МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД

Магистарски рад:

Слободан софтвер
и
настава математике средње школе

Ментор: доц. др Мирослав Марић

Чланови комисије: проф.др Милан Божић
проф.др Александар Такачи
доц. др Срђан Вукмировић

Студент: Станковић Татјана

Београд,
2014.

Апстракт

Савремена настава математике подразумева примену рачунара у наставном процесу. Успешност самог наставног процеса зависи од многобројних фактора међу којима су издвојени одабир адекватног наставног средства (програмског пакета) и наставне методе којом ће ученик бити вођен кроз процес стицања знања.

Правилан одабир наставног средства и наставне методе захтевају добро познавање теорије учења, наставног програма (његових циљева, задатака и садржаја), карактеристика наставних средстава и ефеката њихове примене на процес учења.

У раду су описане улоге наставника и ученика у наставном процесу, фазе учења са становишта Поље и Ван Хила, наставни програм математике средње школе (циљеви, задаци и садржај), врсте софтвера. Рад обухвата и компаративну анализу појединих софтверских пакета погодних за наставу средње школе (ГеоГебра, C.a.R, CaRMetal, Dr. Geo, Kig, KSEG, Kmplot, Scilab, Maxima/wxMaxima, Euler), примере примене појединих софтвера у настави математике средње школе, резултате спроведеног истраживања ефеката коришћења ГеоГебре као додатног наставног средства на учење комплексних бројева. Наведене су потешкоће на које ученици наилазе приликом учења комплексних бројева и које се могу превазићи применом ГеоГебре као додатног наставног средства. Указано је на поједнине потешкоће које се не могу на овај начин превазићи. Потврђени су резулати истраживања M.C.Nordlander, E. Nordlander по коме о идентификацији комплексног броја на основу експлицитне видљивости имагинарне јединице и утврђено је да примена ГеоГебре као додатног наставног средства не утиче на начин идентификације комплексног броја.

Abstract

Modern teaching of mathematics involves the use of computers in the teaching process. The success of the educational process depends on many factors among which is selection of appropriate teaching resources (software package) and teaching methods that the pupil will be guided through the process of gaining knowledge.

A proper selection of teaching resources and teaching methods requires a good knowledge of learning theory, curriculum (its goals, objectives and content), the characteristics of teaching materials and the effects of their use in the learning process.

This paper describes the teachers' and pupils' roles in the teaching process, the learning phase from Polya's and Van Hill's point of view, secondary school curriculum (goals, objectives and content), the types of software. The paper includes a comparative analysis of some software packages suitable for secondary school teaching (GeoGebra, C.a.R, CaRMetal, Dr. Geo, Kig, KSEG, Kmplot, Scilab, Maxima/wxMaxima, Euler), examples of application of few software packages in teaching secondary school mathematics, the results of conducted research on the effects of using GeoGebra as an additional teaching tool in learning complex numbers. Some difficulties that pupils encount while learning complex numbers are pointed out and that could be overcome by using GeoGebra as an additional teaching tool. It's also pointed to some difficulties that can not be overcome in this way. The results of M.C.Nordlander's and E. Nordlander's research in which the identification of a complex number was based on explicit visibility imaginary unit were confirmed and it is noted that the use of GeoGebra as an additional teaching tool doesn't affect the identification of a complex number.

Садржај:

Увод

Научно-технолошки напредак је у спрези са социјалним променама. Свака промена у науци и технологији доводи до промена у друштву, па самим тим и у образовању. Традиционалне методе учења математике средње школе не би требало одбацити, већ модификовати, осавременити, прилагодити потребама друштва и базирати их на употреби рачунара. Ученике би требало оспособити да у настави математике користе разне софтвере у зависности од задатака које треба да реше као и да препознају предности коришћења одређеног софтвера. Наставнике би требало оспособити за ваљан одабир адекватаног софтвера (у зависности од наставне/тематске јединице која се обрађује). Радом у различитим окружењима ученици развијају способност процене предности и недостатака примене одређених софтверских пакета у односу на постављени проблем. Међутим, разноврсна употреба комерцијалних софтвера у настави математике средње школе ограничена је финансијском ситуацијом у школи. Бесплатно алтернативно решење за ово ограничење пружају слободни некомерцијални софтвери који се по својим могућностима готово не разликују од комерцијалних софтвера. Већина ових софтвера је отвореног кода, те осим рада у различитим окружењима, они пружају ученицима могућност модификације и прилагођавања софтвера сопственим потребама.

Како настава математике средње школе допушта примену слободног софтвера и како многобројне студије указују на предности коришћења софтвера у настави, требало би одабрати адекватан софтвер за обраду одређене тематске/наставне јединице не би ли се остварио циљ и постигао жељени исход [12,13,14].

У овом раду посматрана је улога слободног софтвера у настави математике средње школе.

Прво поглавље посвећено је улози наставника и ученика у процесу активног учења. Описана је Сократова метода [3] и изнет је Пољин аспект на улогу наставника и ученика у процесу учења [7].

У другом поглављу описане су фазе учења са становишта Поље и Ван Хила (Van Hiele) [8, 9, 10].

Улога циљева, задатака и садржаја програма математике средње школе као и примена рачунара у настави математике разматрани су у трећем поглављу.

Четврто поглавље посвећено је врстама софтвера. Објашњени су појмови: слободан софтвер (софтвер у јавном власништву, копилефтовани и некопилефтовани софтвер), лиценца, софтвер отвореног кода, неслободни софтвер (полуслободни и власнички), приватни софтвер, комерцијални и некомерцијални софтвер, фривер и шервер.

У петом поглављу дата је компаративна анализа софтверских алата погодних за наставу математике средње школе. Табеларно су приказане карактеристике програмских пакета: ГеоГебра, C.a.R, CaRMetal, Dr. Geo, Kig, KSEG, Kmplot, Scilab, Maxima/wxMaxima, Euler и пружена је информација о погодном пратећем материјалу који се може применити у настави.

Примери примене појединих софтвера у настави математике средње школе дати су у шестом поглављу. Ослањајући се на Пољине инструкције (описане у првом поглављу) као и на Пољин модел учења по фазама (описаног у другом поглављу) формирани су примери употребе Scilab-а и ГеоГебре у процесу активног учења операција са комплексним бројевима у средњој школи као и примери графичког решавања једначина и неједначина у средњој школи применом ГеоГебре. Ови примери илуструју употребу рачунара као наставног средства у процесу активног учења методом откривања. Трећи пример, пример решавања система линеарних једначина са две непознате у ГеоГебри, wxMaxima-и и Scilab-у, представља даје сликовити приказ примене различитих програмских пакета приликом решавања система линеарних једначина са две непознате.

Седмо поглавље описује педагошки експеримент – истраживање о утицају ГеоГебре као додатног наставног средства у настави математике приликом учења комплексних бројева. У њему је дефинисан проблем, циљ и задатак истраживања, постављена је хипотеза, описани су узорак и процедура, технике анализе података, приказани су резултати истраживања и закључци донети на основу њих. Потврђена је почетна хипотеза истраживања: Приликом учења комплексних бројева применом ГеоГебре као додатног наставног средства у настави математике, ученици постижу боље резултате у односу на ученике који уче користећи се традиционалним наставним средствима.

У осмом поглављу дати су закључци истраживања као и смернице за даља истраживања.

На крају је дат списак коришћене литературе.

Посебно се захваљујем свом ментору доц. др Мирославу Марићу као и члановима комисије проф. др Милану Божићу, доц. др Срђану Вукмировићу и проф. др Александру Такачи на изузетном разумевању, сарадњи и сугестијама којима су допринели побољшању овог рада.

Захваљујем се др Ђорђу Кадијевићу, мр Марку Обрадовићу и дипл. психологу Савановић Љубомиру на саветима у вези са истраживањем и обрадом података. Такође, захваљујем се и Пирошки Лукић-Ононди, директору ЕТШ „Никола Тесла“ и као и колегама из ове школе који су ми максимално изашли у сусрет приликом спровођења истраживања.

На крају, захвалила бих се својим родитељима, др Олги Јакшић и осталим пријатељима на несебичној подршци.

1. Улога наставника и ученика у процесу учења

Савремена настава напушта традиоционалне оквире и посматра процес учења као двосмеран асиметричан процес интеракције између ученика и наставника. Двосмерност је последица активног учествовања ученика у овом процесу, а асиметричност је последица неравномерне расподеле знања. За разлику од традиционалне наставе у којој је централна улога припадала наставнику и у којој је ученик био пасивни посматрач, у савременој настави ученик добија потпуно нову улогу-улогу „активног конструктора знања“ [1]. Вођен мисаоном активношћу, користећи претходно стечена знања и искуства, износећи своја запажања и своје мишљење ученик стиче нова знања, развија креативност и критичко мишљење. У савременој настави и улога наставника је измењена. Наставник као врстан познавалац материје са развијеним критичким мишљењем и начином размишљања специфичним за одређену научну дисциплину, ставља своје знање и умеће у службу ученика. Његова улога активног презентера чињеница замењена је улогом активног навигатора ученика у процесу учења водећи при том рачуна о активној укључености ученика у сам процес учења.

Иако овакав облик наставе називамо савременим, не можемо рећи да он раније није постојао. Наиме, Сократово подучавање Меноновог роба представља облик активног учења, наводи се да је то је прва забележена екпериментална лекција [2]. Постављајући питања, критичком анализом одговора, проналажењем недостатака у одговору и додатним питањима Сократ је наводио ученике да од привидног знања дођу до стварног знања [3]. Сматра се да је стандардно научно индуктивно размишљање последица временске модификације Сократове методе [4].

У савременој настави централна улога припада ученику, али ни улога наставника није занемарљива. Успешност овакве наставе зависи од способности наставника да активно води ученика кроз процес стицања знања. Да би успешно обавио задатак он мора да поседује знање из те научне области, способност да уочи тренутак када је заиста открио идеју, способност да правовремено постави добро питање (питање одговарајућег садржаја) [5].

Сократ и Џ.Поља (G.Polya) се слажу у чињеници да ученик треба да има утисак да самостално стиче знање и да учествовање наставника у процесу учења треба свести на разумну меру (да би то илустровао Сократ приликом подучавања Меноновог роба наводи да он роба уопште не учи, већ му само поставља питања [6]). Помоћ коју наставник пружа ученику мора бити природна и ненаметљива, а његова питања и препоруке морају бити опште, ненаметнуте, природне, здраворазумске, не превише специјалне, мотивишуће (да доприносе развоју ученикових способности и да га подстакну да учествује у раду), да не откривају решење проблема и да иду постепено (од општих ка конкретнијим) [7].

Савремена настава захтева активно учествовање и ученика и наставника у процесу учења. Наставник као активан кретор наставног процеса и ученик као активан креатор знања, паралелно учествују у процесу учења.

2. Фазе учења

У овом поглављу разматраће се фазе учења са два аспекта- Поље и Ван Хила (Van Hiele) [8, 9, 10].

2.1. Поља и фазе учења –решавања задатака

У својој књизи Поља разликује четири фазе решавања задатка и три кључна питања која се могу применити у свакој фази [7].

Фазе решавања задатка су:

1. Разумевање задатка (проблема)
2. Израда плана
3. Извршење плана
4. Осврт на задатак

Свака фаза је важна и немогуће је прескакати фазе осим у случају „сјајне идеје“.

Кључна питања су:

1. Где да почнем?
2. Шта да радим?
3. Шта ћу тиме постићи?

Разумевање задатка је кључно за његово решавање. Осим што треба да разуме задатак (проблем), ученик треба да буде мотивисан и да га реши, а то се постиже правилним одабиром задатка. Задатак је добро одабран уколико је адекватне тежине (није ни претежак ни прелак), уколико је занимљив ученицима и мотивише их да наставе са радом. Ученик добро разуме задатак када је способан да га понови (да лако формулише задатак), да издвоји главне делове задатка (непознату, задате податке и услов) и да на основу тога скицира задатак и уведе згодне ознаке (уколико је скица потребна). У оквиру ове фазе он издваја два битна момента, а то су: упознавање са задатком и стицање бољег разумевања. И у једном и у другом случају ученик полази од формулације задатка, с тим да се у првом случају тежи сагледавању задатка као целине и припреми меморије ученика за подсећање на детаље који су у вези са задатком, а у другом случају на одређивању главних делова задатка и њиховој анализи. На овај начин ученик разјашњава битне детаље неопходне за успешно решавање задатка.

Израда плана представља најтежи део. То је фаза у којој ученик одређује коју методу треба да примени да би дошао до непознате. Уколико нема „сјајну идеју“ ученик мора да анализира главне делове задатка, да се потруди и присети сличних задатака (под сличним задацима Поља подразумева задатке са сличном непознатом и/или сличним условом),... Комбиновањем главних делова може доћи до корисне или непотпуне идеје. Корисну идеју може одмах да примени, а непотпуну мора да додатно анализира како би дошао до корисне идеје. Важно је напоменути да су непотпуне идеје оне које могу, али не морају водити ка корисној идеји и као такве оне се понекад, након анализе, одбацују. Ова фаза захтева примену раније стечених знања, дисциплину духа, сконцентрисаност ка циљу и, наравно, срећу.

Извршење плана је фаза која захтева стрпљење. У овој фази ученик изводи све алгебарске и геометријске операције за које је увидео да га могу одвести ка решењу задатка. Важно је да контролише сваки корак и то најпре „велике“ кораке, а потом „мале“. Исправност корака може утврђивати и формално и интуитивно, при чему је важно да ученик уме да направи разлику између ове две методе тј. да уме да направи разлику између „доказати“ и „увидети“. Контролисањем корака ученик добија решење задатка које је исправно. Проблем који се може јавити у овој фази је да ученик заборави корисну идеју. Ово се дешава када му је идеја наметнута тј. када ученик није дошао сам до ње. Зато Поља напомиње да ученик може да дође до идеје и уз помоћ ауторитета, али при том он мора да има утисак да је сам дошао до идеје (важно је да ученику „сине“ идеја тј. да он осети задовољство открића идеје решења).

Осврт на задатак је последња фаза задатка и као таква често је у пракси прескочена (што је погрешно). Када је задатак решен, треба се поново вратити на њега и поново анализирати како поступак тако и решење задатка. На овај начин ученик може пронаћи ново једноставније решење, уклопити задатак и решење у постојећи систем стеченог знања и тако развити своје способности за решавање задатака.

2.2. Теорија Ван Хила и фазе учења

Анализирајући потешкоће ученика приликом учења геометрије Ван Хила су идентификовали и описали пет нивоа разумевања геометријског концепта и пет фаза учења у оквиру сваког нивоа. У овом поглављу биће описани ови нивои разумевања и фазе учења [8, 9, 10].

Нивои разумевања геометријског концепта су:

1. Визуелизација
2. Анализа
3. Неформална дедукција
4. Дедукција
5. Ригорозност

На нивоу визуелизације ученици су способни да препознају објекат (по изгледу), али не и да одреде и наброје његове особине нити да класификују објекте по особинама. На пример, ученик може да препозна квадрат, али не и да наброји особине квадрата нити да препозна да је то посебан случај правоугаоника. Активности које се препоручују у овој фази су: сортирање, идентификовање и описивање објеката; цртање, прављење, склапање и расклапање објеката као и рад са физичким моделима; упоређивање различитих објеката у циљу разликовања релевантних од нерелаевантних својстава.

На другом нивоу (нивоу анализе) ученици су способни да препознају и наброје својства одређеног објекта, али нису довољно компетентни да сами уоче и опишу међусобну повезаност различитих објеката (способни су да разговарају о међусобној повезаности објеката и својсвима тих веза, али не и да их сами уоче и објасне). Објекат се доживљава као скуп особина, тако га и описују (иако им особине попут величине и орјентације на овом нивоу постају ирелевантне и даље нису способни да утврде разлику између потребних и довољних особина за опис неког објекта). На пример, ученик је у стању да наброји да правоугаоник има 4 странице, 4 права угла, да су наспрамне странице једнаке, да су дијагонале једнаке, али не уме да утврди које од ових особина су довољне да би се описао правоугаоник. Активности које се препоручују у овој фази су: примена разних модела приликом одређивања особина објеката тј. приликом дефинисања, мерења, посматрања промена особина објекта како би се направила корелација између једноставне идентификације објекта и његових особине; дискусија о довољним условима за дефинисање објекта на основу креиране листе особина уз помоћ модела и/или технологије; класификација објеката на основу особина.

На трећем нивоу- нивоу неформалне дедукције ученици су способни да уоче везу како између особина самог објекта тако и између особина одређеног скупа објеката, да изведу неформалне логичке закључке на основу особина објеката. На пример, на овом нивоу ученик је способан да неформално закључи да је квадрат врста правоугаоника. Активности које се препоручују у овој фази су: решавање проблема и задатака који захтевају примену својства објеката; одређивање групе потребних и довољних услова за идентификовање неког објекта на основу његових особина анализирајући притом листу његових особина, посматрајући адекватне моделе и дискутујући о томе; дефинисање објекта помоћу особина или утврђивање да ли одређени објекат припада датом скупу на основу његових особина; коришћење неформалног језика дедукције (типа: све, било који, ако онда,..); утврђивање које су релације међу многоугловима конвертибилне (пример конвертибилне релације: Ако је ромб квадрат, онда он има четири права угла. Да ли важи и обрнуто? Ако ромб има четири права угла, да ли је он квадрат?); генерализација и индукција помоћу модела и /или технологије; постављање и проверање претпоставки. Требало би да ученици до средње школе достигну и савладају трећи ниво.

На четвртом нивоу–нивоу дедукције ученици су способни да уоче међусобну везу између недефинисаних појмова, да формулишу дефиницију појмова, да формулишу теореме и изведу формалне доказе употребом аксиома, дефиниција и већ доказаних теорема. Геометрија у средњој школи би требало да се обрађује на овом нивоу, а да ли ће се предавати на том нивоу зависи од тога да ли су ученици у основној школи савладали све претходне нивое.

На последњем нивоу ученици разумеју и способни су да раде у оквиру различитих геометријских и аксиоматских система, да их упоређују. С обзиром да се геометрија предаје са највишим степеном тачности односно да је ниво апстрактности највиши, овај ниво је карактеристичан за универзитетска предавања геометрије.

Нивои су поређани линеарно тј. да би се доспело до одређеног нивоа морају се проћи сви претходни; прелазак из једне фазе у другу (са једног нивоа на други) зависи од геометријског искуства ученика, а не од старости; да би процес учења био успешан ниво предавања и језик учења мора бити усаглашен са нивоом ученика. Ово је веома важно нагласити јер и у средњој школи постоје ученици који немају довољно геометријског искуства да би се предавало на очекиваном нивоу, па је потребно да наставник добро процени и уважи учениково предзнање и да наставу прилагоди учениковим способностима.

Према овој теорији ученици напредују на сваком нивоу захваљујући инструкцијама које се јављају у оквиру пет фаза учења.

Фазе учења су:

1. Информисање (истраживање)- ученик се информише унутар области истраживања.
2. Директна орјентација (орјентисање помоћу водича)- вођени мисаоном активношћу, пратећи пажљиво одабране инструкције и ваљаним проучавањем материјала ученици истражују задате објекте. На овај начин они постепено откривају карактеристике тих објеката и/или структура. Откривање је градирано.
3. Објашњавање- на основу претходно стеченог искуства (искуства из друге фазе) ученици објашњавају своја сазнања о задатим објектима и описују их својим речима. У овој фази систем релација је делимично оформљен.
4. Слободна орјентација- решавањем сложенијих задатака и/или задатака који се могу решити на више начина ученици утврђују и боље схватају релације међу задатим објектима.
5. Интеграција- поновним разматрањем свих коришћених метода и свих открића, ученик најпре синтетише стечена сазнања, а потом их интегрише са постојећим стварајући притом један нови систем знања (креира везу између нових и старих објеката и њихових особина).

3. Математика у средњој школи

3.1. Циљеви, задаци и садржај програма математике средње школе

У нашој земљи на основу Закона о основама система образовања и васпитања Национални просветни савет доноси Правилник о наставном плану и програму. У оквиру тог правилника дефинисани су циљеви, задаци и садржај програма математике.

У даљем делу текста биће описани циљеви, задаци и садржаји наставе математике у гимназији [11]. Овај правилник тј. овај програм наставе математике је изабран јер је по садржају и распореду тема по разредима најприближнији осталим правилницима тј. програмима математике средњих (четворогодишњих) стручних школа. Највећа одступања у садржају и распореду тема по разредима јављају се у програмима огледних одељења средњих стручних школа.

Циљ наставе математике средње школе је да оспособи ученике да на основном нивоу усвоје математичка знања, вештине и ставове који ће им користити приликом разумевања природних и друштвених појава и законитости, да примене стечена знања приликом решавања задатака и проблема из реалног живота, да без тешкоћа наставе образовање и самообразовање, да формирају научни поглед на свет, да развијају менталне способности и да се посвете свестраном развитку своје личности.

Захваљујући задацима наставе математике ученици ће развити логичко и апстракно мишљење, способност јасног и прецизног изражавања, способност употребе математичко-логичког језика на елементарном нивоу; постаће компетентни да одреде и процене квантитативне величине и њихов однос, да уоче разлике и везу међу геометријским објектима, да обављају различите трансформације; моћи ће да схвате функционалну зависност и умеће да је представе и примене. Осим тога, развиће и особине попут систематичности, прецизности, темељности, истрајности и уредности при раду. Изградиће креативно, али и критичко мишљење у складу са формираним системом вредности. Развиће радне навике и способности за самостални, али и тимски рад. Наставом математике ученици ће стећи умења и умећа примењива и у другим предметима, постаће компетентни да правилно користе стручну литературу, формираће и развиће свест о универзалности и примени математичког начина мишљења, стећи ће компетенције потребне за решавање проблема и новонасталих ситуација у процесу рада и у свакодневном жиовоту. Биће подстакнути за стручни развој и усавршавање поштујући при том личне способности и потребе друштва.

Према Правилнику о изменама и допунама Правилника о наставном плану и програму за гимназију објављеном у "Службеном гласнику РС - Просветни гласник" бр.7/2011 од 27.10.2011. године, садржај програма математике за гимназије (природно-математички смер) обухвата:

I разред

- Логика и скупови
- Реални бројеви
- Пропорционалност
- Увод у геометрију
- Подударност
- Рационални алгебарски изрази
- Сличност
- Тригонометрија правоуглог троугла

II разред

- Степеновање и кореновање
- Квадратна једначина и квадратна функција
- Експоненцијална и логаритамска функција
- Тригонометријске функције

III разред

- Полиедри
- Обртна тела
- Вектори
- Аналитичка геометрија у равни
- Математичка индукција. Низови
- Комплексни бројеви и полиноми

IV разред

- Функције
- Извод функције
- Интеграл
- Комбинаторика
- Вероватноћа и статистика

3.2. Примена рачунара у настави математике

Традиционалним методама рада могу се остварити и постићи циљеви и задаци наставе математике средње школе, али рапидан развој технологије и науке условио је промене у образовном систему. Примена рачунара у процесу учења постала је неизбежна. Многобројне студије указују на допринос примене рачунара у настави. Њиховом применом олакшава се учење појединих предмета, оспособљавају се ученици да користе савремену технологију, повећава се ефективност решавања задатака [12].

Студија коју су спровели Kamariah Abu Bakar, Ahmad Fauzi Mohd Ayub, Wong Su Luan и Rohani Ahmad Tarmizi показала је да употребом информационе технологије у настави могу се мотивисати ученици у процесу учења математике [13].

Употреба рачунара омогућава баланс између времена потребног за увежбавање процедуралних вештина и времена потребног за концептуално схватање, па самим тим доприноси и бољем разумевању материје [14].

Али, свака примена рачунара у настави неће довести до позитивног резултата. На ефекте оваквог учења утичу фактори попут адекватног одабира софтвера, начина употребе софтвера у наставном процесу, мотивисаности ученика и наставника,...

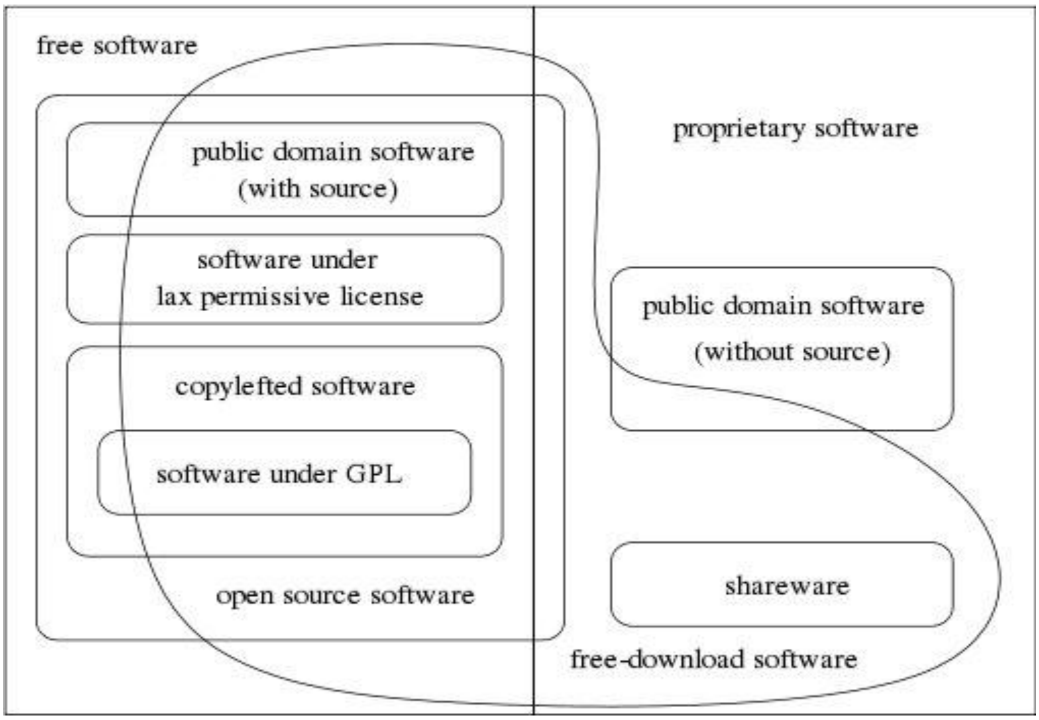
Наставом која се базира на употреби софтвера у виду презентације, једноставног приказивања слика и фигура неће се постићи исти ефекат као наставом у којој ученик ученик активно користи рачунаре да би истражио и решио неки проблем, повезао математичке појмове на различите начине [15].

Да би се најбрже и најједностваније постигао жељени исход, наставник треба да буде компентентан да одабере адекватан софтвер што захтева од њега стално стручно усавршавање у циљу упознавања са могућностима појединих софтвера. Потребно је препознати карактеристике доброг математичког софтвера: могућност потпуне контроле софтвера од стране корисника, подстицање корисника на истраживање и испитивање, јасан и интуитиван интерфејс, једноставан унос, обрада и приказ података (уз могућност 2D и 3D приказа улазних и излазних параметара), могућност тренутне провера резултата уз детаљно образложење као и могућност индивидуалног вежбања (понављање сваког корака трансакције), подстиче корисника да већим залагањем усвоји математичке концепте и вештине... [16].

Уважавајући интересовања, способности и потребе ученика, професор правилним одабиром и адекватном употребом софтвера може додатно да их мотивише и тако оствари очекивани исход.

4. Врсте софтвера

Постоје различите поделе софтвера. Једну од њих сликовито је приказао Чао Квеј (*Chao-Kuei*). Његов приказ (Слика 1. је преузета из литературе [17]) различитих врста софтвера дат је следећим дијаграмом.



Слика 1. Дијаграм Чао Квеја (*Chao-Kuei*)-различите врсте софтвера

У овом поглављу биће објашњен појам слободног софтвера (софтвер у јавном власништву, копилефтовани и некопилефтовани софтвер), лиценце, софтвера отвореног кода, неслободног софтвера (полуслободног и власничког), приватног софтвера, комерцијалног и некомерцијалног софтвера, фривер и шервер софтвера [17, 18, 19] .

Према дефиницији Задужбине за слободан софтвер, слободни софтвер (Free software) је софтвер који свом кориснику пружа неограничену могућност коришћења, умножавања и редистрибуције, проучавања и модификовања кода у складу са потребама корисника. Један од циљева јесте да се ови програми стално проучавају, допуњују и усавршавају и да тако модификовани (укључујући и код) буду доступни свима и буду корисни заједници. Термин free у енглеском језику има двојако значење-слободан и бесплатан. Слобода ових софтвера огледа се у чињеници да су невласнички (изворни код је доступан свима), а бесплатност у чињеници да су углавном некомерцијални. Како се неки слободни софтвери могу дистрибутирати уз минималну новчану надокнаду, термин free доводи до забуне. Ричард Столман, оснивач Покрета за слободни софтвер, објашњава да се слобода не огледа у цени, већ у могућности слободне сарадње корисника и у могућности слободног управљања софтвером (дакле, доступност изворног кода је обавезна). Једноставнији облик дефиниције слободног софтвера би гласио: „Уколико нема изворни код, не ради се о софтверу“ [17]. Ову софтверску слободу не нарушавају ни продаје ЦД-ова са слободним софтвером.

У зависности од тога да ли аутор задржава ауторско право и од његовог става према измењеним верзијама, разликујемо слободни софтвер са копилефт (copyleft) лиценцом (када аутор задржава ауторска права, али дозвољава даље диструбуције и модификације уз услов да све модификоване верзије остану слободне тј.без икаквих ограничења), софтвер у јавном власништву (када се аутор одрекне свих ауторских права што условљава да се овакви софтвери могу прикључити слободним, али и власничким делима; изворни код је у јавном власништву, док измењени код може, али не мора бити), софтвери са лиценцом у BSD (скраћеница за Berkeley Software Distribution) стилу (када аутор задржава ауторска права, али се одриче одговорности у модификованим делима уз адекватно приписивање заслуга и дозвољава даљу диструбуцију без обзира на то да ли је реч о власничким или слободним делима).

Како копилефтовање програма подразумева одређени низ одредаба о дистрибуцији и како се тај низ може саставити на много различитих начина, то значи да (теоријски гледано) постоје многе копилефт лиценце. Али, без обзира на теорију, пракса показује да је најзаступљенија ГНУ-ова општа јавна лиценца. Разноврсност копилефт лиценци, доводи до њихове неусаглашености, те се сматра незаконитим актом спајање кодова са различитим лиценцама. Да би се ово избегло, препоручује се употреба само једне лиценце о копилефту.

Треба напоменути да софтвер није слободан у ситуацији када је извршни код у јавном власништву, а изворни код није доступан. Израз „у јавном власништву“ значи „није под лиценцом о ауторским правима“, а не „бесплатно“ или „слободно“ какво му најчешће дају значење [17]. У земљама које су потписале Бернску конвенцију, све што је написано је аутоматски заштићено ауторским правима, па уколико аутор жели да програм буде у јавном власништву, он мора да се одрекне ауторских права (што подразумева низ правних корака).

Софтвер отвореног кода (Open source software) је софтвер који дозвољава модификације и побољшања која су искључиво у складу са „open source“ лиценцом. На овај начин добијају се бољи, разумљивији и доступнији програми. За разлику од лиценци слободног софтвера, лиценце отвореног софтвера постављају строжа ограничења. Просечни корисници углавном не праве разлику између термина слободан софтвер и софтвер отвореног кода (јер у већини случаја слободан софтвер је и софтвер отвореног кода и обрнуто) као што ни не праве разлику између значења термина слободан и бесплатан софтвер тј. free софтвер.

Неслободан софтвер је сваки софтвер који нема карактеристике слободног софтвера и као такав може бити полуслободан и власнички. За разлику од власничког софтвера који је сушта супротност слободног софтвера, полуслободан софтвер има неке карактеристике слободног софтвера (он није слободан, али појединци могу добити дозволу да га користе, умножавају и дистрибуирају, модификују и модификоване верзије дистрибуирају без профита). Полуслободни софтвери се разликују од софтвера са копилефт лиценцом. Док софтвери са копилефт лиценцом штите примарну слободу свих корисника тј. онемогућавају друге да додају нова ограничења, полуслободни софтвери садрже та додатна ограничења која су према извору [17] последица себичности аутора. Власнички софтвер нема карактеристике ни слободног ни полуслободног софтвера, он је њихова сушта супротност- за коришћење је потребна дозвола, не дозвољава умножавања, модификације, дистрибуције нити било шта друго. Треба разликовати власнички од приватног софтвера, као и власнички од комерцијалног софтвера.

Приватни софтвер је софтвер намењен једном кориснику (најчешће фирми, организацији) који користи, поседује и модификује изворни код у зависности од својих потреба, али га не објављује и не дистрибуира. Овај софтвер је у суштини слободан, јер корисник има сва права на њега.

Комерцијални софтвер је софтвер који је развијен са циљем да се њему заради. Овакав софтвер не мора нужно бити власнички (иако је већина јесте), може бити и слободан. Важно је нагласити да постоји и некомерцијални неслободан софтвер.

Фривер (Freeware) је бесплатан, али не и слободан софтвер. Он је власнички софтвер, па нису дозвољене никаква умножавања, модификације, дистрибуције и слично, уколико то није дозвољено од стране власника.

Шервер (Shareware) није слободан, ни полуслободан софтвер. Модификације ових програма су немогуће, јер изворни код углавном није доступан. Њихова испорука не обухвата дозволу за копирање и инсталирање без плаћене лиценце, али дозвоњена је диструбуција његових примерака с тим да будући корисник мора да плати лиценцу.

5. Неки софтверски алати погодни за наставу математике: компаративна анализа

Ефекат примене рачунара у настави математике зависи од карактеристика појединих софтвера. Из богате ризнице софтверских алата, одабрани су они за које се сматра да се могу применити у настави математике средње школе. У даљем тексту овог поглавља биће дата компаративна анализа одабраног софтвера са освртом на могућност примене у настави математике средње школе која је базирана на изворима из литературе [20]-[61].

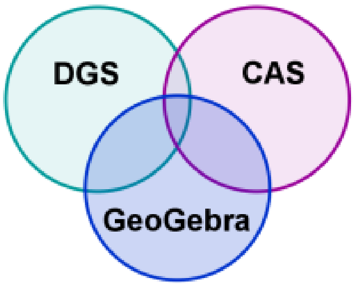
5.1. ГеоГебра (GeoGebra)

Слика 2. ГеоГебра лого [25]

Табела 1. Основне информације о ГеоГебри

URL:	http://www.geogebra.org/cms/en/download/
Оперативни системи:	Windows/ Linux/ Mac OS X Android и iPad апликација
Отворени код (Open source):	Да
Цена:	Бесплатан
Историја:	Идејни творац је Маркус Хоенвартер (Markus Hohenwarter). Овај пројекат је започет 2001. године на Универзитету у Салцбургу. Уз помоћ open-source програмера из читавог света његов развој настављен је на Атлантском универзитету (Florida Atlantic University) у периоду од 2006. до 2008. године, а потом (у периоду од 2008. године до 2009. године) на Државном универзитету (Florida State University) у Флориди. Тренутно се развија на Универзитету у Линцу. Мајкл Борчердс (Michael Borcherds), професор математике у средњој школи је сада главни програмер ГеоГебре. Геогебра је динамички (интерактивни) математички софтвер који обухвата геометрију, алгебру, статистику и анализу. Он садржи елементе динамичког

геометријског софтвера DGS, Dynamic Geometry Software и рачунарског алгебарског система CAS, Computer Algebra System.



Слика 3. Графички приказ особина Геогебре [26]

Овај софтвер се може користити у настави математике на свим нивоима наставног процеса.

Погодан је за геометрију, пружа могућност једноставне конструкције тачака, дужи, вектора, линија, полигона (многоуглова), свих конусних пресека, параметарских кривих, локус линија, могућност израчунавања површине многоуглова…

Када је реч о примени у алгебри, важно је напоменути да омогућава директан унос једначина и неједначина, имплицитних полинома, растављања полинома на чиниоце, обавља рачунске операције са бројевима, тачкама и векторима…

Такође је погодан за примену у анализи јер осим што омогућава једноставан и директан унос функција, пружа могућности лаког одређивања пресека функција, нула и екстремних вредности функција, извода и интеграла функција, граничне вредности функције, примене клизача (slider) као параметра.

ГеоГебра подржава табеларни приказ (spreadsheet), при чему свака ћелија осим броја може да садржи и друге објекте (тачку, функцију,…). Захваљујући табеларном приказу и имплементираним статистичким функцијама, могућа је примена и у статистици.

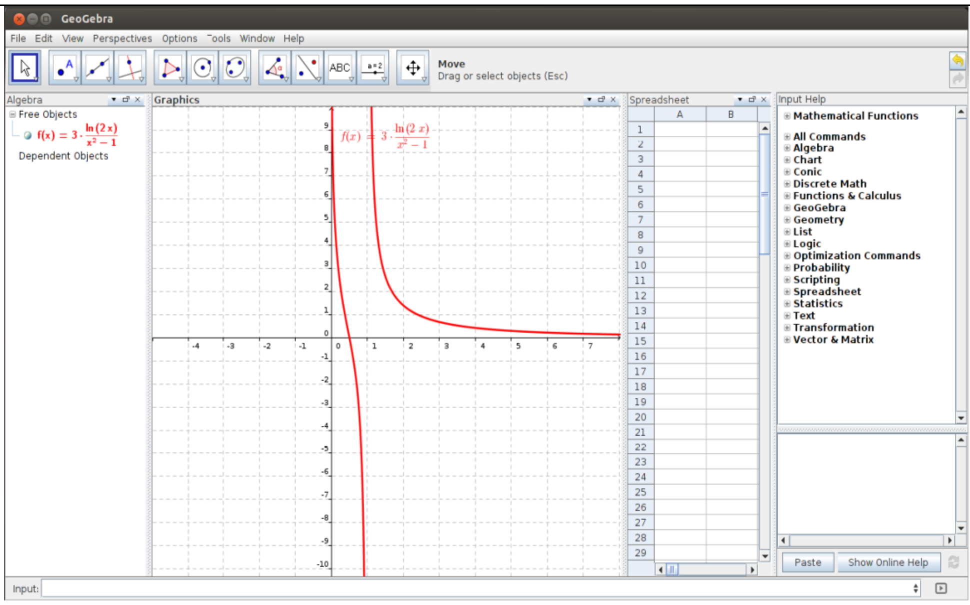
Унос и измена објекта се може извршити на два начина: директно (помоћу миша или додира) или индиректно (преко поља уноса, Input Bar-a). За било који унет објекат подржава могућност накнадних динамичких измена.

Одликује је дуални приказ објекта (графички и алгебарски приказ између којих постоји двосмерна равноправна веза-промена у једном приказу повлачи промену у другом и обрнуто).

Употреба макроа (macros) је једноставна (помоћу миша-као алат или применом команде у пољу уноса)

Дозвољава скриптовање, израду анимација.

Дозвољава измене атрибута објекта (облика тачке, типа и дебљине линије, боје и обојености објекта, транспарентности, видљивости).

<table>
<tr><td></td><td>Омогућава експортовање објекта у виду анимације са екстезијом .gif и у виду неколико формата статичких слика. Подржава извоз објекта са екстезијом .svg (векторска слика која се може даље обрађивати коришћењем неког софтвера попут Inkscape-a); .emf (векторски формат који се може директно увести у неке Офис (Office) апликације); .png, .pdf и .eps за експортовање на системски клипборд (clipboard). Захваљујући својој PSTricks, PGF/TikZ и Asymptote опцији експортовања може се користити у LaTeX-у. Takoђе подржава и веб (web) експортовање.
Геогебра је преведена на више језика (око 55 језика).
Најновија верзија (верзија 5.0 која је још увек у бета фази) омогућава 3D приказ и аутоматско доказивање.
Према подацима из марта 2014.године Интернационални Геогебра институт (The International GeoGebra Institute или скраћено IGI) сарађује са више од 140 корисничких универзитетских група и непрофитних организација широм света. У нашој земљи то су ГеоГебра Центар Београд и ГеоГебра Институт у Новом Саду.</td></tr>
<tr><td>Окружење:</td><td>

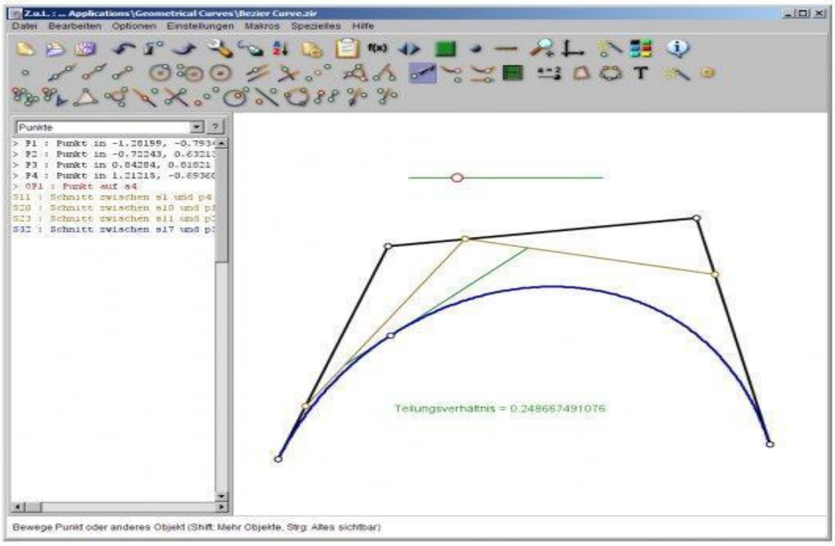
Слика 4. Геогебра окружење-илустрација</td></tr>
<tr><td>Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)</td><td>Геогебру одликује богатсво материјала и туторијала за коришћење.
Међу материјалима који се могу применити у настави издвајају се они на следећим страницама:
http://www.geogebratube.org/?lang=sr
http://www.geogebra.matf.bg.ac.rs/materijali.html
http://www.youtube.com/user/GeoGebraChannel
Упутство на српском језику може се пронаћи на:
http://geogebra.math.rs/uputstvoGGB.pdf</td></tr>
</table>

5.2.C.a.R

Слика 5. C.a.R лого [29]

Табела 2. Основне информације о C.a.R-у

URL:	http://car.rene-grothmann.de/doc_en/download.html
Оперативни системи:	Windows/ Linux/ Mac OS X
Отворени код (Open source):	Да
Цена:	Бесплатан
Историја:	Аутор је Рене Готман (Rene Grothmann) са Католичког Универзитета у Ајхштет-Инголштату (Eichstätt-Ingolstadt). Развој овог софтвера започет је 1989.године.
Тренутне карактеристике:	C.a.R је скраћеница од *Compass and Ruler* (познат је и као *Z.u.L.*, што је скраћеница немачких речи *Zirkel und Lineal*) и значи Шестар и Лењир. То је динамички програм, намењен настави геометрије и омогућава конструкције (помоћу шестара и лењира) у еуклидској и нееуклидској (хиперболичкој или елиптичкој) геометрији. Бољем схватању геометријских веза објеката доприносе опције попут трагови тачака (tracks of point) и могућност анимације. Омогућава примену макроа (чиме се сложене конструкције поједностављују). Применом напредних макроа (advanced macros) могуће је извршити и 3D конструкције. Дозвољава измене атрибута објекта (облика тачке, типа и дебљине линије, измене боје и обојености објекта, транспарентности објекта, видљивости објекта). Пружа и могућност рада са аритметичким изразима, кривама, функцијама... Подржава опцију скриптовања. Дозвољава експортовање објеката у виду формата .png, .eps, .pdf,.svg, .fig. Подржава LaTeX и веб експортовање. Одликује га вишејезични интерфејс.

<table>
<tr><td>Окружење:</td><td>

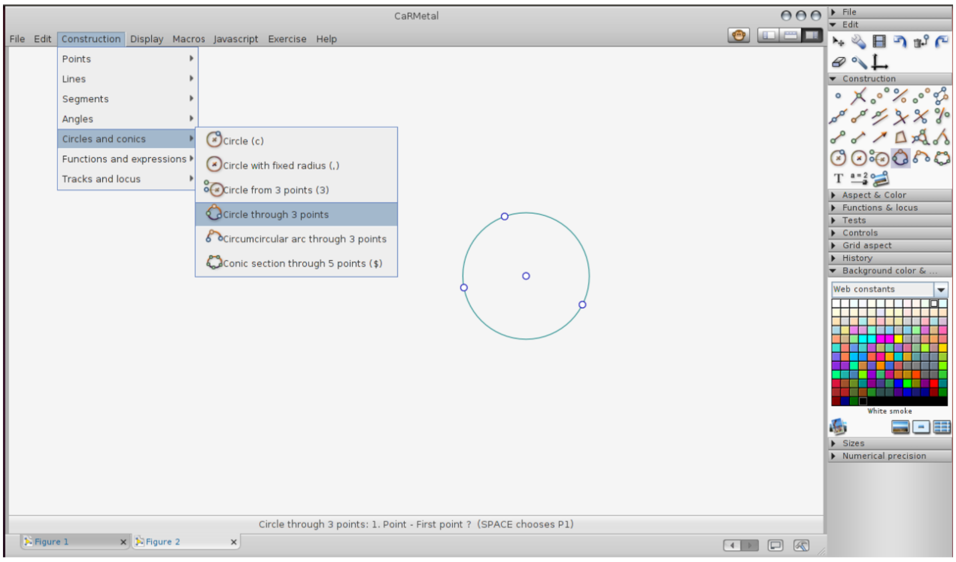
Слика 6. C.a.R окружење-илустрација [33]</td></tr>
<tr><td>Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)</td><td>Упутство, демо и туторијали се могу пронаћи на следећим сајтовима:
http://car.rene-grothmann.de/doc_en/Documentation/index.html
http://car.rene-grothmann.de/doc_en/Demos/index.html
http://car.rene-grothmann.de/doc_en/Tutorial/index.html</td></tr>
</table>

5.3.CaRMetal

Слика 7. CaRMetal лого [34]

Табела 3. Основне информације о CaRMetal –у

URL:	http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_en.html
Оперативни системи:	Windows/ Linux/ Mac OS X
Отворени код (Open source):	Да
Цена:	Бесплатан

Историја:	2006.године захваљујући Ерику Хакенхолцу (Eric Hakenholz), професору математике у Милау (Millau) CaRMetal је настао од програма CaR. У његовом развоју осим Ерика Хакенхолца учествују и Пјер-Марк Мазар (Pierre-Marc Mazat) и Ален Басер (Alain Busser).
Тренутне карактеристике:	Ово је динамички софтвер намењен геометрији који подржава велики број функција програма CaR-a (од кога је и настао), али има другачији графички интерфејс, једноставнији за употребу. За разлику од почетног пакета CaR-a омогућава брз и лак приступ многобројним ефектима (без сувишних међукорака и додатних питања). Широка палета алата пружа могућност лаког извођења конструкције попут конструкције нормалне бисектрисе, круга кроз три тачке као и кружног лука кроз три тачке, конструкције конусних пресека помоћу пет тачака,... Подржава рад са функцијама, параметарским кривама, графицима. Дозвољава измене атрибута објекта (боје, дебљине, ознаке, видљивости,...). Подржава рад са макроима, скриптовање чиме се омогућава лакша конструкција сложених објеката. Постоји 3D мод CaRMetal-a који садржи правилан тетраедар, коцку, октаедар (дијамант) и правилан додекаедар. Пружа могућност LaTeX и веб експортовања. Посебан додатак је Monkey-алат који омогућава тестирање и тако пружа повратну информацију ученику о исправности извршене конструкције. Има вишејезични интерфејс.
Окружење:	 Слика 8. CaRMetal окружење-илустрација

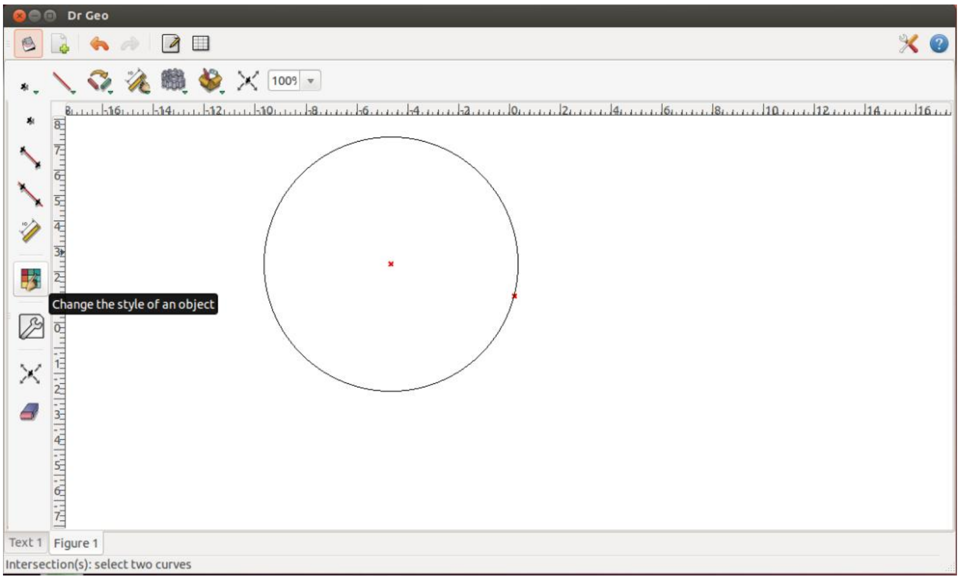
Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)	Многобројни туторијали (неки од њих имају и могућност превода на српски језик, али ови преводи нису изузетно успешни): http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_en.html http://www.youtube.com/user/CaRMetal2?feature=watch http://carmetal.org/index.php/tutoriels

5.4.Dr. Geo

Слика 9. Dr. Geo лого [37]

Табела 4. Основне информације о Dr. Geo –у

URL:	http://www.drgeo.eu/download-install
Оперативни системи:	Windows/ Linux/ Mac OS X Android и iPad апликација
Отворени код (Open source):	Да
Цена:	Бесплатан
Историја:	Развој софтвера започео је Илар Фернандез (Hilaire Fernandes) децембра 1996. године.
Тренутне карактеристике :	Овај интерактивни софтвер намењен је геометрији, подржава конструкцију тачке, праве, полуправе, дужи, вектора, пресека две криве, као и средишта дужи, праве нормалне или паралелне датој правој кроз дату тачку, круга кроз две тачке, круга задатог центром и полупречником , кружног лука кроз три тачке, многоугла,... Могуће је извођење изометријских трансформација и хомотетије. Дозвољава промену атрибута објекта (боје, видљивости...). Разликује две врсте тачака: мобилну тачку (која може да се помера мишем, безобзира да ли је повезана са неком кривом) и фиксирану тачку (која је задата координатама). Пружа могућност скриптовања, као и израде макроа. Могућност експортовања у LaTeX и EPS формату.

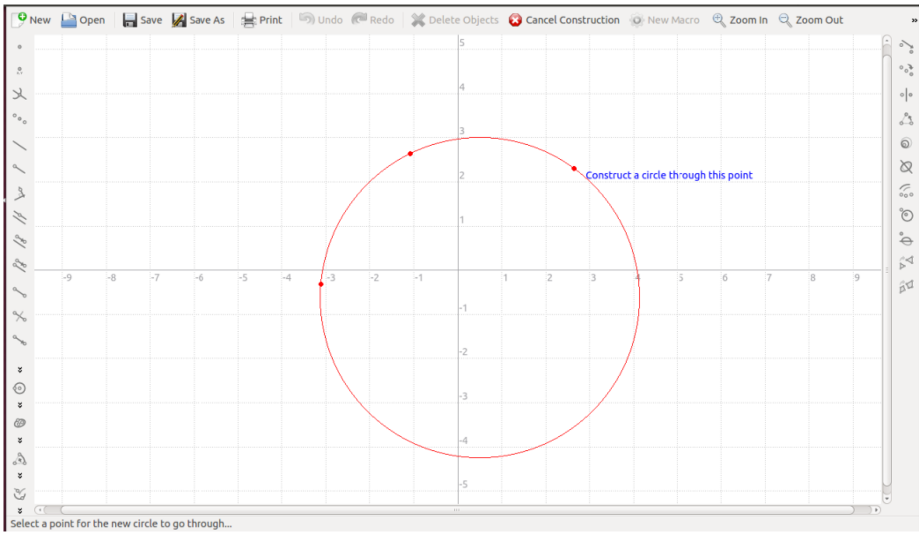
Окружење:	 Слика 10. Dr. Geo окружење-илустрација
Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)	Туторијали се могу пронаћи на овим сајтовима: http://www.drgeo.eu/screenshot-video http://www.youtube.com/watch?v=rlwI-ZcwUSA

5.5.Kig

Слика 11. Kig лого [40]

Табела 5. Основне информације о Kig –у

URL:	http://edu.kde.org/kig/download.php
Оперативни системи:	Windows/ Linux (Unix-like)/ Mac OS X
Отворени код (Open source):	Да
Цена:	Бесплатан

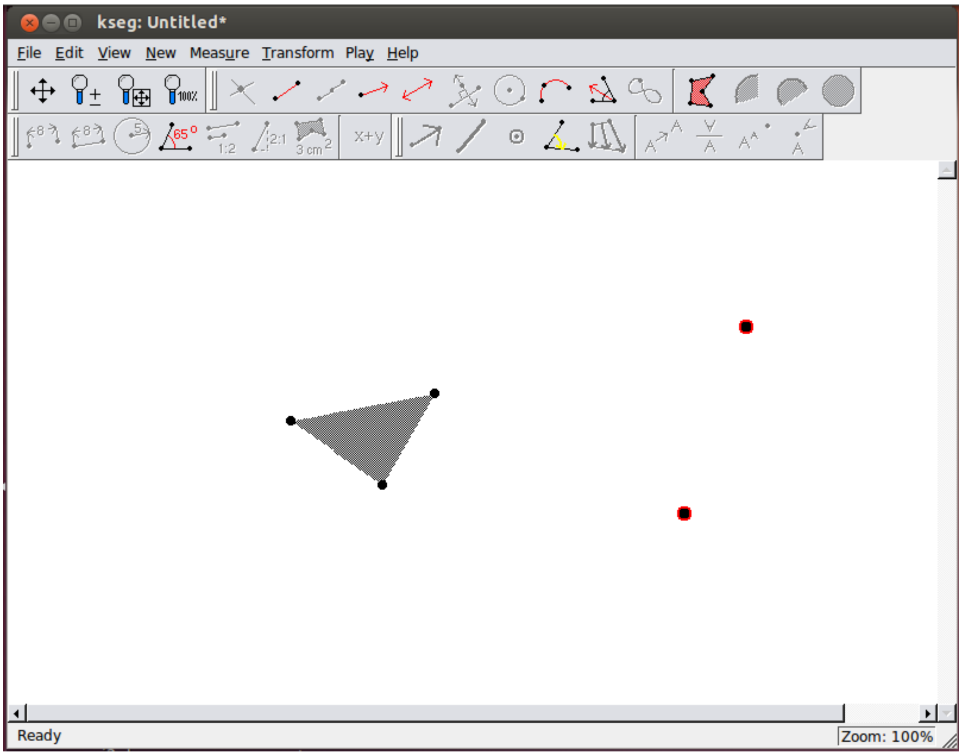
Историја:	Креирали су га Доминик Девриз (Dominique Devriese), Маурицио Паолини (Maurizio Paolini) и Франко Паскарели (Franco Pasquarelli), а одржава га Пино Тоскано (Pino Toscano). Развој је започет у августу 2006. године.
Тренутне карактеристике:	Ово је интерактивни програм намењен раду са геометријским конструкцијама. Померањем, селектовањем и сличним некомпликованим потезима врши се конструкција објеката (тачка, дуж, права, круг-одређен центром и тачком на кружници, центром и полупречником, са три тачке које припадају кружници,...), изводе се изометијске трансофмације, промене атрибута објекта,... Подржава конструкције локуса, изградњу макроа, скриптовање. Не пружа могућност анимације. Не подржава веб експортовање, али зато подржава LaTeX експортовање као и експортовање у виду .png, .bmp, .svg, .fig, .pdf формата. Вишејезични интерфејс. С обзиром на то да је KPart апликација, може бити с имплементиран у било који KDE софтвер.
Окружење:	 Слика 12. Kig окружење-илустрација
Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)	Туторијал се може пронаћи на страници: http://docs.kde.org/stable/en/kdeedu/kig/index.html

5.6.KSEG

Слика 13. KSEG лого [46]

Табела 6. Основне информације о KSEG –у

URL:	http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html
Оперативни системи:	Windows/ Linux/ Mac OS X
Отворени код (Open source):	Да
Цена:	Бесплатан
Историја:	Илија Баран (Ilya Baran) је креатор овог софтвера. Настао је од SEG-а, малог DOS програма креираног 1996.године који је развијен и побољшан за Windows, а потом и за Linux (назван је KSEG јер је био део KDE пројекта). Интересантно је напоменути да је идеја о креирању SEG-а настала јер аутор није желео да плати 40 долара копију Sketchpad-a.
Тренутне карактеристике :	KSEG је интерактивни софтвер намењен раду и исраживањима у еуклидској геометрији. Осим рада са једноставим конструкцијама попут тачке, праве, полуправе, дужи, вектора, лукова,итд., пружа могућност рада и са сложеним конструкцијама, конструкцију локуса, могућност трансформација (транслација, ротација, рефлексија и скалирање-хомотетија). Рад са сложеним конструкцијама је олакшан захваљујући могућности скриптовања и израде макроа (уз могућност рекурзије). Подржава опцију мерења као и опцију промене атрибута објекта (боја, облик,...). Експортовање докумената у виду .png и .bmp формата

<table>
<tr>
<td>Окружење:</td>
<td>

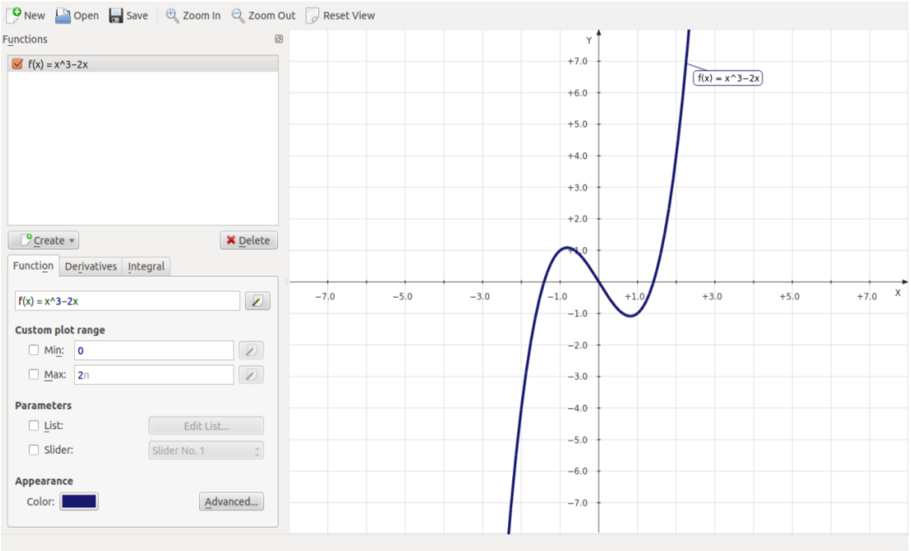
Слика 14. KSEG окружење-илустрација</td>
</tr>
<tr>
<td>Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)</td>
<td>Упутство се може пронаћи на овој страници :
http://www.mit.edu/~ibaran/kseg_help_en.html</td>
</tr>
</table>

5.7.Kmplot

Слика 15. Kmplot лого [49]

Табела 7. Основне информације о Kmplot –у

URL:	http://kmplot.apponic.com/
Оперативни системи:	Windows/ Linux/ Mac OS X
Отворени код (Open source):	Да
Цена:	Бесплатан
Историја:	Развој у оквиру KDE пројекта. Идејни творац је Клаус-Дитер Мулер (Klaus-Dieter Möller), а његовом развоју (изради грефичког интерфејса и многим другим побољшањима) допринели су и Матиас Месмер (Matthias Meßmer), Фредерик Едемар (Frederik Edemar), Дејвид Сакстон (David Saxton)
Тренутне карактеристике:	Ово је програм намењен раду са функцијама, тачније цртању функција. Постоји опција за промену атрибута графика, подешавање оса и мреже, избор приказа функције у Декартовом или поларном координатном систему, скалирања погледа (зумирања) што додатно олакшава рад са графицима функција. Подржава цртање и комбиновање различитих функција у циљу добијања нове функције. Функције се могу задати експилитно, имплицитно и параметарски. Корисник има могућност да задаје вредности параметрима и да дефинише константе. Има опцију попуњавања и израчунавања површине између графика и осе, проналажења екстремних вредности функције, цртања првог и другог извода и интеграла функције. Могућност експортовања у виду .bmp, .png и .svg формата Вишејезични интерфејс.

Окружење:	 Слика 16. Kmplot окружење
Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)	Упутство се може пронаћи на следећој страници: http://docs.kde.org/stable/en/kdeedu/kmplot/index.html

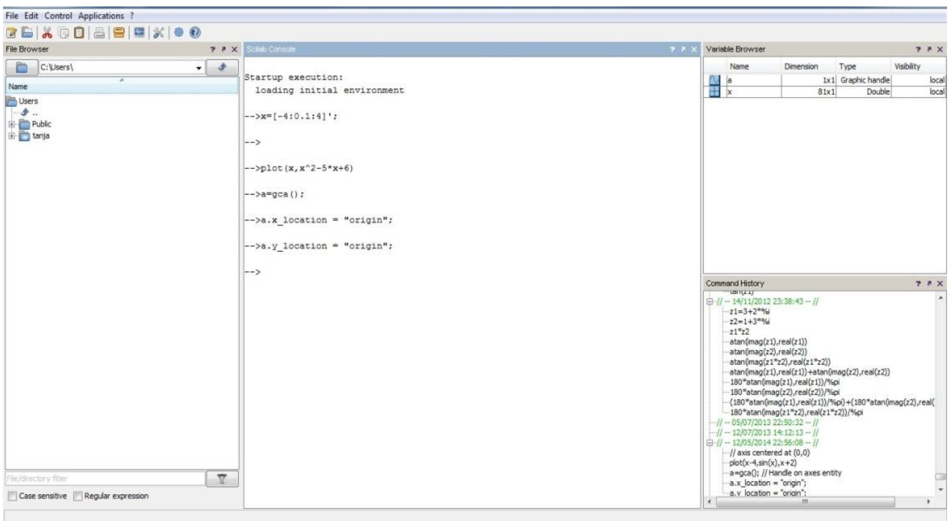
5.8.Scilab

Слика 17. Scilab лого [51]

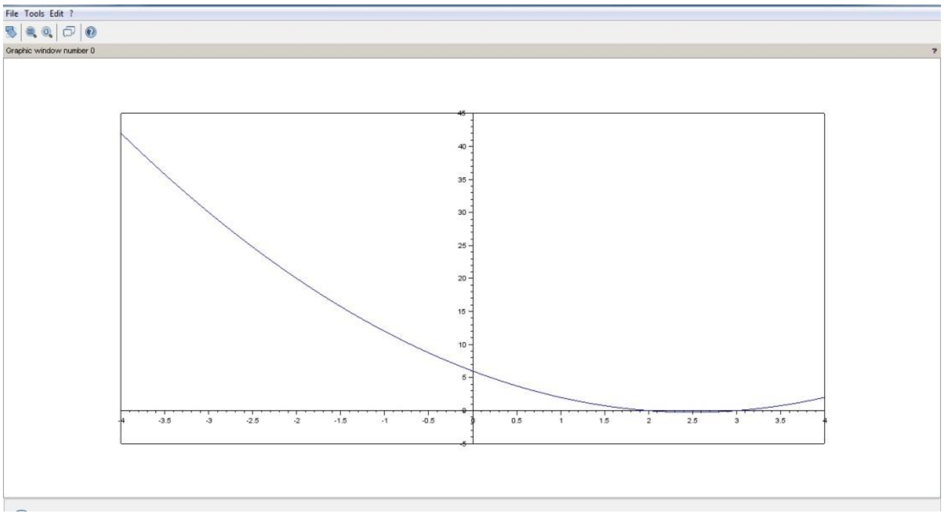
Табела 8. Основне информације о Scilab –у

URL:	http://www.scilab.org/download/5.5.0
Оперативни системи:	Windows/ Linux/ Mac OS X

<table>
<tr><td>Отворени код (Open source):</td><td>Да</td></tr>
<tr><td>Цена:</td><td>Бесплатан</td></tr>
<tr><td>Историја:</td><td>Осамдесетих година прошлог века у IRIA-и створен је Blaise (CACSD, Computer Aided Control System Design) који 1984.године постаје Basile. Све до почетка 90-тих година прошлог века Симулог (Simulog) је дистрибуирао овај софтвер. Након тога софтвер добија назив Scilab и на његовом развоју ради група истраживача из Инрије (Inria) и ENPC-a (École Nationale des Ponts et Chaussées). Први назив софтвера био је Ψlab, али је промењен у Scilab.
Како би се примена софтвера распростанила и обухватила већи део света науке и индустрије, 2003.године формиран је The Scilab Consortium који се се у јуну 2008.године прикључио Digiteo Foundation-у. Јуна 2010.године настаје Scilab Enterprises који се бави развојем и проширењем употребе овог софтвера, доприноси једноставној и ефективној употреби овог софтвера.</td></tr>
<tr><td>Тренутне карактеристике:</td><td>Овај софтвер је сличан MATLAB-у. С обзиром на то да пружа могућност нумеричких израчунавања и визуелизације података помоћу 2-D и 3-D графика, погодан је за примену у науци и у инжињерству.
Омогућава рад са реалним и комплексним бројевима, матрицама, системима једначина, векторима, полиномима, линеарним и нелинарним једначинама, графицима функција... Пружа могућност решавања проблема оптимизације, обраде и анализе статистичких података, сигналног процесирања, симулације динамике флуида, моделирања механичких и контролних система,...</td></tr>
<tr><td>Окружење:</td><td>



Слика 18. Scilab окружење-илустрација</td></tr>
</table>

	 Слика 19. Scilab окружење-илустрација
Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)	Помоћ се може наћи на сајту: http://help.scilab.org/docs/5.5.0/en_US/index.html Материјала за примену у настави највише има на француском језику, али постоје и сајтови и на другим језицима на којима се могу наћи добре инструкције за рад у овом програму. http://www.scilab.org/community/education/maths/doc https://p2pu.org/he/groups/getting-started-with-scilab/ http://www.youtube.com/user/ScilabChannel

5.9. Maxima/ wxMaxima

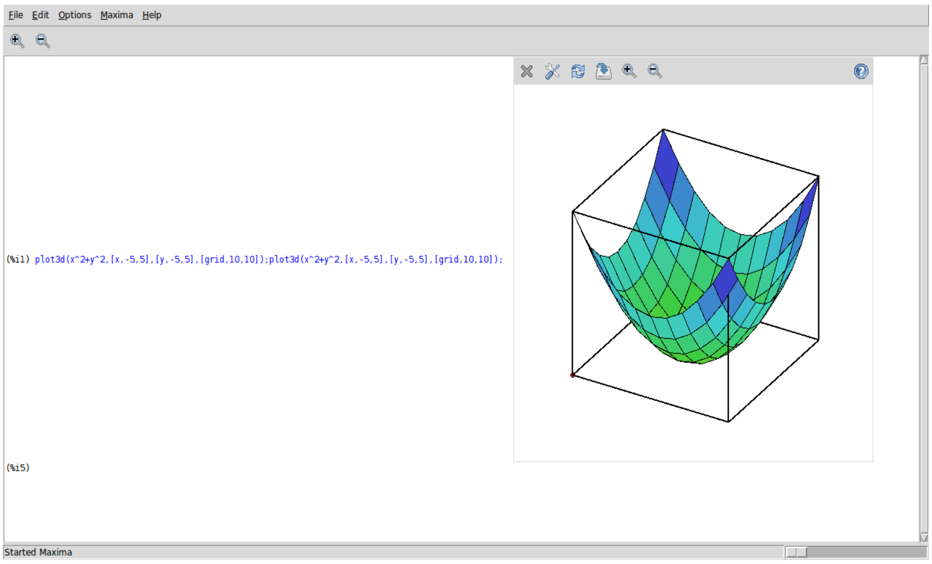
Слика 20. Maxima лого [55]

Слика 21. wxMaxima лого [56]

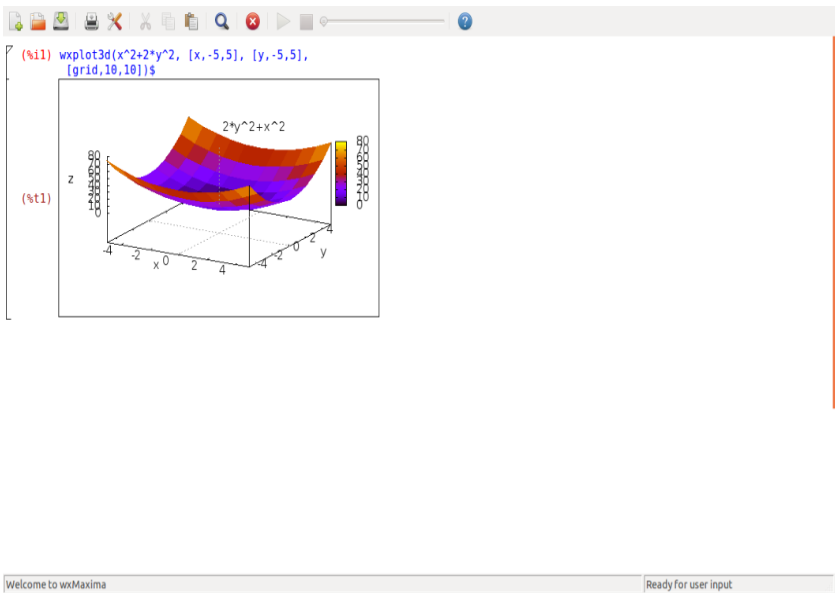
Табела 9. Основне информације о Maxima/ wxMaxima –и

URL:	http://maxima.sourceforge.net/download.html http://andrejv.github.io/wxmaxima/
Оперативни системи:	Windows/ Linux/ Mac OS X Android апликација
Отворени код (Open source):	Да
Цена:	Бесплатан
Историја:	Maxima је настала од програма Macsyma (верзија из 1982.године). Бил Шелтер (Bill Schelter) који је одржавао верзију Macsyma (од 1982. до 2001.године, до године када је преминуо), након добијене дозволе да развије своју верзију (1998.год.), креира Maxima-у и развија је у сарадњи са групом корисника и програмера. Све измене комерцијалне верзије Macsyma-е из периода од 1982. до 1999. године нису обухваћене Maxima-ом, па иако је функционално језгро исто дешава се да побољшања (из овог периода) базирана на измени кода једног софтвера не функционишу код другог и да багови отклоњени у једном софтверу не условљавају престанак њихове егзистенције у другом.
Тренутне карактеристике:	Ово је типичан рачунарски алгебарски систем, CAS (computer algebra system) тј. математички софтвер намењен раду са симболима. Пружа могућности извођења алгебарских трансформација, рачунских операција, операција са матрицама, те је погодан за примену у линеарној алгебри... Може се користити и у анализи јер пружа могућност рада са функцијама (одређивање граничне вредности функције, извода и интеграла функције,...). Има различите графичке интерфејсе (GUI). Један од њих је wxMaxima која представља графички front-end и која користи

<table>
<tr><td></td><td>wxWidgets.
wxMaxima је интуитивнија од Maxima-е па самим тим и једноставнија за коришћење, пружа могућност дводимензионалног математичког output-а, мени обухвата већи број наредби Maxima-е, већина наредби се једноставно реализује избором одговарајуће опције из менија, задржава историју линија наредби чиме је олакшан приступ, измена и/или понављање истих, подржава једноставне анимације.</td></tr>
<tr><td>Окружење:</td><td>

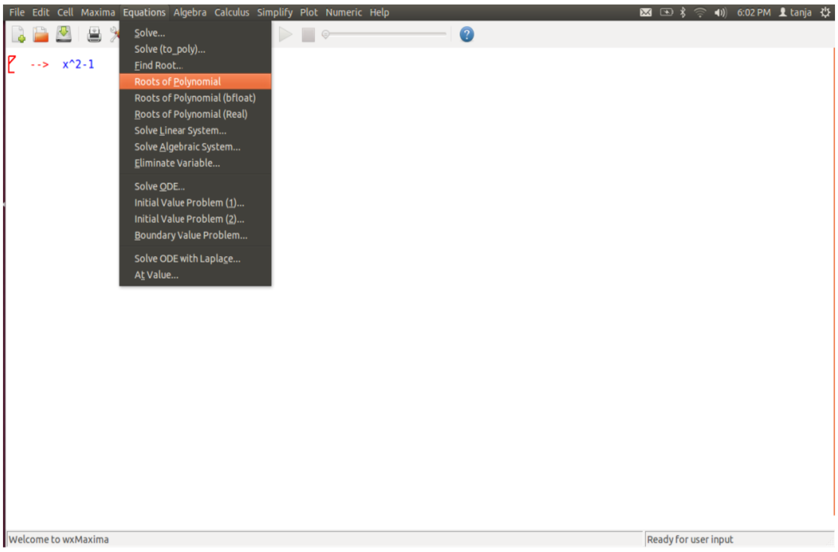


Слика 22. Maxima окружење-илустрација

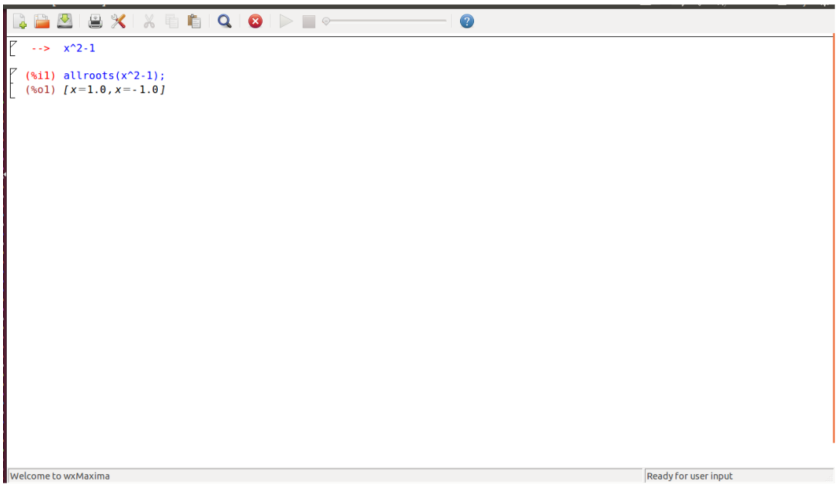


Слика 23. wxMaxima окружење-илустрација

</td></tr>
</table>



Слика 24. wxMaxima окружење-илустрација рада у овом окружењу



Слика 25. wxMaxima окружење-илустрација рада у овом окружењу

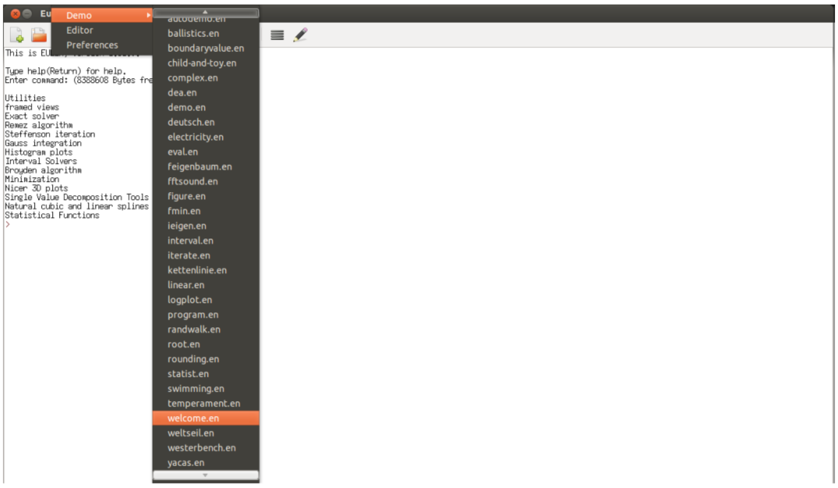
Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)	Туторијал се може пронаћи на страници: http://andrejv.github.io/wxmaxima/help.html

5.10.Euler

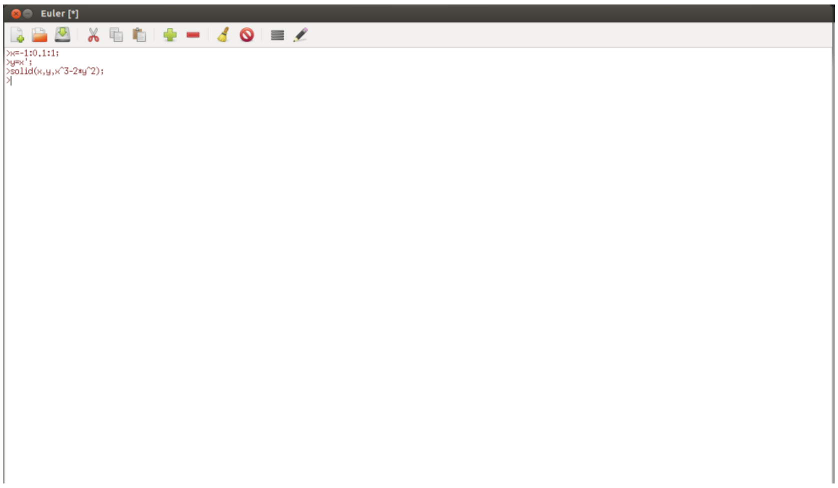
Слика 26. Euler лого [61]

Табела 10. Основне информације о Euler-у

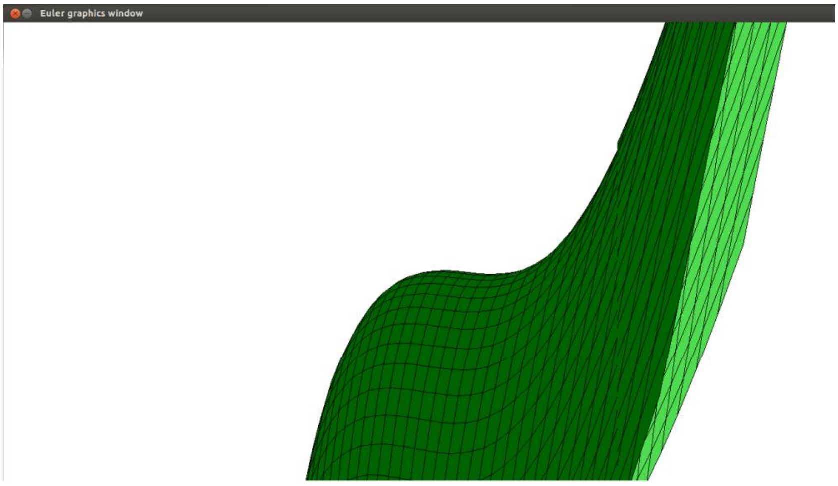
URL:	http://euler.rene-grothmann.de/download.html
Оперативни системи:	Windows/ Linux/Unix
Отворени код (Open source):	Да
Цена:	Бесплатан
Историја:	1988. године као програм за Atari ST настао је Euler Math Toolbox (или једноставије Euler). Овај програм је креирао и развија га математичар Рене Готман са Католичког Универзизета у Ајхштет-Инголштату у у Немачкој. Овај софтвер је удружен са Maxima-ом 2007.године и тада су му (да би ова два програма могла да комуницирају) придодати симболички изрази и још неке функције.
Тренутне карактеристике:	Ово је нумеричко-симболички програм. Омогућава рад са реалним и комплексним бројевима, интервалима, векторима и матрицама (реалних, комплексних или интервалних бројева) као и операције са њима, решавање система линеарних једначина, проналажење нула полинома, рад са функцијама, могућност нумеричке диференцијације и интеграције, апроксимације и интерполације, цртања графика функције (2D и 3D варијанта), Фуријеових трансформација, рада са статистичким подацима... Интерфејс садржи два прозора-текстуални и графички. Графици из графичког прозора могу се убацити у текстуални прозор, али се могу и експортовати у виду различитих формата (png, svg, wmf, clipboard).

<table>
<tr>
<td>Окружење:</td>
<td>


Слика 27. Euler окружење-илустрација рада у овом окружењу



Слика 28. Euler окружење-илустрација рада у овом окружењу
</td>
</tr>
</table>

	 Слика 29. Euler окружење-илустрација
Примери (Пратећи материјал који се може применити у настави)	Туторијали и примери се могу наћи на следећим сајтовима http://euler.rene-grothmann.de/tutorials.html http://euler.rene-grothmann.de/examples.html

6. Примери примене појединих софтвера у настави математике средње школе

6.1. Пример употребе Scilab-а и ГеоГебре у процесу активног учења операција са комплексним бројевима у средњој школи

Овај пример илустује како се применом Scilab-а и ГеоГебре у настави математике средње школе могу активно учити операције са комплексним бројевима методом откривања [62]. Може се употребити у настави математике другог и трећег разреда средње школе јер претпоставља да су ученици упознати са појмом вектора и операцијама са њима, са алгебарским и тригонометријским обликом комплексног броја, са графичким приказом комплексног броја у равни и да су упознати са радом у овим програмима (у другом разреду могу се применити само задаци који се односе на алгебарски облик комплексног броја). Основна идеја је да ученици применом ових софтвера открију дефиниције операција сабирања, одузимања, множења и дељења комплексних бројева у било ком облику. Задатке прате инструкције које наставник даје ученицима приликом решавања ових проблема. Инструкције су у складу са Пољиним ставом о начину пружања помоћи приликом решавања задатка.

Пример употребе ГеоГебре

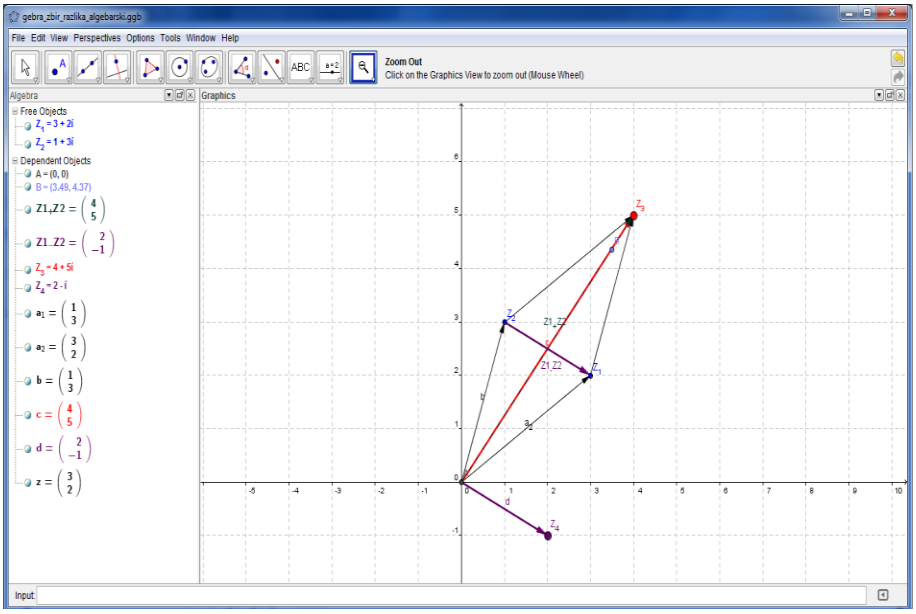
Илуструје процес активног учења методом откривања применом програмског пакета ГеоГебра.

Задатак бр.1

1.део
Дати су бројеви $z_1= 3+2i$ и $z_2=1+3i$. Прикажи их у равни.
Конструиши бројеве z_3 и z_4 такве да је $z_3= z_1 + z_2$ и $z_4= z_1 - z_2$.
Померај z_1 или z_2 и посматрај z_3 и z_4. Шта примећујеш? Да ли можеш да претпоставиш како се сабирају комплексни бројеви у алгебарском облику? Дефиниши правило и тестирај своју претпоставку.
Дискусија о открићу, анализа начина закључивања и указивање на евентуалне грешке.

2.део
Нацртај векторе положаја тачака (бројева) z_1, z_2, z_3 и z_4 , означи их са a, b, c и d (респективно).
Да ли нешто примећујеш?

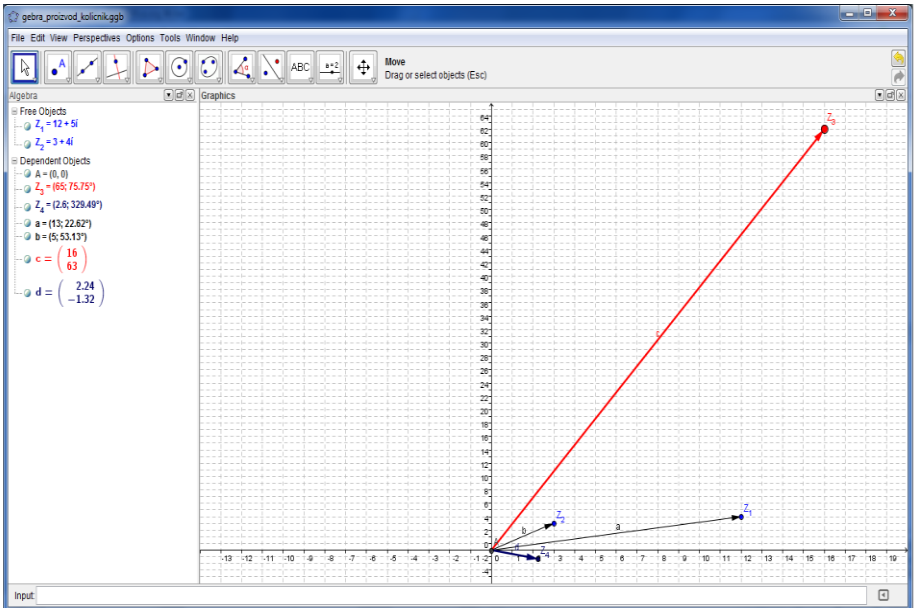
Уколико изостане тражени одговор, конкретнијим питањима и препорукама ученици се усмеравају.
У претходном делу задатка утврдили смо како се сабирају и одузимају комплексни бројеви. Рекли смо да се комплексан број може графички представити и вектором. Слутиш ли шта би још требало испитати?
Конкретније: Нацртај збир и разлику вектора a и b. Шта примећујеш?
Тестирај своју претпоставку.
Дискусија о открићу, анализа начина закључивања и осврт на могуће проблематичне ситуације.



Слика 30. Илустрација поступка решавања задатка бр.1 у ГеоГебри

Задатак бр.2

Дати су бројеви $z_1= 12+5i$ и $z_2=3+4i$. Прикажи их у равни.
Конструиши бројеве z_3 и z_4 такве да је $z_3= z_1 \cdot z_2$ и $z_4= z_1 /z_2$.
Нацртај векторе положаја тачака (бројева) z_1, z_2, z_3 и z_4 , означи их sa a, b, c и d (респективно).
Како комплексни бројеви и њихови вектори положаја имају исте поларне координате, изрази векторе положаја a и b (тј. комплексне бројеве z_1 и z_2) поларним координатама и комплексне бројеве z_3 и z_4 .
Померај z_1 или z_2 и посматрај z_3 и z_4. Шта примећујеш? Да ли можеш да претпоставиш како се множе и деле комплексни бројеви у тригонометријксом облику? Дефиниши правило и тестирај своју претпоставку.
Дискусија о открићу, анализа начина закључивања и указивање на евентуалне грешке.



Слика 31. Илустрација поступка решавања задатка бр.2 у ГеоГебри

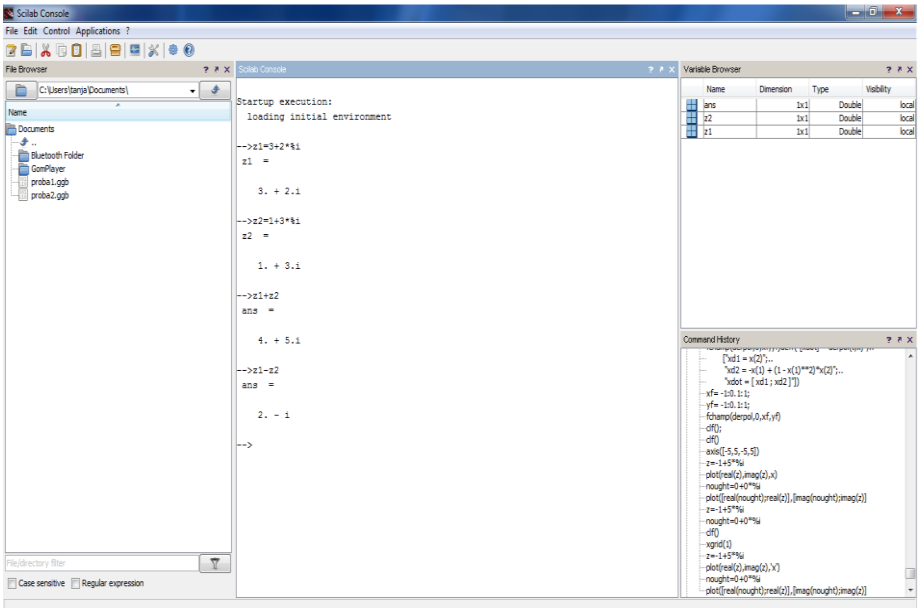
Како је рад у ГеоГебри приликом решавања ових задатака једноставан, илустрације по корацима нису дате, већ су само на Слици 30. и Слици 31. приказана решења првог и другог задатака након обављања свих инструкција.

Решавање ових задатака наводи ученика на откривање дефиниција сабирања и одузимања комплексних бројева у алгебарском облику и дефиницију множења и дељења ових бројева у тригонометријском облику. Takoђе од ученика се захтева да формулише правила, примени их и геометријски интерпретира. Осим продубљивања знања из области вектора и комплексних бројева, он ствара релацију између ова два појма, а бољем разумевању изузетно доприноси и визуелни приказ.

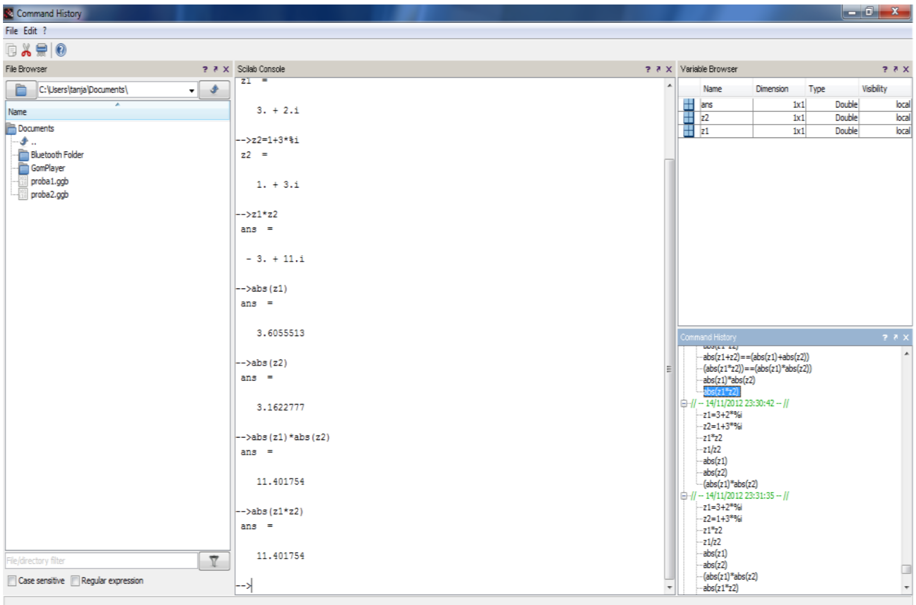
Пример употребе Scilab-a

Илуструје процес активног учења методом откривања применом софтвера Scilab.

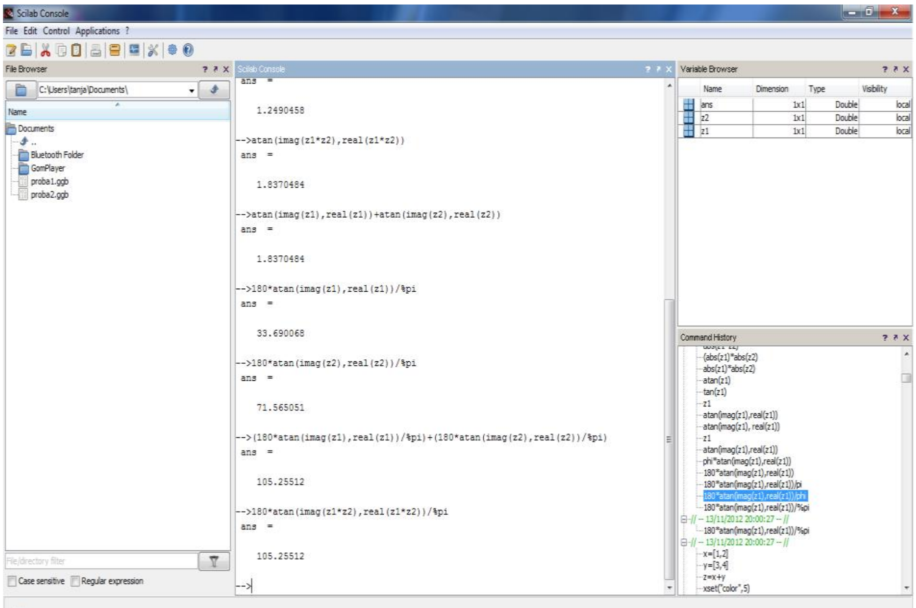
Задатак бр.1 и бр.2 су идентични као у примеру који илуструје учење комплексних бројева помоћу Геогебре, метода вођења ученика кроз процес стицања знања је идентичан, једина разлика је у окружењу (Слика 32.- Слика 34.).



Слика 32. Илустрација поступка решавања 1.дела задатка бр.1 у Scilab-у



Слика 33. Илустрација за поступак решавања задатка бр.2 у Scilab-у



Слика 34. Илустрација за поступак решавања задатка бр.2 у Scilab-у

Овакви наставни процеси у разликују се од традиционалних по томе што пружају могућност учења открићем. Решавање ових задатака применом споменутих програмских пакета наводи ученика на откривање дефиниција сабирања и одузимања комплексних бројева у алгебарском облику и дефиницију множења и дељења ових бројева у тригонометријском облику. С обзиром на то да графичко представљање ових операција у Scilab-у захтева добро познавање рада у овом окружењу и способност програмирања, овакав задатак може се дати изузетно заинтересованим ученицима склоним програмирању.

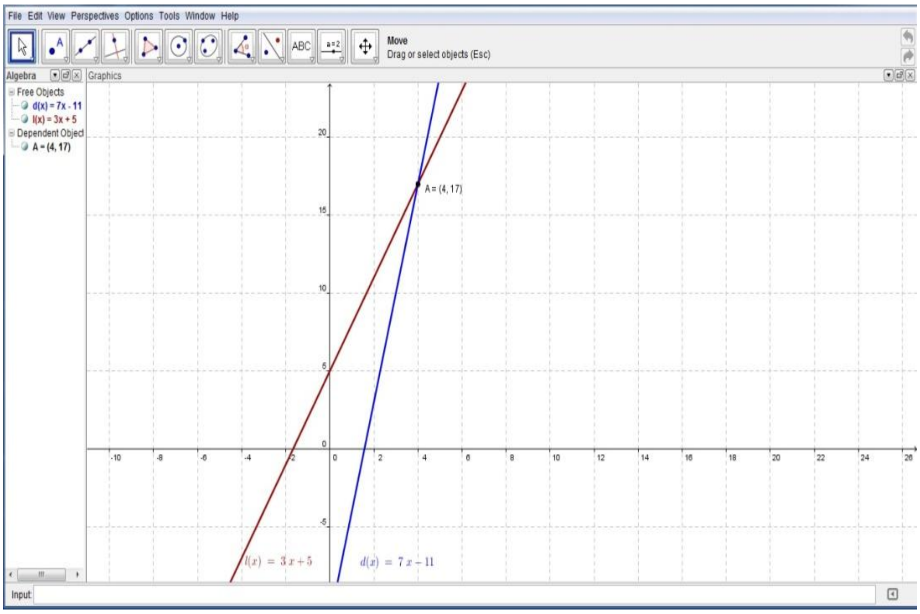
Применом ГеоГебре или Scilab-а могу се открити и операције множења и дељења комплесних бројева у алгебарском облику, као и сабирања и одузимања у тригонометријском облику. Ови задаци су просечним ученицима поприлично сложени и тешки, треба их задавати заинтересованијим ученицима.

6.2. Пример графичког решавања једначина и неједначина у средњој школи применом ГеоГебре

Овај пример илуструје како се Геогебра може применити приликом активног учења методе решавања једначина и неједначина [63]. Задаци су углавном намењени првом разреду средње школе, али се идеја може применити и у осталим разредима средње школе. Ученицима се упоредно излажу две различите методе решавања (не)једначина (стандардно алгебарско решавање и графичко решавање применом ГеоГебре) како би ученици открили везу између графичког и алгебарског решења и како би се оспособили да препознају адекватну методу за решавање одређеног задатка. Пожељно је примењивати обе методе у било ком разреду средње школе (кад год је могуће). Задатке прате захтеви и препоруке које су у складу са Пољиним ставом о препорукама и инструкцијама.

Задатак бр.1: Дата је једначина 3x+5=7x-11.

а) Дату једначину реши алгебарски.
б) У ГеоГебри у истом координатном систему прикажи леву страну једначине као функцију l(x), а десну као d(x). Примећујеш ли штогод?



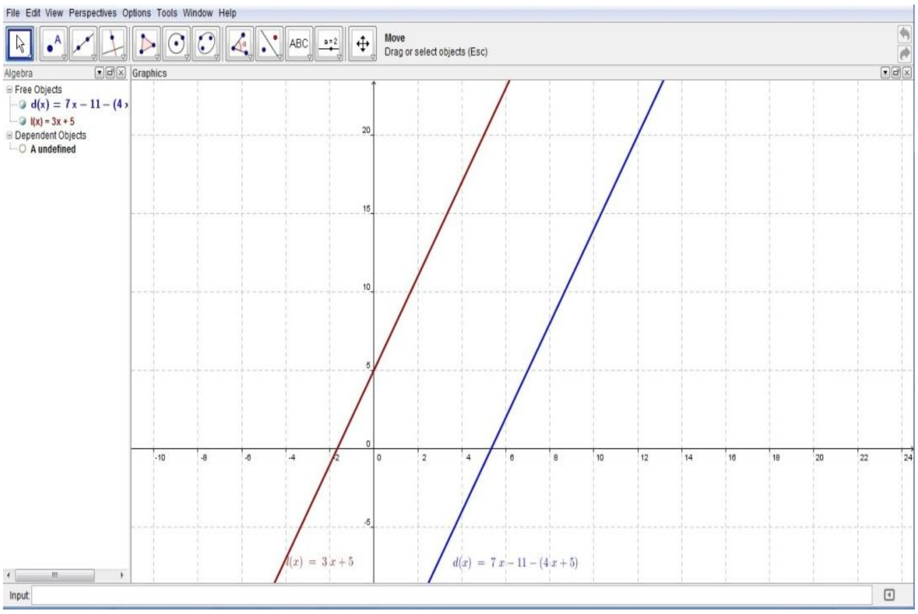
Слика 35. Илустрација графичког решавања задатка бр.1

У случају изостанка очекиваног одговора, ученика ненаметљиво треба навести ка траженом одговору.

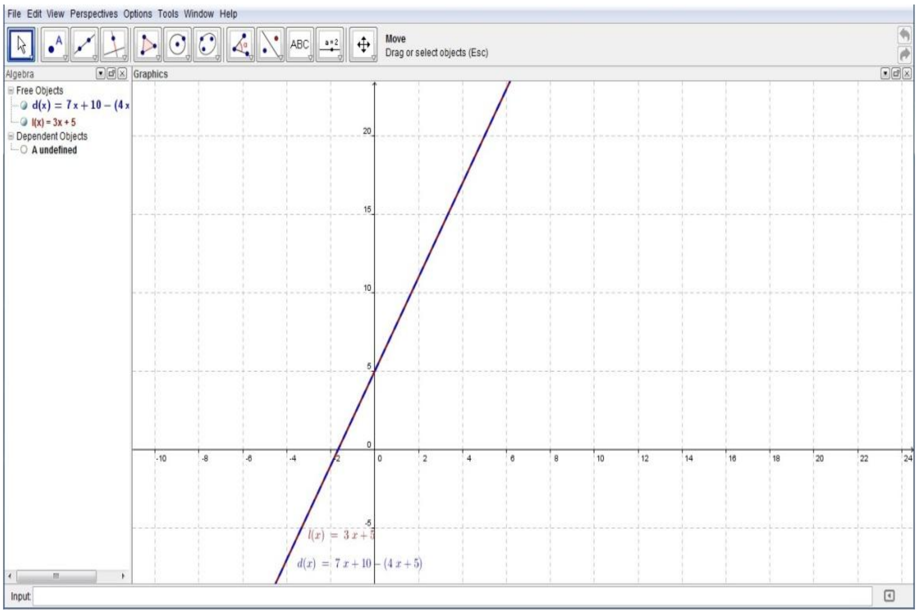
Задатак бр.2: Дата је једначина: 3x+5=7x-11-(4x+5).

Задатак бр.3 : Дата је једначина: 3x+5=7x+10-(4x+5).

Захтеви и препоруке у овим задацима су исте као у задатку бр.1.



Слика 36. Илустрација графичког решавања задатка бр.2



Слика 37. Илустрација графичког решавања задатка бр.3

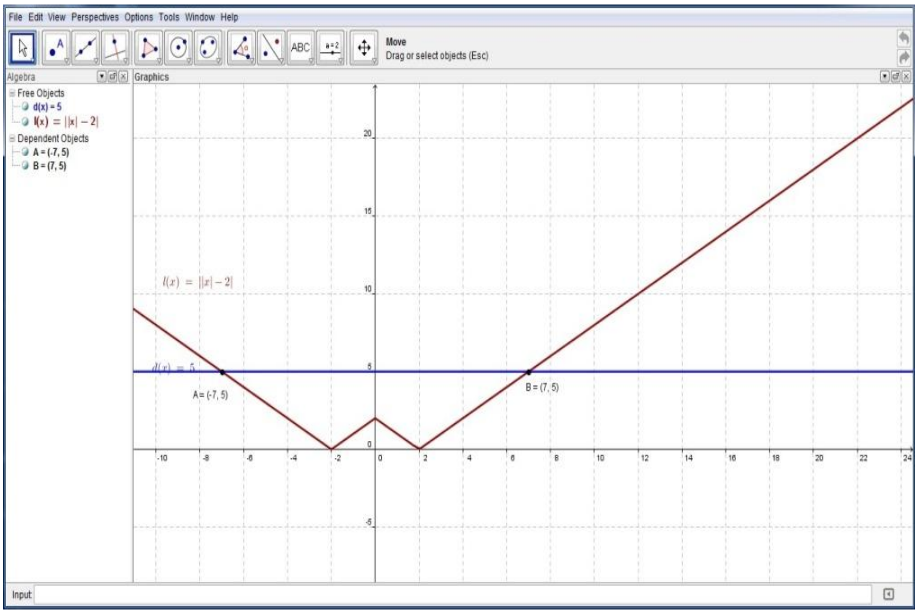
Решавањем задатака бр.1, бр.2 и бр.3 ученик уочава корелацију између алгебарског и графичког решења у случају када је једначина одређена, када је немогућа и када је неодређена (Слика 35.- Слика 37.).

Задатак[1] бр.4 : Дата је једначина: ||x|-2|=5

а) Дату једначину реши алгебарски.

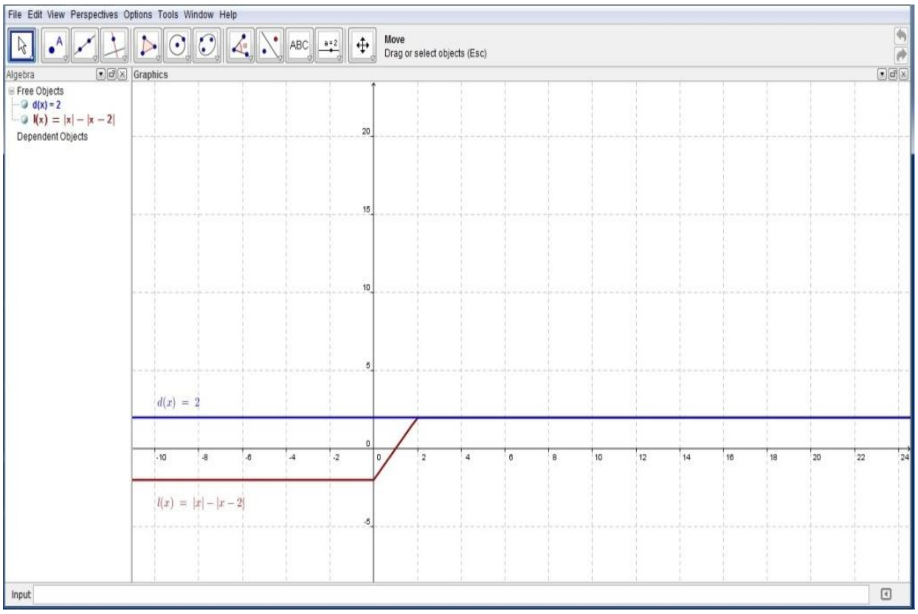
1 Задатак је преузет из збирке *Ж. Ивановић, С. Огњановић , Математика 1 Збирка задатака и тестова за* I разред гимназија и техничких школа, Круг, Београд, 2008. [64]

б) У ГеоГебри у истом координатном систему прикажи леву страну једначине као функцију l(x), а десну као d(x). Примећујеш ли штогод? (Слика 38.)



Слика 38. Илуструје графичко решавање задатка бр.4

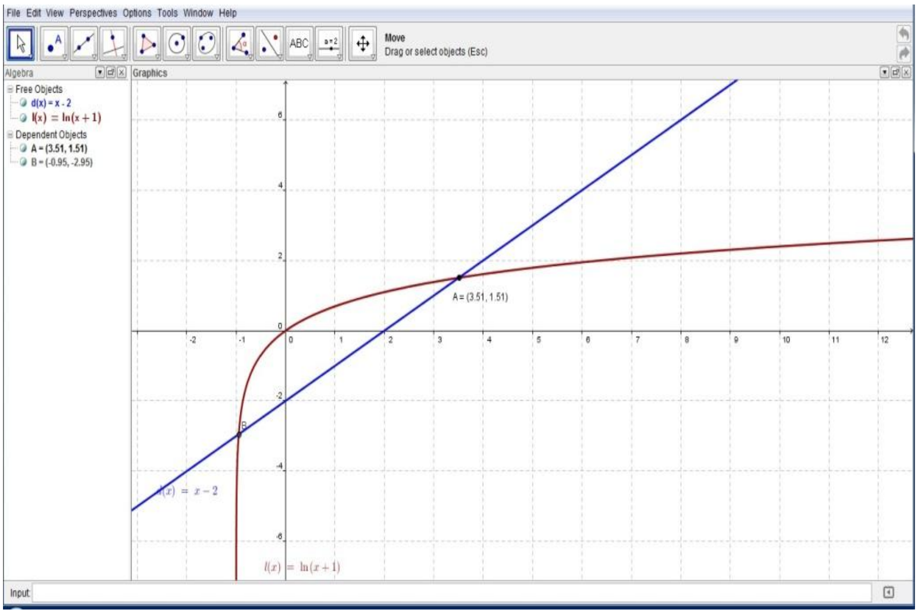
Задатак [2] бр.5 : Дата је једначина: |x|-|x-2|=2
Захтеви и препоруке у овом задатку су исте као у задатку бр.4. (Слика 39.)



Слика 39. Илустрација графичког решавања задатка бр.5

2 Задатак је преузет из збирке *Ж. Ивановић, С. Огњановић , Математика 1 Збирка задатака и тестова за* I разред гимназија и техничких школа, Круг, Београд, 2008. [64]

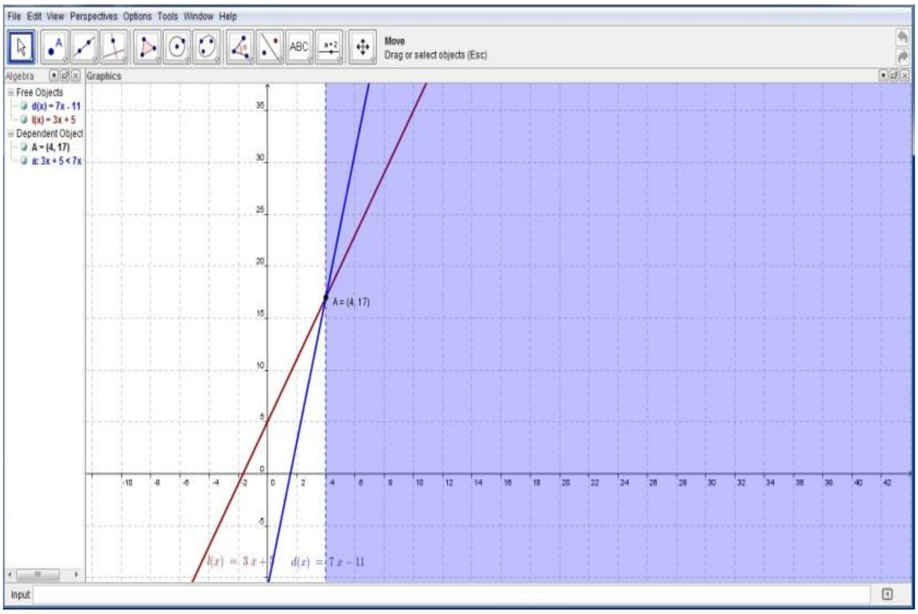
Задатак бр.6 : Реши једначину: ln(x+1)=x-2



Слика 40. Илустрација графичког решавања задатка бр.6

Након овог задатка ученик закључује да постоје и они који се могу решити само графичком методом (Слика 40.).
На основу претходног искуства, уз помоћ ГеоГебре, ученици првог разреда који нису упознати са појмом логаритма и логаритамске функције, лако долазе до идеје како да реше овај задатак.

Задатак бр.7 : Дата је неједначина: 3x+5<7x-11.
а) Дату неједначину реши алгебарски.
б) У ГеоГебри у истом координатном систему прикажи леву страну неједначине као функцију l(x), а десну као d(x). А затим у поље input унеси l(x)<d(x) (јер је лева стране неједначине мања од десне). Примећујеш ли штогод? Шта представља осенчени део? У каквом су положају графици функција l(x) и d(x) у осенченом делу?



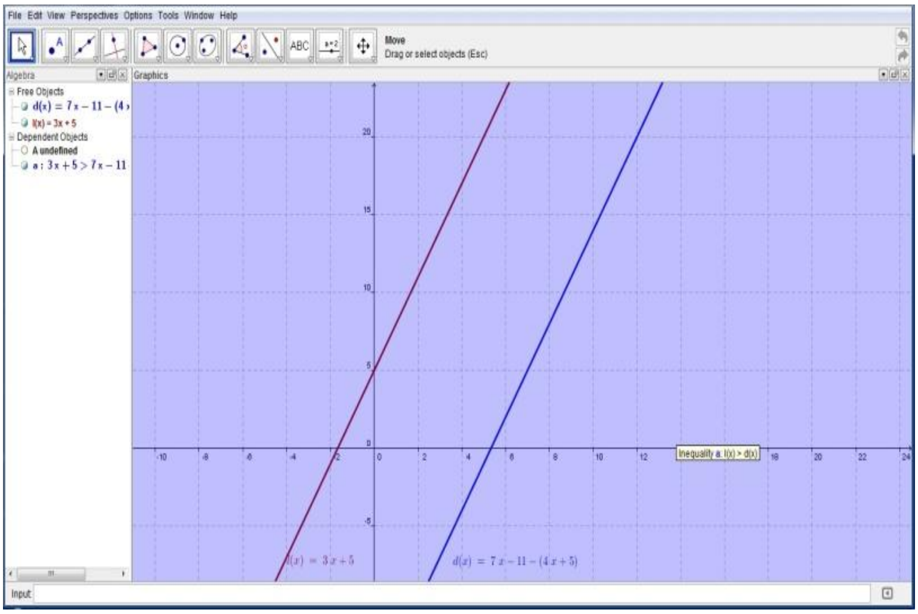
Слика 41. Илустрација графичког решавања задатка бр.7

Решавајући овај задатак ученик уочава везу између графичког и алгебарског решења, примећује да је то осенчена област у којој је график функције l(x) испод графика функције d(x), јер је l(x)<d(x) (Слика41.).

Задатак бр.8 : Дата је неједначина: 3x+5>7x-11-(4x+5).

а) Реши дату неједначину алгебарски.

б) У ГеоГебри у истом координатном систему прикажи леву страну неједначине као функцију l(x), а десну као d(x). У поље input унеси l(x)>d(x). Примећујеш ли штогод?

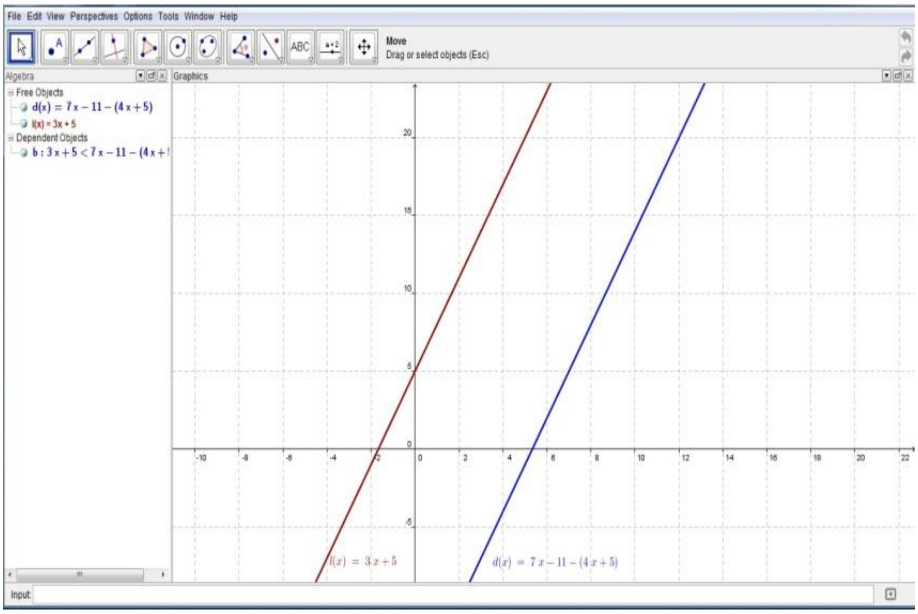


Слика 42. Илустрација графичког решавања задатка бр.8

Задатак бр.9 : Дата је неједначина: $3x+5<7x-11-(4x+5)$.

а) Дату неједначину реши алгебарски.

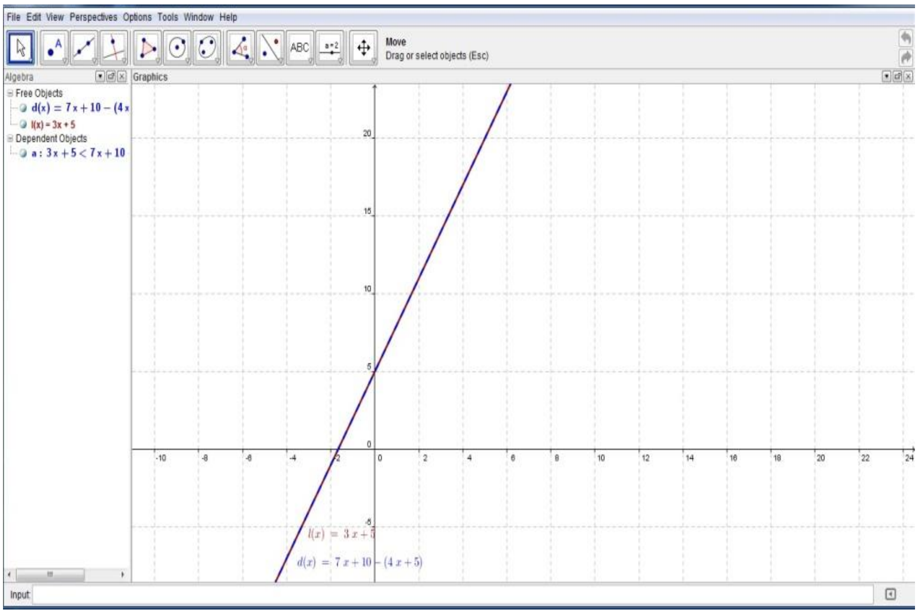
б) У ГеоГебри у истом координатном систему прикажи леву страну неједначине као функцију l(x), а десну као d(x). У поље input унеси $l(x)<d(x)$. Примећујеш ли штогод?



Слика 43. Илустрација графичког решавања задатка бр.9

Задатак бр.10 : Дата је неједначина: $3x+5<7x+10-(4x+5)$.

Захтеви и препоруке су исти као у претходном задатку.



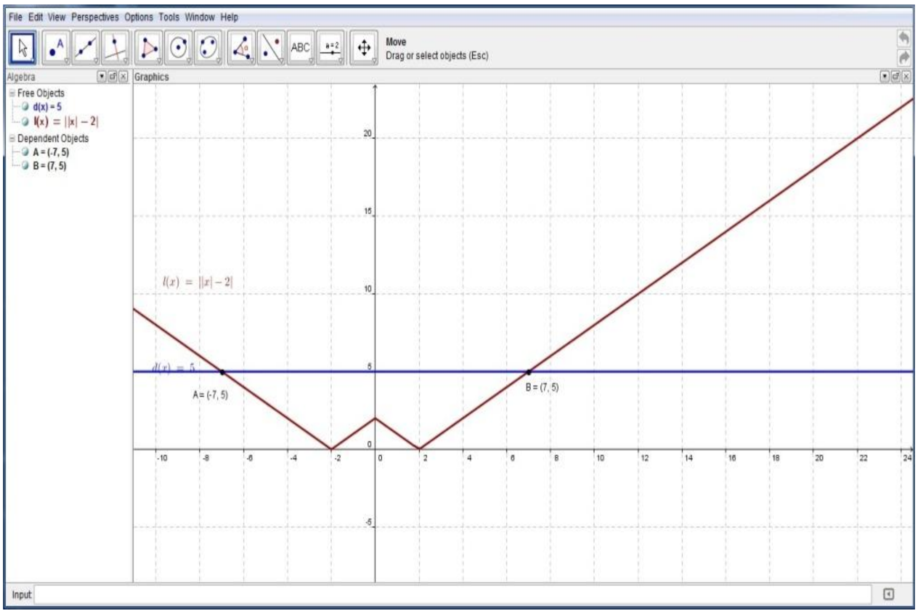
Слика 44. Илустрација графичког решавања задатка бр.10

Решавајући задатке бр.8, бр.9 и бр.10 ученик уочава везу између графичког и алгебарског решавања неједначина у случајевима када је решење неједначине сваки реалан број или када неједначина нема решења (Слика 42.- Слика 44.).

Задатак бр.11 : Дата је неједначина: ||x|-2|<5

Задатак бр.12 : Дата је неједначина: |x|-|x-2|<2

Захтеви и препоруке су идентични као у претходним задацима.



Слика 45. Илустрација графичког решавања задатка бр.11

Решавањем задатака бр.11 и бр. 12 ученик уочава да иако нема осенчених делова[3] неједначина има решења и да и даље важи правило положаја графика функције леве и десне стране неједначине (Слика38., Слика 39.).

Задатак бр.13 : Дата је неједначина: ln(x+1)>x-2.
Овај пример омогућава ученицима да схвате да постоје неједначине које се могу само графички решити (Слика 40.).

[3] У питању је ГеоГебра верзија 4.0.19.0

6.3. Пример решавања система линеарних једначина са две непознате у ГеоГебри, wxMaxima-и и Scilab-у

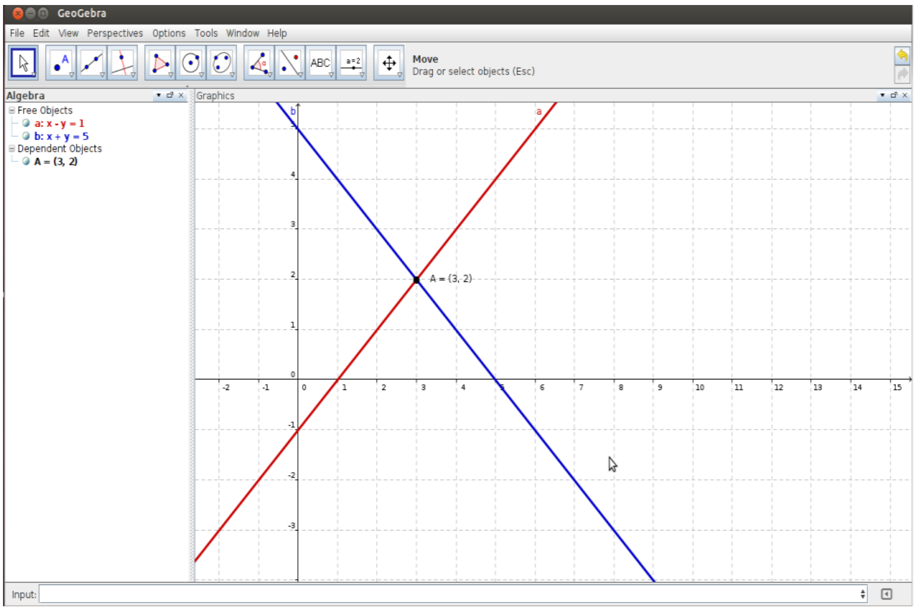
Правилним одабиром софтвера могу се постићи бољи резутати у настави. Овај пример илуструје разлике приликом решавања система линеарних једначина помоћу ГеоГебре, wxMaxima-е и Scilab-а, а избор софтвера зависи од циља који се жели постићи [65] .

Дата су три система линераних једначина са две непознате:

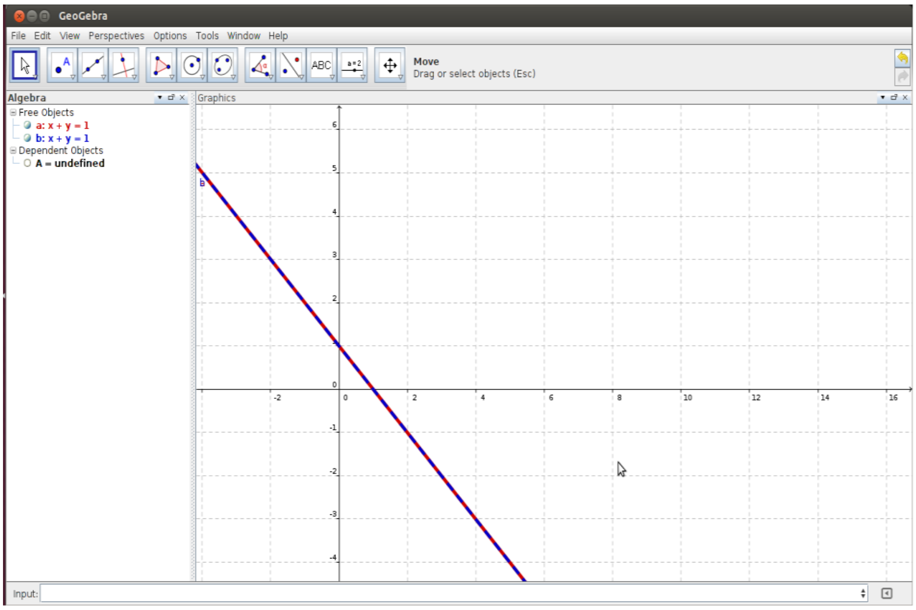
1. одређени систем (систем са једнистveним решењем):
   $x-y=1$
   $x+y=5$
2. неодређени систем:
   $x+y=1$
   $2x+2y=2$
3. немогућ систем:
   $x+y=1$
   $2x+2y=1$

Циљ овог примера је да илуструје различите приказе решења датих система у зависности од одабира једног под споменутих софтвера. Стога упутства и препоруке ученицима (које прате ове задатке) су изостављена.

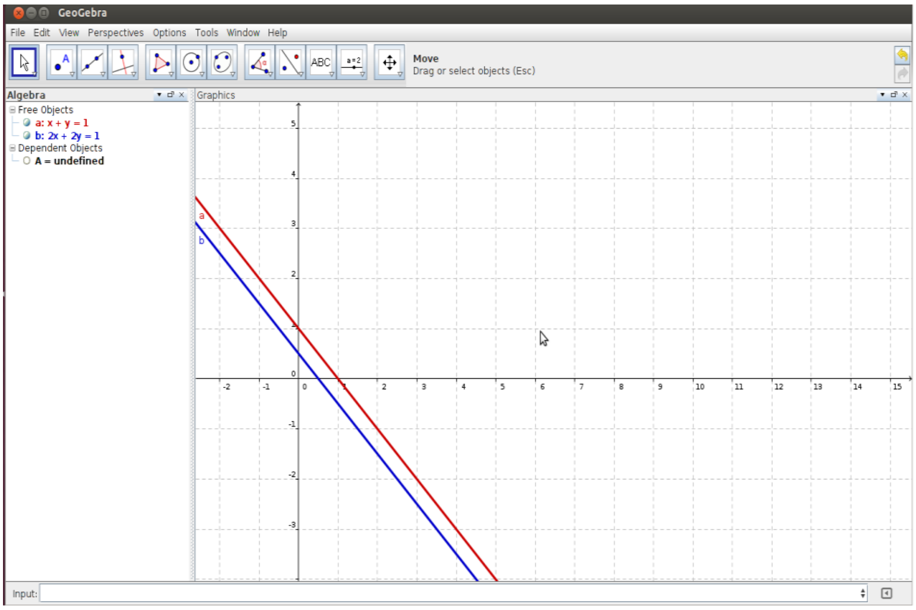
Илустрација решења ових задатака у ГеоГебри



Слика 46. Одређени систем-приказ решења задатка бр.1 у ГеоГебри



Слика 47. Неодређени систем-приказ решења задатка бр.2 у ГеоГебри

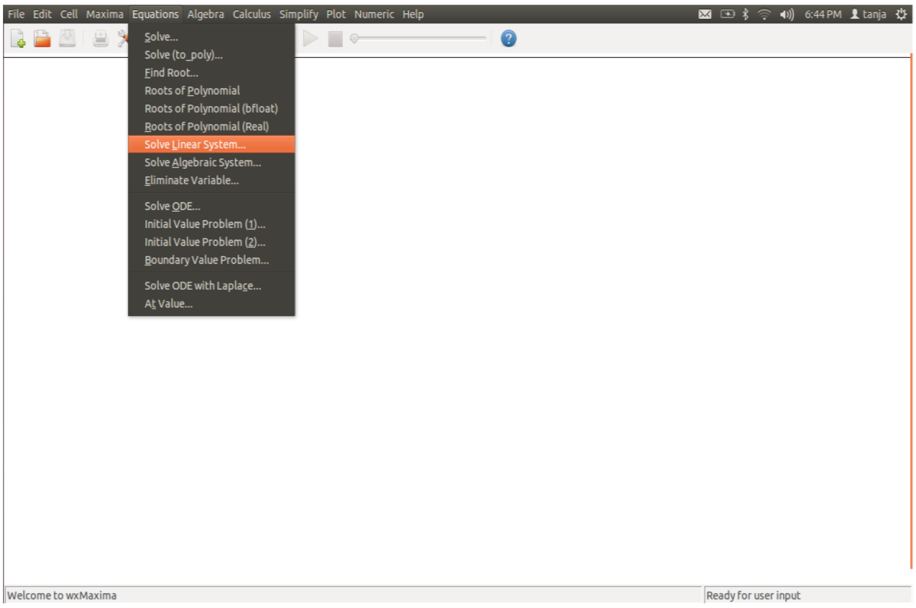


Слика 48. Немогућ систем-приказ решења задатка бр.3 у ГеоГебри

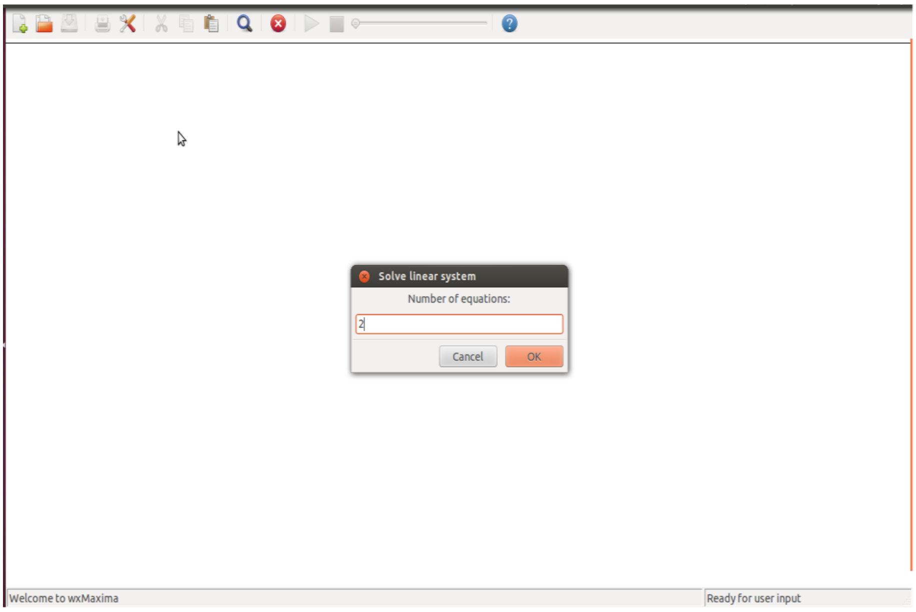
ГеоГебра је одлична за брзо и лако графичко решавање система, а у случају одређеног система решење се може лако утврдити на основу координата пресечне тачке (Слика 46.- Слика 48.).

Илустрација решења ових задатака у програму wxMaxima

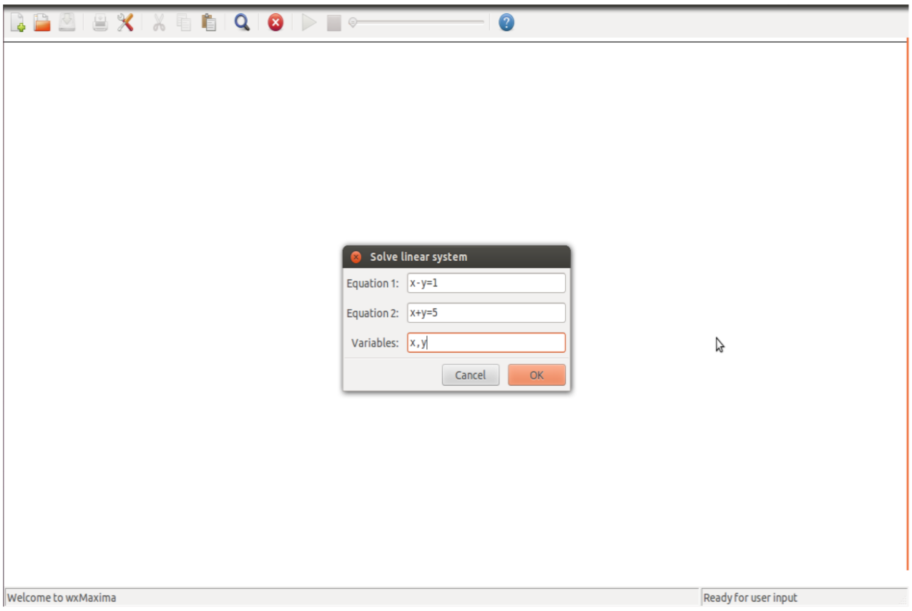
WxMaxima пружа могућност алгебарског решавања система једначина. Поступак алгебарског решавања једначина као и приказ решења датих задатака у WxMaxima-и је илустрован (Слика 49.-Слика 53.).



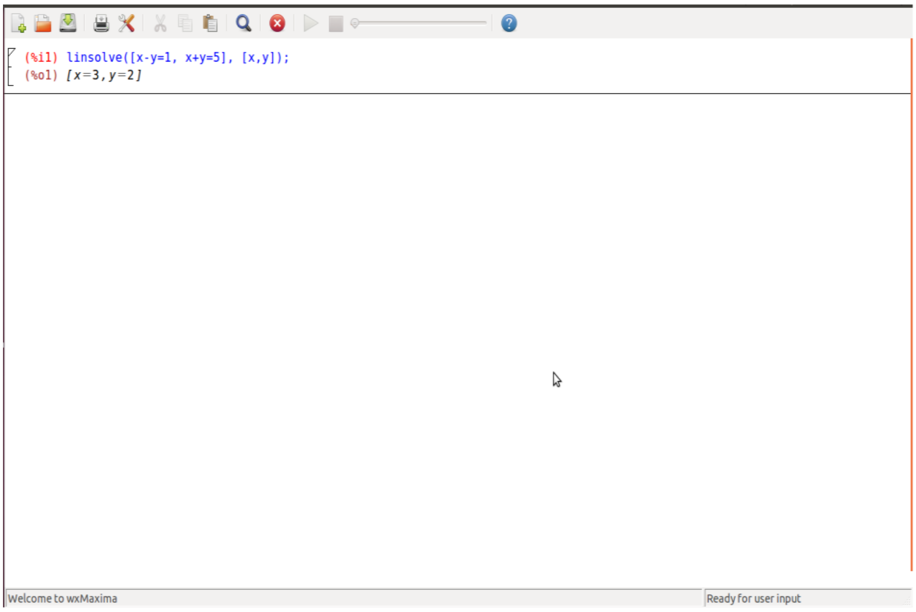
Слика 49. Поступак решавања система линеарних једначина у програму wxMaxima (1.корак)



Слика 50. Поступак решавања система линеарних једначина у програму wxMaxima (2.корак)

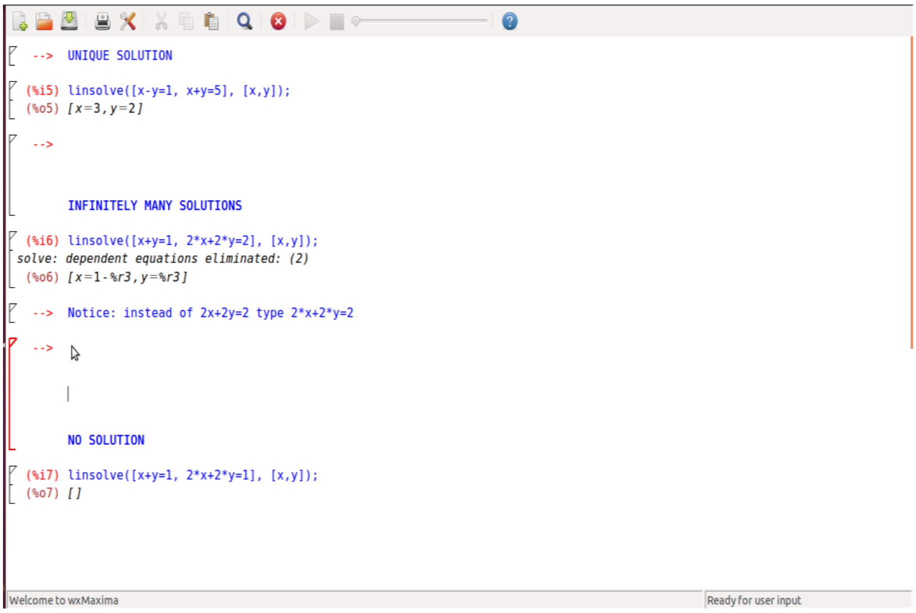


Слика 51. Поступак решавања система линеарних једначина у програму wxMaxima (3.корак)



Слика 52. Поступак решавања система линеарних једначина у програму wxMaxima (4.корак)

Поступак решавања свих задатака је исти, а резултат у зависности од система може изгледати овако:

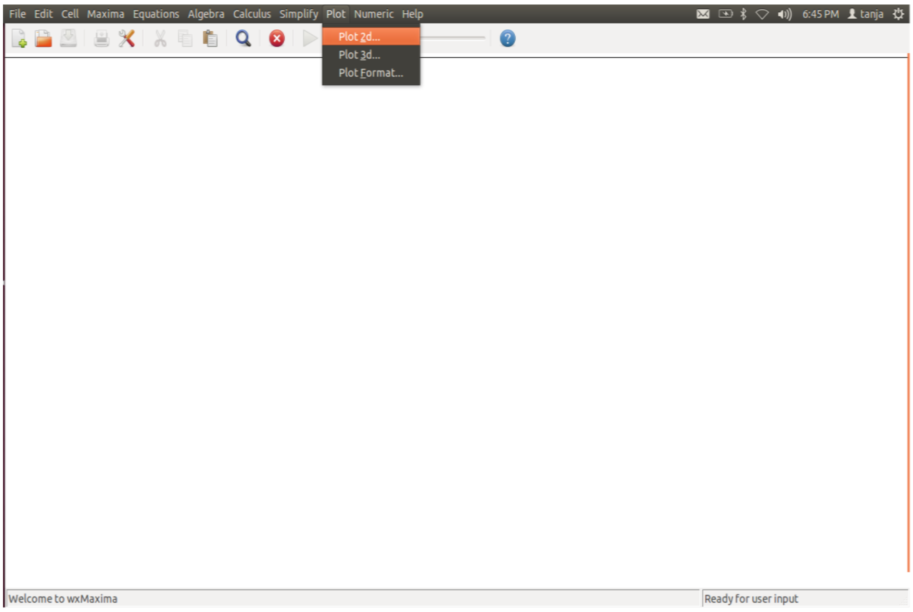


Слика 53. Приказ решења система линеарних једначина у wxMaxima-и

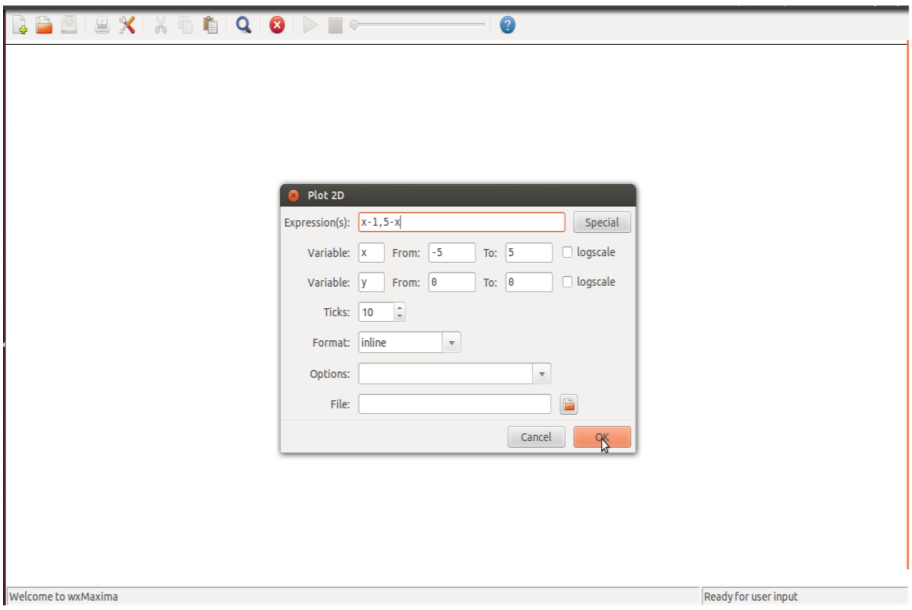
WxMaxima у случају одређеног система пружа информацију да ли систем има јединствено решење и наводи тачно решење, у случају неодређеног система пружа информацију да систем има бесконачно много решења и даје општи облик решења, у случају када је систем немогућ пружа информацију да је систем немогућ и да нема решења (Слика 53.).

Када је реч о графичком приказу решења, овај софтвер је мање кориснички настројен (Слика 54.- Слика 58.). У случају када је систем немогућ или неодређен, принцип читања графика је исти као код ГеоГебре. Потешкоће наилазе у случају када је систем одређен. Информацију да ли је постоји пресечна тачка графика или не, ученик ће добити добрим одабиром интервала, али кординате пресечне тачке неће моћи увек да одреди помоћу графика.

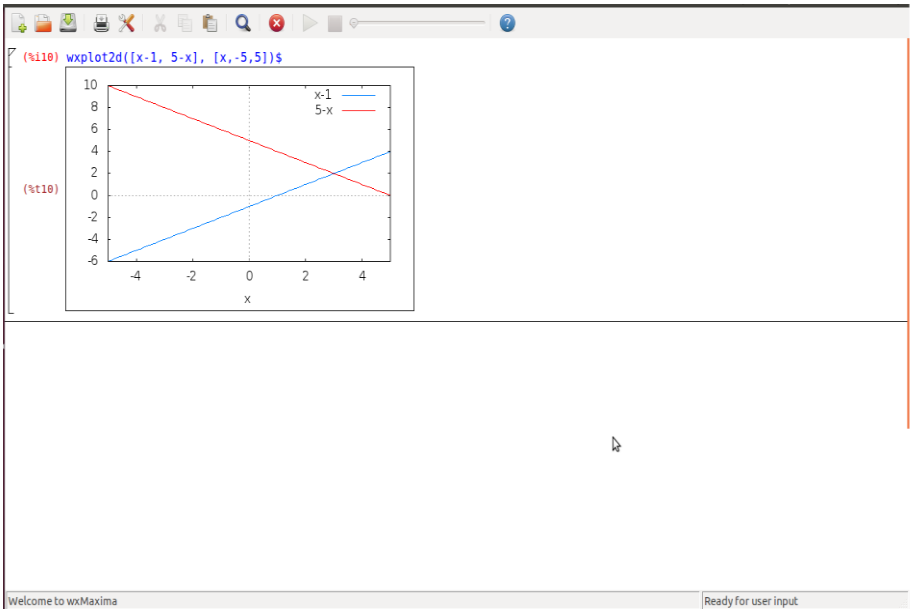
Илустрација поступка графичког решавања ових задатака у wxMaxima-и



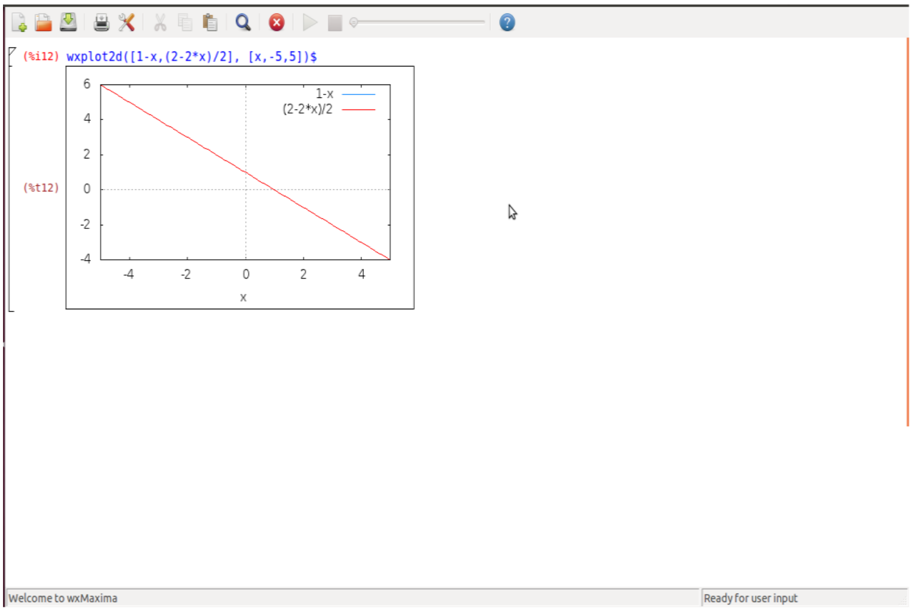
Слика 54. Поступак графичког решавања система линеарних једначина у wxMaxima-и (1.корак)



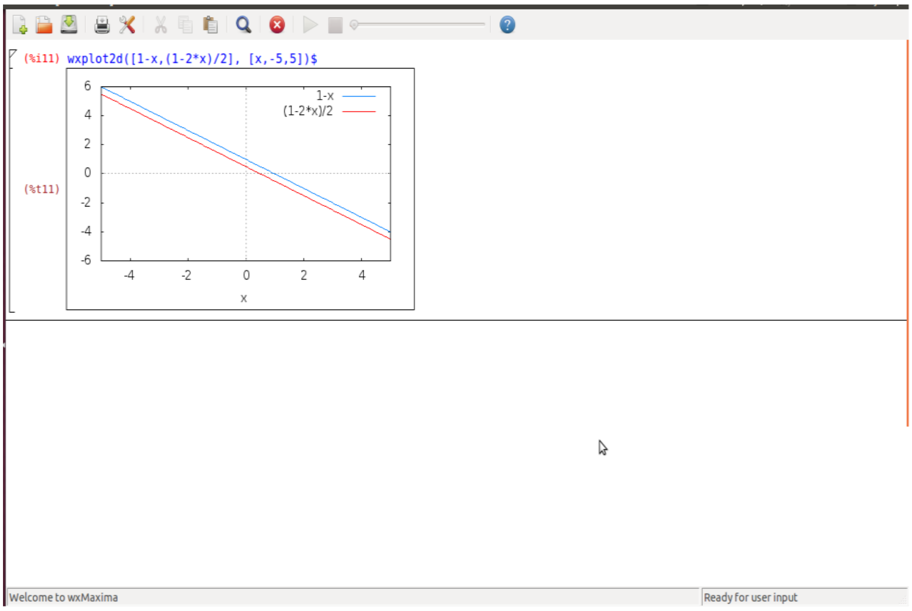
Слика 55. Поступак графичког решавања система линеарних једначина у wxMaxima-и (2.корак)



Слика 56. Одређени систем-приказ графичког решења задатка бр.1 у wxMaxima-и



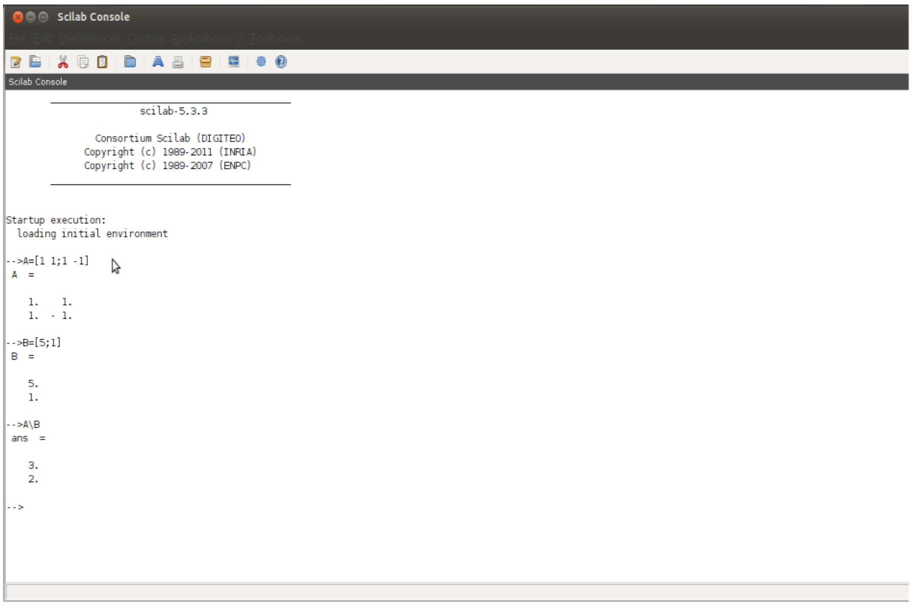
Слика 57. Неодређени систем-приказ графичког решења задатка бр.2 у wxMaxima-и



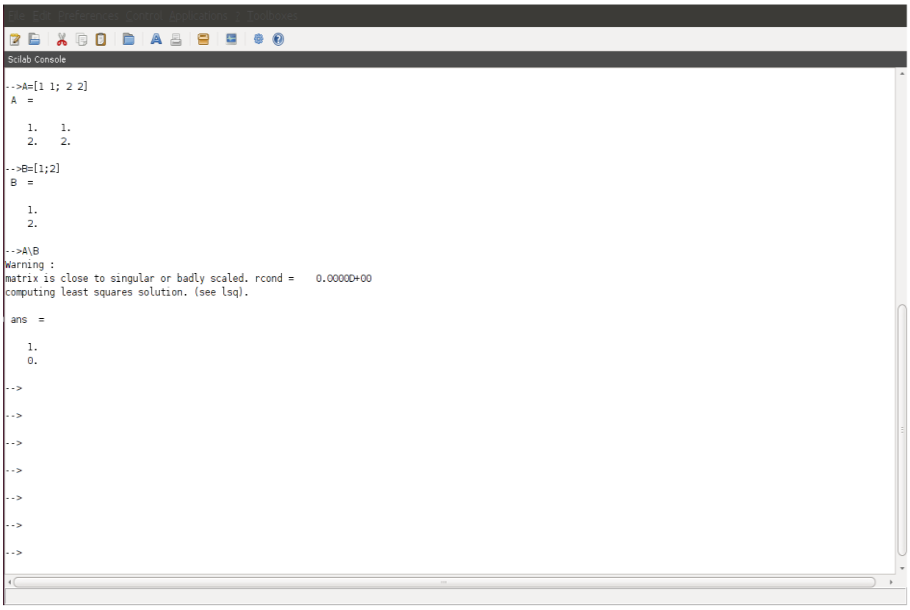
Слика 58. Немогућ систем-приказ графичког решења задатка бр.3 у wxMaxima-и

Илустрација решења ових задатака у Scilab-у

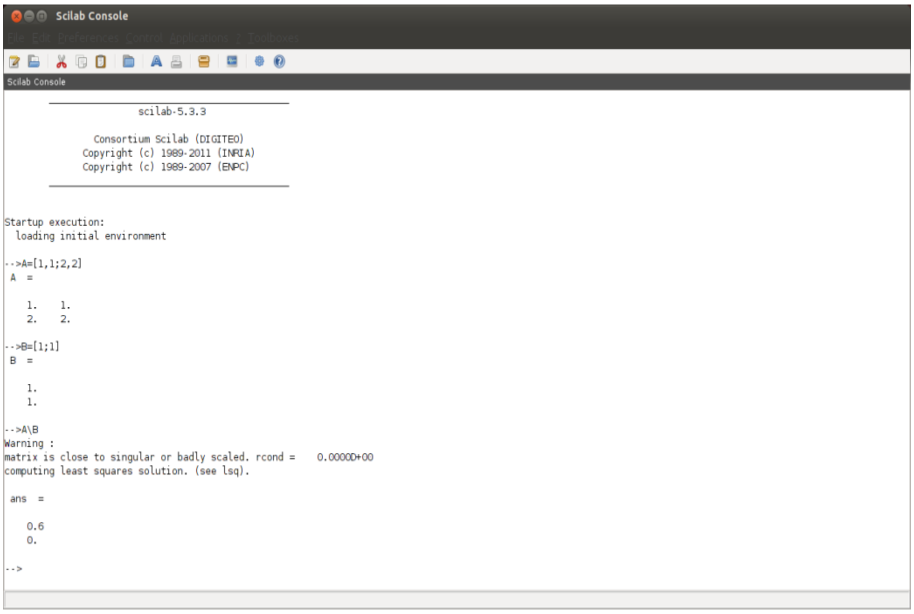
Scilab пружа могућности алгебарског решавања система линерних једначина. Поступак решавања (у сва три случаја) је илустрован (Слика 59.- Слика 61.). Систем се решава помоћу матрица (приступ је другачији у односу на wxMaxima-у).



Слика 59. Одређен систем-приказ решења задатка бр.1 у Scilab-у



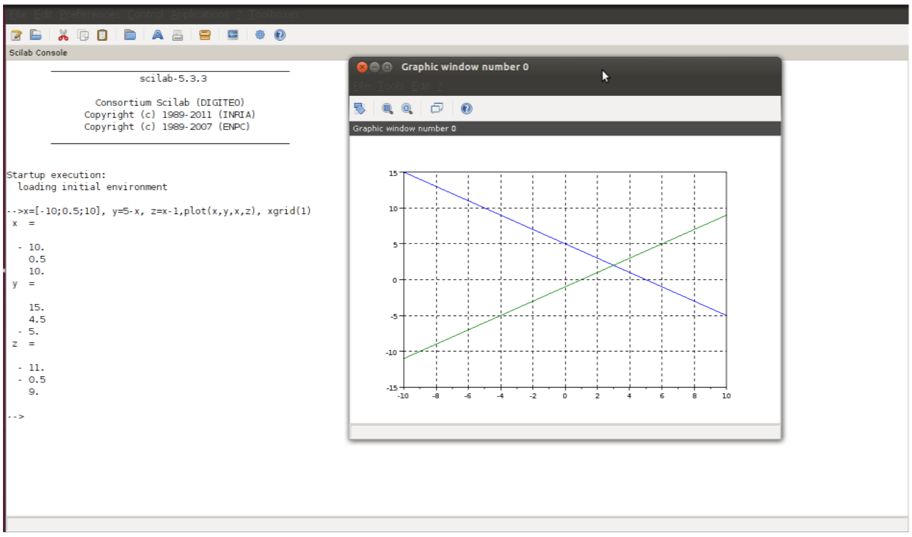
Слика 60. Неодређен систем-приказ решења задатка бр.2 у Scilab-у



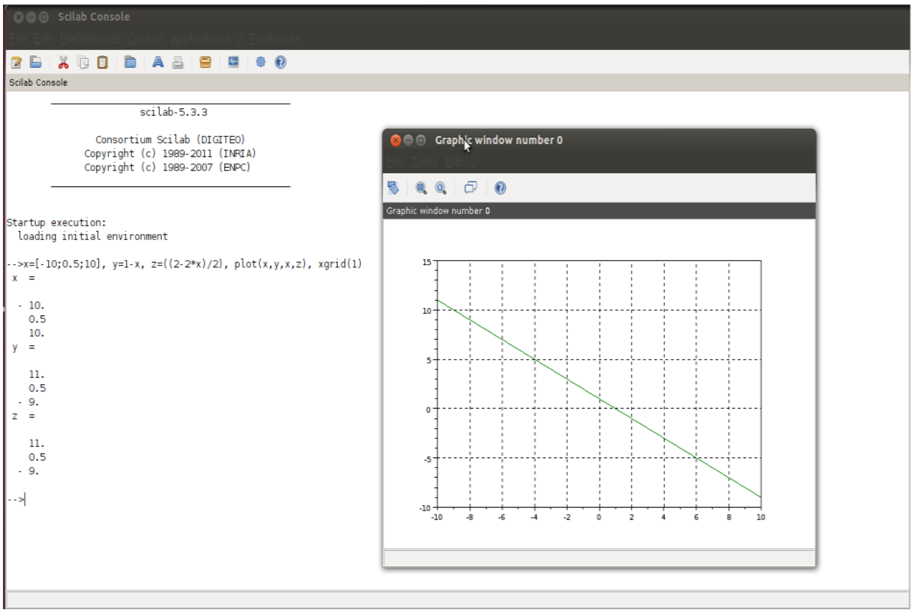
Слика 61. Немогућ систем-приказ решења задатка бр.3 у Scilab-у

Решавањем система на овај начин, у Scilab-у добија се тачна информација само у случају када систем има јединствено решење. У свим осталим случајевима, појављује се неко „решење“ и упозорење (Слика 60., Слика 61.).

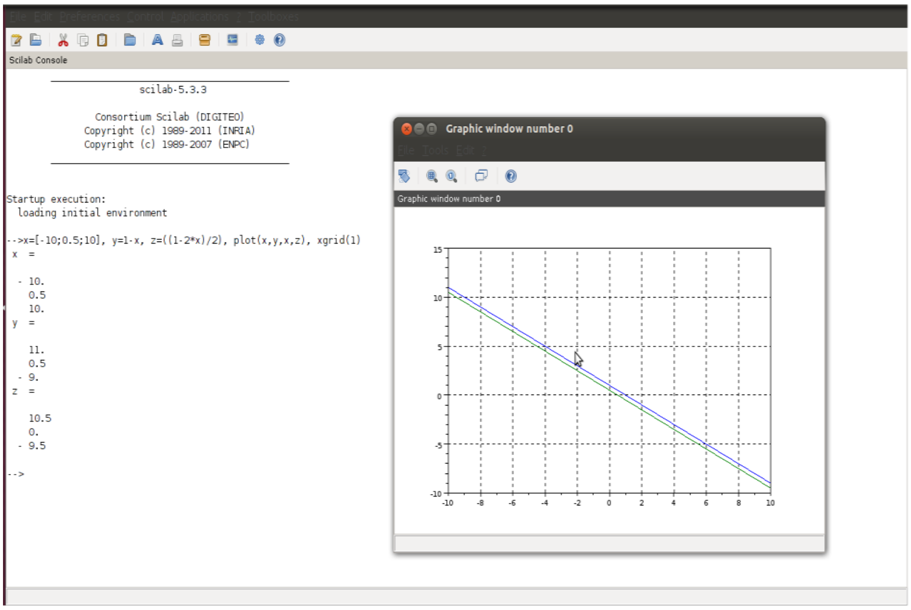
И овај софтвер попут wxMaxima-е је мање кориснички настројен када је реч о графичком приказу решења (Слика 62.- Слика 64.). Како је принцип одређивања графичког решења исти, у зависности од избора интервала ученик може наићи на извесне потешкоће (које ће лако отклонити другачијим избором интервала).



Слика 62. Одређени систем-приказ графичког решења задатка бр.1 у Scilab-у



Слика 63. Неодређени систем-приказ графичког решења задатка бр.2 у Scilab-у



Слика 64. Немогућ систем-приказ графичког решења задатка бр.3 у Scilab-у

7. ГеоГебра и постигнућа ученика приликом учења комплексних бројева

Многобројне студије указују на предности коришћења рачунара у процесу учења [12,13,14]. У овом поглављу описани су програмски пакети који су коришћени приликом обраде података, Шапиро-Вилк тест нормалности (Shapiro-Wilk normality test), Вилкоксонов тест (Wilcoxon test) и посматран је утицај коришћења ГеоГебре у настави математике на постигнућа ученика приликом учења комплексних бројева.

7.1. Постављање хипотезе

Приликом учења комплексних бројева ученици наилазе на различите потешкоће: број i доживљавају као променљиву, не схватају појам комплексног броја (комплесан број z се састоји из два броја a и bi, при чему оба морају бити „видљива“ нпр. $\sqrt{2}+0i$ је комплексан број, али зато $\sqrt{2}$ није комплексан), заборављају особине броја i приликом степеновања, приликом дељења не знају да одреде конјугован број делиоца, не знају да одреде модуо комплескног броја, не умеју да геометријски интерпретирају операције са комплескним бројевима,... Једно од решења је увођење комплексних бројева визуелизацијом како би се осећај апстрактности смањио [66, 67, 68, 69].

У току истраживања посматран је утицај ГеоГебре на постигнућа ученика приликом учења комплесних бројева, разматран је њен допринос у односу на традиционална наставна средства која се користе у настави математике.

Циљ истраживања је испитати ефекат примене ГеоГебре (као додатног наставног средства) на напредак ученика приликом учења комплексних бројева. Успешност овакве методе учења одредићемо помоћу теста знања (поређењем постигнутих резултата ученика са теста).

Овако дефинисани проблем, циљ и задатак одређују следећу хипотезу:
Приликом учења комплексних бројева применом ГеоГебре као додатног наставног средства у настави математике, ученици постижу боље резултате у односу на ученике који уче користећи се традиционалним наставним средствима.

7.2. Узорак и процедура

Истраживање је спроведено на пригодном узорку који је обухватао два одељења првог разреда Електротехничке школе „Никола Тесла“ у Панчеву. Ова два одељења броје 50 ученика, али како је тест радило 47 ученика сматраће се да узорак обухвата толико ученика. Узорак је подељен у две групе-контролну и експерименталну. Контролна група обухватала је 22 ученика (ученици једног одељења), а експериментална група 25 ученика (ученици другог одељења). ГеоГебра као додатно наставно средство коришћена је само у експерименталној групи и то приликом одбраде новог градива, сви остали утицаји били су исти.

Спроведена је анкета на основу које је утврђено да се ученици никада раније нису сусрели са појмом комплексног броја. Према класичном плану и програму математике средње школе ученици се први пут сусрећу са појмом комплесног броја у другом разреду. Огледна одељења имају другачије планове и програме. Контролну и експерименталну групу чине ученици огледних одељења и према њиховом плану и програму[4], овај појам се обрађује у другом полугодишту првог разреда.

Све тестиране ученике подучавао је исти професор, приликом учења и вежбања коришћен је исти наставни материјал, број часова предвиђених за обраду ове наставне теме и број часова вежбања био је подједнак. Обе групе училе су методом активног учења-откривањем, након чега је следила дискусија и закључивање с тим да је експериментална група приликом обраде новог градива користила ГеоГебру као додатно наставно средство, а контролна није. На часовима вежбања сви ученици вежбали су на традиционалан начин. Сви ученици су решавали тест без употребе ГеоГебре.

7.3. Кратак преглед методе обраде података

За обраду података коришћени су програмски пакети R (R-base тј. RStudio) и Excel. Excel је коришћен при формирању базе података и приликом формирања графичког приказа успеха ученика у процентима (Слика 70., Слика 72., Слика75., Слика 77., Слика 79.), а програмски пакет R (R-base тј. RStudio) приликом обраде података.

7.3.1. R окружење

У овом делу дат је опис програмског пакета R (R-base тј. RStudio) [70]-[78].

Наиме, R (R-base тј. RStudio) представља програмски језик (сличан језику S) и окружење намењено статистичарима јер пружа могућност обраде, анализе и графичког приказа података. Слободан је софтвер (подлеже условима ГНУ-ове опште јавне лиценце). Подржавају га различите платформе: Unix (као и Linux), Windows и Mac OS.

Један од разлога зашто се зове R је почетно слово имена његових твораца, Рос Ихака (Ross Ihaka) и Роберт Џентлмен (Robert Gentleman) који су га креирали на

[4] Чак се планови споменутих одељења незнатно разликују. Обрада тригонометријског облика комплексног броја није предвиђена ниједним планом за први разред.

Аукланд Универзитету (University of Auckland) на Новом Зеланду. Тренутно се његовим развојем бави R Development Core Team.

R пружа могућност обраде и чувања података, широк избор алата за њихову обраду, графички приказ анализе података, могућност рада са низовима и матрицама, могућност коришћења једноставног, али добро дизајнираног програмског језика. За разлику од већине софтвера намењених обради података, ово окружење пружа могућност корисницима не само да користе постојеће функције, већ и да имплементирају своје. Дакле, може се проширивати додатним пакетима у зависности од потреба. Пошто R није статичан нефлексибилан софтвер (за разлику од многих софтвера за обраду података он поред постојећих функција дозвољава креирање и имплементирање нових), термин „окружење“ сматра се погоднијим од термина „софтвер“.

RStudio пружа могућност рада у R-у у интуитивно прихватљивијем и пријатељски настројеном окружењу (user-friendly enviroment). Спада у групу слободних софтвера отвореног кода. Доступна су два издања: RStudio Desktop и RStudio Server. За разлику од RStudio Desktop-а који је локалног карактера (покреће програм као класичну десктоп апликацију), док RStudio Server је глобалног карактера (пружа могућност рада преко веб броузера,web browser, користећи при том удаљени Linux сервер).

Као и R, RStudio Desktop може се покренути на различитим платформама: Linux, Windows и Mac OS X.

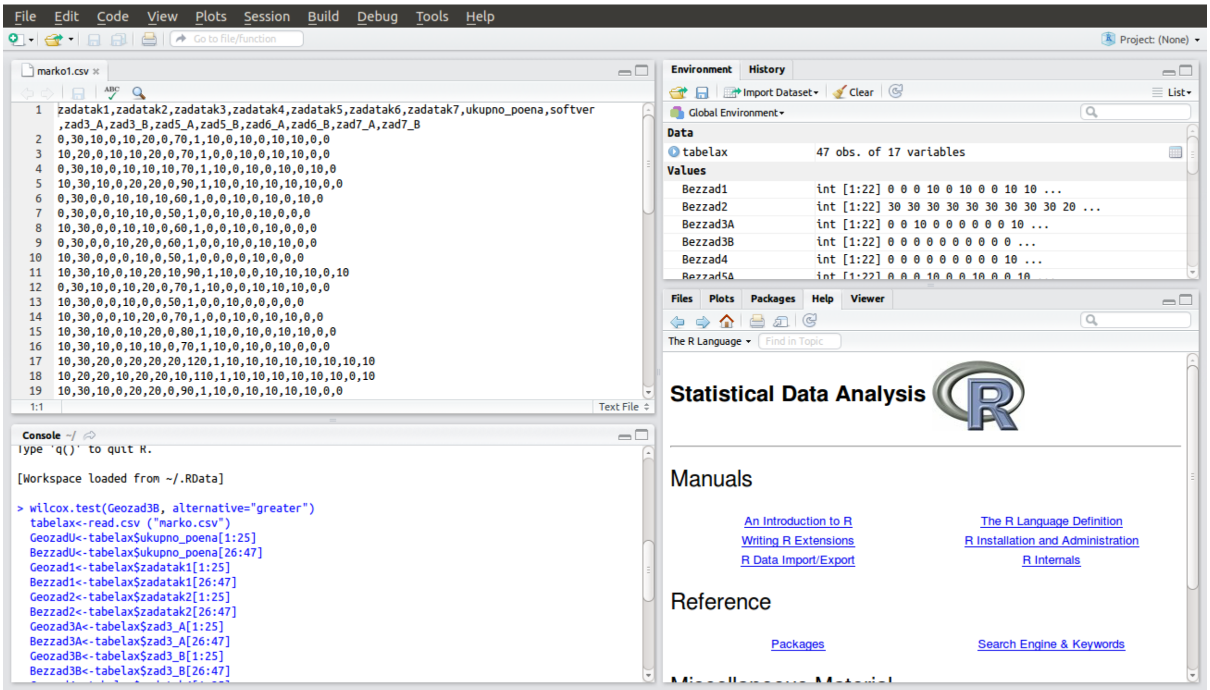
Рад у окружењу RStudio (Слика 65.) подразумева четири активна прозора:
- конзола (console),
- радни простор и историја (workspace and history),
- фајлови, графици, пакети и помоћ (files, plots, packages and help),
- R скрипта (R script(s)).

Конзола је намењена за рад. У оквиру ње се уносе наредбе и приказују резулати након извршавања задатих наредби.

Радни простор служи за приказ свих активних објеката тј. за чување свих објеката, вредности, функција креираних у току рада. У историји су сачуване све коришћене наредбе. На овај начин се олакшава рад у овом окружењу (нпр. приликом потребе да се понови одређени низ наредби, довољно је селектовати тај низ из историје и пребацити га у конзолу).

У оквиру одељка фајлови приказани су сви фајлови и фолдери у примарном (default) радном простору. Графици ће бити приказани у одељку графици и одатле се могу експортовати у виду .pdf формата и виду формата слика нпр. .png, .jpg . 3-Д графици су приказани у посебном прозору и не могу се сачувати нити експортовати.
Пакети обухватају додатке потребне за једноставију употребу појединих функција. Помоћ пружа додатне информације о раду у овом окружењу.

R скрипта пружа могућност чувања података о раду, могућност креирања нове скрипте.



Слика 65. Окружење RStudio

7.3.2. Нумерички подаци

Варијабле (промељиве) представљају обележје односно карактеристике објекта истраживања [79]. На основу информација из литературе [79] описане су врсте варијабли (према начину описивања вредности), нумерички подаци и њихова подела.

Према начину описивања вредности посматраних карактеристика објеката варијабле могу бити:

1. квантитативне (нумеричке)- описују вредности бројевима
2. квалитативне (категоричке)- описују вредности категоријама.

За разлику од нумеричких варијабли код којих се може утврдити егзистенција и ниво разлике између карактеристика објеката, код категоричких је могуће утврдити само њену егзистенцију. Стога се може закључити да се употребом нумеричких варијабли добијају прецизније информације.

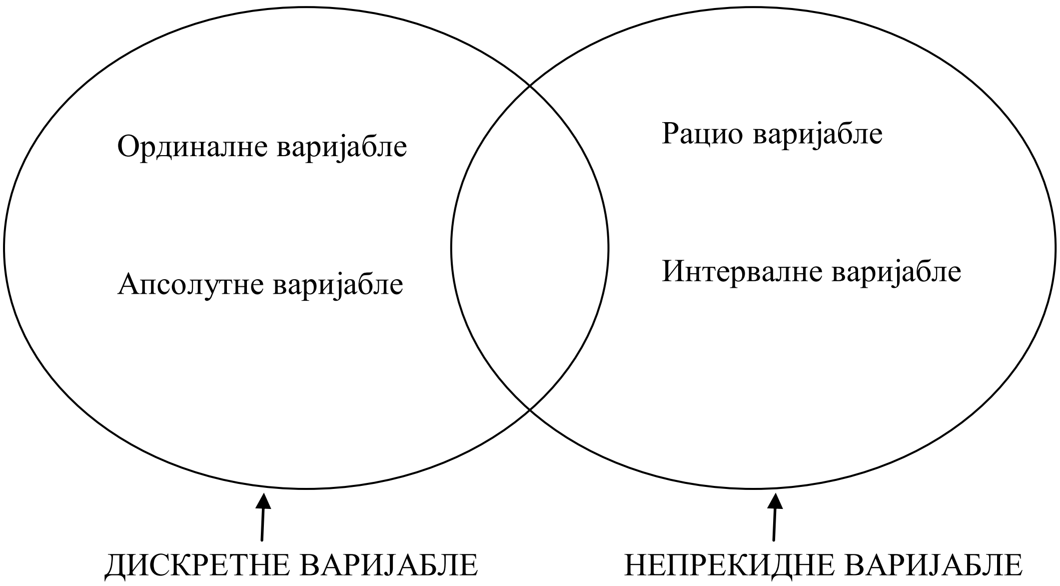
Свака варијабла има одређену вредност за одређени објекат и та вредност се назива податак. Уникатност податка није загарантована јер различите варијабле могу имати исте вредности. У складу са одговарајућим варијаблама, подаци се могу поделити у две групе: категорички и нумерички.

Вредност нумеричке варијабле одређује се нумеричким подацима и описује се бројевима који припадају интервалу вредности одређеним најмањим и највећим бројем.

Постоје неколико класификација нумеричких података (Слика 66. и Слика 67.).

Слика 66. Класификација нумеричких података (један начин према литератури [79])

Један начин класификације приказан је на Слици 66., према другом начину нумерички подаци могу бити дискретни и непрекидни (контиуални). Дискретне варијабле се описују целим бројевима (конкретним одређеним вредностима, не постоје међувредности тј. има скокова), а непрекидне реалним бројевима (постоје међувредности и нема наглих скокова). Веза између једне и друге класификације варијабли (односно података) дата је на Слици 67.



Слика 67. Релација између различитих класификација варијабли у складу са класификацијом нумеричких података приказаној на Слици 66. (према литератури [79])

7.3.3. Статистичко тестирање хипотезе

Након прикупљања података, неопходно је обрадити их и извршити анализу добијених резултата. Избор статистичког теста важан део статистичке анализе података, јер од њега зависи анализа резулата. Постоје две врсте теста: параметријски и непараметријски.

Параметријски тестови се користе при раду са нумеричким, интервалним и рацио подацима, подацима чија расподела не одступа значајно од нормалне, у случајевима великих узорака, док се непараметријски тестови користе при раду са описним подацима или у случају мањег узорака (садржи мање од 30 јединица) при раду са нумеричким подацима чија расподела одступа од нормалне и када се варијабле посматрају као рангирани низ. Одабир типа параметријског или непараметријског теста зависи од зависности/независности узорака. Код независних узорака утицај јединица једног узорка на јединице другог узорка не постоји, узорци се одређују методом случајности, постоје две или више група- контролна и експериментална, док код зависних постоји само једна група која је и контролна и експериментална [80].

Да би се испитала нормална расподела података најбоље је користити Шапиро-Вилк тест јер се показао као најмоћнији тест нормалности [81]. Нарочито се препоручује у случају узорка који садржи мање од 50 јединица [82].

Нулта хипотеза Шапиро-Вилк теста подразумева да је реч о нормалној расподели, а алтернативна да није. У случају када је p вредност овог теста мања од изабраног прага значајности, одбацује се нулта хипотеза [83]. Обично се посматра p у односу на 0.05, уколико је $p \leq 0.05$ нулта хипотеза се одбацује тј. расподела није нормална (најчешће је интервал поверења 95%). Осим прага значајности 0.05 користе се и 0.1 или 0.01 [84].

Употреба овог теста у Rstudio-у је једноставна (Слика. 68). У конзолу се уносе следеће наредбе:

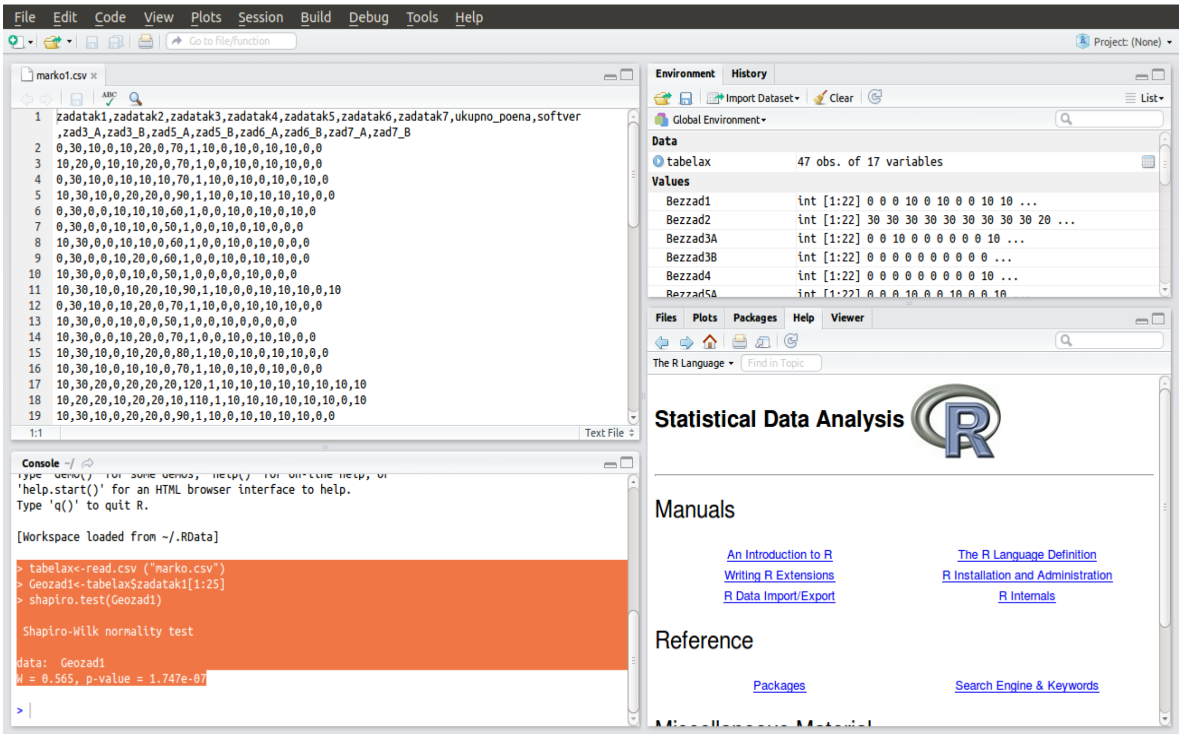
```
> tabelax<-read.csv ("marko.csv")
> Geozad1<-tabelax$zadatak1[1:25]
>  shapiro.test(Geozad1)
```

Најпре се учитава база података, селектују подаци и потом спроведе Шапиро-Вилк тест.

Приказ резулата теста је такође у конзоли:

```
      Shapiro-Wilk normality test
data:  Geozad1
W = 0.565, p-value = 1.747e-07
```

Како је p=1.747e-07 мање од 0.05, нулта хипотеза се одбацује тј. расподела није нормална.



Слика 68. Шапиро-Вилк тест у Rstudio-у

Када се испита расподела података, врши се избор теста. У нашем истраживању коришћен је Вилкоксонов тест (The Wilcoxon Rank-Sum Test).

Овај тест се користи приликом тестирања нулте хипотезе (да су две популације једнаке) у случају када желимо да је одбацимо уколико постоји разлика у централној тачки, аритметичкој средини или медијани. Из две популације X и Y узимају се узорци величине m и n, респективно. У случају када су популације једнаке (нулта хипотеза је тачна), сви подаци формирају заједнички узорак величине m+n из популације X+Y (заједничке популације настале од почетних популација X и Y), потом се подаци ређају по величини (од најмањег до највећег) и рангирају. За $m \leq n$, постоји $\binom{m+n}{m}$ начина расподеле рангова подацима мањег узорка. Уколико нема разлике међу популацијама, свака од ових расподела је готово једнака. Вилкоксонова тест статистика W добија се сабирањем рангова података мањег узорка. На основу табеле критичних вредности за W, утврђује се да ли се прихвата нулта хипотеза. Уколико је $p \leq 0.05$, нулта хипотеза се одбацује [85,86,87].

Употреба овог теста у Rstudio-у је једноставна (Слика. 69). У конзолу се уносе следеће наредбе:

```
> tabelax<-read.csv ("marko.csv")
> Geozad1<-tabelax$zadatak1[1:25]
> Bezzad1<-tabelax$zadatak1[26:47]
> wilcox.test(Geozad1, Bezzad1, alternative="greater")
```

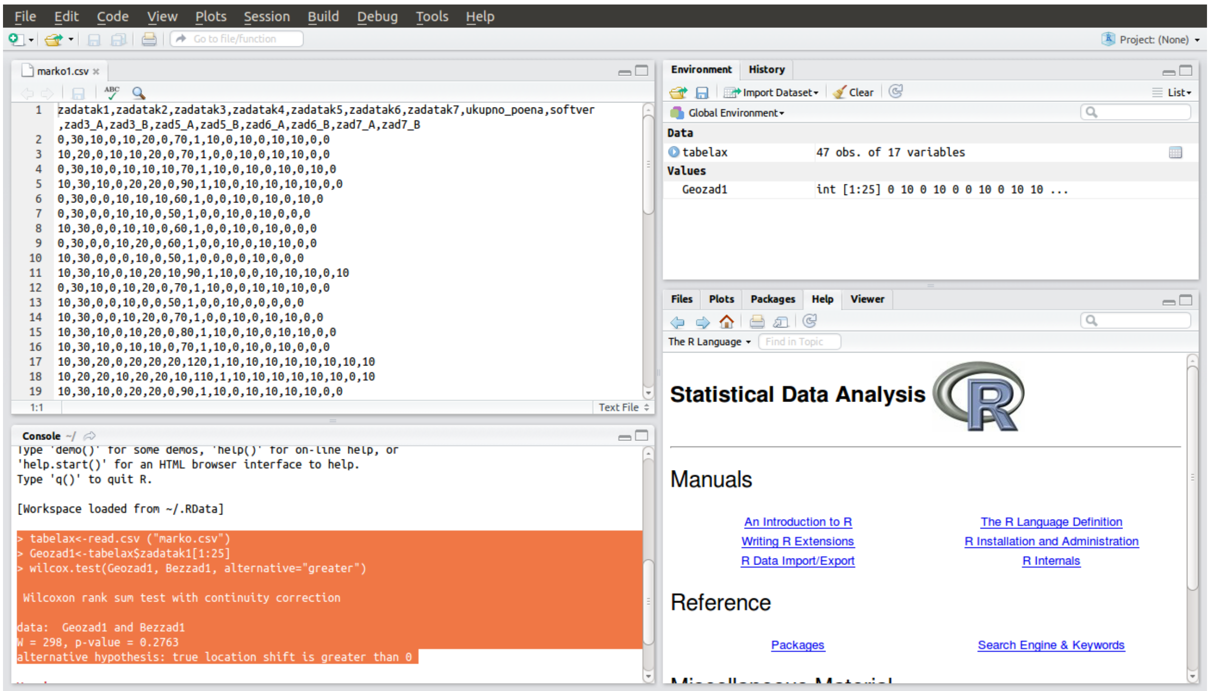
Најпре се учитава база података, селектују подаци и потом спроведе Вилкоксонов тест.

Приказ резулата теста је такође у конзоли:

Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data: Geozad1 and Bezzad1
W = 298, p-value = 0.2763
alternative hypothesis: true location shift is greater than 0

Како је p=0.2763 веће од 0.05, нулта хипотеза се прихвата (нема статистички значајне разлике међу популацијама).



Слика 69. Вилкоксов тест у Rstudio-у

7.4. Резултати теста

Тест је обухватао 7 задатака, с тим да су неки задаци имали и подзадатке (систем бодовања задатака дат је у Табели 11.). Задаци који су нетачно решени или уопште нису решавани, бодовани су са 0 поена (ово се односи и на подзадатке). Максималан број поена на тесту је 170. Ниједан од испитаника на тесту није освојио ни минималан ни максималан број поена.

Да би се утврдило да ли је приликом учења комплесних бројева ГеоГебра као додатно наставно средство, помогла да се превазиђу потешкоће наведене у поглављу 7.1. (стр.62), анализирано је колико су ученици успешно решили цео тест, као и колико су успешно решили поједине задатке. За сваког испитаника посматран је укупан број поена остварених на тесту, као и по задатку.

Табела 11. Систем бодовања задатака на тесту

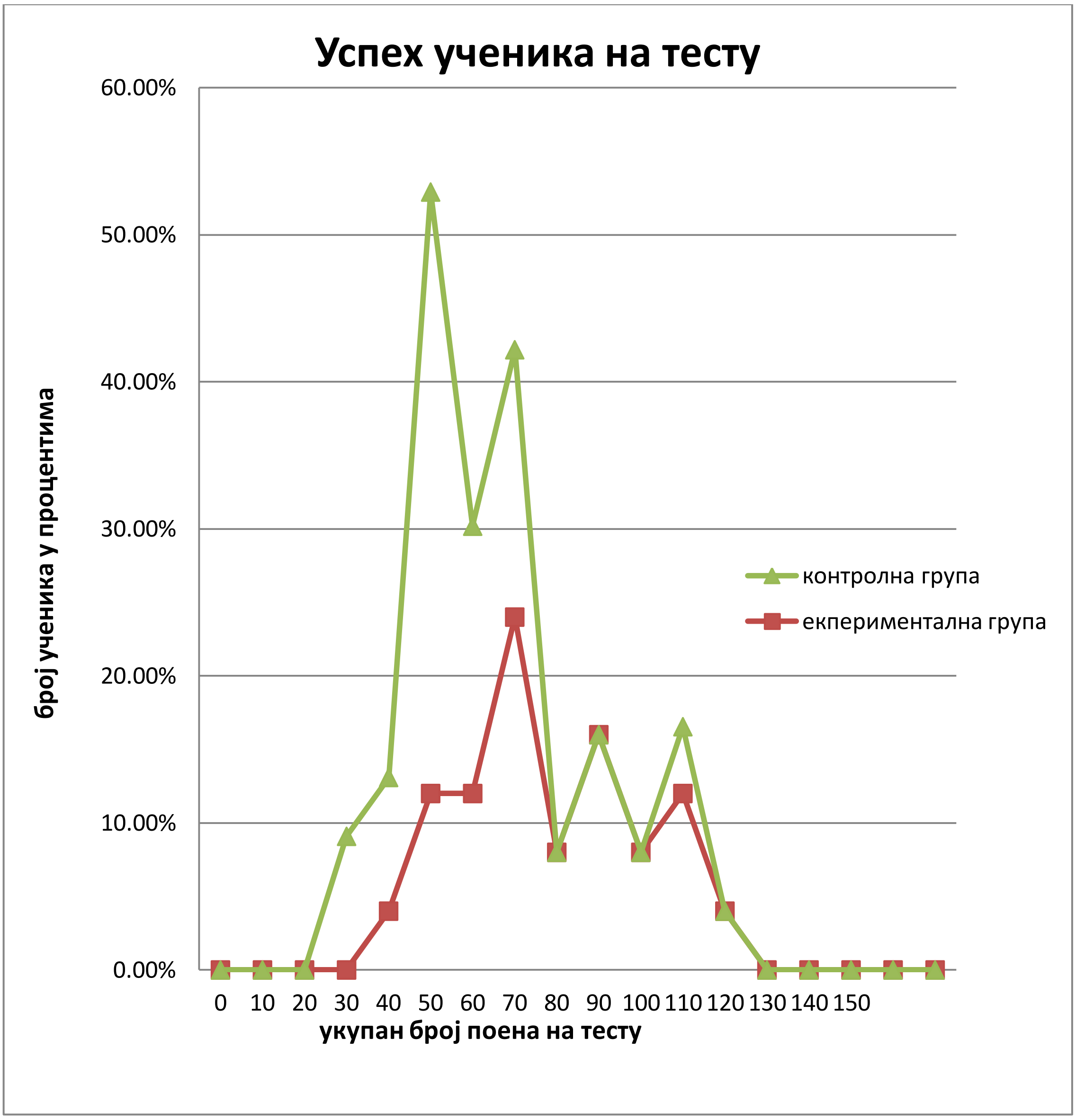
1. задатак	10 поена
2. задатак	максимално: 70 поена а) 10 б)10 в)10 г)10 д) 10 ђ)10 е)10
3. задатак	максимално: 20 поена а) 10 б)10
4. задатак	10 поена
5. задатак	максимално: 20 поена а) 10 б)10
6. задатак	максимално: 20 поена први део: 10 други део (објашњење):10
7. задатак	максимално: 20 поена први део: 10 други део:10

На основу података добијених применом Шапиро-Вилк теста (Табела 12.) закључено је да ни контролна ни експериментална група ни у једном задатку немају нормалну расподелу (контролна група у случају 3. задатака под б има константну расподелу-све вредности су једнаке и износе 0), да у случају укупног броја поена експериментална група има нормалну расподелу, али не и контролна. Стога, приликом анализе података коришћен је Вилкоксонов тест као и дескриптивне статистичке мере.

Утврђено је да постоји разлика у просечном броју поена остварених на тесту - екпериментална група 78.4, а контролна 55.45 поена. На Слици 70. дат је графички приказ распореда броја ученика обе групе (израженог у процентима) према оствареном броју поена на тесту. Помоћу Вилкоксоновог теста обављена је анализа укупног броја поена остварених на тесту (W=442, p=0.0001555). На основу добијених података утврђено је да постоји статистички значајна разлика између ових група и да је група која је користила ГеоГебру била успешнија.

Табела 12. Резултати Шапиро-Вилк теста нормалности

	Шапиро-Вилк тест нормалности (Shapiro-Wilk normality test)			
	Експериментална група		Контролна група	
	W	p	W	p
укупно поена	0.9569	0.3562	0.8501	0.003414
1.задатак	0.565	1.747e-07	0.6127	1.824e-06
2.задатак	0.3079	7.518e-10	0.3105	3.317e-09
3.задатак (под а)	0.6246	8.198e-07	0.5223	2.142e-07
3.задатак (под б)	0.3079	7.518e-10	all 'x' values are identical	
4.задатак	0.4933	3.217e-08	0.4736	7.49e-08
5.задатак (под а)	0.565	1.747e-07	0.5223	2.142e-07
5.задатак (под б)	0.6102	5.57e-07	0.2215	7.417e-10
6.задатак (под а)	0.3079	7.518e-10	0.4736	7.49e-08
6.задатак (под б)	0.5905	3.328e-07	0.6372	3.433e-06
7.задатак (под а)	0.565	1.747e-07	0.2215	7.417e-10
7. задатак (под б)	0.6102	5.57e-07	0.3322	4.875e-09



Слика 70. Успех ученика на тесту (у процентима)

У првом задатку захтевало се од ученика да одреде да ли је i број или променљива. У експериметалној групи 72% ученика је решило овај задатак, а у контролној 63.64%. На основу ових података и резултата добијених Вилкоксоновим тестом (W=298, p=0.2763) утврђено је да не постоји значајна разлика између експерименталне и контролне групе и да су обе групе подједнако успешно решиле овај задатак.

Други задатак (Слика 71.) представља модификован и прилагођен идентификациони тест из литературе [69], стр.11 и захтева је од ученика да препознају комплексне бројеве.

2. Заокружити комплексне бројеве:
а) 0,75

б) cos2+sin5

в) $\sqrt{2}-4$

г) $\sqrt{2}-4i$

д) $(2-i\sqrt{7})^2$

ђ) $tg\frac{3\pi}{14}$

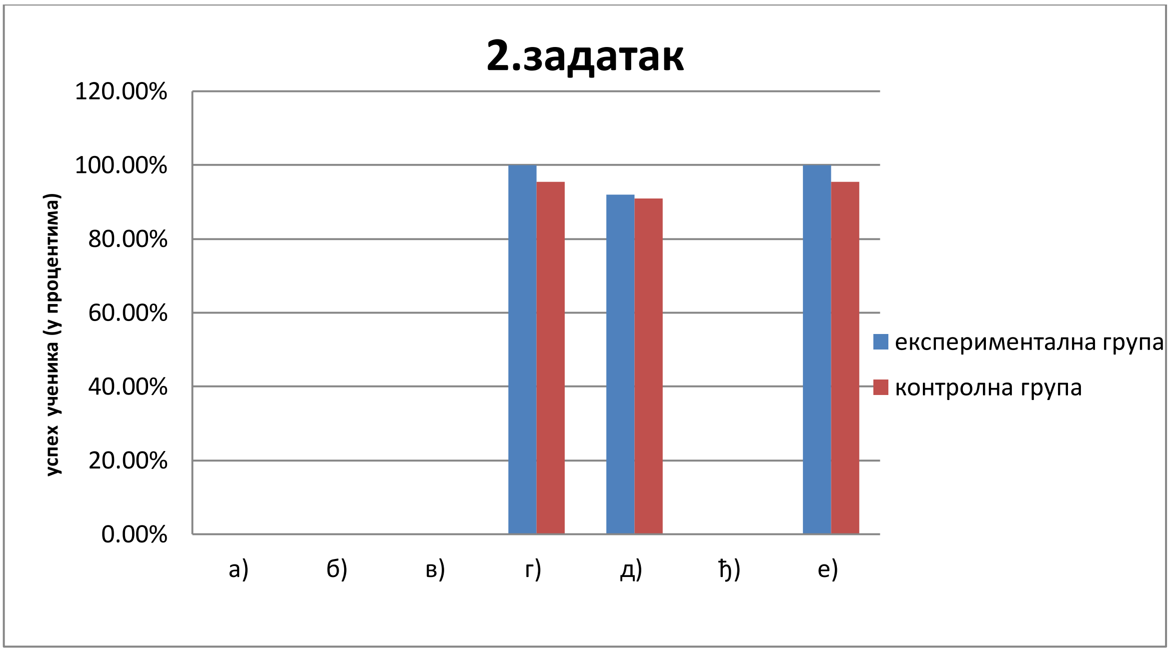
е) 1-$i\, tg\frac{3\pi}{14}$

Слика 71. Пример другог задатка са теста

Анализом добијених резултата (за други задатак), применом Вилкоксоновог теста утврђено је да ни у овом случају нема значајне разлике између експерименталне и контролне групе (W=279, p=0.4387). Ниједан ученик из обе групе није тачно решио случај под а, б, в, ђ и готово сви су подједнако успешно решили остале случајеве (Слика 72.). Овај задатак је потврдио резултате студије M.C.Nordlander, E. Nordlander-а по којој ученици повезују комплесне бројеве са дводимензионалним бројевима (број није комплексан уколико имагинарна јединица није ескплицитно видљива) [69]. На основу добијених резултата утврђено је да без обзира на примену ГеоГебре, ученици и даље препознају комплексан број помоћу имагинарне јединице.

Трећи задатак (под а) захтева од ученика примену степеновања броја i (Слика 73.). Овај задатак (под а) је решило 60% испитаника експерименталне групе и 22.73% испитаника контролне групе. На основу ових података и резултата добијених Вилкоксоновим тестом (W=377.5, p=0.005561) утврђено је да постоји значајна разлика између експерименталне и контролне групе. Екпериментална група постигла је бољи резултат на овом задатку од контролне групе.

У трећем (под б) и четвртом задатку захтевало се од ученика да поделе два комплексна броја (Слика 73.). Процентуална успешност ученика експерименталне и контролне групе приликом решавања ових задатака дата је у Табели 13. Ученици нису успешно решили ове задатке. Анализом резултата Вилкоксоновог теста за трећи задатак под б (V=3, p=0.1729) и четврти задатак (W=280, p=0.444) утврђено је да не постоји значајна разлика међу овим групама приликом решавања споменутих задатака.



Слика 72. Други задатак-успех ученика (у процентима)

3. Дати су бројеви $z_1 = 2i^{125} - (2i)^2 \; u \; z_2 = 2 + \frac{3}{i}$. а) Реалан део броја z_1 је_____________________ (одговор уписати). б) Имагинаран део броја z_2 је_____________________ (одговор уписати). 4. Дат је број $z = \frac{2-i}{-3i+4}$. Конјугован број броја z је_____________________ (одговор уписати).

Слика 73. Пример трећег и четвртог задатка

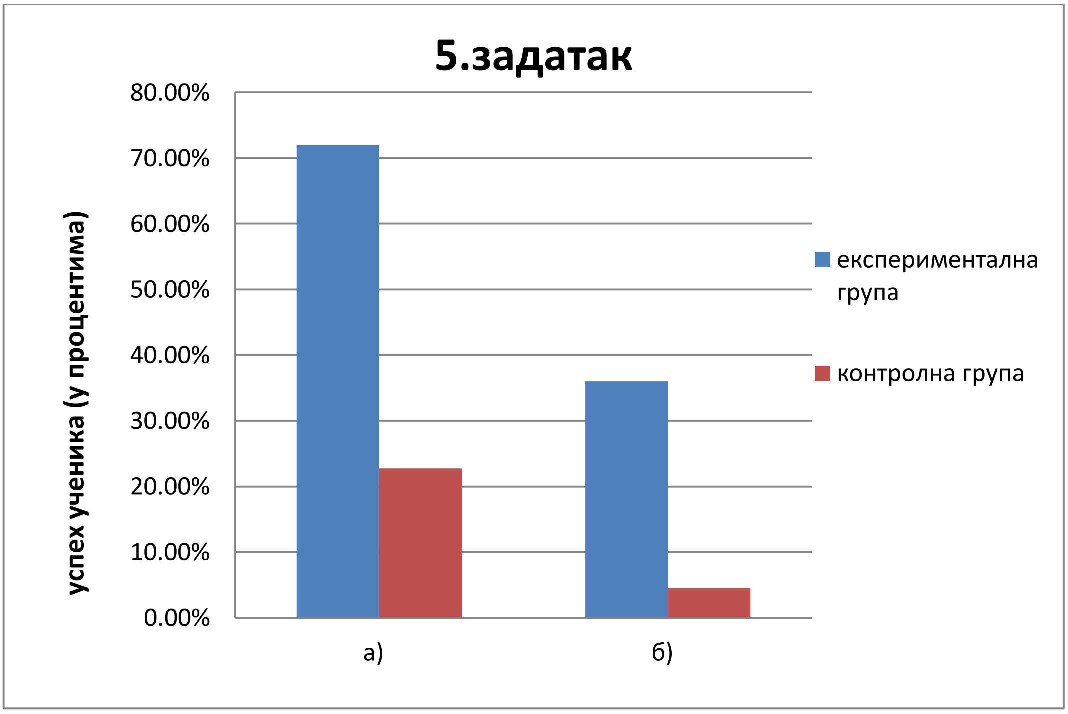
Табела 13. Трећи задатак (под б) и четврти задатак- успех ученика (у процентима)

	експериментална група	контролна група
3.задатак б)	8.00%	0.00%
4. задатак	20.00%	18.18%

У петом задатку (Слика 74.) захтевало се од ученика да одреди апсолутну вредност комплексног броја када је имагинарни део нула (под а) и када је различит од нуле (под б). На графикону (Слика 75.) дата је процентуална успешност ученика приликом решавања овог задатка (пример под а решило је 72% испитаника експерименталне групе и 22.73% испитаника контролне групе; пример под б решило је 36% испитаника експерименталне групе и 4.55% испитаника контролне групе). Резултати Вилкоксоновог теста (Табела 14.) показали су да постоји значајна разлика у оба случаја. На основу добијених резултата утврђено је да је екпериментална група била успешнија.

5. Израчунати: а) $|1-2|=$___________________ (одговор уписати). б) $|i+2|=$___________________ (одговор уписати).

Слика 74. Пример петог задатка



Слика 75. Пети задатак-успех ученика (у процентима)

Табела 14. Пети задатак- резултати Вилкоксоновог теста

пети задатак	W	p
а)	410.5	0.0004445
б)	361.5	0.004855

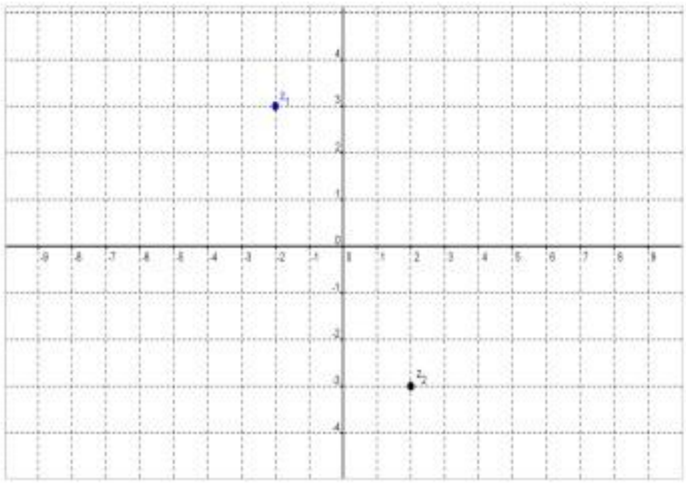
Шести задатак (Слика 76.) захтевао је од ученика да на основу слике уоче везу између два комплексна броја и да свој закључак образложе. Први део овог задатака решило је 92% испитаника експерименталне групе и 81.82% испитаника контролне групе, док је други део решило 68% испитаника експерименталне групе и 45.45% испитаника контролне групе (Слика 77.). Резултати Вилкоксоновог теста су показали да не постоји значајна разлика између група приликом решавања овог задатка (Табела 15.).

6. На слици су приказани бројеви z_1 и z_2. Ова два броја су:

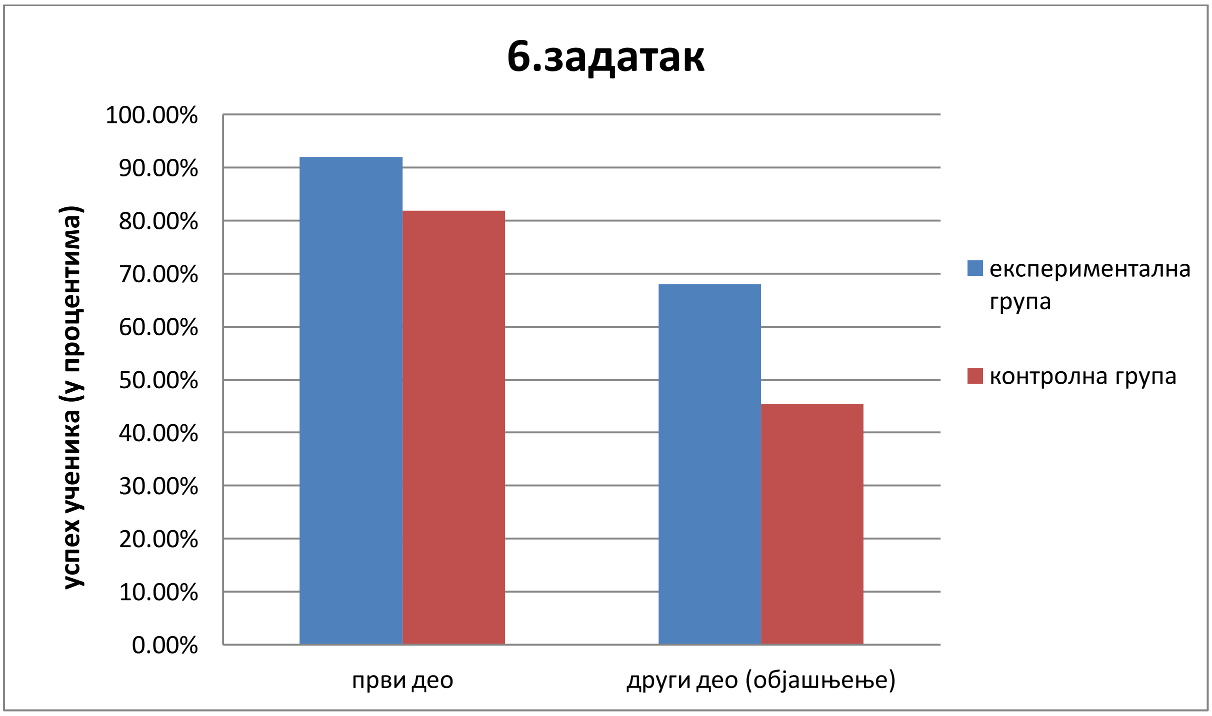
а) коњуговано-комплексна
б) супротна
в) једнака
г) нешто друго.

Заокружити тачан одговор.
Одговор образложити:

____
____
____
____
____
____
____
____



Слика 76. Пример шестог задатка



Слика 77. Шести задатак-успех ученика (у процентима)

Табела 15. Шести задатак-резултати Вилкоксоновог теста

шести задатак	W	p
први део	303	0.1553
други део (објашњење)	337	0.06291

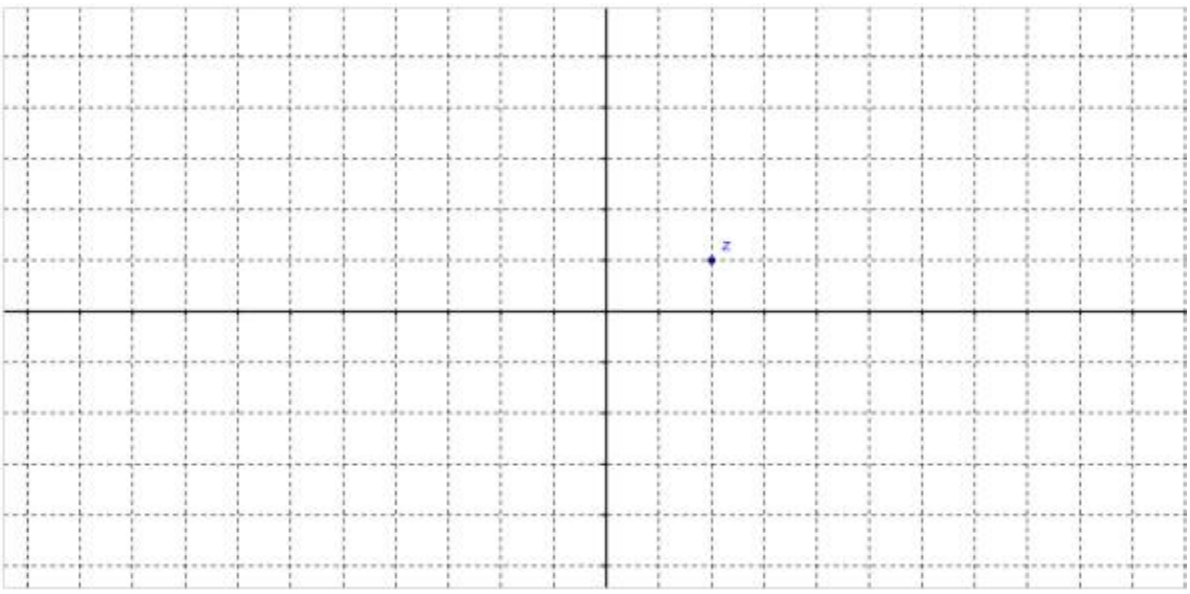
У седмом задатку (Слика 78.) захтевало се од ученика да на основу слике одреде број z, потом рачунски одреде број $z_1 = iz$ и да на основу добијених података препознају о којој изометријској трансформацији је реч. Број iz тачно је одредило 36% испитаника експерименталне групе и 9.09% испитаника контролне групе, док је 28% испитаника експерименталне групе и 4.55% испитаника контролне групе препознало ротацију као тражену изометријску трансформацију (Слика 79.). На основу резултата добијених Вилкоксоновим тестом (Табела 16.) и на основу процентуалне успешности ученика, утврђено је да постоји значајна разлика и да је експериментална група била успешнија.

7. На слици је приказан број z. На основу података датих на слици, нацртај у истом координатном систему број $z_1 = iz$. Којом изометријском трасформацијом се број z_1 пресликава на број z? Под изометријском трансформацијом подразумевамо осну симетрију (у овом случају навести шта је оса симетрије), централну симетрију (навести центар симетрије), транслацију (навести вектор транслације), ротација (навести центар ротације и угао ротације).

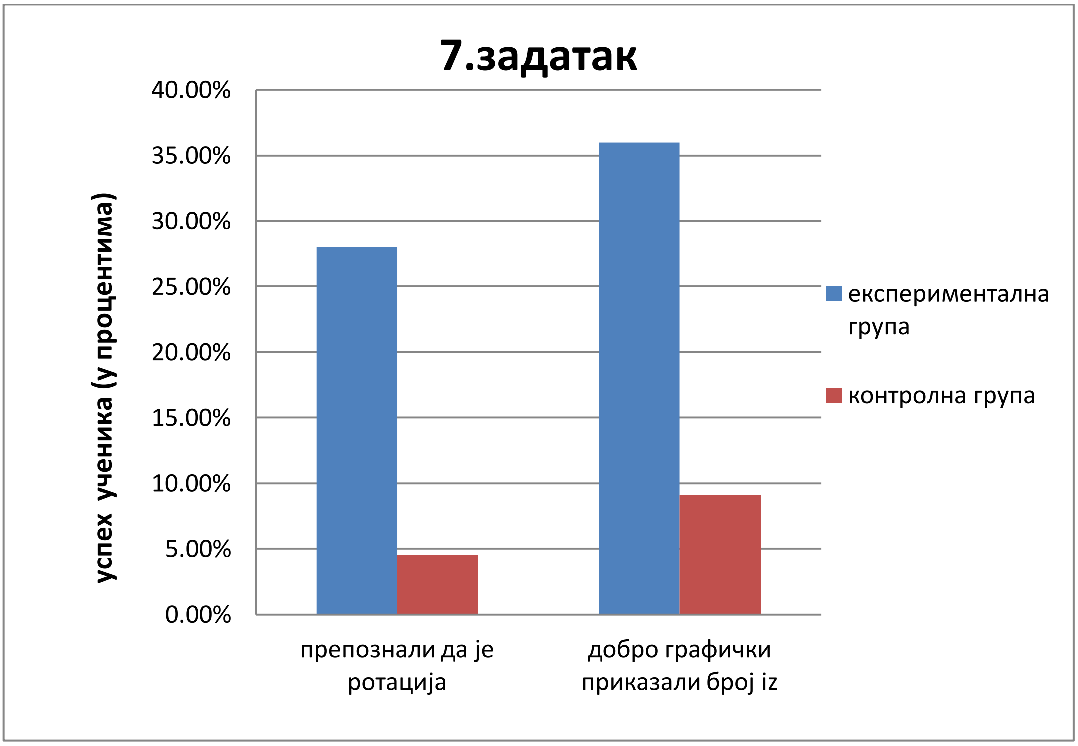
Одговор унети:

____

____



Слика 78. Пример седмог задатка



Слика 79. Седми задатак-успех ученика (у процентима)

Табела 16. Седми задатак-резултати Вилкоксоновог теста

седми задатак	W	p
препознали да је ротација	339.5	0.01805
добро графички приказали број iz	349	0.01633

7.5. Дискусија

Приликом учења комплексних бројева применом ГеоГебре као додатног наставног средства у настави математике, ученици постижу боље резултате у односу на ученике који уче користећи се традиционалним наставним средствима (W=442, p=0.0001555).

Употреба ГеоГебре као додатног наставног средства у настави математике приликом учења комплексних бројева доприноси бољем разумевању и превазилажењу потешкоћа при решавању проблема који се односе на степеновање броја i (W=377.5, p=0.005561), на одређивање апсолутних вредности (модула) комплексних бројева (W= 410.5, p=0.0004445; W=361.5, p=0.004855), као и на геометријско интерпретирање операција са комплексним бројевима (W=339.5, p=0.01805; W=349, p=0.01633).

Потврђени су резултати истраживања M.C.Nordlander, E. Nordlander-a по коме ученици идентификују комплексан број на основу експлицитне видљивости имагинарне јединице (уколико је она видљива, онда је то комплексан број, иначе није) [69] и утврђено је да примена ГеоГебре као додатног наставног средства не утиче на начин идентификације комплексног броја ($W=279$, $p=0.4387$). Резулати су показали да примена ГеоГебре не доприноси превазилажењу потешкоћа приликом решавања проблема који захтевају дељења два комплексна броја ($V=3$, $p=0.1729$; $W=280$, $p=0.444$).

Наредна истраживања треба усмерити ка проналажењу софтвера који доприноси бољем разумевању појма комплексног броја и операције дељења комплексних бројева.

8. Закључак

Промене које настају у образовању делимично су последица научно-технолошког и социјалног развоја. Напуштају се ставови традиционалних школа у којима је централна улога припадала наставнику. Савремена настава види ученике као активне учеснике у наставном процесу, подразумева употребу информационо-комуникационе технологије,... Али, ни улога професора није пасивна - он је креатор наставног процеса, одређује наставне методе и бира наставна средства која ће се користити у наставном процесу. Разноврсност слободног некомерцијалног софтвера пружа наставнику могућност да оствари наставни циљ, да упозна ученике са радом у различитим окружењима, па чак и да прикаже ученицима могућност модификације и прилагођавања софтвера сопственим потребама.

Настава математике средње школе допушта примену слободног софтвера као наставног средства, многобројне студије указују на предности коришћења софтвера у настави, те приликом обраде одређене тематске/наставне јединице одабир адекватног софтвера као наставног средства може допринети остварењу циља и жељеног исхода [12,13,14].

Употреба слободног софтвера у настави математике средње школе је пожељна, али је треба свести на разумну меру како би ефекти овакве наставе на процес учења били максимални.

Спроведено истраживање је показало да примена ГеоГебре као додатног наставног средства, доприноси бољем разумевању комплексних бројева. Уз помоћ ГеоГебре ученици боље геометријски интерпретирају операције са комплексним бројевима, боље схватају степеновање броја i и одређивање апсолутне вредности (модула) комплексног броја, али не и дељење комплексних бројева. Истраживање је потврдило резултате студије M.C.Nordlander, E. Nordlander-а по којој ученици повезују комплексне бројеве са дводимензионалним бројевима (са експилцитном видљивошћу имагинарне јединице) и утврдило да примена ГеоГебре као додатног наставног средства не утиче на начин идентификовања комплексног броја [69].

Будућа истраживања треба базирати на проналажењу софтвера који ће допринети бољем схватању појма комплексног броја и операције дељења комплексних бројева.

Такође, наредна истраживања би требало усмерити ка конкретном утврђивању ефеката примене различитих програмских пакета на процес учења математике приликом обраде исте наставне теме. На овај начин би се јасно дефинисали и разврстали ефекти примене одређеног програмског пакета на процес учења одређене наставне теме чиме би се олакшао процес одабира софтвера у зависности од жељеног циља наставе.

Литература:

[1] И. Ивић, А. Пешикан, С. Антић, *Активно учење, Приручник за примену метода активног учења/наставе,* Институт за психологију, Министарство просвете и спорта Републике Србије, Министарство за просвјету и науку Црне Горе, Др Бора Кузмановић, Београд, 2001.

[2] H. Freundenthal, M*athematics as an educational task*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holand, 1973.

[3] Л. Жлебник, *Општа историја школства и педагошких идеја*, Научна књига, Београд, 1970.

[4] М. Божић, *Преглед историје и филозофије математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2002

[5] S. Olkun, N. Sinoplu, D. Deryakulu, *Geometric Exploration with Dynamic Geometry Applicatons based on a van Hiele Levels*, International Journal for Mathematics Teaching and Learning, April 13th, 2005. www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/olkun.pdf

[6] Платон (превели: Др М. Н. Ђурић, Др А. Вилхар), *Дијалози*, Култура, Београд, 1970

[7] G. Polya, *Како ћу рјешити математички задатак,* Школска књига, Загреб, 1966.

[8] Van Hiele Levels of Geometric Reasoning http://images.rbs.org/cognitive/van_hiele.shtml

[9] The Child's Thought and Geometry By P.M.van Hiele http://geometryandmeasurement.pbworks.com/f/VanHiele.pdf

[10] M. Crowley, *The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought,* In Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Mary Montgomery Lindquist, pp.1-16. Reston, Va.: National Council af Teachers af Mathematics, 1987 http://www.csmate.colostate.edu/docs/math/mathactivities/june2007/The%20van%20Hiele%20Model%20of%20the%20Development%20of%20Geometric%20Thought.pdf

[11] Правилник о изменама и допунама Правилника о наставном плану и програму за гимназију http://www.mpn.gov.rs/images/content/dokumenta/NPP/sr/gimnazije/SVE_ZAJEDNO_ZA_SAJT.docx

[12] F. Almeqdadi, *The Effect of Using The Geometer's Sketchpad (GSP) on Jordanian Students' Understanding Some Geometrical Concepts,* Yarmouk University http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/almeqdadi.pdf

[13] K. Bakar, A. Ayub, W. Su Luan, R.Tarmizi, *Exploring secondary school students' motivation using technologies in teaching and learning mathematics*, Procedia Social and Behavioral Sciences 2 (2010) 4650–4654, http://ac.els-cdn.com/S1877042810007846/1-s2.0-S1877042810007846-main.pdf?_tid=e9aac8e8-ca64-11e3-aaf5-00000aab0f26&acdnat=1398202231_0c8fd588a676e270c1209b6adfb7eb34

[14] Ђ. Кадијевић, *Conceptual tasks in mathematics education*, The Teaching of Mathematics, Vol.II,1 (str.59-64), The Mathematical Society of Serbia, Belgrade, 1999.

[15] E. Haciomeroglu, L. Bu, R. Schoen, M. Hohenwarter, *Learning to Develop Mathematics Lessons with GeoGebra*, MSOR Connections Vol 9 No 2 May – July 2009 http://www.heacademy.ac.uk/assets/Documents/journals/Connections/9224_haciomeroglu_e_etal_geogebramathlessons.pdf

[16] Љ. Диковић, *Математички софтверски алати типа FOSS*, Настава математике LIV,1 (str.24-28), Друштво математичара Србије, Београд, 2009.

[17] Оперативни систем ГНУ, Врсте слободног и неслободног софтвера http://www.gnu.org/philosophy/categories.sr.html

[18] Слободни софтвер, Из Википедије, слободне енциклопедије http://sr.wikipedia.org/sr/Слободни_софтвер

[19] Open source, From Wikipedia, the free encyclopedia http://sh.wikipedia.org/wiki/Open_Source

[20] List_of_open-source_software_for_mathematics, From Wikipedia, the free encyclopedia http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_open-source_software_for_mathematics

[21] List_of_interactive_geometry_software, From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive_geometry_software

[22] GeoGebra
http://www.geogebra.org/cms/sr/

[23] GeoGebra Centar Beograd
http://www.geogebra.matf.bg.ac.rs/

[24] ГеоГебра, Из Википедије, слободне енциклопедије
http://sr.wikipedia.org/sr/Geogebra

[25] GeoGebra From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra

[26] M. Hohenwarter, J. Preiner, *Multiple Representations*, The Journal of Online Mathematics and Its Applications, Volume 7 (2007), GeoGebra
http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/Representations.html

[27] M. Hohenwarter and J. Preiner, *Bidirectional Connection of Representations*, The Journal of Online Mathematics and Its Applications, Volume 7 (2007), GeoGebra
http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/Bidirectional.html

[28] С. Бујачић, ГеоГебра, Софтвер динамичке геометрије
http://sanda.striga.org/doc/Geogebra1.pdf

[29] C.a.R, From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/C.a.R.

[30] C.a.R Overview
http://car.rene-grothmann.de/doc_en/overview.html

[31] C.a.R. > Documentation > File Format Technical Stuff
http://car.rene-grothmann.de/doc_en/Documentation/Technical%20Stuff.html

[32] Softpedia C.a.R.9.6
http://www.softpedia.com/get/Science-CAD/C-a-R.shtml

[33] C.a.R. - Dynamic Geometry
http://sourceforge.net/projects/zirkel/

[34] CaRMetal From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/CaRMetal

[35] CaRMetal
http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_en.html

[36] CaRMetal
http://carmetal.org/

[37] Dr.Geo, be a geometer
http://www.drgeo.eu/

[38] DrGeo From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/DrGeo

[39] An interactive geometry software drgeo
https://apps.ubuntu.com/cat/applications/natty/drgeo/

[40] Kig - Interactive Geometry
http://www.kde.org/applications/education/kig/

[41] Kig(software), From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Kig_%28software%29

[42] Kig Features
http://docs.kde.org/stable/en/kdeedu/kig/kig-features.html

[43] KDEdu, Kig
http://edu.kde.org/kig/

[44] KSEG (software), From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/KSEG_%28software%29

[45] Free Software Directory, KSEG
http://directory.fsf.org/wiki/KSEG

[46] KSEG Free Interactive Geometry Software
http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html

[47] Wordvia, KSEG
http://www.wordvia.com/dictionary/KSEG%20%28software%29

[48] KmPlot, From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/KmPlot

[49] KmPlot - Mathematical Function Plotter
http://www.kde.org/applications/education/kmplot/

[50] KDE UserBase Wiki , KmPlot
http://userbase.kde.org/KmPlot

[51] P2PU, Getting Started with Scilab
https://p2pu.org/he/groups/getting-started-with-scilab/
[52] Scilab, Open source software for numerical computation, About Scilab
http://www.scilab.org/index.php/scilab/about
[53] Scilab, Open source software for numerical computation, History
http://www.scilab.org/scilab/history
[54] Scilab From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Scilab
[55] Maxima(software), From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_%28software%29
[56] J. Morales, Páginas Web Educativas, Modelos Matemáticos I
http://sgpwe.izt.uam.mx/Curso/8264.Modelos-Matematicos-I.html
[57] Introduction to Maxima
http://www.mat.ufpb.br/sergio/softwares/maxima/MaximaBook.pdf
[58] Euler (software) From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_%28software%29
[59] Euler Math Toolbox
http://www.euler-math-toolbox.de/
[60] Euler Math Toolbox, Features
http://www.euler-math-toolbox.de/features.html
[61] Welcome to Euler for GTK+ ...
http://euler.sourceforge.net/
[62] Конференција „Слободан софтвер у настави“ (2012; Нови Сад), *Зборник радова*, Факултет техничких наука, Нови Сад, 2013
http://slobodansoftverzaskole.org/konferencija/dokumenti/Zbornik-Finalno-08022013.pdf
[63] С. Попов, М. Петров, *Зборник радова са националане конференције Информационо-комуникациона технологија у настави*, Центар за развој и примену Науке, Технологије и Информатике, Агенција за образовање „Марина и Јован“, Нови Сад, 2013
[64] Ж. Ивановић, С. Огњановић , *Математика 1 Збирка задатака и тестова за I разред гимназија и техничких школа,* Круг, Београд, 2008

[65] T.Stanković, *The use of some software in mathematics teaching: GeoGebra, Maxima, Scilab*, European Summer School for Visual Mathematics and Education, Eger, Hungary July 13 – 25, 2013.

[66] A Learning Progression for Complex Numbers
http://mathforum.org/pcmi/briefs/2011revisions/learning_progression_complex_numbers.pdf

[67] Complex Numbers, common mistakes
http://pjc.parisjc.edu/accuplacer/Accuplacer%20Test%20Prep%20Math%204/CommonMistakes_ComplexNumbers.pdf

[68] Math Mistakes, Category Archives: Complex Numbers, Complex Number Mistakes Are Often Algebra Mistakes
http://mathmistakes.org/?cat=333

[69] M. Nordlander, E. Nordlander, On the concept image of complex numbers, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Taylor&Francis, 2011.

[70] O. Torres-Reyna, *Introduction to Rstudio (v 1.3)*, Princeton Univesity
http://dss.princeton.edu/training/RStudio101.pdf

[71] Rstudio, From Wikipedia, the free encyclopedia
http://en.wikipedia.org/wiki/RStudio

[72] R Studio, Official Description
http://wikis.evergreen.edu/computing/index.php/R_Studio

[73] RStudio, Take control of your R code
http://www.rstudio.com/products/rstudio/

[74] RStudio, Download RStudio
http://www.rstudio.com/products/rstudio/download/

[75] The R Project for Statistical Computing
http://www.r-project.org/

[76] What is R?
http://www.r-project.org/

[77] R (програмски језик), Из Википедије, слободне енциклопедије
http://sr.wikipedia.org/sr/R_(програмски језик)

[78] Revolution Analytic, *What is R?*
http://www.revolutionanalytics.com/what-r

[79] Д. Тодоровић, *Основи методологије психолошких истраживања*, Лабораторија за експерименталну психологију, Београд, 1998.

[80] Постављање и тестирање хипотеза http://wwwserver.medfak.ni.ac.rs/PREDAVANJA/2.%20STOMATOLOGIJA/STATISTIKA/8.%20predavanje.pdf

[81] N. Razali, Y. Wah, *Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests*, Journal of Statistical Modeling and Analytics, Vol.2 No.1, 21-33,2011.
http://instatmy.org.my/downloads/e-jurnal%202/3.pdf

[82] Non-parametric statistical tests, MASH, University of Sheffield Nov 2011 http://www.mash.dept.shef.ac.uk/NonParametric.pdf

[83] Поглавље 5, Статистичко закључивање-једна варијабла http://www.mathos.unios.hr/ptfstatistika/zakljucivanje1sv.pdf

[84] Ђ. Кадијевић, *Емпиријска истраживања: методолошке и статистичке основе*, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[85] J. Milton, P. McTeer, J. Corbet, *Introduction to Statistics*, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, St.Louis, San Francisco, Auckland, Bogota, Caracas, Lisabon, London, Madrid, Mexico City, Milan, Montreal, New Delhi,San Juan, Singapore, Sydney, Tokyo, Toronto, 1997.

[86] Л. Тењовић, *Статистика у психологији, приручник*, Центар за примењену психологију Друштва психолога Србије, Београд, 2000.

[87] Graham Hole Research Skills, version 1.0 The Wilcoxon test: http://www.sussex.ac.uk/Users/grahamh/RM1web/WilcoxonHandoout2011.pdf