U N I V E R Z I T E T   U   N I Š U

P r i r o d n o - m a t e m a t i č k i   f a k u l t e t

Milan Lj. Zlatanović

EKVITORZIONA PRESLIKAVANJA PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2010.

Poznavanje diferencijalne geometrije od velikog je značaja. Njena dostignuća predstavljaju pravu dragocenost za matematičku i teorijsku fiziku u kojoj je našla brojne primene, a takodje i za druge naučne oblasti.

U ovoj disertaciji razmatrana su ekvitorziona preslikavanja preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i to nadovezujući se na ideju prof. dr Svetislava Minčića i prof. dr Miće Stankovića koji su prvi uveli definiciju tog preslikavanja.

Svojim idejama i pitanjima prof. dr Mića Stanković mi je dao inspiraciju za usavršavanje mog rada tokom osnovnih i doktorskih studija, na čemu mu se ovom prilikom srdačno zahvaljujem.

Izuzetnu zahvalnost dugujem prof. dr Svetislavu Minčiću na strpljenju, izdvojenom vremenu i smernicama kojim sam se orjentisao tokom mog naučnog rada. Rečima se teško može opisati zahvalnost koju osećam prema profesoru Minčiću koji me je naučio prvim naučnim koracima i postao moj uzor.

Sa velikim zadovoljstvom zahvaljujem se mom mentoru prof. dr Ljubici Velimirović na posvećenoj pažnji, raznovrsnoj pomoći i savetima koji su me vodili kroz rad.

Dugujem veliku zahvalnost akademiku dr Milevi Prvanović koja je pročitala moj rad i dala korisne sugestije.

Hvala mojoj porodici na velikoj podršci, razumevanju i pomoći koja je bila u granicama njihovih mogućnosti.

Sadržaj

Predgovor

Motivacija za proučavanje prostora sa nesimetričnom afinom koneksijom potiče od A. Ajnštajna. Ajnštajn u toku svog istraživanja 1916. god., objavljuje svoju *Opštu teoriju relativnosti (OTR)*. U (OTR) važi

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \; (g_{ij}(x) = g_{ji}(x)),$$

gde su g_{ij} funkcije tačke u četvorodimenzionalnom Rimanovom prostoru. Veličine $g_{ij}(x)$, $(i, j = 1, \ldots, 4)$ nazivaju se *potencijalima gravitacionog polja.* Kristofelovi simboli Γ^i_{jk}, koji se na poznat način izražavaju pomoću g_{ij}, igraju važnu ulogu veličina u OTR koje odredjuju *jačinu gravitacionog polja.* Ajštajn se nije zadovoljio sa OTR, pa je počev od 1923. god. pa do kraja svog života radio na pronalaženju *Jedinstvene teorije polja (JTP)*, koja bi obuhvatila gravitaciono i elektromagnetno polje. Umesto Rimanovog prostora, uvodi koeficijente koneksije Γ^i_{jk} nezavisno od metričkog tenzora g_{ij}. U daljim radovima koristi kompleksan osnovni tenzor g_{ij}, čiji je realni deo simetričan, a imaginarni antisimetričan po i, j. Neki od rezultata Ajnštajna u vezi sa prostorima nesimetrične afine koneksija dati su u radovima: [11, 12, 13].

Problematikom prostora sa nesimetričnom afinom koneksijom se dosta bavio i L. Ajzenhart, na primer, u radovima [14, 15, 16]. On u radu [16] definiše *generalisani Rimanov prostor* od N dimenzija ($\mathbb{GR}_N$), "kao prostor koordinata sa kojim je povezan nesimetričan tenzor". Kristofelovi simboli Γ^i_{jk} se dobijaju na isti način kao i u Rimanovom prostoru. Oni su u opštem slučaju nesimetrični, tj. sastoje se iz simetričnog i antisimetričnog dela. Antisimetrični deo od Γ^i_{jk} zove se *tenzor torzije* i obeležava se sa $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$. Ajzenhart dobija dva tenzora krivine za $\mathbb{GR}_N$. Osim pomenutih radova, prostorima nesimetrične afine koneksije su se bavili ili se i dalje bave S. Minčić [49]-[61], [95, 96, 98, 99], [103]-[107], [M1, M2, M5, M6, M8], C. Nitesku [65], M. Prvanović [70, 74, 76], M. Stanković [58, 59, 61], [93]-[99], [103, 104, 106, 107], [M2]-[M5], [M7, M9], S. Bohner i K. Yano [5] i mnogi drugi. No i pored toga, mnoga pitanja su ostala nerazjašnjena i mnogi problemi otvoreni.

Prvi koji je razmišaljao o problemu geodezijskog preslikavanja posmatrajući slučaj geodezijskog preslikavanja površi (Rimanovog prostora $\mathbb{R}_2$) na Euklidsku ravan $\mathbb{E}^2$ bio je E. Beltrami, i to 1865. god. Kasnije 1869. god., U. Dini rešio je ovaj problem za širu klasu prostora posmatrajući geodezijsko preslikavanje dve površi ($f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$). Zatim, 1896. god., T. Levi-Čivita našao je osnovnu jednačinu za rešavanje geodezijskog preslikavanja izmedju dva N-dimenzionalna Rimanova prostora. On je u radu [29] došao do problema geodezijskog preslikavanja Rimanovog prostora pri proučavanju jednačina dinamike. Svoj doprinos teoriji geodezijskih preslikavanja su dali T. Tomas i H. Vejl, koji su našli neke geometrijske invarijante geodezijskog preslikavanja: *Tomasov projektivni parametar* T^i_{jk} zadat jednačinom (2.1.6) i *Vejlov projektivni tenzor* $W^i{}_{jmn}$ zadat pomoću (2.1.7). Teorija geodezijskih preslikavanja Rimanovih i prostora afine koneksija je od velikog interesa, kako sa teorijske, tako i sa tačke gledišta primena. Kretanje mnogih tipova mehaničkih sistema, a takodje tela i čestica u gravitacionim i elektromagnetnim poljima, u neprekidnoj sredini, se često vrši po putanjama koje se mogu posmarati kao geodezijske linije. Tako, na primer, dva Rimanova prostora, koja dopuštaju uzajamno geodezijsko preslikavanje, opisuju procese koji se odvijaju, pri ekvivalentim spoljnim opterećenjima, po istim putanjama, ali pri različitim energetskim režimima. Za prostore nesimetrične afine koneksije ($\mathbb{GA}_N$) i generalisani Rimanov prostor ($\mathbb{GR}_N$) su posebno interesantna geodezijska preslikavanja tj. uzajamno jednoznačna korespondencija izmedju tačaka dva prostora, pri kojoj geodezijske linije jednog prostora odgovaraju geodezijskim linijama drugog.

U novije vreme geodezijska preslikavanja Rimanovih prostora i njihova uopštenja su proučavali N. S. Sinjukov, E. N. Sinjukova, J. Mikeš, I. Hinterleitner, V. Kiosak, S. Minčić, M. Prvanović, M. Stanković. Na temu geodezijskih preslikavanja je štampan veliki broj radova, kao i monografije [45, 46, 89].

Konformna preslikavanja Rimanovih prostora i uopštenja, razmatrana su u radovima [1, 67, 69, 78, 79, 89, 97, 114, M2]. Ona se karakterišu vezom medju metričkim tenzorima dva Rimanova prostora $\overline{\mathbb{R}}_N$ i $\mathbb{R}_N$, u zajedničkom sistemu koordinata $\overline{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}$, gde je ψ funkcija tačke $(x^1, \ldots, x^N)$.

Usled konformnog preslikavanja dva Rimanova prostora očuvava se ugao izmedju dve krive. Ako je $\psi = const$, onda se takvo preslikavanje zove *homotetija*. Ako je $\psi = 0$, onda je to *izometrija*. Geodezijske linije prostora $\mathbb{R}_N$ se pri konformnom preslikavanju ne preslikavaju na geodezijske linije prostora $\mathbb{R}_N$. K. Yano [109] je našao uslov pod kojim se pri konformnom preslikavanju Rimanovih prostora geodezijske linije preslikavaju u geodezijske linije. Takva preslikavanja se nazivaju koncirkularna preslikavanja. U slučaju konformnog preslikavanja dva Rimanova prostora javlja se invarijantni geometrijski objekat $C^i{}_{jmn}$ zadat jednačinom (3.1.2) i zove se *tenzor konformne krivine. Koncirkularni tenzor krivine* $\mathcal{Z}^i{}_{jmn}$, zadat jednačinom (3.3.56) je invarijantan u odnosu na koncirkularno preslikavanje dva Rimanova prostora.

Kako ne postoji netrivijalno geodezijsko preslikavanje dva Kelerova prostora $f : \mathbb{K}_N \to \overline{\mathbb{K}}_N$ koje očuvava kompleksnu strukturu, tj. $F_i^h = \overline{F}_i^h$, T. Otsuki i Y. Tasiro, 1954. god. u radu [66] definišu *analitički planarne krive*, kao uopšenje geodezijskih krivih. Holomorfno-projektivna preslikavanja Kelerovih prostora su preslikavanja pri kojima analitički planarne krive prelaze u analitički planarne krive.

Ova disertacija se bavi specijalnim preslikavanjima prostora nesimetrične afine koneksije tzv. (ET) ekvitorzionim preslikavanjima. Razmatraju se ET-geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije, ET-konformna preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora, ET-koncirkularna preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora i ET-holomorfno-projektivna preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora. Zbog nemogućnosti uopštenja Vejlovog projektivnog tenzora, ekvitorziona preslikavanja su uveli Minčić i Stanković u radu [59].

Definicija 2.3.1. (Minčić, S. M., Stanković, M., (1997), [59]) *Geodezijsko preslikavanje* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *je* **ekvitorziono (ET) geodezijsko preslikavanje** *ako su tenzori torzija dva prostora* $\mathbb{GA}_N$ *i* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *u zajedničkom koordinatnom sistemu jednaki. Tada iz (2.2.8) sledi*

$$\underset{\vee}{\overline{L}^i_{jk}} - \underset{\vee}{L^i_{jk}} = \xi^i_{jk} = 0. \tag{2.3.1}$$

Koristeći rezultate iz teorije geodezijskih, konformnih i holomorfno projektivnih preslikavanja prostora simetrične afine koneksije, kao i rezultate za generalisane Rimanove prostore i prostore nesimetrične afine koneksije, u disertaciji su prošireni neki od postojećih rezultata, a takodje su izneti i originalni publikovani rezultati [M2, M3, M4, M5, M7]. Rad sadrži i značajan broj rezultata koji se ovom prilikom prvi put pojavljuju.

Disertacija se sastoji iz 5 glava:

(1) Diferencijabilne mnogostrukosti-uvodni pojmovi;

(2) Geodezijska preslikavanja;

(3) Konformna preslikavanja;

(4) Generalisani Kelerovi prostori;

(5) Holomorfno-projektivna (HP) preslikavanja;

Svaka glava je podeljena na nekoliko poglavlja, a poglavlja na odeljke. Na kraju je dat spisak literature po abecednom redosledu. Ukratko ćemo izložiti sadržaj rada po glavama.

U prvoj glavi date su osnovne definicije i relacije koje se odnose na prostore nesimetrične afine koneksije i generalisane Rimanove prostore. Data je i definicija sistema PDJ Košijevog tipa u odnosu na četiri vrste kovarijantnog izvoda.

Rezultati sadržani u drugoj glavi odnose se na ekvitorziona (ET) geodezijska preslikavanja. U prvom poglavlju ove glave dajemo prikaz osnovnih definicija i pojmova vezanih za geodezijska preslikavanja prostora simetrične afine koneksije, sa posebnim osvrtom na invarijante geometrijske objekte ovog preslikavanja Tomasov pojektivni parametar i Vejlov projektivni tenzor.

Drugo poglavlje sadrži pregled poznatih rezultata u vezi sa geodezijskim preslikavanjima prostora nesimetrične afine koneksije.

U trećem poglavlju druge glave proučavaju se ET-geodezijska preslikavanja. Prvo su odredjeni potrebni i dovoljni uslovi za ET-geodezijsko preslikavanje $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ (Teorema 2.3.4.-Teorema 2.3.7.) i $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ (Teorema 2.3.9.-Teorema 2.3.12.). Nalaženje invarijantnih geometrijskih objekata ET-geodezijskog je predmet narednog, odeljka u ovom poglavlju. Polazeći od opšteg tenzora krivine nadjena je invarijanta geodezijskog preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i generalisanih Rimanovih prostora (Jednačina (2.3.73)). Dokazano je da postoji tri ET-projektivna tenzora. Polazeći od opšteg pseudotenzora krivine nadjena je invarijanta geodezijskog preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i generalisanih Rimanovih prostora (Jednačina (2.3.92)). Veličine $\underset{2}{\mathcal{E}}, \underset{4}{\mathcal{E}}, \underset{5}{\mathcal{E}}$ date redom jednačinama (2.3.81), (2.3.83) i (2.3.84), su tenzori koji su invarijantni u odnosu na ET-geodezijska preslikavanja $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ i zovemo ih ET-projektivnim tenzorima. Veličine $\underset{1}{\mathcal{E}}, \underset{3}{\mathcal{E}}$, i $\mathcal{AE}$ date jednačinama (2.3.80), (2.3.82), (2.3.92), redom, jesu invarijantni objekti ovih preslikavanja, ali nisu tenzori, zovemo ih ET-projektivnim parametrima. Sve ove veličine koje smo dobili jesu uopštenje Vejlovog projektivnog tenzora (2.1.7).

U narednim odeljcima 2.3.4 i 2.3.5 ispituje se slučaj ekviafinog prostora (kada je Ričijev tenzor simetričan nulte vrste, prve vrste, ..., pete vrste). Takodje, se razmatra slučaj kada je Ričijev tenzor antisimetričan (nulte vrste, prve vrste, ..., pete vrste). Simetrija, odnosno antisimetrija jednog od njih ne povlači simetriju odnosno antisimetriju ostalih. Osim toga značajnu ulogu ima i Ričijev tenzor pridruženog prostora simetrične afine koneksije (Ričijev tenzor nulte vrste). Ispitana su geodezijska preslikavanja ekviafinih i anti-ekviafinih prostora, i nadjene su neke geometrijske invarijatne ovih prostora. U odeljku 2.3.6 se razmatraju invarijantni geometrijski objekti ET-geodezijskog preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora.

U trećoj glavi razmatraju se konformna preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora. U prvom odeljku treće glave su navedeni neki poznati rezultati za konformna preslikavanja dva Rimanova prostora. Ovo poglavlje predstavlja teorijski uvod za naredno u kome ćemo proučavati konformna preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora. U poglavlju 3.3 su posmatrana ET-konformna preslikavanja dva generalisana Rimanova prostora, tj. opet preslikavanja pri kojima su tenzori torzija isti u odnosu na zajedničke lokalne koordinate. Polazeći od opšteg tenzora i opšteg pseudotenzora konformnog preslikavanja dva generalisana Rimanova prostora, dobijaju se invarijantni geometrijski ovih preslikavanja $\mathcal{C}$ i $\mathcal{AC}$, dati redom jednačinama (3.3.31) i (3.3.53). Dokazano je da postoji pet ET-konformna tenzora (Teorema 3.3.3).

Kako pri konformnim preslikavanjima dva generalisana Rimanova prostora geodezijske linije se ne preslikavaju u geodezijske, to su uvedena specijalna preslikavanja, koncirkularna preslikavanja (Definicija 3.3.2). To su preslikavanja kada konformno preslikavanje postaje geodezijsko. U odeljku 3.3.2 odredjujemo neke invarijantne geometrijske objekte koncirkularnih preslikavanja dva generalisana Rimanova prostora (Teorema 3.3.6).

Četvrta glava ovog rada posvećena je generalisanim Kelerovim prostorima. Na početku su date osnovne definicije Kelerovih prostora. Kako kompleksna struktura F_i^h ne može biti u isto vreme kovarijantno konstantna u odnosu na više vrste kovarijantnog diferenciranja, to postoje generalisani Kelerovi prostori prve, druge, treće i četvrte vrste. U ovoj glavi odredjeni su potrebni i dovoljni uslovi za postojanje geodezijskog preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora na generalisani Kelerov prostor i to za svaku vrstu (Teorema 4.2.4-Teorema 4.2.7). Takodje su nadjeni potrebni i dovoljni uslovi postojanja ET-geodezijskog preslikavanja pomenutih prostora (Teorema 4.2.8-Teorema 4.2.11).

U petoj glavi su proučavana holomorfno-projektivna (HP) preslikavanja dva generalisana Kelerova prostora prve, druge, treće i četvrte vrste. Kako nije moguće naći netrivijano geodezijsko preslikavanje dva generalisana Kelerova prostora pri kome se očuvava struktura F_i^h, definisane su analitički planarne krive. Nadjeni su invarijantni geometrijski objekti generalisanih Kelerovih prostora, polazeći od opšteg tenzora (Jednačina (5.2.26)). Pokazano je da za ovo preslikavanje postoji tri ET-holomorfno projektivna tenzora krivine. Veličine $\underset{2}{\mathcal{HPW}}, \underset{4}{\mathcal{HPW}}, \underset{5}{\mathcal{HPW}}$ date redom jednačinama (5.2.28), (5.2.30) i (5.2.31), su tenzori koji su invarijantni u odnosu na ET-HP-preslikavanja $f : \ \mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N \to \mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, $f : \ \mathbb{G}\underset{2}{\mathbb{K}}_N \to \mathbb{G}\underset{2}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ i zovemo ih HP-tenzorima. Veličine $\underset{1}{\mathcal{HPW}}, \underset{3}{\mathcal{HPW}}$, date jednačinama (5.2.27), (5.2.29), jesu invarijantni objekti ovih preslikavanja, ali nisu tenzori, zovemo ih HP-parametrima.

Glava 1

Diferencijabilne mnogostrukosti-uvodni pojmovi

1.1 Diferencijabilna mnogostrukost

U ovoj glavi definisaćemo neke osnovne pojmove iz Diferencijalne geometrije. Detaljna objašnjenja mogu se naći u knjigama P. Raševskog [83] (П. К. Рашевский, ruski matematičar), J. Shoutena i D. Strojka [86] (Jan A. Schouten, 1883-1971, holandski matematičar, Dirk J. Struik, 1894-2000, holandski matematičar), N. Sinjukova [89] (Николай С. Синюков , 1925-1971, ruski matematičar), K. Yana i S. Bohnera [112] (Kentaro Yano, 1912-1993, japanski matematičar, Salomon Bochner, 1899-1982, poljski matematičar), J. Mikeša, V. Kjosaka i A. Vanžurove [45] (Josef Mikeš, česki matematičar, Volodymyr Kiosak, ruski matematičar, Alena Vanžurová, češki matematičar), I. Sokolnikova, [92] (Ivan S. Sokolnikov, 1901-1976, ruski matematičar), T. Andjelića [2] (Tatomir Andjelić, 1903-1993, srpski matematičar), S. Minčića i Lj. Velimirović [62, 63] (Svetislav M. Minčić, srpski matematičar, Ljubica S. Velimirović, srpski matematičar) i drugih.

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup. Familija $\tau = \{\bigcup_\alpha \mid \alpha \in A\}$ podskupova skupa X je* **topologija** *na X, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

- $\emptyset \in \tau, X \in \tau$,
- *unija elemenata proizvoljne podfamilije iz τ je element iz τ,*
- *presek konačnog broja elemenata iz τ je element iz τ.*

Skup X zajedno sa topologijom na njemu je **topološki prostor***, sa oznakom $(X, \tau) \equiv X$.*

Elementi skupa X su *tačke*, a elementi familije τ su *otvoreni podskupovi* u X.

Definicija 1.1.2. *Topološki prostor X je* **Hausdorfov prostor***, ako za svaki par tačaka $x, y \in X$, $x \neq y$, postoje okoline $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ takve da važi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.*

Definicija 1.1.3. *Preslikavanje $f : X \to Y$ je* **homeomorfizam** *ako je bijektivno i ako su $f : X \to Y$ i $f^{-1} : Y \to X$ neprekidna preslikavanja.*

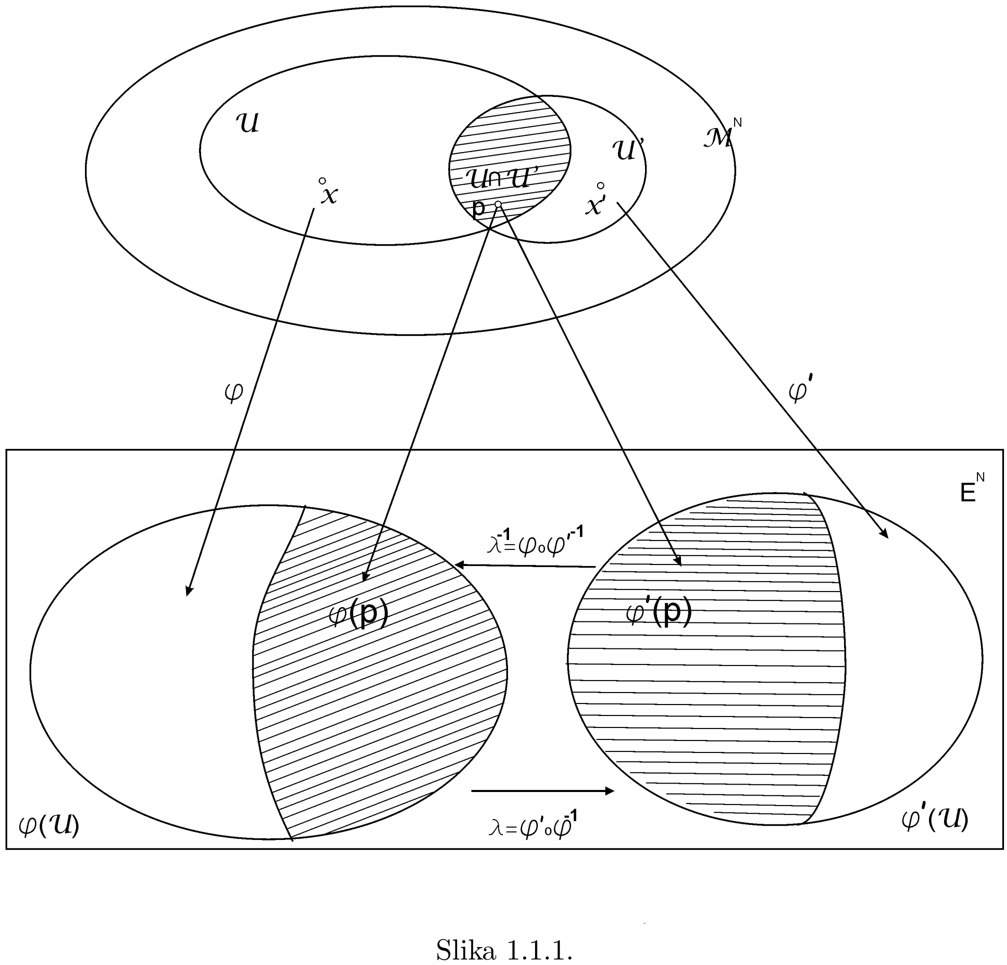
Definicija 1.1.4. *Neka je $\mathcal{U}_p$ okolina tačke p, gde je $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{M}^N$ i $\mathcal{M}^N$ je N dimenzionalni Hausdorfov prostor. Neka je dat homeomorfizam φ skupa $\mathcal{U}_p$ na otvoren skup u $\mathbb{E}^N$, gde je $\mathbb{E}^N$ euklidski prostor, onda se par $(\mathcal{U}_p, \varphi)$ zove* **lokalni koordinatni sistem** *ili* **lokalna karta**. *Skup $\mathcal{A}$ svih lokalnih karata, $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{M}^N\}$ je* ***(topološki) atlas*** *na $\mathcal{M}^{\mathrm{N}}$. Okoline $\mathcal{U}_\alpha$ se zovu* ***koordinatne okoline****, a homeomorfizmi φ_α su* ***koordinatni homeomorfizmi****.*

U ovom slučaju uzimamo x^i za koordinate tačke p. Pretpostavimo da se $\mathcal{M}^N$ na ovaj način može prekriti okolinama i ako je $(\mathcal{U}'_p, \varphi')$ drugi lokalni koordinatni sistem za istu tačku p tj. $p \in \mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}'_p$, biće $x^{i'}$ druge lokalne koordinate za tačku p, pri čemu pretpostavljamo da postoji u $\mathbb{E}^N$ preslikavanje

$$\lambda : \varphi(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}'_p) \to \varphi'(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}'_p).$$

Ovom preslikavanju odgovara *transformacija lokalnih koordinata*

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^N), \quad i' = 1', \ldots, N'. \tag{1.1.1}$$



Slika 1.1.1.

Ako pretpostavimo da je preslikavanje $\lambda = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ uzajamno jednoznačno i neprekidno, postoji inverzno preslikavanje $\lambda^{-1} = \varphi \circ \varphi'^{-1}$, pa iz (1.1.1) sledi

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{N'}), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.1.2}$$

Definicija 1.1.5. *Skup $\mathcal{M}^N$, zajedno sa skupom $\{(\mathcal{U}_p, \varphi)\}$ lokalnih koordinatnih sistema, pri čemu funkcije (1.1.1, 1.1.2) za transformaciju lokalnih koordinata imaju neprekidne parcijalne izvode svakoga reda i*

$$J = \frac{\partial(x^1, \ldots, x^N)}{\partial(x^{1'}, \ldots, x^{N'})} \neq 0,$$

zove se **diferencijabilna mnogostrukost**. *Broj N je* **dimenzija mnogostrukosti** $\mathcal{M}^N \equiv \mathcal{M}$.

1.2 Vektori i tenzori

Tangentni vektor na mnogostrukosti uveden je kao tangentni vektor krive. Kriva

$$C: \ x = x(t) = (x^1(t), \ldots, x^N(t))$$

klase C^r je preslikavanje intervala $I \subset \mathbb{R}$ na $\mathcal{M}$.

Da bismo definisali tangentni vektor mnogostrukosti, setimo se najpre izvoda neke funkcije, na primer $f(x^1, x^2, x^3)$ u $\mathbb{E}^3$ u pravcu vektora $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ u datoj tački $p(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ i taj vektor obeležimo sa $\mathbf{v}_p$. Ako pomenuti izvod obeležimo $\mathbf{v}_p(f)$, imamo:

$$\mathbf{v}_p(f) = (\frac{\partial f}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} v^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} v^3) \mid_p = \frac{\partial f}{\partial x^q} v^q \mid_p \tag{1.2.1}$$

Za dati vektor $\mathbf{v}_p$, biće $\mathbf{v}_p(f) \in \mathbb{R}$. Dakle,

$$\mathbf{v}_p : f \to a \in \mathbb{R} \tag{1.2.2}$$

pri čemu za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i f , g diferencijabilne funkcije u $\mathbb{E}^3$ imamo

$$\mathbf{v}_p(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{v}_p(f) + \beta \mathbf{v}_p(g), \tag{1.2.3}$$

$$\mathbf{v}_p(fg) = \mathbf{v}_p(f) g(p) + f(p) \mathbf{v}_p(g). \tag{1.2.4}$$

Ove osobine se lako dokazuju, koristeći osobine parcijalnih izvoda u (1.2.1).

Sada dajemo definiciju tangentnog vektora diferencijabilne mnogostrukosti u tački p, zahtevajući da on ima navedene osobine. Obeležimo sa $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ skup svih diferencijabilnih funkcija na diferencijabilnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$.

Definicija 1.2.1. ***Tangentni vektor*** *diferencijabilne mnogostrukosti u tački p te mnogostrukosti, je svako preslikavanje*

$$X_p : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R} \tag{1.2.5}$$

sa osobinama

$$X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g), \quad \textit{(linearnost)}, \tag{1.2.6}$$

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g), \quad \textit{(diferenciranje)}, \tag{1.2.7}$$

gde je $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. *Tačka* p *se zove početak vektora* X_p.

Dakle, X_p je linearna funkcionela nad vektorskim prostorom $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, sa osobinom diferenciranja. Zato se kaže da je prethodnom definicijom definisan *tangentni vektor kao diferenciranje*.

Definicija 1.2.2. *Vektorski prostor odredjen pomoću N linearno nezavisnih tangentnih vektora u tački p na mnogostrukosti* $\mathcal{M}$ *zove se* **tangentni prostor** *i obeležava se sa* $T_p\mathcal{M}$.

Specijalna baza tangentnog prostora $T_p\mathcal{M}$ je sastavljena od N tangentnih vektora koordinatnih linija u tački p. Ovi vektori su označeni sa $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ili sa ∂_i, i baza formirana pomoću njih se zove "koordinatna baza" ili "prirodna baza". U ovoj bazi se proizvoljan vektor v može napisati u formi $v = v^i \partial_i$, gde su v^i komponente u odnosu na bazu $\{\partial_i\}$.

Definicija 1.2.3. Kovarijantni vektor *(kovektor) ili 1-forma ili forma prvog stepena* $\omega(x)$ *u tački p je linearno preslikavanje*

$$\omega : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}.$$

Napomenimo da smo u jednačini (1.2.1) koristili Ajnštajnovu (Albert Einstein, 1879-1955, fizičar i matematičar jevrejskog porekla) konvenciju o sabiranju[1] pri kojoj se vrši sabiranje po ponovljenom indeksu i, gde je $i = 1, \ldots, N$.

Diferencijali koordinatnih funkcija dx^i u tački p formiraju skup od N linearno nezavisnih kovektora, koji obuhvataju dualni prostor od $T_p\mathcal{M}$ koji se naziva *kotangentni prostor* $T_p^*\mathcal{M}$. Baza $\{dx^i\}$ je dualna prirodnoj bazi $\{\partial_i\}$, tj.

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(dx^i) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

gde je sa δ^i_j označen *Kronekerov simbol* (Leopold Kronecker, 1823-1891, nemački matematičar). Dekartov proizvod

$$\Pi^r_s = \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \times T_p^*\mathcal{M} \times \ldots \times T_p^*\mathcal{M}}_{r} \times \underbrace{T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \times \ldots \times T_p\mathcal{M}}_{s},$$

prostora kovektora i prostora vektora u tački p je uredjen skup kovektora i vektora $(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s)$.

[1] Svom prijatelju L. Kollros-u, Ajnštajn je to opisao na sledeći način: "I made a great discovery in mathematics; I suppressed the summation sign every time that the summation has to be done on an index which appears twice in the general term" (Kollros, L. (1956): Albert Einstein en Suisse, Souvenirs, in "Jubilee of Relativity Theory", A. Mercier and M. Kervaire (eds.), Basel, Switzerland).

Tenzor tipa (r,s) u tački p je preslikavanje Π^r_s koje je linearno po svakom argumentu i preslikava $(\omega^1,\ldots,\omega^r,v_1,\ldots,v_s)$ na broj $T(\omega^1,\ldots,\omega^r,v_1,\ldots,v_s)$. Prostor svih takvih tenzora se zove *tenzorski proizvod*

$$T^r_s(x) = \underbrace{T^*_p\mathcal{M}\otimes T^*_p\mathcal{M}\otimes\ldots\otimes T^*_p\mathcal{M}}_{r}\otimes\underbrace{T_p\mathcal{M}\otimes T_p\mathcal{M}\otimes\ldots\otimes T_p\mathcal{M}}_{s},$$

U odnosu na koordinatni sistem $\{x^i\}$ u okolini tačke tenzorski proizvod ima bazu

$$\{dx^{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{i_r}\otimes\partial_{i_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{i_s}\}.$$

Specijalna vrsta tenzora su antisimetrični tenzori tipa $(r,0)$, takozvane *r-forme.* Prostor r-formi u tački p označavamo sa $T^*_p\mathcal{M}\wedge\ldots\wedge T^*_p\mathcal{M}$, gde je $\{dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}\}$ baza ovog prostora. Simbol $\wedge$ označava antisimetizaciju tenzorskog proizvoda i zove se *kosi proizvod. Afinori* su tenzorska polja tipa $(1,1)$.

Sva izračunavanja u ovom radu će biti izvedena pomoću jednačina u lokalnim koordinatama. Budući da sva izračunavanja mogu biti ponovljena na svim lokalnim kartama atlasa, ona mogu biti proširena na čitavu mnogostrukost.

Definicija 1.2.4. *Sistem $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ je **tenzor**[2] tipa (r,s), ako pri promeni koordinata (1.1.1) važi zakon transformacije*

$$T^{i'_1\ldots i'_r}_{j'_1\ldots j'_s} = x^{i'_1}_{i_1}\ldots x^{i'_r}_{i_r}x^{j_1}_{j'_1}\ldots x^{j_s}_{j'_s}T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}, \tag{1.2.9}$$

gde smo označili: $x^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ i $x^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$.

1.3 Afina koneksija

Bez obzira na to što su svi tangentni prostori medusobno izomorfni ne postoji pravilo kojim se uspostavlja veza izmedu vektora tangentnih prostora različitih, i bliskih tačaka. Ako je potrebno, takvo pravilo se mora uspostaviti dodatno, i naziva se *koneksija* ili povezanost.

U skladu sa opštom idejom lokalnosti u diferencijalnoj geometriji (pojmovi se zadaju na nekim okolinama, kartama i sl.), pitanje koneksije se tako svodi na problem proglašavanja parova vektora iz susednih tangentnih prostora za medusobno paralelne. Drugim rečima, lokalno je koneksija preslikavanje vektora iz $T_p\mathcal{M}$ u vektore susednih tangentnih prostora, tzv. paralelni prenos.

Definicija 1.3.1. Afina koneksija *na mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je preslikavanja ∇, koje pridružuje paru vektorskih polja X i Y na $\mathcal{M}$ vektorsko polje ∇_YX na $\mathcal{M}$, koje zadovoljava sledeće uslove:*

a) $\nabla_Y(X_1+X_2) = \nabla_YX_1+\nabla_YX_2$,

b) $\nabla_Y(fX) = (Yf)\cdot X + f\cdot\nabla_YX$,

c) $\nabla_{Y_1+Y_2}X = \nabla_{Y_1}X+\nabla_{Y_2}X$,

[2]Ajnštajn je prvi 1916. god. uveo naziv tenzor.

d) $\nabla_{fY}X = f \cdot \nabla_Y X,$

Po baznim vektorima $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, u lokalnim koordinatama $(x^1, x^2, \dots, x^N)$ možemo razložiti vektor $\nabla_{\partial_k}\partial_j$:

$$\nabla_{\partial_k}\partial_j = L^p_{jk}\partial_p, \tag{1.3.1}$$

gde su L^p_{jk} *koeficijenti koneksije*. Koeficijenti koneksije opisuju kako se bazni vektori menjaju od tačke do tačke. Primenom (1.3.1) na funkcije x^i sledi:

$$(\nabla_{\partial_k}\partial_j)(x^i) = L^p_{jk}\frac{\partial x^i}{\partial x^p} = L^p_{jk}\delta^i_p = L^i_{jk},$$

tj.

$$L^i_{jk} = (\nabla_{\partial_k}\partial_j)(x^i). \tag{1.3.2}$$

Definicija 1.3.2. *Diferencijabilna mnogostrukost $\mathcal{M}$, na kojoj je uvedena afina koneksija (kovarijantni izvod) ∇, zove se* ***prostor afine koneksije*** *(linearne povezanosti), a označavamo ga sa $\mathbb{A}_N = (\mathcal{M}, \nabla)$.*

Ako se u $\mathbb{A}_N$ sa koordinatama x^i u lokalnoj karti $(\mathcal{U}, \varphi)$ predje na koordinate $x^{i'}$ u lokalnoj karti $(\mathcal{U}', \varphi')$, onda u tačkama $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ važi veza

$$L^{i'}_{j'k'} = x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'} L^i_{jk} + x^{i'}_i x^i_{j'k'}, \tag{1.3.3}$$

kao i inverzna veza

$$L^i_{jk} = x^i_{i'} x^{j'}_j x^{k'}_k L^{i'}_{j'k'} + x^i_{i'} x^{i'}_{jk}, \tag{1.3.4}$$

gde je

$$x^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad x^i_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}. \tag{1.3.5}$$

Definicija 1.3.3. *Antisimetrični deo koneksije (1.3.2) je tenzor oblika*

$$L^i_{[jk]} = L^i_{jk} - L^i_{kj} = 2L^i_{\underset{\vee}{jk}}, \tag{1.3.6}$$

i naziva se **tenzor torzije**.

Afina koneksija ∇ je simetrična ako za svaka dva vektorska polja X i Y iz $\mathcal{M}$ važi da je

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X.$$

Za koeficijente afine koneksije važiće onda da je $L^i_{jk} = L^i_{kj}$. U ovom slučaju kaže se da je prostor bez torzije.[3]

Ako funkcije L^i_{jk} nisu simetrične po donjim indeksima, osim ∇ moguća je i koneksija $\widetilde{\nabla}$, gde u (1.3.2) umesto L^i_{jk} stoji L^i_{kj}. Za koneksije ∇ i $\widetilde{\nabla}$ kažemo da su *dualne* jedna drugoj, odnosno da je ∇

[3] često se u literaturi sreće izraz "torsion free"

(i $\widetilde{\nabla}$) *nesimetrična afina koneksija.*

Afina koneksija ∇ omogućava definiciju izvoda koji je tenzorskog karaktera, za razliku od parcijalnog izvoda. *Kovarijantno diferenciranje* ∇T tenzorskog polja T tipa (r,s) je tipa $(r,s+1)$. U lokalnim koordinatama je definisano (na primer pomoću ∇) formulom:

$$\nabla_m T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \equiv T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s|m} = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s,m} + \sum_{\alpha=1}^{r} L^{i_\alpha}_{pm} T^{i_1\ldots i_{\alpha-1}p i_{\alpha+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} - \sum_{\alpha=1}^{s} L^{p}_{j_\alpha m} T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{\alpha-1}p j_{\alpha+1}\ldots j_s}, \tag{1.3.7}$$

gde smo sa $(|)$ označili kovarijantni izvod po x^m, a sa $(,)$ smo označili parcijalni izvod po x^m. Tenzori za koje je kovarijantni izvod nula zovu se *kovarijantno konstantni.* Takav je na primer Kronekerov simbol $\delta^i_{j|k} = 0$.

Uz pomoć kovarijantnog diferenciranja može se definisati *paralelno pomeranje* vektora i tenzora duž krive $C : (a,b) \to \mathcal{M}$. Neka je $X(t)$ vektorsko polje koje zadovoljava relaciju $\nabla_Y X = 0$, za svako t, gde je $Y(t)$ tangentni vektor krive. Kaže se da se $X(t)$ paralelno pomera duž krive $C: \ x = x(t) = (x^1(t), \ldots, x^N(t))$. Ovo se može u lokalnim koordinatama zapisati kao

$$\frac{dX^i}{dt} + L^i_{jk} \frac{dx^j(x(t))}{dt} X^k = 0. \tag{1.3.8}$$

Na ovaj način vidimo da je u slučaju paralelnog polja, kovarijantni izvod duž krive jednak nuli.

1.4 Prostor simetrične afine koneksije $\mathbb{A}_N$

Pretpostavimo da su koeficijenti koneksije L^i_{jk} dati sa (1.3.2) simetrični po donjem paru indeksa tj. $L^i_{jk} = L^i_{kj}$. Mnogostrukost na kojoj su zadati simetrični koeficijenti L^i_{jk} nazivamo *prostor simetrične afine koneksije* i označavamo ga sa $\mathbb{A}_N$. Tada kovarijantno diferenciranje (1.3.7) pišemo na sledeći način:

$$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;m} = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s,m} + \sum_{\alpha=1}^{r} L^{i_\alpha}_{pm} T^{i_1\ldots i_{\alpha-1}p i_{\alpha+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} - \sum_{\alpha=1}^{s} L^{p}_{j_\alpha m} T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{\alpha-1}p j_{\alpha+1}\ldots j_s}, \tag{1.4.1}$$

gde smo sa $(;)$ označili kovarijantni izvod u odnosu na simetričnu koneksiju L^i_{jk}. U tom slučaju postoji samo jedan *Ričijev identitet* (Gregorio Ricci-Curbastro, 1853-1925, italijanski matematičar):

$$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;mn} - T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;nm} = \sum_{\alpha=1}^{r} R^{i_\alpha}_{pmn} T^{i_1\ldots i_{\alpha-1}p i_{\alpha+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} - \sum_{\alpha=1}^{s} R^{p}_{j_\alpha mn} T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{\alpha-1}p j_{\alpha+1}\ldots j_s}, \tag{1.4.2}$$

gde je

$$R^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{jn} L^i_{pm} \tag{1.4.3}$$

Rimanov tenzor krivine (Georg Fredrich Bernahard Riemann, 1826-1866, nemački matematičar). Za Rimanov tenzor krivine važe sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
&a) \quad R^i_{jmn} = -R^i_{jnm}, \quad \text{(antisimetrija)}\\
&b) \quad \underset{jmn}{\mathfrak{S}} R^i_{jmn} = R^i_{jmn} + R^i_{mnj} + R^i_{njm} = 0, \quad \text{(ciklična simetrija)}\\
&c) \quad \underset{mnu}{\mathfrak{S}} R^i_{jmn;u} = 0.
\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Jednačina (1.4.4c) se naziva *Bjankijev identitet* (Luighi Bianchi, 1856-1928, italijanski matematičar). Ričijev tenzor je definisan na sledeći način:

$$R_{ij} \overset{def}{=} R^p_{ijp}. \tag{1.4.5}$$

Kao što se da zaključiti, Ričijev tenzor (1.4.5) u opštem slučaju nije simetričan.

Definicija 1.4.1. *Prostor simetrične afine koneksije je* **ekviafini prostor** *ako je Ričijev tenzor simetričan tj.* $R_{ij} = R_{ji}$.

Ako se pretpostavi da je $\mathbb{A}_N$ ekviafini prostor, može se pokazati da postoji funkcija $f(x)$ takva da je $L^p_{pi} = L^p_{ip} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \equiv f_{,i}$ (vidi [45, 89]).

1.5 Rimanov prostor $\mathbb{R}_N$

U nastavku dajemo definiciju Rimanovog prostora:

Definicija 1.5.1. *Ako su u tačkama N-dimenzionalne diferencijabilne mnogostrukosti $\mathcal{M}$ zadate funkcije*

$$g_{ij}(x^1, \ldots, x^N) = g_{ji}(x^1, \ldots, x^N) \tag{1.5.1}$$

tako da je duž krive na $\mathcal{M}$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

gde je

$$\det ||g_{ij}|| \neq 0,$$

onda se takva mnogostrukost zove **Rimanova mnogostrukost** $\mathbb{R}_N = (\mathcal{M}, g)$ *ili* **Rimanov prostor**.

U lokalnim koordinatama komponente metričkog tenzora su izražene pomoću matrice

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j).$$

Metrika g definiše metričku formu na $\mathbb{R}_N$, gde je kvadrat linijskih elemenata dat sa

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j.$$

Veličina $g(X, Y)$ je *skalarni proizvod* vektora X i Y.

Simetrična afina koneksija ∇, za koju je $\nabla g = 0$ se zove *koneksija Levi-Čivita* (Tulio Levi-Civita, 1873-1941, italijanski matematičar) ili prirodna (metrička) koneksija. U Rimanovom prostoru $\mathbb{R}_N$ postoji jedinstvena Levi-Čivita koneksija koja se u lokalnim koordinatama definiše na sledeći način

$$\nabla_{\partial_k}\partial_j = \Gamma^p_{jk}\partial_p,$$

gde

$$a)\quad \Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}), \quad b)\quad \Gamma^i_{jk} = \Gamma_{p.jk}g^{pi} \tag{1.5.2}$$

su redom dati *Kristofelovi simboli prve i druge vrste* (Elwin Bruno Cristoffel, 1829-1900, nemački matematičar). Sa $||g^{ij}||$ je označena matrica koja je inverzna matrici $||g_{ij}||$. Kontrakcijom Kristofelovih simbola druge vrste po indeksima i i j dobijamo

$$\Gamma^p_{pk} = \ln\left|\sqrt{\det||g_{ij}||}\right|_{,k}.$$

U Rimanovom prostoru $\mathbb{R}_N$ Rimanov tenzor ima isti oblik kao i tenzor (1.4.3) samo što se za koeficijente koneksije uzimaju Kristofelovi simboli druge vrste. Za njega važe osobine (1.4.4). Sada se može definisati kovarijantni *Rimanov tenzor* $R_{ijmn} = g_{pi}R^p_{jmn}$, za koji važe sledeće osobine:

$$\begin{aligned} &a)\quad R_{ijmn} = -R_{jimn}, \quad R_{ijmn} = -R_{ijnm}, \quad R_{ijmn} = R_{mnij},\\ &b)\quad \underset{\alpha\beta\gamma}{\mathfrak{S}} R_{ijmn} = 0, \quad \{\alpha,\beta,\gamma\}\subset\{i,j,m,n\},\\ &c)\quad \underset{mnu}{\mathfrak{S}} R_{ijmn;u} = 0. \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Kao i u opštem slučaju, u Rimanovom prostoru Ričijev tenzor (1.4.5) je definisan

$$R_{ij} \overset{def}{=} R^p_{ijp}, \tag{1.5.4}$$

U Rimanovom prostoru, gde je Rimanov tenzor dobijen pomoću Levi-Čivita koneksije, Ričijev tenzor je uvek simetričan. Znači, svaki Rimanov prostor je ekviafini prostor.

Ričijev operator se definiše kao

$$R^i_j = g^{ip}R_{pj}. \tag{1.5.5}$$

Trag Ričijevog operatora je *skalarna krivina* $R = R^p_p$.

1.6 Prostor nesimetrične afine koneksije $\mathbb{GA}_N$

U prethodnom delu se za koeficijente koneksije uzimalo da su simetrični u odnosu na donji par indeksa.

Definicija 1.6.1. *Ako su koeficijenti koneksije L^i_{jk}, u opštem slučaju nesimetrični po indeksima j i k ($L^i_{jk} \neq L^i_{kj}$), zadati na na diferencijabilnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$ tada prostor $\mathbb{GA}_N = (\mathcal{M}, L^i_{jk})$ nazivamo* **prostor nesimetrične afine koneksije**[4].

Prostorima nesimetrične afine koneksije bavio se ili se i dalje bavi veliki broj matematičara, na primer: A. Ajnštajn [11]-[13], L. Ajzenhart [14]-[16] (Luther P. Eisenhart, 1876-1965, američki matematičar), S. Minčić [49]-[61], [95, 96, 98, 99], [103]-[107], [M1, M2, M5, M6, M8], C. Nitesku [65] (Catalina Nitescu, rumunski matematičar), M. Prvanović (Mileva Prvanović, srpski matematičar) [70, 74, 76], M. Stanković [58, 59, 61], [93]-[99], [103, 104, 106, 107], [M2]-[M5], [M7, M9] (Mića Stanković, srpski matematičar), S. Bohner i K. Yano [5] i mnogi drugi.

S obzirom na nesimetriju koneksije prostora $\mathbb{GA}_N$, možemo da definišemo *simetrični deo* $L^i_{\underline{jk}}$ i *antisimetrični deo* $L^i_{\underset{\vee}{jk}}$ koneksije L^i_{jk}, redom:

$$L^i_{\underline{jk}} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} + L^i_{kj}), \quad L^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} - L^i_{kj}), \tag{1.6.1}$$

odakle je

$$L^i_{jk} = L^i_{\underline{jk}} + L^i_{\underset{\vee}{jk}}. \tag{1.6.2}$$

Ako sada posmatramo kovarijantno diferenciranje (1.3.7), zaključujemo da je moguće definisati četiri vrste istog. Četiri vrste kovarijantnog diferenciranja je prvi uveo S. Minčić u radu [49] na sledeći način

$$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s \underset{\substack{1\\2\\3\\4}}{|} m} = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s, m} + \sum_{\alpha=1}^{r} L^{i_\alpha}_{\substack{pm\\mp\\pm\\mp}} T^{i_1\ldots i_{\alpha-1} p i_{\alpha+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} - \sum_{\alpha=1}^{s} L^{p}_{\substack{j_\alpha m\\m j_\alpha\\m j_\alpha\\j_\alpha m}} T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{\alpha-1} p j_{\alpha+1}\ldots j_s}. \tag{1.6.3}$$

Posmatrajući samo prvu i drugu vrstu kovarijantnog diferenciranja moguće je formirati 10 identiteta Ričijevog tipa, na primer za tenzor $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ možemo formirati razlike:

$$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s \underset{\lambda}{|} m \underset{\mu}{|} n} - T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s \underset{\nu}{|} n \underset{\omega}{|} m} \quad (\lambda, \mu, \nu, \omega = 1, 2), \tag{1.6.4}$$

gde je

$$\begin{aligned}(\lambda, \mu; \nu, \omega) \in \Big\{ &(1,1;1,1), (2,2;2,2), (1,2;1,2), (2,1;2,1), (1,1;2,2), \\ &(1,1;1,2), (1,1;2,1), (2,2;1,2), (2,2;2,1).(1,2;2,1) \Big\}.\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

[4] često se u literaturi označava sa $\mathbb{L}_N$

U ovim identitetima se pojavljuju tri tenzora krivine $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1, 2, 3$,

$$\underset{1}{R}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{jn} L^i_{pm}, \tag{1.6.6}$$

$$\underset{2}{R}{}^i_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{mp}, \tag{1.6.7}$$

$$\underset{3}{R}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{pm} + L^p_{nm}(L^i_{pj} - L^i_{jp}), \tag{1.6.8}$$

i veličine $\underset{\theta}{A}$, $\theta = 1, \ldots, 15$, koje nisu tenzori i u radu [49] nazvani su "pseudotenzori" krivine:

$$\begin{array}{ll}
\underset{1}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{jn} L^i_{mp}, & \underset{9}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{pm}, \\
\underset{2}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{pm}, & \underset{10}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{jn} L^i_{pm}, \\
\underset{3}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{pm}, & \underset{11}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj} L^i_{np} - L^p_{jn} L^i_{mp}, \\
\underset{4}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{jn} L^i_{mp}, & \underset{12}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{mp}, \\
\underset{5}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{mp}, & \underset{13}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{pm}, \\
\underset{6}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj} L^i_{np} - L^p_{jn} L^i_{pm}, & \underset{14}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{mp}, \\
\underset{7}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{jn} L^i_{mp}, & \underset{15}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{pm}. \\
\underset{8}{A}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj} L^i_{pn} - L^p_{jn} L^i_{pm} &
\end{array} \tag{1.6.9}$$

Pseudotenzori krivine su prvi put definisani u [49]. Za treću i četvrtu vrstu kovarijantnog diferenciranja [53, M6], može se na sličan način dobiti još 10 identiteta Ričijevog tipa:

$$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s \underset{\lambda}{|} m \underset{\mu}{|} n} - T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s \underset{\nu}{|} n \underset{\omega}{|} m} \quad (\lambda, \mu, \nu, \omega = 3, 4). \tag{1.6.10}$$

U pomenutim identitetima se javljaju isti tenzori u pseudotenzori krivine, kao i jedan novi tenzor krivine

$$\underset{4}{R}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{pm} + L^p_{mn}(L^i_{pj} - L^i_{jp}). \tag{1.6.11}$$

Postavlja se pitanje: Da li pored tenzora krivine $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1, \ldots, 4$ postoji još neki tenzor krivine u prostoru nesimetrične afine koneksije? Odgovor je dao S. Minčić u radu [52], posmatrajući neke kombinacije identiteta Ričijevog tipa, kao na primer

$$\mathfrak{L} = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s \underset{1}{|} mn} - T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s \underset{1}{|} n \underset{2}{|} m} + T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s \underset{2}{|} mn} - T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s \underset{2}{|} n \underset{1}{|} m}. \tag{1.6.12}$$

Ovim kombinacijama dobijeni su složeni identiteti Ričijevog tipa u kojima se pojavljuju novi tenzori krivine $\underset{1}{\widetilde{R}}, \dots, \underset{8}{\widetilde{R}}$, pri čemu je:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} &= \frac{1}{2}(\underset{1}{A} + \underset{3}{A})^i_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{2}{A} + \underset{4}{A})^i_{jmn},\\
\underset{2}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} &= \frac{1}{2}(\underset{7}{A} + \underset{13}{A})^i_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{9}{A} + \underset{11}{A})^i_{jmn},\\
\underset{3}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} &= \frac{1}{2}(\underset{8}{A} + \underset{14}{A})^i_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{10}{A} + \underset{12}{A})^i_{jmn},\\
\underset{4}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} &= \frac{1}{6}(\underset{3}{R} + \underset{11}{A} + \underset{13}{A})^i_{j[mn]} = \frac{1}{6}(\underset{3}{R} + \underset{12}{A} + \underset{14}{A})^i_{j[mn]},\\
\underset{5}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} &= (\underset{1}{A} - \underset{7}{A})^i_{jmn} - \underset{13}{A}{}^i{}_{jnm} = -\underset{7}{A}{}^i{}_{jmn} - (\underset{11}{A} + \underset{15}{A})^i_{jnm},\\
\underset{6}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} &= (\underset{2}{A} - \underset{8}{A})^i_{jmn} - \underset{14}{A}{}^i{}_{jnm} = -\underset{8}{A}{}^i{}_{jmn} - (\underset{12}{A} + \underset{15}{A})^i_{jnm},\\
\underset{7}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} &= (\underset{3}{A} + \underset{7}{A})^i_{jmn} + \underset{13}{A}{}^i{}_{jnm} = \underset{9}{A}{}^i{}_{jmn} + (\underset{13}{A} - \underset{15}{A})^i_{jnm},\\
\underset{8}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} &= (\underset{4}{A} + \underset{8}{A})^i_{jmn} + \underset{14}{A}{}^i{}_{jnm} = \underset{10}{A}{}^i{}_{jmn} + (\underset{14}{A} - \underset{15}{A})^i{}_{jnm}.
\end{aligned} \tag{1.6.13}$$

Tenzori $\underset{1}{\widetilde{R}}, ..., \underset{8}{\widetilde{R}}$ nazvani su *izvedeni tenzori krivine.*

Za pomenute tenzore važe sledeća svojstva [55, 56, 57]

$$\begin{array}{llll}
\underset{1}{R}{}^i_{jmn} = -\underset{1}{R}{}^i_{jnm}, & \underset{2}{R}{}^i_{jmn} = -\underset{2}{R}{}^i_{jnm}, & \underset{3}{R}{}^i_{jmn} \neq \underset{3}{R}{}^i_{jnm}, & \underset{4}{R}{}^i_{jmn} \neq \underset{4}{R}{}^i_{jnm},\\
\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} = -\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jnm}, & \underset{2}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} \neq -\underset{2}{\widetilde{R}}{}^i_{jnm}, & \underset{3}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} \neq -\underset{3}{\widetilde{R}}{}^i_{jnm}, & \underset{4}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} = -\underset{4}{\widetilde{R}}{}^i_{jnm}\\
\underset{5}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} \neq -\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jnm}, & \underset{6}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} \neq -\underset{2}{\widetilde{R}}{}^i_{jnm}, & \underset{7}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} \neq -\underset{3}{\widetilde{R}}{}^i_{jnm}, & \underset{8}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} \neq -\underset{8}{\widetilde{R}}{}^i_{jnm}.
\end{array} \tag{1.6.14}$$

$$\begin{aligned}
\underset{jmn}{\mathfrak{S}}\, \underset{1}{R}{}^i_{jmn} &= 2 \underset{jmn}{\mathfrak{S}} (L^i_{\underset{\vee}{jm},n} + L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{pn}),\\
\underset{jmn}{\mathfrak{S}}\, \underset{2}{R}{}^i_{jmn} &= 2 \underset{jmn}{\mathfrak{S}} (L^i_{\underset{\vee}{mj},n} + L^p_{\underset{\vee}{mj}} L^i_{np}),\\
\underset{jmn}{\mathfrak{S}}\, \underset{3}{R}{}^i_{jmn} &= 4 \underset{jmn}{\mathfrak{S}} L^p_{\underset{\vee}{mj}} L^i_{\underset{\vee}{np}}, \quad \underset{jmn}{\mathfrak{S}}\, \underset{4}{R}{}^i_{jmn} = 0.
\end{aligned} \tag{1.6.15}$$

$$\underset{jmn}{\mathfrak{S}}\, \underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} = 2 \underset{jmn}{\mathfrak{S}} L^p_{\underset{\vee}{mj}} L^i_{\underset{\vee}{pn}}, \quad \underset{jmn}{\mathfrak{S}}\, \underset{2}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} = 0, \quad \underset{jmn}{\mathfrak{S}}\, \underset{3}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} = 0. \tag{1.6.16}$$

Posmatrajući dvanaest dobijenih tenzora krivine, S. Minčić je dokazao vrlo značajnu teoremu:

Teorema 1.6.1. (Minčić, S. M., (1979), [54]) *Medju dvanaest navedenih tenzora krivine* $\underset{1}{R}$*,* $\underset{2}{R}$*,* $\underset{3}{R}$*,* $\underset{4}{R}$*;* $\underset{1}{\widetilde{R}}, ..., \underset{8}{\widetilde{R}}$*, datih jednačinama (1.6.6), (1.6.7), (1.6.8), (1.6.11) i (1.6.13) pet je linearno nezavisnih, a svi ostali se mogu izraziti preko njih i tenzora krivine prostora simetrične afine koneksije R oblika (1.4.3), formiranog pomoću koneksije* $L^i_{\underline{jk}}$. ■

U radovima [55], [58]-[61], [95]-[99], [103], [M1]-[M7] se za pet linearno nezavisnih tenzora uzimaju tenzori

$$\underset{1}{R}, \underset{2}{R}, \underset{3}{R}, \underset{4}{R}, \underset{5}{R} \equiv \underset{2}{\widetilde{R}}. \tag{1.6.17}$$

Dakle, ostalih sedam tenzora krivine možemo izraziti kao linearne kombinacije tenzora (1.6.17) i tenzora krivine R (1.4.3) pridruženog prostora simetrične afine koneksije. U radu [54] je takodje pokazano da kada se posmatraju zajedno pseudotenzori i tenzori krivine njih deset je linearno nezavisno.

Napomenimo da se u slučaju simetrične koneksije, svi navedeni tenzori krivine i svi pseudotenzori krivine svode na jedan tenzor-Riman-Kristofelov tenzor krivine (1.4.3). Dakle, ove veličine predstavljaju uopštenje Riman-Kristofelovog tenzora.

Posmatrajmo krivu $C:\ x(t) = (x^1(t), \dots, x^N(t))$ definisanu u $\mathbb{GA}_N$, pri čemu je u tačkama te krive definisano vektorsko polje $X(t)$, tada se mogu definisati dve vrste paralelizma vektorskog polja u $\mathbb{GA}_N$.

Definicija 1.6.2. *Vektorsko polje $X(t)$ je* **paralelno polje prve vrste** *duž krive $C:\ x = x(t)$ ako važi jednačina*

$$\frac{dX^i}{dt} + L^i_{jk}\frac{dx^j(x(t))}{dt}X^k = 0. \tag{1.6.18}$$

Vektorsko polje $X(t)$ je **paralelno polje druge vrste** *duž krive $C:\ x = x(t)$ ako važi jednačina*

$$\frac{dX^i}{dt} + L^i_{kj}\frac{dx^j(x(t))}{dt}X^k = 0. \tag{1.6.19}$$

1.7 Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$

Postoje razne generalizacije Rimanovog prostora, kao što su, na primer:

- Generalisani Rimanov prostor u smislu T. Takasua [69, 101] (T. Takasu, japanski matematičar) je N-dimenzionalni prostor u kome je rastojanje ds izmedju dve susedne tačke x^i i $x^i + dx^i$ odredjeno kubnom formulom

$$ds^3 = g_{ijk}dx^i dx^j dx^k,$$

  pri čemu su g_{ijk} komponente po svim indeksima simetričnog, kovarijantnog tenzora trećeg reda.

- A. Ajnštajn [11] umesto Rimanovog prostora, uzima prostor gde se koeficijenti koneksije Γ^i_{jk} uvode nezavisno od g_{ij}. Dalje uvodeći razne varijante svoje teorije [12, 13] koristi kompleksan osnovni tenzor g_{ij} čiji je realni deo simetričan, a imaginarni deo antisimetričan po indeksima i, j. U Ajnštajnovim radovima se zadaje veza izmedju g_{ij} i koeficijenata Γ^i_{jk}:

$$\underset{+-}{g_{ij;m}} \equiv g_{ij,m} - \Gamma^p_{im}g_{pj} - \Gamma^p_{mj}g_{ip}, \tag{1.7.1}$$

  gde $(+)$ označava da se indeks i tretira u smislu kovarijantnog diferenciranja prve vrste $(\underset{1}{|})$, a $(-)$ da se indeks j tretira u smislu kovarijantnog diferenciranja druge vrste $(\underset{2}{|})$.

- Finslerovi prostori (Paul Finsler, 1894-1970, nemački i švajcarski matematičar) predstavljaju najprirodnije uopštenje Rimanovih prostora. Bitna razlika je u tome, što je u Rimanovom prostoru metrički tenzor funkcija samo od koordinata tačke u kojem se vrši posmatranje, dok u Finslerovom prostoru metrički tenzor zavisi od tačke i pravca. Finslerova geometrija se zasniva na tome da je rastojanje ds izmedju dve susedne tačke sa koordinatama x^i i $x^i + dx^i$ odredjeno funkcijom $F(x^i, dx^i)$, tj.
$$ds = F(x^i, dx^i), \quad (i = 1, \dots, N),$$
koja zadovoljava odredjene uslove. Prvi je ovakvu metriku izučavao P. Finsler u svojoj doktorskoj disertaciji [17].

Mi ćemo se ovde baviti uopštenjem Rimanovog prostora koje je dao L. Ajzenhart.

Definicija 1.7.1. (Eisenhart, L. P., (1952), [16]) Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$, *je* N*-dimenzionalna mnogostrukost na kojoj je uveden nesimetrični metrički tenzor* $g_{ij}(x^1, \dots, x^N) \equiv g_{ij}$, *takav da u opštem slučaju važi*
$$g_{ij} \neq g_{ji}, \quad \det ||g_{ij}|| \neq 0. \tag{1.7.2}$$

Na temu generisanih Rimanovih prostora, štampan je veliki broj radova, kao na primer, [15, 16, 51, 55, 58, 59, 68, 69, 70, 95, 97, 105, 106, M2]. Medjutim, mnoga pitanja su ostala otvorena pa su oni i danas interesantni za proučavanje. ,,Prenosivost" osobina iz Rimanovog u generalisani Rimanov prostor nije uvek jednostavna. Osnovne definicije, jednakosti i osobine u $\mathbb{GR}_N$ date su u napred navedenim radovima, a mi ćemo navesti neke od njih, potrebne za dalji rad.

S obzirom na jednačinu (1.7.2), može se definisati *simetrični deo* i *antisimetrični deo* tenzora g_{ij}:
$$a) \quad g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}), \quad b) \quad g_{\underset{\vee}{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}). \tag{1.7.3}$$

Spuštanje i dizanje indekasa definiše se pomoću tenzora $g_{\underline{ij}}$ i $g^{\underline{ij}}$, gde je matrica $||g^{\underline{ij}}||$ inverzna matrici $||g_{\underline{ij}}||$ tj.
$$g_{\underline{ij}} g^{\underline{jk}} = \delta_i^k, \quad \det ||g_{\underline{ij}}|| \neq 0. \tag{1.7.4}$$

Generalisani Kristofelovi simboli prve i druge vrste definišu se redom:
$$a) \quad \Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}), \quad b) \quad \Gamma^i_{jk} = g^{\underline{ip}} \Gamma_{p.jk}. \tag{1.7.5}$$

Polazeći od (1.7.5), lako se pokazuju sledeće jednakosti:
$$\begin{aligned} a) \quad & \Gamma_{i.jk} + \Gamma_{j.ik} = g_{\underline{ij},k}, \\ b) \quad & \Gamma_{i.jk} + \Gamma_{k.ij} = g_{\underline{ik},j}, \\ c) \quad & \Gamma_{i.jk} + \Gamma_{i.kj} = g_{\underline{ji},k} - g_{\underline{jk},i} + g_{\underline{ik},j}. \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

U prostoru $\mathbb{GR}_N$ važe sledeće teoreme:

Teorema 1.7.1. (Minčić, S.M., (1975), [51]) *U generalisanom Rimanovom prostoru* $\mathbb{GR}_N$ *važi:*

$$a)\quad \Gamma^p_{\underline{pk}} = \ln\left|\sqrt{\det||g_{\underline{ij}}||}\right|_{,k}, \qquad b)\quad \Gamma^p_{\underset{\vee}{pk}} = 0. \quad \blacksquare \tag{1.7.7}$$

Teorema 1.7.2. (Minčić, S.M., (1975), [51]) *U prostoru* $\mathbb{GR}_N$ *tenzor* $g_{\underline{ij}}$ *je kovarijanto konstantan u odnosu na četiri vrste kovarijantnog diferenciranja (1.6.3), tj.*

$$g_{\underline{ij}\underset{\theta}{|}m} = 0, \quad \theta = 1, \ldots, 4. \quad \blacksquare \tag{1.7.8}$$

Teorema 1.7.3. (Minčić, S.M., (1975), [51]) *U prostoru* $\mathbb{GR}_N$ *tenzor* $g^{\underline{ij}}$ *je kovarijanto konstantan u odnosu na četiri vrste kovarijantnog diferenciranja (1.6.3), tj.*

$$g^{\underline{ij}\underset{\theta}{|}m} = 0, \quad \theta = 1, \ldots, 4. \quad \blacksquare \tag{1.7.9}$$

Koeficijenti koneksije generalisanog Rimanovog prostora su generalisani Kristofelovi simboli druge vrste Γ^i_{jk}. Jednačine koje važe u prostoru nesimetrične afine koneksije (1.6.3-1.6.19) važiće u istom obliku i u $\mathbb{GR}_N$, samo što će koneksija L^i_{jk} biti zamenjena sa Γ^i_{jk}. Takodje treba imati na umu da u prostoru $\mathbb{GR}_N$ važi $\Gamma^p_{[pk]} = \Gamma^p_{[kp]} = 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{pk}} = 0$.

Pošto je Finslerov prostor, kao što smo napred naveli, prirodno uopštenje Rimanovog prostora u radovima [M1, M6, M8] smo proučavali uopštenje Finslerovog prostora, slično kao za generalisani Rimanov prostor. Medjutim, u ovom radu se nećemo baviti Finslerovim i generalisanim Finslerovim prostorima.

1.8 Geodezijske linije u $\mathbb{GA}_N$

Geodezijske linije na površi u $\mathbb{E}^3$ se obično definišu kao krive na površi, čija je geodezijska krivina nula u svakoj tački. Sada ćemo defnisati pojam geodezijske linije u $\mathbb{GA}_N$.

Definicija 1.8.1. *Kriva* $C : x = x(t)$ *je* **geodezijska linija** *prostora* $\mathbb{GA}_N$ *kada njeno tangentno vektorsko polje* $\lambda = \frac{dx(t)}{dt}$ *ostaje tangentno posle paralelnog prenosa prve i druge vrste duž krive* C.

Ekvivalentna definicija prethodnoj je:

Definicija 1.8.2. *Kriva* C *je* **geodezijska linija** *prostora* $\mathbb{GA}_N$ *ako je kovarijantni izvod prve i druge vrste tangentnog vektorskog polja* $\lambda^i(t)$ *u pravcu tangentnog vektora* $\lambda^i(t)$ *krive* C *proporcionalan tom tangentnom vektoru tj.*

$$\lambda^i_{\underset{\theta}{|}p}(t)\lambda^p(t) = \rho(t)\lambda^i(t), \quad \theta = 1, 2, \quad \lambda^i(t) = \frac{dx^i}{dt}, \tag{1.8.1}$$

gde je $\rho(t)$ *neka invarijanta.*

Iz Definicije 1.8.2 se u odnosu na obe vrste kovarijantnog diferenciranja dobija ista jednačina

$$\frac{d\lambda^i(t)}{dt} + L^i_{pq}\lambda^p(t)\lambda^q(t) = \rho(t)\lambda^i(t) \tag{1.8.2}$$

tj.

$$\frac{d^2x^i}{dt} + L^i_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt} = \rho(t)\frac{dx^i}{dt}. \tag{1.8.3}$$

Ako izaberemo parametar τ takav da je $\rho(\tau) \equiv 0$, tada takav parametar zovemo *prirodni (kanonički) parametar* geodezijske linije.

Kriva $C:\ x = x(t)$ je geodezijska linija prostora $\mathbb{GA}_N$ ako i samo ako funkcije $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(\tau)$, gde je τ kanonički parametar, zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{d^2\tilde{x}^i}{dt} + L^i_{pq}\frac{d\tilde{x}^p}{dt}\frac{d\tilde{x}^q}{dt} = 0.$$

To je sistem običnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Na osnovu poznatog stava iz teorije diferencijalnih jednačina [25] za date početne uslove

$$\tilde{x}^i(\tau_0) = \tilde{x}^i_0, \quad \frac{d\tilde{x}^i}{d\tau}(\tau_0) = \tilde{\lambda}^i_0$$

u prostoru $\mathbb{GA}_N$ klase C^r $(r > 2)$ taj sistem ima jedinstveno rešenje. Prema tome, važi sledeća

Teorema 1.8.1. *Kroz datu tačku $M_0(\tilde{x}^i_0)$ prostora $\mathbb{GA}_N$, u datom pravcu $\tilde{\lambda}^i_0$ postoji tačno jedna geodezijska linija.* ■

Geodezijske linije u prostoru $\mathbb{GR}_N$ se definišu na isti način kao i u prostoru $\mathbb{GA}_N$, samo se u jednačini (1.8.3), umesto L^i_{jk} zamene Kristofelovi simboli druge vrste (1.7.5b).

1.9 Sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ) Košijevog tipa

Sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ) imaju veliku primenu u diferencijalnoj geometriji. Nas će interesovati sistemi PDJ za kovarijantni izvod na mnogostrukosti [45, 46, 89].

Neka je dat konveksni skup $D \subset \mathbb{R}^n$, ($\mathbb{R}^n$ je realni n-dimenzionalni prostor sa koordinatama $x = (x^1, \dots, x^n)$) i funkcije $F^\alpha_i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^N)$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, N$ na $\widetilde{D} \subset D \times \mathbb{R}^N$. Pretpostavimo da su funkcije $F^\alpha_i(x, y)$ neprekidne u odnosu na x i diferencijabilne u odnosu na y na $\widetilde{D}$.

Definicija 1.9.1. *Sistem diferencijalnih jednačina Košijevog tipa ima sledeću formu*

$$\frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i} = F^\alpha_i(x, y(x)), \quad \alpha = 1, \dots, N,\ i = 1, \dots, n. \tag{1.9.1}$$

gde su $y(x) = (y^1(x), \dots, y^N(x))$ nepoznate funkcije.

Za inicijalnu vrednost (Košijev uslov)

$$y^\alpha(x^0) = y_0^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N. \tag{1.9.2}$$

gde je $x_0 \in D$ i $(x_0, y_0^\alpha) \in \widetilde{D}$, sistem (1.9.1) ima najviše jedno rešenje

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \dots, x^n), \tag{1.9.3}$$

klase C^1, tako da $(x, y(x)) \in \widetilde{D}$. Iz tog razloga opšte rešenje sistema (1.9.1) zavisi od $r \leqslant N$ realnih parametara.

Pretpostavimo da je $F_i^\alpha(x, y) \in C^1(\widetilde{D})$ i da rešenje tražimo za $y^\alpha(x) \in C^2(D)$. *Uslovi integrabilnosti* (vidi [25]) sistema (1.9.1) su:

$$\frac{\partial^2 y^\alpha(x)}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 y^\alpha(x)}{\partial x^k \partial x^j} = 0, \tag{1.9.4}$$

tj.

$$\frac{\partial F_j^\alpha(x,y)}{\partial x^k} + \frac{\partial F_j^\alpha(x,y)}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^k} - \frac{\partial F_k^\alpha(x,y)}{\partial x^j} - \frac{\partial F_k^\alpha(x,y)}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} = 0, \tag{1.9.5}$$

Za svako rešenje sistema (1.9.1) uslov (1.9.5) je zadovoljen za svako $x \in D$. Takodje je ovaj uslov zadovoljen za inicijalnu vrednost (1.9.2).

U sistemu (1.9.1) može se umesto parcijalnog izvoda uzeti kovarijantni izvod. Posmatrajmo sada sistem PDJ u tenzorskoj formi.

Neka je $D \in \mathbb{R}^n$ koordinatni domen u $\mathbb{GA}_N$. *Sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod θ-vrste,* $\theta = 1, \dots, 4$ od m nepoznatih tenzorskih polja $\underset{\sigma}{T}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma}}(x)$, $\sigma = 1, \dots, m$ tipa (p_σ, q_σ) dat je u obliku

$$\underset{\sigma}{T}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} \underset{\substack{1\\2\\3\\4}}{|} k}(x) = F^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} k}(x, \underset{1}{T}, \underset{2}{T}, \dots, \underset{m}{T}), \quad i_1, i_2, \dots, i_{p_\sigma},\ j_1, j_2, \dots, j_{q_\sigma}, k = 1, 2, \dots, N. \tag{1.9.6}$$

Ako posmatramo tenzor T (1.9.6), uopšteni Ričijevi identiteti

- za kovarijantni izvod prve vrste

$$\begin{aligned}\underset{\sigma}{T}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} \underset{1}{|} kl} - \underset{\sigma}{T}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} \underset{1}{|} lk} &= \sum_{\alpha=1}^{p_\sigma} \underset{1}{R}{}^{i_\alpha}_{pkl} \binom{p}{i_\alpha} \underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{q_\sigma} \underset{1}{R}{}^{p}_{j_\beta kl} \binom{j_\beta}{p} \underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} - 2 L^p_{\underset{\vee}{kl}} \underset{\sigma}{T}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} \underset{1}{|} p} \\ &= F^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} k \underset{1}{|} l} - F^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} l \underset{1}{|} k}\end{aligned} \tag{1.9.7}$$

- za kovarijantni izvod druge vrste

$$\begin{aligned}\underset{\sigma}{T}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} \underset{2}{|} kl} - \underset{\sigma}{T}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} \underset{2}{|} lk} &= \sum_{\alpha=1}^{p_\sigma} \underset{2}{R}{}^{i_\alpha}_{pkl} \binom{p}{i_\alpha} \underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{q_\sigma} \underset{2}{R}{}^{p}_{j_\beta kl} \binom{j_\beta}{p} \underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} + 2 L^p_{\underset{\vee}{kl}} \underset{\sigma}{T}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} \underset{2}{|} p} \\ &= F^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} k \underset{2}{|} l} - F^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} l \underset{2}{|} k}\end{aligned} \tag{1.9.8}$$

- za kovarijantni izvod treće vrste

$$\begin{aligned}\underset{\sigma}{T}{}^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}}\underset{3}{|}{}_{kl} - \underset{\sigma}{T}{}^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}}\underset{3}{|}{}_{lk} &= \sum_{\alpha=1}^{p_\sigma} \underset{1}{R}{}^{i_\alpha}_{pkl}\binom{p}{i_\alpha}\underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{q_\sigma} \underset{2}{R}{}^{p}_{j_\beta kl}\binom{j_\beta}{p}\underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} + 2L^p_{\underset{\vee}{kl}}\underset{\sigma}{T}{}^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}}\underset{3}{|}{}_{p}\\ &= F^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}k\underset{3}{|}l} - F^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}l\underset{3}{|}k}\end{aligned} \tag{1.9.9}$$

- za kovarijantni izvod četvrte vrste

$$\begin{aligned}\underset{\sigma}{T}{}^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}}\underset{4}{|}{}_{kl} - \underset{\sigma}{T}{}^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}}\underset{4}{|}{}_{lk} &= \sum_{\alpha=1}^{p_\sigma} \underset{2}{R}{}^{i_\alpha}_{pkl}\binom{p}{i_\alpha}\underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{q_\sigma} \underset{1}{R}{}^{p}_{j_\beta kl}\binom{j_\beta}{p}\underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} - 2L^p_{\underset{\vee}{kl}}\underset{\sigma}{T}{}^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}}\underset{4}{|}{}_{p}\\ &= F^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}k\underset{4}{|}l} - F^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}l\underset{4}{|}k}\end{aligned} \tag{1.9.10}$$

gde su $\underset{1}{R}{}^i_{jmn}$ i $\underset{2}{R}{}^i_{jmn}$ dati jednačinama (1.6.6) i (1.6.7) redom, gde je označeno

$$\binom{p}{i_\alpha}\underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} = \underset{\sigma}{T}{}^{i_1\ldots i_{\alpha-1}pi_{\alpha+1}\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1j_2\ldots j_{q_\sigma}} \tag{1.9.11}$$

$$\binom{j_\beta}{p}\underset{\sigma}{T}{}^{\cdots}_{\cdots} = \underset{\sigma}{T}{}^{i_1i_2\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1\ldots j_{\beta-1}pr_{\beta+1}\ldots j_{q_\sigma}}. \tag{1.9.12}$$

Analogno se definiše sistem PDJ Košijevog tipa za za kovarijantni izvod θ-vrste, $\theta = 1, \ldots, 4$ u prostoru $\mathbb{GR}_N$. Identiteti (1.9.7)-(1.9.10) važe u $\mathbb{GR}_N$, samo se umesto L^i_{jk} pojavljuje Γ^i_{jk} zadat jednačinom (1.7.5b).

Glava 2

Geodezijska preslikavanja

U ovoj glavi ćemo se baviti geodezijskim preslikavanjima generalisanih Rimanovih prostora i prostora nesimetrične afine koneksije. Osnove teorije geodezijskih preslikavanja prostora simterične afine koneksije mogu se naći u monografijama [45, 89]. Na temu geodezijskih preslikavanja, pored navedenih monografija, štampan je veliki broj radova, kao na primer:

- geodezijska preslikavanja prostora (simetrične) afine koneksije i Rimanovih prostora [6, 7, 20, 21, 28, 31, 33, 35, 37, 39, 40, 46, 47, 48]
- geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i generalisanih Rimanovih prostora [58, 59], [93]-[97], [M5, M9].
- geodezijska preslikavanja Ajnštajnovih prostora i uopštenja [18, 19, 26, 27, 34]
- geodezijska preslikavanja Finslerovih prostora i uopštenja [3, 6, 8, 64].

2.1 Geodezijska preslikavanja prostora simetrične afine koneksije

Neka su data dva prostora simetrične afine koneksije $\mathbb{A}_N$ i $\overline{\mathbb{A}}_N$, gde su L^i_{jk} i $\overline{L}^i_{jk}$ simetrične koneksije prostora $\mathbb{A}_N$ i $\overline{\mathbb{A}}_N$ redom.

Definicija 2.1.1. *Difeomorfizam $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ se zove* **geodezijsko preslikavanje** *prostora $\mathbb{A}_N$ na prostor $\overline{\mathbb{A}}_N$ ako f preslikava svaku geodezijsku liniju prostora $\mathbb{A}_N$ u geodezijsku liniju prostora $\overline{\mathbb{A}}_N$.*

Prvi koji je razmišaljao o problemu geodezijskog preslikavanja posmatrajući slučaj geodezijskog preslikavanja površi (Rimanovog prostora $\mathbb{R}_2$) na Euklidsku ravan $\mathbb{E}^2$ bio je E. Beltrami (Eugenio Beltrami, 1835-1899, italijanski matematičar), i to 1865. god. Kasnije 1869. god., U. Dini (Ulisse Dini, 1845-1918, italijanski matematičar) rešio je ovaj problem za širu klasu prostora posmatrajući geodezijsko preslikavanje dve površi ($f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$). Zatim, 1896. god., T. Levi-Čivita našao je osnovnu jednačinu za rešavanje geodezijskog preslikavanja izmedju dva N-dimenzionalna Rimanova prostora.

Treba pomenuti T. Tomasa (T. Tomas, američki matematičar) i H. Vejla (Hermann Klaus Hugo Weyl, 1885-1955, nemački matematičar) koji su dali neke geometrijske invarijante geodezijskog preslikavanja. Geodezijsko preslikavanje prostora na sebe naziva se *projektivna (geodezijska) transformacija.*

Dajemo primer elementarnog geodezijskog preslikavanja $f : S \to \overline{S}$ površi u $\mathbb{E}^3$.

Primer 2.1.1. *Pretpostavimo da je $\overline{S}$ homotetična slika površi S, gde je k koeficijent homotetije. Tada su metrički tenzori u relaciji*

$$\overline{g}_{ij} = k^2 g_{ij},$$

i važi da je $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$, jer je $g^{ij} = k^2 \overline{g}^{ij}$. ▲

Očigledno je da kada su Kristofelovi simboli dve površi jednaki u odgovarajućim tačkama onda postoji geodezijsko preslikavanje izmedju tih površi, i takvo preslikavanje se naziva *trivijalno geodezijsko preslikavanje.* Teorijom geodezijskih preslikavanja se danas bavi veliki broj naučnika i na tu temu štampan je veliki broj radova. Medjutim, mnogi problemi i do danas u vezi sa teorijom geodezijskih preslikavanja su ostali nerešeni i mnoga pitanja otvorena.

U odgovarajućim tačkama M i $\overline{M}$ imamo vezu izmedju koneksija pri geodezijskom preslikavanju

$$\overline{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + P^i_{jk}, \tag{2.1.1}$$

gde je P^i_{jk} *tenzor deformacije* koneksije $\overline{L}^i_{jk}$ i L^i_{jk} u odnosu na preslikavanje $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$.

Izaberimo lokalnu kartu $(\mathcal{U}, \varphi)$ oko $x \in M$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^N)$. Kako se komponente koneksije L^i_{jk} i L^i_{jk} transformišu po zakonu (1.3.3) dobijamo

$$\overline{L}^{i'}_{j'k'} - L^{i'}_{j'k'} = (\overline{L}^i_{jk} - L^i_{jk}) x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'},$$

tj. uzimajući jednačinu (2.1.1) dobijamo

$$P^{i'}_{j'k'} = P^i_{jk} x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'},$$

odakle zaključujemo da je P^i_{jk} tenzor tipa (1,2). Za $P^i_{jk} = 0$, preslikavanje $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ očuvava koneksiju, i u ovom slučaju se preslikavanje zove *afino.* Veza izmedju koneksija prostora $\overline{\mathbb{A}}_N$ i $\mathbb{A}_N$ pri geodezijskom preslikavanju data je sa

$$\overline{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + P^i_{jk} = L^i_{jk} + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j. \tag{2.1.2}$$

Kontrakcijom po i, k iz (2.1.2) imamo

$$\overline{L}^p_{jp} = L^p_{jp} + (N+1)\psi_j,$$

odakle je

$$\psi_j = \frac{1}{N+1}(\overline{L}^p_{jp} - L^p_{jp}). \tag{2.1.3}$$

Polazeći od jednačine (2.1.1) može se dobiti veza izmedju Rimanovih tenzora $\overline{R}^i_{jmn}$ i R^i_{jmn} redom prostora $\overline{\mathbb{A}}_N$ i $\mathbb{A}_N$:

$$\overline{R}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + P^i_{jm;n} - P^i_{jn;m} + P^p_{jm}P^i_{pn} - P^p_{jn}P^i_{pm}. \tag{2.1.4}$$

Kontrakcijom indeksa i i n u poslednjoj jednačini, dobija se veza izmedju Ričijevih tenzora redom prostora $\overline{\mathbb{A}}_N$ i $\mathbb{A}_N$:

$$\overline{R}_{jm} = R_{jm} + P^p_{jm;p} - P^p_{jp;m} + P^p_{jm}P^q_{pq} - P^p_{jq}P^q_{pm}. \tag{2.1.5}$$

U slučaju geodezijskog preslikavanja $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ prostora simetrične afine koneksije $\mathbb{A}_N$ na $\overline{\mathbb{A}}_N$ imamo sledeće invarijantne objekte:

- *Tomasov projektivni parametar*

$$T^i_{jk} = L^i_{jk} - \frac{1}{N+1}(\delta^i_j L^p_{kp} + \delta^i_k L^p_{jp}) \tag{2.1.6}$$

- *Vejlov projektivni tenzor*

$$W^i{}_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m} R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m} R_{n]j}, \tag{2.1.7}$$

  gde je R^i_{jmn} Riman-Kristofelov tenzor krivine prostora $\mathbb{A}_N$, a R_{jm} je Ričijev tenzor, a $[\ ]$ označava antisimetrizaciju bez deljenja u odnosu na indekse m i n.

U nastavku ćemo sa $[i...j]$ označavati antisimetrizaciju bez deljenja u odnosu na indekse i i j, a sa $(i...j)$ označavati simetrizaciju bez deljenja u odnosu na indekse i i j. [1]

Ako se za koeficijente koneksije umesto L^i_{jk} uzmu Kristofelovi simboli druge vrste Γ^i_{jk} (1.5.2b), onda imamo geodezijsko preslikavanje dva Rimanova prostora. Važe sledeće teoreme:

Teorema 2.1.1. *Za geodezijsko preslikavanje $f : \mathbb{R}_N \to \overline{\mathbb{R}}_N$ vektor ψ_j (2.1.3) koji odredjuje to preslikavanje je dat u obliku*

$$\psi_j = \frac{1}{N+1}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{\overline{g}}}{\sqrt{g}}\right|\right), \tag{2.1.8}$$

gde je $g = \det||g_{ij}||$, $\overline{g} = \det||\overline{g}_{ij}||$. ■

Teorema 2.1.2. *Rimanov prostor $\mathbb{R}_N$ sa simetričnim osnovnim tenzorom g_{ij} dopušta geodezijsko preslikavanje na Rimanov prostor $\overline{\mathbb{R}}_N$ sa simetričnim osnovnim tenzorom $\overline{g}_{ij}$ ako i samo ako je zadovoljena sledeća jednačina*

$$\overline{g}_{ij;k} = 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik}, \tag{2.1.9}$$

gde je sa $(;)$ *označeno kovarijantno diferenciranje u prostoru* $\mathbb{R}_N$. ■

Jednačina (2.1.9) se naziva jednačina Levi-Čivita. Ako se posmatra geodezisko preslikavanje $f : \mathbb{A}_N \to \mathbb{R}_N$, onda važi sledeća teorema [45, 89]:

[1] U literaturi ovakvo označavanje obično znači antisimetrizacija, odnosno simetrizacija po svim indeksima.

Teorema 2.1.3. *Prostor simetrične afine koneksije* $\mathbb{A}_N$ *dopušta geodezijsko preslikavanje na Rimanov prostor* $\overline{\mathbb{R}}_N$ *sa simetričnim osnovnim tenzorom* $\overline{g}_{ij}$ *ako i samo ako je zadovoljena sledeća jednačina*

$$\overline{g}_{ij;k} = 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik}, \tag{2.1.10}$$

gde je $(;)$ *kovarijantno diferenciranje u prostoru* $\mathbb{A}_N$. ■

Vejlov projektivni tenzor (2.1.7) u $\mathbb{R}_N$ postaje

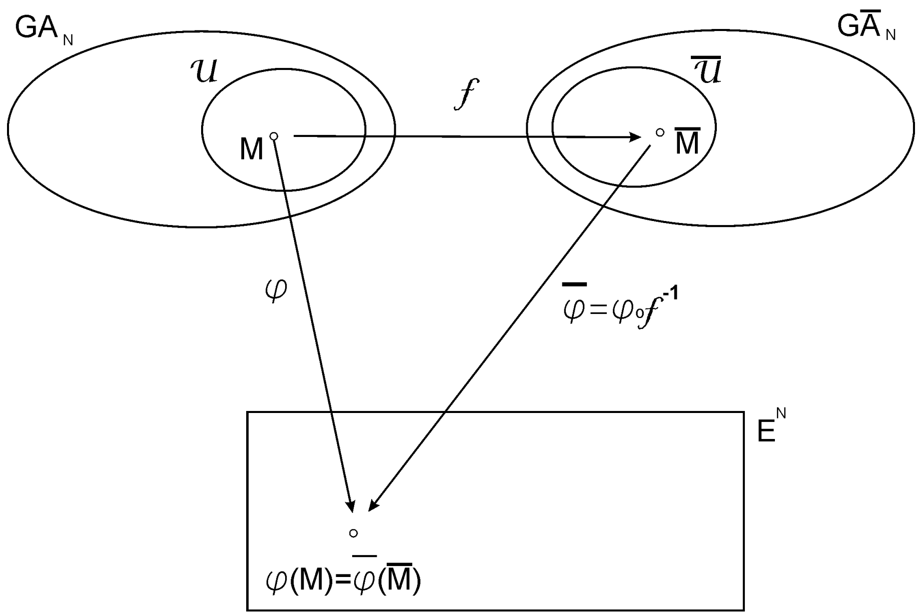
$$W^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}R_{jn]}. \tag{2.1.11}$$

2.2 Geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije

Neki od matematičara koji se bave teorijom geodezijskih preslikavanja smatraju da su za geodezijska preslikavanja bitni samo prostori sa simetričnom koneksijom. Ovo se prirodno nameće jer u definiciji geodezijskih linija, prostora $\mathbb{GA}_N$ učestvuje samo simetrični deo koneksije. Tačno je da su pri geodezijskom preslikavanju dva prostora nesimetrične koneksije geodezijske linije invarijante i u njihovom formiranju učestvuje samo simetrični deo koneksije. Medjutim, pri geodezijskom preslikavanju u formiranju nekih drugih objekata iz $\mathbb{GA}_N$ učestuje i antisimetrični deo koneksije. Mi ćemo ispitivati kako se pri geodezijskom preslikavanju dva prostora nesimetrične koneksije ponašaju neki drugi objekti, tih prostora: na primer, koneksije prostora, tenzori i pseudotenzori krivine, i drugi.

Posmatrajmo dva N-dimenzionalna prostora $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ i diferencijabilno preslikavanje

$$f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N.$$



Slika 2.2.1.

Možemo posmatrati ova dva prostora u *zajedničkom sistemu lokalnih koordinata za to preslikavanje.* Naime, ako $f : M \in \mathbb{GA}_N \to \overline{M} \in \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ i ako je $(\mathcal{U}, \varphi)$ lokalna karta u okolini tačke M, tada će biti $\varphi(M) = x = (x^1, \cdots, x^N) \in \mathbb{E}^N$ (Euklidski N-dimenzionalni prostor). U ovom slučaju definišemo za koordinatno preslikavanje u $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ preslikavanje $\overline{\varphi} = \varphi \circ f^{-1}$, tako da je

$$\overline{\varphi}(\overline{M}) = (\varphi \circ f^{-1})(f(M)) = \varphi(M) = x = (x^1, \cdots, x^N) \in \mathbb{E}^N,$$

tada tačke M i $\overline{M} = f(M)$ imaju iste lokalne koordinate. Koeficijenti koneksije L^i_{jk} i $\overline{L}^i_{jk}$, uvedeni na $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ redom, su nesimetrični u opštem slučaju po paru indeksa j i k.

Definicija 2.2.1. *Difeomorfizam $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ je* **geodezijsko preslikavanje***, ako sve geodezijske linije prostora $\mathbb{GA}_N$ prelaze u geodezijske linije prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$.*

Posledica 2.2.1. *U prostoru $\mathbb{GA}_N$ sa koneksijom L^i_{jk}, kriva $C:\ x = x(t)$ je geodezijska linija ako i samo ako je ona geodezijska linija prostora $\mathbb{A}_N$ sa koneksijom $L^i_{\underline{jk}}$, gde je koneksija $L^i_{\underline{jk}}$ prostora $\mathbb{A}_N$ simetrični deo koneksije L^i_{jk} prostora $\mathbb{GA}_N$.* ∎

Definicija 2.2.2. *Prostor $\mathbb{A}_N$ se naziva* ***pridruženi prostor*** *prostora $\mathbb{GA}_N$ ako je simetrični deo koneksije L^i_{jk} prostora $\mathbb{GA}_N$ upravo koneksija $L^i_{\underline{jk}}$ prostora $\mathbb{A}_N$.*

U odgovarajućim tačkama M i $\overline{M}$ imamo vezu izmedju koneksija pri geodezijskom preslikavanju

$$\overline{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + P^i_{jk}, \tag{2.2.1}$$

gde je P^i_{jk} *tenzor deformacije* koneksija $\overline{L}^i_{jk}$ i L^i_{jk} u odnosu na preslikavanje $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$. Neka su redom krive C i $\overline{C}$ krive prostora $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ zadate u parametarskom obliku jednačinama

$$C:\ x = x(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^N(t)), \qquad \overline{C}:\ \overline{x} = \overline{x}(t) = (\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t), \ldots, \overline{x}^N(t)), \tag{2.2.2}$$

Jednačine geodezijskih linija su sada redom u $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + L^i_{pq}\lambda^p(t)\lambda^q(t) = \rho(t)\lambda^i(t), \quad \frac{d\lambda^i}{dt} + \overline{L}^i_{pq}\lambda^p(t)\lambda^q(t) = \overline{\rho}(t)\lambda^i(t), \quad (i, p, q = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.2.3}$$

gde su $\rho(t)$ i $\overline{\rho}(t)$ invarijante i $\lambda^i = \frac{dx^i}{dt}$. Oduzimanjem ovih jednačina imamo

$$P^i_{pq}\lambda^p(t)\lambda^q(t) = 2\psi(t)\lambda^i(t). \tag{2.2.4}$$

Kako je u opštem slučaju P^i_{jk} nesimetričan, imamo

$$P^i_{jk} = P^i_{\underline{jk}} + P^i_{\underset{\vee}{jk}} = \eta^i_{jk} + \xi^i_{jk}$$

Zamenom u (2.2.4) dobijamo

$$\eta^i_{pq}\lambda^p(t)\lambda^q(t) = 2\psi(t)\lambda^i(t). \tag{2.2.5}$$

Uslovi (2.2.5) moraju biti zadovoljeni za proizvoljnu geodezijsku liniju prostora $\mathbb{GA}_N$. Kako leva strana u (2.2.5) predstavlja kvadratnu formu od λ^i, a desna proizvod linearne homogene funkcije od λ^i i nepoznate funkcije $\psi(t)$, to $\psi(t)$ takodje mora biti linearna i homogena, tj. oblika

$$\psi(t) = \psi_p \lambda^p(t).$$

Dakle jednačina (2.2.5) postaje

$$\eta^i_{pq}\lambda^p(t)\lambda^q(t) = (\,\psi_p\delta^i_q + \psi_q\delta^i_p)\lambda^p(t)\lambda^q(t),$$

odakle je

$$P^i_{\underline{jk}} = \eta^i_{jk} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j. \tag{2.2.6}$$

Prema tome, za tenzor deformacije koneksije konačno dobijamo

$$P^i_{jk} = P^i_{\underline{jk}} + P^i_{\underset{\vee}{jk}} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \xi^i_{jk} \tag{2.2.7}$$

gde je $\xi^i_{jk} = \overline{L}^i_{\underset{\vee}{jk}} - L^i_{\underset{\vee}{jk}}$ antisimetrični deo tenzora P^i_{jk}.

Veza izmedju koneksija dva prostora pri geodezijskom preslikavanju data je sa

$$\overline{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + P^i_{jk} = L^i_{jk} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \xi^i_{jk}. \tag{2.2.8}$$

Kontrakcijom po i, k iz (2.2.8) imamo

$$\overline{L}^p_{jp} = L^p_{jp} + (N+1)\psi_j + \xi^p_{jp},$$

odakle je

$$\psi_j = \frac{1}{N+1}\eta^p_{jp} = \frac{1}{N+1}(\overline{L}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}). \tag{2.2.9}$$

Moguće je posmatrati i geodezijsko preslikavanje $f : \mathbb{GA}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$, prostora $\mathbb{GA}_N$ sa nesimetričnom koneksijom na prostor $\overline{\mathbb{A}}_N$ sa simetričnom koneksijom, i u tom slučaju važi sledeća teorema:

Teorema 2.2.2. (Minčić, S. M., Stanković, M., (1997), [58]) *Potreban i dovoljan uslov da preslikavanje $f : \mathbb{GA}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ prostora $\mathbb{GA}_N$ na prostor $\overline{\mathbb{A}}_N$ bude geodezijsko, je*

$$P^i_{\underset{\vee}{jk}} = -L^i_{\underset{\vee}{jk}}, \tag{2.2.10}$$

gde su $P^i_{\underset{\vee}{jk}}$, $L^i_{\underset{\vee}{jk}}$, antisimetrični deo tenzora deformacije i antisimetrični deo koeficijenata koneksije prostora $\mathbb{GA}_N$, redom. ■

Analogno slučaju Rimanovog prostora za slučaj generalisanog Rimanovog prostora je dokazana sledeća teorema

Teorema 2.2.3. (Minčić, S. M., Stanković, M., (1997), [58]) *Za geodezijsko preslikavanje $f:\mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ vektor ψ_j je dat u obliku*

$$\psi_j = \frac{1}{N+1}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{\underline{\overline{g}}}}{\sqrt{\underline{g}}}\right|\right), \tag{2.2.11}$$

gde je $\underline{g} = \det\|g_{\underline{ij}}\|$, $\underline{\overline{g}} = \det\|\overline{g}_{\underline{ij}}\|$. ■

Polazeći od poznate jednačine Levi-Čivita (2.1.9) za geodezijsko preslikavanje dva Rimanova prostora, nadjena je jednačina za geodezijsko preslikavanje dva generalisana Rimanova prostora.

U opštem slučaju geodezijskog preslikavanja dva generalisana Rimanovova prostora dokazana je sledeća teorema:

Teorema 2.2.4. (Minčić, S. M., Stanković, M., (1997), [58]) *a) Preslikavanje f generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{GR}_N$ na generalisani Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ je geodezijsko ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata Kristofelovi simboli druge vrste ovih prostora zadovoljavaju (2.2.8).*

b) Ako je preslikavanje f geodezijsko tada važe sledeće jednačine:

$$\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{\bar{|}}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}, \tag{2.2.12}$$

$$\overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} = \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{2}{\bar{|}}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip}, \tag{2.2.13}$$

gde je sa $(|)$ i $(\bar{|})$, označeno kovarijantno diferenciranje u prostorima $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ redom. Obratno ako jedna od prethodne dve jednačine važi tada je preslikavanje f geodezijsko i važi takodje druga jednačina. ■

2.3 Ekvitorziono (ET) geodezijsko preslikavanje

Kao što smo rekli, geometrijski objekti W^i_{jmn} (2.1.7, 2.1.11) su invarijante geodezijskog preslikavanja dva prostora simetrične afine koneksije i Rimanovih prostora, redom. Vejlov tenzor W^i_{jmn} se dobija polazeći od tenzora krivine R^i_{jmn}. Kako su tenzori krivine $\underset{\theta}{R}{}^i_{jmn}$, $\theta = 1,\ldots,4$, $\underset{\mu}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn}$, $\mu = 1,\ldots,8$ i pseudotenzori $\underset{\pi}{A}{}^i_{jmn}$, $\pi = 1,\ldots,15$ uopštenja tenzora krivine R^i_{jmn}, onda usled geodezijskog preslikavanja dva prostora nesimetrične afine koneksije možemo dobiti invarijantne geometrijske objekte koji su uopštenja tenzora W^i_{jmn}. Na ovom problemu su prvi radili S. Minčić i M. Stanković. Oni su pokazali da u opštem slučaju nije moguće uopštiti Vejlov tenzor, već je u radu [59] uvedena specijalna klasa geodezijskih preslikavanja tzv. *ekvitorziona (ET) geodezijska preslikavanja*. Pri formiranju veza izmedju nekih geometrijskih objekata usled geodezijskog preslikavanja učestovaće i tenzor torzije. Nije moguće razdvojiti elemente jednog prostora sa leve strane jednakosti i iste te elemente drugog prostora dobiti sa desne strane jednakosti, u opšem slučaju. Iz tog razloga je uvedena sledeća definicija:

Definicija 2.3.1. (Minčić, S. M., Stanković, M., (1997), [59]) *Geodezijsko preslikavanje* $f: \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *je* **ekvitorziono (ET) geodezijsko preslikavanje** *ako su tenzori torzija dva prostora* $\mathbb{GA}_N$ *i* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *u zajedničkom koordinatnom sistemu jednaki. Tada iz (2.2.8) sledi*

$$\overline{L}^i_{\underset{\vee}{jk}} - L^i_{\underset{\vee}{jk}} = \xi^i_{jk} = 0. \tag{2.3.1}$$

Glavni zadatak u ovom radu biće proučavanje ekvitorzionih preslikavanja.

2.3.1 Potrebni i dovoljni uslovi za ET-geodezijsko preslikavanje $f: \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$

U ovom delu, vodjeni idejom iz Teoreme 2.2.4 (dati su potrebni i dovoljni uslovi za geodezijsko preslikavanje dva generalisana Rimanova prosotora) i uslovom (2.3.1), daćemo potrebne i dovoljne uslove za ET-geodezijsko preslikavanje.

Teorema 2.3.1. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{GR}_N$ *dopušta netrivijalno ET-geodezijsko na generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *ako i samo ako važi*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i \overline{g}_{\underline{kj}} + \psi_j \overline{g}_{\underline{ik}}, \tag{2.3.2}$$

gde je $(\underset{1}{|})$ *kovarijantno diferenciranje prve vrste u prostoru* $\mathbb{GR}_N$.

Dokaz. $(\Rightarrow:)$ Pretpostavimo da je preslikavanje $f: \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$, ET-geodezijsko preslikavanje. Iz jednačina (2.2.8, 2.3.1), i Teoreme 2.2.4 sledi veza

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j. \tag{2.3.3}$$

Iz definicije kovarijantnog diferenciranja (1.6.3) i jednačine (2.2.12) (Teorema 2.2.4b), dobijamo

$$\begin{aligned}
\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{|}k} - \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{\bar{|}}k} &= \overline{g}_{\underset{\vee}{ij},k} - \Gamma^p_{ik}\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}} - \Gamma^p_{jk}\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}} - \overline{g}_{\underset{\vee}{ij},k} + \overline{\Gamma}^p_{ik}\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}} + \overline{\Gamma}^p_{jk}\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}} \\
&= (\overline{\Gamma}^p_{ik} - \Gamma^p_{ik})\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}} + (\overline{\Gamma}^p_{jk} - \Gamma^p_{jk})\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}} \\
&= (\delta^p_i \psi_k + \delta^p_k \psi_i) g_{\underset{\vee}{pj}} + (\delta^p_j \psi_k + \delta^p_k \psi_j) g_{\underset{\vee}{ip}} \\
&= 2\psi_k \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}} + \psi_i \overline{g}_{\underset{\vee}{kj}} + \psi_j \overline{g}_{\underset{\vee}{ik}}.
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Ako zamenimo $\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{|}k}$ iz (2.3.4) u (2.2.12), dobijamo traženu jednačinu (2.3.2).

$(\Leftarrow:)$ Pretpostavimo da jednačina (2.3.2) važi. Kako je u $\mathbb{GR}_N$ zadovoljeno $g_{\underline{ij}\underset{\theta}{|}k} = 0, \theta = 1, \dots, 4,$ imamo

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} - \overbrace{\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{\bar{|}}k}}^{0} = (\overline{\Gamma}^p_{ik} - \Gamma^p_{ik}) g_{\underline{pj}} + (\overline{\Gamma}^p_{jk} - \Gamma^p_{jk}) g_{\underline{ip}}. \tag{2.3.5}$$

Sa druge strane je

$$\begin{aligned}\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k}&=2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}}+\psi_i\overline{g}_{\underline{kj}}+\psi_j\overline{g}_{\underline{ik}}\\ &=(\psi_i\delta^p_k+\psi_k\delta^p_i)g_{\underline{pj}}+(\psi_j\delta^p_k+\psi_k\delta^p_j)g_{\underline{ip}}.\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

Iz jednačina (2.3.5) i (2.3.6) uporedjivanjem zaključujemo da je

$$\overline{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\psi_i\delta^p_k+\psi_k\delta^p_i.\tag{2.3.7}$$

tj. $\overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{jk}}=\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ ■

Lako se pokazuje da važi i

Teorema 2.3.2. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta netrivijalno ET-geodezijsko na generalisani Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ ako i samo ako važi*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{2}{|}k}=2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}}+\psi_i\overline{g}_{\underline{kj}}+\psi_j\overline{g}_{\underline{ik}},\tag{2.3.8}$$

gde je $(\underset{2}{|})$ kovarijantno diferenciranje druge vrste u prostoru $\mathbb{GR}_N$. ■

U vezi sa prethodnim izlaganjem navodimo poznat i veoma značajan rezultat iz teorije geodezijskih preslikavanja Rimanovih prostora.

Teorema 2.3.3. (Sinjukov, N. S., [89]) *Rimanov prostor $\mathbb{R}_N$ dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na Rimanov prostor $\overline{\mathbb{R}}_N$ ako i samo ako u $\mathbb{R}_N$ sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod*

$$\begin{array}{lrl} a) & a_{ij;k}= & \lambda_i g_{jk}+\lambda_j g_{ik};\\ b) & N\lambda_{i;k}= & \mu g_{ik}+a_{ip}R^p_k-a_{pq}R^{p}_{ik.}{}^{q};\\ c) & (N-1)\mu_{;k}= & 2(N+1)\lambda_p R^p_k+a_{pq}(2R^p_{k;.}{}^{q}-R^{pq}_{.;k});\end{array}\tag{2.3.9}$$

ima rešenje u odnosu na nepoznate: simetrični tensor $a_{ij}=a_{ji}$, gradijentni vektor $\lambda_i\neq 0$, i diferencijabilnu funkciju $\mu=\lambda_{p;q}g^{pq}$, gde je $R^p_j=g^{qr}R^p_{qrj}$, $R^p_{ij.}{}^{q}=g^{qr}R^p_{ijr}$, $R^p_{i;.}{}^{q}=g^{qr}R^p_{i;r}$ i $R^p_{.;i}{}^{q}=g^{qr}R^p_{r;i}$. ■

Rešenje sistema jednačina (2.3.9) je u vezi sa označavanjem [89]:

$$a_{ij}=e^{2\psi}\overline{g}^{pq}g_{pi}g_{qj},\quad \lambda_i=-e^{2\psi}\overline{g}^{pq}g_{pi}\psi_q.\tag{2.3.10}$$

Formula (2.3.9*a*) daje potreban i dovoljan uslov egzistencije geodezijskog preslikavanje $f:\mathbb{R}_N\to\overline{\mathbb{R}}_N$ i ekvivalentna je jednačini Levi-Čivita (2.1.9). Ovo preslikavanje je netrivijano ako i samo ako je $\lambda_i\neq 0$.

Mi dajemo neka uopštenja ove teoreme posmatrajući opštije prostore. Posmatrajmo ET-geodezijsko preslikavanje $f:\ \mathbb{GR}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$. Označimo:

$$a)\ a_{ij}=e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{pq}}g_{\underline{pi}}g_{\underline{qj}},\quad b)\ \lambda_i=-e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{pq}}g_{\underline{pi}}\psi_q.\tag{2.3.11}$$

Na osnovu Teoreme 2.3.1 važi

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{\theta}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i \overline{g}_{\underline{kj}} + \psi_j \overline{g}_{\underline{ik}}, \quad \theta = 1,2,3,4. \tag{2.3.12}$$

Kako je $\overline{g}^{\underline{ip}}\overline{g}_{\underline{pj}} = \delta^i_j$, i uzimajući (2.3.12), imamo

$$\overline{g}^{\underline{ij}}_{\ \ \underset{\theta}{|}k} = -2\psi_k \overline{g}^{\underline{ij}} - \psi_p g^{\underline{ip}} \delta^j_k - \psi_p g^{\underline{jp}} \delta^i_k, \quad \theta = 1,2,3,4. \tag{2.3.13}$$

Teorema 2.3.4. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ ako i samo ako u $\mathbb{GR}_N$ sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod prve vrste*

$$\begin{aligned}
a)\qquad & a_{ij\underset{1}{|}k} = \lambda_j g_{\underline{ik}} + \lambda_i g_{\underline{jk}};\\
b)\qquad & N\lambda_{i\underset{1}{|}k} = -a_{pi}\underset{1}{R}{}^p_k + a_{pq} g^{\underline{qr}} \underset{1}{R}{}^p_{ikr} + \underset{1}{\mu} g_{\underline{ik}} - \lambda_p g_{\underline{ir}} g^{\underline{pq}} \Gamma^r_{[qk]};\\
c)\qquad & (N-1)\underset{1}{\mu}{}_{\underset{1}{|}k} = -2(N+1)\lambda_p \underset{1}{R}{}^p_k - 2a_{pq} g^{\underline{qr}} \underset{1}{R}{}^p_{k\underset{1}{|}r} + a_{pq} g^{\underline{qr}} \underset{1}{R}{}^p_{r\underset{1}{|}k}\\
& \quad + \lambda_q g^{\underline{qr}} \underset{1}{R}{}^p_{pkr} + a_{pq} g^{\underline{\alpha\beta}} g^{\underline{qr}} \underset{kr\beta}{\mathfrak{S}} \Gamma^\gamma_{[kr]} \underset{1}{R}{}^p_{\alpha\gamma\beta} - \lambda_p g^{\underline{pq}} \Gamma^r_{[qk]\underset{1}{|}r}\\
& \quad - \frac{(N+1)}{N} g^{\underline{pq}} \Gamma^r_{[qk]} \big(-a_{\alpha p} \underset{1}{R}{}^\alpha_r + a_{\alpha\beta} g^{\underline{\beta\gamma}} \underset{1}{R}{}^\alpha_{rp\gamma} - \lambda_\alpha g_{\underline{p\beta}} g^{\underline{\alpha\gamma}} \Gamma^\beta_{[\gamma r]}\big),
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

ima rešenje u odnosu na simetrični tenzor a_{ij}, gradijentni vektor $\lambda_i \neq 0$, i diferencijabilnu funkciju $\underset{1}{\mu} = \lambda_{p\underset{1}{|}q} g^{\underline{pq}}$, gde je $\underset{1}{R}{}^i_k = g^{\underline{pq}} \underset{1}{R}{}^i_{pqk}$.

Dokaz. Ako primenimo kovarijantni izvod prve vrste $(\underset{1}{|})$ na jednačinu (2.3.11a) u odnosu na x^k i iskoristimo formulu (2.3.13), dobijamo

$$\begin{aligned}
a_{ij\underset{1}{|}k} &= 2e^{2\psi} \psi_{\underset{1}{|}k} \overline{g}^{\underline{pq}} g_{\underline{pi}} g_{\underline{qj}} - 2e^{2\psi} \psi_k \overline{g}^{\underline{pq}} g_{\underline{pi}} g_{\underline{qj}} - e^{2\psi} \delta^p_k \psi^q g_{\underline{pi}} g_{\underline{qj}} - e^{2\psi} \delta^q_k \psi^p g_{\underline{pi}} g_{\underline{qj}}\\
&= -e^{2\psi} \psi^q g_{\underline{ki}} g_{\underline{qj}} - e^{2\psi} \psi^p g_{\underline{pi}} g_{\underline{kj}} = \lambda_j g_{\underline{ik}} + \lambda_i g_{\underline{jk}},
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

gde je $g_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 0$, i $\psi_{\underset{1}{|}k} = \psi_k = \partial\psi/\partial x^k$.

Ako pomnožimo (2.3.15) sa $g^{\underline{ij}}$, sledi $(g^{\underline{ij}} a_{ij})_{\underset{1}{|}k} = 2\lambda_k$. Dakle, λ_i je gradijentni vektor, i izvod funkcije

$$\lambda = \frac{1}{2} g^{\underline{pq}} a_{pq}. \tag{2.3.16}$$

Iz jednačine (2.3.16), dobijamo

$$\lambda_{i\underset{1}{|}j} - \lambda_{j\underset{1}{|}i} = -\Gamma^p_{[ij]}\lambda_p. \tag{2.3.17}$$

Iz jednačine (2.3.15) sledi

$$a_{ij\underset{1}{|}lk} - a_{ij\underset{1}{|}kl} = \lambda_{j\underset{1}{|}k} g_{\underline{il}} + \lambda_{i\underset{1}{|}k} g_{\underline{jl}} - \lambda_{j\underset{1}{|}l} g_{\underline{ik}} - \lambda_{i\underset{1}{|}l} g_{\underline{jk}}. \tag{2.3.18}$$

Koristeći odgovarajući Ričijev identitet (1.9.7), (vidi [49]) iz (2.3.18) sledi

$$-a_{pi}\underset{1}{R}{}^p_{jlk} - a_{pj}\underset{1}{R}{}^p_{ilk} - \Gamma^p_{[lk]}\overbrace{a_{ij\underset{1}{|}p}}^{\lambda_j g_{\underline{ip}}+\lambda_i g_{\underline{jp}}} = \lambda_{j\underset{1}{|}k} g_{\underline{il}} + \lambda_{i\underset{1}{|}k} g_{\underline{jl}} - \lambda_{j\underset{1}{|}l} g_{\underline{ik}} - \lambda_{i\underset{1}{|}l} g_{\underline{jk}}. \tag{2.3.19}$$

Množenjem sa $g^{\underline{jl}}$ u (2.3.19), dobija se

$$-a_{pi}\underset{1}{R}{}^p_k - a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{irk} - \lambda_p g_{\underline{ir}} g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[qk]} = N\lambda_{i\underset{1}{|}k} - \underset{1}{\mu} g_{\underline{ik}},$$

gde je označeno $\underset{1}{\mu} = \lambda_{p\underset{1}{|}q} g^{\underline{pq}}$ i $\underset{1}{R}{}^i_k = g^{\underline{pq}}\underset{1}{R}{}^i_{pqk}$. Kako u $\mathbb{GR}_N$ važi na osnovu $g_{\underline{ij}\underset{\theta}{|}k} = 0,\ \theta = 1,2,3,4$ da je

$$g_{ir}\Gamma^r_{[qk]} + g_{qr}\Gamma^r_{[ik]} = 0, \tag{2.3.20}$$

konačno,

$$N\lambda_{i\underset{1}{|}k} = -a_{pi}\underset{1}{R}{}^p_k + a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ikr} + \underset{1}{\mu} g_{\underline{ik}} - \lambda_p\Gamma^p_{[ik]}. \tag{2.3.21}$$

Sada se iz prethodne jednačine dobija

$$\begin{aligned}
N\lambda_{i\underset{1}{|}kl} - N\lambda_{i\underset{1}{|}lk} = & -(\lambda_p g_{\underline{il}}+\lambda_i g_{\underline{pl}})\underset{1}{R}{}^p_k - a_{pi}\underset{1}{R}{}^p_{k\underset{1}{|}l} + (\lambda_p g_{\underline{ql}}+\lambda_q g_{\underline{pl}})g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ikr}\\
& + a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ikr\underset{1}{|}l} + \underset{1}{\mu}{}_{\underset{1}{|}l} g_{\underline{ik}} - \lambda_{p\underset{1}{|}l}\Gamma^p_{[ik]} - \lambda_p\Gamma^p_{[ik]\underset{1}{|}l}\\
& + (\lambda_p g_{\underline{ik}}+\lambda_i g_{\underline{pk}})\underset{1}{R}{}^p_l + a_{pi}\underset{1}{R}{}^p_{l\underset{1}{|}k} - (\lambda_p g_{\underline{qk}}+\lambda_q g_{\underline{pk}})g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ilr}\\
& - a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ilr\underset{1}{|}k} - \underset{1}{\mu}{}_{\underset{1}{|}k} g_{\underline{il}} + \lambda_{p\underset{1}{|}k}\Gamma^p_{[il]} + \lambda_p\Gamma^p_{[il]\underset{1}{|}k}.
\end{aligned}$$

Množenjem sa $g^{\underline{ik}}$ u poslednjoj jednačini i koristeći odgovarajući Ričijev identitet, na levoj strani poslednje jednačine dobijamo

$$\mathcal{L} = -Ng^{\underline{ik}}\lambda_p\underset{1}{R}{}^p_{ikl} - Ng^{\underline{ik}}\Gamma^p_{[kl]}\lambda_{i\underset{1}{|}p}, \tag{2.3.22}$$

a kako je u $\mathbb{GR}_N$ zadovoljeno $\Gamma^p_{[ip]} = 0$, desna strana iste jednačine postaje

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} = & -\lambda_p\underset{1}{R}{}^p_l - \lambda_q g^{\underline{qk}} g_{\underline{pl}}\underset{1}{R}{}^p_k - a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{r\underset{1}{|}l} + \lambda_p g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{qrl} + \lambda_q g^{\underline{ik}} g^{\underline{qr}} g_{\underline{pl}}\underset{1}{R}{}^p_{ikr}\\
& + a_{pq}g^{\underline{ik}}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ikr\underset{1}{|}l} + N\underset{1}{\mu}{}_{\underset{1}{|}l} + N\lambda_p\underset{1}{R}{}^p_l + \lambda_p\underset{1}{R}{}^p_l + a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{l\underset{1}{|}r}\\
& - \lambda_p g^{\underline{ik}}\underset{1}{R}{}^p_{ilk} - \lambda_q g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{plr} - a_{pq}g^{\underline{ik}}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ilr\underset{1}{|}k} - \underset{1}{\mu}{}_{\underset{1}{|}l} + \lambda_{p\underset{1}{|}r}g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[ql]} + \lambda_p g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[ql]\underset{1}{|}r}.
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Kako je $\mathcal{L} = \mathcal{D}$, imamo

$$\begin{aligned}
(N-1)\underset{1}{\mu}{}_{\underset{1}{|}l} = & -2(N+1)\lambda_p\underset{1}{R}{}^p_l - a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{l\underset{1}{|}r} + \lambda_q g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{plr} + a_{pq}g^{\underline{ik}}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ilr\underset{1}{|}k}\\
& - \lambda_p g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[ql]\underset{1}{|}r} - \frac{(N+1)}{N}g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[ql]}(-a_{\alpha p}\underset{1}{R}{}^\alpha_r + a_{\alpha\beta}g^{\underline{\beta\gamma}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{rp\gamma} + \underset{1}{\mu} g_{\underline{pr}} - \lambda_\alpha g_{\underline{p\beta}}g^{\underline{\alpha\gamma}}\Gamma^\beta_{[\gamma r]}).
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

U prostoru $\mathbb{GR}_N$ za tenzor $\underset{1}{R}{}^i_{jkl}=-\underset{1}{R}{}^i_{jlk}$ koji je dat jednačinom (1.6.6), koristimo odgovarajući Bjankijev identitet [56, 57]:

$$\underset{lrk}{\mathfrak{S}}\underset{1}{R}{}^p_{ilr\underset{1}{|}k}=\underset{1}{R}{}^p_{ilr\underset{1}{|}k}+\underset{1}{R}{}^p_{irk\underset{1}{|}l}+\underset{1}{R}{}^p_{ikl\underset{1}{|}r}=\underset{lrk}{\mathfrak{S}}\Gamma^q_{[lr]}\underset{1}{R}{}^p_{iqk},$$

odakle je onda

$$\begin{aligned}a_{pq}g^{\underline{ik}}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ilr\underset{1}{|}k}&=-a_{pq}g^{\underline{ik}}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{irk\underset{1}{|}l}-a_{pq}g^{\underline{ik}}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ikl\underset{1}{|}r}+a_{pq}g^{\underline{ik}}g^{\underline{qr}}\underset{lrk}{\mathfrak{S}}\Gamma^\gamma_{[lr]}\underset{1}{R}{}^p_{i\gamma k}\\&=a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{r\underset{1}{|}l}-a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{l\underset{1}{|}r}+a_{pq}g^{\underline{ik}}g^{\underline{qr}}\underset{lrk}{\mathfrak{S}}\Gamma^\gamma_{[lr]}\underset{1}{R}{}^p_{i\gamma k},\end{aligned}$$

i na kraju ako zamenimo poslednji izraz u jednačinu (2.3.24), dobićemo

$$\begin{aligned}(N-1)\underset{1}{\mu}{}_{\underset{1}{|}l}=&-2(N+1)\lambda_p\underset{1}{R}{}^p_l-2a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{l\underset{1}{|}r}+a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{r\underset{1}{|}l}+\lambda_q g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{plr}+a_{pq}g^{\underline{ik}}g^{\underline{qr}}\underset{lrk}{\mathfrak{S}}\Gamma^q_{[lr]}\underset{1}{R}{}^p_{iqk}\\&-\lambda_p g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[ql]\underset{1}{|}r}-\frac{(N+1)}{N}g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[ql]}(-a_{\alpha p}\underset{1}{R}{}^\alpha_r+a_{\alpha\beta}g^{\underline{\beta\gamma}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{rp\gamma}-\lambda_\alpha g_{\underline{p\beta}}g^{\underline{\alpha\gamma}}\Gamma^\beta_{[\gamma r]}),\end{aligned}$$

tj. (2.3.14c). Ovim je teorema dokazana. ■

Istim postupkom kao u prethodnoj teoremi, pokazuju se sledeće teoreme:

Teorema 2.3.5. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ ako i samo ako u $\mathbb{GR}_N$ sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod druge vrste*

$$\begin{aligned}&a) && a_{ij\underset{2}{|}k}&&=\lambda_j g_{\underline{ik}}+\lambda_i g_{\underline{jk}};\\&b) && N\lambda_{i\underset{2}{|}k}&&=-a_{pi}\underset{2}{R}{}^p_k+a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{2}{R}{}^p_{ikr}+\underset{2}{\mu}g_{\underline{ik}}+\lambda_p g_{\underline{ir}}g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[qk]};\\&c) && (N-1)\underset{2}{\mu}{}_{\underset{2}{|}k}&&=-2(N+2)\lambda_p\underset{2}{R}{}^p_k-2a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{2}{R}{}^p_{k\underset{2}{|}r}+a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{2}{R}{}^p_{r\underset{2}{|}k}\\&&&&&+\lambda_q g^{\underline{qr}}\underset{2}{R}{}^p_{pkr}+a_{pq}g^{\underline{\alpha\beta}}g^{\underline{qr}}\underset{kr\beta}{\mathfrak{S}}\Gamma^\gamma_{[kr]}\underset{2}{R}{}^p_{\alpha\beta\gamma}+\lambda_p g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[qk]\underset{2}{|}r}\\&&&&&-\tfrac{(N+2)}{N}g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[qk]}(-a_{\alpha p}\underset{2}{R}{}^\alpha_r+a_{\alpha\beta}g^{\underline{\beta\gamma}}\underset{2}{R}{}^\alpha_{rp\gamma}+\lambda_\alpha g_{\underline{p\beta}}g^{\underline{\alpha\gamma}}\Gamma^\beta_{[\gamma r]}),\end{aligned}\tag{2.3.25}$$

ima rešenje u odnosu na simetrični tenzor a_{ij}, gradijentni vektor $\lambda_i\neq 0$, i diferencijabilnu funkciju $\underset{2}{\mu}=\lambda_{p\underset{2}{|}q}g^{\underline{pq}}$, gde je $\underset{2}{R}{}^i_k=g^{\underline{pq}}\underset{2}{R}{}^i_{pqk}$.

Dokaz. Diferenciranjem jednačine (2.3.11a) u odnosu na drugu vrstu kovarijantnog diferenciranja (1.6.3) i koristeći odgovarajući Ričijev identitet (1.9.8) (vidi [49]), imamo

$$a_{ij\underset{2}{|}lk}-a_{ij\underset{2}{|}kl}=-a_{pi}\underset{2}{R}{}^p_{jlk}-a_{pj}\underset{2}{R}{}^p_{ilk}+\Gamma^p_{[lk]}a_{ij\underset{2}{|}p},\tag{2.3.26}$$

tj. važi (2.3.25b). U prostoru $\mathbb{GR}_N$ za tenzor $\underset{2}{R}{}^i_{jkl}=-\underset{2}{R}{}^i_{jlk}$ dat jednačinom (1.6.7) važi odgovarajući Bjankijev identitet [56, 57]:

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{2}{R}{}^i_{jmn\underset{2}{|}v}=\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\Gamma^p_{[mn]}\underset{2}{R}{}^i_{jvp}.\tag{2.3.27}$$

Prateći korak po korak iz Teoreme 2.3.4, dobijamo (2.3.25c). ■

Teorema 2.3.6. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ ako i samo ako u $\mathbb{GR}_N$ sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod treće vrste*

$$\begin{aligned}
&a) & a_{ij\underset{3}{|}k} &= \lambda_j g_{\underline{ik}} + \lambda_i g_{\underline{jk}};\\
&b) & N\lambda_{i\underset{3}{|}k} &= -a_{pi}\underset{2}{R}{}^p_k + a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{2}{R}{}^p_{ikr} + \underset{3}{\mu}g_{\underline{ik}} + \lambda_p g_{\underline{ir}}g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[qk]};\\
&c) & (N-1)\underset{3}{\mu}{}_{\underset{3}{|}k} &= -2(N+1)\lambda_\alpha \underset{2}{R}{}^\alpha_k - 2a_{\alpha\beta}g^{\underline{\beta\gamma}}\underset{2}{R}{}^\alpha_{k\underset{3}{|}\gamma} + a_{\alpha\beta}g^{\underline{\beta\gamma}}\underset{2}{R}{}^\alpha_{\gamma\underset{3}{|}k} + \lambda_\beta g^{\underline{\beta\gamma}}\underset{2}{R}{}^\alpha_{\alpha k\gamma}\\
&&&\quad + \lambda_\alpha g^{\underline{\alpha\beta}}\Gamma^\gamma_{[\beta k]\underset{3}{|}\gamma} + \frac{(N+1)}{N}g^{\underline{\alpha\beta}}\Gamma^\gamma_{[\beta k]}(-a_{p\alpha}\underset{2}{R}{}^p_\gamma + a_{pq}g^{\underline{qs}}\underset{2}{R}{}^p_{\alpha\gamma s} + \lambda_p g_{\underline{\alpha q}}g^{\underline{ps}}\Gamma^q_{[s\gamma]})\\
&&&\quad + a_{pq}g^{\underline{\alpha\beta}}g^{\underline{qr}}\underset{kr\beta}{\mathfrak{S}}(\Gamma^p_{[\gamma k]}\underset{2}{R}{}^\gamma_{\alpha r\beta} + \Gamma^\gamma_{[kr]}\underset{2}{R}{}^p_{\alpha\beta\gamma}),
\end{aligned}\tag{2.3.28}$$

ima rešenje u odnosu na simetrični tenzor a_{ij}, gradijentni vektor $\lambda_i \neq 0$, i diferencijabilnu funkciju $\underset{3}{\mu} = \lambda_{p\underset{3}{|}q}g^{\underline{pq}}$.

Dokaz. Iz jednačine (2.3.11a) u odnosu na kovarijantni izvod treće vrste (1.6.3) i Ričijevog identiteta za treću vrstu kovarijantnog diferenciranja (1.9.9), imamo

$$a_{ij\underset{3}{|}lk} - a_{ij\underset{3}{|}kl} = -a_{pi}\underset{2}{R}{}^p_{jlk} - a_{pj}\underset{2}{R}{}^p_{ilk} + \Gamma^p_{[lk]}a_{ij\underset{3}{|}p}, \tag{2.3.29}$$

dobijamo (2.3.28b). U dokazu koristimo i Bjankijev identitet za tenzor $\underset{2}{R}{}^i_{jkl}$ u odnosu na treću vrstu kovarijantnog diferenciranja [57], koji glasi

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\underset{2}{R}{}^i_{jmn\underset{3}{|}v} = \underset{mnv}{\mathfrak{S}}(\Gamma^i_{[pm]}\underset{2}{R}{}^p_{jnv} + \Gamma^p_{[mn]}\underset{2}{R}{}^i_{jvp}). \tag{2.3.30}$$

Ponavljajući postupak po kome smo dobili (2.3.14c), možemo dokazati (2.3.28c). ■

Teorema 2.3.7. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ ako i samo ako u $\mathbb{GR}_N$ sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod četvrte vrste*

$$\begin{aligned}
&a) & a_{ij\underset{4}{|}k} &= \lambda_j g_{\underline{ik}} + \lambda_i g_{\underline{jk}};\\
&b) & N\lambda_{i\underset{4}{|}k} &= -a_{pi}\underset{1}{R}{}^p_k + a_{pq}g^{\underline{qr}}\underset{1}{R}{}^p_{ikr} + \underset{4}{\mu}g_{\underline{ik}} - \lambda_p g_{\underline{ir}}g^{\underline{pq}}\Gamma^r_{[qk]};\\
&c) & (N-1)\underset{4}{\mu}{}_{\underset{4}{|}k} &= -2(N+1)\lambda_\alpha \underset{1}{R}{}^\alpha_k - 2a_{\alpha\beta}g^{\underline{\beta\gamma}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{k\underset{4}{|}\gamma} + a_{\alpha\beta}g^{\underline{\beta\gamma}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\gamma\underset{4}{|}k} + \lambda_\beta g^{\underline{\beta\gamma}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\alpha k\gamma}\\
&&&\quad - \lambda_\alpha g^{\underline{\alpha\beta}}\Gamma^\gamma_{[\beta k]\underset{4}{|}\gamma} - \frac{(N+1)}{N}g^{\underline{\alpha\beta}}\Gamma^\gamma_{[\beta k]}(-a_{p\alpha}\underset{1}{R}{}^p_\gamma + a_{pq}g^{\underline{qs}}\underset{1}{R}{}^p_{\alpha\gamma s} - \lambda_p g_{\underline{\alpha q}}g^{\underline{ps}}\Gamma^q_{[s\gamma]})\\
&&&\quad + a_{pq}g^{\underline{\alpha\beta}}g^{\underline{qr}}\underset{kr\beta}{\mathfrak{S}}(\Gamma^p_{[\gamma k]}\underset{1}{R}{}^\gamma_{\alpha r\beta} + \Gamma^\gamma_{[kr]}\underset{1}{R}{}^p_{\alpha\gamma\beta})
\end{aligned}\tag{2.3.31}$$

ima rešenje u odnosu na simetrični tenzor a_{ij}, gradijentni vektor $\lambda_i \neq 0$, i diferencijabilnu funkciju $\underset{4}{\mu} = \lambda_{j\underset{4}{|}l}g^{\underline{jl}}$.

Dokaz. U odnosu na četvrtu vrstu kovarijantnog diferenciranja (1.6.3) i Ričijevog identiteta (1.9.10), dobija se

$$a_{ij\underset{4}{|}lk} - a_{ij\underset{4}{|}kl} = -a_{pi}\underset{1}{R}{}^p_{jlk} - a_{pj}\underset{1}{R}{}^p_{ilk} - \Gamma^p_{[lk]}a_{ij\underset{4}{|}p}, \tag{2.3.32}$$

i odgovarajućeg Bjankijevog identiteta

$$\underset{mnv}{\mathfrak{S}}\,\underset{1}{R}{}^i_{jmn\underset{4}{|}v} = \underset{mnv}{\mathfrak{S}}\,(\Gamma^i_{[pm]}\underset{1}{R}{}^p_{jnv} + \Gamma^p_{[mn]}\underset{1}{R}{}^i_{jpv}), \tag{2.3.33}$$

lako se pokazuje da važe $(2.3.31b, 2.3.31c)$. ■

Napomena: Kako važi da je

$$a_{ij\underset{\theta}{|}k} = \lambda_j g_{\underline{ik}} + \lambda_i g_{\underline{jk}}, \quad \theta = 1, 2, 3, 4,$$

$\lambda_{i\underset{1}{|}k} = \lambda_{i\underset{4}{|}k}$, $\lambda_{i\underset{2}{|}k} = \lambda_{i\underset{3}{|}k}$ i $\underset{1}{\mu} = \underset{4}{\mu}$, $\underset{2}{\mu} = \underset{3}{\mu}$, onda su sistemi (2.3.14) i (2.3.31) odnosno (2.3.25) i (2.3.28) ekvivalentni.

Sistemi (2.3.14, 2.3.25, 2.3.28, 2.3.31) nemaju više od jednog rešenja za inicijalnu vrednost u tački x_0:

$$\overline{g}_{\underline{ij}}(x_0) = \overset{0}{\overline{g}}_{\underline{ij}}, \ \lambda_i(x_0) = \overset{0}{\lambda}_i, \ \underset{\theta}{\mu}(x_0) = \underset{\theta}{\overset{0}{\mu}}, \quad \theta = 1, 2, 3, 4.$$

Opšta rešenja sistema (2.3.14, 2.3.25, 2.3.28, 2.3.31) zavise od konačnog broja parametra

$$r \leq r_0 \equiv \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$

Kako a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, N)$ ima $\frac{N(N-1)}{2} + N$ članova, λ_i ima N i $\underset{\theta}{\mu}$ ima 1, to je maksimalan broj

$$\frac{N(N-1)}{2} + N + N + 1 = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$

Nalaženjem broja rešenja sistema se nećemo baviti ovde. Više o tome se može naći u radovima [28, 32, 45, 46, 89].

2.3.2 Potrebni i dovoljni uslovi za ET-geodezijsko preslikavanje $f:\ \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$

Posmatrajmo sada dve N-dimenzionalne mnogostrukosti $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ i diferencijabilno preslikavanje

$$f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N.$$

Možemo posmatrati ove mnogostrukosti u zajedničkom sistemu lokalnih koordinata u odnosu na ovo preslikavanje.

Preslikavanje $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ je *geodezisko*, [37, 39, 40, 45, 46] ako geodezijske linije prostora $\mathbb{GA}_N$ prelaze u geodezijske line prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$. U odgovarajućim tačkama M i $\overline{M}$, postoji veza

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = L^i_{jk} + P^i_{jk}, \tag{2.3.34}$$

gde je P^i_{jk} *tenzor deformacije* u odnosu na preslikavanje $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$. Tenzor P^i_{jk} je nesimetričan u odnosu na j, k, kao i koneksije L^i_{jk}, $\overline{\Gamma}^i_{jk}$.

Potreban i dovoljan uslov da ovo preslikavanje f bude geodezijsko jeste da je tenzor deformacije P^i_{jk} iz (2.3.34) oblika

$$P^i_{jk} = \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j + \xi^i_{jk}, \tag{2.3.35}$$

gde je

$$\psi_i = \frac{1}{N+1}(\overline{\Gamma}^p_{\underline{ip}} - L^p_{\underline{ip}}), \quad \xi^i_{jk} = P^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(P^i_{jk} - P^i_{kj}). \tag{2.3.36}$$

Preslikavanje $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ je *ET-geodezijsko preslikavanje* ako su torzije prostora $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ jednake. Tada iz (2.3.34, 2.3.35) i (2.3.36) imamo

$$\overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{jk}} - L^i_{\underset{\vee}{jk}} = \xi^i_{jk} = 0. \tag{2.3.37}$$

Teorema 2.3.8. (Mikeš, J., Berezovski, V., (1989), [37]) *Mnogostrukost sa afinom koneksijom $\mathbb{A}_N$ dopušta geodezijsko preslikavanje na Rimanovu mnogostrukost $\overline{\mathbb{R}}_N$ sa metričkim tenzorom $\overline{g}_{ij}$ ako i samo ako ima rešenje sledeći sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod u odnosu na simetrični tenzor $\overline{g}_{ij}$, $(det(\overline{g}_{ij} \neq 0)$, kovektor ψ_i i funkciju μ*

$$\begin{array}{lrl}
a) & \overline{g}_{ij;k} & = 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik};\\
b) & N\psi_{i;j} & = N\psi_i\psi_j + \mu \overline{g}_{ij} - \overline{g}^{\beta\gamma}\overline{g}_{i\alpha}R^{\alpha}_{\beta\gamma j} - R_{ij} - \frac{2}{N+1}R^{\alpha}_{\alpha ij};\\
c) & (N-1)\mu_{;i} & = 2(N-1)\psi_\alpha \overline{g}^{\beta\gamma}R^{\alpha}_{\beta\gamma i} + \psi_\alpha \overline{g}^{\alpha\beta}(5R_{\beta i} + \frac{6}{N+1}R^{\gamma}_{\gamma\beta i} - R_{i\beta})\\
 & & +\overline{g}^{\alpha\beta}(R^{\gamma}_{\alpha\beta i;\gamma} - R_{\alpha i;\beta} - \frac{2}{N+1}R^{\gamma}_{\gamma\alpha i}),
\end{array} \tag{2.3.38}$$

gde $(;)$ označava kovarijantni izvod u odnosu na simetričnu koneksiju prostora $\mathbb{A}_N$, i $\overline{g}^{ij}$ su komponente inverzne matrice, matrice $(\overline{g}_{ij})$, R^h_{ijk}, R_{ij} su redom Rimanov i Ričijev tenzor mnogostrukosti $\mathbb{A}_N$, i $R^\alpha_j = g^{\beta\gamma}R^\alpha_{\beta\gamma j}$, $R^{\alpha\ \ \beta}_{ij.} = g^{\beta\gamma}R^\alpha_{ij\gamma}$, $R^{\alpha\ \ \beta}_{i;.} = g^{\beta\gamma}R^\alpha_{i;\gamma}$ i $R^{\alpha\ \ \beta}_{.;i} = g^{\beta\gamma}R^\alpha_{\gamma;i}$. ■

Mi razmatramo slučaj ET-geodeziskog preslikavanja $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$, i dobićemo rezultate koji važe za širu klasu prostora. Prethodna teorema će biti samo specijalan slučaj naših rezutata.

Polazimo od jednačine (2.3.2) koja je potreban i dovoljan uslov za ET-geodezisko preslikavanje $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$:

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i \overline{g}_{\underline{kj}} + \psi_j \overline{g}_{\underline{ik}} = \overline{g}_{\underline{ij}\underset{2}{|}k}. \tag{2.3.39}$$

Dalje, u odnosu na prvu vrstu diferenciranja, imamo

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}ks} - \overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}sk} = 2g_{\underline{ij}}\underset{1}{\psi}_{[ks]} + g_{\underline{k(i}}\underset{1}{\psi}_{j)s} - g_{\underline{s(i}}\underset{1}{\psi}_{j)k} \tag{2.3.40}$$

gde smo označili sa $\underset{1}{\psi}_{jk} = \psi_{j\underset{1}{|}k} - \psi_j\psi_k$ i sa $g_{\underline{k(i}}\underset{1}{\psi}_{j)s}$ simetrizaciju po indeksima i i j. Koristimo Ričijev identitet za prvu vrstu diferenciranja, pa iz (2.3.40) sledi

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}ks} - \overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}sk} = -\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^{\alpha}_{jks} - \overline{g}_{\underline{j\alpha}}\underset{1}{R}^{\alpha}_{iks} - L^p_{[ks]}\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}p},$$

tj.

$$-\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^\alpha_{jks} - \overline{g}_{\underline{j\alpha}}\underset{1}{R}^\alpha_{iks} - L^p_{[ks]}(2\psi_p\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{pj}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ip}}) = 2g_{\underline{ij}}\underset{1}{\psi}_{[ks]} + g_{\underline{k(i}}\underset{1}{\psi}_{j)s} - g_{\underline{s(i}}\underset{1}{\psi}_{j)k}. \tag{2.3.41}$$

Množeći poslednju jednačinu sa $\overline{g}^{\underline{ij}}$, dobijamo

$$\underset{1}{\psi}_{\{ks\}} = -\frac{1}{N+1}\underset{1}{R}^\alpha_{\alpha ks}, \tag{2.3.42}$$

gde je $\underset{1}{\psi}_{\{ks\}} = \underset{1}{\psi}_{[ks]} + \psi_p L^p_{[ks]}$. Zamenom (2.3.42) u (2.3.41) dobija se

$$-\overline{g}_{(\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^\alpha_{j)ks} + \frac{2}{N+1}g_{\underline{ij}}\underset{1}{R}^\alpha_{\alpha ks} - L^p_{[ks]}\psi_{(i}\overline{g}_{\underline{pj})} = g_{\underline{k(i}}\underset{1}{\psi}_{j)s} - g_{\underline{s(i}}\underset{1}{\psi}_{j)k}\,. \tag{2.3.43}$$

Množeći poslednju jednačinu sa $\overline{g}^{\underline{jk}}$ sledi

$$-\overline{g}^{\underline{jk}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^\alpha_{jks} + \underset{1}{R}_{is} + \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}^\alpha_{\alpha is} - L^p_{[ps]}\psi_i - \overline{g}^{\underline{jk}}\overline{g}_{\underline{ip}}L^p_{[ks]}\psi_j = N\underset{1}{\psi}_{is} - \overline{g}^{\underline{jk}}\overline{g}_{\underline{si}}\underset{1}{\psi}_{jk}. \tag{2.3.44}$$

Koristimo sada da je $L^p_{[jp]} = \Gamma^p_{[jp]} = 0$, jer smo pretpostavili da se radi o ET-preslikavanju, pa onda sledi

$$N\psi_{i\underset{1}{|}j} = N\psi_i\psi_j + \underset{1}{\mu}\overline{g}_{\underline{ij}} - \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^\alpha_{\beta\gamma j} + \underset{1}{R}_{ij} + \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}^\alpha_{\alpha ij} - \psi^\beta L_{i.[\beta j]}, \tag{2.3.45}$$

gde je $\underset{1}{\mu} = \overline{g}^{\underline{jk}}\underset{1}{\psi}_{jk}$ i $\psi^j = \overline{g}^{\underline{ij}}\psi_i$. Kako je $\overline{g}^{\underline{ik}}\overline{g}_{\underline{ij}} = \delta^k_j$, tada sledi

$$\overline{g}^{\underline{ij}}_{\underset{1}{|}k} = -2\psi_k\overline{g}^{\underline{ij}} - \delta^i_k\psi^j - \delta^j_k\psi^i = \overline{g}^{\underline{ij}}_{\underset{2}{|}k}. \tag{2.3.46}$$

Ako kovarijantno diferenciramo (2.3.45) u odnosu na x^k po prvoj vrsti kovarijantnog izvoda, i alterniramo rezultat po indeksima j i k, i označimo sa $\mathcal{L} = \mathcal{D}$, dobijamo da je leva strana

$$\mathcal{L} = N\psi_{i\underset{1}{|}jk} - N\psi_{i\underset{1}{|}kj},$$

i desna strana

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} = {} & N\psi_{i\underset{1}{|}k}\psi_j + N\psi_i\psi_{j\underset{1}{|}k} + \underset{1}{\mu}_{\underset{1}{|}k}\overline{g}_{\underline{ij}} + \underset{1}{\mu}\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} - \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}_{\underset{1}{|}k}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^\alpha_{\beta\gamma j} - \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}\underset{1}{|}k}\underset{1}{R}^\alpha_{\beta\gamma j} \\
& - \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^\alpha_{\beta\gamma j\underset{1}{|}k} + \underset{1}{R}_{ij\underset{1}{|}k} + \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}^\alpha_{\alpha ij\underset{1}{|}k} - \psi^\beta_{\underset{1}{|}k}L_{i.[\beta j]} - \psi^\beta L_{i.[\beta j]\underset{1}{|}k} \\
& - N\psi_{i\underset{1}{|}j}\psi_k - N\psi_i\psi_{k\underset{1}{|}j} - \underset{1}{\mu}_{\underset{1}{|}j}\overline{g}_{\underline{ik}} - \underset{1}{\mu}\overline{g}_{\underline{ik}\underset{1}{|}j} + \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}_{\underset{1}{|}j}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^\alpha_{\beta\gamma k} + \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}\underset{1}{|}j}\underset{1}{R}^\alpha_{\beta\gamma k} \\
& + \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^\alpha_{\beta\gamma k\underset{1}{|}j} - \underset{1}{R}_{ik\underset{1}{|}j} - \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}^\alpha_{\alpha ik\underset{1}{|}j} + \psi^\beta_{\underset{1}{|}j}L_{i.[\beta k]} + \psi^\beta L_{i.[\beta k]\underset{1}{|}j}\,.
\end{aligned} \tag{2.3.47}$$

Koristeći jednačine (2.3.39, 2.3.45, 2.3.46), i množenjem sa $\overline{g}^{\underline{ij}}$ u jednačini (2.3.47), uz uslov da važi $\overline{g}^{\underline{ij}}L^p_{[ij]} = 0$, dobijamo za levu stranu

$$\mathcal{L} = -N\overline{g}^{\underline{ij}}\psi_p \underset{1}{R}{}^p_{ijk} - N\overline{g}^{\underline{ij}}L^p_{[jk]}\psi_{i\underset{1}{|}p}$$

i za desnu

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = &(N-2)\overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\beta\gamma k}\psi_\alpha + 4\overline{g}^{\underline{ij}}\underset{1}{R}_{ik}\psi_j + \frac{6}{N+1}\overline{g}^{\underline{ij}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\alpha ik}\psi_j\\ &+(N-3)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}\psi_\alpha\psi_\gamma + (N-1)\underset{1\,1}{\mu_{|k}} - \psi^\gamma\underset{1}{R}{}^\alpha_{\alpha\gamma k} + \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\beta\gamma k\underset{1}{|}\alpha}\\ &-\overline{g}^{\underline{ij}}\underset{1}{R}_{ik\underset{1}{|}j} - \frac{2}{N+1}\overline{g}^{\underline{ij}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\alpha ik\underset{1}{|}j} + \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]\underset{1}{|}\gamma}\psi_\alpha + \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}\psi_{\alpha\underset{1}{|}\gamma}\,.\end{aligned}\tag{2.3.48}$$

Kako je $\mathcal{L} = \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}(N-1)\underset{1\,1}{\mu_{|k}} = &-2(N-1)\overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\beta\gamma k}\psi_\alpha - 4\overline{g}^{\underline{ij}}\underset{1}{R}_{ik}\psi_j - \frac{6}{N+1}\overline{g}^{\underline{ij}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\alpha ik}\psi_j - (N-3)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}\psi_\alpha\psi_\gamma\\ &+\psi^\gamma\underset{1}{R}{}^\alpha_{\alpha\gamma k} - \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\beta\gamma k\underset{1}{|}\alpha} + \overline{g}^{\underline{ij}}\underset{1}{R}_{ik\underset{1}{|}j} + \frac{2}{N+1}\overline{g}^{\underline{ij}}\underset{1}{R}{}^\alpha_{\alpha ik\underset{1}{|}j} - \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]\underset{1}{|}\gamma}\psi_\alpha\\ &-\frac{(N+1)}{N}\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}(N\psi_\alpha\psi_\gamma - \overline{g}^{\underline{sq}}\overline{g}_{\underline{\alpha p}}\underset{1}{R}{}^p_{sq\gamma} + \underset{1}{R}_{\alpha\gamma} + \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}{}^p_{p\alpha\gamma})\,.\end{aligned}\tag{2.3.49}$$

U prostoru $\mathbb{GA}_N$ važi jednačina (1.6.15a), (vidi [55]), pa se onda dobija

$$\underset{jmn}{\mathfrak{S}}\underset{1}{R}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i_{jmn} + \underset{1}{R}{}^i_{mnj} + \underset{1}{R}{}^i_{njm} = \underset{jmn}{\mathfrak{S}}(L^i_{[jm],n} + L^p_{[jm]}L^i_{pn}),\tag{2.3.50}$$

i konačno zamenom u (2.3.49), dobijamo

$$\begin{aligned}(N-1)\underset{1\,1}{\mu_{|k}} = &-2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}\psi_p\underset{1}{R}{}^p_{\alpha\beta k} - \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}(5\underset{1}{R}_{\beta k} + \frac{6}{N+1}\underset{1}{R}{}^\gamma_{\gamma\beta k} - \underset{1}{R}_{k\beta})\\ &-\overline{g}^{\alpha\beta}(\underset{1}{R}{}^\gamma_{\alpha\beta k\underset{1}{|}\gamma} - \underset{1}{R}_{\alpha k\underset{1}{|}\beta} - \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}{}^\gamma_{\gamma\alpha k\underset{1}{|}\beta}) - 2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}\psi_\alpha\psi_\gamma - \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]\underset{1}{|}\gamma}\psi_\alpha\\ &-\frac{(N+1)}{N}\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}(-\overline{g}^{\underline{sq}}\overline{g}_{\underline{\alpha p}}\underset{1}{R}{}^p_{sq\gamma} + \underset{1}{R}_{\alpha\gamma} + \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}{}^p_{p\alpha\gamma}) + \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}\underset{q\beta k}{\mathfrak{S}}L^p_{[q\beta]}L^q_{pk}\,.\end{aligned}\tag{2.3.51}$$

Na osnovu prethodno izloženog, dokazana je sledeća teorema:

Teorema 2.3.9. *Potreban i dovoljan uslov da prostor $\mathbb{GA}_N$ dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na $\mathbb{G\overline{R}}_N$ sa metričkim tenzorom $\overline{g}_{ij}$ je da sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod prve vrste ima* *rešenje u odnosu na simetrični tenzor* $\overline{g}_{\underline{ij}}$, *kovektor* ψ_i *i diferencijabilnu funkciju* $\underset{1}{\mu} = \overline{g}^{\underline{jk}}\underset{1}{\psi}_{jk}$:

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{kj}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\
b)\quad & N\psi_{i\underset{1}{|}j} = N\psi_i\psi_j + \underset{1}{\mu}\overline{g}_{\underline{ij}} - \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}^{\alpha}_{\beta\gamma j} + \underset{1}{R}_{ij} + \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}^{\alpha}_{\alpha ij} - \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}\overline{g}_{\underline{\gamma i}}L^{\gamma}_{[\beta j]}\psi_\alpha;\\
c)\quad & (N-1)\underset{1}{\mu}_{\underset{1}{|}k} = -2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}\psi_p\underset{1}{R}^p_{\alpha\beta k} - \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}(5\underset{1}{R}_{\beta k} + \frac{6}{N+1}\underset{1}{R}^\gamma_{\gamma\beta k} - \underset{1}{R}_{k\beta})\\
& -\overline{g}^{\alpha\beta}(\underset{1}{R}^\gamma_{\alpha\beta k\underset{1}{|}\gamma} - \underset{1}{R}_{\alpha k\underset{1}{|}\beta} - \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}^\gamma_{\gamma\alpha k\underset{1}{|}\beta}) - 2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}\psi_\alpha\psi_\gamma - \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]\underset{1}{|}\gamma}\psi_\alpha\\
& -\frac{(N+1)}{N}\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}(-\overline{g}^{\underline{sq}}\overline{g}_{\underline{\alpha p}}\underset{1}{R}^p_{sq\gamma} + \underset{1}{R}_{\alpha\gamma} + \frac{2}{N+1}\underset{1}{R}^p_{p\alpha\gamma}) + \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}\underset{q\beta k}{\mathfrak{S}}L^p_{[q\beta]}L^q_{pk};
\end{aligned}
\tag{2.3.52}
$$

■

Istim postupkom kao u prethodnoj teoremi, polazeći od druge, treće i četvrte vrste diferenciranja, mogu se dokazati i sledeće teoreme:

Teorema 2.3.10. *Potreban i dovoljan uslov da prostor* $\mathbb{GA}_N$ *dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na* $\mathbb{G\overline{R}}_N$ *sa metričkim tenzorom* $\overline{g}_{ij}$ *je da sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod prve vrste ima rešenje u odnosu na simetrični tenzor* $\overline{g}_{\underline{ij}}$, *kovektor* ψ_i *i diferencijabilnu funkciju* $\underset{2}{\mu} = \overline{g}^{\underline{jk}}\underset{2}{\psi}_{jk}$:

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \overline{g}_{\underline{ij}\underset{2}{|}k} = 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{kj}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\
b)\quad & N\psi_{i\underset{2}{|}j} = N\psi_i\psi_j + \underset{2}{\mu}\overline{g}_{\underline{ij}} - \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{2}{R}^{\alpha}_{\beta\gamma j} + \underset{2}{R}_{ij} + \frac{2}{N+1}\underset{2}{R}^{\alpha}_{\alpha ij} + \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}\overline{g}_{\underline{\gamma i}}L^{\gamma}_{[\beta j]}\psi_\alpha;\\
c)\quad & (N-1)\underset{2}{\mu}_{\underset{2}{|}k} = -2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}\psi_p\underset{2}{R}^p_{\alpha\beta k} - \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}(5\underset{2}{R}_{\beta k} + \frac{6}{N+1}\underset{2}{R}^\gamma_{\gamma\beta k} - \underset{2}{R}_{k\beta})\\
& -\overline{g}^{\alpha\beta}(\underset{2}{R}^\gamma_{\alpha\beta k\underset{2}{|}\gamma} - \underset{2}{R}_{\alpha k\underset{2}{|}\beta} - \frac{2}{N+1}\underset{2}{R}^\gamma_{\gamma\alpha k\underset{2}{|}\beta}) + 2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}\psi_\alpha\psi_\gamma + \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]\underset{2}{|}\gamma}\psi_\alpha\\
& +\frac{(N+1)}{N}\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}(-\overline{g}^{\underline{sq}}\overline{g}_{\underline{\alpha p}}\underset{2}{R}^p_{sq\gamma} + \underset{2}{R}_{\alpha\gamma} + \frac{2}{N+1}\underset{2}{R}^p_{p\alpha\gamma}) + \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}\underset{q\beta k}{\mathfrak{S}}L^p_{[\beta q]}L^q_{kp};
\end{aligned}
\tag{2.3.53}
$$

Dokaz. U dokazu koristimo korak po korak iz prethodne teoreme. Razlika je samo u Ričijevom identitetu, za drugu vrstu diferenciranja (1.9.8) i što se koristi jednačina

$$\underset{jmn}{\mathfrak{S}}\underset{2}{R}^i_{jmn} = \underset{jmn}{\mathfrak{S}}(L^i_{[mj],n} + L^p_{[mj]}L^i_{np}). \quad ■ \tag{2.3.54}$$

Teorema 2.3.11. *Potreban i dovoljan uslov da prostor* $\mathbb{GA}_N$ *dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na* $\mathbb{G\overline{R}}_N$ *sa metričkim tenzorom* $\overline{g}_{ij}$ *je da sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni treće vrste ima rešenje u odnosu na simetrični tenzor* $\overline{g}_{\underline{ij}}$, *kovektor* ψ_i *i diferencijabilnu funkciju* $\underset{3}{\mu} = \overline{g}^{\underline{jk}}\underset{3}{\psi}_{jk}$:

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \overline{g}_{\underline{ij}\underset{3}{|}k} = 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{kj}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\
b)\quad & N\psi_{i\underset{3}{|}j} = N\psi_i\psi_j + \underset{3}{\mu}\overline{g}_{\underline{ij}} - \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{2}{R}^{\alpha}_{\beta\gamma j} + \underset{2}{R}_{ij} + \frac{2}{N+1}\underset{2}{R}^{\alpha}_{\alpha ij} + \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}\overline{g}_{\underline{\gamma i}}L^{\gamma}_{[\beta j]}\psi_\alpha;\\
c)\quad & (N-1)\underset{3}{\mu}_{\underset{3}{|}k} = -2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}\psi_p\underset{2}{R}^p_{\alpha\beta k} - \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}(5\underset{2}{R}_{\beta k} + \frac{6}{N+1}\underset{2}{R}^\gamma_{\gamma\beta k} - \underset{2}{R}_{k\beta})\\
& -\overline{g}^{\alpha\beta}(\underset{2}{R}^\gamma_{\alpha\beta k\underset{3}{|}\gamma} - \underset{2}{R}_{\alpha k\underset{3}{|}\beta} - \frac{2}{N+1}\underset{2}{R}^\gamma_{\gamma\alpha k\underset{3}{|}\beta}) + 2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}\psi_\alpha\psi_\gamma + \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]\underset{3}{|}\gamma}\psi_\alpha\\
& +\frac{(N+1)}{N}\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^\gamma_{[\beta k]}(-\overline{g}^{\underline{sq}}\overline{g}_{\underline{\alpha p}}\underset{2}{R}^p_{sq\gamma} + \underset{2}{R}_{\alpha\gamma} + \frac{2}{N+1}\underset{2}{R}^p_{p\alpha\gamma}) + \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}\underset{q\beta k}{\mathfrak{S}}L^p_{[\beta q]}L^q_{kp};
\end{aligned}
\tag{2.3.55}
$$

■

Teorema 2.3.12. *Potreban i dovoljan uslov da prostor $\mathbb{GA}_N$ dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ sa metričkim tenzorom $\overline{g}_{ij}$ je da sistem PDJ Košijevog tipa za kovarijantni izvod četvrte vrste ima rešenje u odnosu na simetrični tenzor $\overline{g}_{\underline{ij}}$, kovektor ψ_i i diferencijabilnu funkciju $\underset{4}{\mu} = \overline{g}^{\underline{jk}}\underset{4}{\psi}_{jk}$:*

$$
\begin{aligned}
&a) \quad & \overline{g}_{\underline{ij}\underset{4}{|}k} &= 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{kj}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\
&b) \quad & N\psi_{i\underset{4}{|}j} &= N\psi_i\psi_j + \underset{4}{\mu}\overline{g}_{\underline{ij}} - \overline{g}^{\underline{\beta\gamma}}\overline{g}_{\underline{i\alpha}}\underset{1}{R}{}^{\alpha}_{\beta\gamma j} + \underset{1}{R}_{ij} + \tfrac{2}{N+1}\underset{1}{R}{}^{\alpha}_{\alpha ij} - \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}\overline{g}_{\underline{\gamma i}}L^{\gamma}_{[\beta j]}\psi_\alpha;\\
&c) \quad & (N-1)\underset{4}{\mu}_{\underset{4}{|}k} &= -2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}\psi_p\underset{1}{R}{}^{p}_{\alpha\beta k} - \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}(5\underset{1}{R}_{\beta k} + \tfrac{6}{N+1}\underset{1}{R}{}^{\gamma}_{\gamma\beta k} - \underset{1}{R}_{k\beta})\\
&&&\quad -\overline{g}^{\alpha\beta}(\underset{1}{R}{}^{\gamma}_{\alpha\beta k\underset{4}{|}\gamma} - \underset{1}{R}_{\alpha k\underset{4}{|}\beta} - \tfrac{2}{N+1}\underset{1}{R}{}^{\gamma}_{\gamma\alpha k\underset{4}{|}\beta}) - 2(N-1)\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^{\gamma}_{[\beta k]}\psi_\alpha\psi_\gamma - \overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^{\gamma}_{[\beta k]\underset{4}{|}\gamma}\psi_\alpha\\
&&&\quad -\tfrac{(N+1)}{N}\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}L^{\gamma}_{[\beta k]}(-\overline{g}^{\underline{sq}}\overline{g}_{\underline{\alpha p}}\underset{1}{R}{}^{p}_{sq\gamma} + \underset{1}{R}_{\alpha\gamma} + \tfrac{2}{N+1}\underset{1}{R}{}^{p}_{p\alpha\gamma}) + \psi_\alpha\overline{g}^{\alpha\beta}\underset{q\beta k}{\mathfrak{S}}L^{p}_{[q\beta]}L^{q}_{pk};
\end{aligned}
\tag{2.3.56}
$$

■

Sistemi (2.3.52, 2.3.53, 2.3.55, 2.3.56) nemaju više od jednog rešenja za inicijalnu vrednost u tački x_0:

$$\overline{g}_{\underline{ij}}(x_0) = \overset{0}{\overline{g}}_{\underline{ij}},\ \psi_i(x_0) = \overset{0}{\psi}_i,\ \underset{\theta}{\mu}(x_0) = \overset{0}{\underset{\theta}{\mu}}, \quad \theta = 1,2,3,4.$$

Opšta rešenja ovih sistema (2.3.52, 2.3.53, 2.3.55, 2.3.56) zavise najviše od $r \leq r_0 \equiv \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ parametra.

2.3.3 Invarijanti geometrijski objekti ET-geodezijskog preslikavanja prostora $\mathbb{GA}_N$

U ovom delu ćemo naći neke invarijante geometrijske objekte ET-geodezijskog preslikavanja. To su objekti koji se ne menjaju primenom navedenog preslikavanja.

U radu [M5] se polazi od tenzora $\underset{1}{R}, \underset{2}{R}, \underset{3}{R}, \underset{4}{R}, \underset{5}{R} \equiv \underset{2}{\widetilde{R}}$, i nalaze se invarijantni geometrijski objekti ET-geodezijskog preslikavanja $f:\ \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$. Veličine koje se dobijaju označene su sa $\underset{1}{\mathcal{E}}, \dots, \underset{5}{\mathcal{E}}$ i one se u simetričnom slučaju svode na Vejlov projektivni tenzor (2.1.7). Medju njima je jedino veličina $\underset{5}{\mathcal{E}}$ tenzor, i nazvana je *ET-projektivni tenzor*. Pitanja u vezi sa ovim koje je postavila prof. Mileva Prvanović su: -Zašto je samo $\underset{5}{\mathcal{E}}$ tenzor?... Da li postoji još ET-projektivnih tenzora? Ova pitanja su nas motivisala da potražimo za svaki od 12 tenzora krivine invarijantni geometrijski objekat ET-geodezijskog preslikavanja $f:\ \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$, sa nadom da ćemo naći još neki ET-projektivni tenzor.

Usled geodezijskog preslikavanja $f:\mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ dobijamo tenzore $\underset{\theta}{\overline{R}}$, $(\theta = 1,\dots,4)$, $\underset{\theta}{\widetilde{\overline{R}}}$, $(\theta = 1,\dots,8)$, gde je, na primer

$$\underset{1}{\overline{R}}{}^{i}_{jmn} = \overline{L}^{i}_{jm,n} - \overline{L}^{i}_{jn,m} + \overline{L}^{p}_{jm}\overline{L}^{i}_{pn} - \overline{L}^{p}_{jn}\overline{L}^{i}_{pm}. \tag{2.3.57}$$

U radu S. Minčića [50] uvedene su sledeće oznake:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A} = L^i_{\underset{\vee}{jm};n}, \quad \mathcal{B} = L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}, \quad \mathcal{C} = L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}, \quad \mathcal{A}' = L^i_{\underset{\vee}{jn};m}, \quad \mathcal{B}' = L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}},\\
&\mathcal{D} = L^p_{\underline{mn}} L^i_{\underset{\vee}{pj}}, \quad \mathcal{E} = L^p_{\underline{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}}, \quad \mathcal{F} = L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underline{pn}}, \quad \mathcal{E}' = L^p_{\underline{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}}, \quad \mathcal{F}' = L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underline{pm}},
\end{aligned}
\tag{2.3.58}
$$

gde je (;) kovarijantno diferenciranje u odnosu na simetričnu koneksiju $L^i_{\underline{jm}}$, pomoću koje se dobija Rimanov tenzor R^i_{jmn} u pridruženom prostoru $\mathbb{A}_N$ tj.

$$
R^i_{jmn} = L^i_{\underline{jm},n} - L^i_{\underline{jn},m} + L^p_{\underline{jm}} L^i_{\underline{pn}} - L^p_{\underline{jn}} L^i_{\underline{pm}}. \tag{2.3.59}
$$

Pokazaćemo kako se tenzor $\underset{1}{R}{}^i_{jmn}$ dat jednačinom (1.6.6) može izraziti pomoću tenzora R^i_{jmn} datog pomoću (2.3.59), što je pokazano u [50]:

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{R}{}^i_{jmn} &= L^i_{\underline{jm},n} + L^i_{\underset{\vee}{jm},n} - L^i_{\underline{jn},m} - L^i_{\underset{\vee}{jn},m}\\
&\quad + L^p_{\underline{jm}} L^i_{\underline{pn}} + L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underline{pn}} + L^p_{\underline{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} + L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}}\\
&\quad - L^p_{\underline{jn}} L^i_{\underline{pm}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underline{pm}} - L^p_{\underline{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}}\\
&= R^i_{jmn} + L^i_{jm;n} - L^i_{jn;m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{jn} L^i_{pm}\\
&= R^i_{jmn} + \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}'.
\end{aligned}
\tag{2.3.60}
$$

Ovim postupkom se mogu izraziti i ostali tenzori krivine u $\mathbb{GA}_N$, pa imamo:

$$
\begin{aligned}
&\underset{1}{R} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}', && \underset{1}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{B} + \mathcal{B}',\\
&\underset{2}{R} = R - \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}', && \underset{2}{\widetilde{R}} = R + \mathcal{B} + \mathcal{B}',\\
&\underset{3}{R} = R + \mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' - 2\mathcal{C}, && \underset{3}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{B} - \mathcal{B}',\\
&\underset{4}{R} = R + \mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' + 2\mathcal{C}, && \underset{4}{\widetilde{R}} = R + \tfrac{1}{3}(-\mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' - 2\mathcal{C}),\\
& && \underset{5}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{A} + \mathcal{A}' - 3\mathcal{B} - \mathcal{B}',\\
& && \underset{6}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B} + 3\mathcal{B}',\\
& && \underset{7}{\widetilde{R}} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} + 3\mathcal{B}',\\
& && \underset{8}{\widetilde{R}} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' - 3\mathcal{B} - \mathcal{B}'.
\end{aligned}
\tag{2.3.61}
$$

Takodje se i pseudotenzori krivine izražavaju na ovaj način:

$$
\begin{array}{ll}
\underset{1}{A}=R+\mathcal{A}-\mathcal{A}'-\mathcal{B}+\mathcal{B}'-2\mathcal{E}+2\mathcal{E}' & \underset{9}{A}=R+\mathcal{A}+\mathcal{A}'+\mathcal{B}+\mathcal{B}'-2\mathcal{D}+2\mathcal{E} \\
\underset{2}{A}=R+\mathcal{A}-\mathcal{A}'-\mathcal{B}+\mathcal{B}'-2\mathcal{F}+2\mathcal{F}' & \underset{10}{A}=R+\mathcal{A}+\mathcal{A}'-\mathcal{B}-\mathcal{B}'-2\mathcal{D}-2\mathcal{F}' \\
\underset{3}{A}=R-\mathcal{A}+\mathcal{A}'-\mathcal{B}+\mathcal{B}'+2\mathcal{E}-2\mathcal{E}' & \underset{11}{A}=R-\mathcal{A}-\mathcal{A}'+\mathcal{B}+\mathcal{B}'+2\mathcal{D}-2\mathcal{E} \\
\underset{4}{A}=R-\mathcal{A}+\mathcal{A}'-\mathcal{B}+\mathcal{B}'+2\mathcal{F}-2\mathcal{F}' & \underset{12}{A}=R-\mathcal{A}-\mathcal{A}'-\mathcal{B}-\mathcal{B}'+2\mathcal{D}+2\mathcal{F}' \\
\underset{5}{A}=R+\mathcal{A}+\mathcal{A}'+\mathcal{B}-\mathcal{B}'-2\mathcal{D}+2\mathcal{E}+2\mathcal{E}' & \underset{13}{A}=R-\mathcal{A}+\mathcal{A}'+\mathcal{B}+\mathcal{B}'-2\mathcal{E}' \\
\underset{6}{A}=R+\mathcal{A}+\mathcal{A}'+\mathcal{B}-\mathcal{B}'-2\mathcal{D}-2\mathcal{F}-2\mathcal{F}' & \underset{14}{A}=R-\mathcal{A}+\mathcal{A}'-\mathcal{B}-\mathcal{B}'+2\mathcal{F} \\
\underset{7}{A}=R+\mathcal{A}-\mathcal{A}'+\mathcal{B}+\mathcal{B}'+2\mathcal{E}' & \underset{15}{A}=R+\mathcal{A}+\mathcal{A}'-\mathcal{B}+\mathcal{B}'-2\mathcal{D}'. \\
\underset{8}{A}=R+\mathcal{A}-\mathcal{A}'-\mathcal{B}-\mathcal{B}'-2\mathcal{F}' &
\end{array}
\tag{2.3.62}
$$

Lema 2.3.13. *Za ET-geodezijsko preslikavanje $f:\mathbb{GA}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ važe sledeće jednakosti:*

$$
\begin{array}{ll}
\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{A}+P^i_{\underline{pn}}L^p_{\underset{\vee}{jm}}-P^p_{\underline{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}-P^p_{\underline{mn}}L^i_{\underset{\vee}{jp}}, & \overline{\mathcal{E}}=\mathcal{E}+P^p_{\underline{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}, \\
\overline{\mathcal{A}'}=\mathcal{A}'+P^i_{\underline{pm}}L^p_{\underset{\vee}{jn}}-P^p_{\underline{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}-P^p_{\underline{nm}}L^i_{\underset{\vee}{jp}}, & \overline{\mathcal{E}'}=\mathcal{E}'+P^p_{\underline{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}} \\
\overline{\mathcal{B}}=\mathcal{B}, & \overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}+L^p_{\underset{\vee}{jm}}P^i_{\underline{pn}}, \\
\overline{\mathcal{B}}'=\mathcal{B}', & \overline{\mathcal{F}'}=\mathcal{F}'+L^p_{\underset{\vee}{jn}}P^i_{\underline{pm}} \\
\overline{\mathcal{C}}=\mathcal{C}, & \overline{\mathcal{D}}=\mathcal{D}+P^p_{\underline{mn}}L^i_{\underset{\vee}{pj}},
\end{array}
\tag{2.3.63}
$$

gde su $\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathcal{A}'},\overline{\mathcal{B}},\overline{\mathcal{B}'},\overline{\mathcal{C}},\overline{\mathcal{E}},\overline{\mathcal{E}'},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathcal{F}'},\overline{\mathcal{D}}$ veličine prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$, a $\mathcal{A},\mathcal{A}',\mathcal{B},\mathcal{B}',\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{E}',\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{D}$ veličine prostora $\mathbb{GA}_N$ date jednačinama (2.3.58).

Dokaz. Ako sa $(\bar{;})$ označimo kovarijantno diferenciranje u odnosu na simetričnu koneksiju u prostoru $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$, iz (2.3.58), imamo

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}=\overline{L}^i_{\underset{\vee}{jm}\bar{;}n}&=\overline{L}^i_{\underset{\vee}{jm},n}+\overline{L}^i_{\underline{pn}}\overline{L}^p_{\underset{\vee}{jm}}-\overline{L}^p_{\underline{jn}}\overline{L}^i_{\underset{\vee}{pm}}-\overline{L}^p_{\underline{mn}}\overline{L}^i_{\underset{\vee}{jp}}\\
&\underset{(2.3.1)}{=}L^i_{\underset{\vee}{jm},n}+(L^i_{\underline{pn}}+P^i_{\underline{pn}})L^p_{\underset{\vee}{jm}}-(L^p_{\underline{jn}}+P^p_{\underline{jn}})L^i_{\underset{\vee}{pm}}-(L^p_{\underline{mn}}+P^p_{\underline{mn}})L^i_{\underset{\vee}{jp}}\\
&=\mathcal{A}+P^i_{\underline{pn}}L^p_{\underset{\vee}{jm}}-P^p_{\underline{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}-P^p_{\underline{mn}}L^i_{\underset{\vee}{jp}}.
\end{aligned}
$$

Analogno se mogu pokazati i ostale jednakosti. ■

Označimo sa K^i_{jmn} jedan od dvanaest tenzora krivine u prostoru $\mathbb{GA}_N$ datih sa (2.3.61), ili neki novi tenzor krivine koji se može dobiti linearnom kombinacijom pomenutih. Na osnovu jednačina (2.3.61) može se zaključiti da za opšti tenzor K važi

$$
K=R+\alpha\mathcal{A}+\alpha'\mathcal{A}'+\beta\mathcal{B}+\beta'\mathcal{B}'+\gamma\mathcal{C},\qquad \alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma\in\mathbb{R}. \tag{2.3.64}
$$

U nastavku nalazimo invarijantne geometrijske objekte geodezijskog preslikavanja. Polazeći od jednačina (2.3.1, 2.3.63), za ET-geodezijsko preslikavanje prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ i $\mathbb{GA}_N$ veza izmedju tenzora

$\overline{K}$ i K biće

$$
\begin{aligned}
\overline{K}^i_{jmn} &= \overline{R}^i_{jmn} + \alpha\overline{\mathcal{A}} + \alpha'\overline{\mathcal{A}'} + \beta\overline{\mathcal{B}} + \beta'\overline{\mathcal{B}'} + \gamma\overline{\mathcal{C}} \\
&= R^i_{jmn} + P^i_{\underline{jm};n} - P^i_{\underline{jn};m} + P^p_{\underline{jm}} P^i_{\underline{pn}} - P^p_{\underline{jn}} P^i_{\underline{pm}} + \beta\mathcal{B} + \beta'\mathcal{B}' + \gamma\mathcal{C} \\
&+ \alpha(\mathcal{A} + P^i_{\underline{pn}} L^p_{\underset{\vee}{jm}} - P^p_{\underline{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}} - P^p_{\underline{mn}} L^i_{\underset{\vee}{jp}}) + \alpha'(\mathcal{A}' + P^i_{\underline{pm}} L^p_{\underset{\vee}{jn}} - P^p_{\underline{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} - P^p_{\underline{nm}} L^i_{\underset{\vee}{jp}}),
\end{aligned}
\tag{2.3.65}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
\overline{K}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + P^i_{\underline{jm};n} - P^i_{\underline{jn};m} + P^p_{\underline{jm}} P^i_{\underline{pn}} - P^p_{\underline{jn}} P^i_{\underline{pm}} \\
&+ \alpha(P^i_{\underline{pn}} L^p_{\underset{\vee}{jm}} - P^p_{\underline{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}} - P^p_{\underline{mn}} L^i_{\underset{\vee}{jp}}) + \alpha'(P^i_{\underline{pm}} L^p_{\underset{\vee}{jn}} - P^p_{\underline{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} - P^p_{\underline{nm}} L^i_{\underset{\vee}{jp}}).
\end{aligned}
\tag{2.3.66}
$$

Interesantno je da se u poslednjoj jednačini ne javljaju koeficijenti β, β', γ, tj. javljaju se samo α i α'. Iz (2.2.7), $(\xi = 0)$ dobija se

$$
\begin{aligned}
\overline{K}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + \psi_{j;n}\delta^i_m + \psi_{m;n}\delta^i_j - \psi_{j;m}\delta^i_n - \psi_{n;m}\delta^i_j \\
&+ (\psi_j\delta^\alpha_m + \psi_m\delta^\alpha_j)(\psi_\alpha\delta^i_n + \psi_n\delta^i_\alpha) - (\psi_j\delta^\alpha_n + \psi_n\delta^\alpha_j)(\psi_m\delta^i_\alpha + \psi_\alpha\delta^i_m) \\
&+ \alpha(\psi_n\delta^i_p + \psi_p\delta^i_n) L^p_{\underset{\vee}{jm}} - \alpha(\psi_j\delta^p_n + \psi_n\delta^p_j) L^i_{\underset{\vee}{pm}} - \alpha(\psi_n\delta^p_m + \psi_m\delta^p_n) L^i_{\underset{\vee}{jp}} \\
&+ \alpha'(\psi_m\delta^i_p + \psi_p\delta^i_m) L^p_{\underset{\vee}{jn}} - \alpha'(\psi_j\delta^p_m + \psi_m\delta^p_j) L^i_{\underset{\vee}{pn}} - \alpha'(\psi_n\delta^p_m + \psi_m\delta^p_n) L^i_{\underset{\vee}{jp}},
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
\overline{K}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + \delta^i_j(\psi_{m;n} - \psi_{n;m} + \psi_m\psi_n - \psi_n\psi_m) + \delta^i_m(\psi_{j;n} - \psi_j\psi_n) - \delta^i_n(\psi_{j;m} - \psi_j\psi_m) \\
&+ \alpha(\psi_n\delta^i_p + \psi_p\delta^i_n) L^p_{\underset{\vee}{jm}} - \alpha(\psi_j\delta^p_n + \psi_n\delta^p_j) L^i_{\underset{\vee}{pm}} - \alpha(\psi_n\delta^p_m + \psi_m\delta^p_n) L^i_{\underset{\vee}{jp}} \\
&+ \alpha'(\psi_m\delta^i_p + \psi_p\delta^i_m) L^p_{\underset{\vee}{jn}} - \alpha'(\psi_j\delta^p_m + \psi_m\delta^p_j) L^i_{\underset{\vee}{pn}} - \alpha'(\psi_m\delta^p_n + \psi_n\delta^p_m) L^i_{\underset{\vee}{jp}}.
\end{aligned}
$$

Posle sredjivanja, konačno dobijamo vezu

$$
\begin{aligned}
\overline{K}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + \delta^i_j(\psi_{mn} - \psi_{nm}) + \delta^i_m\psi_{jn} - \delta^i_n\psi_{jm} - (\alpha + \alpha')\psi_n L^i_{\underset{\vee}{jm}} \\
&+ \alpha\psi_p\delta^i_n L^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha - \alpha')\psi_j L^i_{\underset{\vee}{nm}} - (\alpha + \alpha')\psi_m L^i_{\underset{\vee}{jn}} + \alpha'\psi_p\delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{jn}},
\end{aligned}
\tag{2.3.67}
$$

gde smo označili

$$
\psi_{mn} = \psi_{m;n} - \psi_m\psi_n. \tag{2.3.68}
$$

Kontrakcijom indeksa i i n u (2.3.67), dobijamo

$$
\overline{K}_{jm} = K_{jm} + \psi_{mj} - N\psi_{jm} + (N\alpha - \alpha)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha - \alpha')\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}} - (\alpha + \alpha')\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}, \tag{2.3.69}
$$

gde su $\overline{K}_{jm}$ i K_{jm} Ričijevi tenzori prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ i $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ redom. Iz (2.3.69) alternacijom u odnosu na indekse j i m, dobijamo

$$\overline{K}_{[jm]}=K_{[jm]}-(1+N)\psi_{[jm]}+2(N\alpha-\alpha)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}-2\alpha\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-2\alpha\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}.$$

Iz poslednje jednačine možemo izraziti $\psi_{[jm]}$:

$$\psi_{[jm]}=\frac{1}{N+1}[K_{[jm]}-\overline{K}_{[jm]}+2(N\alpha-\alpha)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}-2\alpha\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-2\alpha\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}]. \tag{2.3.70}$$

Zamenom (2.3.70) u (2.3.69)

$$\begin{aligned}\overline{K}_{jm}=K_{jm}-&\frac{1}{N+1}[K_{[jm]}-\overline{K}_{[jm]}+2(N\alpha-\alpha)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}-2\alpha\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-2\alpha\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}]\\ &-(N-1)\psi_{jm}+(N\alpha-\alpha)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}-(\alpha-\alpha')\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-(\alpha+\alpha')\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}.\end{aligned}$$

Izražavamo ψ_{jm} iz poslednje jednačine:

$$\begin{aligned}\psi_{jm}=&\frac{1}{N-1}(K_{jm}-\overline{K}_{jm})-\frac{1}{N^2-1}[K_{[jm]}-\overline{K}_{[jm]}+2(N\alpha-\alpha)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}-2\alpha\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-2\alpha\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}]\\ &+\frac{1}{N-1}(N\alpha-\alpha)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}-\frac{1}{N-1}(\alpha-\alpha')\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-\frac{1}{N-1}(\alpha+\alpha')\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}\psi_{jm}=&\frac{1}{N^2-1}[(NK_{jm}+K_{mj})-(N\overline{K}_{jm}+\overline{K}_{mj})]+\frac{N-1}{N+1}\alpha\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}\\ &+\frac{1}{N^2-1}(N\alpha'-N\alpha+\alpha'+\alpha)\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}+\frac{1}{N^2-1}(\alpha-N\alpha'-N\alpha-\alpha')\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}.\end{aligned} \tag{2.3.71}$$

Zamenom (2.3.70, 2.3.71) u (2.3.67), možemo razdvojiti objekte dva prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ i $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$

$$\overline{\mathcal{E}}^i_{jmn}=\mathcal{E}^i_{jmn}, \tag{2.3.72}$$

gde je

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^i_{jmn}=&K^i_{jmn}+\frac{1}{N+1}\delta^i_j K_{[mn]}+\frac{1}{N^2-1}\delta^i_m(NK_{jn}+K_{nj})-\frac{1}{N^2-1}\delta^i_n(NK_{jm}+K_{mj})\\ &+\frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^p_{\underline{mp}}\Big(2(N-1)\alpha\delta^i_j L^q_{\underset{\vee}{qn}}+(\alpha-N\alpha'-N\alpha-\alpha')\delta^i_n L^q_{\underset{\vee}{jq}}+(N^2-1)(\alpha+\alpha')L^i_{\underset{\vee}{jn}}\Big)\\ &+\frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^p_{\underline{np}}\Big(-2(N-1)\alpha\delta^i_j L^q_{\underset{\vee}{qm}}-(\alpha-N\alpha'-N\alpha-\alpha')\delta^i_m L^q_{\underset{\vee}{jq}}+(N^2-1)(\alpha+\alpha')L^i_{\underset{\vee}{jm}}\Big)\\ &+\frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^p_{\underline{jp}}\Big(-(N\alpha'-N\alpha+\alpha'+\alpha)\delta^i_{[m}L^q_{\underset{\vee}{qn]}}+(N^2-1)(\alpha-\alpha')L^i_{\underset{\vee}{nm}}\Big)\\ &+\frac{1}{(N+1)^2}L^q_{\underline{pq}}\Big(-2(N-1)\alpha\delta^i_j L^p_{\underset{\vee}{mn}}-(N\alpha'+\alpha'+N\alpha-\alpha)\delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{jn}}-2\alpha\delta^i_n L^p_{\underset{\vee}{jm}}\Big).\end{aligned} \tag{2.3.73}$$

Ako zamenimo u prethodnu jednačinu da je $\alpha=\alpha'=0$, dobijamo

$$\mathcal{E}^i_{jmn}=K^i_{jmn}+\frac{1}{N+1}\delta^i_j K_{[mn]}+\frac{1}{N^2-1}\delta^i_m(NK_{jn}+K_{nj})-\frac{1}{N^2-1}\delta^i_n(NK_{jm}+K_{mj}).$$

Sada možemo formulisati dokazane teoreme:

Teorema 2.3.14. *Invarijantni geometrijski objekat ET-geodezijskog preslikavanja je* **ET-projektivni parametar** $\mathcal{E}^i_{jmn}$ *zadat jednačinom* (2.3.73). ∎

Teorema 2.3.15. *Invarijantni geometrijski objekat ET-parametar* $\mathcal{E}^i_{jmn}$ *zadat jednačinom* (2.3.73) *je* **ET-projektivni tenzor** *ako i samo ako je* $\alpha=\alpha'=0$. ∎

Jednačina (2.3.73) daje invarijantni geometrijski objekat ET-geodezijskog preslikavanja. Kako je ona dobijena polazeći od opšteg tenzora K^i_{jmn} datog pomoću (2.3.64), postavlja se pitanje koliko medju veličinama (2.3.73) ima linearno nezavisnih, za različite vrednosti parametara $\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma$.

Iz jednačine (2.3.73), možemo zaključiti da se polazeći od tenzora (2.3.61) koji ne sadrži veličine $\mathcal{A},\mathcal{A}'$ u svom zapisu dobija invarijanti geometrijski objekat ET-geodezijskog preslikavanja koji je tenzor, tzv. *ET-projektivni tenzor*. Takvi su, na primer,

$$\underset{1}{\widetilde{R}},\ \underset{2}{\widetilde{R}},\ \underset{3}{\widetilde{R}},\ \frac{1}{2}(\underset{1}{R}+\underset{2}{R}),\ \underset{2}{R}+\frac{1}{2}(\underset{3}{R}-\underset{4}{R}),\ \frac{1}{2}(\underset{6}{\widetilde{R}}+\underset{7}{\widetilde{R}}),\ \frac{1}{2}(\underset{5}{\widetilde{R}}+\underset{8}{\widetilde{R}}),\ldots \tag{2.3.74}$$

Medju ovim tenzorima ima samo tri linearno nezavisna u odnosu na nepozante $\mathcal{B},\mathcal{B}',\mathcal{C}$, jer kao što smo rekli oni ne sadrže izraze $\mathcal{A},\mathcal{A}'$.

Posmatrajmo jednačine (2.3.61) kao linearni sistem algebarskih jednačina u odnosu na nepoznate $\mathcal{A},\mathcal{A}',\mathcal{B},\mathcal{B}',\mathcal{C}$. Transformišimo matricu ovog sistema u ekvivalentnu matricu i nadjimo rang.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \mathcal{A}' & \mathcal{B} & \mathcal{B}' & \mathcal{C}\end{array}\\ \left(\begin{array}{rrrrr|c}
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & \underset{1}{R}-R\\
-1 & 1 & 1 & -1 & 0 & \underset{2}{R}-R\\
1 & 1 & -1 & 1 & -2 & \underset{3}{R}-R\\
1 & 1 & -1 & 1 & 2 & \underset{4}{R}-R\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \underset{1}{\widetilde{R}}-R\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \underset{2}{\widetilde{R}}-R\\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & \underset{3}{\widetilde{R}}-R\\
-1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3\underset{4}{\widetilde{R}}-3R\\
-1 & 1 & -3 & -1 & 0 & \underset{5}{\widetilde{R}}-R\\
-1 & 1 & 1 & 3 & 0 & \underset{6}{\widetilde{R}}-R\\
1 & -1 & 1 & 3 & 0 & \underset{7}{\widetilde{R}}-R\\
1 & -1 & -3 & -1 & 0 & \underset{8}{\widetilde{R}}-R
\end{array}\right)\end{array}
\sim
\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \mathcal{A}' & \mathcal{B} & \mathcal{B}' & \mathcal{C}\end{array}\\ \left(\begin{array}{rrrrr|c}
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & \underset{1}{R}-R\\
0 & 2 & -2 & 2 & -2 & \underset{3}{R}-\underset{1}{R}\\
0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \underset{1}{R}+\underset{2}{R}-2R\\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \underset{1}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}}-2R\\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \underset{4}{R}-\underset{3}{R}\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{1}{\widetilde{R}}+\frac{1}{2}(\underset{1}{R}+\underset{2}{R})-2R\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{3}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}}-2R\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\underset{4}{\widetilde{R}}+\underset{1}{R}+\frac{1}{2}(\underset{4}{R}-\underset{3}{R})-4R\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{5}{\widetilde{R}}+2\underset{1}{R}+\underset{2}{R}-8R+2(\underset{1}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}})\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{6}{\widetilde{R}}-\underset{2}{R}-2(\underset{1}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}})+4R\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{\widetilde{R}}-\underset{1}{R}-2(\underset{1}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}})+4R\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{8}{\widetilde{R}}+\underset{1}{R}+2\underset{2}{R}-8R+2(\underset{1}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}})
\end{array}\right)\end{array} \tag{2.3.75}$$

Na osnovu Kroneker-Kapelijeve teoreme (Alfredo Capeli, 1855-1910, italijanski matematičar), sistem (2.3.61) je rešiv i ima rang 5 ako i samo ako važe sledeće relacije :

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\widetilde{R}}+\frac{1}{2}(\underset{1}{R}+\underset{2}{R})-2R=0,\\
&\underset{3}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}}-2R=0,\\
&3\underset{4}{\widetilde{R}}+\underset{1}{R}+\frac{1}{2}(\underset{4}{R}-\underset{3}{R})-4R=0,\\
&\underset{5}{\widetilde{R}}+2\underset{1}{R}+\underset{2}{R}-8R+2(\underset{1}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}})=0,\\
&\underset{6}{\widetilde{R}}-\underset{2}{R}-2(\underset{1}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}})+4R=0,\\
&\underset{7}{\widetilde{R}}-\underset{1}{R}-2(\underset{1}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}})+4R=0,\\
&\underset{8}{\widetilde{R}}+\underset{1}{R}+2\underset{2}{R}-8R+2(\underset{1}{\widetilde{R}}+\underset{2}{\widetilde{R}})=0.
\end{aligned}\tag{2.3.76}$$

Jednostavnom proverom se pokazuje da ove jednačine važe na osnovu (2.3.61).

Označimo

$$\underset{1}{K}\equiv\underset{1}{R},\quad \underset{2}{K}\equiv\underset{1}{\widetilde{R}},\quad \underset{3}{K}\equiv\underset{3}{R},\quad \underset{4}{K}\equiv\underset{3}{\widetilde{R}},\quad \underset{5}{K}\equiv\frac{1}{4}(3\underset{4}{\widetilde{R}}+\underset{1}{R}).\tag{2.3.77}$$

Na osnovu jednačina (2.3.61), može se pokazati da su tenzori (2.3.77) linearno nezavisni. Koristeći jednačinu (2.3.76) možemo izraziti i ostale tenzore preko nezavisnih tenzora $\underset{\theta}{K}$, $\theta=1,\dots,5$ i tenzora R na sledeći način:

$$\begin{array}{lll}
\underset{2}{R}=4R-\underset{1}{K}-2\underset{2}{K}, & \underset{2}{\widetilde{R}}=2R-\underset{4}{K}, & \underset{4}{R}=8R+\underset{3}{K}-8\underset{5}{K},\\
\underset{6}{\widetilde{R}}=4R-\underset{1}{K}-2\underset{4}{K}, & \underset{7}{\widetilde{R}}=\underset{1}{K}+2\underset{2}{K}-2\underset{4}{K}, & \underset{8}{\widetilde{R}}=-4R+\underset{1}{K}+2\underset{2}{K}+2\underset{4}{K}.\\
\underset{5}{\widetilde{R}}=2\underset{4}{K}-\underset{1}{K}, & &
\end{array}\tag{2.3.78}$$

Kao rešenje sistema (2.3.75) se dobija

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{A}=\frac{1}{2}(2R+\underset{1}{K}+\underset{3}{K}-4\underset{5}{K}), & \mathcal{B}=\frac{1}{2}(2R-\underset{2}{K}-\underset{4}{K}), & \mathcal{C}=2R-2\underset{5}{K},\\
\mathcal{A}'=\frac{1}{2}(6R-\underset{1}{K}-2\underset{2}{K}+\underset{3}{K}-4\underset{5}{K}), & \mathcal{B}'=\frac{1}{2}(\underset{2}{K}-\underset{4}{K}). &
\end{array}\tag{2.3.79}$$

Na osnovu napred rečenog, dokazana je sledeća teorema:

Teorema 2.3.16. *Od dvanaest tenzora krivine u prostoru $\mathbb{GA}_N$ postoji pet linearno nezavnisnih, a ostali se mogu dobiti linearnim kombinacijama navedenih pet linearno nezavisnih (tj. $\underset{1}{K}$, $\underset{2}{K}$, $\underset{3}{K}$, $\underset{4}{K}$, $\underset{5}{K}$, datih pomoću jednačina (2.3.77) i tenzora krivine R dobijenog pomoću simetrične koneksije $L^i_{\underline{jk}}$ (2.3.59) pridruženog prostora $\mathbb{A}_N$.* ■

Invarijanta ET-geodezijskog preslikavanja, ET-projektivni parametar (tenzor) (2.3.73), dobijena je polazeći od opšteg tenzora K (2.3.64).

U nastavku ćemo, osim ako to specijalno ne naglasimo, raditi sa pet linearno nezavisnih tenzora

$$\underset{1}{K}, \underset{2}{K}, \underset{3}{K}, \underset{4}{K}, \underset{5}{K},$$

datih pomoću jednačine (2.3.77). Polazeći od svakog od njih možemo dobiti različitu geometrijsku veličinu, invarijantnu u odnosu na ET-geodezijsko preslikavanje, tj. ET-projektivni parametar (tenzor).

1. Za tenzor $\underset{1}{K}$, na osnovu jednačina (2.3.61, 2.3.77) imamo da je $\alpha = 1,\ \alpha' = -1,\ \beta = 1,\ \beta' = -1,\ \gamma = 0$, zamenom u jednačinu (2.3.73) dobijamo

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{1}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{1}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{1}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{1}{K}{}_{n]j} \\
& + \frac{2}{(N+1)^2(N-1)} L^p_{\underline{mp}}\Big((N-1)\delta^i_j L^q_{\underset{\vee}{qn}} + \delta^i_n L^q_{\underset{\vee}{jq}}\Big) \\
& + \frac{2}{(N+1)^2(N-1)} L^p_{\underline{np}}\Big(-(N-1)\delta^i_j L^q_{\underset{\vee}{qm}} - \delta^i_m L^q_{\underset{\vee}{jq}}\Big) \\
& + \frac{2}{(N+1)^2(N-1)} L^p_{\underline{jp}}\Big(N\delta^i_{[m} L^q_{\underset{\vee}{qn]}} + (N^2-1) L^i_{\underset{\vee}{nm}}\Big) \\
& + \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{pq}}\Big(-(N-1)\delta^i_j L^p_{\underset{\vee}{mn}} + \delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{jn}} - \delta^i_n L^p_{\underset{\vee}{jm}}\Big).
\end{aligned} \tag{2.3.80}$$

2. Za tenzor $\underset{2}{K}$ zadat jednačinama (2.3.61, 2.3.77) imamo da je $\alpha = \alpha' = \gamma = 0,\ \beta = -1,\ \beta' = 1$, zamenom u jednačinu (2.3.73) dobijamo

$$\underset{2}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{2}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{2}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{2}{K}{}_{n]j}. \tag{2.3.81}$$

3. Za tenzor $\underset{3}{K}$ zadat jednačinama (2.3.61, 2.3.77) imamo da je $\alpha = \alpha' = \beta' = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = -2$, zamenom u jednačinu (2.3.73) dobijamo

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{3}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{3}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{3}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{3}{K}{}_{n]j} \\
& + \frac{2}{(N+1)^2(N-1)} L^p_{\underline{mp}}\Big((N-1)\delta^i_j L^q_{\underset{\vee}{qn}} - N\delta^i_n L^q_{\underset{\vee}{jq}} + (N^2-1) L^i_{\underset{\vee}{jn}}\Big) \\
& + \frac{2}{(N+1)^2(N-1)} L^p_{\underline{np}}\Big(-(N-1)\delta^i_j L^q_{\underset{\vee}{qm}} + N\delta^i_m L^q_{\underset{\vee}{jq}} + (N^2-1) L^i_{\underset{\vee}{jm}}\Big) \\
& - \frac{2}{(N+1)^2(N-1)} L^p_{\underline{jp}}\delta^i_{[m} L^q_{\underset{\vee}{qn]}} \\
& + \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{pq}}\Big(-(N-1)\delta^i_j L^p_{\underset{\vee}{mn}} - N\delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{jn}} - \delta^i_n L^p_{\underset{\vee}{jm}}\Big).
\end{aligned} \tag{2.3.82}$$

4. Za tenzor $\underset{4}{K}$ zadat jednačinama (2.3.61, 2.3.77) imamo da je $\alpha = \alpha' = \gamma = 0$, $\beta = \beta' = -1$, zamenom u jednačinu (2.3.73) dobijamo

$$\underset{4}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{4}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{4}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{4}{K}{}_{n]j}. \tag{2.3.83}$$

5. Za tenzor $\underset{5}{K}$ zadat jednačinama (2.3.61, 2.3.77) imamo da je $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, zamenom u jednačinu (2.3.73) dobijamo

$$\underset{5}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{5}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{5}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{5}{K}{}_{n]j}. \tag{2.3.84}$$

Veličine $\underset{1}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}, \underset{3}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}$ nisu tenzori i kao što smo rekli zovemo ih *ET-projektivinim parametrima prve i treće vrste*, redom, za preslikavanje $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$.

Sada ćemo sličnim postupkom, polazeći od pseudotenzora krivine (2.3.62), naći invarijantne objekte ET-geodezijskog preslikavanja. Označimo sa A^i_{jmn} jedan od petnaest pseudotenzora krivine u prostoru $\mathbb{GA}_N$. Na osnovu jednačina (2.3.62) se može zaključiti da za opšti pseudotenzor A^i_{jmn} važi

$$A^i_{jmn} = R + \alpha\mathcal{A} + \alpha'\mathcal{A}' + \beta\mathcal{B} + \beta'\mathcal{B}' + \varepsilon\mathcal{E} + \varepsilon'\mathcal{E}' + \chi\mathcal{F} + \chi'\mathcal{F}' + \pi\mathcal{D}. \tag{2.3.85}$$

gde $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \varepsilon, \varepsilon', \chi, \chi', \pi \in \mathbb{R}$.

Polazeći od jednačina (2.3.1, 2.3.63), za ET-geodezijsko preslikavanje prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ i $\mathbb{GA}_N$ veza izmedju pseudotenzora $\overline{A}$ i A biće

$$\begin{aligned}\overline{A}{}^i_{jmn} = {} & A^i_{jmn} + P^i_{\underline{jm};n} - P^i_{\underline{jn};m} + P^p_{\underline{jm}}P^i_{\underline{pn}} - P^p_{\underline{jn}}P^i_{\underline{pm}} \\ & + \alpha(P^i_{\underline{pn}}\underset{\vee}{L}{}^p_{jm} - P^p_{\underline{jn}}\underset{\vee}{L}{}^i_{pm} - P^p_{\underline{mn}}\underset{\vee}{L}{}^i_{jp}) + \alpha'(P^i_{\underline{pm}}\underset{\vee}{L}{}^p_{jn} - P^p_{\underline{jm}}\underset{\vee}{L}{}^i_{pn} - P^p_{\underline{nm}}\underset{\vee}{L}{}^i_{jp}) \\ & + \varepsilon P^p_{\underline{jm}}\underset{\vee}{L}{}^i_{pn} + \varepsilon' P^p_{\underline{jn}}\underset{\vee}{L}{}^i_{pm} + \chi\underset{\vee}{L}{}^p_{jm}P^i_{\underline{pn}} + \chi'\underset{\vee}{L}{}^p_{jn}P^i_{\underline{pm}} + \pi P^p_{\underline{mn}}\underset{\vee}{L}{}^i_{pj}.\end{aligned} \tag{2.3.86}$$

Iz (2.2.7, 2.3.86) dobija se

$$\begin{aligned}\overline{A}{}^i_{jmn} = {} & A^i_{jmn} + \delta^i_j(\psi_{mn} - \psi_{nm}) + \delta^i_m\psi_{jn} - \delta^i_n\psi_{jm} \\ & + \alpha(\psi_n\delta^i_p + \psi_p\delta^i_n)\underset{\vee}{L}{}^p_{jm} - \alpha(\psi_j\delta^p_n + \psi_n\delta^p_j)\underset{\vee}{L}{}^i_{pm} - \alpha(\psi_n\delta^p_m + \psi_m\delta^p_n)\underset{\vee}{L}{}^i_{jp} \\ & + \alpha'(\psi_m\delta^i_p + \psi_p\delta^i_m)\underset{\vee}{L}{}^p_{jn} - \alpha'(\psi_j\delta^p_m + \psi_m\delta^p_j)\underset{\vee}{L}{}^i_{pn} - \alpha'(\psi_m\delta^p_n + \psi_n\delta^p_m)\underset{\vee}{L}{}^i_{jp} \\ & + \varepsilon(\psi_j\delta^p_m + \psi_m\delta^p_j)\underset{\vee}{L}{}^i_{pn} + \varepsilon'(\psi_j\delta^p_n + \psi_n\delta^p_j)\underset{\vee}{L}{}^i_{pm} + \chi\underset{\vee}{L}{}^p_{jm}(\psi_p\delta^i_n + \psi_n\delta^i_p) \\ & + \chi'\underset{\vee}{L}{}^p_{jn}(\psi_p\delta^i_m + \psi_m\delta^i_p) + \pi(\psi_m\delta^p_n + \psi_n\delta^p_m)\underset{\vee}{L}{}^i_{pj}.\end{aligned}$$

Posle sredjivanja, konačno dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{A}^i_{jmn}=&A^i_{jmn}+\delta^i_j(\psi_{mn}-\psi_{nm})+\delta^i_m\psi_{jn}-\delta^i_n\psi_{jm}\\&-(\alpha+\alpha'-\varepsilon'-\chi+\pi)\psi_n L^i_{\underset{\vee}{jm}}+(\alpha+\chi)\psi_p\delta^i_n L^p_{\underset{\vee}{jm}}\\&-(\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\psi_j L^i_{\underset{\vee}{nm}}-(\alpha'+\alpha-\varepsilon-\chi'+\pi)\psi_m L^i_{\underset{\vee}{jn}}+(\alpha'+\chi')\psi_p\delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{jn}}\,.\end{aligned}\tag{2.3.87}$$

Kontrakcijom indeksa i i n, iz (2.3.87) dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{A}_{jm}=&A_{jm}+\psi_{mj}-N\psi_{jm}+(N\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\alpha-\pi)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}\\&-(\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-(\alpha'+\alpha-\varepsilon-\chi'+\pi)\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}},\end{aligned}\tag{2.3.88}$$

gde su $\overline{A}_{jm}=\overline{A}^p_{jmp}$ i $A_{jm}=A^p_{jmp}$ objekti prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ i $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ redom. Iz (2.3.88) alternacijom po j i m, dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{A}_{[jm]}=&A_{[jm]}-(1+N)\psi_{[jm]}+2(N\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\alpha-\pi)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}\\&-(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}\,.\end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine možemo izraziti $\psi_{[jm]}$:

$$\begin{aligned}\psi_{[jm]}=&\frac{1}{N+1}[A_{[jm]}-\overline{A}_{[jm]}+2(N\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\alpha-\pi)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}\\&-(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}].\end{aligned}\tag{2.3.89}$$

Zamenom (2.3.89) u (2.3.88)

$$\begin{aligned}\overline{A}_{jm}=A_{jm}-&\frac{1}{N+1}[A_{[jm]}-\overline{A}_{[jm]}+2(N\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\alpha-\pi)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}\\&-(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}]\\&-(N-1)\psi_{jm}+(N\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\alpha-\pi)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}\\&-(\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-(\alpha'+\alpha-\varepsilon-\chi'+\pi)\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}\,,\end{aligned}$$

i za ψ_{jm} dobijamo:

$$\begin{aligned}\psi_{jm}=&\frac{1}{N-1}(A_{jm}-\overline{A}_{jm})-\frac{1}{N^2-1}[A_{[jm]}-\overline{A}_{[jm]}+2(N\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\alpha-\pi)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}\\&-(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}]\\&+\frac{1}{N-1}(N\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\alpha-\pi)\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}\\&-\frac{1}{N-1}(\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}-\frac{1}{N-1}(\alpha'+\alpha-\varepsilon-\chi'+\pi)\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}\end{aligned}$$

tj.

$$
\begin{aligned}
\psi_{jm} = & \frac{1}{N^2-1}[(NA_{jm}+A_{mj})-(N\overline{A}_{jm}+\overline{A}_{mj})] \\
& + \frac{1}{N+1}[(N-1)\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\pi]\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}} \\
& + \frac{1}{N^2-1}[N\alpha'-N\alpha+\alpha'+\alpha-N\varepsilon+N\varepsilon'-\varepsilon-\chi'+\pi]\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}} \\
& + \frac{1}{N^2-1}[\alpha-N\alpha'-N\alpha-\alpha'+N\varepsilon+N\chi'-N\pi+\varepsilon-\varepsilon']\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}}.
\end{aligned}
\tag{2.3.90}
$$

Zamenom (2.3.89, 2.3.90) u (2.3.87), možemo razdvojiti objekte dva prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ i $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$

$$
\overline{\mathcal{A}\mathcal{E}}^i_{jmn} = \mathcal{A}\mathcal{E}^i_{jmn}, \tag{2.3.91}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathcal{E}^i_{jmn} = & A^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j A_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m(NA_{jn}+A_{nj}) - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n(NA_{jm}+A_{mj}) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)} L^p_{\underline{mp}}\Big((N-1)(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\delta^i_j L^q_{\underset{\vee}{qn}} + (\alpha-N\alpha'-N\alpha-\alpha'+N\varepsilon+N\chi'-N\pi+\varepsilon-\varepsilon')\delta^i_n L^q_{\underset{\vee}{jq}} \\
& \qquad + (N^2-1)(\alpha+\alpha'-\varepsilon-\chi'+\pi)L^i_{\underset{\vee}{jn}}\Big) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)} L^p_{\underline{np}}\Big(-(N-1)(2\alpha-\varepsilon'-\chi'+\pi)\delta^i_j L^q_{\underset{\vee}{qm}} - (\alpha-N\alpha'-N\alpha-\alpha'+N\varepsilon+N\chi'-N\pi+\varepsilon-\varepsilon')\delta^i_m L^q_{\underset{\vee}{jq}} \\
& \qquad + (N^2-1)(\alpha+\alpha'-\varepsilon-\chi'+\pi)L^i_{\underset{\vee}{jm}}\Big) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)} L^p_{\underline{jp}}\Big(-(N\alpha'-N\alpha+\alpha'+\alpha-N\varepsilon+N\varepsilon'-\varepsilon-\chi'+\pi)\delta^i_{[m} L^q_{\underset{\vee}{qn]}} + (N^2-1)(\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')L^i_{\underset{\vee}{nm}}\Big) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2} L^q_{\underline{pq}}\Big(-2(N\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\alpha-\pi)\delta^i_j L^p_{\underset{\vee}{mn}} \\
& \qquad -(N\alpha-\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\pi+N\alpha'+\alpha'+N\chi'+\chi')\delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{jn}} - (2\alpha-\chi'-\varepsilon'+\pi)\delta^i_n L^p_{\underset{\vee}{jm}}\Big).
\end{aligned}
\tag{2.3.92}
$$

Dokazana je sledeća teorema:

Teorema 2.3.17. *Invarijantni geometrijski objekat ET-geodezijskog preslikavanja je ET-parametar* $\mathcal{A}\mathcal{E}^i_{jmn}$ *dat jednačinom (2.3.92).* ■

Na kraju ovog odeljka, na osnovu napred rečenog, možemo formulisati jednu od važnijih teorema u ovom radu.

Teorema 2.3.18. *Veličine* $\underset{2}{\mathcal{E}}, \underset{4}{\mathcal{E}}, \underset{5}{\mathcal{E}}$ *date redom jednačinama (2.3.81), (2.3.83) i (2.3.84), su tenzori koji su invarijantni u odnosu na ET-geodezijska preslikavanja* $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ *i zovemo ih ET-projektivnim tenzorima. Veličine* $\underset{1}{\mathcal{E}}, \underset{3}{\mathcal{E}}$, *i* $\mathcal{A}\mathcal{E}$ *date jednačinama (2.3.80), (2.3.82), (2.3.92), redom, jesu invarijantni objekti ovih preslikavanja, ali nisu tenzori, zovemo ih ET-projektivnim parametrima.*
■

2.3.4 Ekviafini prostori

Ekviafini prostori su odredjeni simetrijom Ričijevog tenzora $R_{ij} = R_{ji}$. Takav je, na primer, Rimanov prostor. Geodezijska preslikavanja ekviafinih prostora simetrične afine koneksije su obradjena u radovima [37, 40, 45, 46, 47, 48].

U slučaju prostora sa nesimetričnom afinom koneksijom imamo četiri vrste kovarijantnog diferenciranja, i pet linearno nezavisnih tenzora krivine, pa samim tim i pet Ričijevih tenzora. Pored pomenutih pet Ričijevih tenzora, važnu ulogu igra i Ričijev tenzor pridruženog prostora simetrične afine koneksije. Ako je jedan od njih simetričan, to neće povući da su ostali simetrični. Na taj način mi ćemo posebno definisati šest ekviafinih prostora i posmatrati geodezijska preslikavanja takvih prostora. Ispitaćemo i slučaj kada su Ričijevi tenzori antisimetrični. Ovom problematikom smo se bavili u radu [M9].

Definicija 2.3.2. *Prostor nesimetrične afine koneksije* $\mathbb{GA}_N$ *je* **ekviafini prostor vrste** θ, $\theta \in \{1, ..., 5\}$, *ako je Ričijev tenzor* θ*-vrste simetričan, tj.* $\underset{\theta}{K}{}_{jm} = \underset{\theta}{K}{}_{mj}$.

Definicija 2.3.3. *Prostor* $\mathbb{GA}_N$ *je* **ekviafini prostor nulte vrste** *ako je Ričijev tenzor pridruženog prostora simetrične afine koneksije* $\mathbb{A}_N$ *(2.3.59) simetričan tj.* $R_{ij} = R_{ji}$.

Iz jednačina (2.3.58, 2.3.61), lako se zaključuje da se tenzori (2.3.77) mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + L^i_{\underset{\vee}{jm};n} - L^i_{\underset{\vee}{jn};m} + L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}}\\
&\underset{2}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} - L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} + L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}}\\
&\underset{3}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + L^i_{\underset{\vee}{jm};n} + L^i_{\underset{\vee}{jn};m} - L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} + L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}} - 2L^p_{\underset{\vee}{mn}} L^i_{\underset{\vee}{pj}}\\
&\underset{4}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} - L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}}\\
&\underset{5}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} - \frac{1}{2} L^p_{\underset{\vee}{mn}} L^i_{\underset{\vee}{pj}}.
\end{aligned} \tag{2.3.93}$$

gde je $(;)$ kovarijantni izvod u odnosu na simetričnu koneksiju $L^i_{\underline{jk}}$ a R^i_{jmn} je Rimanov tenzor krivine dat sa (2.3.59).

Kontrakcijom indeksa i i n u (2.3.93) imamo pet Ričijevih tenzora:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{K}{}_{jm} = R_{jm} + L^p_{\underset{\vee}{jm};p} - L^p_{\underset{\vee}{jp};m} + L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^q_{\underset{\vee}{pq}} - L^p_{\underset{\vee}{jq}} L^q_{\underset{\vee}{pm}}\\
&\underset{2}{K}{}_{jm} = R_{jm} - L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^q_{\underset{\vee}{pq}} + L^p_{\underset{\vee}{jq}} L^q_{\underset{\vee}{pm}}\\
&\underset{3}{K}{}_{jm} = R_{jm} + L^p_{\underset{\vee}{jm};p} + L^p_{\underset{\vee}{jp};m} - L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^q_{\underset{\vee}{pq}} + L^p_{\underset{\vee}{jq}} L^q_{\underset{\vee}{pm}} - 2L^p_{\underset{\vee}{mq}} L^q_{\underset{\vee}{pj}}\\
&\underset{4}{K}{}_{jm} = R_{jm} - L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^q_{\underset{\vee}{pq}} - L^p_{\underset{\vee}{jq}} L^q_{\underset{\vee}{pm}}\\
&\underset{5}{K}{}_{jm} = R_{jm} - \frac{1}{2} L^p_{\underset{\vee}{mq}} L^q_{\underset{\vee}{pj}}.
\end{aligned} \tag{2.3.94}$$

Alternacijom bez deljenja u odnosu na indekse j i m u (2.3.94), dobijamo

$$\begin{aligned}
\underset{1}{K}_{[jm]} &= R_{[jm]} + 2L^p_{\underset{\vee}{jm};p} - L^p_{\underset{\vee}{jp};m} + L^p_{\underset{\vee}{mp};j} + 2L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^q_{\underset{\vee}{pq}} \\
\underset{2}{K}_{[jm]} &= R_{[jm]} - 2L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^q_{\underset{\vee}{pq}} \\
\underset{3}{K}_{[jm]} &= R_{[jm]} + 2L^p_{\underset{\vee}{jm};p} + L^p_{\underset{\vee}{jp};m} - L^p_{\underset{\vee}{mp};j} - 2L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^q_{\underset{\vee}{pq}} \\
\underset{4}{K}_{[jm]} &= R_{[jm]} - 2L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^q_{\underset{\vee}{pq}} \\
\underset{5}{K}_{[jm]} &= R_{[jm]}
\end{aligned} \tag{2.3.95}$$

gde $[\ ]$ označava antisimetrizaciju bez deljenja.

Posledica 2.3.19. *U prostoru* $\mathbb{GA}_N$ *važi*

$$\underset{2}{K}_{[jm]} = \underset{4}{K}_{[jm]}, \quad \underset{5}{K}_{[jm]} = R_{[jm]} \tag{2.3.96}$$

gde su $\underset{2}{K}_{jm}$, $\underset{4}{K}_{jm}$, $\underset{5}{K}_{jm}$, R_{jm} *Ričijevi tenzori druge, četvrte, pete i nulte vrste, redom.*

Posledica 2.3.20. *Prostor* $\mathbb{GA}_N$ *je ekviafini prostor nulte vrste ako i samo ako je on ekviafini prostor pete vrste.* ■

Posledica 2.3.21. *Prostor* $\mathbb{GA}_N$ *je ekviafini prostor druge vrste ako i samo ako je on ekviafini prostor četvrte vrste.* ■

Treba napomenuti da je vektor ψ_i u slučaju geodezijskog preslikavanja Rimanovih prostora [45, 46, 89] odredjen jednačinom (2.1.8) i generalisanih Rimanovih prostora odredjen jednačinom (2.2.11) gradijentni vektor [58]. Takodje to važi i za ekviafine prostore simetrične afine koneksije, tj.

Teorema 2.3.22. (Mikeš, J., Kiosak, V., Vanžurová, A., (2008), [45]) *Ako je dato geodezijsko preslikavanje* $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ *dva ekviafina prostora tada je vektor* ψ_i *gradijentni vektor.* ■

Za prostore nesimetrične afine koneksije, važiće sledeća teorema:

Teorema 2.3.23. *Ako je dato ET-preslikavanje* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ *dva ekviafina prostora* θ*-vrste,* $\theta \in \{0, 2, 4, 5\}$*, tada je vektor* ψ_i *gradijentni vektor.*

Dokaz. Teoremu dokazujemo, za ET-preslikavanje ekviafinih prostora pete vrste.

Iz (2.3.67), za $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, imamo da je veza izmedju tenzora krivine $\underset{5}{K}$ i $\underset{5}{\overline{K}}$ prostora $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ usled ET-geodezijskog preslikavanja:

$$\underset{5}{\overline{K}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{K}{}^i_{jmn} + \delta^i_j(\psi_{mn} - \psi_{nm}) + \delta^i_m \psi_{jn} - \delta^i_n \psi_{jm}, \tag{2.3.97}$$

gde je

$$\psi_{mn} = \psi_{m;n} - \psi_m \psi_n. \tag{2.3.98}$$

Kontrakcijom indeksa i i n u (2.3.97), dobijamo da je

$$\underset{5}{\overline{K}}_{jm} = \underset{5}{K}_{jm} - N\psi_{jm} + \psi_{mj}, \tag{2.3.99}$$

Alternacijom u odnosu na indekse j i m bez deljenja u jednačini (2.3.99), dobijamo

$$\underset{5}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{5}{K}_{[jm]} - (N+1)\psi_{[jm]}, \tag{2.3.100}$$

tj.

$$\underset{5}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{5}{K}_{[jm]} - (N+1)(\psi_{j,m} - \psi_{m,j}). \tag{2.3.101}$$

Pošto se radi o geodezijskom preslikavanju dva ekviafina prostora pete vrste, tada su $\underset{5}{\overline{K}}_{jm}$ i $\underset{5}{K}_{jm}$ simetrični, pa iz jednačine (2.3.101) sledi da je $\psi_{j,m} = \psi_{m,j}$, tj. ψ_i je gradijentni vektor.

Slično se pokazuje i u ostalim slučajevima. ■

Teorema 2.3.24. *Neka je $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ ET-geodezijsko preslikavanje dva prostora nesimetrične afine koneksije, tada su sledeći uslovi ekvivalentni*

$$\begin{aligned} &a)\quad \overline{R}_{[jm]} = R_{[jm]}, \quad b)\quad \underset{2}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{2}{K}_{[jm]},\\ &c)\quad \underset{4}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{4}{K}_{[jm]}, \quad d)\quad \underset{5}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{5}{K}_{[jm]}. \end{aligned} \tag{2.3.102}$$

Dokaz. Iz jednačina (2.3.95) direktno sledi uslov $\overline{R}_{[jm]} = R_{[jm]} \Leftrightarrow \underset{5}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{5}{K}_{[jm]}$. Kako se radi o ET-preslikavanju, tj. kada su torzije jednake, lako se pokazuju i ostale ekvivalencije. ■

Za ET-preslikavanje dva ekviafina prostora prve ili treće vrste vektor ψ_i nije gradijentni vektor u opštem slučaju, ali važi sledeća teorema:

Teorema 2.3.25. *Neka je dato ET-preslikavanje $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ dva ekviafina prostora prve ili treće vrste. Vektor ψ_i je gradijentni ako i samo ako je*

$$L^p_{\underset{\vee}{mj}}\psi_p = \frac{1}{N-1}(L^p_{\underset{\vee}{mp}}\psi_j - L^p_{\underset{\vee}{jp}}\psi_m). \tag{2.3.103}$$

Dokaz. Pretpostavimo da su prostori $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ ekviafini prostori prve vrste. Iz (2.3.67), za $\alpha = 1,\ \alpha' = -1,\ \beta = 1,\ \beta' = -1,\ \gamma = 0$ imamo da je veza izmedju tenzora krivine $\underset{1}{\overline{K}}$ i $\underset{1}{K}$ prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ i $\mathbb{GA}_N$ usled ET-geodezijskog preslikavanja:

$$\underset{1}{\overline{K}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{K}{}^i_{jmn} + \delta^i_j(\psi_{mn} - \psi_{nm}) + \delta^i_m\psi_{jn} - \delta^i_n\psi_{jm} + \psi_p\delta^i_n L^p_{\underset{\vee}{jm}} - 2\psi_j L^i_{\underset{\vee}{nm}} - \psi_p\delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{jn}}. \tag{2.3.104}$$

Kontrakcijom indeksa i i n u (2.3.104) dobijamo

$$\underset{1}{\overline{K}}_{jm} = \underset{1}{K}_{jm} + (\psi_{mj} - \psi_{jm}) + \psi_{jm} - N\psi_{jm} + N\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}} - 2\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}} - \psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}. \tag{2.3.105}$$

Alternirajmo poslednju jednačinu po j i m i dobijamo

$$\underset{1}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{1}{K}_{[jm]} - (1+N)\psi_{[jm]} + 2(N-1)\psi_p \underset{\vee}{L^p_{jm}} - 2\psi_j \underset{\vee}{L^p_{pm}} + 2\psi_m \underset{\vee}{L^p_{pj}}. \tag{2.3.106}$$

Ako još i uvrstimo da je $\underset{1}{\overline{K}}_{[jm]} = 0$, $\underset{1}{K}_{[jm]} = 0$, dobijamo

$$(1+N)\psi_{[jm]} = 2(N-1)\psi_p \underset{\vee}{L^p_{jm}} - 2\psi_j \underset{\vee}{L^p_{pm}} + 2\psi_m \underset{\vee}{L^p_{pj}}, \tag{2.3.107}$$

tj.

$$\psi_{j,m} - \psi_{m,j} = \frac{2}{1+N}\big((N-1)\underset{\vee}{L^p_{jm}}\psi_p - \underset{\vee}{L^p_{pm}}\psi_j + \underset{\vee}{L^p_{pj}}\psi_m\big). \tag{2.3.108}$$

Odavde zaključujemo da je potreban i dovoljan uslov da je ψ_i gradijentni vektor ako i samo ako važi jednačina (2.3.103).

Na isti način, za dva ekviafina prostora treće vrste jednačina (2.3.103) je potreban i dovoljan uslov da je vektor ψ_i gradijentni vektor. ■

Iz prethodne teoreme, sledi naredna teorema

Teorema 2.3.26. *Neka je $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ ET-geodezijsko preslikavanje dva prostora nesimetrične afine koneksije, pri čemu važi uslov*

$$\underset{\vee}{L^p_{mj}}\psi_p = \frac{1}{N-1}(\underset{\vee}{L^\alpha_{m\alpha}}\psi_j - \underset{\vee}{L^\alpha_{j\alpha}}\psi_m), \tag{2.3.109}$$

tada su sledeći uslovi ekvivalentni

$$\begin{aligned} &a)\ \ \overline{R}_{[jm]} = R_{[jm]}, \quad b)\ \ \underset{1}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{1}{K}_{[jm]}, \quad c)\ \ \underset{2}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{2}{K}_{[jm]},\\ &d)\ \ \underset{3}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{3}{K}_{[jm]}, \quad e)\ \ \underset{4}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{4}{K}_{[jm]}, \quad f)\ \ \underset{5}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{5}{K}_{[jm]}. \end{aligned} \tag{2.3.110}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je uslov (2.3.109) ispunjen. Dokazaćemo da važi ekvivalencija $(a) \Leftrightarrow (b)$, tj. $\overline{R}_{[jm]} = R_{[jm]} \Leftrightarrow \underset{1}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{1}{K}_{[jm]}$. Sa $(;)$ označavamo, kao i do sada, kovarijantni izvod u odnosu na simetričnu koneksiju $L^i_{\underline{jk}}$, a sa $(\bar{;})$ kovarijantni izvod u odnosu na koneksiju $\overline{L}^i_{\underline{jk}}$. Nalazimo vezu

$$\begin{aligned} \underset{\vee}{\overline{L}^i_{jm\bar{;}k}} &= \underset{\vee}{\overline{L}^i_{jm,k}} + \overline{L}^i_{\underline{pk}}\underset{\vee}{\overline{L}^p_{jm}} - \overline{L}^p_{\underline{jk}}\underset{\vee}{\overline{L}^i_{pm}} - \overline{L}^p_{\underline{mk}}\underset{\vee}{\overline{L}^i_{jp}}\\ &= \underset{\vee}{L^i_{jm,k}} + (L^i_{\underline{pk}} + P^i_{\underline{pk}})\underset{\vee}{L^p_{jm}} - (L^p_{\underline{jk}} + P^p_{\underline{jk}})\underset{\vee}{L^i_{pm}} - (L^p_{\underline{mk}} + P^p_{\underline{mk}})\underset{\vee}{L^i_{jp}}\\ &= \underset{\vee}{L^i_{jm;k}} + P^i_{\underline{pk}}\underset{\vee}{L^p_{jm}} - P^p_{\underline{jk}}\underset{\vee}{L^i_{pm}} - P^p_{\underline{mk}}\underset{\vee}{L^i_{jp}}. \end{aligned} \tag{2.3.111}$$

Kako iz jednačine (2.3.95) za tenzor $\underset{1}{K}$ imamo relaciju

$$\underset{1}{K}_{[jm]} = R_{[jm]} + 2\underset{\vee}{L^p_{jm;p}} - \underset{\vee}{L^p_{jp;m}} + \underset{\vee}{L^p_{mp;j}} + 2\underset{\vee}{L^p_{jm}}\underset{\vee}{L^q_{pq}} \tag{2.3.112}$$

onda je

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{K}}_{[jm]} &= \overline{R}_{[jm]} + 2\overline{L}^p_{\underset{\vee}{jm};p} - \overline{L}^p_{\underset{\vee}{jp};m} + \overline{L}^p_{\underset{\vee}{mp};j} + 2\overline{L}^p_{\underset{\vee}{jm}}\overline{L}^q_{\underset{\vee}{pq}} \\
&= \overline{R}_{[jm]} + 2(L^p_{\underset{\vee}{jm};p} + P^p_{\underline{pq}}L^q_{\underset{\vee}{jm}} - P^q_{\underline{jp}}L^p_{\underset{\vee}{qm}} - P^q_{\underline{mp}}L^p_{\underset{\vee}{jq}}) \\
&\quad -(L^p_{\underset{\vee}{jp};k} + P^p_{\underline{qm}}L^q_{\underset{\vee}{jp}} - P^q_{\underline{jm}}L^p_{\underset{\vee}{qp}} - P^q_{\underline{pm}}L^p_{\underset{\vee}{jq}}) \\
&\quad +(L^p_{\underset{\vee}{mp};j} + P^p_{\underline{qj}}L^q_{\underset{\vee}{mp}} - P^q_{\underline{mj}}L^p_{\underset{\vee}{qp}} - P^q_{\underline{pj}}L^p_{\underset{\vee}{mq}}) + 2L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^q_{\underset{\vee}{pq}},
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{K}}_{[jm]} &= \overline{R}_{[jm]} + 2L^p_{\underset{\vee}{jm};p} - L^p_{\underset{\vee}{jp};m} + L^p_{\underset{\vee}{mp};j} + 2L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^q_{\underset{\vee}{pq}} \\
&\quad + 2(P^p_{\underline{pq}}L^q_{\underset{\vee}{jm}} - P^q_{\underline{jp}}L^p_{\underset{\vee}{qm}} - P^q_{\underline{mp}}L^p_{\underset{\vee}{jq}}) \,.
\end{aligned} \tag{2.3.113}$$

Za izraz u zagradi dobijamo

$$\begin{aligned}
P^p_{\underline{pq}}L^q_{\underset{\vee}{jm}} - P^q_{\underline{jp}}L^p_{\underset{\vee}{qm}} - P^q_{\underline{mp}}L^p_{\underset{\vee}{jq}} &= (\delta^p_q\psi_p + \delta^p_p\psi_q)L^q_{\underset{\vee}{jm}} - (\delta^q_j\psi_p + \delta^q_p\psi_j)L^p_{\underset{\vee}{qm}} - (\delta^q_m\psi_p + \delta^q_p\psi_m)L^p_{\underset{\vee}{jq}} \\
&= L^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p + NL^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p - L^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p - L^p_{\underset{\vee}{pm}}\psi_j - L^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p - L^q_{\underset{\vee}{jq}}\psi_m \qquad (2.3.114) \\
&= (N-1)L^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p + L^p_{\underset{\vee}{mp}}\psi_j - L^q_{\underset{\vee}{jq}}\psi_m = 0.
\end{aligned}$$

Ako iskoristimo pretpostavku da važi uslov (2.3.109), onda iz jednačine (2.3.113), dobijamo

$$\underset{1}{\overline{K}}_{[jm]} = \overline{R}_{[jm]} + 2L^p_{\underset{\vee}{jm};p} - L^p_{\underset{\vee}{jp};m} + L^p_{\underset{\vee}{mp};j} + 2L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^q_{\underset{\vee}{pq}}. \tag{2.3.115}$$

Lako se iz jednačina (2.3.112) i (2.3.115) zaključuje $\overline{R}_{[jm]} = R_{[jm]} \Leftrightarrow \underset{1}{\overline{K}}_{[jm]} = \underset{1}{K}_{[jm]}$. Na isti, način se dobijaju i ostale ekvivalencije. ■

Na osnovu prethodne teoreme, sledi

Posledica 2.3.27. *Neka je $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_\mathbb{N}$ ET-geodezijsko preslikavanje dva ekviafina prostora θ-vrste, $\theta \in \{0, ..., 5\}$, pri čemu važi uslov (2.3.109), tada su $R_{[jm]}, \underset{1}{K}_{[jm]}, \underset{2}{K}_{[jm]}, \underset{3}{K}_{[jm]}, \underset{4}{K}_{[jm]}, \underset{5}{K}_{[jm]}$ invarijantni objekti ovog preslikavanja.* ■

2.3.5 Anti-ekviafini prostori

Posmatrajući slučajeve kada je Ričijev tenzor θ-vrste, $\theta \in \{0, \dots, 5\}$, simetričan, dolazimo na ideju [M9] da ispitamo prostore u kojima je Ričijev tenzor θ-vrste, $\theta \in \{0, \dots, 5\}$, antisimetričan.

Definicija 2.3.4. *Prostor nesimetrične afine koneksije $\mathbb{GA}_N$ je* **anti-ekviafini prostor θ-vrste**, *$\theta \in \{1, \dots, 5\}$, ako je Ričijev tenzor θ-vrste antisimetričan, tj. $\underset{\theta}{R}_{jm} = -\underset{\theta}{R}_{mj}$, $\theta \in \{1, \dots, 5\}$. Za prosotor $\mathbb{GA}_N$ se kaže da je* **anti-ekviafini prostor nulte-vrste** *ako je Ričijev tenzor pridruženog prostora antisimetričan, tj. $R_{ij} = -R_{ji}$.*

Simetrizacijom u odnosu na indekse j i m bez deljenja u (2.3.94) dobijamo

$$\begin{aligned}
\underset{1}{K}_{(jm)} &= R_{(jm)} - \underset{\vee}{L}{}^{p}_{jp;m} - \underset{\vee}{L}{}^{p}_{mp;j} - 2\underset{\vee}{L}{}^{p}_{jq}\underset{\vee}{L}{}^{q}_{pm}\\
\underset{2}{K}_{(jm)} &= R_{(jm)} + 2\underset{\vee}{L}{}^{p}_{jq}\underset{\vee}{L}{}^{q}_{pm}\\
\underset{3}{K}_{(jm)} &= R_{(jm)} + \underset{\vee}{L}{}^{p}_{jp;m} + \underset{\vee}{L}{}^{p}_{mp;j} - 2\underset{\vee}{L}{}^{p}_{jq}\underset{\vee}{L}{}^{q}_{pm}\\
\underset{4}{K}_{(jm)} &= R_{(jm)} - 2\underset{\vee}{L}{}^{p}_{jq}\underset{\vee}{L}{}^{q}_{pm}\\
\underset{5}{K}_{(jm)} &= R_{(jm)} - \underset{\vee}{L}{}^{p}_{mq}\underset{\vee}{L}{}^{q}_{pj}.
\end{aligned}\tag{2.3.116}$$

gde ( ) označava simetrizaciju bez deljenja.

Teorema 2.3.28. *Neka je $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ ET-geodezijsko preslikavanje dva anti-ekviafina prostora θ-vrste, $\theta \in \{0, 2, 4, 5\}$, tada je ψ_{ij} definisan pomoću (2.3.98) antisimetričan.*

Dokaz. Teoremu dokazujemo za ET-geodezijsko preslikavanje anti-ekviafinih prostora pete vrste i nulte vrste. Slično se pokazuje i u ostalim slučajevima. Iz (2.3.97) imamo da je veza izmedju Ričijevog tenzora $\underset{5}{\overline{K}}$ i $\underset{5}{K}$ prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ i $\mathbb{GA}_N$ usled ET-geodezijskog preslikavanja:

$$\underset{5}{\overline{K}}_{jm} = \underset{5}{K}_{jm} - N\psi_{jm} + \psi_{mj}. \tag{2.3.117}$$

Simetrizacijom bez deljenja u (2.3.117) u odnosu na indekse j i m, dobijamo

$$\underset{5}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{5}{K}_{(jm)} + (1-N)\psi_{(jm)}. \tag{2.3.118}$$

Pretpostavimo da prostori su $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ anti-ekviafini pete vrste. Tada je $\psi_{(jm)} = 0$, tj. ψ_{jm} je antisimetričan.

Pretpostavimo da su prostori $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ anti-ekviafini nulte vrste. Uzimajući (2.3.116) i (2.3.117) i činjenicu da su torzije jednake usled ET-geodezijskog preslikavanja imamo

$$\overline{R}_{(jm)} - \underset{\vee}{\overline{L}}{}^{p}_{mq}\underset{\vee}{\overline{L}}{}^{q}_{pj} = R_{(jm)} - \underset{\vee}{L}{}^{p}_{mq}\underset{\vee}{L}{}^{q}_{pj} + (1-N)\psi_{(jm)}, \tag{2.3.119}$$

tj.

$$\overline{R}_{(jm)} = R_{(jm)} + (1-N)\psi_{(jm)}, \tag{2.3.120}$$

tada je $\psi_{(jm)} = 0$, tj. ψ_{jm} je antisimetričan. Slično se pokazuje i kada su prostori $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ anti-ekviafini druge i četvrte vrste. ■

Na osnovu jednačina (2.3.118) i (2.3.120), možemo izvesti još neke zaključke

Posledica 2.3.29. *Neka je $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ ET-geodezijsko preslikavanje dva prostora nesimetrične afine koneksije, tada su sledeći uslovi ekvivalentni*

$$\begin{aligned} &a)\ \ \overline{R}_{(jm)} = R_{(jm)}, \quad &&b)\ \ \underset{2}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{2}{K}_{(jm)}, \\ &c)\ \ \underset{4}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{4}{K}_{(jm)}, \quad &&d)\ \ \underset{5}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{5}{K}_{(jm)}. \end{aligned} \tag{2.3.121}$$

■

Očigledno da za anti-ekviafine prostore prve ili treće vrste prethodna tvrdjenja ne važe. Ispitajmo sada šta će se desiti pri ET-geodezijskom preslikavanju dva anti-ekviafina prostora prve ili treće vrste.

Pretpostavimo da su prostori $\mathbb{GA}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ anti-ekviafini prostori prve vrste. Posmatrajmo ET-geodezijsko preslikavanje ovih prostora. Veza izmedju Ričijevih tenzora prve vrste prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ i $\mathbb{GA}_N$ usled ET-geodezijskog preslikavanja je

$$\underset{1}{\overline{K}}_{jm} = \underset{1}{K}_{jm} + (\psi_{mj} - \psi_{jm}) + \psi_{jm} - N\psi_{jm} + N\psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}} - 2\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}} - \psi_p L^p_{\underset{\vee}{jm}}. \tag{2.3.122}$$

Simetrizacijom bez deljenja po indeksima j i m u (2.3.122), imamo

$$\underset{1}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{1}{K}_{(jm)} + (1-N)\psi_{(jm)} - 2\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}} - 2\psi_m L^p_{\underset{\vee}{pj}}. \tag{2.3.123}$$

Kako važi $\underset{1}{\overline{K}}_{(jm)} = 0$, $\underset{1}{K}_{(jm)} = 0$, onda je

$$(N-1)\underset{1}{\psi}_{(jm)} = 2L^p_{\underset{\vee}{mp}}\psi_j + 2L^p_{\underset{\vee}{jp}}\psi_m. \tag{2.3.124}$$

Na isti način, ako pretpostavimo da je $\underset{3}{R}_{jm} = -\underset{3}{R}_{mj}$, i $\underset{3}{\overline{R}}_{jm} = -\underset{3}{\overline{R}}_{mj}$, dobićemo jednačinu (2.3.124).

Na osnovu prethodnog, važi

Teorema 2.3.30. *Neka je $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ ET-geodezijsko preslikavanje dva anti-ekviafina prostora θ-vrste, $\theta \in \{1, 3\}$. Veličina ψ_{ij} je anti-simetrična ako i samo ako važi*

$$L^p_{\underset{\vee}{mp}}\psi_j + L^p_{\underset{\vee}{jp}}\psi_m = 0. \quad ■ \tag{2.3.125}$$

Teorema 2.3.31. *Neka je $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ ET-geodezijsko preslikavanje dva prostora, pri čemu je zadovoljen uslov*

$$L^p_{\underset{\vee}{mp}}\psi_j + L^p_{\underset{\vee}{jp}}\psi_m = 0. \tag{2.3.126}$$

Sledeći uslovi su ekvivalentni

$$\begin{aligned} &a)\ \ \overline{R}_{(jm)} = R_{(jm)}, \quad &&b)\ \ \underset{1}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{1}{K}_{(jm)}, \quad &&c)\ \ \underset{2}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{2}{K}_{(jm)}, \\ &d)\ \ \underset{3}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{3}{K}_{(jm)}, \quad &&e)\ \ \underset{4}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{4}{K}_{(jm)}, \quad &&f)\ \ \underset{5}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{5}{K}_{(jm)}. \end{aligned} \tag{2.3.127}$$

Dokaz. Dokazaćemo sledeću ekvivalenciju $\overline{R}_{(jm)} = R_{(jm)} \Leftrightarrow \underset{1}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{1}{K}_{(jm)}$. Iz jednačine (2.3.116) imamo vezu

$$\underset{1}{\overline{K}}_{(jm)} = \overline{R}_{(jm)} - \overline{L}^p_{\underset{\vee}{jp\bar{;}m}} - \overline{L}^p_{\underset{\vee}{mp\bar{;}j}} - 2\overline{L}^p_{\underset{\vee}{jq}}\overline{L}^q_{\underset{\vee}{pm}}\,.$$

Iskoristićemo formulu (2.3.111), gde smo izrazili $\overline{L}^p_{\underset{\vee}{jp\bar{;}m}}$. Zamenom u prethodnu jednačinu imamo

$$\underset{1}{\overline{K}}_{(jm)} = \overline{R}_{(jm)} - L^p_{\underset{\vee}{jp;m}} - L^p_{\underset{\vee}{mp;j}} - 2L^p_{\underset{\vee}{jq}}L^q_{\underset{\vee}{pm}},$$

jer je

$$2P^q_{jm}L^p_{\underset{\vee}{qp}} = 2(\delta^q_j\psi_m + \delta^q_m\psi_j)L^p_{\underset{\vee}{qp}} = 2(\psi_m L^p_{\underset{\vee}{jp}} + \psi_j L^p_{\underset{\vee}{mp}}) = 0.$$

Sada se vidi da je $\overline{R}_{(jm)} = R_{(jm)} \Leftrightarrow \underset{1}{\overline{K}}_{(jm)} = \underset{1}{K}_{(jm)}$. Na sličan način se pokazuju i ostale ekvivalencije. $\blacksquare$

Na osnovu prethodne teoreme imamo

Posledica 2.3.32. *Neka je $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ ET-geodezijsko preslikavanje dva anti-ekviafina prostora θ-vrste, $\theta \in \{0, ..., 5\}$, pri čemu važi uslov (2.3.126), tada su $R_{(jm)}, \underset{1}{K}_{(jm)}, \underset{2}{K}_{(jm)}, \underset{3}{K}_{(jm)}, \underset{4}{K}_{(jm)}, \underset{5}{K}_{(jm)}$ invarijantni geometrijski objekti ovog preslikavanja.* $\blacksquare$

2.3.6 Invarijantni geometrijski objekti ET-geodezijskog preslikavanja prostora $\mathbb{GR}_N$

Na kraju ove glave, dajemo još neke interesante rezultate, koji se odnose na generalisane Rimanove prostore. Koeficijenti koneksije L^i_{jk} se u ovom slučaju zamene Kristofelovim simbolima druge vrste Γ^i_{jk} koji su nesimetrični u opštem slučaju i formiraju se na poznat način pomoću nesimetričnog metričkog tenzora g_{ij}. Iskoristićemo da u $\mathbb{GR}_N$ važi $\Gamma^p_{\underset{\vee}{jp}} = 0$. U $\mathbb{GR}_N$ pridružen Ričijev tenzor R_{jm} je simetričan, pa se jednačine (2.3.95) svode na

$$\underset{1}{K}_{[jm]} = 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm;p}},\ \underset{2}{K}_{[jm]} = 0,\ \underset{3}{K}_{[jm]} = 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm;p}},\ \underset{4}{K}_{[jm]} = 0,\ \underset{5}{K}_{[jm]} = 0. \tag{2.3.128}$$

Ako se radi o ET-geodezijskom preslikavanju dva generalisana Rimanova prostora, jednačine (2.3.116) se svode na

$$\begin{aligned}
\underset{1}{K}_{(jm)} &= 2R_{jm} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}},\\
\underset{2}{K}_{(jm)} &= 2R_{jm} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}},\\
\underset{3}{K}_{(jm)} &= 2R_{jm} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}},\\
\underset{4}{K}_{(jm)} &= 2R_{jm} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}},\\
\underset{5}{K}_{(jm)} &= 2R_{jm} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{mq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pj}}.
\end{aligned} \tag{2.3.129}$$

Posledica 2.3.33. *U prostoru* $\mathbb{GR_N}$ *važi*

$$\underset{1}{K}_{(jm)} = \underset{3}{K}_{(jm)} = \underset{4}{K}_{(jm)}. \quad \blacksquare \tag{2.3.130}$$

Posledica 2.3.34. *Usled ET-geodezijskog preslikavanja dva generalisana Rimanova prostora* $\mathbb{GR_N}$ *i* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ *sledeće veličine su invarijantni objekti ovog preslikavanja:* $\underset{1}{K}_{(jm)} - 2R_{jm}$, $\underset{2}{K}_{(jm)} - 2R_{jm}$, $\underset{3}{K}_{(jm)} - 2R_{jm}$, $\underset{4}{K}_{(jm)} - 2R_{jm}$, $\underset{5}{K}_{(jm)} - 2R_{jm}$. $\blacksquare$

Polazeći od invarijantnih geometrijskih objekata ET-geodezijskog preslikavanja (2.3.80)-(2.3.84) prostora $\mathbb{GA}_N$, dobijamo i invarijantne objekte prostora $\mathbb{GR}_N$:

1. Za tenzor $\underset{1}{K}$ zadat jednačinom (2.3.77) imamo ET-projektivni parametar

$$\begin{aligned}\underset{1}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{1}{K}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{1}{K}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{1}{K}_{n]j} \\ + \frac{2}{(N+1)}\Gamma^p_{\underline{jp}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} + \frac{2}{(N+1)^2}\Gamma^q_{\underline{pq}}\Big(-(N-1)\delta^i_j\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}} + \delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} - \delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Big).\end{aligned} \tag{2.3.131}$$

2. Za tenzor $\underset{2}{K}$ zadat jednačinom (2.3.77), ako iskoristimo i (2.3.128), imamo ET-projektivni tenzor

$$\underset{2}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}\underset{2}{K}_{jn]}. \tag{2.3.132}$$

3. Za tenzor $\underset{3}{K}$ zadat jednačinom (2.3.77) imamo ET-projektivni parametar

$$\begin{aligned}\underset{3}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{3}{K}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{3}{K}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{3}{K}_{n]j} \\ + \frac{2}{(N+1)}\Gamma^p_{\underline{mp}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \frac{2}{(N+1)}\Gamma^p_{\underline{np}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + \frac{2}{(N+1)^2}\Gamma^q_{\underline{pq}}\Big(-(N-1)\delta^i_j\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}} - N\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} - \delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Big).\end{aligned} \tag{2.3.133}$$

4. Za tenzor $\underset{4}{K}$ zadat jednačinom (2.3.77), ako iskoristimo i (2.3.128) imamo ET-projektivni tenzor

$$\underset{4}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}\underset{4}{K}_{jn]}. \tag{2.3.134}$$

5. Za tenzor $\underset{5}{K}$ zadat jednačinom (2.3.77), ako iskoristimo i (2.3.128) imamo ET-projektivni tenzor

$$\underset{5}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}\underset{5}{K}_{jn]}. \tag{2.3.135}$$

Takodje, ako u jednačini (2.3.92), uvrstimo da je $\Gamma^p_{\underset{\vee}{ip}} = 0$, dobijamo u prostoru $\mathbb{GR}_N$

$$\begin{aligned}
\mathcal{AE}^i_{jmn} = & A^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j A_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m(NA_{jn}+A_{nj}) - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n(NA_{jm}+A_{mj}) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}\Gamma^p_{\underline{mp}}\Big((N^2-1)(\alpha+\alpha'-\varepsilon-\chi'+\pi)\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}}\Big) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}\Gamma^p_{\underline{np}}\Big((N^2-1)(\alpha+\alpha'-\varepsilon-\chi'+\pi)\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}}\Big) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}\Gamma^p_{\underline{jp}}\Big((N^2-1)(\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\Big) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2}\Gamma^q_{\underline{pq}}\Big(-2(N\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\alpha-\pi)\delta^i_j\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}} \\
& \qquad -(N\alpha-\alpha+N\chi+\chi'+\varepsilon'-\pi+N\alpha'+\alpha'+N\chi'+\chi')\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} \\
& \qquad -(2\alpha-\chi'-\varepsilon'+\pi)\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Big).
\end{aligned} \tag{2.3.136}$$

Za prethodne veličine generalisanog Rimanovog prostor važi sledeća teorema:

Teorema 2.3.35. *Veličine $\underset{2}{\mathcal{E}}, \underset{4}{\mathcal{E}}, \underset{5}{\mathcal{E}}$ date redom jednačinama (2.3.132), (2.3.134) i (2.3.135), su tenzori koji su invarijantni u odnosu na ET-geodezijska preslikavanja $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ i zovemo ih ET-projektivnim tenzorima. Veličine $\underset{1}{\mathcal{E}}, \underset{3}{\mathcal{E}},$ i $\mathcal{AE}$ date jednačinama (2.3.131), (2.3.133), (2.3.136), redom, jesu invarijantni objekti ovih preslikavanja, ali nisu tenzori, zovemo ih ET-projektivnim parametrima.* ■

Prethodne veličine koje smo dobili u $\mathbb{GR}_N$, $\underset{1}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}, \ldots, \underset{5}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}, \mathcal{AE}^i_{jmn}$ su uopštenja Vejlovog tenzora

$$W^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}R_{jn]}. \tag{2.3.137}$$

Glava 3

Konformna preslikavanja

3.1 Konformna preslikavanja Rimanovih prostora

Veoma značajna klasa preslikavanja Rimanovih prostora su *konformna preslikavanja.* Konformna preslikavanja i uopštenja, razmatrana su u [1, 67, 69, 78, 79, 89, 97, 114]. Ona se karakterišu vezom medju metričkim tenzorima dva Rimanova prostora $\overline{\mathbb{R}}_N$ i $\mathbb{R}_N$, u zajedničkom sistemu koordinata

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}, \tag{3.1.1}$$

gde je ψ funkcija tačke $(x^1, \dots, x^N)$.

Usled konformnog preslikavanja dva Rimanova prostora očuvava se ugao izmedju dve krive. Ako je $\psi = const$, onda se takvo preslikavanje zove *homotetija.* Ako je $\psi = 0$, onda je to *izometrija.* Geodezijske linije prostora $\mathbb{R}_N$ se pri konformnom preslikavanju ne preslikavaju na geodezijske linije prostora $\mathbb{R}_N$. K. Yano [109] je našao uslov pod kojim se pri konformnom preslikavanju Rimanovih prostora geodezijske linije preslikavaju u geodezijske linije.

U slučaju konformnog preslikavanja $f : \mathbb{R}_N \to \overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ Rimanovih prostora $\mathbb{R}_N$ i $\overline{\mathbb{R}}_N$, (vidi [89]), imamo invarijantan geometrijski objekat

$$C^i{}_{jmn} = R^i_{jmn} + \delta^i_m P_{jn} - \delta^i_n P_{jm} + P^i_m g_{jn} - P^i_n g_{mj} \tag{3.1.2}$$

gde je

$$P_{jm} \equiv \frac{1}{N-2}(R_{jm} - \frac{1}{2(N-1)} R g_{jm}), \tag{3.1.3}$$

R^i_{jmn} Riman-Kristofelov tenzor krivine prostora $\mathbb{R}_N$, R_{jm} Ričijev tenzor i R skalarna krivina.

Geometrijski objekat $C^i{}_{jmn}$ zove se *tenzor konformne krivine.*

3.2 Konformna preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora

U prethodnom delu su dati neki osnovni pojmovi za konformno preslikavanje dva Rimanova prostora. U ovom delu posmatramo konformno preslikavanje za opštije prostore. Neka su data dva generalisana Rimanova prostora $\mathbb{G}\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$.

Definicija 3.2.1. (Stanković, M.S., (2001), [97]) *Za preslikavanje* $f : \mathbb{GR_N} \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_\mathbb{N}$ *kažemo da je* **konformno** *ako osnovni metrički tenzori* g_{ij} *i* $\overline{g}_{ij}$ *ovih prostora zadovoljavaju relaciju*

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\psi}\, g_{ij}, \tag{3.2.1}$$

gde je ψ *funkcija od* $x = (x^1, \cdots, x^N)$, *a prostore posmatramo u zajedničkom po preslikavanju sistemu lokalnih koordinata* x^i.

Za Kristofelove simbole prve vrste prostora $\mathbb{GR_N}$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_\mathbb{N}$ zadovoljena je relacija

$$\overline{\Gamma}_{i.jk} = e^{2\psi}(\Gamma_{i.jk} + g_{ji}\psi_{,k} - g_{jk}\psi_{,i} + g_{ik}\psi_{,j}) \tag{3.2.2}$$

a za Kristofelove simbole druge vrste

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + g^{\underline{ip}}(g_{jp}\psi_{,k} - g_{jk}\psi_{,p} + g_{pk}\psi_{,j}). \tag{3.2.3}$$

Označimo $\psi_k = \psi_{,k} = \partial\psi/\partial x^k$ i $\psi^i = g^{\underline{ip}}\psi_p$. Iz (3.2.3) dobijamo vezu

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + g^{\underline{ip}}(g_{\underline{jp}}\psi_k - g_{\underline{jk}}\psi_p + g_{\underline{pk}}\psi_j) + g^{\underline{ip}}(g_{\underset{\vee}{jp}}\psi_k - g_{\underset{\vee}{jk}}\psi_p + g_{\underset{\vee}{pk}}\psi_j), \tag{3.2.4}$$

tj.

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\psi_k + \delta^i_k\psi_j - \psi^i g_{\underline{jk}} + \xi^i_{jk}, \quad (\xi^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{jk}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}) \tag{3.2.5}$$

gde je

$$\xi^i_{jk} = g^{\underline{ip}}(g_{\underset{\vee}{jp}}\psi_k - g_{\underset{\vee}{jk}}\psi_p + g_{\underset{\vee}{pk}}\psi_j) = -\xi^i_{kj} \tag{3.2.6}$$

a $\underset{\vee}{ij}$ označava antisimetrizaciju sa deljenjem sa 2.

Ako u jednačini (3.2.5) izvršimo kontrakciju indeksa i i k, iskoristimo da važi $\Gamma^p_{\underset{\vee}{ip}} = 0$, imamo

$$\psi_j = \frac{1}{N}(\overline{\Gamma}^p_{\underline{jp}} - \Gamma^p_{\underline{jp}}). \tag{3.2.7}$$

Kako u $\mathbb{GR}_N$ važi $\Gamma^p_{\underline{jp}} = \frac{\partial(\ln\sqrt{g})}{\partial x^i}$, gde je $g = \det||g_{ij}||$ (vidi [50]), pa samim tim i u $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ važi $\overline{\Gamma}^p_{\underline{jp}} = \frac{\partial(\ln\sqrt{\overline{g}})}{\partial x^i}$, gde je $\overline{g} = \det||\overline{g}_{ij}||$, konačno je

$$\psi_j = \frac{1}{2N}\Big(\frac{\partial(\ln\overline{g})}{\partial x^j} - \frac{\partial(\ln g)}{\partial x^j}\Big). \tag{3.2.8}$$

U odgovarajućim tačkama $M(x)$ i $\overline{M}(x)$ pri konformnom preslikavanju možemo staviti

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + P^i_{jk}, \tag{3.2.9}$$

gde je P^i_{jk} *tenzor deformacije konformnog preslikavanja* $f : \mathbb{GR_N} \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_\mathbb{N}$.

3.3 Ekvitorziono (ET) konformno preslikavanje

U slučaju konformnog preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora u opštem slučaju se ne može naći generalizacija za tenzor konformne krivine. Iz tog razloga definišemo specijalna konformna preslikavanja.

Definicija 3.3.1. (Stanković, M.S., (2001), [97]) *Preslikavanje* $f : \mathbb{GR}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ *je* **ekvitorziono (ET) konformno preslikavanje** *ako su tenzori torzije prostora* $\mathbb{GR}_{\mathbb{N}}$ *i* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ *jednaki u zajedničkom po preslikavanju* f *koordinatnom sistemu. Tada iz (3.2.5) i (3.2.9) imamo*

$$\xi^i_{jk} = 0. \tag{3.3.10}$$

3.3.1 Invarijantni geometrijski objekti ET-konformnog preslikavanja prostora $\mathbb{GR}_N$

U radu [M2], polazeći od 5 linearno nezavisnih tenzora $\underset{1}{R}, \underset{2}{R}, \underset{3}{R}, \underset{4}{R}, \underset{5}{R} \equiv \underset{2}{\widetilde{R}}$, datih jednačinama (1.6.6, 1.6.7, 1.6.8, 1.6.11) i (1.6.13) dobijeno je 5 invarijantnih geometrijskih objekata ET-konformnog preslikavanja. Svi dobijeni objekti su tenzori i nazvani su redom *ET-tenzor konformne krivine prve, druge, ..., pete vrste.* Ovde ćemo naći invarijantni geometrijski objekat ET-konformanog preslikavanja za opšti tenzor (2.3.64) i opšti pseudotenzor (2.3.85).

Veza za proizvoljan tenzor krivine $\overline{K}$ i K prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ i $\mathbb{GR}_{\mathbb{N}}$ redom je, kao što znamo,

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} + P^i_{\underline{jm};n} - P^i_{\underline{jn};m} + P^p_{\underline{jm}}P^i_{\underline{pn}} - P^p_{\underline{jn}}P^i_{\underline{pm}} \\ & + \alpha(P^i_{\underline{pn}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - P^p_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} - P^p_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}}) + \alpha'(P^i_{\underline{pm}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} - P^p_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - P^p_{\underline{nm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}}),\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

gde K može biti bilo koji od 12 navedenih tenzora (2.3.61), ili neki novi tenzor krivine koji se može dobiti linearnom kombinacijom pomenutih. Ako iskoristimo da je (vidi [46, 89])

$$\psi_{mn} - \psi_{nm} = 0 \tag{3.3.12}$$

zamenom (3.2.5) u jednačinu (3.3.11) dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} + \delta^i_m\psi_{jn} - \delta^i_n\psi_{jm} - g_{\underline{jm}}(\psi^i\psi_n - \psi_{;n}) + g_{\underline{jn}}(\psi^i\psi_m - \psi_{;m}) - \delta^i_n\psi^p\psi_p g_{\underline{jm}} + \delta^i_m\psi^p\psi_p g_{\underline{jn}} \\ & - (\alpha+\alpha')\psi_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\psi_p\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha')\psi_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} - (\alpha'+\alpha)\psi_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \alpha'\psi_p\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} \\ & - (\alpha-\alpha')\psi^i g_{\underline{pn}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\psi^p g_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} + (\alpha+\alpha')\psi^p g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}} + \alpha'\psi^p g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}.\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Uvedimo sledeće oznake

$$\psi^i_j = g^{\underline{ip}}\psi_{pj}, \quad \triangle\psi = g^{\underline{pq}}\psi_p\psi_q = \psi_p\psi^p. \tag{3.3.14}$$

U $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ su tenzori $g_{\underline{ij}}$ i $g^{\underline{ij}}$ kovarijantno konstantni u odnosu na sve četiri vrste kovarijantnog diferenciranja (Teorema 1.7.2, Teorema 1.7.3), tj. važe jednačine

$$g_{\underline{jp}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{mi}} + g_{\underline{ip}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{mj}} = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{j.\underset{\vee}{mi}} = -\Gamma_{i.\underset{\vee}{mj}} \tag{3.3.15}$$

$$g^{\underline{jp}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{mp}} + g^{\underline{ip}}\Gamma^j_{\underset{\vee}{mp}} = 0. \tag{3.3.16}$$

Ako iskoristimo prethodne jednačine, imamo

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} + \delta^i_m\psi_{jn} - \delta^i_n\psi_{jm} - g_{\underline{jm}}\psi^i_n + g_{\underline{jn}}\psi^i_m + (\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\triangle\psi \\ & -(\alpha+\alpha')\psi_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\psi_p\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha')\psi_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} - (\alpha'+\alpha)\psi_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \alpha'\psi_p\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} \\ & -(\alpha-\alpha')\psi^i g_{\underline{pn}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\psi^p g_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} + (\alpha+\alpha')\psi^p g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}} + \alpha'\psi^p g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}\,.\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Kontrakcijom indeksa i i n u (3.3.17) dobijamo

$$\overline{K}_{jm} = K_{jm} + \psi_{jm} - N\psi_{jm} - g_{\underline{jm}}\psi^p_p + \psi_{jm} + (g_{\underline{jm}} - Ng_{\underline{jm}})\triangle\psi + (N-2)\alpha\psi_p\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + 2\alpha\psi^p\Gamma_{\underset{\vee}{m.jp}}\,. \tag{3.3.18}$$

Označimo

$$\psi^p_p = \psi_{pq}g^{\underline{pq}} = (\psi_{p;q} - \psi_p\psi_q)g^{\underline{pq}} = \nabla\psi - \triangle\psi, \tag{3.3.19}$$

pa jednačina (3.3.18) postaje

$$\overline{K}_{jm} = K_{jm} - (N-2)\psi_{jm} - (\nabla\psi + (N-2)\triangle\psi)g_{\underline{jm}} + (N-2)\alpha\psi_p\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + 2\alpha\psi^p\Gamma_{\underset{\vee}{m.jp}}\,. \tag{3.3.20}$$

Ako poslednju jednačinu pomnožimo sa $g^{\underline{jm}}$ i kontrakcijom po indeksima j i m imamo

$$e^{2\psi}\overline{K} = K - 2(N-1)\nabla\psi - (N-1)(N-2)\triangle\psi, \tag{3.3.21}$$

gde smo iskoristili da je

$$\overline{g}^{\underline{ij}} = e^{-2\psi}g^{\underline{ij}}, \quad \overline{K} = \overline{g}^{\underline{pq}}\overline{K}_{pq}, \quad K = g^{\underline{pq}}K_{pq}. \tag{3.3.22}$$

Veličine $\overline{K}$ i K predstavljaju redom skalarne krivine prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ i $\mathbb{G}\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. Iz jednačine (3.3.21) izrazimo $\nabla\psi$:

$$\nabla\psi = \frac{1}{2(N-1)}(K - e^{2\psi}\overline{K}) - \frac{(N-2)}{2}\triangle\psi. \tag{3.3.23}$$

Zamenom (3.3.23) u (3.3.20) imamo

$$\begin{aligned}(N-2)\psi_{jm} = {} & K_{jm} - \overline{K}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}(K - e^{2\psi}\overline{K})g_{\underline{jm}} - \frac{(N-2)}{2}\triangle\psi g_{\underline{jm}} \\ & + (N-2)\alpha\psi_p\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + 2\alpha\psi^p\Gamma_{\underset{\vee}{m.jp}}.\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Označimo u prostoru $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$

$$\mathcal{P}_{jm} = \frac{1}{N-2}(K_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}Kg_{\underline{jm}}) \tag{3.3.25}$$

i analgno u prostoru $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$. i onda jednačina (3.3.24) postaje

$$\psi_{jm} = \mathcal{P}_{jm} - \overline{\mathcal{P}}_{jm} - \frac{1}{2}\triangle\psi g_{\underline{jm}} + \alpha\psi_p\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + \frac{2\alpha}{N-2}\psi^p\Gamma_{\underset{\vee}{m.jp}}. \tag{3.3.26}$$

Kako smo veličine P_{jm}, ψ_j i ψ_{jm} izrazili jednačinama (3.3.25, 3.2.7) i (3.3.26), redom, zamenimo ove formule u (3.3.17), pa dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn}=&K^i_{jmn}+\delta^i_m(\mathcal{P}_{jn}-\overline{\mathcal{P}}_{jn})-\delta^i_n(\mathcal{P}_{jm}-\overline{\mathcal{P}}_{jm})-g_{\underline{jm}}\mathcal{P}^i_n+\overline{g}_{\underline{jm}}\overline{\mathcal{P}}^i_n+g_{\underline{jn}}\mathcal{P}^i_m-\overline{g}_{\underline{jn}}\overline{P}^i_m\\&+\frac{2\alpha}{N-2}\delta^i_m\psi^p\Gamma_{\underset{\vee}{n.jp}}-\frac{2\alpha}{N-2}\delta^i_n\psi^p\Gamma_{\underset{\vee}{m.jp}}-\frac{2\alpha}{N-2}g_{\underline{jm}}\psi^p\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}+\frac{2\alpha}{N-2}g_{\underline{jn}}\psi^p\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}\\&+(\alpha+\alpha')\delta^i_m\psi_p\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}+(\alpha+\alpha')\psi^p g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}-(\alpha+\alpha')\psi_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}}-(\alpha-\alpha')\psi_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\\&-(\alpha'+\alpha)\psi_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}}-(\alpha-\alpha')\psi^i g_{\underline{pn}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}+(\alpha+\alpha')\psi^p g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}}\,.\end{aligned}\tag{3.3.27}$$

Potrebno je razdvojiti elemente prostora $\mathbb{GR}_N$ sa jedne strane jednakosti i iste te elemente prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ dobiti na drugoj strni jednakosti. Upravo ovo je i razlog zbog kojeg nije moguće naći invarijantne geometrijske objekte konformnog preslikavanja dva generalisana Rimanova prostora u opštem slučaju. Iz (3.2.7, 3.3.10) dobijamo

$$\Gamma_{\underset{\vee}{j.nm}}\psi^i=\frac{1}{2N}\overline{\Gamma}_{\underset{\vee}{j.nm}}\overline{g}^{\underline{ip}}\frac{\partial}{\partial x^p}\ln\,\overline{g}-\frac{1}{2N}\Gamma_{\underset{\vee}{j.nm}}g^{\underline{ip}}\frac{\partial}{\partial x^p}\ln\,g\tag{3.3.28}$$

i

$$\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}g_{\underline{mj}}\psi^p=\frac{1}{2N}\overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{pn}}\overline{g}_{\underline{mj}}\overline{g}^{\underline{qp}}\frac{\partial}{\partial x^q}\ln\,\overline{g}-\frac{1}{2N}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}g_{\underline{mj}}g^{\underline{qp}}\frac{\partial}{\partial x^q}\ln\,g.\tag{3.3.29}$$

Uzimajući u obzir (3.2.7, 3.3.28, 3.3.29), relaciju (3.3.27) možemo predstaviti u obliku

$$\overline{\mathcal{C}}^i_{jmn}=\mathcal{C}^i_{jmn},\tag{3.3.30}$$

gde je

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^i_{jmn}=&K^i_{jmn}+\delta^i_m\mathcal{P}_{jn}-\delta^i_n\mathcal{P}_{jm}-g_{\underline{jm}}\mathcal{P}^i_n+g_{\underline{jn}}\mathcal{P}^i_m\\&+\frac{1}{N(N-2)}\Big(-\alpha\delta^i_m\Gamma_{\underset{\vee}{n.jp}}+\alpha\delta^i_n\Gamma_{\underset{\vee}{m.jp}}+\alpha g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}-\alpha g_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}\Big)g^{\underline{pq}}\frac{\partial}{\partial x^q}\ln\,g\\&\frac{1}{2N}\Big(-(\alpha+\alpha')\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}-(\alpha+\alpha')g^{\underline{pq}}g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{qn}}+(\alpha+\alpha')\delta^p_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}}+(\alpha-\alpha')\delta^p_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\\&+(\alpha'+\alpha)\delta^p_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}}+(\alpha-\alpha')g^{\underline{ip}}g_{\underline{qn}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{jm}}-(\alpha+\alpha')g^{\underline{pq}}g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jq}}\Big)\frac{\partial}{\partial x^p}\ln\,g.\end{aligned}\tag{3.3.31}$$

Sada možemo formulisati dokazanu teoremu:

Teorema 3.3.1. *Invarijantni geometrijski objekat ET-konformnog preslikavanja je tenzor* $\mathcal{C}^i_{jmn}$ *zadat jednačinom* (3.3.31). ■

Kao što i možemo da vidimo svi invarijantni geometrijski objekti ET-konformnog preslikavanja, koji se dobijaju na ovaj način su tenzori.

1. Za tenzor $\underset{1}{K}$ imamo da je $\alpha = 1,\ \alpha' = -1,\ \beta = 1,\ \beta' = -1,\ \gamma = 0$, zamenom u jednačinu (3.3.31) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\mathcal{C}}{}^{i}_{jmn} =& \underset{1}{K}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\underset{1}{\mathcal{P}}{}_{jn} - \delta^{i}_{n}\underset{1}{\mathcal{P}}{}_{jm} - g_{\underline{jm}}\underset{1}{\mathcal{P}}{}^{i}_{n} + g_{\underline{jn}}\underset{1}{\mathcal{P}}{}^{i}_{m} + \frac{1}{N}\Big(\delta^{p}_{j}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{nm}} + g^{\underline{ip}}g_{\underline{qn}}\Gamma^{q}_{\underset{\vee}{jm}}\Big)\frac{\partial}{\partial x^{p}}\ln g\\ &+ \frac{1}{N(N-2)}\Big(-\delta^{i}_{m}\Gamma_{n.\underset{\vee}{jp}} + \delta^{i}_{n}\Gamma_{m.\underset{\vee}{jp}} + g_{\underline{jm}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - g_{\underline{jn}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pm}}\Big)g^{\underline{pq}}\frac{\partial}{\partial x^{q}}\ln g,\end{aligned} \tag{3.3.32}$$

gde je

$$\underset{1}{\mathcal{P}}{}_{jm} = \frac{1}{N-2}(\underset{1}{K}{}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}\underset{1}{K}g_{\underline{jm}}). \tag{3.3.33}$$

2. Za tenzor $\underset{2}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \gamma = 0,\ \beta = -1,\ \beta' = 1$, zamenom u jednačinu (3.3.31) dobijamo

$$\underset{2}{\mathcal{C}}{}^{i}_{jmn} = \underset{2}{K}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\underset{2}{\mathcal{P}}{}_{jn} - \delta^{i}_{n}\underset{2}{\mathcal{P}}{}_{jm} - g_{\underline{jm}}\underset{2}{\mathcal{P}}{}^{i}_{n} + g_{\underline{jn}}\underset{2}{\mathcal{P}}{}^{i}_{m}, \tag{3.3.34}$$

gde je

$$\underset{2}{\mathcal{P}}{}_{jm} = \frac{1}{N-2}(\underset{2}{K}{}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}\underset{2}{K}g_{\underline{jm}}). \tag{3.3.35}$$

3. Za tenzor $\underset{3}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \beta' = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = -2$, zamenom u jednačinu (3.3.31) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{3}{\mathcal{C}}{}^{i}_{jmn} =& \underset{3}{K}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\underset{3}{\mathcal{P}}{}_{jn} - \delta^{i}_{n}\underset{3}{\mathcal{P}}{}_{jm} - g_{\underline{jm}}\underset{3}{\mathcal{P}}{}^{i}_{n} + g_{\underline{jn}}\underset{3}{\mathcal{P}}{}^{i}_{m}\\ &+ \frac{1}{N(N-2)}\Big(-\delta^{i}_{m}\Gamma_{n.\underset{\vee}{jp}} + \delta^{i}_{n}\Gamma_{m.\underset{\vee}{jp}} + g_{\underline{jm}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - g_{\underline{jn}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pm}}\Big)g^{\underline{pq}}\frac{\partial}{\partial x^{q}}\ln g\\ &\frac{1}{N}\Big(-\delta^{i}_{m}\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jn}} - g^{\underline{pq}}g_{\underline{jm}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{qn}} + \delta^{p}_{n}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jm}} + \delta^{p}_{m}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jn}} - g^{\underline{pq}}g_{\underline{mn}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jq}}\Big)\frac{\partial}{\partial x^{p}}\ln g,\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

gde je

$$\underset{3}{\mathcal{P}}{}_{jm} = \frac{1}{N-2}(\underset{3}{K}{}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}\underset{3}{K}g_{\underline{jm}}). \tag{3.3.37}$$

4. Za tenzor $\underset{4}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \gamma = 0,\ \beta = \beta' = -1$, zamenom u jednačinu (3.3.31) dobijamo

$$\underset{4}{\mathcal{C}}{}^{i}_{jmn} = \underset{4}{K}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\underset{4}{\mathcal{P}}{}_{jn} - \delta^{i}_{n}\underset{4}{\mathcal{P}}{}_{jm} - g_{\underline{jm}}\underset{4}{\mathcal{P}}{}^{i}_{n} + g_{\underline{jn}}\underset{4}{\mathcal{P}}{}^{i}_{m}, \tag{3.3.38}$$

gde je

$$\underset{4}{\mathcal{P}}{}_{jm} = \frac{1}{N-2}(\underset{4}{K}{}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}\underset{4}{K}g_{\underline{jm}}). \tag{3.3.39}$$

5. Za tenzor $\underset{5}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0,\ \gamma = -\frac{1}{2}$, zamenom u jednačinu (3.3.31) dobijamo

$$\underset{5}{\mathcal{C}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{K}{}^i_{jmn} + \delta^i_m \underset{5}{\mathcal{P}}_{jn} - \delta^i_n \underset{5}{\mathcal{P}}_{jm} - g_{\underline{jm}} \underset{5}{\mathcal{P}}{}^i_n + g_{\underline{jn}} \underset{5}{\mathcal{P}}{}^i_m, \tag{3.3.40}$$

gde je

$$\underset{5}{\mathcal{P}}_{jm} = \frac{1}{N-2}\Big(\underset{5}{K}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)} \underset{5}{K} g_{\underline{jm}}\Big). \tag{3.3.41}$$

Polazeći od jednačina (3.2.5, 3.3.10), za ET-konformno preslikavanje prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ i $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$ veza izmedju pseudotenzora $\overline{A}$ i A biće

$$\begin{aligned}
\overline{A}{}^i_{jmn} = {} & A^i_{jmn} + \delta^i_m \psi_{jn} - \delta^i_n \psi_{jm} - g_{\underline{jm}} \psi^i_n + g_{\underline{jn}} \psi^i_m + (\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) \triangle\psi \\
& -(\alpha+\alpha'-\varepsilon'-\chi+\pi)\psi_n \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + (\alpha+\chi)\psi_p \delta^i_n \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\psi_j \Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} \\
& -(\alpha'+\alpha-\varepsilon-\chi'+\pi)\psi_m \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + (\alpha'+\chi')\psi_p \delta^i_m \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} - (\alpha-\alpha'+\chi-\chi')\psi^i g_{\underline{pn}} \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} \\
& + (\alpha-\varepsilon')\psi^p g_{\underline{jn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} + (\alpha+\alpha'+\pi)\psi^p g_{\underline{mn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}} + (\alpha'-\varepsilon)\psi^p g_{\underline{jm}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}.
\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

Kontrakcijom indeksa i i n u (3.3.42) dobijamo

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{jm} = {} & A_{jm} + \psi_{jm} - N\psi_{jm} - g_{\underline{jm}} \psi^p_p + g_{\underline{jp}} \psi^p_m + (g_{\underline{jm}} - N g_{\underline{jm}}) \triangle\psi \\
& -(\alpha+\alpha'-\varepsilon'-\chi+\pi)\psi_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + N(\alpha+\chi)\psi_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} \\
& +(\alpha'+\chi')\psi_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha'+\chi-\chi')\psi^p g_{\underline{qp}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{jm}} \\
& + (\alpha-\varepsilon')\psi^q g_{\underline{jp}} \Gamma^p_{\underset{\vee}{qm}} + (\alpha+\alpha'+\pi)\psi^q g_{\underline{mp}} \Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}.
\end{aligned} \tag{3.3.43}$$

tj.

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{jm} = {} & A_{jm} - (N-2)\psi_{jm} - (\nabla\psi + (N-2)\triangle\psi) g_{\underline{jm}} \\
& + (N-2)(\alpha+\chi)\psi_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + 2(\alpha+\chi'+\pi)\psi^p \Gamma_{m.\underset{\vee}{jp}}.
\end{aligned} \tag{3.3.44}$$

Ako poslednju jednačinu pomnožimo sa $g^{\underline{jm}}$ i kontrakcijom po indeksima j i m imamo

$$e^{2\psi}\overline{A} = A - 2(N-1)\nabla\psi - (N-1)(N-2)\triangle\psi, \tag{3.3.45}$$

gde smo iskoristili da je

$$\overline{A} = \overline{g}^{\underline{pq}} \overline{A}_{pq}, \quad A = g^{\underline{pq}} A_{pq}. \tag{3.3.46}$$

Veličine $\overline{A}$ i A predstavljaju redom *skalarne pseudokrivine* prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ i $\mathbb{G}\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. Iz jednačine (3.3.45) izrazimo $\nabla\psi$:

$$\nabla\psi = \frac{1}{2(N-1)}(A - e^{2\psi}\overline{A}) - \frac{(N-2)}{2}\triangle\psi. \tag{3.3.47}$$

Zamenom (3.3.47) u (3.3.44) imamo

$$\begin{aligned}(N-2)\psi_{jm} = A_{jm} - \overline{A}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}(A - e^{2\psi}\overline{A})g_{\underline{jm}} - \frac{(N-2)}{2}\triangle\psi g_{\underline{jm}} \\ + (N-2)(\alpha+\chi)\psi_p\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + 2(\alpha+\chi'+\pi)\psi^p\Gamma_{m.\underset{\vee}{jp}}.\end{aligned} \tag{3.3.48}$$

Označimo u prostoru $\mathbb{GR}_N$ veličinu

$$\mathcal{AP}_{jm} = \frac{1}{N-2}(A_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}Ag_{\underline{jm}}) \tag{3.3.49}$$

i analogno u prostoru $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$. Onda jednačina (3.3.48) postaje

$$\psi_{jm} = \mathcal{AP}_{jm} - \overline{\mathcal{AP}}_{jm} - \frac{1}{2}\triangle\psi g_{\underline{jm}} + (\alpha+\chi)\psi_p\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + \frac{2(\alpha+\chi'+\pi)}{N-2}\psi^p\Gamma_{m.\underset{\vee}{jp}}. \tag{3.3.50}$$

Veličine $\mathcal{AP}_{jm}$, ψ_j i ψ_{jm} su odredjene jednačinama (3.3.49), (3.2.7) i (3.3.50), redom, pa kada ih zamenimo u jednačinu (3.3.42), dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{A}^i_{jmn} =& A^i_{jmn} + \delta^i_m\mathcal{AP}_{jn} + \delta^i_m(\mathcal{AP}_{jn} - \overline{\mathcal{AP}}_{jn}) - \delta^i_n(\mathcal{AP}_{jm} - \overline{\mathcal{AP}}_{jm}) - g_{\underline{jm}}\mathcal{AP}^i_n + \overline{g}_{\underline{jm}}\overline{\mathcal{AP}}^i_n + g_{\underline{jn}}\mathcal{AP}^i_m - \overline{g}_{\underline{jn}}\overline{AP}^i_m \\ &+ \frac{2(\alpha+\chi'+\pi)}{N-2}\delta^i_m\psi^p\Gamma_{n.\underset{\vee}{jp}} - \frac{2(\alpha+\chi'+\pi)}{N-2}\delta^i_n\psi^p\Gamma_{m.\underset{\vee}{jp}} - \frac{2(\alpha+\chi'+\pi)}{N-2}g_{\underline{jm}}\psi^p\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} + \frac{2(\alpha+\chi'+\pi)}{N-2}g_{\underline{jn}}\psi^p\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} \\ &+ (\alpha+\chi+\alpha'+\chi')\delta^i_m\psi_p\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} - (\alpha+\chi+\alpha'-\varepsilon)g_{\underline{jm}}\psi^p\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} + (\chi-\varepsilon')g_{\underline{jn}}g^{\underline{pi}}\psi_q\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}} - (\alpha+\alpha'-\varepsilon'-\chi+\pi)\psi_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} \\ &- (\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\psi_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} - (\alpha'+\alpha-\varepsilon-\chi'+\pi)\psi_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} - (\alpha-\alpha'+\chi-\chi')\psi^i g_{\underline{pn}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + (\alpha+\alpha'+\pi)\psi^p g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}}.\end{aligned} \tag{3.3.51}$$

Sada izvršimo razdvajanje elemenata prostora $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$, na sledeći način:

$$\overline{\mathcal{AC}}^i_{imn} = \mathcal{AC}^i_{jmn}, \tag{3.3.52}$$

gde je

$$\begin{aligned}\mathcal{AC}^i_{jmn} =& A^i_{jmn} + \delta^i_m\mathcal{AP}_{jn} + \delta^i_m\mathcal{AP}_{jn} - \delta^i_n\mathcal{AP}_{jm} - g_{\underline{jm}}\mathcal{AP}^i_n + g_{\underline{jn}}\mathcal{AP}^i_m \\ &+ \frac{1}{N(N-2)}\Big(-(\alpha+\chi'+\pi)\delta^i_m\Gamma_{n.\underset{\vee}{jp}} + (\alpha+\chi'+\pi)\delta^i_n\Gamma_{m.\underset{\vee}{jp}} + (\alpha+\chi'+\pi)g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - (\alpha+\chi'+\pi)g_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}\Big)g^{\underline{pq}}\frac{\partial}{\partial x^q}\ln g \\ &+ \frac{1}{2N}\Big(-(\alpha+\chi+\alpha'+\chi')\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} + (\alpha+\chi+\alpha'-\varepsilon)g_{\underline{jm}}g^{\underline{pq}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{qn}} - (\chi-\varepsilon')g_{\underline{jn}}g^{\underline{qi}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{qm}} + (\alpha+\alpha'-\varepsilon'-\chi+\pi)\delta^p_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} \\ &+ (\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\delta^p_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} + (\alpha'+\alpha-\varepsilon-\chi'+\pi)\delta^p_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + (\alpha-\alpha'+\chi-\chi')g^{\underline{pi}}g_{\underline{qn}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha+\alpha'+\pi)g^{\underline{pq}}g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jq}}\Big)\frac{\partial}{\partial x^p}\ln g.\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

Teorema 3.3.2. *Invarijantni geometrijski objekat ET-konformnog preslikavanja je ET-parametar* $\mathcal{AC}^i_{jmn}$ *dat jednačinom (3.3.53).* ■

Na kraju ovog odeljka, rezultate možemo sumirati dokazanom teoremom:

Teorema 3.3.3. *Veličine* $\underset{1}{\mathcal{C}}, \ldots, \underset{5}{\mathcal{C}}$ *date jednačinama (3.3.32, 3.3.34, 3.3.36, 3.3.38, 3.3.40), su tenzori koji su invarijantni u odnosu na ET-konformna preslikavanja* $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ *i zovemo ih ET-konformnim tenzorima. Veličina* $\mathcal{AC}$ *data jednačinom (3.3.53), jeste invarijantni objekat ovih preslikavanja, ali nije tenzor, i zovemo je ET-konformni parametar.* ■

3.3.2 Invarijantni geometrijski objekti ET-koncirkularnog preslikavanja prostora $\mathbb{GR}_N$

Godine 1940. K. Yano [109] je razmatrao konformna preslikavanja $\overline{g}_{ij} = \psi^2 g_{ij}$ dva Rimanova prostora. On je pokazao da su geodezijske linije invarijantne pri ovom preslikavanju ako i samo ako je zadovoljeno

$$\psi_{ij} = \psi_{;ij} - \psi_i \psi_j = \omega g_{ij}, \tag{3.3.54}$$

gde $(;)$ je kovarijantno diferenciranje u $\mathbb{R}_N$, g_{ij} simetrični metrički tenzor, ω skalarna invarianta i ψ gradijentni vektor. Konformno preslikavanje koje zadovoljava uslov (3.3.54) je nazvao *koncirkularno preslikavanje.* Kada je proučavao geodezijska preslikavanja simetričnih prostora N.S. Sinjukov [89] je uzeo uslov, u specijalnom slučaju $\zeta = e^{-\psi}$. Lako se pokazuje da se formula (3.3.54) transformiše na

$$\zeta_{i;j} = \rho g_{ij}, \tag{3.3.55}$$

gde je $\rho = -\omega e^{-\psi}$, $\zeta_{;i} = \zeta_i$. Vektorsko polje ζ_i, K. Yano [109] je nazvao *koncirkularnim* dok je N.S. Sinjukov to polje nazvao *ekvuidistantnim.* U slučaju da je jednačini (3.3.55) $\rho = const.$ [40, 89, 109], ζ se zove *konvergentno* polje, a u slučaju da je $\rho = B\zeta + C$, $(B, C = const.)$ naziva se *specijalno koncirkularno.*

U slučaju koncirkularnog preslikavanja dva Rimanova prostora $f : \mathbb{R}_N \to \overline{\mathbb{R}}_N$ (vidi [89]) imamo invarijantnu geometrijsku veličinu

$$\mathcal{Z}^i{}_{jmn} = R^i_{jmn} - \frac{R}{N(N-1)}(\delta^i_n g_{jm} - \delta^i_m g_{jn}), \tag{3.3.56}$$

gde je R^i_{jmn} Rimanov tenzor krivine, R_{jm} Ričijev tenzor i R skalarna krivina u prostoru $\mathbb{R}_N$.

Veličina $\mathcal{Z}^i{}_{jmn}$ se zove *koncirkularni tenzor krivine.*

Mi ćemo posmatrati konformno preslikavanje dva generalisana Rimanova prostora, za koje važi jednačina (3.3.54), gde $(;)$ je kovarijantno diferenciranje u odnosu na simetrični deo koneksije u $\mathbb{GR}_N$.

Definicija 3.3.2. ET-koncirkularno preslikavanje $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *je ET-konformno preslikavanje* $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$*, pri čemu važi uslov*

$$\psi_{ij} = \psi_{;ij} - \psi_i \psi_j = \omega g_{ij}, \tag{3.3.57}$$

gde je $(;)$ *kovarijantno diferenciranje u odnosu na koneksiju* $\Gamma^i_{\underline{jk}}$ *pridruženog prostora* $\mathbb{R}_N$*,* ψ_i *je odredjeno sa (3.2.8), a* ω *skalarna invarijanta.*

Sada ćemo naći neke invarijante objekte ET-koncirkularnog preslikavanja.

Krećemo od jednačine (3.3.17), koja važi u slučaju konformnog preslikavanja dva generalisana Rimanova prostora

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} + \delta^i_m \psi_{jn} - \delta^i_n \psi_{jm} - g_{\underline{jm}} \psi^i_n + g_{\underline{jn}} \psi^i_m + (\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) \triangle \psi \\ & -(\alpha+\alpha')\psi_n \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha \psi_p \delta^i_n \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha')\psi_j \Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} - (\alpha'+\alpha)\psi_m \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \alpha' \psi_p \delta^i_m \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} \\ & - (\alpha - \alpha')\psi^i g_{\underline{pn}} \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha \psi^p g_{\underline{jn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} + (\alpha + \alpha')\psi^p g_{\underline{mn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}} + \alpha' \psi^p g_{\underline{jm}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}.\end{aligned} \tag{3.3.58}$$

Ako u jednačini (3.3.58) zamenimo uslov (3.3.57), imamo

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} + \delta^i_m \omega g_{\underline{jn}} - \delta^i_n \omega g_{\underline{jm}} - g_{\underline{jm}} g^{\underline{ip}} \omega g_{\underline{pn}} + g_{\underline{jn}} g^{\underline{ip}} \omega g_{\underline{pm}} + (\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\triangle\psi \\ & -(\alpha+\alpha')\psi_n \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\psi_p \delta^i_n \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha')\psi_j \Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} - (\alpha'+\alpha)\psi_m \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \alpha'\psi_p \delta^i_m \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} \\ & -(\alpha-\alpha')\psi^i g_{\underline{pn}} \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\psi^p g_{\underline{jn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} + (\alpha+\alpha')\psi^p g_{\underline{mn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}} + \alpha'\psi^p g_{\underline{jm}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}},\end{aligned} \tag{3.3.59}$$

konačno

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} + 2\delta^i_m \omega g_{\underline{jn}} - 2\delta^i_n \omega g_{\underline{jm}} + (\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\triangle\psi \\ & -(\alpha+\alpha')\psi_n \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\psi_p \delta^i_n \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha')\psi_j \Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} - (\alpha'+\alpha)\psi_m \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \alpha'\psi_p \delta^i_m \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} \\ & -(\alpha-\alpha')\psi^i g_{\underline{pn}} \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\psi^p g_{\underline{jn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} + (\alpha+\alpha')\psi^p g_{\underline{mn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}} + \alpha'\psi^p g_{\underline{jm}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}.\end{aligned} \tag{3.3.60}$$

Kontrakcijom indeksa i i n u (3.3.60), dobijamo

$$\overline{K}_{jm} = K_{jm} - 2(N-1)\omega g_{\underline{jm}} - (N-1)\triangle\psi g_{\underline{jm}} + (N-2)\alpha\psi_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + 2\alpha\psi^p \Gamma_{m.\underset{\vee}{jp}}, \tag{3.3.61}$$

pa je

$$e^{2\psi}\overline{K} = K + 2N(1-N)\omega + N(1-N)\triangle\psi, \tag{3.3.62}$$

gde su redom $\overline{K} = \overline{g}^{\underline{pq}}\overline{K}_{pq}$ i $K = g^{\underline{pq}}K_{pq}$ skalarne krivine prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ i $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$. Iz (3.3.62), izrazimo ω:

$$\omega = \frac{1}{2N(1-N)}(e^{2\psi}\underset{1}{\overline{R}} - \underset{1}{R}) - \frac{1}{2}\triangle\psi. \tag{3.3.63}$$

Kako je

$$g^{\underline{pi}} g_{\underline{jn}} = \overline{g}^{\underline{pi}}\overline{g}_{\underline{jn}}, \tag{3.3.64}$$

koristeći jednačine (3.2.8, 3.3.28, 3.3.29), relaciju (3.3.60) možemo napisati u obliku

$$\overline{\mathcal{Z}}^i_{imn} = \mathcal{Z}^i_{imn}, \tag{3.3.65}$$

gde je

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^i_{imn} = {} & K^i_{jmn} - \frac{1}{N(N-1)}K(\delta^i_n g_{jm} - \delta^i_m g_{jn}) \\ & + \frac{1}{2N}\Big((\alpha+\alpha')\delta^p_n \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} - \alpha\delta^i_n \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + (\alpha-\alpha')\delta^p_j \Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} + (\alpha'+\alpha)\delta^p_m \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} - \alpha'\delta^i_m \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} \\ & + (\alpha-\alpha')g^{\underline{ip}} g_{\underline{qn}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{jm}} - \alpha g^{\underline{pq}} g_{\underline{jn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{qm}} - (\alpha+\alpha')g^{\underline{pq}} g_{\underline{mn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{jq}} - \alpha' g^{\underline{pq}} g_{\underline{jm}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{qn}}\Big)\frac{\partial}{\partial x^p}\ln g.\end{aligned} \tag{3.3.66}$$

Veličina $\mathcal{Z}^i_{imn}$ je veličina prostora $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$ i analogno dobijamo za $\overline{\mathcal{Z}}^i_{imn}$ u prostoru $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$. Na taj način smo pokazali da je tenzor $\mathcal{Z}^i_{imn}$ invarijantan geometrijski objekat ET-koncirkularnog preslikavanja dva generalisana Rimanova prostora i zovemo ga *ET-koncirkularni tenzor krivine.* Sada možemo formulisati dokazanu teoremu:

Teorema 3.3.4. *ET-koncirkularni tenzor krivine* $\mathcal{Z}^i_{imn}$ *zadat jednačinom (3.3.66) je invarijantan geometrijski objekat ET-koncirkularnog preslikavanja* $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$*, definisanog pomoću (3.2.1), (3.2.5), (3.3.10), (3.3.57).* ■

1. Za tenzor $\underset{1}{K}$ imamo da je $\alpha = 1,\ \alpha' = -1,\ \beta = 1,\ \beta' = -1,\ \gamma = 0$, zamenom u jednačinu (3.3.66) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\mathcal{Z}}^i_{imn} &= \underset{1}{K}^i_{jmn} - \frac{1}{N(N-1)}\underset{1}{K}(\delta^i_n g_{jm} - \delta^i_m g_{jn})\\ &+\frac{1}{2N}\Big(-\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + 2\delta^p_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} + \delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} + 2g^{\underline{ip}}g_{\underline{qn}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{jm}} - g^{\underline{pq}}g_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{qm}} + g^{\underline{pq}}g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{qn}}\Big)\frac{\partial}{\partial x^p}\ln g.\end{aligned} \tag{3.3.67}$$

2. Za tenzor $\underset{2}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \gamma = 0,\ \beta = -1,\ \beta' = 1$, zamenom u jednačinu (3.3.66) dobijamo

$$\underset{2}{\mathcal{Z}}^i_{imn} = \underset{2}{K}^i_{jmn} - \frac{1}{N(N-1)}\underset{2}{K}(\delta^i_n g_{jm} - \delta^i_m g_{jn}). \tag{3.3.68}$$

3. Za tenzor $\underset{3}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \beta' = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = -2$, zamenom u jednačinu (3.3.66) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{3}{\mathcal{Z}}^i_{imn} &= \underset{3}{K}^i_{jmn} - \frac{1}{N(N-1)}\underset{3}{K}(\delta^i_n g_{jm} - \delta^i_m g_{jn})\\ &+\frac{1}{2N}\Big(2\delta^p_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} - \delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + 2\delta^p_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} - \delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} - g^{\underline{pq}}g_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{qm}} - 2g^{\underline{pq}}g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jq}} - g^{\underline{pq}}g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{qn}}\Big)\frac{\partial}{\partial x^p}\ln g.\end{aligned} \tag{3.3.69}$$

4. Za tenzor $\underset{4}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \gamma = 0,\ \beta = \beta' = -1$, zamenom u jednačinu (3.3.66) dobijamo

$$\underset{4}{\mathcal{Z}}^i_{imn} = \underset{4}{K}^i_{jmn} - \frac{1}{N(N-1)}\underset{4}{K}(\delta^i_n g_{jm} - \delta^i_m g_{jn}). \tag{3.3.70}$$

5. Za tenzor $\underset{5}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0,\ \gamma = -\frac{1}{2}$, zamenom u jednačinu (3.3.66) dobijamo

$$\underset{5}{\mathcal{Z}}^i_{imn} = \underset{5}{K}^i_{jmn} - \frac{1}{N(N-1)}\underset{5}{K}(\delta^i_n g_{jm} - \delta^i_m g_{jn}). \tag{3.3.71}$$

Ako sada krenemo od veze izmedju pseudotenzora (3.3.42), uzimajući jednačinu za koncirkularno preslikavanje (3.3.57), imamo

$$\begin{aligned}\overline{A}^i_{jmn} = A^i_{jmn} &+ \delta^i_m\psi_{jn} + 2\delta^i_m\omega g_{\underline{jn}} - 2\delta^i_n\omega g_{\underline{jm}} + (\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\triangle\psi\\ &-(\alpha+\alpha'-\varepsilon'-\chi+\pi)\psi_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + (\alpha+\chi)\psi_p\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\psi_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\\ &-(\alpha'+\alpha-\varepsilon-\chi'+\pi)\psi_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + (\alpha'+\chi')\psi_p\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} - (\alpha-\alpha'+\chi-\chi')\psi^i g_{\underline{pn}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\\ &+(\alpha-\varepsilon')\psi^p g_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} + (\alpha+\alpha'+\pi)\psi^p g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}} + (\alpha'-\varepsilon)\psi^p g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}.\end{aligned} \tag{3.3.72}$$

Istim postupkom kao i kada se krene od opšteg tenzora K^i_{jmn}, dobijamo da je veličina

$$\begin{aligned}\mathcal{AZ}^i_{imn} &= A^i_{jmn} - \frac{1}{N(N-1)}A(\delta^i_n g_{jm} - \delta^i_m g_{jn})\\ &+ \frac{1}{2N}\Big((\alpha+\alpha'-\varepsilon'-\chi+\pi)\delta^p_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}}-(\alpha+\chi)\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}+(\alpha-\alpha'+\varepsilon-\varepsilon')\delta^p_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\\ &+(\alpha'+\alpha-\varepsilon-\chi'+\pi)\delta^p_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}}-(\alpha'+\chi')\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} + (\alpha-\alpha'+\chi-\chi')g^{\underline{ip}}g_{\underline{qn}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{jm}}\\ &- (\alpha-\varepsilon')g^{\underline{pq}}g_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{qm}} - (\alpha+\alpha'+\pi)g^{\underline{pq}}g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jq}} - (\alpha'-\varepsilon)g^{\underline{pq}}g_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{qn}}\Big)\frac{\partial}{\partial x^p}\ln g\end{aligned} \tag{3.3.73}$$

invarijantna pri ET-koncirkulanom preslikavanju $f:\ \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$.

Ova veličina nije tenzor, nazivamo je *ET-koncirkularni parametar*. Sada važi sledeća teorema:

Teorema 3.3.5. *ET-koncirkularni parametar $\mathcal{AZ}^i_{imn}$ zadat jednačinom (3.3.73) je invarijantan geometrijski objekat ET-koncirkularnog preslikavanja $f:\ \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$, definisanog pomoću (3.2.1), (3.2.5), (3.3.10), (3.3.57).* ■

Kao zaključak u ovom odeljku navodimo dokazanu teoremu:

Teorema 3.3.6. *Veličine $\underset{1}{\mathcal{Z}},\dots,\underset{5}{\mathcal{Z}}$ date jednačinama (3.3.67)-(3.3.71) su tenzori koji su invarijantni u odnosu na ET-koncirkularna preslikavanja $f:\ \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ i zovemo ih ET-koncirkulanim tenzorima. Veličina $\mathcal{AZ}$ data jednačinom (3.3.73), jeste invarijantni objekat ovih preslikavanja, ali nije tenzor, i zovemo je ET-koncirkularni parametar.* ■

Glava 4

Generalisani Kelerovi prostori

U ovoj glavi ćemo se baviti Kelerovim prostorima (Erich Kähler, 1906-2000, nemački matematičar) i generalisanim Kelerovim prostorima. Više o geometriji Kelerovih prostora može se naći u knjigama J. Mikeša i njegovih koautora [39, 45, 46], N. Sinjukova [89], i K. Yana [113].

4.1 Kelerovi prostori $\mathbb{K}_N$

Definicija 4.1.1. Hermitov prostor $\mathbb{H}_\mathbb{N}$ *je* N*-dimenzionalni Rimanov prostor sa metrikom* g_{ij}*, u kome postoji afinor* F_i^h*, tako da važi*

$$F_p^h F_i^p = -\delta_i^h, \tag{4.1.1}$$

$$g_{pq} F_i^p F_j^q = g_{ij}, \quad g^{ij} = g^{pq} F_p^i F_q^j. \tag{4.1.2}$$

Specijalna klasa Hermitovitovih prostora su Kelerovi prostori, definisani na sledeći način:

Definicija 4.1.2. (Eliptički[1]) Kelerov prostor $\mathbb{K}_N$ *je* N*-dimenzionalni Rimanov prostor sa metrikom* g_{ij}*, u kome postoji afinor* F_i^h*, tako da važi*

$$F_p^h F_i^p = -\delta_i^h, \tag{4.1.3}$$

$$g_{pq} F_i^p F_j^q = g_{ij}, \quad g^{ij} = g^{pq} F_p^i F_q^j, \tag{4.1.4}$$

$$F_{i;j}^h = 0, \tag{4.1.5}$$

gde je $(;)$ *kovarijantno diferenciranje u odnosu na metrički tenzor* g_{ij}*.*

Mogu se definisati još i sledeći prostori:

Definicija 4.1.3. Hiperbolički Kelerov prostor[2] *je* N*-dimenzionalni Rimanov prostor sa metričkim*

[1] u literaturi se često označava sa $\mathbb{K}_N^-$

[2] u literaturi se često označava sa $\mathbb{K}_N^+$

tenzorom g_{ij} *i afinorom* F_i^h, *tako da važi*

$$F_p^h F_i^p = \delta_i^h, \tag{4.1.6}$$
$$g_{pq} F_i^p F_j^q = g_{ij}, \quad g^{ij} = g^{pq} F_p^i F_q^j, \tag{4.1.7}$$
$$F_{i;j}^h = 0, \tag{4.1.8}$$

gde je $(;)$ *kovarijantno diferenciranje u odnosu na metrički tenzor* g_{ij}.

Definicija 4.1.4. Parabolički Kelerov prostor[3] *je* N*-dimenzionalni Rimanov prostor sa metričkim tenzorom* g_{ij} *i afinorom* F_i^h, *tako da važi*

$$F_p^h F_i^p = 0, \tag{4.1.9}$$
$$g_{pq} F_i^p F_j^q = g_{ij}, \quad g^{ij} = g^{pq} F_p^i F_q^j, \tag{4.1.10}$$
$$F_{i;j}^h = 0, \tag{4.1.11}$$

gde je $(;)$ *kovarijantno diferenciranje u odnosu na metrički tenzor* g_{ij}.

Za navedene Kelerove prostore važi $N = 2M$. Mi ćemo se ovde baviti prostorima koji zadovoljavaju jednačine (4.1.3)-(4.1.5) i zvaćemo ih prosto Kelerovi prostori.

4.1.1 Geodezijska preslikavanja Rimanovog prostora na Kelerov prostor

J. Mikeš, V. Kiosak i A. Vanžurová u [45] su pokazali

Teorema 4.1.1. (Mikeš, J., Kiosak, V., and Vanžurová, A., (2008), [45]) *Rimanov prostor* $\mathbb{R}_N$ *dopušta netrivijalno geodezijko prelikavanje na Kelerov prostor* $\overline{\mathbb{K}}_N$ *ako i samo ako, u zajedničkom sistemu koordinara* x *u odnosu na preslikavanje, važe jednačine*

$$\begin{aligned} a) \quad \overline{g}_{ij;k} &= 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik}; \\ b) \quad \overline{F}_{i;k}^h &= \overline{F}_k^h \psi_i - \delta_k^h \overline{F}_i^p \psi_p; \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}_i^h$ *metrički tenzor i afinor prostora* $\overline{\mathbb{K}}_N$, *redom, koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}_h^p \overline{g}_{pj} + \overline{F}_j^p \overline{g}_{pi} = 0, \quad \overline{F}_p^h \overline{F}_i^p = -\delta_i^h, \tag{4.1.13}$$

dok je $(;)$ *kovarijantni izvod u prostoru* $\mathbb{R}_N$. ■

[3] u literaturi se često označava sa $\mathbb{K}_N^0$

4.2 Generalisani Kelerovi prostori prve vrste

Uopštavajući pojam Kelerovih prostora definisani su generalisani Kelerovi prostori. Oni su proučavani u radovima [61, 97, 98, 99, M3, M4, M7]. Poćićemo od generalisanog Kelerovog prostora koji je definisao M. Stanković u radu [97]:

Definicija 4.2.1. (Stanković, M., (2001), [97]) Generalisani Kelerov prostor $\mathbb{GK}_N$ *je generalisani* N*-dimenzionalni Rimanov prostor sa nesimetričnim metričkim tenzorom* g_{ij} *i skoro kompleksnom strukturom* F^i_j, *tako da važi*

$$F^h_p F^p_i = -\delta^h_i, \tag{4.2.1}$$

$$g_{\underline{pq}} F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F^i_p F^j_q, \tag{4.2.2}$$

$$F^h_{i\underset{\theta}{|}j} = 0, \quad (\theta = 1, 2), \tag{4.2.3}$$

gde je sa $\underset{\theta}{|}$ *označeno kovarijantno diferenciranje vrste* $\theta = 1, 2$.

Struktura F^i_j ne može biti u isto vreme kovarijanto konstantna u odnosu na sve četiri vrste kovarijantnog diferenciranja (1.6.3). Iz tog razloga definišemo najpre generalisani Kelerov prostor prve vrste $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$:

Definicija 4.2.2. *Generalisani* N*-dimenzionalni Rimanov prostor sa nesimetričnim metričkim tenzorom* g_{ij} *je* ***generalisani Kelerov prostor prve vrste*** $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ *u kome postoji skoro kompleksna struktura* F^i_j *takva da važi*

$$F^h_p F^p_i = -\delta^h_i, \tag{4.2.4}$$

$$g_{\underline{pq}} F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F^i_p F^j_q, \tag{4.2.5}$$

$$F^h_{i\underset{1}{|}j} = 0, \tag{4.2.6}$$

gde $\underset{1}{|}$ *označava kovarijantni izvod prve vrste, tako da je njegov pridruženi prostor Kelerov prostor* $\mathbb{K}_N$ *dat sa (4.1.3)-(4.1.5).*

Iz uslova (4.2.6) direktno sledi

$$F^p_i \Gamma^h_{\underset{\vee}{pj}} - F^h_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{ij}} = 0. \tag{4.2.7}$$

U jednačini (4.2.5) kompozicijom sa F^j_r i korišćenjem uslova (4.2.4), važi

$$\begin{aligned} &a)\ g^{\underline{ip}} F^p_j + g_{\underline{pj}} F^p_i = 0, \\ &b)\ g^{\underline{ip}} F^j_p + g^{\underline{pj}} F^i_p = 0. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Onda je očigledno $F_{ij} = -F_{ji}$, $F^{ij} = -F^{ji}$, gde je $F_{ji} = F^p_j g_{\underline{pi}}$, $F^{ji} = F^j_p g^{\underline{pi}}$.

Sada se mogu pokazati sledeće teoreme:

Teorema 4.2.1. *Za skoro kompleksnu strukturu F^i_j prostora $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ važe sledeće relacije*

$$F^h_{\underset{2}{i|j}} = 0, \quad F^h_{\underset{3}{i|j}} = 2F^h_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{ij}}, \quad F^h_{\underset{4}{i|j}} = 2F^p_i \Gamma^h_{\underset{\vee}{jp}} \tag{4.2.9}$$

gde je $\Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}}$ tenzor torzije prostora $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$.

Dokaz. Relacije (4.2.9) pokazuju se trivijano, koristeći definiciju kovarijantnog izvoda i (4.2.6). ■

Teorema 4.2.2. *Za Ričijev tenzor R_{ij} pridruženog Kelerovog prostora $\mathbb{K}_N$ važi*

$$R_{jk} = F^p_j F^q_k R_{pq}. \tag{4.2.10}$$

Dokaz. Kako se radi o pridruženom Kelerovom prostoru, imamo da je

$$F^h_{i;j} = 0. \tag{4.2.11}$$

Uslovi integrabilnosti jednačine (4.2.11) daju

$$F^h_{i;jk} - F^h_{i;kj} = 0. \tag{4.2.12}$$

Na osnovu Ričijevog identiteta (1.4.2), prethodna jednačina postaje

$$F^h_p R^p_{ijk} - F^p_i R^h_{pjk} = 0. \tag{4.2.13}$$

Ovde je R^h_{ijk} Rimanov tenzor krivine pridruženog prostora $\mathbb{K}_N$, dobijen pomoću koneksije $\Gamma^h_{\underline{ij}}$. Primenićemo poznatu tehniku datu u [89]. Kompozicijom sa F^i_r u (4.2.13), dobija se

$$F^h_p F^q_i R^p_{qjk} + R^h_{ijk} = 0. \tag{4.2.14}$$

Sada kompozicijom sa $g_{\underline{hr}}$ u prethodnoj jednačini, sledi

$$F_{pr} F^q_i R^p_{qjk} + R_{rijk} = 0, \tag{4.2.15}$$

Iz (4.2.15), kompozicijom sa F^i_h, imamo

$$-F_{pr} R^p_{hjk} - F^p_h R_{prjk} = 0. \tag{4.2.16}$$

Kompozicijom sa $g^{\underline{hj}}$ u jednačini (4.2.16), dobijamo

$$-F_{pr} R^p_k - F^p_q g^{\underline{sq}} R_{prsk} = 0. \tag{4.2.17}$$

Simetrizacijom u (4.2.17) po indeksima r, k, dobijamo na osnovu (4.2.8b) da važi

$$F^p_r R_{pk} + F^p_k R_{pr} = 0, \tag{4.2.18}$$

i na kraju, kompozicijom sa F^r_j imamo

$$R_{jk} = F^r_j F^p_k R_{pr}. \quad ■ \tag{4.2.19}$$

Teorema 4.2.3. *Za opšti Ričijev tenzor* K_{jm} *prostora* $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ *važi relacija*

$$K_{(jm)} = F^p_j F^q_m K_{(pq)} + 2(\beta' + \gamma)(F^p_j F^q_m \Gamma^r_{\underset{\vee}{ps}} \Gamma^s_{\underset{\vee}{rq}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}). \tag{4.2.20}$$

Dokaz. Kako se opšti tenzor K^i_{jmn}, može zapisati u obliku (2.3.64), tj.

$$K^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \alpha \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm;n}} + \alpha' \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn;m}} + \beta \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} + \beta' \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} + \gamma \Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}} \Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}, \qquad \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma \in \mathbb{R}. \tag{4.2.21}$$

Kontrakcijom indeksa i i n u prethodnoj jednačini, dobijamo

$$K_{jm} = R_{jm} + \alpha \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm;p}} + (\beta' + \gamma) \Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}. \tag{4.2.22}$$

Simetrizacijom po j, m u prethodnoj jednačini, imamo

$$K_{(jm)} = R_{(jm)} - 2(\beta' + \gamma) \Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}} = 2(R_{jm} - (\beta' + \gamma) \Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}). \tag{4.2.23}$$

Iz dokazane Teoreme 4.2.2 i uslova (4.2.10) imamo

$$K_{(jm)} = F^p_j F^q_m K_{(pq)} + 2(\beta' + \gamma)(F^p_j F^q_m \Gamma^r_{\underset{\vee}{ps}} \Gamma^s_{\underset{\vee}{rq}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}). \tag{4.2.24}$$

Time je dokazana teorema. ■

4.2.1 Geodezijska preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora na generalisani Kelerov prostor prve vrste

Na osnovu Teoreme 2.2.4, možemo pokazati

Teorema 4.2.4. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{GR}_N$ *dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor prve vrste* $\underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}}_N$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad & \overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{|}k} + 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik} + \xi^p_{ik} \overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk} \overline{g}_{ip}; \\ b)\quad & \overline{F}^h_{i\underset{1}{|}k} = \overline{F}^h_k \psi_i - \delta^h_k \overline{F}^p_i \psi_p - \xi^h_{pk} \overline{F}^p_i + \xi^p_{ik} \overline{F}^h_p; \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}}_N$ *redom, koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i \overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j \overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p \overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.2.26}$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.2.4 jednačina (4.2.25a) garantuje egzistenciju geodezijskog preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{GR}_N$ na generalisani Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$.

Formula (4.2.25b) znači da je struktura $\overline{F}^h_i$ u $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ kovarijantno konstantna u odnosu na prvu vrstu kovarijantnog diferenciranja. Uslov (4.2.26) garantuje da su $\overline{g}_{ij}$ i $\overline{F}^h_i$ metrički tenzor i struktura prostora $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, redom. Za geodezijsko preslikavanje $f:\ \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ važi jednačina

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \xi^h_{ij}, \tag{4.2.27}$$

i

$$\overline{F}^h_{i\underset{1}{|}k} = \overline{F}^h_{i,k} + \Gamma^h_{pk}\overline{F}^p_i - \Gamma^p_{ik}\overline{F}^h_p, \quad \overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} = \overline{F}^h_{i,k} + \Gamma^h_{kp}\overline{F}^p_i - \Gamma^p_{ki}\overline{F}^h_p. \tag{4.2.28}$$

Zamenom Γ^h_{ij} iz (4.2.27) in (4.2.28), imamo

$$\begin{aligned}
\overline{F}^h_{i\underset{1}{|}k} &= \overline{F}^h_{i,k} + (\overline{\Gamma}^h_{pk} - \psi_p\delta^h_k - \psi_k\delta^h_p - \xi^h_{pk})\overline{F}^p_i - (\overline{\Gamma}^p_{ik} - \psi_i\delta^p_k - \psi_k\delta^p_i - \xi^p_{ik})\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i,k} + \overline{\Gamma}^h_{pk}\overline{F}^p_i - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \psi_k\delta^h_p\overline{F}^p_i - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i - \overline{\Gamma}^p_{ik}\overline{F}^h_p + \psi_i\delta^p_k\overline{F}^h_p + \psi_k\delta^p_i\overline{F}^h_p + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{1}{\bar{|}}k} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \psi_k\delta^h_p\overline{F}^p_i - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i + \psi_i\delta^p_k\overline{F}^h_p + \psi_k\delta^p_i\overline{F}^h_p + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{1}{\bar{|}}k} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \psi_k\overline{F}^h_i - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i + \psi_i\overline{F}^h_k + \psi_k\overline{F}^h_i + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p \\
&= \overbrace{\overline{F}^h_{i\underset{1}{\bar{|}}k}}^{0} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i + \psi_i\overline{F}^h_k - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p,
\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

gde su $|$, i $\bar{|}$ redom kovarijantni izvodi u prostorima $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$. ■

Lako se sada pokazuje

Teorema 4.2.5. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor prve vrste $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned}
&a) \quad \overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 2}{\bar{|}}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip}; \\
&b) \quad \overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} = \overline{F}^h_k\psi_i - \delta^h_k\overline{F}^p_i\psi_p - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p;
\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ i $\overline{F}^h_i$, metrički tenzor i struktura prostora $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i\overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j\overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p\overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.2.31}$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.2.4 jednačina (4.2.30a) je potreban i dovoljan uslov za geodezisjko preslikavanje $f:\ \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$. U prostoru $\mathbb{GR}_N$ za drugu vrstu diferenciranja, imamo

$$\begin{aligned}
\overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} &= \overline{F}^h_{i,k} + (\overline{\Gamma}^h_{kp} - \psi_k\delta^h_p - \psi_p\delta^h_k - \xi^h_{kp})\overline{F}^p_i - (\overline{\Gamma}^p_{ki} - \psi_k\delta^p_i - \psi_i\delta^p_k - \xi^p_{ki})\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i,k} + \overline{\Gamma}^h_{kp}\overline{F}^p_i - \psi_k\delta^h_p\overline{F}^p_i - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i - \overline{\Gamma}^p_{ki}\overline{F}^h_p + \psi_k\delta^p_i\overline{F}^h_p + \psi_i\delta^p_k\overline{F}^h_p + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{2}{\bar{|}}k} - \psi_k\delta^h_p\overline{F}^p_i - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \psi_k\delta^p_i\overline{F}^h_p + \psi_i\delta^p_k\overline{F}^h_p + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p \qquad (4.2.32) \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{2}{\bar{|}}k} - \psi_k\overline{F}^h_i - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \psi_k\overline{F}^h_i + \psi_i\overline{F}^h_k + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p \\
&= \overline{F}^h_{i\underset{2}{\bar{|}}k} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i + \psi_i\overline{F}^h_k - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p.
\end{aligned}$$

Na osnovu Teoreme 4.2.1, sledi jednačina (4.2.30b). ■

Istim postupkom kao u prethodne dve teoreme, mogu se pokazati sledeće teoreme:

Teorema 4.2.6. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{GR}_N$ *dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor prve vrste* $\underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_N}$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned}
a)\quad & \overline{g}_{ij\underset{3}{|}k} = \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{3}{\bar{|}}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip}; \\
b)\quad & \overline{F}^h_{i\underset{3}{|}k} = \overline{F}^h_{i\underset{3}{\bar{|}}k} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i + \psi_i\overline{F}^h_k - \xi^h_{pk}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ki}\overline{F}^h_p,
\end{aligned} \qquad (4.2.33)$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_N}$, *redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i\overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j\overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p\overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \qquad (4.2.34)$$

■

Teorema 4.2.7. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{GR}_N$ *dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor prve vrste* $\underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_N}$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned}
a)\quad & \overline{g}_{ij\underset{4}{|}k} = \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{4}{\bar{|}}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}; \\
b)\quad & \overline{F}^h_{i\underset{4}{|}k} = \overline{F}^h_{i\underset{4}{\bar{|}}k} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i + \psi_i\overline{F}^h_k - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p,
\end{aligned} \qquad (4.2.35)$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_N}$, *redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i\overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j\overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p\overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \qquad (4.2.36)$$

■

4.2.2 ET-geodezijska preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora na generalisani Kelerov prostor prve vrste

Preslikavanje $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ je *ekvitorziono (ET)-geodezijsko preslikavanje* ako su tenzori torzija prostora $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ jednaki. Tada će iz (4.2.27) važiti

$$\overline{\Gamma}^h_{\underset{\vee}{ij}} - \Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}} = \xi^h_{ij} = 0, \tag{4.2.37}$$

gde je $\underset{\vee}{ij}$ označena antisimetrizacija po i i j.

Na osnovu Teoreme 2.3.1 i Teorema 4.2.4-4.2.7 imamo

Teorema 4.2.8. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor prve vrste $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad \overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} &= 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{jk}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\ b)\quad \overline{F}^h_{i\underset{1}{|}k} &= \overline{F}^h_k\psi_i - \delta^h_k\overline{F}^p_i\psi_p; \end{aligned} \tag{4.2.38}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ i $\overline{F}^h_i$, metrički tenzor i struktura prostora $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i\overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j\overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p\overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.2.39}$$

■

Teorema 4.2.9. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor prve vrste $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad \overline{g}_{\underline{ij}\underset{2}{|}k} &= 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{jk}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\ b)\quad \overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} &= \overline{F}^h_k\psi_i - \delta^h_k\overline{F}^p_i\psi_p; \end{aligned} \tag{4.2.40}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ i $\overline{F}^h_i$, metrički tenzor i struktura prostora $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i\overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j\overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p\overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.2.41}$$

■

Teorema 4.2.10. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor prve vrste $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad \overline{g}_{\underline{ij}\underset{3}{|}k} &= 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{jk}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\ b)\quad \overline{F}^h_{i\underset{3}{|}k} &= \overline{F}^h_{i\underset{3}{|}k} - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i + \psi_i\overline{F}^h_k, \end{aligned} \tag{4.2.42}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_N$, *redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i \overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j \overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p \overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.2.43}$$

■

Teorema 4.2.11. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$ *dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor prve vrste* $\underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_N}$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a) \quad & \overline{g}_{\underline{ij}\underset{4}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{\underline{ik}}; \\ b) \quad & \overline{F}^h_{i\underset{4}{|}k} = \overline{F}^h_{i\underset{4}{|}k} - \psi_p \delta^h_k \overline{F}^p_i + \psi_i \overline{F}^h_k, \end{aligned} \tag{4.2.44}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_N}$, *redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i \overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j \overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p \overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.2.45}$$

■

4.3 Generalisani Kelerovi prostori druge vrste

Po analogiji sa Definicijom generalisanih Kelerovih prostora prve vrste, dajemo definiciju generalisanih Kelerovih prostora druge vrste

Definicija 4.3.1. *Generalisani N-dimenzionalni Rimanov prostor sa nesimetričnim metričkim tenzorom* g_{ij} *je* ***generalisani Kelerov prostor druge vrste*** $\underset{2}{\mathbb{G}\mathbb{K}_N}$ *u kome postoji skoro kompleksna struktura* F^i_j *takva da važi*

$$F^h_p F^p_i = -\delta^h_i, \tag{4.3.1}$$

$$g_{\underline{pq}} F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F^i_p F^j_q, \tag{4.3.2}$$

$$F^h_{i\underset{2}{|}j} = 0, \tag{4.3.3}$$

gde $\underset{2}{|}$ *označava kovarijantni izvod druge vrste, tako da je njemu pridruženi prostor Kelerov prostor* $\mathbb{K}_N$ *dat sa (4.1.3)-(4.1.5).*

Teorema 4.3.1. *Za skoro kompleksnu strukturu* F^i_j *prostora* $\underset{2}{\mathbb{G}\mathbb{K}_N}$ *važe sledeće relacije*

$$F^h_{i\underset{1}{|}j} = 0, \quad F^h_{i\underset{3}{|}j} = 2F^p_i \Gamma^h_{\underset{\vee}{pj}}, \quad F^h_{i\underset{4}{|}j} = 2F^i_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{ji}}, \tag{4.3.4}$$

gde je $\Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}}$ *tenzor torzije prostora* $\underset{2}{\mathbb{G}\mathbb{K}_N}$.

Dokaz. Iz Definicije 4.3.1, imamo

$$F^h_{\underset{2}{i|j}} = F^h_{i,j} + \Gamma^i_{jp}F^p_i - \Gamma^p_{ji}F^i_p = 0, \quad F^h_{i;j} = F^h_{i,j} + \Gamma^i_{\underline{pj}}F^p_i - \Gamma^p_{\underline{ji}}F^i_p = 0, \tag{4.3.5}$$

oduzimanjem dobijamo

$$F^p_i \Gamma^h_{\underset{\vee}{jp}} - F^h_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{ji}} = 0. \quad \blacksquare \tag{4.3.6}$$

Na osnovu Teoreme 4.2.1 važi

Teorema 4.3.2. *Prostor* $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ *je i prostor* $\underset{2}{\mathbb{GK}}_N$. *Važi i obrat.* $\blacksquare$

Sve osobine koje važe za $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ važiće i za prostor $\underset{2}{\mathbb{GK}}_N$.

4.4 Generalisani Kelerovi prostori treće vrste

U nastavku ćemo definisati generalisane Kelerove prostore treće vrste.

Definicija 4.4.1. *Generalisani* N*-dimenzionalni Rimanov prostor sa nesimetričnim metričkim tenzorom* g_{ij} *je* ***generalisani Kelerov prostor treće vrste*** $\underset{3}{\mathbb{GK}}_N$ *u kome postoji skoro kompleksna struktura* F^i_j *takva da važi*

$$F^h_p F^p_i = -\delta^h_i, \tag{4.4.1}$$

$$g_{\underline{pq}} F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F^i_p F^j_q, \tag{4.4.2}$$

$$F^h_{\underset{3}{i|j}} = 0, \tag{4.4.3}$$

gde $\underset{3}{|}$ *označava kovarijantni izvod treće vrste, tako da je njemu pridruženi prostor Kelerov prostor* $\mathbb{K}_N$ *dat sa (4.1.3)-(4.1.5).*

Na osnovu definicije prostora $\underset{3}{\mathbb{GK}}_N$, dokazujemo

Teorema 4.4.1. *Za skoro kompleksnu strukturu* F^i_j *prostora* $\underset{3}{\mathbb{GK}}_N$ *važe sledeće relacije*

$$F^h_{\underset{1}{i|j}} = 2F^h_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{ji}}, \quad F^h_{\underset{2}{i|j}} = 2F^p_i \Gamma^h_{\underset{\vee}{jp}}, \quad F^h_{\underset{4}{i|j}} = 0, \tag{4.4.4}$$

gde je $\Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}}$ *tenzor torzije prostora* $\underset{3}{\mathbb{GK}}_N$. $\blacksquare$

Dokaz. Iz Definicije 4.4.1, imamo

$$F^h_{\underset{3}{i|j}} = F^h_{i,j} + \Gamma^i_{pj}F^p_i - \Gamma^p_{ji}F^i_p = 0, \quad F^h_{i;j} = F^h_{i,j} + \Gamma^i_{\underline{pj}}F^p_i - \Gamma^p_{\underline{ji}}F^i_p = 0, \tag{4.4.5}$$

oduzimanjem dobijamo

$$F^p_i \Gamma^h_{\underset{\vee}{pj}} - F^h_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{ji}} = 0. \tag{4.4.6}$$

Po analogiji na Teoremu 4.2.3 koja važi za prostore $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ dajemo odgovarajuću u prostoru $\underset{3}{\mathbb{GK}}_N$.

Teorema 4.4.2. *Za opšti Ričijev tenzor* K_{jm} *prostora* $\mathbb{G}\underset{3}{\mathbb{K}}_N$ *važi relacija*

$$K_{(jm)} = F^p_j F^q_m K_{(pq)} + 2(\beta' + \gamma)(F^p_j F^q_m \Gamma^r_{\underset{\vee}{ps}} \Gamma^s_{\underset{\vee}{rq}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}). \tag{4.4.7}$$

■

4.4.1 Geodezijska preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora na generalisani Kelerov prostor treće vrste

Analogno slučaju geodezijskog preslikavanja $f : \mathbb{G}\mathbb{R}_N \to \mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$, pokazuju se sledeće teoreme:

Teorema 4.4.3. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$ *dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor treće vrste* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad & \overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{\bar{|}}k} + 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik} + \xi^p_{ik} \overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk} \overline{g}_{ip};\\ b)\quad & \overline{F}^h_{i\underset{1}{|}k} = \overline{F}^h_{i\underset{1}{\bar{|}}k} + \overline{F}^h_k \psi_i - \delta^h_k \overline{F}^p_i \psi_p - \xi^h_{pk} \overline{F}^p_i + \xi^p_{ik} \overline{F}^h_p; \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, *redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i \overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j \overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p \overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.4.9}$$

■

Teorema 4.4.4. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$ *dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor treće vrste* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad & \overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} = \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{2}{\bar{|}}k} + 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik} + \xi^p_{ki} \overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj} \overline{g}_{ip};\\ b)\quad & \overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} = \overline{F}^h_{i\underset{2}{\bar{|}}k} + \overline{F}^h_k \psi_i - \delta^h_k \overline{F}^p_i \psi_p - \xi^h_{kp} \overline{F}^p_i + \xi^p_{ki} \overline{F}^h_p; \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, *redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i \overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j \overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p \overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.4.11}$$

■

Teorema 4.4.5. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$ *dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor treće vrste* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad & \overline{g}_{ij\underset{3}{|}k} = \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{3}{\bar{|}}k} + 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik} + \xi^p_{ik} \overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj} \overline{g}_{ip};\\ b)\quad & \overline{F}^h_{i\underset{3}{|}k} = \psi_i \overline{F}^h_k - \psi_p \delta^h_k \overline{F}^p_i - \xi^h_{pk} \overline{F}^p_i + \xi^p_{ki} \overline{F}^h_p, \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}_i^h$*, metrički tenzor i struktura prostora* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_{\underset{3}{}N}$*, redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}_i^p \overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}_j^p \overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}_p^h \overline{F}_i^p = -\delta_i^h. \tag{4.4.13}$$

■

Teorema 4.4.6. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{GR}_N$ *dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor treće vrste* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_{\underset{3}{}N}$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a) \quad & \overline{g}_{ij\underset{4}{|}k} = \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{4}{\bar{|}}k} + 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}; \\ b) \quad & \overline{F}^h_{i\underset{4}{|}k} = \overline{F}^h_{i\underset{4}{\bar{|}}k} - \psi_p \delta^h_k \overline{F}^p_i + \psi_i \overline{F}^h_k - \xi^h_{kp}\overline{F}^p_i + \xi^p_{ik}\overline{F}^h_p, \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}_i^h$*, metrički tenzor i struktura prostora* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_{\underset{3}{}N}$*, redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}_i^p \overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}_j^p \overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}_p^h \overline{F}_i^p = -\delta_i^h. \tag{4.4.15}$$

■

4.4.2 ET-geodezijska preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora na generalisani Kelerov prostor treće vrste

Preslikavanje $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_{\underset{3}{}N}$ je *ekvitorziono (ET)-geodezijsko preslikavanje* ako su tenzori torzija prostora $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_{\underset{3}{}N}$ jednaki. Tada će iz (4.2.27) važiti

$$\overline{\Gamma}^h_{\underset{\vee}{ij}} - \Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}} = \xi^h_{ij} = 0, \tag{4.4.16}$$

gde je $\underset{\vee}{ij}$ označena antisimetrizacija po i i j.

Sada je jasno da važe sledeće teoreme:

Teorema 4.4.7. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{GR}_N$ *dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor treće vrste* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_{\underset{3}{}N}$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a) \quad & \overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i \overline{g}_{\underline{jk}} + \psi_j \overline{g}_{\underline{ik}}; \\ b) \quad & \overline{F}^h_{i\underset{1}{|}k} = \overline{F}^h_{i\underset{1}{\bar{|}}k} + \overline{F}^h_k \psi_i - \delta^h_k \overline{F}^p_i \psi_p; \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}_i^h$*, metrički tenzor i struktura prostora* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_{\underset{3}{}N}$*, redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}_i^p \overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}_j^p \overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}_p^h \overline{F}_i^p = -\delta_i^h. \tag{4.4.18}$$

■

Teorema 4.4.8. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{GR}_N$ *dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor treće vrste* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad & \overline{g}_{\underline{ij}\underset{2}{|}k} = && 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{jk}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\ b)\quad & \overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} = && \overline{F}^h_{i\underset{2}{|}k} + \overline{F}^h_k\psi_i - \delta^h_k\overline{F}^p_i\psi_p; \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, *redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i\overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j\overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p\overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.4.20}$$

■

Teorema 4.4.9. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{GR}_N$ *dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor treće vrste* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad & \overline{g}_{\underline{ij}\underset{3}{|}k} = && 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underline{jk}} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\ b)\quad & \overline{F}^h_{i\underset{3}{|}k} = && \psi_i\overline{F}^h_k - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i \end{aligned} \tag{4.4.21}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, *redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i\overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j\overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p\overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.4.22}$$

■

Teorema 4.4.10. *Generalisani Rimanov prostor* $\mathbb{GR}_N$ *dopušta ET-geodezijsko preslikavanje na generalisani Kelerov prostor treće vrste* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ *ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata za ovo preslikavanje važi*

$$\begin{aligned} a)\quad & \overline{g}_{\underline{ij}\underset{4}{|}k} = && 2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{\underline{ik}};\\ b)\quad & \overline{F}^h_{i\underset{4}{|}k} && = \psi_i\overline{F}^h_k - \psi_p\delta^h_k\overline{F}^p_i, \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

gde su $\overline{g}_{ij}$ *i* $\overline{F}^h_i$, *metrički tenzor i struktura prostora* $\mathbb{G}\underset{3}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, *redom koji zadovoljavaju sledeće jednačine:*

$$det||\overline{g}_{ij}|| \neq 0, \quad \overline{F}^p_i\overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{F}^p_j\overline{g}_{\underline{pi}} = 0, \quad \overline{F}^h_p\overline{F}^p_i = -\delta^h_i. \tag{4.4.24}$$

■

4.5 Generalisani Kelerovi prostori četvrte vrste

Definicija 4.5.1. *Generalisani N-dimenzionalni Rimanov prostor sa nesimetričnim metričkim tenzorom g_{ij} je **generalisani Kelerov prostor četvrte vrste** $\underset{4}{\mathbb{GK}}_N$ u kome postoji skoro kompleksna struktura F^i_j takva da važi*

$$F^h_p F^p_i = -\delta^h_i, \tag{4.5.1}$$

$$g_{\underline{pq}} F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F^i_p F^j_q, \tag{4.5.2}$$

$$F^h_{i\underset{4}{|}j} = 0, \tag{4.5.3}$$

gde $\underset{4}{|}$ označava kovarijantni izvod druge vrste, tako da je njemu pridruženi prostor Kelerov prostor $\mathbb{K}_N$ dat sa (4.1.3)-(4.1.5).

Teorema 4.5.1. *Prostor $\underset{3}{\mathbb{GK}}_N$ je i prostor $\underset{4}{\mathbb{GK}}_N$. Važi i obrat.* ■

Sve osobine koje važe za $\underset{3}{\mathbb{GK}}_N$ važiće i za prostor $\underset{4}{\mathbb{GK}}_N$.

Glava 5

Holomorfno-projektivna (HP) preslikavanja

5.1 HP-preslikavanja Kelerovih prostora

Holomorfno-projektivna (HP) preslikavanja Kelerovih prostora su prirodna generalizacija geodezijskog preslikavanja. Proučavana su redom:

- holomorfno projektivna preslikavanja Hermitovih prostora u [43, 80, 82, 90].
- holomorfno projektivna preslikavanja Kelerovih prostora u [4, 9, 41, 42, 75].
- holomorfno projektivna preslikavanja hiperboličkih Kelerovih prostora u [41, 42].
- holomorfno projektivna preslikavanja produkt prostora u [87, 88].

Pretpostavimo da postoji geodezijsko preslikavanje izmedju dva Kelerova prostora $f:\ \mathbb{K}_N \to \overline{\mathbb{K}}_N$, pri čemu važi

$$F_i^h = \overline{F}_i^h, \tag{5.1.1}$$

gde je F_i^h iz prostora $\mathbb{K}_N$, a $\overline{F}_i^h$ iz prostora $\overline{\mathbb{K}}_N$. Onda na osnovu uslova (4.1.5), važiće $\overline{F}^h_{i\bar{;}j} = 0$, gde je ($\bar{;}$) kovarijantno diferenciranje u $\overline{\mathbb{K}}_N$. Onda na osnovu (4.1.5, 5.1.1) dobija se

$$\overline{F}^h_{i\bar{;}j} = \overline{F}^h_{i,j} + \overline{\Gamma}^h_{pj}\overline{F}^p_i - \overline{\Gamma}^p_{ij}\overline{F}^h_p = 0, \quad F^h_{i;j} = F^h_{i,j} + \Gamma^h_{pj}F^p_i - \Gamma^p_{ij}F^h_p = 0. \tag{5.1.2}$$

Oduzimanjem prethodnih jednačina, na osnovu definicije geodezijskog preslikavanja, dobija se

$$(\delta^h_p\psi_j + \delta^h_j\psi_p)\overline{F}^p_i - (\delta^p_i\psi_j + \delta^p_j\psi_i)\overline{F}^h_p = 0, \tag{5.1.3}$$

odakle je

$$\delta^h_j\psi_p\overline{F}^p_i - \psi_i\overline{F}^h_j = 0, \tag{5.1.4}$$

množenjem sa F^j_r dobija se

$$\psi_p F^p_i F^h_r + \psi_i\delta^h_r = 0, \tag{5.1.5}$$

odakle kontrakcijom indeksa h i r sledi da je $\psi_i = 0$, tj. geodezijsko preslikavanje je trivijalno. Znači da ne postoji netrivijalno geodezijsko preslikavanje izmedju dva Kelerova prostora koje očuvava strukturu F_i^h. Iz tog razloga uvedene su *analitički planarne krive*, kao uopšenje geodezijskih krivih.

Definicija 5.1.1. (Otsuki, T., Tasiro, Y., (1954), [66]) *Kriva $x = x(t)$ Kelerovog prostora $\mathbb{K}_N$ je* **analitički planarna kriva** *ako ona zadovoljava jednačinu*

$$\lambda^h_{;p}\lambda^p = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = a(t)\lambda^h + b(t)F^h_p\lambda^p, \tag{5.1.6}$$

gde je $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$, i $a(t), b(t)$ su funkcije parametra t.

Definicija 5.1.2. (Tasiro, Y., (1957), [102]) *Preslikavanje izmedju dva Kelerova prostora $f : \mathbb{K}_N \to \overline{\mathbb{K}}_N$ koje očuvava strukturu F_i^h, naziva se* **alitički planarno** *ili* **holomorfno-projektivno (HP) preslikavanje** *ako pri ovom preslikavanju analitički planarne krive prostora $\mathbb{K}_N$ prelaze u analitički planarne krive prostora $\overline{\mathbb{K}}_N$.*

Iz jednačine (5.1.6), sledi da je preslikavanje dva Kelerova prostora HP-preslikavanje, ako i samo ako Kristofelovi simboli ovih prostora zadovoljavaju relaciju

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i - \psi_p F^p_i F^h_j - \psi_p F^p_j F^h_i. \tag{5.1.7}$$

Kontrakcijom po indeksima h i i, koristeći da je $F^p_p = 0$ imamo

$$\overline{\Gamma}^p_{pj} = \Gamma^p_{pj} + (N+2)\psi_j, \tag{5.1.8}$$

odakle sledi da je ψ_j gradijentni vektor. Analogno jednačini Levi-Čivita za Rimanove prostore (2.1.9), može se izvesti jednačina, koja je ekvivalentna postojanju HP-preslikavanju dva Kelerova prostora:

$$\overline{g}_{ij;k} = 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{jk} + \psi_j\overline{g}_{ik} - \psi_p F^p_i g_{j\underline{q}} F^q_k - \psi_p F^p_j g_{i\underline{q}} F^q_k. \tag{5.1.9}$$

5.1.1 Invarijantni geometrijski objekti HP-preslikavanja Kelerovih prostora

U prostoru $\mathbb{K}_N$ imamo sledeće invarijante geometrijske objekte u odnosu na HP-preslikavanje:

- *Tomasov projektivni parametar*

$$HT^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \frac{1}{N-2}(\delta^h_i\Gamma^p_{jp} + \delta^h_j\Gamma^p_{ip} - \Gamma^p_{pq}F^q_iF^h_j - \Gamma^p_{pq}F^q_jF^h_i) \tag{5.1.10}$$

- *Tenzor holomorfno-projektivne krivine*

$$HPW^i{}_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N+2}(R_{j[n}\delta^i_{m]} + F^p_j R_{p[m}F^i_{n]} + 2F^i_jF^p_nR_{pm}). \tag{5.1.11}$$

  gde je R^i_{jmn} Riman-Kristofelov tenzor krivine prostora $\mathbb{K}_N$, a R_{jm} je Ričijev tenzor, a [ ] označava antisimetrizaciju bez deljenja u odnosu na indekse m i n.

Tačnije važi sledeća teorema

Teorema 5.1.1. (Tasiro, Y., (1957), [102]) *Geometrijski objekti (5.1.10, 5.1.11) su invarijantni u odnosu na HP-preslikavanje Kelerovih prostora $\mathbb{K}_N$ koje očuvava strukturu F_i^h.* ■

5.2 HP-preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora

Uopštavajući pojam analitički planarnih krivih Kelerovog prostora, dajemo analognu definiciju u prostoru $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$:

Definicija 5.2.1. *U prostoru* $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ *kriva data u parametarskom obliku*

$$x^h = x^h(t), \quad (h = 1, 2, \cdots, N) \tag{5.2.1}$$

je **analitički planarna kriva** *ako ona zadovoljava jednačinu:*

$$\lambda^h{}_{\underset{\theta}{|}p}\lambda^p = a(t)\lambda^h + b(t)F^h_p\lambda^p, \quad (\theta = 1, 2) \tag{5.2.2}$$

gde su $\lambda^h = dx^h/dt$, *i* $a(t), b(t)$ *funkcije parametra* t.

Lako zaključujemo, da se u (5.2.2) za kovarijantni izvod prve i druge vrste, dobija ista jednačina

$$\lambda^h{}_{\underset{1}{|}p}\lambda^p = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = \lambda^h{}_{\underset{2}{|}p}\lambda^p,$$

pa su analitički planarne krive prostora $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ oblika

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = a(t)\lambda^h + b(t)F^h_p\lambda^p. \tag{5.2.3}$$

Posmatrajmo dva N-dimenzionalna generalisana Kelerova prostora prve vrste $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ i $\underset{1}{\mathbb{G\overline{K}}}_N$, sa strukturama F^h_i i $\overline{F}^h_i$, pri čemu važi:

$$F^h_i = \overline{F}^h_i \tag{5.2.4}$$

u zajedničkom sistemu koordinata definisanom preslikavanjem $f : \underset{1}{\mathbb{GK}}_N \to \underset{1}{\mathbb{G\overline{K}}}_N$.

Definicija 5.2.2. *Difeomorfizam* $f : \underset{1}{\mathbb{GK}}_N \to \underset{1}{\mathbb{G\overline{K}}}_N$ *nazivamo* **analitički planarno preslikavanje** *ili* **holomorfno-projektivno preslikavanje (HP)***, ako pri ovom preslikavanju analitički planarne krive prostora* $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$ *prelaze u analitički planarne krive prostora* $\underset{1}{\mathbb{G\overline{K}}}_N$*.*

Holomorfno-projektivna preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora proučavana su u [61, 98, 97, 99, M4, M7].

Možemo označiti, kao i do sada

$$P^h_{ij} = \overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} \tag{5.2.5}$$

tenzor deformacije koneksije usled HP-preslikavanja, gde su Γ^h_{ij} i $\overline{\Gamma}^h_{ij}$ Kristofelovi simboli prostora $\mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$ i $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, redom. Analitički planarne krive prostora $\mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$ i $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$, redom su

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = a(t)\lambda^h + b(t)F^h_p\lambda^p, \quad \frac{d\lambda^h}{dt} + \overline{\Gamma}^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = \overline{a}(t)\lambda^h + \overline{b}(t)F^h_p\lambda^p.$$

Iz prethodnih jednačina oduzimanjem dobijamo

$$(\overline{\Gamma}^h_{pq} - \Gamma^h_{pq})\lambda^p\lambda^q = \psi(t)\lambda^h + \sigma(t)F^h_p\lambda^p,$$

gde je označeno sa $\psi(t) = \overline{a}(t) - a(t),\ \sigma(t) = \overline{b}(t) - b(t)$. Možemo staviti da je $\psi(t) = \psi_p\lambda^p,\ \sigma(t) = \sigma_q\lambda^q$. Sada, imamo

$$(\overline{\Gamma}^h_{pq} - \Gamma^h_{pq} - \psi_p\delta^h_q - \sigma_pF^h_q)\lambda^p\lambda^q = 0,$$

odakle, zaključujemo da važi veza izmedju koneksija ovih prostora:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \sigma_iF^h_j + \sigma_jF^h_i + \xi^h_{ij}, \tag{5.2.6}$$

gde je ξ^h_{ij} antisimetrični tenzor. U jednačini (5.2.6) biramo takav vektor σ_i, da je $\sigma_i = -\psi_pF^p_i$. Iz tog razloga, dobijamo

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i - \psi_pF^p_iF^h_j - \psi_pF^p_jF^h_i + \xi^h_{ij}. \tag{5.2.7}$$

Ovom jednačinom je data veza izmedju koneksija prosotora $\mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$ i $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ usled HP-preslikavanja $f:\ \mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N \to \mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$.

Kako u $\mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$ važi

$$\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{ij,k} - \Gamma^p_{ik}\overline{g}_{pj} - \Gamma^p_{jk}\overline{g}_{ip}, \quad \overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} = \overline{g}_{ij,k} - \Gamma^p_{ki}\overline{g}_{pj} - \Gamma^p_{kj}\overline{g}_{ip}. \tag{5.2.8}$$

Zamenom iz (5.2.7) imamo

$$\begin{aligned}
\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} &= \overline{g}_{ij,k} - \Gamma^p_{ik}\overline{g}_{pj} - \Gamma^p_{jk}\overline{g}_{ip}\\
&= \overline{g}_{ij,k} - (\overline{\Gamma}^p_{ik} - \psi_{(i}\delta^p_{k)} + \psi_qF^q_{(i}F^p_{k)} - \xi^p_{ik})\overline{g}_{pj} - (\overline{\Gamma}^p_{jk} - \psi_{(j}\delta^p_{k)} + \psi_qF^q_{(j}F^p_{k)} - \xi^p_{jk})\overline{g}_{ip}\\
&= \overline{g}_{ij,k} - \overline{\Gamma}^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \psi_{(i}\delta^p_{k)}\overline{g}_{pj} - \psi_qF^q_{(i}F^p_{k)}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} - \overline{\Gamma}^p_{jk}\overline{g}_{ip} + \psi_{(j}\delta^p_{k)}\overline{g}_{ip} - \psi_qF^q_{(j}F^p_{k)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}\\
&= \overline{g}_{ij\underset{1}{\bar{|}}k} + \psi_{(i}\delta^p_{k)}\overline{g}_{pj} - \psi_qF^q_{(i}F^p_{k)}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \psi_{(j}\delta^p_{k)}\overline{g}_{ip} - \psi_qF^q_{(j}F^p_{k)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}\\
&= \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{\bar{|}}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} - \psi_qF^q_{(i}F^p_{k)}\overline{g}_{pj} - \psi_qF^q_{(j}F^p_{k)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}
\end{aligned}$$

i takodje

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} &= \overline{g}_{ij,k} - \Gamma^p_{ki}\overline{g}_{pj} - \Gamma^p_{kj}\overline{g}_{ip} \\
&= \overline{g}_{ij,k} - (\overline{\Gamma}^p_{ki} - \psi_{(k}\delta^p_{i)} + \psi_q F^q_{(k}F^p_{i)} - \xi^p_{ki})\overline{g}_{pj} - (\overline{\Gamma}^p_{kj} - \psi_{(k}\delta^p_{j)} + \psi_q F^q_{(k}F^p_{j)} - \xi^p_{kj})\overline{g}_{ip} \\
&= \overline{g}_{ij,k} - \overline{\Gamma}^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \psi_{(k}\delta^p_{i)}\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{i)}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} - \overline{\Gamma}^p_{kj}\overline{g}_{ip} + \psi_{(k}\delta^p_{j)}\overline{g}_{ip} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{j)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip} \\
&= \overline{g}_{ij\underset{2}{\bar{|}}k} + \psi_{(k}\delta^p_{i)}\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{i)}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \psi_{(k}\delta^p_{j)}\overline{g}_{ip} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{j)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip} \\
&= \overline{g}_{ij\underset{\vee 2}{\bar{|}}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{i)}\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{j)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip}
\end{aligned}
$$

Na osnovu izloženog dokazana je sledeća teorema

Teorema 5.2.1. *a) Preslikavanje f generalisanog Kelerovog prostora prve vrste $\mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$ na generalisani Kelerov prostor prve vrste $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ je HP-preslikavanje ako i samo ako u zajedničkom sistemu koordinata Kristofelovi simboli druge vrste ovih prostora zadovoljavaju (5.2.7).*
b) Ako je preslikavanje f HP-preslikavanje tada važe sledeće jednačine:

$$
\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 1}{\bar{|}}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} - \psi_q F^q_{(i}F^p_{k)}\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(j}F^p_{k)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{ik}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{ip}, \tag{5.2.9}
$$

$$
\overline{g}_{ij\underset{2}{|}k} = \overline{g}_{ij\underset{\vee 2}{\bar{|}}k} + 2\psi_k\overline{g}_{ij} + \psi_i\overline{g}_{kj} + \psi_j\overline{g}_{ik} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{i)}\overline{g}_{pj} - \psi_q F^q_{(k}F^p_{j)}\overline{g}_{ip} + \xi^p_{ki}\overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj}\overline{g}_{ip}, \tag{5.2.10}
$$

gde je sa $(|)$ i $(\bar{|})$, označeno kovarijantno diferenciranje u prostorima $\mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$ i $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ redom. Obratno ako jedna od prethodne dve jednačine važi tada je preslikavanje f HP-preslikavanje i važi druga jednačina. ■

5.2.1 Invarijantni geometriski objekti HP-preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora prve vrste

Koristeći postupak za nalaženje invarijantnih geometrijskih objekata HP-preslikavanja dva Kelerova prosotora dat u [89], nalazimo i invarijantne geometrijske objekte HP-preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora.

Kontrakcijom indeksa h, i u (5.2.7) i uzimajući u obzir da važi $F^p_p = 0$, $\xi^p_{pj} = 0$, imamo

$$
\overline{\Gamma}^p_{pj} - \Gamma^p_{pj} = (N+2)\psi_j. \tag{5.2.11}
$$

Iz jednačine (5.2.7), vidimo da je ψ_j gradijentni vektor. Zamenom (5.2.7) u jednačinu (5.2.6), dobija

$$
\overline{\Gamma}^h_{ij} - \frac{1}{N+2}(\overline{\Gamma}^p_{p(i}\delta^h_{j)} - \overline{\Gamma}^q_{qp}\overline{F}^p_{(i}\overline{F}^h_{j)}) - \overline{\Gamma}^h_{\underset{\vee}{ij}} = \Gamma^h_{ij} - \frac{1}{N+2}(\Gamma^p_{p(i}\delta^h_{j)} - \Gamma^q_{qp}F^p_{(i}F^h_{j)}) - \Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}}. \tag{5.2.12}
$$

Označimo

$$HT^h_{ij} = \Gamma^h_{\underline{ij}} - \frac{1}{N+2}(\Gamma^p_{p(i}\delta^h_{j)} - \Gamma^q_{qp}F^p_{(i}F^h_{j)}), \tag{5.2.13}$$

onda jednačina (5.2.6) dobija formu:

$$H\overline{T}^h_{ij} = HT^h_{ij}, \tag{5.2.14}$$

gde smo sa $H\overline{T}^h_{ij}$ označili geometrijski objekat (5.2.13) iz $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$. Veličina HT^h_{ij} nije tenzor. Nazivamo je *Tomasov HP-parametar* prostora $\mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$. Na ovaj način pokazana je sledeća teorema:

Teorema 5.2.2. (Stanković, M., (2001), [97]) *Veličina* (5.2.13) *je invarijanta HP-preslikavanja koje očuvava kompleksnu strukturu dva generalisana Kelerova prostora prve vrste.* ∎

5.2.2 Invarijantni geometriski objekti ET-HP-preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora prve vrste

U ovom delu nalazimo geometrijski objekat koji je invarijantan pri HP-preslikavanju dva generalisana Kelerova prostora prve vrste i uopštenje je HP-tenzora krivine (5.1.11). Kako nije moguće u opštem slučaju uopštiti HP-tenzor krivine, uvodimo definiciju (vidi [M4]).

Definicija 5.2.3. *Preslikavanje* $f : \mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N \to \mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ *je* **ekvitorziono (ET)-HP-preslikavanje** *ako su tenzori torzije prostora* $\mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$ *i* $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ *jednaki u zajedničkom po preslikavanju* f *koordinatnom sistemu. Tada iz (5.2.7)*

$$\xi^i_{jk} = 0. \tag{5.2.15}$$

Veza izmedju tenzora $\overline{K}$ i K prostora $\mathbb{G}\underset{1}{\overline{\mathbb{K}}}_N$ i $\mathbb{G}\underset{1}{\mathbb{K}}_N$, pri HP-preslikavanju data je sa

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} =& K^i_{jmn} + P^i_{\underline{jm};n} - P^i_{\underline{jn};m} + P^p_{\underline{jm}}P^i_{\underline{pn}} - P^p_{\underline{jn}}P^i_{\underline{pm}}\\ &+\alpha(P^i_{\underline{pn}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - P^p_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} - P^p_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}}) + \alpha'(P^i_{\underline{pm}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} - P^p_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - P^p_{\underline{nm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}}).\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Zamenom (5.2.7), uz uslov da je u pitanju ET-preslikavanje, imamo

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} =& K^i_{jmn} + \psi_{j;n}\delta^i_m + \psi_{m;n}\delta^i_j - \psi_{p;n}F^p_jF^i_m - \psi_{p;n}F^p_mF^i_j - \psi_{j;m}\delta^i_n - \psi_{n;m}\delta^i_j - \psi_{p;m}F^p_jF^i_n - \psi_{p;m}F^p_nF^i_j\\ &+(\psi_j\delta^p_m + \psi_m\delta^p_j - \psi_qF^q_jF^p_m - \psi_qF^q_mF^p_j)(\psi_p\delta^i_n + \psi_n\delta^i_p - \psi_rF^r_pF^i_n - \psi_rF^r_nF^i_p)\\ &-(\psi_j\delta^p_n + \psi_n\delta^p_j - \psi_qF^q_jF^p_n - \psi_qF^q_nF^p_j)(\psi_m\delta^i_p + \psi_p\delta^i_m - \psi_rF^r_pF^i_m - \psi_rF^r_mF^i_p)\\ &+\alpha(\psi_n\delta^i_p + \psi_p\delta^i_n - \psi_qF^q_pF^i_n - \psi_qF^q_nF^i_p)\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - \alpha(\psi_j\delta^p_n + \psi_n\delta^p_j - \psi_qF^q_jF^p_n - \psi_qF^q_nF^p_j)\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}\\ &+\alpha'(\psi_m\delta^i_p + \psi_p\delta^i_m - \psi_qF^q_pF^i_m - \psi_qF^q_mF^i_p)\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} - \alpha'(\psi_j\delta^p_m + \psi_m\delta^p_j - \psi_qF^q_jF^p_m - \psi_qF^q_mF^p_j)\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}}\\ &-(\alpha+\alpha')(\psi_n\delta^p_m + \psi_m\delta^p_n - \psi_qF^q_mF^p_n - \psi_qF^q_nF^p_m)\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}},\end{aligned}$$

Pošto je ψ_i gradijentni vektor, sledi da je $\psi_{i;j} = \psi_{j;i}$ i važi jednačina (4.2.7), pa je konačno

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} + \delta^i_m\psi_{jn} - \delta^i_n\psi_{jm} + F^p_j(F^i_n\psi_{pm} - F^i_m\psi_{pn}) + F^i_j(F^p_n\psi_{pm} - F^p_m\psi_{pn}) \\ & -(\alpha+\alpha')\psi_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\psi_p\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha')\psi_j\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} - (\alpha'+\alpha)\psi_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \alpha'\psi_p\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} \\ & + (\alpha-\alpha')\psi_qF^q_jF^p_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}} - \alpha\psi_qF^q_pF^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - \alpha'\psi_qF^q_pF^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} + (\alpha+\alpha')(\psi_qF^q_mF^p_n + \psi_qF^q_nF^p_m)\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}},\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

gde smo označili sa

$$\psi_{ij} = \psi_{i;j} - \psi_i\psi_j + \psi_p\psi_qF^p_iF^q_j. \tag{5.2.18}$$

Kontrakcijom indeksa i i n u jednačini (5.2.17), koristeći da je $F^p_p = 0$ i $\Gamma^p_{\underset{\vee}{ip}} = 0$, dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{K}_{jm} = {} & K_{jm} - N\psi_{jm} - 2F^p_jF^q_m\psi_{pq} + N\alpha\psi_p\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} \\ & + \alpha\psi_qF^q_jF^p_r\Gamma^r_{\underset{\vee}{pm}} + \alpha\psi_qF^q_rF^p_j\Gamma^r_{\underset{\vee}{pm}} + \alpha\psi_qF^q_mF^p_r\Gamma^r_{\underset{\vee}{jp}} + \alpha\psi_qF^q_rF^p_m\Gamma^r_{\underset{\vee}{jp}}.\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

Simetrizacijom u prethodnoj jednačini po j i m, dobijamo

$$\overline{K}_{(jm)} = K_{(jm)} - 2N\psi_{jm} - 4F^p_jF^q_m\psi_{pq}. \tag{5.2.20}$$

Iskoristićemo jednačinu (4.2.20), koja važi za tenzor $\overline{K}_{(jm)}$, pa je sada

$$\overline{K}_{(jm)} = F^p_jF^q_m(K_{(pq)} - 2N\psi_{pq} - 4F^r_pF^s_q\psi_{rs}) + 2(\beta'+\gamma)(F^p_jF^q_m\overline{\Gamma}^r_{\underset{\vee}{ps}}\overline{\Gamma}^s_{\underset{\vee}{rq}} - \overline{\Gamma}^p_{\underset{\vee}{jq}}\overline{\Gamma}^q_{\underset{\vee}{pm}}), \tag{5.2.21}$$

pa iz pretpostavke da se radi o ET-preslikavanju imamo:

$$\overline{K}_{(jm)} = F^p_jF^q_mK_{(pq)} - 2NF^p_jF^q_m\psi_{pq} - 4\psi_{jm} + 2(\beta'+\gamma)(F^p_jF^q_m\Gamma^r_{\underset{\vee}{ps}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{rq}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}), \tag{5.2.22}$$

Na osnovu jednačina (4.2.20, 5.2.20, 5.2.22), dobija se

$$\psi_{pq}F^p_jF^q_m = \psi_{jm}. \tag{5.2.23}$$

Zamenom (5.2.23) u jednačinu (5.2.20), imamo

$$K_{(jm)} - \overline{K}_{(jm)} = 2(N+2)\psi_{jm}. \tag{5.2.24}$$

Eliminacijom ψ_{jm} iz prethodne jednačine i koristeći jednačinu (5.2.11), gde je odredjeno ψ_j, dobija se

$$\mathcal{HP}\overline{\mathcal{W}}^i_{jmn} = \mathcal{HP}\mathcal{W}^i_{jmn}, \tag{5.2.25}$$

gde je

$$\begin{aligned}\mathcal{HPW}^i_{jmn} = K^i_{jmn} + \frac{1}{2(N+2)}\Big(&\delta^i_m K_{(jn)} - \delta^i_n K_{(jm)} + F^p_j(F^i_n K_{(pm)} - F^i_m K_{(pn)}) + F^i_j(F^p_n K_{(pm)} - F^p_m K_{(pn)})\Big)\\ \frac{1}{N+2}\Big(&-(\alpha+\alpha')\Gamma^s_{\underline{sn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + \alpha\Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - (\alpha-\alpha')\Gamma^s_{\underline{sj}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} - (\alpha'+\alpha)\Gamma^s_{\underline{sm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \alpha'\Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\\ &+(\alpha-\alpha')\Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_jF^p_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}} - \alpha\Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_pF^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - \alpha'\Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_pF^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} + (\alpha+\alpha')(\Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_mF^p_n + \Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_nF^p_m)\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}}\Big),\end{aligned} \tag{5.2.26}$$

geometrijski objekat prostora $\underset{1}{\mathbb{GK}}_N$. Naravno, objekat $\mathcal{HP}\overline{\mathcal{W}}^i_{jmn}$ pripada prostoru $\underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}}_N$. Na osnovu prethodno rečenog, važi:

Teorema 5.2.3. *Invarijantni geometrijski objekat ET-HP-preslikavanja je* **HP-parametar** $\mathcal{HPW}^i_{jmn}$ *zadat jednačinom* (5.2.26). ■

Teorema 5.2.4. *Invarijantni geometrijski objekat HP-parametar* $\mathcal{HPW}^i_{jmn}$ *zadat jednačinom* (5.2.26) *je* **HP tenzor** *akko* $\alpha = \alpha' = 0$. ■

Na osnovu osobine (2.3.129) imamo

1. Za tenzor $\underset{1}{K}$ imamo da je $\alpha = 1$, $\alpha' = -1$, $\beta = 1$, $\beta' = -1$, $\gamma = 0$, zamenom u jednačinu (5.2.26) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\mathcal{HPW}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{2(N+2)}\Big(&\delta^i_m \underset{1}{K}_{(jn)} - \delta^i_n \underset{1}{K}_{(jm)} + F^p_j(F^i_n \underset{1}{K}_{(pm)} - F^i_m \underset{1}{K}_{(pn)}) + F^i_j(F^p_n \underset{1}{K}_{(pm)} - F^p_m \underset{1}{K}_{(pn)})\Big)\\ \frac{1}{N+2}\Big(&\Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - 2\Gamma^s_{\underline{sj}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}} + \Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} + 2\Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_jF^p_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}} - \Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_pF^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} + \Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_pF^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Big).\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

2. Za tenzor $\underset{2}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \gamma = 0$, $\beta = -1$, $\beta' = 1$, zamenom u jednačinu (5.2.26) dobijamo

$$\underset{2}{\mathcal{HPW}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+2}\Big(\delta^i_m \underset{2}{K}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{K}_{jm} + F^p_j(F^i_n \underset{2}{K}_{pm} - F^i_m \underset{2}{K}_{pn}) + F^i_j(F^p_n \underset{2}{K}_{pm} - F^p_m \underset{2}{K}_{pn})\Big). \tag{5.2.28}$$

3. Za tenzor $\underset{3}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \beta' = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$, zamenom u jednačinu (5.2.26) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{3}{\mathcal{HPW}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{2(N+2)}\Big(&\delta^i_m \underset{3}{K}_{(jn)} - \delta^i_n \underset{3}{K}_{(jm)} + F^p_j(F^i_n \underset{3}{K}_{(pm)} - F^i_m \underset{3}{K}_{(pn)}) + F^i_j(F^p_n \underset{3}{K}_{(pm)} - F^p_m \underset{3}{K}_{(pn)})\Big)\\ \frac{1}{N+2}\Big(&-2\Gamma^s_{\underline{sn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} + \Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - 2\Gamma^s_{\underline{sm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \Gamma^s_{\underline{sp}}\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\\ &-\Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_pF^i_n\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}} - \Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_pF^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}} + 2(\Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_mF^p_n + \Gamma^s_{\underline{sq}}F^q_nF^p_m)\Gamma^i_{\underset{\vee}{jp}}\Big).\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

4. Za tenzor $\underset{4}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \gamma = 0,\ \beta = \beta' = -1$, zamenom u jednačinu (5.2.26) dobijamo

$$\mathcal{HPW}_{4}{}^{i}_{jmn} = \underset{4}{K}{}^{i}_{jmn} + \frac{1}{N+2}\Big(\delta^i_m \underset{4}{K}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{4}{K}{}_{jm} + F^p_j (F^i_n \underset{4}{K}{}_{pm} - F^i_m \underset{4}{K}{}_{pn}) + F^i_j (F^p_n \underset{4}{K}{}_{pm} - F^p_m \underset{4}{K}{}_{pn})\Big)\,. \tag{5.2.30}$$

5. Za tenzor $\underset{5}{K}$ imamo da je $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0,\ \gamma = -\frac{1}{2}$, zamenom u jednačinu (5.2.26) dobijamo

$$\mathcal{HPW}_{5}{}^{i}_{jmn} = \underset{5}{K}{}^{i}_{jmn} + \frac{1}{N+2}\Big(\delta^i_m \underset{5}{K}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{5}{K}{}_{jm} + F^p_j (F^i_n \underset{5}{K}{}_{pm} - F^i_m \underset{5}{K}{}_{pn}) + F^i_j (F^p_n \underset{5}{K}{}_{pm} - F^p_m \underset{5}{K}{}_{pn})\Big)\,. \tag{5.2.31}$$

Takodje na osnovu Teoreme 4.3.2 imamo

Teorema 5.2.5. *Veličina* $\mathcal{HPW}^i_{jmn}$ *zadata jednačinom* (5.2.26) *je invarijantni geometrijski objekat ET-HP-preslikavanja* $f:\ \mathbb{GK}_{\underset{2}{}N} \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}_{\underset{2}{}N}$. ■

Na osnovu napred rečenog navodimo veoma važnu teoremu

Teorema 5.2.6. *Veličine* $\underset{2}{\mathcal{HPW}}, \underset{4}{\mathcal{HPW}}, \underset{5}{\mathcal{HPW}}$ *date redom jednačinama (5.2.28), (5.2.30) i (5.2.31), su tenzori koji su invarijantni u odnosu na ET-HP-preslikavanja* $f:\ \underset{1}{\mathbb{GK}}_N \to \underset{1}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}}_N$, $f:\ \underset{2}{\mathbb{GK}}_N \to \underset{2}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}}_N$ *i zovemo ih HP-tenzorima. Veličine* $\underset{1}{\mathcal{HPW}}, \underset{3}{\mathcal{HPW}}$, *date jednačinama (5.2.27), (5.2.29), jesu invarijantni objekti ovih preslikavanja, ali nisu tenzori, zovemo ih HP-parametrima.* ■

5.2.3 Invarijantni geometriski objekti ET-HP-preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora treće vrste

Istim postupkom kao u prethodnom delu mogu se naći i invarijantni geometrijski objekti ET-HP-preslikavanja $f:\ \underset{3}{\mathbb{GK}}_N \to \underset{3}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}}_N$, razlika u odnosu na prethodni deo je što ovde treba koristiti relaciju $F^p_i \Gamma^h_{\underset{\vee}{pj}} = F^h_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{ji}}$, umesto relacije $F^p_i \Gamma^h_{\underset{\vee}{pj}} = F^h_p \Gamma^p_{\underset{\vee}{ij}}$ koja se koristi za generalisane Kelerove prostore prve vrste.

Postupak je isti, tako da ga zbog sličnosti nećemo navesti.

Teorema 5.2.7. *Veličina* $\mathcal{HPW}^i_{jmn}$ *je invarijantni geometrijski objekat ET-HP-preslikavanja* $f:\ \underset{4}{\mathbb{GK}}_N \to \underset{4}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}}_N$ *ako i samo ako je ona invarijantni geometrijski objekat ET-HP-preslikavanja* $f:\ \underset{3}{\mathbb{GK}}_N \to \underset{3}{\mathbb{G}\overline{\mathbb{K}}}_N$. ■

Literatura

[1] **Akvis, A. M., Goldberg, V. V.,** *Conformal differential geometry and its generalizations*, A Wiley-Interscience Publication, 1996.

[2] **Andjelić, T. P.,** *Tenzorski račun*, "Naučna knjiga" Beograd, 1991.

[3] **Báscó, S.,** *On geodesic mappings of special Finsler spaces*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, **59** (1999), 83-87.

[4] **Báscó, S., Ilosvay, F.,** *On holomorphically projective mappings of special Kaehler spaces,* Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, **15** (1999), 41–44.

[5] **Bochner, S., Yano, K.,** *Tensor-fields in non-symmetric connections,* Annals of Mathematics, Vol.56, 3, (1952), 504–519.

[6] **Catone, C. J.,** *Projective equivalence of Finsler and Riemannian surfaces*, Differential Geometry and its Applications, **26** (2008), 404-418.

[7] **Crampin, M., Saunders, D. J.,** *Projective connections*, Journal of Geometry and Physics, **57** (2007), 691-727.

[8] **Čomić, I.,** *Geodesic lines in d-recurrent Finsler spaces*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., **45** (59), (1989), 153-167.

[9] **Домашев, В. В., Микеш Й.,** *К теории голоморфно-проективных отображений Келеровых простанств*, Математические Заметки, Том.23, Но.2, (1978), 297–303.

[10] **Eastwood, M., Matveev, V.,** *Metric connections in projective differential geometry*, Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations (Minneapolis, 2006), 339–351, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol.144, (2008), 339–350.

[11] **Einstein, A.,** *Generalization of the Relativistic Theory of Gravitation*, Annals of Mathematics, Princeton, **46**, (1945), 576-584.

[12] **Einstein, A.,** *Bianchi Identities in the Generalized Theory of Gravitation*, Canadian Journal of Mathematics, **2**, (1950), 120-128.

[13] **Einstein, A.,** *Relativistic Theory of the Non-symmetric Field*, Appendix II in the book: The meaning of relativity 5^{th} edit., Princeton, **49**, 1955.

[14] **Eisenhart, L. P.,** *Non-Riemannian geometry*, New York, 1927.

[15] **Eisenhart, L. P.,** *Generalized Riemannian spaces*, Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA, Vol. 37, (1951), 311–315.

[16] **Eisenhart, L. P.,** *Generalized Riemannian spaces, Part II*, Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA, Vol. 38, (1952), 505–508.

[17] **Finsler, P.,** *Über Kurven und Flächen in Allgemeinen Räumen*, Dissertation, Göttingen, 1918.

[18] **Hall, G. S., Lonie, D. P.,** *The principle of equivalence and projective structure in spacetimes*, Classical and Quantum Gravity, 24 (2007), 3617-3636.

[19] **Hall, G. S., Lonie, D. P.,** *Projective equivalence of Einstein spaces in general relativity* Classical and Quantum Gravity, 26(2009), 125009.

[20] **Hinterleitner, I., Mikeš, J.,** *On F-planar mappings of spaces with affine connections*, Note di Matematica, **27** (2007), No.1, 111-118.

[21] **Hinterleitner, I., Kiosak, V.,** *φ-(Ric)-Vector fields in Riemannian spaces*, Archivum Mathematicum (Brno), Tom.44 (2008), 385-390.

[22] **Hinterleitner, I.,** *Selected special vector fields and mappings in Riemannian geometry*, Journal of Applied Mathematics, Vol.1, No.2, (2008), 30–37.

[23] **Hinterleitner, I., Mikeš, J., Stránská, J.,** *Infinitesimal F-planar transformations*, Russian Mathematics, 4, (2008), 13–18.

[24] **Hinterleitner, I., Mikeš, J.,** *Geodesic mappings onto Weyl maonifolds*, Journal of Applied Mathematics, Vol.2, No.1, (2009), 125–133.

[25] **Janković, Sv.,** *Diferencijalne jednačine*, Prirodno-matematički fakultet u Nišu, Niš, 2004.

[26] **Киосак, В. А., Микеш, Й.,** *О геодезических отображениях пространств Эйнштейна*, Известия Высших Учебных Заведений, Но.11 (498), (2003), 36-41.

[27] **Kiosak, V., Matveev, V. S.,** *Complete Einstein metrics are geodesically rigid*, Communications in Mathematical Physics, 289 (2009), no. 1, (2009), 383–400.

[28] **Kiosak, V., Matveev, V. S.,** *Proof of the projective Lichnerowicz conjecture for pseudo-Riemannian metrics with degree of mobility greater than two*, Communications in Mathematical Physics, to appear.

[29] **Levi-Civita, T.,** *Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche,* Ann. di Mat. Milano, Ser. 2, **24** (1896), 255-300.

[30] **Mantica, C. A., Molinari, L. G.,** *A second-order identity for the Riemann tensor*, arXiv:math.DG/0802.0650v1 (2008).

[31] **Matveev, V. S., Mounoud, P.,** *Gallot-Tanno Theorem for closed incomplete pseudo-Riemannian manifolds and applications,* Annals of Global Analysis and Geomtry, to be appear.

[32] **Matveev, V. S.,** *On degree of mobility for complete metrics,* Advanced studies in pure mathemaics, 43(2006), 221–250.

[33] **Matveev, V. S.,** *Gallot-Tanno theorem for pseudo-Riemannian metrics and a proof that decomposable cones over closed complete pseudo-Riemannian manifolds do not exist,* Differential Geometry and its Applications, **28**, No.2 (2010), 236–240.

[34] **Mikeš, J.,** *On geodesic mappings of Einstein spaces*, Mathematical Notes, Vol.28, No.6, (1980), 922–924.

[35] **Mikeš, J.,** *Geodesic mappings of special Riemannian spaces*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **46.**, Topics in Differential Geometry, Debrecen (Hungary), (1984), 793–813.

[36] **Mikeš, J.,** *On an order of special transformation of Riemannian spaces*, Differential Geometry and its Applications, Proceeding of the Conference, Dubrovnik, **3**, (1988), 199–208.

[37] **Mikeš, J., Berezovski, V.,** *Geodesic mappings of affine-connection spaces into Riemannian spaces,* Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Topics in Differential Geometry, Eger(Hungary) **56**, (1989).

[38] **Микеш, Й.,** *Геодезические отображения на полусиметрические пространства*, Известия Высших Учебных Заведений, Но.2 (381), (1994), 37-43.

[39] **Микеш, Й.,** *Геодезические, F-планарные и голоморфно-проективные отображения Римановых и аффинносвязных пространств*, Диссереация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Оломоуц, 1995.

[40] **Mikeš, J.,** *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces*, Journal of Mathematical Science, New York, (1996), 311–333.

[41] **Mikeš, J., Starko, G. A.,** *K-koncircular vector fields and holomorphically projective mappings on Kählerian spaces*, Rendiconti del Circolo di Palermo, **46**, (1997), 123–127.

[42] **Mikeš, J.,** *Holomorphically projective mappings and their generalizations*, Journal of Mathematical Sciences, Vol.89, No.3, (1998), 1334-1353.

[43] **Mikeš, J., Pokorná, O.,** *On holomorphically projective mappings onto almost Hermitian spaces*, Differential Geometry and Its Applications 43, Proc. Conf., Opava (Czech Republic), August 27-31, 2001, Silesian University, Opava, (2001), 43-48.

[44] **Mikeš, J., Pokorna, O., Starko, G.,** *Geodesic mappings between Kählerian spaces*, Filomat, **16** (2002), 43-50.

[45] **Mikeš, J., Kiosak, V., Vanžurová, A.,** *Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection*, Olomounc, 2008.

[46] **Mikeš, J., Vanžurová, A., Hinterleitner, I.,** *Geodesic mappings and some generalizations*, Olomounc, 2009.

[47] **Mikeš, J., Hinterleitner, I., Kiosak, V.,** *On geodesic mappings of affine connection manifolds,* Acta Physica Debrecina **42**, (2008), 19–28.

[48] **Mikeš, J., Hinterleitner, I.,** *On geodesic mappings of manifolds with affine connection,* arXiv:0905:1839v2[math.DG], (2009).

[49] **Minčić, S. M.,** *Ricci identities in the space of non-symmetric affine connexion*, Matematički Vesnik, 10(25), Vol.2, (1973), 161-172.

[50] **Minčić, S. M.,** *On curvature tensors and pseudotensors of the spaces with non-symmetric affine connection*, Mathemaica Balkanica, 4, 76, (1974), 427-430.

[51] **Minčić, S. M.,** *Generalisani Rimanovi prostori, Doktorska disertacija,* Prirodno-Matematički Fakultet u Novom Sadu, Novi Sad, 1975.

[52] **Minčić, S. M.,** *Curvature tensors of the space of non-symmetric affine connexion, obtained from the curvature pseudotensors*, Matematički Vesnik, 13(28), (1976), 421-435.

[53] **Minčić, S. M.,** *New commutation formulas in the non-symetric affine connexion space*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol.22(36), (1977), 189–199.

[54] **Minčić, S. M.,** *Independent curvature tensors and pseudotensors of spaces with non-symmetric affine connexion*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolayai, 31, Differential Geometry, Budapest (Hungary), (1979), 445-460.

[55] **Minčić, S. M.,** *Symmetry properties of curvature tensors of the space with non-symmetric affine connexion and generalized Riemannian space*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, Serija Matematika, 1(11) (1987), 69-78.

[56] **Minčić, S. M.,** *Bianchi type identities in the space of nonsymmetric affine connexion*, Collection of science papers of the Faculty of science (Kragujevac), **16**(1994), 53-60.

[57] **Minčić, S. M.,** *New Bianchi type identities in the space of nonsymmetric affine connexion,* Facta universitatis (Niš), Series, Mathematics and Informatics, 10 (1995), 35–43.

[58] **Minčić S. M., Stanković M. S.,** *On geodesic mapping of general affine connection spaces and of generalized Riemannian spaces*, Matematički Vesnik, 49(1997), 27–33.

[59] **Minčić S. M., Stanković M. S.,** *Equitorsion geodesic mappings of generalized Riemannian spaces*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol.61(75), (1997), 97–104.

[60] **Minčić, S. M.,** *Some characteristics of curvature tensors of nonsymmetric affine connexion*, Novi Sad Journal of Mathematics, No.3, **29** (1999), 169-186.

[61] **Minčić S. M., Stanković M. S., Velimirović Lj. S.,** *Generalized Kahlerian Spaces*, Filomat, **15** (2001), 167–174.

[62] **Minčić S. M., Velimirović Lj. S.,** *Diferencijalna geometrija mnogostrukosti*, (rukopis).

[63] **Minčić S. M., Velimirović Lj. S.,** *Tenzorski Račun*, Prirodno Matematički Fakultet u Nišu, 2009.

[64] **Mo, X.,** *On the non-Riemannian quantity H of a Finsler metric*, Differential Geometry and its Applications, 27 (2009), 7-14.

[65] **Nitescu, C.,** *Bianchi identities in a Non-symmetric Connection Space*, The Bulletin of the Politehnic Institute of Jassy, (N.S.) 20(24)(1974), Fasc. 1-2, Sect. I, 69-72.

[66] **Otsuki, T., Tasiro, Y.,** On curves in Kählerian spaces, Mathematical Journal Okayama University, 4 No 1, (1954), 57–78.

[67] **Özdemir, F., Yildirum, G.,** *On conformally recurrent Kählerian Weyl spaces*, Topology and its Applications, **153** (2005), 477-484.

[68] **Prvanović, M.,** *Equations de Gauss d'un sous-espace plongé dans l'espase Riemannien généralisé*, Buletin de La Classe des Sciences de L'academie Royal de Belguiqe, (1955), 615–621.

[69] **Prvanović, M.,** *Konformne i projektivne transformacije generalisanih Rieman-ovih prostora u smislu T. Takasu-a*, Godišnjak Filozofskog Fakulteta u Novom Sadu knjiga III (1958), 265–272.

[70] **Prvanović, M.,** *Une connexion non-symétrique associée a l'espace Riemannien*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol.10(24), (1970), 53–64.

[71] **Prvanović, M.,** *Holomorphically projective transformations in a locally product Riemannian spaces*, Mathematica Balkanica, **1**, (1971), 195–213.

[72] **Prvanović, M.,** *On pseudo metric semi-symmetric connections*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol.18(32), (1975), 157–164.

[73] **Prvanović, M.,** *Holomorphically semi-symmetric connexion*, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu knjiga 9 (1979), 91–99.

[74] **Прванович, М.,** *Четыре тензора кривизны несимметрической связности*, Из зборнике 150 лет геометрии Лобачевского Касань, 1976, Москва 1977, 199 – 205.

[75] **Prvanović, M.,** *A note on holomorphically projective transformations of the Kähler space*, Tensor, N. S., Vol.**35**, (1981), 99–104.

[76] **Prvanović, M.,** *Some special product semisymmetric and some special holomorphically semisymmetric F-connections*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol.35(49), (1984), 139–152.

[77] **Prvanović, M.,** *π-Projective Curvature Tensors*, Analles Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Lublin - Polonia, XLI, **16**, (1986), 123–133.

[78] **Prvanović, M.,** *Complex conformal connection on the locally conformal Kähler manifolds*, Kragujevac Journal of Mathematics, **25** (2003), 127-138.

[79] **Prvanović, M.,** *Locally conformally Kähler manifolds of constant type and J-invariant curvature tensor*, Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol.3, No.14, (2003), 791-804.

[80] **Prvanović, M.,** *Holomorphically projective curvature tensors*, Kragujevac Journal of Mathematics, **28** (2005), 97-111.

[81] **Pušić, N.,** *On HB-flat hyperbolic Kaehlerian spaces,* Matematički Vesnik **49** (1997), 35–44.

[82] **Raad, J. K., Lami, A., Škodová, M., Mikeš, J.,** *On holomorphically projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto Kählerian spaces*, Archivum Mathematicum, Vol.42, (2006), 291-299.

[83] **Рашевский, П. К.,** *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Москва "Наука", 1967.

[84] **Roberts, M. D.,** *Strings and unified field theory*, arXiv:hep-th/0607118.

[85] **Sakai, T.,** *Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, 1996.

[86] **Schouten, J. A., Struik, D. J.,** *Introduction into new Methods in Differential Geometry*, Gostekhizdat: Moscow-Leningrad, 1939.

[87] **Shiha, M.,** *On the theory of holomorphically projective mappings of parabolically-Kählerian spaces*, Differential Geometry and its Applications, Proceeding of the Conference Opava (Czechoslovakia), August 24-28. 1992, Silesian University, Opava, (1993), 157-160.

[88] **Shiha, M., Mikeš, J.,** *On holomorphically projective flat parabolically-Kählerian spaces*, Proceedings of the Conference on Contemporary Geometry and Related Topics, University of Belgrade, Faculty of Mathematics, (2006), 467-474.

[89] **Синюков Н. С.**, *Геодезические отображеня Римановых пространств,* Москва "Наука", 1979.

[90] **Синюков Н. С., Синюкова Е. Н.**, *О голоморфно-проективных отображеня специальньых Келеровиых пространств,* Математические Заметки, Том.36, Но.3, (1984), 417-423.

[91] **Sinha, B. B.,** *On H-projective connexions*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.3, No.2, (1970), 263–267.

[92] **Sokolnikoff, I. S.,** *Tensor Analysis, Theory and Applications*, New York, 1951.

[93] **Stanković M. S.,** *First type almost geodesic mappings of general affine connection spaces*, Novi Sad Journal of Mathematics, Vol.29, No.3, (1999), 313–323.

[94] **Stanković M. S.,** *On a canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces*, Filomat, **13** (1999), 105–114.

[95] **Stanković M. S., Minčić S. M.,** *New special geodesic mappings of generalized Riemannian space*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol.67(81), (2000), 92–102.

[96] **Stanković M. S., Minčić S. M.,** *New special geodesic mappings of affine connection spaces*, Filomat, **14** (2000), 19–31.

[97] **Stanković M. S.,** *Neka preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije, Doktorska disertacija,* Prirodno-Matematički Fakultet u Nišu, Niš, 2001.

[98] **Stanković M. S., Minčić S. M., Velimirović Lj. S.,** *On holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces*, Matematički Vesnik, 54, (2002), 195–202.

[99] **Stanković M. S., Minčić S. M., Velimirović Lj. S.,** *On equitorsion holomorphically projective mappings of generalised Kählerian spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal, 54(129), (2004), 701–715.

[100] **Škodova, M., Mikeš, J., Raad, J. K.,** *On holomorphically projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto Kählerian spaces*, Archivum Mathematicum, Vol.42 (2006), No.5, 291-299.

[101] **Takasu, T.,** *Generalized Riemannian geometry*, The Yokohama Mathematical Journal, Vol. V, No.2 (1957), 115–169.

[102] **Tasiro, Y.,** On holomorpically projective correspondences in an almost complex space, Mathematical Journal Okayama University, 5 No 2 6, (1957), 147–152.

[103] **Velimirović Lj. S., Minčić S. M., Stanković M. S.,** *Infinitesimal deformations of curvature tensors at non-symmetric affine connection space*, Matematički Vesnik, 54, (2002), 219–226.

[104] **Velimirović Lj. S., Minčić S. M., Stanković M. S.,** *Infinitesimal deformations and Lie derivative of non-symmetric affine connection space*, Acta Universitatis Palackianae Olomoucensis, Facultas Rerum Natuaralium, Mathematica 42, (2003), 111–121.

[105] **Velimirović Lj. S., Minčić S. M.,** *Infinitesimal bending of a subspace of a generalized Riemannian space*, Tensor, N., S., (2004) No. 3, 212–224.

[106] **Velimirović Lj. S., Minčić S. M., Stanković M. S.,** *Infinitesimal deformation of a basic tensor of a generalized Riemannian space*, Filomat 21:2, (2007), 237–244.

[107] **Velimirović Lj. S., Minčić S. M., Stanković M. S.,** *Infinitesimal rigidity and flexibility at non-symmetric affine connection space,* European Journal of Combinatorics, Vol 31, No.4 (2010), 1148–1159.

[108] **Weatherburn C. E.,** *Riemannian geometry and tensor calculus*, Cambridge University Press, 1950.

[109] **Yano, K.,** *Concircular geometry I-IV*, Proceedings of the Imperial Academy, (1940), Vol.16., 195–200, 354–360, 442–448, 505–511.

[110] **Yano, K.,** *Sur la thèorie des deformations infinitesimales*, Journal of Faculty of Science University of Tokyo, 6, (1949), 1–75.

[111] **Yano, K.,** *On harmonic and Killing vector Fields*, Annals of Mathematics 2^{nd} Ser., V.55, No1, (1952), 38–45.

[112] **Yano, K., Bochner S.,** *Curvature and Betti numbers*, Princeton, New Jersey, 1953.

[113] **Yano, K.,** *Differential geometry of complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, New York, 1965.

[114] **Yano, K.,** *On comlex conformal connections*, Kodai Mathematical Seminar Reports, 26(1975), 137–151.

Citirana literatura autora

[M1] **Zlatanović, M. Lj.,** Minčić, S. M., *Identities for curvature tensors in generalized Finsler space*, Filomat 23:2 (2009), 34-42.

[M2] Stanković, M. S., Velimirović, Lj. S., Minčić, S. M., **Zlatanović, M. Lj.,** *Equitorsion conform mappings of generalized Riemannian spaces*, Matematički Vesnik, 61 (2009), 119-129.

[M3] Stanković, M. S., Velimirović, Lj. S., **Zlatanović, M. Lj.,** *Some relations in the generalized Kählerian spaces of the second kind*, Filomat 23:2 (2009), 82-89.

[M4] Stanković, M. S., **Zlatanović, M. Lj.,** Velimirović, Lj. S., *Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the first kind*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 60, No. 3, (2010), 635–653.

[M5] Stanković, M. S., Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., **Zlatanović Lj. M.,** *On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces,* Rendiconti del Seminario Matematico Della Universita di Padova, prihvaćen za štampu.

[M6] Minčić, S. M., **Zlatanović Lj. M.,** *New commutation formulas for δ-differentation in a generalized Finsler space,* Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol.12, (2010), 145-157.

[M7] Stanković, M. S., **Zlatanović, M. Lj.,** Velimirović, Lj. S., *Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the second kind*, International Electronic Journal of Geometry, Vol. 3, No.2 (2010), 26-39.

[M8] Minčić, S. M., **Zlatanović Lj. M.,** *Derived curvature tensors in generalized Finsler space,* Differential Geometry-Dynamical Systems, prihvaćen za štampu.

[M9] Stanković M., Ćirić M. and **Zlatanović Lj. M.,** *Geodesic mappings of equiaffine and anti-equiaffine general affine connection spaces preserving torsion,* poslat na recenziju.