Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Дуалност Хардијевог простора H^1

Студент:
Петар Мелентијевић

Ментор:
др Мирослав Павловић

Октобар, 2014.

Ова страна је намерно остављена празна.

Предговор

Хардијеви простори једни су од најзначајнијих и најизучаванијих простора функција у хармонијској анализи. Као простори реалних функција за $p > 1$, они су изометрички изоморфни $L^p_{\mathbb{R}}$, док се у овом смислу H^1 издваја. У раду је показана и ограниченост неких оператора на H^1, иначе неважећа у L^1.

С друге стране, функције ограничене средње осцилације се први пут појављују у раду Џона и Ниренберга [JN61] у контексту парцијалних једначина. Њихов значај у хармонијској анализи је, пре свега, у томе што се на извесним местима појављују као замена за L^∞. На пример, неки сингуларни интегрални оператори сликају L^∞ у BMO.

Дуалност ових простора јако је дубока тема и данас и данас је познато више доказа ове теореме. Овде су наведена три: први, заснован на карактеризацији Карлесонових мера и вези Карлесонових мера и BMO функција; други, изведен из Учијамине леме, једноставне последице Гринове формуле; и трећи, доказан помоћу атомске декомпозиције функција из H^1. У последњем, сама атомска декомпозиција за функције из H^1 узета је за дефиницију, оперативности ради, иако је уобичајено последица опште дефиниције $H^1(\mathbb{R}^d)$.

У првој глави наведена су, а само нека од њих и доказана, основна тврђења из теорије хармонијских функција и H^p простора, неопходна за разумевање и праћење остатка материјала у раду. Изостављени докази могу се наћи у [Koo08].

Друга глава доноси основне резултате везане за функције ограничене средње осцилације и Џон-Ниренбергову неједнакост [JN61], кључни састојак најважнијих тврђења даље теорије.

Трећа глава прати резултате друге главе и у њој је изнесена основна веза Карлесонових мера и BMO функција.

У четвртој глави доказана је Феферманова теорема дуалности приступом подржаним твђењима претходне три главе. У петој глави овај резултат је изнесен на један врло елегантан начин, који заобилази и не захтева многе резултате претходно изложене теорије, користећи Учијамину лему [Kne13] (такође видети [Pav13]).

У шестој глави дата је једна од еквивалентних дефиниција Хардијевог простора H^1 на $\mathbb{R}^d$ помоћу атомске декомпозиције. Седма глава доноси уопштење простора BMO на функције више промењивих као и Феферманове теореме, која је овог пута доказана фундаментима L^2 теорије [FS72].

Уместо закључка, рад садржи и додатну осму главу, која даје неке резултате који показују зашто H^1, у појединим ситуацијама, представља одличну „замену” за L^1.

Овим је, чини се, ефикасно обухваћена целина везана за дуалност простора H^1 и BMO и демонстриране су различите технике комплексне и хармонијске анализе: Блашкеови производи, Калдерон-Зигмундова декомпозиција, атомска декомпозиција H^1 функције, конформна инваријантност Карлесонових мера на диску и извесних норми на BMO и сл.

Ако уопште имам право да кажем да сам, у намери целовитог обухватања теорије H^1 и BMO функција и Карлесонових мера, успео, онда то сигурно није само мој успех. За овакав резултат била је неопходна помоћ ментора др Мирослава Павловића, а захвалност дугујем и великом пријатељу и колеги Николи Милинковићу, на помоћи око обраде текста.

У Београду,
3. октобра 2014. године.

Садржај

Ова страна је намерно остављена празна.

Глава 1

Хардијеви простори и хармонијске функције

Хардијеви простори H^p, за $0 < p < +\infty$, дефинисани су као класе холоморфних функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ на отвореном јединичном диску за које важи

$$\sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < +\infty.$$

Јасно, класа H^p јесте векторски простор, и број са леве стране горње неједнакости је H^p-норма од f, у ознаци $\|f\|_{H^p}$ за $p \geq 1$. За $0 < p < 1$ исти израз не дефинише норму на простори H^p.

Простор H^∞ дефинишемо као векторски простор ограничених холоморфних функција на јединичном диску, са нормом

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{|z|<1} |f(z)|.$$

За $0 < p \leq q \leq \infty$, класа H^q чини подскуп од H^p, што је једноставна последица Хелдерове неједнакости:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{p \cdot \frac{q}{p}} \, d\theta \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{q}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{q-p}{q}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q \, d\theta \right)^{1/q} \end{aligned}$$

1.1 Хармонијске функције и теореме репрезентације

У циљу опремања теорије потребне за разумевање и извођење најважнијих резултата подсетимо се неких чињеница везаних за хармонијске функције.

Хармонијска функција $u = u(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ је двапут диференцијабилна функција за коју је испуњена једнакост

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

За хармонијске функције на диску $\mathbb{D}$, непрекидне на његовом затворењу $\overline{\mathbb{D}}$, важи Пуасонова формула

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it}) \, dt,$$

где је $0 \leq r < 1$ и $P_r(\theta)$ Пуасоново језгро дато изразом

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} = \operatorname{Re}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}},\ 0 \leq r < 1.$$

За нас ће од посебног значаја бити репрезентација неких класа хармонијских функција на $\mathbb{D}$. С тим у вези наводимо следећу теорему.

***Теорема* 1.1.** *Нека је $p > 1$, $u(z)$ хармонијска функција на $\mathbb{D}$ и нека је*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p \, d\theta$$

ограничено за $r < 1$. Тада постоји функција $f \in L^p(-\pi,\pi)$ таква да важи

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, dt,\ r < 1.$$

Слично тврђење важи и за $p = +\infty$, тј. ако је $u(z)$ хармонијска и ограничена у $\mathbb{D}$, постоји $f \in L^\infty(-\pi,\pi)$ тако да је

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, dt,\ r < 1.$$

Случај $p = 1$ се битно разликује од наведених. Наиме, важи:

***Теорема* 1.2.** *Ако је $u(z)$ хармонијска у $\mathbb{D}$ и ако су величине*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| \, d\theta$$

ограничене за $r < 1$, тада постоји коначна мера са знаком μ на $[-\pi,\pi]$ таква да је

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t),\ 0 \leq r < 1.$$

Овде је суштинска разлика између функција из простора H^1 и хармонијских функција за које су средине

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| \, d\theta$$

ограничене. Зашто је ово овако, скицираћемо након подсећања на следеће резултате:

***Теорема* 1.3.** *Нека је*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t),$$

где је μ коначна означена мера на $[-\pi,\pi]$. Тада $u(re^{i\theta})d\theta \to d\mu(\theta)$ w^* кад $r \to 1$, тј. за сваку непрекидну функцију $g(\theta)$, периодичну са периодом 2π,

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) g(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, d\mu(\theta).$$

***Теорема* 1.4** (Теорема браће Рис). *Ако је*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\, d\mu(\theta) = 0, \quad \text{за } n = 1, 2, 3, \ldots$$

тада је μ апсолутно непрекидна у односу на Лебегову меру.

Сада за $f \in H^1$, будући да је хармонијска, из теореме 1.2 имамо да је

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2\cos(\theta - t)}\, d\mu(t),$$

за неку меру μ (овог пута комплексну) на $[-\pi, \pi]$. Теорема 1.3 даје w^*-конвергенцију

$$f(re^{i\theta}) \to d\mu(\theta), \quad \text{кад } r \to 1.$$

Како је f аналитичка у $\mathbb{D}$, једноставно добијамо (нпр. применом Кошијеве интегралне формуле) да је

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Зато је, из поменутог граничног прелаза,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\, d\mu(\theta) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Сада, теорема 1.4 каже да је μ апсолутно непрекидна, односно $d\mu = h(\theta)d\theta$, где је $h \in L^1(-\pi, \pi)$.

Отуда за $f \in H^1$ постоји $h \in L^1(-\pi, \pi)$ тако да је

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) h(t)\, dt.$$

За H^p, $p > 1$, важи одговарајућа репрезентација, која, за разлику од претходног случаја, следи директно из теореме 1.1.

Према последици Фатуове теореме и Лебегове теореме о диференцирању, $f(z) \to h(\theta)$ скоро свуда кад $z \to e^{i\theta}$ нетангенцијално, па можемо ставити

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{\substack{z \to e^{i\theta} \\ \angle}} f(z).$$

Имамо

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt, \quad \text{за } f \in H^1(\mathbb{D}).$$

На овом месту је битно навести и следећи резултат који такође говори о извесној одређености функције $f \in H^1(\mathbb{D})$ нетангенцијалним лимесима. Наиме, важи:

***Теорема* 1.5.** *Нека је $f(z) \in H^1(\mathbb{D})$ и претпоставимо да је $f(e^{i\theta}) = 0$ за $\theta \in E$, где је $E \subset [-\pi, \pi]$ строго позитивне мере. Тада је $f(z) \equiv 0$.*

Пређимо сада на резултате везане за гранично понашање хармонијских функција у диску, које имају неку од репрезентација

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)\,dt, \text{ за } f \in L^p,$$

или

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,d\mu(t).$$

Ако је $f \in L^p(-\pi,\pi)$, а тиме и $f \in L^1(-\pi,\pi)$, тада је $d\mu(t) = f(t)\,dt$ једна коначна мера са знаком, па је, заправо, прва репрезентација садржана у последњој. При раду са мером μ, од користи је дефинисање функције

$$\mu(\theta) = \begin{cases} \int_0^\theta d\mu(t), & \theta > 0, \\ -\int_{-\theta}^0 d\mu(t), & \theta < 0. \end{cases}.$$

Сада смо у могућности и да наведемо први резултат овог типа, а то је следећа:

Теорема 1.6 (Фатуова теорема). *Нека је $-\pi < \varphi_0 < \pi$ и претпоставимо да извод $\mu'(\varphi_0)$ постоји и коначан је. Тада*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,d\mu(t)$$

тежи $\mu'(\varphi_0)$ кад $re^{i\theta} \to e^{i\varphi_0}$ по области $|\theta - \varphi_0| \le c(1-r)$.

У овом случају кажемо и да $u(re^{i\theta}) \to \mu'(\varphi_0)$ кад $re^{i\theta} \to e^{i\varphi_0}$ нетангенцијално.

Помоћ класичне теореме Лебега о диференцирању, која тврди да за $f \in L^1(-\pi,\pi)$, извод

$$\frac{d}{d\theta}\int_0^\theta f(t)\,dt$$

постоји скоро свуда и једнак је $f(\theta)$, омогућава следећи битан закључак.

Теорема 1.7. *Нека је $1 < p < +\infty$ и $u(z)$ хармонијска у $\mathbb{D}$, при чему је*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \le C \text{ за } 0 \le r < 1.$$

Тада, за скоро свако θ, $u(z)$ тежи коначној граничној вредности, означимо је са $u(e^{i\theta})$, кад z нетангенцијално тежи $e^{i\theta}$. Даље је $u(e^{i\theta}) \in L^p(-\pi,\pi)$ и за $0 \le r < 1$ важи

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta - t)}u(e^{it})\,dt.$$

Приметимо да исто не важи за $p = 1$, јер мера μ, којом је функција $u(z)$ репрезентована, не мора бити апсолутно непрекидна у односу на Лебегову меру. Јасно, случај функција из H^p, $p \ge 1$, због ове примедбе и показане репрезентације за H^1 укључује и случај $p = 1$. Дакле, важи:

Теорема 1.8. *Нека је $u \in H^p(\mathbb{D})$. Тада, за скоро свако θ, $u(z)$ тежи $u(e^{i\theta}) < +\infty$ кад z нетангенцијално тежи $e^{i\theta}$; $u(e^{i\theta}) \in L^p(-\pi,\pi)$ и за $0 \le r < 1$ важи*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})\,dt.$$

1.2 Блашкеови производи

Техничка подршка у раду са функцијама из H^p простора јесу и Блашкеови производи. То су бесконачни производи

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z},$$

где су $0 < |z_n| < 1$ и назначени производ апсолутно конвергира. Наравно, производ може бити и коначан, а може бити и помножен са z^k за $k \in \mathbb{N}_0$.

Испоставља се да је потребан и довољан услов за апсолутну конвергенцију Блашкеовог производа једноставан; производ апсолутно конвергира ако и само ако је

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < +\infty.$$

Према елементарној теорији функција комплексне променљиве, за $|z| < 1$ је $|B(z)| < 1$. Сада $B(z)$, као аналитичка и ограничена функција у диску $\mathbb{D}$, има нетангенцијалне лимесе скоро свуда на јединичној кружници и показује се да важи:

***Теорема* 1.9.** *За скоро свако $\theta \in (-\pi, \pi)$ је $|B(e^{i\theta})| = 1$.*

Честа примена Блашкеових производа је у формирању истих од нула неких аналитичких функција, како би добили функцију исте H^p-норме, без нула у диску $\mathbb{D}$.

***Теорема* 1.10.** *Нека је $f(z) \not\equiv 0$ аналитичка у $\mathbb{D}$ и нека су z_n нуле ове функције у $\mathbb{D}$. Претпоставимо да је величина*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta$$

ограничена одозго за $r < 1$. Тада је

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < +\infty,$$

па Блашкеов производ

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}$$

апсолутно конвергира у диску $\mathbb{D}$ и важи да је $f(z) = B(z)g(z)$, где је $g(z)$ аналитичка и нема нула у $\mathbb{D}$.

Доказ. Без умањења општости, можемо узети да је $f(0) \neq 0$ (у супротном, радимо са $f(z)z^{-k}$ уместо са $f(z)$). Тада за $0 < r < 1$ и ниједно z_n по модулу једнако r, из Јенсенове формуле

$$\log |f(0)| = \sum_{|z_n| < r} \log \left| \frac{z_n}{r} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta$$

и претпоставке имамо

$$\sum_{|z_n|<r} \log\left|\frac{r}{z_n}\right| \le M - \log|f(0)|,$$

где је M такво да је

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \le M$$

за свако $r \in (0,1)$ (дакле, независно од r).

За свако $p \in \mathbb{N}$, узимајући r довољно близу јединице, постижемо да је $|z_n| < r$ за $n = 1, 2, \ldots, p$, па је тада

$$\sum_{n=1}^{p} \log\frac{r}{|z_n|} \le M - \log|f(0)|,$$

одакле узимајући $r \to 1$ добијамо

$$\sum_{n=1}^{p} \log\frac{1}{|z_n|} \le M - \log|f(0)|,$$

па како ово важи за свако $p \in \mathbb{N}$, имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{1}{|z_n|} < +\infty.$$

Сада, из $1 - |z_n| \le \log\frac{1}{|z_n|}$ имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|) < +\infty,$$

па Блашкеов производ

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n}z}$$

апсолутно конвергира и има нуле као и $f(z)$. Следи да је количник $g(z) = {}^{f(z)}/_{B(z)}$ аналитичка функција у диску без нула. □

За $f \not\equiv 0$ из неког H^p, коришћењем управо доказане теореме имамо следећи резултат:

***Теорема* 1.11.** *Ако је $f \in H^p(\mathbb{D})$ и $f \not\equiv 0$, тада постоји Блашкеов производ $B(z)$ и $g(z) \in H^p(\mathbb{D})$ за које је $f(z) = B(z)g(z)$ и $g(z)$ нема нула у $\mathbb{D}$.*

Доказ. За $r < 1$, примена Јенсенове неједнакости на конкавну функцију $\varphi(x) = \log x$ и $|f(re^{i\theta})|$ даје

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p\log|f(re^{i\theta})\,d\theta \le \log\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta,$$

што је, према претпоставци, равномерно ограничено неком константом c. Зато, из претходног тврђења имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)<+\infty,$$

па можемо формирати Блашкеов производ $B(z)$ и $g(z) = {}^{f(z)}/_{B(z)}$ на начин описан у претходним редовима.

Означимо $B_N(z)=\prod_{n=1}^{N}\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}$. Производ за $B(z)$ конвергира апсолутно у $\mathbb{D}$ и за $r<1$, $B_N(z)\to B(z)$ кад $N\to+\infty$ равномерно на $|z|\le r$. Одаберимо r такво да ни за једно z_n не важи $|z_n|=r$.

Тада је

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(re^{i\theta})|^p\,d\theta=\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(re^{i\theta})}{B_N(re^{i\theta})}\right|^p d\theta.$$

За свако $N\in\mathbb{N}$,

$$g_N(z)=\frac{f(z)}{B_N(z)}$$

је аналитичка и за $p>0$, $|g_N(z)|^p$ је субхармонијска у $\mathbb{D}$, па за фиксирано $r<1$ имамо

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g_N(re^{i\theta})|^p\,d\theta\le\limsup_{R\to1}\int_{-\pi}^{\pi}|g_N(Re^{i\theta})|^p\,d\theta.$$

За фиксирано N, $|B_N(re^{i\theta})|\to1$ равномерно кад $r\to1$, па је

$$\limsup_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}|g_N(re^{i\theta})|^p\,d\theta=\limsup_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta,$$

што је ограничено, по претпоставци, нпр. са C.

Зато је, за свако $r<1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g_N(re^{i\theta})|^p\,d\theta\le C,\ \text{за }\forall N\in\mathbb{N},$$

па је коначно

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(re^{i\theta})|^p\,d\theta\le C.$$

Из произвољности r следи да је $g\in H^p(\mathbb{D})$. □

Приметимо да смо у доказу претходне теореме имали

$$\sup_{r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|g(re^{i\theta})|^p\,d\theta\le\sup_{r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta.$$

Како је $f=Bg$ и $|B(z)|\le1$ у $\mathbb{D}$ имамо и супротну неједнакост

$$\sup_{r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\le\sup_{r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|g(re^{i\theta})|^p\,d\theta,$$

па је $\|f\|_{H^p}=\|g\|_{H^p}$.

За нас ће бити значајне и следеће две последице ове теореме.

***Последица* 1.12.** *Ако $f \in H^1$ и $f \not\equiv 0$, тада постоје $g, h \in H^1$ које немају нула у $\mathbb{D}$, такве да важи $f = g + h$ и*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|\, d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\theta})|\, d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Доказ. Нека је $B(z)$ Блашкеов производ формиран од нула функције $f(z)$ и $F(z) = {}^{f(z)}/_{B(z)}$ аналитичка функција без нула за коју је $f(z) = B(z)F(z)$. Тада је

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\theta})|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Узимајући

$$g(z) = \frac{B(z)+1}{2} F(z) \text{ и}$$
$$h(z) = \frac{B(z)-1}{2} F(z)$$

добијамо закључак последице, имајући у виду да је $|B(z)| < 1$ за $|z| < 1$. □

***Последица* 1.13.** *Нека је $f \in H^p(\mathbb{D})$, $f \not\equiv 0$. Тада можемо записати*

$$f(z) = B(z)\,[g(z)]^{1/p},$$

где је $B(z)$ Блашкеов производ и $g \in H^1(\mathbb{D})$ без нула у $\mathbb{D}$.

Доказ. Према теореми 1.11 можемо записати $f(z) = B(z)F(z)$, $F \in H^p(\mathbb{D})$ без нула у $\mathbb{D}$. Узимајући $g(z) = [F(z)]^p$, $|z| < 1$ добијамо жељени резултат. □

1.3 Гранично понашање функција из $H^p(\mathbb{D})$

Користећи теорему 1.11, односно репрезентацију функције f из $H^p(\mathbb{D})$ доказаћемо још два битна резултата о граничним вредностима функције f.

***Теорема* 1.14.** *Ако је $p > 0$ и $f \in H^p(\mathbb{D})$, тада, за скоро свако $e^{i\theta}$, $\lim f(z)$ кад $z \underset{\angle}{\to} e^{i\theta}$ постоји и коначан је (означимо га са $f(e^{i\theta})$) и тада важи,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, d\theta = \|f\|_p, \qquad 0 < p < 1,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, d\theta = \|f\|_p^p, \qquad p \ge 1.$$

Доказ. Претпоставимо да је $f \not\equiv 0$. Тада је, према теореми 1.11 и примедби након исте, могуће представити $f(z) = B(z)g(z)$, где је $B(z)$ Блашкеов производ, $g(z)$ нема нула у $\mathbb{D}$ и

$$\|f\|_p = \|g\|_p.$$

Запишимо $g(z) = h(z)^{1/p}$, као у последици 1.13. Тада $h \in H^1(\mathbb{D})$ и према коментару након теореме 1.4,

$$\|h\|_1 = \limsup_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\theta})|\, d\theta,$$

где је $h(e^{i\theta})$ гранична вредност кад $z \to e^{i\theta}$ нетангенцијално. Према претпоставци $f \not\equiv 0$ и теореми 1.5, $h(e^{i\theta}) \neq 0$ за скоро свако θ. Тада, за скоро свако θ, $\lim g(z) = \lim \left[h(z)\right]^{1/p}$ постоји кад $z \underset{\angle}{\to} e^{i\theta}$. Означимо ову граничну вредност са $g(e^{i\theta})$. Отуда, како $B(z) \to B(e^{i\theta})$ кад $z \underset{\angle}{\to} e^{i\theta}$ за скоро свако θ, $f(z) \to B(e^{i\theta})g(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ за скоро свако θ кад $z \underset{\angle}{\to} e^{i\theta}$.

Коначно, за $p \geq 1$ је

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p = \|g\|_p^p = \left\|h^{1/p}\right\|_p^p = \|h\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\theta})|\, d\theta \\ = \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|^p\, d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, d\theta,\end{aligned}$$

јер је $B(e^{i\theta}) = 1$ скоро свуда. Слично се поступа и за $0 < p < 1$. □

***Теорема* 1.15.** *Ако $f \in H^p(\mathbb{D})$, и $f(e^{i\theta})$ су нетангенцијалне граничне вредности функције f, тада је*

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\right|^p\, d\theta = 0.$$

Доказ. Нека је $f \not\equiv 0$, $B(z)$ Блашкеов производ формиран од нула функције $f(z)$ и $f(z) = B(z)g(z)$, где $g \in H^p(\mathbb{D})$ и нема нула у $\mathbb{D}$. Ако је $r < 1$ и $0 < p < 1$, онда

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})\right|^p\, d\theta &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{i\theta})|^p \left|g(e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})\right|^p\, d\theta \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left|B(e^{i\theta}) - B(re^{i\theta})\right|^p |g(e^{i\theta})|^p\, d\theta \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|g(e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})\right|^p\, d\theta \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left|B(e^{i\theta}) - B(re^{i\theta})\right|^p |g(e^{i\theta})|^p\, d\theta,\end{aligned}$$

и слично за $p \geq 1$, где су сви интеграли са степеном p.

Имамо $|B(z)| \leq 1$ и $B(re^{i\theta}) \to B(e^{i\theta})$ кад $r \to 1$, и $|g(e^{i\theta})|^p \in L^1(-\pi, \pi)$. Зато је

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|B(e^{i\theta}) - B(re^{i\theta})\right|^p |g(e^{i\theta})|^p\, d\theta = 0,$$

према теореми о доминантној конвергенцији.

Стога је довољно доказати да је

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|g(e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})\right|^p\, d\theta = 0$$

за $g \in H^p(\mathbb{D})$ без нула у $\mathbb{D}$.

За $p \geq 1$ је

$$g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it})\, dt,$$

јер $g \in H^1(\mathbb{D})$. Сада $g(e^{it}) \in L^p(-\pi,\pi)$ за $g \in H^p(\mathbb{D})$, па због својства Пуасоновог језгра имамо

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g(e^{i\theta})-g(re^{i\theta})\right|^p\,d\theta=0.$$

Нека је, сада, $p \geq 1/2$. Ставимо $h(z)=\sqrt{g(z)}$ (ово је добро дефинисано јер $g(z)$ нема нула у $\mathbb{D}$). Тада $h \in H^{2p}(\mathbb{D})$, $2p \geq 1$. Даље имамо:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|g(e^{i\theta})-g(re^{i\theta})\right|^p\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\left|h(e^{i\theta})-h(re^{i\theta})\right|^p\left|h(e^{i\theta})+h(re^{i\theta})\right|^p\,d\theta,$$

па применом неједнакости Коши-Шварц-Буњаковсог добијамо

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g(e^{i\theta})-g(re^{i\theta})\right|^p\,d\theta &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|h(e^{i\theta})-h(re^{i\theta})\right|^{2p}\,d\theta\right)^{1/2}\\ &\quad\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|h(e^{i\theta})+h(re^{i\theta})\right|^{2p}\,d\theta\right)^{1/2}\\ &\leq C\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|h(e^{i\theta})-h(re^{i\theta})\right|^{2p}\,d\theta\right)^{1/2},\end{aligned}$$

где C не зависи од r, јер $h \in H^{2p}(\mathbb{D})$. Како је $2p \geq 1$, последњи израз тежи 0 кад $r \to 1$.

За $p \geq 1/4$, последњи закључак и смена $h=\sqrt{g}$ дају жељени резултат. Узастопном применом за $p \geq 1/8$, $p \geq 1/16$, итд. доказујемо тврђење за свако $p \in (0,1)$. □

1.4 Хармонијски конјугат и Хилбертова трансформација

У циљу излагања основног резултата овог рада навешћемо и фундаменталне теорије о хармонијском конјугату хармонијске функције.

Дефиниција 1.1 (Хармонијски конјугат). Кажемо да је хармонијска функција $v(z)$ дефинисана у $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ хармонијски конјугат од $u(z)$, $z \in \mathbb{D}$ ако је $u(z)+iv(z)$ аналитичка у $\mathbb{D}$. Хармонијски конјугати дефинисани су до на адитивну константу, па се уобичајено $v(z)$ бира тако да буде $v(0)=0$, и овакав конјугат се означава са $\widetilde{u}(z)$.

Нека је, сада,

$$u(re^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n r^{|n|}e^{in\theta},\quad 0\leq r<1.$$

Тада је

$$\widetilde{u}(z)=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}i\operatorname{sgn} n\, a_n r^{|n|}e^{in\theta},$$

где је

$$\operatorname{sgn} n=\begin{cases}-1, & n<0,\\ 0, & n=0,\\ 1, & n>0.\end{cases}$$

Лако је проверити да је $\widetilde{u}(re^{i\theta})$ хармонијска у $\mathbb{D}$ и да је $\widetilde{u}(0) = 0$. Такође,

$$u(re^{i\theta}) + i\widetilde{u}(re^{i\theta}) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

је аналитичка у $\mathbb{D}$.

Ако је, сада,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,d\mu(t)$$

са мером μ на $[-\pi, \pi]$, тада је горњи приказ и у облику реда могућ са

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-int}\,d\mu(t).$$

Одавде имамо

$$\widetilde{u}(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\,\mathrm{sgn}\,n r^{|n|} e^{in(\theta-t)}\,d\mu(t).$$

Израз

$$Q_r(\theta) = -i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}\,n r^{|n|} e^{in\theta}$$

називамо конјуганим Пуасоновим језгром. Сумирањем два геометријска реда у горњем изразу добијамо

$$Q_r(\theta) = \frac{2r\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}.$$

Дакле, хармонијски конјугат функције

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}\,d\mu(t)$$

јесте функција

$$\widetilde{u}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r\sin(\theta - t)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}\,d\mu(t).$$

Од посебног значаја је гранично понашање $\widetilde{u}(z)$ за

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\,dt,$$

где је $f \in L^p(-\pi, \pi)$, $p \geq 1$.

Под претпоставком да је f проширена са $[-\pi, \pi]$ на $\mathbb{R}$ тако да буде 2π-периодична имамо

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r\sin(\theta - t)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{r\sin u}{1 + r^2 - 2r\cos u}\left(f(\theta - u) - f(\theta + u)\right)du.\end{aligned}$$

Како је

$$\frac{r\sin u}{1+r^2-2r\cos u}=\frac{2r\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{u}{2}},$$

то, ако је

$$\int_0^\pi \frac{|f(\theta-s)-f(\theta+s)|}{s}\,ds<+\infty,$$

јасно, за $r\to 1$ имамо

$$\widetilde{u}(re^{i\theta})\to\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(\theta-u)-f(\theta+u)}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\,du,$$

где је интеграл на десној страни апсолутно конвергентан. Ово специјално важи кад је f диференцијабилна у θ.

Међутим, испоставља се да гранична вредност

$$\widetilde{u}(e^{i\theta})=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(\theta-t)-f(\theta+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$$

хармонијског конјугата

$$\widetilde{u}(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q_r(\theta-t)f(t)\,dt$$

постоји свуда и за ширу класу функција f. У том случају, одговарајући интеграл за граничну вредност интерпретирамо као

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_\epsilon^\pi \frac{f(\theta-t)-f(\theta+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt.$$

Дефиниција 1.2 (Лебегов скуп)**.** Ако је $f\in L^1(-\pi,\pi)$ 2π-периодична, за θ кажемо да припада Лебеговом скупу функције f ако је

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}|f(\theta+h)-f(\theta)|\,dt=0.$$

Један од битних резултата реалне анализе, који ћемо користити у наредним редовима је следећа

***Теорема* 1.16** (Лебегова теорема)**.** *Скоро свако $\theta\in(-\pi,\pi)$ је у Лебеговом скупу функције $f\in L^1(-\pi,\pi)$.*

Сада прелазимо на први значајнији резултат.

***Теорема* 1.17.** *Нека је f 2π-периодична функција из $L^1(-\pi,\pi)$. Тада је за сваку тачку θ из Лебеговог скупа функције f, тј. скоро сваку тачку $\theta\in\mathbb{R}$,*

$$\lim_{r\to 1}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r\sin t}{1+r^2-2r\cos t}f(\theta-t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{1-r}^{\pi}\frac{f(\theta-t)-f(\theta+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt\right)=0.$$

Доказ. Будући да је функција

$$\frac{r\sin t}{1+r^2-2r\cos t}$$

непарна по t назначена разлика се неће променити ако f заменимо са $f-f(\theta)$.

Разлику сада можемо раздвојити на два дела, од којих је први

$$\mathbf{I}=\frac{1}{\pi}\int_{-(1-r)}^{1-r}\frac{r\sin t}{1+r^2-2r\cos t}\left(f(\theta-t)-f(\theta)\right)dt$$

За $|t|\le 1-r$ важи процена

$$\left|\frac{r\sin t}{1+r^2-2r\cos t}\right|\le\frac{|\sin t|}{(1-r)^2}\le\frac{|t|}{(1-r)^2}\le\frac{1-r}{(1-r)^2}\le\frac{1}{1-r},$$

па је зато:

$$|\mathbf{I}|\le\frac{1}{\pi(1-r)}\int_{-(1-r)}^{1-r}|f(\theta-t)-f(\theta)|\,dt,$$

па $\mathbf{I}\to 0$ кад $r\to 1$ за скоро свако θ, према теореми 1.16.

Означимо $s=1-r$. Тада је други део разлике

$$\mathbf{II}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{s\le|t|\le\pi}\left[\frac{r\sin t}{s^2+4r\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{\sin t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\right]\left(f(\theta-t)-f(\theta)\right)dt.$$

Израз под угластом заградом је једнак

$$-\frac{s^2\sin t}{4(s^2+4r\sin^2\frac{t}{2})\sin^2\frac{t}{2}},$$

што је, за нпр. $r\ge 1/2$, по апсолутној вредности, мање или једнако

$$C\frac{(1-r)^2}{|t|^3},$$

где је C нека апсолутна константа.

Отуда је

$$|\mathbf{II}|\le\frac{Cs^2}{\pi}\int\limits_{s\le|t|\le\pi}\frac{|f(\theta-t)-f(\theta)|}{|t|^3}\,dt.$$

Парцијалном интеграцијом налазимо да је

$$\begin{aligned}s^2\int_s^\pi\frac{|f(\theta-t)-f(\theta)|}{t^3}\,dt=&\frac{s^2}{\pi^3}\int_0^\pi|f(\theta-t)-f(\theta)|\,dt\\&-\frac{1}{s}\int_0^s|f(\theta-t)-f(\theta)|\,dt\\&+3s^2\int_s^\pi\frac{1}{v^4}\int_0^v|f(\theta-t)-f(\theta)|\,dt\,dv.\end{aligned}$$

Прва два члана теже нули за θ из Лебеговог скупа функције f из очигледних разлога, док трећи разматрамо одвојено.

За дато $\epsilon > 0$, изаберимо $\delta > 0$ такво да је

$$\frac{1}{v}\int_0^v |f(\theta - t) - f(\theta)|\,dt < \epsilon,$$

кад год је $0 < v < \delta$; тада је:

$$\begin{aligned} 3s^2 \int_s^\pi \frac{1}{v^4}\int_0^v |f(\theta-t)-f(\theta)|\,dt\,dv &\le 3s^2\int_s^\delta \frac{\epsilon}{v^3}\,dv \\ &\quad + 3s^2\int_\delta^\pi \frac{1}{\delta^4}\int_0^v |f(\theta-t)-f(\theta)|\,dt\,dv \\ &< \frac{2s^2}{s^2}\epsilon + \frac{3\pi s^2}{\delta^4}\int_0^\pi |f(\theta-t)-f(\theta)|\,dt \\ &= 2\epsilon + s^2\frac{M}{\delta^4}, \end{aligned}$$

за $0 < s < \delta$.

За довољно мало s је $2\epsilon + s^2\frac{M}{\delta^4} < 4\epsilon$, па из произвољности $\epsilon > 0$, видимо да

$$s^2\int_s^\pi \frac{|f(\theta-t)-f(\theta)|}{t^3}\,dt \to 0,$$

кад $s \to 0$, а самим тим и $\mathbf{II} \to 0$ кад $r \to 1$. □

Испоставља се да

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^\pi \frac{f(\theta-t)-f(\theta+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$$

постоји скоро свуда кад год $f \in L^2(-\pi,\pi)$! Видећемо да је ово јако дубок резултат.

Из релација ортогоналности

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi e^{in\theta}e^{-im\theta}\,d\theta = \begin{cases} 0, & m \ne n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

и апсолутне конвергенције следи да, ако је

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

хармонијска у $\mathbb{D}$, важи

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi |u(re^{i\theta})|^2\,d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

за $r \in [0,1)$.

Дакле, важи:

***Теорема* 1.18.** *Ако је $u(z)$ хармонијска у $\mathbb{D}$, тада је*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)\,dt, \quad \text{за } f \in L^2(-\pi,\pi),$$

ако и само ако је

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|}e^{in\theta}, \quad \text{са} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty.$$

А сада резултат који чекамо већ неко време:

***Теорема* 1.19.** *Нека је $f \in L^2(-\pi,\pi)$ 2π-периодична. Тада*

$$\widetilde{f}(\theta) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{\epsilon}^{\pi} \frac{f(\theta - t) - f(\theta + t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$$

постоји за скоро свако θ, $\widetilde{f}(\theta) \in L^2(-\pi,\pi)$ и $\|\widetilde{f}\|_2 \le \|f\|_2$.

Ако је

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)\,dt,$$

тада је

$$\widetilde{u}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\theta - t)f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\widetilde{f}(t)\,dt.$$

Доказ. Према претходној теореми,

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|}e^{in\theta}, \quad \text{са} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty,$$

па је и

$$\widetilde{u}(re^{i\theta}) = -i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn} n a_n r^{|n|}e^{in\theta},$$

из истих разлога једнако

$$\widetilde{u}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)g(t)\,dt$$

за неку $g \in L^2(-\pi,\pi)$.

Како за скоро свако θ, $\widetilde{u}(z) \to g(\theta)$ кад z нетангенцијално тежи $e^{i\theta}$, па је, специјално и

$$\lim_{r\to 1}\widetilde{u}(re^{i\theta}) = g(\theta)$$

скоро свуда.

Према теореми 1.17

$$\frac{1}{\pi}\int_{1-r}^{\pi} \frac{f(\theta - t) - f(\theta + t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$$

такође мора тежити $g(\theta)$ кад $r \to 1$ за скоро свако θ. Зато теорема важи за $\widetilde{f}(\theta) = g(\theta)$!

Како је

$$\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

и исто јесте једнако $2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2$, према горњем рачуну, и

$$\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{u}(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = 2\pi \sum_{n\neq 0} |a_n|^2,$$

па имамо и $\|\widetilde{f}\|_2 \leq \|f\|_2$. □

За $f \in L^1(-\pi,\pi)$ можемо рећи само следеће.

***Теорема* 1.20.** *Нека $f \in L^1(-\pi,\pi)$ и $f(\theta+2\pi) = f(\theta)$. Тада главна вредност интеграла*

$$\widetilde{f}(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(\theta-t) - f(\theta+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \, dt$$

постоји и скоро свуда је коначна.

Главна вредност интеграла за $\widetilde{f}(\theta)$ може се записати и као

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\pi} \right) \frac{f(\theta-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \, dt.$$

Ово ћемо слично као и горе записивати као

$$\widetilde{f}(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \, dt$$

имајући на уму о каквом је интегралу реч.

Дефиниција 1.3. Функција $\widetilde{f}(\theta)$ се назива Хилбертовом трансформацијом функције $f(\theta)$.

За дату $f(\theta) \in L^2(-\pi,\pi)$ је $F(z) = u(z) + i\widetilde{u}(z) \in H^2(\mathbb{D})$. Гранична вредност $F(e^{i\theta})$ задовољава $F(e^{i\theta}) = f(\theta) + i\widetilde{f}(\theta)$, па ако је $f \in L^2(-\pi,\pi)$ реална функција, имамо начин да конструишемо $F \in H^2(\mathbb{D})$ са $\operatorname{Re} F(e^{i\theta}) = f(\theta)$ скоро свуда.

У наредним редовима доказаћемо аналог неједнакости $\|\widetilde{f}\|_2 \leq \|f\|_2$ за $f \in L^p(-\pi,\pi)$.

***Лема* 1.21.** *Нека су $u(z), v(z)$ хармонијске у $\mathbb{D}$ и нека су $\widetilde{u}(z), \widetilde{v}(z)$ њихови хармонијски конјугати са $\widetilde{u}(0) = \widetilde{v}(0) = 0$. Тада за $0 \leq r < 1$ важи*

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})\widetilde{v}(re^{i\theta}) \, d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{u}(re^{i\theta}) v(re^{i\theta}) \, d\theta. \tag{1.1}$$

Доказ. Доказ следи из директне провере интеграљењем члан по члан апсолутно конвергентних редова

$$
\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta},\\
v(re^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n r^{|n|} e^{in\theta},\\
\widetilde{u}(re^{i\theta}) &= -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn} n a_n r^{|n|} e^{in\theta},\\
\widetilde{v}(re^{i\theta}) &= -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn} n b_n r^{|n|} e^{in\theta}.
\end{aligned}
$$

□

Сада ћемо навести чувену теорему Марсела Риса која каже да је Хилбертова трансформација ограничен оператор из L^p у L^p за $p > 1$.

***Теорема* 1.22** (Теорема Марсела Риса на диску)**.** *Нека је* $f(\theta) \in L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < +\infty$ *и*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, dt,$$

са хармонијским конјугатом $\widetilde{u}$, $\widetilde{u}(0) = 0$.

Тада, узимајући f *као* 2π*-периодичну,*

$$\widetilde{f}(\theta) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{f(\theta - t) - f(\theta + t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}\, dt$$

постоји скоро свуда, $\widetilde{f} \in L^p(-\pi, \pi)$ *и*

$$\widetilde{u}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \widetilde{f}(t)\, dt$$

за $r < 1$.

Тада за неко $C_p = C(p)$ *важи*

$$\|\widetilde{f}\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Доказ. Случај $p)2$ је већ размотрен. За $f \in L^1(-\pi, \pi)$, $\widetilde{f}(\theta)$ постоји скоро свуда, што важи и за $f \in L^p(-\pi, \pi)$, $p > 1$.

Стога је довољно доказати

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{u}(re^{i\theta})|^p\, d\theta \leq (C_p \|f\|_p)^p \tag{1.2}$$

за $r \in [0, 1)$.

Теорема 1.1, тада, даје постојање $g \in L^p(-\pi, \pi)$, $\|g\|_p \leq C_p \|f\|_p$ за коју је

$$\widetilde{u}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(t)\, dt,$$

и тада је $g(\theta) = \widetilde{f}(\theta)$ скоро свуда.

Докажимо сада за $p \in (1,2)$ неједнакост (1.2), а потом аргументом дуалности и идентитетом (1.1) и случај $p > 2$.

Приметимо да је довољно доказати исту у случају $f(\theta) \geq 0$, јер у општем случају реалну $f \in L^p(-\pi,\pi)$ можемо записати као разлику $f = f^+ - f^-$ где је $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$, а неједнакост троугла за L^p-норме даје

$$\|f\|_p^p = \|f^+\|_p^p + \|f^-\|_p^p \geq 2^{1-p}\left(\|f^+\|_p + \|f^-\|_p\right)^p.$$

Сада, за $f \not\equiv 0$ и $f(\theta) \geq 0$, запишимо $F(z) = u(z) + i\widetilde{u}(z)$. За $z \in \mathbb{D}$, $\operatorname{Re} F(z) = u(z) > 0$, па F нема нула, те је добро дефинисана аналитичка функција $G(z) = F(z)^p$.

Према теореми о средњој вредности хармонијских функција и $F(0) = u(0) \geq 0$ имамо, за $0 \leq r < 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} G(re^{i\theta})\, d\theta = \operatorname{Re} G(0) = u(0)^p \geq 0.$$

За дато $r < 1$, поделимо $[-\pi, \pi]$ на дисјунктну унију $E_1 \sqcup E_2$, на следећи начин: узмимо $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, такво да је $\frac{\pi}{2} < p\varphi < \frac{p\pi}{2} < \pi$ (такво φ постоји, јер је $p \in (1,2)$); тада ставимо

$$E_1 = \{\theta \in [-\pi,\pi] : -\varphi \leq \arg F(re^{i\theta}) \leq \varphi\},$$
$$E_2 = \{\theta \in [-\pi,\pi] : \varphi \leq |\arg F(re^{i\theta})| \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Због $\operatorname{Re} F(z) > 0$, $|\arg F(z)| < \frac{\pi}{2}$, па је $[-\pi,\pi] = E_1 \sqcup E_2$.
Сада имамо

$$\int\limits_{E_1} \operatorname{Re} G(re^{i\theta})\, d\theta + \int\limits_{E_2} \operatorname{Re} G(re^{i\theta})\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} G(re^{i\theta})\, d\theta \geq 0. \tag{1.3}$$

За $\theta \in E_2$, $\operatorname{Re} G(re^{i\theta}) < 0$ и $\operatorname{Re} G(ee^{i\theta}) \leq -|G(re^{i\theta})||\cos p\varphi|$, па је према (1.3),

$$|\cos p\varphi| \int\limits_{E_2} |G(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \int\limits_{E_1} \operatorname{Re} G(re^{i\theta})\, d\theta.$$

За $\theta \in E_1$ је

$$|F(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{\cos\varphi}|u(re^{i\theta})|,$$

па је

$$|G(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{\cos^p\varphi}|u(re^{i\theta})|^p,$$

па имамо

$$\int\limits_{E_2} |G(re^{i\theta})|\, d\theta \leq |\sec p\varphi| \int\limits_{E_1} |G(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \frac{|\sec p\varphi|}{\cos^p\varphi} \int\limits_{E_1} |u(re^{i\theta})|^p\, d\theta.$$

Такође је

$$\int\limits_{E_1} |G(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \frac{1}{\cos^p\varphi} \int\limits_{E_1} |u(re^{i\theta})|^p\, d\theta.$$

Додавајући претходне две неједнакости добијамо

$$\int_{-\pi}^{\pi} |G(re^{i\theta})|^p \, d\theta \le \frac{1 + |\sec p\varphi|}{\cos^p \varphi} \int\limits_{E_1} |u(re^{i\theta})|^p \, d\theta,$$

па је, тим пре, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{u}(re^{i\theta})|^p \, d\theta \le \frac{1 + |\sec p\varphi|}{\cos^p \varphi} \, d\theta,$$

јер је $G(z) = (u(z) + i\widetilde{u}(z))^p$.

Из својства $P_r(\theta - t)$ имамо коначно

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{u}(re^{i\theta})|^p \, d\theta \le \frac{1 + |\sec p\varphi|}{\cos^p \varphi} \|f\|_p^p.$$

За $p > 2$, је $q = \frac{p}{p-1} \in (1, 2)$ и

$$\|\widetilde{u}(re^{i\theta})\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{u}(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} = \sup \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{u}(re^{i\theta}) t(re^{i\theta}) \, d\theta \right|,$$

где је супремум узет по свим коначним збировима

$$t(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

где је $\|t(re^{i\theta})\|_q \le 1$.

Како је $q < 2$, то је, према већ доказаном,

$$\|\widetilde{t}(re^{i\theta})\|_q \le C_q \|t(re^{i\theta})\|_q,$$

па је

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{u}(re^{i\theta}) t(re^{i\theta}) \, d\theta \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) \widetilde{t}(re^{i\theta}) \, d\theta \right|$$
$$\le \|\widetilde{t}(re^{i\theta})\|_q \|u(re^{i\theta})\|_p \le C_q \|t(re^{i\theta})\|_q \|u(re^{i\theta})\|_p \le K_q \|u(re^{i\theta})\|_q,$$

те је

$$\|\widetilde{u}(re^{i\theta})\|_p \le K_q \|u(re^{i\theta})\|_p,$$

за $p > 2$. □

1.5 Хардијеви простори у полуравни

Претходна тврђења и остала теорија се уз извесне измене преносе и на Хардијеве просторе у полуравни.

Наиме, Хардијеви простори у полуравни $H^p(\mathbb{H}^+)$ за $p > 0$ су простори аналитичких функција такви да за фиксирано p, постоји константа $C > 0$ са

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p \, dx \le C,$$

за свако y.

И у овом случају је значајно посматрати извесна својства хармонијских функција у $\mathbb{H}^+$.

Пуасоново језгро за горњу полураван изводимо користећи конформно пресликавање полуравни у диск и познато језгро за диск. Наиме, посматрамо

$$w = \frac{i-z}{i+z}$$

и

$$e^{i\tau} = \frac{i-t}{i+t} = \omega,$$

за $\operatorname{Im} z > 0$ и $t \in \mathbb{R}$.

Тада је:

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}\,d\tau = \frac{1-|w|^2}{|w-\omega|^2}\frac{d\omega}{i\omega}.$$

Сада је:

$$d\omega = \frac{-2i}{(i+t)^2}\,dt,$$

па је:

$$\frac{d\omega}{i\omega} = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Тако је:

$$\frac{1-|w|^2}{|w-\omega|^2}\frac{d\omega}{i\omega} = \frac{1-\left|\frac{i-z}{1+z}\right|^2}{\left|\frac{i-z}{i+z}-\frac{i-t}{i+t}\right|^2}\frac{2\,dt}{1+t^2} = \frac{2y}{|z-t|^2}dt.$$

Тако имамо:

Теорема 1.23. *Нека је $v(z)$ хармонијска и ограничена у $\mathbb{H}^+$. Тада $\lim v(z) = v(t)$ за $z \underset{\angle}{\to} t$ постоји скоро свуда на $\mathbb{R}$ и за $\operatorname{Im} z > 0$ важи:*

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t)\,dt.$$

Приметимо да је

$$\frac{y}{(x-t)^2+y^2} + \frac{i(x-t)}{(x-t)^2+y^2} = \frac{i}{z-t},$$

за свако $t \in \mathbb{R}$, аналитичка функција у горњој полуравни.

Отуда и један избор хармонијског конјугата за

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,d\mu(t)$$

може бити

$$\widetilde{v}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\,d\mu(t),$$

што је примењиво онда када је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+|t|} < +\infty.$$

Али, ми врло често знамо само да је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+t^2} < +\infty,$$

па у том случају за хармонијски конјугат бирамо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} + \frac{t}{t^2+1}\right) d\mu(t).$$

Слично као и за диск, имамо одговарајуће теореме везане за гранично понашање функција:

***Теорема* 1.24.** *Нека је*

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\, d\mu(t),$$

где је μ мера са знаком на $\mathbb{R}$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+t^2} < +\infty.$$

Тада за оне t_0 за које $\mu'(t_0)$ постоји и коначан је, $v(z) \to \mu'(t_0)$ кад $z \underset{\angle}{\to} t_0$.

***Теорема* 1.25.** *Ако је $f \in L^p(-\infty,+\infty)$, $1 \le p < +\infty$ и*

$$f_y(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} f(t)\, dt,$$

тада је $\|f_y\|_p \le \|f\|_p$ за $y > 0$ и $\|f_y - f\|_p \to 0$ кад $y \to 0$.

Граничне вредности хармонијског конјугата функције добијене Пуасоновим интегралом задане f добијамо Хилбертовом трансформацијом те функције:

$$\mathrm{H}\, f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-t|\ge\epsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt.$$

Показује се да је овај оператор ограничен на $L^p(\mathbb{R})$, што је садржај следеће теореме:

***Теорема* 1.26** (Теорема Марсела Риса на полуравни)**.** *Нека је $1 < p < +\infty$ и $u(t) \in L^p(-\infty,+\infty)$. За $\operatorname{Im} z > 0$ запишимо*

$$\widetilde{u}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-t}{|z-t|^2} u(t)\, dt.$$

Тада, за свако $h > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{u}(x+ih)|^p\, dx \le K_p \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^p\, dt,$$

за неку константу K_p која зависи само од p, а важи и

$$\|\,\mathrm{H}\, u\|_p \le K_p^{1/p} \|u\|_p.$$

Хилбертов оператор H није ограничен на $L^1(-\infty,+\infty)$, али задовољава слабу ограниченост, на којој се овде нећемо задржавати. Уместо тога, касније ћемо доказати да је на $H^1_r(\mathbb{R})$ овај оператор ограничен.

За крај излагања наведимо теореме репрезентације за $H^p(\mathbb{H}^+)$ функције.

***Теорема* 1.27.** *Нека је $f(z)\in H^p(\mathbb{H}^+)$ и $p\geq 1$. Тада за скоро свако $t\in\mathbb{R}$,*

$$\lim_{\substack{z\to t\\ \angle}} f(z)=f(t)$$

постоји, $f(t)\in L^p(-\infty,+\infty)$ и

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}f(t)\,dt,\quad z\in\mathbb{H}^+.$$

***Теорема* 1.28.** *Ако је $f\in H^p(\mathbb{H}^+)$, $1\leq p<+\infty$, тада је*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-\overline{z}}\,dt=0.$$

***Теорема* 1.29.** *Нека је $f(z)\not\equiv 0$ из $H^p(\mathbb{H}^+)$. Тада је, за $z\in\mathbb{H}^+$,*

$$f(z)=I_f(z)\cdot O_f(z),$$

где је

1. *$I_f(z)$, унутрашњи чинилац функције f, једнак*

$$I_f(z)=e^{i\gamma}B(z)\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{i}{z-t}+\frac{it}{t^2+1}\right)d\sigma(t)\right)e^{i\alpha z},$$

   где су:

   (a) $\gamma\in\mathbb{R}$,

   (b) *$B(z)$ је Блашкеов производ за горњу полураван*

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(e^{i\alpha_k}\frac{z-z_k}{z-\overline{z_k}}\right),$$

   где су z_k нуле $f(z)$ у $\mathbb{H}^+$ и реални бројеви α_k изабрани тако да је

$$e^{i\alpha_k}\frac{i-z_k}{i-\overline{z_k}}\geq 0,$$

   (c) *$d\sigma(t)\leq 0$ сингуларна мера за коју је*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\sigma(t)|}{1+t^2}<+\infty,$$

   (d) $\alpha\in[0,+\infty)$.

2. *$O_f(z)$, спољашњи чинилац функције f, дат са*

$$O_f(z)=\exp\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-t}+\frac{t}{t^2+1}\right)\log|f(t)|\,dt\right).$$

Глава 2

Функције ограничене средње осцилације

У овом поглављу навешћемо и доказати нека од најважнијих својстава функција ограничене средње осцилације. Технике које при томе користимо су неке од основних у хармонијској анализи и имају и знатно шире примене.

2.1 Основни појмови и својства BMO функција

Дефиниција 2.1. Нека је $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Кажемо да је φ функција ограничене средње осцилације и пишемо $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ ако је

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| \, \frac{d\theta}{2\pi} = \|\varphi\|_* < +\infty,$$

где са I означавамо произвољан лук на $\mathbb{T}$, са $|I|$ дужину лука I једнаку

$$|I| = \int_I \frac{d\theta}{2\pi}$$

и са

$$\varphi_I = \frac{1}{|I|} \int_I \varphi \, \frac{d\theta}{2\pi}$$

просечну вредност функције φ на луку I.

Иако, пре свега, овде радимо на диску, наводимо дефиницију BMO функција на правој, уз примедбу да ће на извесним местима рад са $BMO(\mathbb{R})$ бити једноставнији од рада са $BMO(\mathbb{T})$, па ћемо стога упоредо заснивати обе теорије.

Дефиниција 2.2. Локално-интеграбилна функција ψ на $\mathbb{R}$ је функција ограничене средње осцилације ако је

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\psi - \psi_I| \, dt = \|\psi\|_* < +\infty,$$

где је

$$\psi_I = \frac{1}{|I|} \int \psi \, dt,$$

а супремум узет по свим ограниченим интервалима.

Величину $\|\psi\|_*$ зовемо BMO-нормом функције ψ.

Будући да константне функције имају BMO-норму нула, идентификујемо $\psi \in BMO$ са $\psi + \alpha$, где је α реална или комплексна константа. Зато је BMO подскуп од $L^1_{\mathrm{loc}}/\mathbb{C}$.

Није круцијално да ли у интегралу одузимамо тачно ψ_I. Наиме, ако за сваки ограничен интервал постоји α_I таква да је

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\psi - \alpha_I|\, dt \le M,$$

тада из основне интегралне неједнакости и горње претпоставке имамо

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\psi - \psi_I|\, dt \le \frac{1}{|I|}\int_I |\psi - \alpha_I|\, dt + \frac{1}{|I|}\int_I |\alpha_I - \psi_I|\, dt \le M + \frac{1}{|I|}\int_I M\, dt = 2M,$$

јер је

$$|\alpha_I - \psi_I| \le \frac{1}{|I|}\int_I |\psi - \alpha_I|\, dt \le M,$$

па је, тако, $\|\psi\|_* \le 2M$.

Такође јасно је и да је $L^\infty/\mathbb{C} \subset BMO$, јер за $\psi \in L^\infty$ имамо

$$\|\psi\|_* \le \sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I |\psi - \psi_I|^2\, dt\right)^{1/2} \le \sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I |\psi|^2\, dt\right)^{1/2} \le \|\psi\|_\infty,$$

према Коши-Шварцовој неједнакости и из чињенице да је ψ_I константа која је најближа ψ у L^2-метрици на $\mathbb{R}$.

Како је, према ранијој примедби, $\|\psi - \alpha\|_* = \|\psi\|_*$, то важи

$$\|\psi\|_* \le \inf_\alpha \|\psi - \alpha\|_\infty.$$

Типичан пример (тачан смисао речи *типичан* видећемо касније) неограничене функције у BMO је $\log|t|$. Да би доказали да је $\log|t| \in BMO(\mathbb{R})$, нађимо константу $C_{t_0,R}$ такву да је просек $|\log|t| - C_{t_0,R}|$ равномерно ограничен на $[t_0 - R, t_0 + R]$. Како је

$$\frac{1}{2R}\int_{t_0-R}^{t_0+R} |\log|t| - C_{t_0,R}|\; dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\left|t-\frac{t_0}{R}\right|\le 1} |\log|t| - C_{t_0,R} + \log R|\; dt,$$

то је, уз избор $C_{t_0,R} = C^R_{t_0/R,1} + \log R$ за $R \ne 1$, довољно наћи $C_{t_0,1}$.

За $|t_0| \le 2$, $C_{t_0,1} = 0$ и

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|t-t_0|\le 1} \big|\log|t|\big|\, dt \le \frac{1}{2}\int\limits_{|t|\le 3} \big|\log|t|\big|\, dt = \log\frac{729}{e^2}.$$

За $|t_0| > 2$, узмимо $C_{t_0,1} = \log|t_0|$, па је

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|t-t_0|\le 1} \big|\log|t| - \log|t_0|\big|\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{|t-t_0|\le 1} \left|\log\frac{|t|}{|t_0|}\right|\, dt \le \log 2,$$

јер за $|t-t_0| \le 1$ и $|t_0| > 2$ имамо

$$\log\left|\frac{t}{t_0}\right| \le \log\frac{|t_0|+1}{|t_0|} \le \log\frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \log\left|\frac{t_0}{t}\right| \le \log\frac{|t_0|}{|t_0|-1} \le \log 2.$$

Отуда је $\log|t| \in BMO(\mathbb{R})$.

Ако $\psi \in BMO(\mathbb{R})$ и I и J су интервали такви да је $I \subset J$, $|J| \le 2|I|$, тада је

$$|\psi_I - \psi_J| \le \frac{1}{|I|}\int_I |\psi - \psi_J|\,dt \le \frac{2}{|J|}\int_J |\psi - \psi_J|\,dt \le 2\|\psi\|_*.$$

Следећа лема уопштава претходни резултат.

***Лема* 2.1.** *Нека $\psi \in BMO(\mathbb{R})$ и нека су I и J ограничени интервали.*

1. *Ако је $I \subset J$ и $|J| > 2|I|$, тада је*

$$|\psi_I - \psi_J| \le c\log\frac{|J|}{|I|}\|\psi\|_*.$$

2. *Ако је $|I| = |J|$, тада је*

$$|\psi_I - \psi_J| \le c\log\left(2 + \frac{d(I,J)}{|I|}\right)\|\psi\|_*.$$

Доказ. 1. Нека је $I = I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n = J$, где је $|I_{k+1}| \le 2|I_k|$ и $n \le c\log\frac{|J|}{|I|}$. Тада претходни резултат даје

$$|\psi_I - \psi_J| \le 2n\|\psi\|_* \le 2c\|\psi\|_*\log\frac{|J|}{|I|}.$$

2. Узмимо за K најмањи интервал који садржи и I и J. Поредећи одвојено ψ_I и ψ_J са ψ_K налазимо:

$$\begin{aligned}|\psi_I - \psi_J| &\le |\psi_I - \psi_K| + |\psi_J - \psi_K| \le c\log\frac{|K|}{|I|}\|\psi\|_* + c\log\frac{|K|}{|J|}\|\psi\|_* \\ &= c\|\psi\|_*\log\frac{\big(|I|+|J|+d(I,J)\big)^2}{|I|\cdot|J|} = 2c\|\psi\|_*\log\frac{2|I|+d(I,J)}{|I|^2} \\ &= 2c\|\psi\|_*\log\left(2+\frac{d(I,J)}{|I|}\right).\end{aligned}$$

□

Сви претходни резултати за $BMO(\mathbb{R})$ без икаквих потешкоћа се преносе и на $BMO(\mathbb{T})$.

Наредна тврђења омогућиће и ближе повезивање поменутих простора, као и налажење еквивалентних норми од којих је посебно значајан случај на диску због конформне инваријантности.

***Теорема* 2.2.** *Нека је $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тада је $\psi \in BMO$ ако и само ако је*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\psi(t)|}{1+t^2}\,dt < +\infty \tag{2.1}$$

и

$$A = \sup_{z\in\mathbb{H}^+} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)-\psi(z)|P_z(t)\,dt < +\infty, \tag{2.2}$$

где је

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_z(t)\psi(t)\,dt$$

Пуасонов интеграл функције ψ. *У случају да је* $\psi \in BMO$, *постоје и константе* c_1 *и* c_2 *такве да је*

$$c_1\|\psi\|_* \le A \le c_2\|\psi\|_*. \tag{2.3}$$

Услов (2.1) повлачи да је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|P_z(t)\,dt < +\infty,$$

па је Пуасонов интеграл функције ψ добро дефинисан у свакој тачки горње полуравни.

Доказ. Претпоставимо да ψ задовољава (2.1) и (2.2). Ако је I ограничен интервал и посматрамо $z = x+iy$, где је x центар од I и $y = 1/2|I|$, тада за $t\in I$ важи:

$$P_y(x-t) = \frac{y}{(x-t)^2+y^2} \ge \frac{\frac{1}{2}|I|}{\frac{1}{4}|I|^2+\frac{1}{4}|I|^2} = \frac{1}{|I|},$$

па је

$$\frac{\chi_I(t)}{|I|} \le P_y(x-t),$$

те из (2.2) имамо:

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\psi(t)-\psi(z)|\,dt \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)-\psi(z)|P_z(t)\,dt \le \pi A,$$

што према ранијој примедби даје $\|\psi\|_* \le 2\pi A$.

Докажимо и обратан смер. Нека $\psi \in BMO(\mathbb{R})$ и нека је $z = x+iy \in \mathbb{H}^+$. Са I_0 означимо интервал $\{t : |t-x| < y\}$ и $I_k = \{t : |t-x| < 2^k y\}$, $k = 1,2,\ldots$ Тада је $|I_k| = 2^{k+1}y$, а $P_z(t)$ можемо проценити на означеним интервалима на следећи начин:

$$P_z(t) = \frac{y}{(x-t)^2+y^2} = \frac{1}{y}\frac{1}{1+\left(\frac{x-t}{y}\right)^2} \le \frac{1}{y}$$

на I_0, и

$$P_z(t) = \frac{1}{y}\frac{1}{1+\left(\frac{x-t}{y}\right)^2} \le \frac{1}{y}\frac{1}{1+2^{2k-2}} \le \frac{1}{2^{2k-2}y}$$

на $I_k \setminus I_{k-1}$.

Из леме 2.1 имамо

$$|\psi_{I_k} - \psi_{I_0}| \le ck\|\psi\|_*.$$

Отуда је

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)-\psi_{I_0}|P_z(t)\,dt \le \frac{1}{\pi y}\int\limits_{I_0}|\psi-\psi_{I_0}|\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-2}y}\int\limits_{I_k\setminus I_{k-1}}|\psi-\psi_{I_k}|\,dt$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k-2}y}\int\limits_{I_k\setminus I_{k-1}}|\psi_{I_k}-\psi_{I_0}|\,dt$$
$$\le \frac{2}{\pi}\|\psi\|_*+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\|\psi\|_*+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}ck\|\psi\|_*,$$

па је

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi-\psi_{I_0}|P_z(t)\,dt\le C\|\psi\|_*.$$

Одавде следи

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\psi(t)|}{1+t^2}\,dt\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\psi(t)-\psi_{I_0}|}{1+t^2}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\psi_{I_0}|}{1+t^2}\,dt\le C\|\psi\|_*+\pi|\psi_{I_0}|<+\infty.$$

Такође имамо и

$$|\psi(z)-\psi_{I_0}|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi-\psi_{I_0}|P_z(t)\,dt\le C\|\psi\|_*,$$

па је

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)-\psi(z)|P_z(t)\,dt\le 2C\|\psi\|_*.$$ □

Показује се да, слично претходној, важи и следећа:

Теорема 2.3. *Ако $\varphi\in L^1(\mathbb{T})$, тада $\varphi\in BMO(\mathbb{T})$ ако и само ако је*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{T}}|\varphi(t)-\varphi(re^{i\theta})|P_r(t)\,\frac{dt}{2\pi}=B<+\infty, \tag{2.4}$$

где је

$$\varphi(z)=\int_{\mathbb{T}}\varphi(t)P_r(\theta-t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

У том случају, са (2.4) *је задата једна еквивалентна норма на $BMO(\mathbb{T})$, односно постоје $c_1,c_2\in\mathbb{R}^+$ такве да је*

$$c_1\|\varphi\|_*\le B\le c_2\|\varphi\|_*.$$

Пресликавање диска $\mathbb{D}$ на полураван $\mathbb{H}^+$ задато са

$$z(\omega)=i\frac{1-\omega}{1+\omega}$$

је конформно.

За $\theta \neq \pi$ узмимо $\omega = e^{i\theta}$ и $t(\theta) = z(\omega)$. Тада је

$$t(\theta) = i\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \frac{\dfrac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{2i}}{\dfrac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \quad \text{и} \quad \theta = 2\operatorname{arctg} t.$$

За $w_0 = re^{i\theta_0}$ и $z_0 = i\frac{1-\omega_0}{1+\omega_0}$ је

$$\frac{1}{2\pi}P_{w_0}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta_0-\theta)}\,d\theta = \frac{1}{\pi}P_{z_0}(t)\,dt.$$

Отуда ако $\psi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $\varphi(\theta) = \psi \circ t(\theta)$, тада претходна разматрања омогућују закључак да је $\psi \in BMO(\mathbb{R})$ ако и само ако је $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$. Видимо и да је у том случају

$$c_1\|\psi\|_* \leq \|\varphi\|_* \leq c_2\|\psi\|_*, \tag{2.5}$$

за неке апсолутне константе c_1 и c_2.

Тако имамо следећу последицу:

***Последица* 2.4.** *Конформним пресликавањем*

$$z = i\frac{1-\omega}{1+\omega}, \quad |\omega| < 1,$$

$BMO(\mathbb{R})$ и $BMO(\mathbb{T})$ се сликају једно у друго и при том су норме контролисане везом (2.5).

***Последица* 2.5.** *Нека је $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ и τ Мебијусова трансформација. Тада је $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ ако и само ако је $\varphi \circ \tau \in BMO(\mathbb{T})$. Постоји апсолутна константа независна од τ за коју је*

$$\|\varphi \circ \tau\|_* \leq C\|\varphi\|_*.$$

Штавише, за неке c_1 и c_2 је

$$c_1\|\varphi\|_* \leq \sup_{\tau}\int |\varphi\circ\tau - \varphi\circ\tau(0)|\,\frac{d\theta}{2\pi} \leq c_2\|\varphi\|_*, \tag{2.6}$$

где је

$$\varphi\circ\tau(0) = \frac{1}{2\pi}\int \varphi\circ\tau\,d\theta.$$

Доказ. Видели смо да је са

$$\|\varphi\|_*' = \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{1}{2\pi}\int |\varphi - \varphi(z)|P_z(\theta)\,d\theta$$

дата једна еквивалентна норма на $BMO(\mathbb{T})$. Приметимо да за сваку Мебијусову трансформацију τ важи

$$\|\varphi\circ\tau\|_*' = \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{1}{2\pi}\int |\varphi\circ\tau - \varphi\circ\tau(z)|P_z(\theta)\,d\theta = \sup_{\omega\in\mathbb{D}}\frac{1}{2\pi}\int |\varphi(\alpha) - \varphi(\omega)|\,d\alpha,$$

где користимо да је за $\tau(\theta) = \omega$,

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \theta_0)} = P_{z_0}(\theta),$$

ако је

$$\tau(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}.$$

Истим резоновањем добијамо и

$$\|\varphi\|'_* = \sup_\tau \int |\varphi \circ \tau - \varphi \circ \tau(0)| \frac{d\theta}{2\pi},$$

па отуда и релација (2.6). □

Теорема 2.6. *Ако $\varphi \in L^\infty$, тада конјугована функција $\widetilde{\varphi}$ припада BMO и за неку универзалну константу C важи*

$$\|\widetilde{\varphi}\|_* \leq C\|\varphi\|_\infty.$$

Доказ. Доказаћемо теорему у случају кружнице. Са τ означимо произвољну Мебијусову трансформацију, при чему услов за нормализацију у дефиницији конјугата значи:

$$\widetilde{\varphi \circ \tau} = \widetilde{\varphi} \circ \tau - \widetilde{\varphi}(\tau(0)).$$

Сада једноставне примене Хелдерове неједнакости и Парсервалове теореме дају

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int |\widetilde{\varphi} \circ \tau(\theta) - \widetilde{\varphi}(\tau(0))|\, d\theta &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int |\widetilde{\varphi} \circ \tau(\theta) - \widetilde{\varphi}(\tau(0))|^2\, d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int |\widetilde{\varphi} \circ \tau|^2\, d\theta \right)^{1/2} \leq \|\varphi \circ \tau\|_\infty = \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Тако из (2.6) имамо $\|\widetilde{\varphi}\|_* \leq C\|\varphi\|_\infty$. □

2.2 Џон-Ниренбергова теорема

Сада ћемо формулисати и доказати Џон-Ниренбергову теорему у којој ћемо искористити једну чувену технику познату као *stopping time argument*, а као последицу добити неочекиван обрат Хелдерове неједнакости. На тај начин објаснићемо смисао типичности $\log|t|$ као неограничене BMO функције и добити неке еквивалентне норме на $BMO(\mathbb{R})$, односно $BMO(\mathbb{T})$.

Теорема 2.7 (Џон-Ниренбергова теорема)***.*** *Нека је $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ и нека је I лук на $\mathbb{T}$. Тада за свако $\lambda > 0$, важи*

$$\frac{|\{\theta \in I : |\varphi(\theta) - \varphi_I| > \lambda\}|}{|I|} \leq C \exp\left(-\frac{c\lambda}{\|\varphi\|_*} \right). \tag{2.7}$$

При том константе C и c не зависе од φ и λ.

Приметимо да (2.7) каже да је расподела функције φ „слабија” од расподеле логаритамске функције. Ово је образложење типичности $\log|t|$ као неограничене BMO функције.

Пре доказа ове теореме, наведимо и докажимо лему коју ћемо користити у доказу и која је и сама за себе значајна.

***Лема* 2.8** (Калдерон-Зигмундова лема). *Нека је I лук, $u \in L^1(I)$ и*

$$\alpha > \frac{1}{|I|}\int_I |u(\theta)|\,d\theta.$$

Тада постоји коначан или бесконачан низ $\{I_j\}$ међусобно дисјунктних у паровима, отворених подлукова лука I таквих да је

1. $|u| \le \alpha$ *скоро свуда на* $I \setminus \bigcup I_j$,
2. $\alpha \le \dfrac{1}{|I_j|}\displaystyle\int_{I_j} |u|\,d\theta < 2\alpha$,
3. $\sum |I_j| \le \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_I |u|\,d\theta$.

Доказ леме. За сваки лук ω постоје две могућности:

$$\frac{1}{|\omega|}\int_\omega |u|\,d\theta < \alpha, \tag{$\spadesuit$}$$

$$\frac{1}{|\omega|}\int_\omega |u|\,d\theta \ge \alpha. \tag{$\diamondsuit$}$$

Прва могућност важи за почетни лук, према претпоставци леме. Лукове $\{I_j\}$ ћемо конструисати индуктивно. У случају да за лук ω важи ($\spadesuit$) поделимо га на два дисјунктна отворена лука ω_1 и ω_2 дужине $|\omega|/2$. У случају да за неки од ових лукова важи ($\diamondsuit$), додајмо га у низ $\{I_j\}$, а онда овај процес поновимо. Како ниједан од лукова у $\{I_j\}$ није дељен, одабрани лукови су међусобно дисјунктни.

Ако $x \in I \setminus \bigcup I_j$, тада сваки лук који садржи x испуњава ($\spadesuit$). Теорема Лебега о диференцирању тада даје $|u(x)| \le \alpha$ за скоро свако $x \in I \setminus \bigcup I_j$, па је први део леме доказан.

Сваки одабрани лук I_j садржан је у луку I_j^* за који је $|I_j^*| = 2|I_j|$, и такав лук је јединствен. Како већи лук не припада низу $\{I_j\}$, за њега важи ($\spadesuit$). Отуда имамо

$$\alpha > \frac{1}{|I_j^*|}\int_{I_j^*} |u|\,d\theta \ge \frac{1}{2|I_j|}\int_{I_j} |u|\,d\theta,$$

па важи и други део леме.

Како су I_j у паровима дисјунктни лукови за које важи ($\diamondsuit$), то имамо

$$\sum |I_j| \le \sum \frac{1}{\alpha}\int_{I_j} |u|\,d\theta \le \frac{1}{\alpha}\int_I |u|\,d\theta,$$

па је испуњен и трећи део леме. $\square$

Доказ теореме. Због хомогености израза (2.7) није умањена општост претпоставком да је $\|\varphi\|_* = 1$. Фиксирајмо лук I и применимо Калдерон-Зигмундову лему на $u = |\varphi - \varphi_I|$ за $\alpha = 3/2$. На тај начин добијамо лукове $I_j^{(1)}$ такве да је $|\varphi - \varphi_I| \le 3/2$ скоро свуда на $I \setminus \bigcup I_j^{(1)}$, $|\varphi_{I_j^{(1)}} - \varphi_I| < 3$ и $\sum |I_j^{(1)}| \le 2/3 |I|$.

На сваком од лукова $I_j^{(1)}$ применимо поново лему 2.8 на $|\varphi - \varphi_{I_j^{(1)}}|$ за $\alpha = 3/2$. Добијамо лукове $I_{j,k}^{(2)}$ садржане у одговарајућим $I_j^{(1)}$. Тада је

$$|\varphi - \varphi_I| \le |\varphi - \varphi_{I_j^{(1)}}| + |\varphi_{I_j^{(1)}} - \varphi_I| \le \frac{3}{2} + 3 < 6$$

скоро свуда на $I \setminus \bigcup I_{j,k}^{(2)}$. Такође

$$|\varphi_{I_{j,k}^{(2)}} - \varphi_I| \le |\varphi_{I_{j,k}^{(2)}} - \varphi_{I_j^{(1)}}| + |\varphi_{I_j^{(1)}} - \varphi_I| < 3 + 3 = 6,$$

и

$$\sum_{j,k} |I_{j,k}^{(2)}| \le \frac{2}{3} \sum_j |I_j^{(1)}| \le \left(\frac{2}{3}\right)^2 |I|.$$

Настављамо овај процес *ad infinitum.* У n-том кораку добијамо колекцију лукова $\{I_j^{(n)}\}$ за које је $|\varphi - \varphi_I| < 3n$ скоро свуда на $I \setminus \bigcup I_j^{(n)}$ и

$$\sum |I_j^{(n)}| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n |I|.$$

Ако је $3N < \lambda \le 3N + 3$, $N \ge 1$, тада је

$$|\{\theta \in I : |\varphi(\theta) - \varphi_I| > \lambda\}| \le \sum |I_j^{(N)}| \le \left(\frac{2}{3}\right)^N |I| \le e^{-c\lambda}|I|,$$

за $c = \frac{1}{6} \log \frac{3}{2}$, па (2.7) важи за $\lambda > 3$.

За $0 < \lambda \le 3$ је

$$|\{\theta \in I : |\varphi(\theta) - \varphi_I| > \lambda\}| \le |I| \le e^{3c} e^{-c\lambda}|I|,$$

па узимајући $C = e^{3c}$ добијамо закључак теореме. $\square$

Сада следе обећане последице ове теореме које ће проширити наше видике о BMO функцијама.

Последица 2.9. *Нека $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Ако је*

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| \frac{d\theta}{2\pi} = \|\varphi\|_* < +\infty,$$

тада за свако $p > 1$ важи

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \le C_p \|\varphi\|_*,$$

где константа C_p зависи само од p.

Доказ. Према претпоставци, $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ и важи Џон-Ниренбергова теорема. За лук I, означимо са

$$m(\lambda) = \frac{1}{|I|}\left|\{\theta \in I : |\varphi(\theta) - \varphi_I| > \lambda\}\right|$$

функцију расподеле $|\varphi - \varphi_I|$. Тада је

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi - \varphi_I|^p \,\frac{d\theta}{2\pi} = p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} m(\lambda)\, d\lambda,$$

па (2.7) даје

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\varphi - \varphi_I|^p \,\frac{d\theta}{2\pi} \le C_p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \exp\frac{-c\lambda}{\|\varphi\|_*}\, d\lambda = C_p\Gamma(p)\frac{\|\varphi\|_*^p}{c^p}. \qquad \square$$

Последица 2.10. *Нека $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Тада $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ ако и само ако*

$$\sup_{re^{i\theta}=z\in\mathbb{D}} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi - \varphi(z)|^2 P_r(\theta - t)\,\frac{dt}{2\pi} = B_2 < +\infty,$$

где је

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi(t)\, dt.$$

При том постоје $c_1, c_2 > 0$ такве да је

$$c_1\|\varphi\|_* \le B_2^{1/2} \le c_2\|\varphi\|_*. \qquad (2.8)$$

Почетак доказа. Теорема 2.3 и Хелдерова неједнакост дају

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi - \varphi(z)|^2 P_r(\theta - t)\,\frac{dt}{2\pi}\right)^{1/2} \ge \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi - \varphi(z)| P_r(\theta - t)\,\frac{dt}{2\pi},$$

па је

$$B_2^{1/2} \ge \sup_{z\in\mathbb{D}} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi - \varphi(z)| P_r(\theta - t)\,\frac{dt}{2\pi} \ge c_1'\|\varphi\|_*$$

па $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ и важи лева неједнакост у (2.8). $\square$

За другу неједнакост, која је нешто тежа за доказивање, приметимо да важе следеће две леме.

Лема 2.11. *За $z \in \mathbb{D}$ и φ реално вредносну, важи:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - \varphi(z)|^2 P_r(\theta - t)\, dt = \frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{[-\pi,\pi]^2} (\varphi(t) - \varphi(s))^2\, \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2}\frac{1 - |z|^2}{|z - e^{is}|^2}\, dt\, ds.$$

Доказ. Развијањем десне стране добијамо

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi(t)\big)^2 \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2}\, dt - \frac{4\pi}{8\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2}\, dt\right)^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi(t)\big)^2 P_r(\theta - t)\, dt - \big(\varphi(z)\big)^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi(t) - \varphi(z)\big)^2 P_r(\theta - t)\, dt. \qquad \square
\end{aligned}$$

***Лема* 2.12.** *Нека је $\varphi(t)$ позитивна функција. Тада постоји константа $C > 0$ таква да је*

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) f(t)\,dt \le C \int_0^{+\infty} \frac{(1-r)s^2}{\left((1-r)^2+s^2\right)^2} \left(\frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f(t)\,dt\right) ds.$$

Доказ. Јасно

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} = \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}},$$

па је

$$P_r(t) \le k\frac{1-r}{(1-r)^2+t^2},$$

за неку константу $k > 0$ и $0 \le r < 1$, $-\pi \le t \le \pi$.

Тада је:

$$\int_0^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}\big(f(t)+f(-t)\big)\,dt$$
$$\le k\int_0^{\pi} \frac{1-r}{(1-r)^2+t^2}\big(f(t)+f(-t)\big)\,dt \le k\int_0^{+\infty} \frac{1-r}{(1-r)^2+t^2}\big(f(t)+f(-t)\big)\,dt.$$

Последњи интеграл је, међутим, једнак

$$\begin{aligned} &k\int_0^{+\infty} \big(f(t)+f(-t)\big)\int_t^{+\infty} \frac{2(1-r)s}{\left((1-r)^2+s^2\right)^2}\,ds\,dt \\ &= k\int_0^{+\infty} \frac{2(1-r)s}{\left((1-r)^2+s^2\right)^2}\int_0^{s} \big(f(t)+f(-t)\big)\,dt\,ds \\ &= 4k\int_0^{+\infty} \frac{(1-r)^2 s^2}{\left((1-r)^2+s^2\right)^2}\left(\frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f(t)\,dt\right) ds. \end{aligned}$$ □

Сада смо у могућности да наставимо доказ последице 2.10, и то најпре у случају реално-вредносне φ, из чега јасно следи и општи случај раздвајањем реалног и имагинарног дела.

Наставак доказа последице 2.10. Наиме, како је

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi(t)-\varphi(r)\big)^2 P_r(\theta-t)\,dt \\ &= \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)P_r(\theta-s)\big(\varphi(s)-\varphi(t)\big)^2\,ds\,dt \end{aligned}$$

и $\big(\varphi(s)-\varphi(t)\big)^2 \ge 0$, то се у процени може искористити лема 2.12:

$$K(r) \le C^2 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{us^2}{(u^2+s^2)^2}\frac{ut^2}{(u^2+t^2)^2}\left(\frac{1}{4st}\int_{-s}^{s}\int_{-t}^{t}\big(\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)\big)^2\,d\sigma\,d\tau\right) ds\,dt,$$

где је $u = 1-r$ и C константа из леме 2.12.

Даље је,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2s}\frac{1}{2t}\int_{-s}^{s}\int_{-t}^{t}\big(\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)\big)^2\,d\sigma\,d\tau\right)^{1/2}\\
\le&\left(\frac{1}{2s}\frac{1}{2t}\int_{-s}^{s}\int_{-t}^{t}\big(\varphi(\sigma)-\varphi_I\big)^2\,d\sigma\,d\tau\right)^{1/2}+\left(\frac{1}{2s}\frac{1}{2t}\int_{-s}^{s}\int_{-t}^{t}\big(\varphi(\tau)-\varphi_J\big)^2\,d\sigma\,d\tau\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\frac{1}{2s}\frac{1}{2t}\int_{-s}^{s}\int_{-t}^{t}\big(\varphi_I-\varphi_J\big)^2\,d\sigma\,d\tau\right)^{1/2}\\
=&\left(\frac{1}{2s}\int_{-s}^{s}\big(\varphi(\sigma)-\varphi_I\big)^2\,d\sigma\right)^{1/2}+\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\big(\varphi(\tau)-\varphi_J\big)^2\,d\tau\right)^{1/2}+|\varphi_I-\varphi_J|,
\end{aligned}
$$

где је $I=[-s,s]$, $J=[-t,t]$, а φ_I, φ_J су просечне вредности функције φ на I и J. Према последици 2.9, имамо да је горњи израз мањи или једнак

$$2\sqrt{c_1}\|\varphi\|_*+|\varphi_I-\varphi_J|,$$

док је

$$|\varphi_I-\varphi_J|\le\left(c\log\frac{|J|}{|I|}+2\right)\|\varphi\|_*,$$

према леми 2.1. Тако, за $s,t>0$, имамо

$$\left(\frac{1}{4st}\int_{-s}^{s}\int_{-t}^{t}\big(\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)\big)^2\,d\sigma\,d\tau\right)^{1/2}\le 2\sqrt{c_1}\|\varphi\|_*+\left(c\log\frac{s}{t}+2\right)\|\varphi\|_*.$$

Посматрање $K(r)$ оправдавамо чињеницом да су $\varphi(x)$ и $\varphi_h(x)=\varphi(x-h)$ једнаке BMO-норме, па смо стога узели $z=r$, $0\le r<1$.

Сада је

$$K(r)\le c'\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{u^2s^2t^2\|\varphi\|_*^2\left(1+\log^2\frac{s}{t}\right)}{\big(u^2+s^2\big)^2\big(u^2+t^2\big)^2}\,ds\,dt,$$

за неку константу $c'>0$ и $u=1-r$.

Увођење смене променљивих $\frac{s}{u}=x$, $\frac{t}{u}=y$ даје за претходни интеграл

$$
\begin{aligned}
&c'\|\varphi\|_*^2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^2y^2\big(1+(\log x-\log y)^2\big)}{\big(1+x^2\big)^2\big(1+y^2\big)^2}\,dx\,dy\\
\le\ &c'\|\varphi\|_*^2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^2y^2\big(1+2\log^2 x+2\log^2 y\big)}{\big(1+x^2\big)^2\big(1+y^2\big)^2}\,dx\,dy,
\end{aligned}
$$

па како последњи интеграл конвергира, имамо жељени закључак за реалне функције φ.

Ако је $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$, тада је

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)-\varphi(z)|^2P_r(\theta-t)\,dt&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_1(t)-\varphi_1(z)|^2P_r(\theta-t)\,dt\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_2(t)-\varphi_2(z)|^2P_r(\theta-t)\,dt\\
&\le c_2\|\varphi_1\|_*+c_2\|\varphi_2\|_*\le 2c_2\|\varphi\|_*,
\end{aligned}
$$

чиме смо доказали последицу 2.10. □

Дефиниција 2.3. Норма

$$B(\varphi)=\sup_{re^{i\theta}=z\in\mathbb{D}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)-\varphi(z)|^2P_r(\theta-t)\,dt\right)^{1/2},$$

еквивалентна BMO-норми, назива се Гарсијином нормом.

Наравно, доказана еквивалентност норми важи и у полуравни.

Последица 2.13. *Ако $\varphi\in BMO$, тада конјугована функција $\widetilde{\varphi}\in BMO$ и за неке константе $c_1,c_2>0$ важи*

$$c_1\|\varphi\|_*\le\|\widetilde{\varphi}\|_*\le c_2\|\varphi\|_*.$$

Доказ. Довољно је доказати да је $B(\varphi)=B(\widetilde{\varphi})$, па тврђење следи из последице 2.10.

Из једноставне релације $(\varphi+i\widetilde{\varphi})^2=\varphi^2-\widetilde{\varphi}^2+2i\varphi\widetilde{\varphi}$ имамо хармоничност функције

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\varphi(t)\,dt\right)^2-\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\widetilde{\varphi}(t)\,dt\right)^2$$

за $z=re^{i\theta}$, $0\le r<1$. Како $\varphi+i\widetilde{\varphi}\in H^p(\mathbb{D})$ за свако $p>1$ и $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$, хармонијска функција

$$((P_r*\varphi)(t))^2-((P_r*\widetilde{\varphi})(t))^2$$

може се реконструисати из граничних вредности функције $\varphi^2-\widetilde{\varphi}^2$ Пуасоновом формулом, тј.

$$((P_r*\varphi)(t))^2-((P_r*\widetilde{\varphi})(t))^2=\big(P_r*(\varphi^2-\widetilde{\varphi}^2)\big)(t)=\big(P_r*\varphi^2\big)(t)-\big(P_r*\widetilde{\varphi}^2\big)(t),$$

па тако имамо идентитет

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\widetilde{\varphi}^2(t)\,dt-\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\widetilde{\varphi}(t)\,dt\right)^2\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\varphi^2(t)\,dt-\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\varphi(t)\,dt\right)^2,\end{aligned}$$

па је $B(\varphi)=B(\widetilde{\varphi})$, што повлачи ову једнакост и за све $\varphi\in BMO(\mathbb{T})$, због густине $L^\infty(\mathbb{T})$ у $BMO(\mathbb{T})$ (ово се једноставно доказује). $\square$

Ова страна је намерно остављена празна.

Глава 3

Неки интегрални идентитети и Карлесонове мере

Нека је $g(e^{i\theta})$ интеграбилна функција на $\mathbb{T}$ и $g(z)$ њено хармонијско проширење на диск $\mathbb{D}$. Са $\nabla g(z)$ означимо градијент $g(z)$ тј. комплексни вектор $\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$, а квадрат његове дужине са

$$|\nabla g(z)|^2 = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|^2.$$

За аналитичку функцију $g(z)$ је

$$\begin{aligned}|\nabla g(z)|^2 &= \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 \\ &= \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + \left|-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 = 2\left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 = 2|g'(z)|^2.\end{aligned}$$

3.1 Последице Гринове теореме

Ако је Ω област у равни са глатком границом и $u(z), v(z)$ функције из $C^2(\overline{\Omega})$, тада Гринова теорема тврди следећу једнакост:

$$\iint_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds,$$

где је Δ Лапласијан, $\partial/\partial n$ извод у правцу спољашње нормале, а ds лучна дужина на $\partial\Omega$.

***Теорема* 3.1.** *Ако је $g(e^{i\theta}) \in L^1(\mathbb{T})$ и $g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})\, d\theta$, тада важи једнакост*

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta}) - g(0)|^2\, d\theta. \tag{3.1}$$

Доказ. Нека је $g(0) = 0$. Приметимо да је

$$\Delta(|g(z)|^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(g(z)\overline{g(z)}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(g(z)\overline{g(z)}\right) = 2\left(\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|^2\right) = 2|\nabla g(z)|^2.$$

За $r < 1$, применимо Гринову теорему на $u(z) = |g(z)|^2$ и $v(z) = \log \frac{r}{|z|}$:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{|z|<r} \left(\nabla\left(|g(z)|^2\right) \log \frac{r}{|z|} - |g(z)|^2 \nabla \log \frac{r}{|z|}\right) dx\, dy \\
&= -\int\limits_{|z|=r} |g(z)|^2 \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{r}{|z|}\, ds + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{|z|=\epsilon} \left(\log \frac{r}{|z|} \frac{\partial}{\partial n} |g(z)|^2 - |g(z)|^2 \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{r}{|z|}\right) ds \\
&= \int\limits_{|z|=r} \frac{|g(z)|^2}{r}\, ds - \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{|z|=\epsilon} \left(\frac{|g(z)|^2}{\epsilon} - \log \frac{r}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial |z|} |g(z)|^2\right) ds.
\end{aligned}$$

Како је $\log \frac{r}{|z|}$ хармонијска и $g(0) = 0$, а $\nabla g(z)$ ограничена у $|z| < 1/2$, то је

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{|z|=\epsilon} \left(\frac{|g(z)|^2}{\epsilon} - \log \frac{r}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial |z|} |g(z)|^2\right) ds = 0,$$

па имамо

$$2 \iint\limits_{|z|<r} |\nabla g(z)|^2 \log \frac{r}{|z|}\, dx\, dy = \int |g(re^{i\theta})|^2\, d\theta.$$

Коначно, преласком на лимес кад $r \to 1$, примена теореме о монотоној конвергенцији даје

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|^2\, d\theta. \qquad \square$$

Теорема 3.2. *За $g(e^{i\theta}) \in L^1(\mathbb{T})$ важи*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) dx\, dy &\le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta}) - g(0)|^2\, d\theta \\
&\le \frac{c}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) dx\, dy
\end{aligned} \tag{3.2}$$

за неку айсолуйну констинйу $c > 0$.

Доказ. Лева неједнакост следи из идентитета 3.1 и просте неједнакости

$$1 - |z|^2 \le 2 \log \frac{1}{|z|}, \quad \text{за } z \in \mathbb{D}.$$

Да би доказали другу неједнакост, претпоставимо да је $g(z)$ нормализована тако да важи

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) dx\, dy = 1.$$

За $|z| > 1/4$ и неку константу $c_1 > 0$ важи $\log |z|^{-1} \le c_1\left(1 - |z|^2\right)$, што даје

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{1/4<|z|<1} |\nabla g(z)|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \le \frac{c_1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) dx\, dy.$$

За $|z| \le 1/4$, користимо субхармоничност функције $|\nabla g(z)|^2$:

$$|\nabla g(z)|^2 \le \frac{16}{\pi} \iint\limits_{|\zeta - z| < 1/4} |\nabla g(\zeta)|^2 \, d\xi d\eta \le \frac{32}{\pi} \int\limits_{|\zeta| < 1/2} |\nabla g(\zeta)|^2 \big(1 - |\zeta|^2\big) \, d\xi \, d\eta \le 32,$$

где смо означили $\zeta = \xi + i\eta$. Отуда је

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z| < 1/4} |\nabla g(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} \, dx \, dy \le \frac{32}{\pi} \iint\limits_{|z| < 1/4} \log \frac{1}{|z|} \, dx \, dy = c_2.$$

Из (3.1) онда имамо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta}) - g(0)|^2 \, d\theta \le \frac{c_1 + c_2}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \big(1 - |z|^2\big) \, dx \, dy,$$

па (3.2) следи. □

Претходне две теореме ће нам бити касније од користи, с тим што (3.1) има предност што се може поларизовати. За израчунавање BMO користићемо и конформно инваријантне форме идентитета (3.1) и неједнакости (3.2).

За $z_0 \in \mathbb{D}$ и $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, сменом промењливе

$$z \mapsto \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

и из конформне инваријантности диференцијалне форме

$$|\nabla \varphi(z)| \, dx \, dy,$$

добијамо идентитет

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi - \varphi(z_0)|^2 P_{z_0}(\theta) \, d\theta = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\nabla \varphi(z)|^2 \log \left| \frac{1 - \overline{z_0} z}{z - z_0} \right| \, dx \, dy \tag{3.3}$$

одакле, коришћењем једнакости

$$1 - \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^2 = \frac{\big(1 - |z|^2\big)\big(1 - |z_0|^2\big)}{|1 - \overline{z_0} z|^2},$$

добијамо инваријантну верзију неједнакости (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\nabla \varphi(z)|^2 \frac{\big(1 - |z|^2\big)\big(1 - |z_0|^2\big)}{|1 - \overline{z_0} z|^2} \, dx \, dy &\le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi - \varphi(z_0)|^2 P_{z_0}(\theta) \, d\theta \\ \le \frac{c}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |\nabla \varphi(z)|^2 \frac{\big(1 - |z|^2\big)\big(1 - |z_0|^2\big)}{|1 - \overline{z_0} z|^2} \, dx \, dy. & \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2 Карлесонове мере

У последици 2.10 смо имали Гарсијину норму, еквивалентну BMO-норми, дату са

$$\sup_{z_0 \in \mathbb{D}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi - \varphi(z_0)|^2 P_{z_0}(\theta) \, d\theta \right)^{1/2},$$

па је двоструким интегралом у (3.4) дата још једна еквивалентна норма на BMO, наравно кад узмемо супремум по свим $z_0 \in \mathbb{D}$.

Дефиниција 3.1. Позитивна мера λ на $\mathbb{D}$ је Карлесонова мера ако постоји константа $M(\lambda)$ таква да је

$$\lambda(S) \leq M(\lambda)h \tag{3.5}$$

за сваки сектор

$$S = \{re^{i\theta} : 1-h \leq r < 1,\ |\theta - \theta_0| \leq h\}.$$

Карактер конформне инваријантности Карлесонових мера дат је следећом теоремом.

Теорема 3.3. *Позитивна мера λ на диску је Карлесонова ако и само ако је*

$$\sup_{z_0 \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2}\, d\lambda(z) = N < +\infty. \tag{3.6}$$

При том, за константу N у (3.6) *важи*

$$c_1 M(\lambda) \leq N \leq c_2 M(\lambda)$$

за неке апсолутне константе.

Доказ. Нека важи (3.6) и нека је

$$S = \{z \in \mathbb{D} : 1-h \leq r < 1,\ |\theta - \theta_0| < h\}$$

произвољан сектор. Како за $z_0 = 0$ имамо $\lambda(\mathbb{D}) \leq N$, можемо претпоставити да је $h < {}^1\!/\!{}_4$.

Узмимо $z_0 = (1 - {}^h\!/\!{}_2)e^{i\theta_0}$. Тада за $z \in S$ имамо

$$\frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2} \geq \frac{c}{1-|z_0|},$$

јер је

$$(1-|z_0|)\,\frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2} = \frac{h(4-h^2)}{8\left|e^{i\theta_0} - \left(1-\frac{h}{2}\right)\right|^2}$$

ограничено одоздо при услову $h < {}^1\!/\!{}_4$, па је, отуда

$$\lambda(S) \leq c_1(1-|z_0|)\int_{\mathbb{D}} \frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2}\, d\lambda \leq c_1(1-|z_0|)N = c_1 M\frac{h}{2}.$$

За обратну неједнакост, нека је λ Карлесонова мера и $z_0 \in \mathbb{D}$. Ако је $|z_0| < {}^3\!/\!{}_4$, имамо процену

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2}\, d\lambda(z) \leq c\lambda(\mathbb{D}) \leq c' M(\lambda).$$

јер је

$$\frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2}$$

ограничено одозго.

Ако је $|z_0| > 3/4$, ставимо

$$E_n = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| z - \frac{z_0}{|z_0|} \right| < 2^n(1-|z_0|) \right\}.$$

Тада услов карлесоновости мере λ даје

$$\lambda(E_n) \leq cM(\lambda)2^n(1-|z_0|), \quad \text{за } n = 1, 2, \dots$$

При том имамо и да је

$$\frac{(1-|z_0|)(1-|z_0|^2)}{|1-\overline{z_0}z|^2}$$

ограничено одозго на $\mathbb{D}$ јер $\frac{z_0}{|z_0|} \notin \mathbb{D}$, па се може применити принцип максимума модула, док за $E_n \setminus E_{n-1}$, $n \geq 2$, имамо

$$\begin{aligned}
&2^{n-1}(1-|z_0|) \leq \left| z - \frac{z_0}{|z_0|} \right| < 2^n(1-|z_0|) && \Longrightarrow \\
&\left| z - \frac{z_0}{|z_0|^2} + \frac{z_0}{|z_0|^2} - \frac{z_0}{|z_0|} \right| \geq 2^{n-1}(1-|z_0|) && \Longrightarrow \\
&\left| z - \frac{z_0}{|z_0|^2} \right| \geq \left| 2^{n-1}(1-|z_0|) - \frac{1}{|z_0|}(1-|z_0|) \right| && \Longrightarrow \\
&|\overline{z_0}z - 1| \geq |z_0|\,(1-|z_0|)\left| 2^{n-1}|z_0| - 1 \right|,
\end{aligned}$$

што даје

$$\frac{(1-|z_0|)\,(1-|z_0|^2)}{|1-\overline{z_0}z|^2} \leq \frac{(1-|z_0|)\,(1-|z_0|^2)}{|z_0|^2\,(1-2^{n-1}|z_0|)^2\,(1-|z_0|)^2} = \frac{1+|z_0|}{|z_0|^2\,(1-2^{n-1}|z_0|)^2}.$$

Како је

$$2^{n-1}(1-|z_0|) \leq \left| z - \frac{z_0}{|z_0|} \right| < 2,$$

то је

$$|z_0| \geq 1 - 2^{2-n} \quad \text{за } n \geq 3.$$

То даје

$$\frac{1+|z_0|}{|z_0|^2\,(1-2^{n-1}|z_0|)^2} \leq \frac{32}{9}\frac{1}{(2^{n-1}-1)^2} \leq \frac{c}{2^{2n}},$$

па имамо процене

$$\begin{aligned}
&\frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2} \leq \frac{c_1'}{1-|z_0|} && \text{на } E_1, \text{ и} \\
&\frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2} \leq \frac{c_1'}{2^{2n}(1-|z_0|)} && \text{на } E_n \setminus E_{n-1}.
\end{aligned}$$

Одавде је:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2}\, d\lambda(z) = \left(\int_{E_1} + \sum \int_{E_n \setminus E_{n-1}} \right) \frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2}\, d\lambda(z) \\
&\leq \frac{1}{1-|z_0|}\,(2c\,c_1' M(\lambda)(1-|z_0|)) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} c\, c_1' M(\lambda)(1-|z_0|) \leq c_2 M(\lambda),
\end{aligned}$$

што повлачи жељени закључак. □

Наведимо и још једну теорему чија ће нам помоћ бити неопходна у доказивању главног резултата.

Теорема 3.4. *Мера λ је Карлесонова ако и само ако је за свако $f \in L^p(\mathbb{D})$, $1 < p < +\infty$ испуњен услов*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\lambda \leq c_p \|f\|_p^p.$$

Ова еквиваленција такође важи и ако „$f \in L^p(\mathbb{D})$, $1 < p < +\infty$" заменимо са „$f \in H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < +\infty$".

Аналогно претходним разматрањима имамо и одговарајућу дефиницију и карактеризацију Карлесонових мера у полуравни.

Дефиниција 3.2. У горњој полуравни, Карлесонове мере дефинисане су условом да је

$$\lambda\left(\{x + iy \in \mathbb{H}^+ : x_0 \leq x \leq x_0 + h,\ 0 < y \leq h\}\right) \leq M(\lambda)h,$$

за свако h и за M које зависи само од λ.

Одговарајућа карактеризација је следећа:

Теорема 3.5. *Мера λ је Карлесонова ако и само ако је*

$$\sup_{z_0 \in \mathbb{H}^+} \int_{\mathbb{H}^+} \frac{y_0}{|z - \overline{z_0}|^2} \, d\lambda(z) = N < +\infty.$$

При том постоје апсолутне константе $c_1, c_2 > 0$ такве да је

$$c_1 M(\lambda) \leq N \leq c_2 M(\lambda)$$

за сваку Карлесонову меру λ у горњој полуравни.

Наредни резултат је круна досадашњег излагања о Карлесоновим мерама и BMO функцијама, јер их доводи у непосредну везу.

Теорема 3.6. *Нека је $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ и*

$$d\lambda_\varphi = |\nabla\varphi(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} \, dx \, dy,$$

где је $\nabla\varphi$ градијент Пуасоновог интеграла функције φ. Тада $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ ако и само ако је λ_φ Карлесонова мера. При том, постоје апсолутне константе $c_1, c_2 > 0$ такве да је

$$c_1\|\varphi\|_*^2 \leq M(\lambda_\varphi) \leq c_2\|\varphi\|_*^2.$$

Доказ. Из еквивалентности стандардне BMO и Гарсијине норме, као и неједнакости (3.4) којом прелазимо на двоструки интеграл по диску имамо да $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ ако и само ако је

$$\sup_{z_0 \in \mathbb{D}} \iint_{\mathbb{D}} |\nabla\varphi(z)|^2 \frac{(1 - |z|^2)\,(1 - |z_0|^2)}{|1 - \overline{z_0}z|^2} \, dx \, dy = N_1 < +\infty \tag{3.7}$$

и $N_1 \approx \|\varphi\|_*^2$.

Теорема 3.3 каже да услов (3.7) важи ако и само ако је

$$d\mu_\varphi = |\nabla\varphi(z)|^2(1-|z|^2)\,dx\,dy$$

Карлесонова мера и у том случају је $M(\mu_\varphi) \approx \|\varphi\|_*^2$.

Дакле, да би доказали теорему, довољно је да докажемо да је μ_φ Карлесонова мера ако и само ако је то и λ_φ, као и да је тад $M(\lambda_\varphi) \approx M(\mu_\varphi)$.

Један део је тривијалан, и следи из неједнакости

$$1-|z|^2 < 2\log\frac{1}{|z|}$$

због које је $\mu_\varphi \le 2\lambda_\varphi$.

За други део користимо стари трик; поделимо $\mathbb{D}$ на скуп на ком важи неједнакост обратна претходној, а на преосталом делу користимо субхармоничност функције $|\nabla\varphi(z)|^2$.

Заиста, за $|z| > 1/4$ имамо обратну неједнакост

$$\log\frac{1}{|z|} \le c\left(1-|z|^2\right),$$

одакле је

$$\lambda_\varphi(S) \le c\,\mu_\varphi(S)$$

за сваки сектор облика

$$S = \{z\in\mathbb{D} : 1-h \le r < 1,\ |\theta-\theta_0| \le h\}, \quad h \le 3/4.$$

Коначно, $M(\lambda_\varphi) \le cM(\mu_\varphi)$ ако покажемо да је

$$\lambda_\varphi\left(\{z\in\mathbb{D} : |z| < 1/4\}\right) \le c\mu_\varphi\left(\{z\in\mathbb{D} : |z| < 1/2\}\right) \le cM(\mu_\varphi).$$

Функција $|\nabla\varphi(z)|^2$ је субхармонијска, па је:

$$\begin{aligned}\lambda_\varphi\left(\{z\in\mathbb{D} : |z| < 1/4\}\right) &\le c\sup_{|z|<1/4}|\nabla\varphi(z)|^2\\ &\le \frac{32c}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1/2}|\nabla\varphi(\zeta)|^2\left(1-|\zeta|^2\right)d\xi\,d\eta\\ &\le c'\mu_\varphi\left(\{\zeta\in\mathbb{D} : |\zeta| < 1/2\}\right).\end{aligned}$$

Отуда и $M(\lambda_\varphi) \le cM(\mu_\varphi)$. □

Ова страна је намерно остављена празна.

Глава 4

Феферманова теорема дуалности

Посматраћемо H^1 као Банахов простор над пољем реалних бројева.

Сваки комплексни Банахов простор X можемо посматрати као реални Банахов простор. Међутим, комплексни линеарни функционали на X могу бити реконструисани из реалних линеарних функционала на X на једноставан начин. Ако је L реални функционал на X, тада

$$L_{\mathbb{C}}(x) = L(x) - iL(ix)$$

дефинише комплексни линеарни функционал, и при том је

$$L(x) = \operatorname{Re} L_{\mathbb{C}}(x).$$

Како је $\|L_{\mathbb{C}}\| = \sup\{\operatorname{Re} L_{\mathbb{C}}(x) : \|x\| = 1\}$, функционали L и $L_{\mathbb{C}}$ имају једнаке норме. Отуда је кореспонденција $L \mapsto L_{\mathbb{C}}$ реална линеарна изометрија простора непрекидних реалних функционала на X и комплексних линеарних функционала на X.

За $1 < p < +\infty$, H^p је, као реални Банахов простор, изоморфан са $L^p_{\mathbb{R}}$, простором реалних L^p функција. Теорема Марсела Риса (теорема 1.22) обезбеђује изоморфизам дефинисан са

$$L^p_{\mathbb{R}} \ni u \mapsto u + i\widetilde{u}.$$

Зато је сваки линеарни функционал на H^p дат са

$$L(u + i\widetilde{u}) = \int uv\,dt,$$

за јединствену $v \in L^1_{\mathbb{R}}$. Одговарајући комплексни линеарни функционал је

$$L_{\mathbb{C}}(u + i\widetilde{u}) = \int uv\,dt + i\int \widetilde{u}v\,dt.$$

Из

$$\int |u|^2\,dt = \int |\widetilde{u}|^2\,dt,$$

поларизацијом добијамо идентитете

$$\begin{aligned} \int \widetilde{u}v\,dt &= -\int u\widetilde{v}\,dt, \\ \int \widetilde{u}\widetilde{v}\,dt &= \int uv\,dt, \end{aligned} \tag{4.1}$$

који дају

$$L_{\mathbb{C}}(u+i\widetilde{u}) = \frac{1}{2}\int (u+i\widetilde{u})\,(v-i\widetilde{v})\;dt = \int (u+i\widetilde{u})\,g\,dt,$$

за $g = \frac{1}{2}(v - i\widetilde{v}) \in \overline{H}^q$.

Ово је био један начин да видимо релацију дуалности $(H^p)^* \simeq \overline{H}^q$.

Међутим, теорема Марсела Риса не важи за $p = 1$! Зато овај случај разматрамо нешто другачијим приступом, за који смо терен припремили у ранијим поглављима.

Као реалан Банахов простор, H^1 је изоморфан

$$H^1_{\mathbb{R}} = \{u \in L^1_{\mathbb{R}} : \widetilde{u} \in L^1_{\mathbb{R}}\},$$

при чему је на $H^1_{\mathbb{R}}$ дата графичка норма

$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_1 + \|\widetilde{u}\|_1.$$

Норма је изабрана тако да

$$H^1 \ni f \mapsto \operatorname{Re} f$$

буде изоморфизам H^1 на $H^1_{\mathbb{R}}$.

Пре него што коначно пређемо на централну тему овог рада, докажимо следећу лему.

Лема 4.1. *Нека је L непрекидни реални линеарни функционал на $H^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$. Тада постоје $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ такве да је*

$$\|\varphi_1\|_\infty \le \|L\|, \quad \|\varphi_2\|_\infty \le \|L\|$$

и

$$L(u) = \int (u\varphi_1 - \widetilde{u}\varphi_2)\;d\theta, \quad \text{за } u \in H^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}), \tag{4.2}$$

што такође даје и

$$L(u) = \int u(\varphi_1 + \widetilde{\varphi_2})\,d\theta, \quad \text{за } u \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}). \tag{4.3}$$

Штавише, постоји јединствена реална функција $\varphi \in BMO$ таква да је

$$\|\varphi\|_* \le C\|L\|$$

за неку апсолутну константу C и

$$L(u) = \int u\varphi\,d\theta, \tag{4.4}$$

за $u \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ и φ такво да је $\int \varphi\,d\theta = 0$.

Доказ. Простор $H^1_{\mathbb{R}}$ је затворен потпростор од $L^1_{\mathbb{R}} \oplus L^1_{\mathbb{R}}$, када се на последњем за норму узме $\|(u,v)\| = \|u\|_1 + \|v\|_1$. Проширимо L до ограниченог линеарног функционала Φ на $L^1_{\mathbb{R}} \oplus L^1_{\mathbb{R}}$ тако да буде $\|\Phi\| = \|L\|$.

Сада Φ има репрезентацију

$$\Phi(u,v) = \int (u\varphi_1 - v\varphi_2)\; d\theta,$$

где $(\varphi_1, \varphi_2) \in L^\infty_{\mathbb{R}} \oplus L^\infty_{\mathbb{R}}$, и

$$\|\Phi\| = \max\{\|\varphi_1\|_\infty, \|\varphi_2\|_\infty\},$$

због одабира норме на $L^1_{\mathbb{R}} \oplus L^1_{\mathbb{R}}$. Тако имамо, $\|\varphi_1\|_\infty \le \|L\|$, $\|\varphi_2\|_\infty \le \|L\|$ и (4.2) важи. Како је

$$\int \widetilde{u}\varphi_2\, d\theta = -\int u\widetilde{\varphi_2}\, d\theta,$$

за $u \in L^2_{\mathbb{R}}$ и $\varphi_2 \in L^\infty_{\mathbb{R}}$, имамо и (4.3), јер важи (4.1).

Према разматрањима о BMO функцијама, имамо да је $\varphi = \varphi_1 + \widetilde{\varphi_2}$ у BMO, а такође и $\|\varphi\|_* \le C\|L\|$.

Коначно, (4.4) је само преформулација израза (4.3) са $\varphi = \varphi_1 + \widetilde{\varphi_2}$.

Покажимо још и да је φ јединствено одређена са L. Нема сумње да је пар $(\varphi_1, \varphi_2) \in L^\infty_{\mathbb{R}} \oplus L^\infty_{\mathbb{R}}$ придружен функционалу L јединствен. Овај пар одређује нула функционал на $H^1_{\mathbb{R}}$ ако и само ако је

$$\int u(\varphi_1 + \widetilde{\varphi_2})\, d\theta = 0, \quad \text{за свако } u \in H^1_{\mathbb{R}}. \tag{4.5}$$

Како је разлика Пуасонових језгара за две различите тачке $z, z_0 \in \mathbb{D}$ у $H^1_{\mathbb{R}}$, (4.5) важи ако и само ако $\varphi = \varphi_1 + \widetilde{\varphi_2}$ има константан Пуасонов интеграл, тј. ако и само ако је $\varphi_1 + \widetilde{\varphi_2} = \text{const}$. Како константе имају нула BMO-норму, ово значи да је функционалом L одређена јединствена BMO функција φ таква да важи (4.4). □

Претходна лема важи и за $H^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^+)$ и $BMO(\mathbb{R})$, уз измену везану за функције на којим важи репрезентација (4.4). Наиме, интеграл у (4.4) је апсолутно конвергентан ако функције u узимамо из потпростора

$$\mathcal{A} = \left\{u \in H^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^+) : (1+t^2)|u + i\widetilde{u}| \in L^\infty\right\},$$

густог у $H^1_{\mathbb{R}}$ у графичкој норми.

Како оператор $H\varphi := \widetilde{\varphi}$ има својство $H^2 = -I$, добијамо да је $\varphi_1 + H\varphi_2$ константа ако и само ако је $\varphi_1 + i\varphi_2 \in H^\infty$. Ово даје следећи закључак – дуал од H^1 је L^∞ / H^∞.

Али, нећемо се задовољити дуалом у облику количничког простора, сада када имамо све услове за много прецизнији резултат. Коначно, формулишемо и доказујемо главни резултат досадашњих разматрања.

Теорема 4.2 (Фефферманова теорема дуалности)***.*** *Дуални простор простора $H^1_{\mathbb{R}}$ је BMO. Прецизније, ако је φ реално вредносна функција из $BMO(\mathbb{T})$ и L је дефинисан са*

$$L(u) = \int u\varphi\, d\theta, \quad u \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}), \tag{4.6}$$

тада је $|L(u)| \le C_1\|\varphi\|_*\|u\|_{H^1}$.

Обратно, ако је $L \in (H^1_{\mathbb{R}})^*$, тада постоји јединствена реална BMO функција φ таква да је $\|\varphi\|_* \le C\|L\|$ и важи (4.6).

Доказ. Према леми 4.1, сваки $L \in (H^1_{\mathbb{R}})^*$ одређује јединствену $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ такву да је $\|\varphi\|_* \leq C\|L\|$ и важи (4.6). Нетривијални део доказа јесте утврђивање неједнакости

$$\left|\int u\varphi\, d\theta\right| \leq C_1\|\varphi\|_*\|u + i\widetilde{u}\|_1, \tag{4.7}$$

кад год је $u \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ и $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$ са $\int \varphi\, d\theta = 0$.

Према последици 2.9 Џон-Ниренбергове неједнакости (2.7), $\varphi \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$. Зато (4.7) конвергира апсолутно.

Ставимо $f = u + i\widetilde{u}$. Тада $f \in H^1$ и

$$\int u\varphi\, d\theta = \mathrm{Re}\int f\varphi\, d\theta.$$

Предност рада са f уместо u је могућност претпоставке $f = g^2$, $g \in H^2(\mathbb{D})$, без умањивања општости. Наиме, ако ставимо $f = Bg$, где је B Блашкеов производ, а $h \in H^1$ функција која нема нула у $\mathbb{D}$, и $\|f\|_1 = \|h\|_1$, и запишемо $f_1 = (B-1)h$ и $f_2 = (B+1)h$, тада $\|f_1\|_1 \leq 2\|f\|_1$, $\|f_2\|_1 \leq 2\|f\|_1$ и $f = {}^1\!/\!_2(f_1+f_2)$, па како f_1 и f_2 немају нула у $\mathbb{D}$, обе су облика g^2, $g \in H^2$. Сада у процени $\int f\varphi\, d\theta$ можемо заменити f са f_1 или f_2. Зато, узмимо $f = g^2$, $g \in H^2$.

Такође, можемо узети и $\varphi(0) = 0$. Поларизацијом идентитета (3.1) претходног поглавља, добијамо

$$\int f\varphi\, d\theta = \int \big(f - f(0)\big)\varphi\, d\theta = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{D}} \nabla f \nabla\varphi \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy.$$

Како је $f(z)$ аналитичка, то имамо

$$\nabla f\nabla\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f'(z)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 2g(z)g'(z)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),$$

те је, стога,

$$|\nabla f\nabla\varphi| \leq 2|g'(z)||g(z)||\nabla\varphi(z)|.$$

Сада неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског даје

$$\left|\int f\varphi\, d\theta\right| \leq \frac{1}{2}\left(\iint_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy\right)^{1/2}\left(\iint_{\mathbb{D}} |g(z)|^2|\nabla\varphi(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy\right)^{1/2}.$$

Први чинилац, према (3.1), једнак је

$$\left(\frac{1}{4}\int |g(e^{i\theta}) - g(0)|^2\, d\theta\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\|f\|_1^{1/2}.$$

Како је за $\varphi \in BMO(\mathbb{T})$, $|\nabla\varphi(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy$ Карлесонова мера на диску, према теореми 3.6, за неку апсолутну константу $C > 0$ важи

$$\left(\iint_{\mathbb{D}} |g(z)|^2|\nabla\varphi(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy\right)^{1/2} \leq C\|\varphi\|_*\|f\|_1^{1/2},$$

што даје (4.7), па је доказ теореме завршен. □

Претходна теорема се може доказати и за $H^1_{\mathbb{R}}$ на полуравни и реални $BMO(\mathbb{R})$, узимајући функције u из простора $\mathcal{A}$. То се ради једноставним свођењем на претходну теорему.

Наиме, ако $u \in \mathcal{A}$ и $\varphi \in BMO(\mathbb{R})$, тада, за $e^{i\theta} = \frac{t-i}{t+i}$, $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\int u\varphi\, dt = \frac{1}{2}\int U(\theta)\phi(\theta)\, d\theta$$

где је $U(\theta) = (1+t^2)u(t) \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ и $\phi(\theta) = \varphi(t) \in BMO(\mathbb{T})$. Онда

$$\left(U + i\widetilde{U}\right)(e^{i\theta}) = (u + i\widetilde{u})\,(t)\frac{-4e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-i)^2} \in H^2$$

има средњу вредност нула, а отуда је и $\|U + i\widetilde{U}\|_1 = 2\|u + i\widetilde{u}\|_1$, па (4.7) повлачи аналогну неједнакост којом се доказује теорема у случају $H^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^+)$ и $BMO(\mathbb{R})$.

Следе неке последице ове теореме.

Комплексни линеарни функционал на H^1, одређен са $\varphi \in BMO$ према (4.6) је

$$L_{\mathbb{C}}(u + i\widetilde{u}) = \int (u + i\widetilde{u})\varphi\, dt,$$

јер је $\operatorname{Re} -i(u + i\widetilde{u}) = \widetilde{u}$.

Тако имамо реални изоморфизам између комплексног Банаховог простора $(H^1)^*$ и реалног простора реалних BMO функција. Како бисмо посматрали BMO као комплексни простор, изоморфан $(H^1)^*$, приметимо да је

$$iL_{\mathbb{C}}(u + i\widetilde{u}) = L_{\mathbb{C}}(-\widetilde{u} + iu) = \int (-\widetilde{u} + iu)\varphi\, dt.$$

Последњи интеграл је, према (4.1), једнак

$$\int (u + i\widetilde{u})\widetilde{\varphi}\, dt,$$

бар за $u \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, односно $u \in \mathcal{A}$.

Зато, ако множење са i дефинишемо на простору реалних BMO функција као

$$i\varphi := \widetilde{\varphi},$$

тада реални BMO постаје комплексни Банахов простор, изоморфан $(H^1)^*$, са комплексним линеарним изоморфизмом из ${L^\infty}/{H^\infty}$ у реални BMO датим са

$${L^\infty}/{H^\infty} \ni f \mapsto \operatorname{Re} f + \widetilde{\operatorname{Im} f}.$$

Наведени неуобичајени појам множења комплексним скаларом разлог је зашто су реални линеарни функционали на H^1 једноставнији за дискусију.

***Последица* 4.3.** *Ако $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ или $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, тада $\varphi \in BMO$ ако и само ако је*

$$\varphi = \varphi_1 + \widetilde{\varphi_2} + \alpha, \tag{4.8}$$

где је α константа и $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty$. Када имамо $\varphi \in BMO$, тада φ_1 и φ_2 можемо изабрати тако да је

$$\|\varphi_1\|_\infty \le C\|\varphi\|_*, \quad \|\varphi_2\|_\infty \le C\|\varphi\|_* \tag{4.9}$$

за неку константу $C > 0$.

Доказ. У првом поглављу смо доказали да $\|\widetilde{\varphi}\|_* \leq C_1\|\varphi\|_\infty$ за $\varphi \in L^\infty$, па је за сваку функцију облика (4.8):

$$\|\varphi\|_* \leq C\left(\|\varphi_1\|_\infty + \|\varphi_2\|_\infty\right). \tag{4.10}$$

С друге стране, ако $\varphi \in BMO$, према (4.6), $L(u) = \int u\varphi\, d\theta$, за $u \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, односно $u \in \mathcal{A}$, јесте ограничен функционал у односу на $\|u\|_{H^1}$. Зато, према леми 4.1, постоје $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty$ такве да је

$$L(u) = \int u(\varphi_1 + \widetilde{\varphi_2})\, d\theta.$$

Као што већ имамо у леми 4.1, ово даје константност Пуасоновог интеграла функције $\varphi - (\varphi_1 + \widetilde{\varphi_2})$. Отуда и (4.8) и (4.9). □

Из (4.9) и (4.10) такође имамо и еквивалентност $\|\cdot\|_*$ и норме дефинисане са

$$\inf\left\{\|\varphi_1\|_\infty + \|\varphi_2\|_\infty : \varphi = \varphi_1 + \widetilde{\varphi_2} + \alpha\right\}.$$

Прокоментаришимо сад начин на који смо дошли до основне теореме дуалности. Прво, искористили смо моћни *stopping time* аргумент да докажемо Калдерон-Зигмундову лему (лема 2.8), а потом и Џон-Ниренбергову неједнакост (теорема 2.7). Користећи ову неједнакост показали смо еквивалентност $\|\cdot\|_*$ и Гарсијине норме. Све ово заједно са карактеризацијом Карлесонових мера (теорема 3.3) и повезивањем BMO функција са истим помоћу интегралног идентитета (теорема 3.6), резултирало је на крају закључком о дуалности простора $H^1_{\mathbb{R}}$ и реалног BMO.

Овде ћемо демонстрирати и још један приступ заснован на елементарној примени Гринове формуле, одакле ћемо извући закључак, након пар резултата, да је $BMOA \subset (H^1)^*$ и $BMO \subset \mathrm{Re}(H^1)^*$. Дакле, овај метод избећи ће појам Карлесонових мера и резултата набројаних у претходном пасусу. Заједно са лемом 4.1, доћи ћемо до жељене дуалности.

Пре формулисања потребних помоћних теорема, подсетимо читаоца да је $f(z) \in BMOA$ ако је $f(z)$ аналитичка функција из $H^2(\mathbb{D})$ таква да је $B(f) < +\infty$ (ограничене $\|\cdot\|_*$ или, еквивалентно, Гарсијине норме).

Навешћемо и доказ еквивалентности стандардне BMO-норме и Гарсијине норме, који избегава коришћење тако јаког резултата какав је Џон-Ниренбергова неједнакост.

Глава 5

Учијамина лема и доказ Фефермановe и Гарсијине теореме

Кренућемо од следећег облика Гринове формуле

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} fP_{z,r}\,ds - f(z) = \iint\limits_{|z|<r} \Delta f g_{z,r}(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \tag{5.1}$$

за $\zeta = \xi + i\eta$ и

$$g_{z,r} = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{r - r^{-1}\overline{z}\zeta}{z-\zeta}\right|, \qquad P_{z,r}(\zeta) = \frac{1-|z|^2r^{-2}}{|1-\overline{z}\zeta r^{-2}|^2},$$

под претпоставком да $f \in C^2(\{z : |z| \le r\})$.

Приметимо да је

$$\lim_{r\to 1} g_{z,r}(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1-\overline{z}\zeta}{z-\zeta}\right|$$

и да $|P_{z,r}(\zeta) - P_z(\zeta)|$ равномерно по $\zeta \in \mathbb{T}$ тежи нули кад $r \to 1$.

Једноставном применом овог облика Гринове формуле добијамо следећу лему.

Лема 5.1. *За $f \in H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < +\infty$, $z \in \mathbb{D}$ важи идентитет*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f|^p P_z\,ds - |f(z)|^p = \iint_{\mathbb{D}} p^2|f'(\zeta)|^2|f(\zeta)|^{p-2}g_z(\zeta)\,d\xi\,d\eta. \tag{5.2}$$

За $1 < p < +\infty$ и $u \in L^p(\mathbb{T})$, хармонијско проширену на диск, и $z \in \mathbb{D}$ је испуњено

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |u|^p P_z\,ds - |u(z)|^p = p(p-1)\iint_{\mathbb{D}} |u(\zeta)|^{p-2}|\nabla u(\zeta)|^2 g_z(\zeta)\,d\xi\,d\eta. \tag{5.3}$$

Приметимо да за $p = 2$ имамо

$$\frac{1}{2\pi}\int |f - f(z)|^2 P_z\,ds = 4\iint_{\mathbb{D}} |f'(\zeta)|^2 g_z(\zeta)\,d\xi\,d\eta.$$

За $u = \operatorname{Re} f$ имамо $2|f'(\zeta)|^2 = |\nabla u|^2$, па видимо да важи

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f - f(z)|^2 P_z\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \big(u - u(z)\big)^2 P_z\,ds,$$

што повлачи

$$\big(B(f)\big)^2 = 2\big(B(u)\big)^2.$$

Иначе, идентитети (5.2) и (5.3) у литератури се наводе под именом Харди-Стејнови идентитети.

Доказ. Доказ. Ми ћемо овде доказати само идентитет (5.2), уз напомену да је метод доказивања (5.3) идентичан.

Применимо Гринову формулу са $(|f|^2+\epsilon)^{p/2}$ уместо f. Тада је лева страна једнакости (5.1) једнака

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\big(|f(rs)|^2+\epsilon\big)^{p/2}\frac{1-|z|^2r^{-2}}{|1-\overline{z}r^{-1}s|^2}\,ds-\big(|f(rz)|^2+\epsilon\big)^{p/2}.$$

Лапласијан од $\big(|f|^2+\epsilon\big)^{p/2}$ једнак је

$$\begin{aligned}\Delta\big(|f|^2+\epsilon\big)^{p/2} &= p\left(|f|^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}-1}\left(|f_x|^2+|f_y|^2\right)\\ &\quad+\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(|f|^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}-2}\left[\big(f_x\overline{f}+f\overline{f_x}\big)^2+\big(f_y\overline{f}+f\overline{f_y}\big)^2\right].\end{aligned}$$

Искористимо сада аналитичност функције $f(z)$. Имамо $f_x=f'(z)$, $f_y=if'(z)$, тако да је

$$|f_x|^2+|f_y|^2=2|f'(z)|^2 \quad \text{и} \quad \big(f_x\overline{f}+f\overline{f_x}\big)^2+\big(f_y\overline{f}+f\overline{f_y}\big)^2=4|f(z)|^2|f'(z)|^2.$$

Коначно:

$$\Delta\big(|f|^2+\epsilon\big)^{p/2}=2p\big(|f|^2+\epsilon\big)^{\frac{p}{2}-1}|f'(z)|^2+p(p-2)\big(|f|^2+\epsilon\big)^{\frac{p}{2}-2}.$$

Уврштавањем добијеног у Гринову формулу и преласком на граничну вредност кад $\epsilon\to 0$, а потом и $r\to 1$, добијамо идентитет (5.2). □

Следећи битан резултат је Учијамина лема, чији каснији деривати воде жељеном циљу.

Лема 5.2 (Учијамина лема)**.** *Ако је ϕ реална функција класе $C^2(\overline{\mathbb{D}})$ и f аналитичка у $\mathbb{D}$, тада важи*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|e^{\phi(e^{i\theta})}\,d\theta \ge \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}}\Delta\phi(\zeta)e^{\phi(\zeta)}|f(\zeta)|\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\xi\,d\eta.$$

Доказ. За ма коју $\psi\in C^2(\overline{\mathbb{D}})$ је

$$\Delta e^{\psi}=e^{\psi}\big(\Delta\psi+|\nabla\psi|^2\big)\ge e^{\psi}\Delta\psi.$$

Примењујући ово запажање на

$$\psi=\phi+\frac{1}{2}\log\big(|f|^2+\epsilon\big)$$

добијамо

$$\Delta\left(e^{\phi}\big(|f|^2+\epsilon\big)^{1/2}\right)\ge e^{\phi}\big(|f|^2+\epsilon\big)^{1/2}\Delta\phi,$$

јер важи $\frac{1}{2}\log\left(|f|^2+\epsilon\right)$, обзиром да је

$$\Delta\frac{1}{2}\log\left(|f|^2+\epsilon\right)=\frac{2\epsilon|f'|^2}{\left(|f|^2+\epsilon\right)^2}\geq 0.$$

Други начин да се ово види је субхармоничност функције $\log\left(|f|^2+\epsilon\right)$.

Примена Гринове формуле на $e^{\psi(\zeta)}$ и хармонијску функцију $\log\frac{1}{|\zeta|}$ даје:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\psi(e^{i\theta})}\,d\theta-e^{\psi(0)}=\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}}\Delta e^{\psi(\zeta)}\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\xi\,d\eta,$$

тј.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\phi(e^{i\theta})}\left(|f(e^{i\theta})|^2+\epsilon\right)^{1/2}d\theta-e^{\phi(0)}\left(|f(0)|^2+\epsilon\right)^{1/2}\\ =&\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}}\Delta\left(e^{\psi}\right)(\zeta)\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\xi\,d\eta\geq\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}}e^{\phi(\zeta)}\left(|f(\zeta)|^2+\epsilon\right)^{1/2}\Delta\phi(\zeta)\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\xi\,d\eta.\end{aligned}$$

Прелазећи на граничну вредност кад $\epsilon\to 0$ добијамо жељену неједнакост. □

Примењујући ову лему доказаћемо следеће помоћно тврђење које води доказу Книзове теореме, тј. жељеног дела теореме дуалности.

Лема 5.3. *Нека је $F\in BMOA$ и $h\in H^1$. Тада важи ӣроцена*

$$\frac{2}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}|F'(\zeta)|^2|h(\zeta)|\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\xi\,d\eta\leq e\|h\|_1B^2(F).\tag{5.4}$$

За $u\in BMO$, $h\in H^1$ важи

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}|u'(\zeta)||h(\zeta)|\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\xi\,d\eta\leq e\|h\|_1B^2(u).\tag{5.5}$$

Доказ. Доказаћемо само неједнакост (5.4), уз примедбу да се (5.5) доказује слично.

Функција

$$\phi=\frac{1}{B^2(F)}\left(|F|^2-\mathcal{P}\left(|F|^2\right)\right),$$

где смо са $\mathcal{P}\left(|F|^2\right)$ означили Пуасонов интеграл функције $|F|^2$, је непозитивна, ограничена одоздо са -1 и субхармонијска, јер је

$$\Delta\phi=\frac{4}{B^2(F)}|F'|^2\geq 0.$$

Добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(e^{i\theta})|\,d\theta&\geq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\phi(e^{i\theta})}|h(e^{i\theta})|\,d\theta\\&\geq\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}}e^{\phi(\zeta)}\frac{4}{B^2(F)}|F'(\zeta)|^2|h(\zeta)|\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\xi\,d\eta\\&\geq\frac{2}{\pi eB^2(F)}\iint_{\mathbb{D}}|F'(\zeta)|^2|h(\zeta)|\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\xi\,d\,\eta,\end{aligned}$$

што је еквивалентно неједнакости (5.4). □

Коначно, комплемент леме 4.1 до теореме дуалности – Книзова теорема.

***Теорема* 5.4** (Книзова теорема)**.** *Нека је* $F \in BMOA$, $F(0) = 0$, $h \in H^2$ *и* $h(0) = 0$. *Тада је*

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta}) h(e^{i\theta})\, d\theta \right| \leq 2\sqrt{e} B(F) \|h\|_1. \tag{5.6}$$

Доказ. Примена Гринове формуле даје

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta}) h(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{2}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} F'(\zeta) h'(\zeta) \log \frac{1}{|\zeta|}\, d\xi\, d\eta.$$

Примена неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског даје

$$\left| \frac{2}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} F'(\zeta) h'(\zeta) \log \frac{1}{|\zeta|}\, d\xi\, d\eta \right|$$
$$\leq \left(\frac{2}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |F'(\zeta)|^2 |h(\zeta)| \log \frac{1}{|\zeta|}\, d\xi\, d\eta \right)^{1/2} \left(\frac{2}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{|h'(\zeta)|^2}{|h(\zeta)|} \log \frac{1}{|\zeta|}\, d\xi\, d\eta \right)^{1/2}.$$

Први чинилац, према леми 5.3 је мањи или једнак $e\|h\|_1 B^2(F)$, а други је, према Харди-Стејновом идентитету за $p = 1$, једнак $4\|h\|_1$, кад узмемо $z = 0$ у (5.2).

Отуда и

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta}) h(e^{i\theta})\, d\theta \right| \leq 2\sqrt{e} \|h\|_1 B(F),$$

што смо и желели доказати. □

Узимање $h \in H^2(\mathbb{D})$ правдамо чињеницом да за $h \in H^1(\mathbb{D})$ интеграл у (5.6) не мора апсолутно конвергирати, што за $h \in H^2(\mathbb{D})$ јесте случај. Дакле, и овде се, слично „основном” доказу теореме дуалности, функционал задат на $H^2(\mathbb{D})$ проширује на $H^1(\mathbb{D})$, због густине $H^2(\mathbb{D})$ у $H^1(\mathbb{D})$.

Аналогно претходном, за $u \in BMO$, $h \in H^2$, важи

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta}) \operatorname{Re} h(e^{i\theta})\, d\theta \right| \leq \sqrt{2e} B(u) \|h\|_1.$$

И доказ је сличан, па га изостављамо.

Још један занимљив дериват претходних разматрања јесте еквивалентност Гарсијине и норме

$$C(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} |f(s) - f(z)| P_z(s)\, ds.$$

То је и садржај следеће теореме.

***Теорема* 5.5.** *Ако* $F \in BMOA$, *тада важе неједнакости*

$$C(F) \leq B(F) \leq 2\sqrt{e} C(F).$$

Доказ. Лева неједнакост је једноставна последица Коши-Шварцове неједнакости. Да докажемо десну, ставимо у Книзовој теореми уместо F и h, $F - F(0)$ и $\overline{F - F(0)}$ редом:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{i\theta}) - F(0)|^2\,d\theta \le 2\sqrt{e}B(F)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{i\theta}) - F(0)|\,d\theta.$$

Примењујући претходну неједнакост на $F \circ \sigma_z$, где је

$$\sigma_z(\zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \overline{z}\zeta},$$

и користећи конформну инваријантност Гарсијине норме добијамо

$$B(F) \le 2\sqrt{e}C(F)$$

за $F \in H(\overline{\mathbb{D}})$.

За F која није аналитичка на $\overline{\mathbb{D}}$, закључак добијамо применом претходне неједнакости на $F_r(\zeta) = F(r\zeta)$ и узимањем граничне вредности кад $r \to 1^-$. $\square$

У досадашњим разматрањима, видели смо да је $H^1_{\mathbb{R}}$ „мањи” простор од L^1, а онда очекивано и дуал од $H^1_{\mathbb{R}}$ јесте „већи” од L^∞ (наравно, посматрамо реално вредносне функције). Проширићемо дефиницију Хардијевог простора на $\mathbb{R}^d$, а потом доказати и нека специјална својства овог простора, која га чине, у том смислу, бољим од $L^1(\mathbb{R}^d)$. Помоћне резултате наводимо без доказа.

Ова страна је намерно остављена празна.

Глава 6

Хардијев простор $H^1_r(\mathbb{R}^d)$

Показује се да се Хардијев простор на диску или полуравни може окарактерисати као класа функција које се могу представити у облику извесног реда, чији су чланови скаларни умношци функција које називамо атомима. Таква карактеризација даје могућност проширења дефиниције на $\mathbb{R}^d$. Тачан смисао претходног дајемо у следећој дефиницији.

Дефиниција 6.1. Ограничена мерљива функција a на $\mathbb{R}^d$ је атом придружен лопти $B \subset \mathbb{R}^d$, ако

1. a има носач у B и $|a(x)| \leq \dfrac{1}{m(B)}$ за свако x,

2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} a(x)\,dx = 0.$

Приметимо да први услов гарантује да за сваки атом a имамо $\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq 1$.

Простор $H^1_r(\mathbb{R}^d)$ састоји се од свих L^1 функција f које се могу записати у облику

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k, \tag{6.1}$$

где су a_k атоми и λ_k скалари, такви да је

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < +\infty. \tag{6.2}$$

Захтев (6.2) осигурава конвергенцију у L^1-норми. Инфимум вредности $\sum|\lambda_k|$, узет по свим могућим декомпозицијама функције f у облику (6.1), дефинишемо као H^1_r-норму функције f, у ознаци $\|f\|_{H^1_r}$.

Наведимо и нека својства простора $H^1_r(\mathbb{R}^d)$:

- $H^1_r(\mathbb{R}^d)$ је Банахов простор.

- Ако је $f \in H^1_r$, тада $f \in L^1$ и $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{H^1_r}$. Очигледно, важи и $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = 0$. Наведени потребни услови нису и довољни.

- Без услова $\int_{\mathbb{R}^d} a\,dx = 0$ за атоме, суме облика (6.1) могу представљати произвољну L^1 функцију.

Наредно својство даје и „рецепт" за атомску декомпозицију једне класе функција, па ћемо га због тога, а и због специфичне технике доказа, издвојити. Пре тога, наведимо теорему коју ћемо користити.

***Теорема* 6.1.** *Максимална функција $\mathcal{M}(f)$ функције f, дефинисана као*

$$\mathcal{M}(f)(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(x)|\, dx,$$

где је супремум узет по свим отвореним лоптама B које садрже x, као оператор на $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p > 1$, је ограничена. Другим речима, за свако $p > 1$ постоји C_p које зависи само од p, тако да је

$$\|\mathcal{M}(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

***Теорема* 6.2.** *Претпоставимо да је $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p > 1$ и да f има компактан носач. Тада $H^1_r(\mathbb{R}^d)$ припада f ако и само ако је*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = 0.$$

Доказ. Приметимо да, као последицу Хелдерове неједнакости, имамо $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, па услов $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = 0$ једноставно следи због $\int_{\mathbb{R}^d} a_k(x)\, dx = 0$, и теореме о доминантној конвергенцији.

Да докажемо довољност услова, претпоставимо да је f са носачем у јединичној лопти и да је $\int_{B_1} |f(x)|\, dx \leq 1$. Ове нормализације могу бити постигнуте рескалирањем променљиве и множењем функције f одговарајућом константом. Посматраћемо једну верзију максималне функције f^*. Дефинишемо f^* на следећи начин:

$$f^*(x) = \sup \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy,$$

где супремум узимамо по свим лоптама полупречника $r \leq 1$ које садрже x.

При претпоставкама које имамо, важи

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)\, dx < +\infty. \tag{6.3}$$

Заиста, ако $x \notin B_3$, где је B_3 лопта истог центра као B_1, али полупречника 3, тада је $f^*(x) = 0$. Ово важи, јер ако $x \notin B_3$ и $x \in B$, где је полупречник лопте B мањи или једнак 1, тада B мора бити дисјунктна са B_1, која је носач f. Тако имамо:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)\, dx = \int_{B_3} f^*(x)\, dx \leq c \left(\int_{B_3} (f^*(x))^p\, dx \right)^{1/p},$$

према Хелдеровој неједнакости. Последњи интеграл је коначан, према теореми 6.1, из очигледне неједнакости $f^*(x) \leq \mathcal{M}(f)(x)$.

Сада, за свако $\alpha \geq 1$, посматрајмо основну декомпозицију f на „висини" α, вођену у односу на скуп $E_\alpha = \{x : f^*(x) > \alpha\}$. Ово је варијанта *Калдерон-Зигмудове декомпозиције.* Биће једноставније извести кораке за $d = 1$, што ћемо и прво урадити, а потом се вратити на општи случај.

Ова декомпозиција омогућава нам да запишемо $f = g + b$, где је

$$|g| \leq c\alpha, \tag{6.4}$$

за одговарајућу константу c, и где је b са носачем у E_α.

У ствари, како је, као што се лако види, скуп E_α отворен, можемо писати $E_\alpha = \bigcup I_j$, где су I_j дисјунктни отворени интервали, а ми ћемо моћи да конструишемо b тако да је $b = \sum b_j$, тако да је b_j са носачем на I_j и задовољава

$$\int b_j(x)\, dx = 0, \tag{6.5}$$

за свако j.

Основно запажање у овој конструкцији је

$$\frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} |f(x)|\, dx \leq \alpha, \tag{6.6}$$

за свако j. Онда када је $m(I_j) \geq 1$, неједнакост (6.6) тривијално следи из претпоставки $\int |f(x)|\, dx \leq 1$ и $\alpha \geq 1$. Иначе, узимајући $I_j = (x_1, x_2)$ видимо да (6.6) следи, јер $x_1 \notin E_\alpha$, па отуда и $f^*(x_1) \leq \alpha$, док је

$$f^*(x_1) \geq \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} |f(x)|\, dx.$$

Тако, ако је

$$m_j = \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(x)\, dx,$$

тада је $|m_j| \leq \alpha$. Како је

$$1 = \chi_{E_\alpha^c} + \sum_j \chi_{I_j},$$

можемо записати $f = g + b$ са

$$g = f\chi_{E_\alpha^c} + \sum_j m_j \chi_{I_j}$$

и

$$b = \sum_j (f - m_j)\chi_{I_j} = \sum_j b_j,$$

где су b_j дефинисане са $b_j = (f - m_j)\chi_{I_j}$. Приметимо да на E_α^c имамо $f^*(x) \leq \alpha$, тако да је $|f(x)| \leq \alpha$ за скоро свако x на овом скупу, према теореми Лебега о диференцирању. Како су интервали I_j дисјунктни, (6.6) гарантује (6.4), са $c = 1$. Захтев (6.5) је такође испуњен, јер је

$$\int b_j(x)\, dx = \int_{I_j} \big(f(x) - m_j\big)\, dx = m(I_j)(m_j - m_j) = 0.$$

Са декомпозицијом $f = g + b$ датом за свако α, можемо сада упоредо посматрати све декомпозиције овог облика за $\alpha = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Тако, за свако k, можемо писати $f = g^k + b^k$, са $|g^k| \leq c2^k$, $b^k = \sum_j b_j^k$, где је b_j^k са носачем у отвореним интервалима I_j^k, који су за фиксирано k дисјунктни, и штавише,

$$E_{2^k} = \{x : f^*(x) > 2^k\} = \bigcup_j I_j^k,$$

док је $\int b_j^k(x)\,dx = 0$.

Како је, сада, b^k са носачем у скупу E_{2^k}, и скупови E_{2^k} су опадајући са $m(E_{2^k}) \to 0$ кад $k \to \infty$, имамо да $b^k \to 0$ скоро свуда, кад $k \to \infty$. Тако је

$$f = \lim_{k\to\infty} g^k \quad \text{скоро свуда},$$

и

$$f = g^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(g^{k+1} - g^k\right).$$

Али,

$$g^{k+1} - g^k = b^k - b^{k+1} = \sum_j b_j^k - \sum_i b_i^{k+1} = \sum_j A_j^k,$$

где је

$$A_j^k = b_j^k - \sum_{I_i^{k+1} \subset I_j^k} b_i^{k+1}.$$

Последњи идентитет важи, јер је сваки I_i^{k+1} садржан у тачно једном I_j^k. Носачи A_j^k су у интервалима I_j^k, па је $\int A_j^k(x)\,dx = 0$, из својстава за b_j^k и b_i^{k+1}. Такође, како је

$$|g^{k+1} - g^k| \le c2^{k+1} + c2^k = 3c2^k,$$

и

$$g^{k+1} - g^k = b^k - b^{k+1},$$

дисјунктност интервала I_j^k даје $|A_j^k| \le 3c2^k$. Као резултат, видимо да ће сума

$$f = g^0 + \sum_{j,k} A_j^k \tag{6.7}$$

дати атомску декомпозицију f. У ствари, ставићемо

$$\begin{aligned} a_j^k &= \frac{1}{3c2^k m(I_j^k) A_j^k}, \\ \lambda_j^k &= 3c2^k m(I_j^k), \\ f &= g^0 + \sum_{j,k} \lambda_j^k a_j^k. \end{aligned}$$

Сада су a_j^k атоми на I_j^k, док је

$$\sum_{j,k} \lambda_j^k = 3c \sum_k 2^k \left(\sum_j m(I_j^k) \right) = 3c \sum_{k=0}^{\infty} 2^k m\left(\{x : f^*(x) > 2^k\}\right).$$

Функција $m\left(\{x : f^*(x) > \alpha\}\right)$ је опадајућа по α, па је

$$2^k m\left(\{x : f^*(x) > 2^k\}\right) \le 2 \int_{2^{k-1}}^{2^k} m\left(\{x : f^*(x) > \alpha\}\right) d\alpha,$$

одакле, сумирајући по k, налазимо да је $\sum_{k,j} \lambda_j^k < +\infty$, јер је

$$\int_0^{+\infty} m\left(\{x : f^*(x) > \alpha\}\right) d\alpha = \int_{\mathbb{R}} f^*(x)\, dx < +\infty,$$

што следи из теореме 6.1 и (6.3).

Коначно, g^0 је ограничена и има носач у B_3 и $\int g^0(x)\, dx = 0$ из својства анулирања f и A_j^k. Одатле је g^0 умножак атома, што даје да (6.7) јесте атомска декомпозиција f. □

Да би проширили овај резултат на $d \geq 2$, морамо модификовати горњи аргумент у следећем смислу – одговарајућа декомпозиција скупа $E_\alpha = \{x : f^*(x) > \alpha\}$ на коцке дисјунктних унутрашњости задовољаваће и додатни захтев, а то је да је растојање сваке коцке од E_α^{c} упоредиво са дијаметром коцке. Од помоћи је, такође, узимати дијадичне коцке.

Дијадичне коцке нулте генерације су затворене коцке ивице 1, чија темена имају целобројне координате. Дијадичне коцке k-те генерације су коцке облика $2^{-k}Q$, где су Q коцке нулте генерације.

Приметимо да половљењем ивица дијадичне коцке k-те генерације добијамо 2^d коцки $(k+1)$-ве генерације. Ако су Q_1 и Q_2 дијадичне, тада је или $Q_1 \subset Q_2$ или $Q_2 \subset Q_1$ или $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$.

Жељена декомпозиција отвореног скупа описана је следећом лемом.

Лема 6.3. *Нека је $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ непразан отворен скуп. Тада постоји највише пребројива колекција $\{Q_j\}$ дијадичних коцки са дисјунктним унутрашњостима таква да је $\Omega = \bigcup_j Q_j$, и*

$$\operatorname{diam}(Q_j) \leq d(Q_j, \Omega^{\mathsf{c}}) \leq 4 \operatorname{diam}(Q_j). \tag{6.8}$$

Доказ. Тврдимо да за сваку тачку $\bar{x} \in \Omega$ постоји нека дијадична коцка $Q_{\bar{x}}$ за коју важи (6.8). Нека је $\delta = d(\bar{x}, \Omega^{\mathsf{c}}) > 0$. Дијаметри дијадичних коцки пролазе скупом $\{\sqrt{d}2^{-k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Отуда можемо наћи дијадичну коцку $Q_{\bar{x}}$ која садржи $\bar{x}$, и

$$\frac{\delta}{4} \leq \operatorname{diam}(Q_{\bar{x}}) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Сада је

$$d(Q_{\bar{x}}, \Omega^{\mathsf{c}}) \leq \delta \leq 4 \operatorname{diam}(Q_{\bar{x}}),$$

како $\bar{x} \in Q_{\bar{x}}$. Такође,

$$d(Q_{\bar{x}}, \Omega^{\mathsf{c}}) \geq \delta - \operatorname{diam}(Q_{\bar{x}}) \geq \frac{\delta}{2} \geq \operatorname{diam}(Q_{\bar{x}}),$$

па је зато (6.8) доказана за $Q_{\bar{x}}$.

Нека је сада $\mathcal{Q}$ колекција свих коцки $Q_{\bar{x}}$, кад $\bar{x}$ пролази скупом Ω. Њихова унија јасно покрива Ω, али њихове унутрашњости нису дисјунктне. Да постигнемо дисјунктност, изаберимо из $\mathcal{Q}$ максималне коцке, тј. оне које нису садржане у другим у $\mathcal{Q}$. Јасно, према реченом, свака Q је садржана у максималној коцки, и максималне коцке морају имати дисјунктне унутрашњости. □

Доказ теореме 6.2 за $d \geq 2$. Уз помоћ доказане леме, можемо извести декомпозицију за $d \leq 2$. Аргумент је суштински исти, обратићемо више пажње само на измене. За $\alpha \geq 1$, применимо лему 6.3 на отворен скуп $E_\alpha = \{x : f^*(x) \geq \alpha\}$. Имамо декомпозицију $f = g + b$, са

$$g = f\chi_{E_\alpha^{\mathsf{c}}} + \sum_{j=1}^{\infty} m_j \chi_{Q_j},$$

и $b = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$, са $b_j = (f - m_j)\chi_{Q_j}$. Као у случају $d = 1$, видимо да је $|m_j| \leq c\alpha$. Заправо важи

$$\int_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq \int_B |f(x)|\, dx,$$

кад год је $Q_j \subset B$. Одаберимо B тако да садржи тачку $\bar{x} \in E_\alpha^{\mathsf{c}}$. Ово се може постићи узимањем лопте полупречника $5\operatorname{diam}(Q_j)$, јер је $d(Q, E_\alpha^{\mathsf{c}}) \leq 4\operatorname{diam}(Q_j)$. Ако узмемо такву лопту и она има полупречник $r \leq 1$ (тј. $\operatorname{diam}(Q_j) \leq {}^1\!/_5$), тада је

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(x)|\, dx \leq f^*(\bar{x}) \leq \alpha,$$

и отуда $|m_j| \leq c_1\alpha$, где је

$$c_1 = \frac{m(B)}{m(Q_j)}$$

и не зависи од . Иначе, за $\operatorname{diam}(Q_j) \geq {}^1\!/_5$, неједнакост $|m_j| \leq c_2\alpha$ је последица $\int |f(x)|\, dx \leq 1$ и $\alpha \geq 1$. Како год, $|m_j| \leq c\alpha$.

Како свака дијадична коцка која се појављује у декомпозицији скупа

$$E_{2^{k+1}} = \left\{x : f^*(x) > 2^{k+1}\right\}$$

мора бити садржана у некој дијадичној коцки која се појављује у декомпозицији $E_{2^k} = \{x : f^*(x) > 2^k\}$, настављајући као раније, добијамо

$$f = g^0 + \sum_{j,k} A_j^k,$$

где A_j^k имају носаче у Q_j^k и $E_{2^k} = \bigcup_j Q_j^k$.

Дакле, можемо записати $A_j^k = \lambda_j^k a_j^k$, где је $\lambda_j^k = c' 2^k m(Q_j^k)$ и a_j^k су атоми придружени лоптама B_j^k, где B_j^k дефинишемо као лопте описане око Q_j^k. Тада $m(B_j^k)/m(Q_j^k)$ зависи само од d. Коначно,

$$\sum_{j,k} 2^k m(Q_j^k) = \sum_k 2^k m\left(\{x : f^*(x) > 2^k\}\right) < +\infty,$$

па имамо жељену атомску декомпозицију. □

Брза последица претходне теореме омогућава алтернативне декомпозиције у $H^1_r(\mathbb{D})$.

Дефиниција 6.2. Мерљива функција a је p-атом, $p > 1$, придружен лопти B, ако

1. има носач у B и $\|a\|_{L^p} \leq m(B)^{-1+1/p}$,

2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} a(x)\,dx = 0.$

Раније дефинисани атоми су p-атоми за $p = +\infty$.

Последица 6.4. *Последица 4. Фиксирајмо* $p > 1$. *Тада је сваки* p*-атом у* H^1_r. *Штавише, постоји* $c_p > 0$ *које не зависи од* a*, такво да је*

$$\|a\|_{H^1_r} \leq c_p. \tag{6.9}$$

Доказ. Можемо рескалирати p-атом a, придружен лопти B полупречника r, замењујући a са

$$a_r(x) = r^d a(rx).$$

Тада је носач функције $a_r(x)$ у лопти полупречника 1, јер $x \in \frac{1}{r}B = B^r$. Такође, како је $m(B^r) = r^{-d}m(B)$ и $\|a_r\|_{L^p} = r^{d-d/p}\|a\|_{L^p}$, имамо да је $\|a_r\|_{L^p} \leq m(B^r)^{-1+1/p}$. Дакле, a_r је p-атом придружен јединичној лопти B^r. При том је, као што се из претходног да видети, $\|r^d f(rx)\|_{H^1_r} = \|f\|_{H^1_r}$ за свако $r > 0$. Зато је довољно доказати (6.9) за p-атоме чији је носач јединична лопта.

За овакве p-атоме имамо $\int |a(x)|\,dx \leq 1$. Сада смо у сличној позицији као у доказу теореме 6.2, а $\int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)\,dx$ је ограничен био са $cA_p\|f\|_{L^p}$. Замењујући $f = a$ добијамо жељени закључак. $\square$

Из претходне последице можемо да закључимо да, ако је $f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ са p-атомима a_k, и $\sum |\lambda_k| < +\infty$, тада је f у H^1_r и

$$\|f\|_{H^1_r} \leq c_p \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|.$$

Обратно, кад год $f \in H^1_r$, f има атомску декомпозицију у односу на како стандардне ($p = +\infty$), тако и p-атоме.

Дакле, заменом у (6.1) и (6.2) атома p-атомима, добијамо еквивалентну норму на H^1_r.

Ова страна је намерно остављена празна.

Глава 7

Простор BMO на $\mathbb{R}^d$ и дуалност

Поновићемо аналогну дефиницију, сада на простору $\mathbb{R}^d$.

Дефиниција 7.1. Локално интеграбилна функција f на $\mathbb{R}^d$ је ограничене средње осцилације ако је

$$\sup \frac{1}{m(B)} \int_B |f(x) - f_B|\, dx < +\infty \tag{7.1}$$

где је супремум узет по свим лоптама B. Овде f_B означава просечну вредност f на B, тј.

$$f_B = \frac{1}{m(B)} \int_B f(x)\, dx.$$

Уобичајена ознака за норму на $BMO(\mathbb{R}^d)$, дату левом страном неједнакости у (7.1), је $\|f\|_{BMO}$.

Слично као и за $BMO(\mathbb{R})$ и $BMO(\mathbb{T})$, уочимо следећа својства BMO функција на $\mathbb{R}^d$.

- Елементи норме нула су константне функције. Зато, строго говорећи, елементе $BMO(\mathbb{R}^d)$ посматрамо као класе функција посечених константама.

- Ако (7.1) важи са константама c_B, евентуално различитим од f_B, f ће и даље бити у BMO. Заиста, ако је за свако B,

  $$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(x) - c_B|\, dx \leq A,$$

  тада неопходно важи и, према основној интегралној неједнакости,

  $$|f_B - c_B| \leq A,$$

  а отуда и $\|f\|_{BMO} \leq 2A$..

- Са истим методом доказа као и за $BMO(\mathbb{T})$ имамо и $L^\infty \subset BMO$ и $\log|x| \in BMO \setminus L^\infty$.

- Важи и Џон-Ниренбергова неједнакост, са истом формулацијом и неким изменама у доказу.

- Простор реалних BMO функција чини мрежу, тј. ако $f, g \in BMO(\mathbb{R}^d)$, тада и $\min(f,g)$ и $\max(f,g)$ припадају $BMO(\mathbb{R}^d)$. Такође, $f \in BMO$ повлачи $|f| \in BMO$, јер је $||f| - |f_B|| \leq |f - f_B|$.

- Ако је f реално вредносна функција из $BMO(\mathbb{R}^d)$, означимо са $f^{(k)}(x)$ функцију дефинисану као

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} k, & f(x) > k, \\ f(x), & |f(x)| \leq k, \\ -k, & f(x) < -k. \end{cases}$$

  Тада је $\{f^{(k)}\}$ низ ограничених BMO функција за које је $|f^{(k)}(x)| \leq |f(x)|$ за свако k, и $f^{(k)} \to f$ за скоро свако x кад $k \to \infty$. Отуда $\|f^{(k)}\|_{BMO} \to \|f\|_{BMO}$ кад $k \to \infty$.

Наш фокус сада ће бити усмерен на кључну чињеницу да је $BMO(\mathbb{R}^d)$ дуални простор Хардијевог простора $H^1_r(\mathbb{R}^d)$. Ово значи да је сваки непрекидни линеарни функционал L на H^1_r дат са

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,dx, \quad f \in H^1_r, \tag{7.2}$$

за неки елемент $g \in BMO$, где је (7.2) одговарајуће интерпретиран. Интеграл на мора конвергирати за опште $f \in H^1_r$, $g \in BMO$, па дефинишемо L на густом потпростору од H^1_r, коначних линеарних комбинација атома, означеном са H^1_0. Наравно, сваки елемент H^1_0 је умножак атома, и тада за $f \in H^1_0$ интеграл конвергира, а $g \in BMO$ је одређена до на адитивну константу, јер је $\int f\,dx = 0$..

Дакле, важи кључна:

Теорема 7.1. *Нека је $g \in BMO$. Тада линеарни функционал L првобитно дефинисан са* (7.2) *и за $f \in H^1_0$ има јединствено проширење на H^1_r за које важи*

$$\|L\| \leq c\|g\|_{BMO}.$$

Обратно, сваки ограничен линеарни функционал L на H^1_r може бити записан у облику (7.2) *за неку $g \in BMO$, и важи*

$$\|g\|_{BMO} \leq c'\|L\|.$$

Доказ. Претпоставимо прво да је $g \in BMO$ ограничена. Кренимо од опште $f \in H^1_r$ и $f = \sum_k \lambda_k a_k$. Тада из конвергенције суме у L^1-норми имамо

$$L(f) = \sum \lambda_k \int a_k g.$$

Али,

$$\int a_k(x)g(x)\,dx = \int a_k(x)\left(g(x) - g_{B_k}\right)\,dx,$$

где је a_k са носачем у лопти B_k. Имамо $|a_k(x)| \leq 1/m(B_k)$, а тако и

$$|L(f)| \leq \sum_k \frac{|\lambda_k|}{m(B_k)} \int_{B_k} |g(x) - g_{B_k}|\,dx.$$

Посматрајући све могуће декомпозиције f добијамо

$$\left|\int f(x)g(x)\,dx\right| \le \|f\|_{H^1_r}\|g\|_{BMO},$$

за ограничену g. Ако сада посматрамо $f \in H^1_0$ (овакве f су, специјално и ограничене) за општу $g \in BMO$, чињеница да је

$$\left|\int f(x)g^{(k)}(x)\,dx\right| \le \|f\|_{H^1_r}\|g^{(k)}\|_{BMO},$$

управо доказана, преласком на граничну вредност кад $k \to \infty$ и користећи теорему о доминантној конвергенцији, даје

$$|L(f)| = \left|\int f(x)g(x)\,dx\right| \le c\|f\|_{H^1_r}\|g\|_{BMO},$$

кад год $f \in H^1_0$ и $g \in BMO$, што повлачи директан смер теореме.

Да докажемо обрат, посматрајмо дати линеарни функционал на 2-атомима. У ту сврху, фиксирајмо лопту B и посматрајмо простор $L^2(B)$ са нормом

$$\|f\|_{L^2(B)} = \left(\int_B |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Са $L^2_0(B)$ означимо потпростор оних $f \in L^2(B)$ за које је $\int f(x)\,dx = 0$. Приметимо да се лопта

$$\|f\|_{L^2_0(B)} \le m(B)^{-1/2}$$

у $L^2_0(B)$ састоји тачно од 2-атома придружених B.

Претпоставимо сад да је L нормализован тако да је $\|L\| \le 1$. За $f \in L^2_0(B)$ имамо

$$\|L(f)\| \le \|f\|_{H^1_r} \le c\,m(B)^{1/2}\|f\|_{L^2_0(B)},$$

где је последња неједнакост последица (6.9). Тада из Рисове теореме о репрезентацији за $L^2_0(B)$ постоји $g^B \in L^2_0(B)$ за које је $L(f) = \int fg^B\,dx$, за свако $f \in L^2_0(B)$. Имамо такође и

$$\|g^B\|_{L^2_0(B)} \le c\,m(B)^{1/2},$$

јер је

$$\|L\| \le c\,m(B)^{1/2}$$

као што смо већ видели.

Отуда, за сваку лопту B имамо функцију g^B дефинисану на B. Ми желимо јединствену g такву да се, за свако B, g и g^B разликују на B за константу. Да конструишемо овакву g, приметимо да, ако је $B_1 \subset B_2$, $g^{B_1} - g^{B_2}$ је константа на B_1, јер и g^{B_1} и g^{B_2} дају исти линеарни функционал на $L^2_0(B_1)$. Заменимо, зато, свако g^B са $\widetilde{g}^B = g^B + c_B$, где је c_B изабрана тако да је

$$\int_{|x|\le 1} \widetilde{g}^B\,dx = 0.$$

Добијамо $\widetilde{g}^{B_1} = \widetilde{g}^{B_2}$ на B_1, ако је $B_1 \subset B_2$. Зато се g може недвосмислено дефинисати на $\mathbb{R}^d$ са $g(x) = \widetilde{g}^B(x)$ за $x \in B$, и ма коју лопту B. Приметимо сада да је

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |g(x) - c_B|\, dx \leq m(B)^{-1/2} \left\|\widetilde{g}^B - c_B\right\|_{L^2(B)} \leq m(B)^{-1/2} \|g^B\|_{L_0^2(B)} \leq c.$$

Зато $g \in BMO$, и још је $\|g\|_{BMO} \leq c$.

Како је репрезентација утврђена за $f \in L_0^2(B)$ и свако B, важи и за густ потпростор H_0^1, па је овим доказ завршен. □

Глава 8

Уместо закључка
Неке предности $H^1_r(\mathbb{R}^d)$

Већ смо раније напоменули да је $H^1_r(\mathbb{R}^d) \subsetneq L^1(\mathbb{R}^d)$ и да је H^1_r на неким местима погодна „замена" за L^1. То ћемо оправдати ограниченошћу неких оператора за које знамо да су на L^1 само *слабо ограничени.*

Хилбертова трансформација слика L^p у L^p (онако како је дефинисана у полуравни), а на L^1 је ограничена у слабом смислу. Специјално, важи и

$$\int |Hf|^2\,dx \leq \int |f|^2\,dx$$

за $f \in L^2(\mathbb{R})$. Следећа теорема даје круцијалну разлику $H^1_r(\mathbb{R})$ и $L^1(\mathbb{R})$.

***Теорема* 8.1.** *Ако f припада Хардијевом простору $H^1_r(\mathbb{R})$, тада $H_\epsilon(f) \in L^1(\mathbb{R})$, за свако $\epsilon > 0$. Штавише, $H_\epsilon(f)$ конвергира у L^1-норми, кад $\epsilon \to 0$. Његова гранична вредност, коју дефинишемо као $H(f)$, задовољава процену*

$$\|H(f)\|_{L^1} \leq A\|f\|_{H^1_r}.$$

Подсетимо се:

$$H_\epsilon(f)(x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{|y-x|\geq\epsilon} \frac{f(y)}{x-y}\,dy.$$

Доказ. Доказ. Аргумент који користимо у доказу илуструје лепу особину $H^1_r(\mathbb{R})$: да покажемо ограниченост оператора на овом простору, довољно је утврдити ограниченост за атоме, што обично није тежак посао.

Докажимо прво да за сваки атом a важи

$$\|H_\epsilon(a)\|_{L^1} \leq A, \tag{8.1}$$

где A не зависи ни од A ни од ϵ.

Заиста, користећи инваријантност Хилбертове трансформације према рескалирању и транслирању, можемо доказати (8.1) само за случај атома придружених интервалу $I = [-1/2, 1/2]$. Ово свођење је могуће. С једне стране, јер је за $a_r(x) = ra(rx)$ испуњено

$$H(a_r)(x) = rH(a)(rx).$$

Такво a_r је придружено интервалу $I_r = 1/rI$, кад год је носач a у I, и

$$\|rF(rx)\|_{L^1} = \|F(x)\|_{L^1},$$

за свако $F \in L^1$. С друге стране, транслације комутирају са оператором H, а и чувају атоме и полупречнике њима придружених лопти.

Претпоставимо зато да a има носач у $|x| \leq 1/2$. Процениће̂мо $H_\epsilon(a)(x)$, према томе да ли је $|x| \leq 1$ или $|x| > 1$. У првом случају имамо:

$$\int_{|x|\leq 1} |H_\epsilon(a)(x)|\, dx \leq \sqrt{2}\left(\int_{|x|\leq 1} |H_\epsilon(a)(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\|H_\epsilon(a)\|_{L^2} \leq c\|a\|_{L^2} = c,$$

према неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског и L^2-ограничености.

За $|x| > 1$ имамо, за довољно мало ϵ,

$$H_\epsilon(a)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geq\epsilon} \frac{a(x-t)}{t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|x-t|\geq\epsilon} \frac{a(t)}{x-t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|x-t|\geq\epsilon} a(t)\left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x}\right) dt,$$

јер је $\int a(t)\, dt = 0$.

Отуда за $|x| > 1$ имамо $|H_\epsilon(a)(x)| \leq \frac{c}{x^2}$, јер је $\left|\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ за $|x| \geq 1$ и $\|t\| \leq 1/2$ и $|a(t)| \leq 1$. Зато је

$$\int_{|x|\geq 1} |H_\epsilon(a)(x)|\, dx \leq 2c,$$

што доказује (8.1) за атоме придружене интервалу $[-1/2, 1/2]$, па тако и за све атоме.

Такође, неједнакост

$$|H_\epsilon(a)(x)| \leq \frac{c}{x^2}$$

за $|x| > 1$ и конвергенција у L^2-норми (овај резултат ћемо искористити без доказа; то је класичан резултат везан за Хилбертову трансформацију) дају конвергенцију у L^1-норми $H_\epsilon(a)$ ка $H(a)$, за сваки атом a.

Ако је, сада,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \in H_r^1$$

функција са назначеном атомском декомпозицијом, тада, према (8.1)

$$\|H_\epsilon(f)\|_{L^1} \leq A\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|,$$

па ако узмемо супремум по свим декомпозицијама добијамо

$$\|H_\epsilon(f)\|_{L^1} \leq A\|f\|_{H_r^1}, \quad \text{за свако } f \in H_r^1. \tag{8.2}$$

Ставимо сада $f_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k a_k$. Тада је $f = f_N + (f - f_N)$. Како је f_N линеарна комбинација атома, и сама је умножак атома. Знамо да $H_\epsilon(f_N)$ конвергира у L_1-норми кад $\epsilon \to 0$. Такође,

$$\|H_{\epsilon_1}(f) - H_{\epsilon_2}(f)\|_{L^1} \leq \|H_{\epsilon_1}(f_N) - H_{\epsilon_2}(f_N)\|_{L^1} + 2A\|f - f_N\|_{H_r^1}.$$

Међутим, $\|f - f_N\|_{H_r^1} \to 0$ кад $N \to +\infty$. За дато $\delta > 0$, узимајући N довољно велико, а затим и ϵ_1 и ϵ_2 оба довољно мала, имамо

$$\|H_{\epsilon_1}(f) - H_{\epsilon_2}(f)\|_{L^1} < \delta,$$

што показује да $H_\epsilon(f)$ конвергира у L^1-норми, па коначан закључак следи из (8.2). □

Реални Хардијев простор H_r^1 има добро понашање и према неким максималним функцијама. Ово се односи на извесне, довољно добре апроксимације идентитете и њима одговарајуће конволуције.

Наиме, ако узмемо нпр. ограничену функцију Φ са компактним носачем, тада за ма коју $f \in L^1$, ако дефинишемо $\Phi_\epsilon = \epsilon^{-d}\Phi(\epsilon^{-1}x)$, важи

$$(f * \Phi_\epsilon) \to f(x) \quad \text{кад } \epsilon \to 0 \text{ и за скоро свако } x,$$

под претпоставком да је $\int \Phi(x)\,dx = 1$.

За овакво Φ дефинишемо максималну функцију M са

$$M(f)(x) := \sup_{\epsilon>0} |(f * \Phi_\epsilon)(x)|. \tag{8.3}$$

Тада за свако $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ важи

$$|f(x)| \leq M(f)(x) \leq c\mathcal{M}(f)(x),$$

за скоро свако x, где је c одговарајућа константа.

Поред тода, претпоставићемо и диференцијабилност функције Φ. А сад резултат који смо имали на уму.

***Теорема* 8.2.** *Нека је $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ са компактним носачем. Са M дефинисаном изразом* (8.3) *имамо $M(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, за свако $f \in H_r^1(\mathbb{R}^d)$. Штавише,*

$$\|M(f)\|_{L^1} \leq A\|f\|_{H_r^1}. \tag{8.4}$$

Доказ. Претпоставимо да је $f \in H_r^1(\mathbb{R}^d)$ и

$$f = \sum_k \lambda_k a_k$$

њена атомска декомпозиција. Тада је јасно

$$M(f) \leq \sum_k |\lambda_k| M(a_k),$$

па је довољно доказати (8.4) за атом a.

Приметимо да за a_r дато са $a_r(x) = r^d a(rx)$, $r > 0$, имамо

$$(a * \Phi_\epsilon)(x) = r^d (a * \Phi_{r\epsilon})(rx),$$

а тиме и

$$M(a_r)(x) = r^d M(a)(rx).$$

Пресликавање $a \mapsto M(a)$ комутира и са транслацијама. Зато да докажемо (8.4) узимамо атом a придружен јединичној лопти са центром у координатном почетку.

Посматрајмо сад два случаја: $|x| \leq 2$ и $|x| > 2$. У првом случају је јасно за неко $c > 0$, $M(a)(x) \leq c$ и отуда и

$$\int_{|x|\leq 2} M(a)(x)\,dx \leq c'.$$

У другом случају, имамо

$$(a * \Phi_\epsilon)(x) = \epsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(y) \Phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy = \epsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(y) \left[\Phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right] dy,$$

јер је $\int a(y)\, dy = 0$.

Међутим, како је $|x| \geq 2$ и $|y| \leq 1$, имамо $|x-y| \geq {}^{|x|}/_{2}$. Штавише, како $\Phi \in C^1$ имамо

$$\left|\Phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right| \leq c\frac{|y|}{\epsilon} \leq \frac{c}{\epsilon}.$$

Чињеница да Φ има компактан носач повлачи да се $(a * \Phi_\epsilon)(x)$ поништава, осим за

$$\left|\frac{x-y}{\epsilon}\right| \leq A$$

за неко $A > 0$, што даје $\epsilon > {}^{|x|}/_{2A}$. Дакле, за $|x| \geq 2$ је

$$\epsilon^{-d}\left|\Phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right| \leq c\epsilon^{-d-1} \leq c'|x|^{-d-1},$$

а отуда и

$$\int_{|x|\geq 2} M(a)(x)\, dx \leq c.$$

Тако смо утврдили (8.4) и теорема је доказана. $\square$

Библиографија

[FS72] Charles Fefferman и Elias M. Stein. “H^p spaces of several variables”. Објављено у: *Acta Mathematica* 129.1 (1972.), стр. 137–193.

[Gar07] John B. Garnett. *Bounded Analytic Functions*. Graduate Texts in Mathematics 236. Springer, 2007. ISBN: 978-0387336213.

[Gra08] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 249. Springer, 2008. ISBN: 978-0387094328.

[Gra09] Loukas Grafakos. *Modern Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 250. Springer, 2009. ISBN: 978-0387094342.

[JN61] Fritz John и Louis Nirenberg. “On functions of bounded mean oscillation”. Објављено у: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 14.3 (1961.), стр. 415–426.

[Kne13] Greg Knese. “Uchiyama’s lemma and the John-Nirenberg inequality”. Објављено у: *Bulletin of the London Mathematical Society* 45.4 (2013.), стр. 683–692.

[Koo08] Paul Koosis. *Introduction to H^p spaces*. Cambridge Tracts in Mathematics 115. Cambridge University Press, 2008. ISBN: 978-0521056816.

[Pav13] Miroslav Pavlović. *Function Classes on the Unit Disc*. De Gruyter Studies in Mathematics 52. De Gruyter, 2013. ISBN: 978-3110281903.

[SM93] Elias M. Stein и Timothy S. Murphy. *Harmonic Analysis. Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton Mathematical Series 43. Princeton University Press, 1993. ISBN: 978-0691032160.

[SS11] Elias M. Stein и Rami Shakarchi. *Functional Analysis. Introduction to Further Topics in Analysis*. Princeton Lectures in Analysis 4. Princeton University Press, 2011. ISBN: 978-0691113876.