Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Тема:

Проблеми засновани на познатим темама из историје математике

Ментор: Небојша Икодиновић, доцент
Комисија: 1. Зоран Петровић, ван. проф.
2. Горан Ђанковић, доцент

Студент: Наташа Калмиков
Број индекса: 1109/2013

Београд
2014.

Садржај

1. Увод

Циљ мог мастер рада је да представим задатке разматране од стране еминентних математичара из прошлости. Пружићу и додатне информације о темама које се налазе у школском градиву.

Рад се састоји из пет целина:

- Задаци са простим бројевима;
- Број π;
- Примена комплексних бројева и кватерниона;
- Еуклидска и нееуклидска геометрија;
- Уметност бројања.

Кроз ових пет целина приказаћу како задатке и њихова решења, тако и историјске чињенице везане за њих.

У раду ће бити детаљно објашњен начин решавања сваког задатка, корак по корак. Посебна пажња ће бити посвећена задацима који репрезентују специјалне (и елементарне) случајеве познатих теорема чије формулације ученици средње школе могу да разумеју, али чији докази излазе из оквира средњошколске математике.

Биће назначене и историјске чињенице које су везане за ове задатке, као и за математичаре који су заслужни за њихово решавање. Такође биће приказане значајне историјске чињенице које су утицале на развој математике, као и како је текао сам развој математике кроз историју. Јако је битно како су се неки задаци решавали, а како се данас решавају. Показаћу како су пре пар хиљада година долазили до јако битних математичких знања.

2. Задаци са простим бројевима

Прости бројеви су природни бројеви, који су дељиви само са 1 и са самим собом. У математици, Ератостеново сито је поступак за одређивање простих бројева мањих од неког задатог броја n. Креирао га је Ератостен.

Ератостен из Кирене (276. пне - 194. пне) је био старогрчки математичар, песник, атлетичар и астроном. Међу савременицима је био познат под надимком „бета“ (грчки број два) јер су га у многим областима сматрали другим човеком читавог Медитерана. Њему се приписује систем земаљских координата са географским ширинама и дужинама, а први је познати научник који је израчунао обим Земље, на веома довитљив начин.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Ератостенов поступак проналажења простих бројева је следећи:

- Напишемо све бројеве од 2 до n.
- Почевши од првог броја на списку (двојка) прецртајмо са списка све бројеве дељиве са два и упишимо да је двојка прост број.
- Понављајмо поступак са следећим непрецртаним бројем m. Дакле, прецртајмо све бројеве дељиве са m, а њега самог обележимо да је прост.

Постоје ефикаснији алгоритми за проверу да ли је неки одређени број прост, а сада ћемо урадити неке од задатака везане за просте бројеве.

2.1 Прости бројеви у аритметичкој прогресији

Еуклид је један од најзначајнијих математичара. О његовом животу се јако мало зна, скоро нимало. Написао је *Елементе* око 300. године пне. Нема много књига које се са *Елементима* могу поредити по значају и утицају на историју цивилизације. Прокло[1] казује како га је Птоломај[2] једном питао постоји ли у геометрији краћи пут од пута *Елемената*, а Еуклид је одговорио да нема краљевског пута у геометрији. Иако оскудни, најопширнији подаци о Еуклиду могу се наћи у Прокловом *Прегледу*. Вероватно је учио у Атини, у Платоновој Академији. У Александрији је основао чувену математичку школу која је после тога постојала вековима. Поред *Елемената*, који су доскора свуда служили као уџбеник геометрије, саставио је још неколико списа који су сачувани до наших дана. То су:

- *Подаци* који служе као увод у геометријску анализу;
- *О разлагању фигура*, спис сачуван само у арапском преводу;
- *Феномени*, посвећени елементарној сферној геометрији и њеној примени у астрономији;
- *Оптика* у којој Еуклид расправља о ширењу и одбијању светлости у складу са питагорејском теоријом.

Многи Еуклидови списи су изгубљени.

Следеће тврђење је познато од Еуклида :

ЗАДАТАК 1 •

Постоји бесконачно много простих бројева. Доказати.

• •

Тврђење претходног задатка се може изразити и у облику: Аритметичка прогресија 1, 2, 3, … садржи бесконачно много простих бројева.

За решавање Задатка 1 биће нам потребна следећа теорема:

[1] Proklo Diadoh (410-485), грчки филозоф, написао је коментаре прве књиге Еуклидових *Елемената* за потребе школе у којој је предавао.

[2] Ptolomaj Klaudije (око 100-178), грчки астроном, математичар и географ. Најстарији звездани каталог који нам је у целини сачуван је управо Птоломејев каталог, који се налази у његовом главном делу *Алмегест*.

Теорема 1 (Основна теорема аритметике): Сваки природан број n *већи од 1 може се приказати као производ простих бројева на јединствен начин.*

Доказ Теореме 1:

Докажимо прво да се сваки природан број већи од 1 може представити као производ простих бројева. Ово ћемо доказати коришћењем математичке индукције.

База индукције:
Број 2 је прост.

Индуктивни корак:
Претпоставимо да је $n > 2$ и да наша теорема важи за сваки природан број m, такав да је $2 \leq m < n$. Докажимо да се и n може приказати као производ простих фактора.
Ако је n прост, немамо шта доказивати. Ако није прост, онда је n сложен, тј. $n = n_1 n_2$, где је $1 < n_1 < n$ и $1 < n_2 < n$. По претпоставци, n_1 и n_2 се могу представити преко производа простих бројева, јер су мањи од n, па следи да и n има то својство.

Докажимо сада да је представљање природних бројева преко производа простих бројева јединствено.

Претпоставимо да n има две различите факторизације. Након дељења с простим бројевима који су заједнички и за једну и за другу факторизацију, добијамо једнакост облика:

$$p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s,$$

где су p_i за $i = 1, 2, \dots, r$ и q_j за $j = 1, 2, \dots, s$ прости бројеви, не нужно различити, али такви да се ни један прост број са леве стране једнакости не појављује на десној страни једнакости, тј. $p_i \neq q_j$ за све i, j. Међутим, знамо да p_1 мора делити $q_1 q_2 \dots q_s$, па онда p_1 дели барем један q_j. Како се ради о простим бројевима, онда то значи да је $p_1 = q_j$, а то је контрадикција пошто смо претпоставили да је $p_i \neq q_j$ за све i, j.

□

Решење задатка 1:

Еуклид је дао следеће решење Задатка 1 (методом свођења на контрадикцију).
Претпоставимо да постоји коначно много простих бројева: $p_1, p_2, \dots, p_n$. Нека је: $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Број N не може бити прост, јер је $N > p_i$ за све $i = 1, 2, \dots, n$. Како је N сложен број, онда N мора бити дељив са неким од p_i где је $1 \leq i \leq n$, на основу Теореме 2. Пошто p_i дели $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, онда такође мора делити и $N - p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, што је 1. Међутим, 1 није дељив са $p_i > 1$. Ова контрадикција показује да постоји бесконачно много простих бројева.

■

Наведимо задатак који даје информације о локацији простих бројева, међу природним бројевима, на бројевној правој.

Задатак 2 •

Доказати да за било који природан број $n > 2$, постоји прост број између n и $n!$.

• •

Решење Задатака 2:

Да бисмо решили Задатак 2 имајмо на уму да број $M = n! - 1$ има најмање један прост делилац p. Јасно је да је $p < n!$. Истовремено је и $p > n$, јер да је $p < n$ онда би p морало делити $n!$, а онда ће p делити и $n! - M$, што је 1, а то је немогуће. Тако смо и добили да је p између n и $n!$, што је и требало показати.

■

Постоји још боља оцена о локацији простих бројева међу природним бројевима, на бројевној правој, то је Бертранов постулат.

Бертранов постулат: У сваком интервалу $[n, 2n]$ *налази се бар један прост број.*

Доказ Бертрановог постулата можете погледати у књизи [27], ја га нећу овде наводити пошто је јако обиман. Ако за n узмемо било који природан број, можемо пронаћи просте бројеве у оваквом интервалу $[n, 2n]$, као што је и показано у следећем примеру.

Пример 1:
а) Ако је нпр. $n = 5$ пронађимо просте бројеве у интервалу $[n, 2n] = [5,10]$. Прост број који се налази у овом интервалу је 7.

б) Ако је нпр. $n = 8$ пронађимо просте бројеве у интервалу $[n, 2n] = [8,16]$. Прости бројеви који се налазе у овом интервалу су 11 и 13.

в) Ако је нпр. $n = 15$ пронађимо просте бројеве у интервалу $[n, 2n] = [15,30]$.
Прости бројеви који се налази у овом интервалу су 17, 19, 23 и 29.

У деветнаестом веку Дирихле[3] је истраживао питање:
Које аритметичке прогресије $a, a + d, a + 2d, \ldots$ природних бројева, садрже бесконачно много простих бројева?

[3] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), немачки математичар коме се приписује модерна „формална“ дефиниција функције.

Очигледно, ако a и d имају заједнички делилац већи од 1, онда су сви чланови прогресије, са могућим изузетком a, сложени бројеви. Међутим, у случају преосталих Дирихле је показао:

Теорема 2: Свака аритметичка прогресија $a, a+d, a+2d, \ldots$ *у којој су* a *и* d *узајамно прости природни бројеви, садржи бесконачно много простих бројева.*

Иако се *Теорема 2* односи на природне бројеве, Дирихле је користио алате из анализе, као што су гранични процеси и појам непрекидности. На тај начин, он је положио темеље аналитичке теорије бројева - гране математике у којој се анализа примењује за проучавање целих бројева. Доказ *Теореме 2* нећу овде наводити пошто је доста компликован и недоступан средњошколцима. Али ћу навести пример који илуструје ову теорему.

Пример 2: Ако је први члан аритметичке прогресије 4, а разлика два узастопна члана је 3, одредимо првих 50 чланова ове аритметичке прогресије, и издвојмо (заокружимо) просте бројеве који се појављују у овој аритметичкој прогресији.

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88, 91, 94, 97, 100, 103, 106, 109, 112, 115, 118, 121, 124, 127, 130, 133, 136, 139, 142, 145, 148, 151.

Као што можемо да приметимо, међу бројевима који чине аритметички низ, налазе се и прости бројеви.

Специјалан случај Дирихлеове теореме је следећи задатак:

Задатак 3 ••

а) Доказати да постоји бесконачно много простих бројева облика $4k+3$, *где је* k *позитиван цео број.*

б) Доказати да постоји бесконачно много простих бројева облика $4k+1$, *где је* k *позитиван цео број.*

•••

Решење задатка 3:

(а) Прво докажимо следећу лему:

Лема 1: Сваки природан број облика $4\ell+3$ *има најмање један прост делилац истог облика.*

Доказ Леме 1:

Ако је $4\ell+3$ прост број, онда нема шта да се доказује.

Ако није прост број, онда је сложен и можемо га представити преко производа простих бројева на следећи начин:

$$4\ell + 3 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r,$$

где су p_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, непарни прости бројеви, не нужно различити. Претпоставимо да је $p_i = 4k_i + 1$, за све $i = 1, 2, \ldots, r$, где су k_i позитивни цели бројеви. Производ два броја облика $4a + 1$ и $4b + 1$ такође је тог облика:

$$\begin{aligned}(4a+1)(4b+1) = 16ab + 4a + 4b + 1 &= \underbrace{4(4ab + a + b)} + 1 \\ &= \quad 4 \cdot c \quad + 1.\end{aligned}$$

Отуда следи да је $(4k_1 + 1) \cdot (4k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (4k_r + 1) = 4t + 1$, за неки цео број t. Број $4t + 1$ не може бити једнак $4\ell + 3$. Ова контрадикција показује да $4\ell + 3$ мора да има прост делилац облика $4k + 3$.

$\square$

Сада можемо доказати да постоји бесконачно много простих бројева облика $4k + 3$ (Задатак 3а).

Нека је $N = 4n! - 1$ где је n произвољан природан број. N је облика $4\ell + 3$, па, према *Леми 1*, постоји прост делилац p облика $4k + 3$. Претпоставимо да је $p \leq n$. У том случају p дели $4n!$, па мора делити и $4n! - N$, што је 1, односно p мора делити 1. То је немогуће и добијамо контрадикцију. Добијамо да је $p > n$. Тако за било који природан број n постоји прост број $p = 4k + 3 > n$. Ово доказује да постоји бесконачно много простих бројева облика $4k + 3$.

$\square$

Пре него што почнемо да решавамо део задатка (б), навешћемо и доказати следећу теорему:

Теорема 3 (Мала Фермаова теорема): Ако је p прост број, и a било који природан број, онда је $a^p - a$ дељиво са p.

Доказ Теореме 3:
Мала Фермаова теорема може бити доказана индукцијом по a.

База индукције:
За $a = 1$, $1^p - 1 = 0$, што је дељиво са p.

Индуктивни корак:
Претпоставимо да је $a^p - a$ дељиво са p за неки природан број a. За $a + 1$ важи:

$$(a+1)^p - (a+1) = \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{1} a^1 + \cdots + \binom{p}{p} a^p - a - 1$$

$$= \underbrace{(a^p - a)}_{A} + \underbrace{\left[\binom{p}{1} a + \binom{p}{2} a^2 + \cdots + \binom{p}{p-1} a^{p-1}\right]}_{B}$$

Сваки сабирак у B је дељив са p, па је и B дељив са p. Са друге стране, A је дељиво са p према индуктивној претпоставци.
Дакле $(a+1)^p - (a+1)$ је дељиво са p, и тиме смо доказали Малу Фермаову теорему.

□

Ферма (Pierre Fermat 1601-1665) рођен је у Бомону у јужној Француској. Отац му је био трговац кожом, довољно богат да му омогући студије права. Међутим још као студент показивао је јако велики таленат за математику, истакавши се 1629. године својом рестаурацијом Аполонијевог дела *Plane loci* (у слободном преводу *Значајне тачке у равни*). По завршетку студија 1631. године постао је саветник у скупштини у граду Тулузу и на том положају остао до краја живота. Ферма је био ефикасан државни службеник, који је у потпуности извршавао све своје обавезе пружајући при томе људима помоћ. Није имао великих политичких амбиција, па је када није био заузет послом, сву своју енергију посвећивао математици. Он је први открио општу методу за одређивање тангенте раванске криве, али његов геније највидљивији је у теорији бројева.

Решимо и део задатка(б): Постоји бесконачно много простих бројева облика $4k+1$.

Узимајући у обзир доказ Сиерпинског[4], извешћемо доказ траженог тврђења, коришћењем *Мале Фермаове Теореме* и добро познате формуле:

$$a^{2t+1} + 1 = (a+1)(a^{2t} - a^{2t-1} + a^{2t-2} - \cdots - a + 1) \qquad (1)$$

Почећемо са следећом лемом:

Лема 2: За било који природан број $n > 1$ *сви прости делиоци броја* $M = (n!)^2 + 1$ *су облика* $4k+1$.

[4] Sierpinski,Waclaw (1882-1969), пољски математичар, направио драгоцен допринос анализи и теорији бројева.

Доказ Леме 2:

M је непаран број, стога сви његови прости делиоци су непарни. Претпоставимо да M има прост делилац p облика $4k+3$. Очигледно, $p>n$. Према *Малој фермаовој Теореми:*

$$p \text{ дели } (n!)^p - n! \tag{2}$$

Наш циљ је да се покаже да:

$$\text{ако је } p = 4k+3\,, \qquad \text{онда } p \text{ дели } (n!)^p + n!. \tag{3}$$

Да бисмо доказали (3) примењујемо (1) у посебном случају када је $a=(n!)^2$ и $t=k$. У том случају је $a+1=M$.

Тако, на основу (1), M дели $[(n!)^2]^{2k+1}+1$. Али

$$[(n!)^2]^{2k+1}+1 = (n!)^{4k+2}+1 = (n!)^{p-1}+1.$$

Добијамо да M дели $(n!)^{p-1}+1$, и такође ће делити и

$$n!\,[(n!)^{p-1}+1] = (n!)^p + n!.$$

Комбиновањем (2) и (3) закључујемо да p дели $2(n!)^p$, па p дели и $2n!$.
Не постоји прост делилац броја $2n!$ који је већи од n. Међутим, $p>n$, па ова контрадикција доказује *Лему 2*.

$\square$

Према *Леми 2*, за било који природан број $n>1$ постоји прост број $p=4k+1$ већи од n. Тако добијамо да постоји бесконачно много простих бројева облика $4k+1$.

$\blacksquare$

2.2 Вилсонова теорема и резултати Лагранжа и Лајбница о простим бројевима

1770. године, у свом делу *Meditationes Algebriche*, Варинг[5] је објавио теорему коју је назвао по свом ученику Џону Вилсону[6].

ТЕОРЕМА 4 (Вилсонова теорема): За сваки прост број p, број $(p-1)!+1$ је дељив са p.

[5] Waring, Edward (1734-93), енглески математичар, написао велики број радова које се баве решавањем алгебарских једначина, теоријом бројева, апроксимацијом корена.
[6] Wilson, John (1741-93), енглески математичар, Варингов пријатељ и ученик.

Први доказ Вилсонове теореме је дао Лагранж, 1773. године.

Жозеф – Луј Лагранж (1736 - 1813) је био француски математичар и астроном, који је дао важан допринос на пољима анализе и теорије бројева, као и класичне и небеске механике. Сматра се највећим математичарем 18. века. Говорило се да је могао на својим папирима да пише без и једне грешке. Радећи у Академији наука у Берлину, објавио је низ радова из теорије бројева, теорије парцијалних једначина, небеске механије, сферне астрономије. По преласку у Париз 1787. године објављује дело *Аналитичка механика*.

Лагранжов доказ Вилсонове теореме се заснива на његовом резултату о дељивости полинома простим бројевима.

Задатак 4 •

Нека је p прост број и нека је

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

полином степена $n \geq 1$*, са целим коефицијентима* $a_n, a_{n-1}, \ldots\ a_0$*. Доказати да ако* a_n *није дељив са p, онда међу бројевима* $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ *постоји највише* n *таквих да је* $f(i)$ *дељиво са* p.

• •

Решење Задатка 4:

Задатак 4 ће бити решен индукцијом по n.

База индукције:
Нека је $n = 1$ и претпоставимо да постоје два цела броја x_1, x_2 тако да $0 \leq x_1 < x_2 \leq p - 1$ и да p дели $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Пошто је $f(x) = a_1 x + a_0$ ово подразумева да p дели $f(x_1) - f(x_2) = a_1(x_2 - x_1)$. Онда p мора делити најмање један од фактора, или a_1, или $x_2 - x_1$. Међутим, $x_2 - x_1 < p$, а a_1 по претпоставнци теореме није дељив са p, па долазимо до контрадикције. Ова контрадикција показује да тврђење важи за $n = 1$.

Индуктивни корак:
Претпоставимо да тврђење важи за $n - 1$ али да не важи за n. Тада постоји $n + 1$ цео број $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ тако да

$$0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} < p$$

и p дели $f(x_i)$. Посматрајмо разлику:

$$f(x) - f(x_1) = a_n(x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \cdots + a_1(x - x_1). \qquad (4)$$

Како је

$$x^k - x_1^k = (x - x_1)(x^{k-1} + x^{k-2}x_1 + \cdots + xx_1^{k-2} + x_1^{k-1})$$

једначина (4) може да се напише као

$$f(x) - f(x_1) = (x - x_1)g(x),$$

где је $g(x)$ полином степена $n-1$ са водећим коефицијентом a_n.
$f(x_i) - f(x_1)$ је дељив са p за $i = 2, 3, \dots, n+1$. Отуда p дели $(x_i - x_1)g(x_i)$ за $i = 2, 3, \dots, n+1$. Број $x_i - x_1$ је мањи од p, стога p мора делити $g(x_i)$ за $i = 2, 3, \dots, n+1$, што је контрадикција са индукцијском хипотезом.

■

Тврђење претходног задатка јесте специјалан случај теореме према којој сваки полином степена n има највише n корена, над било којим пољем, па специјално над пољем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где је p неки прост број (видети [30]). Такође, из наведене теореме, посматране за поље $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, тривијално следи и тврђрње наредног задатка. Ипак наредно тврђење биће доказано на основу претходног задатка.

ЗАДАТАК 5 ●●

Ако је p прост број и ако је

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

полином са целим коефицијентима такав да је за више од n целих бројева $i = 0, 1, 2, \dots p-1$, *број* $f(i)$ *дељив са p, онда су сви коефицијенти од* $f(x)$ *дељиви са p. Доказати.*

●●

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 5:

Овај задаткак се може решити свођењем на контрадикцију.

Претпоставимо да $f(x)$ задовољава услове задатка, и да нису сви коефицијенти a_i дељиви са p. Нека је a_k први коефицијент у низу $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{k+1}, a_k, \dots, a_1, a_0$ који није дељив са p.
Формирајмо полином

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{k+1}x^{k+1}) \\ &= a_k x^k + \cdots + a_0 \,. \end{aligned}$$

За све $x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ тако да p дели $f(x_i)$, бројеви $g(x_i)$ су такође дељиви са p. Постоји више од n таквих бројева $g(x_i)$. Полином $g(x)$ је степена $k \leq n$, и према Задатку 4, његов степен k мора бити 0. То подразумева да су

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 \text{ сви дељиви са } p. \tag{5}$$

Са друге стране,

$$a_0 = f(x) - (a_n x^n + \cdots + a_1 x). \tag{6}$$

Изаберимо $x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ тако да p дели $f(x_i)$. Из (5) и (6) следи да је

$$a_0 \text{ дељиво са } p. \qquad (*)$$

На почетку смо претпоставили да је a_k први коефицијент који није дељив са p, и добили смо да је $k = 0$. То значи да a_0 није дељиво са p, а то је контрадикција са $(*)$.

■

Вилсонова теорема је изведена из Задатка 5 на следећи начин:
Ако је $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-p+1) - x^{p-1} + 1$, и ако овај полином искоритимо у Задатку 5, можемо доказати Теорему 3 (Вилсонову теорему).

Задатак 6• •

Доказати Вилсонову теорему.

• •

Решење Задатка 6: (Доказ Вилсонове теореме)

Образујмо полином

$$f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-p+1) - x^{p-1} + 1.$$

$f(x)$ је степена $p-2$ и његов слободни члан a_0 је једнак $(p-1)! + 1$. Наш циљ је да се покаже да постоји најмање $p-1$ вредности $x_i \in \{0, 1, \dots p-1\}$ тако да p дели $f(x_i)$. Користећи Задатак 5 показаћемо да p дели $(p-1)! + 1$. Нека је $x_i = i$ за $i = 1, 2, \dots, p-1$. Израз $(x_i - 1)(x_i - 2)\dots(x_i - p + 1)$ је 0 за све $i = 1, 2, \dots, p-1$. Како је 0 дељива са p ово подразумева да

$$(x_i - 1)(x_i - 2)\dots(x_i - p + 1) \text{ је дељиво са } p. \tag{7}$$

Према *Малој Фермаовој Теореми* $x_i^p - x_i = x_i(x_i^{p-1} - 1)$ је дељиво са p. Бројеви x_i и p су узајамно прости, па

$$x_i^{p-1} - 1 \text{ је дељиво са } p. \tag{8}$$

Из (7) и (8) можемо закључити да

$$f(x_i) \text{ је дељив са } p \qquad \text{за } i = 1, 2, \dots, p-1.$$

Дакле, из Задатка 5, сви коефицијенти из $f(x)$ су дељиви са p. Посебно:

$$(p-1)! + 1 \quad \text{је дељив са } p.$$

■

Вилсонова теорема се може применити да се утврди следећа значајна карактеризација простих бројева, коју је дао Лајбниц:

Теорема 5: Природан број $p > 2$ је прост ако и само ако $(p-2)! - 1$ је дељиво са p.

Задатак 7

Доказати Теорему 5 користећи Вилсонову теорему.

Решење задатка 7: Доказ Лајбницове теореме (*Теореме 5*)

(а) Претпоставимо да је $p > 2$ прост број. Према Вилсоновој теореми, p дели $(p-1)! + 1$. Али како је

$$\begin{aligned}(p-1)! + 1 &= (p-2)!\,(p-1) + 1 \\ &= (p-2)!\,p - [(p-2)! - 1],\end{aligned}$$

добијамо да p дели $(p-2)! - 1$.

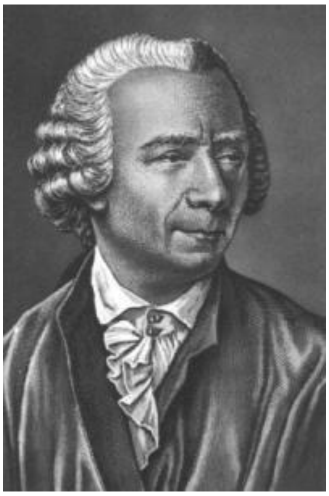
(б) Нека је $p > 2$ природан број који дели $(p-2)! - 1$. Онда p такође дели $(p-1)[(p-2)! - 1]$ које је једнако $(p-1)! - p + 1$. На основу тога добијамо и да

$$p \text{ дели } (p-1)! + 1.$$

Ако претпоставимо да p није прост број, онда је $p = a \cdot b$ за неке целе бројеве a, b веће од 1 а мање од p. У том случају a дели оба $(p-1)! + 1$ и $(p-1)!$, што је немогуће, јер би онда a требао да дели и њихову разлику која је 1, али a не дели 1. Отуда p мора бити прост.

■

2.3. Полиноми са простим бројевим



Леонард Паул Ојлер (1707 - 1783) је швајцарски математичар и физичар. Један је од најзначајнијих математичара свих времена. Тешко је наћи област математике којој Ојлер није дао свој допринос. Унапредио је математичку нотацију, посебно у оквиру анализе. Поред појма функције први је употребио ознаку $f(x)$ за функцију f примењену на аргумент x. Поред тога, увео је модеран запис тригонометријских функција, e као ознаку за основу природног логаритма (данас познату и као Ојлеров број), грчко слово S за означавање сумирања, и слово i за означавање имагинарне јединице. Значајан допринос дао је и на пољима механике, оптике и астрономије. Ојлер је написао око 900 научних радова из алгебре, диференцијалних једначина, степених редова, теорије бројева, механике, оптике, астрономије, хидродинамике. Најплоднији је математичар 18. века. Ојлеров лик је неколико пута штампан на поштанским маркицама у Швајцарској, Немачкој и Русији, а астероид 2002 Ојлер је добио име у његову част. Постоји јако пуно термина названих у част Ојлера: Ојлерова функција, Ојлерова једначина, формула, Ојлеров идентитет, Ојлеров број, Ојлерова линија, Ојлеров пут (пут у графу који посећује све ивице тачно једном), Ојлерова медаља (додељује се сваке године од стране Института за комбинаторику), Ојлерово друштво (америчка група посвећена испитивању живота и рада Леонарда Ојлера), и многи други термини (видети [31]).

Ојлер је пронашао полином

$$f(x) = x^2 + x + 41$$

чије су вредности за 40 узастопних целобројних вредности x ($x = 0, 1, 2, \dots, 39$) прости бројеви. Можемо записати неке од тих бројева.

$f(0) = 41,\quad f(1) = 43,\quad f(2) = 47,\quad f(3) = 53,\quad f(4) = 61,\quad f(5) = 71,$
$f(6) = 83,\quad \dots,\quad f(39) = 1601.$

Сви ови бројеви су прости.
Ојлеров полином можемо записати и у другачијем облику:

$$x^2 + x + 41 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{163}{4}.$$

Можемо наћи и везу између $f(x)$ и $f(x+1)$ на следећи начин:

$$f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 41 = x^2 + 2x + 1 + x + 1 + 41$$
$$= f(x) + 2(x+1)$$

Такође можемо проверити шта ће се десити ако посматрамо негативне бројеве.

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) + 41 = x^2 - x + 41$$

$$f(x-1) = (x-1)^2 + (x-1) + 41 = x^2 - 2x + 1 + x - 1 + 41 = x^2 - x + 41$$

Добијамо да је $f(-x) = f(x-1)$. Односно, бројеви $f(-x)$, за $x = 1, 2, \dots, 40$ су прости.

Трансформацијом формуле

$$x^2 - 79x + 1601 = (x-40)^2 + (x-40) + 41$$

Добили смо просте бројеве за 80 узастопних целих бројева, с'тим што ће се неки прости бројеви појавити по два пута.

Можемо се питати који још полиноми постоје а да имају исту особину као и Ојлеров полином. На пример, ако је $f(X) = X^2 + X + q$ и $q = 2, 3, 5, 11, 17, 41$ онда је $f(n)$ прост број за све $n = 0, 1, \dots, q-2$. Међутим ако је $q = 7, 13, 19, 23, 29, 31, 37$ онда $f(n)$ није прост број за све $n = 0, 1, \dots, q-2$.

Набројаћу још неке полиноме који имају исто својство као Ојлеров полином.
Вредности полинома $f(x) = 9x^2 - 231x + 1523$ за $x = 0, \dots, 39$ су прости бројеви.
Вредности полинома $f(x) = 4x^2 - 154x + 1523$ за $x = 0, \dots, 39$ су прости бројеви.
Вредности полинома $f(x) = 4x^2 + 4x + 59$ за $x = 0, \dots, 13$ су прости бројеви.
Вредности полинома $f(x) = 2x^2 + 11$ за $x = 0, \dots, 10$ су прости бројеви.
Вредности полинома $f(x) = 3x^2 + 39x + 37$ за $x = 0, \dots, 17$ су прости бројеви.

Исти проблем се може поставити и за полиноме првог степена $L(x) = ax + b$, где су $a, b \geq 1$. Ако је $f(0)$ прост број q, онда је $b = q$. Тако добијамо да је $L(q) = aq + q = (a+1)q$ сложен број. Тако да, посматраћемо само вредности за x од 0 до $q - 1$.
Ако је $q = 3$, $L(x) = 2x + 3$, добијамо бројеве: 3, 5, 7.
Ако је $q = 5$, $L(x) = 6x + 5$, добијамо бројеве: 5, 11, 17, 23, 29.
Није познато да ли за сваки прост број q постоји аритметичка прогресија од q простих бројева, од којих је први прост број q.

У наредном задатку поставља се следеће занимљиво питање:

Задатак 8 •

Испитајмо, да ли постоји полином степена $m \geq 1$

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

са ненегативним целим коефицијентима $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ *тако да је* $f(n)$ *прост број за све природне бројеве* n*?*

• •

Решење задатка 8:

Изаберимо природан број n_0 такав да је $f(n_0) = a > 1$ и размотримо $f(n_0 + ka)$ за било који природан број k. У полиному

$$\begin{aligned} g(n_0 + ka) &= f(n_0 + ka) - f(n_0) \\ &= a_m[(n_0 + ka)^m - n_0^m] + a_{m-1}[(n_0 + ka)^{m-1} - n_0^{m-1}] + \cdots \\ &\quad + a_1[(n_0 + ka) - n_0] \end{aligned}$$

свака разлика $(n_0 + ka)^i - n_0^i$ је дељива са $(n_0 + ka) - n_0 = ka$, а онда и са a. Добијамо да је $g(n_0 + ka)$ дељив са a. Пошто $f(n_0) = a$ онда ово подразумева да је $f(n_0 + ka)$ дељиво са a. Из $f(n_0 + ka) > a$ и $a > 1$ следи да $f(n_0 + ka)$ није прост за било које $k = 1, 2, 3, \ldots$.

■

1650. године Ферма је формулисао следеће тврђење:

Теорема 6: Сваки прост број облика $4k + 1$*, где је* k *позитиван цео број, је збир два квадрата.*

Доказ Теореме 6:

Пре него што докажемо Теорему 6, навешћемо и доказаћемо још једну теорему.

Теорема 7: Ако p *дели* $a^2 + 1$ *, онда се* p *може представити као сума два квадрата.*

Доказ Теореме 7:
Нека p дели $a^2 + 1$, онда p не дели a, јер да p дели a, онда би p делио и a^2, и не би важило да p дели $a^2 + 1$. Онда постоје бројеви $x, y \in \{1,2, \ldots, [\sqrt{p}]\}$ тако да p дели $ax \pm y$. Како знамо да p дели $a^2 + 1$, онда ће p делити и $a^2x^2 + x^2$, а самим тим ће делити и $y^2 + x^2$. То значи да је $y^2 + x^2 = kp$, за неко $k \in \mathbb{Z}$. Како је $y^2 + x^2 \geq 2$, имамо да је $k > 0$. Хоћемо да покажемо да је $k = 1$. Знамо да су $x, y \leq [\sqrt{p}]$, па онда важи и да су $x^2, y^2 \leq ([\sqrt{p}])^2 <$

$\left(\sqrt{p}\right)^2 = p$. Онда, на основу тога добијамо да је $x^2 + y^2 < 2p$. Како смо већ рекли да p дели $x^2 + y^2$, и како важи претходна неједнакост, онда мора важити да је $k = 1$. И добили смо да је $p = x^2 + y^2$.

□

Сада можемо доказати *Теорему 6*.
Нека је p прост број облика $p = 4k + 1$. Показаћемо коришћењем *Теореме 7* да се p може представити преко суме квадрата. На основу Вилсонове теореме знамо да важи да p дели $(p-1)! + 1$.

$$
\begin{aligned}
&(p-1)! + 1 = \\
&= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k) \cdot (2k+1) \cdot (2k+2) \cdot \ldots \cdot (4k-1) \cdot (4k) + 1 \\
&= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k) \cdot (p-2k) \cdot (p-(2k-1)) \cdot \ldots \cdot (p-2) \cdot (p-1) + 1 \\
&= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k) \cdot (-2k) \cdot (-(2k-1)) \cdot \ldots \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \\
&= (-1)^{2k}\left((2k)!\right)^2 + 1 = \left((2k)!\right)^2 + 1.
\end{aligned}
$$

Добили смо да је a из *Теореме 7* једнако $(2k)!$. И на основу *Теореме 7* имамо да се p може представити као збир два квадрата.

□

Теорема 6 у комбинацији са Задатком 3 (б), имплицира да међу вредностима од $f(x, y) = x^2 + y^2$ има бесконачно много простих бројева. Размотрићемо следећа три задатка.

Задатак 9 •

Доказати да ниједан прост број облика $4k + 3$ *није збир два квадрата.*

• •

Решење Задатка 9:

Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да је $n = 4k + 3 = a^2 + b^2$ за два природна броја a и b. Пошто је n непаран, један од бројева, рецимо a мора да буде паран, и други број b мора бити непаран. Тако $a = 2a_1$ и $b = 2b_1 + 1$ за неке a_1 и b_1. Отуда

$$a^2 + b^2 = (2a_1)^2 + (2b_1 + 1)^2 = 4(a_1^2 + b_1^2 + b_1) + 1.$$

То значи да је n облика $4k + 1$ и није облика $4k + 3$, што нам даје контрадикцију.

■

ЗАДАТАК 10

Доказати да се ниједан прост број облика $4k+1$ не може представити као збир два квадрата на два различита начина, изузев ако сабирци замене места (тј.: ако је $p=a^2+b^2$ и $p=c^2+d^2$, онда је или $a=c$ и $b=d$, или $a=d$ и $b=c$).

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 10:

Претпоставимо да је $p=a^2+b^2=c^2+d^2$. У том случају

$$p^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

p^2 можемо изразити на следећа два начина:

$$p^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \tag{9}$$

или

$$p^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 . \tag{10}$$

Штавише

$$(ac+bd)(ad+bc)=(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab=p(cd+ab). \tag{11}$$

Из (11) следи да p дели најмање један од бројева $ac+bd$, $ad+bc$.

Случај 1:
Претпоставимо да p дели $ac+bd$. Онда је $ac+bd=kp$, где је k природан број. Ако то заменимо у (9), добијамо

$$p^2=p^2k^2+(ad-bc)^2,$$

односно

$$p^2(1-k^2)=(ad-bc)^2.$$

Како је $(ad-bc)^2\geq 0$, онда је и $p^2(1-k^2)\geq 0$. Како је k природан број, а лева страна мора бити већа или једнака нули, закључијемо да k мора бити једнако 1. Онда добијамо да је $p=ac+bd$ и $ad-bc=0$, и такође добијамода је $ad=bc$. Отуда

$$pa=a^2c+bad=a^2c+b^2c=(a^2+b^2)c=pc.$$

Из последње једнакости следи да је $a=c$. Онда добијамо да је $b=d$.

Случај 2:
Ако p дели $ad + bc$, онда је $ad + bc = tp$, где је t природан број. Ако то заменимо у (10) добијамо да је

$$p^2 = (ac - bd)^2 + p^2t^2,$$

односно добијамо

$$p^2(1 - t^2) = (ac - bd)^2.$$

Како је $(ac - bd)^2 \geq 0$, онда мора и $p^2(1 - t^2) \geq 0$. Како је t природан број, а лева страна мора бити већа или једнака од нуле, закључујемо да t мора бити једнако 1. Онда добијамо да је $p = ad + bc$ и $ac - bd = 0$, и такође добијамо да је $ac = bd$. У том случају

$$pa = a^2d + bac = a^2d + b^2d = (a^2 + b^2)d = pd.$$

Онда добијамо да је $a = d$ и да је $b = c$.

■

Задатак 11

Доказати да сваки непаран прост број може бити представљен на јединствен начин преко разлике два квадрата.

Решење Задатка 11:

Наш циљ је да пронађемо два природна броја a и b тако да је $p = a^2 - b^2$, што можемо записати и на следећи начин:

$$p = (a + b)(a - b).$$

Пошто је p прост, тада из претходних једнакости следи да је:

$$a + b = p \qquad \text{и} \qquad a - b = 1\,.$$

Онда добијамо да је

$$a = \frac{p+1}{2} \qquad \text{и} \qquad b = \frac{p-1}{2}.$$

p је непаран број већи од 1, па $(p + 1)/2$ и $(p - 1)/2$ су природни бројеви. Другим речима, p се може изразити као разлика два квадратна броја, на тачно један начин:

$$p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2. \qquad ■$$

3. Број π

Стари Египћани су за број π добили вредност 3,1605. Овај број су добили из обрасца за површину круга. Наиме, у нашој нотацији тај образац гласи

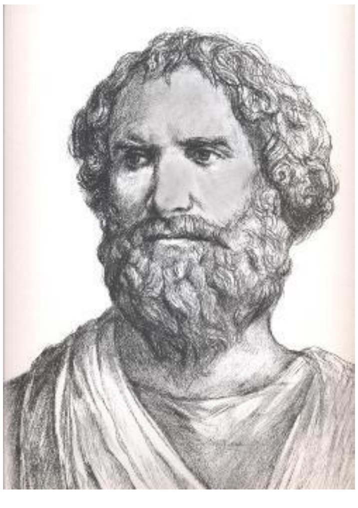
$$(R - R/9)^2, \quad \text{где је } R \text{ пречник круга.}$$

Овај образац је записан на такозваном Рајндовом папирусу, написаном око 1650. године пре нове ере.

Вавилонска, јеврејска и кинеска мерења за π дају приближну вредност 3. Стари Индијци у религиозним књигама *Џаиниста* из шестог века пре нове ере за π добијају вредност 3,162.

Симбол π за однос обима и пречника круга уведен је у осамнаестом веку. Овај однос појавио се неминовно у свим древним културама које су се бавиле геометријским проблемима.

3.1. Архимедов алгоритам за рачунање броја π



Један од најважнијих раних радова о процени броја π урадио је Архимед из Сиракузе (трећи век пре Христа). Постоје тврдње, да је Архимед путовао у Египат, посебно у Александрију, где се школовао. Његова комуникација са Александријским музејом и његовим сарадницима никада није престала. Архимед је први математичар, а уз Платона и Аристотела и један од ретких мислилаца антике, који је за живота стекао велику славу. Она је, иронично, почивала управо на његовим проналасцима у механици и ратној технологији, а не на математичким радовима због којих га данас славимо. Од својих резултата сам се највише поносио одређењем површине и запремине лопте и ваљка, изложеном у спису *О лопти и ваљку* у две књиге, и зато су му, по његовој жељи, пријатељи и сродници на надгробни споменик ставили ваљак с лоптом у њему. Дао је значајан допринос у механици и астрономији. Открио је закон полуге, први егзактно доказао законе равнотеже, јасно схватио појам специфичне тежине и у спису *О пловећим телима* утврдио принципе хидростатике. Прославио се сјајним изумима у механици.

У својој расправи *На мерењу круга*, Архимед је коришћењем описаног и уписаног полигона са 96 страница показао да

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}. \tag{12}$$

Ова необично тачна апроксимација није била суштински побољшана више од 1800 година. Прави значај овог Архимедовог резултата није у степену тачности већ у генијалном поступку обрачуна.

Архимед користи чињеницу да обим круга k лежи између обима C_n и I_n, описаног n-тоугла и уписаног n-тоугла за $n \geq 3$. Он користи такозвани метод исцрпљивања. Повећањем броја страница многоугла, обим многоугла све више тежи обиму круга. Дакле, што више страница има, правилни многоугао тежи кругу. Повећањем n смањујемо разлику $C_n - I_n$. На основу тога можемо закључити да узимањем довољно велике вредности n, обим круга k се приближава обиму многоугла са све већом тачношћу.

Посебно достигнуће Архимеда је било што је осмислио рекурентне формуле, изражавајући C_{2n} и I_{2n} преко C_n и I_n.

ЗАДАТАК 12• •

Доказати да за било које $n \geq 3$

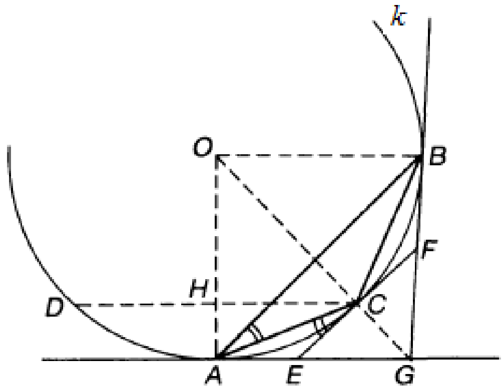
(а) $$C_{2n} = \frac{2C_nI_n}{C_n + I_n}$$

и

(б) $$I_{2n} = \sqrt{I_nC_{2n}}.$$

• •

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 12:



Слика 1

На Слици 1 тачка O је центар круга k, AB је страна уписаног правилног n-тоугла у k, AC и CB су странице уписаног правилног $2n$-тоугла. EF је страница описаног $2n$-тоугла и AG је половина странице описаног правилног n-тоугла. Тетива DC је једнака AB.

Нека је $AB = i_n,\ AC = i_{2n},\ EF = c_{2n},\ AG = \frac{1}{2}c_n$.
(а) Да бисмо изразили c_{2n} преко c_n и i_n, размотрићемо следећа два пара сличних троуглова: EGC и OGA, и OHC и OAG.
Поређење њихових страна доводи до пропорција:

$$EC:EG = OA:OG = OC:OG = HC:AG,$$

што је

$$\frac{c_{2n}}{2} : \left(\frac{c_n}{2} - \frac{c_{2n}}{2}\right) = \frac{i_n}{2} : \frac{c_n}{2}.$$

То подразумева да

$$c_{2n} = \frac{c_n i_n}{c_n + i_n},$$

или

$$2nc_{2n} = \frac{2nc_n \cdot ni_n}{nc_n + ni_n} \tag{13}$$

$2nc_{2n}, nc_n$ и ni_n су обими C_{2n}, C_n, I_n описаног $2n$-тоугла, описаног n-тоугла, и уписаног n-тоугла, редом. Тако (13) можемо записати и на следећи начин:

$$C_{2n} = \frac{2C_n I_n}{C_n + I_n}.$$

(б) i_{2n} може бити изражено преко i_n и c_{2n} разматрањем сличних троуглова AEC и ACB. Пропорција $AE:AC = AC:AB$ доводи до

$$i_{2n} = \sqrt{\frac{c_{2n}}{2} \cdot i_n},$$

другачије записано, добијамо да је

$$2ni_{2n} = \sqrt{2nc_{2n} \cdot ni_n}.$$

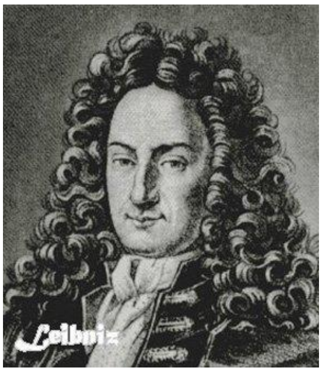
Другим речима

$$I_{2n} = \sqrt{C_{2n} I_n}.$$

□
■

Архимед је за почетак изабрао правилни шестоугао где је $C_6 = 4\sqrt{3}r$ и $I_6 = 6r$ (r је полупречник круга). Коришћењем формуле након четири корака он је нашао $C_{96} = 3\frac{10}{70}$ и $I_{96} = 3\frac{10}{71}$ и добили смо (12).
Метод изведен од стране Архимеда данас је познат као Архимедов алгоритам за израчунавање броја π.

3.2. Божја радост у непарним бројевима: Лајбницов ред за π изведен из Григоријевог реда за arc tg



Лајбниц (Gotfrid Vilhelm Lajbnic 1646 - 1716) је немачки филозоф, математичар, проналазач, правник, историчар, дипломата и политички саветник. Рођен је у протестантској породици у Лајпцигу, где је његов отац био професор Универзитета. Још као дечак, Лајбниц потпуно сам стиче огромно знање служећи се веома богатом очевом библиотеком. Заузима подједнако значајно место у историји филозофије и у историји математике. У филозофији остаће најпознатији по оптимизму, нпр. по свом закључку да је Бог створио најбољи свет од свих могућих светова. Упркос његовом широком интересовању и бројним научним радовима из области математике, физике, теологије, метафизике, нема много објављених дела. Писао је на латинском, француском и немачком и то о политици, праву, етици, теологији, историји и филологији. На његово дело су утицали Платон, Аристотел, Декарт и Хајгенс. Изумео је машину за рачунање, која је била још боља од Паскалове.

'Numero deus impari gaudet' – 'Бог ужива у непарним бројевима', узвикнуо је Лајбниц, 1674. године када је објавио своје откриће за π :

Број $\frac{\pi}{4}$ је збир бесконачног низа свих реципрочних непарних природних бројева са наизменичним знаком.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots. \tag{14}$$

Овај Лајбницов резултат је специјалан случај реда за arctg , што је открио Григорије[7] 1671. године.

Теорема 7: За $0 < x \leq 1, \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$

Описаћемо доказ *Теореме 7*, у неколико корака.

1. **корак доказа једнакости (14) :**
   Решити следећи задатак:

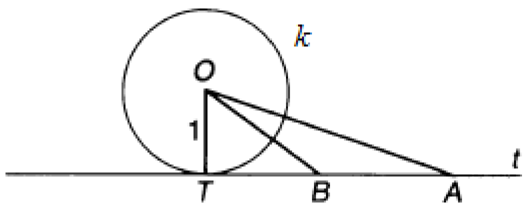
Задатак 13 ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Ако су a и b два броја таква да важи $a > b \geq 0$, доказати да

$$\frac{1}{1+a^2} < \frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a-b} < \frac{1}{1+b^2} \qquad (15)$$

●●

Упутство:
Са Слике 2 се види да је OT полупречник јединичног круга k, t је тангента на круг k у тачки T, и А и В су две тачке на t тако да важи $AT = a$ и $BT = b$.



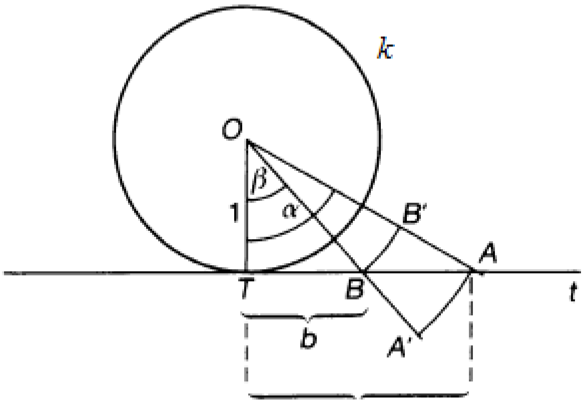
Слика 2

Решење задатка 13:

Погледајмо мало детаљније Слику 3. Област троугла OAB је између области кружних исечака OBB' и $OA'A$, па важи следећа неједнакост:

$$\frac{1}{2}OB^2(\alpha - \beta) < \frac{1}{2}BA \cdot 1 < \frac{1}{2}OA^2(\alpha - \beta). \qquad (16)$$

[7] Gregory, James (1638-75), шкотски математичар. Сматра се Њутновим претходником због свог важног рада на бесконачним процесима.



Слика 3

На основу

$$OB^2 = 1 + b^2, OA^2 = 1 + a^2, BA = a - b,$$

и

$$\alpha - \beta = \operatorname{arctg} \frac{a}{1} - \operatorname{arctg} \frac{b}{1},$$

Из неједнакости (16) добијамо неједнакости

$$\frac{1}{1 + a^2} < \frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a - b} < \frac{1}{1 + b^2}. \tag{17}$$

што је и требало показати.

■

2. **корак доказа једнакости (14):**

Неједнакост (15) открива везу између $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ и функције $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Наш следећи задатак је да се одреди средња вредност функције $f(x)$ на интервалу од 0 до x:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(\delta) + f(2\delta) + \cdots + f(n\delta)}{n}, \qquad \text{где је } \delta = \frac{x}{n}.$$

Задатак 14 ••••••••••••••••••••••••••••••••••••••

Доказати да је средња вредност од $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ једнака $\mu = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

••

Решење задатка 14:

Нека је $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Поделимо интервал $[0, x]$ на n једнакоих делова $\delta = \frac{x}{n}$. Искористимо неједнакост (17) за $a = i\delta,\ b = (i-1)\delta,\ i = 1, 2, \dots, n$. Добијамо следећу формулу:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i\delta) < \frac{\operatorname{arctg} x}{\delta} < \sum_{i=1}^{n} f\big((i-1)\delta\big) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i\delta) \tag{18}$$

Из неједнакости (18) дељењем са n, долазимо до следеће неједнкости

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(i\delta) < \frac{\operatorname{arctg} x}{x} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(i\delta) + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right). \tag{19}$$

Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) = 0,$$

неједнакост (19) имлицира да је средња вредност μ од $f(x) = 1/(1+x^2)$ једнака

$$\mu = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

■

3. корак доказа једнакости (14):

Знамо да $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ задовољава следећу функционалану једначину:

$$f(x) = 1 - x^2 f(x). \tag{20}$$

Задатак 15• •

(а) Коришћењем (20) показати да важи

$$1 - x^2 + x^4 - \cdots - x^{4n-2} < \frac{1}{1+x^2} < 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + x^{4n}.$$

(б) Коришћењем дела задатка а), показати да важи:

$$1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots - \frac{x^{4n-2}}{4n-1} < \frac{\operatorname{arctg} x}{x} < 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots + \frac{x^{4n}}{4n+1}.$$

• •

Решење задатка 15:

(а) Индукцијом се може доказати да је

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^k x^{2k}$$

за $k = 0, 1, 2, \ldots.$

Отуда

$$1 - x^2 + \cdots + (-1)^{2n-1}x^{4n-2} < \frac{1}{1+x^2} < 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{2n}x^{4n}. \qquad (21)$$

Означимо збир $1 - x^2 + \cdots + (-1)^k x^{2k}$ са $S_k(x)$, и његову средњу вредност над $[0, x]$ са μ_k. С обзиром на (21) средња вредност μ, од $1/(1+x^2)$ над $[0, x]$ лежи између μ_{2n-1} и μ_{2n}:

$$\mu_{2n-1} < \mu < \mu_{2n}. \qquad (22)$$

Према дефиницији средње вредности , ако је $\delta = x/n$, онда

$$\mu_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left[\delta^{2i} + (2\delta)^{2i} + \cdots + (n\delta)^{2i}\right].$$

Сума $\delta^{2i} + (2\delta)^{2\delta} + \cdots + (n\delta)^{2i}$ може бити написана као

$$\delta^{2i}\left(1^{2i} + 2^{2i} + \cdots + n^{2i}\right) = \delta^{2i} S_{2i,n}$$

где је $S_{2i,n} = 1^{2i} + 2^{2i} + \cdots + n^{2i}$ полином по n, степена $2i+1$ са водећим коефицијентом $1/(2i+1)$. Према томе

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^i\left(\delta^{2i} + (2\delta)^{2i} + \cdots + (n\delta)^{2i}\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^i \delta^{2i}}{n} \cdot \frac{n^{2i+1}}{2i+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^i (x/n)^{2i}}{n} \cdot \frac{n^{2i+1}}{2i+1} = \frac{(-1)^i x^{2i}}{2i+1}.$$

Дакле

$$\mu_k = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k+1}. \qquad (23)$$

Средња вредност од $1/(1+x^2)$ је $\operatorname{arctg} x/x$, према томе (22) и (23) доводе до тога да је

$$1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots-\frac{x^{4n-2}}{4n-1}<\frac{\operatorname{arctg} x}{x}<1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+\frac{x^{4n}}{4n+1}. \tag{24}$$

■

ЗАДАТАК 16 ••••••••••••••••••••••••••••••••••••

(а) Доказати Теорему 7

(б) Извести да је $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$, као специјалан случај Теореме 7.

••

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 16:

(а) Из (24) следи

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots-\frac{x^{4n-1}}{4n-1}<\operatorname{arctg} x<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,. \tag{25}$$

Разлика

$$d_n=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\operatorname{arctg} x$$

је мања него разлика

$$d_n'=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots-\frac{x^{4n-1}}{4n-1}\right)=\frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

Ако је $0<x\leq 1$, онда је $\lim_{n\to\infty} d_n'=0$. Онда такође добијамо да је $\lim_{n\to\infty} d_n=0$. Стога (25) доводи до Григоријевог аркус тангенс реда:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

(б) Заменом $x=1$ у Грегоријев ред добијамо Лајбницову формулу за π:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

■

3.3. π и вероватноћа : Бифонов проблем игле

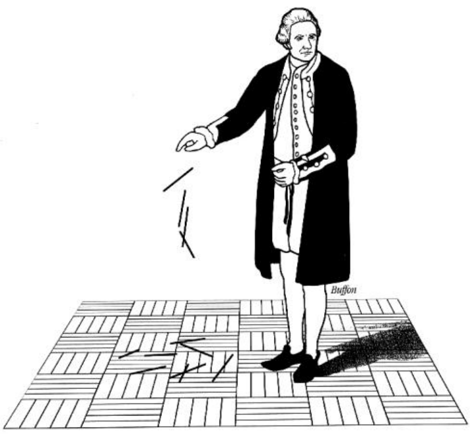
Бифон (Buffon, Comte de, Georges Louis Leclerc 1707 - 1788) је француски природњак и писац. У осамнаестом веку Бифон је почео да примењује вероватноћу на геометријске проблеме, његов рад је покренуо нову грану теорије вероватноће. Данас се то зове геометријска вероватноћа.

Занимљиво је напоменути да Бифон није био математичар, већ су биологија и ботаника били његова главна интересовања. Био је оснивач и чувар *Jardin des Plantes*, Париске Ботаничке баште.

Бифон је предложио следећи проблем:

Претпоставимо да је танка шипка бачена у ваздух у просторији чији је под направљен од једнаких паралелних плоча. Један од два играча клади се да шипка неће сећи неку од паралелних плоча. Други се клади супротно. Који од њих двојице има више шансе?

Бифон је предложио играње игре на контролној табли са шиваћом иглом.



ЗАДАТАК 17

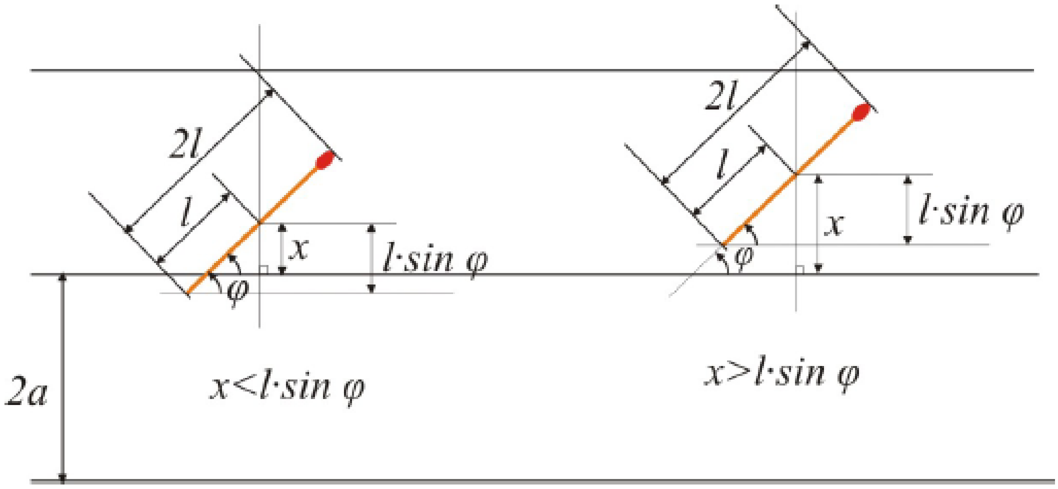
Доказати да ако дужина игле $2l$, није већа од ширине даске $2a$, онда је вероватноћа да игла сече даску

$$p = \frac{2l}{\pi a}. \tag{26}$$

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 17:

Нека је тачка C средиште игле. Означимо са x удаљеност центра игле (тачке C) до најближе паралелне праве, и са φ угао између правца који одређује игла, и паралелне праве која је најближа центру игле.

Можемо разликовати два скупа догађаја: скуп догађаја са позитивним исходом, и скуп свих могућих исхода.



Слика 4

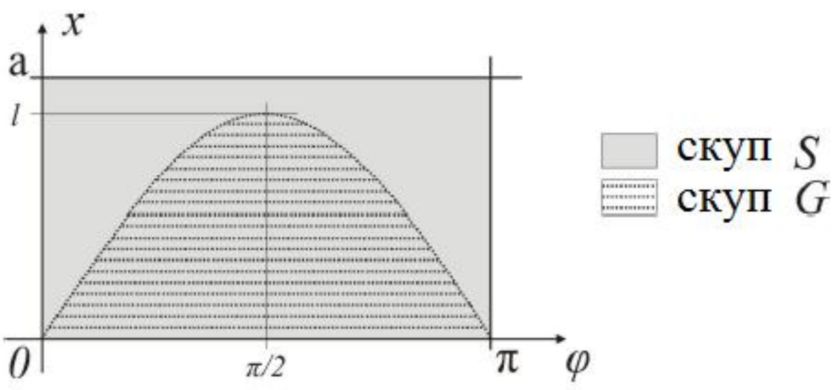
Да би игла секала неку од паралелних правих, мора да важи да је $x < l \cdot \sin\varphi$ (Слика 4), тј. скуп догађаја са повољним исходом је

$$G = \{(\varphi, x) \colon x < l \cdot \sin\varphi\}.$$

Скуп могућих догађаја означимо са S,

$$S = \{(\varphi, x) \colon 0 \le \varphi \le \pi \land \ 0 \le x \le a\}.$$

Можемо и графички представити ова два скупа (Слика 5).



Слика 5

Тражена вероватноћа p једнака је количнику површина области G и S.

$$P_G = \int_0^{\pi} l \cdot \sin\varphi d\varphi = l \cdot \left[-\cos(\varphi)\Big|_0^{\pi}\right] = -l \cdot (\cos\pi - \cos 0) = 2l. \tag{27}$$

$$P_S = a \cdot \pi \tag{28}$$

На основу (27) и (28) добијамо да је вероватноћа p догађаја да случајно бачена игла падне на један од паралелних праваца:

$$p = \frac{P_G}{P_S} = \frac{2l}{\pi a}. \tag{29}$$

Из (29) следи да је вероватноћа да игла пресеца AB већа од $\frac{1}{2}$ ако и само ако $2\ell/(\pi a) > \frac{1}{2}$, одакле добијамо да је $\ell/a > \pi/4 > 0.785399$. Ово значи да уколико је дужина игле, рецимо, $\frac{4}{5}$ ширине даске, већа ће бити шанса да се пресеку паралелне праве. Са друге стране, ако је дужина игле рецимо $\frac{3}{4}$ ширине даске, шансе ће бити мање да се пресеку паралелне праве.

■

У деветнаестом веку формула (26) коришћена је у неколико наврата за процену броја π. 1850. године Волф је у Цириху бацио 36mm дугачку иглу 5000 пута на скуп паралелних линија 45mm раздвојених, и добијена вредност је $p \approx 0{,}5064$ и тиме вредност $\pi \approx 3{,}1596$. Енглез, Капетан Фокс пронашао је вредност 3.1419 за π на основу 1100 бацања.

4. Примена комплексних бројева и кватерниона

Имагинарни бројеви који су изражени преко квадратних корена негативних бројева, настали су још у шеснаестом веку, приликом решавања кубних једначина. Поред тога темељи теорије комплексих бројева, који уопштавају појам реалних бројева, постављени су две стотине година касније, захваљујући раду Гауса.

Данас се математика не може замислити без комплексних бројева. Они имају велику примену у физици, електротехници, хидромеханици, аеромеханици итд.

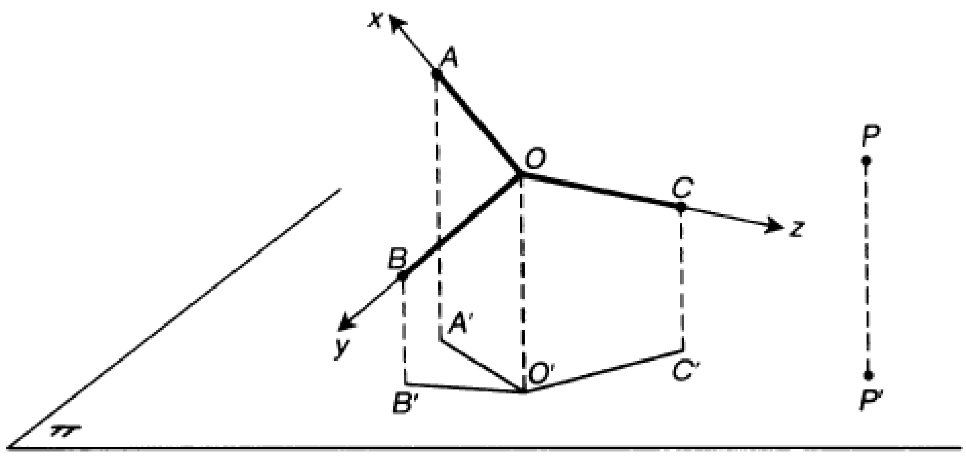
4.1. Гаусова теорема аксонометрије

Карл Фридрих Гаус (Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)) је био немачки математичар и научник који је дао значајан допринос у многим пољима, укључујући теорију бројева, анализу, диференцијалну геометрију, геодезију, електростатику, астрономију, оптику. Сматра се једним од најутицајнијих математичара у историји. Гаус је рано показао своју математичку даровитост. Позната је анегдота која каже да је једном приликом Гаусов учитељ задао да се саберу сви бројеви од 1 до 100, вероватно да би „запослио ученике“. На његово велико изненађење, Гаус (који је тада имао 7 година) одмах је донео свој резултат: 5050. Ево како је млади математичар то решио: Посматрајући низ 1, 2, 3, 4, ... ,97, 98, 99, 100, чије је чланове требало сабрати, уочио је извесну законитост: када спари 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98, и тако даље, увек добије збир 101. Таквих парова има тачно 50. Отуда је тражени збир једнак $50 \times 101 = 5050$. Овај поступак назван је „*Гаусов поступак*“.

Гаус је користио комплексне бројеве у више наврата за решавање задатака који укључују реалне бројеве. Понекад употребом комплексних бројева решење је једноставније а понекад је и формула елегантнија.

Ми ћемо описати Гаусову примену комплексних бројева на аксонометрију. Аксонометрија се бави пројекцијама објеката на фиксираним равнима. Ту фиксирану раван ћемо обележавати са π. Да би се олакшало цртање, тродимензиони координатни систем $\mathbb{C}$ са центром O и координатним осама O_x, O_y и O_z је постављен у простор. Да бисмо употпунили систем, поставићемо једнаке дужи OA, OB и OC на x, y и z осе редом. Структуру формирану од OA, OB и OC називамо троножац $OABC$.

Свака тачка P објекта који се пројектује на раван π, има координате x, y и z у координатном систему $\mathbb{C}$, и њена пројекција P' се налази на π. P' смо добили помоћу троножасте пројекције на π. (Слика 5)



Слика 5

Један од основних проблема аксонометрије је да одговори на следеће питање:

Када могу три компланарне али неколинеарне дужи $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$ представљати ортогоналну пројекцију троножца?

Да би решио поменути проблем, Гаус је поставио координатни систем у равни π која садржи O', A', B' и C' са центром у O', и две међусобно ортогоналне иначе произвољне праве линије кроз O', као x' и y' осе.

Узимањем тако да је x'-оса реална, а y'-оса имагинарна оса, уведени су комплексни бројеви. На овај начин тачка $P'(x', y')$ у равни преставља комплексан број $c_{p'} = x' + iy'$. Конкретно тачке A', B' и C' су представљене помоћу комплексних бројева $c_{A'}, c_{B'}$ и $c_{C'}$, редом.

Због увођења комплексних бројева, услов за $O'A'B'C'$ да буде ортогонална пројекција троножца $OABC$, формулисао је Гаус у следећем практичном једноставном облику квадратне једначине:

Задатак 18

Ако су три неколинеарне дужи $O'A', O'B'$ и $O'C'$ у равни π ортогоналне пројекције троножца, доказати да је

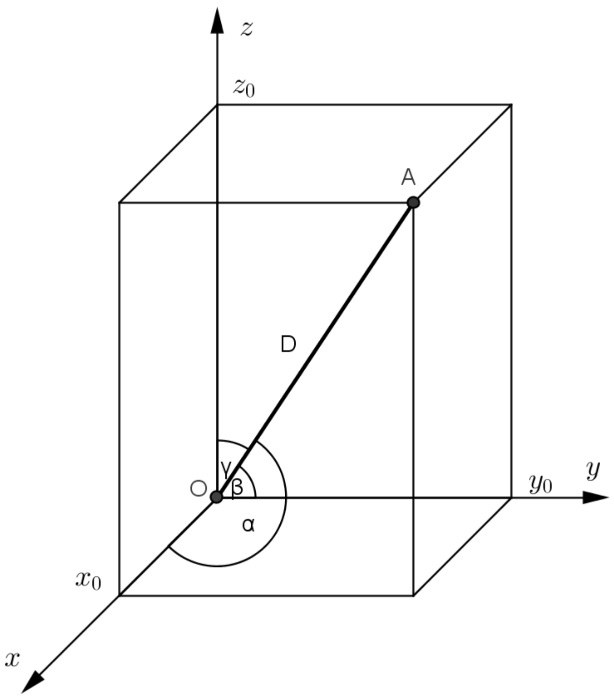
$$c_{A'}^2 + c_{B'}^2 + c_{C'}^2 = 0.$$

Овај задатак је у литератури познат као Гаусова фундаментална теорема аксонометрије. За решавање овог задатка биће нам потребна следећа лема коју ћу и доказати.

Лема 3: Нека вектор положаја тачке $A(x_0, y_0, z_0)$ у координатном систему $Oxyz$ заклапа са координатним осама x, y и z углове α, β и γ. Тада је

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

Доказ Леме 3:



Слика 6

На слици 6 се види да је D дијагонала ове призме коју смо добили. Дијагонала основе коју граде осе x и y је једнака $\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}$, па је дијагонала D једнака:

$$D = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2}.$$

Очигледно је:

$$x_0 = D\cos\alpha$$
$$y_0 = D\cos\beta$$
$$z_0 = D\cos\gamma.$$

Ако квадрирамо све три једнакости, и саберемо леве и десне стране, добијамо:

$$\underbrace{{x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2}_{D^2} = D^2(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma)$$

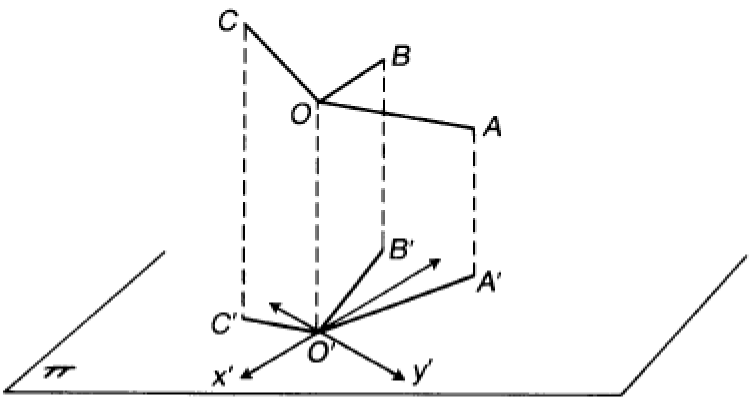
$$D^2 = D^2(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma)$$

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

■

Решење задатак 18 (Гаусова фундаментална теорема аксонометрије):

Претпоставимо да су $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$ нормалне пројекције „ногу“ OA, OB и OC троножца $OABC$ на раван π. Узмимо заједничку дужину дужи OA, OB и OC као нашу јединицу дужине.



Слика 7

Означимо углове између OA, OB и OC и x'-осе са α, β и γ редом, и углове између OA, OB и OC и y'-осе са α', β' и γ', редом. Тада је:

$$c_{A'} = \cos\alpha + i\cos\alpha', \qquad c_{B'} = \cos\beta + i\cos\beta', \quad c_{C'} = \cos\gamma + i\cos\gamma'$$

и

$$c_{A'}^2 + c_{B'}^2 + c_{C'}^2 = (\cos\alpha + i\cos\alpha')^2 + (\cos\beta + i\cos\beta')^2 + (\cos\gamma + i\cos\gamma')^2 =$$
$$= (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2i(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')$$
$$-(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma').$$

Како су $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ косинуси углова које x'-оса заклапа са осама у координатном систему $\mathbb{C}$ формираном од OA, OB и OC, и пошто су OA, OB и OC међусобно ортогоналне, онда на основу Леме 3 добијамо да је:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Слично, $\cos\alpha', \cos\beta'$ и $\cos\gamma'$ су косинуси углова које y'-оса заклапа са осама у $\mathbb{C}$, према томе такође на основу Леме 3 добија се да је:

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1.$$

Пошто су у питању јединични вектори, онда је$|\vec{u}| = |\vec{v}| = D = 1$ добијамо да је:

$$\vec{u}(x_0, y_0, z_0) = D(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$
$$\vec{v}(x_0, y_0, z_0) = D(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma') = (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma').$$

Како знамо да су осе x' и y' ортогоналне, онда су и вектори на овим осама ортогонални, па њихов скаларни производ мора бити једнак нули. Како је $\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$ скаларни производ ових јединичних вектора са узајамно ортогоналном x'-осом и y'-осом, онда је

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Наведени аргументи указују на то да је

$$c_{A'}^2 + c_{B'}^2 + c_{C'}^2 = 1 + 0 - 1 = 0.$$

■

4.2. Лагранжов идентитет производа сума четири квадрата представљених кватернионима

Добро је познато да се комплексни бројеви користе за доказивање следећих тврђења:

Задатак 19 ●

Ако су два природна броја n_1 и n_2 изражена као сума два квадрата, доказати да је њихов производ $n_1 n_2$ такође изражен као збир два квадрата.

● ●

Решење задатака 19:

Претпоставимо да

$$n_1 = a_1^2 + b_1^2 \qquad \text{и} \qquad n_2 = a_2^2 + b_2^2 .$$

$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ и $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ могу се посматрати као модули $|z_1|$ и $|z_2|$ комплексних бројева $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$, редом.
Пошто је $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$ и

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1),$$

следи да је

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2},$$

односно добија се

$$(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2.$$

Бројеви $a_1a_2 - b_1b_2$ и $a_1b_2 + a_2b_1$ су реални цели бројеви. Тако последња једнакост подразумева да је n_1n_2 збир два квадрата.

■

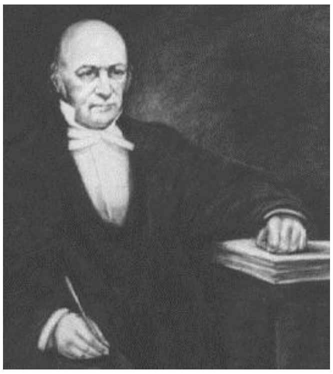
Задатак 19 је уопштио Лагранж (осамнаести век) до суме четири квадратна броја.

Теорема 8 (Лагранжов идентитет): Ако су два природна броја n_1 и n_2 *изражени као сума четири квадратна броја, онда је њихов производ* n_1n_2 *такође изражен као сума четири квадратна броја.*

Циљ нам је да опишемо доказ Теореме 8, проширивањем Задатка 19. Тако уводимо кватернионе као генерализацију комплексних бројева.

Кватернионе је измислио Хамилтон у деветнаестом веку као резултат покушаја да опише ротацију у тродимензионом простору математичким формулама.

Хамилтон (*Hamilton,* William Rowen (1805-65)) је био славни ирски математичар. Његова интересовања у примени математике у физици довела су до стварања кватерниона. Дао је значајан допринос развоју оптике, динамике и алгебре.



У најранијој младости Хамилтон испољава таленат у области лингвистике, песништва и уопште књижевности и филозофије. На њега је велики утицај имао његов ујак Џејмс Хамилтон. Са тринаестак година знао је исто толико језика. Лингвистика, као и класична литература, заокупљали су га читавог живота. Врло рано је испољио математички таленат. Завршио је студије на Тринит колеџу (Trinity College) у Даблину. По завршетку студија добио је место професора математике и астрономије на Тринит колеџу. У свету математике постао је познат по кватернионима.

Хамилтон је знао да комплексни бројеви $x + iy$, које је посматрао и као уређене парове (x, y), могу да се користе за описивање ротације у равни. Ако је P тачка у комплексној равни, којој одговара комплексни број $z = x + iy$, онда је слика P' од P ротацијом за θ око координатног почетка O(0,0), представљена са $z' = e^{i\theta}z$ (где је $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$).

Хамилтонова оригинална идеја за ротирање у простору увођењем нових бројева представљених преко тројке реалних бројева, завршена је неуспехом. Међутим после петнаест година борбе, Хамилтон је открио да се ротација у тродимензионом простору мора изразити увођењем уређене четворке реалних бројева. Хамилтон назива ову четворку кватернионом. Он је дефинисао сабирање и множење кватерниона.

Означимо четворке (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) и (0,0,0,1) као $1, i, j$ и k редом. Онда четворка $q = (w, x, y, z)$ може бити записана као $q = w + xi + yj + zk$. Сабирање две четворке $q_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$ и $q_2 = w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$ дефинисано је по координатама то јест

$$q_1 + q_2 = (w_1 + w_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k.$$

Производ $q_1 q_2$ се израчунава коришћењем дистрибутивног и асоцијативног закона.

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k)(w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k) \\ &= (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k)w_2 + (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k)(x_2 i) \\ &\quad + (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k)(y_2 j) + (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k)(z_2 k) \\ &= w_1 w_2 + x_1 i w_2 + y_1 j w_2 + z_1 k w_2 + w_1 x_2 i + x_1 i x_2 i + y_1 j x_2 i + z_1 k x_2 i \\ &\quad + w_1 y_2 j + x_1 i y_2 j + y_1 j y_2 j + z_1 k y_2 j + w_1 z_2 k + x_1 i z_2 k + y_1 j z_2 k + z_1 k z_2 k \end{aligned} \quad (30)$$

По дефиницији, производи ri, rj и rk су комутативни са било којим реалним бројем, али

$$ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j,$$

имамо да је

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Тако (30) може бити поједностављеноо тако да је

$$q_1q_2 = (w_1w_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (w_1x_2 + x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2)i$$
$$+(w_1y_2 - x_1z_2 + y_1w_2 + z_1x_2)j + (w_1z_2 + x_1y_2 - y_1x_2 + z_1w_2)k.$$

Слично као и код комплексних бројева, можемо дефинисати операцију коњуговања. Ако је $q = w + xi + yj + zk$, онда његов коњугат дефинишемо са $\bar{q} = w - xi - yj - zk$. Такође, важе и следећа својстав:

$$\bar{\bar{q}} = q$$
$$\overline{(q_1 + q_2)} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$$
$$\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$$
$$q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q$$

Овде ћемо нагласити основни значај кватерниона у историји агебре.

Према дефиницији Хамилтона, множење кватерниона није комутативно: $ij \neq ji$, $jk \neq kj$, $ki \neq ik$ и, уопште, q_1q_2 није нужно једнако q_2q_1. Стварање не комутативне алгебарске операције био је револуционарни корак у математици. Он је одиграо кључну улогу у рађању нове гране, теорије алгебарских структура (укључујући групу, поље, прстен и векторски простор).

Кватерниони облика $w + xi + 0j + 0k$ могу да се идентификују са комплексним бројевима $w + xi$. Тако кватерниони представљају генерализацију комплексних бројева. Једно такво својство се односи на модул, или норму кватерниона, и може се применити да се докаже *Теорема 8.*

Норма $|q|$кватерниона $q = w + xi + yj + zk$ је реалан број

$$|q| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Можемо проверити шта је $q \cdot \bar{q}$:

$$\begin{aligned} q \cdot \bar{q} &= (w + xi + yj + zk) \cdot (w - xi - yj - zk) \\ &= w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= |q|^2. \end{aligned}$$

Дошли смо до још једног својства, да је $q \cdot \bar{q} = |q|^2$, односно

$$|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}}.$$

ЗАДАТАК 20 •

(а) Доказати следећу мултипликативну особину норме:
За кватернионе q_1 и q_2 норма њиховог производа једнака је производу њихових норми ($|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$).
(б) Доказати Теорему 8.

• •

Напомена: Поставља се питање: Могу ли се Задатак 19 и Теорема 8 генерализовати на суму n квадрата? Другим речима: За које вредности природног броја n је тачно да кад год s_1 и s_2 су суме n квадрата, онда се њихов производ $s_1 s_2$ такође може изразити као збир n квадрата – тако да су сабирци од $s_1 s_2$ билинеарне комбинације сабирака s_1 и s_2.

Одговор на горње питање, дао је Хурвиц[8] и одговор је јако упечатљив: n може бити само 1, 2, 4 или 8.

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 20:

(а) Ако је $q_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$ и $q_2 = w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$, онда је
$q_1 q_2 = w_3 + x_3 i + y_3 j + z_3 k$,

где је

$$\left.\begin{aligned} w_3 &= w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \\ x_3 &= w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ y_3 &= w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2 \\ z_3 &= w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2 \end{aligned}\right\}. \tag{31}$$

Како хоћемо да докажемо да је $|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$, кренимо од леве стране једнакости користећи својства која сам навела изнад, и дођимо до десне стране једнакости.

$$\begin{aligned} |q_1 q_2| &= \sqrt{q_1 \cdot q_2 \cdot \overline{q_1 \cdot q_2}} \\ &= \sqrt{q_1 \cdot q_2 \cdot \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}} \\ &= \sqrt{q_1 \cdot |q_2|^2 \cdot \overline{q_1}} \\ &= \sqrt{q_1 \cdot \overline{q_1} \cdot |q_2|^2} \\ &= \sqrt{|q_1|^2 \cdot |q_2|^2} \\ &= |q_1||q_2|. \end{aligned}$$

Другачије записано, добијамо да је:

$$\sqrt{w_3^2 + x_3^2 + y_3^2 + z_3^2} = \sqrt{w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{w_2^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

(б) Претпоставимо да за $t = 1, 2$,

[8] Hurwitz*,* Adolf (1859-1919), немачки математичар из друге половине деветнаестог века.

$$n_t = w_t^2 + x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 \text{ где су } w_t, x_t, y_t \text{ и } z_t \text{ су цели бројеви.} \tag{32}$$

Размотримо кватернионе $q_t = w_t + x_t i + y_t j + z_t k$ са нормом $\sqrt{n_t}$ за $t = 1, 2$. Из (a):

$$n_1 n_2 = |q_1 q_2|^2 = w_3^2 + x_3^2 + y_3^2 + z_3^2.$$

Из (31) и (32) следи да су w_3, x_3, y_3 и z_3 цели бројеви. Према томе $n_1 n_2$ је збир четири квадрата.

■

5. Еуклидска и нееуклидска геометрија

Математичка теорема је математички исказ чија исправност мора бити доказана. Доказ теореме мора се извести из других изјава које са своје стране морају да се докажу користећи раније изјаве. Пошто овај процес мора негде почети, било која математичка дисциплина мора да се заснива на одређеном броју почетних тврдњи – на аксиомама или постулатима – чија истинитост је прихваћена без питања. Свака теорија почива на што мањем броју аксиома, и ни једна аксиома се не може извести као последица преосталих.

5.1. Еуклидска геометрија

Већ смо рекли да је стари Грк, око 300. година пре Христа, Еуклид, један од највећих математичара свих времена, дао опширан аксиоматски третман геометрије у својим прослављеним *Елементима*. Ово је најранији пример употребе аксиоматског метода у историји математике.

У наредним вековима Пети Еуклидов постулат, привукао је велику пажњу. У поједностављеној формулацији постулата наводи се да:

($\mathbb{P}$) Ако је m права линија у равни π, а P је било која тачка у π али не и на m, онда постоји тачно једна права линија m' у π која пролази кроз P а не пресеца m. Линија m' се назива паралела за m кроз P.

Много угледних геометричара веровало је да ($\mathbb{P}$) није постулат него теорема, и покушали су да га докажу. Покушаји су довели до многих спорова и контроверзи. Најзад у првој половини деветнаестог века Бољај и Лобачевски, независно један од другог, изградили су нови тип геометрије у којој Еуклидов постулат паралелности не важи.

Бољај (Bolyai János (1802 - 1860)) је био мађарски математичар. Један је од најзначајнијих математичара на пољу хиперболичке геометрије. Његов отац, Фаркаш Бољај, био је Гаусов друг из студијских дана. Фаркаш је послао Гаусу 1831. године рад свог сина Јаноша, који се тицао покушаја да се оповргне Еуклидов пети постулат, односно покушаја да се развије геометрија у којој би кроз тачку ван праве постојале, у истој равни, бар две праве које прву праву не секу. Гаус је одговорио Фракашу, да не сме хвалити младог Бољаја, јер би то значило да сам себе хвали. Цео садржај списа који су му послали, а и резултати до којих је млади Бољај дошао, подударали су се са Гаусовим властитим замислима. Гаус се том темом бавио још од 1800. године, али није ништа публиковао. За Бољаја је ово било велико разочарење. Он није могао, а није ни хтео да верује, да је Гаус самостално и много пре њега дошао до нееуклидске геометрије. Бољај је ипак свој рад објавио, али као додатак очевој књизи. Тај додатак није имао посебне везе са књигом, а поврх свега објављен је пре саме књиге. Бољајеве речи из писма оцу, написаног 1823. године, прве су у историји математике којима се најављује нова геометрија: *Открио сам ствари тако чудесне да сам ошамућен... ни из чега сам створио нови свет.*

Николај Иванович Лобачевски (1793 - 1856) је руски математичар, син архитекте, рођен у Новогордској области. Објавио је свој рад о нееуклидској геометрији, нешто обимнији од Бољајевог. Рад је објављен у Казањском гласнику, публикацији локалног Казањског универзитета на коме је Лобачевски провео читав живот. Своје резултате је успео да објави изван Русије, и то прво у Паризу 1837.године, па затим у Берлину 1840. године. Од тада његови радови постају стандард за новооткривену геометрију, јер Бољај није ништа више публиковао, али не треба мислити да је нова геометрија самим тим била прихваћена. Разматрао је варијанте петог постулата и јасно утврдио да постоје две геометрије, она у којој важи, еуклидска геометрија, и она у којој не важи, нееуклидска геометрија. Иако се Лобачевски потрудио да у четвртој и петој деценији века информише целу европску – што је тада значило светску – научну јавност о настанку нове геометрије, одзив је био слаб а противљења снажна.

У геометрији Бољаја и Лобачевског, $(\mathbb{P})$ је замењен следећим постулатом:

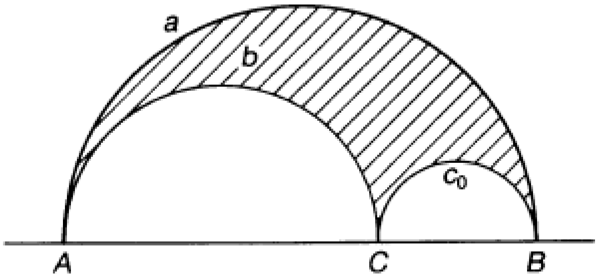
$(\mathbb{H})$ У датој равни π, која садржи произвољну тачку и линију, P и m, и P није на m, постоји више од једне линије које не секу m и пролазе кроз P.

Изградња нове геометрије, данас названа хиперболичка геометрија, може се сматрати једним од највећих математичких открића. Ова нова геометрија је променила концепт геометрије. У годинама које следе, створен је низ геометрија.

Геометрија у којој Еуклидов паралелни постулат $(\mathbb{P})$ не важи, зове се нееуклидска геометрија.

У овом одељку описаћемо древни проблем еуклидске геометрије. Проблем се односи на *'обућарски нож'* – облик који је проучавао Архимед у трећем веку пре нове ере.

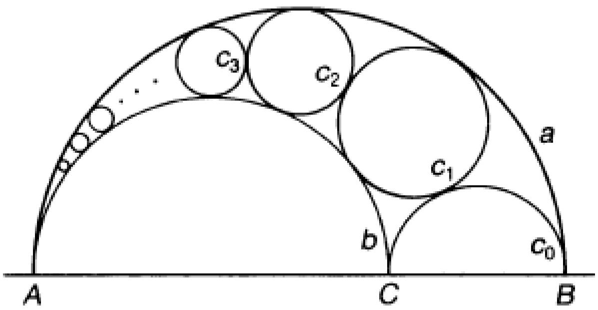
Нека су $a, b,$ и c_0 су полукругови пречника AB, AC и CB редом, такви да је C унутар дужи AB, и b и c_0 су унутар полукруга a. Област омеђена са $a, b,$ и c_0 зове се обућарски нож (Слика 8).



Слика 8

ЗАДАТАК 21

Нека су $c_1, c_2, c_3, \ldots$ кругови уписани у обућарски нож омеђен са $a, b,$ и c_0, тако да c_i додирује a, b и c_{i-1} за $i = 1, 2, 3, \ldots$ (Слика 9). Доказати да за све $i \geq 1$ удаљеност (еуклидска) центра c_i од AB је i пута пречник круга c_i.



Слика 9

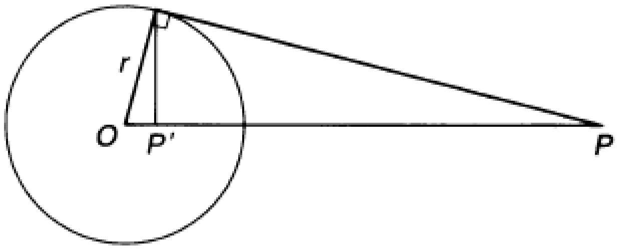
РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 21:

У овом задатку ћемо користити инверзију зато што је лакше радити са линијама него са круговима, и решење преко инверзије је једноставније и краће. За центар инверзије треба да се узме тачка кроз коју пролази највише кругова и линија. Користићемо инверзију у односу на круг c са центром у тачки А, који је нормалан је на c_i, за фиксирано $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Подсетимо се :

Инверзија у односу на круг c са центром O и полупречником r, је трансформација која пресликава произвољну тачку $P \neq O$ у равни круга c, на тачку P' тако да важи:

P' је на правој линији OP, са исте стране тачке O, тј. на истој страни као и P, и производ удаљености OP и OP' је:

$$OP \cdot OP' = r^2 \qquad \text{(Слика 10).}$$

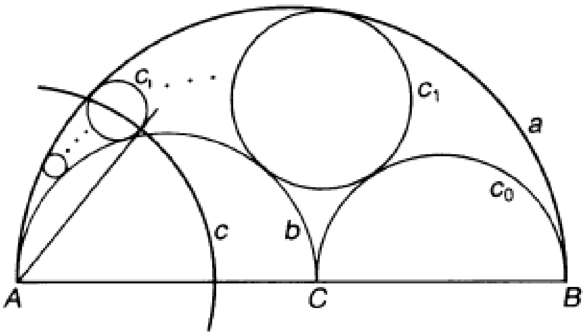


Слика 10

Такође у равни круга c важи:

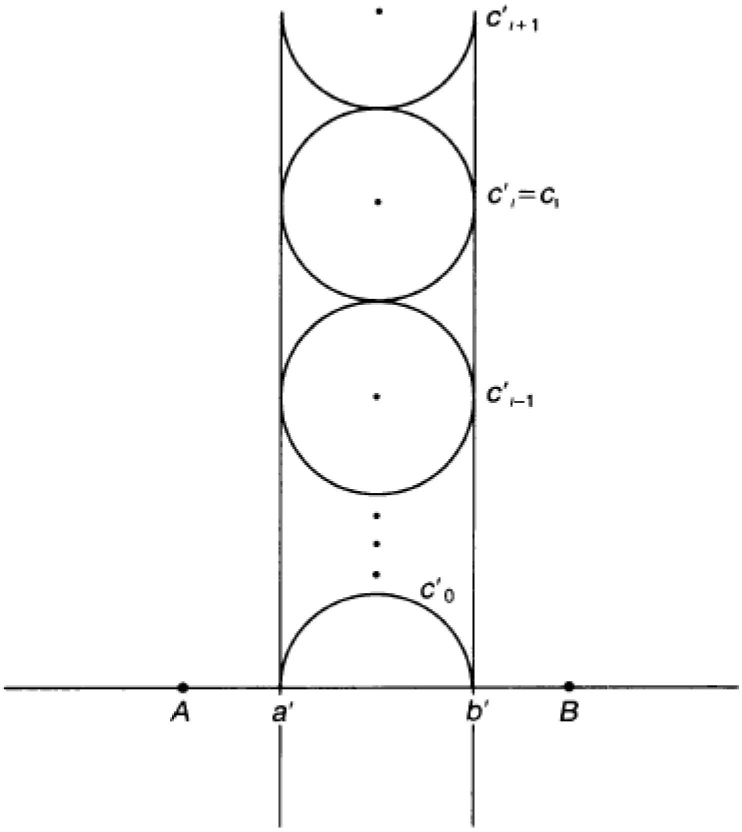
- Свака тачка P изузев O има јединствену слику P';
- $(P')' = P$;
- Тачке унутар круга c сликају се у тачке изван круга с, и обрнуто (отуда назив “инверзија”: унутрашњост круга c је “обрнута” од спољашњости);
- Тачке са круга c остају фиксне;
- Свака права линија кроз O се пресликава на себе;
- Свака права линија која не пролази кроз O се пресликава на круг који пролази кроз O, и обрнуто;
- Сваки круг који не садржи O се прескилава на круг који не садржи O;
- Сваки круг који је нормалан на c пресликава се на себе;
  (Два круга c и c' су ортогонални ако се секу под правим углом, то јест, ако њихове тангенте на местима пресека граде прав угао.)

Посматрајмо обућарски нож је омеђен полукруговима a, b и c_0, и низ кругова $c_1, c_2, c_3, \ldots$ уписаних у њега тако да c_i додирује a, b и c_{i-1} за $i = 1, 2, \ldots$ (Слика 11).



Слика 11

Инверзију у односу на круг c, чији је центар тачка A, и који је ортогоналан на c_i, за неко $i \geq 1$, обележимо са α. Инверзија α оставља c_i и линију AB фиксираним. Она пресликава кругове a и b на праве линије a' и b' редом. Те праве линије a' и b' су тангенте на c_i и нормалне су на AB (Слика 12).



Слика 12

Кругови $c_0, c_1, \dots, c_{i-1}$ су пресликани на кругове $c_0', c_1', \dots, c_{i-1}'$, који сви додиру a' и b'. Штавише, c_k' додирује c_{k-1}' за $k = 1, \dots, i-1$ и c_{i-1}' додирује $c_i' = c_i$. Центар од c_0 је на AB. Пречници кругова $c_0', c_1', \dots, c_{i-1}', c_i'$ су сви једнаке дужине d_i између a' и b'. Стога удљеност од центра O_i' круга c_i' до AB је једнака id_i. Пошто је $c_i' = c_i$ ово имплицира да d_i и O_i' су редом пречник и центар круга c_i.

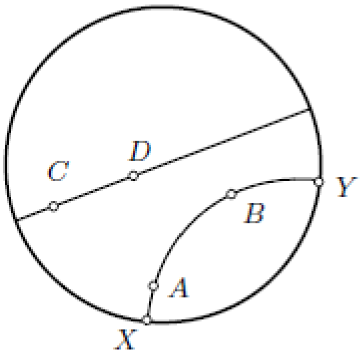
Тако удаљеност центра c_i од AB је i пута пречник круга c_i. Ово је тачно за било које $i = 1, 2, 3, \dots$, пошто је i произвољно изабрано.

■

Инверзија може да се користи за извођење неких основних својстава хиперболичке геометрије. Иако инверзија не чува линије, она чува углове. Модели помоћу којих можемо представити хиперболичку геометрију су Поенкареов[9] диск модел и Поенкареов полуравански модел.

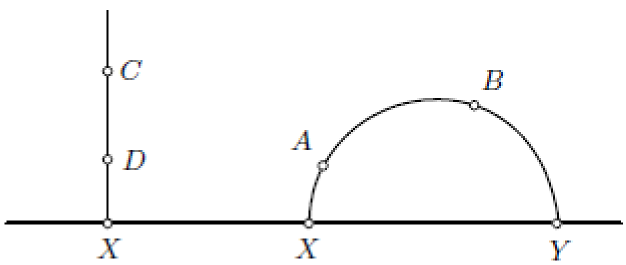
[9] Jules Henri Poincare (1854 - 1912) је био француски математичар, физичар и астроном. Истраживао је диференцијалне једначине, посебно су важни његови радови на подручју топологије и његова интерпретација геометрије Лобачевског. Предавао је математичку физику и рачун вероватноће на Факултету наука у Паризу, и вишу анализу на Политехничкој школи.

Поенкареов диск модел је унутрашњост јединичног круга (апсолуте) у Еуклидској равни (Слика 13). Праве овог модела су лукови кругова нормалних на апсолуту и пречници апсолуте.



Слика 13

У полуравански моделу узимамо скуп тачака $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, тако да је $y > 0$ (Слика 14). Праве у полураванском моделу су полуправе нормалне на x-осу, и полукругови са центром на x-оси. Можемо видети да наше полукругове a, b и c_0 из Задатка 21, можемо посматрати и као праве у полураванском моделу.



Слика 14

Можемо трансформисати диск модел у полуравански модел, коришћењем инверзије. Кроз тачку на граници диска инвертујемо диск модел у полуравански модел. Кругови у диск моделу и полураванском моделу су еуклидски кругови. Изометрије Поенкареовог модела чувају углове тако да је у свакој тачки тог модела угао једнак одговарајућем еуклидском.

Линија или сегмент у хиперболичкој равни ће бити сегмент или лук између две тачке на хиперболичкој линији. Нека су A и B две различите тачке у хиперболичкој равни. Сада можемо дефинисати растојање у хиперболичкој геометрији $d_h(A, B)$. Постоји пресликавање које тачке A, B пресликава у тачке A', B' које леже на вертикалној линији у полураванском моделу. Без губитка општости можемо претпоставит да је A' испод B'. Нека су d_A, d_B еуклидска растојања тачака A, B и x-осе, онда је:

$$d_h(A, B) = \log d_B - \log d_A.$$

5.2. Пројективне равни

Пројективна раван се уводи са три аксиоме. Ове аксиоме су тврђења о тачакама, линијама и припадању (инциденцији) који су основни појмови геометрије, и не дефинишу се.

Аксиома 1 : Било које две различите тачке су инцидентне са тачно једном заједничком линијом.

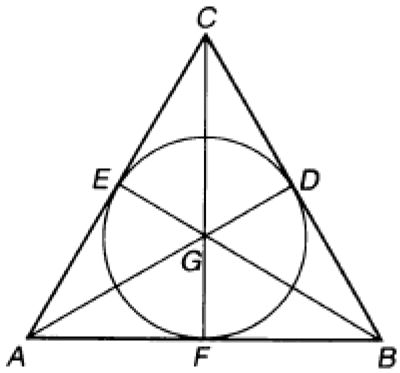
Аксиома 2 : Сваке две различите линије су инцидентне са тачно једном заједничком тачком.

Аксиома 3 : Постоји најмање четири тачке од којих никоје три нису инцидентне са заједничком линијом.

Ако је тачка P инцидентна са линијом ℓ, уобичајено је да се каже да P лежи на ℓ, или да ℓ пролази кроз P.

Постоје разне врсте пројективних равни. Једна од главних разлика тиче се броја тачака (линија) у пројективној равни: тај број може бити коначан или бесконачан. Дајемо пример коначне пројективне равни (са коначно много тачака), и бесконачне пројективне равни (са бесконачним бројем тачака). Лако је проверити да геометријске структуре π_1 и π_2 које су описане у наставку, задовољавају аксиоме 1-3, па стога представљају пројективне равани.

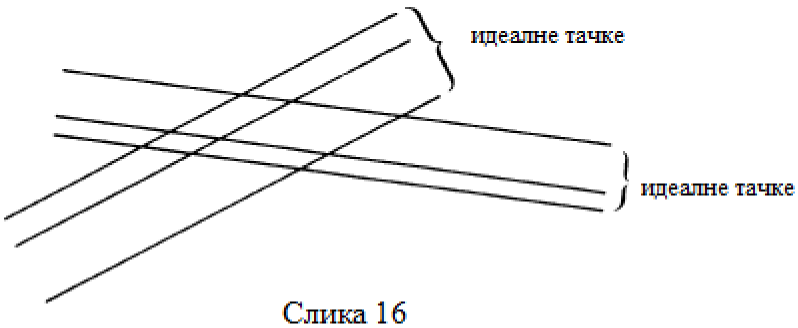
Пример 1:
Тачке са π_1 су темена A, B, C једнакостраничног троугла ABC, подножја висина су D, E, F, и центар уписаног круга G. Линије на π_1 предстаљају стране, висине и уписан круг. Инцидентност је 'припадање', на пример D је инцидентно са линијама CB, AG и EF јер припада страници CB, припада висини AG, и на уписаном је кругу (Слика 15).



Слика 15

ПРИМЕР 2:

π_2 се добија као проширење класичне еуклидске равни ($\mathbb{E}$). Скуп свих правих линија у $\mathbb{E}$ је подељен на дисјунктне подскупове међусобно паралелних линија. Сваки такав подскуп се зове *ИДЕАЛНА ТАЧКА*. Скуп свих идеалних тачака зове се *ИДЕАЛНА ЛИНИЈА*.



Слика 16

Инциденција је дефинисана на следећи начин.

Тачка P из $\mathbb{E}$ је инцидентна са правом линијом ℓ из $\mathbb{E}$ ако и само ако P припада ℓ у $\mathbb{E}$. Идеална тачка I је инцидентна са правом линијом ℓ из $\mathbb{E}$ ако и само ако ℓ припада скупу паралелних линија из $\mathbb{E}$ предтављених са I. Идеална линија је инцидентна са свим идеалним тачкама и ни са једном другом тачком са π_2.

Свака линија у π_1 је инцидентна са истим бројем тачака, свака тачка је инцидентна са истим бројем линија, а ова два броја су једнака. Ово својство важи за све коначне пројективне равни.

Задатак 22••••••••••••••••••••••••••••••••••••

Замислимо произвољну пројективну раван (коначну или бесконачну). За сваку тачку P и сваку линију ℓ, скуп свих инцидентних линија са P означимо са $\{P\}$, и скуп свих тачака инцидентних са ℓ означимо са $\{\ell\}$.

Доказати да :

(а) За било које две линије ℓ и ℓ' постоји 1-1 кореспонденција између елемената $\{\ell\}$ и $\{\ell'\}$ (то је да, сваком елементу $\{\ell\}$ одговара јединствени елемент $\{\ell'\}$ и обрнуто).

(б) За било које две тачке P и P' постоји 1-1 кореспонденција између елемената $\{P\}$ и $\{P'\}$.

(в) За било који пар, тачка и линија, P и ℓ, постоји 1-1 кореспонденција између $\{P\}$ и $\{\ell\}$.

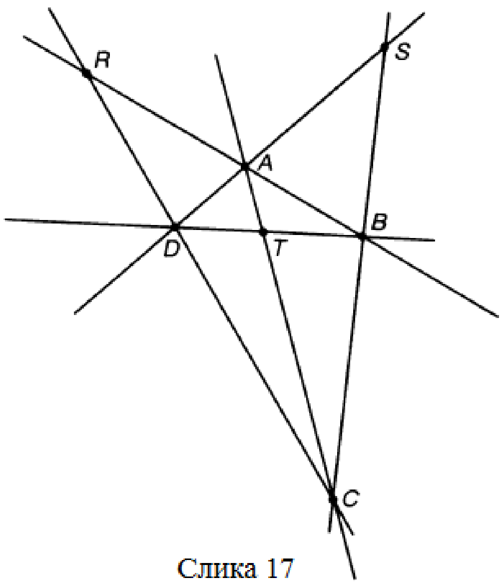
••

Решење задатака 22:

Наш први корак је да покажемо да:

1. За било које две линије ℓ, ℓ' са пројективне равни π, постоји тачка M на π која није инцидентна било са ℓ или ℓ'.
2. За било које две тачке P, P' са π, постоји линија g која није инцидентна било са P или P'.

Да бисмо показали ово подсетимо се да, према Аксиоми 3, постоје четири тачке, рецимо A, B, C, D у π, тако да никоје три нису инцидентне са заједничком линијом. Ове тачке одређују три пара линија: AB и CD, BC и AD, и AC и BD. Означимо тачку инцидентну са AB и CD са R, тачку инцидентну са BC и AD са S, и тачку инцидентну са AC и BD са T (Слика 17).



Слика 17

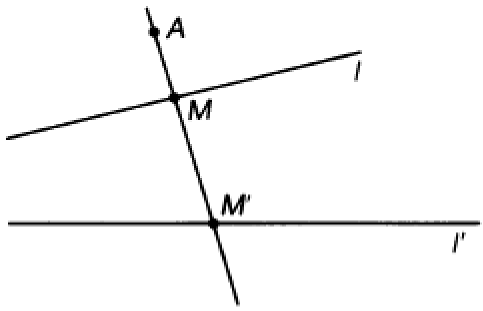
Лако је проверити да

- За било које две линије ℓ , ℓ' најмање једна од тачака A, B, C, D, R, S, T није инцидентна са било којом од њих,
- За било које две тачке P, P' најмање једна од линија AB, CD, BC, AD, AC, BD није инцидентна са било којом од њих.

Ово доказује (1) и (2).

Сада је лако да се докаже (а), (б) и (в):

(а) Нека су ℓ и ℓ' две произвољне линије на π. Нека А буде тачка са π не инцидентна било са ℓ или ℓ'. Коришћењем Аксиома 1 и 2 можемо повезати произвољну тачку M са $\{\ell\}$, и тачку M' са $\{\ell'\}$. Како следи: M' је тачка инцидентна и са ℓ' и са АM, где је АM линија инцидентна са А и M. Пресликавање $M \to M'$ успоставља 1-1 кореспонденција између $\{\ell\}$ и $\{\ell'\}$ (Слика 18).

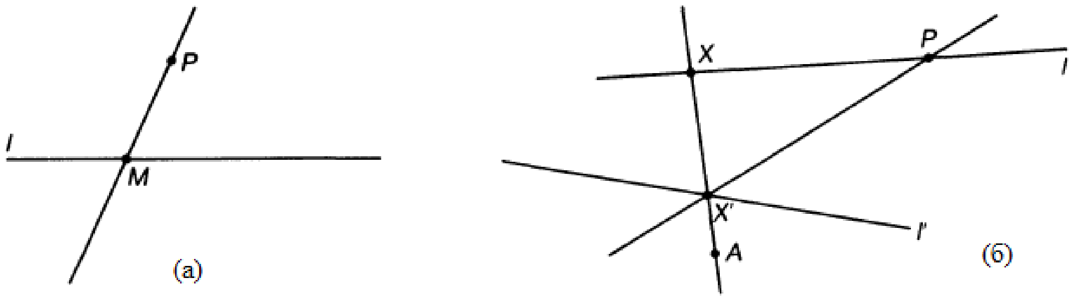


Слика 18

У тексту доказа (а) заменимо линије ℓ , ℓ' и тачке А, M и M' са тачкама P, P' и линијама $a, m,$ и m', редом. Такође заменимо речи ‘тачка’ и ‘линија’. Добијени текст је доказ за (б)[10].

(в) Ако P није инцидентна са ℓ, онда је са било којом тачком $M \in \{\ell\}$ повезује линија PM инцидентна са обе P и M. Пресликавање $M \to PM$ успоставља 1-1 кореспонденцију између $\{\ell\}$ и $\{P\}$ (Слика 19 (а)).

[10] Ако у било којем тврђењу S о инцидентности тачке и линије у равни π, речи ‘тачка’ и ‘линија’ се мењају док је преостали текст непромењен, онда се добија важећи исказ S'. Ово се зове *принцип дуалности* у π, и S' се назива дуални од S. Аксиома 2 је дуална од Аксиоме.



Слика 19

Ако је P инцидентна са ℓ, пронађимо линију ℓ' која није инцидентна са P, и тачку А која није инцидентна ни са ℓ ни са ℓ'. Било коју тачку $X \in \{\ell\}$ повежимо линијом AX (AX инцидентна са A и X), са AX повезујемо и тачку $X' \in \{\ell'\}$ која је инцидентна са AX, и X' повезујемо линијом PX' (PX' инцидентна са P и X') (Слика 19(б)). Пресликавање $X \to AX \to X' \to PX'$ успоставља 1-1 кореснподенцију између $\{\ell\}$ и $\{P\}$.

■

Коначна пројективан раван има следећу додатну особину:

ЗАДАТАК 23 ●

Доказати да ако у пројективној равни број тачака инцидентних са линијама је $n+1$ (где је n природан број), онда се раван састоји од n^2+n+1 тачке и n^2+n+1 линије. n се зове поредак пројективне равни.

● ●

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 23:

Према тврђењима доказаним у Задатку 22, ако је једна линија са π инцидентна са $n+1$ тачком, онда су све линије са π инцидентне са $n+1$ тачком, и све тачке са π су инцидентне са $n+1$ линијом.
Нека је P произвољна тачка са π. Свака тачка са π, различита од P је инцидентна са тачно једном од $n+1$ линије кроз P (Аксиома 1). Заједно, $n+1$ линија кроз P садржи $n+1$ тачку различиту од P. Стога, укупан број тачака у π је $(n+1)n+1 = n^2+n+1$.
Дуални аргументи показују да π садржи n^2+n+1 линију.

■

6. Уметност бројања. Резултати Каталана, Ојлера и Андреа

Комбинаторика је грана математике чије прве идеје потичу још из времена настанка математике као науке, из времена Старих Грка, тачније из Питагорине епохе. И поред овако дуге историје, комбинаторику треба сматрати математичком дисциплином модерног доба (деветнаести, двадесети век), јер је у овом времену она доживела јако снажан развој.

Одредити број елемената са датом особином у датом скупу је главни задатак комбинаторике. У овом одељку приказаћемо три позната комбинаторна проблема.

6.1. На колико начина може производ n фактора да се израчуна по паровима?

Каталан (Eugène Charles Catalan 1814 - 1894) је био француски и белгијски математичар. Рођен је у Брижу, у данашњој Белгији, али у време његовог рођења Бриж је био део француског царства. Био је једино дете француског јувелира Џозефа Каталана. Отпутовао је у Париз 1825. године да студира математику на École Polytechnique (француска јавна институција високог образовања и истраживања). Каталан је 1859. године покушао да убеди државно Министарство да га именују као професора математике у једној школи у Паризу. Међутим, није добио ово што је тражио. У јануару 1865.године, пошто није имао сталну позицију (посао) 13 година, постављен је на катедру за математику, на Универзитету у Лијежу у Белгији. Делови математике којима се највише бавио су нацртна геометрија, теорија бројева и комбинаторика. Увео је Каталанове бројеве да реши комбинаторне преблеме.

Каталанови бројеви су низ бројева који долази до изражаја у геометрији и комбинаторици.

Проблемом, на колико начина се може производ од n фактора да се израчуна по паровима, бавио се Каталан. Производ се израчунава по паровима, тако што се увек само два фактора множе заједно. Резултат оваквог 'упареног множења' се користи као фактор у наредном кораку рачунања. Разликује се два случаја, када је редослед фактора одређен, и када редослед фактора није одређен.

На пример, производ бројева a, b и c може да се израчуна по паровима тако што прво формирамо производ $a \cdot b$ и множењем овог резултата са c добијамо $(a \cdot b) \cdot c$. Други начин добијања истог резултата је да се израчуна производ $a \cdot c$, а затим да се помножи резултат са b и то доводи до $(a \cdot c) \cdot b$.

У производима

$$(a \cdot b) \cdot c \quad \text{и} \quad (a \cdot c) \cdot b$$

разликујемо следеће:
У производу $(a \cdot b) \cdot c$ број a је праћен са b, и b је праћено са c, док је у производу $(a \cdot c) \cdot b$ број a је праћен са c, и c је праћено са b. Можемо да приметимо да редослед фактора није исти у ова два множења.

Ако редослед фактора није одређен, производ бројева a, b и c може да се израчуна на следећих 12 начина:

$$(a \cdot b) \cdot c, \quad (a \cdot c) \cdot b, \quad a \cdot (b \cdot c), \quad a \cdot (c \cdot b),$$

$$(b \cdot a) \cdot c, \quad (b \cdot c) \cdot a, \quad b \cdot (a \cdot c), \quad b \cdot (c \cdot a),$$

$$(c \cdot a) \cdot b, \quad (c \cdot b) \cdot a, \quad c \cdot (a \cdot b), \quad c \cdot (b \cdot a).$$

Ако редослед фактора јесте одређен (a, b, c), онда производ бројева a, b и c можемо да израчунамо на следећа два начина:

$$(a \cdot b) \cdot c, \quad a \cdot (b \cdot c)$$

Видимо да је број производа када редослед фактора није одређен знатно већи него када је редослед одређен.

Долазимо до Каталановог проблема који се састоји од два питања:

Питање А:
Колико има парова производа од n датих фактора, ако редослед фактора није одређен?

Питање Б:
Колико парова производа може бити конструисано од n датих фактора, ако је одређен редослед фактора?

Означимо са R_n број парова производа од n фактора где редослед фактора није одређен, и C_n број оних парова производа од n фактора где је редослед фактора одређен.

ЗАДАТАК 24 ••

Доказати да R_n задовољава рекурентну формулу

$$R_{n+1} = (4n-2)R_n.$$

Доказати да је

$$R_n = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot (4n-6) \quad \text{за } n \geq 2,$$

и да је

$$C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot (4n-6)}{n!} \text{за } n \geq 2.$$

••

Каталанов проблем је занимљив сам по себи.

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 24:

(а) Број R_{n+1} упарених производа од $n+1$ фактора $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ може бити изведен из броја R_n упарених производа n фактора, као што следи.

Произвољно упарени производ P од R_n, састоји се од $n-1$ пара множења облика $A \cdot B$ (на пример, упарени производи од четири фактора: $[f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3)] \cdot f_4$ састоји се од три упарена множења: $f_2 \cdot f_3$, $f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3)$, и $[f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3)] \cdot f_4$. Производ P се може продужити на производ P' од R_{n+1}, дуж граничног f_{n+1} до $A \cdot B$ на четири различита начина:

$$(f_{n+1} \cdot A) \cdot B, \qquad (A \cdot f_{n+1}) \cdot B, \qquad A \cdot (f_{n+1} \cdot B) \qquad \text{и } A \cdot (B \cdot f_{n+1}).$$

За $n-1$ пар множења у P ово води до $(n-1) \cdot 4$ различита производа P'. Штавише, P' се може добити из P такође формирањем производа

$$f_{n+1} \cdot P \quad \text{или} \quad P \cdot f_{n+1}.$$

Тако укупно има $(n-1) \cdot 4 + 2 = 4n-2$ производа P' од $n+1$ фактора добијених из датог производа P од $f_1, f_2, \ldots, f_n$. То подразумева да

$$R_{n+1} = (4n-2)R_{n.}$$

Пошто је $R_1 = 1$, долазимо до следећег израза за R_n:

$$R_n = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-6), \quad \text{за } n \geq 2.$$

(б) Наш следећи задатак је да се одреди C_n, то је број оних упарених производа од n фактора $f_1, f_2, \ldots, f_n$ у којима је редослед фактора битан.

Претпоставимо да у таквом произвољном производу p заграде лево су непромењене, док су фактори пермутовани. Добијени нови производ P је један од R_n производа истраживаних у делу (а). Пошто се фактори могу пермутовати на $n!$ начина, ово подразумева да p одговара $n!$ парова производа типа (а). Према томе:

$$C_n = \frac{R_n}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n-6)}{n!}.$$

■

Родригез је 1838. године истакао да је Каталанов проблем повезан са Ојлеровим проблемом поделе полигона (део 6.2). Решење је касније изазвало велике проблеме чак и Ојлеру. Дискусија Ојлеровог проблема у делу 6.2 се ослања на следећу особину за C_n:

Задатак 25

Доказати следећу рекурентну формулу за C_n:

$$C_n = C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1. \tag{33}$$

Решење задатка 25:

Нека је P_n произвољан упарен производ од n фактора $f_1, f_2, \ldots, f_n$ узет у одређеном редоследу. Последњи корак у формирању P_n састоји се од упарених мултипликативних форми $P_n = P_i \cdot P_{n-i}$ где је P_i упарен производ фактора $f_1, f_2, \ldots, f_i$ и P_{n-i} је упарени производ преуређених фактора $f_{i+1}, f_{i+2}, \ldots, f_n$. За фиксирано i број производа P_i је C_i и број производа P_{n-i} је C_{n-i}. Пошто у формирању $P_n = P_i \cdot P_{n-i}$ број i може узети било коју вредност од 1 до $n-1$ закључно, C_n задовољава:

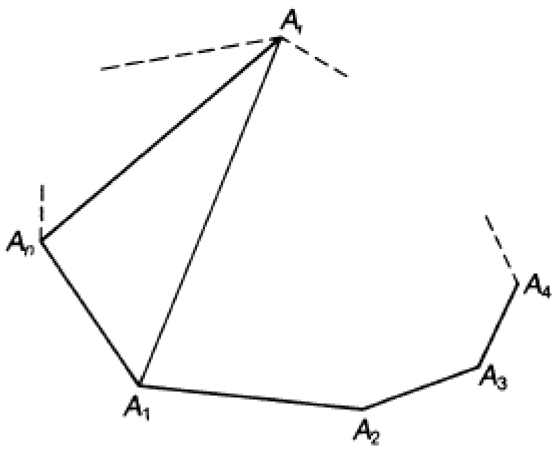
$$C_n = C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} \cdot C_1.$$

■

6.2. Ојлеров проблем о подели полигона

У писму Голдбаху[11] 1751. године, Ојлер је поставио следеће питање:

Питање 1:
На колико начина се може раван конвексног полигона од n страница поделити на троуглове помоћу дијагонала? Дијагонале се не смеју пресецати.



Слика 20

Ојлер је знао одговор: број различитих начина поделе конвексног n-тоугла на троуглове непресецањем дијагонала је:

$$E_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}.$$

Сегнер[12] је 1758. године открио рекурентну формулу за E_n:

$$E_n = E_2 E_{n-1} + E_3 E_{n-2} + \cdots + E_{n-1} E_2. \tag{34}$$

Родригез је 1938. године приметио везу између (33) и (34), и извео је

$$E_n = C_{n-1}. \tag{35}$$

---

[11] Christian Goldbach, (1690 - 1764), пруски математичар, студирао је права. Највише је запажен због својих преписки са Лајбницом, Ојлером и Бернулијем, а посебно због писма из 1742. године упућеног Ојлеру у коме је изнео своју Голдбахову хипотезу.
[12] Johann Andreas von Segner (1704 -1777), немачки научник, физичар, математичар, лекар. Био је први научник који је користио реактивне силе за добијање воденог млаза.

ЗАДАТАК 26 ••••••••••••••••••••••••••••••••••••••

Доказати формуле (34) и (35).

••

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 26:

Доказ формуле (34):

Нека је $P_n = A_1A_2A_3 \dots A_n$ конвексан полигон, и нека је D_i подела полигона P_n на троуглове, тако да страница A_1A_n припада троуглу $A_1A_nA_i$, за неко i.

Дијагонале A_1A_i и A_nA_i деле P_n на три региона: троугао $A_1A_nA_i$, полигон $P_i = A_1A_2 \dots A_i$ и полигон $P_{n+1-i} = A_iA_{i+1} \dots A_n$. Број различитих подела D_i за фиксирано i, је производ броја E_i поделе P_i на троуглове, и броја E_{n+1-i} поделе P_{n+1-i} на троуглове. Како i може узети било коју вредност од 2 до $n-1$ закључно, следи да је број подела P_n на троуглове преко дијагонала

$$E_n = E_2E_{n-1} + E_3E_{n-2} + \cdots + E_{n-1}E_2.$$

Доказ формуле (35):

Применом рекурентне формуле

$$E_{n+1} = E_2E_n + E_3E_{n-1} + \cdots + E_nE_2$$

и

$$C_n = C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_1,$$

једнакост да је $E_n = C_{n-1}$ може се доказати индукцијом на следећи начин:

Тачно је да је $E_2 = 1 = C_1$ и $E_3 = 1 = C_2$.
Претпоставимо да $E_i = C_{i-1}$ за све $i = 1, 2, 3, \dots, n$. То имплицира да је

$$E_{n+1} = C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_1 = C_n.$$

Према томе

$$E_n = C_{n-1} \text{ за све природне бројеве } n > 2.$$

Тако се вредности E_n могу лако израчунати комбиновањем резултата из 6.1 и 6.2.

■

6.3. Број 'цик-цак' пермутација скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ доводи до sec и tg реда

Андре - Мари Ампер (André - Marie Ampère, 1775-1836) је био знаменити француски физичар, математичар и природњак. Био је члан Париске академије наука (1814). Већ у раним годинама показао је изванредну обдареност за математику. Отац се бринуо много о његовом васпитању, па је осим у природним наукама стекао знања и у другим дисциплинама. После очеве смрти, Ампер је прво био предавач у Политехничкој школи у Паризу, затим је држао катедру физике у Бургу, а од 1805. године – катедру математике у париској Политехничкој школи, где се опробао и на литерарном пољу, написавши дело: *Разматрања о математичкој теорији игре* (*Considerations sur la theorie mathematique du jeu*). Године 1814. изабран је за члана Француске академија наука, а 1824. године постаје професор експерименталне физике на најпрестижнијем француском универзитету *Колеж де Франсу (College de France).* Положио је темеље електродинамике. Засновао теорију магнетизма у нераздвојивој вези са електрицитетом и проучио узајамно дејство електричних струја. По њему је добила назив јединица за мерење јачине електричне струје.

Пермутације $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, бројева $1, 2, 3, \dots, n$ назовимо 'цик-цак' пермутацијама, ако важи:

$$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 > \cdots$$

или

$$a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > a_5 < \cdots.$$

Ампер је открио рекурентну формулу за број Z_n у 'цик-цак' пермутацијама од $1, 2, 3, \dots, n$, и користи овај резултат да функције $x \mapsto \sec x$ и $x \mapsto \operatorname{tg} x$ развије у ред.
Циљ овог дела рада је да се опише Амперов рад.

Цик-цак пермутација може почињати "растом" $(a_1 < a_2)$ или "опадањем" $(a_1 > a_2)$, и може се завршити било растом $(a_{n-1} < a_n)$ или опадањем $(a_{n-1} > a_n)$. Лако је доказати следеће:

Задатак 27 ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

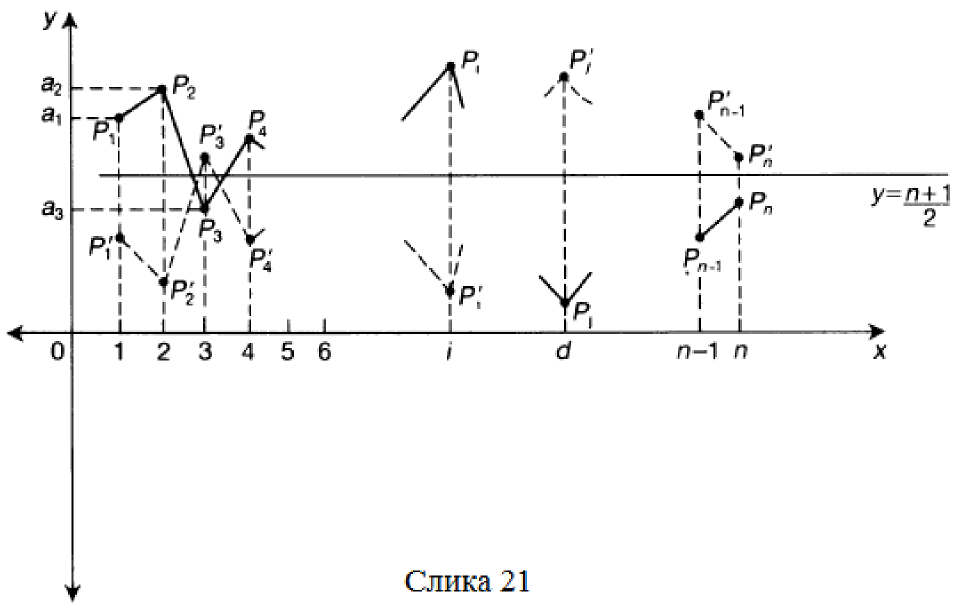
Означимо са A_n, B_n, C_n, D_n број оних цик-цак пермутација од $1, 2, 3, \dots, n$ које почињу растом, почињу опадатњем, завршавају се растом, и завршавају се опадањем, редом.
Доказати да је

$$A_n = B_n = C_n = D_n = \frac{Z_n}{2}.$$

●●

Решење задатка 27:

Цик-цак пермутација $p = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ може бити представљена цик-цак линијом z спајањем тачака $P_1(1, a_1), P_2(2, a_2), \dots, P_n(n, a_n)$ у Декартовом координатном систему, као што је показано на Слици 21.



Слика 21

Претпоставимо да је P_i највиша тачка на z (са y-координатом која је једнака n) и да је P_j најнижа тачка на z (са y-координатом која је једнака 1). Пресликајмо z у односу на $y = \frac{n+1}{2}$. Слици $z' = P_1' P_2' \dots P_n'$ од z одговара пермутација $p' = a_1' a_2' \dots a_n'$ где су $a_1', a_2', \dots, a_n'$ y-координате од $P_1', P_2', \dots, P_n'$, редом. p' је такође цик-цак пермутација.
Из изградње p' следи да ако пермутација p почиње растом, онда p' почиње опадањем, и обрнуто. Слично, ако се p завршава растом или опадањем, онда се p' завршава опадањем или растом, редом.

Онда добијамо да је

$$A_n = B_n = \frac{Z_n}{2} \qquad \text{и} \qquad C_n = D_n = \frac{Z_n}{2}.$$

■

Следећи корак је да се докаже следећа рекурентнаа формула за A_n.

ЗАДАТАК 28

Доказати да је

$$2A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} A_i A_{n-1-i}. \qquad (36)$$

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА 28:

Хајде да прво одредимо број $Z_{n,i}$ оних цик-цак пермутација скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ у којима број n стоји на $(i+1)$-ом месту за неко фиксирано i. За сваку такву пермутацију p:

- i места која претходе n попуњена су са i бројева одабраних произвољно из скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ и распоређених у цик-цак пермутације $a_1 a_2 \cdots a_i$. Пермутација $a_1 a_2 \cdots a_i$ завршава се опадањем $(a_i < a_{i+1} = n)$
- Преосталих $n-1-i$ бројева из $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, који следе иза n, формирају цик-цак пермутацију $a_{i+2} a_{i+3} \cdots a_n$, која почиње растом $(n = a_{i+1} > a_{i+2} < a_{i+3})$.

За било који избор фиксираног броја i из скупа $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ постоји D_i цик-цак пермутација $a_1 a_2 \cdots a_i$ која се завршава опадањем. Свакој таквој пермутацији одговара A_{n-1-i} цик-цак пермутација $a_{i+2} a_{i+3} \cdots a_n$, која почиње растом. Пошто је број избора i елементи из скупа од $n-1$ елемента $\binom{n-1}{i}$, следи да је

$$Z_{n,i} = \binom{n-1}{i} D_i A_{n-1-i}.$$

Број n може заузети било које од n места у цик-цак пермутацији $a_1 a_2 \cdots a_n$, према томе i може да варира од 0 до $n-1$. То подразумева да је укупан број Z_n цик-цак пермутације скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ једнак

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z_{n,i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} D_i A_{n-1-i}.$$

Доказано је (Задатак 27) да је $D_i = A_i$ и $Z_n = 2A_n$, према томе

$$2A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} A_i A_{n-1-i}, \tag{37}$$

■

Не постоји експлицитни израз за A_n (или Z_n). Међутим A_0, A_1, A_2 , ... се могу израчунати корак по корак, користећи (37). Тако добијамо :

$$A_0 = 1\,,\;\; A_1 = 1\,,\;\; A_2 = 1\,,\qquad A_3 = 2\,,\qquad A_4 = 5\,,\qquad A_5 = 16\,, \ldots$$

Формула (37) може да се поједностави увођењем ознаке $p_k = A_k/k!$ за $k = 0, 1, 2, \ldots$

Задатак 29

Доказати да је

$$2np_n = p_0 p_{n-1} + p_1 p_{n-2} + \cdots + p_{n-2} p_1 + p_{n-1} p_0. \tag{38}$$

Решење задатка 29:

Знамо да је

$$\binom{n-1}{i} = \frac{(n-1)!}{i!\,(n-1-i)!}.$$

Већ смо увели ознаку да је $p_k = A_k/k!$. Стога (37) може бити записана у облику

$$2p_n n! = \sum_{i=0}^{n-1} (n-1)!\, p_i p_{n-1-i},$$

или

$$2np_n = \sum_{i=0}^{n-1} p_i p_{n-1-i}. \tag{39}$$

■

Ампер примећује корисну везу између формуле (38) и бесконачног реда са коефицијентима p_i:

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n + \cdots.$$

Наиме, може се показати да је $p_n < \frac{1}{2}$ за све $n \geq 3$. У овом случају је добро познато да:

1. Како y конвергира апсолутно, па и y^2 може бити изражен у облику

$$y^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}, \text{ где је}$$

$$b_1 = {p_0}^2 = 1 \text{ и } b_n = p_0 p_{n-1} + p_1 p_{n-2} + \cdots + p_{n-1} p_0 \text{ за } n \geq 2.$$

2. y представља непрекидну функцију на сваком интервалу $(-h, h)$ где је $h < 1$, и y је и диферецијабилна. Важи и да је $-h < x < h$. Тако y', који је $\frac{dy}{dx}$, је једнак

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} i\, p_i x^{i-1}.$$

Имајући у виду 1 и 2, и користећи (38), Ампер је могао основати диференцијалну једначину за y.

Задатак 30

(а) Доказати да је $p_n < \frac{1}{2}$ за све $n \geq 3$.

(б)Проверити да ли y задовољава диференцијалну једначину

$$1 + y^2 = 2y' \tag{40}$$

Решење задатка 30:

(а) За $n \geq 3$ број Z_n цик-цак пермутација скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ је мањи него број $n!$ од свих могућих пермутација овог скупа. Па је

$$Z_n < n!,$$

или другачије записано

$$2A_n = 2n!\, p_n < n!.$$

Према томе

$$p_n < \frac{1}{2} \qquad \text{за } n \geq 3.$$

(б) Како је $p_n < \frac{1}{2}$ ако је $n \geq 3$, за $|x| < 1$ функција

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots$$

се може диференцирати члан по члан, и

$$y' = p_1 + 2p_2 x + 3p_3 x^2 + \cdots.$$

Штавише, y може да се квадрира :

$$y^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}, \quad \text{где је} \quad b_n = \sum_{i=0}^{n-1} p_i p_{n-1-i} \ \text{ за } \ n \geq 2 \ \text{ и } \ b_1 = 1\,.$$

Формула (39) имплицира да је

$$y^2 = 1 + 2 \cdot 2p_2 x + 2 \cdot 3p_3 x^2 + 2 \cdot 4p_4 x^3 + \cdots,$$

што је управо

$$y^2 + 1 = 2y'.$$

■

Задатак 31

Доказати да је $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

Решење задатка 31:

Диференцијална једначина $y^2 + 1 = 2y'$ може бити решена раздвајањем промењљивих

$$\frac{\mathrm{d}x}{2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 1},$$

и добије се

$$C + \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} y$$

Да бисмо пронашли вредност константе C, ставимо да је $x = 0$ у $y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots$. Одговарајућа вредност y је $p_0 = 1$. Стога $C = \pi/4$ и

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

■

Применом стандардних тригонометријских формула, добијамо бесконачне редове за секанс и тангенс:

Задатак 32 ••

Доказати да

$$\sec x = \frac{Z_0}{2} + \frac{Z_2}{2\cdot 2!}x^2 + \frac{Z_4}{2\cdot 4!}x^4 + \frac{Z_6}{2\cdot 6!}x^6 + \cdots;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{Z_1}{2}x + \frac{Z_3}{2\cdot 3!}x^3 + \frac{Z_5}{2\cdot 5!}x^5 + \frac{Z_7}{2\cdot 7!}x^7 + \cdots.$$

••

Решење задатка 32:

Једнакост

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots \tag{41}$$

Важи за свако x такво да $|x| < 1$.
Ако x заменимо са – x, једнакост (41) се трансформише у

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = p_0 - p_1 x + p_2 x^2 - \cdots. \tag{42}$$

Збир $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ је једанк $2\sec x$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}(x/2) + 1}{1 - \operatorname{tg}(x/2)} + \frac{1 - \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}(x/2)}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg}(x/2))^2 + (1 - \operatorname{tg}(x/2))^2}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)} = 2\cdot\frac{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\cdot\frac{1}{\cos x} = 2\sec x. \tag{43}$$

Са друге стране, (41) и (42) имплицирају да је

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=2(p_0+p_2x^2+p_4x^4+\cdots). \tag{44}$$

(43) и (44) доводе до бесконачног реда за секанс:

$$\sec x\ =p_0+p_2x^2+p_4x^4+\cdots=\frac{1}{2}\left(Z_0+Z_2\frac{x^2}{2!}+Z_4\frac{x^4}{4!}+\cdots\right).$$

Слично томе, може се утврдити да је

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=2\operatorname{tg}x, \tag{45}$$

и да је, у исто време

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=2(p_1x+p_3x^3+\cdots). \tag{46}$$

Стога, на основу (45) и (46), када изједначим десне стране, долазимо до реда за тангенс:

$$\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}\left(Z_1x+\frac{Z_3}{3!}x^3+\frac{Z_5}{5!}x^5+\cdots\right).$$

■

Тригонометријске функције $y=\sec x$ и $y=\operatorname{tg}x$ могу да се прошире у редове добијене изнад, над сваким интервалом $(-h,h)$ тако да је $|h|<1$. У ствари, методом комплексне анализе може се показати да овај ред конвергира за свако x тако да је $|x|<\pi/2$.

7. Закључак

У раду сам приказала неколико познатих задатака из прошлих векова. Такође сам навела најбитније историјске чињенице које су везане како за ове задатке, тако и за познате математичаре који су јако значајни за њихово решавање. У раду је детаљно објашњен начин решавања сваког задатка, корак по корак. Посебна пажња је посвећена задацима који репрезентују специјалне случајеве познатих теорема чије формулације ученици средње школе могу да разумеју, али чији докази излазе из оквира средњошколске математике. Кроз задатке су наведене историјске чињенице које приказују сам развој математике кроз векове.

На овај начин, коришћењем интересантних историјских чињеница, како су се неке ствари рачунале пре пар стотина година, који су познати математичари долазили до јако битних закључака које и дан данас користимо, ученици могу много више да се заинтересују за математику. На тај начин се може јако пуно подићи интересовање, а самим тим и учење математике.

8. Литература

[1] Judita Cofman – What to solve? Problems and Suggestionsfor Young Mathematicians, Clarendon Press, Oxford

[2] Миодраг Петковић – Занимљиви математички проблеми великих математичара, Београд, 2008.

[3] Раде Дацић – Елементарна комбинаторика, Београд, 1977.

[4] Мирко Дејић – Тајни свет математике

[5] Милан Божић – Преглед историје и филозофије математике, Београд, 2002.

[6] Зоран Лучић – Огледи из историје античке геометрије, Београд, 2009.

[7] Предраг Новаковић – Проширени Буфонов покус, Осјечки Математички лист 11, 2011.

[8] http://zadaci.wordpress.com, 07.05.2014.

[9] http://matematickasekcija.wordpress.com/poznati-matematicari/, 11.06.2014.

[10] Richard Crandall and Carl Pomerance - Prime Numbers , A Computational Perspective

[11] http://e.math.hr/povmat/pov1.html, 19.06.2014.

[12] http://sr.wikipedia.org/sr/Андре-Мари-Ампер, 20.06.2014.

[13] http://sr.wikipedia.org/sr/Кристијан_Голдбах, 21.06.2014.

[14] http://hr.wikipedia.org/wiki/Johann_Andreas_von_Segner, 21.06.2014

[15] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Wilson_John.html, 06.07.2014.

[16] http://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Waring, 06.07.2014.

[17] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Catalan.html, 06.07.2014.

[18] http://sr.wikipedia.org/sr/Janos_Boljaj, 07.07.2014.

[19] http://sr.wikipedia.org/sr/Николај_Лобачевски, 07.07.2014.

[20] Предраг Новаковић – Проширени Буфонов покус, Осјечки математички лист 11 (2011)

[21] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Catalan.html, 13.07.2014.

[22] Рад Југословенске академије знаности и умјетности (Први оснивачи нееукилске геометрије), Загреб 1907.

[23] Elementary Theory of numbers, W. Sierpinski

[24] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html, 13.07.2014.

[25] http://math.bu.edu/people/kost/teaching/MA341/Lecture6.pdf, 14.07.2014.

[26] http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Bhaskar.pdf, 14.07.2014.

[27] Proofs from the book, Martin Ainger and Gunter M. Ziegler

[28] http://www.songho.ca/math/quaternion/quaternion.html, 15.07.2014.

[29] http://sr.wikipedia.org/sr/Анри_Поенкаре, 06.08.2014.

[30] Гојко Калајџић – Алгебра, Београг, 1998.

[31] http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_things_named_after_Leonhard_Euler, 08.08.2014.

[32] http://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes, 08.08.2014.

[33] http://mathworld.wolfram.com/Prime-GeneratingPolynomial.html, 08.08.2014.