МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Мастер рад

НЕРЕШИВИ ПРОБЛЕМИ АНТИЧКЕ МАТЕМАТИКЕ

Ментор
проф. др Зоран Лучић

Студент
Јасмина Рађеновић

Београд, 2014.г

Садржај

Предговор

Кроз векове многи филозофи су подржавали идеју да разумевање математике представља највећи стандард знања. Ми, који волимо математику, у потпуности ћемо се сложити са овом констатацијом, али поставља се питање како објаснити ученику који од првог дана има проблема са разумевањем математике њену важност и утицај на остале гране како друштвених тако и природних наука.

Овај мастер рад је замишљен и написан из перспективе професора математике. Кроз моје дугогодишње искуство у настави математике увидела сам значај историје математике да би се пробудила знатижеља ученика за изучавање појединих проблема.

Математику многи студенти доживљавају као предмет лишен историје. Професор постаје извор свега што треба да се научи и разумевање процеса настајања математичких креација и тврдњи су у потпуности изгубљени. Да би се разбила та предрасуда професор може укључити у своје предавање позадину проблема, обогаћену анегдотама о математичарима укљученим у откриће и решење проблема, а бољег примера за то нема од три чувена проблема античке Грчке који су тема овог рада.

Тема првог поглавља је значај познавања историје математике од стране предавача, где предавач може да заинтересује слушаоца за проблем давањем историјског развоја проблема који предаје јер повезује не само како је решен проблем већ како и зашто је настао.

Друго поглавље описује елементарне конструкције које су база за ове проблеме и уопште дефинише појам конструкције. Значај ових проблема је у томе што се они могу тачно геометријски решити помоћу коначног броја конструкција правих линија и кружнице. У својој књизи *Историја грчке математике*, Т. Хит помиње да су Грци класификовали проблеме према методама коришћеним да се они реше. Они су их делили на планиметријске, стереометријске и линеарне проблеме.

Поглавље о удвостручењу коцке почиње са упрошћеним проблемом удвостручења квадрата, затим се дотиче историјских чињеница и легенде проблема. У наставку су изложени следећи докази: Архитин који користи тродимензиону конструкцију, Менехмов доказ који у свом покушају да реши *Делски проблем* открива криве које ће касније бити познате као елипса, парабола и хипербола, на крају поглавља је Платонова конструкција која користи инструмент да би се решио проблем што у исто време представља контрадикцију са његовим ставовима о помагалима за решавање конструкцијских проблема.

Поглавље квадратуре круга почиње са проблемом бр. 48 старо-египатског Риндовог папируса. Затим се објашњавају идеје старих Грка, Антифонта и Брисона. Након тога један део је посвећен Хипократовим лунулама као и покушаји решавања проблема уз помоћ кривих: Хипијине квадратисе и Архимедове спирале.

Пето поглавље, трисекција угла, почиње решењем проблема коришћењем квадратисе, затим се представља Архимедово решење које се може сматрати једним од првих механичких решења и наставља са Никомедесовом механичком направом да би се конструисале криве конкоиде. Поглавље се завршава са решењем које користи конусне пресеке.

Следеће поглавље описује решења ових проблема савременом математиком са поменом Венцеловог решења и трансцедентности броја π. Последње поглавље представља рефлексију историјског значаја ових проблема.

Захваљујем се на подршци својој породици као и професору Лучићу и надам се да ће мој рад подстаћи садашње и будуће предаваче математике на размишљање о имплементацији историје математике у своја предавања.

Математички факултет
Београд, 2014. година

Јасмина Рађеновић

1 Значај историје математике са освртом на нерешене проблеме

1.1 Историја математике у учионици и зашто је наставници морају знати

Ефективно предавање укључује много више него математичку компетенцију предавача. Боље математичко знање појединца не значи да ће бити и бољи предавач. Математика је позната као дисциплина коју није једноставно предавати. Поставља се питање да ли боље познавање математичке историје може помоћи професору у бољем разумевању, а самим тим и бољем приступу у објашњавању проблема прихватљивом за ученике.

Историју математике није једноставно укључити у градиво математике. Уколико питате наставнике шта они мисле о тој теми већина ће одговорити да су свесни важности историје математике, али да немају довољно времена да и то укључе поред свих области које морају да покрију. Обимност градива, превелик број ученика у разреду и презаузетост школском администрацијом многе наставнике у средњим школама одбија од ове теме, а они који се усуде да то предају обично то раде као ученичко истраживање историјских догађаја од важности за математичаре и то у облику пројекта, односно индивидуалног рада ученика.

Управо због ових разлога, многи ће да одбаце и омаловаже идеју да је знање историје математике од значајне важности како за професоре, тако и за ученике. Ја сматрам да је историја математике важна и педагошки јер обезбеђује потребу да разумемо зашто нешто учимо у математици. Важност наставе није само у меморисању чињеница и унапређењу вештина већ како помоћи ученицима да науче како да примене своје знање. Моје убеђење о важности историје математике у настави је засновано на двема претпоставкама о начину учења:

1. Што су више заинтересовани, ученици ће више и да науче;
2. Решавањем већег броја задатака долази до бољег разумевања садржаја.

> *"да би се одржало добро предавање из геометрије, постоји услов без којег се не може, а то је знање геометрије. Ако се томе дода знање историје проблема коме је предавање посвећено, а уз то и познавање домета у људском стваралаштву, градитељском, научном, уметничком, војном или каквом другом, који су настали захваљујући геометријским знањима, онда има више изгледа да предавање буде оцењено успешним"*
> (З.Лучић - *Огледи*, 2008.)

Историјска анализа различитих проблема омогућује и професорима да боље разумеју зашто ученици имају потешкоће са одређеним градивом. Готово у свакој области математике могу се наћи примери кроз чију интеграцију се унапређује предавање и учење математике. Три нерешива проблема античке Грчке коришћењем лењира и шестара: Удвостручење коцке, Квадратратура круга и Трисекција угла, представљају упознавање ученика са класичним проблемима из историје математике и изучавање њиховог значаја и важности. Ова врста задатака може значајно увећати ученичку заинтересованост и развити позитивни став према учењу математике. Верујем да употреба одређених историјских проблема може допринети јачању развоја математичких вештина и расуђивања код ученика.

Историја математике снабдева људску позадину предмета, повезује математику са људима и њиховим потребама. Она није нешто магично и тотално страно, математика је знање усавршено од људи у периоду од преко 10 000 година. Ти људи као и ми, или наши ученици правили су грешке и често су били запањени и збуњени, али су остали упорни у решавању проблема. Математика је била и остала окренута људским потребама тако да њено предавање треба ово да препозна и гради на чињеници да укључивање историје математике постане фундаментални део учења.

Активности које укључују копирање историјских искустава и догађаја омогућавају ученицима да активно учествују у извршавању математичких открића. Извршавање класичних грчких конструкција лењиром и шестаром представља изврстан пример те активности. Ученици почињу да разумеју експерименталну природу математичке истраге и уједно цене креативност математичара тог времена.

Начин на који се историја математике може користити као и образложење о њеном коришћењу разликују се од образовног нивоа ученика. Студенти на универзитету и ученици у основној школи имају другачије потребе и могућности. Да би се одредило на ком нивоу то постаје значајно, неопходно је разликовати питања о коришћењу историје математике у ситуацијама где је непосредна сврха уствари предавање математике или њено предавање као посебна мини лекција. Различите области математичког програма, у зависности од узраста ученика, упућују наравно на другачије аспекте историје математике и коришћење различитих модела се може показати релевантно. Искуство предавања и учења математике у различитим деловима света, као и културни контексти локалног значаја такође су од значаја за математички развој. Уколико ученик схвати да је локално наследство од директних потомака на неки начин допринело знању и искуству изучавања математике, почевши од арапске, грчке, кинеске, модерне европске математике, оспособиће га за важну подршку самог процеса учења. Последице укључења историје су далекосежне.

1.2 Истинитост легенди ових проблема

Ова три проблема представљају вероватно један од највише документованих проблема математичке историје. Са решењима која су се понављала од пре Еуклидовог периода, кроз хеленско и грчко-римљанског периода док коначно нису решена у 19. веку. У таквом обиму докумената често су се налазили докази писани од људи који су врло мало знали о математици и који су имали проблема да у потпуности разумеју како проблем тако и решење проблема, па су прибегавали разним интерпретацијама. Један од првих примера где коришћење нематематичких извора за илустрацију проблема удвостручења коцке је у делу Плутарха[1] који у свом делу *Демони Сократа* први пут наводи проблем и наговештава утицај политичких, економских па и религијских фактора. Проблем се необјашњава само са техничке природе већ како његово решење уствари преплиће филозофију и математику.

Кнор[2] предлаже да се прво оствари хронолошка линија разних решења што се, иако у основи једноставан задатак показује као доста тежак. Атрактивност ова три проблема су изнова постајала занимљива откривањем нових техника. Тако откриће специјалних случајева за трисекцију угла враћају пажњу на удвостручење коцке и представљају опцију као могуће решење проблема. Како одредити хронолошки низ ових докумената је изазов за сваког ко се бави истраживањем ових проблема.

За другу препоруку Кнор предлаже да се решења класификују према зависности како су стари Грци делили проблеме: према начину на који су решавани, затим према важности којем су им давали и на крају која су ограничења постављали за прихватљиво решење проблема.

Као трећу препоруку наводи да се обрати пажња колико писци ових проблема у ствари обраћају пажњу на оригиналност текста проблема, као и какву и колику сврху имају те промене у тексту. Проблем у текстовима ће се односити на геометријски проблем односно на конструкцију фигуре као решења. У сваком случају да би се одлучило о оригиналности неког документа потребно је имати на уму да је геометрија укорењена у суштини у решавању практичних проблема.

[1]Плутарх из Херонеје(46 нове ере-120) један од најобразованијих и најплоднијих писаца у римском периоду хеленске књижевности, познат по раду *Биографије војсковођа и државника* као и Етичком зборнику мешовитим списима под називом *Моралиа*.

[2]Кнор(Авг.1945-Март 1997) Амерички историчар математике, професор на Станфорд универзитету, који се често помиње као један од великих ауторитета из области историје античке математике

2 Геометријске конструкције

2.1 О геометријским конструкцијама које се извршавају ограниченим средствима

Геометрија је једна од најстаријих математичких дисциплина. Антички Грци су порекло своје науке заснивали на традицијама још старијих цивилизација, Сумерићана, Вавилонаца, Египћана. Оно што их је разликовало од осталих је то што су они први инсистирали на разумевању математике које није инспирисано религијом или политиком тог времена. Са овим новим филозофским размишљањем промовисало се разумевање, и ускоро је започета математичка револуција, нарочито геометрије, која се у поређењу са осталим научним гранама најдаље усавршила за време античке Грчке.

За коришћење и продубљивање геометријских знања често су се користили конструктивни проблеми. Ови проблеми развијају строгост у резоновању, терају на испуњење формализма, развијају алгоритмичан начин размишљања, подстичу машту и класификују идеје. Стандардна средства за извођење геометријских конструкција су лењир и шестар. У принципу лењир служи само за повлачење праве спајањем двеју тачака. Међутим постоје лењири са поделом који служе за интерпретацију метричких проблема, лењири са двема паралелним ивицама који служе за повлачење паралелних правих, затим троуглови који служе цртању углова од 30°, 45°, 60° . У Еуклидово време, сматрало се да шестар колабира чим се макар једна његова ножица подигне са хартије. Касније се као нова врста прибора појавио шестар са фиксним отвором. Тек касније се појавио шестар са прилагодљивим отвором. Стари Грци су изводили своје конструкције коришћењем разних прибора, али су највише ценили оне које су урађене коришћењем само лењира и шестара. Касније се испоставило да свака конструкција која може да се изведе помоћу лењира и колабирајућег шестара може да се изведе и помоћу лењира и шестара са прилагодљивим отвором. Лењир и шестар у геометријској конструкцији немају првенствено карактер техничког, него у првом реду логичког средства. Важност изучавања ових конструкција лежи у богатству проблема који се могу поставити на овај начин. Важно је да се анализира конструкција да би се видело зашто је примењива.

2.2 Основне конструкције

У Еуклидовим елементима истакнуто место су заузимале грчке геометријске конструкције, које су се понекад звале и Еуклидове конструкције. Ове конструкције су у основи три класична геометријска проблема (1) квадратуре круга, (2) удвостручењу коцке и (3) трисекцији угла. Стари Грци нису могли да реше ове проблеме. Тек негде почетком деветнаестог века доказано је да су то нерешиви проблеми под лимитима представљеним у проблемима. Све конструкције су повезане са прва три Еуклидова постулата : Нека се претпостави:

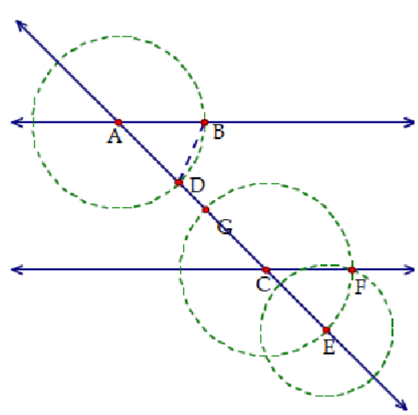
1. Да се може повући од сваке тачке ка свакој другој тачки права линија
2. Да ограничена права може бити продужена у сваком правцу непрекидно.
3. Да се може описати од сваког средишта сваким растојањем круг
4. Да су прави углови једнаки међусобно

5. Да ће се, ако једна права у пресеку са другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве, бескрајно продужене сећи и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права.

Многе Еуклидове конструкције укључују геометрисјку форму алгебре. Уколико је дата јединична дуж, дужи a и b могуће је конструисати следеће дужи: $a+b$,$|a+b|$, ab,$\frac{a}{b}$ и $\sqrt{ab}$. Да би се урадиле ове конструкције неопходно је направити конструкцију паралелне линије. Поступак ове конструкције као и овиих предходних је објашњен у следећих неколико пасуса користећи управо прва три Еуклидова постулата.

2.2.1 Паралелне линије

Нека је дато: Права AB и тачка C која није на правој AB
Конструисати: Праву паралелну AB која пролази кроз дату тачку C



Слика 1: Паралелане линије

1. Конструисати праву користећи лењир.

2. Шестаром конструисати круг са центром у A и полупречником $|AB|$. Нека тачка D представља пресек праве AC и овог круга.

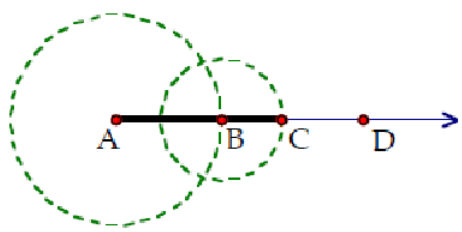
3. Шестаром конструисати круг са центром C и полупречником $|AB|$. Нека тачка E представља тачку пресека праве AC и овог круга. Тачка E није између тачака A и C.

4. Шестаром конструисати круг са центром у тачки E и полупречником $|DB|$. Нека је тачка F пресек ова два круга.

5. Лењиром конструисати праву која пролази кроз C и F. Тада је $AB \parallel CF$.

2.2.2 Збир две дужи

Нека је дато: Две дужи x и y
Конструисати: $x + y$



Слика 2: Збир две дужи

1. Лењиром конструисати праву AD тако да је $AD > x + y$.

2. Шестаром конструисати круг са центром A и полупречником x. Нека тачка B представља пресек овог круга и праве AD.

3. Шестаром конструисати круг са центром у B и полупречником y. Нека је C тачка пресека овог круга и праве BD.

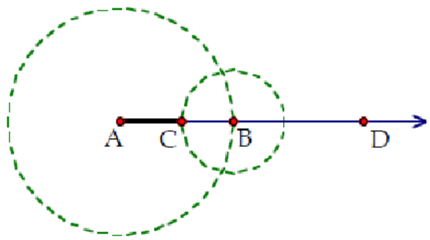
4. Лењиром повезати тачке A и C. Тада је $AC = x + y$.

2.2.3 Разлика две дужи

Нека је дато: Две дужи x и y
Конструисати: $x - y$

1. Лењиром конструисати праву AD.

2. Шестаром конструисати круг са центром A и полупречником x. Нека тачка B представља пресек овог круга и праве AD.



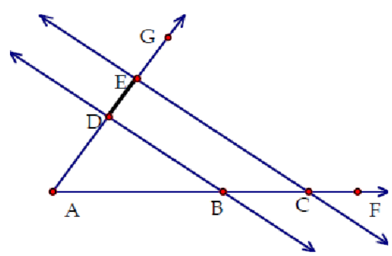
Слика 3: Разлика две дужи

3. Шестаром конструисати круг са центром у B полупречником y. Нека је C тачка пресека овог круга и праве AB.

4. Лењиром повезати тачке A и C. Тада је $AC = x - y$.

2.2.4 Производ две дужи

Нека је дато: три дужи x, y и јединична дуж
Конструисати: xy



Слика 4: Производ две дужи

1. Лењиром конструисати праву AF тако да $AF > 1 + x$.

2. Шестаром конструисати круг са центром у A и полупречником од јединичне дужи. Нека тачка B буде пресек овог круга и праве. Тада је $AB = 1$.

3. Шестаром конструисати круг са центром у B и полупречником x. Нека је C тачка пресека овог круга и праве BF. $BC = x$.

4. Лењиром конструисати праву AG тако да тачка G није на правој AF.

5. Шестаром конструисати круг са центром у A и полупречником y. Нека је D тачка пресека овог круга и праве AG. $AD = y$.

6. Лењиром конструисати праву DB.

7. Конструисати праву паралелну правој DB која пролази кроз C.

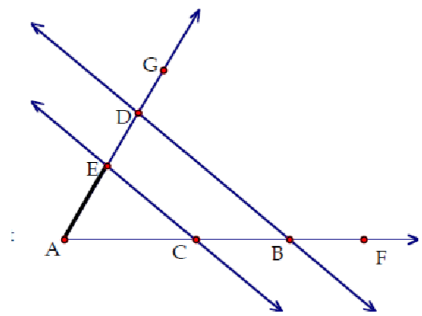
8. Нека је E тачка пресека ове праве са правом AG.

9. Лењиром спојити тачку D са тачком E. Тада је $DE = xy$.

Како је $BD \parallel CE, \triangle ACE \sim \triangle ADB$(два троугла су слична, ако имају по два одговарајућа угла једнака). Према томе следећа пропорција је тачна $\frac{1}{x} = \frac{y}{DE}$, $DE = xy$. Према томе конструкција производа је могућа.

2.2.5 Количник две дужи

Нека је дато: три дужи x, y и јединична дуж
Конструисати: $\frac{y}{x}$



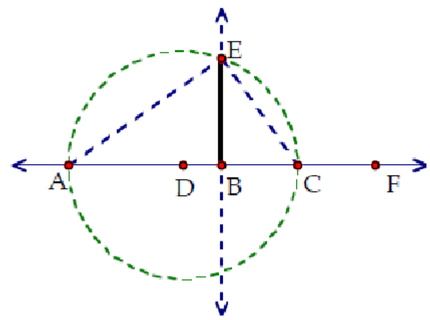
Слика 5: Количник две дужи

1. Лењиром конструисати праву AF.
2. Шестаром конструисати круг са центром у A и полупречником од x дужи. Нека тачка B буде пресек овог круга и праве AF. $AB = x$.
3. Шестаром конструисати круг са центром у A и полупречником 1. Нека је C тачка пресека овог круга и праве AF. $AC = 1$.
4. Лењиром конструисати праву AG тако да тачка G није на правој AF.
5. Шестаром конструисати круг са центром у A и полупречником y. Нека је D тачка пресека овог круга и праве AG. $AD = y$.
6. Лењиром конструисати праву DB.
7. Конструисати праву паралелну правој DB која пролази кроз C.
8. Нека је E тачка пресека ове праве са правом AG.
9. Лењиром спојити тачку A са тачком E. Тада је $AE = \frac{y}{x}$.

Како је $BD \parallel CE, \triangle ACE \sim \triangle ADB$ (два труогла су слична, ако имају по два одговарајућа угла једнака). Према томе следећа пропорција је тачна $\frac{1}{x} = \frac{AE}{y}$, $AE = \frac{y}{x}$. Према томе конструкција количника је могућа.

2.2.6 Квадратни корен

Нека је дато: Дуж x и јединична дуж
Конструисати: $\sqrt{x}$



Слика 6: Квадратни корен

1. Лењиром конструисати праву AF.
2. Шестаром конструисати круг са центром у A и полупречником од јединичне дужи. Нека тачка B буде пресек овог круга и праве AF. $AB = 1$.
3. Шестаром конструисати круг са центром у B и полупречником x. Нека је C тачка пресека овог круга и праве BF. $BC = x$.
4. Конструисати тачку D која представља средину дужи AC.
5. Шестаром конструисати круг са центром у тачки D и полупречником једнаким дужи $|AD|$.
6. Конструисати праву која пролази кроз B и управна је на AC.
7. Нека је E тачка пресека ове линије и круга са центром у D.
8. Тада је $BE = \sqrt{x}$.

Како је и $AC \perp BE$ и $AE \perp EC$, $\triangle ABE \sim \triangle EBC$ (два троугла су слична, ако имају два одговарајућа угла једнака), тада важи следећа пропорција: $\dfrac{1}{BE} = \dfrac{BE}{x}$, $x = BE^2$, $BE = \sqrt{x}$. Тако да је конструкција квадратног корена могућа.

Да би се објаснила нерешивост три проблема античке Грчке, неопходно је познавање пет конструкција. Како можемо користити само лењир и шестар, једине конструкције које се могу направити су кругови и дужи. Тачке пресека су конструисане као пресеци лукова круга (који су делови неког круга), тако да је свака следећа тачка пресек две линије, два круга или линије и круга. Да би се пронашле координате пресека потребно је решити или линеарну или квадратну једначину, што значи да ће број бити добијен коришћењем збира, разлике, производа, количника или квадратног корена што је представљено овим конструкцијама. Три проблема су нерешива под стриктним грчким условима за конструкције јер решења немају ове карактеристике. Докази нерешивости проблема су настали тек када су се геометријски концепти могли објаснити коришћењем алгебре.

3 Удвостручење коцке

Прво значајно и сачувано геометријско дело су Еуклидови *Елементи*. У њима су обухваћена многа ранија геометријска дела за које се сматрало да имају веома мали значај. Исто тако многи рукописи су игубљени јер се нису користили у предавањима у срединама античке математике, па се самим тим нису ни преписивали и током времена су нестајали.

Прокло, као лидер Академије у Атини у 5.веку пре Христа у своја предавања је укључио елементарну геометрију. Кроз његове коментаре се могу видети радови пре Еуклидове геометрије сакупљени од Аристотеловог ученика Еудема са Родоса почетком четвртог века пре Христа. Прокло и Симпликије су преписивали делове Еудемоновог дела. Текстови из преeуклидовог времена су веома ретки, по који пасус везан за математику често као део Платоновог или Аристотеловог дела који су у многоме коментарисали античке мислиоце. Значај ових текстова је велики јер нам даје увид у то како су настали докази појединих математичких истина.

Удвостручење коцке је проблем којим се захтева конструкција ивице коцке чија запремина је двоструко већа од запремине задате коцке. Овом проблему претходи проблем

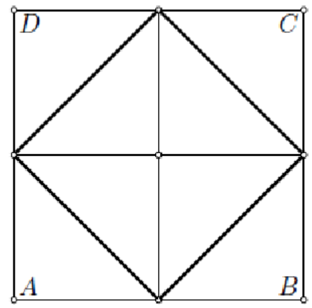
3.1 Удвостручење квадрата

Уместо тродимензионог проблема коцке проблем се своди на дводимензиони проблем квадрата који је једноставно решити. Најстарији доказ овог проблема се појављује у Платоновом делу *Менон* где Сократ покушава да докаже да је свако сазнање сећање. Да би илустровао ову тврдњу Платон уводи Сократа у детаљну математичку дискусију. Интересантно је да је то једини пример где Платон представља тако детаљан математички доказ.

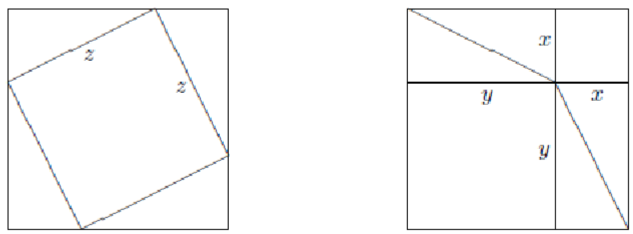
Проблем како конструисати квадрат који има двоструку површину оригиналног квадрата се решава тако што дијагонала оригиналног квадрата постаје страница двоструко већег. Сократ, који узима улогу учитеља кроз питања и напомене, покушава да доведе ученика, Менонoвог роба, до закључака које он није могао претходно знати.

Сократ наводи роба да конструише квадрат коме ће страница бити двоструко већа од почетног квадрата. Тада добија квадрат који је четири пута већи од оригиналног.

Ако се конструишу четири дијагонале, тада се добија централни квадрат који је направљен од четири подударна троугла док је оригинални направљен од два. Самим тим је централни квадрат површински два пута већи. У објашњењу овог доказа се може препознати доказ Питагорине теореме који представља преуређење делова квадрата.



Слика 7: Удвостручење квадрата



Слика 8: Доказ Питагорине теореме

3.2 Историја настанка проблема удвостручења коцке

Постоје две верзије о настанку проблема. У једној Теон из Смирне наводи Ератостена[3] који у свом раду *Платоник* повезује боговско пророчанство са престанком куге која је разарала острво Деле, где становници треба да направе олтар двоструко већи него што је постојећи да би се зауставило ширење болести. Суочени са проблемом који нису могли решити Дели одлазе до Платона да га питају шта је бог мислио кад им је послао то пророчанство, нашта им Платон одговара да богу није до двоструког олтара колико да Грке посрами за запуштање учења математике и презир према геометрији. Куга је наравно била велики догађај у историји Атине и скоро четвртина становништва је умрла од ње. То се догодило 430 година пре Христа па ако има неке истине у причи можемо дати релативно тачан датум постанка проблема. Ово је такође доследно са раним доприносом Хипократа проблему. Проблем је постао познат као *Делски проблем.* Друга верзија проблема је мало другачија. Појављује се као писмо Ератостена краљу Птоломеју. Ово писмо наводи Еутокије у свом коментару Архимедовог дела *О сфери и цилиндру* сфери и цилиндру". Иако се испоставило да ово писмо није аутентично и да га је Еутокије преписао без провере и придружио свом коментару писац ипак наводи нека права писања Ератостена. Ова прича је више заснована на грчкој митологији него на историјским чињеницама.

[3]Ератостен(275-194 старе ере) из Кирене, један од најсвестранијих научника хеленистичке епохе, познат по мерењу обима Земљине кугле као и због начина на који је распоредио просте бројеве- Ератостеново сито.

"Кажу да је један од древних трагичких песника на сцену поставио Миноја који је дао да се за Глаука изгради гроб. Када је чуо да је гроб дуг сто стопа у сваком правцу, рекао је: "Начинили сте премало краљевско пребивалиште, оно мора бити двапут веће. Брзо удвостручите сваку страну гроба, не кварећи његов диван облик." Чини се да је он начинио грешку. Када се удвостручи ивица, површина се увећа четири, а запремина осам пута. Геометри су стали да изучавају како да удвоструче дато тело не мењајући му облик, а овај проблем назван је удвостручењем коцке, будући да су почели са коцком у намери да је удвоструче."
(З.Лучић - *Огледи*, 2008.)

Први велики корак у решавању овог проблема је урадио Хипократ вероватно не задуго пошто се проблем појавио. Он га скраћује на следећи проблем: Уколико су дате две дужи довољно је пронаћи њихове две средње пропорционале. Што би значило ако су a и b задате дужи, довољно је наћи дужи x и y, њихове две средње пропорционале, такве да је

$$a : x = x : y = y : b.$$

Да би се решио проблем удвостручења коцке са нашим модерним разумевањем математике једноставно се разуме да су ова два проблема једнака. Ако су x и y средње пропорционале за a и b, тада је

$$\frac{a^3}{x^3} = \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}$$

па, ако је a ивица коцке и ако је задат однос $a : b$, тада ће и однос запремина коцки којима су ивице a и x бити једнак задатом односу. Исто тако

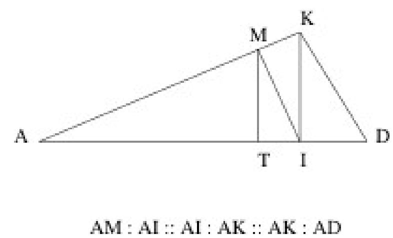
$$\frac{y^3}{b^3} = \left(\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}$$

па је и однос запремина коцки којима су ивице y и b једнак задатом односу $a : b$. У посебном случају када је однос дужи запремина коцке чија је ивица x биће двоструко мања од запремине коцке са задатом ивицом, а док је запремина коцке са ивицом двоструко већа од запремине коцке са задатом ивицом b.

Хипократ, као и други геометри, препознају да оваква редукција проблема не представља његово решење већ да Хипократ редукцијом овог проблема у облик који дозвољава примену нових геометријских техника пропорционалности омогућава нови начин решавања тешких проблема. Он постаје претходник геометријске анализе.

3.3 Архитина конструкција

Решење које је предложио Архита[4] представља најстарије и најоригиналније решење тог времена. Када узмемо у обзир да је он живео у првој половини четвртог века пре Христа његова идеја да предложи тродимензионалну конструкцију је још значајнија. У основи он решава редуковани проблем Хипократа о две средње пропорционале. Он покушава да пронађе две средње пропорционале AI и AK између две дате дужи AM, AD примењујући сличност троуглова приказаних на доњој слици



Слика 9: Архитина конструкција

Он полази од првоуглог троугла ADK са правим углом у темену K. Тачка I представља подножје праве под правим углом из тачке K на AD, где се формира нови правоугли троугао AIK. Тачка M представља подножје праве под правим углом из тачке I на AK. Тада је одређен низ правоуглих сличних троуглова AMI, AIK и AKD из којих произилазе следеће пропорције

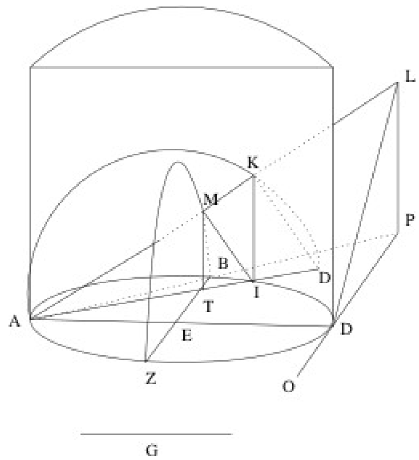
$$\frac{AD}{AK} = \frac{AK}{AI} = \frac{AI}{AM}$$

и одавде следи по Хипократовом скраћеном проблему да је

$$\frac{AD}{AM} = \frac{AI^2}{AM^2}.$$

Архитин доказ је комплексан јер користи тродимензионалну конструкцију. Кључна тачка K представља пресек две ротирајуће равне фигуре. Прва фигура је круг који је управан на раван $ABDZ$ и који почиње са пречником AED и фиксираном тачком A који се ротира у позицију AKD. Други је троугао APD који ротира од равни круга $ABDZ$ то позицију ALD. Када ове фигуре ротирају праве линију на површини полуцилиндра која је управна на раван $ABDZ$ и има ABD као базу. Не зна се шта је навело Архиту да направи овај невероватан просторни доказ да би конструисао

[4]Архита из Таранта(428-350 старе ере) био је Питагорејац и најпознатији је као оснивач механике. Његов рад је имао утицаја на античку теорију музике. Осма књига Еуклидових елемената садржи резултате који се приписују Архити.



Слика 10: Архитина Конструкција

троуглове са страницама у одговарајућој пропорцији и замисли ову тачку K као пресек ових фигура. Детаљни доказ следи у наставку.

Нека су задате две дужи AD и G. Треба наћи две средње пропорционале уз AD и G. Нека се око веће дужи AD опише круг $ABDZ$ и нека се нацрта тетива $AB = G$. Дуж AB је продужена тако да сече тангенту круга из тачке D у тачки P. Нека се повуче паралела линији PDO, и нека се замисли полуцилиндар управан на полукруг ABD, а над AD вертикални полукруг у равни правоугаоника тог полуцилиндра. Ако се овај полукруг (у вертикалном положају) заврти од D према тачки B тако да A мирује као крај пречника, сећи ће површ полуцилиндра и описаће на њему неку линију. Ако се опет троугао APD, док мирује AD, заврти у супротном смеру од полукруга, права AP описаће површ конуса који ће у кружењу пресећи линију на цилиндру у некој тачки. Уједно ће и тачка B описати полукруг на површи конуса. Сада нека положај полукруга у кретању буде $D'KA$, а положај троугла који се креће у супротном смеру нека буде DLA. Када се ове две линије пресеку тачка поменутог пресека ће бити K.

Сад нека BMZ буде полукруг који описује тачка B, а заједничка тетива тог полукруга и круга $BDZA$ нека буде BZ. Од тачке K нека се повуче управна на раван полукруга BDA. Она ће пасти на обод круга јер је цилиндар прав. Нека она буде KI, а права која повезује I и A нека сече праву BZ у тачки T, а права AL нека сече полукруг BMZ у тачки M. Нека се споје K и D', M и I, M и T. Како је сваки од двају полукругова $D'KA$ и BMZ управан на основној равни, њихова заједничка тетива MT је управна на равни круга, (3. додатак Еуклидов став $XI.19$) зато је и MT управна на BZ. Дакле, правоугаоник над TB и TZ, и зато и над TA и TI,(4. додатак став $III.35$ из Еуклидових елемената)једнак је квадрату над MT. Стога је троугао AMI сличан сваком од троуглова MIT и MAT, а зато је угао IMA прав. Али и угао $D'KA$ је прав. Паралелне су дакле праве $KD'I$ и MI и због сличности троуглова је однос KA према AI исти као однос AI односи према AM. (Другим речима, $D'A : AK = KA : AI = IA : AM$)Дакле, четири дужи $D'A$, AK, AI и AM су непрекидно пропорционалне. Дуж AM једнака је дужи G, зато што је једнака и дужи AB. Дакле, двема задатим дужима AD и G нађене су две средње пропорционале AK и AI.

3.4 Менехмов доказ

Менехмо (380-320 пре Христа) је наводно први у покушају да реши Делски проблем открио криве које ће касније бити познате као елипса, парабола и хипербола које су дуго биле познате као Менехмове криве. Брат у то доба познатог геометра Динострата, Менехмо је рођен у Алопеконеји у Тракији (садашњој Турској). Био је пријатељ Платона и Еудоксов ученик и како је био познат као велики наставник Геометрије био је постављен за учитеља Александра Великог. Његово решење проблема је пронађено у Еутокијевој антологији *Коментари о Архимедовим сферама и цилиндрима*.

Начин на који он дефинише елипсу, параболу и хиперболу је интересантан јер бира раван управну на једној изводници конуса, па у зависности од тога да ли је угао конуса при његовом врху оштар, прав или туп, пресек равни и конуса назива елипсом, параболом или хиперболом. Проблеми који се односе на конусне пресеке постају познати после Аполонија из Перге и постају једна од најразвијенијих проблематика математике.

Менехмо такође полази од резултата Хипократа са Хиоса (430г пре Христа) који је претходно поменут и који решење Делског проблема редукује на конструкцију двеју средњих пропорционала x и y задатих дужи a и b таквих да је

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

и за случај дупликације коцке

$$\frac{a^3}{x^3} = \left(\frac{a}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{2a}\right) = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

Менехмо је представио две методе где показује како поменуте криве доводе до решења проблема дуплирања коцке.

Ако је $\frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ тада $y^2 = bx$

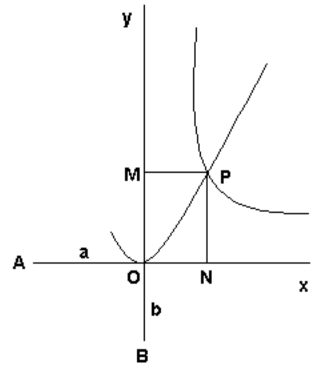
Ако је $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ тада $x^2 = ay$ и

Ако је $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$ тада $xy = ab$,

Прве две једначине представљају параболу док је трећа хипербола. Менехмово прво решње користи пресек параболе и хиперболе, а друго две параболе .

Ако претпоставимо да је проблем решен, те да је $ON = x$ и $PN = y$, а ON и PN две управне праве, из претпостављених пропорција следи да је

$$x^2 = ay \qquad \text{и} \qquad xy = ab$$

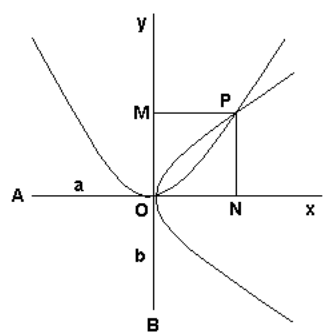


Слика 11: Менехмова конструкција

Дакле, закључујемо да тачка P припада једној параболи којој је теме O, и једној хиперболи чије су асимптоте праве ON и OM што значи да се тачка P може конструисати као пресек једне параболе и једне хиперболе.

Слично томе, како је $y^2 = bx$, тачку P је могуће конструисати и као пресек две параболе.

Иако је Менехмова конструкција сасвим теоријска јер се у њој не помиње никакво средство за конструкцију, већ само дефиниција конусних пресека, мало је вероватно да је он имао било какву идеју о релацији између кривих и једначина. Не постоји ни један доказ о постојању симболичког представљања непознате осим у геометријском смислу.

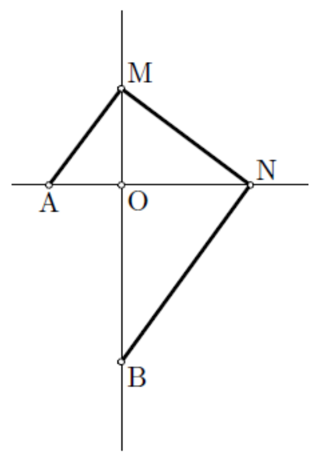


Слика 12: Менехмова конструкција

3.5 Платонова конструкција

Према Кнору приписивање овог решења Платону мора да је била грешка јер сам Платон[5] би вероватно приговорио коришћењу било каквог инструмента за решавање проблема јер би се то косило са правилима поставке проблема. Тако да Кнор предлаже да се ово решење уствари припише Еудоксу[6]. Према Ератостену, Платон се не бави решењем проблема, више га помиње у дискусији о природи геометрије и тумачи пророчанство проблема у складу са својим мишљењем да би се жалио на неразвијеност стереометрије.

Проблем се своди на то да би се за дате дужи OA и OB конструисале њихове средње пропорционале, довољно је на управним правама OB и OA конструисати тачке M и Nтакве да су AMN и BNM прави углови.



Слика 13: Платонова конструкција

Троуглови AOM, MON и NOB су међусобно слични, па је зато

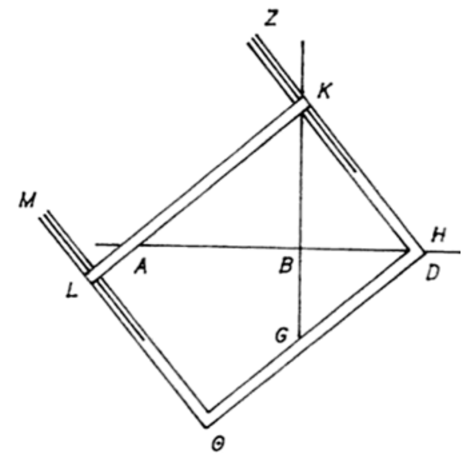
$$AO : OM = OM : ON = ON : OB.$$

Као што смо напоменули у Платоновом решењу се описује и механичко средство за конструкцију, "инструмент" вероватно направљен од дрвета, правоугаоног облика са жлебовима који су омогућили да се једна "ивица" помера паралелно дуж суседних двеју.

Ако се покретна ивица KL подеси тако да рубом пролази кроз A, а $D\Theta$ кроз G, док је H на правој BA, а K на BG, тада K и H одређују тачке M и N на правама BA и BG, које треба конструисати. Ово је прво практично и изводљиво решење Делског проблема.

[5]Платон из Атине(427-347 старе ере) основао филозофску школу- Академију. Његова дела су сачувана у целости. Уз Аристотела, он је најутицајнији од свих филозофа антике.

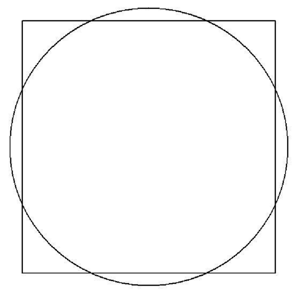
[6]Еудокс (око 480-355 старе ере) био је астроном, геометар, лекар, законодавац и бавио се астрономијом и географијом. Засновао је геометријску теорију пропорција назависно од услова самерљивости величина и методу приступа проблему граничне вредности - теорија екшаустије.



Слика 14: Платонов инструмент

4 Квадратура круга

Следећи проблем, који су вековима решавали математичари, научници и многобројни љубитељи математике, је како конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог круга.



Слика 15: Квадратура круга

Прво име које је повезано за решавање овог проблема је Анаксагора[7] који га је изучавао док је био у затвору. За античке Грке изучавање површине је било веома значајно. Они су изучавали површине геометријских фигура користећи површину квадрата. Грци су знали да израчунају површину троугла, правоугаоника, сваког многоугла, као и геометријског тела које је састављено од више равних геометријских фигура.

Како коришћење лењира и шестара представља конструкцију правих и кругова, питање површине круга се поставља као значајно за савремене геометре. Гледајући из перспективе данашње математике проблем квадратуре круга би се свео на конструкцију квадратног корена броја π.

Како је површина датог круга, полупречника r, једнака $P = r^2\pi$;

а површина квадрата странице a $\quad P = a^2$

изједначавањем површина добија се $\quad r^2\pi = a^2$

Након кореновања је: $\quad a = r\sqrt{\pi}$

Ако се поједностави проблем и стави да је $r = 1$ добија се

$$a = \sqrt{\pi}.$$

Из тога произилази да је страница квадрата чија је површина једнака површини јединичног круга једнака $a = \sqrt{\pi}$.

[7]Анаксагора из Клазомене(450-428 г.старе ере) филозоф који је оптужен за безбожниство, јер је сматрао Сунце усијани камен и Месец начињен од Земље. У затвору се бавио квадратуром круга.

Како су стари Грци знали како да конструишу квадратни корен што је показано у поглављу 2. Геометријске конструкције, проблем квадратуре круга се своди на проблем конструкције броја π.

Риндов папирус, који се чува у Британском музеју представља колекцију до тада познатих математичких сазнања, и садржи 87 задатака од којих је 80 алгебарских. На њему се појављују следећа сазнања која се могу повезати са квадратуром круга.

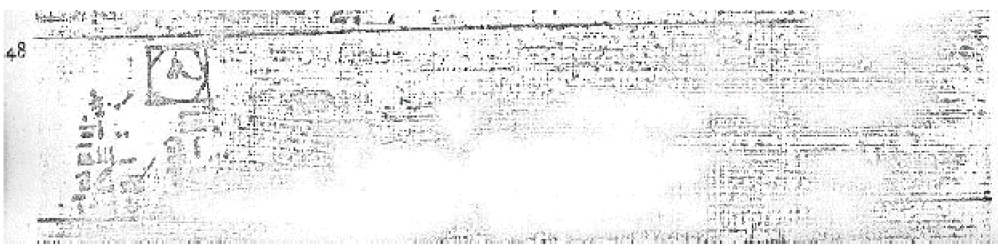
1. Број π је апроксимиран са 256/81 ($\pi = \dfrac{256}{81} \approx 3,1605$).

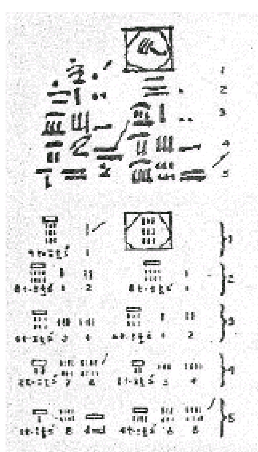
2. Површина круга се израчунава по формули:

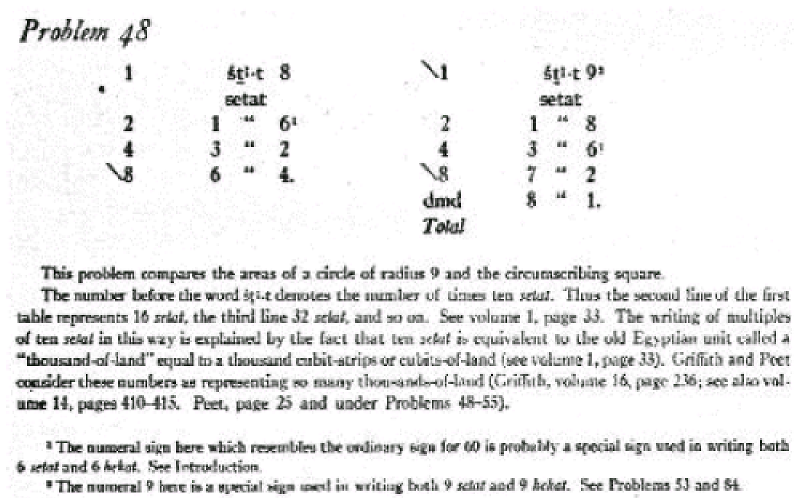
$$(\ P = \frac{64}{81}\ d^2)(d \text{ је пречник круга}).$$

3. Ако се пречник круга умањи за 1/9, добија се страница квадрата приближно исте површине као задати круг.

Интересантан је проблем 48 у коме се појављује сукцесивно смањивање површине квадрата тако да се појављује покушај апроксимације броја π.







Problem 48

1	ši-t 8 setat	\1	ši-t 9[2] setat
2	1 " 6[1]	2	1 " 8
4	3 " 2	4	3 " 6[1]
\8	6 " 4.	\8	7 " 2
		dmd *Total*	8 " 1.

This problem compares the areas of a circle of radius 9 and the circumscribing square.

The number before the word ši-t denotes the number of times ten *setat*. Thus the second line of the first table represents 16 *setat*, the third line 32 *setat*, and so on. See volume 1, page 33. The writing of multiples of ten *setat* in this way is explained by the fact that ten *setat* is equivalent to the old Egyptian unit called a "thousand-of-land" equal to a thousand cubit-strips or cubits-of-land (see volume 1, page 33). Griffith and Peet consider these numbers as representing so many thousands-of-land (Griffith, volume 16, page 236; see also volume 14, pages 410–415. Peet, page 25 and under Problems 48–55).

[1] The numeral sign here which resembles the ordinary sign for 60 is probably a special sign used in writing both 6 *setat* and 6 *hekat*. See Introduction.

[2] The numeral 9 here is a special sign used in writing both 9 *setat* and 9 *hekat*. See Problems 53 and 84.

Слика 16: Риндов папирус

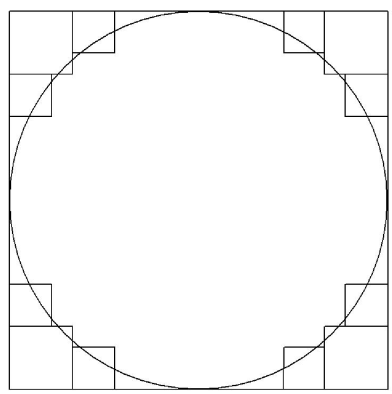
1. Ако се претпостави да је приближна вредност P_o површине круга пречника d, једнака површини квадрата који је описан око тог круга, тада је $P_o = d^2$, па је приближна вредност броја π једнака 4.

2. Ако површину квадрата умањимо за четири квадрата којима су странице $d/6$, тада ће приближна вредност површине круга бити:

$$P = d^2 - 4\left(\frac{d}{6}\right)^2 = \frac{8}{9}d^2$$

Одакле следи да је $\pi \approx 3.5555$.

3. Ако се настави овај процес па се површина овог квадрата умањи за осам квадрата којима су странице $a/9$ тада ће приближна површина круга бити



Слика 17: Сукцесивно смањивање површине квадрата

$$P = \frac{8}{9}d^2 - 8\left(\frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$$

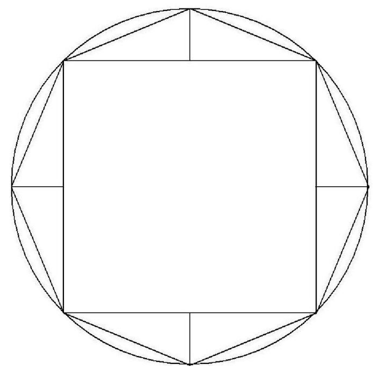
Све ово доводи до следеће апроксимације броја π.

4.1 Антифонт из Атине

Антифонтова[8] идеја је да се у задати круг уписују правилни многоуглови и у сваком наредном уписивању са дупло већим бројем страница. Према

[8]Антифонт је рођен у Атини у петом веку старе ере, бавио се космологијом, физиком и математиком, као и теоријом културе етиком и политиком.Сачувана су два његова дела *Истина* у две књиге и *О сложености*

Симпликију[9] полазна фигура је квадрат док према Темистију[10] тај полигон би био једнакостраничан троугао. Као аутентична верзија сматра се троугао, али се у литератури описује метод са полазно уписаним квадратом.



Слика 18: Антифонтов метод

Квадрат се упише у задати круг, и над његовим страницама се конструишу једнакокраки троуглови. Теме сваког троугла наспрам основне ивице тј. странице квадрата лежи на кружници. Темена квадрата и наведена темена троугла (осам укупно) су темена правилног осмоугла уписаног у круг. Уколико се поступак понови добија се правилни шеснаестоугао уписан у круг. Сваки наредни пут се број ивица удвостручује, обим и површина многоугла су све ближи обиму и површини круга и једном би се коначно многоугао и круг подударили. Како Антифонт зна да констрише квадрат исте површине као и задати многоугао из једнакости површина круга и многоугла следи и једнакост површина круга и квадрата. Практична важност Антифонтове конструкције је илистрована у Архимедовој методи где коришћењем уписаног и описаног правилног полигона са 96 страница, Архимед доказује вредност $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$.

Александар из Афродизије даје примедбу на Антифонтову идеју коментаром да круг може додирнути праву само у једној тачки, као и Еудем[11] који напомиње да је дуж неограничено дељива. Ипак Антифонтова идеја је зачетак Античке теорије мере која је у Новом веку названа *ексхаустија*, а темељи се на V књизи Елемената и принципу индиректног доказа.

Еуклид је у XII књизи Елемената изложио теорију мере коју је развио Еудокс. После Антифонта сличну идеју уписивања правилних многоуглова у круг користи Брисон.

[9]Симплики је живео у првој половини 6. века. Написао је коментаре за Аристотелову физику. Његови коментари су драгоцени јер је у њима сачувано мноштво цитата старијих геометричара и филозофа.

[10]Темистије (око 317-388) је најчувенији грчки софиста. Био је сенатор, васпитач царевића Аркадија и управник реторске школе.

[11]Еудем је био најзначајнији Аристотелов ученик, бавио се математиком и медицином и саставио је знамениту*Историју математике* .

4.2 Брисонов метод

Брисон(5.век пре Христа) који се појавио генерацију касније него Антифон, дошао је на сличну идеју. Он је поред тога што је уписао квадрат у круг и исто тако описао круг другим квадратом, користио средњи квадрат између ова два. По њему, ако је овај средњи квадрат већи од унутрашњег, а мањи од спољашњег и како су ствари које су веће или мање од исте фигуре према томе једнаке, следи да је површина средњег квадрата једнака површини круга. Са овим прорачунима Брисон је могао да апроксимира број π, и чак постави доње и горње границе вредности овог броја. Али због комплексности методе апроксимирао је π на пет децимала.

Разлика између ове две методе је у томе што Брисон користи квадрате уписане и описане око круга док Антифонт правилне полигоне. Критичари тог времена су напомињали важност овог принципа јер се може применити на области невезане за геометрију. Неки су сматрали овај да је овај међу квадрат аритметичка средина ова два квадрата, док су други то тумачили као геометријску средину. Брисон је вероватно умножавао број страница полигона сматрајући да ће уколико се настави овај процес у једном тренутку уписани и описани полигон бити једнак овом међу полигону.

4.3 Хипократове лунуле

Хипократ(470 - 410г. пре Христа) је грчки математичар из времена пре Еуклида. Већи део свог живота је провео на Хиосу па је логично претпоставити да је ту и рођен. Он се посебно истицао на пољу конструкција и сматра се као творац многих геометријских открића. Хипократу се приписује откриће методе за израчунавање површине лунуле.

О њему је писао Прокло (410 - 485г.) који је био управник неоплатонске школе у Атини чији коментари прве књиге Еуклидових *Елемената* и данас служе као важан извор знања историје геометрије преуклидског времена.

Хипократ у својим радовима први покушава да геометријска знања изложи у дедуктивној форми. Према Еудему, он је саставио прве *Елементе* и тиме започео дугу историју заснивање геометрије као дедуктивне теорије. Његове ставове Еуклид је касније укључио у I, III и VI књигу својих *Елемента*. Између осталог тврди се да од Хипократа потиче "хваљена грчка строгост" у геометрији.

Хипократ је био први који је користио раванску конструкцију да докаже постојање квадрата једнаке површине као фигуре са кружним страницама. При тим покушајима решио је проблем квадртуре лунуле (полумесец добијен од два полукруга) и тиме показао да "криволинијски лик" може бити једнак "праволинијском". Иако је Хипократ квадрирао поједине лунуле, он није показао да се свака лунула може квадрирати. Посебно је интересантно да лунула коју је он квадрирао коришћењем раванске конструкције квадрата чија је површина једнака површини одређене лунуле, али и да круг није могао квадрирати коришћењем тих метода. То наравно представља логичан закључак јер би у том случају Хипократ решио проблем квадратуре круга.

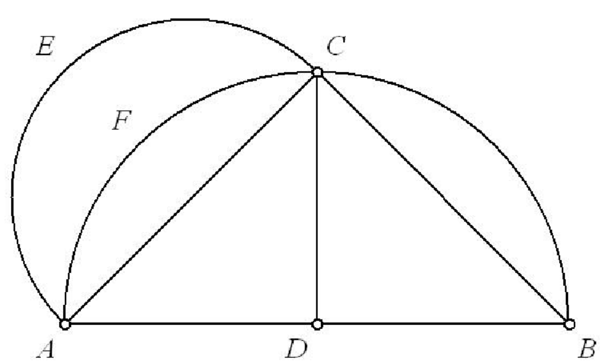
Први подаци о Хипократовим лунулама долазе од Александра из Афродизије у Карији. Он је био савременик цара Септимије Севера (193 - 211г.) и у то доба најзначајнији коментатор Аристотелових дела. Он је дао интерпретацију квадратуре лунула у два случаја. У Симпликијевим коментарима Аристотелове *Физике* записани су Александрови цитати [7, *vol.* I, стр.185], као и сегменти Еудемове *Историје геометрије* о Хипократовим лунулама [5, вол. I, стр. 346].

Хипократов доказ користи три прелиминарна тврђења:
1. Питагорину теорему ($a^2 + b^2 = c^2$)
2. Угао над полукругом је прав угао
3. Површине два круга се односе као квадрати над њиховим пречницима. (Еуклид $XII.2$)

Ако је дат једнакокрако-правоугли троугао збир површина лунула одређених од полукруга на хипотенузи и полукруга на катетама је једнака површини троугла. Нека је AB пречник круга коме је D средиште, а AC и BC ивице квадрата који је уписан у тај круг. Над ивицом AC као над пречником је описан је полукруг AEC. Повежу се тачке C и D. Како је

$$AB^2 = 2AC^2$$

а кругови се, као и њихови полукругови, односе као квадрати над њиховим пречницима, следи да је



Слика 19: Квадратура лунула

$$P(\textit{полукруга } ACB) = 2P(\textit{полукруга } AEC).$$

Такође је :

$$P(\textit{полукруга } ACB) = 2P(\textit{сегмента } ADC).$$

Где следи : $P(\textit{полукруга } AEC) = P(\textit{сегмента } ACD)$.

Одузимањем заједничког одсечка AFC са леве и десне стране једнакости добија се да је:

$$P(\textit{лунуле } AECF) = P(\triangle ADC)$$

при чему је извршена квадратура лунуле.

Нека од Хипократових тадашњих сазнања која су примењивана у појединим доказима су и:
• конструкција правилног шестоугла
• у правилном шестоуглу квадрат над дијагоналом је четири пута већи од квадрата над страницом.

Хипократу су такође била позната и следећа знања:
• однос између уписаних углова и лукова у кругу
• принцип сличности: површине сличних фигура су пропорционалне квадратима хомологих страница.
• конструкција описаног круга око троугла и једнакокраког трапеза
• Питагорина теорема за правоугли троугао и њено уопштење за тупоугле и оштроугле троуглове.

Оно што издваја Хипократа од осталих математичара његовог времена је да он захтева висок степен строгости у својим доказима као и то да је поседовао и вештину демонстративне технике. При конструкцији лунула он се није задовољавао да само са цртежа нешто буде јасно као нпр. да је спољашња граница већа од унутрашње, он користи и тадашњи математички апарат да то и докаже. Хипократове лунуле су значајне јер је показана квадратура криволинијских геометријских ликова, као и његова идеја редукције проблема удвостручења коцке на конструкцију средњих пропорционала. Његови *Елементи* су инспирисали Еуклида да прикупи тадашња геометријска знања и систематски их изложи у својим непревазиђеним *Елементи*.

4.4 Квадратиса

Под утицајем Платона, тадашњим математичарима је утемељен захтев, који до данас није одбачен, а то је да је у геометријским конструкцијама дозвољено коришћење само основних помагала: шестара и лењира. На тај начин је при решавању математичких проблема било дозвољено конструисати само кругове и праве.

Антички математичари би, када увиде да не могу да реше проблем само конструкцијама правих и кругова, успевали да пронађу одређене криве које би им омогућиле да дођу до тих решења. Најпознатије међу њима су: Хипијина квадратриса и Архимедова спирала.

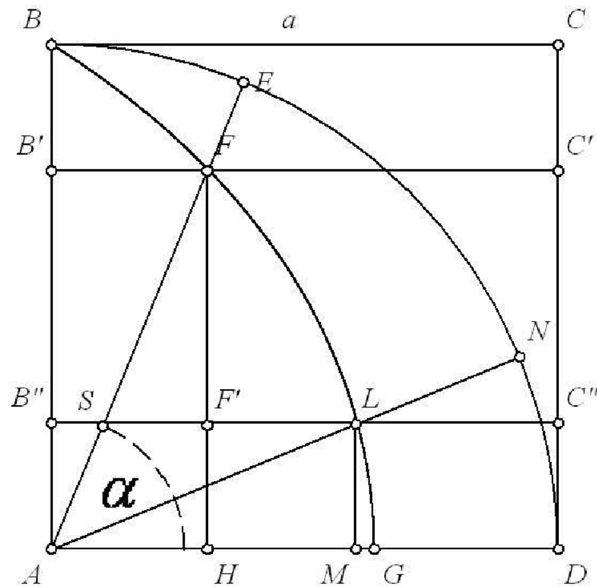
Хипијина крива квадратриса чије првобитно откриће настаје у решавању проблема трисекције угла, може се применити и код квадратуре круга. Назив квадратриса потиче од Лајбница. Прокло у својим коментарима за прву књигу Еуклидових *Елемената*, наводи да је чувени Хипија из Елиде "извео симптоме" квадратрисе. Језиком савремене математике значи извео једначину те криве. Опис Хипијине квадратрисе може се наћи код Папоса Александријског, у IV књизи његовог "Зборника". Папос описује квадратрису на следећи начин:

Нека је $ABCD$ квадрат и BED кружни лук са центром у темену A. Претпоставимо да се полупречник круга креће равномерно око тачке A, од позиције AB до позиције AD, и да се у исто време дуж BC креће равномерно, увек паралелно самој себи, од позиције BC до позиције AD, при чему се тачка B креће по дужи AB до тачке A.

На крају својих кретања покретна дуж и ротирајући полупречник ће се подударати са дужи AD. У било ком претходном тренутку њихових кретања дуж и полупречник ће се сећи у некој тачки, нпр. у F или L. Скуп свих пресечних тачака назива се квадратриса.

Из дефиниције квадратисе може се приметити да је однос дужи AB и BC једнак односу дужина лука BED и дужи AB. Свакој тачки те криве се може прићи довољно близу сталним половљењем: најпре лука BED и дужи AB, затим њихових половина, итд. стога је конструкција ове криве "практично" изводљива.

Како квадратису карактерише да је однос дужи AB и управне FH, једнак односу лукова BD и ED, однос управних FH и LM из двеју тачака F и L квадратисе биће једнак односу лукова ED и ND, где је N тачка лука BED која одговара тачки L квадратисе. Тада се решава проблем поделе угла BAD на n подударних углова, па такође и за $n = 3$, у посебном случају то представља решење трисекције угла.



Слика 20: Папосова квадратиса

4.4.1 Једначина квадратисе

Користећи се савременим аналитичким апаратом једноставно је утврдити једначину квадратисе.

Нека су на претходној слици праве AD и AB, x и y оса, нека је квадрат $ABCD$ јединични, $AB = AD = 1$, и нека је α дужина лука ED, тада је:

$$\frac{\pi}{2} : \alpha = 1 : FH$$

Ако су x и y апсциса и ордината тачке F, онда је

$$\frac{\pi}{2} : \alpha = 1 : y$$

Тада је

$$y = \frac{2\alpha}{\pi} \qquad \text{и} \qquad \alpha = y\frac{\pi}{2}.$$

Како је: $\dfrac{y}{x} = \tan\alpha$

Једначина квадратисе је:

$$y = x\tan\left(y\frac{\pi}{2}\right)$$

Квадратиса дефинисана на овај начин сече x-осу у тачки $2/\pi$. Из претходних релација следи:

$$x = \frac{y}{\tan\left(y\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha\ ,$$

Кад $\alpha \to 0$, $\cos\alpha \to 1$ и

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1,\ x \to \frac{2}{\pi}$$

што значи да је:

$$AG = \frac{2}{\pi}\ ,$$

па квадратиса сече x-осу у тачки $2/\pi$.

4.4.2 Квадратиса и квадратура круга

Како се помоћу квадратрисе може констрисати дуж $AG = \dfrac{2}{\pi}$ ако је задат полупречник r неког круга, користећи се особинама сличних троуглова, може се констрисати дуж u тако да важи релација:

$$\frac{2}{\pi}{:}r = r{:}u$$

$$2u = \pi r^2$$

Тада је могуће конструисати и дуж a, тако да је:

$$2u : a = a : 1$$

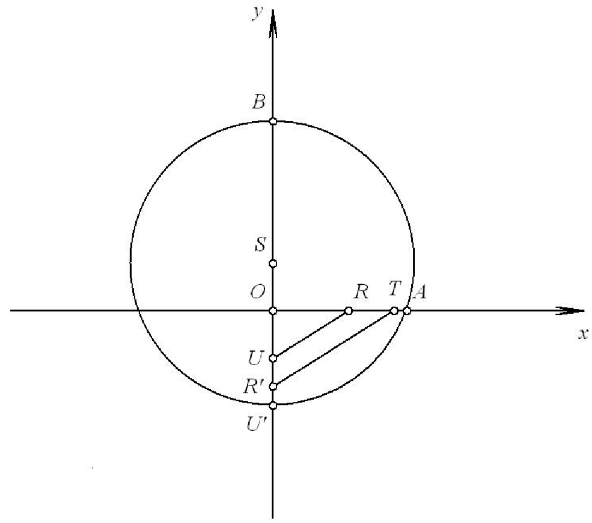
односно

$$a^2 = 2u$$

ако се примени сличност троуглова.

Нека су тачке R и R', редом, тачке са координатама $(r, 0)$ и $(0, -r)$, и $U(0, -u)$ тачка у којој права у тачки R паралелна правој која садржи тачке $T(2/\pi, 0)$ и R' сече y-осу. Важи да је:

$$\frac{2}{\pi}{:}r = r{:}u$$



Слика 21: Конструкција ивице квадрата једнаког датом кругу

Ако је $A(a, 0)$ тачка у којој x-оса сече круг којем су дијаметрално супротне тачке $B(0, 1)$ и $U'(0, -2u)$, важи:

$$2u : a = a : 1$$

На тај начин ће површина квадрата чија је ивица подударна конструсаној дужи $a = OA$ бити једнака површини задатог круга полупречника $r = OR$.

Према Папосу, Динострат је први заједно са Никомедом употребио квадратису за решење проблема квадратуре круга. У претходној Папосовој дефиницији квадратрисе нејасно је како се добија тачка G, јер на крају равномерног кретања обе дужи: ротирајући полупречник AB и померајућа дуж BC, долазе у исти положај, тј. поклапају се са дужи AD, па се не може јасно одредити њихова пресечна тачка. Претходна дефиниција могла би се употпунити додатком да је $AG = 2/\pi$:

Тада је:

$$\text{лук } BED : AB = AB : AG.$$

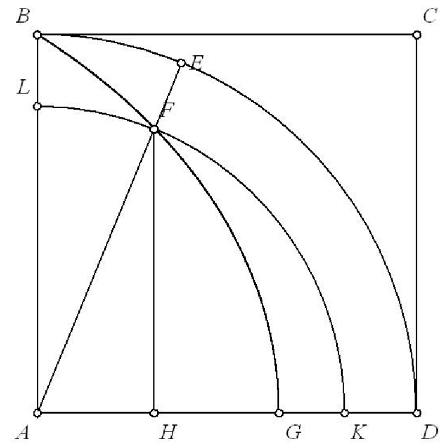
Важи и обрнуто тврђење, па је довољно доказати истинитост претходне релације да би се доказало да је $AG = 2/\pi$.

Доказ се изводи методом контрапретпоставке
тј. свођења на апсурд (*reductio ad absurdum*), претпоставком да наведени однос није тачан. Онда би важило:

$$\text{лук } BED : AB = AB : AK,$$

при чему је $AK > AG$ или $AK < AG$.

Овде ћемо размотрити случај $AK > AG$. Из темена A опише се лук полупречника AK, који сече страницу AB у тачки L, тако да се може означити са KFL. F је пресечна тачка лука и квадратрисе. Ако продужимо дуж AF она сече лук BD у тачки E. Подножје нормале из тачке F на страницу AD је тачка H.



Слика 22: Случај када је AK веће од AG

По претпоставци је:

$$\text{лук } BED : AB = AB : AK,$$

а како је $AK = AL$, важи и релација:

$$AB : AK = \text{лук } BED : \text{ лук } LFK.$$

Из претходне две релације следи однос:

$$\text{лук } BED : AB = \text{лук } BED : \text{ лук } LFK,$$

па и једнакост:

$$AB = \text{лук } LFK$$

Из дефиниције квадратрисе следи:

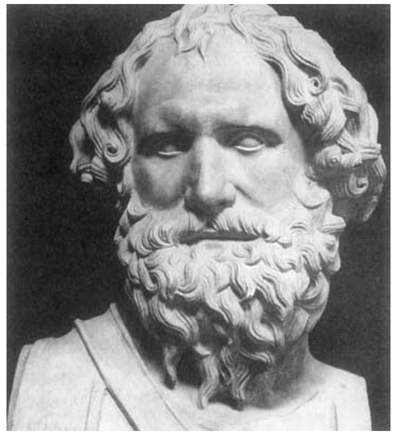
$$AB : FH = \text{лук } BED : \text{ лук } ED = \text{лук } LFK : \text{лук } FK$$

Из последње две релације би се добило:

$$FH = \text{лук} FK$$

што је немогуће тј. *апсурд*, па и полазна претпоставка да је $AK > AG$ не важи.

На сличан начин се доказује да је $AK < AG$ заменом улога тачака H и K.



Слика 23: Архимед

4.4.3 Квадратура круга помоћу Архимедове спирале

Архимед је рођен у Сиракузи на Сицилији 287. године старе ере, а умро је (вероватно убијен од стране римских војника) 212. године. Архимед, се сматра једним од највећих физичара старог века, самим тим се бавио и математиком, а био је исто и инжињер, проналазач и астроном. Архимед је својим открићима и делима дао велики допринос науци. Његова сачувана дела су: *О равансκом еквилибријуму* (две књиге), *Квадратура параболе*, *О сфери и цилиндру* (две књиге), *О спиралама*, *О коноидима и сфероидима*, *О плутајћим телима* (две књиге), *Мерење круга*, *Пребројавање зрна песка* и *Метода.*

Архимед се поносио својим делом *О сфери и цилиндру*, тј. израчунавањем површине и запремине лопте и ваљка, па су му по његовој жељи пријатељи и сродници на надгробни споменик уклесали ваљак са лоптом. У спису *О мерењу круга* Архимед је приближно израчунао вредност броја π. Његова три цитата: *"Нађите ми место на које да станем и помериђу Земљу"*, *"Не дирајте моје кругове"*, и *"Еурека!"* често су коришћена у илустрацијама како научних тако и ненаучних документа.

За потребе овог рада интересантно је како је доказана квадратура круга коришћењем *Архимедове спирале.*

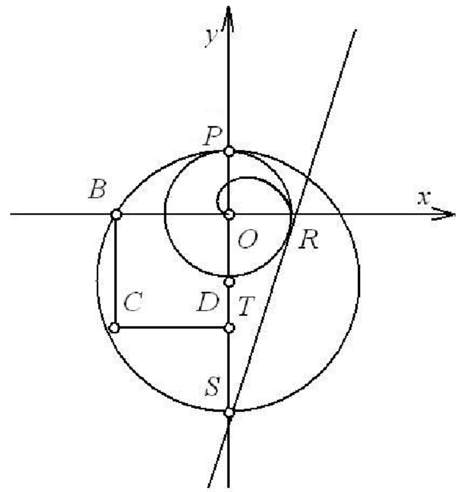
1. Конструише се јединични круг са центром у тачки O.

2. У поменутом кругу конструише се Архимедова спирала која чини један полуобрт пре него што пресече круг.

3. Из пресечне тачке R конструише се тангента на спиралу. Пресек нормале на полупречник круга (права OP) и тангенте је тачка S. $OS = \pi$, што се закључује на основу Архимедових теорема под редним бројевима: 2, 5, 7, 8, 14, 16 и 20 - I .

4. Конструише се тачка T, тако да је $TS = TP$, центар новог круга.

5. Опише се круг полупречника TS, да би се израчунао квадратни корен из броја π



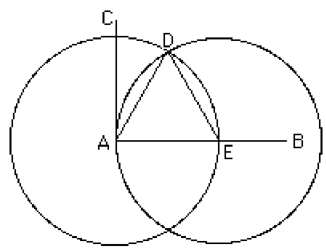
Слика 24: Квадратура круга коришћењем *Архимедове спирале*

6. Пресек праве која пролази кроз тачку O и која је нормална на дуж TS са кружницом полупречника TS је тачка B. Дуж OB је страница квадрата површине π.

5 Трисекција угла

Овај проблем је вероватно најмање чувен од сва три проблема Античке Грчке. Проблем трисекције задатог угла је вероватно један са највише погрешних доказа, што је савршено нормално јер је доказано да је таква подела немогућа коришћењем лењира и шестара.

Постоји неколико разлога зашто је овај проблем другачији него претходна два. Прво, историја проблема се не може повезати са тиме како је он покушаван да се реши. Друго, проблем је другачијег типа, јер је немогуће дуплирати коцку односно квадрирати круг, док је могуће поделити одређене углове на три дела. Поделити угао од 90° је једноставна конструкција.

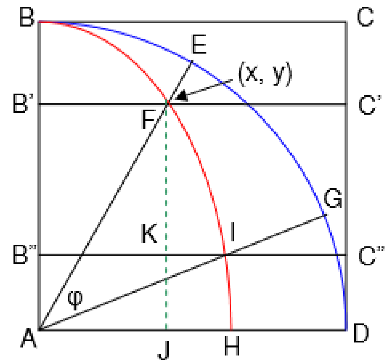


Слика 25: Трисекција угла од 90°

За задати прав угао CAB конструисати круг са центром у тачки A који сече страну AB у тачки E. Тада конструисати други круг са центром у тачки E и полупречником EA. Нека је тачка D, тачка пресека ова два круга. Троугао DAE је једнакостранични па самим тим је и угао DAE угао од 60°. Тада је угао CAD једнак 30°. Према томе извршили смо трисекцију угла CAB.

5.1 Решење трисекције угла коришћењем квадратисе

Хипиа из Елисе је био међу првима који је покушао да реши овај проблем. Хипијина квадратиса која је објашњена у претходном поглављу као специјалан случај има трисекцију угла. Као што смо рекли квадратиса представља скуп тачака ($BFIH$) који настаје пресеком две линије које се померају, AE (полупречник круга AB) и праве $B'C'$ која је паралелна правој BC и помера се у правцу AD.



Слика 26: Квадратиса

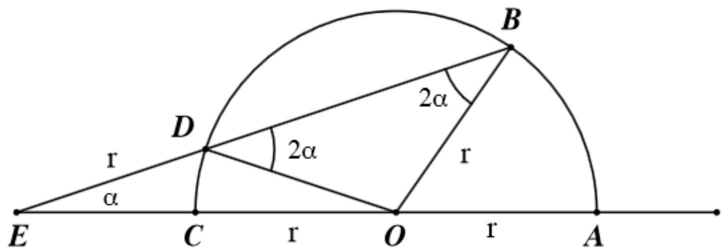
Нека је угао EAD тај који треба да буде подељен на три једнака дела. Нека је F тачка пресека стране AE и квадатисе и нека је $JK = \frac{1}{3}FK$. Конструисати праву паралелну AD која пролази кроз K. Нека је пресек ове праве и квадратисе тачка I, тада је угао GAD трећина угла EAD.

5.2 Механичка решења трисекције угла

Један од разлога зашто је овај проблем био мање привлачан античким математичарима је тај што је решење било једноставно пронађено коришћењем механичких помагала, па самим тим није задовољавао знатижељност која произилази из немогућности решења која постоји код претходна два проблема. Архимедово решење се може сматрати једним од првих механичких решења проблема.

Слика 27: Архимедов доказ

Нека је дат угао AOB, ако се продужи права OA у оба правца и конструише полукруг са центром у O и полупречником OA, тако да је C тачка пресека полукруга и продужене праве OA. Лењир се обележи са двема тачкама E,D



Слика 28: Верзија Архимедовог доказа

чији је размак једнак дужи OA тј. полупречнику. Лењир се помера тако да тачка E лежи на правој OA, тачка D је на полукругу и лењир пролази кроз тачку B.

Тада је:

$$DE = OA = OB = OD.$$

Како су $\triangle OBD$ и $\triangle DOE$ једнакокраки, тада су

$$\angle DEO = \angle DOE = \alpha \quad \text{и} \quad \angle OBD = \angle ODB = 2\alpha$$

Ово се лако доказује коришћењем теореме о спољашњим угловима у троуглу где знамо да је спољашњи угао у троуглу једнак збиру два несуседна угла. Тада је

$$\angle DEO + \angle DOE = \angle ODB$$

и тада је

$$\angle OBD = \angle ODB = 2\alpha.$$

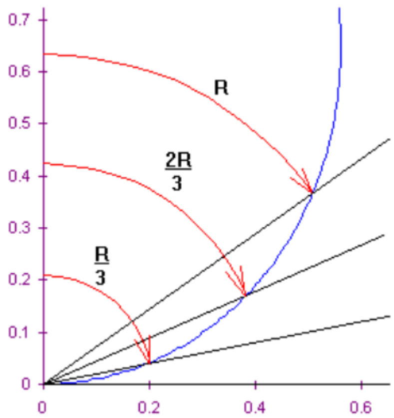
Исто тако је $\angle AOB = \angle DEO + \angle OBD$ тако је

$$\angle AOB = \alpha + 2\alpha = 3\alpha.$$

Архимедова спирала представља још један начин да се угао подели на три једнака дела, али се сама спирала не може конструисати помоћу лењира и шестара. Следећа слика илуструје ту трисекцију.

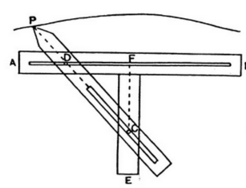
Битно је знати да је однос раздаљина између темена угла и било које тачке на спирали (R) и формираних углова увек константна. Из ове пропорције трисекција угла своди се на трисекцију дужи од темена угла до R тј. до спирале. Ако се резултирајуће подељене дужи ротирају тако да секу спиралу тада углови добијени на овај начин представљају трисекцију полазног угла.

Као и Архимедес тако је и Никомедес(280-210 пре Христа) користио означени лењир у свом доказу. Никомедес је познат по кривој коју зовемо Никомедесова конкоида која служи као основа трисекције угла. Датум његовог решења је релативно лако утврдити по Хиту јер се Никомедес истакао по



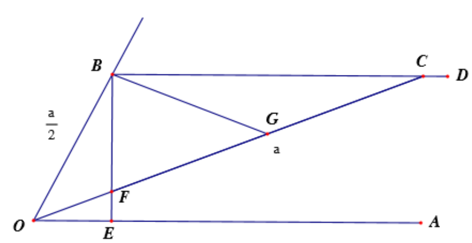
Слика 29: Архимедова спирала и трисекција угла

неповољним критикама Ерастотенових доказа о дуплирању коцке, а Аполоније је називао своје криве сестрама конкоида. Његов доказ је вероватно настао у периоду између Ерастотена и Аполонија. По Папосу постојале се различите верзије ове криве, али "прва" је коришћена у трисекцији угла. Никомедес је направио механичку направу да би конструисао ову криву.



Слика 30: Хит,*Историја грчке математике*, *p*.239

Справа се састојала од три лењира, AB са прорезом паралелним његовој дужини, њему управног FE са фиксном клином C и покретног PC са врхом P и прорезом за C. Клин D се слободно кретао дуж прореза на лењиру AB, а слично томе клин C се кретао по прорезу на лењиру PC. Никомедесов доказ трисекције се може илустровати следећим дијаграмом



Слика 31: Никомедесов доказ

Нека је дат $\angle AOB$. Констуише се права BD паралелна правој OA. Затим се конструише BE управна на OA. Тачка C је изабрана тако да је $|FC| =$

$2|OB|$, и тачка G је средина дужи FC. Тада је

$$\angle AOC \cong \angle BCO \quad \text{и} \quad \angle CBE \cong \angle BEO$$

(углови са паралелним крацима) $|BG| = |FG| = |CG| = |OB|$ јер је G средина хипотенузе правоуглог троугла, па према томе подједнако удаљена од његових темена.

Тада су $\triangle GBC$ и $\triangle BEO$ једнакокраки па су и следећи углови подударни

$$\angle CBG \cong \angle BCO \text{ и } \angle BOG \cong \angle BGO.$$

По теореми о спољашњим угловима троугла

$$\angle BGO = 2\angle BCO$$

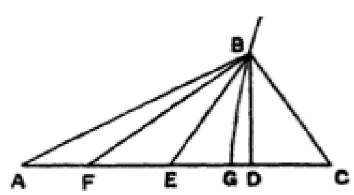
и према томе је

$$\angle BOC = 2\angle AOC, \quad \text{што показује}$$

$$\angle AOB = 3\angle AOC.$$

5.3 Решења коришћењем конусних пресека

Аполоније[12] је решио проблем трисекције угла користећи конусне пресеке конкретно хиперболе. Слично њему и Папос предлаже решења која користе хиперболу, и његов рад *Колекција* садржи дискусију трисекције угла на високом нивоу. Ове дискусије објашњавају како су антички Грци побољшали решење од механичког до решења које користи конусне пресеке. Даља прогресија решења проблема на раван је наравно била немогућа јер као што знамо данас, такво решење је немогуће. Хит у својим одломцима о Папосу коментарише о изванредности доказа који је постојећи до данас и који се односи на центар и директрису хиперболе.



Слика 32: Папосово решење

Нека је дата права AC и тачка B тако да ако се формира троугао BAC претпоставимо да је

[12]Аполоније рођен у Перги, уз Архимеда и Еуклида представља једног од најзначајнијих грчких математичара.

$$\angle BCA = 2\angle BAC$$

Нека се конструише управна кроз B на AC са пресеком у D. Нека је тачка E на дужи DA таква да је $DE = DC$.

Тада, како је $BE = BC$, следи да је $\angle BEC = \angle BCE$

$\angle BEC = \angle BAE + \angle EBA$ (спољашњи угао у троуглу је једнак збиру два несуседна угла),

и по претпоставци $\angle BCA = 2\angle BAE$ следи

$$2\angle BAE = \angle BAE + \angle EBA \quad \text{онда је јендоставном редукцијом}$$

$$\angle BAE = \angle ABE \ , \quad \text{па према томе и}$$

$$AE = BE.$$

Ако се AC подели тачком G тако да је

$$AG = 2GC \quad \text{или} \quad CG = \frac{1}{3}AC \quad \text{и нека је}$$

$$FE = ED \quad \text{тада је } CD = \frac{1}{3}CF$$

$$GD = \frac{1}{3}(AC - CF) = \frac{1}{3}AF$$

Сада је $BD^2 = BE^2 - ED^2 = BE^2 - EF^2$

Исто тако $DA \cdot AF = AE^2 - EF^2$

$$= BE^2 - EF^2$$

Па према томе $BD^2 = DA \cdot AF = 3AD \cdot DG$

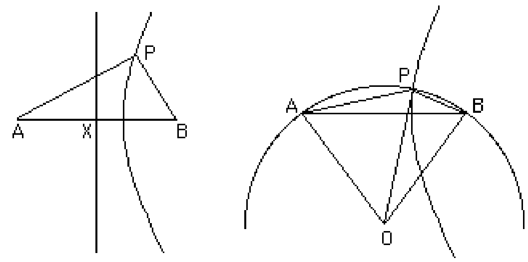
Користећи горе наведене једнакости

$$BD^2 : AD \cdot DG = 3 : 1$$

$$= 3AG^2 : AG^2.$$

Отуда је D на хиперболи где је AG реална оса, а имагинарна оса је једнака $\sqrt{3}AG$.

Ако желимо да поделимо лук AB круга са центром у O на три једнака дела, тада се одреди тетива AB и подели тачком C тако да је $AC = 2CB$ и конструише хипербола којој је AC реална оса, а права једнака $\sqrt{3}AC$ коњугована оса. Нека се хипербола и лук додирују у тачки P. Ако се повуку дужи PA, PO, PB, тада је по горњем примеру



Слика 33: Трисекција угла коришћењем хиперболе

$$\angle PBA = 2\angle PAB \qquad \text{и дупли углови се односе}$$

$$\angle POA = 2\angle POB \qquad \text{и према томе}$$

права OP дели лук APB као и угао AOB на три једнака дела.

6 Решења проблема савременом математиком

Антички Грци су знали да конструишу многе компликоване фигуре, као и многе углове користећи само лењир и шестар, додајући, одузимајући и делећи основне углове попут 60°, 90° и 180°. Они су свој фокус стављали на геометријску конструкцију и изванредано поштовање се мора дати њиховој мудрости у решавању нарочито проблема удвостручења коцке и трисекције угла јер су обезбедили неопходну основу за решавање квадратних и кубних једначина. Временом сви који су се бавили овим проблемима су се одмакли од физичких геометријских конструкција и почели да употребљавају прве тригонометријске релације у својим објашњењима које су повезане са алгебарским једначинама. Еволуција теорија једначина се може повезати са радовима на овим проблемима.

У шеснаестом веку Кардано(1501-1576) је објавио општу формулу за решење једначине трећег и четвртог степена у свом раду *Магична уметност* или само *Арс Магна* 1545, и дао геометријска објашњења свог метода. Франсоа Вијет(1540-1603) и Рене Декарт(1596-1650) су имали инструменталну улогу у увођењу и усавршавању симболичког обележавања неопходног за манипилацију промењивих и коефицијената у једначинама, напредак без кога трагање за решењима једначина вишег степена би било практично немогуће. Специјално је важно нагласити у дискусији ових проблема чињеницу да је Вијет приметио везу између једначина на којима је он радио и тригонометрије, посебно када је радио са несводљивим кубним једначинама које су се показале у основи доказа проблема о немогућности конструкције трисекције угла коришћењем лењира и шестара. Још један важан развој је Декартово откриће да се конструкције коришћењем лењира и шестара у Еуклодовој геометрији могу представити квадратним једначинама.

Гаус је тврдио да је доказао да је било који правилни n-тоугао могуће конструисати ако је $n-1$ степен броја 2, али тај рад никад није објавио. Конструисање правилних полигона је директно повезано са конструисањем углова, па самим тим и трисекцијом угла. У ствари ако се проблем трисекције угла упрости на поделу од n делова проблем се управо своди на проблем конструкције n-тагона.

Почетком деветнаестог века ови су проблеми коначно решени. Доказано је да ниједан од ова три проблема није конструктибилан коришћењем само правих и кругова. Тај доказ садржи алгебараску, а не геометријску методу која се заснива на томе да се праве и кругови могу описати линеарним и квадратним једначинама. Једначине које се користе у опису удвостручења коцке, трисекције угла и квадратуре круга се не могу редуковати на линеарне и квадратне.

Разлог зашто се толико чекало на решења ових проблема лежи у сазнању да је било неопходно унапредити разумевање математике тако сто ће се утемељити и развити алгебарска теорија која решава једначине облика

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

где су a_0, a_1,...,a_n дати, а x непознати комплексан број.

Нилс Абел је решио овај проблем 1826 г. тако што је доказао да се једначине вишег степена не могу уопштено решити, тј. да се њихова решења не могу изразити формулама које се састоје само од коефицијената једначине, коришћењем аритметичких операција и кореновања (пре свега другог, трећег, четвртог итд.). Први потпуни доказ је дао П. Л Венцел (1814 -1848) у свом раду *Истраживање проблема геометрије који се могу решити лењиром и шестаром* који је био једва седам страница дугачак и објављен је 1837 г. у *Дневнику математике* из Луивила(*vol* 2, 1837, *pp* 366-372). Коначно 2200 година након сто су постављени ови су проблеми били решени.

Венцел у свом доказу прво показује да проблеми који се могу решити лењиром и шестаром се могу решити серијом квадратних једначина.

$$x_i^2 + A_{i-1} x_i + B_{i-1} = 0 \ (i = 1, 2, ..., n) \ \text{(C)}$$

где су A_0 и B_0 рационалне функције од датих бројева p,q,..., и где су A_i и B_i рационалне функције од x_i, x_{i-1},...,x_1,p, q,.. Затим он показује да ако се у A_{n-1} и B_{n-1} сукцесивно замене две вредности за x_{n-1} добијене из једначине

$$x_{n-1}^2 + A_{n-2} x_{n-1} + B_{n-2} = 0,$$

а затим помножимо заједно два резултирајућа израза са преосталим чланом од

$$x_n^2 + A_{n-1} x_n + B_{n-1} = 0,$$

добија се једначина четвртог степена за x_n. Њени коефицијенти су рационалне функције од x_{n-2}, x_{n-3}, ..., x_1, p, q,...Процес се понавља и сукцесивно се елиминишу x_{n-2}, x_{n-3}, ..., x_1, па Венцел долази до једначине степена 2^n уз x_n, чији су коефицијенти рационални бројеви. Следеће, он показује да је једначина 2^n-тог степена, која настаје као резултат од најмањег могућег броја квадратних једначина које су неопходне за решење проблема коришћењем лењира и шестара несводљива. На крају он разматра тестове да би одредио да ли једначина 2^n-тог степена може бити решена вађењем низа квадратних корена. Ово је урађено тако што су изједначени коефицијенти претпостављене једначине са онима у општој једначини степена добијене из система (C). Према томе ако можемо да нађемо коефицијенте квадратних једначина вађењем квадратних корена, али не и корена вишег степена тада се задата једначина може решити на предложени начин.

Венцел додаје примедбу да је једначина

$$x^3 - 2a^3 = 0$$

која настаје из проблема дуплирања коцке несводљива, али није степена 2^n, зато коцка не може дуплирати своју запремину користећи конструкцију лењиром и шестаром.

У случају трисекције угла немогућност конструкције долази из чињенице да се проблем може представити кубном једначином

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0.$$

која нема конструктибилне корене. Као што смо већ напоменули да би број био конструктибилан он се мора представити као комбинација збира, разлике, количника, производа и квадратних корена (конструкције које су објашњене у глави 2) и позитивних бројева. Како се трисекција угла своди на кубну једначину која се не може редуковати, чињеница позната Вијету, једини начин да се нађе решење је да се пронађе трећи корен, до кога се не може доћи горе објашњеном комбинацијом.

Ако посматрамо Венцелов доказ и користећи данашње знање тригонометрије може се показати да трисекција није могућа ни у једном случају, па самим тим и генерално немогућа. То се може показати на примеру угла од 60°. Ако је могуће поделити угао од 60° онда је могуће конструисати угао од 20°.

Ако кренемо од тригономтријске једнакости

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad \text{где за } \theta = 20^\circ$$

$$\cos 60^\circ = 4\cos 20^\circ - 3\cos 20^\circ \qquad \text{нека је } \alpha = cos20^\circ$$

Након замене и упрошћавања добија се следећа једначина

$$\frac{1}{2} = 4\alpha^3 - 3\alpha \text{ односно } 8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0 \text{ и ако ставимо } x = 2\alpha \ ,$$

након замене и упрошћавања добија се следећа једначина

$$x^3 - 3x - 1 = 0,$$

Ова једначина је несводљива јер су јој једини могући рационални корени добијени уз помоћ коефицијената првог и последњег члана,а они уједно нису решења ове једнацине. Уколико се користи Карданова формула за решење кубне једначине може се доћи до комплексних решења, па самим тим и комплексног решења која очигледно нису конструктибилна по опису у претходном параграфу. Самим тим ни угао од 60° се не може поделити на три једнака дела, па и тврђење о трисекцији било ког угла је немогуће.

Трансцедентност броја π је директна последица Линдеман-Вајерштрасове теореме. То значи да број π не може бити корен једначине са рационалним бројевима као коефицијентима. Да би се показала немогућност решења у равни проблема квадратуре круга, треба показати да број π није конструктибилан. Знамо да тачке у Еуклидској равни које се могу добити конструкцијама применом лењира и шестара су конструктабилне. Користећи методе аналитичке геометрије тачке се означе као уређени парови реалних бројева. Број x је конструктабилан ако је пар $(x, 0)$ конструктабилан. Такође, a и b су конструктабилне тачке ако и само ако је пар (a, b) конструктабилан. За конструктабилне тачке важе следеће особине, тј. све дозвољене конструкције су сводљиве на следеће које се наводе. Ако су A, B, C и D различите конструктабилне тачке, тада важи:

1. Ако се праве AB и CD секу, онда је и њихова пресечна тачка конструктабилна.

2. Ако је K круг са центром у тачки A и полупречником AB који сече праву CD, тада су пресечне тачке круга K и праве CD конструктабилне.

Ако се претпостави да координате тачака A,B, C и D леже у неком подпољу F реалних бројева, користећи се методама аналитичке геометрије непосредно се налази да:

• Ако важи наведени случај 1. координате нове тачке леже у пољу F.

• Ако важи наведени случај 2. координате нове тачке леже у F или у $F(\sqrt{a})$, где је $a \in F$ неки позитиван број.

Закључак је да за сваки конструктабилан број a постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\mathbb{Q} = F_0 \in F_1 \in \cdots \in F_n$$

Сваки конструктибилан реалан број је алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$ и његов степен над $\mathbb{Q}$ једнак је степену броја 2.

Како број π није алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$, није ни конструктабилан, тј. проблем квадратуре круга није могуће решити помоћу лењира и шестара.

7 Историјски значај ових проблема

У историји математике ова три проблема су са несмањеним жаром интригирала интелектуалце више од 2000 година. Сами проблеми лишени свих импликација често изгледају као тотално неинтересантни, а опет до данашњег дана велика енергија је потрошена на њихово решавање. Интересанто је размотрити зашто су се ови у суштини једноставни математички проблем издвојили од осталих математичких проблема. Сама поставка било ког проблема се може извести користећи једноставне појмове и нико није уплашен са компликованом терминологијом уобичајеном за математичке проблеме. Управо та једноставност у поставци је подстицала многе у решавању проблема. Лекари, адвокати, месари и пекари, млади и стари, аматери као и професионални математичари су се окушали у њиховом решавању. Људи разних окружења су били привучени овим проблемима где су упадали у подмукле замке настале у мрежи разних покушаја и самим тим отварали врата за неочекивана открића и погледе на нова поља математике. Ова три проблема служила су за мучење и загонетство математичара у истраживању новог апарата, метода и теорема за њихово решавање. Данашње структуре алгебре и геометрије су израсле из ових покушаја.

Непрекидно трагање за решењем кроз тако дугачак период је дало невероватна открића, често откривена пуком случајношћу, и тиме обасјало на неуобичајени начин понекад удаљене ствари. Елипса, парабола и хипербола, су несумњиво једна од најинтересантнијих открића. Теорије једначина и Теорије група, доктрине од великог значаја за многе научнике попут физичара и хемичара у њиховом изучавању атомских структура и теорије релативитета. Није ни чудно зашто су ови проблеми толико славни када је толико математичких открића настало њиховом заслугом.

Литература

[1] B. Bold, *Famous problem of Geometry and how to solve them*, Dover publication 1982

[2] H. Eves, *An introduction to the history of mathematics*, Halt, Rinehart and Winston, 1976

[3] T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. I-II, Dover, New York, 1981.

[4] T. L. Heath , *The works of Archimedes*, Dover Publications, New York, 1959

[5] E. W. Hobson, *Squaring the circle*, *a history of the problem*, Marshant books 2007

[6] F. Klein, *Famous Problems of Elementary Geometry*, Cosimo 2007,

[7] W. R. Knorr, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Birkhuser, Boston, 1986

[8] Зоран Лучић, *Огледи из историје античке геометрије*, 2009

[9] NCTM, *Historical topics for the Mathematical Classroom*, 2nd editition, 1989

[10] W. Papp, *History of Mathematics* : *Topics for school*, Open University Press, 1978

[11] D. E. Smith, *History of Mathematics*, vol. I-II, Dover, New York, 1958

[12] F. J. Swetz, *Learning Activities from the History of Mathematics*, Welch 1994

[13] R.C. Yates, *The trisection problem*, The National Council of techers of Mathematics, 1971