ова теорема о претварању површинског интеграла у запремински, онда ће бити

$$\iiint X'_V\,\mathrm{d}V + \iint p_{nx}\,\mathrm{d}A = \iiint X'_V\,\mathrm{d}V + \iint (p_x)\,\{\mathrm{d}A\} =$$

$$= \iiint (X'_V + \mathrm{div}\,\{p_x\})\,\mathrm{d}V = 0,$$

где је стављено да је $p_{nx} = (p_x)\{n\}$, $\{n\}\,\mathrm{d}A = \{\mathrm{d}A\}$. Ове једначине су *Navier*-ове *једначине* и могу се написати у овом матричном облику:

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{div}\,p_x \\ \mathrm{div}\,p_y \\ \mathrm{div}\,p_z \end{Bmatrix} + \{F'_V\} = 0; \qquad \begin{aligned} &\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z + X'_V = 0; \\ &\partial\tau_{yx}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z + Y'_V = 0; \\ &\partial\tau_{zx}/\partial x + \partial\tau_{zy}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z + Z'_V = 0; \end{aligned} \qquad (9.119)$$

Нормални и тангенцијални напон су:

$$\sigma_n = (n)\{p_n\} = (n)\,\mathrm{N}\{n\} = \sigma_x\alpha^2 + \sigma_y\beta^2 + \sigma_z\gamma^2 + 2(\tau_{xy}\alpha\beta + \tau_{xz}\alpha\gamma + \tau_{yz}\beta\gamma); \qquad (9.120.a)$$

$$\tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2 = (p_n)\,\{p_n\} - \sigma_n^2 = (n)\,\mathrm{N}^2\,\{n\} - \sigma_n^2. \qquad (9.120.b)$$

Када се из тачке O у правцу нормале $\{n\}$ пренесе вектор модула $r = 1/\sqrt{\sigma_n}$ онда су $x = r\alpha$; $y = r\beta$; $z = r\gamma$. Уношењем ових релација у (9·120. *a*) добија се *напонска површина*

$$\Phi = (r)\,\mathrm{N}\,\{r\} = 1 = \sigma_x\,x^2 + \sigma_y\,y^2 + \sigma_z\,z^2 + 2\,(\tau_{xy}\,xy + \tau_{xz}\,xz + \tau_{yz}\,yz) = 1. \quad (9.121.a)$$

Ово је *површина другог реда* у тродимензионом простору и представља елипсоид, једнограни или двограни хиперболоид (слика 9.27. *d*). Када се у тачки M, где је $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, повуче нормала на површину $\{N\}$, онда је према (8.23),

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\{r\}} = \mathrm{grad}\,\Phi = 2\,\mathrm{N}\,\{r\} = 2\,r\,\mathrm{N}\{n\} = 2\,r\,\{p_n\} = |\,\mathrm{grad}\,\Phi\,|\cdot\{N\}, \qquad (9.121.b)$$

па нормала напонске површине у тачки M вектора $\{r\}$ одређује правац тоталног напона у тачки O за раван (R) чија је нормала $\{n\}$.

Када је вектор $\{n\}$ колинеаран са вектором нормале површине $\{N\}$ тада је тотални напон нормални напон за тај правац. Овакав се напон зове *главни напон*, а ови правци су *главни правци*. Равни које им одговарају јесу *главне равни*, у њима не дејствују тангенцијални напони. Нека је σ_s главни напон а $\{n_s\}$ главни правац, онда ће бити:

$$\{p_s\}=\mathrm{N}\,\{n_s\}=\lambda\,\{n_s\};\quad \lambda=\sigma_s;\quad (\mathrm{N}-\sigma_s\,\mathrm{I})\,\{n_s\}=0,$$

па су карактеристични полином и главни правци:

$$|\mathrm{N}-\sigma_s\mathrm{I}|=0;\quad \begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma_s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_s & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_s \end{vmatrix} = \sigma_s^3-N_1\sigma_s^2+N_2\sigma_s-N_3=0; \tag{9.122}$$

$$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3;\quad N_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z;$$

$$N_2=\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix};\quad N_3=|\mathrm{N}|;$$

$$\frac{\alpha_s}{\begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \sigma_y-\sigma_s & \tau_{yz} \end{vmatrix}}=\frac{\beta_s}{-\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma_s & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yz} \end{vmatrix}}=\frac{\gamma_s}{\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma_s & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_s \end{vmatrix}};\quad \alpha_s^2+\beta_s^2+\gamma_s^2=1;\quad s=1,\ 2,\ 3.$$

Како су својствени вектори ортонормирани то се квадратна форма (9.121.*a*) може свести на канонски облик. Пошто су тада из (9.116) пројекције тоталног напона на главне осе $p_{n1}=\sigma_1\alpha$; $p_{n2}=\sigma_2\beta$; $p_{n3}=\sigma_3\gamma$, то стављајући да су ово координате тачке P напонске површине, с обзиром на услов $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, напонска површина се може написати у другом облику. Дакле, биће:

$$\{r\}=\mathrm{E}\{\rho\};\quad \Phi=(r)\,\mathrm{N}\,\{r\}=(\rho)\,\mathrm{E}'\mathrm{N}\,\mathrm{E}\,\{\rho\}=(\rho)\,\mathrm{G}\,\{\rho\}=\sigma_1\,\xi^2+\sigma_2\,\eta^2+\sigma_3\,\zeta^2;$$

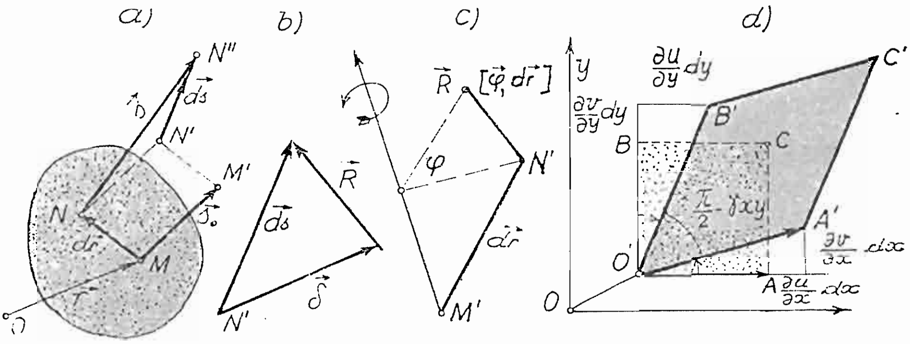
$$\mathrm{G}=\begin{Bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{Bmatrix};\quad u=\sigma_1\alpha;\quad v=\sigma_2\beta;\quad w=\sigma_3\gamma;\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1; \tag{9.123}$$

$$u^2/\sigma_1^2+v^2/\sigma_2^2+w^2/\sigma_3^2=1.$$

Ово је једначина елипсоида са центром у тачки (O). Он се назива *Lamé-ов елипсоид напона.*

9.4.2. Деформације. — Када се неки елемент напрегнутог тела премести из једног положаја у други оближњи положај, *елементарно померање* честице тела, према *Helmholtz-овом ставу*, резултат је *транслације, обртања и деформације*. Тачка M тела одређена вектором положаја $\vec{r}\,(x, y, z)$ у односу на непомичну тачку O прећи ће у положај M' услед транслације $\vec{s}_0$ (слика 9.28.*a*). Њој оближња тачка N на растојању $\overrightarrow{MN}=\mathrm{d}\vec{r}$ прећи ће у положај N' а затим у положај N'', па је *вектор померања*

$$\{s\}=\{s_0\}+\{\mathrm{d}\,s\}=\{s\,(r)\};\quad \vec{s}=u\,\vec{i}+v\,\vec{j}+w\,\vec{k}, \tag{9.123}$$



Слика 9.28. — Деформације

где су $u=u\,(x,y,z)$, $v=v\,(x,y,z)$, $w=w\,(x,y,z)$ правоугле координате вектора померања које су функције координата x, y, z тачке M. С обзиром на то, тотална промена вектора померања $\{s\}$ износи

$$\{\mathrm{d}\,s\}=\left\{\frac{\partial s}{\partial x}\right\}\mathrm{d}\,x+\left\{\frac{\partial s}{\partial y}\right\}\mathrm{d}\,y+\left\{\frac{\partial s}{\partial z}\right\}\mathrm{d}\,z=\begin{Bmatrix}\partial u/\partial x\\ \partial v/\partial x\\ \partial w/\partial x\end{Bmatrix}\mathrm{d}\,x+\begin{Bmatrix}\partial u/\partial y\\ \partial v/\partial y\\ \partial w/\partial y\end{Bmatrix}\mathrm{d}\,y+$$

$$+\begin{Bmatrix}\partial u/\partial z\\ \partial v/\partial z\\ \partial w/\partial z\end{Bmatrix}\mathrm{d}\,z=\begin{Bmatrix}(\partial u/\partial x)\,\mathrm{d}\,x+(\partial u/\partial y)\,\mathrm{d}\,y+(\partial u/\partial z)\,\mathrm{d}\,z\\ (\partial v/\partial x)\,\mathrm{d}\,x+(\partial v/\partial y)\,\mathrm{d}\,y+(\partial v/\partial z)\,\mathrm{d}\,z\\ (\partial w/\partial x)\,\mathrm{d}\,x+(\partial w/\partial y)\,\mathrm{d}\,y+(\partial w/\partial z)\,\mathrm{d}\,z\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}(\mathrm{grad}\,u)\ \{\mathrm{d}\,r\}\\ (\mathrm{grad}\,v)\ \{\mathrm{d}\,r\}\\ (\mathrm{grad}\,w)\ \{\mathrm{d}\,r\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z\\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{d}\,x\\ \mathrm{d}\,y\\ \mathrm{d}\,z\end{Bmatrix}=\mathbf{S}\,\{\mathrm{d}\,r\}, \tag{9.124}$$

где је $\mathbf{S}$ *функционална матрица* парцијалних извода координата вектора померања.

Када се ова матрица разложи на *симетричну* ($\mathbf{S}_s$) и *кososиметричну* ($\mathbf{S}_k$) тада израз (9.123) постаје

$$\{s\}=\{s_0\}+\{\mathrm{d}\,s\}=\{s_0\}+\mathbf{S}\,\{\mathrm{d}\,r\}=\{s_0\}+\mathbf{S}_k\,\{\mathrm{d}\,r\}+\mathbf{S}_s\,\{\mathrm{d}\,r\}=\{s_0\}+\{\rho\}+\{\delta\};$$

$$\mathbf{S}_s=(\mathbf{S}+\mathbf{S}')/2;\quad \mathbf{S}_k=(\mathbf{S}-\mathbf{S}')/2. \tag{9.125}$$

Померање $\{\mathrm{d}\, s\}$ има две компоненте: прва је *обртање*, а друга *деформација*, (слика 9.28. *b*). Код обртања тела око непомичне тачке ротор брзине једнак је двострукој угаоној брзини, $\operatorname{rot}\{v\}=2\{\omega\}$, те ће бити $\operatorname{rot}\{s\}=2\{\varphi\}$, па је компонента ротације (слика 9.28. *c*):

$$\operatorname{rot}\{s\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix};\quad \frac{1}{2}[\operatorname{rot}\vec{s},\ \mathrm{d}\,\vec{r}]=[\vec{\varphi},\ \mathrm{d}\,\vec{r}]=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\[2ex] \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\[2ex] -\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{d}x \\[2ex] \mathrm{d}y \\[2ex] \mathrm{d}z \end{Bmatrix}=$$

$$=\mathbf{S}_k\{\mathrm{d}\,r\}=\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{Bmatrix};\quad \{\varphi\}=\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}, \tag{9.126}$$

где су p, q, r координате угла φ.

Симетрична матрица одговара деформацији, па је и стање деформација одређено са шест компонентних деформација: *три дилатације* и *три клизања* (слика 9.28. *d*):

$$\{\delta\}=\mathbf{S}_s\{\mathrm{d}\,r\};$$

$$\mathbf{S}_s=\mathfrak{E}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{1}{2}\gamma_{yx} & \dfrac{1}{2}\gamma_{zx} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \dfrac{1}{2}\gamma_{zy} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\gamma_{xz} & \dfrac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \tag{9.127.a}$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\gamma_{xz}=\gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{yz}=\gamma_{zy}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}. \qquad (9.127.b)$$

Деформацијска матрица $S_s=\mathfrak{E}$ је симетрична матрица. Она је аналогна напонској матрици, па се релације за главне дилатације изводе на исти начин — аналогијом: нормалном напону одговара дилатација, тангенцијалном напону половина угла клизања. Први скалар тензора напона, односно траг матрице напона, представља *напонску инваријанту;* траг матрице деформација представља *кубну дилатацију* па су $N_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\sigma$; $E_1=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_V=\varepsilon$. Ако је познат вектор померања, односно његове координате u, v, w, онда се компонентне деформације одређују врло лако према (9.127). Међутим, обратно, одређивање вектора померања када је позната матрица деформације је тешко, јер се проблем своди на интегрисање. Сем тога свака симетрична матрица не мора да одговара матрици деформације. Другим речима постоје извесни услови између елемената матрице који се зову *Saint Venant-ови услови компатибилности (сагласности) деформација.*

9.4.3. Уопштени Hooke-ов закон. — Претпоставља се да је веза између компонентних напона и деформација *линеарна* што је у сагласности са опитима и *основним Hooke-овим законом,* а испитују се мале деформације и сматра се да задатим деформацијама одговара један јединствен систем компонентних напона. На основу тога може се написати оваква матрична релација између напона и деформација:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{26} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{61} & C_{62} & \ldots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yz}/2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{C}=(C_{ik}); \quad (6\cdot 6). \qquad (9.128)$$

Матрица **C** је *матрица еластичности,* јер су њени елементи *коефицијенти еластичности,* димензије напона, пошто су деформације (дилатације и клизања) бездимензионе. Ова је матрица квадратна, типа (6·6), па има 36 елемената. Како је тело *хомогено* (састав је исти у свакој тачки тела) матрица **C** постаје *симетрична,* па се број елемената смањује на 21; сада је $C_{ik}=C_{ki}$. *Изотропно тело* има исте физичке особине у свим правцима, па се зависност између напона и деформација не мења при трасформацији координата. На пример, при ротацији $+Oy$-осе у $-Oy$-осу следи $C_{14}=C_{15}=C_{16}=0$; $C_{24}=C_{25}=$ $=C_{26}=0$; $C_{34}=C_{35}=C_{36}=0$. Ово показује да *нормални напони не зависе од клизања, и да тангенцијални напони не зависе од дилатација,* па се број константи своди на 12. Када се $+Ox$-оса ротира у $-Ox$-осу добија се $C_{45}=C_{46}=C_{56}=0$, па се број елемената свео на 9. Када се $+Oy$-оса заокрене и падне у $+Oz$-осу биће $C_{12}=C_{13}=C_{23}$ па се број коефицијената C_{ik} свео на 7. Заменом улога оса Ox и Oy, односно улога оса Ox и Oz, следи $C_{11}=C_{22}=C_{33}$; $C_{44}=C_{55}=C_{66}$, па се број независних коефицијената свео на *три*. Сем тога се матрице раздвајају, па је:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{12}\\ C_{12} & C_{11} & C_{12}\\ C_{12} & C_{12} & C_{11}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix}\tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}C_{44}\begin{Bmatrix}\gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}.$$

И ова три коефицијента еластичности нису међусобно независна. Када се триедар $Oxyz$ заокрене око $+Oz$-осе за угао φ он ће постати триедар $O\xi\eta z$, па следи услов $C_{44}=C_{11}-C_{12}$, те су само два коефицијента независна. *Lamé* је увео коефицијенте λ и ν који се зову *Lamé*-ови *коефицијенти*. У техници се уместо њих уводе *модул клизања* ($\mathbf{G}$) и *Poisson*-ов *коефицијент* (μ), па су релације:

$$C_{44}=C_{11}-C_{12}=2\nu;\quad C_{12}=\lambda;\quad C_{11}=\lambda+2\nu;$$
$$\nu=\mathbf{G}=E/2\,(1+\mu);\quad \lambda=2\mu\,\mathbf{G}/(1-2\mu), \tag{9.129}$$

где је E *Young*-ов *модул еластичности*, димензије напона.

На основу предњег *уопштени Hooke-ов закон* може се овако матрично изразити

$$\mathfrak{E}=\frac{1}{2\mathbf{G}}\left(\mathbf{N}-\frac{\mu\sigma}{1+\mu}\mathbf{I}\right);\quad \mathbf{N}=2\mathbf{G}\left(\mathfrak{E}+\frac{\mu\varepsilon}{1-2\mu}\mathbf{I}\right), \tag{9.130}$$

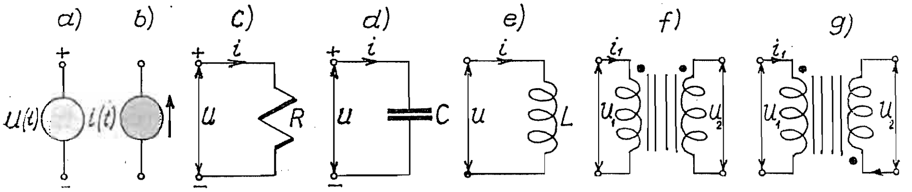
где су σ и ε трагови напонске и деформационе матрице:

$$\sigma=N_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z;\quad \varepsilon=\varepsilon_V=E_1=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=(1-2\mu)\,\sigma/E,$$

а $\mathbf{I}$ јединична матрица.

9.5. Примена матрица у електротехници. — У електричном колу постоје *активни и пасивни елементи*. Први су извори енергије: *извор напона* (слика 9.29. *a*) одржава на својим половима константни напон $u(t)$ који не зависи од струје што протиче кроз њега, и *извор струје* који одржава на половима константну струју $i(t)$ независну од напона на половима. Пасивни елементи су: *отпорник, кондензатор и индуктивни калем* (слика 9.29. *c*, *d*, *e*). Код отпорника је, према *Ohm*-овом *закону*, $u=Ri$, па је $i=u/R$, те је расипање енергије $W=\int u\,i\,\mathrm{d}t=$ $=\int i^2R\,\mathrm{d}t$; оно се врши брзином $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t=i^2R$. *Оптерећење кондензатора* је $q=Cu$, где је C *капацитет кондензатора*, па је струја

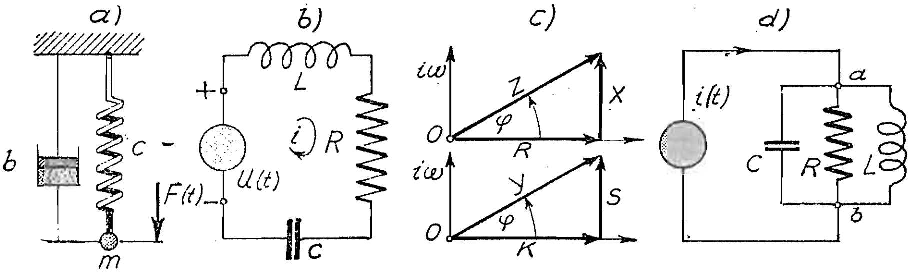
$i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, те је пад напона $u = \int C^{-1} i\,\mathrm{d}t$. Енергија накупљена у кондензатору је $W = \int u i\,\mathrm{d}t = C^{-1} \int q\,\mathrm{d}q = q^2/2C = C u^2/2$. Струја која пролази кроз индуктивни калем производи према *Faradey-овом закону* магнетно поље флукса $\Phi = L i$, где је L *сачинилац самоиндукције*, па је пад напона $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. Накупљена енергија је $W = \int i u\,\mathrm{d}t = L \int i\,\mathrm{d}i = L\,i^2/2$. Овде су i, u, q *тренутне вредности* струје, (ампера А), напона, (волти V), и оптерећења кондензатора, (кулона С). *Ефективне вредности* струје, напона и електромоторне силе (оне вредности које мере сами апарати, амперметар и волтметар) обележавају се са I, U, E. *Максималне вредности* ових величина (односно амплитуде њихових промена) обележавају се са I_m, U_m, E_m и износе $I_m = I\sqrt{2}$; $U_m = U\sqrt{2}$; $E_m = E\sqrt{2}$. Коефицијенти R, C и L су константни а мере се величинама: om (Ω), farad (F) и henri (H). Трансформатор преноси снагу са једног дела на други без промене њене величине а уз промену напона и струје. Ако је N однос броја намотаја оба калема $N = n_2/n_1$, онда постоји однос $p = i_1 u_1 = i_2 u_2$; $i_2/i_1 = u_1/u_2 = 1/N$. Тачке (слика 9.29. *f*, *g*) показују да излазна струја и пад напона имају исти (слика *f*) или супротни смер (слика *g*) од улазне струје и напона (првог — „примарног" калема).



Слика 9.29 — Елементи електричног кола

С обзиром на кинетичку енергију хармонијског осцилатора $E_k = W = mv^2/2$ може се уочити аналогија: маси m одговара самоиндукција L, брзини (v) струја (i), а с обзиром на потенцијалну енергију $E_p = cx^2/2$, померању x одговара оптерећење кондензатора (q), крутости опруге (c) реципрочна вредност капацитета кондензатора ($1/C$).

Механички осцилатор (слика 9.30. *a*) је са отпором и принудном силом, па је диференцијална једначина осциловања $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F\cos\Omega t$.



Слика 9.30. — Механичке и електричне аналогије

Када се партикуларно решење претпостави у облику $x_p=C\cos\theta+D\sin\theta$, $\theta=\Omega t$, онда је режим принудног осциловања

$$x_p=N\cos(\Omega t-\alpha),$$

где су

$$N=\sqrt{C^2+D^2}=F/[(c-m\Omega^2)^2+(b\Omega)^2]^{1/2};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=b\Omega/(c-m\Omega^2);\qquad T_p=T_F=2\pi/\Omega.$$

Када се примене комплексни бројеви, тада ће бити

$$m\ddot{\mathfrak{z}}+b\dot{\mathfrak{z}}+c\mathfrak{z}=\mathfrak{F}=Fe^{i\Omega t};\qquad \mathfrak{z}=\mathfrak{A}e^{i\Omega t};$$

$$\dot{\mathfrak{z}}=i\Omega\mathfrak{z};\qquad \ddot{\mathfrak{z}}=-\Omega^2\mathfrak{z};\qquad i=j=\sqrt{-1};$$

односно

$$[(c-m\Omega^2)+i(b\Omega)]\mathfrak{z}=\mathfrak{F};\qquad \mathfrak{Z}(i\Omega)\cdot\mathfrak{z}=\mathfrak{F};\qquad |\mathfrak{Z}|=[(c-m\Omega^2)^2+(b\Omega)^2]^{1/2};$$

$$\arg\mathfrak{Z}=\alpha;\qquad \mathrm{tg}\,\alpha=b\Omega/(c-m\Omega^2), \qquad (9.131.a)$$

где је $\mathfrak{Z}$ *механичка импеданца*. Она је комплексни број. Према томе је:

$$\mathfrak{z}=\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{Z}};\qquad |\mathfrak{z}|=\frac{|\mathfrak{F}|}{|\mathfrak{Z}|}=\frac{F}{[(c-m\Omega^2)^2+(b\Omega)^2]^{1/2}}=N;$$

$$\arg\mathfrak{z}=\arg\mathfrak{F}-\arg\mathfrak{Z}=\Omega t-\alpha, \qquad (9.131.b)$$

те је одређен комплексни број $\mathfrak{z}$. Његов реални део представља режим принудног осциловања:

$$\mathfrak{z}=Ne^{i(\Omega t-\alpha)};\qquad \Re(\mathfrak{z})=N\cos(\Omega t-\alpha)=x_p;\qquad i=j=\sqrt{-1}. \qquad (9.131.c)$$

Механичком осцилатору који има један степен слободе осциловања (сл. 9.30.*a*) одговара електрично коло са *једном контуром* (слика 9.30.*b*) чији су елементи везани *редно*. На основу првог *Kirchoff-овог закона*, да „у сваком простом затвореном колу неког сложеног електричног кола мора укупан збир напона бити једнак нули“, следи следећа интегродиференцијална једначина кола:

$$u_L+u_R+u_C-u=0;\qquad L\frac{d\,i}{d\,t}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,d\,t=u(t). \qquad (9.132.a)$$

Када се стави $i=d\,q/d\,t$ онда горња једначина постаје

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=u(t)=U_m\sin\omega t=U_m e^{i\omega t}=\mathfrak{U}. \qquad (9.132.b)$$

Она је истог облика као и једначина механичког осцилатора.

Ако се претпостави да је струја $\mathfrak{z}=\mathfrak{i}=I_m e^{i\omega t}$ онда је

$$\mathfrak{q}=\int\mathfrak{i}\,d\,t=\int\mathfrak{z}\,d\,t=(I_m/i\,\omega)\,e^{i\omega t}=\frac{\mathfrak{z}}{i\,\omega};\qquad \dot{\mathfrak{q}}=I_m e^{i\omega t}=\mathfrak{z},$$

па је

$$[L(i\omega)+R+(1/C\,i\omega)]\,\mathfrak{z}=[R+i\,(L\omega-1/C\omega)]\cdot\mathfrak{z}=\mathfrak{Z}\,(i\omega)\cdot\mathfrak{z}=\mathfrak{U}, \qquad (9.133.a)$$

односно

$$|\mathfrak{z}|=I_m=\frac{|\mathfrak{U}|}{|\mathfrak{Z}|}=\frac{U_m}{[R^2+(L\omega-1/C\omega)^2]^{1/2}}\,;$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega-\,(1/C\omega)}{R}=\frac{X}{R}. \qquad (9.133.b)$$

Закон промене струје је:

$$\mathfrak{z}=I_m e^{i(\omega t-\varphi)};\quad i=\mathfrak{J}\,(\mathfrak{z})=I_m\sin\,(\omega t-\varphi). \qquad (9.133.c)$$

Комплексни број $\mathfrak{Z}\,(i\omega)$ је *привидни отпор* или *електрична импеданца кола*. Њена реална компонента (слика 9.28.*c*) је *термогени отпор* који се зове и *активни отпор кола;* имагинарна компонента је *реакција кола (реактанца)*. Израз $L\omega$ је *индуктивни отпор (индуктанца)* а $1/C\omega$ је *капацитетни отпор (капацитанца)*. Реципрочна вредност импеданце (слика 9.30.*c*) је *адмитанца* или *сложена проводност кола* $\mathfrak{Y}=1/\mathfrak{Z}$. Њена реална компонента величине $K=Y\cos\varphi$ зове се *активна проводност* или *кондуктивност;* имагинарна је *реактивна проводност* или *сусцептивност*. *Тренутна снага* је $p=u\,i$, док је $P_p=UI$ *привидна снага*. Величина $P=UI\cos\varphi$ је *активна снага* а $P_h=UI\sin\varphi$ је *реактивна снага (хормананција)*. Величина $\cos\varphi$ је *фактор снаге*. Ако је коло без кондензатора, онда је импеданца $\mathfrak{Z}=R+iL\omega$, па је $I=U/|\mathfrak{Z}|$ (*Joubert*-ово *правило*). Када је $L\omega=1/C\omega$ тада је $\varphi=0$, па наступа *напонска резонанса*. Тада је период $T=2\pi\sqrt{CL}$, јер је $\omega^2=1/CL$ (*Thomson*-ова *формула*).

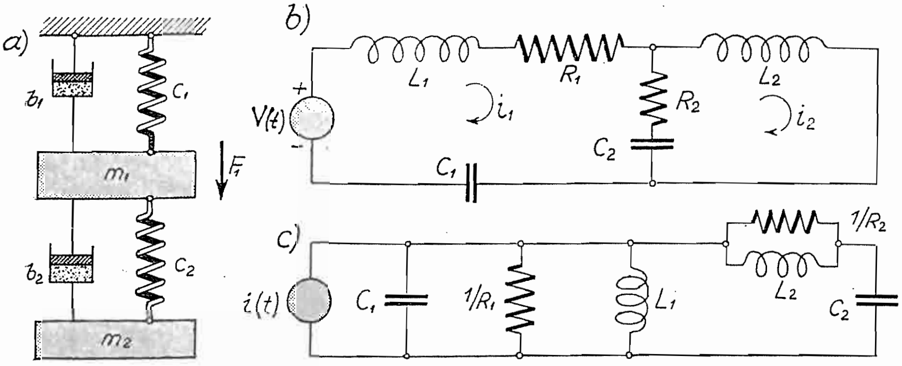
Досад описана аналогија зове се *директна аналогија* или *аналогија сила — напон*. Друга врста аналогије је *обратна аналогија* или *аналогија сила — струја*. Тада је активни елемент струјни извор а пасивни елементи су везани *паралелно* (слика 9.30.*d*). Нека је $u\,(t)$ пад напона на три паралелно везана пасивна отпора онда, према *другом Kirchoff*-овом *закону*, да „збир свих тренутних струја које дејствују у једном чвору мора бити једнак нули“, биће

$$i_C+i_R+i_L-i\,(t)=0;\quad C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{u}{R}+\frac{1}{L}\int u\,\mathrm{d}t=i(t). \qquad (9.134.a)$$

Ако се уведе смена $q=\int u\,(t)\,\mathrm{d}t$, онда горња интегродиференцијална једначина због тога што је $u=\dot{q}$, постаје

$$C\ddot{q}+\frac{1}{R}\dot{q}+\frac{1}{L}q=i\,(t);\quad u=\dot{q};\quad \dot{u}=\ddot{q}. \qquad (9.134.b)$$

Једначине написане према законима *Kirchoff*-а зову се *контурне једначине* (loop equations) када се постављају за свако просто коло које одговара степену слободе осциловања или *чворне једначине* (node equations) када се према другом закону постављају за сваки чвор. Код првих једначина треба имати напонски извор $u(t)$, елементе L, R, C, применити први закон *Kirchoff*-а (о напонима) и струју тока; у другом случају треба имати струјни извор, елементе C, проводност $1/R$, L, применити други закон *Kirchoff*-а (о чворовима). Току струје у свакој контури (loop) одговара пад напона на чворовима сваког елемента.



Слика 9.31. — Динамички апсорбер

На слици 9.31. приказан је *динамички айсорбер* и његове електричне аналогије, па су једначине:

a) $m_1\ddot{x}_1+(b_1+b_2)\dot{x}_1+(c_1+c_2)x_1-b_2\dot{x}_2-c_2x_2=F(t);$

$$m_2\ddot{x}_2+b_2\dot{x}_2+c_2x_2-b_2\dot{x}_1-c_2x_1=0;$$

b) $L_1\ddot{q}_1+(R_1+R_2)\dot{q}_1+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)q_1-R_2\dot{q}_2-\frac{1}{C_2}q_2=u(t);$

$$L_2\ddot{q}_2+R_2\dot{q}_2+\frac{1}{C_2}q_2-R_2\dot{q}_1-\frac{1}{C_2}q_1=0;$$

c) $C_1\ddot{q}_1+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\dot{q}_1+\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)q-\frac{1}{R_2}\dot{q}_2-\frac{1}{L_2}q_2=i(t);$

$$-\frac{1}{R_2}\dot{q}_1-\frac{1}{L_2}q_1+C_2\ddot{q}_2+\frac{1}{R_2}\dot{q}_2+\frac{1}{L_2}q_2=0.$$

Када су струје $i_1 = I_1 e^{i\omega t}$, $i_2 = I_2 e^{i\omega t}$, и напон $u = U_1 e^{i\omega t}$, тада су $\dot{q}_1 = i_1$, $\dot{q}_2 = i_2$, па се систем једначина (b) своди на систем нехомогених алгебарских једначина:

$$\begin{pmatrix} \text{З}_1 + (R_2 + 1/C_2 i\omega) & -(R_2 + 1/C_2 i\omega) \\ -(R_2 + 1/C_2 i\omega) & \text{З}_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{З}_1 + a & -a \\ -a & \text{З}_2 \end{vmatrix}; \quad a = R_2 + (1/C_2 i\omega);$$

па су максималне вредности струја:

$$I_1 = \frac{1}{\Delta} (U_1 \text{З}_2); \quad I_2 = \frac{1}{\Delta} U_1 (R_2 + 1/C_2 i\omega).$$

На исти начин поступило би се и у сложенијим случајевима, на пример код филтара или код мрежа.

ЛИТЕРАТУРА

Aitken A.C., Determinants and Matrices, London, 1949.

Albert A.A., Fundamental concepts of highei algebra, Chicago, 1956.

Andjelić T., Matrice, 2. izd. Beograd, 1965.

Argyris J.H., Energy theorems and structural analysis, part, I General Theory, Aircraft Engng., 26, 1955.

„ Die Matrizentheorie der Statik, Ing. - Arch. 25, 1958.

Ayres F., Theory and Problems of Matrices, Schaum Publ. Co, New York, 1962.

Бабаков И.М., Теория колебаний, 2. изд., „Наука“, Москва, 1965.

Bellman R., Introduction to Matrix Analysis, New York, 1960.

Bodewig E., Matrix Calculus. Amsterdam, 1956.

Cannon R.H. Jr., Dynamics of Physical Systems, McGraw - Hill Book Co., New York, 1967.

Church A.H., Mechanical vibrations, J.Wiley Sons, Inc., New York, 1962.

Collatz L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwedungen, Leipzig, 1949.

Courant R., Hilbert D., Methods of Mathematical Physics, New York, 1953.

Cross H., Analysis of continuous frames by distributing fixed and moments, Tr. ASCE, no 1793, 1932.

Данилевский А.М., О численом решении векового уравнения, Мат. сб. т. 2/44, Но 1, 1937.

Демидович Б. П., Марон И.А., Основы вычислительной математики, Физматгиз, 1960.

Den Hartog J.P., Mechanical Vibrations, 4 th ed., Mc Graw - Hill, New York, 1956.

Denis - Papin M., Kaufmann A., Cours de calcul matriciel appliqué, Paris, 1951.

Denke P.A., A matrix method of structural analisys, ASCE, 1955.

Duncan W.J., Free and Forced Oscillations of Continuous Beams by the Admittance Method, Phyl. Mag. v. 34, No 228, 1943.

Etkin B., Dynamics of Flight, Wiley, New York, 1959.

Evans W. R., Control System Dynamics, Mc Graw - Hill, New York, 1954.

Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, 1950.

Falk S, Die Berechunung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren, Ing. - Arch., Bd XXIV, H. 3, 1956.

Ferrar W. L., Algebra, A Text Book of Determinants, Matrices and Algebraic Forms, Oxford, 1941.

Frazer R. A., Duncan W. J., Collar A. R., Elementary Matrices, Cambridge, At Univ. Press, 1952.

Friedland B., Wing O., Ash R, Principles of Linear Networks, Mc Graw - Hill, New York, 1961.

Fuhrke H, Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls, Ing. - Arch. H. 5., 1955.

Галеркин Б. Г., Стержни и пластинки, В. инж. и техн., Но 19, 1915.

Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950.

Gentry S. C., Matrix analysis of structures, NZEng 14, № 9, 1959.

Gröbner W., Matrizenrechnung, München, 1956.

Guillemin E. A., Introdyctory Circuit Theory, J. Wiley Sons, New York, 1953.

Hasse H., Höhere Algebra, I, II, Berlin, 1951.

Heading J., Matrix Theory for Physicists, London, 1958.

Hildebrand F. B., Methods of Applied Mathematics, Prentice - Hall, Inc., New York, 1954.

„ Advanced Calculus for Engineers, Prentice - Hall, Inc., New York, 1949.

Householder A. S., Principles of numerical analysis, New York, 1953.

Kármán Th., Biot M, Mathematical Methods in Engineering, Mc Graw - Hill, New York, 1940.

Кашанин Р., Виша математика, I, II, III, Београд, 1949. — 50.

Kimball A. L., Vibration Prevention in Engineering, New York, 1932.

Klein B., A simple method of matrix structural analysis, J. aero/sp. Sci., vol. 25. —27., 1958. —60.

Крейн М. Г., О спектре якобиевой формы в связи с теорией крутильных колебаний вала, Мат. сб., т. 40, 1933.

Крылов А. Н., О численном решенои уравнения, которым в технических вопросах определьются частоты малых колебаний, Изв. АН. СССР, 1931.

„ Собрание сочинений, Москва, 1948.

„ Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1950.

„ О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, ОНТИ, 1932.

Kurepa Đ., Teorija skupova, Zagreb, 1951.

Курош А. Г.; Курс высшей алгебри, Москва, 1955.

Landau E., Grundlagen der Analysis, New York, 1948.

Langefors B., Theory of aircraft structural analysis, Z. für Flgwiss., vol. 6., No. 10., 1958.

Mac Duffe C. C., Vectors and Matrices, New York, 1949.
„ The Theory of Matrices, Berlin, 1933.

Mader F. W. Berechnung orthotroper Platten mit Hilfe von Übertragungsmatrizen, Stahlbau, No. 8., 1959.

Мальцев А. И., Основы линейной алгебри, Москва, 1956.

Marguerre K., Vibrations and stability problems of beams treated by matrices, JMP. 35, 1956.

Marković Ž., Uvod u višu analizu, II dio, I. sv., Zagreb, 1947.

Mirsky Z., An Introduction to linear Algebra.

Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P., Linearna algebra, polinomi. analitička geometrija, Beograd, 1966.

Morgan L., Application of an electronic digital computer to structural desing. Str. Eng. vol. XXXVIII, No. 3., 1960.

Пановко Я Г., Основы прикладной теории упругих колебаний, Машгиз., 1957.

Pascal E., I determinanti, 2. ed. U Hoepli, Milano, 1923.

Pipes L. A., The matrix theory of torsional oscillatings, JAPh, vol. 13., 1942.

Pöschl Th., On an application of matrix calculus to the theory of frames, Ing. - Arch., vol. 19., No. I., 1951.

Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, Москва, 1957.

Przemieniecki J. S., Matrix analysis of shell structures with flexible frames, Aer. Quart., vol. 9., Pt. 4., 1958.

Pupke H., Einführung in die Matrizenrechnung, Berlin, 1953.

Рашковић Д., Механика I, II, III(Статика, Кинематика, Динамика), Београд, 1949 — 1965.
„ Отпорност материјала, 5. изд., Београд, 1967.
„ Теорија осцилација, 2. изд., Београд, 1965.

Rayleigh lord (Strutt J. W.), The Theory of Sound, New York, 1945.

Routh E. J., Advanced Rigid Dynamics, 6 th ed. London, 19 5.

Scanlan R. H., Rosenbaum R., Introduction to the study of aircraft vibration and flutter, New York, 1951.

Scarborough A. S., Numerical Analysis, J. Hopkins Press, 3.rd ed, Baltimore, 1955.

Schmeidler W.. Vorträge über Determinanten und Matrizen, mit Anwendungen in Physik and Technik, Berlin, 1949.

Schneider E., Mathematische Schwingungslehre. Berlin, 1921.

Schönfeld H., Regelungstechnik, VEB, Berlin, 1953.

Schwerdtfeger H., Introduction to Linear Algebra and Theory of Matrices, Groningen, 1950.

Смирнов А. Ф., Устойчивость и колебания сооружений, М. Трансжелдориздат, 1958.

Смирнов М. М., Курс высшей математики, т. III., Москва, 1956.

Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Москва, 1954.

Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Териов И. М., Квантовая механика, ГОСУЧПЕДИЗД, Москва, 1962.

Соколов А. А., Введение в квантовую электродинамику, Москва, 1960.

Stoll R. R., Linear Algebra and Matrix Theory, New York, 1952.

Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, Москва, 1964.

Surutka J., Elektromagnetika, Beograd, 1965.

Терских В. П., Метод цепных дробей, Судпромгиз, 1955.

Тетельбаум И. М., Электроческое моделирование, Физматгиз, 1959.

Thomson W. T., Matrix solution for the vibration of nonuniform beams, JAM, 17., 3., 1950.

Timoshenko P. S., Theory of Elasticity, New York, 1936.
„ Vibration Problems in Engineering, Van Nostrand, Princeton 3 rd ed , New York, 1956.

Tong Kin. N., Theory of Mechanical Vibration, J. Wiley, Inc., New York, 1960.

Tse F. S., Morse I. E., Hinkle R. T., Mechanical vibrations, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.

Turnbull H. W., The Theory of Determinants, Matrices and Invariants, London, 1928.

Turnbull H. W., Aitken A. C., An Introduction to the Theory of Canonical Matrices‘ London, 1932.

Valentiner S., Vektoren und Matrizen, Berlin, 1958.

Wang Chu-kia, Matrix formulation of slope-deflection equation, ASBE, vol. 84., 1958.

Wedderburn J. H.-M., Lectures on Matrices, New York, 1934.

Zurmühl R., Matrizen und ihre technischen Anwendungen, 3. Aufl., Springer, Berlin, 1961.
„ Berechnung von Biegeschwingungen abgesetzter Wellen mit Zwischenbedingungen mittels Übertragungsmatrizen, Ing. - Arch., 26., No. 6., 1958.
„ Praktische Mathematik für Ingeniere und Physiker, 3. Aufl., Springer, Berlin, 1961.

РЕГИСТАР ИМЕНА

(Бројеви означавају странице)

Banachiewicz 164, 188, 193
Bézout 204

Cantor 93
Capelli 175
Cauchy 106, 318
Cayley 232, 253
Chiò 31
Cholesky 173, 188
Christoffel 286
Clapeyron 30, 83, 131, 296
Coulomb 325
Cramer 22, 77, 161

Данилевский 244
Descartes 95, 268
Dirichlet 289

Еуклид 107
Euler 125, 270, 283

Faradey 325
Fontené 176
Frobenius 18, 76, 229, 244

Gauss 28, 93, 162, 192, 319
Gram 110, 112

Hadamard 130
Hamilton 232, 253, 287
Helmholtz 320
Hermite 39, 133
Hessenberg 251
Hooke 325
Horner 204
Hurwitz 74, 312

Jacobi 9, 41, 293
Jordan 231, 238
Joubert 327

Kirchoff 326
König 282
Крылов 246
Kronecker 8, 109, 175

Lagrange 191, 285
Laguerre 310
Lamé 320, 324
Laplace 69, 73, 210
Leibniz 1
Lorentz 238, 288

Maxwell 42, 83, 288

Navier 319
Newton 281

Ohm 324

Pascal 13
Poisson 324
Pouché 176

Rayleigh 241, 312, 315
Ritter 105

Saint Venant 323
Sarrus 5
Schmidt 110
Schwarz 106
Segre 230
Smith 208, 238
Соломон 6
Sturm 74, 312
Sylvester 37, 130, 195, 289

Thomson 327

Vandermonde 11, 224
Viète 74, 203

Young 324

СТВАРНИ РЕГИСТАР

(Бројеви означавају странице)

- **А**дјунгована детерминанта 78
  - матрица 78
- Адјункта 3
- Адмитанца 327
- Аксијални момент инерције 282
- Алгебарска једначина 2, 203
- Алгебарски комплемент 3, 68
- Алгоритам Gauss-ов 28, 161, 192
- Амперметар 325
- Аналогија директна 327
  - обратна 327
- Апсолутна брзина 275
- Апсолутни вектор 275
- Апсорбер динамички 328
- Аташирана матрица 230
- Афикс 93
- Афина трансформација 120, 268
- Афини простор 120, 268

- **Б**аза простора 103
  - степена 62
- Базични вектори 103
- Banachiewicz-jeва схема 164, 188, 193
- Bézout-ов став 204
- Билинеарна форма 127
- Блок Jordan-ов 231
- Брзина апсолутна 275
  - генералисана 284
  - електрона 288
  - преносна 275
    - обимна 275
    - транслаторна 275
  - простирања таласа 314
- Број димензија простора 104
  - инверзија 2
  - ирационални 90
  - карактеристични 216
  - комплексни 91
  - коњуговани 91
  - пермутација 2
  - рационални 90
  - реални 90
  - својствени 216
- Број степени слободе 284
  - цео 91

- **V**andermonde-ова детерминанта 11, 224
- Веза динамичка 308
  - коначна 284
  - нехолономна 284
  - скелерономна 286
  - стална 284
  - стационарна 284
  - холономна 284
  - цела 284
- Вектор врста 97
  - главни 291
  - дводимензионални 95
  - другог реда 95
  - јединични 108, 327
  - једнодимензионални 95
  - карактеристични 223
  - колона 97
  - модални 223
  - нула 97
  - ортонормирани 109, 237
  - положаја апсолутни 275
    - релативни 275
  - померања 321
  - променљив 97
  - променљива форме 116
  - својствени 223
  - сопствени 223
  - сталан 96
  - супротни 97
- Вектори базични 103
  - когредијентни 122
  - контрагредијентни 122
  - линеарно зависни 97
    - независни 103
  - ортогонални 242
  - основни 103
  - унитарни 242
- Векторски производ вектора 119
  - простор 102
- Верзор 93, 272
- Верзорска схема 272

Верижно правило 56
Viète-ови проширени услови 203, 216
Вишеструка нула 203, 250
Вишеструки корен 203, 250
Волтметар 325
Вредност матрице карактеристична 216
        својствена 216
        сопствена 216
    стационарна 243

Gauss-ов алгоритам 28, 161, 192
    -ова раван 93
        теорема 319
Генералисана брзина 284
    координата 284
    сила 285
Генералисани импулс 287
Главне координате 193
        нормалне 237
    осе инерције 283
Главни вектор 104, 291
    момент система сила 99, 104, 281
    моменти инерције 283
    скалар 215
Gram-ова детерминанта 112
    матрица 112
Гранични услови 314
        допунски 316
Густина наелектрисања 288

Дводимензиони вектор 104
    простор 104
Дегенеративна форма 129
Дегенерација матрице 75
Делилац десни 207
    детерминантни 209
    елементарни 209
    заједнички 209
    леви 207
    од нуле 57
Дељење матрица 81
Десна ротација 268
Десни делилац 207
    количник 207
Детерминанта 1
    адјунгована 78
    Vandermonde-ова 11, 224
    Gram-ова 112
    Jacobi-јева 12
    квадратне матрице 66
    производа матрица 73
    регуларна 18
    сингуларна 18
    система 21
    транспонована 7
    унимодуларна 77
    Hurwitz-ова 74
Детерминантни делилац матрице 209
Дефект матрице 75
Деформација 67, 119, 322
Дивизор од нуле 57
Дијагонала главна 1, 239
    споредна 1, 239
Дијаметарски систем координата 237
Дилатација 67, 119, 328
    запреминска 68, 322
Динамика 281
Динамичка матрица 289
Динамичке везе 308
Динамички апсорбер 328
    закони 281
Дисипативна матрица 312
    функција 312
Дисјунктни скупови 90
Дискриминанта квадратне форме 129
Диференција скупа 90
Диференцијал матрице 207
Диференцирање детерминанте 33
    матрице 207
Дуални утицајни коефицијенти 43

Еквивалентна трансформација 139, 208
Еквивалентне матрице 139, 208
    кв. форме 195
Експонент степена матрице 12
Екстензија вектора 119
Екстремне вредности кар. броја 241
Еластична тела 289
Електрична импеданца 327
Електрични товар 288
Електрично коло 288
Електромагнетско поље 288
Елемент активни 324
    детерминанте 3
    матрице 38
    неутрални 48, 92
    пасивни 324
    стожерни 31
Елементарне матрице 137
    трансформације 136
Елементи векторског простора 102
    матрице 38
Елиминанта система једначина 25
Елипсоид инерције 320
    напона 320
Енергија кинетичка 130, 282
    потенцијална 130, 285
    тотална 285
Hermite-ов нормални облик 142
Ермитска матрица 39
    форма 133
Еуклидов простор 107

Jordan-ов блок 231
    класични облик 239
    нормални облик 239
Jordan-ова матрица 231
Joubert-ово правило 327

Зависност вектора линеарна 97
Завојно кретање 280

Заједнички део два скупа 90
  делилац 209
    највећи 209
Закон асоцијативни 47
  динамички 281
  дистрибутивни 56
  инерције кв. форме 195
  Kirchoff-ов 323
  комутативни 47
  нулости 195
  о комутацији детерминанти 16
  Ohm-ов 324
  Sylvester-ов 195
  Faradey-ев 325
  Hooke-ов 323
Замах система 281
Збир вектора 96
  кватерниона 94
  матрица 47
  полинома 202
  скупова 90

Извод квадратне форме 243
  матрице 207
Извор напона 324
  струје 324
Издужење вектора 119
Изоформизам 92
Израчунавање детерминанте 3
  инверзне матрице 183
Имагинарна јединица 92
Импулс 288
  генералисани 288
Инваријанта деформација 67
  напона 67, 323
Инваријантни правци 224
  фактор 209
Инверзија 2
Инверзна матрица 81, 183
  трансформација 118
Инволуција 63
Индекс кв. форме 195
  матрице 233
Индуктивни калем 324
Инерцијска матрица 282
Инклузија 90
Интензитет вектора 106
  матрице 68
Иредуцибилан полином 203

Jacobi-јева детерминанта 12, 293
  матрица 41
Јачина поља електричног 288
    магнетског 288
Јединица комплексна 93
Јединични вектор 108, 237
Једнакост вектора 96
  матрица 46
Једначина алгебарска 2, 203
  карактеристична 214, 257
  Clapeyron-ова 30
  ламбда 214
Једначина минимална 233
  Euler-ова 270
  секуларна 73, 215
Једначине канонске 287
  контурне 328
  Cauchy-јеве 318
  Langrange-ове друге врсте 284
    прве врсте 285
  Maxwell-Lorentz-ове 288
  Navier-ове 318
  Newton-ове 281
  нормалне 60
  Euler-ове динамичке 283
    кинематичке 126, 273
  Hamilton-ове 287
  чворне 328
Једнодимензиони простор 104

Канонска матрица 142
Канонске једначине 288
Канонски облик кв. форме 108, 131, 191, 237
Cantor-ов став 93
Капацитанца 327
Капацитет кондензатора 324
Карактеристика
  матрице 75
  детерминанте 18
  Segre-ова 239
Карактеристична вредност 216
  једначина 214
  матрица 214
Карактеристични број 216, 290
  вектор 223
    ортонормиран 248
  полином 214
Квадратна форма дегенеративна 129, 194
  дефинитна 130
  индефинитна 194
  негативно дефинитна 194
  позитивно дефинитна 194
  реална 130
  регуларна 129
  семидефинитна 130
  сингуларна 129
Квазиеластична матрица 289
Кватернион 94, 272
Cayley-Hamilton-ова теорема 232
König-ова теорема 282
Кинематика 270
Кинетичка енергија 130, 282
Кинетички потенцијал 285
Clapeyron-ова једначина 30
  теорема 131
Класа 90
Класични облик матрице 239
Клизање 67, 120, 322
Когредијентна матрица 122
  трансформација 129
Коефицијент
  водећи 202

Коефицијент гипкости греде 301
  Poisson-ов 324
Коефицијенти еластичности 323
  квазиеластични 289
  композитума 117
  Lamé-ови 324
  матрице 117
  полинома 202
  успостављања 289
  утицајни 300, 304
   дуални 43
Колекција 90
Колинеарна трансформација 122
Колинеарни вектори 97
Количина електрицитета 288
  кретања 281
Количник десни 207
  леви 207
  матрица 82
  полинома 202
   матричних 207
  Rayleigh-ов 241
Компатибилност 175
Компланарни вектори 98
Комплексна јединица 93
Комплексни број 91
Компоненте вектора 103
Компонентне деформације 67
Компонентни напони 67
Компресија 119
Конгруентна трансформација 132
  матрица 131
Кондензатор 324
Кондуктивност 327
Конзервативни систем 289
Континуални носач 316
Контрагредијентна матрица 129
  трансформација 129
Контракција 109
Контролна релација 169
Контурне једначине 328
Контурни услови 314
Координате
  вектора 103
  генералисане 284
  главне 193, 291
  матрице 38
  нормалне 237, 291
Координатни систем 103
Корен полинома 203
   вишеструки 203
   једноструки 203
   прости 203
Корени чинилац 203
Косинуси смера 269
Косоермитска матрица 40
  форма 134
Кофактор 3, 68
Cauchy-Schwarz-ова неједначина 133
Cauchy-јеве једначине 318
  функције 314
Cramer-ове формуле 22
Cramer-ово правило 2, 77, 161

Криловљева метода 246
Christofell-ов симбол 286
Критеријум Sylvester-ов 289
Kronecker-Capelli-јев став 175
Kronecker-ов симбол 8, 100
Кулон 325

Laguerre-ови полиноми 310
Lagrange-ов поступак 191
Lagrange-ова функција 285
Lagrange-ове једначине друге врсте 284
   прве врсте 285
Ламбда једначина 214
  матрица 205, 243
Laplace-ов развој детерминанте 69, 209
Лева ротација 268
Леви делилац 207
  количник 207
Lejeune-Dirichlet-ова теорема 209
Линеарна зависност вектора 97
  трансформација вектора 12, 118, 267
   регуларна 118
   сингуларна 118
  форма 116
Линеарни композитум 117
  простор 102
  систем вектора 102
  фактор полинома 203
Линеарно пресликавање 118
Lorentz-ова матрица 238
  сила 288
Lorentz-ови услови 288

Маса 281
  мировања честице 288
  система 284
Масени момент инерције 283
  центрифугални момент 282
Материјална тачка 281
Материјални системи 289
   склерономни 286
   холономни 285
Матрица адјунгована 78
  алтернирајућа 39
  антиермитска 40
  антисиметрична 39
  аташирана 230
  бесконачна 37
  врста 37, 186
  Gram-ова 112
  дегенеративна 66
  дијагонална 40
  динамичка 289
  дисипативна 312
  еластичности 323
  ермитска 39
  Jordan-ова 231
  идемпотентна 63
  идентична 40
  индефинитна 37
  инверзна 81

- Матрица инверзна
    - десна 81
    - лева 41
  - инволутивна 63
  - инерцијска 202
  - Jacobi-јева 41
  - јединична 40
  - једноредна 37, 186
  - карактеристична 214
  - карактеристичних вектора 236
  - квадратна 37
  - квазиеластична 289
  - коефицијенат 117
  - колона 37, 186
  - комплексна 38 59
  - композитума 117
  - коначна 38
  - коњугована 38
  - коса 39
  - косоермитска 40
  - кососиметрична 39
  - ламбда 205, 243
  - Lorentz-ова 236
  - матрица 64
  - модална 236
  - мрежаста 231
  - напонска 318
  - негативно дефинитна 242
  - недегенеративна 66
  - несингуларна 66
  - нилпотентна 63
  - нормална 60
  - нула 51
  - Euler-ова 274
  - оператор 118
  - општа правоугаона 37
  - ортогонална 76, 123
  - параметарска 205
  - пермутациона 137
  - позитивно дефинитна 66, 242
  - полуинволутивна 63
  - правоугаона 37
  - пратилица 230
  - придружена 230
  - променљива 38, 205
  - реална 38, 60
  - регуларна 66
  - реципрочна 81
  - састављена 188
  - сводљива 234
  - сингуларна 66
  - симетрична 39
  - скаларна 41
  - слична 122
  - стална 38
  - сужена 234
  - транспонована 38, 49
  - трансформације координата 44, 121
  - троугласта 41
    - горња 41
    - десна 41
    - доња 41
    - лева 41
- Матрица унитарна 76
  - утицајних коефицијената 83
  - Frobenius-ова 230, 244
  - функционална 321
  - Hessenberg-ова 252
- Матрице адјунговане 77
  - алтернативне 39
  - антиермитске 40
  - антисиметричне 39
  - дијагоналне 40
  - еквивалентне 139, 208
  - елементарне 136
  - ермитске 39
  - инверзне 118
  - инволутивне 63
  - когредијентне 122
  - компатибилне 48, 53
  - комплексне 59
  - конгруентне 131
  - коњуговане 38
  - коњуктивне 327
  - косе 39
  - косоермитске 40
  - кососиметричне 39
  - ортогоналне 76, 123
  - параметарске 205
  - променљиве 205
  - сагласне 48, 53
  - симетричне 39
  - супротне 48
  - унимодуларне 76
  - унитарне 76
- Maxwell-ови утицајни коефицијенти 42
    - дуални 43
- Матрична функција 205
- Матрични полином 206,
- Матрично множење 53
  - одузимање 48
  - сабирање 46
  - решавање система једначина 161
- Међа матрице горња 241
- Међуконтроле 119
- Метода Данилевског 244
  - Крылова 246
  - Hessenberg-ова 251
  - Cholesky-ог 173
  - Chiò-a 31
- Метрички простор 107
- Минимална једначина 233
- Минимални полином 233, 250
- Минор 68
  - вишег реда 18
  - главни 70
  - комплементни 68
  - основни главни 72
- Множење вектора
    - векторско 119
    - диадско 53
    - матрично 53
    - скаларно 106
  - детерминанти 15
  - матрица 53

Множење матрице бројем 51
Множина 90
Мноштво 90
Модална матрица 236
Модални вектор 223
Модул вектора 105
  еластичности 234
  Young-а 324
  клизања 324
  матрице 68
Момент инерције 282
  силе 104, 118
  система сила 104
  центрифугални 282

N-то мерни простор 104
N-тоедар, правоугли 104
Navier-ове једначине 319
Наелектрисање 327
Највећи зај. делилац 209
Напон главни 320
  нормални 67, 317
  тангенцијални 67, 317
  тотални 317
Напонска матрица 318
Напонско стање 318
Недељив полином 203
Неједначина Cauchy-Schwarz-ова 133
  Hadamard-ова 133
Непознате неодређене 180
  слободне 180
  статичке 84
  условљене 180
Неутрални елемент 92
Норма вектора 106
  матрице 68
Нормална функција 314
Нормални напон 317
  облик матрице 143, 208, 239
      параметарске 210
Нормирани вектори 100, 237
Нула вектор 97
  комплексна 203
  матрица 51
  полином 202
  полинома 203
  вишеструка 203
  једнострука 203
  проста 203
  реална 203
Нулитет матрице 75

Newton-ов закон 281

Објект 90
Облик Hermite-ов
  канонски кв. форме 108, 131
    матрице 142
  нормални матрице
    Jordan-ов 239
    Smith-ов 210
Обртање око тела непомичне осе 272
      тачке 272
Одредница 1
Одузимање вектора 96
  матрица 48
Euler-ова матрица 274
Euler-ове једначине
      динамичке 283
      кинематичке 126, 273
Euler-ови углови 273
Ом 325
Ohm-ов закон 324
Оператор трансформације 138
Операције елементарне линеарне 118
Оптерећење кондензатора 324
Општи проблем са каракт. вредностима 256
Ортогонализација вектора 110
  Gram-Schmidt-ова 110
Ортогонална матрица 76, 123, 267
  трансформација 123, 267
Ортогонални вектори 107
Ортогоналност проширена 259, 291
Ортонормирани вектори 109, 237
Оса завртња 280
Осе главне 273
Основа простора 103
      ортонормирана 110
  степена матрице 62
Основни вектори 103
  став алгебре 203
Основно правило о коњугованости напона 318
Остатак полинома 202
Осцилације главне 291
  дискова на греди 294
  маса на греди 299
      струни 295
  попречне 299
  својствене 290
  торзијске 294
  хомогених греда 314
Отпор активни 327
  индуктивни 327
  капацитетни 327
  привидни 327
  термогени 327
Отпорник 324

Параметарска матрица 205
Партиција матрице 64
Пермутација 2
Пермутациона матрица 137
Пертурбација планетског кретања 75
Подскуп 90
Пол брзине 278
  тренутни 278
  убрзања 278
Полином иредуцибилан 203
  једначине 203
  карактеристични 214
  комплексан 202
  Laguerre-ов 310
  матрични 206
  минимални 233, 250

- Полином моничан 202
  - недељив 203
  - нула 202
  - нултог степена 202
  - реалан 202
  - стабилан 74, 312
  - Hurwitz-ов 312
- Полиномски домен 202
- Поље бројева 90
  - електрично 288
  - електромагнетско 288
- Попречне осцилације маса на греди 299
  - струни 295
- Поремећај кретања планета 73
- Постдивизија 82
- Постмултипликација 188
- Поступак
  - Gauss-ов 28, 161, 192
  - Lagrange-ов 191
- Потенцијал векторски 288
  - скаларни 288
- Потенцијална енергија 282, 289
  - функција 289
- Потпростор 104
- Почетни вектор 244
- Правило верижно 56
  - Joubert-ово 327
  - Cramer-ово 161
  - о паралелограму сила 95
  - основно о коњуг. напона 318
  - Sarrus-ово 5
- Правци главни 283, 320
  - инваријантни 224
- Први скалар матрице 67
- Преддивизија 82
- Преносна брзина 275
- Преносно кретање 275
- Пресек два потпростора 104
  - скупа 90
- Пресликавање 92
  - инволутивно 63
- Привидни отпор кола 327
- Придружена матрица 230
- Принцип солидификације 43
- Пробе 169
  - мешовите 60
  - по врстама 60
    - колонама 60
- Проводност активна 327
  - реактивна 327
  - сложена 327
- Производ вектора 59
  - два скупа 90
  - здесна 55
  - матрица 53
  - полинома 202
  - слева 55
- Пројекције вектора 100
- Променљива матрица 205
- Променљиве Lagrange-ове 287
  - Hamilton-ове 207
- Проста нула 203
- Прости корен 203
- Простор афини 120, 265
  - векторски 102
  - дводимензиони 104
  - Еуклидов 107
  - линеарни 102
  - метрички 107
  - тродимензиони 98
  - унитарни 107
  - фазни 287
- Просторни систем координата 103
  - сила 104
- Проширена ортогоналност 259
- Прстен бројева 91

- **Р**аван Gauss-ова 93
  - главна 320
- Равно кретање тела 277
- Развој детерминанте 2, 244
  - по Laplace-у 209
- Раздељивање матрице 64
- Разлагање матрице 50
- Разлика вектора 96
  - матрица 49
  - потпростора 104
- Разлагање вектора на компоненте 103
  - у правцима кар. вектора 245
- Ранг векторског простора 104
  - матрице 66
  - производа матрица 67
- Реактанца 327
- Реакција везе 285
  - кола 327
- Резонанса напонска 327
- Резултанта 95
  - система једначина 25
- Rayleigh-ов количник 241
- Релативна брзина 275
- Релативно кретање тачке 275, 278
  - убрзање 275, 278
- Репер 103
- Решење идентичко 178
  - једнозначно 179
  - нетривијално 180
  - опште 180
  - партикуларно 182
  - система једначина 176
  - тривијално 178
- Решеткасти носач 43
- Реципрочна матрица 81
- Ritter-ова метода 105
- Ротација десна 44, 268
  - директна 44
  - индиректна 44
  - координатног система 267
  - лева 44, 268
  - негативна 44
  - позитивна 44

- **С**абирање вектора 96
  - матрица 46
- Савојна крутост греде 83
- Сагласност 175
- Sarrus-ово правило 5

Сачинилац самоиндукције 325
Својствена вредност 216
Својствени вектор 223
Свођење квад. форме на канонски облик 191
  матрица 41
Segre-ова карактеристика 233
Секуларна једначина 215
Сигнатура форме 195
Сила
  генералисана 285
  инерције 316
  Lorentz-ова 288
Sylvester-ов закон о инерцији кв. форме 195
  критеријум 130
Симбол Christofell-ов 286
Симетричност 122
Сингуларна кв. форма 129
  матрица 66
Систем једначина компатибилан 175
  линеаран 21
  немогућ 24
  неодређен 23
  несагласан 175
  нехомоген 162
  противречан 23
  сагласан 175
  хомоген 16, 179
  материјални склерономни 286
    холономни 284
  правоугли векторски 103
  референције простора 103
Скалар главни основни 215
  први 67
Скалари матрице 71
Скаларни производ вектора 106
Скуп бескрајан 90
  коначан 90
  празан 90
  пребројив 90
  пуст 90
Скуп бројева ирационалних 90
  рационалних 90
  реалних 90
  целих 91
Скупови дисјунктни 90
  линеарно еквивалентни 103
Слика вектора 118
  комплексног броја 93
Слична матрица 122
  трансформација 122
Smith-ов нормални облик 210
Снага активна 327
  привидна 327
  реактивна 327
  тренутна 327
Соломоново слово 6
Сопствена вредност 216
Сопствени вектор 223
Спектар матрице 216
Спектрална декомпозиција матрице 265
Спрегнути систем силама 292
Средиште материјалног система 281
Стационарна вредност 243
Степен дегенеративности форме 194
  матрице 62
  полинома 202
Степеновање матрице 62
Став Bézout-ов 204
  Cantor-ов 93
  Kronecker-Capelli-јев 175
  основни алгебре 203
  Pouché-Capelli-јев 176
  Helmholtz-ов 320
Стожерна врста 31
  колона 31
Стожерни елемент 31
Субдетерминанта 18
Субматрица 68, 186
Супердијагонала 239
Супердијагонална матрица 239
Суперматрица 64
Супротни вектори 97
Схема Banachiewicz-јева 164, 188, 193
  верзорска 272
  Cholesky-јева 173
  Horner-ова 204

Тачка 90
  материјална 281
Тело изотропно 323
  хомогено 323
Тензор деформација 67
  напона 67
Теорема Gauss-ова 319
  Cayley-Hamilton-ова 232
  König-ова 282
  Clapeyron-ова 131
  Maxwell-ова 42, 288
Тип матрице 37, 53
Товар електрични 288
Торзер 104
Торзијске осцилације 314
Траг матрице 67
  Gram-ове 112
Транзитивност 122
Транспозиција 7
Трансверзалне осцилације греда 314
  маса на греди 299
Трансформација афина 120, 268
  инверзна 118
  инволутивна 63
  когредијентна 122
  контрагредијентна 129
  колинеарна 122
  коњуктивна 327
  линеарна 47
  Lorentz-ова 238
  ортогонална 123
    неправа 76
    права 76
  регуларна 66
  слична 122
  унитарна 77

Трансформације еквивалентне 139, 208
  елементарне 136
  матрица 136
Тренутни пол 278
Трогубо математичко клатно 131
Тродимензиони простор 98, 104

Chiô-ова метода 31

Угао нутације 125, 273
  прецесије 125, 273
  сопственог обртања 125, 273
Углови Euler-ови 125, 273
Угиб греде 42
Унија 90
  потпростора 104
Унимодуларна матрица 76
Унитарна матрица 76
Унитарни вектори 242
  простор 107
Услови Viète-ови 203, 216
    проширени 203, 216
  гранични 314
  компланарности вектора 98
  контурни 314
  линеарне зависности 97
  Lorentz-ови 288
  ортогоналности 107, 259, 291
  ортономираности 109, 237
  стационарности 243
  колинеарности вектора 98
  Hurwitz-ови 312
Утицајни коефицијенти за
  померање 83, 300
  обртање 83, 301
  реактивни 334

Фазни простор 287
Фактор инваријантности 209
  полинома 202
  снаге 327
Фарад 325
Faradey-ев закон 325
Форма билинеарна 127
  ермитска 133
  квадратна дегенеративна 129, 194
    дефинитна позитивно 130
      негативно 130
Форма квадратна индефинитна 130
    реална 130
    семидефинитна 130
    сингуларна 129
  линеарна 116
  поларна 127
  косоермитска 133
Форме дефинитне 130
  индефинитне 130
  линеарно зависне 116
    независне 116
  семидефинитне 130
Формула Thomson-ова 327
Формуле Cramer-ове 22
  трансформација координата 126
  чисте ротације 46
Фреквентна једначина 290
Frobenius-ова матрица 230, 244
Функција Lagrange-ова 285
  матрична 205
  расипања 312
  силе 289
  Hamilton-ова 287
Функционална матрица 321

Hadamard-ова неједначина 133
Hamilton-ова функција 287
Hamilton-ове променљиве 207
Helmholtz-ов став 320
Хенри 325
Hessenberg-ова матрица 252
  метода 252
Cholesky-јева схема 173
Холономна веза 284
Холономни систем 284
Хормананција 327
Horner-ова схема 204
Hooke-ов закон 323
Hurwitz-ов полином 312
  услов 312

Центар убрзања 278
Центрифугални момент 282

Чворне једначине 328
Чинилац полинома 203
Члан 90
  водећи 202
  независни 202