SAVEZNI ZAVOD ZA STATISTIKU

BRANISLAV IVANOVIĆ

OSNOVI MATEMATIČKE STATISTIKE

PRVA KNJIGA

Beograd, 1959

3 PRIRUČNICI I DELA 3

Izdaje i štampa Savezni zavod za statistiku — Beograd, Kneza Miloša 20
Odgovara direktor Zavoda Ante Novak — Beograd, Kneza Miloša 20
Štampano u 500 primeraka. Strana 312
Cena pojedinom primerku 800 dinara.

Marjanu Demastiji

pisac.

PREDGOVOR

Ovo je delo proizašlo iz predavanja koja je pisac održao na Kursu više specijalizacije iz matematičke statistike u Saveznom zavodu za statistiku u Beogradu, tokom školske 1954—55 godine. Pored diplomiranih matematičara, kurs su posećivali i diplomirani fizičari, astronomi, agronomi i pravnici koji su već imali višegodišnju praksu u statističkim institucijama kao i potrebno matematičko znanje za praćenje kursa.

Delo će sadržati dve knjige. U prvom delu prve knjige dati su oni elementi računa verovatnoće koji su neophodni za razumevanje statističke teorije. Drugi deo prve knjige posvećen je teoriji rasporeda obuhvatajući jedno, dvo i višedimenzionalne prekidne i neprekidne rasporede. U svakom takvom rasporedu sistematski su obrađeni parametri centralne tendencije, dispersije i forme kao i zakon verovatnoće i funkcija rasporeda.

Pošto je detaljno izložena teorija karakterističnih funkcija, ona je dosledno primenjivana u celoj teoriji rasporeda kao jedno efikasno sredstvo za brzo dolaženje do rezultata. Ona će nam takođe korisno poslužiti kod proučavanja rasporeda parametara uzorka u teoriji statističkih ocena koja će pretstavljati predmet druge knjige.

Pisac je pretpostavio da čitaoc već raspolaže dovoljnim znanjem iz matematičke analize. To bi uglavnom bio obim koji obuhvataju standardni kursevi Matematike I i II koji se drže na tehničkim fakultetima. Licima koja nemaju dovoljnu matematičku pripremu za praćenje ovoga kursa, pisac preporučuje poznatu knjigu profesora Radivoja Kašanina.

Ona matematička aparatura koja izlazi iz ovog okvira, izložena je ukratko u ovoj knjizi. Tako su data kraća obaveštenja po pitanju Stieltjesovog integrala, gama i beta funkcija, matrica itd.

Na kraju svake glave dat je izvestan broj izrađenih zadataka kao i zadataka za vežbu. Takođe su za najvažnije rasporede date numeričke tabele koje se koriste u svakodnevnoj statističkoj praksi.

Sa velikim zadovoljstvom pisac koristi ovu priliku da izrazi svoju zahvalnost Milevi Ćepić-Piroćanac i Veri Đorđević, službenicama Saveznog zavoda za statistiku, na pružanju obimne tehničke pomoći u pripremi rukopisa za štampu, Božani Živančević, službenici Saveznog zavoda za statistiku, i Slobodanu Brankoviću na tehničkoj obradi knjige, a Mladenu Draškiću, načelniku odeljenja publikacija Saveznog zavoda za statistiku, na celokupnom rukovođenju štampe knjige.

B. I.

SADRŽAJ

3. VEROVATNOĆA UZROKA

II DEO — OPŠTA TEORIJA RASPOREDA

4. JEDNODIMENZIONALNI RASPOREDI

5. SPECIJALNI TIPOVI JEDNODIMENZIONALNIH RASPOREDA

a) **Prekidni rasporedi**

b) **Neprekidni rasporedi**

6. DVODIMENZIONALNI RASPOREDI

7. MATRICE I KVADRATNE FORME

8. VIŠEDIMENZIONALNI RASPOREDI

UVOD

Kada se u svakodnevnom govoru spomene reč „statistika" redovno se pomisli na jedan skup numeričkih podataka, sistematizovanih u izvesnom broju tabela koje pružaju informaciju o jednom skupu elemenata okarakterisanih tim numeričkim podacima.

U novije se vreme, međutim, počelo davati reči „statistika" jedno prošireno značenje. U mnogim naučnim disciplinama kao i u raznim oblastima ljudske delatnosti sve se više uvodi jedna nova t.zv. „statistička metoda" sa ciljem proučavanja numeričkih osobina jednog skupa fakata bez obzira na samu prirodu tih fakata.

Tako se kod proučavanja kvantitativnih odnosa ekonomskih veličina, statistička metoda sama po sebi nameće. Ona nam takođe pruža mogućnost da vršimo kvantitativne ekonomske analize kao i predviđanja što je od velikog značaja u oblasti privrednog planiranja.

I u drugim naukama posmatranja, kao što su sociologija, demografija, astronomija itd., statistička metoda se u potpunosti afirmisala.

Primena statističkih metoda je vrlo značajna i u eksperimentalnim naukama. Tako je cela teorija grešaka, koja se primenjuje prilikom merenja rezultata eksperimenata, bazirana na statističkoj metodi. U fizici se,osim toga, ova metoda primenjuje i kod proučavanja osobina materije i energije, kao naprimer u kinetičkoj teoriji gasova, statističkoj mehanici, teoriji kvanta itd. Ona nailazi na svoje primene i u ostalim eksperimentalnim naukama, kao u biologiji, genetici, eugenici, medicini, psihologiji, fonetici itd. Tako je u genetici poznata statistička hromozomska teorija nasleđa koja ima za cilj da objasni transmisiju individualnih osobina putem nasleđa. U biologiji se primenom statističkih metoda razvila posebna disciplina „kvantitativna biologija" ili „biometrika" koja ispituje kvantitativne odnose bioloških veličina.

Osim toga, u agronomiji, šumarstvu, industriji, državnoj administraciji, saobraćaju, ekonomici i organizaciji preduzeća, socijalnom i privatnom osiguranju, vazduhoplovstvu, armiji itd., statistička metoda često postaje neophodna za rešavanje odgovarajućih problema.

Kako je račun verovatnoće osnova statističke teorije, to je uobičajeno da se Teoriska statistika naziva Matematička statistika. Standardni osnovni kurs Matematičke statistike sastoji se iz dva dela: teorije rasporeda i teorije statističkih ocena. Prva knjiga ovoga kursa sadrži uvodni deo iz računa verovatnoće i teoriju rasporeda. Druga knjiga biće posvećena teoriji statističkih ocena.

Napomenimo, međutim, da ova knjiga pretstavlja samo uvodni kurs za ulaženje u najnovije statističke discipline kao što su:

Teorija stohastičkih procesa
Diskriminaciona analiza
Teorija igara
Sekvencijalna analiza
Teorija planiranja eksperimenata
Faktorska analiza
Teorija operacionih istraživanja
Teorija informacija itd.

i koje ulaze u okvir najnovijih dostignuća savremene nauke.

U Matematičkoj statistici tretiraju se veličine koje su aleatorne prirode. To su veličine čijim pojedinim vrednostima pripisujemo odgovarajuće verovatnoće. Zato ćemo početi ovaj kurs sa izlaganjem osnovnih pojmova iz računa verovatnoće.

I. Deo

RAČUN VEROVATNOĆE

1. OPŠTI PRINCIPI RAČUNA VEROVATNOĆE

1.1. Pojam verovatnoće. — Najstarija definicija verovatnoće, koja se protezala kroz klasična dela počev od Laplace-a pa do Poincaré-a, bila je sledeća:

Verovatnoća jednog događaja je odnos između broja povoljnih i ukupnog broja podjednako mogućih slučajeva.

Ova definicija bazira na posmatranju podjednako mogućih slučajeva i bez teškoća se može primeniti u proučavanju teorije hazardnih igara. Tako, napr., uzmimo jedan špil od 52 karte i izvucimo na slučaj jednu kartu. Ako smo pošteno mešali i presekli karte, nemamo razloga da verujemo da će izvlačenje jedne karte biti više favorizirano nego ma koje druge karte. Zato ćemo kazati da su 52 karte podjednako verovatne, odnosno da pretstavljaju 52 podjednako moguća slučaja. Neka je događaj A izvlačenje keca iz toga špila. Broj povoljnih slučajeva je $m = 4$, ukupan broj slučajeva je $n = 52$, tako da je verovatnoća izvlačenja jednog keca, tj. ostvarenja događaja A

$$Pr\{A\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Često se verovatnoća $Pr\{A\}$ kratko označava sa p. Kako broj povoljnih slučajeva ne može biti veći od ukupnog broja slučajeva, tj. $m \leqslant n$, to je

$$0 \leqslant p \leqslant 1.$$

Ako je $p = 0$, onda je $m = 0$; A se ni u jednom slučaju ne može ostvariti. Ako je $p = 1$, onda je $m = n$; A se ostvaruje u svakom slučaju.

1.2. Stabilnost frekvencije. — Već prilikom proučavanja geometriskih verovatnoća nismo u mogućnosti da razlikujemo podjednako moguće slučajeve. Zato su se pojavile težnje da se na nov način definiše pojam verovatnoće. Danas se uglavnom usvojila definicija R. de Mises-a uz dopune koje su dali Poper, Reichenbach, Copeland, Wald i Ville. Pre nego što damo samu definiciju, usvojimo da se pod ponavljanjem jednog događaja A u toku N opita naziva broj opita n u kojima se očekivani događaj A ostvario. Odnos

$$\frac{n}{N}$$

nazivamo *frekvencijom događaja* A u N opita. Ako postoji granična vrednost frekvencije događaja A u jednom skupu opita S

$$f = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}$$

kad broj opita neograničeno raste, onda ćemo kazati po Borel-u da dopađaj A ima određenu *totalnu frekvenciju* f, odnosno da postoji *stabilnost frekvencije* ostvarenja događaja A. Staro iskustvo nas uči da se stabilnost frekvencije pojavljuje kod jednog velikog niza slučajeva ponovljenih opita pod istim uslovima. Samu graničnu vrednost f možemo često odrediti unapred teoriskim putem. Uzmimo kao primer bacanje jedne kocke savršenog oblika, homogene mase i pretpostavimo da smo je korektno bacili, tako da su svih šest strana podjednako moguće. Frekvencija ma koje strane biće bliska broju 1/6 i to utoliko više, ukoliko je broj bacanja N veći. Pod „korektnim bacanjem kocke" podrazumevali smo da smo otstranili uticaj naše volje da padne pre jedna nego ma koja druga kockina strana.

Dakle, praktično proveravanje verovatnoće dobijene teoriskim putem jedino je moguće ako dovoljan broj puta ponovimo opit pod istovetnim uslovima. Prilikom bacanja pare slučaj mora favorizovati koliko glavu toliko i pismo. Ako, naprimer, 100 puta korektno bacimo paru i ako se glava pojavi između 40 i 60 puta, izgledaće nam sasvim normalno. Ako se pak pojavi svega 5 puta, zaključićemo da razlog tome nije samo efekat slučajnosti, već da ne postoji jednakost šansi za glavu i pismo. Prema tome, neophodno je voditi računa o šansi mogućih događaja. Najprostiji slučaj u jednom problemu verovatnoće bio bi onaj gde od svih mogućih događaja nijedan nema neku specijalnu šansu da bude ostvaren. Tako, naprimer, kod lutrije svi lozovi moraju imati podjednake šanse izvlačenja. Ako izvlačimo jednu kuglicu iz urne, sve kuglice treba da budu iste veličine, težine i rapavosti a da se razlikuju jedino po boji. Karte moraju biti identične po veličini, debljini i rapavosti i ne smeju biti markirane. Kocka mora biti savršenog geometriskog oblika i homogene gustine. Rupice koje označavaju strane moraju biti što manje. U protivnom bi se poremetila ravnoteža i centar gravitacije bi postao bliži strani sa jednom rupicom. Prilikom kotrljanja kocka bi tada težila da zauzme položaj sa šesticom s gornje strane. Ako se, pak, kocka nalazi u čaši i bacanje izvodi na taj način što se čaša s kockom prevrne, kocka će težiti da zauzme položaj sa jedinicom s gornje strane. Kod ruleta simetrija mora biti besprekorna. Lukovi svake numere moraju biti jednake veličine, tako da pretstavljaju podjednaka smanjivanja žive sile kuglice. Kad god se pojavljuje simetrija (bacanje kocke i pare, ruleta i sl.), ispitivanje šanse za svaku mogućnost postaje vrlo jednostavno.

Međutim, ako na ostvarenje događaja upliviše i ljudska volja, nećemo moći da unapred odredimo verovatnoću teoriskim putem, pošto odluke između kojih oklevamo nikada nisu podjednako moguće, a ne postoje objektivni metodi za merenje njihovih odnosa. Pa ipak i tada često konstatujemo izvesnu stabilnost frekvencije, kao napr. kod frekvencije venčanih lica u jednoj određenoj sredini. I pored bitne uloge volje svakog pojedinca pri odlučivanju za stupanje u brak, opšta situacija i karakteristike jednog stanovništva mogu dovesti do stabilnosti frekvencije venčanih lica i samim tim do određivanja verovatnoće da će se jedno nevenčano lice venčati u toku jedne godine, naravno pod pretpostavkom da će za to vreme opšta situacija i karakteristike toga stanovništva ostati nepromenjene. Ukoliko se izmeni ekonomska i stanbena situacija, psihologija stanovništva, procenat abnormalnih lica, raspored mortaliteta po godinama starosti, socijalna organizacija itd. izmeniće se i vrednost frekvencije venčanih lica.

Najzad, postoje slučajevi u kojima na ostvarenje događaja ne upliviše ljudska volja, pa ipak ne možemo unapred odrediti verovatnoću teoriskim putem, kao napr. prilikom određivanja verovatnoće pola novorođenog deteta, verovatnoće smrtnosti, verovatnoće oboljenja od raka itd. a kod kojih, takođe, dolazi do izražaja stabilnost frekvencije.

Ako sa S označimo skup svih opita, onda je sada po R. de Mises-u *verovatnoća događaja A za skup S njegova totalna frekvencija f, koja će ostati nepromenjena ako na jedan proizvoljan način otstranimo jedan deo opita.*

Uslov koji sadrži ova de Mises-ova definicija verovatnoće ima za cilj da se ograničimo na onaj skup opita koji nam se u praksi pojavljuje. Videli smo da korektnim bacanjem jedne pravilne i homogene kocke, frekvencije svake strane biće bliske vrednosti 1/6, ako smo kocku bacili veliki broj puta. Iz iskustva znamo da će se rezultati nizati na jedan potpuno nepravilan način. Ukoliko bi se rezultati pravilno nizali, napr.: 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, . . . , totalne frekvencije biće 1/6, pa ipak posumnjaćemo u ispravnost igre. U tom slučaju ukidanjem rezultata, napr. svakog šestog opita, totalne frekvencije strana promeniće vrednost i postaće 1/5, 1/5, 1/5, 0, 1/5, 1/5. Zato ćemo ovaj slučaj otstraniti iz našeg proučavanja. Gornji uslov je Fréchet nazvao *aksiomom selekcije* koji treba da naglasi aleatorni karakter posmatranih fenomena i nemogućnost da se pronađe sistem igre pomoću koga bi se mogli unapred predvideti rezultati. Taj elemenat neodređenosti leži u osnovi Računa verovatnoće, čime ga bitno razlikuje od ostalih naučnih grana Primenjene matematike. Naprimer, u Racionalnoj mehanici, svaka teorema pretstavlja jedan zaključak dedukovan iz aksioma putem logičnog rezonovanja, u vidu odgovora *da* ili *ne* na jedno odgovarajuće pitanje. Ako su h i A dve propozicije, od kojih je h hipoteza ili premisa, onda postoje dva jedino moguća zaključka i to:

ako je h ostvareno, biće i A ostvareno, ili

ako je h ostvareno, A neće biti ostvareno.

Nekiput je vrlo teško dati odgovor. Tako, naprimer, tek 1954 godine dat je dokaz za Fermat-ovu teoremu. Međutim, jasno je da u takvim slučajevima odgovor može samo biti ili *da* ili *ne*.

Neka jedno lice ima loz. Na pitanje da li će dobiti, ne možemo dati određeni odgovor. Ne možemo kazati *da* jer nema sve lozove, a ne možemo kazati *ne* jer ima jedan loz. Jedini odgovor je: možda. Pojam verovatnoće pojavljuje se tamo gde je odgovor neodređen. Ako igrač ima samo jedan loz, kaže se da je malo verovatno da će dobiti. Ovde se radi, dakle, da umesto odgovora *da* ili *ne* odredimo numeričku gradaciju očekivanja da će igrač dobiti prilikom izvlačenja. Ukoliko igrači imaju više lozova, onda ćemo svakom igraču pripisati jedan broj koji će zavisiti od broja lozova koji on poseduje i koji će iskazivati njegove šanse dobitka.

1.3. Aksiomatika Računa verovatnoće. — U Računu verovatnoće, kao i u Racionalnoj mehanici, polazi se od jedne zgodno izabrane grupe aksioma. Ispravni aksiomi i ispravna logika, kojom ćemo dalje vršiti dedukcije, treba da dadu rezultate koji će biti potvrđeni u praktičnim primerima. Same verovatnoće iskazuju se numeričkim vrednostima čije će se kombinacije izvoditi po izvesnim pravilima. Skup svih tih pravila pretstavlja Račun verovatnoće.

Međutim, do danas se nije uspelo da se formira jedna jedinstvena aksiomatika u Računu verovatnoće koja bi u svakom pogledu zadovoljila. Postoji čitav spektar različitih aksiomatika računa verovatnoće, u čiju se diskusiju nećemo upuštati. Napomenimo da su se moderne teorije formirale proučavajući konkretne probleme i da sve imaju za polaznu tačku dobro poznatu aksiomatiku A. Kolmogoroff-a.

Račun verovatnoće ne može vršiti predviđanja na isti način kao i Racionalna mehanika. Ako se u Mehanici predvidi računom oblik kretanja jednog tela pod izvesnim uslovima i ako se to kretanje efektivno obistini, dokazali smo da je teorija bila dobro postavljena. U Računu verovatnoće potvrda teorije dobila bi se na sledeći način: ako smo računom odredili da je verovatnoća jednog događaja vrlo mala i ako se u praksi taj događaj nikada ne ostvari, reći ćemo da je teorija dobra. Ovaj se princip ne dokazuje, već je plod zdravog razuma. Naravno, granica od koje ćemo zanemarivati male verovatnoće subjektivne je prirode, ali će uvek doći smanjivanjem te granice do trenutka kada će i najrezervisaniji biti zadovoljeni. Niko neće smatrati za moguće da će uspeti da uz korektno mešanje špila od 52 karte u dva maha dobije isti redosled karata. Pa ipak, teoriski ovaj događaj nije nemoguć već samo vrlo malo verovatan.

1.4. Prvi i drugi aksiom. — Uzmimo sledeće rezovanje G. Darmois-a, da bismo došli do prvih aksioma Računa verovatnoće. Neka jedno lice ima n lozova od ukupno N. Verovatnoća da će dobiti, zavisiće od n i N. Zato ćemo je iskazati jednim karakterističnim brojem $f(n, N)$, koji smo pripisali licu koje poseduje n lozova. Pretpostavimo sad da su se dva lica, prvo sa n_1 a drugo sa n_2 lozova, udružila s tim da zajedno igraju. Koji ćemo karakterističan broj pripisati njihovoj zajednici? Udruživanjem njihovih lozova, udružujemo njihove šanse. Bar se tako kaže u svakodnevnom govoru. To nas vodi osnovnoj hipotezi

$$f(n_1, N) + f(n_2, N) = f(n_1 + n_2, N).$$

Tako je

$$f(2, N) = f(1, N) + f(1, N) = 2f(1, N),$$

$$f(3, N) = f(1, N) + 2f(1, N) = 3f(1, N) \text{ itd.}$$

Prema tome, karakterističan broj koji odgovara asocijaciji od n lozova biće pretstavljen jednim brojem proporcionalnim sa n, tj.

$$f(n, N) = K \cdot n,$$

gde je K funkcija od N.

Ako neko ima sve lozove, siguran je da će dobiti. Konvencionalno se usvaja jedinica za karakterističan broj izvesnosti, tj.

$$f(N, N) = KN = 1.$$

Zato je

$$K = \frac{1}{N}$$

pa je

$$f(n, N) = \frac{n}{N}.$$

N je ukupan broj lozova, tj. totalan skup mogućih slučajeva a n je potskup prethodnog skupa, tj. skup onih lozova koje igrač poseduje. Taj potskup nazivamo *povoljnim skupom* za očekivani događaj. Sada možemo iskonstruisati jednu aditivnu numeričku karakteristiku i kazati da je verovatnoća jednog slučajnog događaja jednaka količniku iz broja elemenata povoljnog i totalnog skupa. Tako smo došli do prve klasične definicije verovatnoće iskazane već u 1.1 i iz toka izlaganja uzeli smo dve osnovne pretpostavke koje ćemo iskazati u vidu sledećih aksioma:

I Aksiom: Verovatnoća $Pr\{A\}$ događaja A je realan broj, takav da je

$$0 \leqslant Pr\{A\} \leqslant 1,$$

koji je 1 ako je izvesno da će se A ostvariti.

II Aksiom: Verovatnoća zbira jednog konačnog broja događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$, koji se međusobno isključuju, jednaka je zbiru verovatnoća događaja A_i, tj.

$$Pr\{A_1 + A_2 + \ldots + A_n\} = Pr\{A_1\} + Pr\{A_2\} + \ldots + Pr\{A_n\}.$$

Po ovom drugom aksiomu $Pr\{A\}$ je jedna aditivna funkcija. Taj je aksiom poznat pod imenom *aksiom totalnih verovatnoća.*

1.5. Ponderacija elemenata totalnog skupa. — Već kod jedne nepravilne ili heterogene kocke ne može biti govora o podjednako mogućim slučajevima. Pa ipak, ako ponovimo bacanje dovoljan broj puta, stabilnost frekvencije za svaku stranu mora doći do izražaja. Na taj način možemo odrediti verovatnoću svake kockine strane sa preciznošću koja će utoliko biti veća, ukoliko je veći broj bacanja.

U igri sa kartama u jednom trenutku moći ćemo da odredimo sve moguće kombinacije koje mogu nastupiti a zatim i samu verovatnoću konačnog ishoda partije posle svakog poteza. Pa ipak, skup svih kombinacija neće pretstavljati totalni skup. Zbog različitog stepena znanja, veštine i navike igrača biće poteza koji nikada neće biti upotrebljeni. Zato će *totalni skup* biti skup svih kombinacija koje stvarno mogu nastupiti. Ako se svaki ishod igre boduje, onda je potrebno da se ponderiše svaki elemenat totalnog skupa, s obzirom da oni više nisu podjednako mogući.

Do pojma ponderacije nije se došlo automatski. D'Alambert je, naprimer, prilikom određivanja verovatnoće izvlačenja puba iz špila od 32 karte, rezonovao na sledeći način: izvučena karta može biti ili pub ili neka druga karta, dakle dve mogućnosti postoje, pa je tražena verovatnoća ½. Međutim, obe mogućnosti nisu podjednako verovatne, te je bilo potrebno da se prethodno ponderišu.

Dakle, pored glavnog zadatka da se obrazuje totalan skup, potrebno je da se ponderišu elementi toga skupa. To ćemo postići ako svakom elementu pripišemo izvesnu masu. Ako imamo ozbiljnih razloga da smatramo da je ponderacija uniformna, svaka masa biće jedinica i verovatnoća jednog događaja zadržaće definiciju iz 1.1. U protivnom, verovatnoća jednog događaja biće odnos zbira masa elemenata povoljnog i totalnog skupa. Lako je konstatovati da su obe aksiome iz 1.4 zadovoljene i pri ovakvoj definiciji verovatnoće.

Napomenimo da se definicija može proširiti i na slučaj osnovnog skupa sa bezbroj elemenata, o čemu ćemo kasnije govoriti.

1.6. Keynes-ove oznake. — Videli smo da kod svake hazardne igre mora biti zadovoljen jedan skup uslova. Tek pod pretpostavkom da su svi ti uslovi ispunjeni možemo preći na određivanje verovatnoće događaja A. Neka je, naprimer, h hipoteza ili premisa da je kocka koju bacamo pravilnog oblika i homogene mase sa neznatnim rupicama koje označavaju strane. Ako sa a označimo propoziciju da će se događaj A ostvariti (napr. da padne jedinica) onda po Keynes-u označavamo verovatnoću događaja A sa

$$Pr\{A\} = a/h.$$

Ona označava verovatnoću da je propozicija a istinita pod uslovom da je premisa h istinita.

Označimo sa $\bar{a}$ suprotnu propoziciju propozicije a. Propozicija a biće neistinita ako je propozicija $\bar{a}$ istinita. Takođe $\bar{A}$ pretstavlja suprotan događaj događaja A. Povoljan skup događaja $\bar{A}$ je komplementaran skup povoljnog skupa događaja A.

$$Pr\{\bar{A}\} = \bar{a}/h$$

pretstavlja verovatnoću da je $\bar{a}$ istinito, odnosno da je a pogrešno, pod uslovom da je h istinito.

Ako je A izvesan događaj, događaj $\bar{A}$ je nemoguć i

$$Pr\{A\} = 1,$$

$$Pr\{\bar{A}\} = 0.$$

Za dve propozicije sa istom premisom h (napr. dve strane jedne iste kocke) kaže se da imaju isto polje. Tako a/h i b/h pretstavljaju verovatnoće propozicija a i b istog polja h. Propozicije a i $\bar{a}$ isključuju se međusobno, pošto obe propozicije ne mogu istovremeno biti istinite. Ako se i propozicije a i b istog polja h međusobno isključuju, onda ćemo sa $a+b$ označiti propoziciju da ili a ili b bude istinito. Međutim, u opštem slučaju može se desiti da istovremeno i a i b bude istinito. To je slučaj kada odgovarajući povoljni skupovi imaju zajedničke elemente. Tada ćemo gornju propoziciju da ili a ili b bude istinito označiti sa $a \dotplus b$. Izraz

$$(a \dotplus b)/h$$

označava verovatnoću da će a ili b biti istinito pod uslovom da je h istinito. Ukoliko su propozicije a i b inkompatibilne, tj. međusobno se isključuju, gornja će se verovatnoća pisati u obliku $(a+b)/h$ i na osnovu drugog aksioma biće

(1.6.1) $$(a+b)/h = a/h + b/h.$$

Kako su i propozicije a i $\bar{a}$ inkompatibilne, to je na osnovu prvog i drugog aksioma

$$(a+\bar{a})/h = a/h + \bar{a}/h = 1,$$

odakle

(1.6.2) $$a/h = 1 - \bar{a}/h$$

Propozicija da su a i b istovremeno istiniti označava se sa ab a izraz

$$(ab)/h$$

pretstavljaće verovatnoću da će propozicije a i b biti istovremeno istinite pod uslovom da je h istinito.

Propozicije a, $\bar{a}$, b i $\bar{b}$ možemo sada kombinovati. Tako je napr. $a\bar{b}$ propozicija da je istovremeno a istinito a b pogrešno, $\bar{a}\bar{b}$ propozicija da je istovremeno i a i b pogrešno itd.

Logično sabiranje i proizvod propozicija pretstavljaju algebarske operacije kod kojih važe komutativne

$$a \dot{+} b = b \dot{+} a,$$

$$ab = ba$$

i asocijativne veze

$$(a \dot{+} b) \dot{+} c = a \dot{+} b \dot{+} c.$$

Distributivne veze takođe ostaju u važnosti. Tako je, naprimer,

$$a(b \dot{+} c) = ab \dot{+} ac,$$

tj. propozicija da će istovremeno sa a biti istinito b ili c identična je sa propozicijom da će istovremeno biti istiniti a i b ili a i c.

Dupla negacija od a svodi se na a, tj.

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

Isto tako je

$$a \dot{+} a = a,$$

$$aa = a.$$

Važnije veze između zbira i proizvoda propozicija a i b su sledeće

(1.6.3) $$\overline{a \dot{+} b} = \bar{a}\,\bar{b},$$

(1.6.4) $$\overline{ab} = \bar{a} \dot{+} \bar{b},$$

(1.6.5) $$a \dot{+} b - b = a\bar{b},$$

(1.6.6) $$a \dot{+} b - ab = a\bar{b} + \bar{a}b$$

1.7. Teorema totalne verovatnoće. — Koristeći veze (1.6.2) i (1.6.5) kao i drugi aksiom, dobićemo

$$(a \dotplus b)/h = b/h + (a\bar{b})/h =$$
$$= b/h + (a - ab)/h,$$

tj.

$$(a \dotplus b)/h = a/h + b/h - (ab)/h. \tag{1.7.1}$$

Tako dolazimo do *teoreme totalne verovatnoće*: *verovatnoća da će* a *ili* b *biti istinito, jednaka je razlici iz zbira verovatnoća za* a *i* b *i verovatnoće da će* a *i* b *biti istovremeno istiniti.*

Na osnovu prvog aksioma verovatnoća $(ab)/h \geqslant 0$, pa je

$$(a \dotplus b)/h \leqslant a/h + b/h. \tag{1.7.2}$$

Ovaj obrazac je poznat pod imenom *Bool-ova teorema.*

Ukoliko su propozicije a i b inkompatibilne, $(ab)/h = 0$ i (1.7.1) svodi se na (1.6.1).

Za tri propozicije a, b i c totalna verovatnoća da će biti istinito a ili b ili c biće

$$(a \dotplus b \dotplus c)/h = a/h + (b \dotplus c)/h - a(b \dotplus c)/h =$$
$$= a/h + b/h + c/h - (ab)/h - (ac)/h -$$
$$- (bc)/h + (abc)/h$$

a Bool-ova teorema postaje

$$(a \dotplus b \dotplus c)/h \leqslant a/h + (b \dotplus c)/h,$$

tj.

$$(a \dotplus b \dotplus c)/h \leqslant a/h + b/h + c/h.$$

I uopšte, za n propozicija $a_1, a_2, \ldots, a_n$, imaćemo

$$(a_1 \dotplus a_2 \dotplus \ldots \dotplus a_n)/h \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i/h. \tag{1.7.3}$$

Ukoliko su propozicije a_i inkompatibilne među sobom, (1.7.3) svodi se na

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/h = \sum_{i=1}^{n} a_i/h,$$

tj. na drugi aksiom.

1.8. Uslovna verovatnoća i aksiom složene verovatnoće. — Verovatnoća da će propozicija b biti istinita kada se pored ostalih premisa h uzme za premisu i propozicija a, pretstavlja uslovnu verovatnoću b/ah. Ova definicija uslovne verovatnoće može se generalisati i na n novih premisa a_i, sa uslovnom verovatnoćom $b/a_1 a_2 \ldots a_n h$. U ovom slučaju je polje h suženo na onaj svoj deo gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ istiniti.

Povoljan skup za verovatnoću a/h biće totalan skup za verovatnoću b/ah.

Sada možemo da iskažemo *aksiom složene verovatnoće*: *Verovatnoća da će* a *i* b *istovremeno biti istiniti, jednaka je proizvodu verovatnoće da* *će a biti istinito i verovatnoće da će b biti istinito pod uslovom da je a istinito, odnosno da će b biti istinito i verovatnoće da će a biti istinito pod uslovom da je b istinito, tj.*

(1.8.1) $$(ab)/h = a/h \cdot b/ah = b/h \cdot a/bh.$$

1.9. Nezavisne propozicije. — Za dve propozicije a i b kazaćemo da su nezavisne ako je

(1.9.1) $$b/ah = b/h.$$

Ovde nije reč o matematičkoj već o *stohastičkoj zavisnosti*. Ako je $b/ah \neq b/h$, kažemo da propozicija b stohastički zavisi od a.

U slučaju nezavisnosti propozicija a i b obrazac (1.8.1) postaje

(1.9.2) $$(ab)/h = a/h \cdot b/h$$

a (1.7.1)

(1.9.3) $$(a \dotplus b)/h = a/h + b/h - a/h \cdot b/h.$$

Nezavisnost b od a povlači za sobom nezavisnost a od b, jer tada (1.8.1) postaje

$$a/h \cdot b/h = b/h \cdot a/bh$$

i ako je $b/h > 0$, deobom jednačine sa b/h dobijamo

$$a/bh = a/h.$$

Nezavisnost je recipročna, te se zato najčešće kaže da su a i b uzajamno nezavisni.

Ako b ne zavisi od a, onda i $\bar{b}$ ne zavisi od a, jer je

$$\bar{b}/ah = 1 - b/ah = 1 - b/h = \bar{b}/h.$$

Najzad, ako je b nezavisno od a, ono će biti nezavisno i od $\bar{a}$, jer iz

$$(\bar{a}b)/h = \bar{a}/h \cdot b/\bar{a}h = b/h \cdot \bar{a}/bh$$

iz prethodnog zaključka imamo

$$\bar{a}/h \cdot b/\bar{a}h = b/h \cdot \bar{a}/h$$

i ako je $\bar{a}/h > 0$, biće

$$b/\bar{a}h = b/h.$$

Prema tome, ako su propozicije a i b uzajamno nezavisne, sledeća četiri uslova su zadovoljena

$$(ab)/h = a/h \cdot b/h,$$
$$(a\bar{b})/h = a/h \cdot \bar{b}/h,$$
$$(\bar{a}b)/h = \bar{a}/h \cdot b/h,$$
$$(\bar{a}\bar{b})/h = \bar{a}/h \cdot \bar{b}/h.$$

U opštem slučaju, složena verovatnoća za n propozicija $a_1, a_2, \ldots, a_n$ biće

$$(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)/h = (a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1})/h \cdot a_n/a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1} h,$$

$$= (a_1 a_2 \ldots a_{n-2})/h \cdot a_{n-1}/a_1 a_2 \ldots a_{n-1} h \cdot a_n/a_1 a_2 \ldots a_{n-1} h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= a_1/h \cdot a_2/a_1 h \cdot a_3/a_1 a_2 h \ldots a_n/a_1 a_2 \ldots a_{n-1} h.$$

Ako svaka propozicija a_k zavisi samo od prethodne a_{k-1}, imaćemo *lančanu zavisnost* ranga 1

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)/h = a_1/h \cdot a_2/a_1 h \cdot a_3/a_2 h \ldots a_n/a_{n-1} h$$

poznatu pod imenom *Markoff-ljevog lanca*. Tako, naprimer, ako u jednoj anketi ispitivano lice ima da odgovori na jedan niz pitanja, često je odgovor na k-to pitanje u zavisnosti od odgovora na $(k-1)$-vo pitanje. U slučaju da zavisi od p prethodnih odgovora, imaćemo lančanu zavisnost ranga p.

Markoff-ljevi lanci u osnovi su Teorije stohastičkih procesa, koja pretstavlja jednu od najnovijih grana Matematičke statistike.

1.10. Primeri

1.10.1. Dve kocke se istovremeno bacaju. Ako je svaka kocka pravilnog oblika i homogene mase sa zanemarujućim rupicama koje označavaju strane (premisa h) tako da je konstantna verovatnoća svake strane 1/6, kolika je verovatnoća da će 2 ispasti kod jedne a 3 kod druge kocke?

Ako sa a i b označimo odgovarajuće propozicije, tako da je

$$a/h = \frac{1}{6} \quad \text{i} \quad b/h = \frac{1}{6}$$

tražena verovatnoća imaće propoziciju $ab + ba$, pa je

$$(ab + ba)/h = (ab)/h + (ba)/h.$$

Kako su propozicije a i b nezavisne međusobno, to je

$$(ab + ba)/h = a/h \cdot b/h + b/h \cdot a/h =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

1.10.2. Uzevši iste uslove primera 1.10.1, kolika je verovatnoća da će zbir strana biti 5?

Već u prethodnom primeru zbir strana bio je 5. Označimo sa c odgovarajuću propoziciju, tj. $c = ab + ba$. Neka je d propozicija da će 1 ispasti kod jedne a 4 kod druge kocke, tj. opet 5. Verovatnoća propozicije d je

$$d/h = \frac{1}{18}.$$

Drugih mogućnosti za zbir 5 nema, pa je tražena verovatnoća

$$(c + d)/h = c/h + d/h = \frac{1}{9}.$$

1.10.3. Bacaju se istovremeno četiri kocke. Kolika je verovatnoća da će zbir biti 12?

Potražimo ovu verovatnoću direktno, tj. kao odnos broja slučajeva povoljnog i totalnog skupa.

Broj slučajeva totalnog skupa je broj varijacija od šest elemenata četvrte klase sa ponavljanjem, tj. $N = 6^4 = 1296$.

Broj slučajeva povoljnog skupa biće broj svih varijacija od šest elemenata četvrte klase sa zbirom 12. Njih ćemo dobiti ako permutujemo sledeće kombinacije

1146	1236	2244	3333	4413
1155	1245	2235	3324	
		2226	3315	

tako da je

$$n = 6 \cdot \frac{4!}{2!} + 2 \cdot \frac{4!}{2!2!} + 2 \cdot 4! + 1 = 133.$$

Tražena verovatnoća biće

$$a/h = \frac{133}{1296}.$$

1.10.4. U jednoj urni nalazi se šest belih i šest crnih kuglica iste veličine, težine i rapavosti. Na slučaj je izvučeno dve kuglice. Kolika je verovatnoća da će α) obe kuglice biti bele, β) jedna bela i jedna crna i γ) da ne budu obe crne?

Ukupan broj slučajeva totalnog skupa je broj kombinacija druge klase od 12 elemenata, tj.

$$N = \binom{12}{2} = 66$$

a brojevi slučajeva povoljnih skupova za α) i β) biće respektivno $n_1 = \binom{6}{2} = 15$ i $n_2 = 6 \cdot 6 = 36$, tako da je

$$a/h = \frac{15}{66} = \frac{5}{22},$$

$$b/h = \frac{36}{66} = \frac{6}{11},$$

a kako je propozicija c zbir propozicija a i b, to je

$$c/h = (a + b)/h = \frac{17}{22}.$$

1.10.5. Iz špila od 52 karte, iste debljine i rapavosti izvučeno je na slučaj 5 karata. Kolika je verovatnoća da će među tih 5 karata biti α) samo jedan kec i β) najmanje jedan kec?

Odmah vidimo da je $N=\binom{52}{5}$ i

$$n_1=4\cdot\binom{48}{4},$$

$$n_2=4\cdot\binom{48}{4}+\binom{4}{2}\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\binom{48}{1}=\binom{52}{5}-\binom{48}{5}$$

tako da je

$$a/h=\frac{4\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}},\qquad b/h=1-\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

1.10.6. Bacaju se dve kocke. Kolika je verovatnoća da ili zbir bude 5 ili proizvod 6?

Broj slučajeva totalnog skupa i prve i druge propozicije je broj varijacija od šest elemenata druge klase, tj. $N=36$. Kako je

$$a/h=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\qquad b/h=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\qquad b/ah=\frac{1}{2},$$

to je tražena verovatnoća

$$(a+b)/h=a/h+b/h-a/h\cdot b/ah=\frac{1}{6}.$$

1.10.7. Pod istim uslovima iz 1.10.6 kolika je verovatnoća da će istovremeno i zbir i proizvod biti parni?

Ukupan broj mogućih slučajeva je 36 i u 18 slučajeva zbir je paran. Zato je

$$a/h=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}.$$

Kod verovatnoće b/ah ukupan broj mogućih slučajeva je broj povoljnih slučajeva verovatnoće a/h, tj. 18. Kako će proizvod biti paran ako su jedan ili oba broja parna, to je

$$n_2=3\cdot 3=9$$

pa je tražena verovatnoća

$$(ab)/h=a/h\cdot b/ah=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{18}=\frac{1}{4}.$$

1.10.8. Igrač A baca dve a igrač B tri pare. Onaj kod koga najveći broj puta padne glava, dobija igru. Ako im je pao isti broj glava, igra počinje iznova. Kolika je verovatnoća da će igrač B dobiti? (De Moivre)

Kada A baca dve pare, mogući su slučajevi

$$GG,\quad GP,\quad PG,\quad PP,$$

tako da je verovatnoća 1/4 da će pasti dve glave, 1/2 da će pasti jedna glava i jedno pismo i 1/4 dva pisma.

Kada igrač B baci tri pare, mogući su slučajevi

$$GGG,\quad GGP,\quad GPG,\quad PGG,\quad GPP,\quad PGP,\quad PPG,\quad PPP$$

tako da je verovatnoća 1/8 da će pasti tri glave, 3/8 dve glave i jedno pismo, 3/8 jedna glava i dva pisma i 1/8 tri pisma.

Potražimo verovatnoću da će B dobiti pri prvom bacanju. Ako padnu tri glave, B je dobio, bez obzira šta će kod A ispasti. Ako padnu dve glave, B će dobiti ako kod A padne ili jedna ili nijedna glava. Ako padne jedna glava, B će dobiti u slučaju da kod A ne padne nijedna glava. Prema tome, verovatnoća da će B dobiti u prvoj igri, biće

$$\frac{1}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

a verovatnoća da će A dobiti u prvoj igri, biće

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{16}.$$

Najzad, verovatnoća da ni A ni B neće izaći iz prve igre kao pobednik, je

$$1-\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=\frac{5}{16}.$$

Ukoliko prilikom prvog bacanja igra nije završena, prelazi se na drugo bacanje. Ukupna preostala masa je 5/16, pa su respektivno

$$\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{2}\quad\text{i}\quad\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{16}$$

verovatnoće da će B, odnosno A, dobiti igru prilikom drugog bacanja a

$$\left(\frac{5}{16}\right)^2$$

da se igra neće završiti ni posle drugog bacanja.

Ako se igra produži do n-tog bacanja, odgovarajuće verovatnoće biće

$$\left(\frac{5}{16}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2},\quad\left(\frac{5}{16}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{16}\quad\text{i}\quad\left(\frac{5}{16}\right)^{n}.$$

Zato je verovatnoća da će B dobiti igru

$$b/h=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\left(\frac{5}{16}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{5}{16}\right)^{n}}{1-\frac{5}{16}}=\frac{8}{11}.$$

Verovatnoća da će A dobiti igru, biće

$$a/h = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{16} + \frac{5}{16}\cdot\frac{3}{16} + \dots\dots + \left(\frac{5}{16}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{16}\right] = \frac{3}{11}.$$

Najzad, verovatnoća da se igra nikada neće završiti, biće

$$1 - a/h - b/h = 0.$$

1.10.9. Jedna je tvrđava opkoljena neprijateljskom vojskom. Neka je 1/5 verovatnoća da će se jedan kurir probiti kroz neprijateljske redove. Koliko kurira treba najmanje poslati, pa da verovatnoća, da će bar jedan uspeti da se probije, bude veća od 8/9?

Neka je taj broj n. Suprotna verovatnoća ima za propoziciju $\bar{a}$ da će svih n kurira pasti u neprijateljske ruke. Verovatnoća da se jedan kurir neće probiti je 4/5, pa je

$$\bar{a}/h = \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Otuda

$$a/h = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

gde još n treba tako odrediti da nejednačina

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n > \frac{8}{9}$$

bude zadovoljena. Lako je proveriti da je $n = 10$.

1.10.10. Igrači A i B bacaju alternativno istovremeno dve kocke. A prvi počinje. Dogovorili su se da će A dobiti igru ako dobije zbir 6 pre nego što B dobije zbir 7. B će pak dobiti igru ako dobije zbir 7 pre nego što A dobije zbir 6. Čija je verovatnoća veća da će dobiti igru? (Huygens).

Verovatnoće zbirova 6 i 7 su respektivno

$$\alpha = \frac{5}{36}, \qquad \beta = \frac{6}{36}$$

a verovatnoća da će A dobiti u $2n+1$-om bacanju je

$$(1-\alpha)^n\,(1-\beta)^n\alpha;$$

tako da je verovatnoća dobitka igre za igrača A

$$a/h = \lim_{n\to\infty}\alpha\,[1 + (1-\alpha)(1-\beta) + \dots + (1-\alpha)^n(1-\beta)^n]$$

a igrača B

$$b/h = \lim_{n\to\infty}\beta(1-\alpha)\,[1 + (1-\alpha)(1-\beta) + \dots + (1-\alpha)^n(1-\beta)^n],$$

odnosno, smenom vrednosti za α i β,

$$a/h = \frac{30}{61}, \qquad b/h = \frac{31}{61}.$$

Dakle, i pored toga što igrač A prvi baca, njegova verovatnoća dobitka je manja, pošto je α dosta manje od β.

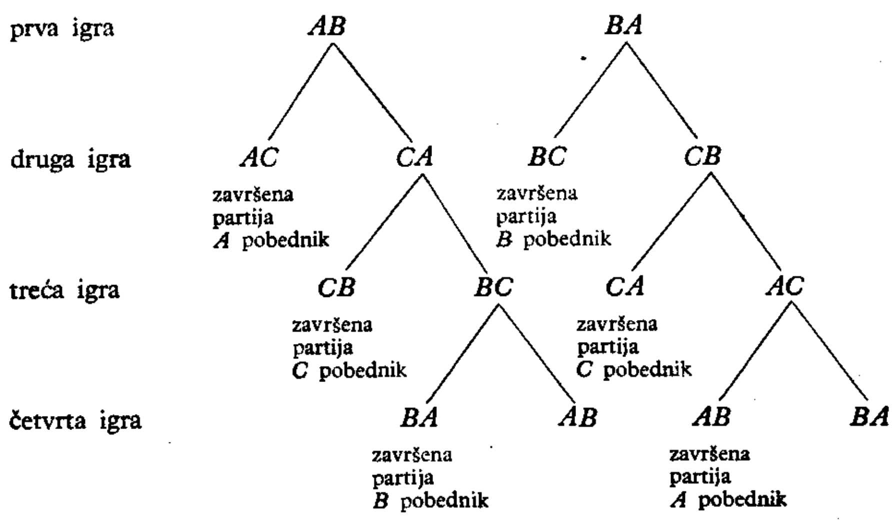
1.10.11. Jedna urna sadrži b belih i n crnih kuglica, tako da je $b+n=s$. Istovremeno se izvuče $m=\beta+\nu$ kuglica. Kolika je verovatnoća da je izvučeno β belih i ν crnih kuglica? (Laplace).

Kako je broj mogućih slučajeva $\binom{s}{m}$ a povoljnih $\binom{b}{\beta}\binom{n}{\nu}$, to je tražena verovatnoća

$$a/h=\frac{\binom{b}{\beta}\binom{n}{\nu}}{\binom{s}{m}}=\frac{b(b-1)\ldots(b-\beta+1)\,n(n-1)\ldots(n-\nu+1)m!}{s(s-1)\ldots(s-m+1)\,\beta!\,\nu!}.$$

1.10.12. Tri igrača A, B i C bacaju jednu paru i to na sledeći način: prilikom prvog bacanja igraju A i B a pobednik igra sa C i tako redom. Uvek pobednik nastavlja igru a pobeđeni se povlači. Partija će biti završena kada jedan isti igrač dobije u dva uzastopna bacanja. Kolike su verovatnoće da će igrači A, B, C dobiti partiju?

U prvoj igri igraju igrači A i B. Ako sa leve strane stavimo igrača pobednika u toj igri, onda su mogućnosti sledeće: AB i BA. Pobednik igra u drugoj igri sa C, te možemo da konstruišemo sledeću šemu mogućih slučajeva:



Vidimo da postoji ciklično ponavljanje mogućih slučajeva. Peta igra je istovetna sa drugom, šesta sa trećom itd.

Verovatnoća da će se odigrati treća igra je $\frac{1}{2}$, četvrta $\frac{1}{2^2}$, peta $\frac{1}{2^3}$ itd.

Verovatnoća da će igrač A dobiti u toku prvog ciklusa, tj. u drugoj, trećoj ili četvrtoj igri, jednaka je totalnoj verovatnoći da će dobiti u prvoj i drugoj, odnosno u trećoj i četvrtoj igri

$$a_1/h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}.$$

Verovatnoća da će igrači B i C dobiti partiju u prvom ciklusu, biće respektivno

$$b_1/h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16},$$

$$c_1/h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Verovatnoća da se u prvom ciklusu partija neće završiti, jeste

$$1 - \frac{5}{16} - \frac{5}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Ovu masu rasporedićemo u istom odnosu za drugi ciklus, pa je

$$a_2/h = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{16}, \quad b_2/h = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{16}, \quad c_2/h = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}.$$

Ako sa α, β i γ označimo propozicije da će respektivno igrači A, B i C dobiti partiju, tražena verovatnoća biće

$$\alpha/h = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/h = \frac{5}{14},$$

$$\beta/h = \sum_{i=1}^{\infty} b_i/h = \frac{5}{14},$$

$$\gamma/h = \sum_{i=1}^{\infty} c_i/h = \frac{4}{14}.$$

1.10.13. Jedna urna sadrži s kuglica, od kojih b belih. Ako svaku izvučenu kuglicu vraćamo nazad u urnu, koliko puta treba izvući po jednu kuglicu da bi verovatnoća izvlačenja jedne bele kuglice bila veća od jednog datog broja $(0 < \omega < 1)$.

Označimo sa p verovatnoću da će izvučena kuglica biti bela, tako da je

$$p = \frac{b}{s},$$

a sa q suprotnu verovatnoću

$$q = 1 - \frac{b}{s}.$$

Verovatnoća da će u n izvlačenja bar jedna biti bela kuglica, jeste $1-q^n$.

Dakle, treba tako odrediti n da bude zadovoljena nejednačina

$$1 - q^n > \omega,$$

odnosno

$$n \,|\log(1-p)| > |\log(1-\omega)|.$$

Uzeli smo apsolutne vrednosti, s obzirom da su logaritmi od $1-p$ i $1-\omega$ negativni brojevi.

1.10.14. Odrediti verovatnoću da će od dve propozicije a_1 i a_2 samo jedna biti istinita.

$$\begin{aligned}\alpha/h &= (a_1 \bar{a}_2 + a_2 \bar{a}_1)/h = \\ &= (a_1 \bar{a}_2)/h + (a_2 \bar{a}_1)/h = a_1/h \cdot \bar{a}_2/a_1 h + a_2/h \cdot \bar{a}_1/a_2 h = \\ &= a_1/h\,(1 - a_2/a_1 h) + a_2/h\,(1 - a_1/a_2 h) = \\ &= a_1/h + a_2/h - 2\,(a_1 a_2)/h.\end{aligned}$$

Ukoliko imamo n propozicija $a_1, a_2, \ldots, a_n$, i ako označimo totalne verovatnoće

$$P_1 = \Sigma\, a_i/h,$$

$$P_2 = \Sigma\, a_{ij}/h,$$

$$P_3 = \Sigma\, a_{ijk}/h \quad \text{itd.}$$

biće

$$\alpha/h = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \ldots \pm P_n.$$

1.10.15. Igrači A i B pogodili su se da igraju pod sledećim uslovima: svaki redom uzima po jednu kuglicu iz urne koja sadrži a belih i b crnih kuglica. Onaj koji prvi izvuče belu kuglicu, dobija igru. Kolika je verovatnoća da će onaj igrač koji počinje igru pobediti?

Verovatnoća da će igrač A izvući belu kuglicu u prvom izvlačenju je

$$a_1/h = \frac{a}{a+b}.$$

Ako A u prvom izvlačenju izvuče crnu kuglicu, to da bi ponovo mogao da izvlači, potrebno je da B u drugom izvlačenju izvuče crnu kuglicu, tako da je verovatnoća da će A izvući belu kuglicu u trećem izvlačenju

$$a_3/h = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b-2},$$

u petom

$$a_5/h = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b-2}{a+b-2} \cdot \frac{b-3}{a+b-3} \cdot \frac{a}{a+b-4}$$

itd.

Zato je verovatnoća da će A dobiti igru

$$\alpha/h = \frac{a}{a+b}\left[1 + \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{b-1}{a+b-2} + \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{b-1}{a+b-2} \cdot \frac{b-2}{a+b-3} \cdot \frac{b-3}{a+b-4} + \ldots\right].$$

Verovatnoća da će B dobiti posle drugog izvlačenja je

$$b_2/h = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1},$$

posle četvrtog

$$b_4/h = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b-2}{a+b-2} \cdot \frac{a}{a+b-3}$$

itd.

Zato je verovatnoća da će B dobiti igru

$$\beta/h = \frac{a}{a+b}\left[\frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{b-1}{a+b-2} \cdot \frac{b-2}{a+b-3} + \cdots\right].$$

Kako je

$$\alpha/h + \beta/h = 1.$$

to dolazimo do identiteta

$$1 + \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{b-1}{a+b-2} + \cdots = \frac{a+b}{a}.$$

1.10.16. Neka svaka od p urni sadrži po n kuglica numerisanih od 1 do n. Iz svake urne izvuče se po jedna kuglica. Kolika je verovatnoća da će najveća izvučena numera biti jedan određen broj m $(m \leqslant n)$?

Verovatnoća da se ni iz jedne urne neće izvući jedan dati broj je

$$a_1/h = \left(\frac{n-1}{n}\right)^p$$

a verovatnoća da se ni iz jedne urne neće izvući nijedan od i datih brojeva je

$$a_1/h = \left(\frac{n-i}{n}\right)^p.$$

Ako sa b_m/h označimo traženu verovatnoću, to imamo veze

$$\sum_{k=1}^{m} b_k/h = \left(\frac{m}{n}\right)^p,$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} b_k/h = \left(\frac{m-1}{n}\right)^p$$

pa je

$$b_m/h = \frac{m^p - (m-1)^p}{n^p}.$$

U specijalnom slučaju $p = 2$, biće

$$b_m/h = \frac{2m-1}{n^2}.$$

1.10.17. U kinetičkoj teoriji idealnih gasova elementi su molekuli a urne domeni faznog širenja. Neka je g_i broj urni i-te grupe, a n broj elemenata koje ne možemo među sobom razlikovati. Kolika je verovatnoća da će u i-toj grupi biti n_i elemenata?

Verovatnoća da će jedan elemenat pasti u urnu i-te grupe je

$$p_i = \frac{g_i}{\sum\limits_i g_i}$$

a verovatnoća da u urnama prve grupe bude prvih n_1 elemenata, u urnama druge grupe narednih n_2 elemenata itd. je

$$\prod_i p_i^{n_i}$$

Kako su brojevi elemenata povoljnog i totalnog skupa

$$\prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad \text{i} \quad \frac{(\sum\limits_i g_i)^n}{n!}$$

to je tražena verovatnoća

$$a/h = \frac{n!}{(\sum\limits_i g_i)^n} \cdot \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

1.10.18. Ako između propozicija a i b postoji veza

$$a = a \cdot b;$$

dokazati da je tada i

$$b = a \dotplus b.$$

Dodajmo levoj i desnoj strani propoziciju b, tj.

$$a \dotplus b = ab \dotplus b.$$

Kako je propozicija da su simultano istinite propozicije a i b ili propozicije $\bar{a}$ i b identična sa propozicijom b, to je

$$b = ab \dotplus \bar{a}b,$$

pa je

$$a \dotplus b = ab \dotplus ab \dotplus \bar{a}b =$$

$$= ab \dotplus \bar{a}b = b$$

a to smo i hteli da dokažemo.

1.10.19. Ako imamo simultano tri propozicije a, b i c, moguće je obrazovati $2^3 = 8$ klasa propozicija

$$abc, \quad ab\bar{c}, \quad a\bar{b}c, \quad \bar{a}bc, \quad a\bar{b}\bar{c}, \quad \bar{a}b\bar{c}, \quad \bar{a}\bar{b}c, \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c},$$

koje ćemo označiti sa $k_1, k_2, \ldots, k_8$. Gornje klase možemo napisati u kanoničnom obliku

$$\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i k_i, \qquad (\varepsilon_i = 0,1). \tag{1.10.19.1}$$

Zbir se odnosi samo na znak $+$, pošto se članovi međusobno isključuju. Dokazati da se svaka propozicija $F(a, b, c)$ formirana od propozicija a, b i c upotrebom znakova $\dotplus, \cdot, -$ može dovesti u kanonični oblik (1.10.19.1).

Primetimo najpre da, ako propozicije F_1 i F_2 možemo dovesti u kanonični oblik

$$F_1 = \Sigma\, \varepsilon_i k_i, \qquad F_2 = \Sigma\, \varepsilon_i' k_i,$$

propozicija $F_1 \dotplus F_2$ biće takođe kanoničnog oblika

$$\begin{aligned} F_1 \dotplus F_2 &= \Sigma\, (\varepsilon_i k_i \dotplus \varepsilon_i' k_i) = \\ &= \Sigma\, (\varepsilon_i k_i + \varepsilon_i' k_i - \varepsilon_i \varepsilon_i' k_i) = \\ &= \Sigma\, (\varepsilon_i \dotplus \varepsilon_i' - \varepsilon_i \varepsilon_i')\, k_i = \\ &= \Sigma\, \varepsilon_i'' k_i, \end{aligned}$$

gde smo stavili

$$\varepsilon_i'' = \varepsilon_i + \varepsilon_i' - \varepsilon_i \varepsilon_i'.$$

Takođe imamo

$$F_1 F_2 = \Sigma\, \varepsilon_i \varepsilon_i' k_i$$

i najzad

$$\overline{F}_1 = \Sigma\, \overline{\varepsilon}_i k_i,$$

gde je $\overline{\varepsilon}_i = 1 - \varepsilon_i$.

Dakle, ako su dva ma kakva izraza data u kanoničnom obliku, možemo dovesti u kanonični oblik izraze koji se svode iz gornja dva preko operacija $\dotplus, \cdot, -$. Treba još pokazati da same propozicije a, b i c možemo dovesti u kanonični oblik. Odmah vidimo da je

$$a = abc \dotplus ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c},$$

$$b = abc \dotplus ab\overline{c} + \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c},$$

$$c = abc + a\overline{b}c + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c.$$

1.10.20. Koliki je broj kanoničnih oblika propozicija formiranih od propozicija a i b?

Broj mogućih članova koji formiraju tražene kanonične oblike je $2^2 = 4$, tj.

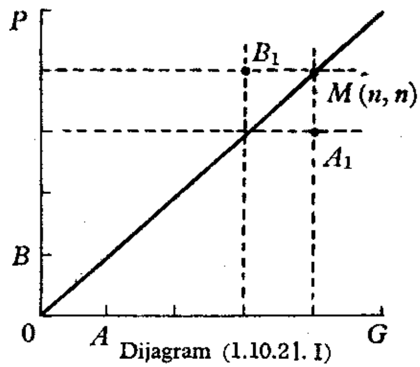
$$ab, \quad \overline{a}b, \quad a\overline{b}, \quad \overline{a}\overline{b}.$$

U kanoničnoj formi svaki od ovih članova može figurisati ili ne, što čini ukupno $2^4 = 16$ mogućnosti. Da bismo dobili traženi broj, treba od 16 odbiti 4, tj. broj funkcija u kojima članovi zavise samo od a odnosno samo od b i 2, tj. broj funkcija u kojima članovi ne zavise ni od a ni od b. Dakle, traženi broj je 10. Ove različite funkcije propozicija nazivamo *Booleove funkcije*.

1.10.21. Kolika je verovatnoća da prilikom bacanja pare n puta padne glava a n puta pismo u $2n$ bacanja, a da prethodno nijedanput nije bilo jednakosti?

Uočimo koordinatni sistem sa G osom kao apscisom i P osom kao ordinatom. Ako u prvom bacanju padne glava, rezultat će označavati tačka A

(1, 0). Obratno, ako u prvom bacanju padne pismo, rezultat će označavati tačka $B(0, 1)$ itd. Traži se verovatnoća da posle $2n$ bacanja rezultat označava tačka $M(n, n)$ a da prethodno nijedanput ne bude presečena dijagonala OM. Svi povoljni putevi treba da se nalaze ispod OM i u $(2n-1)$-om bacanju prolaze kroz tačku A_1 $(n, n-1)$, ili da se nalaze iznad OM i u $(2n-1)$-om bacanju prolaze kroz tačku B_1 $(n-1, n)$.



Dijagram (1.10.21. I)

Neka od dve date tačke jednu smatramo kao početak a druga neka ima koordinate (p, q) u odnosu na taj početak. Tada je broj mogućih puteva od prve do druge tačke

$$\binom{p+q}{p}=\binom{p+q}{q}.$$

Zato će broj mogućih puteva OA_1 biti

$$\binom{2n-1}{n}.$$

Nepovoljni putevi su BA_1, odnosno AB_1, čiji je broj

$$2\binom{2n-2}{n}.$$

Nastavljajući gornje rezonovanje i za određivanje svih ostalih nepovoljnih puteva, dobićemo da je tražena verovatnoća

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}.$$

1.11. Zadaci za vežbu

1.11.1. Dokazati sledeću vezu

$$(a\dotplus b)/h=(\overline{\bar{a}\cdot\bar{b}})/h,$$

tj. verovatnoća da je propozicija a ili b istinita, jednaka je suprotnoj verovatnoći od verovatnoće da istovremeno ni a ni b neće biti istiniti.

1.11.2. Ako je propozicija c suprotna propoziciji totala a i b, dokazati da je tada

$$ab\dotplus c=(a\dotplus c)(b\dotplus c).$$

1.11.3. Odrediti čemu je jednaka propozicija

$$[(\bar{a}\dotplus b)(\bar{b}\dotplus c)]\,(\bar{a}\dotplus c).$$

1.11.4. Odrediti čemu je jednaka propozicija

$$[(a \sim b)(b \sim c)](a \sim c),$$

gde smo označili

$$a \sim b = a \cdot b \dotplus \bar{a}\bar{b}.$$

1.11.5. Uočimo sledećih 8 klasa propozicija

$$a+b+c, \quad a+b+\bar{c}, \quad a+\bar{b}+c, \quad \bar{a}+b+c,$$

$$a+\bar{b}+\bar{c}, \quad \bar{a}+b+\bar{c}, \quad \bar{a}+\bar{b}+c, \quad \bar{a}+\bar{b}+\bar{c},$$

koje se međusobno ne isključuju. Dokazati da se svaka propozicija $F(a, b, c)$ formirana od propozicija a, b i c upotrebom operacija $\dotplus$, $\cdot$, — može dovesti u oblik preseka gornjih klasa.

1.11.6. Pokazati da je broj različitih Boole-ovih funkcija za n klasa propozicija $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$N(n) - \frac{n}{1!} N(n-1) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} N(n-2) + \ldots,$$

gde je

$$N(n) = 2^{2^n}.$$

1.11.7. Bacaju se dve kocke tri puta uzastopce. Kolika je verovatnoća da će se zbir strana 5 i 7 pojaviti bar po jedanput?

1.11.8. Dva igrača bacaju paru i partiju dobija onaj koji dobije dve igre više nego drugi. Kolika je verovatnoća da partija bude završena posle drugog, četvrtog, šestog bacanja? (De Moivre — Ampère).

1.11.9. Dva kandidata A i B dobila su na izborima a i b glasova respektivno ($a > b$). Kolika je verovatnoća da će kandidat A u toku celog prebrojavanja biti stalno u vodstvu?

1.11.10. Bacajući istovremeno 10 kocki, kolika je verovatnoća da će se svaka od strana 1, 2, 3, 4, 5, 6 najmanje jedanput pojaviti?

1.11.11. Jedna urna sadrži tri kuglice numerisane sa 1, 2 i 3. Izvlači se $n = 2s + 1$ puta po jedna kuglica iz urne (vraćajući svaki put izvučenu kuglicu nazad u urnu). Ako rezultate poređamo po veličini, kolika je verovatnoća da je s-ti rezultat 2? Pokazati da ta verovatnoća teži ka 1 kad s neograničeno raste.

1.11.12. Jedna urna sadrži n belih i n crnih kuglica. Ako izvučemo paran broj kuglica, kolika je verovatnoća da će isti broj biti belih i crnih kuglica?

1.11.13. Neka je ukupno km (k, m su celi brojevi veći od 1) kuglica od kojih je m belih. Kuglice raspoređujemo tako da u svakoj urni bude k kuglica. Kolika je verovatnoća da će se u svakoj urni naći po jedna bela kuglica?

1.11.14. Neka je ukupno $N = m_1 + 2m_2 + \ldots + sm_s$ kuglica raspoređenih u s grupa urni i to tako da u i-toj grupi bude m_i urni a u svakoj takvoj urni i kuglica. Kolika je verovatnoća da ćemo dobiti jedan takav fiksirani raspored kuglica?

1.11.15. Dva puta uzastopce bacamo po dve kocke. Neka je zbir strana p u prvom bacanju a q zbir u drugom bacanju. Kolika je verovatnoća da će jednačina $x^2 - px + q = 0$ imati α) realne, β) jednake i γ) imaginarne korene?

1.11.16. Neka je N ukupan broj kuglica raspoređenih u S grupa urni, a u svakoj grupi imamo g_i urni ($G = \sum_i g_i$). Pretpostavimo da se elementi među sobom ne razlikuju. Kolika je verovatnoća da će broj kuglica u urnama i-te grupe biti tačno n_i ($N = \sum_i n_i$) i to za svako i (Bose-Einstein-ova statistika)?

1.11.17. Neka su propozicije a, b i c nezavisne među sobom; tada su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$a/bh = a/h,$$

$$a/ch = a/h,$$

$$b/ch = b/h,$$

$$c/abh = c/h.$$

Pokazati da je tada i

$$b/ach = b/h,$$

$$a/bch = a/h.$$

1.11.18. Svaka od 8 urni sadrži 6 belih i 6 crnih kuglica. Iz prve urne izvučemo jednu kuglicu i stavimo je u drugu, zatim iz druge vadimo jednu i stavimo je u treću itd. i najzad iz osme urne izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je verovatnoća da će ona biti bela?

1.11.19. Neka je u jednoj urni ukupno N kuglica, od kojih je n_1 belih i n_2 crnih. Na slučaj izvučemo r ($r \leqslant N$) kuglica. Kolika je verovatnoća da će biti izvučeno k belih i $r-k$ crnih (hipergeometriska verovatnoća)?

1.11.20. U jednom srezu sa n domaćinstava svake godine sprovodi se anketa u kojoj se ispita m domaćinstava. Kolika je verovatnoća da će se u toku od 5 godina svako domaćinstvo bar jedanput ispitati i koliko godina treba vršiti anketu pa da ta verovatnoća bude veća od 0,9?

2. PONAVLJANJE OPITA

2.1. Wallis-ova formula. — Potsetimo se na određene integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{itd.}$$

Uopšte za n ceo pozitivan broj biće

$$J_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

$$J_{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

Kako je $0 < \sin x < 1$ za $0 < x < \pi/2$, to je

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

a samim tim i

$$J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1},$$

tj.

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,\frac{\pi}{2} < \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)},$$

odnosno

$$\frac{[2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n]^2}{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]^2(2n+1)} < \frac{\pi}{2} < \frac{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)]^2\cdot 2n}{[1\cdot 3\cdots(2n-1)]^2}.$$

Ako sva tri člana ove dvojne nejednačine podelimo prvim članom, koji ćemo označiti sa A, dobićemo

$$1<\frac{\pi}{2A}<\frac{[2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)]^2\cdot 2n}{[1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)]^2 A}.$$

Kako

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[2\cdot 4\cdots(2n-2)]^2\cdot 2n}{[1\cdot 3\cdots(2n-1)]^2}\cdot\frac{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]^2(2n+1)}{[2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n]^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=1$$

to i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2A}=1,$$

tj.

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{[2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n]^2}{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]^2(2n+1)}.$$

Stavljajući

$$2\cdot 4\cdots(2n)=2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n=2^n\cdot n!\,,$$

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)=\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdots 2n}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$$

biće

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2\,2^{2n}(n!)^2}{[(2n!)]^2(2n+1)},$$

(2.1.1) $$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}$$ *Wallis-ova formula.*

2.2. Stirling-ova formula za $n!$. — Da bismo dobili približnu vrednost od

$$\log(n!)=\sum_{p=1}^{n}\log p$$

pokažimo da se desna strana može zameniti izrazom

$$\int_0^n \log x\,dx\,,$$

ako je n dovoljno veliko. Zaista, ako

$$\log(n+1)=\sum_{p=1}^{n+1}\log p-\sum_{p=1}^{n}\log p$$

zamenimo odgovarajućom vrednošću

$$\int_0^{n+1}\log x\,dx-\int_0^n\log x\,dx$$

dobićemo

$$\int_n^{n+1} \log x\, dx = |x \log x - x|_n^{n+1} =$$

$$=(n+1) \log(n+1) - n - 1 - n \log n + n =$$

$$= n \log(1+\frac{1}{n}) - 1 + \log(n+1) =$$

$$= \log(1+\frac{1}{n})^n - 1 + \log(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \log(n+1).$$

Prema tome, za dovoljno velike vrednosti n možemo zbir $\sum\limits_{p=1}^{n} \log p$ zameniti sa

$$\int_0^n \log x\, dx = n(\log n - 1) = n \log \frac{n}{e}.$$

Posmatrajmo sada niz sa opštim članom

$$s_n = \log n! - n(\log n - 1).$$

Ako je $n > 1$, imamo

$$u_n = s_n - s_{n-1} = \log n! - \log(n+1)! - n(\log n - 1) + (n-1)[\log(n-1) - 1] =$$

$$= \log n - n \log n + n + (n-1)\log(n-1) - n + 1 =$$

$$= (n-1)\log(n-1) - (n-1)\log n + 1 =$$

$$= 1 + (n-1)\log\frac{n-1}{n} = 1 + (n-1)\log\left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 - (n-1)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + 0(1)\frac{1}{n^3},$$

gde Bachmann-ova notacija $0(1)$ pretstavlja broj koji ostaje konačan, tj. reda veličine 1 kada odgovarajuća promenljiva teži svojoj granici.

$$\log n! - n(\log n - 1) = s_n = \Sigma u_n = \Sigma\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + 0(1)\frac{1}{n^3}\right).$$

Ovaj red se ponaša kao red $\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{n}$ i on divergira kad $n \to \infty$. Međutim, znamo da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\Sigma\frac{1}{n}-\log n\right)=C\ ,$$

gde je C Euler-Mascheroni-eva konstanta sa vrednošću $C = 0{,}57721$. Da bismo izbegli, dakle, divergenciju koja se pojavljuje kod niza $\{s_n\}$, posmatraćemo konvergentan niz

$$S_n = s_n - \frac{1}{2}\log n = \log n! - n(\log n - 1) - \frac{1}{2}\log n\ .$$

Zaista, tada je

$$v_n = S_n - S_{n-1} = s_n - s_{n-1} - \frac{1}{2}\log\frac{n}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{n}\right) + O(1)\frac{1}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right) + O(1)\frac{1}{n^3} = -\frac{1}{12n^2} + O(1)\frac{1}{n^3}\ .$$

Sada je jasno da će niz $\{S_n\}$ konvergirati, s obzirom da red $S_n = \Sigma v_n$ konvergira kao hiperharmoniski red.

Neka je $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \Sigma v_n$. Ako sa R_n označimo ostatak $S - S_n$, biće

$$S_n = S - R_n,$$

tj.

$$R_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots = -\frac{1}{12}\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{1}{p^2} + \frac{O(1)}{n^2}\ .$$

Kako je

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)} < \frac{1}{p^2} < \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\ .$$

to je

$$\frac{1}{n+1} < \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{p^2} < \frac{1}{n}\ ,$$

tako da se može staviti

$$R_n = -\frac{1}{12n} + \frac{O(1)}{n^2}\ ,$$

pa je

$$S_n = \log n! - n(\log n - 1) - \frac{1}{2}\log n\ ,$$

$$\log n! = n\left(\log\frac{n}{e}\right) + \frac{1}{2}\log n + S + \frac{1}{12n} + \frac{0(1)}{n^2},$$

$$\log n! = \log n^n e^{-n} + \log\sqrt{n} + \log e^s + \frac{1}{12n} + \frac{0(1)}{n^2},$$

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\, e^s e^{\frac{1}{12n}+\frac{0(1)}{n^2}},$$

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\; e^s\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{0(1)}{n^2}\right).$$

Treba još odrediti S. Označimo $e^S = A$. U tom cilju smenimo dobijenu vrednost za $n!$ u Wallis-ovoj formuli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n} n^2 A^4}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} 2nA^2 n} = \frac{A^2}{2},$$

$$A = e^s = \sqrt{2\pi},$$

tako da je

$$\log n! = n\log\frac{n}{e} + \frac{1}{2}\log(2\pi n) + \frac{1}{12n} + \frac{0(1)}{n^2},$$

(2.2.1)
$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{0(1)}{n^2}\right).$$

Ovaj obrazac je specijalni slučaj Stirling-ove formule, koji se odnosi na slučaj kada je n ceo i pozitivan broj. Količnik leve i desne strane teži ka 1 kad $n \to \infty$.

2.3. Izračunavanje relativne greške. — Ako se zadržimo na približnoj formuli

(2.3.1)
$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

onda će količnik

$$q_n = \frac{n! - n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!}$$

biti relativna greška. Lako je proveriti da je

$$n! > n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n},$$

tj. približni obrazac (2.3.1) daje donju granicu za $n!$.

Veću aproksimaciju i istovremeno gornju granicu daje obrazac

(2.3.2)
$$n! < n^n e^{-n+\frac{1}{12n}}\sqrt{2\pi n}$$

sa relativnom greškom

$$p_n = \frac{n! - n^n e^{-n+\frac{1}{12n}}\sqrt{2\pi n}}{n!}.$$

Koliko je dobra aproksimacija $n!$ pomoću Stirling-ove formule, pokazuje nam sledeća tabela relativnih grešaka

Tabela 2.3.1

n	$n!$	p_n	q_n
1	1	0,08	0,002
2	2	0,04	0,0004
5	120	0,02	0,0001
10	$3,62880 \;.\; 10^6$	0,008	......
100	$(9,3326\ldots)\,10^{157}$	0,0008	......

2.4. Funkcija $\Gamma(x)$. — Posmatrajmo integral

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx\,, \qquad p>0\,. \tag{2.4.1}$$

koji pretstavlja jednu neprekidnu funkciju po p. Zaista, integral

$$A(p)=\int_a^b e^{-x}x^{p-1}\,dx\,, \qquad 0<a<b$$

pretstavlja jednu neprekidnu funkciju po p, ma kakvo bilo p, jer $u=(p-1)\log x$ je neprekidno, pa samim tim i x^{p-1}. Najzad proizvod te funkcije sa e^{-x} biće jedna neprekidna funkcija. Samim tim biće i $A(p)$ neprekidna funkcija po p. Ako je p ograničeno, integral uniformno konvergira kad $b\to\infty$, jer za $p<A$ vidimo da je za $x>x_0>1$

$$|e^{-x}x^{p-1}|<e^{-x}x^{A-1}<e^{-\frac{x}{2}}\,.$$

Prema tome, integral

$$\int_a^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx$$

postoji i pretstavlja jednu neprekidnu funkciju po p za p ograničeno. Pretpostavimo sada da $a\to 0$. Ponovo ćemo imati uniformnu konvergenciju ako je $p\geqslant\alpha>0$, jer tada, za $0\leqslant x<1$, imamo

$$|e^{-x}x^{p-1}|<x^{p-1}\leqslant x^{\alpha-1}\,.$$

Prema tome, funkcija $\Gamma(x)$ je definisana i neprekidna za $p>0$. Primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx=$$

$$=\left[-e^{-x}x^{p-1}\right]_0^\infty+(p-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{p-2}\,dx\,,$$

tj.

$$\Gamma(p)=(p-1)\,\Gamma(p-1),$$

$$\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)$$

i uopšte, ako je n ceo pozitivan broj a $p > 0$

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)\,\Gamma(p+n-1)=(p+n-1)\,(p+n-2)\ldots p\,\Gamma(p).$$

Kako je

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=\left|-e^{-x}\right|_0^\infty=1$$

to je za $p=1$

(2.4.2) $$\Gamma(n+1)=n!$$

tj. tada se funkcija $\Gamma(p)$ poklapa sa $n!$, tako da ova funkcija pretstavlja interpolaciju od $n!$. Funkcija $\Gamma(x)$ naziva se i *Euler-ova funkcija.*

Proširenje definicije za $\Gamma(p)$. — Stavimo

$$\Gamma(p)=\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx+\int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx\,.$$

Drugi integral definiše jednu neprekidnu funkciju za svako konačno p. U prvom integralu smenimo e^{-x} njegovim redom

$$e^{-x}=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n x^n}{n!}\,, \qquad (0!=1).$$

Ovaj red uniformno konvergira za $0 \leqslant x \leqslant 1$, pa će uniformno konvergirati i ako ga pomnožimo sa x^{p-1} tako da ćemo moći da ga integrišemo član po član,

$$\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{n+p-1}\,dx=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)}\,.$$

Na osnovu Weirstrass-ovog pravila ovaj red konvergira u svakom ograničenom razmaku koji ne sadrži tačke $p=-n$, za $n=0, 1, 2, \ldots$ jer tada imamo

$$|n+p|>d>0$$

a

$$\sum_0^\infty\frac{1}{dn!}$$

konvergira. Funkcija

$$\Gamma(p)=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)}+\int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx$$

je definisana, dakle, za svako p različito od $0, -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ Označavamo opet sa $\Gamma(p)$, pošto je identična sa integralom $\Gamma(p)$ za $p > 0$.

Lako je proveriti da ostaje veza $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ za svako p različito od $0, -1, -2, -3, \ldots$, jer

$$\Gamma(p+1) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+p+1)} + \int_1^\infty e^{-x} x^p dx =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n\{(n+p+1)-p\}}{(n+1)!(n+p+1)} + \left| -e^{-x} x^p \right|_1^\infty + p\int_1^\infty e^{-x} x^{p-1} dx =$$

$$= p\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+p)} + e^{-1} + \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)!} + p\int_1^\infty e^{-x} x^{p-1} dx =$$

$$= p\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+p)} + 1 + p\int_1^\infty e^{-x} x^{p-1} dx =$$

$$= p\cdot\frac{1}{p} + p\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+p)} + p\int_1^\infty e^{-x} x^{p-1} dx =$$

$$= p\left\{\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+p)} + \int_1^\infty e^{-x} x^{p-1} dx\right\} =$$

$$= p\Gamma(p)$$

Ukoliko je $0 < p < 1$, onda je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(n)\, n^p} = 1\,, \tag{2.4.3}$$

gde je n ceo broj. Stavimo

$$\Gamma(p+n) = J_1 + J_2\,,$$

gde je

$$J_1 = \int_0^n e^{-x} x^{n+p-1} dx\,, \qquad J_2 = \int_n^\infty e^{-x} x^{n+p-1} dx\,.$$

Ako je $0 < x \leqslant n$, onda je $x^p \leqslant n^p$ i $x^{p-1} \geqslant n^{p-1}$ pa je

$$n^{p-1}\int_0^n e^{-x} x^n dx \leqslant J_1 \leqslant n^p \int_0^n e^{-x} x^{n-1} dx\,.$$

Ako je $x \geqslant n$, onda je $x^{p-1} \leqslant n^{p-1}$, $x^p \geqslant n^p$ pa je

$$n^p\int_n^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \leqslant J_2 \leqslant n^{p-1} \int_n^\infty e^{-x} x^n dx$$

za $p=0$, $J_1+J_2 = \Gamma(p+n) = \Gamma(n)$. Za $p=1$, $J_1+J_2 = \Gamma(p+n) = \Gamma(n+1)$.

Otuda

$$J_1 \geqslant n^{p-1}\int_0^n e^{-x} x^n dx = n^{p-1}\left|-e^{-x}x^n\right|_0^n + n^{p-1}\cdot n\int_0^n e^{-x} x^{n-1} dx =$$

$$= -e^{-n} n^{n+p-1} + n^p \int_0^n e^{-x} x^{n-1} dx\,,$$

tako da je

$$J_1+J_2 \geqslant -e^{-n} n^{n+p-1} + n^p \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx =$$

$$= n^p \Gamma(n) - e^{-n} n^{n+p-1} .$$

Na isti način dobijamo

$$J_1+J_2 \leqslant n^{p-1} \Gamma(n+1) + e^{-n} n^{n+p-1} =$$

$$= n^p \Gamma(n) + e^{-n} n^{n+p-1} ,$$

tako da je

$$1-\frac{e^{-n} n^{n+p-1}}{n^p \Gamma(n)} \leqslant \frac{\Gamma(n+p)}{n^p \Gamma(n)} \leqslant 1+\frac{e^{-n} n^{n+p-1}}{n^p \Gamma(n)}$$

ili, primenom Stirling-ovog obrasca,

$$\left|\frac{\Gamma(n+p)}{n^p \Gamma(n)} - 1\right| < \frac{e^{-n} n^{n+p-1}}{n^p \Gamma(n)} = \frac{e^{-n} n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{e^{-n} n^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(1+\frac{0(1)}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Ukoliko p nije negativan ceo broj, možemo napisati

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+n+1)}{p(p+1)\cdots(p+n)} = \frac{n!\, n^p}{p(p+1)\cdots(p+n)} \cdot \frac{\Gamma(p+n+1)}{(n+1)^p \Gamma(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^p}{n^p}$$

Drugi i treći faktor $\to 1$ kad $n \to \infty$, tako da je

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^p}{p(p+1)\cdots(p+n)} . \tag{2.4.4}$$

Dobijeni obrazac (2.4.4) pretstavlja tzv. *Gauss-ovu definiciju za* $\Gamma(p)$.

Kako je

$$\Gamma(1-p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{1-p}}{(1-p)(2-p)\cdots(n+1-p)}$$

to je

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n)}\ \frac{n\, n!}{(1-p)(2-p)\cdots(n+1-p)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{p\left(1+\frac{p}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{n}\right)}\ \frac{n}{n+1}\ \frac{1}{\left(1-\frac{p}{1}\right)\left(1-\frac{p}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{n+1}\right)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{p\prod_1^n\left(1-\frac{p^2}{s^2}\right)}}_{\longrightarrow \frac{\pi}{\sin \pi x}} \cdot \underbrace{\frac{n}{n-p+1}}_{\longrightarrow 1} ,$$

(2.4.5)
$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=\frac{1}{p\prod_{1}^{n}\left(1-\frac{p^2}{s^2}\right)}=\frac{\pi}{\sin\pi p}\,.$$

Za $p=\frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{1}\,,$$

tj.

(2.4.6)
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,,$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,$$

$$\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2^{\nu}}\sqrt{\pi}\,.$$

2.5. Funkcija $B(p, q)$. — To je funkcija definisana za svako realno $p>0$ i $q>0$ integralom

(2.5.1)
$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\,.$$

Dokažimo važnu relaciju

(2.5.2)
$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$$

Sledeća funkcija po t

$$\int_0^\infty g(x,t)\,dx=\int_0^\infty t^{p+q-1}x^{p-1}e^{-t(1+x)}dx=\Gamma(p)\,t^{q-1}e^{-t}.$$

integrabilna je, jer

a) funkcija

$$g(x,t)=t^{p+q-1}x^{p-1}e^{-t(1+x)}$$

neprekidna je po t u svakom konačnom otvorenom intervalu,

b)
$$\int_\varepsilon^\infty |g(x,t)|\,dt=\int_\varepsilon^\infty |t^{p+q-1}x^{p-1}e^{-t(1+x)}|\,dt<$$
$$<\int_0^\infty |t^{p+q-1}x^{p-1}e^{-t(1+x)}|\,dt=\Gamma(p+q)\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,;$$

gde je funkcija $\Gamma(p+q)\dfrac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}$ integrabilna od 0 do ∞. Zato je

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty g(x,t)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty dt\int_0^\infty g(x,t)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty dx \int_\varepsilon^\infty g(x,t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty dx\int_\varepsilon^\infty t^{p+q-1}x^{p-1}e^{-t(1+x)}\,dt.$$

Kako je

$$\int_\varepsilon^\infty g(x,t)\,dt = \int_\varepsilon^\infty t^{p+q-1}x^{p-1}e^{-t(1+x)}\,dt < \int_0^\infty g(x,t)\,dt =$$

$$= \Gamma(p+q)\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}},$$

to je

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty dx\int_\varepsilon^\infty g(x,t)\,dt = \int_0^\infty dx \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty g(x,t)\,dt =$$

$$= \Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$$

Stavljajući

$$u = \frac{x}{1+x}, \qquad du = \frac{dx}{(1+x)^2}$$

gornji integral postaje

$$\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du = \mathrm{B}(p,q).$$

Tako smo dibili

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \Gamma(p)\,t^{q-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(p)\int_0^\infty t^{q-1}e^{-t}\,dt =$$

$$= \Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q)$$

tj.

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Do ovog rezultata mogli smo i na sledeći način da dođemo. Stavljajući $x = s^2$, odnosno t^2, biće

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx = 2\int_0^\infty s^{2p-1} e^{-s^2}\, ds,$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty t^{2q-1} e^{-t^2}\, dt$$

pa je

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty s^{2p-1}\, t^{2q-1}\, e^{-s^2-t^2}\, ds\, dt.$$

Prelaskom na polarne koordinate

$$s = r\cos\theta,$$

$$t = r\sin\theta,$$

integral za pozitivan kvadrant postaje

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, r^{2p+2q-1}\, e^{-r^2}\, dr\, d\theta.$$

Sada je, stavljajući $r^2 = u$, $2r\,dr = du$,

$$2\int_0^\infty r^{2p+2q-1}\, e^{-r^2}\, dr = \int_0^\infty u^{p+q-1} e^{-u}\, du = \Gamma(p+q)$$

a

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx =$$

$$= \mathrm{B}(p,q)$$

pa je

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q),$$

što smo hteli i da dokažemo.

2.6. Nepotpuna B-funkcija. — To je funkcija

$$\mathrm{B}_t(p,q) = \int_0^t x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx, \qquad 0 < t < 1.$$

Nepotpuni količnik B-funkcije je količnik

$$\mathrm{I}_t(p,q)=\frac{\mathrm{B}_t(p,q)}{\mathrm{B}(p,q)}=\frac{\int\limits_0^t x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}$$

ili

$$\mathrm{I}_t(p,q)=\frac{(p+q-1)!}{(p-1)!\,(q-1)!}\int\limits_0^t x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,.$$

Stavljajući

$$y=1-x\,,\qquad dy=-dx$$

dobijamo

$$\mathrm{I}_t(p,q)=\frac{-(p+q-1)!}{(p-1)!\,(q-1)!}\int\limits_1^{1-t} y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy=$$

$$=\frac{(p+q-1)!}{(p-1)!\,(q-1)!}\int\limits_{1-t}^{1} y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy=$$

$$=\frac{(p+q-1)!}{(p-1)!\,(q-1)!}\left\{\int\limits_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy-\int\limits_0^{1-t} y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy\right\},$$

tj.

$$\mathrm{I}_t(p,q)=1-\mathrm{I}_{1-t}(q,p)\,.$$

Ovo je jedna važna veza koja je korišćena prilikom formiranja tablica za nepotpunu B-funkciju.

2.7. Binomijalna verovatnoća. — Neka smo n puta ponovili opit sa istim premisama h i neka su moguće kao istinite pri svakom opitu samo dve propozicije a i $b=\bar{a}$ sa verovatnoćama

$$p=a/h\,,$$

$$q=1-p=b/h=\bar{a}/h\,.$$

Verovatnoća da će u prvih m opita biti istinita propozicija a a u preostalih $n-m$ opita suprotna propozicija $\bar{a}$, je složena verovatnoća

$$p^m\,q^{n-m}$$

Verovatnoća da će u m opita biti istinita propozicija a, a u $n-m$ opita propozicija $\bar{a}$, bez obzira na redosled, biće

$$
\mathrm{P}_m = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} =
$$

(2.7.1)

$$
= \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m} .
$$

Odmah vidimo da je P_m $(m+1)$-vi član razvijenog binoma

$$
(p+q)^n
$$

i da je

(2.7.2)
$$
\sum_{m=0}^{n} \mathrm{P}_m = (p+q)^n = 1 .
$$

S obzirom na osobine binomnih koeficijenata obrazac (2.7.1) može se pisati i u obliku

$$
\mathrm{P}_m = \binom{n}{n-m} p^m q^{n-m}
$$

a za $p=q=\dfrac{1}{2}$ biće

$$
\mathrm{P}_m = \mathrm{P}_{n-m} = \frac{\binom{n}{m}}{2^n} .
$$

Ukoliko je n paran broj, tj. $n=2k$, najverovatniji broj puta da će propozicija a biti istinita, odnosno najverovatniji broj ostvarenja očekivanog događaja A, za $p=q=\dfrac{1}{2}$, biće sa verovatnoćom

$$
Max\left\{\mathrm{P}_m\right\} = P_k = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}
$$

Za $p \neq q$, najverovatniji broj k dobićemo na sledeći način: obrazujmo količnike

$$
\frac{\mathrm{P}_k}{\mathrm{P}_{k-1}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(k-1)!\,(n-k+1)!}{n!} \cdot \frac{p^k q^{n-k}}{p^{k-1} q^{n-k+1}} ,
$$

tj.

$$
\frac{\mathrm{P}_k}{\mathrm{P}_{k-1}} = \frac{n+1}{k} \cdot \frac{p}{q} - \frac{p}{q}
$$

i

$$
\frac{\mathrm{P}_k}{\mathrm{P}_{k+1}} = \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{q}{p} .
$$

Da bi P_k bio maksimum, potrebno je da budu zadovoljeni uslovi

$$
\frac{\mathrm{P}_k}{\mathrm{P}_{k-1}} \geqslant 1 \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{P}_k}{\mathrm{P}_{k+1}} \geqslant 1 ,
$$

odnosno

$$\frac{n+1}{k}\cdot\frac{p}{q}-\frac{p}{q}\geqslant 1,$$

$$\frac{k+1}{n-k}\,\frac{q}{p}\geqslant 1,$$

odakle

$$np-q\leqslant k\leqslant np+p. \tag{2.7.3}$$

Najverovatniji broj ostvarenja očekivanog događaja A u n ponovljenih opita je ceo broj koji se nalazi između brojeva $np-q$ i $np+p$.

Koristeći simetriju, odmah zaključujemo da je najverovatniji broj ostvarenja suprotnog događaja $\bar{A}$ u n ponovljenih opita ceo broj koji se nalazi između $nq-p$ i $nq+q$. Naime, nejednačinu (2.7.3) možemo napisati i u obliku

$$n(1-q)-q\leqslant k\leqslant n(1-q)+p,$$

odakle

$$nq-p\leqslant n-k\leqslant nq+q. \tag{2.7.4}$$

Ukoliko je nq ceo broj, onda je i np ceo broj, pošto je $np+nq=n$. Brojevi k i $n-k$, koji odgovaraju najvećoj verovatnoći, biće tada np i nq, a najverovatniji slučaj biće onaj u kome će u n ponovljenih opita propozicija a biti istinita np puta a propozicija $\bar{a}$ nq puta, tj. proporcionalno svojim prostim verovatnoćama.

U opštem slučaju, za najveću verovatnoću, brojevi k i $n-k$ razlikovaće se respektivno od np i nq za manje od jedinice, a količnik

$$\frac{k}{n-k}$$

nalaziće se između

$$\frac{np+p}{nq-p},$$

tj. količnika iz gornje granice od k i donje granice od $n-k$, i

$$\frac{np-q}{nq+q},$$

tj. količnika iz donje granice od k i gornje od $n-k$. Deleći imenitelje sa n, dobićemo dvojnu nejednačinu

$$\frac{p-\frac{q}{n}}{q+\frac{q}{n}}<\frac{k}{n-k}<\frac{p+\frac{p}{n}}{q-\frac{p}{n}}.$$

Ako $n\to\infty$, vidimo da obe granice teže ka p/q. Može se, dakle, reći da, u najverovatnijem slučaju, količnik $k/(n-k)$ postaje i ostaje blizak količniku p/q za n dovoljno veliko.

Verovatnoća da će u n ponovljenih opita propozicija a biti ili k, ili $k+1$, ..., ili l puta istinita, biće

$$P(k,l) = P_k + P_{k+1} + \cdots + P_l = \sum_{i=k}^{l} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} .$$

Neposredno izlazi da je

$$P(0,n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = 1 .$$

Označimo $P(m)$ verovatnoću da će u n ponovljenih opita propozicija a biti više od m puta istinita, tj.

$$P(m) = \sum_{i=m+1}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} ,$$

a sa $Q(m)$ verovatnoću da će u n ponovljenih opita propozicija $\bar{a}$ biti više od m puta istinita, tj.

$$Q(m) = \sum_{i=m+1}^{n} \binom{n}{n-i} p^{n-i} q^i .$$

Verovatnoća da će u n ponovljenih opita propozicija a biti m puta istinita, jednaka je verovatnoći da će u n ponovljenih opita propozicija b biti $n-m$ puta istinita. Zato ćemo staviti

$$P_m = Q_{n-m} = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} .$$

Sukcesivno imamo

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= Q_{n-m-1} , \\ P_{m+2} &= Q_{n-m-2} , \\ &\dots\dots\dots \\ P_{n-1} &= Q_1 , \\ P_n &= Q_0 , \end{aligned}$$

odnosno, ako saberemo ove jednačine,

$$P(m) = Q(n-m).$$

Da bismo izbegli veće zbirove, dogovorićemo se da upotrebimo notaciju $P(m)$ ako je $m > np$. Ako je $m < np$, tada je

$$n - m > n - np = nq,$$

tj.

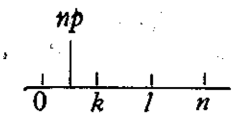
$$n - m > nq$$

i tada ćemo upotrebiti notaciju Q. Verovatnoću $P(k, l)$ možemo sada pisati u sledećim oblicima:

1) ako je $k < np$ a $l > np$

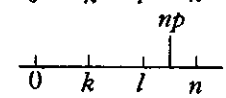
$$P(k,l) = 1 - P(l) - Q(n-k) ,$$

2) ako je $k, l > np$



$$P(k, l) = P(k-1) - P(l),$$

3) ako je $k, l < np$



$$P(k, l) = Q[n-(l+1)] - Q(n-k) =$$
$$= Q(n-l-1) - Q(n-k).$$

Prema tome, verovatnoću $P(k, l)$ moći ćemo uvek da izračunamo preko verovatnoća $P(m)$ i $Q(m)$. Verovatnoće $P(m)$ i $Q(m)$ nazvaćemo *binomijalnim serijama.*

2.8. Izračunavanje binomijalnih serija pomoću količnika nepotpunih B-funkcija. — Posmatrajmo sledeći nepotpuni količnik B-funkcija

$$I_p(k, n-k+1).$$

Po definiciji je

$$I_p(k, n-k+1) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx\,.$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$u = (1-x)^{n-k}, \qquad dv = x^{k-1}\,dx,$$

$$\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{1}{k}\,p^k(1-p)^{n-k} + \frac{n-k}{k}\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}\,dx\,.$$

Ponovnim parcijalnim integracijama dobićemo na kraju

$$\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{1}{k}\,p^k(1-p)^{n-k} + \frac{n-k}{k(k+1)}\,p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} +$$

$$+\frac{(n-k)(n-k-1)}{k(k+1)(k+2)}\,p^{k+2}(1-p)^{n-k-2} + \cdots + \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!}\,p^n$$

pa je

$$I_p(k, n-k+1) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k(1-p)^{n-k} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\,p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} +$$

$$+ \cdots + p^n = P_k + P_{k+1} + \cdots + P_n =$$

$$= P(k-1)\,.$$

Tako smo dobili da je verovatnoća da će se očekivani događaj desiti k ili više puta u ukupno n ponovljenih opita data izrazom

$$P(k-1) = I_p(k, n-k+1).$$

Tablice količnika nepotpunih B-funkcija dao je Karl Pearson. Tablice za $I_t(\alpha, \beta)$ izračunate su za vrednosti β od 0 do 50, a za α od $\alpha = \beta$ do $\alpha = 50$. Parametar t dat je u stotim delovima. Ukoliko je $\alpha < \beta$, koristimo vezu

$$I_t(\alpha, \beta) = 1 - I_{1-t}(\beta, \alpha).$$

Ukoliko je α ili β veće od 50, ne možemo koristiti Pearson-ove tablice. Tada jedino možemo koristiti približnu Uspenski-evu metodu kada je n veliki broj i koju ćemo izložiti u sledećem paragrafu.

Tabela 1 daje vrednosti količnika nepotpunih B-funkcija.

2.9. Uspenski-eva metoda za aproksimativno izračunavanje binomijalnih serija. —

Videli smo da je

$$P(l) = P_{l+1} + P_{l+2} + \cdots\cdots + P_n =$$

$$= P_{l+1}\left\{1 + \frac{P_{l+2}}{P_{l+1}} + \frac{P_{l+3}}{P_{l+1}} + \cdots\right\} =$$

$$= P_{l+1}\left\{1 + \frac{n-l-1}{l+2}\,\frac{p}{q} + \frac{(n-l-1)(n-l-2)}{(l+2)(l+3)}\left(-\frac{p}{q}\right)^2 + \cdots\cdots\right\} =$$

$$= P_{l+1}\left\{1 + \frac{-n+l+1}{l+2}\left(-\frac{p}{q}\right) + \frac{(-n+l+1)(-n+l+2)}{(l+2)(l+3)}\left(-\frac{p}{q}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Korišćenjem Stirling-ove formule ili logaritamsko-faktorielskih tablica određujemo P_{l+1}. Ostaje da izračunamo red

$$S = 1 + \frac{-n+l+1}{l+2}\left(-\frac{p}{q}\right) + \frac{(-n+l+1)(-n+l+2)}{(l+2)(l+3)}\left(-\frac{p}{q}\right)^2 + \cdots\cdots$$

Ovo je hipergeometriski red oblika

$$F\left(-n+l+1,\ 1,\ l+2,\ -\frac{p}{q}\right),$$

tako da je

$$P(l) = P_{l+1}\cdot F\left(-n+l+1, 1, l+2, -\frac{p}{q}\right).$$

Lako je pokazati da hipergeometriski red

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)\beta\cdots\cdots(\beta+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdots(\gamma+n-2)}x^{n-1}+\cdots$$

konvergira ako je $|x| < 1$. Naime, za odgovarajući apsolutni red, količnik $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ biće

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left|\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}x\right|,$$

tako da je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=|x|.$$

Red je, dakle, apsolutno konvergentan ako je $|x| < 1$. Prema tome, potrebno je da $\frac{p}{q} < 1$, tj. $p < q$. Mi ćemo u daljem izlaganju pretpostaviti da je taj uslov ispunjen. Ustanovimo sada sledeće poznate veze

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x) &= F(\alpha,\beta,\gamma,x)+\\ &+x\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x),\end{aligned} \tag{2.9.1}$$

$$F(\alpha+1,\beta,\gamma+1,x)=F(\alpha,\beta,\gamma,x)+x\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x). \tag{2.9.2}$$

Stavimo skraćeno

$$X_{2n}=F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+2n,x),$$

$$X_{2n+1}=F(\alpha+n,\beta+n+1,\gamma+2n+1,x),$$

$$a_{2n}=\frac{(\beta+n)(\gamma-\alpha+n)}{(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)},$$

$$a_{2n+1}=\frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)},$$

tako da je

$$X_0 = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$
$$X_1 = F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x),$$
$$X_2 = F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, x)$$
$$X_3 = F(\alpha + 1, \beta + 2, \gamma + 3, x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)},$$
$$a_2 = \frac{(\beta+1)(\gamma-\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$
$$a_3 = \frac{(\alpha+1)(\gamma-\beta+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Relaciju (2.9.1) možemo sada pisati u obliku

$$X_1 = X_0 + a_1 x X_2.$$

Smenjujući α, β, γ sa α, $\beta + 1$, $\gamma + 1$ relacija (2.9.2) postaće

$$X_2 = X_1 + a_2 x X_3.$$

Smenjujući α, β, γ sa $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 2$ relacija (2.9.1) postaće

$$X_3 = X_2 + a_3 x X_4 \text{ itd.}$$

tako da dobijamo

$$\frac{X_1}{X_0} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{1 - \cfrac{a_2 x}{1 - \cfrac{a_3 x}{1 - }}}}$$

Uzimajući da je

$$X_1 = F\left(-n + l + 1,\ 1,\ l + 2, -\frac{p}{q}\right),$$

tj.

$$\alpha = -n + l + 1,$$
$$\beta = 0,$$
$$\gamma = l + 1,$$
$$x = -\frac{p}{q},$$

tako da je

$$X_0 = 1,$$

i stavljajući

$$d_k = a_{2k}\,x = -\frac{(\beta+k)(\gamma-\alpha+k)}{(\gamma+2k-1)(\gamma+2k)}\,\frac{p}{q} = -\frac{k(n+k)}{(l+2k)(l+2k+1)}\,\frac{p}{q}\,,$$

$$c_k = -a_{2k-1}\,x = \frac{(\alpha+k-1)(\gamma-\beta+k-1)}{(\gamma+2k-2)(\gamma+2k-1)}\,\frac{p}{q} = \frac{(n-l-k)(l+k)}{(l+2k-1)(l+2k)}\,\frac{p}{q}\,,$$

dobićemo

$$\frac{X_1}{X_0} = F(-n+l+1,\,1,\,l+2,\,x) =$$

$$= \cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{1+\cfrac{d_1}{1-\cfrac{c_2}{1-\cfrac{d_2}{1-\;\ldots}}}}}$$

Kako indeks k uzima vrednosti $0, 1, \ldots, n-l-1$, to je

$$c_k = \frac{p}{q}\cdot\frac{(l+k)(n-l-k)}{(l+2k)(l+2k-1)} > 0\,.$$

Na samom početku pretpostavili smo da je $p < q$. Takođe je

$$l + k > l + 2k - 1.$$

Najzad, nejednačina

$$n - l - k < l + 2k - 1,$$

$$n < 2l + 3k - 1 < 2l + 3(n - l - 1) - 1,$$

$$l + 4 < 2n,$$

biće zadovoljena ako je $n > 4$. Kako, međutim, pretpostavljamo da je n veliki broj, to će ta nejednačina biti zadovoljena. Prema tome, za veliko n biće

$$0 < c_k < 1.$$

Zato će verižni količnik

$$\omega_k = \cfrac{c_k}{1+\cfrac{d_k}{1-\cfrac{c_{k+1}}{1+\cfrac{d_{k+1}}{1-\ldots}}}}$$

biti između 0 i c_k, tj.

$$0 < \omega_k < c_k.$$

Traženu veličinu možemo sada napisati u obliku

$$F\left(-n+l+1, 1, l+2, -\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{1-\omega_1}$$

gde je

$$\omega_1 = \cfrac{c_1}{1+\cfrac{d_1}{1-\omega_2}}$$

$$\omega_2 = \cfrac{c_2}{1+\cfrac{d_2}{1-\omega_3}}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_k = \cfrac{c_2}{1+\cfrac{d_k}{1-\omega_{k+1}}}$$

Kako je

$$0 < \omega_{k+1} < c_{k+1}$$

to ćemo smenom ovih granica u izrazu za ω_k dobiti granice za ω_k. Smenjujući te granice u izrazu za ω_{k-1} dobićemo granice za ω_{k-1} i tako dalje, i na kraju ćemo dobiti granice za F. Videli smo da je F konačna vrednost ukoliko je $p < q$. Prema tome, granice za F biće utoliko uže ukoliko je k veći broj, tako da ćemo uvek moći da dođemo do željene tačnosti.

2.10. Izračunavanje binomijalne verovatnoće. —

Oduzimanjem jednačina

$$P(m-1) = P_m + P_{m+1} + \ldots + P_n,$$

$$P(m) \quad = P_{m+1} + P_{m+2} + \ldots + P_n,$$

dobijamo

$$P_m \quad = P(m-1) - P(m).$$

Prema tome, binomijalne verovatnoće možemo izračunati preko binomijalnih serija. Ako je n mali broj, P_m možemo izračunati pomoću tablica količnika nepotpunih B-funkcija

$$P_m = I_p(m, n-m+1) - I_p(m+1, n-m).$$

Ako je n veliki broj, koristićemo Stirling-ovu formulu i u obrascu za binomijalnu verovatnoću, koju ćemo označiti sa $P_{n,m}$, stavićemo

$$n! = n^n e^{-n+\frac{\theta_1}{12n}} \sqrt{2\pi n}\ ,$$

$$m! = m^m e^{-m+\frac{\theta_2}{12m}} \sqrt{2\pi m}\ ,$$

$$(n-m)! = (n-m)^{n-m} e^{-n+m+\frac{\theta_3}{12(n-m)}} \sqrt{2\pi(n-m)}$$

pa je

$$\mathrm{P}_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m q^{n-m} =$$

$$= \left[\frac{n}{2\pi\, m(n-m)}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} e^{-\frac{1}{12}\left(\frac{\theta_2}{m}+\frac{\theta_3}{n-m}-\frac{\theta_1}{n}\right)},$$

gde je

$$\frac{2m}{2m+1} + \frac{2(n-m)}{2(n-m)+1} - \frac{2n}{2n+1} < \theta_2 + \theta_3 - \theta_1 < 1 .$$

Dalje je

$$\mathrm{P}_{n,m} < \mathrm{P}_{n,m} < \mathrm{P}''_{n,m} ,$$

gde smo označili sa

$$(2.10.1)\quad \mathrm{P}_{n,m} = \left[\frac{n}{2\pi\, m(n-m)}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12m}-\frac{1}{12(n-m)}}$$

$$(2.10.2)\quad \mathrm{P}''_{n,m} = \left[\frac{n}{2\pi\, m(n-m)}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right) e^{\frac{1}{12n+6}-\frac{1}{12m+6}-\frac{1}{12(n-m)+6}}$$

Ove izraze možemo lako izračunati pomoću logaritamskih tablica.

2.11. Laplace-ova teorema. — Ova nam teorema pruža jedan drugi način za izračunavanje verovatnoće $P_{n,m}$ za veliko n. Uzimajući opet aproksimaciju za faktorijele

$$n! = \sqrt{2\pi n}\;\; n^n e^{-n+\frac{\theta_1}{12n}},$$

$$m! = \sqrt{2\pi m}\;\; m^m e^{-m+\frac{\theta_2}{12m}},$$

$$(n-m)! = \sqrt{2\pi(n-m)}\;\; (n-m)\, e^{-n+m+\frac{\theta_3}{12(n-m)}},$$

$$0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$$

i označavajući sa x otstupanje broja ostvarenja od najverovatnijeg broja ostvarenja očekivanog događaja, tj.

$$x = m - np$$

približna vrednost za $P_{n,m}$ biće

$$(2.11.1)\quad \mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(1+\frac{x}{np}\right)^{-np-x-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{x}{nq}\right)^{x-nq-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{12}\left(\frac{\theta_1}{n}-\frac{\theta_2}{m}-\frac{\theta_3}{n-m}\right)}$$

Pretpostavimo prvo da je $x = m - np$ ograničeno po svojoj apsolutnoj vrednosti. Označimo, kratkoće radi, sa

$$A = \left(1 + \frac{x}{np}\right)^{-np-x-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{nq}\right)^{x-nq-\frac{1}{2}}.$$

$$B = e^{\frac{1}{12}\left(\frac{\theta_1}{n} - \frac{\theta_2}{k} - \frac{\theta_3}{n-k}\right)}$$

i potražimo graničnu vrednost izraza AB kada $n \to \infty$. Pre svega, dokažimo da

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} e^x \xrightarrow{U} 1,$$

kad $n \to \infty$ u svakom ograničenom intervalu $|x| < k$.

Kako je

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots\cdot$$

za $|t| < 1$, to se može pisati

$$\log f_n(x) = x - n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x^2}{2n} - \frac{x^3}{3n^2} + \cdots\cdot$$

za $|x| < n$. Ako je $|x| < k$, to za $n > k$ biće utoliko pre $|x| < n$ pa je

$$|\log f_n(x)| < \frac{x^2}{2n} \leqslant \frac{k^2}{2n}.$$

Iz

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k^2}{2n} = 0$$

sleduje

$$f_n(x) \to 1 \qquad n \to \infty.$$

Zato imamo

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{np}\right)^{-np} e^x = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{nq}\right)^{-nq} e^{-x} = 1.$$

Kako izrazi

$$np + x = m, \qquad nq - x = n - m,$$

teže ka nuli kada $n \to \infty$, to je

$$\lim_{n \to \infty} B = \lim e^{\frac{1}{12}\left(\frac{\theta_1}{n} - \frac{\theta_2}{m} - \frac{\theta_3}{n-m}\right)} = 1.$$

Iz gornjih rezultata sleduje

$$lim\, AB = lim\left(1+\frac{x}{np}\right)^{-np} e^{x}\left(1-\frac{x}{nq}\right)^{-nq} e^{-x} \times$$

$$\times\left(1+\frac{x}{np}\right)^{-x-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{nq}\right)^{x-\frac{1}{2}} \cdot B = 1.$$

Jednačina (2.11.1) može se pisati u obliku

$$P_n(x)\sqrt{2\pi npq} = AB$$

i ako $n \to \infty$ a x ostaje ograničeno, biće

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)\sqrt{2\pi npq} = 1,$$

odakle

$$P_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\,. \tag{2.11.2}$$

Pretpostavimo sada da je $\frac{x}{\sqrt{n}}$ ograničeno a da x može biti i neograničeno. Stavimo

$$\frac{x}{\sqrt{n}} = y$$

tako da je y uvek ograničeno i potražimo graničnu vrednost za A, tj. za

$$A = \left(1+\frac{y}{p\sqrt{n}}\right)^{-np-y\sqrt{n}-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{y}{q\sqrt{n}}\right)^{-nq+y\sqrt{n}-\frac{1}{2}}$$

Ako logaritmujemo i razvijemo u red, dobićemo

$$log\, A = \left(-np-y\sqrt{n}-\frac{1}{2}\right) log\left(1+\frac{y}{p\sqrt{n}}\right) +$$

$$+\left(-nq+y\sqrt{n}-\frac{1}{2}\right) log\left(1-\frac{y}{q\sqrt{n}}\right) =$$

$$=\left(-np-y\sqrt{n}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{p\sqrt{n}}-\frac{y^2}{2p^2n}+\frac{y^3}{3p^3n\sqrt{n}}-\cdots\right)+$$

$$+\left(-nq+y\sqrt{n}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{y}{q\sqrt{n}}-\frac{y^2}{2q^2n}-\frac{y^3}{3q^3n\sqrt{n}}-\cdots\right).$$

Posle svođenja biće

$$log\, A = -\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\frac{Q}{\sqrt{n}},$$

gde je Q jedna ograničena veličina za y ograničeno. Za dovoljno veliko n je

$$\left|\frac{Q}{p\sqrt{n}}\right| < 1 \text{ i } \left|\frac{Q}{q\sqrt{n}}\right| < 1.$$

Kako je

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{pq}$$

to je

$$\log A = -\frac{y^2}{2pq}+\frac{Q}{\sqrt{n}}.$$

Otuda

$$Ae^{\frac{y^2}{2pq}} \longrightarrow 1$$

ili

$$A \sim e^{-\frac{y^2}{2pq}},$$

kad $n \to \infty$ i za $|y| < M$.

S druge strane, videli smo da $B \to 1$ kad $n \to \infty$, tako da dobijemo na kraju

$$P_n(x) \sim \frac{e^{-\frac{x^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}} \tag{2.11.3}$$

za $n \to \infty$ i $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ ograničeno. $P_n(x)$ pretstavlja verovatnoću da će za x otstupati broj ostvarenja očekivanog događaja od np.

2.12. Poisson-ova granična formula za binomijalnu verovatnoću. — Neka je verovatnoća ostvarenja očekivanog događaja jedan mali ali konačan broj p i neka je m broj ostvarenja očekivanog događaja u n ponovljenih opita. Videli smo da je

$$P_{n,m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\,p^m q^{n-m}.$$

Stavljajući $k = np$ dobićemo

$$P_{n,m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n^m}\,\frac{k^m}{m!}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{k^m}{m!}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{k^m}{m!}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-m}\prod_{i=0}^{m-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

ili, s obzirom da je

$$\prod_{i=0}^{m-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)=\sqrt{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)^2}=\sqrt{\prod_{i=0}^{m-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{m-i}{n}\right)},$$

$$P_{n,m}=\frac{k^m}{m!}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-m}\sqrt{\prod_{i=0}^{m-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{m-i}{n}\right)}.$$

Pokažimo prvo da je

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)<\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{m-i}{n}\right)<\left(1-\frac{m}{2n}\right)^2$$

za sve vrednosti $i=1, 2, \ldots\ldots, m-1$. Ako izmnožimo proizvod u sredini, dobićemo

$$1-\frac{i}{n}-\frac{m-i}{n}+\frac{i}{n}\,\frac{m-i}{n}=1-\frac{m}{n}+\frac{i}{n}\,\frac{m-i}{n}.$$

Kako je $1\leqslant i\leqslant m-1$, to je

$$1-\frac{m}{n}+\frac{i}{n}\,\frac{m-i}{n}>\left(1-\frac{m}{n}\right),$$

čime je dokazana leva nejednakost. Desnu nejednakost dobićemo na sledeći način:

$$1-\frac{m}{n}+\frac{i}{n}\,\frac{m-i}{n}=1-2\frac{m}{2n}+\frac{4mi-4i^2}{4n^2}+\frac{m^2}{4n^2}-\frac{m^2}{4n^2}=$$

$$=\left(1-\frac{m}{2n}\right)^2+\frac{4mi-4i^2-m^2}{4n^2}=$$

$$=\left(1-\frac{m}{2n}\right)^2-\left(\frac{m-2i}{2n}\right)^2<\left(1-\frac{m}{2n}\right)^2.$$

Otuda

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)^{m-1}<\prod_{i=1}^{m-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{m-i}{n}\right)<\left(1-\frac{m}{2n}\right)^{2(m-1)}$$

ili

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)^{\frac{m-1}{2}}<\sqrt{\prod_{i=1}^{m-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{m-i}{n}\right)}<\left(1-\frac{m}{2n}\right)^{m-1}$$

Zato je

$$\frac{k^m}{m!}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-m}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{\frac{m-1}{2}}<P_{n,m}<\frac{k^m}{m!}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-m}\left(1-\frac{m}{2n}\right)^{m-1}$$

Kako su k, m i n pozitivni brojevi, to se binomi na desnoj strani mogu pisati na sledeći način

$$(n-m)\log\left(1-\frac{k}{n}\right)=-(n-m)\left(\frac{k}{n}+\frac{k^2}{2n^2}+\frac{k^3}{3n^3}+\cdots\right)=$$

$$=-k+\frac{m}{n}\cdot k-\frac{n-m}{2n^2}k^2-\frac{n-m}{3n^3}k^3-\cdots<$$

$$<-k+\frac{m}{n}k-\frac{n-m}{2n^2}k^2$$

i

$$(m-1)\log\left(1-\frac{m}{2n}\right)=-(m-1)\left(\frac{m}{2n}+\frac{m^2}{4n^2}+\cdots\right)<-\frac{m(m-1)}{2n}$$

tako da je

$$\mathrm{P}_{n,m}<\frac{k^m}{m!}\,e^{-k+\frac{m}{n}k-\frac{n-m}{2n^2}k^2-\frac{m(m-1)}{2n}},$$

tj.

$$\mathrm{P}_{n,m}<\frac{k^m}{m!}\,e^{-k}\cdot e^{\frac{mk}{n}-\frac{m(m-1)}{2n}-\frac{(n-m)k^2}{2n^2}} \tag{2.12.1}$$

S druge strane je

$$(n-m)\log\left(1-\frac{k}{n}\right)=-(n-m)\log\frac{n}{n-k}=-(n-m)\log\left(1+\frac{k}{n-k}\right)=$$

$$=-(n-m)\left(\frac{k}{n-k}-\frac{k^2}{2(n-k)^2}+\frac{k^3}{3(n-k)^3}-\cdots\right)=$$

$$=-\frac{n-m}{n-k}k+\frac{(n-m)}{(n-k)^2}\frac{k^2}{2}-\frac{(n-m)}{(n-k)^3}\frac{k^3}{3}+\cdots>$$

$$>-\frac{n-m}{n-k}k+\frac{n-m}{(n-k)^2}\frac{k^2}{2}-\frac{(n-m)}{(n-k)^3}\frac{k^3}{3}=$$

$$=\frac{km-nk+k^2-k^2}{n-k}+\frac{(n-m)}{(n-k)^2}\frac{k^2}{2}-\frac{(n-m)}{(n-k)^3}\frac{k^3}{3}=$$

$$=-k+\frac{k(m-k)}{n-k}+\frac{(n-m)}{(n-k)^2}\frac{k^2}{2}-\frac{(n-m)}{(n-k)^3}\frac{k^3}{3}$$

i
$$\frac{m-1}{2}\log\left(1-\frac{m}{n}\right)=-\frac{m-1}{2}\log\left(1+\frac{m}{n-m}\right)=$$
$$=-\frac{m-1}{2}\left[\frac{m}{n-m}-\frac{m^2}{2(n-m)^2}+\cdots\right]>-\frac{m(m-1)}{2(n-m)}$$

pa je

(2.12.2) $$\mathrm{P}_{n,m}>\frac{k^m}{m!}\,e^{-k}\,e^{\frac{k(m-k)}{n-k}+\frac{n-m}{(n-k)^2}\frac{k^2}{2}-\frac{n-m}{(n-k)^3}\frac{k^3}{3}-\frac{m(m-1)}{2(n-m)}},$$

odnosno, *a fortiori*

$$\mathrm{P}_{n,m}>\frac{k^m}{m!}\,e^{-k}\,.\,e^{\frac{mk}{n}-\frac{m(m-1)}{2n^2}}\;e^{-\frac{(n-m)}{(n-k)^3}\frac{k^3}{3}-\frac{m^3}{2n(n-m)}}$$

s obzirom da je lako pokazati da je

$$\frac{k(m-k)}{n-k}-\frac{n-m}{(n-k)^2}\frac{k^2}{2}-\frac{n-m}{(n-k)^3}\frac{k^3}{3}-\frac{m(m-1)}{2(n-m)}>$$
$$>\frac{mk}{n}-\frac{m(m-1)}{2n}-\frac{(n-m)k^2}{2n^2}-\frac{(n-m)k^3}{3(n-m)^3}-\frac{m^3}{2n(n-m)}.$$

Naime, ako se oslobodimo razlomaka i izvršimo svođenja, dobićemo

$$0>-k^4(n-m)^2-m^3n(n-k)^2,$$

tj. potvrdu gornje nejednačine.

Kako je

$$e^{-\frac{(n-m)}{(n-k)^3}\frac{k^3}{3}-\frac{m^3}{2n(n-m)}}>1-\frac{(n-m)k^3}{3(n-k)^3}-\frac{m^3}{2n(n-m)},$$

to donju granicu za $P_{n,m}$ možemo pisati u obliku

$$P_{n,m}>\frac{k^m}{m!}e^{-k}\,e^{\frac{mk}{n}-\frac{m(m-1)}{2n}-\frac{(n-m)k^2}{2n^2}}\left[1-\frac{(n-m)k^3}{3(n-k)^3}-\frac{m^3}{2n(n-m)}\right]$$

tako da je

(2.12.3) $$P_{n,m}=\frac{k^m}{m!}\,e^{-k}\,e^{\frac{mk}{n}-\frac{m(m-1)}{2n}-\frac{(n-m)k^2}{2n^2}}\left\{1-\theta\left[\frac{(n-m)k^3}{3(n-k)^3}-\frac{m^3}{2n(n-m)}\right]\right\}$$

gde je θ jedan broj između 0 i 1.

Ako $n\to\infty$, pri čemu m i k ostaju konačni, dobijamo *Poisson-ovu formulu*

(2.12.4) $$p_m=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_{n,m}=\frac{k^m}{m!}\,e^{-k}.$$

Verovatnoća da će se u beskonačno mnogo ponovljenih opita očekivani događaj ostvariti ili 0, ili 1, ili 2, ili ... ili ∞ puta, mora biti jednaka jedinici. Zaista

$$\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{P}_{n,m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^m}{m!}\,e^{-k}=$$
$$=e^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^m}{m!}=e^{-k}e^{k}=1\,.$$

Najzad, verovatnoća da će se u n ponovljenih opita sa malom i konačnom prostom verovatnoćom p ostvariti očekivani događaj najviše m puta ima za gornju granicu

(2.12.5) $$Q(m) < e^{-k-\theta} \sum_{i=0}^{m} \frac{k^i}{i!},$$

gde je

$$\theta = \frac{1+4k}{8n} + \frac{k^2(2k+1)}{4n^2} + \frac{k^4}{8n^3}.$$

Naime, koristeći (2.12.1), imamo

$$\sum_{i=0}^{m} P_{n,i} < \sum_{i=0}^{m} \frac{k^i}{i!} e^{-k} e^{\frac{ik}{n} - \frac{i(i-1)}{2n} - \frac{(n-1)k^2}{2n^2}} =$$

$$= e^{-k-\frac{k^2}{2n}} \sum_{i=0}^{m} \frac{k^i}{i!} e^{\omega(i)},$$

gde je

$$w(i) = \frac{i}{2n^2}(k^2+2kn+n-in).$$

Kako za

$$i = \frac{k^2+2kn+n}{2n}$$

$\omega(i)$ dostiže svoj maksimum sa vrednošću

$$\frac{(k^2+2kn+n)^2}{8n}$$

to neposredno dobijamo (2.12.5).

2.13. Duhamel-ovo pravilo. — Posmatrajmo dva pozitivna reda

$$S_n = \sum_{n=1}^{N_n} P_{n,m},$$

$$S'_n = \sum_{n=1}^{N_n} P'_{n,m},$$

gde

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \infty.$$

Ako za jedno proizvoljno malo $\varepsilon > 0$, možemo odrediti jedno n_ε, tako da je

$$\left| \frac{P'_{n,m}}{P_{n,m}} - 1 \right| < \varepsilon$$

za $m = 1, 2, \ldots, N_n$ i $n > n_\varepsilon$, tada egzistencija granične vrednosti

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

povlači za sobom i postojanje granične vrednosti reda S'_n sa istom vrednošću S, tj.

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S$$

i obratno.

Dokaz. — Stavimo

(2.13.1) $$P'_{n,m} - P_{n,m} = \varepsilon_{n,m} P_{n,m}$$

i saberimo niz jednačina za $m = 1, 2, \ldots, N_n$.

$$\sum_{m=1}^{N_n} P'_{n,m} - \sum_{m=1}^{N_n} P_{n,m} = \sum_{m=1}^{N_n} \varepsilon_{n,m} P_{n,m} ,$$

odnosno

$$\left| \sum_{m=1}^{N_n} P'_{n,m} - \sum_{m=1}^{N_n} P_{n,m} \right| \leqslant \sum_{m=1}^{N_n} |\varepsilon_{n,m}| P_{n,m} .$$

Ako je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S ,$$

tada postoje fiksni brojevi M i n_M, takvi da je $S_n < M$ za svako $n > n_M$. Ako je istovremeno i $n > n_\varepsilon$, imaćemo

$$| P'_{n,m} - P_{n,m} | < \varepsilon P_{n,m} ,$$

odnosno, deobom sa (2.13.1),

$$|\varepsilon_{n,m}| < \varepsilon .$$

Zato je

$$|S'_n - S_n| = \left| \sum_{m=1}^{N_n} P'_{n,m} - \sum_{m=1}^{N_n} P_{n,m} \right| < \varepsilon \sum_{m=1}^{N_n} P_{n,m} =$$

$$= \varepsilon S_n < \varepsilon M < \eta ,$$

gde je η proizvoljno malo. Prema tome ako S_n teži ka S, tada i S'_n mora da teži toj istoj granici, čime je pravilo dokazano.

2.14. Laplace-Liapounoff-ljeva teorema. — Neka je n broj nezavisnih ponovljenih opita, p prosta verovatnoća očekivanog događaja a m broj ostvarenja očekivanog događaja. Za ma koja dva broja t_1 i t_2, ($t_1 < t_2$) verovatnoća da će se izraz

$$\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

naći u intervalu (t_1, t_2), tj.

$$P_r \left\{ t_1 \leqslant \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leqslant t_2 \right\} ,$$

teži ka

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

kad $n \to \infty$.

Dokaz. — Gornju verovatnoću možemo pisati i u obliku

(2.14.1) $$P_r \left\{ np + t_1\sqrt{npq} \leqslant m \leqslant np + t_2\sqrt{npq} \right\} .$$

Ako sa k_1 označimo najmanji ceo broj koji zadovoljava nejednačinu

(2.14.2) $$np + t_1\sqrt{npq} \leqslant k_1 ,$$

a sa k_2 najveći ceo broj koji zadovoljava nejednačinu

(2.14.3) $$np+t_2\sqrt{npq} \geqslant k_2,$$

verovatnoća (2.14.1) postaje

$$Pr\left\{k_1 \leqslant m \leqslant k_2\right\} = \sum_{m=k_1}^{k_2} P_{n,m} =$$

$$= \sum_{m=k_1}^{k_2} \binom{n}{m} p^m q^{n-m}.$$

Koristeći aproksimativnu Stirling-ovu formulu za $n!$, tj.

$$n! = n^n e^{-n+\frac{\theta_1}{12n}} \sqrt{2\pi n},$$

gde je $0 < \theta_1 < 1$, $P_{n,m}$ postaje

$$P_{n,m} = \frac{n!}{n!(n-m)!} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{np}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m+\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta_1}{12n} - \frac{\theta_2}{12m} - \frac{\theta_3}{12(n-m)}}.$$

Kako su n, m i $n-m$ pozitivni brojevi a $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2, 3$ i vodeći računa o (2.14.2) i (2.14.3), to je

$$-\frac{1}{12n} < -\frac{\theta_1}{12n} + \frac{\theta_2}{12m} + \frac{\theta_3}{12(n-m)} < \frac{1}{12(np+t_1\sqrt{npq})} + \frac{1}{12(nq-t_2\sqrt{npq})}.$$

Za dovoljno veliko n leva i desna strana ove dvojne nejednačine biće manje od jedne proizvoljno male unapred date veličine. Zato, ako označimo sa

$$P'_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{np}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m+\frac{1}{2}}$$

količnik

$$\frac{P'_{n,m}}{P_{n,m}} = e^{-\frac{\theta_1}{12n} + \frac{\theta_2}{12m} + \frac{\theta_3}{12(n-m)}}$$

razlikovaće se od jedinice za jednu veličinu koju uvek možemo učiniti dovoljno malom, tako da bude

$$\left| \frac{P'_{n,m}}{P_{n,m}} - 1 \right| < \varepsilon,$$

gde je $\varepsilon > 0$ proizvoljno mala veličina. Na osnovu Duhamel-ovog pravila, ako postoji granica reda

$$\sum_{m=k_1}^{k_2} P'_{n,m}$$

postojaće i granica reda

$$\sum_{m=k_1}^{k_2} P_{n,m}$$

a obe granične vrednosti biće jednake među sobom. Zato ćemo umesto $P_{n,m}$ posmatrati $P'_{n,m}$. Stavimo

$$m = np + t\sqrt{npq}\ , \tag{2.14.4}$$

gde je

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2\ .$$

Kako m uzima samo cele vrednosti, to je njegova naredna vrednost

$$m+1 = np + (t+\Delta t)\sqrt{npq}\ , \tag{2.14.5}$$

gde je Δt odgovarajući priraštaj za t. Oduzimajući (2.14.4) od (2.14.5) dobićemo

$$\Delta t\sqrt{npq} = 1$$

ili

$$\frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\ .$$

Kad $n\to\infty$, $\Delta t\to 0$. Uzimajući logaritam

$$\log P'_{n,m} = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} - \left(m+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{m}{np}\right) - \left(n-m+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n-m}{nq}\right) =$$

$$= \log\frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} - \left(m+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+t\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - \left(n-m+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$

$$= \log\frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} - \left(np+t\sqrt{npq}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+t\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - \left(nq-t\sqrt{npq}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$$

i razvijajući drugi i treći član u red

$$-\left(np+t\sqrt{npq}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+t\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = -\left(np+t\sqrt{npq}+\frac{1}{2}\right)\left(t\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{t^2q}{2np}+\cdots\right) =$$

$$= -tnp\sqrt{\frac{q}{np}} - t^2q - \frac{t}{2}\sqrt{\frac{q}{np}} + t^2\frac{q}{2} + \frac{t^3q\sqrt{q}}{q\sqrt{np}} + \frac{t^2q}{4np} + \cdots$$

$$-\left(nq-t\sqrt{npq}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$

$$= tnq\sqrt{\frac{p}{nq}} - t^2p + \frac{t}{2}\sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{t^2p}{2} - \frac{t^3p\sqrt{p}}{2\sqrt{nq}} + \frac{t^2p}{4nq} + \cdots,$$

dobijamo

$$\log P'_{n,m} = \log \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} - \frac{t}{2}\left(\sqrt{\frac{q}{np}} - \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) - t^2\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{q^2+p^2}{npq}\right)\right\} - R_{n,t}\cdot t^3 .$$

Kako se za

$$\log P''_{n,m} = \log \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} - \frac{t^2}{2}$$

količnik $P''_{n,m}/P'_{n,m}$ razlikuje od jedinice za proizvoljno malu vrednost uz dovoljno veliko n, to će granična vrednost reda $\sum\limits_{m=k_1}^{k_2} P''_{n,m}$ biti jednaka graničnoj vrednosti reda $\sum\limits_{m=k_1}^{k_2} P'_{n,m}$, a samim tim i graničnoj vrednosti reda $\sum\limits_{m=k_1}^{k_2} P_{n,m}$.

Sada imamo

$$\sum_{m=k_1}^{k_2} P''_{n,m} = \sum_{t=t_{1,n}}^{t_{2,n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \Delta t ,$$

gde smo stavili

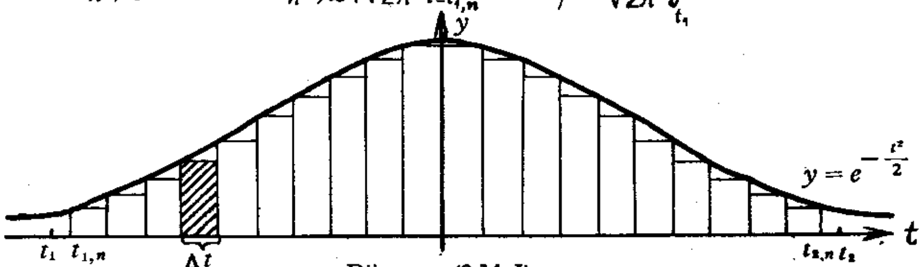
$$t_{1,n} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} ,$$

$$t_{2,n} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} .$$

Grafički pretstavljen, gornji zbir biće zbir površina pravougaonika pretstavljenih na slici. Kako $t_{1,n} \to t_1$, $t_{2,n} \to t_2$, a $\Delta t \to 0$ kad $n \to \infty$, to će zbir površina pravougaonika da teži, kad $n \to \infty$, površini ograničenoj krivom $y = e^{-\frac{t^2}{2}}$, t—osom i ordinatama t_1 i t_2.

Tako dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=k_1}^{k_2} P''_{n,m} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=t_{1,n}}^{t_{2,n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Delta t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$



Dijagram (2.14. I)

a samim tim i

$$\lim \sum_{m=k_1}^{k_2} P_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt .$$

Događaj će se sigurno ostvariti ako $t_2 \to \infty$, $t_1 \to -\infty$, tako da imamo verovatnoću izvesnosti

$$\lim_{\substack{t_2 \to \infty \\ t_1 \to -\infty}} \sum_{m=k_1}^{k_2} \mathrm{P}_{n,m} = 1 .$$

Kako ovo važi za svako n, to je i

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{\substack{t_2 \to \infty \\ t_1 \to -\infty}} \sum^{k_2} \mathrm{P}_{n,m} \right) = 1 .$$

Međutim, ne možemo odmah kazati da će biti i

$$\lim_{\substack{t_2 \to \infty \\ t_1 \to -\infty}} \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{m=k_1}^{k_2} \mathrm{P}_{n,m} \right) = 1 . \tag{2.14.6}$$

Da bismo to proverili, treba da izračunamo određeni integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Koristeći (2.4.1) i (2.4.6) i stavljajući $p = \frac{1}{2}$ i $x = \frac{t^2}{2}$, dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 \tag{2.14.7}$$

što potvrđuje (2.14.6).

Najzad, verovatnoća da broj ostvarenja očekivanog događaja neće prekoračiti jedan unapred dati broj $A = np + x\sqrt{npq}$, biće

$$\mathrm{P}r\left\{ m \leqslant np + x\sqrt{npq} \right\} =$$

$$= \mathrm{P}r\left\{ \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leqslant x \right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt , \qquad m \to \infty$$

Ovaj ćemo integral označiti sa

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ,$$

$$\theta(-\infty) = 0 ,$$

$$\theta(0) = \frac{1}{2} ,$$

$$\theta(+\infty) = 1 .$$

Red

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left(\frac{t^2}{2} \right)^\nu$$

pretstavlja jedan uniformno konvergentan red u intervalu $(-\infty, +\infty)$, pa ga možemo integrisati član po član. Tako dobijamo

$$\theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! 2^\nu} \int_0^x t^{2\nu} dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! 2^\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2! 2^2 \cdot 5} - \frac{x^7}{3! 2^3 \cdot 7} + \cdots \right\}.$$

Ovaj obrazac za izračunavanje funkcije $\theta(x)$ pogodan je jedino ako je x mali broj. Pošto je red naizmeničan, to je greška

$$R \leqslant \frac{x^{2n+1}}{n!\, 2^n (2n+1)\sqrt{2\pi}} \,.$$

Naprimer, za $x = 1$ dovoljno je da uzmemo $n = 2$, pa da greška bude manja od jednog procenta.

Ukoliko je x veliki broj, poći ćemo od veze

$$\theta(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

i primenićemo parcijalnu integraciju

$$\int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} dt =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3} + \int_x^{\infty} \frac{3e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^4} dt = \cdots\cdots =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^7} + \cdots \pm \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{x^{2n+1}} \mp e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n+1)}{t^{2n+2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\}.$$

Tako dobijamo

$$\theta(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^7} + \cdots \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{x^{2n+1}} \mp e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n+1)}{t^{2n+2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right. .$$

Kako je

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant 1$$

to je greška

$$R \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{t^{2n+2}}\, dt = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{x^{2n+1}\sqrt{2\pi}}$$

utoliko manja što je x veće. Tako, napr., za $x = 3$ greška će biti manja od pola procenta uzimajući $n = 2$.

Tablica 2 daje izračunate vrednosti za $\theta(x)$.

Lako je proveriti veze

$$\theta(-x) = 1 - \theta(x)\ , \qquad x \geqslant 0\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \theta(x) - \theta(-x) =$$

$$= 2\,\theta(x) - 1$$

pa imamo da je

$$\Pr\left\{ \frac{|m-np|}{\sqrt{npq}} \leqslant x \right\} \longrightarrow 2\theta(x) - 1\ , \qquad n \to \infty$$

ili, ako označimo kratkoće radi

$$2\theta(x) - 1 = \theta(x) - \theta(-x) = \Omega(x)\ ,$$

$$\Pr\left\{ |m-np| \leqslant x\sqrt{npq} \right\} \longrightarrow \Omega(x), \qquad n \to \infty\ .$$

2.15. Bernoulli-eva teorema. — Označimo sa

$$P(n,x) = \Pr\left\{ |m-np| \leqslant x\sqrt{npq} \right\}.$$

Za unapred dato $\delta > 0$ uzimamo takvo x da bude

(2.15.1) $$\Omega(x) > 1 - \frac{\delta}{2}$$

i

(2.15.2) $$-\frac{\delta}{2} < P(n,x) - \Omega(x) < \frac{\delta}{2}\ .$$

Posmatrajmo nejednakost

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon\,,$$

odnosno

$$|m - np| < \varepsilon n\ .$$

Za dovoljno veliko n biće

$$\varepsilon n > x\sqrt{npq}$$

odakle

$$n > \frac{x^2 pq}{\varepsilon^2}.$$

Tada je

$$\mathrm{Pr}\left\{|m-np| < \varepsilon n\right\} > \mathrm{Pr}\left\{|m-np| < x\sqrt{npq}\right\}$$

ili

$$\mathrm{P}_\varepsilon(n) > \mathrm{P}(n,x), \qquad n > \frac{x^2 pq}{\varepsilon^2},$$

gde je

$$\mathrm{P}_\varepsilon(n) = \mathrm{Pr}\left\{|m-np| < \varepsilon n\right\}.$$

Uzimajući dvojnu nejednačinu (2.15.2) i vodeći računa o (2.15.1) i da je $P(n, x) < 1$, imamo

$$1-\frac{\delta}{2} < \mathrm{P}(n,x)+\frac{\delta}{2} < 1+\frac{\delta}{2},$$

$$1-\delta < \mathrm{P}(n,x) < 1.$$

Kako je

$$\mathrm{P}_\varepsilon(n) > \mathrm{P}(n,x),$$

to je

$$1-\delta' < \mathrm{P}(\varepsilon) < 1,$$

gde je $\delta' < \delta$. Otuda

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Pr}\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Za ma koje unapred dato pozitivno ε, verovatnoća da će apsolutno otstupanje relativne frekvencije broja ostvarenja očekivanog događaja od odgovarajuće proste verovatnoće p biti manje od ε, teži ka jedinici kad $n\to\infty$.

Ovaj nam rezultat daje prvu aproksimaciju za Bernoulli-evu teoremu.

2.16. Multinomijalna verovatnoća. — Neka smo n puta ponovili opit sa istim premisama h i neka su moguće kao istinite pri svakom opitu propozicije $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sa verovatnoćama

$$p_i = a_i/h, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Verovatnoća da će u prvih r_1 opita biti istinita propozicija a_1, u r_2 narednih opita propozicija $a_2, \ldots$, a u r_k poslednjih opita propozicija a_k je

$$p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k},$$

gde je

$$r_1+r_2+\cdots+r_k=n,$$

$$p_1+p_2+\cdots+p_k=1.$$

Verovatnoća da će u r_1 opita biti istinita propozicija a_1, u r_2 opita propozicija $a_2, \ldots,$ a u r_k opita propozocija a_k, bez obzira na redosled, biće

(2.16.1) $$P_{r_1 r_2 \ldots r_k}=\frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_k!}p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}.$$

Odmah vidimo da je $P_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ jedan od članova razvijenog polinoma

$$(p_1+p_2+\ldots+p_k)^n$$

i da je

(2.16.2) $$\sum_{r_1}\sum_{r_2}\cdots\sum_{r_k}P_{r_1 r_2 \ldots r_k}=1.$$

Numeričku vrednost verovatnoće $P_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ možemo izračunati direktno koristeći logaritamske i logaritamsko-faktorielske tablice, ukoliko su svi r_i mali brojevi.

Za velike vrednosti r_i pribeći ćemo Stirling-ovoj aproksimaciji za faktoriele. Uvedimo prethodno smene

$$r_i=np_i+x_i\sqrt{n}\,, \qquad i=1,2,\ldots,k,$$

gde je

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=0.$$

Neposredno možemo konstatovati da je, slično zaključku u (2.7), maksimalna vrednost verovatnoće $P_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ u blizini tačke $(np_1, np_2, \ldots, np_k)$ odnosno $x_1=x_2=\ldots=x_k=0$, sa vrednošću

$$Max\left\{P_{r_1\ldots r_k}\right\}=\frac{n!}{(np_1)!\cdots\cdots(np_k)!}p_1^{np_1}\cdots p_k^{np_k}.$$

Stavljajući

$$n!=\sqrt{2\pi n}\;n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}},$$

$$(np_1)!=\sqrt{2\pi np_1}\,(np_1)^{np_1}e^{-np_1+\frac{\theta_1}{12np_1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(np_k)!=\sqrt{2\pi np_k}\,(np_k)^{np_k}e^{-np_k+\frac{\theta_k}{12np_k}},$$

gde su $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_k$ brojevi između 0 i 1, dobijamo

$$Max\left\{P_{r_1 r_2 \ldots r_k}\right\}=P_0\approx$$

$$\approx\frac{\sqrt{2\pi n}\;n^n e^{-n}p_1^{np_1}\cdots p_k^{np_k}}{\sqrt{2\pi np_1}\,(np_1)^{np_1}e^{-np_1}\cdots\sqrt{2\pi np_k}\,(np_k)^{np_k}e^{-np_k}}\;e^{\frac{\theta}{12n}-\frac{1}{12n}\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i}{p_i}}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi n)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{p_1\cdot p_2\cdots p_k}}\;e^{\frac{\theta}{12n}-\frac{1}{12n}\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i}{p_i}},$$

gde je

$$\frac{1}{12n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i} < \frac{\theta}{12n} - \frac{1}{12n}\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i}{p_i} < \frac{1}{12n}\,.$$

Za dovoljno veliko n leva i desna strana ove dvojne nejednačine biće manje od jedne proizvoljno male unapred date veličine. Tako dobijamo

$$P_0 \approx \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_k}}\,.$$

U opštem slučaju, za ma koje vrednosti $x_1, \ldots, x_k$, verovatnoća $P_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ dobija sledeći oblik posle korišćenja prve aproksimacije faktoriela

$$P_{r_1 r_2 \cdots r_k} \approx \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_k}} \; \frac{1}{\prod_i \left(1+\frac{x_i}{p_i\sqrt{n}}\right)^{np_i + x_i\sqrt{n}+\frac{1}{2}}}\,.$$

Kako je

$$\left(np_i + x_i\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x_i}{p_i\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\left(np_i + x_i\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_i}{p_i\sqrt{n}} - \frac{x_i^2}{2np_i^2} + \frac{x_i^3}{3n\sqrt{n}\,p_i^3} - \cdots\right)=$$

$$= x_i\sqrt{n} + \frac{x_i^2}{2p_i} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

to je

(2.16.3) $$P_{r_1 r_2 r_3 \cdots r_k} \approx \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_k}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\frac{x_i^2}{p_i}}$$

2.17. Ponavljanje zavisnih ópita. Hipergeometriska verovatnoća. — Uočimo jednu urnu u kojoj se nalazi ukupno n kuglica, od kojih je n_1 bele a n_2 crne boje. Na slučaj izvlačimo r puta po jednu kuglicu. Ako svaku izvučenu kuglicu vraćamo u urnu, uzastopni opiti su identični i međusobno nezavisni. Verovatnoća da će biti izvučeno r_1 belih, a $r_2 = r - r_1$ crnih kuglica je tada

(2.17.1) $$\binom{r}{r_1}\left(\frac{n_1}{n}\right)^{r_1}\left(\frac{n_2}{n}\right)^{r_2}.$$

Ukoliko izvučene kuglice ne vraćamo nazad u urnu, uzastopni opiti zavisiće međusobno i neće više biti identični. Verovatnoća da će u r $(r \leqslant n)$ izvlačenja prvih r_1 izvučenih kuglica biti belih a preostalih r_2 kuglica crnih je

$$\frac{n_1}{n}\,\frac{n_1-1}{n-1}\cdots\frac{n_1-r_1+1}{n-r_1+1}\,\frac{n_2}{n-r_1}\,\frac{n_2-1}{n-r_1-1}\cdots\frac{n_2-r_2+1}{n-r_1-r_2+1}\,.$$

Verovatnoća da će u r izvlačenja r_1 puta izaći bela a r_2 puta crna kuglica, bez obzira na redosled, je

$$\binom{r}{r_1}\frac{n_1(n_1-1)\cdots(n_1-r_1+1)\,n_2(n_2-1)\cdots(n_2-r_2+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}=$$

$$(2.17.2)\qquad =\frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n-n_1}{r-r_1}}{\binom{n}{r}}.$$

Ova je verovatnoća poznata pod imenom ***hipergeometriske verovatnoće*** iz razloga što se funkcija generatrise za tu verovatnoću može izraziti pomoću hipergeometriskih funkcija.

Očevidno da ako n, n_1 i n_2 teže beskonačnosti a r, r_1 i r_2 ostaju konačni, hipergeometriska verovatnoća (2.17.2) težiće ka verovatnoći (2.17.1). Zaista, (2.17.2) može se transformisati u izraz

$$\binom{r}{r_1}\left(\frac{n_1}{n}\right)^{r_1}\left(\frac{n_2}{n}\right)^{r_2}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n_1}\right)\left(1-\frac{2}{n_1}\right)\cdots\left(1-\frac{r_1-1}{n_1}\right)\left(1-\frac{1}{n_2}\right)\cdots\left(1-\frac{r_2-1}{n_2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\binom{r}{r_1}\left(\frac{n_1}{n}\right)^{r_1}\left(\frac{n_2}{n}\right)^{r_2},\quad\text{kad } n,\ n_1,\ n_2\to\infty.$$

Ako se, dakle, u urni nalazi vrlo veliki broj belih i crnih kuglica, sasvim je svejedno da li svaku izvučenu kuglicu vraćamo u urnu ili ne.

Pokažimo još da je zbir svih hipergeometriskih verovatnoća za $r_1 = 0, 1, 2, \ldots, r$ jednak jedinici. Kako je

$$(1+x)^a=\sum_j\binom{a}{j}x^j,$$

$$(1+x)^b=\sum_q\binom{b}{q}x^q,$$

$$(1+x)^{a+b}=\sum_p\binom{a+b}{p}x^p$$

to je

$$\sum\binom{a+b}{p}x^p=\sum_j\sum_q\binom{a}{j}\binom{b}{q}x^{j+q}$$

i za $p = j + q$ dobijamo identitet

$$\binom{a+b}{p}=\binom{a}{p}\binom{b}{0}+\binom{a}{p-1}\binom{b}{1}+\cdots+\binom{a}{0}\binom{b}{p}.$$

Zato je

$$\frac{1}{\binom{n}{r}}\sum_{r_1=0}^{r}\binom{n_1}{r_1}\binom{n-n_1}{r-r_1}=$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{r}}\left[\binom{n_1}{0}\binom{n-n_1}{r}+\binom{n_1}{1}\binom{n-n_1}{r-1}+\cdots+\binom{n_1}{r}\binom{n-n_1}{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{r}}\binom{n_1+n-n_1}{r}=1\,.$$

2.18. Primeri

2.18.1. Koliki je najverovatniji broj ostvarenja očekivanog događaja u pedeset ponovljenih opita ako je njegova prosta verovatnoća 2/5?

Problem se svodi na traženje maksimalnog člana razvijenog binoma

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)^{50}$$

Korišćenjem rezultata (2.7.3) dobijamo

$$19{,}4 \leqslant k \leqslant 20{,}4,$$

odnosno, $k = 20$, s obzirom da k mora biti ceo broj. Prema tome, najverovatnije je da će se očekivani događaj ostvariti 20 puta sa verovatnoćom

$$P_{20}=\binom{50}{20}\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\left(\frac{3}{5}\right)^{30}=0{,}114558\,.$$

Sledeća tabela sa vrednostima P_x jasno pokazuje da je P_{20} maksimalna verovatnoća

x	P_x	x	P_x
0	0,000000	22	0,095878
.	. . . .	23	0,077814
4	0,000000	24	0,058361
5	0,000002	25	0,040463
6	0,000011	26	0,025938
7	0,000047	27	0,015371
8	0,000169	28	0,008417
9	0,000527	29	0,004257
10	0,001440	30	0,001987
11	0,003491	31	0,000854
12	0,007563	32	0,000338
13	0,014738	33	0,000123
14	0,025967	34	0,000041
15	0,041547	35	0,000012
16	0,060589	36	0,000003
17	0,080785	37	0,000001
18	0,098737	38	0,000000
19	0,110863	39	0,000000
20	0,114558	.	. . . .
21	0,109103	50	0,000000

2.18.2. Odrediti najverovatniji broj ostvarenja očekivanog događaja, ako je njegova prosta verovatnoća 1/2 i ako je broj opita paran broj $n = 2k$. Odrediti zatim maksimalnu verovatnoću P_m, pokazati da je

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} < P_m < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

i odrediti graničnu vrednost

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{k}\, P_m .$$

Najverovatniji broj ostvarenja očekivanog događaja nalazi se u granicama

$$np - q = k - \frac{1}{2},$$

$$np + p = k + \frac{1}{2} .$$

Kako to mora biti ceo broj a n je paran broj, to je najverovatniji broj ostvarenja k.

Otuda

$$P_k = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k}} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2k} .$$

Da bismo dokazali gornju dvojnu nejednačinu, iz

$$\frac{s}{s+1} < \frac{s+1}{s+2}$$

dobijamo da je

$$P_k = \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2k} < \frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)} = \frac{1}{(2k+1)P_k} ,$$

odnosno

$$P_k^2 < \frac{1}{2k+1} ,$$

čime je dokazana desna nejednakost. Isto tako iz

$$\frac{s}{s+1} > \frac{s-1}{s}$$

dobijamo da je

$$2P_k = \frac{3\cdot 5\cdots(2k-1)}{4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2k} > \frac{2\cdot 4\cdots(2k-2)}{3\cdot 5\cdots(2k-1)}\;\frac{2k}{2k} = \frac{1}{2k\, P_k} ,$$

odnosno

$$P_k^2 > \frac{1}{4k}$$

tako da je

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} < P_k < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} .$$

Najzad, primenom Wallis-ove formule (2.1.1) i koristeći rezultat za P_k imamo da je

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{P_k\sqrt{2k+1}}$$

ili

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)} \cdot P_k = 1 ,$$

ili, što je isto,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\pi k}\; P_k = 1 .$$

2.18.3. Pokazati da je za $n = 2k$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_{k\pm h}}{P_k} = \lim_{k\to\infty} e^{-s^2},$$

pod uslovom da $\dfrac{h}{\sqrt{k}} = s > 0$ ostane konačno.

Kako je

$$\frac{P_{k\pm h}}{P_k} = \frac{k}{k+h}\; \frac{k-1}{k+h-1} \cdots \frac{k-h+1}{k+1}$$

to je (vidi primer 2.18.2)

$$\left(\frac{k-h}{k}\right)^h < \frac{P_{k\pm h}}{P_k} < \left(\frac{k}{k+h}\right)^h ,$$

odnosno

$$\left(1-\frac{s^2}{h}\right)^h < \frac{P_{k\pm h}}{P_k} < \left(1+\frac{s^2}{h}\right)^{-h}$$

Kada k neograničeno raste, mora i h neograničeno da raste, pa je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_{k\pm h}}{P_k} = e^{-s^2} .$$

2.18.4. Izračunati približnu vrednost binomijalne verovatnoće za $n = 50$, $m = 20$, $p = 2/5$.

Kako je

$$\left[\frac{n}{2\pi m(n-m)}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} = \frac{1}{2\sqrt{6\pi}} = 0{,}11516$$

to je donja granica prema obrascu (2.10.1)

$$P'_m = 0{,}11516\ e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12m}-\frac{1}{12(n-m)}} = 0{,}11516 \cdot 0{,}99474 =$$

$$= 0{,}114554.$$

Gornja granica biće

$$P''_m = 0{,}11516\ e^{\frac{1}{12n+6}-\frac{1}{12m+6}-\frac{1}{12(n-m)+6}} =$$

$$= 0{,}11516 \cdot 0{,}99490 = 0{,}114573.$$

Koristeći tabele za nepotpuni količnik B-funkcije dobijamo tačnu vrednost

$$P_m = 0{,}114558.$$

2.18.5. Uzastopno izvlačimo kuglice iz urne u kojoj se nalaze bele i crne kuglice sa prostim verovatnoćama p i q. Izvučene kuglice vraćamo u urnu posle svakog izvlačenja. Prestajemo sa izvlačenjem ako smo k puta uzastopce izvukli belu kuglicu. Kolika je verovatnoća da će se završiti igra posle $(k+2)$-og izvlačenja?

Označimo tu verovatnoću sa p_{k+2}

$$p_k = p^k.$$

Ako je u prvom izvlačenju izašla crna kuglica, onda je

$$p_{k+1} = qp^k.$$

Najzad, ako je u drugom izvlačenju izašla crna kuglica, tražena verovatnoća biće

$$p_{k+2} = (p+q)\,qp^k = qp^k.$$

2.18.6. Ako je $p = 10^{-6}$ a $n = 10^6$, kolika je verovatnoća da će se očekivani događaj ostvariti najviše dva puta?

Kako je n vrlo veliki a p vrlo mali broj, dok je $np = k = 1$ konačan broj, to možemo upotrebiti Poisson-ovu graničnu formulu za binomijalnu verovatnoću

$$P = \sum_{m=0}^{2} \lim_{n\to\infty} P_{n,m} = \sum_{m=0}^{2} \frac{k^m}{m!} e^{-k} =$$

$$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} = \frac{5}{2e} = 0{,}147.$$

2.18.7. Jedna urna sadrži r belih i $k-r$ crnih kuglica. Izvlačimo n puta uzastopce po jednu kuglicu vraćajući svaki put izvučenu kuglicu nazad u urnu. Označimo sa

$$p = \frac{r}{k}, \qquad q = 1 - \frac{r}{k},$$

$$p_1 = p + \varepsilon, \quad p_2 = p - \varepsilon.$$

Verovatnoća da će se relativna frekvencija belih kuglica $\frac{\nu}{n}$ naći u intervalu (p_1, p_2) je

$$f_n(\varepsilon) = \sum_{\nu > np_1}^{\nu < np_2} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu}$$

Pretpostavimo da je ε pozitivno, proizvoljno malo i nezavisno od n. Dokazati da $f_n(\varepsilon) \to 1$ kad $n \to \infty$ (Steffensen).

Označimo sa t_1 najmanji ceo broj veći od np_1, a t_2 najveći ceo broj manji od np_2 i stavimo

$$t_1 = np_1 + \theta_1, \qquad 0 < \theta_1 \leqslant 1,$$

$$t_2 = np_2 - \theta_2, \qquad 0 < \theta_2 \leqslant 1.$$

Problem se svodi na dokaz da zbirovi

$$S_1 = \sum_{\nu=t_1}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu},$$

$$S_2 = \sum_{\nu=0}^{t_2} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu},$$

teže ka nuli kad $n \to \infty$. Za dovoljno veliko n, opšti član zbirova S_1 i S_2 je opadajuća funkcija za vrednosti $\nu \geqslant t_1$ a rastuća za $\nu \leqslant t_2$. Kako S_1 ima ukupno $n - t_1 + 1$ članova a S_2 ukupno $t_2 + 1$ članova, to je

$$S_1 < (n - t_1 + 1) \binom{n}{t_1} p^{t_1} q^{n-t_1},$$

$$S_2 < (t_2 + 1) \binom{n}{t_2} p^{t_2} q^{n-t_2}$$

Uzmimo oznake $q_1 = q - \varepsilon$ i $q_2 = q + \varepsilon$ i primenimo Stirling-ovu formulu za n dovoljno veliko. Tako dobijamo

$$S_i < K_i \sqrt{n} \left(\frac{p^{p_i} q^{q_i}}{p_i^{p_i} q_i^{q_i}} \right)^n, \qquad i = 1, 2,$$

gde su K_1 i K_2 pozitivne konstante, nezavisne od n. Kako je

$$\frac{p^{p_i} q^{q_i}}{p_i^{p_i} q_i^{q_i}} < 1$$

to očevidno $S_i \to 0$, $(i = 1, 2)$, kad $n \to \infty$.

2.8.8. Poznato je x, izračunati $\theta(x)$. Ako se x nalazi u Tabeli 2, zadatak je jednostavan. Tako, napr., za $x = 0{,}93$ biće $\theta(0{,}93) = 0{,}8116$. Uzmimo, međutim, da je $x = 0{,}9372$, koje ne figuriše u Tabeli 2. Kako je tablična razlika

$$d = \theta(0{,}94) - \theta(0{,}93) = 0{,}0047$$

to ćemo vrednost $\theta(0{,}93) = 0{,}8116$ povećati za

$$0{,}72 \cdot 0{,}0047 = 0{,}0034$$

tako da približno dobijamo da je $\theta(0{,}9372) = 0{,}8150$.

2.18.9. Poznato je $\theta(x)$, izračunati x. I ovde je rešenje neposredno ako se vrednost $\theta(x)$ nalazi u Tabeli 2. Ali neka je, napr., $\theta(x) = 0{,}8150$. Ova se vrednost ne nalazi u Tabeli 2. Vidimo da se nalazi između $\theta(0{,}93) = 0{,}8116$ i $\theta(0{,}94) = 0{,}8163$. Kako je tablična razlika $d = 0{,}0047$, to ćemo vrednost 0,93 povećati za

$$\frac{1}{100}\,\frac{\theta(x)-\theta(0{,}93)}{\theta(0{,}94)-\theta(0{,}93)} = \frac{0{,}0034}{0{,}47} = 0{,}0072$$

tako da približno dobijamo da je $x = 0{,}9372$.

2.18.10. Pokazati da se obrazac (2.11.3) može približno napisati u obliku

$$P(x) \approx \theta\left(\frac{m-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) - \theta\left(\frac{m-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right),$$

gde je $x = m - np$.

Ako označimo sa

$$h = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,, \qquad t_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{x}{\sqrt{npq}}$$

obrazac (2.11.3) postaje

$$P_n(t) \approx h\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t_m^2}{2}} = hy(t_m)\,.$$

Kako x uzima cele vrednosti, to su tačke t_m uniformno raspoređene sa uzajamnim rastojanjem h. Zato je proizvod $h\cdot y(t_m)$ asimptotski jednak površini ispod krive $y(t)$ između $t_m - h/2$ i $t_m + h/2$ tj.

$$hy(t_m) \approx \int_{t_m-\frac{h}{2}}^{t_m+\frac{h}{2}} y(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{m-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}}^{\frac{m-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \theta\left(\frac{m-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) - \theta\left(\frac{m+np-\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right).$$

Koristeći ovaj rezultat možemo izvršiti korekciju Laplace-Liapounoff-ljeve teoreme i dobiti

$$P_r\{k_1 \leqslant m \leqslant k_2\} \approx \theta\left(\frac{k_1-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) - \theta\left(\frac{k_2-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right)$$

za dovoljno veliko n.

2.18.11. Odrediti verovatnoću da će se u 50 uzastopnih bacanja očekivani događaj ostvariti više od 20 puta, pri čemu je prosta verovatnoća 0,4.

Za $n = 50$. $l = 20$, $p = 0{,}4$ treba da odredimo binomijalnu seriju

$$P(20) = \sum_{i=21}^{50} P_i\,.$$

Upotrebimo Uspensky-evu metodu za približno izračunavanje $P(20)$.

$$P(20) = P_{21} \cdot F(-29, 1, 22, -0{,}2),$$

$$P(21) = 0{,}109103,$$

$$F = \frac{1}{1-\omega_1}$$

Vrednost ω_1 dobićemo preko rekurentnog obrasca

$$\omega_k = \frac{c_k}{1 + \dfrac{d_k}{1-\omega_{k+1}}}$$

gde je

$$0 < \omega_k < c_k,$$

$$c_k = \frac{p}{q} \frac{(n-l-k)(l+k)}{(l+2k-1)(l+2k)},$$

$$d_k = -\frac{p}{q} \frac{k(n+k)}{(l+2k)(l+2k+1)}$$

Polazeći od $k = 7$ dobijamo

k	c_k	$-d_k$	
1	0,878788	0,067194	$0{,}751448 < \omega_1 < 0{,}751455$
2	0,743961	0,115556	$0{,}603455 < \omega_2 < 0{,}603481$
3	0,636923	0,150997	$0{,}503590 < \omega_3 < 0{,}503702$
4	0,550265	0,177340	$0{,}429088 < \omega_4 < 0{,}429692$
5	0,478927	0,197133	$0{,}368006 < \omega_5 < 0{,}372039$
6	0,419355	0,212121	$0{,}313851 < \omega_6 < 0{,}345968$
7	0,368984	....	$0 < \omega_7 < 0{,}368984$

tako da je

$$F \approx \frac{1}{1-\omega_1} = \frac{1}{1-0{,}7515} = 4{,}0241$$

pa je tražena verovatnoća

$$P(20) = 0{,}109103 \cdot 4{,}0241 = 0{,}439.$$

Koristeći Tabelu 1 dobijamo tačnu vrednost

$$P(20) = 0{,}438966.$$

2.18.12. Kolika je verovatnoća P_k^n da će se pojaviti zbir k ($n \leqslant k \leqslant 6n$) bacajući n kocki?

Tražena verovatnoća biće koeficijent uz x^k razvijenog polinoma

$$\frac{1}{6^n}(t+t^2+\cdots+t^6)^n = \left(\frac{t}{6}\right)^n \frac{(1-t^6)^n}{(1-t)^n} =$$

$$=\left(\frac{t}{6}\right)^n \cdot \sum_{\alpha=0}^{n} (-1)^\alpha \binom{n}{\alpha} t^{6\alpha} \cdot \sum_{\beta=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{\beta} t^\beta ,$$

tj.

$$P_k^n = \frac{1}{6^n}\left\{\binom{k-1}{n-1} - \binom{k-1-6}{n-1}\binom{n}{1} + \binom{k-1-12}{n-1}\binom{n}{2} - \cdots\right\}$$

2.19. Zadaci za vežbu

2.19.1. U 38 ponovljenih nezavisnih opita sa prostom verovatnoćom 0,3 odrediti: a) najverovatniji broj ostvarenja očekivanog događaja, b) verovatnoću da će se očekivani događaj ostvariti 20 puta, c) verovatnoću da će se očekivani događaj desiti više od 20 puta.

2.19.2. U 80 ponovljenih nezavisnih opita sa prostom verovatnoćom $p = 0{,}2$ odrediti pomoću Uspensky-eve metode približnu vrednost verovatnoće da će se očekivani događaj desiti više od 40 puta.

2.19.3. Izračunati približnu vrednost, a zatim i tačnu preko Tabele I za nepotpuni količnik B-funkcije, verovatnoće da će se u 40 nezavisnih opita, sa prostom verovatnoćom $p = 0{,}6$, očekivani događaj ostvariti 15 puta.

2.19.4. Jedno poljoprivredno dobro razdeljeno je na 120 jednakih površina zasejanih jednom istom kulturom. Neka je u toj oblasti verovatnoća 1/12 da će žetva jedne površine podbaciti. Koristeći Laplace-Liapounoff-ljevu teoremu odrediti verovatnoću da će broj površina sa dobrim prinosom biti između 80 i 110.

2.19.5. Bacaju se dve kocke 50 puta uzastopce. Kolika je verovatnoća da će se zbir 8 pojaviti više od 15 puta, a manje od 32 puta?

2.19.6. Pokazati da je za $p = 0{,}5$

$$P_m < \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \cdot e^{-\frac{(2m-n)^2}{2n}}$$

2.19.7. Dokazati identitet

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 P_m = np(np+q) .$$

2.19.8. U 12 000 ponovljenih opita sa prostom verovatnoćom $p = 1/1000$, kolika je verovatnoća da će se očekivani događaj desiti 12 puta?

2.19.9. Dokazati da ako

$$\frac{r}{n} \to t\,,$$
$$\frac{n_1}{n} \to p\,,$$
$$\frac{n_2}{n} \to q$$

i

$$\frac{r_1 - rp}{\sqrt{npqt \cdot (1-t)}} \to x\,,$$

kad $n \to \infty$, hipergeometriska verovatnoća teži ka

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\, npqt \cdot (1-t)}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2.19.10. Ako su za $n \to \infty$ vrednosti $np_j = k_j$ konačne, dokazati da je Poisson-ova granična formula za multinomijalnu verovatnoću

$$e^{-n} \prod_j \frac{k_j^{r_j}}{r_j!}\,.$$

2.19.11. Sabirajući vrednosti Poisson-ove verovatnoće iz zadatka 2.19.10 za sve pozitivne vrednosti r_j pokazati da ćemo za rezultat dobiti 1.

2.19.12. Dokazati da je

$$\Pr\{m > x\} < \Pr\{m < -x\}$$

ako je $p > q$ a x dovoljno veliko.

2.20. Tabela 1

Nepotpuni količnik *B*-funkcije

$$I_t(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left\{\int_0^1 y^{\beta-1}(1-y)^{\alpha-1}\,dy-\int_0^{1-t} y^{\beta-1}(1-y)^{\alpha-1}\,dy\right\}$$

β	α	$t=0,1$	$t=0,2$	$t=0,3$	$t=0,4$	$t=0,5$	$t=0,6$	$t=0,7$	$t=0,8$	$t=0,9$
1	1	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
	2	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500	0,3600	0,4900	0,6400	0,8100
	3	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250	0,2160	0,3430	0,5120	0,7290
	4	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625	0,1296	0,2401	0,4096	0,6561
	5	0,0000	0,0003	0,0024	0,0102	0,0313	0,0778	0,1681	0,3277	0,5905
	6		0,0001	0,0007	0,0041	0,0156	0,0467	0,1176	0,2621	0,5314
	7		0,0000	0,0002	0,0016	0,0078	0,0280	0,0824	0,2097	0,4783
	8			0,0001	0,0007	0,0039	0,0168	0,0576	0,1678	0,4305
	9			0,0000	0,0003	0,0020	0,0101	0,0404	0,1342	0,3874
	10				0,0001	0,0010	0,0060	0,0282	0,1074	0,3487
	11				0,0000	0,0005	0,0036	0,0198	0,0859	0,3138
	12					0,0002	0,0022	0,0138	0,0687	0,2824
	13					0,0001	0,0013	0,0097	0,0550	0,2542
	14					0,0001	0,0008	0,0068	0,0440	0,2288
	15					0,0000	0,0005	0,0047	0,0352	0,2059
	16						0,0003	0,0033	0,0281	0,1853
	17						0,0002	0,0023	0,0225	0,1668
	18						0,0001	0,0016	0,0180	0,1501
	19						0,0001	0,0011	0,0144	0,1351
	20						0,0000	0,0008	0,0115	0,1216
	21							0,0006	0,0092	0,1094
	22							0,0004	0,0074	0,0985
	23							0,0003	0,0059	0,0886
	24							0,0002	0,0047	0,0798
	25							0,0001	0,0038	0,0718
	26							0,0001	0,0030	0,0646
	27							0,0001	0,0024	0,0581
	28							0,0000	0,0019	0,0523
	29								0,0015	0,0471
	30								0,0012	0,0424
	31								0,0010	0,0382
	32								0,0008	0,0343
	33								0,0006	0,0309
	34								0,0005	0,0278
	35								0,0004	0,0250
	36								0,0003	0,0225
	37								0,0003	0,0203
	38								0,0002	0,0182
	39								0,0002	0,0164
	40								0,0001	0,0148
	41								0,0001	0,0133
	42								0,0001	0,0120
	43								0,0001	0,0108
	44								0,0001	0,0097
	45								0,0000	0,0087
	46									0,0079
	47									0,0071
	48									0,0064
	49									0,0057

β	α	t=0,1	t=0,2	t=0,3	t=0,4	t=0,5	t=0,6	t=0,7	t=0,8	t=0,9
2	2	0,0280	0,1040	0,2160	0,3520	0,5000	0,6480	0,7840	0,8960	0,9720
	3	0,0037	0,0272	0,0837	0,1792	0,3125	0,4752	0,6517	0,8192	0,9477
	4	0,0005	0,0067	0,0308	0,0870	0,1875	0,3370	0,5282	0,7373	0,9185
	5	0,0001	0,0016	0,0109	0,0410	0,1094	0,2333	0,4202	0,6554	0,8857
	6	0,0000	0,0004	0,0038	0,0188	0,0625	0,1586	0,3294	0,5767	0,8503
	7		0,0001	0,0013	0,0085	0,0352	0,1064	0,2553	0,5033	0,8131
	8		0,0000	0,0004	0,0038	0,0195	0,0705	0,1960	0,4362	0,7748
	9			0,0001	0,0017	0,0107	0,0464	0,1493	0,3758	0,7361
	10			0,0000	0,0007	0,0059	0,0302	0,1130	0,3221	0,6974
	11				0,0003	0,0032	0,0196	0,0850	0,2749	0,6590
	12				0,0001	0,0017	0,0126	0,0637	0,2336	0,6213
	13				0,0001	0,0009	0,0081	0,0475	0,1979	0,5846
	14				0,0000	0,0005	0,0052	0,0353	0,1671	0,5490
	15					0,0003	0,0033	0,0261	0,1407	0,5147
	16					0,0001	0,0021	0,0193	0,1182	0,4818
	17					0,0001	0,0013	0,0142	0,0991	0,4503
	18					0,0000	0,0008	0,0104	0,0829	0,4203
	19						0,0005	0,0076	0,0692	0,3917
	20						0,0003	0,0056	0,0576	0,3647
	21						0,0002	0,0041	0,0480	0,3392
	22						0,0001	0,0030	0,0398	0,3151
	23						0,0001	0,0022	0,0331	0,2925
	24						0,0001	0,0016	0,0274	0,2712
	25						0,0000	0,0011	0,0227	0,2513
	26							0,0008	0,0187	0,2326
	27							0,0006	0,0155	0,2152
	28							0,0004	0,0128	0,1989
	29							0,0003	0,0105	0,1837
	30							0,0002	0,0087	0,1696
	31							0,0002	0,0071	0,1564
	32							0,0001	0,0059	0,1442
	33							0,0001	0,0048	0,1329
	34							0,0001	0,0040	0,1224
	35							0,0000	0,0032	0,1126
	36								0,0027	0,1036
	37								0,0022	0,0953
	38								0,0018	0,0876
	39								0,0015	0,0805
	40								0,0012	0,0739
	41								0,0010	0,0678
	42								0,0008	0,0623
	43								0,0007	0,0571
	44								0,0005	0,0524
	45								0,0004	0,0480
	46								0,0004	0,0440
	47								0,0003	0,0403
	48								0,0002	0,0369
3	3	0,0086	0,0579	0,1631	0,3174	0,5000	0,6826	0,8369	0,9421	0,9914
	4	0,0013	0,0170	0,0705	0,1792	0,3438	0,5443	0,7443	0,9011	0,9842
	5	0,0002	0,0047	0,0288	0,0963	0,2266	0,4199	0,6471	0,8520	0,9743
	6	0,0000	0,0012	0,0113	0,0498	0,1445	0,3154	0,5518	0,7969	0,9619
	7		0,0003	0,0043	0,0250	0,0898	0,2318	0,4628	0,7382	0,9470
	8		0,0001	0,0016	0,0123	0,0547	0,1673	0,3828	0,6778	0,9298
	9		0,0000	0,0006	0,0059	0,0327	0,1189	0,3127	0,6174	0,9104
	10			0,0002	0,0028	0,0193	0,0834	0,2528	0,5583	0,8891
	11			0,0001	0,0013	0,0112	0,0579	0,2025	0,5017	0,8661
	12			0,0000	0,0006	0,0065	0,0398	0,1608	0,4481	0,8416

β	α	$t=0,1$	$t=0,2$	$t=0,3$	$t=0,4$	$t=0,5$	$t=0,6$	$t=0,7$	$t=0,8$	$t=0,9$
3	13				0,0003	0,0037	0,0271	0,1268	0,3980	0,8159
	14				0,0001	0,0021	0,0183	0,0994	0,3518	0,7892
	15				0,0001	0,0012	0,0123	0,0774	0,3096	0,7618
	16				0,0000	0,0007	0,0082	0,0600	0,2713	0,7338
	17					0,0004	0,0055	0,0462	0,2369	0,7054
	18					0,0002	0,0036	0,0355	0,2061	0,6769
	19					0,0001	0,0024	0,0271	0,1787	0,6484
	20					0,0001	0,0016	0,0207	0,1545	0,6200
	21					0,0000	0,0010	0,0157	0,1332	0,5920
	22						0,0007	0,0119	0,1145	0,5643
	23						0,0004	0,0090	0,0982	0,5371
	24						0,0003	0,0067	0,0841	0,5105
	25						0,0002	0,0051	0,0718	0,4846
	26						0,0001	0,0038	0,0612	0,4594
	27						0,0001	0,0028	0,0520	0,4350
	28						0,0000	0,0021	0,0442	0,4114
	29							0,0016	0,0374	0,3886
	30							0,0012	0,0317	0,3667
	31							0,0009	0,0268	0,3457
	32							0,0006	0,0226	0,3255
	33							0,0005	0,0190	0,3063
	34							0,0004	0,0160	0,2879
	35							0,0003	0,0135	0,2703
	36							0,0002	0,0113	0,2537
	37							0,0001	0,0095	0,2378
	38							0,0001	0,0079	0,2228
	39							0,0001	0,0066	0,2086
	40							0,0001	0,0056	0,1951
	41							0,0000	0,0046	0,1824
	42								0,0039	0,1704
	43								0,0032	0,1590
	44								0,0027	0,1484
	45								0,0022	0,1383
	46								0,0019	0,1289
	47								0,0015	0,1200
4	4	0,0027	0,0333	0,1260	0,2898	0,5000	0,7102	0,8740	0,9667	0,9973
	5	0,0004	0,0104	0,0580	0,1737	0,3633	0,5941	0,8059	0,9437	0,9950
	6	0,0001	0,0031	0,0253	0,0994	0,2539	0,4826	0,7297	0,9144	0,9917
	7	0,0000	0,0009	0,0106	0,0548	0,1719	0,3823	0,6496	0,8791	0,9872
	8		0,0002	0,0043	0,0293	0,1133	0,2963	0,5696	0,8389	0,9815
	9		0,0001	0,0017	0,0153	0,0730	0,2253	0,4925	0,7946	0,9744
	10		0,0000	0,0007	0,0078	0,0461	0,1686	0,4206	0,7473	0,9658
	11			0,0002	0,0039	0,0287	0,1243	0,3552	0,6982	0,9559
	12			0,0001	0,0019	0,0176	0,0905	0,2969	0,6482	0,9444
	13			0,0000	0,0009	0,0106	0,0651	0,2459	0,5981	0,9316
	14				0,0005	0,0064	0,0464	0,2019	0,5489	0,9174
	15				0,0002	0,0038	0,0328	0,1646	0,5010	0,9018
	16				0,0001	0,0022	0,0230	0,1332	0,4551	0,8850
	17				0,0000	0,0013	0,0160	0,1071	0,4114	0,8670
	18					0,0007	0,0110	0,0856	0,3704	0,8480
	19					0,0004	0,0076	0,0681	0,3320	0,8281
	20					0,0002	0,0052	0,0538	0,2965	0,8073
	21					0,0001	0,0035	0,0424	0,2639	0,7857
	22					0,0001	0,0024	0,0332	0,2340	0,7636
	23					0,0000	0,0016	0,0260	0,2068	0,7409
	24						0,0011	0,0202	0,1823	0,7179
	25						0,0007	0,0157	0,1602	0,6946

β	α	$t=0,1$	$t=0,2$	$t=0,3$	$t=0,4$	$t=0,5$	$t=0,6$	$t=0,7$	$t=0,8$	$t=0,9$
4	26						0,0005	0,0121	0,1404	0,6710
	27						0,0003	0,0093	0,1227	0,6474
	28						0,0002	0,0072	0,1070	0,6238
	29						0,0001	0,0055	0,0931	0,6003
	30						0,0001	0,0042	0,0808	0,5769
	31						0,0001	0,0032	0,0700	0,5538
	32						0,0000	0,0024	0,0605	0,5310
	33							0,0018	0,0522	0,5085
	34							0,0014	0,0450	0,4864
	35							0,0011	0,0387	0,4648
	36							0,0008	0,0332	0,4437
	37							0,0006	0,0285	0,4231
	38							0,0004	0,0244	0,4031
	39							0,0003	0,0208	0,3836
	40							0,0003	0,0178	0,3648
	41							0,0002	0,0151	0,3466
	42							0,0001	0,0129	0,3289
	43							0,0001	0,0110	0,3119
	44							0,0001	0,0093	0,2956
	45							0,0001	0,0079	0,2799
	46							0,0000	0,0067	0,2648
5	5	0,0009	0,0196	0,0988	0,2666	0,5000	0,7334	0,9012	0,9804	0,9991
	6	0,0001	0,0064	0,0473	0,1662	0,3770	0,6331	0,8497	0,9672	0,9984
	7	0,0000	0,0020	0,0216	0,0994	0,2744	0,5328	0,7897	0,9496	0,9972
	8		0,0006	0,0095	0,0573	0,1938	0,4382	0,7237	0,9274	0,9957
	9		0,0002	0,0040	0,0321	0,1334	0,3530	0,6543	0,9009	0,9935
	10		0,0000	0,0017	0,0175	0,0898	0,2793	0,5842	0,8702	0,9908
	11			0,0007	0,0093	0,0592	0,2173	0,5155	0,8358	0,9873
	12			0,0003	0,0049	0,0384	0,1666	0,4499	0,7982	0,9830
	13			0,0001	0,0025	0,0245	0,1260	0,3887	0,7582	0,9779
	14			0,0000	0,0013	0,0154	0,0942	0,3327	0,7164	0,9718
	15				0,0006	0,0096	0,0696	0,2822	0,6733	0,9648
	16				0,0003	0,0059	0,0510	0,2375	0,6296	0,9568
	17				0,0002	0,0036	0,0370	0,1984	0,5860	0,9478
	18				0,0001	0,0022	0,0266	0,1645	0,5429	0,9379
	19				0,0000	0,0013	0,0190	0,1356	0,5007	0,9269
	20					0,0008	0,0134	0,1111	0,4599	0,9149
	21					0,0005	0,0095	0,0905	0,4207	0,9020
	22					0,0003	0,0066	0,0733	0,3833	0,8882
	23					0,0002	0,0046	0,0591	0,3480	0,8734
	24					0,0001	0,0032	0,0474	0,3149	0,8579
	25					0,0001	0,0022	0,0379	0,2839	0,8416
	26					0,0000	0,0015	0,0302	0,2552	0,8245
	27						0,0010	0,0239	0,2287	0,8068
	28						0,0007	0,0189	0,2044	0,7885
	29						0,0005	0,0149	0,1821	0,7697
	30						0,0003	0,0117	0,1619	0,7504
	31						0,0002	0,0091	0,1435	0,7307
	32						0,0001	0,0071	0,1269	0,7108
	33						0,0001	0,0055	0,1120	0,6905
	34						0,0001	0,0043	0,0986	0,6701
	35						0,0000	0,0033	0,0866	0,6496
	36							0,0026	0,0759	0,6290
	37							0,0020	0,0664	0,6084
	38							0,0015	0,0580	0,5879
	39							0,0012	0,0506	0,5675
	40							0,0009	0,0440	0,5472

β	α	t=0,1	t=0,2	t=0,3	t=0,4	t=0,5	t=0,6	t=0,7	t=0,8	t=0,9
5	41							0,0007	0,0382	0,5271
	42							0,0005	0,0332	0,5073
	43							0,0004	0,0287	0,4878
	44							0,0003	0,0248	0,4686
	45							0,0002	0,0214	0,4497
6	6	0,0003	0,0117	0,0782	0,2465	0,5000	0,7535	0,9218	0,9883	0,9997
	7	0,0001	0,0039	0,0386	0,1582	0,3872	0,6652	0,8822	0,9806	0,9995
	8	0,0000	0,0012	0,0182	0,0977	0,2905	0,5744	0,8346	0,9700	0,9991
	9		0,0004	0,0083	0,0583	0,2120	0,4859	0,7805	0,9561	0,9985
	10		0,0001	0,0037	0,0338	0,1509	0,4032	0,7216	0,9389	0,9978
	11		0,0000	0,0016	0,0191	0,1051	0,3288	0,6598	0,9183	0,9967
	12			0,0007	0,0106	0,0717	0,2639	0,5968	0,8943	0,9953
	13			0,0003	0,0058	0,0481	0,2088	0,5344	0,8671	0,9936
	14			0,0001	0,0031	0,0318	0,1629	0,4739	0,8369	0,9914
	15			0,0000	0,0016	0,0207	0,1256	0,4164	0,8042	0,9887
	16				0,0008	0,0133	0,0957	0,3627	0,7693	0,9856
	17				0,0004	0,0085	0,0722	0,3134	0,7326	0,9818
	18				0,0002	0,0053	0,0540	0,2688	0,6947	0,9774
	19				0,0001	0,0033	0,0400	0,2288	0,6559	0,9723
	20				0,0001	0,0020	0,0294	0,1935	0,6167	0,9666
	21				0,0000	0,0013	0,0214	0,1626	0,5775	0,9601
	22					0,0009	0,0155	0,1358	0,5387	0,9529
	23					0,0005	0,0111	0,1128	0,5005	0,9450
	24					0,0003	0,0080	0,0932	0,4634	0,9363
	25					0,0002	0,0057	0,0766	0,4275	0,9268
	26					0,0001	0,0040	0,0627	0,3931	0,9166
	27					0,0001	0,0028	0,0510	0,3602	0,9056
	28					0,0000	0,0020	0,0414	0,3290	0,8939
	29						0,0014	0,0334	0,2996	0,8815
	30						0,0010	0,0269	0,2721	0,8684
	31						0,0007	0,0216	0,2464	0,8546
	32						0,0005	0,0172	0,2225	0,8402
	33						0,0003	0,0137	0,2004	0,8253
	34						0,0002	0,0109	0,1800	0,8097
	35						0,0001	0,0086	0,1613	0,7937
	36						0,0001	0,0068	0,1442	0,7773
	37						0,0001	0,0054	0,1287	0,7604
	38						0,0000	0,0042	0,1145	0,7431
	39							0,0033	0,1018	0,7256
	40							0,0026	0,0902	0,7077
	41							0,0020	0,0798	0,6897
	42							0,0016	0,0705	0,6714
	43							0,0012	0,0621	0,6531
	44							0,0009	0,0547	0,6346
7	7	0,0001	0,0070	0,0624	0,2288	0,5000	0,7712	0,9376	0,9930	0,9999
	8	0,0000	0,0024	0,0315	0,1501	0,3953	0,6925	0,9067	0,9884	0,9998
	9		0,0008	0,0152	0,0950	0,3036	0,6098	0,8689	0,9819	0,9997
	10		0,0002	0,0071	0,0583	0,2272	0,5272	0,8247	0,9733	0,9995
	11		0,0001	0,0032	0,0348	0,1662	0,4478	0,7752	0,9623	0,9992
	12		0,0000	0,0014	0,0203	0,1189	0,3743	0,7217	0,9487	0,9988
	13			0,0006	0,0116	0,0835	0,3081	0,6655	0,9324	0,9983
	14			0,0003	0,0065	0,0577	0,2500	0,6080	0,9133	0,9976
	15			0,0001	0,0036	0,0392	0,2002	0,5505	0,8915	0,9967
	16			0,0000	0,0019	0,0262	0,1584	0,4942	0,8670	0,9956
	17				0,0010	0,0173	0,1240	0,4399	0,8402	0,9942
	18				0,0005	0,0113	0,0960	0,3886	0,8111	0,9925

β	α	t=0,1	t=0,2	t=0,3	t=0,4	t=0,5	t=0,6	t=0,7	t=0,8	t=0,9
7	19				0,0003	0,0073	0,0736	0,3407	0,7800	0,9905
	20				0,0001	0,0047	0,0559	0,2965	0,7474	0,9881
	21				0,0001	0,0030	0,0421	0,2563	0,7134	0,9853
	22				0,0000	0,0019	0,0315	0,2202	0,6784	0,9821
	23					0,0012	0,0233	0,1880	0,6429	0,9784
	24					0,0007	0,0172	0,1595	0,6070	0,9742
	25					0,0004	0,0126	0,1346	0,5711	0,9694
	26					0,0003	0,0091	0,1131	0,5355	0,9642
	27					0,0002	0,0066	0,0944	0,5004	0,9583
	28					0,0001	0,0048	0,0785	0,4661	0,9519
	29					0,0001	0,0034	0,0650	0,4328	0,9448
	30					0,0000	0,0024	0,0536	0,4007	0,9372
	31						0,0017	0,0440	0,3698	0,9289
	32						0,0012	0,0359	0,3404	0,9200
	33						0,0009	0,0293	0,3124	0,9106
	34						0,0006	0,0238	0,2859	0,9005
	35						0,0004	0,0192	0,2610	0,8898
	36						0,0003	0,0155	0,2376	0,8786
	37						0,0002	0,0125	0,2158	0,8667
	38						0,0001	0,0100	0,1956	0,8544
	39						0,0001	0,0080	0,1768	0,8415
	40						0,0001	0,0063	0,1595	0,8281
	41						0,0000	0,0050	0,1436	0,8143
	42							0,0040	0,1289	0,8000
	43							0,0032	0,1156	0,7853
8	8	0,0000	0,0042	0,0500	0,2131	0,5000	0,7869	0,9500	0,9958	1,0000
	9		0,0015	0,0257	0,1427	0,4018	0,7161	0,9256	0,9930	0,9999
	10		0,0005	0,0127	0,0919	0,3145	0,6405	0,8954	0,9891	0,9999
	11		0,0002	0,0061	0,0576	0,2403	0,5634	0,8593	0,9837	0,9998
	12		0,0000	0,0028	0,0352	0,1796	0,4878	0,8180	0,9767	0,9997
	13			0,0013	0,0210	0,1316	0,4159	0,7723	0,9679	0,9996
	14			0,0006	0,0123	0,0946	0,3495	0,7230	0,9569	0,9994
	15			0,0002	0,0070	0,0669	0,2898	0,6713	0,9439	0,9991
	16			0,0001	0,0040	0,0466	0,2373	0,6181	0,9285	0,9988
	17			0,0000	0,0022	0,0320	0,1919	0,5647	0,9108	0,9983
	18				0,0012	0,0216	0,1536	0,5118	0,8909	0,9977
	19				0,0007	0,0145	0,1216	0,4605	0,8687	0,9970
	20				0,0003	0,0096	0,0953	0,4113	0,8444	0,9961
	21				0,0002	0,0063	0,0740	0,3648	0,8182	0,9950
	22				0,0001	0,0041	0,0570	0,3214	0,7903	0,9938
	23				0,0000	0,0026	0,0435	0,2814	0,7608	0,9922
	24					0,0017	0,0330	0,2448	0,7300	0,9904
	25					0,0011	0,0248	0,2118	0,6982	0,9883
	26					0,0007	0,0186	0,1822	0,6657	0,9859
	27					0,0004	0,0138	0,1558	0,6326	0,9831
	28					0,0003	0,0102	0,1326	0,5993	0,9800
	29					0,0002	0,0075	0,1124	0,5660	0,9765
	30					0,0001	0,0054	0,0947	0,5330	0,9726
	31					0,0001	0,0040	0,0795	0,5003	0,9682
	32					0,0000	0,0029	0,0664	0,4683	0,9634
	33						0,0021	0,0553	0,4371	0,9581
	34						0,0015	0,0458	0,4069	0,9523
	35						0,0010	0,0378	0,3777	0,9461
	36						0,0007	0,0311	0,3497	0,9393
	37						0,0005	0,0255	0,3229	0,9321
	38						0,0004	0,0209	0,2975	0,9243
	39						0,0003	0,0170	0,2733	0,9160

β	α	t=0,1	t=0,2	t=0,3	t=0,4	t=0,5	t=0,6	t=0,7	t=0,8	t=0,9
8	40						0,0002	0,0138	0,2506	0,9072
	41						0,0001	0,0112	0,2292	0,8979
	42						0,0001	0,0090	0,2091	0,8881
9	9	0,0000	0,0026	0,0403	0,1989	0,5000	0,8011	0,9597	0,9974	1,0000
	10		0,0009	0,0210	0,1347	0,4073	0,7368	0,9404	0,9957	1,0000
	11		0,0003	0,0105	0,0885	0,3238	0,6675	0,9161	0,9933	1,0000
	12		0,0001	0,0051	0,0565	0,2517	0,5956	0,8867	0,9900	0,9999
	13		0,0000	0,0024	0,0352	0,1917	0,5237	0,8523	0,9856	0,9999
	14			0,0011	0,0215	0,1431	0,4540	0,8135	0,9799	0,9999
	15			0,0005	0,0128	0,1050	0,3884	0,7709	0,9727	0,9998
	16			0,0002	0,0075	0,0758	0,3279	0,7250	0,9638	0,9997
	17			0,0001	0,0043	0,0539	0,2735	0,6769	0,9532	0,9995
	18			0,0000	0,0025	0,0378	0,2255	0,6274	0,9408	0,9994
	19				0,0014	0,0261	0,1839	0,5773	0,9263	0,9991
	20				0,0008	0,0178	0,1485	0,5275	0,9100	0,9988
	21				0,0004	0,0121	0,1187	0,4787	0,8916	0,9984
	22				0,0002	0,0081	0,0940	0,4315	0,8713	0,9980
	23				0,0001	0,0053	0,0738	0,3865	0,8492	0,9974
	24				0,0001	0,0035	0,0575	0,3440	0,8254	0,9967
	25				0,0000	0,0023	0,0444	0,3043	0,8000	0,9959
	26					0,0015	0,0341	0,2677	0,7731	0,9949
	27					0,0009	0,0260	0,2341	0,7450	0,9937
	28					0,0006	0,0196	0,2037	0,7159	0,9923
	29					0,0004	0,0148	0,1763	0,6859	0,9907
	30					0,0002	0,0110	0,1518	0,6553	0,9889
	31					0,0001	0,0082	0,1301	0,6243	0,9869
	32					0,0001	0,0061	0,1110	0,5931	0,9345
	33					0,0001	0,0045	0,0943	0,5619	0,9819
	34					0,0000	0,0033	0,0798	0,5309	0,9789
	35						0,0024	0,0672	0,5003	0,9756
	36						0,0017	0,0564	0,4702	0,9720
	37						0,0012	0,0471	0,4407	0,9680
	38						0,0009	0,0392	0,4121	0,9636
	39						0,0006	0,0326	0,3843	0,9589
	40						0,0005	0,0269	0,3576	0,9537
	41						0,0003	0,0222	0,3319	0,9481
10	10	0,0000	0,0016	0,0326	0,1861	0,5000	0,8139	0,9674	0,9984	1,0000
	11		0,0006	0,0171	0,1275	0,4119	0,7553	0,9520	0,9974	1,0000
	12		0,0002	0,0087	0,0849	0,3318	0,6914	0,9324	0,9959	1,0000
	13		0,0001	0,0043	0,0551	0,2617	0,6244	0,9084	0,9939	1,0000
	14		0,0000	0,0021	0,0349	0,2024	0,5562	0,8799	0,9911	1,0000
	15			0,0010	0,0217	0,1537	0,4891	0,8472	0,9874	0,9999
	16			0,0005	0,0132	0,1148	0,4246	0,8106	0,9827	0,9999
	17			0,0002	0,0079	0,0843	0,3642	0,7705	0,9768	0,9999
	18			0,0001	0,0046	0,0610	0,3087	0,7276	0,9696	0,9998
	19			0,0000	0,0027	0,0436	0,2588	0,6825	0,9609	0,9998
	20				0,0015	0,0307	0,2147	0,6360	0,9507	0,9997
	21				0,0009	0,0214	0,1763	0,5888	0,9389	0,9995
	22				0,0005	0,0147	0,1434	0,5416	0,9254	0,9994
	23				0,0003	0,0100	0,1156	0,4951	0,9102	0,9992
	24				0,0001	0,0068	0,0923	0,4497	0,8932	0,9989
	25				0,0001	0,0045	0,0732	0,4061	0,8746	0,9986
	26				0,0000	0,0030	0,0575	0,3646	0,8543	0,9983
	27					0,0020	0,0449	0,3254	0,8324	0,9978
	28					0,0013	0,0348	0,2889	0,8091	0,9973
	29					0,0008	0,0268	0,2551	0,7845	0,9966

β	α	t=0,1	t=0,2	t=0,3	t=0,4	t=0,5	t=0,6	t=0,7	t=0,8	t=0,9
10	30					0,0005	0,0205	0,2241	0,7586	0,9958
	31					0,0003	0,0156	0,1959	0,7318	0,9949
	32					0,0002	0,0118	0,1705	0,7040	0,9939
	33					0,0001	0,0088	0,1476	0,6756	0,9927
	34					0,0001	0,0066	0,1272	0,6467	0,9913
	35					0,0001	0,0049	0,1092	0,6174	0,9897
	36					0,0000	0,0036	0,0934	0,5880	0,9880
	37						0,0027	0,0795	0,5585	0,9860
	38						0,0020	0,0674	0,5292	0,9837
	39						0,0014	0,0570	0,5002	0,9813
	40						0,0010	0,0480	0,4717	0,9785
11	11	0,0000	0,0010	0,0264	0,1744	0,5000	0,8256	0,9736	0,9990	1,0000
	12		0,0003	0,0140	0,1207	0,4159	0,7720	0,9613	0,9984	1,0000
	13		0,0001	0,0072	0,0813	0,3388	0,7129	0,9454	0,9975	1,0000
	14		0,0000	0,0036	0,0535	0,2706	0,6502	0,9258	0,9962	1,0000
	15			0,0018	0,0344	0,2122	0,5858	0,9022	0,9944	1,0000
	16			0,0009	0,0217	0,1635	0,5213	0,8747	0,9921	1,0000
	17			0,0004	0,0134	0,1239	0,4585	0,8434	0,9890	1,0000
	18			0,0002	0,0081	0,0925	0,3986	0,8087	0,9851	1,0000
	19			0,0001	0,0049	0,0680	0,3427	0,7708	0,9803	0,9999
	20			0,0000	0,0029	0,0494	0,2915	0,7304	0,9744	0,9999
	21				0,0017	0,0354	0,2454	0,6879	0,9673	0,9999
	22				0,0009	0,0251	0,2046	0,6440	0,9589	0,9998
	23				0,0005	0,0175	0,1690	0,5993	0,9492	0,9998
	24				0,0003	0,0122	0,1383	0,5545	0,9380	0,9997
	25				0,0002	0,0083	0,1123	0,5100	0,9253	0,9996
	26				0,0001	0,0057	0,0904	0,4653	0,9111	0,9994
	27				0,0000	0,0038	0,0722	0,4241	0,8954	0,9993
	28					0,0025	0,0572	0,3835	0,8781	0,9991
	29					0,0017	0,0450	0,3450	0,8594	0,9988
	30					0,0011	0,0352	0,3087	0,8392	0,9985
	31					0,0007	0,0274	0,2749	0,8177	0,9982
	32					0,0005	0,0211	0,2436	0,7950	0,9977
	33					0,0003	0,0162	0,2148	0,7711	0,9972
	34					0,0002	0,0124	0,1885	0,7462	0,9966
	35					0,0001	0,0094	0,1647	0,7205	0,9960
	36					0,0001	0,0071	0,1433	0,6940	0,9952
	37					0,0000	0,0053	0,1242	0,6669	0,9942
	38						0,0040	0,1071	0,6393	0,9932
	39						0,0030	0,0921	0,6115	0,9920
12	12	0,0000	0,0006	0,0214	0,1636	0,5000	0,8364	0,9786	0,9994	1,0000
	13		0,0002	0,0115	0,1143	0,4194	0,7870	0,9686	0,9990	1,0000
	14		0,0001	0,0060	0,0778	0,3450	0,7323	0,9558	0,9985	1,0000
	15		0,0000	0,0030	0,0518	0,2786	0,6737	0,9397	0,9977	1,0000
	16			0,0015	0,0337	0,2210	0,6127	0,9202	0,9965	1,0000
	17			0,0007	0,0215	0,1725	0,5510	0,8972	0,9950	1,0000
	18			0,0003	0,0135	0,1325	0,4900	0,8706	0,9931	1,0000
	19			0,0002	0,0083	0,1002	0,4311	0,8407	0,9905	1,0000
	20			0,0001	0,0050	0,0748	0,3752	0,8076	0,9873	1,0000
	21			0,0000	0,0030	0,0551	0,3233	0,7717	0,9833	1,0000
	22				0,0018	0,0401	0,2758	0,7334	0,9784	1,0000
	23				0,0010	0,0288	0,2331	0,6932	0,9726	0,9999
	24				0,0006	0,0205	0,1952	0,6516	0,9656	0,9999
	25				0,0003	0,0144	0,1620	0,6091	0,9576	0,9999
	26				0,0002	0,0100	0,1333	0,5663	0,9483	0,9998
	27				0,0001	0,0069	0,1089	0,5236	0,9377	0,9998

β	α	t=0,1	t=0,2	t=0,3	t=0,4	t=0,5	t=0,6	t=0,7	t=0,8	t=0,9
12	28				0,0001	0,0047	0,0882	0,4816	0,9258	0,9997
	29				0,0000	0,0032	0,0709	0,4406	0,9125	0,9996
	30					0,0022	0,0567	0,4010	0,8978	0,9995
	31					0,0014	0,0449	0,3632	0,8818	0,9994
	32					0,0010	0,0354	0,3273	0,8645	0,9992
	33					0,0006	0,0277	0,2936	0,8458	0,9990
	34					0,0004	0,0216	0,2620	0,8259	0,9988
	35					0,0003	0,0167	0,2328	0,8048	0,9985
	36					0,0002	0,0129	0,2060	0,7826	0,9982
	37					0,0001	0,0098	0,1814	0,7595	0,9978
	38					0,0001	0,0075	0,1592	0,7355	0,9973
13	13	0,0000	0,0004	0,0175	0,1538	0,5000	0,8462	0,9825	0,9996	1,0000
	14		0,0001	0,0094	0,1082	0,4225	0,8007	0,9745	0,9994	1,0000
	15		0,0000	0,0050	0,0743	0,3506	0,7499	0,9641	0,9990	1,0000
	16			0,0025	0,0499	0,2858	0,6950	0,9509	0,9985	1,0000
	17			0,0013	0,0329	0,2291	0,6374	0,9348	0,9978	1,0000
	18			0,0006	0,0212	0,1808	0,5785	0,9155	0,9969	1,0000
	19			0,0003	0,0135	0,1405	0,5195	0,8931	0,9956	1,0000
	20			0,0001	0,0084	0,1077	0,4618	0,8674	0,9939	1,0000
	21			0,0001	0,0052	0,0814	0,4064	0,8387	0,9918	1,0000
	22			0,0000	0,0031	0,0607	0,3542	0,8071	0,9891	1,0000
	23				0,0019	0,0448	0,3057	0,7729	0,9858	1,0000
	24				0,0011	0,0326	0,2615	0,7365	0,9818	1,0000
	25				0,0006	0,0235	0,2217	0,6983	0,9769	1,0000
	26				0,0004	0,0168	0,1864	0,6587	0,9712	1,0000
	27				0,0002	0,0119	0,1554	0,6182	0,9645	0,9999
	28				0,0001	0,0083	0,1285	0,5772	0,9568	0,9999
	29				0,0001	0,0058	0,1055	0,5362	0,9479	0,9999
	30				0,0000	0,0040	0,0860	0,4957	0,9379	0,9998
	31					0,0027	0,0695	0,4559	0,9267	0,9998
	32					0,0018	0,0559	0,4173	0,9142	0,9997
	33					0,0012	0,0446	0,3802	0,9005	0,9997
	34					0,0008	0,0354	0,3448	0,8856	0,9996
	35					0,0005	0,0279	0,3112	0,8694	0,9995
	36					0,0004	0,0219	0,2796	0,8521	0,9993
	37					0,0002	0,0171	0,2502	0,8336	0,9992
14	14	0,0000	0,0002	0,0143	0,1447	0,5000	0,8553	0,9857	0,9998	1,0000
	15		0,0001	0,0077	0,1025	0,4253	0,8132	0,9792	0,9996	1,0000
	16		0,0000	0,0041	0,0710	0,3555	0,7659	0,9707	0,9994	1,0000
	17			0,0021	0,0481	0,2923	0,7145	0,9599	0,9991	1,0000
	18			0,0011	0,0320	0,2366	0,6601	0,9466	0,9987	1,0000
	19			0,0005	0,0209	0,1885	0,6039	0,9306	0,9980	1,0000
	20			0,0003	0,0134	0,1481	0,5470	0,9116	0,9972	1,0000
	21			0,0001	0,0085	0,1147	0,4908	0,8897	0,9961	1,0000
	22			0,0001	0,0053	0,0877	0,4361	0,8650	0,9947	1,0000
	23			0,0000	0,0032	0,0662	0,3840	0,8373	0,9930	1,0000
	24				0,0020	0,0494	0,3350	0,8071	0,9907	1,0000
	25				0,0012	0,0365	0,2897	0,7745	0,9880	1,0000
	26				0,0007	0,0266	0,2484	0,7397	0,9846	1,0000
	27				0,0004	0,0192	0,2112	0,7032	0,9806	1,0000
	28				0,0002	0,0138	0,1781	0,6654	0,9758	1,0000
	29				0,0001	0,0098	0,1491	0,6267	0,9702	1,0000
	30				0,0001	0,0069	0,1238	0,5874	0,9638	1,0000
	31				0,0000	0,0048	0,1021	0,5470	0,9564	0,9999
	32					0,0033	0,0836	0,5088	0,9479	0,9999
	33					0,0023	0,0680	0,4702	0,9385	0,9999

β	α	t=0,1	t=0,2	t=0,3	t=0,4	t=0,5	t=0,6	t=0,7	t=0,8	t=0,9
14	34					0,0015	0,0550	0,4326	0,9279	0,9999
	35					0,0010	0,0442	0,3961	0,9162	0,9998
	36					0,0007	0,0353	0,3612	0,9034	0,9998
15	15		0,0001	0,0117	0,1362	0,5000	0,8638	0,9883	0,9999	1,0000
	16		0,0001	0,0064	0,0971	0,4278	0,8246	0,9831	0,9998	1,0000
	17		0,0000	0,0034	0,0677	0,3601	0,7806	0,9761	0,9996	1,0000
	18			0,0018	0,0463	0,2983	0,7324	0,9673	0,9994	1,0000
	19			0,0009	0,0310	0,2434	0,6810	0,9563	0,9992	1,0000
	20			0,0005	0,0205	0,1958	0,6274	0,9429	0,9988	1,0000
	21			0,0002	0,0133	0,1553	0,5728	0,9269	0,9982	1,0000
	22			0,0001	0,0085	0,1215	0,5181	0,9083	0,9975	1,0000
	23			0,0001	0,0053	0,0939	0,4645	0,8870	0,9966	1,0000
	24			0,0000	0,0033	0,0717	0,4127	0,8631	0,9954	1,0000
	25				0,0020	0,0541	0,3635	0,8365	0,9940	1,0000
	26				0,0012	0,0403	0,3174	0,8074	0,9921	1,0000
	27				0,0007	0,0298	0,2749	0,7762	0,9898	1,0000
	28				0,0004	0,0218	0,2362	0,7430	0,9870	1,0000
	29				0,0003	0,0158	0,2013	0,7081	0,9836	1,0000
	30				0,0001	0,0113	0,1703	0,6719	0,9797	1,0000
	31				0,0001	0,0080	0,1430	0,6347	0,9750	1,0000
	32				0,0000	0,0057	0,1193	0,5969	0,9696	1,0000
	33					0,0040	0,0988	0,5589	0,9634	1,0000
	34					0,0028	0,0813	0,5210	0,9563	1,0000
	35					0,0019	0,0664	0,4835	0,9483	0,9999
16	16		0,0001	0,0095	0,1284	0,5000	0,8716	0,9905	0,9999	1,0000
	17		0,0000	0,0052	0,0920	0,4300	0,8352	0,9862	0,9999	1,0000
	18			0,0028	0,0645	0,3642	0,7941	0,9805	0,9998	1,0000
	19			0,0015	0,0444	0,3038	0,7488	0,9732	0,9997	1,0000
	20			0,0008	0,0300	0,2498	0,7003	0,9641	0,9995	1,0000
	21			0,0004	0,0200	0,2025	0,6493	0,9530	0,9992	1,0000
	22			0,0002	0,0131	0,1620	0,5968	0,9396	0,9989	1,0000
	23			0,0001	0,0084	0,1279	0,5439	0,9238	0,9984	1,0000
	24			0,0000	0,0053	0,0998	0,4914	0,9056	0,9978	1,0000
	25				0,0034	0,0769	0,4402	0,8849	0,9971	1,0000
	26				0,0021	0,0586	0,3911	0,8616	0,9961	1,0000
	27				0,0013	0,0442	0,3446	0,8360	0,9948	1,0000
	28				0,0008	0,0330	0,3013	0,8081	0,9932	1,0000
	29				0,0005	0,0244	0,2613	0,7781	0,9913	1,0000
	30				0,0003	0,0178	0,2249	0,7462	0,9890	1,0000
	31				0,0002	0,0129	0,1922	0,7128	0,9862	1,0000
	32				0,0001	0,0093	0,1630	0,6780	0,9829	1,0000
	33				0,0001	0,0066	0,1373	0,6423	0,9790	1,0000
	34				0,0000	0,0047	0,1149	0,6059	0,9744	1,0000
17	17		0,0001	0,0078	0,1211	0,5000	0,8789	0,9922	0,9999	1,0000
	18		0,0000	0,0043	0,0872	0,4321	0,8450	0,9887	0,9999	1,0000
	19			0,0023	0,0615	0,3679	0,8065	0,9840	0,9999	1,0000
	20			0,0012	0,0426	0,3089	0,7640	0,9781	0,9998	1,0000
	21			0,0006	0,0290	0,2557	0,7181	0,9705	0,9997	1,0000
	22			0,0003	0,0195	0,2088	0,6696	0,9612	0,9995	1,0000
	23			0,0002	0,0128	0,1684	0,6193	0,9500	0,9993	1,0000
	24			0,0001	0,0083	0,1341	0,5681	0,9367	0,9990	1,0000
	25			0,0000	0,0053	0,1055	0,5170	0,9211	0,9986	1,0000
	26				0,0034	0,0821	0,4666	0,9033	0,9981	1,0000
	27				0,0021	0,0631	0,4178	0,8831	0,9974	1,0000
	28				0,0013	0,0481	0,3712	0,8606	0,9966	1,0000

β	α	t=0,1	t=0,2	t=0,3	t=0,4	t=0,5	t=0,6	t=0,7	t=0,8	t=0,9
17	29				0,0008	0,0362	0,3272	0,8358	0,9956	1,0000
	30				0,0005	0,0270	0,2863	0,8090	0,9942	1,0000
	31				0,0003	0,0200	0,2486	0,7801	0,9926	1,0000
	32				0,0002	0,0147	0,2144	0,7495	0,9907	1,0000
	33				0,0001	0,0106	0,1836	0,7173	0,9883	1,0000
18	18		0,0000	0,0064	0,1134	0,5000	0,8857	0,9936	1,0000	1,0000
	19			0,0036	0,0826	0,4340	0,8540	0,9907	0,9999	1,0000
	20			0,0019	0,0586	0,3714	0,8180	0,9869	0,9999	1,0000
	21			0,0010	0,0409	0,3136	0,7781	0,9820	0,9999	1,0000
	22			0,0005	0,0280	0,2612	0,7347	0,9758	0,9998	1,0000
	23			0,0003	0,0189	0,2148	0,6885	0,9680	0,9997	1,0000
	24			0,0001	0,0126	0,1744	0,6404	0,9586	0,9996	1,0000
	25			0,0001	0,0082	0,1400	0,5910	0,9474	0,9994	1,0000
	26			0,0000	0,0053	0,1110	0,5413	0,9342	0,9991	1,0000
	27				0,0034	0,0871	0,4919	0,9188	0,9988	1,0000
	28				0,0021	0,0676	0,4436	0,9014	0,9983	1,0000
	29				0,0013	0,0519	0,3971	0,8817	0,9978	1,0000
	30				0,0008	0,0395	0,3528	0,8599	0,9971	1,0000
	31				0,0005	0,0297	0,3111	0,8359	0,9962	1,0000
	32				0,0003	0,0222	0,2724	0,8100	0,9951	1.0000
19	19		0,0000	0,0053	0,1080	0,5000	0,8920	0,9947	1,0000	1,0000
	20			0,0029	0,0784	0,4357	0,8624	0,9924	1,0000	1,0000
	21			0,0016	0,0559	0,3746	0,8287	0,9893	0,9999	1,0000
	22			0,0009	0,0392	0,3179	0,7911	0,9852	0,9999	1,0000
	23			0,0004	0,0270	0,2664	0,7501	0,9801	0,9999	1,0000
	24			0,0002	0,0183	0,2204	0,7062	0,9736	0,9998	1,0000
	25			0,0001	0,0123	0,1802	0,6601	0,9658	0,9997	1,0000
	26			0,0001	0,0081	0,1456	0,6126	0,9563	0,9996	1,0000
	27			0,0000	0,0053	0,1163	0,5643	0,9451	0,9994	1,0000
	28				0,0034	0,0920	0,5160	0,9319	0,9992	1,0000
	29				0,0022	0,0719	0,4684	0,9169	0,9989	1,0000
	30				0,0014	0,0557	0,4222	0,8998	0,9986	1,0000
	31				0,0008	0,0427	0,3777	0,8806	0,9981	1.0000
20	20		0,0000	0,0043	0,1021	0,5000	0,8979	0,9957	1,0000	1,0000
	21			0,0024	0,0744	0,4373	0,8702	0,9937	1,0000	1,0000
	22			0,0013	0,0532	0,3776	0,8386	0,9912	1,0000	1,0000
	23			0,0007	0,0375	0,3220	0,8032	0,9879	0,9999	1,0000
	24			0,0004	0,0260	0,2712	0,7644	0,9836	0,9999	1,0000
	25			0,0002	0,0178	0,2257	0,7227	0,9782	0,9999	1,0000
	26			0,0001	0,0120	0,1856	0,6786	0,9717	0,9998	1,0000
	27			0,0001	0,0080	0,1510	0,6329	0,9637	0,9997	1,0000
	28			0,0000	0,0052	0,1215	0,5861	0,9542	0,9996	1,0000
	29				0,0034	0,0967	0,5391	0,9430	0,9995	1,0000
	30				0,0022	0,0762	0,4923	0,9300	0,9993	1,0000
21	21		0,0000	0,0036	0,0965	0,5000	0,9035	0,9964	1,0000	1,0000
	22			0,0020	0,0706	0,4388	0,8775	0,9949	1,0000	1,1000
	23			0,0011	0,0507	0,3804	0,8478	0,9928	1,0000	1,0000
	24			0,0006	0,0359	0,3258	0,8144	0,9900	1,0000	1,0000
	25			0,0003	0,0250	0,2757	0,7777	0,9865	0,9999	1,0000
	26			0,0002	0,0172	0,2307	0,7381	0,9820	0,9999	1,0000
	27			0,0001	0,0117	0,1908	0,6960	0,9765	0,9999	1,0000
	28			0,0000	0,0078	0,1562	0,6521	0,9698	0,9998	1,0000
	29				0,0051	0,1264	0,6069	0,9618	0,9998	1,0000

β	α	$t=0{,}1$	$t=0{,}2$	$t=0{,}3$	$t=0{,}4$	$t=0{,}5$	$t=0{,}6$	$t=0{,}7$	$t=0{,}8$	$t=0{,}9$
22	22		0,0000	0,0029	0,0913	0,5000	0,9087	0,9971	1,0000	1,0000
	23			0,0017	0,0670	0,4402	0,8843	0,9958	1,0000	1,0000
	24			0,0009	0,0483	0,3830	0,8564	0,9940	1,0000	1,0000
	25			0,0005	0,0343	0,3294	0,8249	0,9918	1,0000	1,0000
	26			0,0003	0,0241	0,2800	0,7902	0,9888	1,0000	1,0000
	27			0,0001	0,0166	0,2354	0,7525	0,9852	1,0000	1,0000
	28			0,0001	0,0113	0,1958	0,7123	0,9805	0,9999	1,0000
23	23		0,0000	0,0024	0,0865	0,5000	0,9135	0,9976	1,0000	1,0000
	24			0,0014	0,0636	0,4415	0,8907	0,9965	1,0000	1,0000
	25			0,0008	0,0460	0,3854	0,8644	0,9951	1,0000	1,0000
	26			0,0004	0,0328	0,3327	0,8347	0,9932	1,0000	1,0000
	27			0,0002	0,0231	0,2841	0,8018	0,9908	1,0000	1,0000
24	24		0,0000	0,0020	0,0819	0,5000	0,9181	0,9980	1,0000	1,0000
	25			0,0011	0,0604	0,4427	0,8966	0,9971	1,0000	1,0000
	26			0,0006	0,0439	0,3877	0,8718	0,9960	1,0000	1,0000
25	25		0,0000	0,0017	0,0776	0,5000	0,9224	0,9983	1,0000	1,0000

2.21. Tabela 2

ORDINATE I POVRŠINE NORMALNE KRIVE

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad\qquad \theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

x	$y(x)$	$\theta(x)$	x	$y(x)$	$\theta(x)$	x	$y(x)$	$\theta(x)$
0,00	0,3989	0,5000	0,23	0,3885	0,5910	0,46	0,3589	0,6772
0,01	0,3989	0,5040	0,24	0,3876	0,5948	0,47	0,3572	0,6808
0,02	0,3989	0,5080	0,25	0,3867	0,5987	0,48	0,3555	0,6844
0,03	0,3988	0,5120	0,26	0,3857	0,6026	0,49	0,3538	0,6879
0,04	0,3986	0,5160	0,27	0,3847	0,6064	0,50	0,3521	0,6915
0,05	0,3984	0,5199	0,28	0,3836	0,6103	0,51	0,3503	0,6950
0,06	0,3982	0,5239	0,29	0,3825	0,6141	0,52	0,3485	0,6985
0,07	0,3980	0,5279	0,30	0,3814	0,6179	0,53	0,3467	0,7019
0,08	0,3977	0,5319	0,31	0,3802	0,6217	0,54	0,3448	0,7054
0,09	0,3973	0,5359	0,32	0,3790	0,6255	0,55	0,3429	0,7088
0,10	0,3970	0,5398	0,33	0,3778	0,6293	0,56	0,3410	0,7123
0,11	0,3965	0,5438	0,34	0,3765	0,6331	0,57	0,3391	0,7157
0,12	0,3961	0,5478	0,35	0,3752	0,6368	0,58	0,3372	0,7190
0,13	0,3956	0,5517	0,36	0,3739	0,6406	0,59	0,3352	0,7224
0,14	0,3951	0,5557	0,37	0,3725	0,6443	0,60	0,3332	0,7257
0,15	0,3945	0,5596	0,38	0,3712	0,6480	0,61	0,3312	0,7291
0,16	0,3939	0,5636	0,39	0,3697	0,6517	0,62	0,3292	0,7324
0,17	0,3932	0,5675	0,40	0,3683	0,6554	0,63	0,3271	0,7357
0,18	0,3925	0,5714	0,41	0,3668	0,6591	0,64	0,3251	0,7389
0,19	0,3918	0,5753	0,42	0,3653	0,6628	0,65	0,3230	0,7422
0,20	0,3910	0,5793	0,43	0,3637	0,6664	0,66	0,3209	0,7454
0,21	0,3902	0,5832	0,44	0,3621	0,6700	0,67	0,3187	0,7486
0,22	0,3894	0,5871	0,45	0,3605	0,6736	0,68	0,3166	0,7517

x	$y(x)$	$\theta(x)$	x	$y(x)$	$\theta(x)$	x	$y(x)$	$\theta(x)$
0,69	0,3144	0,7549	1,27	0,1781	0,8980	1,85	0,0721	0,9678
0,70	0,3123	0,7580	1,28	0,1758	0,8997	1,86	0,0707	0,9686
0,71	0,3101	0,7611	1,29	0,1736	0,9015	1,87	0,0694	0,9693
0,72	0,3079	0,7642	1,30	0,1714	0,9032	1,88	0,0681	0,9699
0,73	0,3056	0,7673	1,31	0,1691	0,9049	1,89	0,0669	0,9706
0,74	0,3034	0,7704	1,32	0,1669	0,9066	1,90	0,0656	0,9713
0,75	0,3011	0,7738	1,33	0,1647	0,9082	1,91	0,0644	0,9719
0,76	0,2989	0,7764	1,34	0,1626	0,9099	1,92	0,0632	0,9726
0,77	0,2966	0,7794	1,35	0,1604	0,9115	1,93	0,0620	0,9732
0,78	0,2943	0,7823	1,36	0,1582	0,9131	1,94	0,0608	0,9738
0,79	0,2920	0,7852	1,37	0,1561	0,9147	1,95	0,0596	0,9744
0,80	0,2897	0,7881	1,38	0,1539	0,9162	1,96	0,0584	0,9750
0,81	0,2874	0,7910	1,39	0,1518	0,9177	1,97	0,0573	0,9756
0,82	0,2850	0,7939	1,40	0,1497	0,9192	1,98	0,0562	0,9761
0,83	0,2827	0,7967	1,41	0,1476	0,9207	1,99	0,0551	0,9767
0,84	0,2803	0,7995	1,42	0,1456	0,9222	2,00	0,0540	0,9772
0,85	0,2780	0,8023	1,43	0,1435	0,9236	2,01	0,0529	0,9778
0,86	0,2756	0,8051	1,44	0,1415	0,9251	2,02	0,0519	0,9783
0,87	0,2732	0,8078	1,45	0,1394	0,9265	2,03	0,0508	0,9788
0,88	0,2709	0,8106	1,46	0,1374	0,9279	2,04	0,0498	0,9793
0,89	0,2685	0,8133	1,47	0,1354	0,9292	2,05	0,0488	0,9798
0,90	0,2661	0,8159	1,48	0,1334	0,9306	2,06	0,0478	0,9803
0,91	0,2637	0,8186	1,49	0,1315	0,9319	2,07	0,0468	0,9808
0,92	0,2613	0,8212	1,50	0,1295	0,9332	2,08	0,0459	0,9812
0,93	0,2589	0,8238	1,51	0,1276	0,9345	2,09	0,0449	0,9817
0,94	0,2565	0,8264	1,52	0,1257	0,9357	2,10	0,0440	0,9821
0,95	0,2541	0,8289	1,53	0,1238	0,9370	2,11	0,0431	0,9826
0,96	0,2516	0,8315	1,54	0,1219	0,9382	2,12	0,0422	0,9830
0,97	0,2492	0,8340	1,55	0,1200	0,9394	2,13	0,0413	0,9834
0,98	0,2468	0,8365	1,56	0,1182	0,9406	2,14	0,0404	0,9838
0,99	0,2444	0,8389	1,57	0,1163	0,9418	2,15	0,0396	0,9842
1,00	0,2420	0,8413	1,58	0,1145	0,9429	2,16	0,0387	0,9846
1,01	0,2396	0,8438	1,59	0,1127	0,9441	2,17	0,0379	0,9850
1,02	0,2371	0,8461	1,60	0,1109	0,9452	2,18	0,0371	0,9854
1,03	0,2347	0,8485	1,61	0,1092	0,9463	2,19	0,0363	0,9857
1,04	0,2323	0,8508	1,62	0,1074	0,9474	2,20	0,0355	0,9861
1,05	0,2299	0,8531	1,63	0,1057	0,9484	2,21	0,0347	0,9864
1,06	0,2275	0,8554	1,64	0,1040	0,9495	2,22	0,0339	0,9868
1,07	0,2251	0,8577	1,65	0,1023	0,9505	2,23	0,0332	0,9871
1,08	0,2227	0,8599	1,66	0,1006	0,9515	2,24	0,0325	0,9875
1,09	0,2203	0,8621	1,67	0,0989	0,9525	2,25	0,0317	0,9878
1,10	0,2179	0,8643	1,68	0,0973	0,9535	2,26	0,0310	0,9881
1,11	0,2155	0,8665	1,69	0,0957	0,9545	2,27	0,0303	0,9884
1,12	0,2131	0,8686	1,70	0,0940	0,9554	2,28	0,0297	0,9887
1,13	0,2107	0,8708	1,71	0,0925	0,9564	2,29	0,0290	0,9890
1,14	0,2083	0,8729	1,72	0,0909	0,9573	2,30	0,0283	0,9893
1,15	0,2059	0,8749	1,73	0,0893	0,9582	2,31	0,0277	0,9896
1,16	0,2036	0,8770	1,74	0,0878	0,9591	2,32	0,0270	0,9898
1,17	0,2012	0,8790	1,75	0,0863	0,9599	2,33	0,0264	0,9901
1,18	0,1989	0,8810	1,76	0,0848	0,9608	2,34	0,0258	0,9904
1,19	0,1965	0,8830	1,77	0,0833	0,9616	2,35	0,0252	0,9906
1,20	0,1942	0,8849	1,78	0,0818	0,9625	2,36	0,0246	0,9909
1,21	0,1919	0,8869	1,79	0,0804	0,9633	2,37	0,0241	0,9911
1,22	0,1895	0,8888	1,80	0,0790	0,9641	2,38	0,0235	0,9913
1,23	0,1872	0,8907	1,81	0,0775	0,9649	2,39	0,0229	0,9916
1,24	0,1849	0,8925	1,82	0,0761	0,9656	2,40	0,0224	0,9918
1,25	0,1826	0,8944	1,83	0,0748	0,9664	2,41	0,0219	0,9920
1,26	0,1804	0,8962	1,84	0,0734	0,9671	2,42	0,0213	0,9922

x	$y(x)$	$\theta(x)$	x	$y(x)$	$\theta(x)$	x	$y(x)$	$\theta(x)$
2,43	0,0208	0,9925	2,65	0,0119	0,99598	2,87	0,0065	0,99795
2,44	0,0203	0,9927	2,66	0,0116	0,99609	2,88	0,0063	0,99801
2,45	0,0198	0,9929	2,67	0,0113	0,99621	2,89	0,0061	0,99807
2,46	0,0194	0,9931	2,68	0,0110	0,99632	2,90	0,0060	0,99813
2,47	0,0189	0,9932	2,69	0,0107	0,99643	2,91	0,0058	0,99819
2,48	0,0184	0,9934	2,70	0,0104	0,99653	2,92	0,0056	0,99825
2,49	0,0180	0,9936	2,71	0,0101	0,99664	2,93	0,0055	0,99831
2,50	0,0175	0,99379	2,72	0,0099	0,99674	2,94	0,0053	0,99836
2,51	0,0171	0,99396	2,73	0,0096	0,99683	2,95	0,0051	0,99841
2,52	0,0167	0,99413	2,74	0,0093	0,99693	2,96	0,0050	0,99846
2,53	0,0163	0,99430	2,75	0,0091	0,99702	2,97	0,0048	0,99851
2,54	0,0158	0,99446	2,76	0,0088	0,99711	2,98	0,0047	0,99856
2,55	0,0154	0,99461	2,77	0,0086	0,99720	2,99	0,0046	0,99861
2,56	0,0151	0,99477	2,78	0,0084	0,99728	3,00	0,0044	0,99865
2,57	0,0147	0,99492	2,79	0,0081	0,99736	3,01	0,0033	0,99869
2,58	0,0143	0,99506	2,80	0,0079	0,99744	3,02	0,0024	0,99874
2,59	0,0139	0,99520	2,81	0,0077	0,99752	3,03	0,0017	0,99878
2,60	0,0136	0,99534	2,82	0,0075	0,99760	3,04	0,0012	0,99882
2,61	0,0132	0,99547	2,83	0,0073	0,99767	3,05	0,0009	0,99886
2,62	0,0129	0,99560	2,84	0,0071	0,99774	3,06	0,0006	0,99889
2,63	0,0126	0,99573	2,85	0,0069	0,99781	3,07	0,0004	0,99893
2,64	0,0122	0,99585	2,86	0,0067	0,99788	3,08	0,0003	0,99897
						3,09	0,0002	0,99900

3. VEROVATNOĆA UZROKA

3.1. Bayes-ova formula. — Posmatrajmo događaj A koji se može ostvariti pod uticajem više različitih uzroka. Označimo sa $C_1, C_2, \ldots, C_r$ događaje koji mogu izazvati ostvarenje događaja A i pretpostavimo da su međusobno inkompatibilni. Neka se ostvario događaj A i postavlja se zadatak da se odredi verovatnoća P_i da se događaj A ostvario pod uticajem uzroka C_i. Ova se verovatnoća

$$P_i = \Pr\{C_i \mid A\}$$

naziva *verovatnoćom a posteriori*, dok se obična verovatnoća

$$q_i = \Pr\{C_i\}$$

naziva *verovatnoćom a priori*. Najzad označimo sa

$$p_i = \Pr\{A \mid C_i\},$$

tj. verovatnoću da će uzrok C_i izazvati ostvarenje događaja A. Na osnovu aksiome složene verovatnoće je

$$\Pr\{C_i A\} = \Pr\{C_i\} \Pr\{A \mid C_i\} = q_i p_i$$

a sabiranjem dobijamo

$$\sum_{i=1}^{r} \Pr\{C_i A\} = \Pr\{A\}$$

tako da je

$$\Pr\{A\} = \sum_{i=1}^{r} q_i p_i .$$

S druge strane, imamo

$$\Pr\{C_i A_i\} = \Pr\{A\} \cdot \Pr\{C_i \mid A\},$$

odnosno

$$q_i p_i = \left(\sum_{i=1}^{r} q_i p_i\right) P_i$$

pa je tražena verovatnoća

(3.1.1) $$P_i = \frac{q_i p_i}{\sum_{i=1}^{r} q_i p_i} .$$

Ovo je poznata *Bayes-ova formula* za određivanje verovatnoće uzroka. Thomas Bayes je prvi rešio gornji problem ali rešenje nije hteo da objavi, pošto mu je bilo sumnjivo. Rešenje je objavljeno tek posle njegove smrti (1763).

3.2. Verovatnoća budućih događaja. — Zadržavajući iste postavke problema 3.1 kolika je verovatnoća da će se ostvariti događaj B pošto se ostvario događaj A? Kako se B može smatrati kao budući događaj u odnosnu na A, tražena verovatnoća naziva se *verovatnoća budućeg događaja*.

Ostvarenje događaja A potiče od jednog i samo jednog od uzroka C_i ($i = 1, 2, \ldots, r$). To isto važi i za događaj B. Zato je

$$\Pr\{B|A\} = \sum_{i=1}^{r} \Pr\{BC_i|A\},$$

ili, ako koristimo aksiomu složene verovatnoće,

$$\Pr\{B|A\} = \sum_{i=1}^{r} \Pr\{C_i|A\} \Pr\{B|AC_i\}.$$

Označavajući sa

$$\omega_i = \Pr\{B|AC_i\}$$

i koristeći obrazac (3.1.1) dobijamo traženu verovatnoću

$$\Pr\{B|A\} = \frac{\sum_{i=1}^{r} \omega_i q_i p_i}{\sum_{i=1}^{r} q_i p_i}. \tag{3.2.1}$$

U slučaju nezavisnosti

$$\Pr\{B|AC_i\} = \Pr\{B|C_i\} = \omega_i',$$

obrazac (3.2.1) postaje

$$\Pr\{B|A\} = \frac{\sum_{i=1}^{r} \omega_i' q_i p_i}{\sum_{i=1}^{r} q_i p_i}. \tag{3.2.2}$$

3.3. Granice poverenja. — Pretpostavimo da nam je prosta verovatnoća p kod ponovljenih opita nepoznata ali da znamo da može imati jednu od sledećih r vrednosti

$$\frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \ldots, \frac{r-1}{r}, 1$$

i pretpostavimo da svaka od ovih vrednosti ima uniformnu verovatnoću

$$q_i = \frac{1}{r}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Kolika je verovatnoća da se prava vrednost proste verovatnoće p nalazi u intervalu $\left(\frac{\alpha}{r}, \frac{\beta}{r}\right)$ gde je $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant r$, odnosno koliko je

$$\Pr\left\{\frac{\alpha}{r} \leqslant p \leqslant \frac{\beta}{r}\right\}$$

ako je u n ponovljenih opita eksperimentalna verovatnoća $\frac{m}{n}$?

Usvajajući uzrok C_i, tj. da je $p=\frac{i}{r}$, uslovna verovatnoća događaja A biće

$$p_i=\binom{n}{m}\left(\frac{i}{r}\right)^m\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n-m}$$

a verovatnoća *a posteriori* da će u n ponovljenih opita eksperimentalna verovatnoća biti $\frac{m}{n}$ uz pretpostavku $p=\frac{i}{r}$ biće po Bayes-ovoj formuli

$$\mathrm{P}_i=\frac{\frac{1}{r}\binom{n}{m}\left(\frac{i}{r}\right)^m\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{r}\binom{n}{m}\left(\frac{i}{r}\right)^m\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n-m}},$$

tj.

$$\mathrm{P}_i=\frac{\left(\frac{i}{r}\right)^m\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{r}\left(\frac{i}{r}\right)^m\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n-m}} \tag{3.3.1}$$

Ako sa a označimo prvi ceo broj veći od α a sa b prvi ceo broj manji od β, tražena verovatnoća biće

$$\mathrm{P}=\sum_{i=a}^{b}\mathrm{P}_i,$$

tj.

$$\mathrm{P}=\frac{\sum\limits_{i=a}^{b}\left(\frac{i}{r}\right)^m\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{r}\left(\frac{i}{r}\right)^m\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n-m}} \tag{3.3.2}$$

Najzad, ako sa diskretnog slučaja pređemo na neprekidan, tj. ako pustimo da $r\to\infty$, verovatnoća $Pr.\{\alpha_1\leqslant p\leqslant\alpha_2\}$ težiće ka izrazu

$$\frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}x^m(1-x)^{n-m}\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}\,dx},$$

tj.

$$Pr.\{\alpha_1\leqslant p\leqslant\alpha_2\}=I_{\alpha_2}(m+1,n-m+1)-I_{\alpha_1}(m+1,n-m+1). \tag{3.3.3}$$

Obrazac (3.3.3) pretstavlja *verovatnoću a posteriori* da će prosta verovatnoća p ležati u intervalu (α_1,α_2), pod uslovom da je p moglo da ima ma koju vrednost između 0 i 1 i da je $(\alpha_2-\alpha_1)$ verovatnoća *a priori* da p leži između α_1 i α_2, a na osnovu činjenice da je eksperimentalna verovatnoća bila $\frac{m}{n}$ posle n ponovljenih opita.

Verovatnoća da je prava vrednost proste verovatnoće manja od neke vrednosti α ($\alpha \leqslant 1$) je

$$\Pr\{p \leqslant \alpha\} = I_\alpha(m+1, n-m+1).$$

Neki put je moguće da unapred iskonstruišemo pravu vrednost proste verovatnoće p. Tada možemo da testiramo preko ponovljenih opita ispravnost tako iskonstruisane vrednosti za p. Neka je ε verovatnoća da p leži izvan intervala (α_1, α_2), tj.

$$\Pr\{\alpha_1 \leqslant p \leqslant \alpha_2\} = 1 - \varepsilon .$$

Ako smo ponovili opit n puta, pri čemu je eksperimentalna verovatnoća ispala $\frac{m}{n}$, onda za proizvoljno izabranu vrednost ε možemo da odredimo granice α_1 i α_2, tako da bude

$$\Pr\{p \leqslant \alpha_i\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad i = 1, 2 .$$

Te vrednosti neposredno izračunavamo preko Tabele 1 za nepotpuni količnik B-funkcije. Za $\varepsilon = 0{,}01$ rezonovaćemo da se samo u jednom od sto slučajeva može desiti da je prava vrednost proste verovatnoće p izvan intervala (α_1, α_2). Ukoliko sada iskonstruisana prosta verovatnoća p pada u interval (α_1, α_2) kazaćemo da rezultati eksperimenata ne protivureče hipotezu po kojoj smo iskonstruisali verovatnoću p. Odabiranje broja ε, koji nazivamo *koeficijentom rizika*, subjektivne je prirode. Zato tako dobijene granice α_1 i α_2 nazivamo *granicama poverenja* a interval (α_1, α_2) *intervalom sigurnosti*. Napomenimo da je teško održiva pretpostavka da je $(\alpha_2 - \alpha_1)$ verovatnoća a priori da p leži u intervalu (α_1, α_2) i da je u Teoriji ocene parametara osnovnih skupova odavno odbačena primena Bayes-ove formule.

3.4. Primeri

3.4.1. Neka svaka od 11 urni $U_0, U_1, \ldots, U_{10}$ sadrži po 10 kuglica. Urna U_i sadrži pri tome i belih i $(10-i)$ crnih kuglica. Na slučaj uzmemo jednu urnu i izvučemo iz nje jednu kuglicu. Konstatujemo da je bela. Kolika je verovatnoća da smo je izvukli iz urne U_i?

Pretpostavimo da sve urne imaju istu šansu da budu izvučene. Tada je verovatnoća *a priori*

$$q_i = \Pr\{U_i\} = q_0 = q_1 = \cdots = q_{10} = \frac{1}{11} .$$

Verovatnoća da će izvučena kuglica iz poznate urne biti bela je

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{1}{10}, \quad p_2 = \frac{2}{10}, \ldots, \quad p_{10} = 1 .$$

Koristeći Bayes-ovu formulu dobijamo neposredno verovatnoću *a posteriori*

$$P_i = \Pr\{U_i | A\} = \frac{\frac{1}{11}\cdot\frac{i}{10}}{\frac{1}{11}\cdot 0 + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{11}\cdot 1} =$$

$$= \frac{i}{1+2+\cdots+10} = \frac{i}{55} .$$

3.4.2. Imamo tri kategorije zgrada A, B, C. Kategorija A sadrži a zgrada, kategorija B sadrži b zgrada a kategorija C sadrži c zgrada. Neka su α, β i γ verovatnoće da će izgoreti zgrada kategorije resp. A, B i C u toku jedne godine. Do kraja godine izgori jedna zgrada. Kolika je verovatnoća da je pripadala kategoriji A, odnosno B, odnosno C?

Verovatnoće *a priori* su

$$q_A = \frac{a}{a+b+c}, \quad q_B = \frac{b}{a+b+c}, \quad q_C = \frac{c}{a+b+c}$$

Zatim je

$$p_A = \alpha, \quad p_B = \beta, \quad p_C = \gamma.$$

Zato je

$$P_A = \frac{a\alpha}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \quad P_B = \frac{b\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \quad P_C = \frac{c\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

Možemo kazati da ima manje šanse da izgorela kuća pripada kategoriji sa manjom verovatnoćom *a posteriori*.

3.4.3. Pretpostavimo da su u primeru (3.4.2) verovatnoće α, β i γ nezavisne međusobno. Neka je do kraja godine jedna i samo jedna zgrada izgorela. Kolika je verovatnoća da ta kuća pripada kategoriji A?

Verovatnoća da nijedna kuća neće izgoreti je

$$q_0 = (1-\alpha)^a (1-\beta)^b (1-\gamma)^c.$$

Verovatnoća da će jedna zgrada kategorije A, odnosno B, odnosno C izgoreti je

$$q_A = a\alpha(1-\alpha)^{a-1}(1-\beta)^b(1-\gamma)^c,$$

$$q_B = b\beta(1-\alpha)^a(1-\beta)^{b-1}(1-\gamma)^c,$$

$$q_C = c\gamma(1-\alpha)^a(1-\beta)^b(1-\gamma)^{c-1}.$$

Pošto su verovatnoće α, β i γ među sobom nezavisne, to je

$$p_A = p_B = p_C = 1.$$

Otuda je tražena verovatnoća

$$P_A = \frac{a\alpha(1-\alpha)^{a-1}(1-\beta)^b(1-\gamma)^c}{q_A + q_B + q_C}$$

ili

$$P_A = \frac{a\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}}{a\frac{\alpha}{1-\alpha} + b\frac{\beta}{1-\beta} + c\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

3.4.4. Igramo karte sa protivnikom koga prvi put vidimo i čija nam prošlost nije poznata. Prilikom izvlačenja karte protivnik je izvukao keca, tj. najjaču kartu. Kolika je verovatnoća da je protivnik varalica? (Poincaré).

Da bismo mogli da rešimo ovaj problem, potrebno bi bilo da znamo koliki je ukupan broj prisutnih lica i od toga koliki je broj varalica. Naravno da nam je nemoguće odrediti te brojeve, što pokazuje da je često teško odrediti verovatnoće *a priori*.

Događaj A je izvlačenje keca iz špila od 32 karte od strane našeg protivnika. Dva su moguća uzroka:

C_1: protivnik je varalica;

C_2: protivnik nije varalica i kec je izvučen na sreću.

Verovatnoće *a priori* biće

$$q_1 = q,$$

$$q_2 = 1 - q.$$

Verovatnoća da će varalica izvući keca je

$$p_1 = p$$

a verovatnoća da će pošten igrač izvući keca je

$$p_2 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

tako da je tražena verovatnoća

$$P_1 = \frac{pq}{pq + (1-q)\,1/8}.$$

Da bismo mogli da rešimo do kraja ovaj problem, daćemo neke konkretne vrednosti verovatnoćama p i q. Pođimo, naprimer, od pesimističke pretpostavke da je svaki drugi igrač varalica, tj. $q = \frac{1}{2}$ i da će varalica svaki put da izvuče keca, tj. $p = 1$. Tada je

$$P_1 = \frac{8}{9}$$

što bi značilo da na osnovu činjenice što je izvukao keca, postoji osam šansi od ukupno devet da je naš protivnik varalica.

Međutim, lako je konstatovati da je naš protivnik varalica ako on svakog puta izvuče keca. Zato će se on, naprimer, ograničiti da samo udvostruči šanse poštenog igrača. Tada je $p = \frac{1}{4}$, pa je

$$P_1 = \frac{q \cdot \frac{1}{4}}{q \cdot \frac{1}{4} + (1-q)\frac{1}{8}} = \frac{2q}{1+q}.$$

Kako se uglavnom može očekivati da je vrednost verovatnoće q vrlo mala, to je približno $P_1 = 2q$. Postoji, dakle, dva puta više razloga da verujemo da je naš protivnik varalica, s obzirom da je izvukao keca.

3.4.5. U jednoj katastarskoj opštini nalazi se 10 zasejanih površina i to 4 zasejane žitom a 6 zasejanih kukuruzom. Prilikom nekih promena 4 površine pripojene su susednoj katastarskoj opštini. Tom prilikom komisija je izašla na teren i obišla samo 2 od 4 pripojene površine. Konstatovalo se da su obe površine zasejane žitom. Ako na slučaj izaberemo jednu od dve preostale površine, kolika je verovatnoća da će ona biti zasejana žitom?

Kako je konstatovano da su dve od četiri pripojene površine zasejane žitom, sastav sve četiri površine mogao bi biti sledeći:

C_1: 4 površine zasejane žitom, 0 površine zasejane kukuruzom

C_2: 3 površine zasejane žitom, 1 površina zasejana kukuruzom

C_3: 2 površine zasejane žitom, 2 površine zasejane kukuruzom

tako da su verovatnoće *a priori*

$$q_1 = \frac{\binom{4}{4}\binom{6}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{210},$$

$$q_2 = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{24}{210},$$

$$q_3 = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{90}{210}.$$

Uslovne verovatnoće p_i, tj. verovatnoće da će dve na slučaj izabrane površine od četiri pripojene površine biti zasejane žitom a za odgovarajuće uzroke C_i biće

$$p_1 = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}} = 1,$$

$$p_2 = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$p_3 = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Najzad, odgovarajuće uslovne verovatnoće da će i treća površina biti zasejana žitom, biće

$$\omega_1 = 1, \qquad \omega_2 = \frac{1}{2}, \qquad \omega_3 = 0.$$

Tražena verovatnoća je verovatnoća budućeg događaja i koristeći (3.2.1) dobijamo

$$\mathrm{P} = \frac{\frac{1}{210} + \frac{6}{210}}{\frac{1}{210} + \frac{12}{210} + \frac{15}{210}} = \frac{1}{4}.$$

3.4.6. Uzimajući ponovo problem izložen u (3.3), naći verovatnoću da će u narednom ponavljanju n_1 opita eksperimentalna verovatnoća biti $\frac{m_1}{n_1}$.

Stavimo opet

$$q_i = \frac{1}{r}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$p_i = \binom{n}{m}\left(\frac{i}{r}\right)^m\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n-m}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Uslovne verovatnoće budućeg događaja su

$$\omega_i' = \binom{n_1}{m_1}\left(\frac{i}{r}\right)^{m_1}\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n_1-m_1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Tražena verovatnoća dobiće se neposredno primenom obrasca (3.2.2)

$$\mathrm{P} = \frac{\binom{n_1}{m_1}\sum\limits_{i=1}^{r}\left(\frac{i}{r}\right)^{m+m_1}\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n+n_1-m-m_1}}{\sum\limits_{i=1}^{r}\left(\frac{i}{r}\right)^{m}\left(1-\frac{i}{r}\right)^{n-m}},$$

ili, ako pustimo da $r \to \infty$,

$$\mathrm{P} = \binom{n_1}{m_1}\frac{\mathrm{B}(m+m_1+1,\, n+n_1-m-m_1+1)}{\mathrm{B}(m+1, n-m+1)}. \tag{3.4.6.1}$$

3.4.7. Neka su jedino dva događaja A i B moguća. Nnjihove verovatnoće ne znamo i jedino znamo da se događaj A ostvario m puta a događaj B $(n-m)$ puta. Pretpostavimo da se ponovo jedan od dva događaja ostvario. Kolika je verovatnoća da je to događaj A pod pretpostavkom da su proste verovatnoće ostvarenja događaja A i B konstantne? (Condorcet)

Ovaj je problem specijalan slučaj problema (3.4.6) kada je $n_1 = 1$ i $m_1 = 1$. Primenom obrasca (3.4.6.1) neposredno dobijamo

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{B}(m+2,\, n-m+1)}{\mathrm{B}(m+1,\, n-m+1)} = \frac{m+1}{n+2}.$$

Ukoliko proste verovatnoće događaja A i B nisu konstantne za sve opite, već variraju između 0 i 1, Condorcet daje sledeće rešenje

$$\mathrm{P} = \binom{n}{m}\left\{\int_0^1 x\, dx\right\}^m \left\{\int_0^1 (1-x)\, dx\right\}^{n-m} = \frac{\binom{n}{m}}{2^n}$$

3.4.8. Neka su sva lica jednog popisnog kruga numerisana i pretpostavimo da je prilikom sprovođenja jedne ankete trebalo na slučaj da izaberemo deset lica toga popisnog kruga. Na poziv su se odazvala samo 5 lica i tom prilikom konstatovalo se da su četiri od njih muškarci a jedno žena. Koji je najverovatniji sastav po polu ovih deset lica?

Pretpostavljajući da je u popisnom krugu podjednak broj muških i ženskih osoba, verovatnoća *a priori* da će od deset lica i biti muškog pola je

$$q_i = \binom{10}{i}\frac{1}{2^{10}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Uslovna verovatnoća je

$$p_i = \binom{5}{4}\left(\frac{i}{10}\right)\left(1 - \frac{i}{10}\right)^4, \qquad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Verovatnoća *a posteriori* za sastav $(i,\ 10-i)$, tj. i muških a $(10-i)$ ženskih osoba, biće

$$\mathrm{P}_i = \frac{\binom{10}{i}\left(\frac{i}{10}\right)\left(1-\frac{i}{10}\right)^4}{\sum\limits_{i=1}^{9}\binom{10}{i}\left(\frac{i}{10}\right)\left(1-\frac{i}{10}\right)^4}.$$

Određujući numeričke vrednosti ovih izraza za $i = 1, 2, \ldots, 9$ konstatovaćemo da je najverovatniji sastav: 6 muških i 4 ženske osobe sa verovatnoćom $P_6 = 0{,}30$.

3.4.9. Neka su A i B dva uzroka koji nisu međusobno inkompatibilni, tj. može biti poklapanja tako da oba uzroka ostvaruju isti efekat C_{ij}. Neka se ostvario efekat C_{ij}. Kolika je verovatnoća da je ostvarenje toga efekta izazvao uzrok A?

Verovatnoće *a priori* su

$$q_1 = \Pr\{A\},$$
$$q_2 = \Pr\{B\}.$$

Uslovna verovatnoća da je pri dejstvovanju uzroka A ostvaren događaj C_{ij} je

$$p_{1ij} = \Pr\{C_{ij} \mid A\}.$$

Takođe je

$$p_{2ij} = \Pr\{C_{ij} \mid B\}$$

tako da je tražena verovatnoća

$$\mathrm{P}_{1ij} = \frac{q_1 p_{1ij}}{q_1 p_{1ij} + q_2 p_{2ij}}.$$

3.4.10. Razdvojiti događaje C_{ij} iz (3.4.9) u dve grupe $R(A)$ i $R(B)$ na najbolji mogući način kako bismo mogli usvojiti da je ostvarenje događaja C_{ij} iz grupe $R(A)$ izazvao uzrok A a ostvarenje događaja C_{ij} iz grupe $R(B)$ uzrok B.

Razdvojimo indekse (i, j) u odgovarajuće dve grupe: Neka su indeksi događaja C_{ij} prve grupe (i_1, j_1) a druge grupe (i_2, j_2).

Razdvajanje grupa izvršićemo na taj način što ćemo izvesti da ukupna greška klasifikacije

$$\alpha = q_1 \sum_{i_2, j_2} p_{1 i_2 j_2} + q_2 \sum_{i_1, j_1} p_{2 i_1 j_1}$$

bude najmanja moguća. To ćemo postići ako su verovatnoće *a posteriori* P_{1ij} i P_{2ij} jednake međusobno, tj. ako je

$$q_1 p_{1ij} = q_2 p_{2ij}$$

Grupa indeksa (i_1, j_1) biće ona za koju je

$$q_1 p_{1i_1j_1} \geqslant q_2 p_{2i_1j_1}$$

a nejednačina

$$q_1 p_{1i_2j_2} \leqslant q_2 p_{2i_2j_2}$$

definisaće grupu indeksa (i_2, j_2). Granični indeksi, za koje je

$$q_1 p_{1ij} = q_2 p_{2ij} ,$$

pretstavljaju *granicu diskriminacije*.

3.5. Zadaci za vežbu

3.5.1. Jedan skup urni, identičnih po spoljašnosti, deli se u tri kategorije urni prema sastavu kuglica koje urne sadrže. Sve urne prve kategorije sadrže jednu istu proporciju belih i crnih kuglica. Takođe sve urne druge kategorije sadrže neku drugu proporciju belih i crnih kuglica. Urne treće kategorije ne sadrže bele kuglice. Pretpostavljamo da smo na slučaj uzeli jednu urnu i iz nje izvukli jednu kuglicu. Konstatujemo da je bela. Kolika je verovatnoća da smo je izvukli iz urne prve kategorije?

3.5.2. U primeru (3.4.4) pretpostavimo da je u sledećoj igri protivnik ponovo izvukao keca. Kolika je verovatnoća da je protivnik varalica?

3.5.3. Neka se događaj A može ostvariti pod uticajem jednog od dva uzroka C_1 i C_2. Bayes-ova formula pretpostavlja inkompatibilnost ta dva uzroka. Neka se ostvario događaj A i postavlja se zadatak da se odredi verovatnoća P_1 da se događaj A ostvario pod uticajem uzroka C_1, pri čemu događaji C_1 i C_2 nisu inkompatibilni.

3.5.4. Jedna urna treba da sadrži deset kuglica koje mogu biti bele i crne. Sastav po boji kuglica formirajmo na sledeći način: bacajmo paru deset puta; kada padne glava u urnu, stavimo belu a kada padne pismo, stavimo crnu kuglicu. Zatim izvučemo jednu kuglicu i konstatujemo da je bela. Kolika je verovatnoća da je u urni bilo i belih kuglica?

3.5.5. Neka je urna formirana kao u zadatku (3.5.4) i n puta uzastopce izvlačimo iz urne po jednu kuglicu vraćajući je u urnu posle svakog izvlačenja. Konstatujemo da su sve izvučene kuglice bele. Kolika je verovatnoća P_i da je u urni bilo i belih kuglica? Zatim, pokazati da

$$P_i \to \begin{cases} 0, & \text{za } i < 10, \\ 1, & \text{za } i = 10, \end{cases}$$

kad $n \to \infty$.

3.5.6. Pod istim uslovima zadatka (3.5.5) i posle izvlačenja (sa vraćanjem) n belih kuglica kolika je verovatnoća da je broj belih kuglica u urni između brojeva α i β, tj.

$$\alpha \leqslant i \leqslant \beta ,$$

gde je

$$n \leqslant \alpha < \beta \leqslant 10 \; ?$$

3.5.7. Jedna urna sadrži 5 belih i 10 crnih kuglica. Na slučaj izvučemo 10 kuglica i stavimo ih u jednu drugu urnu i iz nje izvučemo 5 kuglica. Konstatujemo da su crne. Kolika je verovatnoća da će preostale 4 biti bele?

3.5.8. Vratimo se na problem (3.5.1). Neka je ukupno N urni od kojih $N\alpha_1$ prve kategorije, $N\alpha_2$ druge i $N\alpha_3$ treće ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$). Neka je r_1 odnos belih i crnih kuglica u urnama prve kategorije, r_2 u urnama druge kategorije a $r_3 = 0$. Na slučaj uzmemo jednu urnu i iz nje n puta izvlačimo sa vraćanjem po jednu kuglicu. Konstatujemo da se n puta pojavila bela kuglica. Kolika je verovatnoća da smo imali posla sa urnom prve kategorije?

3.5.9. Proširiti primer (3.4.9) na n uzroka $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

3.5.10. Jedna urna sadrži N belih i crnih kuglica, čiji nam odnos nije poznat. Izvlačimo n puta (sa vraćanjem) po jednu kuglicu i konstatujemo da je r puta izvučena bela kuglica. Pretpostavljajući da su sve moguće kompozicije podjednako verovatne, kolika je verovatnoća da urna sadrži tačno R belih kuglica? Pokazati zatim da je najverovatnija kompozicija

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{N}} = \frac{r}{n} \, .$$

II Deo

OPŠTA TEORIJA RASPOREDA

4. JEDNODIMENZIONALNI RASPOREDI

4.1. Aleatorna promenljiva. — Posmatrajmo skup opita S i pretpostavimo da je rezultat R svakog opita slučajan. Aleatorna promenljiva, definisana nad skupom S, naziva se promenljiva X čija je numerička vrednost potpuno određena rezultatom R. Tako, naprimer, S može biti skup bacanja jedne kocke. Rezultat R je položaj kocke koji je zauzela posle pada a promenljiva X broj tačaka na njenoj gornjoj strani. Kako kocku na slučaj bacamo, to njenu vrednost, koja može biti jedna od vrednosti 1, 2, 3, 4, 5 i 6, nikad ne znamo unapred, zbog čega je i nazivamo *aleatornom promenljivom*.

Prilikom bacanja pare R može biti glava ili pismo. Ako je pala glava, stavićemo $X=1$, a ako je palo pismo, stavićemo $X=0$. Dakle, u ovom slučaju aleatorna promenljiva može imati jednu od samo dve vrednosti. Kod binomijalne verovatnoće $P_{n,k}$, tj. verovatnoće da će u n bacanja pare k puta pasti glava, k je aleatorna promenljiva koja može imati jednu od vrednosti $0, 1, 2, \ldots, n$ sa verovatnoćom

$$P_{n,k} = \Pr\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Ceo klasičan račun verovatnoće pretstavlja ustvari proučavanje aleatornih promenljivih koje uzimaju numeričke vrednosti. Od pre izvesnog vremena pojavila se tendencija da se dobijeni rezultati prošire na aleatorne serije, aleatorne vektore, aleatorne funkcije itd. Osim toga, u prirodi i tehnici pojavljuju se mnogobrojni primeri u kojima aleatorni elementi nisu ni brojne vrednosti, ni serije, ni vektori, ni funkcije. Takav je, naprimer, slučaj sa oblikom jednog parčeta konca bačenog na sto. Da bismo izbegli nesporazum, često ćemo u opštem slučaju X nazivati aleatornim elementom.

4.2. Funkcija verovatnoće. — Neka je X aleatorni elemenat koji smo na slučaj uzeli iz univerzalnog skupa $\mathfrak{E}$. Neka je skup E potskup skupa $\mathfrak{E}$. Funkcijom verovatnoće nazivamo verovatnoću

$$\Pr\{X \in E\} = P(E). \tag{4.2.1}$$

Ako je ova funkcija dobro određena za skup E, kažemo da je skup E *probabilan*. Jasno je da ta funkcija skupa ne može biti ma kakva. Pre svega, moraju biti zadovoljeni uslovi

$$0 \leqslant P(E) \leqslant 1, \tag{4.2.2}$$

$$P(\mathcal{E}) = 1. \tag{4.2.3}$$

Osim toga, mora biti zadovoljen i princip totalnih verovatnoća. Zato, ako su $E_1, E_2, \ldots, E_n$ probabilni i međusobno isključujući skupovi ($E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$) i ako je $E = \bigcup_i E_i$, tada je

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i), \tag{4.2.4}$$

ukoliko je E takođe probabilan skup. Ako probabilni skupovi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ obrazuju jednu aditivnu familiju u užem smislu, tada je skup E uvek probabilan a funkcija verovatnoće (4.2.4) uvek aditivna. Da bismo izbegli teoriske teškoće, pretpostavićemo ubuduće da je familija skupova E_i univerzalnog skupa $\mathcal{E}$ aditivna i to ne samo u užem smislu, već da je i kompletno aditivna, tj. da se (4.2.4) proširuje i na slučaj od prebrojivo mnogo međusobno isključujućih skupova, tako da je

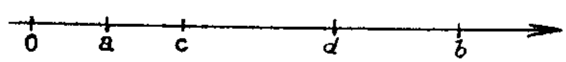
$$P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i), \tag{4.2.5}$$

Ako univerzalni skup $\mathcal{E}$ ima prebrojivo mnogo elemanata e_i, $i = 1, 2, \ldots$ probabilnih u odnosu na aleatorni elemenat X, niz verovatnoća $P(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ pretstavlja ***zakon verovatnoće*** aleatornog elementa X. Ako je

$$P(e_i) = P(e_j)$$

za svako i i j, kažemo da je zakon verovatnoće ***uniforman***.

Neka je, naprimer, X aleatoran broj između 0 i 1 sa uniformnim zakonom verovatnoće. Tada će probabilni skupovi aleatornog broja X biti merljivi skupovi brojeva između 0 i 1, a funkcija verovatnoće $P(E)$ pretstavljaće meru skupa E. Ukoliko je E jedan segment na intervalu (0, 1), $P(E)$ svodi se na dužinu toga segmenta. Uopšte, ako je X aleatoran broj između a i b sa uniformnim zakonom verovatnoće, verovatnoća da će se X naći između c i d je



Dijagram (4.2. I)

$$Pr\{X \in I(c,d)\} = \frac{d-c}{b-a}.$$

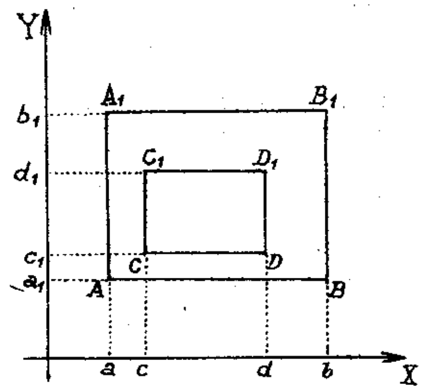
Neka je sada Z aleatorna tačka pravougaonika $A\,B\,B_1\,A_1$ površine α, sa uniformnim zakonom verovatnoće. Ako za E uzmemo pravougaonik

CDD_1C_1 površine β, verovatnoća $P(E)$, tj. verovatnoća da aleatorna tačka Z padne u pravougaonik CD D_1C_1, biće

$$P(E) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Koordinate aleatorne tačke Z su X i Y za koje usvajamo da su takođe aleatorni brojevi. Obratno, skup od dve aleatorne promenljive pretstavlja jednu dvodimenzionalnu aleatornu promenljivu.

I uopšte, skup od n aleatornih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pretstavlja jednu n-dimenzionalnu aleatornu promenljivu $X(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.



Dijagram (4.2. II)

Neka je X n-dimenzionalna aleatorna promenljiva sa funkcijom verovatnoće $Pr.\{X \in E\} = P_1(E)$. Takođe, neka je Y jedna m-dimenzionalna aleatorna promenljiva sa funkcijom verovatnoće $Pr.\{Y \in S\} = P_2(S)$. Označimo sa P funkciju verovatnoće $(n+m)$-dimenzionalne aleatorne promenljive (X, Y). Izraz $P(X \in E)$ pretstavlja verovatnoću da aleatorna tačka (X, Y) padne u cilinder $X \in E$ $(n+m)$-dimenzionalnog prostora. To je verovatnoća da $X \in E$ bez obzira kakvo je Y. Takođe, izraz $P(Y \in S)$ pretstavlja verovatnoću da $Y \in S$, bez obzira kakvo je X. Očevidno da je

$$P(X \in E) = P_1(E), \tag{4.2.6}$$

$$P(Y \in S) = P_2(S). \tag{4.2.7}$$

Funkcije P_1 i P_2 nazivamo ***marginalnim funkcijama verovatnoće*** funkcije verovatnoće P.

Funkcija verovatnoće aleatorne promenljive $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ima čitav niz marginalnih funkcija verovatnoće za aleatorne promenljive koje odgovaraju svim mogućim kombinacijama promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Verovatnoća da će istovremeno $X \in E$ a $Y \in S$ je $P(X \in E, Y \in S)$. Tako je u gornjem primeru

$$P\Big(X \in I(c,d), Y \in I(c_1, d_1)\Big) = \frac{\beta}{\alpha}$$

verovatnoća da aleatorna promenljiva (X, Y) padne u pravougaonik CDD_1C_1.

Uslovna verovatnoća da $X \in E$ pod uslovom da $Y \in S$ je

$$P(X \in S \mid Y \in S) = \frac{P(X \in E, Y \in S)}{P(Y \in S)}. \tag{4.2.8}$$

Očevidno da je potrebno da bude $P(Y \in S) > 0$ da bi (4.2.8) imalo smisla. Takođe je

$$P(Y \in S \mid X \in E) = \frac{P(X \in E, Y \in S)}{P(X \in S)} \tag{4.2.9}$$

pod pretpostavkom da je $P(X \in S) > 0$.

Neka su euklidovski prostori R^n i R^m univerzalni skupovi aleatornih promenljivih X i Y, tako da je

$$P_1(R^n) = 1 \quad \text{i} \quad P_2(R^m) = 1.$$

Za fiksno S (4.2.8) pretstavlja jednu aditivnu i ne-negativnu funkciju skupa E i za $E = R^n$ biće

$$(4.2.10) \quad P(X \in R^n | Y \in S) = \frac{P(X \in R^n, Y \in S)}{P(Y \in S)} = \frac{P(Y \in S)}{P(Y \in S)} = 1.$$

Prema tome, (4.2.8) pretstavlja za fiksno S jednu funkciju verovatnoće aleatorne promenljive X, vezane za uslov $Y \in S$.

Ako je za ma koje skupove E i S zadovoljena relacija

$$(4.2.11) \quad P(X \in E | Y \in S) = P(X \in E)$$

gde je $P(Y \in S) > 0$, odnosno

$$(4.2.12) \quad P(Y \in S | X \in E) = P(Y \in S)$$

gde je $P(X \in E) > 0$, (4.2.8) odnosno (4.2.9) svodi se na

$$(4.2.13) \quad P(X \in E, Y \in S) = P_1(E) P_2(S)$$

i tada kažemo da su aleatorne promenljive X i Y međusobno *nezavisne*.

4.3. Funkcija rasporeda i zakon verovatnoće. — Čak i u najprostijem slučaju kada je aleatorni elemenat X jedan broj, izračunavanje funkcije verovatnoće $P(E)$ skopčano je sa teškoćama. Iz tih razloga se najčešće pri određivanju zakona verovatnoće pribegava izračunavanju vrednosti $P(E)$ za specijalne skupove E, tj. za skupove onih brojeva koji nisu veći od jednog proizvoljnog unapred datog broja x. Tako dolazimo do pojma *funkcije rasporeda* aleatorne promenljive X, definisane sa

$$(4.3.1) \quad F(x) = Pr.\{X \leqslant x\}.$$

Funkcija rasporeda je specijalna vrsta funkcija verovatnoće, tj. $P(E_x)$ gde je E_x skup brojeva manjih od x.

Funkcija $F(x)$ je neopadajuća funkcija po x i definisana je za svako x intervala $(-\infty, +\infty)$. Pošto pretstavlja jednu verovatnoću, njena vrednost je između 0 i 1. Njena monotonija i ograničenost povlače za sobom egzistenciju graničnih vrednosti $F(-\infty)$ i $F(+\infty)$ i to

$$F(-\infty) = 0, \qquad F(+\infty) = 1.$$

Za ma koje vrednosti x_1 i x_2 biće

$$(4.3.2) \quad P(x_1 < X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

iz čega zaključujemo da poznavanje funkcije rasporeda povlači za sobom i poznavanje zakona verovatnoće.

Koristeći princip totalne verovatnoće i (4.3.2) možemo za svako a pisati

$$Pr.\{a_0 < X \leqslant a\} = Pr.\{X = a\} + \sum_{n=1}^{\infty} Pr.\{a_{n-1} < X \leqslant a_n\},$$

gde je $\{a_n\}$ jedan proizvoljan rastući niz brojeva sa graničnom vrednošću a. Otuda

$$F(a) - F(a_0) = Pr.\{X=a\} + lim\{F(a_n) - F(a_0)\}$$

tako da je

$$F(a) - \lim_{n\to\infty} F(a_n) = Pr.\{X=a\}$$

ili

$$F(a) - F(a-0) = Pr.\{X=a\}. \tag{4.3.3}$$

Na analogan način dobijamo

$$F(a+0) - F(a) = 0. \tag{4.3.4}$$

Otuda svaka funkcija rasporeda je neprekidna s desne strane a biće prekidna za one vrednosti a za koje je $Pr.\{X = a\} > 0$. Vrednost te verovatnoće jednaka je skoku funkcije $F(x)$ u tački $x = a$.

Kako jedna neopadajuća funkcija može najviše imati prebrojivo mnogo tačaka diskontinuiteta, to može postojati najviše prebrojivo mnogo tačaka x_i, $i = 1, 2, \ldots$, za koje je $Pr.\{X = x_i\} > 0$.

Videli smo da je funkcija rasporeda uvek konačna i da varira od 0 do 1 kad x varira od $-\infty$ do $+\infty$. Zato će, ukoliko je svuda neprekidna, funkcija rasporeda biti uniformno neprekidna.

U vezi sa (4.3.2) možemo da kažemo da je interval (x_1, x_2) ose X opterećen parcijalnom masom $F(x_2) - F(x_1)$ ukupne jedinične mase raspoređene duž ose X. Ukoliko je u tački $A_i(x_i)$

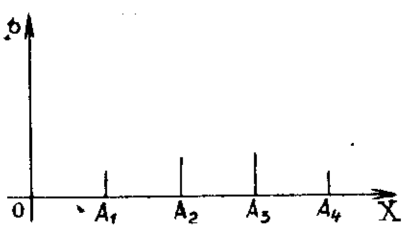
$$p_i = Pr.\{X = x_i\} > 0 \tag{4.3.5}$$

kazaćemo da je tačka A_i opterećena konačnom masom p_i.

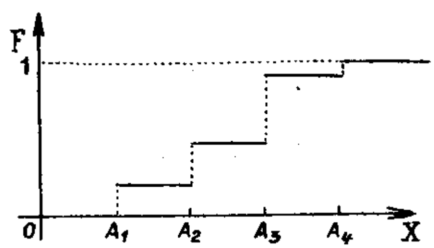
Najprostiji tip rasporeda je slučaj kada su mase diskretno raspoređene u tačkama A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$, kojih može biti konačno ili prebrojivo mnogo i tada je

$$F(+\infty) = \sum_i p_i = 1. \tag{4.3.6}$$

Ovaj raspored naziva se *prekidni raspored* i njegova funkcija rasporeda biće jedna stepenasta funkcija. Dijagram (4.3.I) pretstavlja raspored verovatnoća $\{p_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ a dijagram (4.3.II) odgovarajuću funkciju rasporeda $F(x)$.



Dijagram (4.3. I)

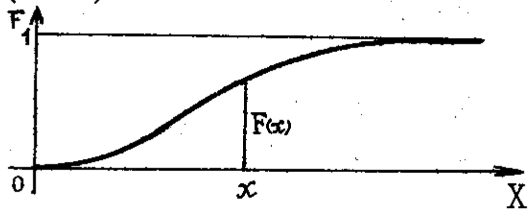


Dijagram (4.3. II)

Drugi karakterističan slučaj je kada je funkcija rasporeda apsolutno neprekidna. Tada je uvek možemo pretstaviti kao određeni integral jedne pozitivne funkcije $f(x)$, tj.

(4.3.7) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

sa dijagramom (4.3.III)



Dijagram (4.3. III)

Funkcija $f(x)$ pretstavlja *gustinu* jedinične mase raspoređene duž ose X, a $F(x)$ ukupnu masu u oblasti $X < x$. Funkcija $f(x)$ naziva se *zakon verovatnoće* aleatorne promenljive X a često i *gustina verovatnoće*. Verovatnoća $f(x_0)\,dx$, tj.

$$Pr.\{x_0 < X \leqslant x_0 + dx\} = f(x_0)\,dx$$

pretstavlja t.zv. *elementarnu verovatnoću*. U ovom slučaju aleatorna promenljiva X može uzimati sve vrednosti između $-\infty$ i $+\infty$, tj. može se neprekidno menjati zbog čega takav raspored nazivamo *neprekidnim rasporedom*. Neposredno se dobija

(4.3.8) $$Pr.\{a < X \leqslant b\} = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

i

(4.3.9) $$Pr.\{-\infty < X < +\infty\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Ukoliko u (4.3.7) imamo posla sa Lebesgue-ovim integralom, dokazano je da je $f(x)$ izvod od $F(x)$, tj.

(4.3.10) $$f(x) = F'(x),$$

izuzev najviše za jedan skup tačaka nulte mere.

Iz (4.3.8) za svako a dobijamo

$$Pr.\{X = a\} = 0.$$

Često neprekidna aleatorna promenljiva ostaje uvek u jednom konačnom intervalu (x_1, x_2). Takav je slučaj sa mnogim biološkim i industriskim merenjima. Tada pišemo

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \leqslant x_1 \\ \int_{x_1}^{x} f(x)\,dx & \text{za } x_1 < x \leqslant x_2 \\ 1 & \text{za } x > x_2 \end{cases}$$

Kod uniformnog rasporeda $f(x)$ svodi se na konstantu c duž intervala (x_1, x_2). Iz

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 1$$

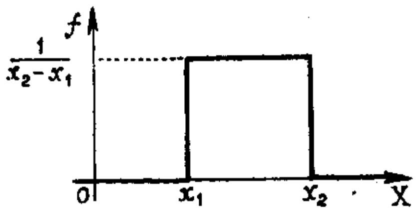
vrednost C neposredno dobijamo

$$C = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

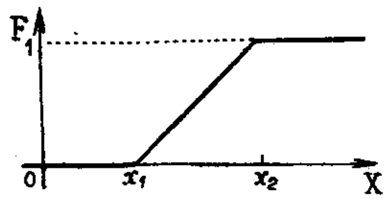
i pisaćemo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \leqslant x_1 \\ \dfrac{1}{x_2 - x_1} & \text{za } x_1 < x \leqslant x_2 \\ 0 & \text{za } x > x_2 . \end{cases}$$

Dijagram (4.3.IV) pretstavlja krivu $y = f(x)$ a (4.3.V) $y = F(x)$.



Dijagram (4.3. IV)



Dijagram (4.3. V)

Funkcija rasporeda je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \leqslant x_1 \\ \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & \text{za } x_1 < x \leqslant x_2 \\ 1, & \text{za } x > x_2 . \end{cases}$$

Često je u toku statističkih analiza zgodno zameniti prvobitnu aleatornu promenljivu X novom Y, vezanom sa prvobitnom X jednom linearnom relacijom, tj. $Y = aX + b$, gde su a i b konstante. Za $a > 0$, funkcija rasporeda $G(y)$ biće tada

$$\begin{aligned} G(y) &= Pr\{Y \leqslant y\} = Pr\{aX + b \leqslant y\} = \\ &= Pr\left\{X \leqslant \frac{y-b}{a}\right\} = F\left(\frac{y-b}{a}\right), \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

gde je F funkcija rasporeda od X. Za $a < 0$ biće

$$\begin{aligned} G(y) &= Pr\{aX + b \leqslant y\} = Pr\left\{X > \frac{y-b}{a}\right\} = \\ &= 1 - Pr\left\{X \leqslant \frac{y-b}{a}\right\} = 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right). \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Zakon verovatnoće $g(y)$ dobijamo neposrednim diferenciranjem gornjih rezultata

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right) \tag{4.3.13}$$

za oba slučaja.

Ako je $F(x)$ jedna funkcija rasporeda, obrasci (4.3.11) i (4.3.12) nam kazuju da će i $F(px+q)$, gde su p i q ma kakve konstante, takođe pretstavljati jednu funkciju rasporeda.

Raspored će biti *simetričan* u odnosu na tačku a, za koju je raspored $F(x)$ neprekidan, ako je za svako $x > 0$

$$\Pr\{X < a - x\} = \Pr\{X > a + x\},$$

tj.

$$F(a-x) = 1 - F(a+x).$$

Tada je kod neprekidnog rasporeda

$$f(a-x) = f(a+x),$$

tj. zakon verovatnoće je parna funkcija u odnosu na tačku $x = a$.

Na osnovu osobina monotonih funkcija izvodi se da je svaki neprekidan zakon verovatnoće uniformno neprekidan.

4.4. Stieltjes-ov integral. — Uočimo poluotvoreni interval $(a < x \leqslant b)$, neprekidnu funkciju $g(x)$ i funkciju rasporeda $F(x)$. Podelimo interval na n podintervala $I_\nu(x_{\nu-1}, x_\nu)$ tačkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Neka je ξ_ν proizvoljna tačka podintervala I_ν i obrazujmo zbir

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} g(\xi_\nu) \Delta_\nu F(x), \tag{4.4.1}$$

gde je $\Delta_\nu F(x) = F(x_\nu) - F(x_{\nu-1})$. Ako sa M_ν označimo najveću vrednost funkcije $g(x)$ u I_ν a sa m_ν njenu najmanju vrednost tako da je

$$m_\nu \leqslant g(\xi_\nu) \leqslant M_\nu$$

za svako $\xi_\nu \in I_\nu$ i ako u (4.4.1) smenimo $g(\xi_\nu)$ prvo sa m_ν a zatim sa M_ν, dobićemo

$$S_m = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \Delta_\nu F(x), \tag{4.4.2}$$

$$S_M = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu \Delta_\nu F(x) \tag{4.4.3}$$

i

$$S_m \leqslant S_n \leqslant S_M. \tag{4.4.4}$$

Razlika [(4.4.3) — (4.4.2)] je pozitivna i jednaka izrazu

$$S_M - S_m = \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - m_\nu) \Delta_\nu F(x) \leqslant \epsilon_n [F(b) - F(a)],$$

gde je $\varepsilon_n = Max\,(M_\nu - m_\nu)$. Ako sa δ_n označimo dužinu najvećeg razmaka, tj. $\delta_n = Max\,(x_\nu - x_{\nu-1})$, i ako podelu intervala dalje vršimo tako da $\delta_n \to 0$, tada i $\varepsilon_n \to 0$ za $n \to \infty$ zbog uniformne neprekidnosti funkcije $g(x)$ tako da

$$S_M - S_m \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Kako niz $\{S_m\}$ ne opada a niz $\{S_M\}$ ne raste, to zbir S_n zbog (4.4.4) konvergira određenoj granici S kad $\delta_n \to 0$ i to nezavisno od tačaka podela $\{x_\nu\}$ i izbora tačaka ξ_ν u I_ν budući da su S_m i S_M nezavisni od proizvoljnog izbora tih tačaka. Granična vrednost S naziva se *Stieltjes-ov integral* funkcije $g(x)$ u odnosu na funkciju $F(x)$ preko intervala (a, b) i označava je sa

$$S = \int_a^b g(x)\,dF(x). \tag{4.4.5}$$

Za funkciju $g(x)$ kažemo da je integrabilna u smislu Stieltjes-a, ili prosto S-integrabilna, u odnosu na funkciju $F(x)$ ako zbir (4.4.1) ima određenu graničnu vrednost kad $\delta_n \to 0$ i to nezavisnu od tačaka podele $\{x_\nu\}$ i izbora tačaka ξ_ν u I_ν. Videli smo da su sve neprekidne funkcije S-integrabilne. I sve funkcije ograničene varijacije su S-integrabilne ukoliko se njihovi diskontinuiteti ne poklapaju sa diskontinuitetima funkcije $F(x)$.

4.5. Osobine Stieltjes-ovog integrala. — Pretpostavljajući da je funkcija $g(x)$ S-integrabilna u odnosu na funkciju rasporeda $F(x)$ i polazeći od linearnog zbira S_n, tj.

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} g(\xi_\nu)\left[F(x_\nu) - F(x_{\nu-1})\right]$$

neposredno dobijamo sledeće osobine Stieltjes-ovog integrala

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b g(x)\,dF(x) \leqslant M(b-a), \tag{4.5.1}$$

$$\int_a^b c\,g(x)\,dF(x) = c\int_a^b g(x)\,dF(x), \tag{4.5.2}$$

$$\int_a^b g(x)\,d\left[F(x) + c\right] = \int_a^b g(x)\,dF(x), \tag{4.5.3}$$

$$\int_a^b g(x)\,dF(x) = -\int_b^a g(x)\,dF(x), \tag{4.5.4}$$

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a), \tag{4.5.5}$$

(4.5.6)
$$\int_{a+0}^{b-0} dF(x) = F(b-0) - F(a+0),$$

(4.5.7)
$$\int_a^b g(x)\,dF(x) = \int_a^c g(x)\,dF(x) + \int_c^b g(x)\,dF(x),$$

(4.5.8)
$$\int_a^b \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)\,dF(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_a^b g_\nu(x)\,dF(x),$$

(4.5.9)
$$\int_a^b g(x)\,d\left[\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(x)\right] = \sum_{\nu=1}^{n} \int_a^b g(x)\,dF_\nu(x),$$

(4.5.10)
$$\left|\int_a^b g(x)\,dF(x)\right| \leqslant \int_a^b |g(x)|\,dF(x),$$

gde je C konstanta, m i M najveća i najmanja vrednost funkcije $g(x)$ u intervalu (a, b), $a < c < b$.

Uzmimo slučaj kada je raspored prekidan, tj. kada je $F(x)$ stepenasta funkcija. Neka je ukupno k mogućih vrednosti

$$a < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots\ldots < \alpha_k \leqslant b$$

koje može uzimati aleatorna promenljiva X. Kako su te vrednosti izolovane, to podelu uvek možemo tako podesiti ($n \geqslant k$) da svaki interval sadrži najviše jednu tačku α_i. Za ξ_ν izabraćemo same tačke α_i u intevralima I_ν koji te tačke sadrže. Tada je

(4.5.11)
$$\Delta_\nu F(x) = \begin{cases} p_i, & \text{ako } \alpha_i \in I_\nu, \\ 0, & \text{ako } I_\nu = \emptyset, \end{cases}$$

pa je

(4.5.12)
$$S = \sum_{i=1}^{k} g(\alpha_i)\,p_i .$$

Ako je raspored neprekidan, tj. ako postoji prvi izvod funkcije rasporeda $F'(x) = f(x)$, tada je

(4.5.13)
$$\int_a^b g(x)\,dF(x) = \int_a^b g(x) f(x)\,dx$$

tako da se Stieltjes-ov integral svodi na običan integral.

Zaista, ako $F'(x) = f(x)$ postoji, tada $\Delta_\nu F(x)$ možemo, koristeći stav o srednjim vrednostima, pisati u obliku

$$\Delta_\nu F(x) = f(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

gde $\eta_\nu \in I_\nu$. Kako je ξ_ν proizvoljna tačka intervala I_ν, izjednačićemo je sa η_ν, te (4.4.1) postaje

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} g(\xi_\nu) f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

tj. svodi se na jedan Riemann-ov zbir i teži Riemann-ovom integralu

$$\lim_{\delta_n \to 0} S_n = \int_a^b g(x) f(x)\, dx. \tag{4.5.14}$$

Obrazac (4.5.13) ostaje u važnosti i ako zakon verovatnoće $f(x)$ ima tačaka diskontinuiteta, pod uslovom da je $f(x)$ R-integrabilno (integrabilno u smislu Riemann-a) u razmaku (a, b).

Ako za $n \to \infty$, $\delta_n \to 0$ i ako tada nezavisno $a \to -\infty$ a $b \to +\infty$, dobijamo nesvojstveni Stieltjes-ov integral sa beskonačnim granicama

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b g(x)\, dF(x)$$

Jedinična masa verovatnoća, koja je raspoređena duž ose aleatorne promenljive X, može se protezati ili neprekidno sa gustinom $f(x)$ ili prekidno sa koncentrisanim parcijalnim masama u jednom skupu od prebrojivo mnogo izolovanih tačaka X-ose. Takođe raspored masa može biti kombinovan iz prekidno i neprekidno raspoređenih masa. Bez obzira sa kakvim rasporedom imamo posla, možemo pisati

$$\Pr\{X \in E\} = \int_E dF(x), \tag{4.5.15}$$

gde E može biti jedan interval ili jedan skup izolovanih tačaka. Pretstavljanje funkcija verovatnoće pomoću Stieltjes-ovog integrala je vrlo zgodna tehnička aparatura u statističkim analizama i mi ćemo je u daljim izlaganjima češće upotrebljavati.

Napomena: U daljim izlaganjima upotrebljavaćemo sledeće skraćenice:

a.p. — aleatorna promenljiva
f.v. — funkcija verovatnoće
f.r. — funkcija rasporeda
z.v. — zakon verovatnoće.

4.6. Srednje vrednosti. — U cilju bližeg opisivanja rasporeda jedne a.p. konstruisaćemo nekoliko karakterističnih parametara koji će nam dati osnovne informacije o lokaciji, dispersiji i obliku jednog rasporeda. Srednja ili centralna vrednost pretstavlja jednu meru lokacije. Ona je primarni podatak o jednom rasporedu i njenu ćemo vrednost uzeti u slučaju da a.p. treba da smenimo jednim konstantnim brojem kod aproksimativnih izračunavanja. Srednja vrednost jedne a.p. mora zadovoljavati sledeća dva uslova: a) da je veća od najmanje a manja od najveće vrednosti a.p. i b) ako a.p. može uzeti jednu jedinu vrednost, tada srednja vrednost mora biti jednaka toj vrednosti. Osim toga, poželjno je da srednja vrednost zavisi od svih vrednosti a.p., da ima neko konkretno (geometrisko, mehaničko itd.) značenje sa prostim i očevidnim svojstvima, da je lako izračunati i da je zgodna za dalje operacije.

Postoji čitav niz srednjih vrednosti od kojih ćemo nekoliko proučiti. Koju ćemo od njih upotrebiti u nekom problemu zavisiće od prirode samog problema.

Aritmetička sredina ili *matematička nada* a.p. X pretstavlja centar gravitacije rasporeda od X i definisana je obrascem

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x). \tag{4.6.1}$$

Ona je, ustvari, sredina mogućih vrednosti a.p. X ponderisanih odgovarajućim verovatnoćama. To postaje očevidno ako pređemo na prekidan raspored, kada je

$$E(X) = \sum_{\nu} p_\nu x_\nu . \tag{4.6.2}$$

Ukoliko je raspored neprekidan, imaćemo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx . \tag{4.6.3}$$

Kako granična vrednost (4.5.14) ne mora obavezno da postoji kad a i b nezavisno i respektivno teže ka $-\infty$ i $+\infty$, to ni aritmetička sredina (4.6.1) a.p. X ne mora obavezno da postoji. Očevidno je da će ona uvek postojati ako je X ograničeno. U opštem slučaju, kad X ne mora biti ograničeno, potreban i dovoljan uslov da aritmetička sredina postoji jeste da integral (4.6.1) bude apsolutno konvergentan. Zaista, stavimo prvo

$$\int_a^b x\,dF(x) = \int_a^0 x\,dF(x) + \int_0^b x\,dF(x). \tag{4.6.4}$$

Kako je $F(x) \geqslant 0$, to su integrali s desne strane od (4.6.4) dve monotone funkcije i da bi $E(X)$ postojao, potrebno je i dovoljno da integrali

$$\int_{-\infty}^{0} x\,dF(x) \quad \text{i} \quad \int_0^{\infty} x\,dF(x)$$

budu konvergentni. Tada će i integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,dF(x) \tag{4.6.5}$$

biti konvergentan. Obratno, ako je integral (4.6.5) konvergentan, integral s leve strane od (4.6.4) imaće konačnu i određenu granicu kad a i b respektivno i nezavisno teže ka $-\infty$ i $+\infty$.

Ako je Y aleatorna funkcija od X, tj. $Y = g(X)$, aritmetička sredina od Y biće

$$E(Y) = \int_{E_y} y\,G(y),$$

gde je $G(y)$ f.r. od Y a E_y razmak varijacije od Y kad X varira od $-\infty$ do $+\infty$. Ekvivalentno možemo pisati.

(4.6.6) $$E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF(x).$$

Potreban i dovoljan uslov da aritmetička sredina jedne neprekidne funkcije aleatorne promenljive X postoji, jeste da integral (4.6.6) postoji i da apsolutno konvergira.

Kod prekidnog i neprekidnog rasporeda obrazac (4.6.6) svešće se respektivno na

(4.6.7') $$E\left[g(X)\right] = \sum_{\nu} p_\nu g(x_\nu),$$

(4.6.7'') $$E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx.$$

Neka je, naprimer,

$$Y = aX \pm b.$$

Na osnovu (4.6.6) biće

(4.6.8) $$E(aX \pm b) = aE(X) \pm b.$$

Aritmetička sredina a.p. X je jedan konstantan broj. Stavimo u (4.6.8) $b = E(X)$, $a = 1$, tako da je

$$E\left[X - E(X)\right] = E(X) - E(X) = 0.$$

Napomena: Aritmetička sredina a.p. X često se naziva i *očekivana vrednost* od X, a označava se i sa $\bar{x}$, $\bar{X}$, m, M itd. Skraćeno ćemo je često pisati a.s.

Aritmetička sredina dosta dobro zadovoljava uslove koje smo postavili za srednje vrednosti na početku ovog paragrafa. Naime, ona zavisi od svih vrednosti koje može uzeti, lako se izračunava a pretstavlja centar gravitacije rasporeda masa verovatnoća. Iz daljeg izlaganja videćemo da je njen analitički oblik zgodan i za potonje operacije.

Neka dva skupa uzroka $\{c_i'\}$ i $\{c_i''\}$ dejstvuju na a.p. X. Označimo sa $F_1(x)$, odnosno $F_2(x)$, njene f.r. kad na nju izolovano dejstvuju uzroci $\{c_i'\}$, odnosno $\{c_i''\}$. Neka su α_1 i $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ respektivni koeficijenti ponderacija gornja dva skupa uzroka a $E_1(X)$ i $E_2(X)$ aritmetičke sredine. Ako sada pustimo da na a.p. X istovremeno dejstvuju uzroci $\{c_i'\}$ i $\{c_i''\}$, f.r. od X biće

$$\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)$$

sa aritmetičkom sredinom

(4.6.9) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, d\left[\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)\right]$$

Na osnovu (4.5.9) obrazac (4.6.9) svodi se na

$$E(X) = \alpha_1 E_1(X) + \alpha_2 E_2(X) \tag{4.6.10}$$

Otuda, znajući $E_1(X)$ i $E_2(X)$ i koeficijente ponderacija α_1 i α_2, možemo $E(X)$ odmah izračunati.

Obrazac (4.6.10) neposredno proširujemo i na slučaj od n skupova uzroka

$$E(X) = \alpha_1 E_1(X) + \alpha_2 E_2(X) + \cdots\cdots + \alpha_n E_n(X). \tag{4.6.10'}$$

Ako je a.p. X uniformno raspoređena u N_1, odnosno N_2, izolovanih tačaka kada posebno dejstvuju uzroci $\{c_i'\}$, odnosno $\{c_i''\}$, tada se obrazac (4.6.10) svodi na

$$E(X) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} E_1(X) + \frac{N_2}{N_1 + N_2} E_2(X), \tag{4.6.11}$$

gde je

$$E_1(X) = \frac{1}{N_1} \sum_{\nu=1}^{N_1} x_\nu',$$

$$E_2(X) = \frac{1}{N_2} \sum_{\nu=1}^{N_2} x_\nu''.$$

Druga važna osobina a.s. je sledeća: aritmetička sredina otstupanja jedne a.p. od njene aritmetičke sredine jednaka je nuli.

Zaista,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]\, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x) - E(X) \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = \tag{4.6.12}$$

$$= E(X) - E(X) = 0.$$

Osim toga, aritmetička sredina kvadrata otstupanja jedne a.p. od njene aritmetičke sredine je minimum. Zaista, neka je A jedan proizvoljan broj. Koristeći (4.6.12) aritmetička sredina kvadrata otstupanja X od A je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-A)^2\, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ [x - E(X)] + [E(X) - A] \right\}^2 dF(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2\, dF(x) + [E(X) - A]^2.$$

U dobijenom rezultatu prvi član je konstantan broj a drugi je pozitivan i varira sa A. Dostići će svoj minimum za $A = E(X)$ a to smo hteli i da pokažemo.

Stavljajući $g(X) = \log X$ u (4.6.7') dobijamo

$$\log G = E(\log X) = \sum_{\nu} p_{\nu} \log x_{\nu} = \log \prod_{\nu} x_{\nu}^{p_{\nu}},$$

gde je $\sum_{\nu} p_{\nu} = 1$. Ako je a.p. X uniformno raspoređena u N izolovanih tačaka, biće

(4.6.13)
$$G = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N}$$

G definiše *geometrisku sredinu* a.p. X. Kod neprekidnog uniformnog rasporeda (4.3.V) geometriska sredina biće

$$G = e^{\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} \log x\, dx} = \frac{x_1}{e}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{x_2}{x_2 - x_1}}$$

Stavljajući $g(X) = \dfrac{1}{X}$ u (4.6.7') dobijamo

(4.6.14)
$$\frac{1}{H} = E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{\nu} \frac{p_{\nu}}{x_{\nu}}$$

Ako je a.p. X opet uniformno raspoređena u N izolovanih tačaka, biće

(4.6.15)
$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_N}}$$

H definiše *harmonisku sredinu* a.p. X. Kod neprekidnog uniformnog rasporeda (4.3.V) harmoniska sredina biće

$$H = \frac{x_2 - x_1}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x}}.$$

Važnu ulogu u statističkoj analizi igra i *medijana* kao srednja vrednost jednog rasporeda. To je ona tačka na X-osi koja celokupnu masu rasporeda deli na dva jednaka dela, tj. zadovoljava jednačinu

$$F(x) = \frac{1}{2}.$$

Ova jednačina uvek ima bar jedno rešenje. Kod prekidnih rasporeda može se desiti da jednačinu zadovoljavaju sve tačke jednog zatvorenog intervala.

Bez obzira da li je medijana jednoznačna ili ne, aritmetička sredina apsolutnih otstupanja a.p. X od medijane je minimum.

Zaista, ako sa μ_e označimo medijanu a sa A ma koji broj, tada je za $A < \mu_e$

$$E(|X-A|) = E(|X-\mu_e+\mu_e-A|) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu_e} |x-\mu_e+\mu_e-A|\, dF(x) + \int_{\mu_e}^{A} |x-\mu_e+\mu_e-A|\, dF(x) +$$

$$+ \int_{A}^{\infty} |x-\mu_e+\mu_e-A|\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\mu_e} |x-\mu_e|\, dF(x) + (A-\mu_e)\int_{-\infty}^{\mu_e} dF(x) -$$

$$- \int_{\mu_e}^{A} |x-\mu_e|\, dF(x) + (A-\mu_e)\int_{\mu_e}^{A} dF(x) + \int_{A}^{\infty} |x-\mu_e|\, dF(x) - (A-\mu_e)\int_{A}^{\infty} dF(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu_e|\, dF(x) - 2\int_{\mu_e}^{A} |x-\mu_e|\, dF(x) + 2(A-\mu_e)\int_{\mu_e}^{A} dF(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu_e|\, dF(x) + 2\int_{\mu_e}^{A} (A-x)\, dF(x).$$

Za $A > \mu_e$ biće

$$E(|X-A|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu_e|\, dF(x) + 2\int_{A}^{\mu_e} (x-A)\, dF(x).$$

Kako su u oba rezultata prvi članovi nezavisni od A a drugi članovi nenegativni, to će aritmetička sredina otstupanja apsolutnih vrednosti $|X-A|$ dostići svoj minimum za $A = \mu_e$, a to smo hteli i da dokažemo.

Modus jednog neprekidnog rasporeda pretstavlja onu tačku na X-osi u kojoj z.v. $f(x)$ dostiže svoj maksimum. Ako postoji samo jedna takva vrednost, za raspored kažemo da je ***unimodalan***. Ako postoje dve ili više takvih vrednosti, za raspored, kažemo da je ***bimodalan, multimodalan***. Kod prekidnog rasporeda modus će biti ona tačka x_ν, za koju je istovremeno $p_\nu > p_{\nu-1}$ i $p_\nu > p_{\nu+1}$. Tačka u kojoj z.v. $f(x)$ dostiže svoj minimum, zove se ***antimodus***.

Medijana samo delimično zavisi od vrednosti koje može uzeti a.p. X, a dalje računske operacije sa njom nisu nimalo zgodne. Međutim, ona uvek postoji i u tome je njena prednost nad aritmetičkom sredinom.

U praksi je izračunavanje modusa glomaznije od izračunavanja aritmetičke sredine i medijane. Nekiput je moguće da izračunamo tačno ili približno modus znajući aritmetičku sredinu i medijanu. Tako u slučaju simetričnog i unimodalnog rasporeda modus, medijana i aritmetička sredina jednaki su međusobno. Kod unimodalnih i slabo asimetričnih rasporeda imamo približnu vezu

(4.6.16) $$M_0 = 3\mu_e - 2E(X).$$

Poslednja srednja vrednost, koju ćemo spomenuti, jeste *medijala m'* definisana sa

$$\int_{-\infty}^{m'} x\,dF(x) = \frac{1}{2}E(X),$$

koja specijalno u ekonomskim problemima dolazi do izražaja.

4.7. Momenti. — Momenat ν-tog reda aleatorne promenljive X je aritmetička sredina neprekidne funkcije X^ν (ν = pozitivan ceo broj), tj.

(4.7.1) $$\alpha_\nu = E(X^\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu dF(x).$$

U (4.6) videli smo da ako α_ν postoji, tada je, integral (4.7.1) apsolutno konvergentan, tj. integral

(4.7.2) $$\mathfrak{a}_\nu = E\left(|X|^\nu\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\nu dF(x)$$

takođe postoji i nazivamo ga *apsolutnim momentom* ν-tog reda. Egzistencija momenta α_ν povlači za sobom egzistenciju momenta α_k ($k < \nu$) a samim tim i apsolutnih momenata $\mathfrak{a}_k$ ($k \leqslant \nu$).

Kod prekidnog rasporeda je

(4.7.3) $$\alpha_\nu = \sum_i p_i x_i^\nu$$

a kod neprekidnog rasporeda

(4.7.4) $$\alpha_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu f(x)\,dx.$$

Očevidno da je

(4.7.5) $$\alpha_0 = 1,$$

(4.7.6) $$\alpha_1 = E(X) = m.$$

Momente α_ν nazivamo i *običnim momentima* za razliku od *momenata u odnosu na tačku a*

(4.7.7) $$\mu_\nu^a = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^\nu dF(x), \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

koji prestavljaju aritmetičke sredine ν-tih stepena otstupanja a.p. X od tačke a. Za $a = 0$, $\mu_\nu^a = \alpha_\nu$. Ako $(x - a)^\nu$ razvijamo po binomnom obrascu, tada (4.7.7) postaje

$$\mu_\nu^a = \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \binom{\nu}{j} a^j \alpha_{\nu-j} \tag{4.7.8}$$

Centralni momenat dobijamo kada stavimo $a = E(X) = m$. Tada je

$$\begin{aligned} \mu_\nu = \mu_\nu^m &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^\nu dF(x) = \\ &= \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \binom{\nu}{j} m^j \alpha_{\nu-j} \end{aligned} \tag{4.7.9}$$

Prva četiri centralna momenta, izražena preko običnih momenata, biće

$$\begin{aligned} \mu_1 &= m - m = 0, \\ \mu_2 &= \alpha_2 - m^2, \\ \mu_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_2 m + 2m^3, \\ \mu_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_3 m + 6\alpha_2 m^2 - 3m^4, \end{aligned} \tag{4.7.10}$$

I obratno, obične momente možemo izračunati preko centralnih momenata Iz (4.7.10) dobijamo

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= m, \\ \alpha_2 &= \mu_2 + m^2, \\ \alpha_3 &= \mu_3 + 3m\mu_2 + m^3, \\ \alpha_4 &= \mu_4 + 4m\mu_3 + 6m^2\mu_2 + m^4, \end{aligned} \tag{4.7.11}$$

U (4.6) videli smo da je

$$Min\left\{\mu_2^a\right\} = \mu_2 .$$

Iz jednačine

$$\begin{aligned} E\left[|X|^p\left(\lambda|X|^h + 1\right)^2\right] &= \lambda^2 E\left(|X|^{p+2h}\right) + \\ &+ 2\lambda E\left(|X|^{p+h}\right) + E\left(|X|^p\right) \geqslant 0, \end{aligned}$$

gde λ može biti ma koji realan broj, sleduje Schwarz-ova nejednačina

$$\alpha_{p+h}^2 \leqslant \alpha_{p+2h}\, \alpha_p . \tag{4.7.12}$$

Ako je p paran broj a $h = 1$, biće

(4.7.13) $$\alpha_{2\nu+1}^2 \leqslant \alpha_{2\nu+2}\,\alpha_{2\nu}$$

i za $\nu = 0$

(4.7.13) $$\alpha_1^2 \leqslant \alpha_2 .$$

Dižući obe strane nejednačine (4.7.12) na stepen $p+1$, stavljajući zatim $h = 1$ i $p = 1, 2, 3, \ldots$ i množeći tako dobijene nejednačine, imaćemo

(4.7.14) $$\alpha_\nu^{\nu+1} \leqslant \alpha_{\nu+1}^{\nu}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Aritmetička sredina faktorielnog izraza

(4.7.15) $$x^{[\nu]} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu+1)$$

naziva se *faktorijalni momenat* ν-tog reda i često je vrlo koristan u praktičnim izračunavanjima. Ako sa A_ν označimo obične faktorijalne momente, tj.

(4.7.16) $$A_\nu = E\left(X^{[\nu]}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(x-1)\ldots(x-\nu+1)\,dF(x),$$

njih možemo izraziti pomoću momenata

(4.7.17) $$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 , \\ A_2 &= \alpha_2 - \alpha_1 , \\ A_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_1 , \\ A_4 &= \alpha_4 - 6\alpha_3 + 11\alpha_2 - 6\alpha_1 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

i obratno

(4.7.18) $$\begin{aligned} \alpha_2 &= A_2 + A_1 , \\ \alpha_3 &= A_3 + 3A_2 + A_1 , \\ \alpha_4 &= A_4 + 6A_3 + 7A_2 + A_1 . \end{aligned}$$

Za $\nu < 0$ imamo *negativne momente*

(4.7.19) $$\alpha_{-\nu} = E\left(\frac{1}{X^\nu}\right),$$

koji se ređe pojavljuju u statističkoj analizi.

4.8. Mere dispersije. — Ove mere imaju za cilj da ocene varijaciju a.p. X, tj. da pokažu u kojoj meri X može da otstupa od njene centralne vrednosti. Umesto dispersije nekiput se upotrebljava pojam *koncentracija,* koji je suprotan pojmu dispersije.

Najprostija mera dispersije je *interval varijacije*. Njegovo izračunavanje ima smisla jedino u slučaju kada je celokupna masa raspoređena u jednom konačnom intervalu (x_{min}, x_{max}) ose X. Tada je $F(x_{min}) = 0$, $F(x_{max}) = 1$, a razlika

$$W = x_{max} - x_{min}$$

pretstavlja interval varijacije, koji nam u najgrubljem obliku može poslužiti kao jedno merilo disperzije. Osnovni nedostatak ovog merila sastoji se u činjenici da ne zavisi od svih vrednosti koje može uzeti a.p. X, već samo od njenih ekstremnih vrednosti. Osim toga, baš te esktremne vrednosti mogu biti izuzetne i vrlo daleko udaljene od najvećeg dela mase, tako da interval varijacije postaje nedovoljan za zgodno ocenjivanje disperzije. Zbog svoje jednostavnosti upotrebljava se ipak dosta često u primenama statističkih metoda za kontrolu kvaliteta u seriskoj proizvodnji.

Da bi se smanjio uticaj ekstremnih vrednosti, predloženi su drugi intervali, t.zv. ***interkvantilni intervali***. Njihovo se određivanje vrši na taj način što se ispred donje i iza gornje granice stavi isti procenat mase. Tako napr. ***interkvartilni interval*** $(x_{1/4}, x_{3/4})$ dobijamo tako što ćemo donju granicu $x_{1/4}$ odrediti iz jednačine

$$F(x) = \frac{1}{4}$$

a gornju granicu iz jednačine

$$F(x) = \frac{3}{4} .$$

Interkvartilni interval sadrži 50% celokupne mase. Polurazlika

$$\frac{x_{3/4} - x_{1/4}}{2}$$

uzima se tada obično za merilo disperzije. Granice ***interdecilnog intervala*** $(x_{0,1}, x_{0,9})$ dobijamo iz jednačina $F(x) = 0,1$ i $F(x) = 0,9$, tako da će taj interval sadržati 80% celokupne mase.

Iako je kod interkvantilnih intervala otstranjen uticaj ekstremnih vrednosti, njihovo izračunavanje ne zavisi od svih vrednosti a.p. X. Zato je podesnije da za merilo disperzije uzmemo aritmetičku sredinu neke funkcije otstupanja X od $E(X) = m$. Otstupanje na prvom stepenu ne dolazi u obzir, pošto je uvek prema (4.6.12) $E(X - m) = 0$. Ali zato možemo uzeti apsolutna otstupanja i tako dobiti ***srednje apsolutno otstupanje*** $E(|X - m|)$ kao merilo disperzije. Češće se umesto m stavlja medijana μ_e zbog osobine da tada srednje apsolutno otstupanje od nje dostiže svoj minimum.

Mnogo značajnije merilo disperzije je ***standardna devijacija***. Naime, da bismo izbegli apsolutne vrednosti, uzećemo kvadrate otstupanja X od aritmetičke sredine. Aritmetička sredina tih kvadrata otstupanja, tj. drugi centralni momenat

$$\mu_2 = E[X - E(X)]^2 = E(X - m)^2 \tag{4.8.1}$$

naziva se ***varijansa*** a.p. X. Da bismo dobili veličinu iste dimenzije kao i X, uzećemo ne-negativan koren varijanse i tako dobiti ***standardnu devijaciju***

$$\sigma_x = \sigma = \sqrt{\mu_2} . \tag{4.8.2}$$

Ako je $\sigma = 0$, tada otstupanja nema i celokupna masa je skoncentrisana u jednoj tački.

Za oznaku varijanse koristićemo često *Cramér-ov operator*

$$\sigma^2 = \mu_2 = D^2(X).$$

U (4.7.10) imamo

(4.8.3) $$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

Ako je raspored prekidan, (4.8.3) svodi se na

$$D^2(X) = \sum_\nu p_\nu x_\nu^2 - \left(\sum_\nu p_\nu x_\nu\right)^2$$

a ako je neprekidan, na

(4.8.5) $$D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\right]^2.$$

Koristeći (4.6.8) dobijamo

$$D^2(aX \pm b) = E(aX \pm b)^2 - E^2(aX \pm b) = a^2 D^2(X),$$

ili

(4.8.6) $$\sigma_{ax \pm b} = |a|\,\sigma_x.$$

Ako su m i σ aritmetička sredina i standardna devijacija a.p. X, tada je

(4.8.7) $$E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = 0, \qquad D\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = 1$$

a promenljivu $\dfrac{X-m}{\sigma}$ nazivamo *standardizovanom promenljivom* od a.p. X.

Kod uniformnog rasporeda je

$$E(X) = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$D^2(X) = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} x^2\,dx - \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12},$$

$$D(X) = \sigma = \frac{\sqrt{3}}{6}(x_2 - x_1).$$

Neka opet dva skupa uzroka $\{c_i'\}$ i $\{c_i''\}$ dejstvuju na a.p. X i neka su $F_1(x)$ i $F_2(x)$ respektivne f.r. a α_1 i $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ koeficijenti ponderacija. Ako sa $E_1(X)$ i $E_2(X)$, $D_1^2(X)$ i $D_2^2(X)$ označimo njihove odgovarajuće aritmetičke sredine i varijanse, varijansa od a.p. X, kada istovremeno dejstvuju uzroci $\{c_i'\}$ i $\{c_i''\}$, biće

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\left[\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)\right] - E^2(X).$$

Koristeći (4.5.9) i (4.6.9) imaćemo

(4.8.8)
$$D^2(X) = \alpha_1 D_1^2(X) + \alpha_2 D_2^2(X)$$

ili

(4.8.9)
$$\sigma = \sqrt{\alpha_1 \sigma_1^2 + \alpha_2 \sigma_2^2}$$

Ovaj se obrazac neposredno proširuje i na slučaj od n skupova uzroka

(4.8.9)
$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma_i^2}$$

Otuda, znajući σ_i i α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, možemo σ odmah izračunati.

U slučaju da je $m = 0$, varijansa se svodi na drugi običan momenat, tj.

$$\sigma^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\, F(x).$$

Za merilo dispersije možemo uzeti i aritmetičku sredinu viših stepena otstupanja a.p. X od $E(X)$. Videli smo da prvi stepeni ne dolaze u obzir. Takođe ne dolaze u obzir i svi ostali neparni stepeni zbog potiranja izvesnih pozitivnih i negativnih vrednosti. Ako je raspored simetričan u odnosu na aritmetičku sredinu a.p. X, aritmetička sredina neparnih stepena otstupanja $(X - m)$ jednaka je nuli, tj.

$$E(X-m)^{2k+1} = 0,$$

ako je

$$F(m-x) = 1 - F(m+x).$$

Zato ćemo se zadržati samo na parnim stepenima otstupanja $(X - m)$ i posmatrati parne centralne momente

$$\mu_{2k} = E(X-m)^{2k}$$

i za merila dispersije uzeti $2k$-ti koren te vrednosti, tj.

(4.8.10)
$$\sigma_{2k} = +\sqrt[2k]{E(X-m)^{2k}}$$

Neka je raspored prekidan i uniforman, tj. neka su vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koje može uzeti a.p. X a $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$. Tada se (4.8.10) svodi na

(4.8.11)
$$\sigma_{2k} = \sqrt[2k]{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^{2k}},$$

gde je $\xi_\nu = x_\nu - m$ a k pozitivan ceo broj. Za $k = 1$ imamo standardnu devijaciju

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2}$$

Pretpostavimo da svi ξ_ν nisu nule, tako da je $\sigma_{2k} > 0$ za svako k. *Standardna devijacija je donja granica niza* $\{\sigma_{2k}\}$, tj.

$$\sigma_2 = \min_{1 \leqslant k < \infty} \sigma_{2k} \tag{4.8.12}$$

Zaista, uzmimo količnik

$$\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2} = \frac{\sqrt[2k]{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^{2k}}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2}} = \left\{ \frac{n^{k-1} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^{2k}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2\right)^k} \right\}^{\frac{1}{2k}}$$

Ovaj će izraz biti veći od jedinice ako je potkorena vrednost veća od jedinice. Za $k = 1$ potkorena vrednost jednaka je jedinici. Pokazaćemo da će za $k = 2$ biti veća od jedinice. U tom cilju pisaćemo

$$\frac{n \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^4}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2\right)^2} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^4 + (n-1) \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^4}{\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^4 + 2 \sum_{\mu,\nu}^{n} \xi_\mu^2 \xi_\nu^2}, \qquad \nu \neq \mu .$$

Kako izrazi

$$(n-1) \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^4 \qquad \text{i} \qquad 2 \sum_{\mu,\nu}^{n} \xi_\mu^2 \xi_\nu^2, \qquad \nu \neq \mu ,$$

imaju isti broj članova i pretstavljaju simetrične funkcije i kako je uvek

$$\xi_\mu^4 + \xi_\nu^4 > 2 \xi_\mu^2 \xi_\nu^2$$

kad je $\xi_\mu \neq \xi_\nu$, to je

$$(n-1) \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^4 > 2 \sum_{\mu,\nu}^{n} \xi_\mu^2 \xi_\nu^2$$

te je

$$\frac{n \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^4}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2\right)^2} > 1 ,$$

tj.

$$\frac{\sigma_4}{\sigma_2} > 1 .$$

Ako sad pretpostavimo da nejednakost $\sigma_{2k}/\sigma_2 > 1$ vredi za neko k, tj. da je

$$\frac{n^{k-1}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2\right)} > 1,$$

dokazaćemo da će ta nejednakost vredeti i za $k+1$, tj. da je i

$$\frac{n^{k}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k+2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2\right)^{k+1}} > 1. \tag{4.8.13}$$

Ovaj izraz možemo napisati u obliku

$$\frac{n^{k}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k+2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2\right)^{k+1}} = \frac{n^{k}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k}\xi_\nu^2}{\left(\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2\right)^{k}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2} =$$

$$= \frac{n^{k-1}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k}\xi_\nu^2}{\left(\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2\right)^{k}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2} = \frac{n^{k-1}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k}\frac{\xi_\nu^2}{\sigma_2^2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2\right)^{k}}$$

Da bismo, dakle, dokazali (4.8.13), dovoljno je pokazati da se zbir $\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k}$ neće smanjiti ako mu svaki član respektivno pomnožimo sa ξ_ν^2/σ_2^2, tj. pokazati da je razlika

$$\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k}\frac{\xi_\nu^2}{\sigma_2^2} - \sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k} > 0. \tag{4.8.14}$$

Ako iz izraza na levoj strani izvučemo $\{\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2\}^{-1}$, dobićemo

$$\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2}\left\{n\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k+2} - \left(\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2\right)\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2}\left\{n\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k+2} - \sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k+2} - \sum_{\mu,\nu}^{n}\xi_\mu^2\xi_\nu^{2k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2}\left\{(n-1)\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k+2} - \sum_{\mu,\nu}^{n}\xi_\mu^2\xi_\nu^{2k}\right\}.$$

Kako su i ovde izrazi $(n-1)\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k+2}$ i $\sum_{\mu,\nu}^{n}\xi_\mu^2\,\xi_\nu^{2k}$ simetrične funkcije i imaju isti broj članova i kako postoje μ i ν tako da je $\xi_\mu\neq\xi_\nu$, tj. da je

$$\left(\xi_\mu^{2k}-\xi_\nu^{2k}\right)\left(\xi_\mu^2-\xi_\nu^2\right)>0,$$

to postoje ξ_μ i ξ_ν tako da je

$$\xi_\mu^{2k+2}+\xi_\nu^{2k+2}>\xi_\mu^2\,\xi_\nu^{2k}+\xi_\mu^{2k}\,\xi_\nu^2 .$$

Zato je

$$\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2}\left\{(n-1)\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^{2k+2}-\sum_{\mu,\nu}^{n}\xi_\mu^2\,\xi_\nu^{2k}\right\}>0.$$

Tako smo dokazali (4.8.14) pa time (4.8.13), odnosno (4.8.12).

Međutim, standardna devijacija veća je od srednjeg apsolutnog otstupanja u odnosu na sredinu i medijanu. Zaista, lako je pokazati da je i kod apsolutnog otstupanja

$$\mathrm{E}\left(|X-m|\right)=\underset{1\leqslant r<\infty}{Min}\,\mathrm{E}\left(|X-m|^r\right)$$

pa je

$$\mathrm{E}\left(|X-m|\right)<\sqrt{\mathrm{E}\left(|X-m|^2\right)}=\sigma.$$

Kako je

$$\mathrm{E}\left(|X-m|\right)>\mathrm{E}\left(|X-\mu_e|\right)$$

to imamo sledeći redosled merila otstupanja

(4.8.13) $\quad \mathrm{E}\left(|X-\mu_e|\right)<\mathrm{E}\left(|X-m|\right)<\sigma<\sigma_{2k},\quad k=2,3,\ldots$

4.9. Čebiševljeva teorema. — Slično intervalu varijacije ili interkvantilnom intervalu često se upotrebljava interval $(m-\alpha\sigma,\ m+\alpha\sigma)$ čija se sredina poklapa sa aritmetičkom sredinom. Ukoliko nam je poznat raspored masa, tj. f.r. $F(x)$ moći ćemo uvek da odredimo ukupnu masu koja leži u tom intervalu

$$\int_{m-\alpha\sigma}^{m+\alpha\sigma}dF(x)=F(m+\alpha\sigma)-F(m-\alpha\sigma).$$

Čebiševljeva teorema omogućiće nam da dobijemo približan podatak o toj masi i u slučaju da poznajemo samo m i σ. Ona glasi:

Neka je $g(X)\geqslant 0$ funkcija a.p. X a S skup tačaka X za koje je $g(X)\geqslant t$, gde je $t>0$. Tada je

(4.9.1) $$P(S)\leqslant\frac{\mathrm{E}[g(X)]}{t}.$$

Dokaz je neposredan. Iz

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF(x) \geqslant \int_S g(x)\, dF(x) \geqslant t \int_S dF(x),$$

tj. na osnovu (4.5.15) i (4.2.1)

$$E[g(X)] = t\,P(S).$$

U specijalnom slučaju $g(X) = (X - m)^2$ i $t = \alpha^2\sigma^2$, S se svodi na $|X - m| \geqslant \alpha\sigma$, pa je

(4.9.2) $$\Pr\{|X - m| \geqslant \alpha\sigma\} \leqslant \frac{1}{\alpha^2}.$$

Do rezultata (4.9.2) došao je Bienaymé. Otuda u intervalu $(m - \alpha\sigma,\ m + \alpha\sigma)$ ima najmanje $\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$ od ukupne jedinične mase rasporeda sa aritmetičkom sredinom m i standardnom devijacijom σ, tj.

(4.9.3) $$\Pr\{m - \alpha\sigma \leqslant X \leqslant m + \alpha\sigma\} \geqslant \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}.$$

Granicu $\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}$ nemoguće je povećati, jer se leva strana može dostići.

Ako u (4.9.1) stavimo $g(X) = (X - m)^{2k}$ i $t = \alpha_k^{2k}\sigma_{2k}^{2k}$, tada je

(4.9.4) $$\Pr\{|X - m| \geqslant \alpha_k \sigma_{2k}\} \leqslant \frac{1}{\alpha_k^{2k}}$$

i u opštem slučaju ovaj će obrazac biti precizniji, tj. za interval iste dužine $(m - c,\ m + c)$ moći ćemo da tvrdimo da leži veća minimalna masa ako upotrebimo σ_{2k} umesto $\sigma = \sigma_2$. U praksi se, međutim, najviše operiše sa σ i važno je naglasiti da postoje slučajevi kada sa σ možemo postići veću preciznost nego sa σ_{2k}.

Naime, *ako je*

(4.9.5) $$\sigma_{2k} < c < \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \sigma_2,$$

onda je veći broj članova za koje možemo tvrditi pomoću standardne devijacije σ_2 *da leže u intervalu* $(m - c,\ m + c)$ *nego pomoću* σ_{2k} $(k > 1)$.

Zaista, za $k > 1$ na osnovu (4.8.12) je

$$\left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{k-1} < \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{k},$$

tj.

$$\sigma_{2k} < \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \sigma_2$$

Pri tome, postoji broj c takav da je

$$\sigma_{2k} < c < \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \sigma_2$$

Stavićemo $K = \frac{c}{\sigma_2}$, tada je $k > \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2} > 1$. Zato u otvorenom intervalu $(m - c, m + c)$ ima bar

$$x = n - \frac{n}{K^2}$$

tačaka $\{x_\nu\}$, svaka opterećena masom $\frac{1}{n}$. Stavimo li pak $K_1 = \frac{c}{\sigma_{2k}}$, biće

$$K_1 > \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_{2k}} = 1$$

pa u istom intervalu ima bar

(4.9.6) $$y = n - \frac{n}{K_1^{2k}}$$

tačaka $\{x_\nu\}$. Zbog (4.9.5) uvek je $y > 0$. Otuda

$$x - y = \frac{n}{K^2 K_1^{2k}} \left(K^2 - K_1^{2k}\right).$$

Kako je

$$K^2 - K_1^{2k} = \frac{c^2}{\sigma_2^2} - \frac{c^{2k}}{\sigma_{2k}^{2k}} = \frac{c^2}{\sigma_2^2 \sigma_{2k}^{2k}} \left(\sigma_{2k}^{2k} - c^{2k-2} \sigma_2^2\right) >$$

$$> \frac{c^2}{\sigma_2^2 \sigma_{2k}^{2k}} \left\{\sigma_{2k}^{2k} - \left(\frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2}\right)^{\frac{k}{k-1} 2(k-1)} \sigma_2^{2k-2} \sigma_2^2\right\} = 0,$$

odnosno $K^2 - K_1^{2k} > 0$, to je $x > y$. Time je tvrđenje dokazano.

Prema (4.9.6) u intervalu $(m - c, m + c)$ leži bar

(4.9.7) $$y = n - \frac{n}{K_1^{2k}} = n - f(k)$$

tačaka, gde je

(4.9.8) $$f(k) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\xi_\nu}{c}\right)^{2k}$$

Stavićemo $\beta_\nu = \dfrac{\xi_\nu}{c}$. Prema pretpostavci nisu svi ξ_ν nule; uzećemo samo njih u obzir. Tada izabravši celishodnu numeraciju, možemo pisati

$$f(k) = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu^k, \qquad (\beta_\nu > 0).$$

Prema (4.9.7) izvan zatvorenog intervala $(m - c, m + c)$ nalazi se manje od $f(k)$ tačaka skupa $\{x_\nu\}$. Primetimo da je

$$f(k) > 0, \qquad f(0) = m$$

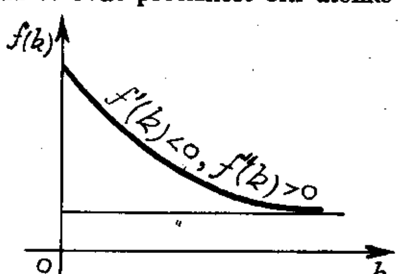
$$f'(k) = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu^k \log \beta_\nu, \qquad f'(0) = \log(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m).$$

Kako je

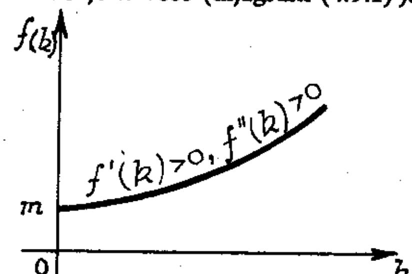
$$f''(k) = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu^k \log^2 \beta_\nu, \qquad f''(k) > 0,$$

to $f'(k)$ stalno raste.

A. Ako je $f'(k)$ stalno negativno, tada $f(k)$ stalno opada i kako je $f(k) > 0$, to mora postojati $\lim\limits_{k \to \infty} f(k) \geqslant 0$. Otuda dolazimo do zaključka da će ovde preciznost biti utoliko veća ukoliko je k veće (dijagram (4.9.I)).



Dijagram (4.9.I)



Dijagram (4.9.II)

B. Ako je $f'(k)$ stalno pozitivno, tada $f(k)$ stalno raste i preciznost će biti utoliko veća ukoliko je k manje. Najveću ćemo preciznost imati za $k = 1$ (dijagram (4.9.II)).

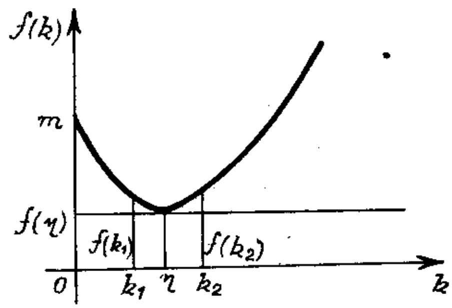
C. Ako je $f'(k)$ za izvesne vrednosti od k pozitivno a za izvesne negativno, tada mora postojati jedno η za koje je $f'(\eta) = 0$, tj.

$$\sum_{\nu=1}^{m} \beta_k^\eta \log \beta_\nu = 0.$$

Kako je $f''(\eta) > 0$, to je $f(\eta) = \min$. Ako stavimo $k_1 = [\eta]$ i $k_2 = [\eta] + 1$ i označimo

$$f(k_0) = \min_{r=1,2} \{f(k_r)\}$$

najveću preciznost, imaćemo za $k = k_0$ (dijagram (4.9.III)).

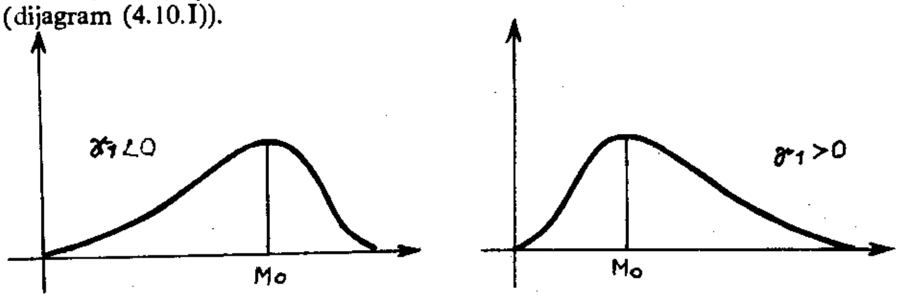


Dijagram (4.9.III)

4.10. Mere asimetrije i spljoštenosti. — U 4.8 napomenuli smo da su kod simetričnih rasporeda u odnosu na aritmetičku sredinu m svi centralni momenti neparnog reda jednaki nuli. Prema tome, svaki centralni momenat neparnog reda mogao bi biti uzet kao merilo asimetrije jednog rasporeda. Najprostije je uzeti treći momenat μ_3 i da bismo ga sveli na nultu dimenziju, podelićemo ga još sa σ^3. Na taj način dobijamo jednu meru asimetrije

(4.10.1) $$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma_3}.$$

Kod unimodalnih neprekidnih rasporeda $y = f(x)$ pretstavlja jednu krivu koja može biti simetrična, ako je $\gamma_1 = 0$, i asimetrična u odnosu na modus, ako je $\gamma_1 \neq 0$. Ako je tako asimetrična da je duži deo sa leve strane modusa, tada je $\gamma_1 < 0$ i obratno, biće $\gamma_1 > 0$ ako je duži deo sa desne strane (dijagram (4.10.I)).

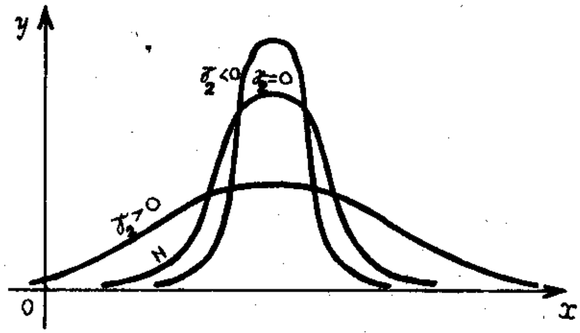


Dijagram (4.10.I)

Svodeći četvrti momenat na nultu dimenziju podelom sa σ^4 i umanjujući za 3, tj.

(4.10.2) $$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

dobijamo koeficijent γ_2 kao merilo spljoštenosti jednog rasporeda. Vrednost 3 uzimamo za standardnu vrednost koeficijenta γ_2, zato što je dostiže kod t.zv. normalnog rasporeda o kome ćemo kasnije govoriti. Ako je $\gamma_2 > 0$, kriva $y = f(x)$ imaće spljošteniji oblik od krive normalnog rasporeda (N) i obratno za $\gamma_2 < 0$ (dijagram (4.10.II)).



Dijagram (4.10.II)

Često se umesto koeficijenata γ_1 i γ_2 upotrebljavaju koeficijenti

(4.10.3)
$$\beta_1 = \gamma_1^2 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3},$$

(4.10.4)
$$\beta_2 = \gamma_2 + 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

Pored ovih koeficijenata postoji još nekoliko koeficijenata asimetrije. Tako je K. Pearson dao sledeći koeficijent

(4.10.5)
$$\gamma_1' = \frac{m - M_o}{\sigma},$$

koji postaje nula kod simetričnih rasporeda, pošto se tada modus poklapa sa aritmetičkom sredinom. Ukoliko raspored nije mnogo asimetričan, možemo koristiti empiričku vezu (4.6.16) i modus zameniti medijanom, tj.

(4.10.6)
$$\gamma_1' = \frac{3(m - \mu_e)}{\sigma}.$$

Za veliku klasu rasporeda sa umerenom asimetrijom (4.10.5) svodi se na

(4.10.7)
$$\gamma_1'' = \frac{\gamma_1(\gamma_2 + 6)}{2(5\gamma_2 - 6\gamma_1^2 + 6)}.$$

Videli smo da je treći centralni momenat μ_3 jednak nuli ako je raspored simetričan u odnosu na aritmetičku sredinu. Međutim, obratno ne važi, jer iz $\mu_3 = 0$ ne sleduje neminovno da je raspored simetričan. Da bi bio simetričan, potrebno je da svi neparni centralni momenti budu jednaki nuli. To svakako pretstavlja jedan nedostatak koeficijenta γ_1. Slično važi i za koeficijenat γ_2.

Napomena: Koeficijenti β_1 i β_2, odnosno γ_1 i γ_2, često se nazivaju *koeficijenti asimetrije i spljoštenosti*.

4.11. Aritmetička sredina zbira i proizvoda aleatornih promenljivih. — Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_k$ aleatorne promenljive. Linearna kombinacija tih promenljivih, tj.

$$Z = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i \tag{4.11.1}$$

biće takođe jedna aleatorna promenljiva. Neka je $P(S)$ f.v. od Z a njena f.r. biće

$$G(Z) = \int_S dF(x_1, x_2, \ldots, x_k), \tag{4.11.2}$$

gde je S oblast definisana nejednačinom

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \leqslant z$$

a $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ f.r. skupa a.p. $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Sada je

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, dG(z) = \int_{R^k} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k)\, dF(x_1, x_2 \ldots x_k). \tag{4.11.3}$$

Kako je integral

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{k-1} dF(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

funkcija marginalnog rasporeda, tj. $F(x_i)$, to se (4.11.3) svodi na

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{-\infty}^{+\infty} x_i\, dF_i(x_i.$$

ili

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{k} a_i E(X_i) \tag{4.11.4}$$

pod pretpostavkom da svi $E(X_i)$ postoje.

Napomenimo da je (4.6.10′) specijalan slučaj od (4.11.4).

Obrazac (4.11.4) neposredno se proširuje i na opštiji slučaj, kada je

$$Z = \sum_{i=1}^{k} a_i g(X_i).$$

Aritmetička sredina od Z je tada

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{k} a_i E\left[g(X_i)\right] \tag{4.11.4}$$

Aritmetička sredina proizvoda od k a.p. $X_1, X_2, \ldots, X_k$, tj.

$$Z = X_1 X_2 \ldots X_k, \tag{4.11.5}$$

je

$$(4.11.6) \qquad E(Z) = \int_{R^k} x_1 x_2 \ldots x_k \, dF(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Ukoliko su a.p. $X_1, \ldots, X_k$ međusobno nezavisne, tada je na osnovu (4.2.13)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_k \leqslant x_k) =$$
$$= \prod_{i=1}^{k} P(X_i \leqslant x_i) = \prod_{i=1}^{k} F_i(x_i)$$

tako da se (4.11.6) svodi na

$$(4.11.7) \qquad E(Z) = E(X_1)\,E(X_2)\ldots E(X_k)$$

pod pretpostavkom da svi $E(X_i)$ postoje.

Varijansa linearne funkcije a.p. $X_1, X_2, \ldots, X_k$, tj. od

$$Z = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i ,$$

biće

$$D^2(Z) = E(Z - \bar{Z})^2 ,$$

gde je

$$\bar{Z} = E(Z) = \sum_{i=1}^{k} a_i \bar{X}_i , \qquad \bar{X}_i = E(X_i).$$

Dalje je

$$(4.11.8) \qquad D^2(Z) = E\Big[\sum_{i=1}^{k} a_i (X_i - \bar{X}_i)\Big]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} a_i^2 D^2(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i a_j E(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j), \qquad i \neq j.$$

Ukoliko su a.p. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ nezavisne međusobno, tada je

$$E(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j) = E(X_i - \bar{X}_i)\,E(X_j - \bar{X}_j) = 0, \qquad i \neq j,$$

tako da se (4.11.8) svodi na

$$(4.11.9) \qquad D^2(Z) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 D^2(X_i),$$

pod pretpostavkom da svi $D^2(X_i)$ postoje.

Ako imamo dve a.p. X i Y, koje su međusobno nezavisne, aritmetička sredina njihovog zbira je

$$(4.11.10) \qquad E(X+Y) = E(X) + E(Y),$$

varijansa

$$(4.11.11) \qquad D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y),$$

a aritmetička sredina njihovog proizvoda

(4.11.12) $$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Ukoliko aritmetičke sredine od $Z = X - Y$ i Y postoje (tj. konačne su i potpuno određene), tada i $\overline{X}$ postoji, tako da je

(4.11.13) $$E(X-Y) = E(X) - E(Y).$$

Obrazac (4.11.13) neposredno dobijamo iz (4.11.4) stavljajući $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

4.12. Karakteristična funkcija. — Po definiciji karakteristična funkcija a.p. X je očekivana vrednost (aritmetička sredina) funkcije e^{itx}, tj.

(4.12.1) $$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x).$$

Integral (4.12.1) pretstavlja jednu neprekidnu funkciju realne promenljive t. On je apsolutno i uniformno konvergentan. Možemo ga pisati i u obliku

$$\varphi_X(t) = a(t) + i\,b(t)$$

a njegov modul ne može biti veći od 1, tj.

(4.12.2) $$|\varphi_X(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}|\, dF(x) = 1$$

pošto je $|e^{itx}| = 1$.

Ako integral

(4.12.3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx}\, dF(x)$$

ima smisla, tj. ako prvi momenat

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, |e^{itx}|\, dF(x)$$

postoji, tada je integral (4.12.3) apsolutno i uniformno konvergentan i pretstavlja prvi izvod karakteristične funkcije po t, tj.

$$\frac{d\varphi_X(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx}\, dF(x).$$

Tako je

$$\varphi'(0) = i\alpha_1$$

a takođe analogno dobijamo i

(4.12.4) $$\begin{aligned} \varphi''(0) &= i^2\alpha_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi^{(n)}(0) &= i^n\alpha_n, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ukoliko momenti $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ postoje. Dakle, uzastopni izvodi karakteristične funkcije za $t = 0$ daju uzastopne obične momente a.p. X.

Ako svi momenti postoje, $\varphi_x(t)$ imaće sve izvode. Obratno, ako se karakteristična funkcija može razviti u red u okolini tačke $t = 0$, tj.

$$(4.12.5)\quad \varphi_X(t) = 1 + it\alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!}\alpha_2 + \frac{(it)^3}{3!}\alpha_3 + \cdots + \frac{(it)^n}{n!}\alpha_n + O(t^n),$$

koeficijenti toga reda određuju momente od X.

Ali, ako svi momenti a.p. X postoje, nije dovoljno formirati red

$$1 + it\alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!}\alpha_2 + \cdots\cdots$$

da bismo dobili karakterističnu funkciju $\varphi_x(t)$, jer taj red ne mora konvergirati. Da bi konvergirao u razmaku $|t| < \rho$, treba da granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha_n}{n!}}$$

odnosno, koristeći Stirling-ov obrazac (2.2.1), da granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha_n}}{n}$$

postoji.

Kod prekidnog rasporeda karakteristična funkcija svodi se na

$$(4.12.6)\qquad \varphi_X(t) = \sum_\nu p_\nu e^{itx_\nu}.$$

Ovaj red je apsolutno i uniformno konvergentan budući da je $\sum_\nu p_\nu = 1$.

Kod neprekidnog rasporeda k.f. (karakteristična funkcija) biće

$$(4.12.7)\qquad \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx.$$

Može se pokazati da $\varphi_x(t) \to 0$ kad $t \to \pm\infty$.

K.f. ma koje funkcije $g(X)$ je

$$\mathrm{E}\left[e^{itg(X)}\right]$$

U specijalnom slučaju za $g(X) = aX$ biće

$$(4.12.8)\qquad \varphi_{aX}(t) = \mathrm{E}\left(e^{itXa}\right) = \varphi_X(at)$$

a za $g(X) = aX + b$

$$(4.12.9)\qquad \varphi_{aX+b}(t) = \mathrm{E}\left[e^{it(aX+b)}\right] = e^{ibt}\varphi_X(at),$$

tako da je karakteristična funkcija standardizovane promenljive $\frac{X-m}{\sigma}$

(4.12.10) $$\varphi_{\frac{X-m}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{imt}{\sigma}}\varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right).$$

Neka su X i Y dve međusobno nezavisne a.p. sa respektivnim k.f. $\varphi_X(t)$ i $\varphi_Y(t)$. Zbir ove dve a.p. pretstavlja takođe jednu a.p. $Z = X + Y$ sa k.f. $\varphi_Z(t)$. Kako je

(4.12.11) $$\begin{aligned}\varphi_Z(t) &= E(e^{itZ}) = E\left[e^{it(X+Y)}\right] = E(e^{itX})\,E(e^{itY}) = \\ &= \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t),\end{aligned}$$

pošto su X i Y nezavisni među sobom, to vidimo da je k.f. zbira dve a.p. jednaka proizvodu njihovih k.f.

Ako je

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

neposredno dobijamo proširenje rezultata (4.12.11)

(4.12.12) $$\varphi_Z(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t)\ldots\varphi_{X_n}(t).$$

4.13. Karakteristična funkcija druge vrste — Kumulante. — Neperov logaritam karakteristične funkcije $\varphi_X(t)$, tj.

(4.13.1) $$\psi_X(t) = \log\varphi_X(t)$$

pretstavlja ***karakterističnu funkciju druge vrste.*** Kao primer uzmimo prekidan raspored. K.f. je

$$\varphi_X(t) = \sum_\nu p_\nu \cos tx_\nu + i\sum_\nu p_\nu \sin tx_\nu,$$

koja pretstavlja jednu kompleksnu funkciju. Zato je potrebno precizirati determinaciju logaritma ove funkcije. Pošto je $\varphi(0) = \sum_\nu p_\nu = 1$, uzećemo da je $\psi(0) = 0$.

Iz (4.12.11) dobijamo neposredno za zbir dve a.p. $Z = X + Y$

(4.13.2) $$\psi_Z(t) = \psi_X(t) + \psi_Y(t),$$

tj. k.f. druge vrste zbira dve a.p. jednaka je zbiru njihovih k.f. druge vrste. Takođe je za zbir od n promenljivih $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

(4.13.3) $$\psi_Z(t) = \psi_{X_1}(t) + \psi_{X_2}(t) + \cdots + \psi_{X_n}(t).$$

Kako je

(4.13.4) $$\begin{aligned}\psi_{aX}(t) &= \psi_X(at), \\ \psi_{aX+b}(t) &= ibt + \psi_X(at)\end{aligned}$$

to je k.f. druge vrste standardizovane a.p. $\dfrac{X-m}{\sigma}$

(4.13.5) $$\psi_{\frac{X-m}{\sigma}}(t) = -\frac{imt}{\sigma} + \psi_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Kako uzimamo da je $\psi(0)=0$, razvitak od $\psi_X(t)$ u okolini tačke $t=0$, biće

(4.13.6) $$\psi_X(t) = itk_1 + \frac{(it)^2}{2!}k_2 + \cdots + \frac{(it)^n}{n!}k_n + 0(t^n).$$

Koeficijenti k_ν nazivaju se *kumulante* ili *semi-invarijante*. Prvi naziv došao je otuda što sabiranjem dve a.p., kumulante njihovog zbira dobijamo sabiranjem kumulanata tih a.p. Drugim rečima, ako su k_ν' kumulante a.p. X a k_ν'' kumulante a.p. Y, tada su kumulante a.p. $Z = X+Y$

$$k_\nu = k_\nu' + k_\nu''.$$

Potražimo još vezu između kumulanata i momenata jedne aleatorne promenljive. Ako formalno u (4.13.1) funkcije φ i ψ zamenimo njihovim redovima (4.12.5) i (4.13.6), tj.

$$\log\left[1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(it)^\nu}{\nu!}\alpha_\nu\right] = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(it)^\nu}{\nu!}k_\nu,$$

odnosno

(4.13.7) $$1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(it)^\nu}{\nu!}\alpha_\nu = e^{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(it)^\nu}{\nu!}k_\nu},$$

razvijanjem desne strane od (4.13.7) u red i izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene promenljive t dobijamo sledeće veze

(4.13.8)
$$\begin{aligned}
k_1 &= \alpha_1 = m,\\
k_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = \sigma^2,\\
k_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,\\
k_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4,\\
k_5 &= \alpha_5 - 5\alpha_1\alpha_4 - 10\alpha_2\alpha_3 + 20\alpha_1^2\alpha_3 + 30\alpha_1\alpha_2^2 -\\
&\quad - 60\alpha_1^3\alpha_2 + 24\alpha_1^5,\\
k_6 &= \alpha_6 - 6\alpha_1\alpha_5 - 15\alpha_2\alpha_4 + 30\alpha_1^2\alpha_4 - 10\alpha_3^2 + 120\alpha_1\alpha_2\alpha_3 -\\
&\quad - 120\alpha_1^3\alpha_3 + 30\alpha_2^3 - 270\alpha_1^2\alpha_2^2 + 360\alpha_1^4\alpha_2 - 120\alpha_1^6,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

i obratno

(4.13.9)
$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= k_1 ,\\
\alpha_2 &= k_2 + k_1^2 ,\\
\alpha_3 &= k_3 + 3k_1k_2 + k_1^3 ,\\
\alpha_4 &= k_4 + 3k_2^2 + 4k_1k_3 + 6k_1^2k_2 + k_1^4 ,\\
\alpha_5 &= k_5 + 5k_1k_4 + 10k_2k_3 + 10k_1^2k_3 + 15k_1k_2^2 +\\
&\quad + 10k_1^3k_2 + k_1^5 ;\\
\alpha_6 &= k_6 + 6k_1k_5 + 15k_2k_4 + 15k_1^2k_4 + 10k_3^2 + 60k_1k_2k_3 +\\
&\quad + 20k_1^3k_3 + 15k_2^3 + 45k_1^2k_2^2 + 15k_1^4k_2 + k_1^6 ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Kumulante možemo izraziti i pomoću centralnih momenata, pa se obrasci (4.13.8) svode na

(4.13.10)
$$
\begin{aligned}
k_1 &= \dot{m} ,\\
k_2 &= \mu_2 = \sigma^2 ,\\
k_3 &= \mu_3 ,\\
k_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2 ,\\
k_5 &= \mu_5 - 10\mu_2\mu_3 ,\\
k_6 &= \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3 ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

tako da koeficijente asimetrije i spljoštenosti (4.10.1) i (4.10.2) možemo napisati i u sledećem obliku

(4.13.11)
$$
\gamma_1 = \frac{k_3}{k_2^{3/2}} , \qquad \gamma_2 = \frac{k_4}{k_2^2} .
$$

4.14. Određivanje zakona verovatnoće pomoću karakteristične funkcije. —

I. Neka je raspored prekidan. Poznata je k.f. a traži se da se odredi z.v., tj. vrednosti x_ν i p_ν. Formirajmo funkciju

(4.14.1)
$$
g(t,x) = \varphi(t)\, e^{-itx}
$$

Smenom (4.12.6) funkcija $g(t, x)$ postaje

$$g(t,x) = \sum_{\nu} p_{\nu} e^{it(x_{\nu}-x)} = \tag{4.14.2}$$
$$= \sum_{\nu} p_{\nu} \cos t(x_{\nu}-x) + i \sum_{\nu} p_{\nu} \sin t(x_{\nu}-x)$$

i odredimo njen određeni integral duž ma kog intevrala dužine l na t-osi, tj.

$$\frac{1}{l} \int_{t_0}^{t_0+l} g(t,x)\, dt\,, \tag{4.14.3}$$

puštajući pri tome da $l \to \infty$. Integral pretstavlja jednu funkciju po x a tražimo vrednost

$$H(x) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \int_{(l)} g(t,x)\, dt. \tag{4.14.4}$$

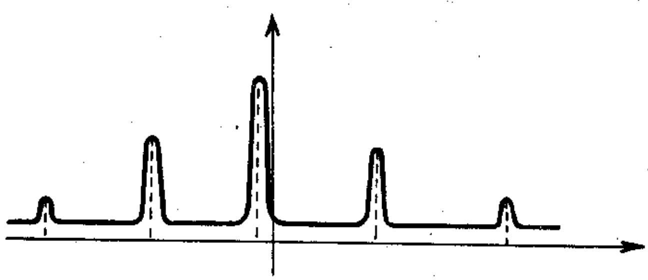
Ako je $x \neq x_{\nu}$ za svako $\nu = 1, 2, \ldots$, integral $\int_{(l)} g(t, x)\, dx$ ima zbog (4.14.2) ograničenu vrednost, bez obzira koliko je l, tako da $H(x) = 0$ kad $l \to \infty$. Ukoliko je $x = x_{\nu}$,

$$H(x) = \frac{1}{l} \int_{(l)} p_{\nu}\, dt = p_{\nu}.$$

Otuda

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \neq x_{\nu} \\ p_{\nu} & \text{za } x = x_{\nu}. \end{cases} \tag{4.14.5}$$

U praksi se za l uzima jedna velika vrednost i konstruiše se funkcija $H(x)$. Apscise maksimuma biće tražene vrednosti x_{ν} a ordinate tih maksimuma biće vrednosti p_{ν} (vidi dijagram (4.14.I)).



Dijagram (4.14.I)

II. Neka je raspored neprekidan. Poznata je k.f. a traži se da se odredi z.v., tj. funkcija $f(x)$. Pre nego što pređemo na određivanje funkcije $f(x)$ pomoću k.f. $\varphi_X(t)$, potsetimo se drugog stava o srednjoj vrednosti integrala i Dirichlet-ovog integrala.

Drugi stav o srednjoj vrednosti integrala glasi:

1) Ako funkcija $g(x)$ ne raste u intervalu (a, b) a funkcija $f(x)$ je integrabilna, tada je

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(a+0) \int_a^t f(x)\, dx\,, \qquad a \leqslant t \leqslant b\,; \tag{4.14.6}$$

2) Ako funkcija $g(x)$ ne opada u intervalu (a, b) a funkcija $f(x)$ je integrabilna, tada je

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(b-0) \int_t^b f(x)\, dx\,, \qquad a \leqslant t \leqslant b\,. \tag{4.14.7}$$

Pod pretpostavkom da je funkcija $g(x)$ monotona, bez obzira da li ona menja ili ne svoj predznak u intervalu (a, b), drugi stav o srednjoj vrednosti integrala možemo izraziti i ovako

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(a+0) \int_a^t f(x)\, dx + g(b-0) \int_t^b f(x) dx\,, \quad a \leqslant t \leqslant b\,. \tag{4.14.8}$$

Potsetimo se još poznatih rezultata

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{dx}\, dx = \frac{\pi}{2}\,, \tag{4.14.9}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{nb} \frac{\sin nx}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^b \frac{\sin ny}{y}\, dy\,,$$

gde smo uzeli smenu $y = x/n$. Tako je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b \frac{\sin nx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{4.14.10}$$

Dirichlet-ov integral je oblika

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx\,, \qquad n > 0 \tag{4.14.11}$$

gde je $f(x)$ funkcija ograničene varijacije u (a, b).

Dokažimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx = \frac{f(+0) + f(-0)}{2}\,, \tag{4.14.12}$$

gde je

$$f(+0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(0+\varepsilon)\,,$$

$$f(-0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(0-\varepsilon)\,.$$

Pretpostavimo najpre da je $f(x)$ monotona funkcija u (a, b), gde je $a = 0$, a b pozitivno. Izvršimo produženje funkcije $f(x)$ uzimajući da je

$$f(x) = 0 \quad \text{za} \quad x < a \ \text{i} \ x > b.$$

Zato je $f(-0) = 0$, pa je potrebno dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^b f(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx = f(+0),$$

ili kako je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b \frac{\sin nx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^b f(+0) \frac{\sin nx}{x}\, dx = f(+0),$$

to treba dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^b \left[f(x) - f(+0)\right] \frac{\sin nx}{x}\, dx = 0. \tag{4.14.13}$$

Zaista, za $x = 0$, funkcija $[f(x) - f(+0)]$ ima nulu za graničnu vrednost. Prema tome, jednom proizvoljno malom unapred datom broju ε odgovaraće jedan broj δ, takav da je

$$\left| f(x) - f(+0) \right| < \varepsilon$$

za

$$0 < x \leqslant \delta.$$

Podelimo interval integracije $(0, b)$ na dva intervala $(0, \delta)$ i (δ, b). Biće

$$\int_0^b \left[f(x) - f(+0)\right] \frac{\sin nx}{x}\, dx = \int_0^\delta + \int_\delta^b .$$

Primenjujući na svaki od ova dva integrala drugi stav o srednjoj vrednosti integrala, postaje

$$\int_0^b \left[f(x) - f(+0)\right] \frac{\sin nx}{x}\, dx = \left[f(+0) - f(+0)\right] \int_0^\xi \frac{\sin nx}{x}\, dx +$$

$$+ \left[f(\delta) - f(+0)\right] \int_\xi^\delta \frac{\sin nx}{x}\, dx + \left[f(\delta) - f(+0)\right] \int_\delta^{\xi'} \frac{\sin nx}{x}\, dx +$$

$$+ \left[f(b) - f(+0)\right] \int_{\xi'}^b \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

gde je

$$0 < \xi < \delta,$$
$$\delta < \xi' < b.$$

U svakom integralu figuriše

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

gde su α i β pozitivni brojevi. Kako je $\frac{1}{x}$ stalno opadajuća funkcija u intervalu ($\alpha > 0$, β), to primenom drugog stava o srednjim vrednostima za slučaj pod 2) biće

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin nx}{x}\, dx\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\int_{\alpha}^{\xi''} \sin nx\, dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\alpha n}\int_{n\alpha}^{n\xi''} \sin nx\, dx\right| < \frac{2}{\alpha n}, \qquad (\alpha < \xi'' < \beta).$$

S druge strane, kako je integral $\int_{\alpha}^{\beta} (\sin nx)/x\, dx$ konvergentan, to postoji uvek jedna konstanta A za koju je

$$\left|\int_{\xi}^{\delta} \frac{\sin nx}{x}\, dx\right| < A.$$

Prema tome, biće

$$\left|\int_{0}^{b} [f(x) - f(+0)] \frac{\sin nx}{x}\, dx\right| < |f(\delta) - f(+0)| A +$$

$$+ |f(\delta) - f(+0)| \frac{2}{n\delta} + |f(b) - f(+0)| \frac{2}{n\xi'} <$$

$$< A\varepsilon + |f(\delta) - f(+0)| \frac{2}{n\delta} + |f(b) - f(+0)| \frac{2}{n\delta}.$$

Iz ovoga sledi da, za dovoljno veliko n, integral

$$\int_{0}^{b} [f(x) - f(+0)] \frac{\sin nx}{x}\, dx$$

možemo uvek udesiti proizvoljno malim, što znači da je zaista

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{b} [f(x) - f(+0)] \frac{\sin nx}{x}\, dx = 0$$

a samim tim i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^b f(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx = f(+0).$$

Vršeći smenu $x = -x$, neposredno dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_a^0 f(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = f(-0),$$

gde je a jedan proizvoljan negativan broj. Ukoliko su a i b suprotnog znaka, biće tada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{f(+0)+f(-0)}{2}$$

Najzad, ako su a i b istog znaka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx = 0.$$

Neka su $f(x)$ z.v. a $\varphi(t)$ k.f. od a.p. X. Dokažimo da je

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} e^{-itx}\varphi(t)\,dt, \tag{4.14.14}$$

odnosno ako integralimo po t u granicama od 0 do x stavljajući $\int_0^x = \int_{-x}^x - \int_{-x}^0$, dokažimo da je

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{1-e^{itx}}{it}\,\varphi(t)\,dt. \tag{4.14.15}$$

Dokaz. Posmatrajmo integral

$$\mathcal{J} = \int_{-c}^{c}\frac{1-e^{itx}}{it}\,\varphi(t)\,dt = \int_{-c}^{c} dt\left[\int_0^x e^{-ity}dy\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\,dF(u)\right].$$

Proizvod integrala po y i po u je jedan dvostruki integral, apsolutno konvergentan, koji, ako u smenimo sa $u+y$, možemo da pišemo i na sledeći način

$$\int_0^x dy\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\,d_uF(u+y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\,d_u\int_0^x F(u+y)\,dy,$$

tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\left[F(u+x) - F(u)\right]du.$$

Ovaj izraz, majojiran sa

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [F(u+x) - F(u)] du \right| = |x| ,$$

uniformno je konvergentan po t. Možemo, dakle, da integrišemo po t pod znakom integrala, pa je

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-c}^{+c} e^{itu} dt \left[F(u+x) - F(u)\right] du ,$$

odnosno

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin cu}{u} \left[F(u+x) - F(u)\right] du .$$

Znači da je

$$\mathcal{J} = \int_{-c}^{+c} \frac{1-e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin cu}{u} \left[F(u+x) - F(u)\right] du ,$$

$$\lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1-e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt = 2\pi \left[F(x) - F(0)\right]$$

pošto smo primenili vrednost Dirichlet-ovog integrala. Otuda

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1-e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt$$

ili

(4.14.16)
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt .$$

4.15. Raspored zbira dve nezavisne aleatorne promenljive. — Neka su X i Y dve međusobno nezavisne a.p. sa neprekidnim rasporedima. Označimo sa $F_1(x)$ i $F_2(y)$ njihove f.r. a sa $f_1(x)$ i $f_2(y)$ njihove z.v. Kako su X i Y međusobno nezavisni, to je f.r. aleatorne promenljive (X, Y) jednaka proizvodu iz f.r. od X i f.r. od Y, tj.

(4.15.1)
$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$$

iz čega sleduje i

(4.15.2)
$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

Neka su $G(z)$ i $g(z)$ f.r. i z.v. od a.p.

$$Z = X + Y,$$

tako da je

$$G(z) = \Pr\left\{X+Y \leqslant Z\right\}.$$

Otuda

$$G(z) = \iint\limits_{x+y \leqslant z} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{x+y \leqslant z} f_1(x)\,f_2(y)\,dx\,dy =$$

(4.15.3)

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_2(y)\,dy,$$

ili

(4.15.4) $$G(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(z-x)\,dF_1(x).$$

Analogno smo mogli dobiti

(4.15.5) $$G(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(z-y)\,dF_2(y).$$

Zakon verovatnoće od Z dobićemo diferenciranjem po z leve i desne strane jednačine (4.15.3). Kako je z.v. $f_2(y)$ jedna ograničena funkcija za sve vrednosti y, to možemo diferencirati pod znakom integrala, pa je

(4.15.6) $$g(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx.$$

Očevidno da analogno možemo dobiti

(4.15.7) $$g(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)\,f_2(y)\,dy.$$

Korišćenjem obrasca (4.15.6—7) možemo takođe odrediti aritmetičku sredinu i varijansu od Z.

$$E(Z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\,g(z)\,dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\,f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx\,dz.$$

Smenom $y = z - x$ biće

$$E(Z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x+y)\,f_1(x)\,f_2(y)\,dx\,dy = E(X) + E(Y).$$

Takođe je

$$D^2(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[z-E(X)-E(Y)\right]^2 f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx\,dz$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[x-E(X)\right]+\left[y-E(Y)\right]\right\}^2 f_1(x)\,f_2(y)\,dx\,dy=$$

$$=D^2(X)+D^2(Y).$$

Dalje imamo

(4.15.8) $$\mu_3=\mu_3'+\mu_3'',$$

(4.15.9) $$\mu_4=\mu_4'+6\,\mu_2'\,\mu_2''+\mu_4'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gde su μ_2', μ_3' μ_4', ... centralni momenti od X, a μ_2'', μ_3'', μ_4'', ... centralni momenti od Y.

Napomenimo da obrasci (4.15.4) i (4.15.5) važe i u opštem slučaju (a ne samo kod neprekidnog rasporeda). Međutim, ti će izrazi biti neodređeni za one vrednosti $Z = X + Y$, za koje X i Y pretstavljaju tačke diskontinuiteta funkcija rasporeda $F_1(x)$ i $F_2(y)$. Tada po dogovoru treba prethodno precizirati vrednosti $F_1(x)$ i $F_2(y)$.

Zakon verovatnoće $g(z)$ možemo izraziti i pomoću k.f. $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$. Naime, iz (4.15.6) primenom (4.14.16) dobijamo

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(z-x)}\varphi_2(t)\,dt,$$

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itz}\varphi_2(t)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f_1(x)\,dx.$$

tako da je

(4.15.10) $$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itz}\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,dt.$$

To je, međutim, očevidno, jer k.f. od $g(z)$ je $\varphi_1\cdot\varphi_2$, a (4.15.10) svodi se na (4.14.5).

4.16. Raspored količnika dve nezavisne aleatorne promenljive. — Neka su X i Y dve međusobno nezavisne a.p. sa neprekidnim rasporedima.

Označimo sa $F_1(x)$ i $F_2(y)$ njihove f.r., sa $f_1(x)$ i $f_2(y)$ njihove z.v. a sa $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ njihove k.f. Neka su $G(z)$ i $g(z)$ f.r. i z.v. od a.p.

(4.16.1) $$Z = \frac{X}{Y}$$

i odredimo $g(z)$. Da bi problem bio određen, pretpostavićemo kod drugog rasporeda da je 1) $F_2(0) = 0$ i da 2) $E(Y)$ postoji.

Imamo

$$G(z) = \Pr\left\{\frac{X}{Y} \leqslant Z\right\} = \iint\limits_{\frac{x}{y} \leqslant z} f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\frac{x}{y} \leqslant z} f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} f_2(y)\, dy \int_{-\infty}^{yz} f_1(x)\, dx$$

tako da je

(4.16.2) $$G(z) = \int_0^{\infty} F_1(yz)\, dF_2(y),$$

ili, pod pretpostavkom da možemo da diferenciramo pod znakom integrala,

(4.16.3) $$g(z) = \int_0^{+\infty} y f_2(y)\, f_1(yz)\, dy.$$

Izrazimo $g(z)$ pomoću k.f. $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)\, e^{-itzy} \varphi_1(t)\, dt\, dy.$$

Kako je za svako t moduo podintegralne funkcije manji od funkcije $f_2(y)$ koja je integrabilna u razmaku od 0 do $+\infty$ (na osnovu pretpostavke 2), to možemo izmeniti red integracije pa je

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\, dt \int_0^{\infty} iy e^{-itzy} f_2(y)\, dy.$$

Zbog pretpostavke 2) možemo diferencirati k.f. po t pod znakom integrala, pa je

(4.16.4) $$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\, \varphi_2'(-tz)\, dt.$$

4.17. Konvergencija niza aleatornih promenljivih. — Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ niz aleatornih promenljivih. Po Cantelli-u X_n *konvergira u verovatnoći* ka nekoj konstanti A ako, za svako $\varepsilon > 0$, verovatnoća

$$\Pr\{|X_n - A| < \varepsilon\} \to 1,$$

kad $n \to \infty$.

Kazaćemo da X_n konvergira u verovatnoći ka nekoj a.p. X, ako promenljiva $X_n - X$ konvergira ka nuli, tj. ako, za svako $\varepsilon > 0$, verovatnoća

$$\Pr\left\{|X_n - X| < \varepsilon\right\} \to 1,$$

kad $n \to \infty$.

Uzmimo kao primer relativnu frekvenciju broja ostvarenja očekivanog događaja $f_n = m/n$. Ako je p odgovarajuća prosta verovatnoća, tada je na osnovu Bernoulli-eve teoreme (2.15) za svako pozitivno ε

$$\Pr\left\{|f_n - p| < \varepsilon\right\} \to 1$$

kad $n \to \infty$. Otuda f_n konvergira u verovatnoći ka p.

Slično Cauchy-u, Slutsky je dao kriterijum za konvergenciju u verovatnoći. Pretpostavimo da X_n konvergira u verovatnoći ka X. Tada za svaki par proizvoljnih pozitivnih veličina ε i η ($\eta < 1$) možemo da pišemo

$$\Pr\left\{|X_n - X| < \varepsilon\right\} > 1 - \eta \tag{4.17.1}$$

počev od nekog dovoljno velikog n, recimo $n \geqslant N$. Takođe je

$$\Pr\left\{|X_m - X| < \varepsilon\right\} > 1 - \eta \tag{4.17.2}$$

za svako $m > N$. Sabiranjem (4.17.1) i (4.17.2) i korišćenjem Boole-ove teoreme (1.7.2) dobijamo

$$\Pr\left\{|X_n - X_m| < \varepsilon_1\right\} > 1 - \eta_1, \tag{4.17.3}$$

gde su n i m simultano veći od N, a $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ i $\eta_1 = 2\eta$.

Obratno, pretpostavimo da je za svaki par vrednosti ε i η nejednačina (4.17.3) zadovoljena počev od $n \geqslant N$ i $m \geqslant N$. Treba da dokažemo da tada $X_n \xrightarrow{p} X$, tj. da X_n konvergira u verovatnoći ka X. U tom cilju posmatrajmo konvergentan red $\sum_{\nu} \varepsilon_\nu$ čiji su članovi ε_ν pozitivni i obrazujmo niz N_ν za koji je

$$\Pr\left\{|X_n - X_m| < \varepsilon_\nu\right\} > 1 - \varepsilon_\nu, \qquad n > N_\nu, \ m > N_\nu, \tag{4.17.4}$$

što je uvek moguće s obzirom na datu pretpostavku. Ako udesimo da je pri tome $N_{\nu+1} > N_\nu$, (4.17.4) možemo pisati u obliku

$$\Pr\left\{|X_{N_\nu} - X_{N_{\nu+1}}| \leqslant \varepsilon_\nu\right\} > 1 - \varepsilon_\nu.$$

Koristeći Boole-ovu teoremu (1.7.2) i (1.6.4) verovatnoća da će simultano biti

$$\begin{aligned} &|X_{N_\nu} - X_{N_{\nu+1}}| \leqslant \varepsilon_\nu, \\ &|X_{N_{\nu+1}} - X_{N_{\nu+2}}| \leqslant \varepsilon_{\nu+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &|X_{N_{\nu+\mu}} - X_{N_{\nu+\mu+1}}| \leqslant \varepsilon_{\nu+\mu}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4.17.5}$$

biće veća od $1-\sum_{s=\nu}\varepsilon_s$. Međutim, ako su sve nejednačine (4.17.5) zadovoljene, to će zbir

$$\sum_{\nu=1}^{r-1}\left(X_{N_\nu}-X_{N_{\nu+1}}\right)=X_{N_1}-X_{N_2}$$

pretstavljati jednu a.p. koja konvergira u verovatnoći. Dakle, niz X_{N_ν} konvergira u verovatnoći ka nekoj a.p. X. Tada će, na osnovu (4.17.5), biti

$$\Pr\left\{|X_{N_\nu}-X|\leqslant\sum_{s=\nu}\varepsilon_s\right\}>1-\sum_{s=\nu}\varepsilon_s.$$

S druge strane je, za $n>N_I$

$$\Pr\left\{|X_n-X_{N_\nu}|\leqslant\varepsilon_\nu\right\}>1-\varepsilon_\nu.$$

Zato je

$$\Pr\left\{|X_n-X|\leqslant\varepsilon_\nu+\sum_{s=\nu}\varepsilon_s\right\}>1-\varepsilon_\nu-\sum_{s=\nu}\varepsilon_s \tag{4.17.6}$$

za $n>N_I$. Ako su sada ε i η dva proizvoljna, pozitivna broja, možemo ν izabrati uvek dovoljno veliko da zbir $2\varepsilon_\nu+\varepsilon_{\nu+1}+\dots$ bude manji i od ε i od η. Kako je nejednačina (4.17.6) zadovoljena, to će tada utoliko pre biti

$$\Pr\left\{|X_n-X|\leqslant\varepsilon\right\}>1-\eta \tag{4.17.7}$$

za $n>N_{\nu_0}$ tj. $X_n \xrightarrow{p} X$. Otuda

Slutsky-ev kriterijum: Potreban i dovoljan uslov da jedan niz a.p. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ *konvergira u verovatnoći je da za proizvoljne pozitivne brojeve* ε i η *postoji takvo* N *da*

$$\Pr\left\{|X_n-X_m|>\varepsilon\right\}<\eta$$

za $n>N$ i $m>N$.

Neka je $Z_1, Z_2, \dots$ jedan niz a.p. sa pretpostavkom da aritmetičke sredine $E(Z_n)$ i standardne devijacije $D(Z_n)$ postoje za svako n i da $D(Z_n)\to 0$ kad $n\to\infty$. Koristeći Čebiševljevu teoremu (4.9) dobijamo neposredno da je

$$\Pr\left\{|Z_n-E(Z_n)|<\varepsilon\right\}>1-\frac{D^2(Z_n)}{\varepsilon^2}.$$

Kako po pretpostavci $D(Z_n)\to 0$ kad $n\to\infty$, to uvek možemo da odredimo jedno takvo N da za proizvoljno data dva pozitivna broja ε i η bude

$$\eta>\frac{D^2(Z_n)}{\varepsilon^2} \qquad \text{za } n>N, \tag{4.17.8}$$

tako da je

$$\Pr\left\{|Z_n-E(Z_n)|<\varepsilon\right\}>1-\eta \tag{4.17.9}$$

za $n>N$. Iz (4.17.9) proizilazi zaključak da $Z_n \xrightarrow{p} E(Z_n)$.

Za a.p. kod koje varijansa teži nuli, kažemo da je *skoro izvesna.*

Iz gornjega Čebišev je neposredno došao do rezultata koji ćemo iskazati sledećom teoremom:

Neka su $X_1, X_2, \ldots$ *međusobno nezavisne a.p. i neka je* $E(X_n) = m_n$ *a* $D^2(X_n) = \sigma_n$. *Stavimo*

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{i} \quad E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Ako su svi σ_i *ograničeni zajedničkom gornjom granicom* a, *tada* $Z_n \xrightarrow{p} E(Z_n)$.

Naime, proširujući (4.11.11) na n a.p. i koristeći (4.8.6) biće

$$D^2(Z_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \leqslant \frac{a^2}{n} \to 0, \text{ kad } n \to \infty .$$

Zato, ako je

$$n > \frac{a}{\varepsilon^2 \eta}$$

biće zadovoljena nejednačina (4.17.8) tako da $Z_n \xrightarrow{p} E(Z_n)$.

4.18. Konvergencija niza funkcija rasporeda. — Neka su X i Y dve a.p. sa respektivnim f.r. $F_1(x)$ i $F_2(y)$. Ako su x i $\varepsilon > 0$ dva izvesna broja, pokažimo da tada postoji veza

$$|F_2(x) - F_1(x)| \leqslant \varepsilon + \{F_1(x+\varepsilon) - F_2(x-\varepsilon)\} \tag{4.18.1}$$

Zaista, neka su a i b sledeće propozicije

$$a: \ |X-Y| \leqslant \varepsilon , \qquad b: \ Y \leqslant x$$

tako da je

$$a/h = \Pr\{|X-Y| \leqslant \varepsilon\}, \qquad b/h = F_2(x).$$

Ako je

$$\Pr\{|X-Y| \leqslant \varepsilon\} > 1-\eta$$

iz (1.7.1) sleduje da je

$$(ab)/h \geqslant F_2(x) - \eta .$$

Propozicija (ab) zahteva simultano zadovoljenje nejednačina

$$Y - \varepsilon < X \leqslant Y + \varepsilon ,$$

$$Y \leqslant x .$$

Ta propozicija sadrži propoziciju

$$c: \ X \leqslant x + \varepsilon$$

pa je

$$c/h \geqslant (ab)/h \geqslant F_2(x) - \eta . \tag{4.18.2}$$

Na isti način, ako sa c' označimo propoziciju

$$c': \quad X > x - \varepsilon,$$

biće

$$c'/h \geqslant (a\bar{b})/h \geqslant 1 - F_2(x) - \eta,$$

ili

$$\bar{c}'/h < F_2(x) + \eta. \tag{4.18.3}$$

Kako je $F_1(x)$ f.r. od X, to (4.18.2) i (4.18.3) možemo napisati u obliku

$$F_1(x+\varepsilon) \geqslant F_2(x) - \eta,$$
$$1 - F_1(x-\varepsilon) < F_2(x) + \eta$$

ili

$$F_1(x-\varepsilon) - \eta < F_2(x) \leqslant F_1(x+\varepsilon) + \eta. \tag{4.18.4}$$

Usled monotonije funkcija rasporeda možemo pisati

$$-F_1(x+\varepsilon) \leqslant -F_1(x) \leqslant -F_1(x-\varepsilon), \tag{4.18.5}$$

tako da sabiranjem (4.18.4) i (4.18.5) dobijamo

$$-\eta - F_1(x+\varepsilon) + F_1(x-\varepsilon) < F_2(x) - F_1(x) \leqslant \eta + F_1(x+\varepsilon) - F_1(x-\varepsilon)$$

ili

$$|F_2(x) - F_1(x)| \leqslant \eta + F_1(x+\varepsilon) - F_1(x-\varepsilon)$$

čime je gornje tvrđenje dokazano.

Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ jedan niz a.p. koji konvergira u verovatnoći ka a.p. X. Neka su $F_n(x)$ i $F(x)$ njihove respektivne f.r., tj.

$$F_n(x) = Pr\{X_n \leqslant x\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$F(x) = Pr\{X \leqslant x\}.$$

Kako smo pretpostavili da niz konvergira u verovatnoći, to svakom paru proizvoljnih pozitivnih vrednosti ε i η odgovara jedan ceo broj N, takav da je

$$Pr\{|X_n - X| \leqslant \varepsilon\} > 1 - \eta$$

za $n > N$. Koristeći (4.18.1) dobićemo

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant F(x-\varepsilon) - F(x-\varepsilon) + \eta.$$

Ako pretpostavimo da je F neprekidna u tački x, to uvek možemo izabrati brojeve ε i η tako da desnu stranu gornje nejednačine možemo učiniti proizvoljno malom. Otuda $F_n(x) \to F(x)$ u svakoj tački kontinuiteta f.r. $F(x)$. Drugim rečima, $F_n(x) \to F(x)$ za sve vrednosti od x sem najviše u jednom prebrojivom skupu tačaka koliko može f.r., s obzirom da je monotona, imati tačaka diskontinuiteta. Otuda možemo uvek odrediti $F(x)$ ako nam je poznat niz f.r. $\{F_n(x)\}$. Ukoliko je $F(x)$ jedna neprekidna funkcija, konvergencija će biti uniformna, tj.

$$F_n(x) \xrightarrow{U} F(x).$$

Međutim, obratan stav ne važi, tj. iz konvergencije niza f.r. $\{F_n(x)\}$ ka jednoj f.r. $F(x)$ ne mora da sleduje da odgovarajući niz a.p. $\{X_n\}$ konvergira u verovatnoći ka a.p. X sa f.r. $F(x)$. Cantelli je pokazao da je potreban i dovoljan uslov da jedan niz a.p. $\{X_n\}$ konvergira u verovatnoći ka a.p. X, da f.r. razlike $X_n - X$ konvergira ka nuli za $x < 0$ i ka jedinici za $x > 0$.

4.19. Granična teorema karakteristične funkcije: *Ako* $F_n(x) \to F(x)$, *tada i odgovarajuća k.f.* $\varphi_n(t)$ *konvergira ka k.f.* $\varphi(t)$ *funkcije rasporeda* $F(x)$ *i to uniformno u svakom konačnom razmaku promenljive* t ($|t| < T$).

Dokaz. Po definiciji je

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF_n(x) \quad \text{i} \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x).$$

Odredimo vrednost A tako da je

$$\varphi(t) - \int_{-A}^{A} e^{itx}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{-A} e^{itx}\, dF(x) + \int_{A}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x) < 2\eta.$$

S obzirom da je $|e^{itx}| = 1$, to je

$$\left|\int_{-\infty}^{-A} e^{itx}\, dF(x)\right| \leqslant F(-A), \qquad \left|\int_{A}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)\right| \leqslant 1 - F(A).$$

Na isti način je i

$$\varphi_n(t) - \int_{-A}^{A} e^{itx}\, dF_n(x) = \int_{-\infty}^{-A} e^{itx}\, dF_n(x) + \int_{A}^{+\infty} e^{itx}\, dF_n(x) < 2\eta$$

gde je

$$\left|\int_{-\infty}^{-A} e^{itx}\, dF_n(x)\right| \leqslant F_n(-A), \qquad \left|\int_{A}^{\infty} e^{itx}\, dF_n(x)\right| \leqslant 1 - F_n(A)$$

Uzmimo za A dovoljno veliku vrednost za koju je $F(x)$ neprekidno i

$$F(-A) < \eta, \qquad 1 - F(A) < \eta.$$

S obzirom da smo pretpostavili i da $F_n(x) \to F(x)$, to možemo odrediti jedan takav ceo broj N_1 da bude

$$\begin{aligned} &|F_n(-A) - F(-A)| < \eta, \\ &|F_n(A) - F(A)| < \eta, \end{aligned} \tag{4.19.1}$$

tj.

$$F_n(-A) < 2\eta \ \text{ i } \ 1 - F_n(A) < 2\eta ,$$

ako je $n > N_1$.

S druge strane je

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \left|\int_{-A}^{A} e^{itx} d\left[F_n(x) - F(x)\right]\right| + 6\eta$$

ako je $n > N_1$. Podelimo sada razmak $(-A, A)$ jednim nizom tačaka x_ν u kojima je $F(x)$ neprekidna i za koje je

$$max.\{x_\nu - x_{\nu+1}\} < \eta ,$$

gde je k jedan dat pozitivan broj. Tada je

$$\int_{-A}^{A} e^{itx} d\left[F_n(x) - F(x)\right] = \sum_\nu e^{itx_\nu} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} d\left[F_n(x) - F(x)\right] + \sum_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (e^{itx} - e^{itx_\nu}) d\left[F_n(x) - F(x)\right] =$$

$$= \sum_\nu e^{itx_\nu}(\Delta_\nu F_n - \Delta_\nu F) + \sum_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (e^{itx} - e^{itx_\nu}) d\left[F_n(x) - F(x)\right],$$

gde je

$$\Delta_\nu F_n = \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} dF_n(x),$$

$$\Delta_\nu F = \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} dF(x).$$

Kako je

$$e^{itx} - e^{itx_\nu} = \int_{x_\nu}^{x} it e^{itx} dx$$

a prema pretpostavci $|t| < T$, to je

$$\left|e^{itx} - e^{itx_\nu}\right| < \int_{x_\nu}^{x} |t| dx < T(x - x_\nu) < \eta T .$$

Zato je

$$\left|\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} (e^{itx} - e^{itx_\nu}) d\left[F_n(x) - F(x)\right]\right| < \eta T(\Delta_\nu F_n - \Delta_\nu F)$$

i

$$\left|\int_{-A}^{A} e^{itx} d\left[F_n(x)-F(x)\right]\right| < \sum_{\nu} |\Delta_\nu F_n - \Delta_\nu F| + 2\eta T$$

jer je

$$\sum_{\nu} \Delta_\nu F_n = \sum_{\nu} \Delta_\nu F = 1.$$

Stavljajući $\eta = \frac{\varepsilon}{8}$ i uzimajući da je $\eta < \frac{\varepsilon}{16T}$ biće

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \sum_{\nu} |\Delta_\nu F_n - \Delta_\nu F| + \frac{7\varepsilon}{8}$$

Dokažimo još da uvek možemo odrediti jedno takvo N_2 da bude

$$\sum_{\nu} |\Delta_\nu F_n - \Delta_\nu F| < \frac{\varepsilon}{8}$$

za $n > N_2$. Ako je ukupno p podrazmaka $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$, to zbog konvergencije $F_n(x) \to F(x)$ uvek možemo odrediti jedno takvo N_2 da istovremeno bude

$$|\Delta_\nu F_n - \Delta_\nu F| < \frac{\varepsilon}{8p}$$

za svako $\nu = 1, 2, \ldots, p$. Ako sa $N(\varepsilon)$ označimo veći od brojeva N_1 i N_2, to dobijamo da je

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

za $n > N(\varepsilon)$ i $|t| < T$.

4.20. Recipročna teorema: *Ako karakteristična funkcija $\varphi_n(t)$ konvergira ka nekoj funkciji $\varphi(t)$ i ako je ta konvergencija uniformna u okolini tačke $t = 0$, tada odgovarajuća f.r. $F_n(x)$ teži ka f.r. $F(x)$ čija je k.f. $\varphi(t)$.*

Dokaz ove teoreme svodi se samo na dokaz da $F_n(x) \to F(x)$ i da je $F(x)$ jedna f.r. jer se tada na osnovu teoreme 4.19 neposredno izvodi zaključak da je $\varphi(t)$ k.f. od $F(x)$.

Primedba I. Na osnovu Bolzano-Weierstass-ove teoreme ograničeni skup tačaka na jednoj pravoj sadrži bar jednu tačku nagomilavanja i uvek možemo izdvojiti jedan potskup tačaka koji će biti konvergentan niz. Skup preostalih tačaka biće prazan ako skup sadrži samo jednu tačku nagomilavanja. Analogno tome iz jednog skupa ograničenih i monotonih funkcija $0 \leqslant F_n(x) \leqslant 1$ možemo uvek izdvojiti jedan niz $\{F_{n'}(x)\}$ koji konvergira ka nekoj ograničenoj i monotonoj funkciji $F(x)$. U posmatranom slučaju ta je funkcija istovremeno i jedini elemenat nagomilavanja, jer kad bi mogli da izdvojimo jedan drugi niz $\{F_{n''}(x)\}$ koji konvergira ka $F^*(x)$ to na osnovu pretpostavke da $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$, F i F^* imaćemo istu k.f. $\varphi(t)$ pa je $F \equiv F^*$.

Primedba II. Funkcija

$$G(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} F(u)\,du, \tag{4.20.1}$$

gde je $F(u)$ funkcija rasporeda, pretstavlja takođe jednu funkciju rasporeda čija je k.f.

(4.20.2) $$\Phi(t) = \frac{1-e^{-ith}}{ith}\varphi(t).$$

Zaista, iz

$$G(-\infty)=0, \quad G(+\infty)=1, \quad G(x)\geqslant 0$$

vidimo da je $G(x)$ f.r. a po definiciji je

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dG(x)=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\left\{F(x+h)-F(x)\right\}dx =$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{it}e^{itx}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{ith}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}d\left[F(x+h)-F(x)\right]=$$

$$=-\frac{1}{ith}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{it(x-h)}-e^{itx}\right]dF(x)=\frac{1-e^{-ith}}{ith}\varphi(t).$$

Dokaz teoreme. Koristeći obrazac (4.14.15) dobijamo

$$G(x)-G(x-h)=G(x)-G(o)-\left[G(x-h)-G(o)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-itx}}{it}\Phi(t)\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-it(x-h)}}{it}\Phi(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-ith}}{it}e^{-it(x-h)}\Phi(t)\,dt.$$

Uzimajući u obzir (4.20.1) i (4.20.2) postaje

(4.20.3) $$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}F(u)\,du-\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}F(u)\,du=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-ith}}{it}\right)^2 e^{-it(x-h)}\varphi(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{-\frac{2itx}{h}}\varphi\left(\frac{2t}{h}\right)dt,$$

gde smo još t smenili sa $\frac{2t}{h}$.

U primedbi I videli smo da iz niza $\{F_n(x)\}$ možemo uvek da izdvojimo niz $\{F_{n'}(x)\}$ koji konvergira ka jednoj monotonoj i ograničenoj funkciji $F(x)$ u svakoj tački kontinuiteta od $F(x)$. Pokažimo da je to jedna f.r., tj. da je $F(+\infty)-F(-\infty)=1$ i pretpostavimo da je $F(x)$ neprekidna s leve strane. Za $x=0$ (4.20.3) postaje

$$\frac{1}{h}\left\{\int_0^h F_{n'}(u)\,du-\int_{-h}^0 F_{n'}(u)\,du\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\varphi_{n'}\left(\frac{2t}{h}\right)dt. \tag{4.20.4}$$

Kad $n'\to\infty$, $F_{n'}\to F$ i kako su integrali s leve strane od (4.20.4) sa konačnim granicama, to njihovu graničnu vrednost dobijamo kad $F_{n'}$ smenimo sa F. Podintegralna funkcija s desne strane manja je po modulu od funkcije $(\sin t)^2/t^2$, zbog (4.12.2), koja je integrabilna u razmaku $(-\infty,\infty)$. Zato je

$$\frac{1}{h}\left\{\int_0^h F(u)\,du-\int_{-h}^0 F(u)\,du\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\varphi\left(\frac{2t}{h}\right)dt$$

kad $n'\to\infty$. Kako je $\varphi(t)$ neprekidno u tački $t=0$, to $\varphi\left(\frac{2t}{h}\right)\to\varphi(0)$ kad $h\to\infty$ i to za svako t. Osim toga je $\varphi_n(0)=1$ za svako n i $\varphi(0)=1$, s obzirom da su $\varphi(t)$ i $\varphi_n(t)$ karakteristične funkcije. Zato, kad $h\to\infty$, dobijamo

$$F(+\infty)-F(-\infty)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt=1$$

iz čega sleduje da je

$$F(-\infty)=0,\qquad F(+\infty)=1$$

tako da je funkcija $F(x)$, kojoj teži niz $\{F_{n'}(x)\}$, jedna funkcija rasporeda.

U primedbi I videli smo da ako neki drugi niz $\{F_{n''}(x)\}$ skupa $\{F(x)\}$ teži ka f.r. $F^*(x)$, mora biti $F\equiv F^*$. Zato svaki niz skupa $\{F_n(x)\}$ teži ka istoj f.r. $F(x)$, odnosno $F_n(x)\to F(x)$. Time je teorema dokazana.

4.21. Primeri

4.21.1. Pokazati da je

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

Neka je $\{a_l\}$ jedan monotono opadajući niz brojeva, čiji opšti član $a_n\to-\infty$. Tada iz

$$\Pr\{X\leqslant a_1\}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\Pr\{a_{\nu+1}<X\leqslant a_\nu\}$$

sleduje

$$F(a_1)=\lim_{a_n\to-\infty}\left[F(a_1)-F(a_n)\right],$$

tj.

$$\lim_{a_n \to -\infty} F(a_n) = 0.$$

Ako je $\{b_n\}$ jedan monotono rastući niz brojeva čiji opšti član $b_n \to +\infty$, tada iz

$$\Pr\left\{X > b_1\right\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Pr\left\{b_\nu < X \leqslant b_{\nu+1}\right\}$$

sleduje

$$1 - F(b_1) = \lim_{b_n \to +\infty}\left[F(b_n) - F(b_1)\right],$$

tj.

$$\lim_{n \to \infty} F(b_n) = 1.$$

4.21.2. Dokazati da postoji bar jedna vrednost medijane, tj. bar jedna vrednost μ_e, takva da je istovremeno

$$\Pr\left\{X < \mu_e\right\} \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\Pr\left\{X > \mu_e\right\} \leqslant \frac{1}{2}. \quad \text{(M. Fréchet).}$$

Neka je μ' gornja granica brojeva α za koje je

$$\Pr\left\{X < \alpha\right\} < \frac{1}{2}$$

a μ'' donja granica brojeva β za koje je

$$\Pr\left\{X > \beta\right\} < \frac{1}{2}.$$

Ma koje α može u najboljem slučaju biti jednako bilo kom β, pa je $\mu' \leqslant \mu''$. Zato je

$$F(\mu' - 0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F(\mu'' + 0)$$

$$F(\mu' - 0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F(\mu' + 0) \leqslant F(\mu'' - 0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F(\mu'' + 0),$$

tj.

$$F(\mu' - 0) \leqslant \frac{1}{2} = F(\mu' + 0) = F(\mu'' - 0) = \frac{1}{2} \leqslant F(\mu'' + 0)$$

tako da je

$$\Pr\left\{X < \mu\right\} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \Pr\left\{X > \mu\right\},$$

kad god je

$$\mu' < \mu < \mu''$$

što znači da uvek postoji bar jedna vrednost medijane a ako ih ima više, one pretstavljaju ma koju tačku zatvorenog razmaka (μ', μ''). Za svaku unutrašnju tačku tog razmaka je

$$\Pr\{X < \mu\} = \Pr\{X > \mu\} = \frac{1}{2}.$$

4.21.3. Pokazati da postoji sledeća veza između a.s., medijane i standardne devijacije

$$|\mu_e - m| \leqslant \sigma\sqrt{2}.$$

Ako u (4.9.2) stavimo $\alpha = \sqrt{2}$, dobijamo

$$\Pr\{|X - m| \geqslant \sigma\sqrt{2}\} \leqslant \frac{1}{2}$$

ili

$$\Pr\{m + \sigma\sqrt{2} \leqslant X \leqslant m - \sigma\sqrt{2}\} \leqslant \frac{1}{2};$$

ili koristeći (4.3.2)

$$F(m + \sigma\sqrt{2}) - F(m - \sigma\sqrt{2}) \geqslant \frac{1}{2},$$

tj.

$$F(m + \sigma\sqrt{2}) - F(m - \sigma\sqrt{2}) \geqslant F(\mu_e).$$

Kako je f.r. $F(x)$ monotono neopadajuća funkcija, to je

$$m + \sigma\sqrt{2} \leqslant \mu_e \leqslant m - \sigma\sqrt{2}$$

ili

$$|\mu_e - m| \leqslant \sigma\sqrt{2}.$$

4.21.4. Aritmetička sredina m-tog reda niza vrednosti

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots < x_k$$

po definiciji je

$$a_m = \left(p_1 x_1^m + p_2 x_2^m + \cdots + p_k x_k^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

Kolika je aritmetička sredina beskonačnog i nultog reda?

Iz gornjeg obrasca dobijamo

$$a_m = p_k^{\frac{1}{m}} x_k \left[1 + \frac{p_{k-1}}{p_k}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^m + \cdots\cdots\right].$$

Kad $m \to \infty$, $p_k^{1/m} \to p_k^0 = 1$, $(x_{k-1}/x_k)^m \to 0$, $(x_{k-2}/x_k)^m \to 0$, ... pa je

$$a_\infty = x_k.$$

Slično dobijamo da je

$$a_{-\infty} = x_1.$$

Ako je m negativno i teži ka nuli, odgovarajući niz $\{a_m\}$ je rastući niz (4.8.12) i ograničen sa gornje strane aritmetičkom sredinom prvog reda. Prema tome, aritmetička sredina nultog reda postoji. Deleći jednačinu

$$a_m^m - 1 = p_1(x_1^m - 1) + p_2(x_2^m - 1) + \cdots + p_k(x_k^m - 1)$$

sa m dobijamo

$$\frac{a_m^m - 1}{m} = p_1 \frac{x_1^m - 1}{m} + p_2 \frac{x_2^m - 1}{m} + \cdots\cdots + p_k \frac{x_k^m - 1}{m}$$

Kad $m \to \infty$, tada $a_m \to a_0$

$$\log a_0 = p_1 \log x_1 + p_2 \log x_2 + \cdots + p_k \log x_k ,$$

tj.

$$a_0 = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots . x_k^{p_k} = G .$$

Vidimo da je aritmetička sredina nultog reda ustvari geometriska sredina.

4.21.5. Dokazati Cauchy-evu teoremu: *Harmoniska sredina je manja od geometriske sredine a geometriska sredina je manja od aritmetičke sredine, tj.*

$$H < G < m .$$

Pokažimo najpre da je

$$G < m ,$$

tj.

$$x_1 x_2 \ldots . x_k < \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \right)^k ,$$

gde bar dve od vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nisu jednake međusobno. Za $k = 2$ nejednačina je očevidna, jer

$$x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right)^2 < \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2$$

Slično, za $k = 4$ biće

$$x_1 x_2 x_3 x_4 < \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right)^2 < \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right)^4$$

Za $k = 8$

$$x_1 x_2 \ldots . x_8 < \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right)^4 \left(\frac{x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{4} \right)^4 < \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_8}{8} \right)^8 ,$$

itd. Za $k = 2^n$ biće

$$x_1 x_2 x_3 \ldots . < \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots}{2^n} \right)^{2^n} .$$

Ako k ne pripada progresiji $\{2^n\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, i ako izaberemo ono n za koje je $2^n > k$, tada možemo niz $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ da dopunimo sa $2^n - k$ jednakih članova m tako da ponovo dobijamo gornju nejednačinu, tj.

$$x_1 x_2 \dots x_k m^{2^n - k} < \left[\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_k + (2^n - k) m}{2^n}\right]^{2^n},$$

odnosno

$$x_1 x_2 \dots x_k m^{2^m - k} < m^{2^n},$$

pa je

$$x_1 x_2 \dots x_k < m^k = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right)^k$$

Ostaje da pokažemo da je

$$H < G,$$

tj.

$$\frac{k}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_k}} < (x_1 x_2 \dots x_k)^{\frac{1}{k}}$$

Uzimajući recipročne vrednosti leve i desne strane dobijamo nejednačinu

$$\left(\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_k}\right)^{\frac{1}{k}} < \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k}}{k},$$

koju treba da dokažemo. Leva strana je geometriska sredina a desna aritmetička sredina vrednosti $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_k}$ i iz gore dobijenog neposredno sleduje da ova nejednačina mora biti zadovoljena.

4.21.6. Neka su X i Y dve nezavisne a.p. a Z njihov zbir, tj. $Z = X + Y$. Odrediti r-ti običan momenat a.p. Z.

Iz

$$Z^r = (X+Y)^r = \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} X^{r-\nu} Y^\nu$$

sleduje

$$E(Z^r) = \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} E(X^{r-\nu} Y^\nu),$$

tj.

$$E(Z^r) = \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} E(X^{r-\nu}) E(Y^\nu)$$

s obzirom da su X i Y nezavisni međusobno.

Za $r = 1$ i 2 biće

$$E(Z) = E(X) + E(Y),$$

$$E(Z^2) = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(X)E(Y),$$

tako da je

$$D^2(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = D^2(X) + D^2(Y).$$

4.21.7. Odrediti funkciju rasporeda a.p. $Z = X_1/X_2$ ako je $F_2(0) = 0$ i ako integral

$$\int_1^\infty \left| \frac{\varphi_2(t)}{t} \right| dt$$

konvergira.

Iz (4.16.4) neposredno dobijamo

$$G(z) = \int_0^z g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i} \int_0^z \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\,\varphi_2'(-tx)\,dt\,dx,$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\,dt \int_0^z \varphi_2'(-tx)\,dx,$$

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \left[\frac{\varphi_2(0) - \varphi_2(-tz)}{t} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t)\,\varphi_2(-tz)}{t}\,dt.$$

4.21.8. Data su dva rasporeda aleatornih promenljivih X_1 i X_2 sa respektivnim zakonima verovatnoća

$$f_1(x) = \frac{\alpha_1^{\lambda_1}}{\Gamma(\lambda_1)}\, x^{\lambda_1 - 1} e^{-\alpha_1 x} \qquad \alpha_1 > 0,\ \lambda_1 > 0 \quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

$$f_2(x) = \frac{\alpha_2^{\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_2)}\, x^{\lambda_2 - 1} e^{-\alpha_2 x}, \qquad \alpha_2 > 0,\ \lambda_2 > 0 \quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Odrediti z.v. od $Z = X_1/X_2$ (H.Cramér).

Karakteristične funkcije od X_1 i X_2 su

$$\varphi_1(t) = \left(1 - \frac{it}{\alpha_1}\right)^{\lambda_1},$$

$$\varphi_2(t) = \left(1 - \frac{it}{\alpha_2}\right)^{\lambda_2},$$

tako da je f.r. od Z na osnovu (4.21.7)

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(1-\frac{it}{\alpha_2}\right)^{-\lambda_2} - \left(1-\frac{it}{\alpha_1}\right)^{-\lambda_1}\left(1+\frac{itz}{\alpha_2}\right)^{-\lambda_2}\right]\frac{dt}{t}.$$

Ukoliko je λ_2 ceo broj, integral se može izračunati i dobiti

$$G(z) = \left(\frac{\alpha_1 z}{\alpha_1 z+\alpha_2}\right)^{\lambda_1}\sum_{\nu=0}^{\lambda_2-1}\binom{\lambda_1+\nu-1}{\nu}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 z+\alpha_2}\right)$$

4.21.9. Data je karakteristična funkcija

$$\varphi(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})},$$

gde je x prekidna a.p. koja može uzimati sledeće vrednosti: 0, 1, 2, ... Naći zakon verovatnoće.

Kako x može uzimati samo vrednost nulu ili pozitivne cele vrednosti, to se (4.14.4) može napisati u obliku

$$p_\nu = \mathrm{H}(x=\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x,t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,e^{-itx}\,dt.$$

Ako zamenimo $\varphi(t)$ datom funkcijom, dobijamo

$$p_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\lambda(1-e^{it})-it\nu}\,dt = \frac{e^{-\lambda}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it\nu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r e^{itr}}{r!}\,dt.$$

Pošto je red pod integralom uniformno konvergentan, to integral ovog **zbira** možemo pisati u obliku zbira integrala i tako dobijamo

$$p_\nu = \frac{e^{-\lambda}}{2\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(r-\nu)}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{2\pi}\sum_{r=0}^{\nu-1}\frac{\lambda^r}{r!}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(r-\nu)}dt + \frac{e^{-\lambda}}{2\pi}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \frac{e^{-\lambda}}{2\pi}\sum_{r=\nu+1}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(r-\nu)}\,dt.$$

Integrali u prvom i trećem članu jednaki su nuli, tako da ostaje

$$p_\nu = \frac{e^{-\lambda}\lambda^\nu}{\nu!}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

U narednoj glavi videćemo da se ovde radi o t. zv. Poisson-ovom prekidnom rasporedu.

4.21.10. Ako $F_n(x) \to 0$ za $x < c$ a $F_n(x) \to 1$ za $x > c$, tada $X_n \xrightarrow{p} c$.

Zaista,

$$\Pr\{|X_n - C| \geqslant \varepsilon\} = \Pr\{X_n \geqslant C + \varepsilon\} + \Pr\{X_n \leqslant C - \varepsilon\}$$
$$= 1 - F_n(C + \varepsilon) + F_n(C - \varepsilon + 0) \to 0.$$

Na osnovu izloženog u (4.18) sleduje da i obratno važi, tj. da iz $X_n \xrightarrow{p} c$ sleduje

$$F_n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{za } x < c \\ 1 & \text{za } x > c. \end{cases}$$

4.21.11. Ako $F_n(x) \to 0$ za $x < c$ a $F_n(x) \to 1$ za $x > c$, tada $\varphi_n(t) \to e^{cit}$.

Karakteristična funkcija od $F(x)$, tj. rasporeda čija je celokupna masa koncentrisana u tački $x = c$, jeste

$$\varphi(t) = 1 \cdot e^{cit} = e^{cit}$$

Iz $F_n(x) \to F(x)$, na osnovu teoreme (4.19), sleduje da i $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$.

4.21.12. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ nezavisne a.p. sa istom f.r. $F(x)$ čija je a.s. m konačna. Tada a.p. $\overline{X}_n$, tj.

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{p} m$$

Khintchin-ova teorema).

Označimo sa $\varphi(t)$ karakterističnu funkciju od $F(x)$. Na osnovu (4.12.8) i (4.12.12) karakteristična funkcija za $\overline{X}_n$ biće

$$\varphi_n(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n,$$

odnosno, za $t \to 0$,

$$\varphi_n(t) = \left[1 + \frac{mit}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

shodno (4.12.5). Otuda

$$\varphi_n(t) \to e^{mit}$$

kad $n \to \infty$, a iz (4.21.10) i (4.21.11) sleduje da $\overline{X}_n \xrightarrow{p} m$.

4.21.13. Neka su $a_0, a_1, a_2, \ldots$ realni brojevi, takvi da red

$$G(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots$$

konvergira u jednom razmaku $(-u_0, +u_0)$. Funkcija $G(u)$ naziva se *funkcija generatrisa* niza $\{a_\nu\}$. Ako su a_ν verovatnoće $p_\nu = Pr. \{X = \nu\}$ jednog prekidnog rasporeda i ako stavimo

$$q_\nu = p_{\nu+1} + p_{\nu+2} + \cdots = \Pr\left\{X > \nu\right\}$$

tada je

$$R(u) = q_0 + q_1 u + q_2 u^2 + \cdots = \frac{1 - G(u)}{1 - u},$$

kad god je $|u| < 1$.

Zaista, kako je

$$q_\nu = 1 - (p_0 + p_1 + \cdots + p_\nu),$$

to smenom u $R(u)$ nezavisan član od p_ν biće $1/(1-u)$ a koeficijenat od p_ν biće $-u^\nu/(1-u)$ tako da $R(u)$ postaje

$$R(u) = \frac{1}{1-u} - \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu u^\nu/(1-u) =$$

$$= \frac{1}{1-u}\left[1 - \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu u^\nu\right] = \frac{1 - G(u)}{1-u}.$$

4.21.14. Istovremeno se bace pet kocki; u sledećem bacanju bacaju se istovremeno sve one kocke koje u prvom bacanju nisu dale jedinicu; u trećem bacanju bacaju se istovremeno sve one kocke koje ni u drugom bacanju nisu dale jedinicu i tako redom sve dok bude bilo kocki koje nijedanput nisu dale jedinicu.

Neka je sa X označena aleatorna promenljiva: broj potrebnih i dovoljnih bacanja da bi sve kocke dale jedinicu.

1. Odrediti zakon verovatnoće ove aleatorne promenljive.

Pretpostavićemo najpre da su sve kocke identične. Označimo sa p prostu verovatnoću da će prilikom bacanja jedne kocke pasti jedinica a sa $q = 1 - p$ suprotnu verovatnoću.

2. Kako bi se moglo generalisati na k identičnih kocki a kako na k različitih kocki sa prostim verovatnoćama $p_1, p_2, \ldots, p_k$?

3. Pretpostavimo sada da imamo 5 identičnih kocki i odredimo funkciju generatrise od X.

4. Odrediti opšti izraz za r-ti faktorski momenat, tj.

$$E[X(X-1)\ldots(X-r+1)].$$

5. Izračunati numeričke vrednosti $E(X)$, $E[X(X+1)]$ a zatim σ_x za $p = \dfrac{1}{6}$.

(Georges Darmois).

1. Da bi aleatorna promenljiva X, tj. broj potrebnih i dovoljnih bacanja da kod svih 5 kocki padne jedinica, imala vrednost x, treba da posle x-tog bacanja kod svih kocki padne jedinica (dovoljan uslov) a da kod najmanje jedne kocke nije pala jedinica posle $(x-1)$-og bacanja (potreban uslov).

Broj kocki kod kojih je pala jedinica samo u x-tom bacanju može biti jedan (I). To je događaj sa verovatnoćom $\binom{5}{1}(1-q^{x-1})^4 q^{x-1}p$. Iz

$$1=(p+q)^{x-1}=p^{x-1}+\binom{x-1}{1}p^{x-2}q+\cdots+\binom{x-1}{x-2}pq^{x-2}+q^{x-1}$$

$$1-q^{x-1}=p^{x-1}+\binom{x-1}{1}p^{x-2}q+\cdots+\binom{x-1}{x-2}pq^{x-2}$$

sleduje da je $1-q^{x-1}$ verovatnoća da će se kod jedne kocke u toku $(x-1)$ bacanja pojaviti jedinica. U našem slučaju je samo jedna kocka dala jedinicu u x-tom bacanju verovatnočom $\binom{5}{1}q^{x-1}p$, dakle

(I) sa verovatnoćom $\binom{5}{1}(1-q^{x-1})^4 q^{x-1}p$,

(II) sa verovatnoćom $\binom{5}{2}(1-q^{x-1})^3(q^{x-1}p)^2$,

(III) sa verovatnoćom $\binom{5}{3}(1-q^{x-1})^2(q^{x-1}p)^3$,

(IV) sa verovatnoćom $\binom{5}{4}(1-q^{x-1})(q^{x-1}p)^4$,

(V) sa verovatnoćom $(q^{x-1}p)^5$.

Prema tome, tražena verovatnoća je

$$p_x=\sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}\left(1-q^{x-1}\right)^{5-i}\left(q^{x-1}p\right)^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}\left(1-q^{x-1}\right)^{5-i}\left(q^{x-1}p\right)^i-\left(1-q^{x-1}\right)^5=$$

$$=\left(1-q^{x-1}+q^{x-1}p\right)^5-\left(1-q^{x-1}\right)^5,$$

tj.

$$p_x=\left(1-q^x\right)^5-\left(1-q^{x-1}\right)^5$$

Možemo kazati da je p_x jednaka verovatnoći da je kod svake kocke pala jedinica do x-tog bacanja umanjenoj za verovatnoću da je kod svake od kocki pala jedinica do $(x-1)$-og bacanja.

2. Ako umesto 5 imamo k identičnih kocki, biće

$$p_x = \left(1-q^x\right)^k - \left(1-q^{x-1}\right)^k$$

a za k različitih kocki biće

$$p_x = \prod_{i=1}^{k}\left(1-q_i^x\right) - \prod_{i=1}^{k}\left(1-q_i^{x-1}\right).$$

U svim slučajevima imamo

$$\sum_{x=1}^{\infty} p_x = 1$$

jer

$$\sum_{x=1}^{\infty} p_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{x=1}^{n} p_x = \lim_{n\to\infty}\left(1-q^n\right)^5 = 1$$

s obzirom da je $q < 1$.

3. Funkcija generatrise za k identičnih kocki je

$$G(u) = \sum_{x=1}^{\infty} p_x u^x$$

Međutim, p_x možemo da transformišemo na sledeći način

$$p_x = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} q^{jx} - \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} q^{j(x-1)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} q^{j(x-1)} \left(1-q^j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} q^{j(x-1)} (1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{j-1}),$$

tako da funkciju generatrise možemo pisati u sledećem obliku

$$G(u) = \sum_{x=1}^{\infty} u^x \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} q^{j(x-1)} \left(1-q^j\right),$$

ili, ako obrnemo red sabiranja, biće

$$G(u) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \left(1-q^j\right) q^{-j} \sum_{x=1}^{\infty} u^x q^{jx}$$

Sabiranje po x je geometriska progresija sa prvim članom uq^j i količnikom uq^j. Konvergencija će biti obezbeđena pod uslovom $|u| < q^{-j}$. Kako je

q^{-1} minimum od q^{-j}, to je gornji uslov zadovoljen ako je već $|u| < q^{-1}$ (tj. $\frac{6}{5} = 1{,}2$ za klasične kocke). Tada imamo

$$G(u) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} (1-q^j) \frac{u}{1-uq^j} .$$

4. Da bismo dobili faktorske momente, razvijmo $G(u)$ u okolini tačke $u = 1$. Stavimo $u = 1 + v$

$$G(1+v) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \frac{1+v}{\frac{1-(1+v)q^j}{1-q^j}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \frac{1+v}{1 - \frac{q^j}{1-q^j} v} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} (1+v)(1+\alpha v + \alpha^2 v^2 + \cdots + \alpha^r v^r + \cdots),$$

gde je

$$\alpha = \frac{q^j}{1-q^j} .$$

Faktorski momenat r-tog reda

$$m_r = \mathrm{E}\left[x(x-1) \ldots \ldots (x-r+1)\right]$$

je koeficijenat od $v^r/r!$ u razvitku od $G(1+v)$:

$$m_r = r! \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} (\alpha^r + \alpha^{r-1}) .$$

Kako je

$$\alpha^r + \alpha^{r-1} = \frac{q^{rj}}{(1-q^j)^r} + \frac{q^{j(r-1)}}{(1-q^j)^{r-1}} = q^{rj} \frac{1+(1-q^j)q^{-j}}{(1-q^j)^r} ,$$

to je

$$m_r = r! \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \frac{(q^j)^{r-1}}{(1-q^j)^r} .$$

5. Iz ovog obrasca, za $r = 1$ i 2, dobijamo

$$m_1 = \mathrm{E}(x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \frac{1}{1-q^j} ,$$

$$m_2 = \mathrm{E}\left[x(x-1)\right] = 2! \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \frac{q^j}{(1-q^j)^2} .$$

Za $k = 5$ i $p = 1/6$ biće

$$E(X) = 13{,}12, \qquad E[X(X-1)] = 200{,}78,$$
$$\sigma_x^2 = 41{,}77, \qquad \sigma_x = 6{,}46.$$

4.22. Zadaci za vežbu

4.22.1. Ispitati varijacije izraza $\sqrt[r]{\alpha_r}$, gde je α_r apsolutni momenat r-tog reda, kad r varira od 0 do $+\infty$.

4.22.2. Dokazati da je za svako realno t i h

$$|\varphi(t) - \varphi(t+h)|^2 \leqslant 2[1 - R\{\varphi(t)\}],$$

gde je $R\{\varphi(t)\}$ realni deo karakteristične funkcije.

4.22.3. Data je karakteristična funkcija druge vrste

$$\psi(t) = e^{-\beta(1-e^{it})} - \alpha$$

čija a.p. X uzima vrednosti 0, 1, 2, ... Naći z.v. i odrediti prva dva momenta.

4.22.4. Neka su a.p. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ međusobno nezavisne sa zakonima verovatnoće

$$f_j(x) = \frac{1}{\pi[1+(x-a)^2]}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Odrediti z.v. aleatorne promenljive

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

4.22.5. Dokazati da ako izvod f.r. $F'(x) = f(x)$ postoji i ako je ograničen, tada $\varphi(t) \to 0$ kad $|t| \to \infty$.

4.22.6. Ako je X a.p. koja uzima samo pozitivne vrednosti ili nulu i ima a.s. m, pokazati da je tada

$$F(km) > \frac{k-1}{k}$$

za svako $k > 0$.

4.22.7. Aleatorne promenljive X_1 i X_2 imaju z.v.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$f_2(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, \qquad \alpha > 0,\ \lambda > 0,\quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Odrediti z.v. aleatorne promenljive $Z = X_1/X_2$.

4.22.8. Ako je $|\varphi(t)| \leqslant k < 1$ za $|t| \geqslant a$, pokazati da je tada

$$|\varphi(t)| \leqslant 1-(1-k^2)\frac{t^2}{8a^2}$$

za $|t| < a$.

4.22.9. Pokazati da je karakteristična funkcija uniformnog rasporeda (4.3.IV)

$$\varphi(t) = \frac{e^{itx_2} - e^{itx_1}}{i(x_2 - x_1)t}.$$

4.22.10. Pretpostavimo da a.p. X i X_n, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ imaju za medijane samo po jednu vrednost μ i μ_n. Pokazati da ako $X_n \xrightarrow{p} X$, tada i $\mu_n \to \mu$.

4.22.11. A.p. X ima za karakterističnu funkciju

$$\varphi(t) = 1 - |t|, \qquad \text{za } |t| < 1,$$
$$\varphi(t) = 0, \qquad \text{za } |t| > 1.$$

a) Šta se može kazati o rasporedu, tj.
da li je simetričan ili ne?
da li je prekidan ili ne?
da li postoje prvi momenti?

b) Formirana je a.s. od n nezavisnih a.p. sa tim rasporedom. Čemu teži a.s. kad $n \to \infty$?

c) Odrediti z.v. i proveriti da li dobijeni rezultat zaista pretstavlja jedan z.v. (Georges Darmois).

4.22.12. Neka je p verovatnoća da će pasti glava a $q = 1 - p$ pismo prilikom bacanja pare. Prilikom uzastopnog bacanja pare na nezavisan način igra će se prekinuti čim glava padne k puta $(k \geqslant 1)$. Označimo sa X aleatornu promenljivu koja pretstavlja ukupan broj bacanja do prekida igre.

a) Naći zakon verovatnoće $\pi(x, k)$ i proveriti da je

$$\sum_{x=k}^{\infty} \pi(x, k) = 1.$$

Naći $E(X)$ i $E[X - E(X)]^2$.

b) Pokazati da je karakteristična funkcija

$$\varphi(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^k$$

i preko nje odrediti takođe $E(X)$ i $D^2(X)$. Pokazati da kad k neograničeno raste, promenljiva $\xi = \dfrac{X - E(X)}{\sigma_x}$ teži da zauzme normalan raspored.

c) Odrediti z.v. čija je k.f.

$$\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$$

i odrediti njegova dva prva momenta. (Sertifikat iz računa verovatnoće, Pariz 1943).

4.22.13. Pozitivna a.p. ($0 \leqslant X \leqslant a$) ima uniforman raspored između $X = 0$ i $X = a$. Posmatrajmo a.p. $Z = \log X$. Odrediti z.v. od Z, njenu k.f. a zatim $E(Z)$ i $D^2(Z)$. (Georges Darmois).

4.22.14. Neka je

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}$$

k.f. aleatorne promenljiva X.

a) Odrediti prva dva momenta.

b) Dve nezavisne a.p. X_1 i X_2 imaju isti raspored kao i X. Odrediti k.f. aleatorne promenljive $Y = X_1 - X_2$ i verovatnoću da bude $Y = 0$. Šta se može kazati o neprekidnosti zakona verovatnoće od X?

c) Odrediti z.v. od $|X|$.

(Georges Darmois)

5. SPECIJALNI TIPOVI JEDNODIMENZIONALNIH RASPOREDA

a) *Prekidni rasporedi*

5.1. Binomijalni raspored. — Videli smo u (2.7) da je verovatnoća da će se u n nezavisno ponovljenih opita očekivani događaj ostvariti ν puta

$$p_\nu = \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu},$$

gde je p prosta verovatnoća očekivanog događaja, a $q = 1 - p$. U ovom slučaju aleatorna promenljiva uzima cele pozitivne vrednosti $X = \nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, tako da imamo posla sa jednim prekidnim rasporedom čija je f.r.

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{[x]} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu},$$

gde je $[x]$ najveći ceo broj sadržan u x. Korišćenjem rezultata iz (2.8) dobijamo

$$F(x) = 1 - P([x]) = 1 - I_p([x]+1, n-[x]),$$

gde je P binomijalna serija a I_p nepotpuni količnik B – funkcije.

Raspored je unimodalan, modus se sastoji iz jedne ili dve susedne vrednosti $\nu = m$ i $\nu = m+1$ sa međusobno jednakim frekvencijama, prema tome da li je n paran ili neparan broj.

Aleatornu promenljivu ν binomijalnog rasporeda možemo smatrati kao zbir od n nezavisnih aleatornih promenljivih, tj.

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n,$$

sa zakonom verovatnoće

ν_i	0	1
p_{ν_i}	q	p

$, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$

i karakterističnom funkcijom

$$\varphi_i(t) = pe^{it} + q, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zato je k.f. binomijalnog rasporeda

$$\varphi(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(t)=(pe^{it}+q)^n.$$

Aritmetička sredina je

$$E(X)=\frac{1}{i}\varphi'(0)=np.$$

K.f. centrirane promenljive $\nu-np$ biće

$$\varphi_{\nu-np}(t)=e^{-inpt}\varphi(t)=$$
$$=e^{-inpt}(pe^{it}+q)^n=$$
$$=(pe^{iqt}+qe^{-ipt})^n,$$

a prva četiri centralna momenta

$$\mu_1=\frac{1}{i}\varphi'_{\nu-np}(0)=0,$$

$$\mu_2=\frac{1}{i^2}\varphi''_{\nu-np}(0)=npq,$$

$$\mu_3=\frac{1}{i^3}\varphi'''_{\nu-np}(0)=npq(q-p),$$

$$\mu_4=\frac{1}{i^4}\varphi^{IV}_{\nu-np}(0)=3n^2p^2q^2+npq(1-6pq).$$

Koeficijent asimetrije je

$$\beta_1=\frac{(q-p)^2}{npq}$$

tako da će raspored biti simetričan za $p=q$, odnosno za $n\to\infty$.

Koeficijent spljoštenosti je

$$\beta_2=3+\frac{1-6pq}{npq},$$

koji teži ka 3 ako $n\to\infty$.

Označimo sa $b_\nu(n, p)$ binomijalan raspored promenljive ν, čiji su parametri n i p.

Neka su ν' i ν'' dve nezavisne aleatorne promenljive sa binomijalnim rasporedima $b_{\nu'}(n', p)$ i $b_{\nu''}(n'', p)$ K.f. aleatorne promenljive $\nu=\nu'+\nu''$ biće

$$\varphi_\nu(t)=\varphi_{\nu'+\nu''}(t)=\varphi_{\nu'}(t)\,\varphi_{\nu''}(t)=$$
$$=(pe^{it}+q)^{n'}(pe^{it}+q)^{n''}=$$
$$=(pe^{it}+q)^n,$$

gde smo stavili $n = n' + n''$. Otuda, zbir dve nezavisne a.p. sa binomijalnim rasporedima $b_{\nu'}(n', p)$ i $b_{\nu''}(n'', p)$ imaće takođe binomijalni raspored $b_{\nu}(n' + n'', p)$. Simbolički možemo staviti

$$b_{\nu'}(n', p) * b_{\nu''}(n'', p) = b_{\nu'+\nu''}(n' + n'', p).$$

5.2. Poisson-ov raspored. — Aleatorna promenljiva X imaće Poisson-ov raspored sa parametrom k ako uzima pozitivne cele vrednosti ili nulu, tj. $X = 0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ i ako je

$$p_m = \Pr\{X = m\} = e^{-k} \frac{k^m}{m!} \tag{5.2.1}$$

Da bi p_m uvek bilo pozitivno, potrebno je da i parametar k bude uvek pozitivan.

U (2.12) videli smo da binomijalan raspored teži ka Poisson-ovom rasporedu ako prosta verovatnoća $p \to 0$, ali tako da $np = k$ ostaje konačno.

Karakteristična funkcija Poisson-ovog rasporeda je

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-k} \frac{k^m}{m!} e^{itm} = e^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ke^{it})^m}{m!} = e^{k(e^{it}-1)}, \tag{5.2.2}$$

a karakteristična funkcija druge vrste

$$\psi(t) = \log \varphi(t) = k(e^{it} - 1). \tag{5.2.3}$$

Kako je

$$\psi'(t) = ik e^{it}$$

to je aritmetička sredina Poisson-ovog rasporeda

$$E(X) = \frac{1}{i} \psi'(0) = k \tag{5.2.4}$$

Karakteristična funkcija druge vrste centrirane promenljive je

$$\psi_{m-k}(t) = \log e^{-ikt} \varphi(t) = k(e^{it} - 1 - it) = k\left[\frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \cdots + \frac{(it)^h}{h!} + \cdots\right].$$

Na osnovu (4.13) sledi

$$\begin{aligned} \mu_2 &= k, \\ \mu_3 &= k, \\ \mu_4 &= 3k^2 + k, \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Koeficijent asimetrije je

$$\beta_1 = \frac{1}{k} \tag{5.2.6}$$

tako da je raspored utoliko asimetričniji ukoliko je k manji. Za $k \to \infty$, $\beta_1 = 0$.

Koeficijent spljoštenosti je

$$\beta_2 = 3 + \frac{1}{k} \tag{5.2.7}$$

koji teži ka 3 ako $k \to \infty$.

Označimo sa $\lambda_m(k)$ Poisson-ov raspored aleatorne promenljive m, čiji je parametar k.

Neka su m' i m'' dve nezavisne aleatorne promenljive sa rasporedima $\lambda_{m'}(k')$ i $\lambda_{m''}(k'')$. K.f. zbira $m = m' + m''$ biće

$$\varphi_m(t) = \varphi_{m'}(t)\,\varphi_{m''}(t) = e^{(k'+k'')(e^{it}-1)}$$

Otuda, zbir dve nezavisne a.p. sa Poisson-ovim rasporedima imaće takođe Poisson-ov raspored sa parametrom koji je jednak zbiru parametara oba rasporeda, tj.

$$\lambda_{m'}(k') \ast \lambda_{m''}(k'') = \lambda_{m'+m''}(k'+k'').$$

5.3. Hipergeometriski raspored. — I ovde imamo jedan prekidan raspored čija aleatorna promenljiva uzima konačan broj vrednosti $X = 0, 1, 2, \ldots, r_1, \ldots, r$ sa zakonom verovatnoće

$$p_{r_1} = \Pr\{X = r_1\} = \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n-n_1}{r-r_1}}{\binom{n}{r}},$$

gde je $n \geqslant n_1$, $n \geqslant r$, $n_1 \geqslant r_1$, $r_1 = 0, 1, 2, \ldots, r$. U razvijenom obliku p_{r_1} biće

$$p_{r_1} = \binom{r}{r_1}\frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-r_1+1)\,n_2(n_2-1)\ldots(n_2-r_2+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)},$$

gde smo stavili $n_2 = n - n_1$ i $r_2 = r - r_1$.

U (2.17) videli smo da hipergeometriska verovatnoća teži ka binomijalnoj ako n, n_1 i n_2 teže ka beskonačnosti dok r, r_1 i r_2 ostaju konačni.

Takođe, u (2.17) pokazali smo da je

$$\sum_{r_1=0}^{r} p_{r_1} = \sum_{r_1=0}^{r} \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n-n_1}{r-r_1}}{\binom{n}{r}} = 1.$$

Aritmetička sredina hipergeometriskog rasporeda je po definiciji

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{r_1=0}^{r} r_1 p_{r_1} = \sum_{r_1=0}^{r} r_1 \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n-n_1}{r-r_1}}{\binom{n}{r}} =$$

$$= \frac{n_1 r}{n} \sum_{r_1=1}^{r} \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n-n_1}{r-r_1}}{\binom{n-1}{r-1}} = \frac{n_1 r}{n}$$

Kako je drugi običan momenat

$$E(X^2) = \sum_{r_1=0}^{r} r_1^2 p_{r_1} = \sum_{r_1=0}^{r} r_1^2 \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n-n_1}{r-r_1}}{\binom{n}{r}} =$$

$$= \frac{n_1 r}{n} \sum_{r_1=1}^{r} (r_1 - 1 + 1) \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n-n_1}{r-r_1}}{\binom{n-1}{r-1}} =$$

$$= \frac{n_1(n_1-1)\,r(r-1)}{n(n-1)} \sum_{r_1=2}^{r} \frac{\binom{n_1-2}{r_1-2}\binom{n-n_1}{r-r_1}}{\binom{n-2}{r-2}} + \frac{n_1 r}{n} =$$

$$= \frac{n_1 r}{n}\left[1 + \frac{(n_1-1)(r-1)}{n-1}\right],$$

to će varijansa biti

$$\sigma^2 = \frac{n_1 r}{n}\left[1 + \frac{(n_1-1)(r-1)}{n-1}\right] - \frac{n_1^2 r^2}{n^2} = \frac{n_1 n_2 r (n-r)}{n^2(n-1)}.$$

Prvi član hipergeometriskog rasporeda je

$$p_0 = \frac{n_2(n_2-1)\ldots(n_2-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Sledeći članovi zatim rastu kad r_1 raste od 0 do svoje modusne vrednosti koja se nalazi u intervalu

$$\frac{r(n_1+1)-(n_2+1)}{n+2} \leqslant r_1 \leqslant \frac{r(n_1+1)+(n_1+1)}{n+2},$$

da bi zatim opadali kad r_1 dalje raste od modusne vrednosti do r. Poslednji član biće

$$p_r = \frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Raspored je simetričan ako je $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$; u ostalim slučajevima je asimetričan.

Karakteristična funkcija hipergeometriskog rasporeda je

$$\varphi(t) = \sum_{r_1=0}^{n} \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r-r_1}}{\binom{n}{r}} e^{itr_1} =$$

$$= \frac{n_2(n_2-1)\ldots(n_2-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)} \sum_{r_1=0}^{r} \binom{r}{r_1} \frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-r_1+1)\,e^{itr_1}}{(n_2-r+r_1)(n_2-r+r_1-1)\ldots(n_2-r+1)}$$

$$= \frac{n_2(n_2-1)\ldots(n_2-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)} F(-r, -n_1; n_2-r+1, e^{\tau}),$$

gde je $\tau = it$ a F, tj.

$$F(\alpha,\beta;\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + $$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

hipergeometriska funkcija. Otuda i naziv ovoga rasporeda.

Kako je aritmetička sredina $E(X) = \frac{n_1 r}{n}$, to će k.f. centrirane promenljive biti

$$\varphi_{r_1-\frac{n_1 r}{n}}(t) = \frac{n_2(n_2-1)\ldots(n_2-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}\, e^{-\frac{n_1 r}{n}\tau}\, F.$$

Hipergeometriska funkcija zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]\frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0$$

što je lako proveriti. Otuda

$$(1-e^{\tau})\left\{\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{d\varphi}{d\tau}\left[\frac{r}{n}(n_1-n_2) - n_1 + \frac{n}{1-e^{\tau}}\right] + \frac{n_1 n_2 r(n-r)}{n^2}\varphi\right\} = 0$$

gde je φ k.f. od r_1. Razvijanjem k.f. u red i grupisanjem koeficijenata uz τ, τ^2 i τ^3 dobićemo sledeće centralne momente

$$\mu_2 = \frac{n_1 n_2 r(n-r)}{n^2(n-1)},$$

$$\mu_3 = \frac{n_1 n_2 r(n_2-n_1)(n-r)(n-2r)}{n^3(n-1)(n-2)},$$

$$\mu_4 = \frac{n_1 n_2 r(n-r)}{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}\left\{n(n+1) - 6r(n-r) + 3n_1 n_2\left[r-2-\frac{r^2}{n}+\frac{6r}{n^2}(n-r)\right]\right\}.$$

Odmah vidimo da je za $n_1 = n_2$, treći momenat $\mu_3 = 0$, te je u tom slučaju raspored simetričan.

Ako količnik $\frac{n_1}{n} = p$ ostaje konačan kad $n \to \infty$, momenti hipergeometriskog rasporeda svode se na momente binomijalnog rasporeda, tj.

$$E(X) = rp,$$

$$\mu_2 = rpq,$$
$$\mu_3 = rpq(p-q),$$
$$\mu_4 = 3r^2p^2q^2 + rpq(1-6pq),$$

gde je $q = 1 - p = \frac{n_2}{n}$.

b) *Neprekidni rasporedi*

5.4. Cauchy-ev raspored. — Zakon verovatnoće Cauchy-evog rasporeda definisan je apsolutno neprekidnom funkcijom

(5.4.1) $$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

U ovom slučaju aleatorna promenljiva X neprekidno može uzimati vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$. Integracijom dobijamo f.r.

(5.4.2) $$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,arc\,tg\,x.$$

Neposredno je

$$F(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,arc\,tg\,1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Raspored je unimodalan i simetričan u odnosu na tačku $x = 0$, koja pretstavlja i modus i medijanu. Aritmetička sredina ne postoji, pošto integral

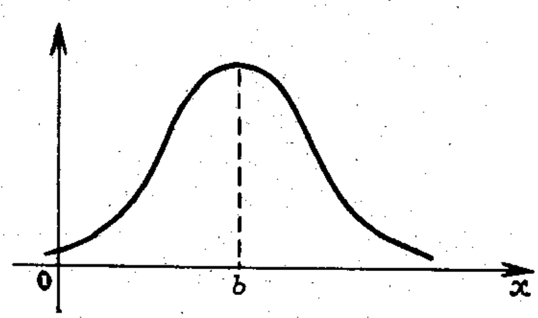
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

ne konvergira. Takođe ni svi ostali pozitivni momenti ne postoje.

Linearnom transformacijom dobijamo opšti slučaj Cauchy-evog rasporeda sa z.v.

(5.4.3) $$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a}{a^2+(x-b)^2}, \qquad a > 0,$$

koji će biti simetričan u odnosu na tačku $x = b$.



Sl. (5.4.I)

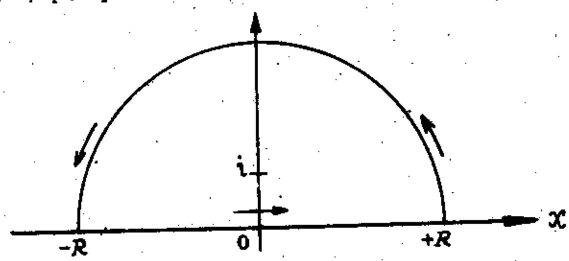
Karakteristična funkcija za (5.4.1) po definiciji je

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}\,dx}{1+x^2}$$

koju možemo izračunati metodom reziduuma, integrišući funkciju

$$\frac{e^{itz}}{1+z^2}$$

duž konture pretstavljene u vidu jednog polukruga sa centrom u koordinatnom početku 0, poluprečnika R i intervala $(-R, +R)$ na x-osi.



Sl. (5.4.II)

Integral funkcije $\frac{1}{1+z^2}$ na polukrugu teži ka nuli. Ukoliko moduo od $e^{itz} = e^{itx-ty}$ ostaje konačan, integral funkcije $e^{itz}/(1+z^2)$ takođe teži ka nuli. Zato je potrebno da $-ty$ ne uzima suviše velike pozitivne vrednosti, pa ćemo uzeti da je $ty > 0$.

Ako je $t > 0$, uzimamo gornji polukrug (kao na slici (5.4.II)) i granična vrednost integrala $\varphi(t)$ jednaka je proizvodu iz $2\pi i$ i reziduuma za $z = i$, tj

$$\varphi(t) = 2\pi i \frac{e^{iti}}{\pi \cdot 2i} = e^{-t}$$

Smenom $t = -t$ i $i = -i$ vrednost integrala se neće promeniti, samo što tada imamo donji polukrug, pa je

$$\varphi(t) = \varphi(-t) = e^{-t}, \text{ za } t > 0,$$

odnosno

$$\varphi(t) = e^{-|t|}$$

za svako t.

Uzimajući opšti slučaj Cauchy-evog rasporeda (5.4.3) dobijamo za k.f.

$$\varphi(t) = e^{ibt - a|t|}, \qquad a > 0.$$

Označimo sa $C_X(a, b)$ Cauchy-ev raspored sa parametrima a i b.

Neka su X_1 i X_2 dve nezavisne aleatorne promenljive sa Cauchy-evim rasporedima $C_{X_1}(a_1, b_1)$ i $C_{X_2}(a_2, b_2)$. Zbir $X_1 + X_2$ imaće za k.f.

$$\varphi(t) = e^{i(b_1+b_2)t - (a_1+a_2)|t|},$$

tj.

$$C_{X_1}(a_1, b_1) * C_{X_2}(a_2, b_2) = C_{X_1+X_2}(a_1+a_2, b_1+b_2).$$

I uopšte, ako n nezavisnih aleatornih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ imaju Cauchy-ev raspored, aritmetička sredina tih promenljivih

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

imaće takođe Cauchy-ev raspored sa parametrima

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{i} \quad b = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

Posebno, ako sve promenljive X_ν imaju identične rasporede, raspored promenljive $\bar{X}$ biće im takođe identičan.

5.5. Prvi Laplace-ov raspored. — Ako $e^{-|x|}$ normiramo, tj. pomnožimo jednim faktorom C tako da

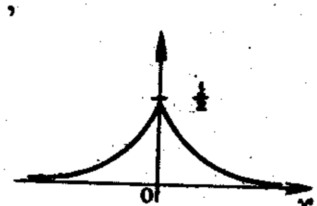
$$\int_{-\infty}^{+\infty} c\, e^{-|x|}\, dx = 1,$$

dobićemo jedan z.v. čija aleatorna promenljiva X varira neprekidno od $-\infty$ do $+\infty$. Kako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c\, e^{-|x|} dx = 2c \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2c = 1,$$

to je $c = \dfrac{1}{2}$ a

(5.5.1)
$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$



Dijagram (5. 5. I)

t. zv. *Prvi Laplace-ov raspored.* To je prvi raspored koji je Laplace primenjivao u svojoj teoriji grešaka.

Karakteristična funkcija je

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - |x|} dx =$$

(5.5.2)
$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+it)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1-it)} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} \right) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Ova je funkcija definisana za sve vrednosti od t i ako je normiramo, dobijamo Cauchy-ev raspored. Obratno takođe važi, jer normirana k.f. prvog Cauchy-evog rasporeda pretstavlja prvi Laplace-ov raspored.

Linearnom transformacijom dobijamo opšti slučaj prvog Laplace-ovog rasporeda

(5.5.3) $$\frac{1}{2a} e^{-\frac{|x-b|}{a}}, \qquad a > 0.$$

Raspored je unimodalan i simetričan u odnosu na tačku $x = b$ koja istovremeno pretstavlja i modus i medijanu i aritmetičku sredinu.

Varijansa je (za $a = 1$)

(5.5.4) $$\sigma^2 = \frac{2!}{i^2} \cdot \varphi''(0) = \frac{2}{i^2} \cdot \left(-\frac{2}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}$$

U Tabeli 3 date su ordinate prvog Laplace-ovog rasporeda.

5.6. Normalan raspored. — Za aleatornu promenljivu X kažemo da ima normalan raspored ako može neprekidno uzimati sve vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$ i ako je njen z.v.

(5.6.1) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

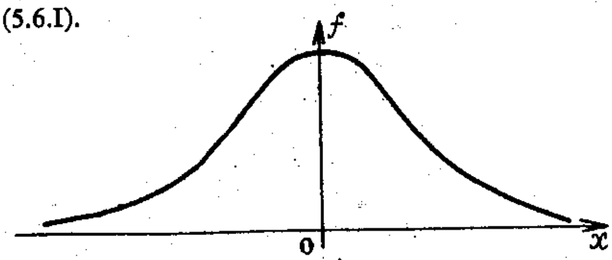
Prema (2.14.7) imali smo da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1,$$

a f.r. je

(5.6.2) $$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Raspored je simetričan u odnosu na tačku $x = 0$, koja je istovremeno i modus i medijana i aritmetička sredina. Kriva $y = f(x)$ ima poznat zvonast oblik kao na sl. (5.6.I).



Dijagram (5.6.I)

Kako je $f(x)$ parna funkcija, to su svi neparni momenti jednaki nuli. Kako je $E(X) = 0$, to će centralni momenti biti identični sa običnim momentima tako da će parni momenti imati sledeće vrednosti

$$\mu_{2\nu} = m_{2\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\nu} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x^{2\nu} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Smenom $t = \frac{x^2}{2}$, $dt = x dx$, ovaj se integral korišćenjem (2.4.6) svodi na

$$\mu_{2\nu} = m_{2\nu} = \frac{2^{\frac{2\nu+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^{\frac{2\nu-1}{2}} e^{-t} dt =$$

(5.6.3)
$$= \frac{2^{\frac{2\nu+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right) = \frac{2^{\frac{2\nu+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2^{\nu}} \sqrt{\pi}$$
$$= 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2\nu-1),$$

a varijansa na $\sigma^2 = 1.$

Karakteristična funkcija biće

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(itx)^{\nu}}{\nu!} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Označimo sa

$$g_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(itx)^{\nu}}{\nu!} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Moduo ove funkcije je

$$|g_n(x)| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(itx)^{\nu}}{\nu!} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} \left| \frac{(itx)^{\nu}}{\nu!} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{|tx|^{\nu}}{\nu!} e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|tx|^{\nu}}{\nu!} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{|tx| - \frac{x^2}{2}},$$

tj. manji od funkcije $e^{|tx| - \frac{x^2}{2}}$ za svako n i svako x razmaka $(-\infty, +\infty)$, koja je integrabilna u razmaku $(-\infty, +\infty)$. Zato je

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(itx)^{\nu}}{\nu!} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(it)^{\nu}}{\nu!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(it)^{2\nu}}{(2\nu)!} \int_0^{\infty} x^{2\nu} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(it)^{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{2^{\frac{2\nu-1}{2}} 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2^{\nu}} \sqrt{\pi} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^{\nu}}{(2\nu)!} \frac{(2\nu)!}{2^{\nu}\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^{\nu}}{\nu!}$$

tako da je

(5.6.4) $$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Kako je bilo $E(X) = 0$ a $\sigma^2 = 1$, to je (5.6.2) raspored standardizovane normalno raspoređene aleatorne promenljive X. Z.v. normalnog rasporeda u opštem slučaju biće

(5.6.5) $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

a k.f.

(5.6.6) $$\varphi_{\frac{X-m}{\sigma}}(t) = e^{imt}\varphi(\sigma t) = e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

sa momentima

$$E(x) = m,$$

(5.6.7) $$\begin{aligned} \mu_2 &= \sigma^2, \\ \mu_3 &= 0, \\ \mu_4 &= 3\sigma^4, \\ &\cdots\cdots \\ \mu_{2\nu} &= 1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2\nu-1)\sigma^{2\nu} \end{aligned}$$

Koeficijenti asimetrije i spljoštenosti su

(5.6.8) $$\beta_1 = 0 \quad \text{i} \quad \beta_2 = 3.$$

Označimo sa $N_X(m, \sigma)$ normalan raspored aleatorne promenljive X čija je aritmetička sredina m a standardna devijacija σ.

Neka su X_1 i X_2 dve međusobno nezavisne aleatorne promenljive sa respektivnim rasporedima $N_{X_1}(m_1, \sigma_1)$ i $N_{X_2}(m_2, \sigma_2)$. Njihove k.f. su

$$\varphi_1(t) = e^{im_1 t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2},$$

$$\varphi_2(t) = e^{im_2 t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2}$$

S obzirom da su X_1 i X_2 međusobno nezavisni, k.f. zbira $X = X_1 + X_2$ biće

(5.6.9) $$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = e^{i(m_1+m_2)t - \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}$$

tj. k.f. opet jednog normalnog rasporeda čija je aritmetička sredina $m_1 + m_2$ a varijansa $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Otuda

(5.6.10) $$N_{X_1}(m_1, \sigma_1) * N_{X_2}(m_2, \sigma_2) = N_{X_1+X_2}\left(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right).$$

Ovaj se rezultat može neposredno proširiti na zbir od n međusobno nezavisnih normalno raspoređenih aleatornih promenljivih

(5.6.11) $$\begin{aligned} &N(m_1, \sigma_1) * N(m_2, \sigma_2) * \cdots * N(m_n, \sigma_n) = \\ &= N\left(m_1 + m_2 + \cdots + m_n, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}\right). \end{aligned}$$

Obratno takođe važi, tj. ako je zbir $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ od n međusobno nezavisnih promenljivih normalno raspoređen, tada je i svaka od promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ takođe normalno raspoređena (*H. Cramér-ova teorema*).

Dokaz. (P. Lévy). Dovoljno je da se ograničimo na zbir od dve promenljive $X = X_1 + X_2$. Sam dokaz može se izvesti primenom sledeće dobro poznate teoreme iz teorije funkcija kompleksne promenljive:

Ako cela funkcija $\Phi(t)$ kompleksne promenljive t nema nula i ako je u celoj ravni

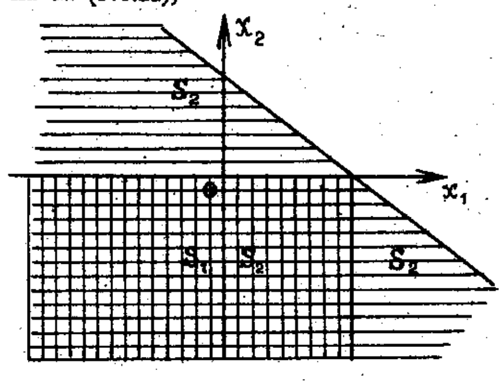
(5.6.12) $$|\Phi(t)| \leqslant A e^{cr^2},$$

gde su A i c konstantne a $r = |t|$. Tada je $\log \Phi(t)$ polinom najviše drugog stepena.

Neka su X_1 i X_2 dve nezavisne a.p. čiji zbir X ima normalan raspored $N(0, 1)$. Tada je

(5.6.13) $$\varphi_1(t)\, \varphi_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Označimo sa $F_1(x)$ i $F_2(y)$ f.r. od X_1 i X_2 i izvršimo pomeranje na X_2-osi tako da tačka $X_2 = 0$ bude medijana, tj. $F_2(0) = \frac{1}{2}$. Zbog nezavisnosti, funkcija rasporeda dvodimenzionalne a.p. (X_1, X_2) biće $F_1(x)\, F_2(0)$ za $X_1 \leqslant x$ i $X_2 \leqslant 0$. Kako $S_1(X_1 \leqslant x,\ X_2 < 0) \supset S_2(X_1 + X_2 < x)$, kao što to vidimo na sl. (5.6.II),



Dijagram (5.6. II.)

to je

$$F_1(x)\cdot F_2(0) \leqslant \theta(x+0)$$

ili

$$F_1(x) \leqslant 2\theta(x),$$

gde je $\theta(x)$ funkcija normalnog rasporeda. Slično dobijamo

$$1-F_1(x) \leqslant 2\left[1-\theta(x)\right].$$

Da bismo mogli da koristimo gornju teoremu, uzećemo da je k.f. $\varphi_1(t)$ funkcija kompleksne promenljive t. Parcijalnom integracijom, prvo u granicama od $-\infty$ do 0 a zatim od 0 do $+\infty$, k.f. dobija oblik

$$\varphi_1(t) = 1 - it\int_{-\infty}^{0} e^{itx} F_1(x)\,dx + it\int_{0}^{\infty} e^{itx}\left[1-F_1(x)\right] dx .$$

Ako izraz

$$1-F_1(x)+F_1(-x)\to 0,$$

kad $x\to+\infty$, i to brže od e^{-rx}, za svako r, funkcija $\varphi_1(t)$ je cela funkcija.

Kako je

$$F_1(x) \leqslant 2\theta(x) = O(e^{-\frac{x^2}{2}}), \qquad \text{za } x\to-\infty,$$

i

$$F_1(-x) \leqslant 2\left[1-\theta(x)\right] = O(e^{-\frac{x^2}{2}}), \quad \text{za } x\to+\infty,$$

to je $\varphi_1(t)$ cela funkcija. Takođe je

$$|\varphi_1(t)| \leqslant 1 + 4r\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rx}\,\theta(x)\,dx,$$

tj.

$$|\varphi_1(t)| \leqslant 1 + 4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rx}\,d\theta(x).$$

Za $t=ir$ biće

$$|\varphi_1(t)| \leqslant 1+4e^{\frac{r^2}{2}} \leqslant 5e^{\frac{r^2}{2}}$$

i to za svako t kompleksne ravni. Analogne osobine imaće i k.f. $\varphi_2(t)$. Iz (5.6.13) vidimo da se nijedan od faktora $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ ne može anulirati ni za jednu vrednost t sem za $t=\pm\infty$. Otuda, $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ zadovoljavaju uslove gornje teoreme, te je zbog $\varphi_1(0)=1$ i $\varphi_2(0)=1$,

$$\psi_1(t) = \log\varphi_1(t) = a_1t^2 + b_1t,$$

$$\psi_2(t) = \log\varphi_2(t) = a_2t^2 + b_2t.$$

Kako su $\varphi_1(t)$ i $\varphi_1(-t)$ konjugovano kompleksni i kako je $|\varphi_1(t)| \geqslant 0$, to a_1 mora biti jedan realan negativan broj ili nula a b_1 imaginaran broj, te je

$$\psi_1(t) = -\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + m_1 it .$$

Slično, dobijamo da je

$$\psi_2(t) = -\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + m_2 it$$

čime je dokazano da su X_1 i X_2 normalno raspoređeni.

Georges Darmois je pokazao da ako su a.p. X_1 i X_2 međusobno nezavisne, biće normalno raspoređene ako su i njihove linearne transformacije, tj. a.p.

$$Y_1 = aX_1 + bX_2,$$
$$Y_2 = cX_1 + dX_2,$$

međusobno nezavisne.

Kako je normalan raspored simetričan, to je

$$\theta(-x) = 1 - \theta(x).$$

Zato su u Tabeli 2 date samo vrednosti $\theta(x)$ za $x > 0$.

Koristeći obrazac

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = x\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 1!\cdot 3} + \frac{x^4}{2^2\cdot 2!\cdot 5} - \frac{x^6}{2^3\cdot 3!\cdot 7} + \cdots\right)$$

dobijamo da je

$$\theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 1!\cdot 3} + \frac{x^4}{2^2\cdot 2!\cdot 5} - \frac{x^6}{2^3\cdot 3!\cdot 7} + \cdots\right)$$

Ovaj red vrlo sporo konvergira, tako da je upotrebljiv samo za male vrednosti od x. Ukoliko je x veliko, sledeći asimptotski red možemo upotrebiti

$$1 - \theta(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{3\cdot 5}{x^6} + \cdots\right)$$

tako da je

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{x} < 1 - \theta(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right).$$

F.r. za opšti oblik (5.6.5) izračunava se preko obrasca

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \theta\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Normalan raspored bio je prvi put formulisan od strane Laplace-a. Zato se taj raspored takođe naziva *Drugi Laplace-ov raspored.* U literaturi se često naziva i Gauss-ov raspored.

5.7. Centralna granična teorema.

I. *Neka su sve a.p. niza* $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ *međusobno nezavisne sa istim rasporedom* $F(x)$ *aritmetičke sredine* m_1 *i standardne devijacije* σ_1. *Stavimo*

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

čija je aritmetička sredina m *a standardna devijacija* σ. *Tada*

$$F\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) \to \theta\left(\sqrt{n}\,\frac{X-m_1}{\sigma_1}\right)$$

kad $n \to \infty$.

Dokaz. Iz (4.15) sleduje da je

$$m = m_1 \qquad \sigma = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}.$$

Kako su X_i međusobno nezavisni, to je na osnovu (4.12.12) k.f. od

$$X - m = \frac{(X_1 - m_1) + (X_2 - m_1) + \cdots + (X_n - m_1)}{n},$$

$$\varphi_{X-m}(t) = \left[\varphi_{X_i - m_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

a k.f. standardizovane promenljive $(X-m)/\sigma$

$$\varphi_{\frac{X-m}{\sigma}}(t) = \left[\varphi_{X_i - m_i}\left(\frac{t}{\sigma_1\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{i^2}{2!}\,\frac{t^2}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

Kad $n \to \infty$, k.f. od $(X-m)/\sigma$ teži ka

$$\varphi_{\frac{X-m}{\sigma}}(t) \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}},$$

tj. ka k.f. normalnog rasporeda. Kako je ova konvergencija uniformna u okolini tačke $t=0$, to na osnovu recipročne teoreme (4.20) i raspored promenljive $\dfrac{X-m}{\sigma}$ teži ka normalnom rasporedu $N(0, 1)$.

Liapounoff je pokazao da teorema uz dopunske uslove važi i u slučaju da promenljive X_i imaju različite f.r. $F_i(x)$. Tako uopštena centralna granična teorema glasi:

II. *Neka su sve neprekidne a.p. niza* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *međusobno nezavisne i sa odgovarajućim f.r.* $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$. *Označimo sa* m_i *aritmetičku sredinu,* σ_i^2 *varijansu,* μ_{3i} *treći momenat,* $\mathfrak{A}_{1i}, \mathfrak{A}_{2i}$ i $\mathfrak{A}_{3i}$ *prva tri apsolutna momenta promenljive* X_i.

Ako su svi drugi i treći apsolutni momenti ograničeni, tada standardizovana promenljiva

$$Z = \frac{X - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sigma},$$

gde je

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2,$$

teži da zauzme normalan raspored $N(0, 1)$ *kad* $n \to \infty$.

Dokaz. Kako su svi drugi i treći momenti ograničeni, to postoje dva para brojeva A_2, B_2 i A_3, B_3, takvih da je

$$0 \leqslant A_2 \leqslant \alpha_{2i} \leqslant B_2$$

i

$$A_3 \leqslant \alpha_{3i} \leqslant B_3$$

za svako $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Centrirane promenljive

$$Y_i = X_i - m_i$$

imaće za obične momente

$$E(Y_i) = 0, \qquad E(Y_i^2) = \sigma_i^2, \qquad E(Y_i^3) = \mu_{3i}$$

a za k.f.

$$\varphi_{Y_i}(t) = 1 + \frac{(it)^2}{2!}\sigma_i^2 + \frac{t^3}{3!}\frac{d^3\varphi(\theta t)}{dt^3} =$$

$$= 1 + \frac{(it)^2}{2!}\sigma_i^2 + \frac{(it)^3}{3!}\int_{-\infty}^{+\infty} y_i^3 e^{i\theta t y_i} f(y_i)\, dy_i,$$

gde je $0 < \theta < 1$.

Integral

$$R_k = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i^3 e^{i\theta t y_i} f(y_i)\, dy_i$$

konačan je, jer je

$$|R_k| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |y_i|^3 f(y_i)\, dy_i$$

pa je na osnovu pretpostavke iskazane u teoremi

$$A_3 \leqslant |R_k| \leqslant B_3.$$

K.f. promenljive Z je

$$\varphi_z(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{y_i}\left(\frac{t}{\sigma}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{(it)^2}{2!}\,\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} + \frac{(it)^3}{3!}\,\frac{R_i}{\sigma^3}\right)$$

a k.f. druge vrste

$$\psi_z(t) = \sum_{i=1}^{n} log\left(1 - \frac{t^2}{2}\,\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} - \frac{it^3}{3!}\,\frac{R_i}{\sigma^3}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{-\left(\frac{t^2}{2}\,\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} + \frac{it^3}{3!}\,\frac{R_i}{\sigma^3}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\,\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} + \frac{t^3}{3!}\,\frac{R_i}{\sigma^3}\right)^2\left[1 - \varepsilon\left(\frac{t^2}{2}\,\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} + \frac{t^3}{3!}\,\frac{R_i}{\sigma^3}\right)\right]^{-2}\right\},$$

gde je $0 < \varepsilon < 1$. Stavljajući

$$Q_i = \left[1 - \varepsilon\left(\frac{t^2}{2}\,\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} + \frac{t^3}{3!}\,\frac{R_i}{\sigma^3}\right)\right]^{-2},$$

$\psi_z(t)$ dobija oblik

$$\psi_z(t) = -\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} - \frac{it^3}{3!}\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i}{\sigma^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t^2}{2}\,\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} + \frac{t^3}{3!}\,\frac{R_i}{\sigma^3}\right)^2 Q_i =$$

$$= -\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{3!}\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i}{\sigma^2} - \frac{t^4}{8}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i^4 Q_i}{\sigma^4} -$$

$$-\frac{it^5}{12}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i^2 R_i Q_i}{\sigma^5} + \frac{t^6}{72}\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i^2 Q_i}{\sigma^6}.$$

Pokažimo da je

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{R_i}{\sigma^3} = 0.$$

Zaista, iz

$$\left|\sum_{i=1}^{n} R_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|R_i| \leqslant nB_3,$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \geqslant nA_2$$

sleduje da je

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i}{\sigma^3}\right| \leqslant \frac{nB_3}{n^{3/2}A_2^{3/2}} \to 0$$

kad $n \to \infty$.

Kako i

$$0 < \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} < \frac{B_2}{nA_2} \to 0$$

kad $n \to \infty$, to sleduje da je

$$\lim_{n\to\infty} Q_i = 1.$$

Otuda

$$\psi_z(t) \to -\frac{t^2}{2}, \text{ kad } n \to \infty,$$

tj.

$$\varphi_z(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ kad } n \to \infty,$$

čime je teorema dokazana.

5.8. χ^2 - raspored. — To je raspored sa z.v.

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \tag{5.8.1}$$

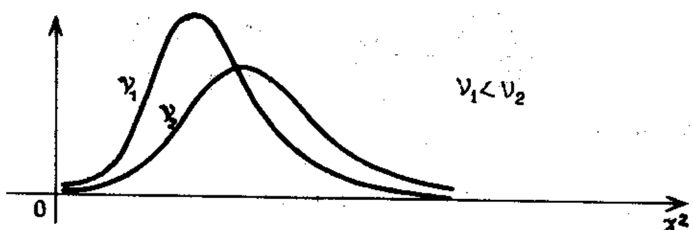
čija a.p. χ^2 varira od 0 do $+\infty$. Parametar ν naziva se *broj stepena slobode*. Lako je proveriti da je

$$\int_0^\infty f(\chi^2)\, d(\chi^2) = 1.$$

Zaista, smenom $\frac{\chi^2}{2} = \xi$ dobijamo

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty \xi^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\xi} d\xi = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = 1.$$

Oblik krive zakona verovatnoće asimetričan je; unimodalan je sa modusom $\chi^2 = \nu - 2$ (Dijagram (5. 8. I)).



Dijagram (5.8.I)

K.f. biće

$$\varphi(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty (\chi^2)^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2} + it\chi^2} d(\chi^2) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty \xi^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\xi(1-2it)} d\xi.$$

Daljom smenom $\eta = \xi(1-2it)$ dobijamo

(5.8.2)
$$\varphi(t) = (1-2it)^{-\frac{\nu}{2}}$$

Kako je

$$\varphi'(0) = i\nu,$$

$$\varphi''(0) = i^2\nu(\nu+2),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(r)}(0) = i^r\nu(\nu+2)\ldots[\nu+2(r-1)],$$

to su momenti χ^2-rasporeda

$$E(\chi^2) = \nu,$$

(5.8.3)
$$\mu_2 = 2\nu, \quad \mu_3 = 8\nu, \quad \mu_4 = 12\nu(\nu+4), \ \ldots\ldots$$

a koeficijenti asimetrije i spljoštenosti

(5.8.4)
$$\beta_1 = \frac{8}{\nu}, \qquad \beta_2 = 3 + \frac{12}{\nu}.$$

Raspored je utoliko asimetričniji, ukoliko je ν manje. Za $\nu \to \infty$, raspored postaje simetričan. Tada je $\beta_1 = 0$ a $\beta_2 = 3$. Koeficijenti su u tom slučaju identični sa odgovarajućim koeficijentima normalnog rasporeda. Pokažimo da su tada i sami rasporedi identični. Zaista, k.f. standardizovane promenljive $\dfrac{\chi^2-\nu}{\sqrt{2\nu}}$ je

$$\Phi(t) = e^{-it\sqrt{\frac{\nu}{2}}}\left(1-it\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right)^{-\frac{\nu}{2}} =$$

$$= \left[e^{it\sqrt{\frac{2}{\nu}}}\left(1-it\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right)\right]^{-\frac{\nu}{2}} =$$

$$= \left[\left(1-it\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right)\left(1+it\sqrt{\frac{2}{\nu}} - \frac{t^2}{\nu} + \cdots\right)\right]^{-\frac{\nu}{2}} =$$

$$= \left[1+\frac{t^2}{\nu}+\cdots\right]^{-\frac{\nu}{2}} \to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

tj. k.f. normalnog rasporeda. Kako je ova konvergencija uniformna u okolini tačke $t=0$, to na osnovu recipročne teoreme (4.20) raspored promenljive $\dfrac{\chi^2-\nu}{\sqrt{2\nu}}$ teži ka rasporedu $N(0, 1)$ kad $\nu \to \infty$.

Tabela 4 daje vrednosti funkcije χ^2-rasporeda do $\nu = 20$. Za veće vrednosti od $\nu = 20$ već možemo uzeti Tabelu 2 za normalan raspored koja će dati dobru aproksimaciju χ^2-rasporeda. Tabela 5 sadrži izračunate vrednosti χ^2 za date vrednosti $F(\chi^2)$.

Označimo sa

$$G(\alpha, r) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} e^{-\alpha x} x^{r-1}$$

tako da z.v. χ^2-rasporeda možemo skraćeno pisati u obliku

$$f(\chi^2) = G\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\nu}{2}\right).$$

Neka su χ_1^2 i χ_2^2 dve međusobno nezavisne aleatorne promenljive sa odgovarajućim z.v. $G\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu_1}{2}\right)$ i $G\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)$. K.f. zbira $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$ biće

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = (1-2it)^{-\frac{\nu_1}{2}}(1-2it)^{-\frac{\nu_2}{2}} = (1-2it)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}$$

tako da zbir $\chi_1^2 + \chi_2^2$ ima takođe χ^2-raspored sa $(\nu_1 + \nu_2)$ stepena slobode (s.s.), tj.

$$G\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\nu_1}{2}\right) * G\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\nu_2}{2}\right) = G\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right). \tag{5.8.5}$$

I uopšte zbir $\chi_1^2 + \chi_2^2 + \ldots + \chi_k^2$ ima χ^2-raspored sa z.v.

$$G\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots \nu_k}{2}\right).$$

Posmatrajmo n međusobno nezavisnih a.p. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, svaka od njih je sa rasporedom $N(0, 1)$. Raspored promenljive X_i^2 dobićemo primenom obrasca (4.3.13)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$$

čija je k.f.

$$(1-2it)^{-\frac{1}{2}}.$$

K.f. promenljive $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ biće

$$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$$

tako da promenljiva

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

ima χ^2-raspored sa n s.s. .

Ukoliko je $N(0, \sigma)$ raspored promenljivih X_i, tada

(5.8.6) $$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \text{ ima raspored } \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}},$$

(5.8.7) $$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \text{ ima raspored } \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{nx}{2\sigma^2}},$$

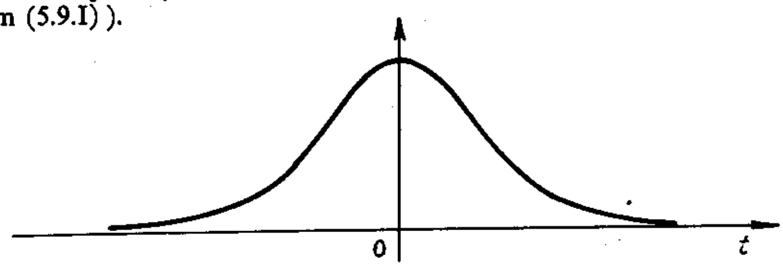
(5.8.8) $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \text{ ima raspored } \frac{2}{2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

(5.8.9) $$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2} \text{ ima raspored } \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{n}{2\sigma^2} x^2}.$$

5.9. „Student"-ov raspored. — W. S. Gosset je pod pseudonimom „Student" prvi definisao ovaj raspored sa z.v.

(5.9.1) $$s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

čija a.p. t varira od $-\infty$ do $+\infty$. Često se ovaj raspored naziva i t-rasporedom. Raspored je unimodalan i simetričan u odnosu na tačku $t = 0$ (Dijagram (5.9.I)).



Dijagram (5.9.I)

Proverimo da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(t)\, dt = 1.$$

Kako je z.v. (5.9.1) parna funkcija, to je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(t)\, dt = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Smenom

$$\frac{n}{n+t^2} = u, \qquad dt = -\frac{\sqrt{n}}{2u^2} \sqrt{\frac{u}{1-u}}$$

dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(t)\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathrm{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$$

zbog (2.5.2)

Parametar n nazivamo *brojem stepena slobode* (*s.s.*). Aritmetička sredina i varijansa konačne su za svako n. Viši k-ti momenti biće konačni jedino za $k < n$. Kako je $s_n(t)$ parna funkcija, to su svi neparni $(2\nu+1)$-vi momenti jednaki nuli za $2\nu + 1 < n$. Otuda,

$$M = 0$$

(5.9.2) $$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s_n(t)\,dt = \frac{n\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 u^{\frac{n-2}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \frac{n\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathrm{B}\left(\frac{n-2}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{n}{n-2}\cdot$$

Za $2\nu < n$ biće

(5.9.3) $$\mu_{2\nu} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)\,n^{\nu}}{(n-2)(n-4)\cdots(n-2\nu)}\,.$$

Vrednosti f.r.

$$S_n(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} s_n(t)\,dt$$

date su u Tabeli 6. Pomoću njih možemo odrediti verovatnoću da će se t naći izvan intervala $(-t_0, t_0)$

$$\Pr\{|t| > t_0\} = 1 - S_n(t_0)\,.$$

U Tabeli se nalaze vrednosti $S_n(t_0)$ do $n = 20$. Za veće vrednosti n možemo koristiti Tabelu 2 za normalan raspored, pošto

(5.9.4) $$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \to \Theta(x)\,,$$

odnosno

(5.9.5) $$\lim_{n\to\infty} s_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Zaista, u izrazu

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2}} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

prvi limes jednak je jedinici zbog (2.4.3), drugi takođe jedinici a treći iznosu $e^{-\frac{x^2}{2}}$, te neposredno dobijamo (5.9.5).

Kako je

$$\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \leqslant \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}},$$

gde je $1+\frac{t^2}{2}$, integrabilno u razmaku $(-\infty, +\infty)$, to je

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} s_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \lim_{n\to\infty} s_n(t)\,dt = \theta(x).$$

Usled simetrije koeficijent asimetrije jednak je nuli, tj. $\beta_1 = 0$, kao i kod normalnog rasporeda, a

$$\beta_2 = 3 + \frac{2}{n-4}, \qquad (n > 4),$$

koji teži ka 3 kad $n \to \infty$.

Tabela 7 sadrži izračunate vrednosti t_0 za date vrednosti $1 - S_n(t_0)$.

„Student"-ov raspored zauzima u statistici vrlo važno mesto zbog svoje sledeće osobine:

Neka su $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n+1}$ *međusobno nezavisne a.p. sa identičnim normalnim rasporedom* $N(0, \sigma)$. *Označimo sa*

$$Y = +\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=2}^{n+1} X_\nu^2}.$$

Tada a.p.

$$\frac{X_1}{Y} = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=2}^{n+1} X_\nu^2}}$$

ima „Student"-ov raspored.

Dokaz. K.f. za X_1 je

$$\varphi_1(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

A.p. Y ima raspored (5.8.9) a k.f.

$$\varphi_2(t) = \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}x^2 + itx}\,dx.$$

Dalje je

$$\varphi_2'(t) = \frac{2i\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^n e^{-\frac{n}{2\sigma^2}x^2 + itx} dx ,$$

tj.

$$\varphi_2'(-tz) = \frac{2i\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^n e^{-\frac{n}{2\sigma^2}x^2 - itxz} dx .$$

Kako su X_1 i Y dve međusobno nezavisne a.p. a $F_2(0) = 0$, to će z.v. količnika X_1/Y biti dat obrascem (4.16.4), tj.

$$G(z) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\pi\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt \int_0^{\infty} x^n e^{-\frac{n}{2\sigma^2}x^2 - itxz} dx =$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\pi \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^n e^{-\frac{n}{2\sigma^2}x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} - itxz} dt .$$

Koristeći (4.14.16), vrednost drugog integrala je

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} - itxz} dt = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 z^2}{2\sigma^2}}$$

tako da je

$$g(z) = \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^{n+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^n e^{-\frac{n+z^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = s_n(z) .$$

Primetimo da se u specijalnom slučaju $n = 1$, „Student"-ov raspored svodi na Cauchy-ev, tj.

$$s_1(t) = C(1,0) .$$

5.10. Fisher-ov raspored. — A.p. ovog rasporeda uzima samo pozitivne vrednosti i ima z.v.

$$f_{m,n}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}, \tag{5.10.1}$$

gde m i n nazivamo stepenima slobode.

Smenom

$$y=\frac{1}{1+x}$$

neposredno dobijamo da je

$$\int_0^\infty f_{m,n}(x)\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)=1.$$

Takođe je

$$E(X)=\int_0^\infty x f_{m,n}(x)\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,B\left(\frac{m}{2}+1,\frac{n}{2}-1\right)=\frac{m}{n-2}. \tag{5.10.2}$$

$$\sigma^2=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \tag{5.10.3}$$

Da bi $E(X)$ postojalo, treba da je $n>2$. Da bi σ^2 postojalo, treba da je $n>4$.

Raspored je asimetričan i unimodalan ukoliko je $m>2$ sa modusom

$$M_o=\frac{m-2}{n+2}\,\frac{n}{m}.$$

Smenom

$$x=\frac{m}{n}F$$

dobijamo t. zv. *Snedecor-ov F*-raspored sa m i n stepena slobode, koji ćemo simbolički označiti sa $h_{m,n}(F)$, tj.

$$h_{m,n}(F)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}F^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{-\frac{m+n}{2}},\ F>0. \tag{5.10.4}$$

Primetimo da ako promenljiva t ima „Student"-ov raspored, njen kvadrat, tj. t^2, imaće Snedecor-ov raspored $h_{1,n}(t^2)$.

Radi lakšeg korišćenja ovog rasporeda u analizi varijanse Fisher je uveo promenljivu z preko relacije

$$e^{2z}=F.$$

Dok F raste od 0 do $+\infty$, z raste od $-\infty$ do $+\infty$, tako da je

$$\Pr\{Z < z_0\} = F(z_0) = \Pr\{F < e^{2z_0}\}.$$

Za poznate vrednosti m, n i $1 - F(z) = 0{,}05$ odnosno $1 - F(z) = 0{,}01$ date su vrednosti z_0 u Tabeli 8.

Z.v. z-rasporeda biće

$$(5.10.5)\quad 2e^{2z} h_{m,n}(e^{2z}) = \frac{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{e^{mz}}{\left(1+\frac{m}{n}e^{2z}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

U šestoj glavi pokazaćemo da ako su promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ međusobno nezavisne i normalno raspoređene sa zajedničkim rasporedom $N(0, \sigma)$, tada promenljiva

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}$$

ima Fisher-ov raspored sa m i n s.s.

5.11. Primeri

5.11.1. Neka je p_k verovatnoća da će se u $k+1$-om ponovljenom opitu ostvariti prvi put očekivani događaj čija je prosta verovatnoća p.

a) Odrediti verovatnoću p_k, aritmetičku sredinu i varijansu.

b) Odrediti srednji broj opita kao i varijansu broja opita za n ostvarenja očekivanog događaja.

a) Tražena verovatnoća je

$$p_k = q^k p.$$

Dajući indeksu k vrednosti 0, 1, 2, 3, ... dobijamo z.v. prekidne aleatorne promenljive $X = k$ i aritmetička sredina biće

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k q^k p = pq \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} =$$

$$= pq \frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = pq \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) =$$

$$= pq \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

Kako na analogan način dobijamo da je

$$E(X^2) = \frac{pq + 2q^2}{p^2}$$

to će varijansa biti

$$\sigma^2 = \frac{pq+2q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}\cdot$$

Raspored sa gornjim z.v. naziva se *geometriski raspored.*

b) Srednji broj opita za n ostvarenja očekivanog događaja možemo pretstaviti kao očekivanu vrednost zbira aleatornih promenljivih

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

gde je X_ν broj opita koji sleduju $(\nu - 1)$-vo ostvarenje i uključujući ν-to ostvarenje očekivanog događaja. Otuda, traženi srednji broj opita za n ostvarenja očekivanog događaja biće

$$E(X) = \sum_{\nu=1}^{n} E(X_\nu) = n\frac{q}{p}\cdot$$

Kako su X_ν međusobno nezavisni, to je varijansa broja opita za n ostvarenja očekivanog događaja

$$D^2(X) = \sum D^2(X_\nu) = n\frac{q}{p^2}\cdot$$

5.11.2. Aleatorna promenljiva $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ definisana u (5.11.1) ima t.zv. *Pascal-ov raspored.* Odrediti z.v., tj. $Pr.\{X = n + k\}$ gde je k broj neostvarenja koji prethode n-to ostvarenje očekivanog događaja.

Kako je k.f. geometriskog rasporeda

$$\varphi_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p e^{itk} = p\sum_{k=0}^{\infty}(qe^{it})^k = \frac{p}{1-e^{it}}$$

to je k.f. Pascal-ovog rasporeda, s obzirom da su X_ν nezavisni međusobno,

$$\varphi(t) = [\varphi_\nu(t)]^n = \left(\frac{p}{1-e^{it}}\right)^n.$$

Zakon verovatnoće možemo dobiti preko k.f.

$$f(k,n,p) = Pr.\{X = n+k\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{p^n}{(1-qe^{it})^n} e^{-itk} dt.$$

Smenom $x = e^{it}$ dobijamo

$$f(k,n,p) = \frac{p^n}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{t=\pi} \frac{dx}{x^{k+1}(1-qx)^n} =$$

$$= \binom{k+n-1}{k} p^n q^k \frac{1}{2\pi}\left[\log\left|\frac{1-qx}{x}\right|\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} =$$

$$= \binom{k+n-1}{k} p^n q^k$$

Kako je

$$(-1)^k \binom{k+n-1}{k} = \binom{-n}{k}$$

to z.v. Pascal-ovog rasporeda možemo napisati u obliku

$$f(k,n,p) = \binom{-n}{k} p^n (-q)^k$$

zbog čega se ovaj raspored često naziva i *negativni binomijalni raspored.*

5.11.3. Pokazati direktnim putem da je

$$C_{X_1}(a_1, b_1) \ast C_{X_2}(a_2, b_2) = C_{X_1+X_2}(a_1+a_2, b_1+b_2).$$

gde su X_1 i X_2 dve nezavisne aleatorne promenljive sa Cauchy-evim rasporedima.

Stavimo

$$x_1 = b_1 + a_1 \xi_1,$$

$$x_2 = b_2 + a_2 \xi_2,$$

$$z = x_1 + x_2 = b_1 + b_2 + Z,$$

tako da je

$$Z = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2.$$

Umesto promenljivih ξ_1 i ξ_2 uzećemo promenljive Z i u vezane sa prethodnim preko relacija

$$\xi_1 = \frac{a_1 Z}{a_1^2 + a_2^2} + u a_2, \quad \xi_2 = \frac{a_2 Z}{a_1^2 + a_2^2} - u a_1.$$

Kako su X_1 i X_2 nezavisni među sobom, to je elementarna verovatnoća dvodimenzionalne aleatorne promenljive (X_1, X_2) jednaka proizvodu elementarnih verovatnoća aleatornih promenljivih X_1 i X_2, tj.

$$f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{d\xi_1\, d\xi_2}{(1+\xi_1^2)(1+\xi_2^2)},$$

ili uvođenjem novih promenljivih u i Z

$$\frac{1}{\pi^2} \frac{du\, dz}{\left[1+\left(\frac{a_1 Z}{a_1^2+a_2^2} + u a_2\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{a_2 Z}{a_1^2+a_2^2} - u a_1\right)^2\right]}.$$

Singularne tačke od f su $\xi_1 = i$ i $\xi_2 = i$ a integral gornjeg izraza po u u granicama od $-\infty$ do $+\infty$ biće proizvod od $2\pi i$ i zbira reziduuma odgovarajućih singularnih tačaka, tj.

$$d(Z) = \frac{2\pi i}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2 i a_2 \left[1+\left(\frac{Z}{a_2} - \frac{i a_1}{a_2}\right)^2\right]} + \frac{1}{2 i a_1 \left[1+\left(\frac{Z}{a_1} + \frac{i a_2}{a_1}\right)^2\right]} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{a_1 + a_2}{(a_1+a_2)^2 + Z^2},$$

odnosno z.v. promenljive $X_1 + X_2$ biće

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a_1 + a_2}{(a_1 + a_2)^2 + (z - b_1 - b_2)^2} = C_{X_1 + X_2}(a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

5.11.4. Naći k.f. normalnog rasporeda korišćenjem Cauchy-eve teoreme iz teorije funkcija.

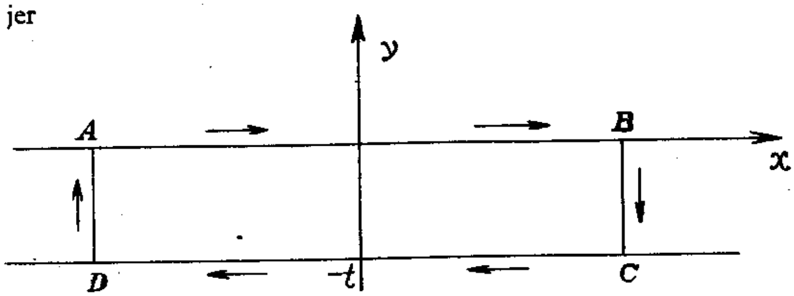
Po definiciji k.f. je

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\,dx.$$

Kada realni deo x tačke $(x - it)$ u kompleksnoj ravni varira od $-\infty$ do $+\infty$, tačka se pomera duž prave $y = -t$ i integral $\varphi(t)$ imaće istu vrednost bez obzira da li ga izračunavamo duž prave $y = -t$ ili duž prave $y = 0$, jer



Dijagram (5.11.4.I)

na osnovu Cauchy-eve teoreme integral funkcije kompleksne promenljive $e^{-\frac{z^2}{2}}$ duž jedne zatvorene konture jednak je nuli. Uzmimo za tu konturu pravougaonik $ABCD$. Ako se tačke A i B udaljavaju u beskonačnost s leve i desne strane, funkcija $e^{-\frac{z^2}{2}}$ teži ka nuli. Zato će tada i integrali

$$\int_{BC} \quad \text{i} \quad \int_{DA}$$

težiti ka nuli, tako da će integrali

$$\int_{AB} \quad \text{i} \quad \int_{DC}$$

imati jednake granične vrednosti, tj.

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

5.11.5. Naći srednje apsolutno otstupanje kod normalnog rasporeda.

$$E(|X|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}798\ldots$$

Analogno dobijamo sledeću vezu između apsolutnih momenata normalnog rasporeda

$$E(|X|^{\nu+1}) = \nu\, E(|X|^{\nu-1}),$$

tako da je

$$E(|X|^{2\nu}) = \mu_{2\nu} = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1) = \frac{(2\nu)!}{2^{\nu}\nu!},$$

$$E(|X|^{2\nu+1}) = 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 2^{\nu}\nu!\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

tj.

$$E(|X|) < \sigma^2 < E(|X|^3) < \cdots$$

5.11.6. Dokazati Laplace-Liapounoff-ljevu teoremu (2.14) pomoću centralne granične teoreme (5.7).

Posmatrajmo a.p. X_i koja može uzimati samo vrednosti 1 ili 0 sa odgovarajućim verovatnoćama p i $q = 1 - p$. Tada je $E(X_i) = m_i = p$, $\sigma_1^2 = pq$. Promenljiva

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

ima aritmetičku sredinu $m = p$ i standardnu devijaciju $\sigma = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

K.f. za X_i je

$$\varphi_{X_i}(t) = pe^{it} + q$$

a za $X_i - p$

$$\varphi_{X_i - p}(t) = pe^{iqt} + qe^{-ipt}$$

pa je

$$\varphi_{\frac{X-p}{\sigma}}(t) = \left(pe^{iq\frac{t}{\sqrt{npq}}} + qe^{-ip\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right)^n =$$

$$= \left[p\left(1 + iq\frac{t}{\sqrt{npq}} - \frac{q^2}{2}\frac{t^2}{npq} + \cdots\right) + \right.$$

$$\left. + q\left(1 - ip\frac{t}{\sqrt{npq}} - \frac{p^2}{2}\frac{t^2}{npq} + \cdots\right)\right]^n =$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{2}\frac{p^2q + pq^2}{npq} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n =$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{2}\frac{1}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

tako da

$$\varphi_{\frac{X-p}{\sigma}}(t) \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Zato a.p. X ima normalan raspored $N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$ te je

$$\Pr\left\{t_1 \leqslant \frac{X-p}{\sigma} \leqslant t_2\right\} = \Pr\left\{t_1 \leqslant \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leqslant t_2\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

gde smo stavili $k = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n$. Verovatnoća

$$\Pr\left\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k\right\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

pretstavlja binomijalnu verovatnoću.

5.11.7. Neka je $F(x)$ f.r. standardizovane promenljive X, $\varphi_X(t)$ njena k.f. a m_1, m_2, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ realne konstante. Ako se uvek mogu odrediti takva dva broja m i σ da je

$$\varphi_{\frac{X-m_1}{\sigma_1}}(t)\,\varphi_{\frac{X-m_2}{\sigma_2}}(t) = \varphi_{\frac{X-m}{\sigma}}(t),$$

pokazati da je tada $F(x)$ funkcija normalnog rasporeda.

Gornja veza povlači i jednakost odgovarajućih f.r.; Kako je a.s. rasporeda s leve strane $m_1 + m_2$ a standardna devijacija $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, to je $m = m_1 + m_2$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Stavljajući $m_1 = m_2 = 0$ i $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dobijamo

$$\varphi_X(t) = \left[\varphi_{X\sqrt{2}}(t)\right]^2$$

Kako u opštem slučaju na osnovu centralne granične teoreme imamo

$$\left[\varphi_{X\sqrt{n}}(t)\right]^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

kad $n \to \infty$, to je i

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

tj. $F(x) = \theta(x)$.

5.11.8. Odrediti kumulante χ^2-rasporeda.

Kako je k.f. χ^2-rasporeda

$$\varphi(t) = (1 + 2it)^{-\frac{\nu}{2}}$$

to je k.f. druge vrste

$$\psi(t) = \log \varphi(t) = -\frac{\nu}{2} \log(1 - 2it),$$

ili, razvijajući u red $\log(1 - 2it)$

$$\psi(t) = -\frac{\nu}{2}\left(-2it - \frac{4i^2t^2}{2} - \frac{8i^3t^3}{3} - \frac{16i^4t^4}{4} - \dots\right)$$

$$= \nu(it) + 2\nu\frac{(it)^2}{2!} + 8\nu\frac{(it)^3}{3!} + 48\nu\frac{(it)^4}{4!} + \dots,$$

pa je

$$\begin{aligned} k_1 &= \nu, \\ k_2 &= 2\nu, \\ k_3 &= 8\nu, \\ k_4 &= 48\nu, \\ &\dots\dots \\ k_r &= 2^{r-1}(r-1)!\,\nu. \end{aligned}$$

Neka su χ_1^2, χ_2^2, ..., χ_s^2 međusobno nezavisni. Znamo da će zbir $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \ldots + \chi_s^2$ imati takođe χ^2-raspored. Kumulante tog rasporeda biće

$$k_r = \sum_{j=1}^{s} k_{r_j} = 2^{r-1}(r-1)!\sum_{j=1}^{s} \nu_j ,$$

gde je k_{rj} r-ta kumulanta od χ^2_j.

5.11.9. Promenljiva

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} Y_j^2}$$

imaće Fisher-ov raspored ako su promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1\ Y_2, \ldots, Y_n$ međusobno nezavisne i sa zajedničkim rasporedom $N(0, \sigma)$. Odrediti raspored promenljive

$$B = \frac{Z}{1+Z} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i^2}{\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2} .$$

Dok Z varira od 0 do ∞, B varira od 0 do 1. Zato nejednačini $B < x$ odgovara nejednačina $Z < \frac{x}{1-x}$, pa je

$$\Pr\{B < x\} = \Pr\left\{Z < \frac{x}{1-x}\right\} ,$$

a z.v. traženog rasporeda dobićemo smenom promenljive x u (5.10.1) sa $x/(1-x)$, tj.

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1}(1-x)^{\frac{n}{2}-1} ,$$

gde x varira od 0 do 1. Dobijeni raspored naziva se *Beta-raspored.*

Analogno ovom rasporedu imamo i *Gama-raspored* sa z.v.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} ,$$

gde x varira od 0 do ∞.

Momenat ν-tog reda Beta-rasporeda je

$$m_\nu = \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} B\left(\frac{m}{2} + \nu, \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{m}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{m+n}{2}+\nu\right)}$$

pa je

$$m_1 = \mathrm{E}(\mathrm{B}) = \frac{m}{m+n},$$

$$m_2 = \frac{m(m+2)}{(m+n)(m+n+2)},$$

$$\sigma^2 = \frac{2mn}{(m+n)^2(m+n+2)}.$$

5.11.10. K. Pearson je dao jedan sistem rasporeda rešavanjem diferencijalne jednačine

(5.11.10.1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+a)y}{b+cx+dx^2}.$$

Variranjem konstanata a, b, c i d dobijamo čitav jedan sistem neprekidnih rasporeda.

Pokazati da

α) za $a=-M$, $b=-\sigma^2$ a $c=d=0$ dobijamo z.v. normalnog rasporeda,

β) za $b=d=0$, $a=1-n$, $c=-1$ dobijamo z.v. Gama-rasporeda.

Zaista, u slučaju α) imamo

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x-M}{\sigma^2}\,dx.$$

Integracijom dobijamo

$$y = Ke^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$$

gde konstantu K treba još tako odrediti da bude ispunjen uslov (4.3.9). Tako dobijamo $K = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

U slučaju β) imamo

$$\frac{dy}{y} = \frac{x-(n-1)}{-x}\,dx.$$

Integracijom dobijamo

$$y = Kx^{n-1}e^{-x}$$

gde K treba da je $\dfrac{1}{\Gamma(n)}$ da bi uslov (4.3.9) bio ispunjen.

Smenom $x = \dfrac{\chi^2}{2}$ dobijamo z.v. χ^2-rasporeda. Ovaj se raspored često u literaturi spominje kao *III Pearson-ov tip rasporeda.*

5.12. Zadaci za vežbu

5.12.1. Odrediti prva četiri obična i centralna momenta binomijalnog rasporeda pomoću obrasca (4.7.1) i (4.7.9).

5.12.2. Isto to za Poisson-ov raspored.

5.12.3. Neka su X_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, r$) aleatorne promenljive od kojih svaka može uzimati vrednosti 1 ili 0 sa odgovarajućim verovatnoćama

$$p = \frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{n_1}{n}, \qquad q = \frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2}{n}.$$

a) Pokazati da je raspored zbira $X_1 + X_2 + \ldots + X_r$ jedan hipergeometriski raspored sa zakonom verovatnoće

$$\Pr\left\{X_1 + X_2 + \cdots + X_r = r_1\right\} = \frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n-n_1}{r-r_1}}{\binom{n}{r}};$$

b) Pokazati da je

$$E(X_\nu X_\mu) = \frac{n_1(n_1-1)}{n(n-1)}$$

a zatim da je

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) = \frac{n_1 r}{n},$$

$$\sigma^2_{X_1 + X_2 + \cdots + X_r} = \frac{n_1 r(n-r)(n-n_1)}{n^2(n-1)}.$$

5.12.4. Pokazati da hipergeometriski raspored teži Poisson-ovom rasporedu ako je n_1 vrlo malo u odnosu na n_2 i ako je $r\dfrac{n_1}{n_2}$ konačno.

5.12.5. Pokazati da je kod Pascal-ovog rasporeda

$$f(k, n_1, p) * f(k, n_2, p) = f(k, n_1 + n_2, p).$$

5.12.6. (Polya-ev raspored). Jedna urna sadrži α belih i β crnih kuglica. Posle svakog izvlačenja izvučenu kuglicu vraćamo nazad u urnu zajedno sa γ novih kuglica čija je boja jednaka boji izvučene kuglice.

a) Odrediti verovatnoću $\pi(k, n)$ da će u n uzastopnih izvlačenja k puta biti izvučena bela kuglica.

b) Pokazati da su aritmetička sredina i varijansa rasporeda sa z.v. $\{\pi(k, n)\}$

$$E(X) = np,$$

$$\sigma^2 = npq\,\frac{\alpha + \beta + n\gamma}{\alpha + \beta + \gamma},$$

gde smo stavili $p = \dfrac{a}{a+b}$, $q = \dfrac{b}{a+b}$.

c) Pokazati da ako $n \to \infty$, $p \to 0$, $\gamma/(\alpha+\beta) \to 0$, $np \to m$, $n\gamma/(\alpha+\beta) \to s$

$$\pi(k,n) \to \binom{\frac{m}{s}+k-1}{k}\left(\frac{1}{1+s}\right)^{\frac{m}{s}}\left(\frac{s}{1+s}\right)^{k}$$

5.12.7. Dokazati uopštenu centralnu graničnu teoremu (5.7.II) u slučaju kad a.p. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ imaju prekidne rasporede.

5.12.8. Odrediti Pearson-ove koeficijente kod Fisher-ovog rasporeda.

5.12.9. Pokazati da je ν-ti običan momenat Snedecor-ovog rasporeda

$$m_\nu = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\frac{n\nu}{m}$$

za $\nu < \frac{n}{2}$.

5.12.10. Pokazati da Beta-raspored teži ka normalnom rasporedu, tj.

$$B\left(\frac{\alpha n}{2}, \frac{\beta n}{2}\right) x^{\frac{\alpha n}{2}-1}(1-x)^{\frac{\beta n}{2}-1} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}},$$

kad $n \to \infty$ dok α i β ostaju konačni.

5.12.11. Odrediti modus i Pearson-ove koeficijente Beta-rasporeda.

5.12.12. Odrediti konstante u Pearson-ovoj diferencijalnoj jednačini (5.11.10.1) tako da njeno rešenje bude z.v. „Student"-ovog rasporeda.

5.13 Tabela 3

$J = e^{-x}$

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,0000	0,43	0,65051	0,86	0,42316	1,29	0,27527
0,01	0,99005	0,44	0,64404	0,87	0,41895	1,30	0,27253
0,02	0,98020	0,45	0,63763	0,88	0,41478	1,31	0,26982
0,03	0,97045	0,46	0,63128	0,89	0,41066	1,32	0,26714
0,04	0,96079	0,47	0,62500	0,90	0,40657	1,33	0,26448
0,05	0,95123	0,48	0,61878	0,91	0,40252	1,34	0,26185
0,06	0,94176	0,49	0,61263	0,92	0,39852	1,35	0,25924
0,07	0,93239	0,50	0,60653	0,93	0,39455	1,36	0,25666
0,08	0,92312	0,51	0,60050	0,94	0,39063	1,37	0,25411
0,09	0,91393	0,52	0,59452	0,95	0,38674	1,38	0,25158
0,10	0,90484	0,53	0,58860	0,96	0,38289	1,39	0,24908
0,11	0,89583	0,54	0,58275	0,97	0,37908	1,40	0,24660
0,12	0,88692	0,55	0,57695	0,98	0,37531	1,41	0,24414
0,13	0,87810	0,56	0,57121	0,99	0,37158	1,42	0,24171
0,14	0,86936	0,57	0,56553	1,00	0,36788	1,43	0,23931
0,15	0,86071	0,58	0,55990	1,01	0,36422	1,44	0,23693
0,16	0,85214	0,59	0,55433	1,02	0,36060	1,45	0,23457
0,17	0,84366	0,60	0,54881	1,03	0,35701	1,46	0,23224
0,18	0,83527	0,61	0,54335	1,04	0,35345	1,47	0,22993
0,19	0,82696	0,62	0,53794	1,05	0,34994	1,48	0,22764
0,20	0,81873	0,63	0,53259	1,06	0,34646	1,49	0,22537
0,21	0,81058	0,64	0,52729	1,07	0,34301	1,50	0,22313
0,22	0,80252	0,65	0,52205	1,08	0,33960	1,51	0,22091
0,23	0,79453	0,66	0,51685	1,09	0,33622	1,52	0,21871
0,24	0,78663	0,67	0,51171	1,10	0,33287	1,53	0,21654
0,25	0,77880	0,68	0,50662	1,11	0,32956	1,54	0,21438
0,26	0,77105	0,69	0,50158	1,12	0,32628	1,55	0,21225
0,27	0,76338	0,70	0,49659	1,13	0,32303	1,56	0,21014
0,28	0,75578	0,71	0,49164	1,14	0,31982	1,57	0,20805
0,29	0,74826	0,72	0,48675	1,15	0,31664	1,58	0,20598
0,30	0,74082	0,73	0,48191	1,16	0,31349	1,59	0,20393
0,31	0,73345	0,74	0,47711	1,17	0,31037	1,60	0,20190
0,32	0,72615	0,75	0,47237	1,18	0,30728	1,61	0,19989
0,33	0,71892	0,76	0,46767	1,19	0,30422	1,62	0,19790
0,34	0,71177	0,77	0,46301	1,20	0,30119	1,63	0,19593
0,35	0,70469	0,78	0,45841	1,21	0,29820	1,64	0,19398
0,36	0,69768	0,79	0,45384	1,22	0,29523	1,65	0,19205
0,37	0,69073	0,80	0,44933	1,23	0,29229	1,66	0,19014
0,38	0,68386	0,81	0,44486	1,24	0,28938	1,67	0,18825
0,39	0,67706	0,82	0,44043	1,25	0,28650	1,68	0,18637
0,40	0,67032	0,83	0,43605	1,26	0,28365	1,69	0,18452
0,41	0,66365	0,84	0,43171	1,27	0,28083	1,70	0,18268
0,42	0,65705	0,85	0,42741	1,28	0,27804	1,71	0,18087

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
1,72	0,17907	2,17	0,11418	2,62	0,07280	3,35	0,03508
1,73	0,17728	2,18	0,11304	2,63	0,07208	3,40	0,03337
1,74	0,17552	2,19	0,11192	2,64	0,07136	3,45	0,03175
1,75	0,17377	2,20	0,11080	2,65	0,07065	3,50	0,03020
1,76	0,17204	2,21	0,10970	2,66	0,06995	3,55	0,02872
1,77	0,17033	2,22	0,10861	2,67	0,06925	3,60	0,02732
1,78	0,16864	2,23	0,10753	2,68	0,06856	3,65	0,02599
1,79	0,16696	2,24	0,10646	2,69	0,06788	3,70	0,02472
1,80	0,16530	2,25	0,10540	2,70	0,06721	3,75	0,02352
1,81	0,16365	2,26	0,10435	2,71	0,06654	3,80	0,02237
1,82	0,16203	2,27	0,10331	2,72	0,06587	3,85	0,02128
1,83	0,16041	2,28	0,10228	2,73	0,06522	3,90	0,02024
1,84	0,15882	2,29	0,10127	2,74	0,06457	3,95	0,01925
1,85	0,15724	2,30	0,10026	2,75	0,06393	4,00	0,01832
1,86	0,15567	2,31	0,09926	2,76	0,06329	4,10	0,01657
1,87	0,15412	2,32	0,09827	2,77	0,06266	4,20	0,01500
1,88	0,15259	2,33	0,09730	2,78	0,06204	4,30	0,01357
1,89	0,15107	2,34	0,09633	2,79	0,06142	4,40	0,01227
1,90	0,14957	2,35	0,09537	2,80	0,06081	4,50	0,01111
1,91	0,14808	2,36	0,09442	2,81	0,06020	4,60	0,01005
1,92	0,14661	2,37	0,09348	2,82	0,05961	4,70	0,00910
1,93	0,14515	2,38	0,09255	2,83	0,05901	4,80	0,00823
1,94	0,14370	2,39	0,09163	2,84	0,05843	4,90	0,00745
1,95	0,14227	2,40	0,09072	2,85	0,05784	5,00	0,00674
1,96	0,14086	2,41	0,08982	2,86	0,05727	5,10	0,00610
1,97	0,13946	2,42	0,08892	2,87	0,05670	5,20	0,00552
1,98	0,13807	2,43	0,08804	2,88	0,05613	5,30	0,00499
1,99	0,13670	2,44	0,08716	2,89	0,05558	5,40	0,00452
2,00	0,13534	2,45	0,08629	2,90	0,05502	5,50	0,00409
2,01	0,13399	2,46	0,08543	2,91	0,05448	5,60	0,00370
2,02	0,13266	2,47	0,08458	2,92	0,05393	5,70	0,00335
2,03	0,13134	2,48	0,08374	2,93	0,05340	5,80	0,00303
2,04	0,13003	2,49	0,08291	2,94	0,05287	5,90	0,00274
2,05	0,12873	2,50	0,08208	2,95	0,05234	6,00	0,00248
2,06	0,12745	2,51	0,08127	2,96	0,05182	6,25	0,00193
2,07	0,12619	2,52	0,08046	2,97	0,05130	6,50	0,00150
2,08	0,12493	2,53	0,07966	2,98	0,05079	6,75	0,00117
2,09	0,12369	2,54	0,07887	2,99	0,05029	7,00	0,00091
2,10	0,12246	2,55	0,07808	3,00	0,04979	7,50	0,00055
2,11	0,12124	2,56	0,07730	3,05	0,04736	8,00	0,00034
2,12	0,12003	2,57	0,07654	3,10	0,04505	8,50	0,00020
2,13	0,11884	2,58	0,07577	3,15	0,04285	9,00	0,00012
2,14	0,11765	2,59	0,07502	3,20	0,04076	9,50	0,00007
2,15	0,11648	2,60	0,07427	3,25	0,03877	10,00	0,00005
2,16	0,11533	2,61	0,07353	3,30	0,03688		

5.14 Tabela 4

χ^2 - raspored

$$F(\chi_0^2)=\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{\chi_0^2}(\chi^2)^{\frac{\nu-1}{2}}e^{-\frac{\chi^2}{2}}d(\chi^2)$$

χ_0^2 \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,001	0,005									
0,01	0,08	0,005								
0,05	0,18	0,02								
0,1	0,25	0,05	0,01							
0,2	0,35	0,10	0,02	0,005						
0,3	0,42	0,14	0,04	0,01						
0,4	0,47	0,18	0,06	0,02	0,005					
0,5	0,52	0,22	0,08	0,03	0,01					
0,6	0,56	0,26	0,10	0,04	0,01					
0,7	0,60	0,30	0,13	0,05	0,02	0,005				
0,8	0,63	0,33	0,15	0,06	0,02	0,01				
0,9	0,66	0,36	0,17	0,08	0,03	0,01				
1	0,68	0,39	0,20	0,09	0,04	0,01	0,005			
2	0,84	0,63	0,43	0,26	0,15	0,08	0,04	0,02	0,01	0,005
3	0,92	0,78	0,61	0,44	0,30	0,19	0,11	0,07	0,04	0,02
4	0,95	0,86	0,74	0,59	0,45	0,32	0,22	0,14	0,09	0,07
5	0,97	0,92	0,83	0,71	0,58	0,46	0,34	0,24	0,17	0,11
6	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,58	0,46	0,35	0,26	0,18
7	0,99	0,97	0,93	0,86	0,78	0,70	0,57	0,46	0,36	0,27
8	0,995	0,98	0,95	0,91	0,84	0,76	0,67	0,57	0,47	0,37
9	0,995	0,99	0,97	0,94	0,89	0,83	0,75	0,66	0,56	0,47
10		0,995	0,98	0,96	0,92	0,88	0,81	0,73	0,65	0,56
11		0,995	0,99	0,97	0,95	0,91	0,86	0,80	0,72	0,64
12			0,995	0,98	0,97	0,94	0,90	0,83	0,79	0,71
13			0,995	0,99	0,98	0,96	0,93	0,89	0,83	0,78
14			0,995	0,995	0,98	0,97	0,95	0,92	0,88	0,83
15				0,995	0,99	0,98	0,96	0,94	0,91	0,87
16				0,995	0,995	0,99	0,97	0,96	0,93	0,90
17					0,995	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93
18					0,995	0,995	0,99	0,98	0,96	0,95
19						0,995	0,99	0,99	0,97	0,96
20						0,995	0,995	0,99	0,98	0,97
21							0,995	0,995	0,99	0,98
22							0,995	0,995	0,99	0,98
23								0,995	0,995	0,99
24									0,995	0,99
25									0,995	0,995
26										0,995
27										0,995

χ^2_0 \ ν	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2										
3	0,01	0,005								
4	0,03	0,02	0,01	0,005						
5	0,07	0,04	0,02	0,01	0,01	0,005				
6	0,13	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01	0,005	0,005		
7	0,20	0,14	0,10	0,07	0,04	0,08	0,02	0,01	0,005	0,005
8	0,29	0,21	0,16	0,11	0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01
9	0,38	0,30	0,23	0,17	0,12	0,09	0,06	0,04	0,03	0,02
10	0,47	0,38	0,31	0,24	0,18	0,13	0,10	0,07	0,05	0,03
11	0,56	0,47	0,39	0,31	0,25	0,19	0,14	0,11	0,08	0,05
12	0,64	0,55	0,47	0,39	0,32	0,26	0,20	0,15	0,11	0,08
13	0,71	0,63	0,55	0,47	0,40	0,33	0,26	0,21	0,16	0,12
14	0,77	0,70	0,63	0,55	0,47	0,40	0,33	0,27	0,22	0,17
15	0,82	0,76	0,69	0,62	0,55	0,48	0,40	0,34	0,28	0,22
16	0,86	0,81	0,75	0,69	0,62	0,55	0,48	0,41	0,34	0,28
17	0,89	0,85	0,80	0,74	0,68	0,61	0,55	0,48	0,41	0,37
18	0,92	0,88	0,84	0,79	0,74	0,68	0,61	0,54	0,48	0,41
19	0,94	0,91	0,88	0,83	0,79	0,73	0,67	0,61	0,54	0,48
20	0,96	0,93	0,90	0,87	0,83	0,78	0,73	0,68	0,61	0,54
21	0,97	0,95	0,93	0,90	0,86	0,82	0,77	0,72	0,66	0,60
22	0,98	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,82	0,77	0,72	0,66
23	0,98	0,97	0,96	0,94	0,92	0,89	0,85	0,81	0,76	0,71
24	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,91	0,88	0,84	0,80	0,76
25	0,99	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,91	0,88	0,84	0,80
26	0,995	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,93	0,90	0,87	0,83
27	0,995	0,99	0,99	0,98	0,97	0,96	0,94	0,92	0,90	0,86
28	0,995	0,995	0,99	0,99	0,98	0,97	0,96	0,94	0,92	0,90
29		0,995	0,995	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,93	0,91
30		0,995	0,995	0,99	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,93
35						0,995	0,995	0,99	0,99	0,98
40									0,995	0,995

χ_0^2 \ ν	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
8	0,005									
9	0,01	0,005	0,005							
10	0,02	0,01	0,01	0,005	0,005					
11	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,005				
12	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,005	0,005		
13	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,005	
14	0,13	0,10	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,005
15	0,18	0,14	0,11	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01
16	0,23	0,18	0,14	0,11	0,09	0,06	0,05	0,03	0,02	0,02
17	0,29	0,24	0,19	0,15	0,12	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03
18	0,35	0,29	0,24	0,20	0,16	0,12	0,10	0,07	0,06	0,04
19	0,41	0,35	0,30	0,25	0,20	0,16	0,13	0,10	0,08	0,06
20	0,48	0,42	0,36	0,30	0,25	0,21	0,17	0,14	0,11	0,08
21	0,54	0,48	0,42	0,36	0,31	0,26	0,21	0,17	0,14	0,11
22	0,60	0,54	0,48	0,42	0,36	0,31	0,26	0,22	0,18	0,15
23	0,66	0,60	0,54	0,48	0,42	0,37	0,31	0,27	0,22	0,18
24	0,71	0,65	0,60	0,54	0,48	0,42	0,37	0,32	0,27	0,23
25	0,75	0,70	0,65	0,59	0,54	0,48	0,43	0,37	0,32	0,27
26	0,79	0,75	0,70	0,65	0,59	0,54	0,48	0,43	0,37	0,32
27	0,83	0,79	0,74	0,70	0,64	0,59	0,54	0,48	0,43	0,38
28	0,86	0,81	0,78	0,74	0,69	0,64	0,59	0,54	0,48	0,43
29	0,89	0,86	0,82	0,78	0,74	0,69	0,64	0,59	0,53	0,48
30	0,91	0,88	0,85	0,82	0,78	0,73	0,69	0,64	0,59	0,53
35	0,98	0,96	0,94	0,93	0,90	0,89	0,86	0,83	0,79	0,76
40	0,995	0,99	0,98	0,98	0,97	0,96	0,95	0,93	0,92	0,90
45		0,997	0,995	0,995	0,99	0,99	0,98	0,98	0,97	0,96
50						0,995	0,995	0,995	0,99	0,98

5.15 Tabela 5

Vrednosti χ^2 za dato $F(\chi^2)$.

ν \ $F(\chi^2)$	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30
1	$0{,}0^3157$	$0{,}0^3628$	$0{,}0^2393$	0,0158	0,0642	0,148
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195
5	0,554	0,752	1,145	1,160	2,343	3,000
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393
10	2,358	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508

ν \ $F(\chi^2)$	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	11,340	14,011	15,821	18,549	21,026	24,054	26,217
13	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

5.16 Tabela 6

„Student"-ov raspored

$$S(t_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t_0} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt$$

t_0 \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,1	0,532	0,535	0,537	0,537	0,538	0,538	0,538	0,539	0,539	0,539
0,2	0,563	0,570	0,573	0,574	0,575	0,576	0,576	0,577	0,577	0,577
0,3	0,593	0,604	0,608	0,610	0,612	0,613	0,614	0,614	0,614^5	0,615
0,4	0,621	0,636	0,642	0,645	0,647	0,648^5	0,649^5	0,650	0,651	0,651
0,5	0,648	0,667	0,674	0,678	0,681	0,683	0,684	0,685	0,685^5	0,686
0,6	0,672	0,695	0,705	0,710	0,713	0,715	0,716	0,717	0,718	0,719
0,7	0,694	0,722	0,733	0,739	0,742	0,745	0,747	0,748	0,749	0,750
0,8	0,715	0,746	0,759	0,766	0,770	0,773	0,775	0,777	0,772	0,779
0,9	0,733	0,768	0,783	0,790^5	0,795	0,799	0,801	0,803	0,804	0,805
1,0	0,750	0,789	0,804^5	0,813	0,818	0,822	0,825	0,827	0,828	0,830
1,1	0,765	0,807	0,824	0,833^5	0,839	0,843	0,846	0,848	0,850	0,851
1,2	0,779	0,823^5	0,842	0,852	0,858	0,862	0,865	0,868	0,870	0,871
1,3	0,791	0,838	0,858	0,868	0,875	0,879	0,883	0,885	0,887	0,889
1,4	0,803	0,852	0,872	0,883	0,890	0,894^5	0,898	0,900^5	0,902^5	0,904
1,5	0,813	0,864	0,885	0,896	0,903	0,908	0,911	0,914	0,916	0,918
1,6	0,822	0,875	0,896	0,908	0,915	0,920	0,923	0,926	0,928	0,930
1,7	0,831	0,884	0,906	0,918	0,925	0,930	0,933^5	0,936	0,938	0,940
1,8	0,839	0,893	0,915	0,927	0,934	0,939	0,943	0,945	0,947	0,949
1,9	0,846	0,901	0,923	0,935	0,942	0,947	0,950	0,953	0,955	0,957
2,0	0,852	0,908	0,930	0,942	0,949	0,954	0,957	0,960	0,962	0,963
2,1	0,858^5	0,915	0,937	0,948	0,955	0,960	0,963	0,965^5	0,967	0,969
2,2	0,864	0,921	0,942	0,954	0,960^5	0,965	0,968	0,970^5	0,972	0,974
2,3	0,869^5	0,926	0,947^5	0,958^5	0,965	0,969	0,972^5	0,975	0,976^5	0,978
2,4	0,874	0,931	0,952	0,963	0,969	0,973	0,976	0,978	0,980	0,981
2,5	0,879	0,935	0,956	0,967	0,973	0,977	0,979^5	0,981^5	0,983	0,984
2,6	0,883	0,939	0,960	0,970	0,976	0,980	0,982	0,984	0,986	0,987
2,7	0,887	0,943	0,963	0,973	0,979	0,982	0,985	0,986^5	0,988	0,989
2,8	0,891	0,946	0,966	0,976	0,981	0,984	0,987	0,988	0,990	0,991
2,9	0,894	0,949	0,969	0,978	0,983	0,986	0,988^5	0,990	0,991	0,992
3,0	0,898	0,952	0,971	0,980	0,985	0,988	0,990	0,991^5	0,992^5	0,993

t_0 \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,1	0,901	0,955	0,973	0,982	0,987	0,989	0,991	0,993	0,994	0,994
3,2	0,904	0,957	0,975	0,983^5	0,988	0,991	0,992^5	0,994	0,995	0,995
3,3	0,906	0,960	0,977	0,985	0,989	0,992	0,993	0,995	0,995	0,996
3,4	0,909	0,962	0,979	0,986	0,990	0,993	0,994	0,995	0,996	0,997
3,5	0,911	0,964	0,980	0,988	0,991	0,994	0,995	0,996	0,997	0,997
3,6	0,914	0,965	0,982	0,989	0,992	0,994	0,996	0,996^5	0,997	0,998
3,7	0,916	0,967	0,983	0,990	0,993	0,995	0,996	0,997	0,997^5	0,998
3,8	0,918	0,969	0,984	0,990	0,994	0,995^5	0,997	0,997	0,998	0,998
3,9	0,920	0,970	0,985	0,991	0,994	0,996	0,997	0,998	0,998	0,998^5
4,0	0,922	0,971	0,986	0,992	0,995	0,996	0,997	0,998	0,998	0,999
4,1	0,924	0,973	0,987	0,993	0,995	0,997	0,998	0,998	0,999	0,999
4,2	0,926	0,974	0,988	0,993	0,996	0,997	0,998	0,988^5	0,999	0,999
4,3	0,927	0,975	0,988	0,994	0,996	0,997^5	0,998	0,999	0,999	0,999
4,4	0,929	0,976	0,989	0,994	0,996^5	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999
4,5	0,930	0,977	0,990	0,995	0,997	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999
4,6	0,932	0,978	0,990	0,995	0,997	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999^5
4,7	0,933	0,979	0,991	0,995	0,997	0,998	0,999	0,999	0,999	1,000
4,8	0,935	0,980	0,991	0,996	0,998	0,998^5	0,999	0,999	0,999^5	
4,9	0,936	0,980	0,992	0,996	0,998	0,999	0,999	0,999	1,000	
5,0	0,937	0,981	0,992	0,996	0,998	0,999	0,999	0,999^5		
5,1	0,938	0,982	0,993	0,996^5	0,998	0,999	0,999	0,999^5		
5,2	0,939^5	0,982^5	0,993	0,997	0,998	0,999	0,999	1,000		
5,3	0,941	0,983	0,993	0,997	0,998	0,999	0,999			
5,4	0,942	0,984	0,994	0,997	0,998^5	0,999	0,999^5			
5,5	0,943	0,984	0,994	0,997	0,999	0,999	0,999^5			
5,6	0,944	0,985	0,994	0,997^5	0,999	0,999	1,000			
5,7	0,945	0,985	0,995	0,998	0,999	0,999				
5,8	0,946	0,986	0,995	0,998	0,999	0,999				
5,9	0,947	0,986	0,995	0,998	0,999	0,999^5				
6,0	0,947	0,987	0,995	0,998	0,999	0,999^5				

t_0 \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,1	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539
0,2	0,577	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578
0,3	0,615	0,615	0,615^{5}	0,616	0,616	0,616	0,616	0,616	0,616	0,616
0,4	0,652	0,652	0,652	0,652	0,653	0,653	0,653	0,653	0,653	0,653
0,5	0,686^{5}	0,687	0,687	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,689	0,689
0,6	0,720	0,720	0,721	0,721	0,721	0,721^{5}	0,722	0,722	0,722	0,722
0,7	0,751	0,751	0,752	0,752	0,753	0,753	0,753	0,754	0,754	0,754
0,8	0,780	0,780	0,781	0,781^{5}	0,782	0,782	0,783	0,783	0,783	0,783
0,9	0,806	0,807	0,808	0,808	0,809	0,809	0,810	0,810	0,810	0,811
1,0	0,831	0,831^{5}	0,832	0,833	0,833	0,834	0,834	0,835	0,835	0,835
1,1	0,853	0,853^{5}	0,854	0,855	0,856	0,856	0,857	0,857	0,857^{5}	0,858
1,2	0,872	0,873	0,874	0,875	0,876	0,876	0,877	0,877	0,878	0,877
1,3	0,890	0,891	0,892	0,893	0,893	0,894	0,894^{5}	0,895	0,895	0,896
1,4	0,905^{5}	0,907	0,907^{5}	0,908	0,909	0,910	0,910	0,911	0,911	0,912
1,5	0,919	0,920	0,921	0,922	0,923	0,923^{5}	0,924	0,924^{5}	0,925	0,925
1,6	0,931	0,932	0,933	0,934	0,935	0,935	0,936	0,936^{5}	0,937	0,937
1,7	0,941	0,943	0,943^{5}	0,944	0,945	0,946	0,946	0,947	0,947	0,948
1,8	0,950	0,951^{5}	0,952^{5}	0,953	0,954	0,955	0,955	0,956	0,956	0,956^{5}
1,9	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963	0,963	0,964	0,964
2,0	0,965	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,970	0,970
2,1	0,970	0,971	0,972	0,973	0,973^{5}	0,974	0,974^{5}	0,975	0,975	0,976
2,2	0,975	0,976	0,977	0,977	0,978	0,979	0,979	0,979	0,980	0,980
2,3	0,979	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,983^{5}	0,984
2,4	0,982	0,983	0,984	0,985	0,985	0,985^{5}	0,986	0,986	0,987	0,987
2,5	0,985	0,986	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988^{5}	0,989	0,989	0,989
2,6	0,988	0,988	0,989	0,989^{5}	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991
2,7	0,990	0,990	0,991	0,991	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993
2,8	0,991	0,992	0,992^{5}	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994^{5}
2,9	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994^{5}	0,994^{5}	0,995	0,995	0,995	0,996
3,0	0,994	0,994^{5}	0,995	0,995	0,995^{5}	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996^{5}
3,1	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
3,2	0,996	0,996	0,996^{5}	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997^{5}	0,998	0,998
3,3	0,996^{5}	0,997	0,997	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
3,4	0,997	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998^{5}	0,999
3,5	0,997^{5}	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998^{5}	0,999	0,999	0,999	0,999
3,6	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,7	0,998	0,998^{5}	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,8	0,998^{5}	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,9	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999^{5}	0,999^{5}	1,000
4,0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999^{5}	0,999^{5}	1,000	1,000	
4,1	0,999	0,999	0,999	0,999^{5}	0,999^{5}	1,000	1,000			
4,2	0,999	0,999	0,999^{5}	1,000	1,000					
4,3	0,999	0,999^{5}	1,000							
4,4	0,999^{5}	1,000								
4,5	0,999^{5}									
4,6	1,000									

5.17 Tabela 7

Vrednosti t_0 za dato $k = 1 - S(t_0)$

$n \backslash k$	0,005	0,01	0,025	0,05	$n \backslash k$	0,005	0,01	0,025	0,05
1	63,66	31,82	12,71	6,31	17	2,90	2,57	2,11	1,74
2	9,92	6,96	4,30	2,92	18	2,88	2,55	2,10	1,73
3	5,84	4,54	3,18	2,35	19	2,86	2,54	2,09	1,73
4	4,60	3,75	2,78	2,13	20	2,85	2,53	2,09	1,72
5	4,03	3,34	2,57	2,01	21	2,83	2,52	2,08	1,72
6	3,71	3,14	2,45	1,94	22	2,82	2,51	2,07	1,72
7	3,50	3,00	2,36	1,90	23	2,81	2,50	2,07	1,71
8	5,35	2,90	2,31	1,86	24	2,80	2,49	2,06	1,71
9	3,25	2,82	2,26	1,83	25	2,79	2,48	2,06	1,71
10	3,17	2,76	2,23	1,81	26	2,78	2,48	2,06	1,71
11	3,11	2,72	2,20	1,79	27	2,77	2,47	2,05	1,70
12	3,05	2,68	2,18	1,78	28	2,76	2,47	2,05	1,70
13	3,01	2,65	2,16	1,77	29	2,76	2,46	2,04	1,70
14	2,98	2,62	2,14	1,76	30	2,75	2,46	2,03	1,70
15	2,95	2,60	2,13	1,75	…	…	…	…	…
16	2,92	2,58	2,12	1,75	∞	2,58	2,33	1,96	1,64

5.18 Tabela 8

Fischer-ov raspored

Vrednosti z_0 za dato $1 - F(z_0)$

$1 - F(z_0) = 0{,}05$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5
1	2,5421	2,6479	2,6870	2,7071	2,7194
2	1,4592	1,4722	1,4765	1,4787	1,4800
3	1,1577	1,1284	1,1137	1,1051	1,0994
4	1,0212	0,9690	0,9429	0,9272	0,9168
5	0,9441	0,8777	0,8441	0,8236	0,8097
6	0,8948	0,8188	0,7798	0,7558	0,7394
7	0,8606	0,7777	0,7347	0,7080	0,6896
8	0,8355	0,7475	0,7014	0,6725	0,6525
9	0,8163	0,7242	0,6757	0,6450	0,6238
10	0,8012	0,7058	0,6553	0,6232	0,6009
11	0,7889	0,6909	0,6387	0,6055	0,5822
12	0,7788	0,6786	0,6250	0,5907	0,5666
13	0,7703	0,6682	0,6134	0,5783	0,5535
14	0,7630	0,6594	0,6036	0,5677	0,5423
15	0,7568	0,6518	0,5950	0,5585	0,5326
16	0,7514	0,6451	0,5876	0,5505	0,5241
17	0,7466	0,6393	0,5811	0,5434	0,5166
18	0,7424	0,6341	0,5753	0,5371	0,5099
19	0,7386	0,6295	0,5701	0,5315	0,5040
20	0,7352	0,6254	0,5654	0,5265	0,4986
21	0,7322	0,6216	0,5612	0,5219	0,4938
22	0,7294	0,6182	0,5574	0,5178	0,4894
23	0,7269	0,6151	0,5540	0,5140	0,4854
24	0,7246	0,6123	0,5508	0,5106	0,4817
25	0,7225	0,6097	0,5478	0,5074	0,4783
26	0,7205	0,6073	0,5451	0,5045	0,4752
27	0,7187	0,6051	0,5427	0,5017	0,4723
28	0,7171	0,6030	0,5403	0,4992	0,4696
29	0,7155	0,6011	0,5382	0,4969	0,4671
30	0,7141	0,5994	0,5362	0,4947	0,4648
60	0,6933	0,5738	0,5073	0,4632	0,4311
∞	0,6729	0,5486	0,4787	0,4319	0,3974

ν_2 \ ν_1	6	8	12	24	∞
1	2,7276	2,7380	2,7484	2,7588	2,7693
2	1,4808	1,4819	1,4830	1,4840	1,4851
3	1,0953	1,0899	1,0842	1,0781	1,0716
4	0,9093	0,8993	0,8885	0,8767	0,8639
5	0,7997	0,7862	0,7714	0,7550	0,7368
6	0,7274	0,7112	0,6931	0,6729	0,6499
7	0,6761	0,6576	0,6369	0,6134	0,5862
8	0,6378	0,6175	0,5945	0,5682	0,5371
9	0,6080	0,5862	0,5613	0,5324	0,4979
10	0,5843	0,5611	0,5346	0,5035	0,4657
11	0,5648	0,5406	0,5126	0,4795	0,4387
12	0,5487	0,5234	0,4941	0,4592	0,4156
13	0,5350	0,5089	0,4785	0,4419	0,3957
14	0,5233	0,4964	0,4649	0,4269	0,3782
15	0,5131	0,4855	0,4532	0,4138	0,3628
16	0,5042	0,4760	0,4428	0,4022	0,3490
17	0,4964	0,4676	0,4337	0,3919	0,3366
18	0,4894	0,4602	0,4255	0,3827	0,3253
19	0,4832	0,4535	0,4182	0,3743	0,3151
20	0,4776	0,4474	0,4116	0,3668	0,3057
21	0,4725	0,4420	0,4055	0,3599	0,2971
22	0,4679	0,4370	0,4001	0,3536	0,2892
23	0,4636	0,4325	0,3950	0,3478	0,2818
24	0,4598	0,4283	0,3904	0,3425	0,2749
25	0,4562	0,4244	0,3862	0,3376	0,2685
26	0,4529	0,4209	0,3823	0,3330	0,2625
27	0,4499	0,4176	0,3786	0,3287	0,2569
28	0,4471	0,4146	0,3752	0,3248	0,2516
29	0,4444	0,4117	0,3720	0,3211	0,2466
30	0,4420	0,4090	0,3691	0,3176	0,2419
60	0,4064	0,3702	0,3255	0,2654	0,1644
∞	0,3706	0,3309	0,2804	0,2085	0

$1 - F(z) = 0{,}01$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5
1	4,1535	4,2585	4,2974	4,3175	4,3297
2	2,2950	2,2976	2,2984	2,2988	2,2991
3	1,7649	1,7140	1,6915	1,6786	1,6703
4	1,5270	1,4452	1,4075	1,3856	1,3711
5	1,3943	1,2929	1,2449	1,2164	1,1974
6	1,3103	1,1955	1,1401	1,1068	1,0843
7	1,2526	1,1281	1,0672	1,0300	1,0048
8	1,2106	1,0787	1,0135	0,9734	0,9459
9	1,1786	1,0411	0,9724	0,9299	0,9006
10	1,1535	1,0114	0,9399	0,8954	0,8646
11	1,1333	0,9874	0,9136	0,8674	0,8354
12	1,1166	0,9677	0,8919	0,8443	0,8111
13	1,1027	0,9511	0,8737	0,8248	0,7907
14	1,0909	0,9370	0,8581	0,8082	0,7732
15	1,0807	0,9249	0,8448	0,7939	0,7582
16	1,0719	0,9144	0,8331	0,7814	0,7450
17	1,0641	0,9051	0,8229	0,7705	0,7335
18	1,0572	0,8970	0,8138	0,7607	0,7232
19	1,0511	0,8897	0,8057	0,7521	0,7140
20	1,0457	0,8831	0,7985	0,7443	0,7058
21	1,0408	0,8772	0,7920	0,7372	0,6984
22	1,0363	0,8719	0,7860	0,7309	0,6916
23	1,0322	0,8670	0,7806	0,7251	0,6855
24	1,0285	0,8626	0,7757	0,7197	0,6799
25	1,0251	0,8585	0,7712	0,7148	0,6747
26	1,0220	0,8548	0,7670	0,7103	0,6699
27	1,0191	0,8513	0,7631	0,7062	0,6655
28	1,0164	0,8481	0,7595	0,7023	0,6614
29	1,0139	0,8451	0,7562	0,6987	0,6576
30	1,0116	0,8423	0,7531	0,6954	0,6540
60	0,9784	0,8025	0,7086	0,6472	0,6028
∞	0,9462	0,7636	0,6651	0,5999	0,5522

ν_2 \ ν_1	6	8	12	24	∞
1	4,3379	4,3482	4,3585	4,3689	4,3794
2	2,2992	2,2994	2,2997	2,2999	2,3001
3	1,6645	1,6569	1,6489	1,6404	1,6314
4	1,3609	1,3473	1,3327	1,3170	1,3000
5	1,1838	1,1656	1,1457	1,1239	1,0997
6	1,0680	1,0460	1,0218	0,9948	0,9643
7	0,9864	0,9614	0,9335	0,9020	0,8658
8	0,9259	0,8983	0,8673	0,8319	0,7904
9	0,8791	0,8494	0,8157	0,7769	0,7305
10	0,8419	0,8104	0,7744	0,7324	0,6816
11	0,8116	0,7785	0,7405	0,6958	0,6408
12	0,7864	0,7520	0,7122	0,6649	0,6061
13	0,7652	0,7295	0,6882	0,6386	0,5761
14	0,7471	0,7103	0,6675	0,6159	0,5500
15	0,7314	0,6937	0,6496	0,5961	0,5269
16	0,7177	0,6791	0,6339	0,5786	0,5064
17	0,7057	0,6663	0,6199	0,5630	0,4879
18	0,6950	0,6549	0,6075	0,5491	0,4712
19	0,6854	0,6447	0,5964	0,5366	0,4560
20	0,6768	0,6355	0,5864	0,5253	0,4421
21	0,6690	0,6272	0,5773	0,5150	0,4294
22	0,6620	0,6196	0,5691	0,5056	0,4176
23	0,6555	0,6127	0,5615	0,4969	0,4068
24	0,6496	0,6064	0,5545	0,4890	0,3967
25	0,6442	0,6006	0,5481	0,4816	0,3872
26	0,6392	0,5952	0,5422	0,4748	0,3784
27	0,6346	0,5902	0,5367	0,4685	0,3701
28	0,6303	0,5856	0,5316	0,4626	0,3624
29	0,6263	0,5813	0,5269	0,4570	0,3550
30	0,6226	0,5773	0,5224	0,4519	0,3481
60	0,5687	0,5189	0,4574	0,3746	0,2352
∞	0,5152	0,4604	0,3908	0,2913	0

6. DVODIMENZIONALNI RASPOREDI

6.1. Funkcija rasporeda i zakon verovatnoće dvodimenzionalnog rasporeda. — Uočimo jednu dvodimenzionalnu aleatornu promenljivu $Z(X, Y)$ u prostoru R^2. Neka je $\mathcal{E}$ univerzalni skup tačaka u R^2 koje može zauzeti aleatorna dvodimenzionalna promenljiva Z i neka je $E \subset \mathcal{E}$. Funkcija verovatnoće a.p. Z biće verovatnoća

$$\Pr\{Z \in E\} = P(E) \tag{6.1.1}$$

za koju ćemo pretpostaviti da je probabilna. Tada će obrasci (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) i (4.2.5) opet da važe.

Dok Z varira po dvodimenzionalnom skupu E, njegove koordinate X i Y variraju po jednodimenzionalnim skupovima koje ćemo označiti respektivno sa S_1 i S_2. Tada su na osnovu (4.2.6) i (4.2.7) funkcije verovatnoća

$$\begin{aligned} \Pr\{X \in S_1\} &= P_1(S_1), \\ \Pr\{Y \in S_2\} &= P_2(S_2), \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

marginalne funkcije verovatnoća funkcije verovatnoće P.

U specijalnom slučaju kada za E uzmemo skup tačaka $X \leqslant x$ i $Y \leqslant y$ funkciju verovatnoće nazivamo funkcijom rasporeda F, tj.

$$F(x, y) = \Pr\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}. \tag{6.1.3}$$

Marginalne f.r. biće

$$F_1(x) = \Pr\{X \leqslant x\} = F(x, \infty), \tag{6.1.4}$$

$$F_2(y) = \Pr\{Y \leqslant y\} = F(\infty, y) \tag{6.1.5}$$

dok je

$$\begin{aligned} F(-\infty, -\infty) &= 0, \\ F(+\infty, +\infty) &= 1. \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Koristeći (4.2.8) i (4.2.9) uslovna funkcija rasporeda promenljive X za fiksnu vrednost promenljive Y je

(6.1.7) $$F(x|y)=\frac{F(x,y)}{F_2(y)},\ \text{za } F_2(y)>0,$$

(6.1.8) $$F(y|x)=\frac{F(x,y)}{F_1(x)},\ \text{za } F_1(x)>0.$$

Lako je proveriti da su (6.1.7) i (6.1.8) zaista funkcije rasporeda. Zaista, napr. kod (6.1.7) $F(x, y)$ i $F_2(y)$ su funkcije rasporeda, pa je $F(x|y)\geqslant 0$ a zbog (6.1.5) $F(\infty|y)=1$.

Ukoliko je

(6.1.9) $$F(x|y)=F_1(x)$$

ako je $F_2(y)>0$, odnosno

(6.1.10) $$F(y|x)=F_2(y)$$

ako je $F_1(x)>0$, relacije (6.1.7) i (6.1.8) svode se na relaciju

(6.1.11) $$F(x,y)=F_1(x)\,F_2(y)$$

i za a.p. X i Y kažemo da su međusobno nezavisne.

I ovde je najprostiji tip rasporeda prekidan raspored. To je slučaj kada su mase raspoređene u tačkama $A_i\,(x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3, \ldots$, kojih može biti konačno ili prebrojivo mnogo. Tada je u opštem slučaju

(6.1.12) $$p_{ij}=\Pr\{X=x_i,\ Y=y_j\}\geqslant 0,$$

(6.1.13) $$F(+\infty,+\infty)=\sum_{i,j}p_{ij}=1.$$

Marginalni rasporedi su

$$p_{i.}=\Pr\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}$$

za $i=1, 2, 3, \ldots$, i

$$p_{\cdot j}=\Pr\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}$$

za $j=1, 2, 3, \ldots$.

$$\sum_i p_{i.}=\sum_i\sum_j p_{ij}=1,$$

$$\sum_j p_{\cdot j}=\sum_j\sum_i p_{ij}=1.$$

Za fiksno j uslovni raspored promenljive X biće

$$p_{i|j}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

a za fiksno i uslovni raspored promenljive Y biće

$$p_{j|i} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}.$$

Ukoliko su X i Y međusobno nezavisni, imaćemo

$$p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$$

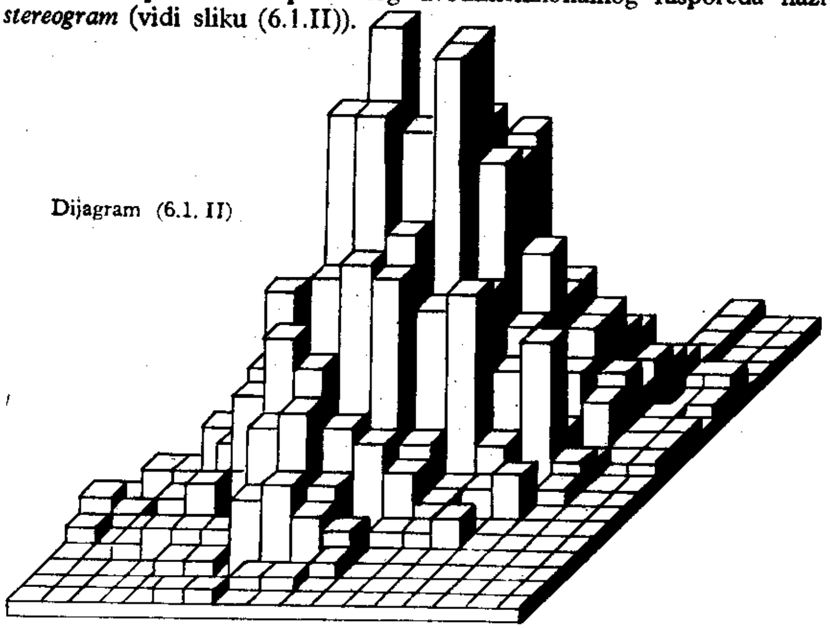
za sve vrednosti indeksa i i j.

Zakon verovatnoće prekidnog rasporeda najzgodnije ćemo napisati u obliku dvodimenzionalne Tabele (6.1.I).

Tabela (6.1. I)

$X \backslash Y$	y_1	y_2	..	y_j	..	..	
x_1	p_{11}	p_{12}	..	p_{1j}	..	..	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	..	p_{2j}	..	..	$p_{2\cdot}$
..	..	..	..	..	..	..	..
x_i	p_{i1}	p_{i2}	..	p_{ij}	..	..	$p_{i\cdot}$
..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	..	$p_{\cdot j}$	..	..	1

Grafički pretstavnik prekidnog dvodimenzionalnog rasporeda naziva se *stereogram* (vidi sliku (6.1.II)).



Dijagram (6.1. II)

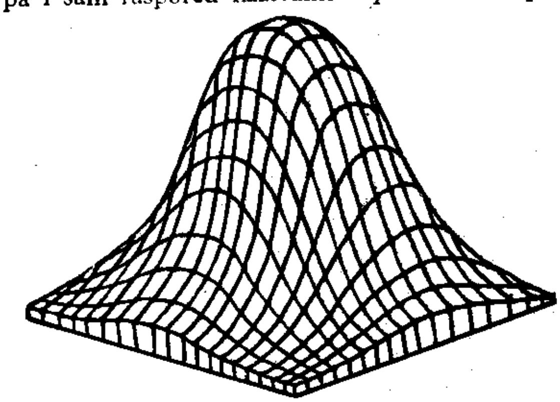
Drugi karakterističan slučaj je kada je funkcija rasporeda apsolutno neprekidna. Tada je uvek možemo pretstaviti kao određen integral pozitivne funkcije $f(x, y)$, tj.

(6.1.14) $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Funkcija $f(x, y)$ pretstavlja *gustinu jedinične mase* rasproređene u ravni XOY a $F(x, y)$ ukupnu masu u oblasti $X \leqslant x$, $Y \leqslant y$. Funkcija $f(x, y)$ naziva se *zakon verovatnoće aleatorne promenljive* $Z(X, Y)$. Verovatnoća $f(x_0, y_0)\,dx\,dy$, tj.

$$Pr\left\{x_0 < X \leqslant x_0 + dx,\ y_0 < Y < y_0 + dy\right\} = f(x_0, y_0)\,dx\,dy$$

pretstavlja elementarnu verovatnoću. U ovom slučaju X i Y menjaju se neprekidno pa i sam raspored nazivamo *neprekidnim rasporedom.*



Dijagram (6.1.III)

Neposredno se dobija

(6.1.15) $$Pr\left\{a < X \leqslant b,\ c < Y \leqslant d\right\} = \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dx\,dy,$$

odnosno

(6.1.16) $$Pr\left\{-\infty < X < +\infty,\ -\infty < Y < +\infty\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Ukoliko u (6.1.4) imamo posla sa Lebesgue-ovim integralom, tada je $f(x, y)$ mešoviti parcijalni izvod od $F(x, y)$, tj.

(6.1.17) $$f(x,y) = \frac{\delta^2 F}{\delta x\,\delta y},$$

izuzev najviše za jedan skup tačaka nulte mere.

Marginalne funkcije rasporeda biće

(6.1.18)
$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy,$$
$$F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy,$$

ili ako definišemo *marginalne zakone verovatnoće* sa

(6.1.19)
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy,$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx,$$

(6.1.18) dobija oblik

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx,$$
$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy.$$

Ako je za svako y z.v. $f(x, y)$ neprekidan u odnosu na x u tački $x = x_0$ i ako je u okolini te tačke za svako y $f(x, y) < g(y)$, gde je $g(y)$ jedna integrabilna funkcija od $-\infty$ do $+\infty$, tada je i marginalni z.v. $f_1(x)$ neprekidan u tački $x = x_0$. Kako $f(x, y)$ može imati najviše prebrojivo mnogo tačaka diskontinuiteta, to će i $f_1(x)$ imati najviše prebrojivo mnogo tačaka diskontinuiteta, te a.p. X ima neprekidan raspored.

Posmatrajmo intervale (x_1, x_2) i $(y, y+h)$ aleatornih promenljivih X i Y. Neka je E oblast u ravni XOY definisana sa ta dva intervala. Uslovna verovatnoća da će se X naći u intervalu (x_1, x_2) pod uslovom da $Y \subset (y, y+h)$ biće

(6.1.20)
$$\Pr\left\{x_1 < X \leqslant x_2 \,\middle|\, y < Y \leqslant y+h\right\} = \frac{\displaystyle\int_{y}^{y+h}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\int_{y}^{y+h}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy},$$

odnosno

$$(6.1.21)\ \Pr\left\{x_1 < X \leqslant x_2 \mid y < Y \leqslant y+h\right\} = \frac{\int\limits_{y}^{y+h}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy}{\int\limits_{y}^{y+h} f_2(y)\,dy},$$

pod uslovom da imenitelj nije nula.

Ako je $f(x, y)$ neprekidna funkcija u oblasti E, imenitelj u (6.1.21) možemo pisati u obliku

$$\int\limits_{y}^{y+h} f_2(y)\,dy = h\cdot f_2(\eta),$$

gde je $y < \eta < y + h$, a brojitelji

$$\int\limits_{y}^{y+h}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} h f\left[x, \eta(x)\right] dx,$$

gde je

$$y < \eta(x) < y+h.$$

Otuda

$$(6.1.22)\ \Pr\left\{x_1 < X \leqslant x_2 \mid y < Y < y+h\right\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f\left[x, \eta(x)\right]}{f_2(\eta)}\,dx.$$

Primetimo da podintegralna funkcija

$$\frac{f\left[x, \eta(x)\right]}{f_2(\eta)}$$

za fiksno y i h ima osobine jednog jednodimenzionalnog zakona verovatnoće.

Kako smo pretpostavili da je $f_2(y) > 0$, to možemo da definišemo i verovatnoću

$$\Pr\left\{x_1 < X \leqslant x_2 \mid Y = y\right\} = \lim_{h\to 0} \Pr\left\{x_1 < X \leqslant x_2 \mid y < Y \leqslant y+h\right\}.$$

Zbog neprekidnosti funkcija $f(x, y)$ i $f_2(y)$ limes integrala (6.1.22) biće jednak integralu limesa, tj.

$$\Pr\left\{x_1 < X \leqslant x_2 \mid Y = y\right\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \lim_{h\to 0} \frac{f\left[x, \eta(x)\right]}{f_2(\eta)}\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x,y)}{f_2(y)}\,dy.$$

Dalje imamo

$$Pr.\left\{X = x \mid Y = y\right\} = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

ili

(6.1.23) $$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}.$$

Za fiksno Y, $f(x|y)$ ima svojstva jednog zakona verovatnoće i nazivamo ga *uslovnim zakonom verovatnoće* aleatorne promenljive X za fiksno Y. Analogno dobijamo

(6.1.24) $$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

pod uslovom da je $f_1(x) > 0$.

Ukoliko su X i Y međusobno nezavisni, tada je

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$$

pa je

$$f(x \mid y) = f_1(x),$$
$$f(y \mid x) = f_2(y).$$

Neka je neprekidna funkcija $f(x_1, x_2)$ z.v. aleatornih promenljivih X_1 i X_2. Uvedimo smenu

$$y_1 = y_1(x_1 x_2), \qquad y_2 = y_2(x_1, x_2)$$

i to tako da postoji biunivoka korespondencija između tačaka ravni $X_1 0 X_2$ i $Y_1 0 Y_2$. Kako su X_1 i X_2 aleatorne promenljive, to će i $Y_1 = y_1(X_1, X_2)$ i $Y_2 = y_2(X_1, X_2)$ takođe pretstavljati aleatorne promenljive. Ako parcijalni izvodi funkcija y_1 i y_2 po x_1 i x_2 postoje, tada će transformisani z.v. za Y_1 i Y_2 biti

$$g(y_1, y_2) = |J| f[x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)],$$

gde je

$$J = \left| \frac{\delta(x_1, x_2)}{\delta(y_1, y_2)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\delta x_1}{\delta y_1} & \frac{\delta x_1}{\delta y_2} \\ \frac{\delta x_2}{\delta y_1} & \frac{\delta x_2}{\delta y_2} \end{vmatrix}$$

Tako napr. u slučaju proste linearne smene

$$Y_1 = aX_1 + b,$$
$$Y_2 = cX_2 + d,$$

z.v. $f(x_1, x_2)$ transformisaće se u

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{ac} f\left(\frac{y_1 - b}{a}, \frac{y_2 - d}{c}\right).$$

6.2. Stieltjes-ov integral sa dve promenljive. — Uočimo poluotvoreni razmak I ($a_1 < x \leqslant b_1$, $a_2 < y \leqslant b_2$), neprekidnu funkciju $g(x, y)$ u tom intervalu i f.r. $F(x, y)$. Ako na x-osi razmak (a_1, b_1) izdelimo na n_1 podrazmaka, tj. odaberemo tačke $a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_1} = b_1$ a na y-osi razmak (a_2, b_2) izdelimo na n_2 podrazmaka, tj. odaberemo tačke $a_2 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n_2} = b_2$, tada će razmak I biti izdeljen na ukupno $n = n_1 n_2$ podrazmaka I_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Neka je (ξ, η_ν) proizvoljna tačka podrazmaka I_ν i obrazujmo zbir

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} g(\xi_\nu, \eta_\nu)\, \Delta_\nu^2 F(x, y), \tag{6.2.1}$$

gde je

$$\Delta_\nu^2 = F(x_\nu, y_\nu) + F(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}) -$$

$$- F(x_\nu, y_{\nu-1}) - F(x_{\nu-1}, y_\nu),$$

pri čemu (x_ν, y_ν), $(x_{\nu-1}, y_{\nu-1})$, $(x_\nu, y_{\nu-1})$ i $(x_{\nu-1}, y_\nu)$ označavaju krajnje tačke podrazmaka I_ν. Kao i u (4.4) možemo opet obrazovati gornju i donju granicu zbira S_n, tj.

$$S_m \leqslant S_n \leqslant S_M.$$

Ako sa δ_n označimo dužinu najveće dijagonale razmaka i ako podelu intervala dalje vršimo tako da $\delta_n \to 0$, opet se dokazuje da $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ postoji i on definiše Stieltjes-ov integral funkcije $g(x, y)$ u odnosu na funkciju $F(x, y)$ preko intervala I

$$S = \int_I g(x, y)\, dF(x, y).$$

Uzmimo slučaj kada je raspored prekidan. Neka X uzima samo vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ a Y vrednosti $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$. Podelu možemo uvek tako podesiti da svaki interval I_ν sadrži najviše jednu tačku $\alpha_{ij}(x_i, y_j)$. Za ξ i η izabraćemo vrednosti koordinata tačaka α_{ij} u intervalima I_ν koji te tačke sadrže. Tada je

$$\Delta_\nu^2 F(x, y) = \begin{cases} p_{ij}, & \text{ako } \alpha_{ij} \in I_\nu, \\ 0, & \text{ako } I_\nu = \emptyset, \end{cases}$$

pa je

$$S = \sum_{i,j} g(x_i, y_j)\, p_{ij}.$$

Ako je raspored neprekidan, tj. ako postoji drugi mešoviti parcijalni izvod funkcije rasporeda, tada je

$$\int_I g(x, y)\, dF(x, y) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} g(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

tako da se Stieltjes-ov integral svodi na običan integral.

Ako postoji granica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, dF(x,y) = \lim_{\substack{a_1\to-\infty\\ a_2\to-\infty\\ b_1\to+\infty\\ b_2\to+\infty}} \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} g(x,y)\, dF(x,y)$$

kad nezavisno $a_1 \to -\infty$, $b_1 \to +\infty$ i $a_2 \to -\infty$, $b_2 \to +\infty$, tada kažemo da imamo posla sa nesvojstvenim Stieltjes-ovim integralom.

Ne obazirući se na raspored možemo u opštem slučaju pisati

$$\Pr\{Z \in I\} = \int_I dF(x,y),$$

gde je $Z = (X, Y)$ a I jedan interval ili skup izolovanih tačaka.

6.3. Srednje vrednosti. Momenti. — Aritmetička sredina ili matematička nada a.p. X jednog dvodimenzionalnog rasporeda po definiciji je

(6.3.1) $$E(X) = \int_{R^2} x\, dF(x,y).$$

Ona je ustvari srednja vrednost mogućih vrednosti a.p. X ponderisanih odgovarajućim marginalnim verovatnoćama. Tako za prekidan raspored imamo

(6.3.2) $$E(X) = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i x_i p_{i\cdot}.$$

Kod neprekidnog rasporeda imaćemo

(6.3.3) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\, dx.$$

Analogno je u opštem slučaju

(6.3.4) $$E(Y) = \int_{R^2} y\, dF(x,y),$$

odnosno, kod prekidnog rasporeda,

(6.3.5) $$E(Y) = \sum_j y_j p_{\cdot j},$$

a kod neprekidnog

(6.3.6) $$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)\, dy.$$

Kako granična vrednost $\lim_{n\to\infty} S_n$, kad nezavisno $a_1 \to -\infty$, $b_1 \to +\infty$, a $a_2 \to -\infty$, $b_2 \to +\infty$, ne mora obavezno da postoji, to ni aritmetičke sredine (6.3.1) i (6.3.4) ne moraju obavezno da postoje.

Aritmetička sredina aleatorne funkcije $g(X, Y)$ po definiciji je

$$E\left[g(X,Y)\right] = \int_{R^2} g(x,y)\, dF(x,y), \tag{6.3.7}$$

odnosno

$$E\left[g(X,Y)\right] = \sum_{i,j} g(x_i, y_j)\, p_{ij}, \tag{6.3.8}$$

kod prekidnog a

$$E\left[g(X,Y)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy \tag{6.3.9}$$

kod neprekidnog rasporeda.

Običan momenat reda (i, j) dvodimenzionalne aleatorne promenljive (X, Y) dobija se ako se uzme

$$g(x,y) = x^i y^j,$$

tj.

$$m_{ij} = E(X^i Y^j) = \int_{R^2} x^i y^j\, dF(x,y). \tag{6.3.10}$$

Kratkoće radi, označimo aritmetičke sredine sa

$$E(X) = m_{10} = M_1 \qquad E(Y) = m_{01} = M_2 .$$

Centralni momenat reda (i, j) promenljive (X, Y) dobija se ako se uzme

$$g(x,y) = (x - M_1)^i (y - M_2)^j,$$

tj.

$$\mu_{ij} = E\left[(X-M_1)^i (Y-M_2)^j\right] = \int_{R^2} (x-M_1)^i (y-M_2)^j\, dF(x,y). \tag{6.3.11}$$

Ako je raspored prekidan, biće

$$\mu_{ij} = \sum_{r,k} (x_r - M_1)^i (y_k - M_2)^j\, p_{rk} \tag{6.3.12}$$

a ako je neprekidan

$$\mu_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M_1)^i (y-M_2)^j f(x,y)\, dx\, dy. \tag{6.3.13}$$

Najzad, ako stavimo

$$g(x,y) = |x^i y^j|$$

dobijamo *običan apsolutni momenat* reda (i, j) aleatorne promenljive (X, Y), tj.

$$\alpha_{ij} = \int_{R^2} |x^i y^j|\, dF(x,y). \tag{6.3.14}$$

Često se zbir $(i+j)$ uzima za red momenta. Tako su drugi centralni momenti

(6.3.15) $$\mu_{20} = \int_{R^2} (x-M_1)^2\, dF(x,y) = m_{20} - M_1^2,$$

(6.3.16) $$\mu_{11} = \int_{R^2} (x-M_1)(y-M_2)\, dF(x,y) = m_{11} - M_1 M_2,$$

(6.3.17) $$\mu_{02} = \int_{R^2} (y-M_2)^2\, dF(x,y) = m_{02} - M_2^2.$$

Momenti μ_{20} i μ_{02} pretstavljaju *varijanse* a.p. X i Y a μ_{11} drugi *mešoviti centralni momenat* ili *kovarijansu* a.p. X i Y.

Za realno t sledeća kvadratna forma biće uvek pozitivna ili nula

$$E\left[(X-M_1)t + (Y-M_2)\right]^2 = \mu_{20}t^2 + 2\mu_{11}t + \mu_{02} \geqslant 0.$$

Pošto je $\mu_{20} > 0$, to diskriminanta toga trinoma mora biti negativna, tj.

(6.3.18) $$\mu_{11}^2 - \mu_{20}\mu_{02} \leqslant 0.$$

Drugim rečima, kovarijansa je manja od geometriske sredine varijansi μ_{20} i μ_{02}. Zato je tim pre, na osnovu (4.21.5), i

(6.3.19) $$\mu_{11} \leqslant \frac{\mu_{20} + \mu_{02}}{2}.$$

Ako su varijanse jednake nuli, celokupne mase oba marginalna rasporeda koncentrisaće se u svojim aritmetičkim sredinama. Celokupna masa dvodimenzionalnog rasporeda biće tada koncentrisana u svom težištu (M_1, M_2).

Ako je jedna varijansa jednaka nuli, napr. $\mu_{20} = 0$, tada je celokupna masa dvodimenzionalnog rasporeda raspoređena duž prave $X = M_1$.

Ako je celokupna masa dvodimenzionalnog rasporeda raspoređena duž neke prave, tada rotacijom koordinatnog sistema uvek možemo da postignemo da jedna varijansa bude jednaka nuli.

Uslovna aritmetička sredina aleatorne funkcije $g(X, Y)$ neprekidnih a.p. X i Y je

(6.3.20) $$E\left[g(X,Y) \mid Y=y\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f(x \mid y)\, dx = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f(x,y)\, dx.$$

Množeći sa $f_2(y)$ i integrišući obe strane po y u razmaku $(-\infty, +\infty)$, dobijamo

(6.3.21)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\, E\left[g(X,Y) \mid Y=y\right] dy = E\left[g(X,Y)\right].$$

Za $g(X, Y) = X$ dobijamo uslovnu aritmetičku sredinu za X

(6.3.22)
$$E(X \mid Y=y) = M_1(y) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\, dx}{f_2(y)}$$

Slično je

(6.3.23)
$$E(Y \mid X=x) = M_2(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)\, dy}{f_1(x)}$$

Uslovne varijanse biće

(6.3.24)
$$\mu_{20}(y) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - M_1(y)\right]^2 f(x,y)\, dx}{f_2(y)},$$

(6.3.25)
$$\mu_{02}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[y - M_2(x)\right]^2 f(x,y)\, dy}{f_1(x)}$$

Ukoliko su X i Y međusobno nezavisni, biće

$$M_1(y) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x)\, f_2(y)\, dx}{f_2(y)} = M_1,$$

$$M_2(x) = M_2,$$

$$\mu_{20}(y) = \mu_{20}, \qquad \mu_{02}(x) = \mu_{02},$$

a

$$\mu_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_1)(y - M_2)\, f(x,y)\, dx\, dy =$$

(6.3.26)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_1) f_1(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M_2) f_2(y)\, dy = 0.$$

6.4. Karakteristična funkcija. — Uzimajući očekivanu vrednost aleatorne funkcije

$$g(X,Y) = e^{i(tX+uY)}$$

dobijamo karakterističnu funkciju dvodimenzionalne a.p. (X, Y)

(6.4.1) $$\varphi(t,u) = E\left[g(X,Y)\right] = \int_{R^2} e^{i(tx+uy)}\, dF(x,y).$$

I u dvodimenzionalnom slučaju postoji biunivoka korespondencija između zakona verovatnoće i karakteristične funkcije.

Razvitak karakteristične funkcije u Taylor-ov red u okolini tačke (0, 0) je

(6.4.2) $$\varphi(t,u) = 1 + \frac{i}{1!}\left(M_1 t + M_2 u\right) + \frac{i^2}{2!}\left(m_{20}t^2 + 2m_{11}tu + m_{02}u^2\right) + 0(t^2 + u^2),$$

ili, u slučaju centriranih a.p.

(6.4.3) $$\varphi(t,u) = 1 - \frac{1}{2}\left(\mu_{20}t^2 + 2\mu_{11}tu + \mu_{02}u^2\right) + 0(t^2 + u^2).$$

Ako sa $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(u)$ označimo karakteristične funkcije marginalnih rasporeda, onda je

$$\varphi_1(t) = \varphi(t,0), \qquad \varphi_2(u) = \varphi(0,u).$$

Potreban i dovoljan uslov da a.p. X i Y budu međusobno nezavisne je

(6.4.4) $$\varphi(t,u) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(u).$$

Zaista, ako su X i Y međusobno nezavisni, tada je

$$\varphi(t,u) = E\left(e^{i(tX+uY)}\right) = E\left(e^{itX}\right)E\left(e^{itY}\right) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(u).$$

Obratno, pretpostavimo da važi (6.4.4) i dokažimo da su tada X i Y međusobno nezavisni. Ograničimo se, međutim, na dokaz da su X i Y međusobno linearno nezavisni, tj. da je $\mu_{11} = 0$.

Iz (6.4.2) imamo

$$\frac{\delta^2 \varphi(0,0)}{\delta t\, \delta u} = i^2 m_{11}.$$

S druge strane, zbog (6.4.4) je

$$\frac{\delta^2\varphi(t,u)}{\delta t\,\delta u} = \varphi_1'(t)\,\varphi_2'(u),$$

ili

$$\frac{\delta^2\varphi(0,0)}{\delta t\,\delta u} = i^2 M_1 M_2 .$$

Otuda

$$m_{11} = M_1 M_2$$

pa je

$$\mu_{11} = m_{11} - M_1 M_2 = 0 .$$

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, možemo da odredimo z.v. pomoću k.f. preko relacije

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(tX+uY)}\,\varphi(t,u)\,dt\,du . \tag{6.4.5}$$

6.5. Trinomijalni raspored. — Ako je dvodimenzionalna a.p. jedna prekidna veličina pri čemu X uzima jednu od sledećih pozitivnih celih vrednosti: $0, 1, 2, \ldots, i, \ldots, n$ a $Y: 0, 1, 2, \ldots, j, \ldots, n, (i+j \leqslant n)$, i ako je z.v. te promenljive

$$p_{ij} = \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\,p_1^i\,p_2^j\,p_3^{n-i-j}, \tag{6.5.1}$$

gde je $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, onda kažemo da a.p. (X, Y) ima *trinomijalan raspored*. Primetimo da je tada p_{ij} specijalan slučaj od (2.16.1) za $k = 3$.

Neposredno se dobija

$$\sum_{i,j} p_{ij} = (p_1 + p_2 + p_3)^n = 1 .$$

Kako je s jedne strane

$$p_1\frac{\delta}{\delta p_1}\sum_{i,j} p_{ij} = p_1\sum_{i,j} i\,\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\,p_1^{i-1}\,p_2^j\,p_3^{n-i-j} = \sum_{i,j} i\,p_{ij} = M_1 ,$$

a s druge strane

$$p_1\frac{\delta}{\delta p_1}\sum_{i,j} p_{ij} = p_1\frac{\delta}{\delta p_1}(p_1+p_2+p_3)^n + np_1(p_1+p_2+p_3)^{n-1} ,$$

to je

$$M_1 = np_1 . \tag{6.5.2}$$

Slično dobijamo

$$M_2 = np_2 . \tag{6.5.3}$$

Takođe iz relacija

$$p_2 \frac{\delta}{\delta p_2} \sum_{i,j} i p_{ij} = \sum_{i,j} ij p_{ij} = m_{11},$$

$$p_2 \frac{\delta}{\delta p_2} \sum_{i,j} i p_{ij} = p_2 \frac{\delta}{\delta p_2} n p_1 (p_1 + p_2 + p_3)^{n-1} =$$

$$= n(n-1) p_1 p_2 (p_1 + p_2 + p_3)^{n-2}$$

dobijamo

$$m_{11} = n(n-1) p_1 p_2$$

a iz relacija

$$p_1 \frac{\delta}{\delta p_1} \sum_{i,j} i p_{ij} = \sum_{i,j} i^2 p_{ij} = m_{20},$$

$$p_1 \frac{\delta}{\delta p_1} \sum_{i,j} i p_{ij} = p_1 \frac{\delta}{\delta p_1} n p_1 (p_1 + p_2 + p_3)^{n-1} =$$

$$= n(n-1) p_1^2,$$

dobijamo

$$m_{20} = n(n-1) p_1^2,$$

Slično je

$$m_{02} = n(n-1) p_2^2$$

Otuda

$$\begin{aligned} \mu_{20} &= n p_1 (1 - p_1), \\ \mu_{11} &= - n p_1 p_2, \qquad (6.5.4) \\ \mu_{02} &= n p_2 (1 - p_2). \end{aligned}$$

6.6. Poisson-ov dvodimenzionalni raspored. — A.p. (X, Y) ovog rasporeda može uzimati sledeće vrednosti: $X = 0, 1, 2, \ldots, i, \ldots$ $Y = 0, 1, 2, \ldots, j, \ldots$ i ima za z.v.

$$p_{ij} = e^{-(k_1 + k_2)} \frac{k_1^i k_2^j}{i! \, j!}. \qquad (6.6.1)$$

Odmah vidimo da su X i Y međusobno nezavisni, pošto je

$$p_{ij} = \left(e^{-k_1} \frac{k_1^i}{i!}\right)\left(e^{-k_2} \frac{k_2^j}{j!}\right) = p_{i.} p_{.j}.$$

Zato je, koristeći (5.2.4) i (5.2.5),

$$M_1 = k_1, \qquad M_2 = k_2,$$

$$\mu_{20} = k_1, \qquad \mu_{11} = 0, \qquad \mu_{02} = k_2.$$

Videli smo da je zbir dve Poisson-ove jednodimenzionalne a.p. sa parametrima k_1 i k_2 takođe jedna Poisson-ova a.p. sa parametrom $k_1 + k_2$, tj. za $\nu = i + j$

$$p_\nu = e^{-(k_1+k_2)} \frac{(k_1+k_2)^\nu}{\nu!}.$$

Zato je uslovna verovatnoća

(6.6.2) $$p_{ij|i+j=\nu} = \frac{\nu!}{i!\,j!}\left(\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)^i\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}\right)^j$$

Ona pretstavlja jednu binomijalnu verovatnoću.

6.7. Normalan dvodimenzionalan raspored. — Za neprekidnu a.p. (X, Y) kažemo da ima normalan (Laplace-ov) raspored ako z.v. $f(x, y)$ postoji i ako je oblika

(6.7.1) $$f(x,y) = h\,e^{-H(x,y)},$$

gde je $H(x, y)$ polinom drugog reda po x i y sa osobinom da

$$H(x,y) = 1$$

pretstavlja jednačinu realne elipse. Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h\,e^{-H(x,y)}\,dx\,dy$$

ima smisla, što je lako utvrditi, pošto je $H(x, y) = 1$ jednačina realne elipse. Odredimo konstantu h tako da vrednost integrala bude jednaka jedinici.

Translacijom uvek možemo preneti koordinatni početak u centar elipse $H(x, y) = 1$. Tada će polinom $H(x, y)$ biti oblika

$$H(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{b} + \frac{y^2}{c^2} + d.$$

Za d uvek možemo da pretpostavimo da je nula jer kad to ne bi bio, e^d mogli bismo da ubacimo u konstantu h.

Dakle,

(6.7.2) $$H(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{b} + \frac{y^2}{c^2},$$

(6.7.3) $$f(x,y) = h\,e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{b} + \frac{y^2}{c^2}\right)}$$

Elipse

$$\mathrm{H}(x,y) = k\,, \qquad k \geqslant 0\,,$$

pretstavljaju familiju homotetičnih elipsi sa zajedničkim centrom i istim osama simetrije. Duž ma koje elipse f ostaje konstantno; elipse su ekvi-verovatne.

Potražimo značenje koeficijenta a, b, c kao i vrednost konstante h. Znamo da će jednačina

$$\mathrm{H}(x,y) = 1$$

pretstavljati elipsu, ako je

$$|b| > ac\,,$$

gde a i c uvek možemo smatrati pozitivnim, pošto se pojavljuju samo njihovi kvadrati.

Trinom $H\,(x,\,y)$ možemo pisati u obliku

$$\mathrm{H}(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{b} + \frac{y^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}x^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2 - 2\frac{xy}{b} + \frac{y^2}{c^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}\right)x^2 + \left(\frac{c}{b}x - \frac{y}{c}\right)^2$$

pa uslov

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

postaje

$$h\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}\right)x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{c}{b}x - \frac{y}{c}\right)^2}dy = 1. \tag{6.7.4}$$

Smenom

$$\frac{y}{c} + \frac{c}{b}x = \frac{u}{\sqrt{2}}\,, \qquad dy = \frac{c}{\sqrt{2}}\,du.$$

u integralu po y dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{c}{b}x - \frac{y}{c}\right)^2}dy = \frac{c}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi} = c\sqrt{\pi}$$

i (6.7.4) postaje

$$hc\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}\right)x^2}dx = 1. \tag{6.7.5}$$

Ponovnom smenom

$$x\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}}=\frac{\xi}{2}, \quad dx=d\xi\Big/\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)}$$

(6.7.5) svodi se na

$$\frac{hc\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi=1,$$

odnosno na

$$\frac{hc\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)}}\sqrt{2\pi}=1,$$

iz čega dobijamo

$$h=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{a^2c^2}-\frac{1}{b^2}}$$

Kako je centar elipse istovremeno i centar simetrije rasporeda masa gustine f, to je $E(X)=E(Y)=0$.

Varijansa μ_{20} nije se promenila izvršenom transformacijom koordinatnog sistema. Njena je vrednost

$$\mu_{20}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=h\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{c}{b}x-\frac{y}{c}\right)^2}dy=$$

$$=hc\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)x^2}dx=$$

$$=\frac{hc\sqrt{\pi}}{\left[2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)\right]^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi$$

pa je

$$\mu_{20}=\frac{1}{2}\,\frac{a^2b^2}{b^2-a^2c^2}.$$

Slično dobijamo i varijansu koordinate Y

$$\mu_{02} = \frac{1}{2}\,\frac{b^2 c^2}{b^2 - a^2 c^2}\,.$$

Kovarijansa biće

$$\mu_{11} = h \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\left(\frac{1}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}\right) x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\left(\frac{c}{b}x - \frac{y}{c}\right)^2} dy =$$

$$= \frac{hc^2}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\left(\frac{1}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}\right) x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{c}{b}x + \frac{u}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \frac{h\,c^3\sqrt{\pi}}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-\left(\frac{1}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}\right) x^2} dx =$$

$$= \frac{c^2}{b} \cdot hc\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-\left(\frac{1}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}\right) x^2} dx =$$

$$= \frac{c^2}{b}\,\frac{1}{2}\,\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 c^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 b c^2}{b^2 - a^2 c^2}\,.$$

Stavimo

(6.7.6) $$r = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\,\mu_{02}}}$$

i odredimo vrednost ovog izraza kod normalnog rasporeda

$$r = \frac{a^2 b c^2}{\sqrt{a^2 b^2 \cdot b^2 c^2}} = \frac{ac}{b}$$

Videli smo da uslov

$$|b| > ac$$

mora biti ispunjen. Ovaj se uslov sada svodi na

$$|r| < 1\,,$$

koji je ispunjen zbog (6.3.18)

Druge momente možemo iskazati pomoću r na sledeći način: u izrazu

$$\mu_{20} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 c^2}$$

smenimo

$$b = \frac{ac}{r}$$

pa će biti

$$\mu_{20} = \frac{a^2}{2(1-r^2)},$$

$$\mu_{02} = \frac{c^2}{2(1-r^2)},$$

$$\mu_{11} = \frac{ac}{2\left(\frac{1}{r}-r\right)} = \frac{br^2}{2(1-r^2)}$$

Iz ovih veza dobijamo

$$a^2 = 2(1-r^2)\,\mu_{20},$$

$$c^2 = 2(1-r^2)\,\mu_{02},$$

$$b^2 = 2(1-r^2)\cdot\frac{\mu_{11}}{r^2},$$

pa konstantu h možemo pisati u obliku

$$h = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{4(1-r^2)^2\mu_{20}\,\mu_{02}} - \frac{r^2}{4(1-r^2)^2\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{1}{2\pi\,\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}},$$

gde je $\sigma_x = \sqrt{\mu_{20}}$, $\sigma_y = \sqrt{\mu_{02}}$.

Sam polinom $H(x, y)$ dobiće definitivan oblik

$$H(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{b} + \frac{y^2}{c^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2(1-r^2)\sigma_x^2} - \frac{2xy}{2(1-r^2)\sigma_x\sigma_y}\,r + \frac{y^2}{2(1-r^2)\sigma_y^2}$$

$$= \frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)$$

a z.v. normalnog dvodimenzionalnog rasporeda

$$(6.7.7)\quad f(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

Ako se vratimo na prvobitni koordinatni početak, centar elipse imaće za koordinate $E(X) = M_1$ i $E(Y) = M_2$, pa je opšti oblik z.v. normalnog dvodimenzionalnog rasporeda

$$(6.7.8)\quad f(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{(x-M_1)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-M_1)(y-M_2)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-M_2)^2}{\sigma_y^2}\right\}}$$

U specijalnom slučaju kada je $r = 0$, z.v. $f(x, y)$ možemo pisati u obliku

$$f(x,y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\, \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \tag{6.7.9}$$

Zato je $r = 0$ potreban i dovoljan uslov da X i Y budu međusobno nezavisni kod normalnog rasporeda.

Marginalni z.v. normalnog rasporeda po X i Y biće

$$f_1(x) = hc\sqrt{\pi}\, e^{-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{1}{\sigma_x^2}-\frac{r^2}{\sigma_x^2}\right)x^2},$$

tj.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Slično

$$f_2(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

te (6.7.9) možemo pisati u obliku

$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y).$$

Uslovni normalni rasporedi su

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\sigma_y\sqrt{2\pi}}{2\pi\,\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]+\frac{y^2}{2\sigma_y^2}},$$

tj.

$$f(x|y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{1-r^2}\,\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2(1-r^2)}\left(x-r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y\right)^2}. \tag{6.7.10}$$

Takođe je

$$f(x|y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-r^2}\,\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-r^2)}\left(y-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x\right)^2} \tag{6.7.11}$$

a uslovne aritmetičke sredine

$$\mathrm{E}(X|Y=y) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y, \tag{6.7.12}$$

$$\mathrm{E}(Y|X=x) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x. \tag{6.7.13}$$

Kod necentriranih promenljivih X i Y uslovne aritmetičke sredine biće oblika

$$\mathrm{E}(X|Y=y) = M_1(y) = M_1 + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-M_2), \tag{6.7.14}$$

$$\mathrm{E}(Y|X=x) = M_2(x) = M_2 + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-M_1). \tag{6.7.15}$$

Karakteristična funkcija dvodimenzionalnog normalnog rasporeda je

(6.7.16)
$$\varphi(t,u)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(tx+uy)-H(x-M_1,y-M_2)}\,dx\,dy$$
$$=e^{i(M_1t+M_2u)-\frac{1}{2}(\sigma_x^2t^2+2r\sigma_x\sigma_y tu+\sigma_y^2u^2)}$$

6.8. Koeficijent korelacije. — Videli smo da je $\mu_{11}=0$ ako su a.p. X i Y među sobom nezavisne. Ukoliko pak između X i Y postoji linearna funkcionalna zavisnost, tj.

$$Y=aX+b,$$

tada je s jedne strane

$$\mu_{11}=E(X-M_1)(Y-M_2)=E(X-M_1)(aX+b-M_2)=$$
$$=E\left[aX^2+(b-M_2-aM_1)X-M_1(b-M_2)\right],$$

tj.

(6.8.1)
$$\mu_{11}=a\mu_{20},$$

a s druge strane

$$\mu_{11}=E(X-M_1)(Y-M_2)=E\left(\frac{1}{a}Y-\frac{b}{a}-M_{1}\right)(Y-M_2),$$

tj.

(6.8.2)
$$\mu_{11}=\frac{1}{a}\mu_{02}.$$

Množenjem jednačina (6.8.1) i (6.8.2) dobijamo

$$\mu_{11}^2=\mu_{20}\mu_{02}$$

Uvedeni koeficijent (6.7.6)

$$r=\frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}}=\frac{\mu_{11}}{\sigma_x\sigma_y}$$

imaće vrednost 0 ako su X i Y među sobom nezavisni a vrednost ± 1 ako su među sobom linearno zavisni. Zbog (6.3.18) uvek je $|r|\leqslant 1$. Za $0<|r|<1$ kažemo da postoji između a.p. X i Y *delimična ili stohastička zavisnost* a za merilo te zavisnosti uzimamo vrednost koeficijenta r koji nazivamo *koeficijentom korelacije*. Ako je $r=\pm 1$, tada je $Y=aX+b$, tj. ukupna masa dvodimenzionalnog rasporeda raspoređena je duž prave $y=ax+b$. Primetimo da su brojitelj i imenitelj istog reda te se vrednost koeficijenta korelacije neće promeniti promenom izabrane jedinice, tj. ako uzmemo

$$X=p_1X'+q_1,$$
$$Y=p_2Y'+q_2.$$

Primetimo još da između X i Y može postojati funkcionalna zavisnost i kada je $|r| < 1$, pošto r iskazuje merilo jedino linearne zavisnosti.

Videli smo da ako su X i Y među sobom nezavisni tada je $r = 0$. Međutim, obratno ne važi, tj. iz $r = 0$ ne proizilazi da X i Y moraju biti među sobom nezavisni.

Zbog ovih primedaba moramo biti veoma oprezni prilikom zaključivanja o korelaciji u praktičnim primenama.

Ako koordinatni početak sistema XOY pomerimo u tačku (M_1, M_2) i ako izvršimo rotaciju za ugao φ, dobićemo nove a.p. X' i Y', tj.

$$X' = (X - M_1)\cos\varphi + (Y - M_2)\sin\varphi,$$

$$Y' = -(X - M_1)\sin\varphi + (Y - M_2)\cos\varphi.$$

Rešenjem ovog sistema po X i Y dobijamo

$$X = X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi + M_1,$$

$$Y = X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi + M_2.$$

Tada je

$$\mu_{11}(\varphi) = E(X'Y') = -\mu_{20}\sin\varphi\cos\varphi + \mu_{02}\sin\varphi\cos\varphi + \mu_{11}\cos^2\varphi - \mu_{11}\sin^2\varphi =$$

$$= \mu_{11}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}(\mu_{20} - \mu_{02})\sin 2\varphi.$$

Ovaj će izraz biti jednak nuli za

$$tg\, 2\varphi = \frac{2\mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}}.$$

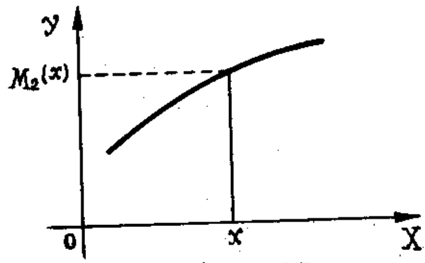
Prema tome, rotacijom koordinatnog sistema XOY, menjaće se koeficijent korelacije sa uglom φ i biće jednak nuli za $tg\, 2\varphi = \dfrac{2\mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}}$. Zato dve a.p. X i Y uvek možemo da izrazimo kao linearne funkcije dve među sobom linearno nezavisne a.p.

6.9. Regresione prave. — Kod jednoznačne funkcionalne zavisnosti a.p. X i Y svakoj vrednosti $X = x$ odgovara jedna potpuno određena vrednost $Y = y$. Ukoliko pak postoji samo delimična, tj. stohastička ili statistička zavisnost, svakoj vrednosti $X = x$ odgovara aleatorna promenljiva Y čiji je raspored uslovni raspored promenljive (X, Y) za $X = x$. U slučaju neprekidnog rasporeda Y će za $X = x$ imati z.v. $f(y/x)$. Da bismo na neki način stvorili jednoznačnu vezu između X i Y, uzećemo da vrednosti $X = x$ odgovara očekivana vrednost Y za $X = x$, tj. da je

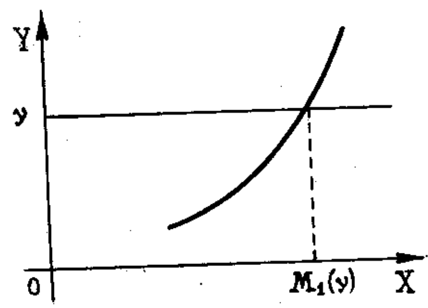
(6.9.1)
$$y = E(Y \mid X = x) = M_2(x).$$

Obratno, uzećemo da vrednosti $Y=y$ odgovara očekivana vrednost X za $Y=y$, tj. da je

(6.9.2) $$x = E(X|Y=y) = M_1(y).$$



Dijagram (6.9.I)



Dijagram (6.9.II)

Krive (6.9.1) i (6.9.2), čiji su dijagrami (6.9.I) i (6.9.II), nazivaju se *regresione krive*. Ukoliko su X i Y među sobom nezavisni regresione krive svode se na dve prave, koje se seku u tački (M_1, M_2) a paralelne su sa koordinatnim osama.

Pri normalnom rasporedu regresione krive biće na osnovu (6.7.14) i (6.7.15) takođe dve prave sa jednačinama

(6.9.3) $$\frac{y-M_2}{\sigma_y} = r\,\frac{x-M_1}{\sigma_x},$$

(6.9.4) $$\frac{x-M_1}{\sigma_x} = r\,\frac{y-M_2}{\sigma_y},$$

koje se seku u tačci (M_1, M_2).

Cramér je došao na ideju da regresione krive definiše na sledeći način: od svih mogućih krivih $g_1(x)$ odredimo onu za koju će otstupanje od funkcionalne zavisnosti

$$y = g_1(x)$$

aleatornih promenljivih X i Y biti što je moguće manje. Takođe, od svih mogućih krivih $g_2(y)$ odredimo onu za koju će otstupanje od funkcionalne zavisnosti

$$x = g_2(y)$$

aleatornih promenljivih X i Y biti što je moguće manje. Primenjujući metodu najmanjih kvadrata, problem se svodi na određivanje funkcije $g_1(x)$, odnosno $g_2(y)$, za koje će izraz

$$E\left[Y-g_1(X)\right]^2, \tag{6.9.5}$$

odnosno

$$E\left[X-g_2(Y)\right]^2, \tag{6.9.6}$$

dostići svoj minimum. U 4.6 videli smo da će integral po y u izrazu

$$E\left[Y-g_1(X)\right]^2=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\left[y-g_1(x)\right]^2 f(y|x)\,dy$$

dostići svoj minimum ako je $g_1(x)=M_2(x)$ i to za svako x. Takođe će integral po x u izrazu

$$E\left[X-g_2(Y)\right]^2=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,dy\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-g_2(y)\right]^2 f(x|y)\,dx$$

za svako x dostići svoj minimum ako je $g_2(y)=M_1(y)$. Tako opet dobijamo regresione krive (6.9.1) i (6.9.2).

Međutim, oblik krivih $g_1(a_1, a_2, \ldots, a_k; x)$ i $g_2(b_1, b_2, \ldots, b_k; y)$ možemo unapred da fiksiramo i odredimo parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$ odnosno $b_1, b_2, \ldots, b_k$, tako da izraz (6.9.5), odnosno (6.9.6), dostigne svoj minimum.

Uzimajući linearnu funkciju za g_1, tj.

$$g_1(X)=a_1X+a_2\,,$$

problem se svodi na određivanje parametara a_1 i a_2 za koje izraz

$$E(Y-a_1X-a_2)^2 \tag{6.9.7}$$

dostiže svoj minimum. Izraz (6.9.7) možemo pisati u razvijenom obliku

$$E(Y-a_1X-a_2)^2=a_2^2+2a_1a_2M_1+a_1^2m_{20}-2a_1m_{11}-2a_2M_2+m_{02}$$

i on će dostići svoj minimum za

$$a_1=\frac{\mu_{11}}{\mu_{20}}\,,\qquad a_2=M_2-\frac{\mu_{11}}{\mu_{20}}M_1\,. \tag{6.9.8}$$

Slično, uzimajući

$$g_2(Y)=b_1Y+b_2$$

izraz

$$E(X-b_1Y-b_2)^2=b_2^2+2b_1b_2M_2+b_1^2m_{02}-2b_1m_{11}-2b_2M_1+m_{20} \tag{6.9.9}$$

dostiže svoj minimum za

$$b_1=\frac{\mu_{11}}{\mu_{02}}\,,\qquad b_2=M_1-\frac{\mu_{11}}{\mu_{02}}M_2\,. \tag{6.9.10}$$

Tako dobijamo dve regresione prave

$$y-M_2=\frac{\mu_{11}}{\mu_{20}}(x-M_1)\,,$$

$$x-M_1=\frac{\mu_{11}}{\mu_{02}}(y-M_2)\,,$$

odnosno zbog (6.7.6)

(6.9.11) $$\frac{y-M_2}{\sigma_y}=r\,\frac{x-M_1}{\sigma_x}\,,$$

(6.9.12) $$\frac{x-M_1}{\sigma_x}=r\,\frac{y-M_2}{\sigma_y}\,.$$

koje će biti identične sa prvobitno definisanim regresionim krivama (6.9.3) i (6.9.4) pri normalnom rasporedu kao i u slučaju kada su a.p. X i Y među sobom nezavisne.

Odmah se vidi da se obe regresione prave (6.9.11) i (6.9.12) seku u težištu (M_1, M_2) i da će se poklopiti ako je $r=\pm 1$, tj. ako su X i Y i u stvarnosti linearno zavisne. Ukoliko je manja stvarna linearna zavisnost između X i Y utoliko regresione prave više otstupaju jedna od druge, tj. utoliko je veći ugao koji zaklapaju i za $r=0$ one postaju normalne jedna na drugu.

Samu minimalnu vrednost izraza (6.9.7) dobićemo kad smenimo vrednost (6.9.8)

$$S_y^2=E\left(Y-\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}X-M_2+\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}M_1\right)^2=$$

$$=E\left[(Y-M_2)-\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}(X-M_1)\right]^2=\sigma_y^2-2r^2\sigma_y^2+r^2\sigma_y^2\,,$$

tj.

(6.9.13) $$S_y^2=\sigma_y^2(1-r^2)\,.$$

Slično, minimalna vrednost izraza (6.9.9) biće

(6.9.14) $$S_x^2=\sigma_x^2(1-r^2).$$

S_x^2 i S_y^2 nazivaju se reziduumske varijanse. Kako je $r^2\leqslant 1$ to je uvek

(6.9.15) $$S_x^2\leqslant\sigma_x^2\,,\qquad S_y^2\leqslant\sigma_y^2\,.$$

Ukoliko je raspored diskretan sa z.v. $\{p_{ij}\}$ za vrednosti $\{x_i,\, y_j\}$ aleatorne promenljive $(X,\, Y)$, rezultati ostaju isti. Tačke $(x_i,\, y_j)$ možemo poređati u niz tačaka $(x_i,\, y_i)$, $i=1,\,2,\,\ldots,\,N$ sa verovatnoćama p_i, i (6.9.7), tj.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}p_i(y_i-a_1x_i-a_2)^2\,,$$

pretstavlja *srednje kvadratno otstupanje* sistema tačaka $(x_i,\, y_i)$ u pravcu Y-ose od prave

$$Y=a_1X+a_2\,.$$

Za (6.9.8) to će srednje kvadratno otstupanje dostići svoj minimum. Za (6.9.9) srednje kvadratno otstupanje sistema tačaka (x_i, y_i) u pravcu X-ose od prave

$$X = b_1 Y + b_2 ,$$

tj.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i (x_i - b_1 y - b_2)^2 ,$$

dostići će svoj minimum.

Nađimo sada *ortogonalnu regresionu pravu*, tj. pravu za koju će zbir kvadrata normalnih otstojanja dostići svoj minimum.

Dovedimo koordinatni početak u težište sistema tačaka (x_i, y_i), tj. u tačku (M_1, M_2) i odredimo pravu

(6.9.16) $$Y = mx$$

za koju će

(6.9.17) $$\sum_{i=1}^{N} \frac{(m x_i - y_i)^2}{m^2+1}$$

dostići svoj minimum. Anulirajući parcijalni izvod po m, tj.

$$\frac{2}{(m^2+1)^2}\left\{\mu_{11} m^2 + (\mu_{20} - \mu_{02})\, m - \mu_{11}\right\} = 0$$

tj.

(6.9.18) $$m^2 + 2\,\mu m - 1 = 0,$$

gde je

$$\mu = \frac{\mu_{20} - \mu_{02}}{2\mu_{11}} .$$

Koren kvadratne jednačine (6.9.18)

$$m = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}$$

pretstavlja traženu vrednost koeficijenta pravca prave (6.9.16) za koju će izraz (6.9.17) dostići svoj minimum.

6.10. Primeri

6.10.1. Odrediti regresionu pravu jednog datog sistema tačaka (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, za koju srednje kvadratno otstupanje u jednom datom pravcu u odnosu na postavljeni koordinatni sistem dostiže svoj minimum.

Neka se težište sistema tačaka poklapa sa koordinatnim početkom,

$$Y = mx$$

jednačina tražene regresione prave a θ pravac u kome tražimo otstupanje.

Parametar m treba tako odrediti da srednje kvadratno otstupanje u pravcu θ, tj.

(6.10.1.1) $$\frac{1}{N}\,\frac{1 + tg^2\theta}{(m - tg\,\theta)^2}\sum_{i=1}^{N} (m x_i - y_i)^2 ,$$

dostigne svoj minimum. Anulirajući parcijalni izvod po m

$$\frac{1+tg^2\theta}{(m-tg\,\theta)^4}(\mu_{11}m-\mu_{20}tg\,\theta\, m+\mu_{11}tg\,\theta-\mu_{02})=0$$

dobijamo

$$m=\frac{\mu_{02}-\mu_{11}tg\,\theta}{\mu_{11}-\mu_{20}tg\,\theta}\,. \tag{6.10.1.2}$$

Za $\theta=\frac{\pi}{2}$ dobijamo regresionu pravu (6.9.11), tj. pravu za koju je srednje kvadratno otstupanje u pravcu Y-ose minimum.

Za $\theta=0$ dobijamo regresionu pravu (6.9.12), tj. pravu za koju je srednje kvadratno otstupanje u pravcu X-ose minimum.

6.10.2. Odrediti reziduumsku varijansu u problemu zadatka (6.10.1). Odrediti pravac θ za koji će reziduumska varijansa dostići svoj minimum.

Ako u (6.10.1.1) stavimo dobijenu vrednost (6.10.1.2) dobićemo reziduumsku varijansu

$$S^2(\theta)=(\mu_{20}\mu_{02}-\mu_{11}^2)\frac{1+tg^2\theta}{\mu_{20}tg^2\theta-2\mu_{11}tg\,\theta+\mu_{02}}\,.$$

Pošto je zbog (6.3.18) diskriminanta trinoma po $tg\,\theta$, koji figuriše u imenitelju, negativna, to $S^2(\theta)$ ne može biti beskonačno te je ograničena funkcija sa pozitivnom asimptotom

$$Y=\frac{\mu_{20}\mu_{02}-\mu_{11}^2}{\mu_{20}}\,.$$

Osim toga je uvek

$$S^2(\theta)>0.$$

Kriva $Y=S^2(\theta)$ ima maksimum u tački

$$tg\,\theta_1=-\mu+\sqrt{\mu^2+1}\,,$$

minimum u tački

$$tg\,\theta_2=-\mu-\sqrt{\mu^2+1}\,,$$

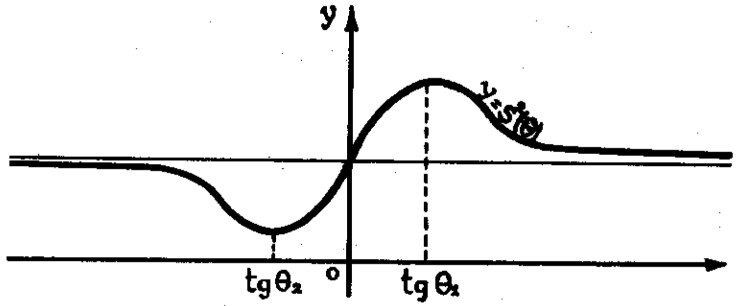
a seče asimptotu u tački

$$tg\,\theta=-\mu,$$

gde je

$$\mu=\frac{\mu_{20}-\mu_{02}}{2\mu_{11}}\,.$$

Dijagram (6.10.2.I) pretstavlja funkciju $S^2(\theta)$.



Dijagram (6.10.2.I)

$S^2(\theta)$ varira u konačnom pozitivnom razmaku i dostiže minimum za $tg\,\theta_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2+1}$. To je slučaj ortogonalne regresione prave pošto je tada

$$tg\,\theta_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2+1} = -\frac{1}{-\mu+\sqrt{\mu^2+1}} = -\frac{1}{m},$$

gde je m koeficijent pravca ortogonalne regresione prave.

6.10.3. Neka su dvodimenzionalne aleatorne promenljive (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2) među sobom nezavisne. Odrediti zakon verovatnoće aleatorne promenljive: $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$.

Karakteristična funkcija od (X, Y) je

$$\varphi(t,u) = \mathrm{E}\left[e^{i(tX+uY)}\right] = \mathrm{E}\left[e^{i(tX_1+tX_2+uY_1+uY_2)}\right].$$

Zbog nezavisnosti (X_1, Y_1) od (X_2, Y_2) dobijamo dalje

$$\varphi(t,u) = \mathrm{E}\left[e^{i(tX_1+uY_1)}\right]\mathrm{E}\left[e^{i(tX_2+uY_2)}\right] = \varphi_1(t,u)\,\varphi_2(t,u),$$

gde su φ_1 i φ_2 karakteristične funkcije respektivnih promenljivih (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2). Traženi zakon verovatnoće dobićemo zatim preko obrasca (6.4.5).

6.10.4. Pearson-ov ***korelacioni količnik***

$$\eta^2_{YX} = \frac{\mathrm{E}[M_2(X)-M_2]^2}{\mathrm{E}[Y-M_2]^2} = \frac{\mathrm{E}[M_2(X)-M_2]^2}{\sigma_y^2}$$

daje merilo tendencije masa rasporeda da zauzme položaj regresione krive $y = M_2(x)$. Odrediti njegove osobine i pokazati da je $\eta^2_{YX} = r^2$ ako se $y = M_2(x)$ poklapa sa regresionom pravom (6.9.11).

Kao i kod koeficijenta korelacije, korelacioni količnik jednak je nuli ako su X i Y među sobom nezavisni, jer tada je $M_2(x) = M_2$ a

$$\eta^2_{YX} = \frac{\mathrm{E}(M_2 - M_2)^2}{\sigma_y^2} = 0.$$

Ukoliko postoji funkcionalna zavisnost između X i Y, tj. ukoliko je $Y = M_2(X)$, dobijamo neposredno

$$\eta_{YX}^2 = \frac{E(Y-M_2)^2}{\sigma_y^2} = 1$$

Kako je

$$E\left[M_2(X)-M_2\right]^2 = \sigma_y^2 - E\left[Y-M_2(X)\right]^2$$

to se *korelacioni količnik* može napisati u obliku

$$\eta_{YX}^2 = 1 - \frac{E\left[Y-M_2(X)\right]^2}{\sigma_y^2}$$

Ako se kriva $y = M_2(x)$ poklapa sa regresionom pravom (6.9.11), tada je zbog (6.9.13)

$$\eta_{YX}^2 = r^2$$

Korelacioni količnik η_{XY}^2 dobijamo simetrično

$$\eta_{XY}^2 = \frac{E\left[M_1(Y)-M_1\right]^2}{\sigma_x^2}.$$

Ako je regresija pravolinijska imaćemo jednakost oba korelaciona koeficijenta, tj. $\eta_{XY}^2 = \eta_{YX}^2$.

6.10.5. Pokazati da korelacioni količnik ne može biti manji od kvadrata koeficijenta korelacije.

U (6.10.4) dobili smo

$$E\left[Y-M_2(X)\right]^2 = \sigma_y^2(1-\eta^2).$$

S druge strane imamo

$$E\left[Y-a_1X-a_2\right]^2 = E\left[Y-M_2(X)\right]^2 + E\left[M_2(X)-a_1X-a_2\right]^2,$$

tj.

$$\sigma_y^2(1-r^2) = \sigma_y^2(1-\eta_{YX}^2) + E\left[M_2(X)-a_1X-a_2\right]^2,$$

ili

$$\eta_{YX}^2 = r^2 + \frac{1}{\sigma_y^2} E\left[M_2(X)-a_1X-a_2\right]^2.$$

Otuda

$$\eta_{YX}^2 \geqslant r^2$$

6.10.6. Neka su normalno raspoređene aleatorne promenljive X, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ među sobom nezavisne sa zajedničkim rasporedom $N(0, \sigma)$. Odrediti raspored promenljive

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}.$$

Aleatorne promenljive X i

$$Y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

takođe su među sobom nezavisne pa je zakon verovatnoće $f(x, y)$ jednak proizvodu marginalnih zakona verovatnoća, tj. $f_1(x)\, f_2(y)$. Kako X ima raspored $N(0, \sigma)$ to je

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Na osnovu (5.8.9) promenljiva Y imaće χ^2-raspored, tj.

$$f_2(y)=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma^n}\,y^{n-1}e^{-\frac{ny^2}{2\sigma^2}}.$$

Zakon verovatnoće a.p. (X, Y) biće dakle

$$f_2(x,y)=f_1(x)\,f_2(y)=K y^{n-1}e^{-\frac{x^2+ny^2}{2\sigma^2}},$$

gde je

$$K=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma^{n+1}\sqrt{\pi}}.$$

Verovatnoći relacije $\frac{X}{Y}\leqslant t$ odgovara integral zakona verovatnoće promenljive (X, Y) nad oblašću S za koju je $Y>0$, $X\leqslant Yt$, tj.

$$F(t)=k\iint_{(S)} y^{n-1}e^{-\frac{x^2+ny^2}{2\sigma^2}}\,dx\,dy.$$

Smenom

$$x=\xi\eta, \qquad y=\eta,$$

oblast S gornjeg dvostrukog integrala preslikaće se u oblast $(-\infty<\xi\leqslant t;\ 0\leqslant\eta<+\infty)$ pa je

$$F(t)=k\int_{-\infty}^{t}d\xi\int_{0}^{\infty}\eta^{n}e^{-\frac{\xi^2\eta^2+n\eta^2}{2\sigma^2}}\,d\xi\,d\eta=$$

$$=k\,2^{\frac{n-1}{2}}\sigma^{n+1}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\int_{-\infty}^{t}\frac{d\xi}{(n+\xi^2)^{\frac{n+1}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{t}\frac{d\xi}{\left(1+\frac{\xi^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Sam zakon verovatnoće biće

$$F'(t) = s(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

A.p. t ima, dakle, „Student"-ov raspored.

6.10.7. Dokazati centralnu graničnu teoremu kod dvodimenzionalnog rasporeda.

Neka su $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ n među sobom nezavisnih dvodimenzionalnih aleatornih promenljivih. Pretpostavimo da imaju isti raspored, sa konačnim drugim momentima i $M_1 = M_2 = 0$. K.f. promenljive (X_i, Y_i) je

$$\varphi(t,u) = 1 - \frac{1}{2}(\mu_{20}t^2 + 2\mu_{11}tu + \mu_{02}u^2) + 0(t^2+u^2)$$

a promenljive $\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}, \frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right)$

$$\varphi_1(t,u) = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{u}{\sqrt{n}}\right).$$

Zato će k.f. od

(6.10.7.1)
$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}}, \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n}}\right)$$

biti

$$\varphi_n(t,u) = \left[\varphi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right]^n,$$

koji teži ka k.f. dvodimenzionalnog normalnog rasporeda, tj.

(6.1.7.2)
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t,u) = e^{-\frac{1}{2}(\mu_{20}t^2 + 2\mu_{11}tu + \mu_{02}u^2)}.$$

Prema tome, ako su a.p. $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ među sobom nezavisne, tada a.p. (6.10.7.1) teži da zauzme normalan raspored kad $n \to \infty$.

6.10.8. Pretpostavimo da smo niz elemenata $e_1, e_2, \ldots, e_N$ poređali po rang-listi u odnosu na dva obeležja X i Y. Tako smo dobili dve rang-liste a svaki elemenat okarakterisali sa (x_i, y_i) gde x_i i y_i mogu uzeti jedan od prvih N pozitivnih celih brojeva, tj.

$$x_i = 1, 2, \ldots, N, \qquad y_i = 1, 2, \ldots, N.$$

Odrediti koeficijent korelacije ta dva niza brojeva.

Aritmetičke sredine gornja dva niza jednake su među sobom

$$M_1 = M_2 = M = \frac{1+2+\cdots+N}{N} = \frac{N+1}{2}.$$

Varijanse su takođe jednake među sobom i bez obzira da li je N paran ili neparan broj, njihova vrednost će biti

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(i - \frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{N^2-1}{12}.$$

Do vrednosti kovarijanse doći ćemo na sledeći način

$$\mu_{11}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\frac{N+1}{2}\right)\left(y_i-\frac{N+1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2N}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\frac{N+1}{2}\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\frac{N+1}{2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i-\frac{N+1}{2}\right)-\left(y_i-\frac{N+1}{2}\right)\right]^2\right\},$$

tj.

$$\mu_{11}=\sigma^2-\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2=\frac{N^2-1}{12}-\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}d_i^2,$$

gde je $= x_i - y_i$.

K ficijent korelacije biće po definiciji

$$r=\frac{\mu_{11}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\mu_{11}}{\sigma^2}=1-\frac{6\sum_{i=1}^{N}d_i^2}{N^3-N}.$$

L) je proveriti da je $r = 1$ ako svaki elemenat zauzima isti rang obe ran liste ($d_i = 0$), a $r = -1$ ako svaki elemenat zauzima na jednoj rang-lis komplementarni rang ranga koji zauzima na drugoj listi.

O se korelacija često naziva *korelacijom ranga.*

6. .9. Dat je zakon verovatnoće $g(x, y) = e^{-x-y}$ sa oblašću varijacije $x >$) i $y > 0$. Neka je izvršena smena promenljivih

$$u = x + y \quad \text{i} \quad v = \frac{x}{y}.$$

N i zakon verovatnoće dvodimenzionalne promenljive (u, v) i njenu oblast ijacije.

K o je

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{v}{1+v} & \frac{1}{1+v}\\ \frac{u}{(1+v)^2} & \frac{-u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=-\frac{u}{(1+v)^2}$$

to je

$$f(u,v)=e^{-u}\frac{u}{(1+v)^2},\qquad (u>0,\ v>0).$$

Odmah vidimo da su u i v nezavisni među sobom i da su marginalni zakoni verovatnoća

$$f_1(u)=ue^{-u}, \qquad f_2=\frac{1}{(1+v)^2}$$

6.10.10. K.f. standardizovane dvodimenzionalne promenljive u razvijenom obliku je

$$\varphi(t,u)=1-\frac{1}{2}(t^2+2rtu+u^2)+0(t^2+u^2).$$

Izvršiti prelaz na polarni koordinatni sistem.

Problem se svodi na transformaciju kvadratne forme

$$Q(t,u)=t^2+2rtu+u^2$$

na polarne koordinate. Uočimo jednu tačku $M(t, u)$ i spojimo je sa koordinatnim početkom. Neka je $M_1(\xi, \eta)$ tačka u kojoj poluprava OM seče elipsu indikatrisu

$$t^2+2rtu+u^2=1$$

Uvedimo polarne koordinate

$$\rho=\frac{t}{\xi}=\frac{u}{\eta}$$

i ugao ω koji zaklapa OM sa t-osom. K.f. $\varphi(t, u)$ dobija oblik $\gamma(\rho, \omega)$. Transformisanu kvadratnu formu Q dobićemo preko veze drugih parcijalnih izvoda, tj

$$\rho^2\frac{\delta^2\gamma}{\delta\rho^2}=t^2\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2}+2tu\frac{\delta^2\varphi}{\delta t\delta u}+u^2\frac{\delta^2\varphi}{\delta u^2}. \tag{6.10.10.1}$$

Polazeći od pretpostavke da drugi momenti postoje, drugi izvodi karakteristične funkcije φ imaće smisla.

Izrazi

$$1+\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\left[1-e^{i(tx+uy)}\right]dF(x,y),$$

$$r+\frac{\delta^2\varphi}{\delta t\delta u}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\left[1-e^{i(tx+uy)}\right]dF(x,y),$$

$$1+\frac{\delta^2\varphi}{\delta u^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\left[1-e^{i(tx+uy)}\right]dF(x,y)$$

jednaki su nuli za $t=u=0$. Zato je

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(tx+uy)^2\left[1-e^{i(tx+uy)}\right]dF(x,y)=$$

$$=t^2+2rtu+u^2+t^2\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2}+2tu\frac{\delta^2\varphi}{\delta t\delta u}+u^2\frac{\delta^2\varphi}{\delta u^2}.$$

Koristeći vezu (6.10.10.1) i

$$t^2+2rtu+u^2=\rho^2$$

dobićemo definitivno da je

$$(6.10.10.2)\quad \frac{\delta^2\gamma}{\delta\rho^2}+1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi x+\eta y)^2\left[1-e^{i(tx+uy)}\right]dF(x,y)$$

sa početnim uslovima $\gamma=1$ i $\dfrac{\partial\gamma}{\partial\rho}=0$ za $\rho=0$.

6.11. Zadaci za vežbu

6.11.1. Odrediti karakterističnu funkciju trinomijalnog rasporeda.

6.11.2. Odrediti korelacioni količnik ako je raspored prekidan.

6.11.3. Neka su normalno raspoređene aleatorne promenljive X_1, $X_2, \ldots, X_m$, $Y_1, Y_2 \ldots, Y_n$ među sobom nezavisne sa zajedničkim rasporedom $N(O, \sigma)$.

Stavimo

$$X=\sum_{i=1}^{m}X_i^2\,,\qquad Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\,.$$

a) Odrediti zakon verovatnoće dvodimenzionalne a.p. (X, Y).

b) Izvršiti smenu

$$x=\xi\eta \quad \text{i} \quad y=\eta$$

i pokazati da će aleatorna promenljiva

$$\xi=\frac{X}{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{m}X_i^2}{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}$$

imati Fisher-ov raspored.

6.11.4. Uzimajući za regresionu krivu parabolu drugog reda

$$y=a_1x^2+a_2x+a_3$$

pokazati da će izraz

$$E\left[Y-a_1X^2+a_2X-a_3\right]^2$$

dostići svoj minimum ako su parametri a_1, a_2, a_3 dati obrascima

$$a_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\,,\qquad a_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\,,\qquad a_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}\,,$$

gde je

$$\Delta=\begin{vmatrix} m_{40} & m_{30} & m_{20}\\ m_{30} & m_{20} & m_{10}\\ m_{20} & m_{10} & 1\end{vmatrix}$$

a Δ_i determinanta koja se dobija kada se i-ta kolona determinante Δ zameni kolonom m_{21}, m_{11}, m_{01}.

6.11.5. Neka su X_1 i Y_1 dve pozitivne aleatorne promenljive sa istim zakonom verovatnoće e^{-u}. Uzmimo smenu

$$X_2 = X_1 + Y_1,$$

$$Y_2 = X_1.$$

a) Odrediti f.r. $F(x, y)$ promenljive (X_2, Y_2) kao i marginalne f.r. $F_1(x)$ i $F_2(y)$.

b) Pokazati da postoji stohastička zavisnost i da je razlika

$$d = F(x,y) - F_1(x)\,F_2(y)$$

uvek pozitivna.

c) Odrediti regresionu krivu, uslovnu standardnu devijaciju i koeficijenat korelacije.

6.11.6. Ako su aleatorne promenljive X i Y kružno simetrične u odnosu na koordinatni početak ravni XOY, pokazati da je tada karakteristična funkcija od (X, Y) funkcija argumenata $t^2 + u^2$, tj. $\varphi(t, u) = \varphi(t^2 + u^2)$.

6.11.7. Neka je osnovni skup podeljen u ν klasa i neka svaka klasa sadrži μ elemenata. Ako unutar svake klase kombinujemo svaki elemenat sa svakim od preostalih elemenata klase dobićemo ukupno $\nu\mu(\mu - 1)$ dvodimenzionalnih elemenata. Odrediti koeficijent korelacije r' i pokazati da je

$$-\frac{1}{\mu-1} \leqslant r' \leqslant 1.$$

(Ovaj je koeficijent poznat pod imenom *koeficijent intraklasne korelacije*).

6.11.8. Polazeći od obrasca (6.10.10.2) dokazati centralnu graničnu teoremu.

6.11.9. Neka su X_1 i X_2 dve među sobom nezavisne normalno raspoređene a.p. sa jednakom varijansom σ^2. Pokazati da će a.p. Y_1 i Y_2, uvedene jednom ortogonalnom transformacijom, takođe biti među sobom nezavisne i normalno raspoređene sa istom varijansom σ^2.

6.11.10. Elipse koncentracije normalnog dvodimenzionalnog rasporeda pretstavljene su jednačinama

$$\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(X-M_1)^2}{\sigma_x^2} - 2r\,\frac{(X-M_1)(Y-M_2)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(Y-M_2)^2}{\sigma_y^2}\right] = C^2.$$

C^2 možemo smatrati za aleatornu promenljivu s obzirom da je funkcija aleatornih promenljivih X i Y. Naći njen zakon verovatnoće $f(C^2)$.

7. MATRICE I KVADRATNE FORME

7.1. Matrice. — Realan broj je određen sa jednim, kompleksan broj sa dva, vektor u trodimenzionalnom prostoru sa tri, kvaternion sa četiri broja. Takođe postoje veličine koje su određene sa $m \cdot n$ realnih brojeva a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Te veličine možemo pretstaviti šematski pomoću dvodimenzionalnih tabela koje nazivamo *matricama*. Matrica $\mathbf{A}$ reda (m, n) je pravougaona šema brojeva a_{ij} sa m redova i n kolona, tj.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ili kratko

$$\mathbf{A}_{m,n} = \left[a_{ij}\right], \qquad \mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)}.$$

Brojeve a_{ij} nazivamo *elementima*.

Dešava se da je gornja tabela svedena na samo jedan red ili jednu kolonu. Tada kažemo da se matrica degenerisala u vektor i prema tome da li je u pitanju red ili kolona, imamo *vektor red*

$$\boldsymbol{x} = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\}$$

i *vektor kolonu*

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{bmatrix}$$

U ovom slučaju dovoljno je da uzmemo samo jedan indeks a skraćeno možemo pisati

$$\boldsymbol{x} = \left\{x_j\right\}, \qquad \boldsymbol{u} = \left[u_i\right].$$

Red prve matrice je $(1, n)$ a druge $(m, 1)$.

Ako je red matrice (1, 1), matrica se svodi na običan broj a_{11}.

Za dve matrice **A** i **B** kažemo da su jednake među sobom ako su istog reda i svi odgovarajući elementi jednaki među sobom, tj. ako je $a_{ij} = b_{ij}$ za svako i i j.

Takođe, zbir matrica **A** i **B** imaće smisla jedino ako su **A** i **B** istog reda. Tada, po definiciji, zbir pretstavlja novu matricu **C** koja će biti istog reda kao i **A** i **B** a čiji će elementi biti zbirevi odgovarajućih elemenata matrica **A** i **B**. Prema tome, ako je

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(m,n)} \qquad \mathbf{B} = [b_{ij}]_{(m,n)} \qquad \mathbf{C} = [c_{ij}]_{(m,n)}$$

tada je

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

ako je

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

za svako i i j.

Proizvod matrica **A** i **B**, uzet tim redom, imaće smisla jedino ako je broj kolona matrice **A** jednak broju redova matrica **B**. Drugim rečima, ako je (m, n) red matrice **A**, red matrice **B** treba da je (n, p). Tada je proizvod **AB** po definiciji matrica reda (m, p) sa opštim članom

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\,,$$

tj. skalarni proizvod i-tog vektora reda matrice **A** i j-tog vektora kolone matrice **B**.

Proizvod matrica bitno zavisi od njihovog reda. Ako postoji proizvod **AB**, ne mora da postoji i proizvod **BA**.

Ako je $\mathbf{x}$ reda $(1, n)$ a $\mathbf{u}$ reda $(n, 1)$, tada je proizvod

$$\mathbf{x}\mathbf{u} = [x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n]$$

matrica reda (1, 1) a proizvod

$$\mathbf{u}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} \{x_1\, x_2 \ldots x_n\} = \begin{bmatrix} u_1 x_1 & u_1 x_2 & \ldots & u_1 x_n \\ u_2 x_1 & u_2 x_2 & \ldots & u_2 x_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_n x_1 & u_n x_2 & \ldots & u_n x_n \end{bmatrix}$$

matrica reda (n, n).

Dalje je

$$\mathbf{x}\lambda = \begin{bmatrix} x_1\lambda \\ x_2\lambda \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ x_n\lambda \end{bmatrix}, \qquad \lambda\mathbf{u} = \{\lambda u_1\, \lambda u_2 \ldots \lambda u_n\},$$

gde je λ jedan broj koji možemo smatrati kao matricu reda (1, 1). Mi se, međutim, nećemo ograničavati u pogledu mesta faktora i uvek ćemo ga stavljati ispred matrice. Takođe, pisaćemo

$$\lambda \mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda = \left[\lambda\, a_{ij}\right]_{(m,n)}.$$

Ovo će, međutim, biti tačno jedino ako umesto λ uzmemo matricu $[\lambda\delta_{ij}]_{(m,m)}$ ako je λ levo od $\mathbf{A}$ a $[\lambda\delta_{ij}]_{(n,n)}$ ako je desno od $\mathbf{A}$. Izrazi δ_{ij} jednaki su jedinici za $i=j$ a nuli za $i \neq j$, tj.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

i nazivaju se *Kronecker-ovi indeksi.*

Izuzev osobine da proizvod matrica nije komutativan, sva ostala algebarska pravila važe prilikom operacija sa matricama. Zaista, lako je proveriti sledeće veze

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A},$$

$$\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B},$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}),$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB},$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC},$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

Transponovana matrica matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(m,n)}$ po definiciji je matrica $\mathbf{A}' = [a'_{ij}]_{(n,m)}$ pri čemu je $a'_{ij} = a_{ji}$. Redovi matrice $\mathbf{A}$ identični su sa kolonama matrice $\mathbf{A}'$. Neposredno se dobija

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}, \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\cdots)' = \mathbf{A}'+\mathbf{B}'+\mathbf{C}'+\cdots,$$

$$\mathbf{B}'\mathbf{A}' = (\mathbf{AB})'.$$

Ako je $m=n$ za matricu kažemo da je *kvadratna.* Kod kvadratne matrice može se desiti da je

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}.$$

To će biti slučaj kada su elementi matrice $\mathbf{A}$ simetrični u odnosu na dijagonalne elemente a_{ii}, tj. kada je $a_{ij} = a_{ji}$.

Kod *dijagonalne matrice* svi su nedijagonalni elementi jednaki nuli. Ako je matrica kvadratna i dijagonalna i ako su svi dijagonalni elementi jedinice, tj.

$$\mathbf{I} = \left[\delta_{ij}\right]_{(n,m)},$$

za matricu **I** kažemo da je *jedinična matrica.* Ovaj smo joj naziv dali zbog sledeće osobine: ako matricu **A** pomnožimo sa **I** kao rezultat dobijamo opet matricu **A**, tj.

$$\mathbf{I}_{mm}\mathbf{A}_{mn}=\mathbf{A}_{mn}, \qquad \mathbf{A}_{mn}\mathbf{I}_{nn}=\mathbf{A}_{mn}.$$

Takođe, nulta matrica $\mathbf{N}_{mn}$ biće ona za koju je

$$\mathbf{A}+\mathbf{N}=\mathbf{N}+\mathbf{A}=\mathbf{A}.$$

Očevidno je da svi elementi te matrice moraju biti nule.

7.2. Recipročna matrica. — Označimo sa A determinantu koja odgovara kvadratnoj matrici **A**, tj.

$$A=|\mathbf{A}|=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Neka su A_{ij} minori determinante A. Formirajmo matricu od tih minora $[A_{ij}]_{(n,n)}$. Tada ćemo njenu transponovanu matricu, tj.

$$\mathbf{A}^* = [A_{ji}]_{(n,n)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdot & \cdot & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.2.1}$$

nazvati *adjungovanom matricom* matrice **A**. Ako je $A \neq 0$, deobom članova A_{ji} sa A dobićemo *recipročnu matricu*, tj.

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{A}\mathbf{A}^*=\left[\frac{A_{ji}}{A}\right] \tag{7.2.2}$$

Lako je proveriti da je

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} &= \mathbf{A}, \\ \left(\mathbf{A}^{-1}\right)' &= \left(\mathbf{A}'\right)^{-1}, \\ (\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{I}^{-1} &= \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Ako je **A** simetrična matrica, tada su $\mathbf{A}^*$ i $\mathbf{A}^{-1}$ takođe simetrične matrice.

Kako je

$$AA^* = A\,I \tag{7.2.4}$$

to je

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \tag{7.2.5}$$

7.3. Linearne transformacije. — Kod linearne transformacije

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

matricu formiranu od koeficijenata a_{ij}, tj. $\mathbf{A}_{mn} = [a_{ij}]$ nazivamo *matricom transformacije*. Gornju transformaciju automatski dobijamo izjednačavanjem vektora kolone $\mathbf{y}$ sa vektorom kolone koji dobijamo množenjem matrice $\mathbf{A}$ sa vektorom kolone $\mathbf{x}$. Zato tu transformaciju možemo izraziti u matričnom obliku.

$$\boldsymbol{y} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}. \tag{7.3.2}$$

Ako hoćemo da promenljive x izrazimo pomoću promenljivih y treba da rešimo sistem jednačina (7.3.1), odnosno, matričnu jednačinu (7.3.2). Poznato je da će taj sistem imati jednoznačno rešenje ako je $m = n$ i ako je $A \neq 0$. Množenjem s leva obe strane matrične jednačine (7.3.2) sa $\mathbf{A}^{-1}$ dobijamo

$$A^{-1}\boldsymbol{y} = A^{-1}A\boldsymbol{x},$$

odnosno, zbog (7.2.5),

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}. \tag{7.3.3}$$

Ortogonalna matrica je kvadratna matrica $\mathbf{C}_{nn}$ sa osobinom $\mathbf{CC}' = \mathbf{I}$. Lako je konstatovati da je tada

$$\mathbf{C}^2 = 1, \tag{7.3.4}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}', \tag{7.3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,c_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad i = k, \\ 0 & \text{za} \quad i \neq k, \end{cases} \tag{7.3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\,c_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad j = k, \\ 0 & \text{za} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{7.3.7}$$

Ako je matrica transformacije ortogonalna kažemo da je transformacija ortogonalna. Recipročna transformacija $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$ biće takođe ortogonalna.

7.4. Kvadratne forme. — Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ dva vektora kolone reda $(m, 1)$ i $(n, 1)$ a $\mathbf{A}$ matrica reda (m, n). Tada je $\mathbf{x}'$ vektor red reda $(1, m)$, $\mathbf{x}'\mathbf{A}$ vektor red reda $(1, n)$ a

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{7.4.1}$$

matrica reda $(1, 1)$, tj. matrica sa jednim elementom koji nazivamo bilinearna forma.

U specijalnom slučaju kada je $\mathbf{A}$ kvadratna i simetrična matrica a $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (7.4.1) svodi se na kvadratnu formu

$$Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{7.4.2}$$

gde je $a_{ij} = a_{ji}$. Za matricu $\mathbf{A}$ kažemo tada je matrica kvadratne forme Q. Za $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ imamo

$$Q = \mathbf{x}'\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{7.4.3}$$

Ako izvršimo ortogonalnu linearnu transformaciju $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$, kvadratna forma Q ostaće invarijantna. Zaista, smenjujući $\mathbf{x}$ sa $\mathbf{C}\mathbf{y}$ u (7.4.3) dobijamo

$$\mathbf{x}\mathbf{x}' = (\mathbf{C}\mathbf{y})'\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{C}'\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{y}.$$

U opštem slučaju, linearnom transformacijom $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$, gde je $\mathbf{B}$ matrica reda (n, m), kvadratna forma (7.4.2) promeniće se u

$$Q_1(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y}.$$

Matrica kvadratne forme Q_1 je $\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B}$, tj. jedna kvadratna i simetrična matrica reda (m, m), s obzirom da je

$$(\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'(\mathbf{B}')' = \mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Recipročna forma od Q po definiciji je

$$Q^{-1} = \mathbf{x}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}.$$

Neposredno se dobija da je $(Q^{-1})^{-1} = Q$.

7.5. Rang. — Posmatrajmo skup svih submatrica izvučenih iz matrice $\mathbf{A}_{mn}$. Tom skupu submatrica odgovaraće skup njihovih determinanata. Najviši red ρ determinante različite od nule naziva se rangom matrice $\mathbf{A}$.

Ako je ρ rang matrice $\mathbf{A}_{mn}$ tada uvek možemo naći ρ linearno nezavisnih vektora redova, odnosno vektora kolona, matrice $\mathbf{A}$, dok će $\rho + 1$ vektora redova, odnosno vektora kolona, biti linearno zavisni. Zato rang matrice $\mathbf{A}_{mn}$ može najviše biti jednak manjem od brojeva m i n. Takođe, ako su $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ rangovi matrica istog reda $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$, rang zbira $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_k$ biće najviše jednak zbiru njihovih rangova, tj. $\rho \leqslant \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k$, a rang proizvoda $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_k$ najviše jednak najmanjem rangu, tj. $\rho \leqslant Min\{\rho_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Rang kvadratne forme matrice $\mathbf{A}_{nn}$, čija je determinanta $A \neq 0$, biće $\rho = n$. Za takvu matricu kažemo da je *nesingularna*. Ukoliko je $A = 0$, tada je $\rho < n$ i za matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je *singularna*.

Neka su kvadratne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ istoga reda (n, n) i neka je $\mathbf{A}$ nesingularna matrica, tj. $\rho = n$. Tada je rang njihovog proizvoda jednak rangu matrice $\mathbf{B}$.

Broj dijagonalnih elemenata različitih od nule dijagonalne matrice jednak je rangu te matrice.

Za kvadratnu formu $Q = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ takođe kažemo da ima svoj rang. On je identičan sa rangom matrice $\mathbf{A}$. Ako je matrica $\mathbf{A}$ nesingularna kažemo da je i njena kvadratna forma Q nesingularna i obratno.

Takođe, kažemo da je linearna transformacija $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ nesingularna ako je matrica $\mathbf{A}$ nesingularna i obratno.

7.6. Karakteristični brojevi. — Karakterističnim brojevima kvadratne matrice $\mathbf{A}$ u odnosu na jediničnu matricu nazivamo one vrednosti parametra χ za koje je matrica $\mathbf{A} - \chi\mathbf{I}$ singularna. Drugim rečima, to su koreni jednačine

$$(7.6.1) \qquad |\mathbf{A} - \chi\mathbf{I}| \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\chi & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\chi & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\chi \end{vmatrix} = 0.$$

Ova je jednačina poznata pod imenom *sekularna jednačina* i zna se da su svi njeni koreni realni.

Ako je $\mathbf{A}$ simetrična kvadratna matrica, onda je uvek moguće odrediti ortogonalnu matricu $\mathbf{C}$, takvu da proizvod $\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C}$ bude dijagonalna matrica

$$(7.6.2) \qquad \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \chi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \chi_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \chi_n \end{bmatrix},$$

gde su $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ koreni sekularne jednačine (7.6.1).

Kako je, zbog (7.3.6), ortogonalna matrica uvek nesingularna, to $\mathbf{A}$ i $\mathbf{E}$ imaju isti rang. Zato je rang matrice $\mathbf{A}$ jednak broju njenih karakterističnih brojeva različitih od nule.

S obzirom da je $C^2 = 1$, to je

$$A = |\mathbf{A}| = |\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \chi_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \chi_n \end{vmatrix} = \chi_1\chi_2\cdots\chi_n,$$

tj. determinanta matrice **A** jednaka je proizvodu njenih karakterističnih brojeva.

Neka λ nije nula determinante $|\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}|$ i označimo

$$\mathbf{S}(\lambda) = (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A})^{-1}.$$

Matrica

$$\mathbf{R}(\lambda) = \frac{\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I}}{\lambda}$$

naziva se ***rezolvovana matrica*** matrice **A**.

Kako je

$$\mathbf{S}(\lambda) = \mathbf{I} + \lambda \mathbf{A} \mathbf{S}(\lambda)$$

to daljom iteracijom dobijamo posle n smena

$$\mathbf{S}(\lambda) = \mathbf{I} + \lambda \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{A}^2 + \cdots + \lambda^n \mathbf{A}^n + \lambda^{n+1} \mathbf{A}^{n+1} \mathbf{S}(\lambda).$$

Geometriski red

$$\mathbf{I} + \lambda \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{A}^2 + \cdots + \lambda^n \mathbf{A}^n + \cdots ,$$

pod pretpostavkom da konvergira, poznat je pod imenom *Neumann-ovog reda.*

7.7. Definitne i semidefinitne pozitivne kvadratne forme. — Ako je za sve vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kvadratna forma

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0,$$

za Q kažemo da je ***definitno pozitivna*** kvadratna forma. Ukoliko Q može biti jednako nuli, za formu kažemo da je *semidefinitno pozitivna*. Ako oba slučaja spojimo u jedan, tj. $Q \geqslant 0$, za formu kažemo da je *ne-negativna.*

Ove kvalitete pripisaćemo i matrici **A** forme Q. Ako je **A** simetrična matrica videli smo da uvek možemo odrediti ortogonalnu matricu **C**, takvu da je

$$\mathbf{C}' \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{E}.$$

Ortogonalnom transformacijom $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ kvadratna forma Q svešće se na

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{y}' \mathbf{E} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \chi_i y_i^2$$

a forma $Q(\mathbf{x}) - \chi \mathbf{x}'\mathbf{x}$ na

$$Q(\mathbf{x}) - \chi \mathbf{x}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\chi_i - \chi) y_i^2 .$$

Otuda, ako je $\chi < Min\,\{\chi_i\}$, kvadratna forma $Q(\mathbf{x}) - \chi \mathbf{x}'\mathbf{x}$ biće definitno pozitivna bez obzira kakvo je Q.

Ako je Q definitno pozitivno, tj. ako je $Q > 0$ za sve vrednosti promenljivih x_i, odnosno y_i, sleduje da svi karakteristični brojevi moraju biti pozitivni. Zato je tada $A > 0$, tj. matrica **A** nesingularna.

Ako je Q semidefinitno pozitivno, tada je bar jedan karakterističan broj jednak nuli te je $A = 0$ a matrica **A** singularna.

7.8. Primeri

7.8.1. *Dispersiona matrica* dvodimenzionalnog rasporeda je

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{bmatrix},$$

tj. jedna simetrična kvadratna matrica drugog reda. Odrediti njenu recipročnu matricu.

Determinanta matrice je $M = \mu_{20}\,\mu_{02} - \mu_{11}{}^2 = \sigma_x{}^2\,\sigma_y{}^2\,(1 - r^2)$.

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \frac{1}{M}\begin{bmatrix} \mu_{02} & -\mu_{11} \\ -\mu_{11} & \mu_{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-r^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{r}{\sigma_x\sigma_y} \\ -\frac{r}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}$$

Matrici **M** odgovara kvadratna forma

$$Q(x,y) = \mu_{20}\,x^2 + 2\mu_{11}\,xy + \mu_{02}\,y^2.$$

Kako je zbog (6.3.18) $M > 0$, to je Q definitno pozitivna kvadratna forma. Njena recipročna kvadratna forma je

$$Q^{-1}(x,y) = \frac{1}{1-r^2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\,\frac{rxy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)$$

7.8.2. Pokazati da je

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\mathbf{A}\boldsymbol{x}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{A}}\,e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{t}}$$

Označimo

$$Q(x_1, x_2, \ldots x_n) = \boldsymbol{x}'\mathbf{A}\boldsymbol{x}$$

i izvršimo ortogonalnu transformaciju $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$. Kvadratna forma Q svešće se na

$$Q = \boldsymbol{y}'\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'\mathbf{E}\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} \chi_j\, y_j^2$$

Ako istovremeno izvršimo i ortogonalnu transformaciju $\mathbf{u} = \mathbf{C}'\mathbf{t}$, gde je $\mathbf{C}'$ transponovana matrica gornje matrice $\mathbf{C}$, dobićemo

$$\boldsymbol{t} = (\mathbf{C}')^{-1}\boldsymbol{u} = \mathbf{C}\boldsymbol{u}$$

tako da je

$$\boldsymbol{t}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}'\mathbf{C}'\mathbf{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{y}.$$

Integral I_n svešće se na

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\boldsymbol{u}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{y}'\mathbf{E}\boldsymbol{y}}\, dy_1\, dy_2 \dots dy_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sum_j u_j y_j - \frac{1}{2}\sum_j \chi_j y_j^2}\, dy_1\, dy_2 \dots dy_n =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i u_j y_j - \frac{1}{2}\chi_j y_j^2}\, dy_j\,.$$

Smenom

$$\xi_j = y_j\sqrt{\chi_j}\,, \qquad d\xi_j = dy_j\sqrt{\chi_j}$$

dobijamo

$$J_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\chi_j}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{u_j}{\sqrt{\chi_j}}\xi_j - \frac{1}{2}\xi_j^2}\, d\xi_j\,,$$

odnosno, zbog (5.6.4),

$$J_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\chi_j}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{u_j^2}{\chi_j}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\chi_1\chi_2\cdots\chi_n}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_j \frac{u_j^2}{\chi_j}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{A}}\, e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{u}}$$

Kako je

$$\mathbf{E}^{-1} = (\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C}')^{-1} = \mathbf{C}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\,,$$

a

$$\boldsymbol{u}'\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'\mathbf{C}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{t}$$

dobijamo definitivno

$$J_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{A}}\, e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{t}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{A}}\, e^{-\frac{1}{2}Q^{-1}(t_1, t_2, \dots, t_n)}.$$

Za $t = 0$ biće

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1, x_2, \dots, x_n)}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{A}}\,.$$

7.8.3. Izvesti karakterističnu funkciju normalnog rasporeda (6.7.16).

Polazeći od obrasca (7.8.2) za $n = 2$ i stavljajući $t_1 = t$, $t_2 = u$, $x_1 = x$ i $x_2 = y$, neposredno dobijamo karakterističnu funkciju normalnog rasporeda za centrirane promenljive. Naime, z.v. *centriranog normalnog dvodimenzionalnog rasporeda* možemo pisati u obliku

$$\frac{1}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\,e^{-\frac{1}{2}Q^{-1}(x,y)},$$

gde je Q kvadratna forma dispersione matrice. Korišćenjem (7.8.2) dobijamo karakterističnu funkciju

$$\varphi(t,u)=\frac{1}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(tx-uy)-\frac{1}{2}Q^{-1}(x,y)}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{M^{-1}}}\,e^{-\frac{1}{2}Q(t,u)}=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}Q(t,u)}=e^{-\frac{1}{2}(\mu_{20}t^2+2\mu_{11}tu+\mu_{02}u^2)}.$$

Za necentrirane vrednosti, umesto $Q^{-1}(x,y)$ uzećemo $Q^{-1}(x-M_1,\ y-M_2)$, i tako dobijamo obrazac (6.7.16).

7.9. Zadaci za vežbu

7.9.1. Odrediti recipročnu matricu dijagonalne matrice.

7.9.2. Pokazati da je proizvod dve ortogonalne matrice istog reda takođe ortogonalna matrica.

7.9.3. Neka relacija (7.3.6) važi za $r<n$ redova jedne matrice. Pokazati da uvek možemo odrediti preostalih $n-r$ redova, tako da novodobijena kvadratna matrica reda (n,n) bude ortogonalna.

7.9.4. Neka je $\mathbf{E}_{m,\rho,n}$ dijagonalna matrica kod koje su $\rho\leqslant n$ dijagonalnih elemenata jedinice a ostali nule. Pokazati da je

$$\mathbf{E}_{m,\rho,n}\cdot\mathbf{E}_{n,\rho',p}=\mathbf{E}_{m,r,p},\qquad r=Min\{\rho,\rho'\}.$$

7.9.5. Proveriti

$$\mathbf{E}_{m,\rho,\rho}\cdot\mathbf{E}_{\rho,\rho,n}=\mathbf{E}_{m,\rho,n},$$

$$\mathbf{E}_{\rho,\rho,m}\cdot\mathbf{E}_{m,\rho,n}\cdot\mathbf{E}_{n,\rho,\rho}=\mathbf{E}_{\rho,\rho,\rho}.$$

7.9.6. Pokazati da je transponovana matrica jedne ortogonalne matrice takođe ortogonalna.

7.9.7. Pokazati da su karakteristični brojevi recipročne matrice $\mathbf{A}^{-1}$ jednaki recipročnim vrednostima karakterističnih brojeva matrice $\mathbf{A}$.

7.9.8. Uočimo matricu $\mathbf{A}_{nn}$ i neka je $m\leqslant n$ a $\rho=m$. Pokazati da su tada svi karakteristični brojevi simetrične kvadratne matrice $\mathbf{B}_{mm}=\mathbf{AA}'$ pozitivni i da je $\mathbf{B}$ nesingularna matrica.

7.9.9. Neka su **A** i **B** kvadratne matrice. Ako je

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}$$

i ako je matrica **B** nesingularna, pokazati da je tada

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}.$$

7.9.10. Neka je **A** kvadratna matrica a λ proizvoljan broj. Dokazati identitet

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{-1} - \mathbf{A}^{-1} = \lambda \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{-1}.$$

8. VIŠEDIMENZIONALNI RASPOREDI

8.1. Funkcija rasporeda i zakon verovatnoće višedimenzionalnog rasporeda. — Neka je $Z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jedna n-dimenzionalna aleatorna promenljiva u prostoru R^n a $\mathcal{E}$ univerzalni skup tačaka toga prostora čije položaje može zauzeti promenljiva Z. Ako je $E \subset \mathcal{E}$, funkcija verovatnoće a.p. Z biće verovatnoća

$$\Pr\{Z \in E\} = P(E). \tag{8.1.1}$$

I za nju ćemo pretpostaviti da je probabilna. Obrasci (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) i (4.2.5) i dalje će važiti.

Dok Z varira u n-dimenzionalnom skupu E, njegove koordinate X_1, $X_2, \ldots, X_n$ variraju u jednodimenzionalnim skupovima koje ćemo označiti respektivno sa $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Jednodimenzionalne marginalne funkcije verovatnoća biće

$$\begin{aligned} &\Pr\{X_1 \in S_1\} = P_1(S_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Pr\{X_n \in S_2\} = P_2(S_2). \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

Skup S_1 pretstavlja projekciju skupa E na X_1-osu prostora R^n. Ako uzmemo projekciju skupa E prostora R^n na prostor R^k $(k < n)$, čije su promenljive $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ik}$, dolazimo do k-dimenzionalne marginalne funkcije verovatnoće. Videli smo u (4.2) da funkcija verovatnoće $P(E)$ ima čitav niz marginalnih funkcija verovatnoća koje se dobijaju kombinacijama koordinata $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

U specijalnom slučaju kada za E uzmemo skup tačaka $X_1 \leqslant x_1$, $X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_n \leqslant x_n$, funkciju verovatnoće nazivamo ***funkcijom rasporeda F***, tj.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Pr\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_n \leqslant x_n\}. \tag{8.1.3}$$

Jednodimenzionalne marginalne f.r. su

$$
(8.1.4)\qquad
\begin{aligned}
&F_1(x_1) = Pr.\{X_1 \leqslant x_1\} = F(x_1, \infty, \ldots \infty),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&F_n(x_n) = Pr.\{X_n \leqslant x_n\} = F(\infty, \infty, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

dok je

$$
(8.1.5)\qquad
\begin{aligned}
&F(-\infty, -\infty, \ldots, -\infty) = 0,\\
&F(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1.
\end{aligned}
$$

Uslovne $(n-1)$-dimenzionalne f.r. a.p. Z za respektivne fiksne vrednosti promenljivih $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, $\ldots$, $X_n = x_n$, biće

$$
(8.1.6)\qquad
\begin{aligned}
&F(x_2, x_3, \ldots, x_n \mid x_1) = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{F_1(x_1)},\\
&F(x_1, x_3, \ldots, x_n \mid x_2) = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{F_2(x_2)},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \mid x_n) = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{F_n(x_n)}.
\end{aligned}
$$

Ako sa $F^k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ označimo f.r. $(n-k)$-dimenzionalne a.p. $(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n)$, tada će uslovna k-dimenzionalna f.r. a.p. Z za fiksne vrednosti promenljivih $X_{k+1} = x_{k+1}$, $X_{k+2} = x_{k+2}$, $\ldots$, $X_n = x_n$, biti

$$
(8.1.7)\qquad F(x_1, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n) = \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{F^k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)}.
$$

Variranjem broja k i uzimanjem svih mogućih kombinacija k koordinata od ukupno n, dobićemo sve uslovne rasporede n-dimenzionalne a.p. Z. Lako je proveriti da one imaju sve osobine funkcija rasporeda.

Ukoliko je

$$
(8.1.8)\qquad F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \mid x_i) = F^i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n)
$$

za $F_i(x_i) > 0$, X_i je nezavisno od $(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$. Ako (8.1.8) važi za sve vrednosti $i = 1, 2, \ldots, n$, iteracijom dobijamo

$$
(8.1.9)\qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1)\, F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)
$$

i tada kažemo da su a.p. X_1, X_2, $\ldots$, X_n među sobom nezavisne.

I ovde ćemo prvo posmatrati prekidan raspored, kao najprostiji slučaj rasporeda kod koga je celokupna masa raspoređena u tačkama $A_i(x_{1i}$,

$x_{2i}, \ldots, x_{ni})$, $i = 1, 2, \ldots$, kojih može biti konačno ili prebrojivo mnogo Tada je

$$(8.1.10)\quad p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \Pr\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \ldots, X_n = x_{i_n}\} \geqslant 0,$$

$$(8.1.11)\quad \sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1.$$

Marginalni $(n-1)$-dimenzionalni rasporedi svode se na

$$(8.1.12)\quad \begin{array}{l} p_{.i_2 \ldots i_n} = \Pr\{X_2 = x_{i_2}, \ldots, X_n = x_{i_n}\} = \sum_{i_1} p_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{i_1 \ldots i_{n-1}.} = \Pr\{X_1 = x_{i_1}, \ldots, X_{n-1} = x_{i_{n-1}}\} = \sum_{i_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} \end{array}$$

a k-dimenzionalni marginalni raspored prvih k koordinata na

$$(8.1.13)\quad p_{i_1 \ldots i_k \ldots} = \Pr\{X_1 = x_{i_1}, \ldots, X_k = x_{ik}\} = \sum_{i_{k+1}} \sum_{i_{k+2}} \ldots \sum_{i_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Ukoliko su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ među sobom nezavisni biće

$$(8.1.14)\quad p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}.$$

Ako je raspored neprekidan, tada f.r. uvek možemo pretstaviti kao određen integral pozitivne funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tj.

$$(8.1.15)\quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Funkcija f pretstavlja gustinu jedinične mase raspoređene u prostoru R^n a F ukupnu masu u oblasti $(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_n \leqslant x_n)$. Funkcija f je zakon verovatnoće a.p. Z. Verovatnoća

$$f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})\, dx_1, dx_2 \ldots dx_n, \text{ tj.}$$

$$\Pr\{x_{10} < X_1 \leqslant x_{10} + dx_1, \ldots, x_{no} < X_n \leqslant x_{no} + dx_n\}$$

pretstavlja elementarnu verovatnoću.

Neposredno se dobija

$$(8.1.16)\quad \Pr\{a_1 < X_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n < X_n \leqslant b_n\} = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

i

$$(8.1.17)\quad \Pr\{-\infty < X_1 \leqslant +\infty, \ldots, -\infty < X_n \leqslant +\infty\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1.$$

Ako je (8.1.15) jedan Lebesgue-ov integral, f je mešoviti parcijalni izvod od F, tj.

(8.1.18)
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta^n F}{\delta x_1 \ldots \delta x_n},$$

izuzev najviše za jedan skup tačaka nulte mere.

Marginalne funkcije rasporeda (8.1.4) biće

(8.1.19)
$$\begin{gathered} F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \end{gathered}$$

ili, ako definišemo marginalne zakone verovatnoće sa

(8.1.20)
$$\begin{gathered} f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}, \end{gathered}$$

(8.1.19) možemo pisati u obliku

(8.1.21)
$$\begin{gathered} F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)\, dx_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x_n)\, dx_n. \end{gathered}$$

Ako sa f^k označimo $(n-k)$-dimenzionalni marginalni z.v. zadnjih $(n-k)$ promenljivih, tj.

$$f^k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_k,$$

tada će k-dimenzionalni uslovni z.v. prvih k promenljivih biti

(8.1.22)
$$f(x_1, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{f^k(x_{k+1}, \ldots, x_n)},$$

pod uslovom da je $f^k > 0$.

U slučaju da su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ među sobom nezavisni, biće

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n). \tag{8.1.23}$$

Smena promenljivih kod n-dimenzionalnih rasporeda vrši se na istovetan način kao kod dvodimenzionalnih rasporeda (6.1).

8.2. Srednje vrednosti. Momenti. Dispersiona matrica. — Proširujući definiciju Stieltjes-ovog integrala na n dimenzija, kod rasporeda opšteg tipa funkcija verovatnoće biće

$$Pr.\{Z \in I\} = \int_I dF(x_1, \ldots, x_n), \tag{8.2.1}$$

gde je I dati interval u prostoru R^n. Aritmetička sredina ili matematička nada aleatorne funkcije $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jednog opšteg tipa n-dimenzionalnog rasporeda biće

$$E\left[g(X_1, \ldots, X_n)\right] = \int_{R^n} g(x_1, \ldots, x_n)\, dF(x_1, \ldots, x_n), \tag{8.2.2}$$

odnosno

$$E\left[g(X_1, \ldots, X_n)\right] = \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_n} g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})\, p_{i_1 \ldots i_n}, \tag{8.2.3}$$

kod prekidnog a

$$E\left[g(X_1, \ldots, X_n)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{8.2.4}$$

kod neprekidnog rasporeda.

Običan momenat reda $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ a.p. Z dobija se ako se uzme

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n},$$

tj.

$$m_{j_1 \ldots j_n} = E(X_1^{j_1} \ldots X_n^{j_n}) = \int_{R^n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}\, dF(x_1, \ldots, x_n). \tag{8.2.5}$$

Momenti prvog reda biće

$$M_i = E(X_i) = \int_{R^n} x_i\, dF(x_i, \ldots, x_n) \tag{8.2.6}$$

a tačka $(M_1, \ldots, M_n)$ pretstavlja težište rasporeda masa u R^n.

Centralni momenat reda $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ a.p. Z dobija se ako se uzme

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - M_1)^{j_1} (x_2 - M_2)^{j_2} \ldots (x_n - M_n)^{j_n},$$

tj.

$$\mu_{j_1 \ldots j_n} = \int_{R^n} (x_1 - M_1)^{j_1} \ldots (x_n - M_n)^{j_n}\, dF(x_1, \ldots, x_n), \tag{8.2.7}$$

odnosno

(8.2.8) $$\mu_{j_1\ldots j_n}=\sum_{i_1}\ldots\sum_{i_n}(x_{i_1}-M_1)^{j_1}\ldots(x_{i_n}-M_n)^{j_n}\,p_{i_1\ldots i_n},$$

kod prekidnog, a

(8.2.9) $$\mu_{j_1\ldots j_n}=\int_{R^n}(x_1-M_1)^{j_1}\ldots(x_n-M_n)^{j_n}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

kod neprekidnog rasporeda.

Često se zbir $(j_1+j_2+\ldots+j_n)$ uzima za red momenta. Ako skraćeno sa W_{ij} označimo momente drugog reda imaćemo za varijanse

(8.2.10) $$W_{ii}=E(X_i-M_i)^2=\sigma_i^2$$

a za kovarijanse

(8.2.11) $$W_{ij}=E(X_i-M_i)(X_j-M_j)=\sigma_i\,\sigma_j\,r_{ij},$$

gde je r_{ij} koeficijent korelacije između promenljivih X_i i X_j.

Očevidno da kvadratna forma

(8.2.12) $$Q(t)=E\left[\sum_{i=1}^{n}t_i(X_i-M_i)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}\,t_i\,t_j$$

ne može nikada biti negativna. Kvadratna matrica

(8.2.13) $$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}W_{11} & W_{12} & \ldots & W_{1n}\\ W_{21} & W_{22} & \ldots & W_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ W_{n1} & W_{n2} & \ldots & W_{nn}\end{bmatrix}$$

naziva se *dispersiona matrica* a gornju kvadratnu formu možemo napisati u obliku

(8.2.14) $$Q=t'\,\mathbf{W}\,t.$$

Smenom $\mathbf{t}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{u}$, gde je $\mathbf{D}$ jedna dijagonalna matrica transformacije, tj.

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_n^2\end{bmatrix},$$

kvadratna forma Q svodi se na

$$Q=u'(\mathbf{D}^{-1})'\,\mathbf{W}\,\mathbf{D}^{-1}u=u'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}\,\mathbf{D}^{-1}u=u'\mathbf{R}u,$$

gde je

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{8.2.15}$$

Matrica **R** naziva se ***korelaciona matrica.*** Kako je $W_{ij} = W_{ji}$ i $r_{ij} = r_{ji}$ to su dispersiona i korelaciona matrica simetrične matrice.

Iz

$$\mathbf{W} = \mathbf{DRD} \tag{8.2.16}$$

dobijamo

$$\mathrm{W} = \sigma_1^2 \dots \sigma_n^2 \mathrm{R}.$$

Ako su $X_1, X_2, \dots, X_n$ među sobom nezavisni, $r_{ij} = 0$ pa je

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}$$

a **W** dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi varijanse σ_i^2. Tada je $R = 1$ a $W = \sigma_1^2 \dots \sigma_n^2$.

8.3. Karakteristična funkcija. — Neka su $\mathbf{t}$ i $\mathbf{x}$ dva vektora kolone a $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ i $(x_1, x_2 \dots, x_n)$ njihove odgovarajuće koordinate. Takođe neka je $\mathbf{Z}$ aleatorni vektor kolone sa koordinatama $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Uzimajući očekivanu vrednost aleatorne funkcije

$$g(\mathbf{Z}) = e^{i\mathbf{t}'\mathbf{Z}}$$

dobijamo karakterističnu funkciju a.p. Z

$$\varphi(\mathbf{t}) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathrm{E}\left(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{Z}}\right) = \int_{\mathrm{R}^n} e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}}\, d\mathrm{F}. \tag{8.3.1}$$

I kod n-dimenzionalnih rasporeda postoji biunivoka korespondencija između zakona verovatnoće i karakteristične funkcije.

U okolini tačke $\mathbf{t} = 0$ k.f. (8.3.1) možemo razviti u Taylor-ov red

$$\varphi(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mathbf{M}} \left[1 + \frac{i^2}{2!} \sum_r \sum_s \mathrm{W}_{rs} t_r t_s + 0\left(\sum_r t_r^2\right)\right], \tag{8.3.2}$$

gde je **M** težište rasporeda sa koordinatama $(M_1, M_2, \dots, M_n)$. Za $M = 0$ biće

$$\varphi(\mathbf{t}) = 1 - \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \mathrm{W}_{rs} t_r t_s + 0\left(\sum_r t_r^2\right). \tag{8.3.3}$$

Ako su $X_1, X_2, \dots, X_n$ među sobom nezavisni, tada je

$$\varphi(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j), \tag{8.3.4}$$

gde je $\varphi_j(t_j)$ marginalna k.f. promenljive X_j, tj.

$$\varphi_j(t_j) = \varphi(0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0).$$

Ako je grupa promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_k$ nezavisna od grupe promenljivih $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n$, tada je

$$\varphi(\boldsymbol{t}) = \varphi(t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0)\,\varphi(0, \ldots, 0, t_{k+1}, \ldots, t_n).$$

Kao i u slučaju jedne i dve dimenzije i ovde možemo da odredimo z.v. pomoću k.f. preko relacije

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathrm{R}^n} e^{-i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{x}} \varphi(\boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{t}, \tag{8.3.5}$$

gde je $d\boldsymbol{t} = dt_1\, dt_2 \ldots dt_n$.

8.4. Rang rasporeda. — Pod rangom ρ rasporeda podrazumevamo rang njegove dispersione matrice $\mathbf{W}$, ili, što je isto, rang njegove korelacione matrice $\mathbf{R}$. Ako je $\rho = n$ raspored je *nesingularan* a ako je $\rho < n$ raspored je *singularan*.

Raspored je nesingularan u R^n jedino ako ne postoji nijedna hiperravan koja sadrži celokupnu masu rasporeda.

Videli smo u 7.6 da uvek možemo odrediti ortogonalnu matricu $\mathbf{C}$, takvu da linearnom transformacijom $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, dispersionu matricu transformišemo u dijagonalnu matricu $\mathbf{E} = \mathbf{C}'\mathbf{W}\mathbf{C}$. Ako pretpostavimo da je $M = 0$, biće

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}_i) = 0, \qquad \mathrm{E}(\mathrm{Y}_i \mathrm{Y}_j) = 0, \tag{8.4.1}$$

tako da su nove promenljive $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ međusobom nezavisne

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}_i^2) = \chi_i = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \mathrm{C}_{ir} \mathrm{W}_{rs} \mathrm{C}_{si}. \tag{8.4.2}$$

Ako u k.f. pored gornje transformacije izvršimo i smenu $\boldsymbol{t} = \mathbf{C}'\boldsymbol{u}$ biće,

$$\varphi(\boldsymbol{t}) = \int_{\mathrm{R}^n} e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{x}}\, d\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathrm{R}^n} e^{i\boldsymbol{u}'\boldsymbol{y}}\, d\mathrm{F}_1(\boldsymbol{y}) = \varphi_1(\boldsymbol{u}), \tag{8.4.3}$$

gde je F_1 f.r. a φ_1 k.f. nove promenljive $\mathbf{y}$. Ukoliko je rang dispersione matrice $\rho < n$, $n - \rho$ karakterističnih brojeva biće jednak nuli dok će ostali biti pozitivni. Otuda je dovoljno da uzmemo samo $n - \rho$ novih promenljivih $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-\rho}$ umesto ranijih n promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

8.5. Multinomijalan raspored. — Ako koordinate $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mogu uzimati samo cele vrednosti $0, 1, \ldots, k$ i ako je z.v.

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{k!}{i_1!\, i_2! \ldots i_n!}\, p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_n^{i_n},$$

gde je $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ a $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k$, a.p. Z je prekidna a.p. sa *multinomijalnim rasporedom*. Primetimo da su samo $(n-1)$ promenljivih nezavisne među sobom dok je vrednost poslednje promenljive u zavisnosti od prethodnih.

Koristeći multinomijalan obrazac neposredno dobijamo da je

$$\sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_{n-1}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^k = 1.$$

Primenom iste metode, kojom smo se služili u (6.5), dobićemo sledeće obične prve i druge momente

$$M_r = E(i_r) = kp_r, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

$$E(i_r^2) = kp_r + k(k-1)p_r^2, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

$$E(i_r i_s) = k(k-1)p_r p_s, \quad r, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Centralni drugi momenti, odnosno elementi dispersione matrice, biće

$$W_{rr} = E(i_r^2) - M_r^2 = kp_r(1-p_r),$$

$$W_{rs} = E(i_r i_s) - M_r M_s = -kp_r p_s,$$

$r, s = 1, 2, \ldots, n.$

8.6. Poisson-ov n-dimenzionalan raspored. — Koordinate a.p. Z sa Poisson-ovim rasporedom uzimaju sledeće cele vrednosti: $X_r = 0, 1, 2, \ldots, i_r, \ldots, \infty$, $(r = 1, 2, \ldots, n)$. Zakon verovatnoće je

$$p_{i_1} p_{i_2 \ldots i_n} = e^{-(k_1+k_2+\cdots+k_n)} \frac{k_1^{i_1}}{i_1!} \frac{k_2^{i_2}}{i_2!} \cdots \frac{k_n^{i_n}}{i_n!}.$$

Odmah vidimo da su promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$ među sobom nezavisne, jer je

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \prod_{r=1}^{n} e^{-k_r} \frac{k_r^{i_r}}{i_r!} = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}.$$

Ako stavimo $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$, totalni zbir će biti

$$\sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = e^{-(k_1+k_2+\cdots+k_n)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)^i}{i!} = 1.$$

Verovatnoća da će zbir $i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ biti jedna određena vrednost i je

$$p_i = e^{-(k_1+\cdots+k_n)} \frac{(k_1+\cdots+k_n)^i}{i!},$$

tako da je z.v. Poisson-ovog rasporeda, pod uslovom da $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = i$,

$$p_{i_1 \ldots i_n | i_1+\cdots+i_n=i} = \frac{p_{i_1 i_2 \ldots i_n}}{p_i} = \frac{i!}{i_1! \ldots i_n!} \left(\frac{k_1}{k}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{k_n}{k}\right)^{i_n},$$

gde smo stavili $k = k_1 + \ldots + k_n$. Gornji uslovni z.v. Poisson-ovog rasporeda svodi se, dakle, na multinomijalni z.v.

8.7. Normalan n-dimenzionalan raspored. — Za neprekidnu a.p. $Z(X_1, \ldots, X_n)$ kažemo da ima normalan (Laplace-ov) raspored ako z.v. $f(x_1, \ldots, x_n)$ postoji i ako je oblika

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h e^{-\frac{1}{2} H(x_1, \ldots, x_n)} \tag{8.7.1}$$

gde je $H(x_1, \ldots, x_n)$ polinom drugog reda.

Da bi uslov

$$\int\limits_{R^n} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1 \tag{8.7.2}$$

bio ispunjen potrebno je da jednačina

$$H(x_1, \ldots, x_n) = 1 \tag{8.7.3}$$

pretstavlja jednačinu realnog n-dimenzionalnog elipsoida. Postavljajući koordinatni početak u centar tog elipsoida, možemo uvek pretpostaviti da je H jedna kvadratna forma, tj.

$$H(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\mathbf{A}\boldsymbol{x}, \tag{8.7.4}$$

gde je $\mathbf{A}$ simetrična kvadratna matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.7.5}$$

Da bi (8.7.3) zaista pretstavljao jednačinu realnog elipsoida potrebno je da budu ispunjeni sledeći uslovi

$$a_{ii} > 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8.7.6}$$

i

$$A \geqslant 0. \tag{8.7.7}$$

Neka su $\mathbf{c}_p(c_{1p}, c_{2p}, \ldots, c_{np})$ kosinusi pravaca p-te glavne ose elipsoida (8.7.3). Ovi su kosinusi određeni uslovima

$$\sum_i c_{ip}^2 = 1, \tag{8.7.8}$$

$$\chi_p c_{ip} = a_{ii} c_{ip} + \sum_{j \neq 1} a_{ij} c_{jp}, \tag{8.7.9}$$

gde su χ_p karakteristični brojevi matrice $\mathbf{A}$. Otuda, elementi c_{ip} formiraju jednu ortogonalnu matricu $\mathbf{C}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ ortogonalnu transformaciju, posle koje će se kvadratna forma (8.7.4) svesti na

$$H = \boldsymbol{y}'\mathbf{E}\boldsymbol{y} = \sum_p \chi_p y_p^2. \tag{8.7.10}$$

Kako je Jakobijan gornje transformacije jednak jedinici to se uslov (8.7.2) svodi na

$$\int\limits_{R^n} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}'\mathbf{E}\boldsymbol{y}} d\boldsymbol{y} = \frac{1}{h}, \tag{8.7.11}$$

odnosno na

$$\prod_{p=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\chi_p y_p^2} dy_p = \frac{1}{h}. \tag{8.7.12}$$

Kako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\chi_p y_p^2}\, dy_p = \sqrt{\frac{2\pi}{\chi_p}} \;,$$

to je

$$\frac{1}{h} = \prod_{p=1}^{n} \sqrt{\frac{2\pi}{\chi_p}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\chi_1 \cdots \chi_n}}$$

tako da konstanta h mora imati vrednost

$$h = \frac{\sqrt{A}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \tag{8.7.13}$$

da bi bio ispunjen uslov (8.7.2).

Na osnovu (8.7.12) konstatujemo da su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ među sobom nezavisne i normalno raspoređene a.p. Kako $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dobijamo preko linearne transformacije $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}$, to će i oni pretstavljati normalno raspoređene a.p. (5.6).

Matrica $\mathbf{E}^{-1}$ je dispersiona matrica promenljivih $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ te je

$$E(Y_p^2) = \frac{1}{\chi_p}\,, \qquad E(Y_p Y_s) = 0\,. \tag{8.7.14}$$

Ako je $\mathbf{W}$ dispersiona matrica promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$, imaćemo sledeće veze

$$W_{ii} = \sum_p c_{ip}^2\, E(Y_p^2) = \sum_p \frac{c_{ip}^2}{\chi_p}\,, \tag{8.7.15}$$

$$W_{ij} = \sum_p c_{ip}\, c_{jp}\, E(Y_p^2) = \sum_p \frac{c_{ip}\, c_{jp}}{\chi_p}\,. \tag{8.7.16}$$

Da bi smo odredili kvadratnu formu H uvedimo smene

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}\,, \tag{8.7.17}$$

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{C}\boldsymbol{u}\,. \tag{8.7.18}$$

Iz (8.7.18) dobijamo

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{v}\,. \tag{8.7.19}$$

Izjednačavajući (8.7.17) sa (8.7.19) imaćemo

$$\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{y}$$

tako da je

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{y} = \mathbf{E}\boldsymbol{y}\,,$$

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{v}$$

ili

$$y_p = \frac{v_p}{\chi_p}\,, \qquad p = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Ako se vratimo na stare promenljive, dobićemo

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{v} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{C}\boldsymbol{u}.$$

Kako je $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{C}$ matrica sa elementima

$$\sum_p \frac{c_{ip}\,c_{jp}}{\chi_p}, \qquad p = 1, 2, \ldots, n,$$

koji su identični sa W_{ij} zbog (8.7.16), to je

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{W}\boldsymbol{u}. \tag{8.7.20}$$

Upoređujući (8.7.20) sa (8.7.17) dolazimo do zaključka da matrica $\mathbf{A}$ mora biti recipročna matrica dispersione matrice, tj.

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1} \tag{8.7.21}$$

tako da z.v. normalnog n-dimenzionalnog rasporeda dobija definitivan oblik

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{W}}\, e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{x}} \tag{8.7.22}$$

U statističkoj analizi mnogo nam je zgodnije da operišemo sa korelacionom matricom umesto dispersione. Koristeći (8.2.16) konstanta h tada postaje

$$h = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,\sigma_1 \ldots \sigma_n\sqrt{R}}$$

a kvadratna forma H

$$H = \boldsymbol{x}'\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{x} =$$

$$= \boldsymbol{x}'\left[\frac{1}{R}\,\frac{R_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}\right]\boldsymbol{x} = \frac{1}{R}\sum_i\sum_j R_{ij}\frac{x_i}{\sigma_i}\,\frac{x_j}{\sigma_j}$$

te z.v. normalnog rasporeda možemo napisati i u sledećem obliku

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\sigma_i\sqrt{R}}\, e^{-\frac{1}{2R}\sum\limits_i\sum\limits_j R_{ij}\frac{x_i}{\sigma_i}\frac{x_j}{\sigma_j}}, \tag{8.7.22}$$

gde su R_{ij} minori korelacione matrice.

Ukoliko se koordinatni početak ne poklapa sa težištem rasporeda imaćemo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\prod\limits_i\sigma_i\sqrt{R}}\, e^{-\frac{1}{2R}\sum\limits_i\sum\limits_j R_{ij}\frac{x_i - M_i}{\sigma_i}\frac{x_j - M_j}{\sigma_j}}. \tag{8.7.23}$$

U specijalnom slučaju kada su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ među sobom nezavisni, tada su svi $r_{ij} = 0$, tj. $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, pa se z.v. svodi na

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma_i^2}}. \tag{8.7.24}$$

Zato je $r_{ij} = 0$ (za sve $i \neq j$) potreban i dovoljan uslov da kod normalnog rasporeda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ budu među sobom nezavisni.

Jednodimenzionalni uslovni nornalni rasporedi su

$$(8.7.25) \qquad f(x_1 | x_2, \ldots, x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2R}\sum_i \sum_j R_{ij} \frac{x_i}{\sigma_i}\frac{x_j}{\sigma_j}}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2R}\sum_i \sum_j R_{ij} \frac{x_i}{\sigma_i}\frac{x_j}{\sigma_j}} dx_1},$$

. . . .

Dvodimenzionalni uslovni normalni rasporedi su

$$(8.7.26) \qquad f(x_1, x_2 | x_3, \ldots, x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2R}\sum_i \sum_j R_{ij} \frac{x_i}{\sigma_i}\frac{x_j}{\sigma_j}}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2R}\sum_i \sum_j R_{ij} \frac{x_i}{\sigma_i}\frac{x_j}{\sigma_j}} dx_1 dx_2},$$

. . . .

itd.

Nađimo k.f. normalnog n-dimenzionalnog rasporeda. Uzimajući oblik (8.7.22), tražena k.f. biće po definiciji

$$\varphi(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{W}} \int\limits_{R^n} e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}Q^{-1}(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x},$$

gde je

$$Q^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

Neposrednim korišćenjem rezultata (7.8.2) dobijamo

$$(8.7.27) \qquad \varphi(\boldsymbol{t}) = e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\mathbf{W}\boldsymbol{t}}$$

ili u razvijenom obliku

$$(8.7.27') \qquad \varphi(t_1, \ldots, t_n) = e^{-\frac{1}{2}\sum_r \sum_s W_{rs} t_r t_s}.$$

Uslov (8.7.7) povlači za sobom egzistenciju recipročne matrice $\mathbf{W}^{-1}$. Drugim rečima, taj se uslov svodi na to da dispersiona matrica mora da bude nesingularna sa rangom $\rho = n$.

Videli smo tada da će ortogonalnom substitucijom $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$, nove promenljive $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ biti normalne i među sobom nezavisne.

Ako je $\rho < n$, a.p. sa ρ dimenzija ($Y_1, Y_2, \ldots, Y_\rho$) imaće jedan normalan ρ-dimenzionalan raspored.

I uopšte, makoji broj linearnih funkcija normalno raspoređenih promenljivih biće takođe normalno raspoređen. Zaista, smenama $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$, gde $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{mn}$ ne mora biti ortogonalno, i $\mathbf{t} = \mathbf{C}'\mathbf{u}$, k.f. postaje

$$\varphi(\boldsymbol{t}) = e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{t}} = e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{c}\boldsymbol{W}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{u}} = e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}}.$$

Dobili smo k.f. normalnog m-dimenzionalnog rasporeda sa dispersionom matricom $\mathbf{S}$.

8.8. Regresiona ravan. — Ukoliko postoji funkcionalna jednoznačna zavisnost između neprekidnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ svakoj grupi vrednosti $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ odgovara jedna i samo jedna vrednost promenljive X_1. Kod stohastičke zavisnosti grupi vrednosti $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ odgovaraće a.p. X_1 sa svojim uslovnim rasporedom, tj. $f(x_1 \mid x_2, \ldots, x_n)$. Da bismo na neki način stvorili jednoznačnu vezu između X_1 i $X_2, X_3, \ldots, X_n$, uzećemo da grupi vrednosti $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ odgovara uslovna očekivana vrednost promenljive X_1

$$\mathrm{E}(X_1 \mid X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(\boldsymbol{x})\, dx_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x})\, dx_1}, \tag{8.8.1}$$

koju ćemo skraćeno označiti sa $M_1(x_2, \ldots, x_n)$. Jednačina

$$x_1 = M_1(x_2, \ldots, x_n)$$

pretstavlja jednačinu *regresione površine* po X_1. Analogno dobijamo

$$x_2 = M_2(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = M_n(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

tako daće kod jednog n-dimenzionalnog rasporeda biti ukupno n regresionih površina.

Kako te površine mogu biti komplikovanog oblika, što iziskuje vrlo obilna računanja u statističkim analizama, došlo se na ideju da se regresione površine definišu na sledeći način: Pod pretpostavkom da smo koordinatni sistem doveli u težište sistema, od svih mogućih sistema ravni

$$\mathbf{B}\boldsymbol{x} = 0, \tag{8.8.2}$$

gde je

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & \cdot & \cdot & \beta_{1n} \\ -\beta_{21} & 1 & \cdot & \cdot & -\beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\beta_{n1} & -\beta_{n2} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \tag{8.8.3}$$

treba odrediti onaj za koji će izrazi

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{b}_i \boldsymbol{x})^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gde su $\mathbf{b}_i$ vektori redovi matrice $\mathbf{B}$, dostići svoje minimalne vrednosti.

Problem se svodi na određivanje matrice $\mathbf{B}$ čiji su elementi koeficijenti pravaca i koji se još nazivaju i *regresioni koeficijenti*.

Dalje, za svaki indeks i problem ekstremuma svodi se na rešavanje linearnog sistema od $(n-1)$ jednačina

$$W_{11}\beta_{i1}+\cdots+W_{1,i-1}\beta_{i,i-1}+W_{1,i+1}\beta_{i,i+1}+\cdots+W_{1n}\beta_{in}=W_{1i},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$W_{i-1,1}\beta_{i1}+\cdots+W_{i-1,i-1}\beta_{i,i-1}+W_{i-1,i+1}\beta_{i,i+1}+\cdots+W_{i-1,n}\beta_{in}=W_{i-1,i},$$
$$W_{i+1,1}\beta_{i1}+\cdots+W_{i+1,i-1}\beta_{i,i-1}+W_{i+1,i+1}\beta_{i,i+1}+\cdots+W_{i+1,n}\beta_{in}=W_{i+1,i},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$W_{n,1}\beta_{i1}+\cdots+W_{n,i-1}\beta_{i,i-1}+W_{n,i+1}\beta_{i,i+1}+\cdots+W_{nn}\beta_{in}=W_{ni},$$

$i=1,2,\dots,n.$

Rešenje i-tog sistema je

(8.8.4)
$$\beta_{ij}=-\frac{\sigma_i}{\sigma_j}\frac{R_{ij}}{R_{ii}},$$

gde su R_{ij} minori korelacione matrice. Naravno, svi minori R_{ii} moraju biti različiti od nule. To će biti slučaj ako je R različito od nule, tj. ako je raspored nesingularan.

Ukoliko su $X_1, X_2, \dots, X_n$ među sobom nezavisni, svi su $R_{ij}=0$, za $i\neq j$, a regresione ravni poklapaju se sa koordinatnim ravnima.

Otstupanje masa rasporeda od i-te regresione ravni u pravcu i-te ose je

(8.8.5)
$$d_i=x_i+\frac{\sigma_i}{R_{ii}}\sum_j R_{ij}\frac{x_j}{\sigma_j}, \qquad i\neq j,$$

i naziva se ***reziduumom*** i-te promenljive u odnosu na ostale. Kako je

$$E\left(X_iX_k+\frac{\sigma_i}{R_{ii}}\sum_{j\neq i}R_{ij}\frac{X_j}{\sigma_j}X_k\right)=\frac{\sigma_i\sigma_k}{R_{ii}}\sum_j R_{ij}r_{jk}=0,$$

ako je $k\neq i$, to je i-ta ***reziduumska varijansa***

(8.8.6)
$$S_i^2=E(d^2_{i\cdot 12\dots i-1\ i+1\dots n})=E\left[X_i^2+\frac{\sigma_i}{R_{ii}}\sum_{j\neq i}R_{ij}\frac{X_iX_j}{\sigma_j}\right]=$$
$$=\frac{\sigma_i^2}{R_{ii}}\sum_j R_{ij}r_{ji}=\sigma_i^2\frac{R}{R_{ii}}.$$

U dvodimenzionalnom slučaju ona se svodi na raniji obrazac

$$S_i^2=\sigma_i^2(1-r_{12}^2).$$

8.9. Delimična korelacija. — Ako posmatramo stohastičku zavisnost između X_1 i X_2 bez obzira na $X_3, \ldots, X_n$ dolazimo do koeficijenta korelacije r_{12} definisanog u (6.8.). Često je, međutim, od interesa da posmatramo zavisnost između X_1 i X_2 za fiksne vrednosti ostalih promenljivih: $X_3 = x_3, \ldots, X_n = x_n$. Tako dolazimo do pojma *delimičnog koeficijenta korelacije*

(8.9.1) $$r_{12\cdot 3\ldots n} = \frac{\sigma_{12\cdot 3\ldots n}}{\sigma_{1\cdot 3\ldots n}\,\sigma_{2\cdot 3\ldots n}},$$

gde je

(8.9.2) $$\sigma_{12\cdot 3\ldots n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} E\left\{[X_1 - M_1(x_3,\ldots,x_n)][X_2 - M_2(x_3,\ldots,x_n)] \,\middle|\, X_3 = x_3,\ldots,X_n = x_n\right\} \cdot f(x_3,\ldots,x_n)\,dx_3\ldots dx_n,$$

(8.9.3) $$\sigma^2_{i\cdot 3\ldots n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} E\left\{[X_i - M_i(x_3,\ldots,x_n)]^2 \,\middle|\, X_3 = x_3,\ldots,X_n = x_n\right\} f(x_3,\ldots,x_n)\,dx_3\ldots dx_n,$$
$$i = 1, 2.$$

Ako je raspored normalan, (8.9.1) svodi se na

(8.9.4) $$r_{12\cdot 3\ldots n} = -\frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}}.$$

Kod normalnog trodimenzionalnog rasporeda je

(8.9.5) $$r_{12\cdot 3} = \frac{r_{12} - r_{23}\,r_{31}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}.$$

Često se po definiciji uzima za delimični koeficijent korelacije obrazac (8.9.4) bez obzira kakav je raspored. Permutujući indekse dobijamo neposredno delimične koeficijente korelacije $r_{23\cdot 1}$ i $r_{31\cdot 2}$.

8.10. Višestruka korelacija. — Videli smo u (8.8) da će a.p.

$$X_1^* = \sum_{j=2}^{n} \beta_{1j} X_j$$

biti najbolja linearna ocena aleatorne promenljive X_1 ako je

$$\beta_{1j} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_j}\,\frac{R_{1j}}{R_{11}}, \qquad j = 2, \ldots, n.$$

Koeficijenat korelacije između X_1 i X_1^*, tj. između jedne promenljive i grupe svih ostalih promenljivih,

(8.10.1) $$r_{1(23\ldots n)} = \frac{E(X_1X_1^*)}{\sqrt{E(X_1^2)\,E(X_1^{*2})}},$$

naziva se *višestruki koeficijent korelacije.*

Koristeći rezultate (8.8) ovaj se koeficijent može napisati u obliku

(8.10.2) $$r_{1(23\ldots n)} = \sqrt{1 - \frac{R}{R_{11}}}.$$

Permutacijom indeksa dobijamo i svih ostalih $(n-1)$ višestrukih koeficijenata korelacije.

8.11. Kolektivni koeficijent korelacije. — Neka su data dva rasporeda frekvencija

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t),$$

$$f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t),$$

kod kojih su zadovoljeni uslovi

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(t) = 1,$$

$$\varphi_\nu(t) \geqslant 0, \quad f_\nu(t) \geqslant 0,$$

za sve vrednosti vremenskog parametra t jednog datog intervala (a, b).

Konstruišući između gornjih sistema rasporeda sledeće linearne veze

$$f_\mu^*(t) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} k_{\nu\mu} \varphi_\nu(t), \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

gde matrica

$$\text{(8.11.1)} \qquad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

sa vezama

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_{\nu\mu} = 1, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

pretstavlja *zakon evolucije*, moći ćemo da poravnamo raspored frekvencija $f_\mu(t)$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, pomoću rasporeda $\varphi_\mu(t)$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, ako konstantne koeficijente $k_{\nu\mu}$ izaberemo tako da srednje otstojanje između f_μ i φ_μ, odnosno norma njihove razlike, dostigne svoj minimum. Ta je norma data izrazom

$$\mathrm{N}(f_\mu - f_\mu^*) = \mathrm{D}_\mu^2 = \int_a^b \Big\{ f_\mu(t) - \sum_{\nu=1}^{n} k_{\nu\mu} \varphi_\nu(t) \Big\}^2 dt, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

Ako parcijalne izvode po $k_{\nu\mu}$ izjednačimo sa nulom, dobićemo sistem jednačina

$$\text{(8.11.2)} \quad \int_a^b \varphi_\nu(t) f_\mu(t)\, dt = \sum_{r=1}^{n} k_{\mu r} \int_a^b \varphi_\nu(t) \varphi_r(t)\, dt, \; \nu, \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

Kako integral, odnosno skalar

$$\int_a^b \varphi_\nu(t) f_\mu(t)\, dt$$

pretstavlja unutrašnji proizvod funkcija φ_ν i f_μ, tj. (φ_ν, f_μ), to sistem (8.11.2) možemo napisati u obliku

$$\sum_{r=1}^{n} (\varphi_\nu, \varphi_r) k_{\mu r} = (\varphi_\nu, f_\mu), \qquad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

koji se raspada na n sistema od po n jednačina

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1,\varphi_1)(\varphi_1,\varphi_2)\ldots(\varphi_1,\varphi_n) \\ (\varphi_2,\varphi_1)(\varphi_2,\varphi_2)\ldots(\varphi_2,\varphi_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\varphi_n,\varphi_1)(\varphi_n,\varphi_2)\ldots(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\mu_1 \\ k\mu_2 \\ \ldots \\ k\mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_\mu, \varphi_1) \\ (f_\mu, \varphi_2) \\ \ldots\ldots \\ (f_\mu, \varphi_n) \end{bmatrix}, \tag{8.11.3}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, n,$$

sa istom determinantom sistema

$$S = \begin{vmatrix} (\varphi_1,\varphi_1)(\varphi_1,\varphi_2)\ldots(\varphi_1,\varphi_n) \\ (\varphi_2,\varphi_1)(\varphi_2,\varphi_2)\ldots(\varphi_2,\varphi_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\varphi_n,\varphi_1)(\varphi_n,\varphi_2)\ldots(\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix},$$

koji možemo transformisati na sledeći način

$$S = \begin{vmatrix} \int_a^b [\varphi_1(t)]^2 dt & \int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt & \ldots & \int_a^b \varphi_1(t)\varphi_n(t)\,dt \\ \int_a^b \varphi_2(t)\varphi_1(t)\,dt & \int_a^b [\varphi_2(t)]^2 dt & \ldots & \int_a^b \varphi_2(t)\varphi_n(t)\,dt \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_1(t)\,dt & \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_2(t)\,dt & \ldots & \int_a^b [\varphi_n(t)]^2 dt \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_1(t_2) & \ldots & \varphi_1(t_n) \\ \varphi_2(t_1) & \varphi_2(t_2) & \ldots & \varphi_2(t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(t_1) & \varphi_n(t_2) & \ldots & \varphi_n(t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \ldots dt_n =$$

$$= \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b (\Delta^\varphi)^2 \, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n$$

Da bi sistem (8.11.3) mogli rešiti, potrebno je da determinanta S bude različita od nule, odnosno da

$$\Delta^{\varphi} \neq 0,$$

a to će biti slučaj ako ne postoji linearna zavisnost između nizova $\varphi_i(t_k)$ i $\varphi_j(t_k)$, $i \neq j$.

Posmatrajmo sada slučaj u kome su frekvencije $\varphi_\mu^*(t)$ pretstavljene pomoću frekvencija $f_\nu(t)$ preko jedne linearne transformacije, tj.

$$\varphi_\mu^*(t) = \sum_{\nu=1}^{n} k^{\mu\nu} f_\nu(t),$$

gde su $k^{\mu\nu}$ elementi recipročne matrice od matrice (8.11.1).

Vršeći poravnanje rasporeda frekvencija $\varphi_\mu(t)$ pomoću rasporeda $f_\mu(t)$, dobićemo ponovo n sistema od po n linearnih jednačina

$$\begin{bmatrix} (f_1,f_1) & (f_1,f_2) & \ldots & (f_1,f_n) \\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2) & \ldots & (f_2,f_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (f_n,f_1) & (f_n,f_2) & \ldots & (f_n,f_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^{1\mu} \\ k^{2\mu} \\ \ldots \\ k^{n\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_1,\varphi_\mu) \\ (f_2,\varphi_\mu) \\ \ldots \\ (f_n,\varphi_\mu) \end{bmatrix},$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, n,$$

sa zajedničkom determinantom sistema

$$P = \begin{vmatrix} (f_1,f_1) & (f_1,f_2) & \ldots & (f_1,f_n) \\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2) & \ldots & (f_2,f_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (f_n,f_1) & (f_n,f_2) & \ldots & (f_n,f_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b (\Delta^f)^2\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n,$$

gde smo stavili

$$\Delta^f = \begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_1(t_2) & \ldots & f_1(t_n) \\ f_2(t_1) & f_2(t_2) & \ldots & f_2(t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(t_1) & f_n(t_2) & \ldots & f_n(t_n) \end{vmatrix}$$

Konstruišući i determinantu

$$Q = \begin{vmatrix} (\varphi_1,f_1) & (\varphi_1,f_2) & \ldots & (\varphi_1,f_n) \\ (\varphi_2,f_1) & (\varphi_2,f_2) & \ldots & (\varphi_2,f_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varphi_n,f_1) & (\varphi_n,f_2) & \ldots & (\varphi_n,f_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \Delta^{\varphi}\Delta^{f}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n,$$

možemo formirati mere zavisnosti dva rasporeda $\varphi_\nu(t)$ i $f_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, za vremenski period (a, b), stavljajući

$$R = \frac{Q}{\sqrt{PS}} = \frac{|(\varphi_\nu, f_\mu)|}{\sqrt{|(\varphi_\nu, \varphi_\mu)|\,|(f_\nu, f_\mu)|}} =$$

$$= \frac{\int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b \Delta\varphi\,\Delta f\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n}{\left[\int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b (\Delta\varphi)^2\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n\right]^{1/2}\left[\int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b (\Delta f)^2\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n\right]^{1/2}}.$$

Determinante Δ^φ i Δ^f pretstavljaju funkcije po $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Stavljajući

$$\Delta^\varphi = \Phi(t_2, t_2, \ldots, t_n)$$

$$\Delta^f = F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

i koristeći Schwarz-ovu nejednačinu

$$\left[\int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,F(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n\right]^2 -$$

$$-\int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b \Phi^2(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n \int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b F^2(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n \leqslant 0,$$

neposredno dobijamo

$$R^2 \leqslant 1.$$

Jednakost $R^2 = 1$ postaje ako je

$$\frac{Q}{P} = \frac{S}{Q} = \frac{1}{\omega},$$

odnosno, ako je

$$\omega Q - P = 0,$$

$$\omega S - Q = 0.$$

Smenjujući P, Q i S njihovim izrazima, dobijamo

$$\omega Q - P = \frac{1}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \Delta^f(\omega\Delta^f - \Delta^\varphi)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n = 0,$$

$$\omega S - Q = \frac{1}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \Delta^\varphi(\omega\Delta^\varphi - \Delta^f)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n = 0.$$

Množeći drugu jednačinu sa ω i oduzimajući je od prve, postaje

$$\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b(\Delta^f - \omega\Delta^\varphi)^2\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n = 0.$$

Kako izraz na levoj strani ne može biti negativan, to će jednačina biti zadovoljena ako je

$$\Delta^f = \omega\Delta^\varphi$$

za sve vrednosti t_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, u intervalu (a, b). To će, međutim, biti slučaj ako je

$$f_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} k_{\mu\nu}\,\varphi_\mu(t), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Najzad, ako su determinante Δ^φ i Δ^f ortogonalne među sobom, biće $R = 0$. Taj slučaj nastupa kada su posmatrani rasporedi frekvencija nezavisni među sobom.

Koeficijentu R dali smo naziv *kolektivnog koeficijenta korelacije,* jer izražava simultanu zavisnost između dva rasporeda frekvencija za posmatrani vremenski interval (a, b). Očevidno da on omogućuje da steknemo jednu globalnu pretstavu o uzajamnoj zavisnosti odgovarajućih frekvencija oba rasporeda.

8.12. Zadaci za vežbu

8.12.1. Odrediti momente prvog i drugog reda n-dimenzionalnog rasporeda poznavajući njegovu karakterističnu funkciju.

8.12.2. Pokazati da je varijansa linearne kombinacije multinomijalnih a.p.

$$D^2(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) = k\Big[\sum_r a_r^2 p_r - \big(\sum_r a_r p_r\big)^2\Big]$$

a kovarijansa

$$\mu_{11}\Big(\sum_r a_r i_r, \sum_r b_r i_r\Big) = k\Big[\sum_r a_r b_r p_r - \big(\sum_r a_r p_r\big)\big(\sum_r b_r p_r\big)\Big].$$

8.12.3. Pokazati da se uslovan normalni raspored može napisati u obliku

$$f(x_1|x_2,\ldots,x_n) = K e^{-\frac{1}{2R}\left(R_{11}\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + 2\sum_{i=2}^{n} R_{1i}\frac{x_1}{\sigma_1}\frac{x_i}{\sigma_i}\right)},$$

gde K ne zavisi od x_1.

8.12.4. Pokazati da je zbir od makoliko n-dimenzionalnih normalno raspoređenih a.p. takođe jedna n-dimenzionalna normalno raspoređena a.p.

8.12.5. Proširiti Centralnu graničnu teoremu na n-dimenzionalne rasporede.

8.12.6. Odrediti ortogonalnu regresionu ravan.

8.12.7. Neka je $\mathbf{x}$ normalno raspoređeno sa težištem rasporeda $\mathbf{M}$ i dispersionom matricom $\mathbf{W}$. Pokazati da a.p.

$$Y = (x - M)' W^{-1} (x - M)$$

ima χ^2-raspored sa n s.s. ukoliko $\mathbf{x}$ ima nesingularan raspored.

8.12.8. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dve simetrične matrice reda (n, n) i neka je $\mathbf{x}$ normalno raspoređeno u R^n sa jediničnim varijansama i težištem u koordinatnom početku. Pokazati da je

$$AB = 0, \qquad A^2 = A, \qquad B^2 = B$$

potreban i dovoljan uslov da kvadratne forme $\mathbf{x'Ax}$ i $\mathbf{x'Bx}$ budu nezavisno raspoređene po χ^2-rasporedu (*Cochran-ova teorema*).

8.12.9. Neka je $\mathbf{x}$ normalno raspoređeno u R^n sa težištem u koordinatnom početku. Ako sa σ_{ij} označimo kovarijansu promenljivih X_i i X_j, pokazati da je

$$E(X_i X_j X_k X_l) = \sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{il}\sigma_{jk} + \sigma_{ik}\sigma_{jl}.$$

8.12.10. Neka je $\mathbf{x}$ normalno raspoređeno u R^n i neka je

$$(a) \quad W_{ij} = 0, \qquad W_{ii} = const.$$

Pokazati da će nova promenljiva $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$, gde je $\mathbf{C}$ jedna ortogonalna matrica, takođe biti normalno raspoređeno sa istom dispersionom matricom (a)

LITERATURA

1. Bachelier. — *Calcul des probabilités.* — Paris, Gauthier-Villars, 1912.
2. Bernštejn, S. N. — *Теория вероятностей.* — Москва. ОГИЗ — Гостехиздат, 1946.
3. Bertrand, J. — *Calcul des probabilités.* — Paris, Gauthier-Villars.
4. Blanc Lapierre, A. et Fortet, R. — Théorie des fonctions aléatoires. — Paris, Masson, 1953.
5. Borel, É. — *Éléments de la théorie des propabilités.* — Paris, Hermann, 1924.
6. Borel, É. — *La portée philosophique de la théorie des probabilités.* — Paris, Gauthier-Villars.
7. Borel, É. — *Principes et formules classiques du calcul des probabilités.* — Paris, Gauthier-Villars.
8. Borel, É. et Deltheil, R. — *Probabilités, erreurs.* — Paris, A. Colin, 1926.
9. Cantelli, P. — *Sur la définition des variables éventuelles.* — Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 2-ème: Les fondements du calcul des probabilités. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 5.
10. Cantelli, F. P. — *La tendenza ad un limite nel senso del calcolo delle probabilità.* R. C. Circ. Mat. Palermo, t. XVI, 1916, p. 191—201.
11. Comric, L. J. — *Barlow's Tables* of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots and Recipsocals of All Integers Up to 12,500. 4-th edition. — New York, Chemical Publishing Co., Inc., 1952.
12. Cramér, H. — *The elements of probability and some of its applications.* — New York, John Wiley and Sons, Inc., 1955.
13. Cramér, H. *Mathematical Methods of Statistics.* — Princeton, University Press, 1946.
14. Cramér, H. — *Problems in Probability Theory.* Ann. of Math. Stat. Vol. XVIII, 1947, p. 165—193.
15. Cramér, H. — *Random Variables and Probability Distributions.* Cambsidge Tracts in Mathematics, № 36. — Cambridge, 1937.
16. Cramér, H. *Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités.* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 3-ème: Les sommes et les fonctions de variables aléatoires. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 5—23.
17. Darmois, Georges. — *L'analyse des corrélations.* — Paris, Université de Paris. 1949. Conférence faite au Palais de la Découverte le 17 ianvier 1948.
18. Darmois, Georges. — *Analyse générale des liaisons stochastiques.* Étude particulière de l'analyse factorielle linéaire. Conf. Calcutta, 1952.
19. Darmois, Georges. — *Analyse des liaisons de probabilité.* Intern. Stat. Inst. Vol. III, 1947, p. 231—240.
20. Darmois, Georges. — *Calcul des probabilités.* Sur une propriété caractéristique de la loi de probabilité de Laplace. Note de M. Georges Darmois, présentée par M. Émil Borel. Comptes rendus des sciences de l'Académie des sciences, t. 232, p. 1999—2000, séance du 28 mai 1951.
21. Darmois, Georges. — *Cours de calcul des probabilités et de statistique,* en trois fascicules. — Paris, Librairie des Escholiers, 1946.
22. Darmois, Georges. — *La statistiques et ses applications.* — Paris, A. Colin.
23. Darmois, Georges. — *La statistique mathématique.* — Paris, O. Doin, 1928.

24. Darmois, Georges. — *Sur certaines formes de liaisons de probabilité.* Colloque Lyon, 1948.
25. Darmois, Georges. — *Sur l'indétermination du facteur général dans la théorie de Spearman.* Mathematica — Vol. XII, 1936.
26. Darmois, Georges. — *Sur une propriété caractéristique de la loi de Laplace-Gauss.* C. R. Ac. Sc. 28 mai 1951.
27. Darmois, Georges. — *Sur quelques propriétés de la loi de Laplace-Gauss.* Conf. New Delhi, 1952.
28. Darmois, Georges. — *Sur les régressions linéaires et probaboliques.* Conférence au Congrès de la Victoire — oct. 1945. Intermédiaire des Recherches Math. — janvier 1947.
29. Darmois, Georges. — *Sur la théorie des deux facteurs.* C. R. Ac. Sc. Paris, 1934, p. 1176 et 1358.
30. David, F. N. — *Probability theory for statistical methods.* — Cambridge, 1951.
31. Deltheil, R. — *Erreurs et moindres carrés.* — Paris, Gauthier-Villars.
32. Dugué, D. — *Analycité et connexité des fonctions caractéristiques.* Annales Inst. Poincaré, t. XIII, 1951.
33. Dugué, D. — *Sur certaines composantes des lois de Cauchy.* C. R. Ac. Sc. 24 novembre 1941.
34. Dugué, D. — *Sur certains exemples de décomposition en arithmétique des lois de probabilité.* Annales Inst. Poincaré. t. XII, 1951.
35. Dugué, D. — *Sur certaines propriétés des lois indéfiniment divisibles.* C. R. Ac. Sc. 9 janvier 1950.
36. Dugué, D. — *Sur la convergence presque complète des moyennes de variables aléatoires.* (Théorèmes de HSU, Robbins et Erdos). Publ. de l'Inst. de Statistique de l'Univer. de Paris. Vol. III, fascic. 3, 1954, p. 149—152.
37. Dugué, D. — *Sur quelques propriétés analytiques des fonctions caractéristiques.* C. R. Ac. Sc. 5 juin 1939.
38. Dugué, D. — *Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilité.* (En collaboration avec R.A. Fisher). C.R. Ac. Sc. 8 décembre 1948.
39. Dwight, H. B. — *Tables of Integrals and Other Mathematical Data.* Rev. ed. — New York, the Macmillan Company, 1947.
40. Eichler, Martin. — *Quadratische Formen und Orthogonale Gruppen.* — Berlin, Springer-Verlag, 1952.
41. Elderton, W. P. — *Frequency Curves and Correlation.* 3rd ed. — Cambridge, 1938.
42. Feller, W. — *The fundamental limit-theorems in probability.* Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 51, 1945, p. 800—832.
43. Feller, W. — *An introduction to probability theory and its applications.* Vol. I. — New York, John Wiley and Sons, Inc., 1951.
44. Feller, W. — *On the normal approximation to the binomial distribution.* Annals of Math. Stat. Vol. XVI, 1945, p. 319.
45. — Feller, W. — *Sur les axiomatiques du calcul des probabilités et leurs relations avec les expériences.* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 2-ème: Les fondements du calcul des probabilités. — Paris, Hermann et Cie. 1938, p. 7—21.
46. Finetti, Bruno de. — *La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives.* Ann. de l'Inst. H. Poincaré. T. VII, 1937, p. 1.
47. Finetti, Bruno de. — *Sur la condition d'„équivalence partielle".* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 6-ème: Conceptions diverses. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 5—18.
48. Fisher, R. A. — *On the interpretation of x^2 from contingency tables, and the calculation of P.* JRS, 85 (1922), p. 87.
49. Fisher, R. and Yates, F. — Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research. 3rd edition, revised and enlarged. — London, Oliver and Boyd, 1948.
50. Fortet, R. — *Calcul des probabilités.* — Paris, Centre national de la recherche scientifique, 1950.
51. Fortet, R. — *Éléments de calcul des probabilités,* polycopie. — Psris, Centre de Documentation universitaire.
52. Fortet, R. — *Opinions modernes sur les fondements du calcul des probabilités* dans „Les grands courants de la pensée mathématique", p. 207. — Paris, Cahiers du Sud édit., 1948.

53. Fortet, R. — *Sur la notion de fonction aléatoire.* Rev Scient., t. 79, 1941, p. 135—139.
54. Fréchet, M. — *Les espaces abstraits.* — Paris, Gauthier-Villars.
55. Fréchet, M. — *Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités.* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 2-ème: Les fondements du calcul des probabilités. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 23—55.
56. Fréchet, M. — *Généralités sur les probabilités, variables aléatoires.* — Paris, Gauthier-Villars.
57. Fréchet, M. — *Les principaux courants dans l'évolution récente des recherches sur le calcul des probabilités.* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 1-ère: Conférences d'introduction. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 19—23.
58. Fréchet, M. — *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités.* Forms Vol. I, Part III of Ref. 7, Paris, 1937—1938.
59. Girault, Maurice. — *Les fonctions caractéristiques et leurs transformations.* Publ. de l'Inst. de Statistique de l'Univer. de Paris. Vol. IV, fascic. 4, 1955, Paris.
60. Glivenko, V. I. — *Интеграл Стилтьеса.* — Москва, ГОНТИ, 1936.
61. Glivenko, V. I. — *Курс теории вероятностей.* — Москва, ГОНТИ, 1936.
62. Glivenko, V. I. — *Sur la loi des grands nombres dans l'espace fonctionel.* Colloque consacré à la theorie des probabilités. Partie 6-ème: Conceptions diverses. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 19—23.
63. Goursat, E. — *Traité d'analyse,* en trois tomes. — Paris, Gauthier-Villars.
64. Hinčin, A. J. — *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* — Berlin, 1933.
65. Hinčin, A. J. — *Основные законы теории вероятностей.* — 2-е изд. — Москва, 1932.
66. Hinčin, A. J. — *Предельные законы для сумм независимых случайных величин.* — Москва, ОНТИ, 1933.
67. Hinčin, A. J. — *Sur la loi des grands nombres.* Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, t. 188, 1929.
68. Hinčin, A. J. — *Sur la loi forte des grands nombres.* Comptes rendus de l' Acad. des Sciences, t. 186, 1928.
69. Ivanović, B. i Karamata, J. — *Dokaz jednog stava o kolektivnom koeficijentu korelacije.* Statistička revija. God. V, br. 4, str. 309—313, 1955, Beograd.
70. Ivanović, B. — *Kolektivan koeficijent korelacije.* Statistička revija. God. V, br. 1, str. 7—16, 1955, Beograd.
71. Ivanović, B. — *Određivanje tendencije rasporeda nula datog polinoma.* Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS, br. 1—2, 1953, Beograd.
72. Ivanović, B. — *Preciznost standardne devijacije kod makakvog rasporeda.* Zbornik Matemat. Inst. SAN, knj. 2. — Beograd, 1952.
73. Ivanović, B. — *Sur la discrimination des ensembles statistiques.* Publ. de l'Inst. Statistique de l'Université de Paris. Vol. III, fscic. 4, 1954.
74. Jeffreys, H. — *Theory of Probability.* — Oxford, University Press, 1939.
75. Jordan, Ch. — *Critique de la corrélation au point de vue des probabilités.* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 7-ème: La statistique mathématique. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 15—33.
76. Kampe de Feriet. — *Sur une représentation des fonctions aléatoires.* C. R., 225, 1947, p. 37—38.
77. Karamata, J. — *Teorija i praksa Stieltjes-ova integrala.* — Beograd, Naučna knjiga, 1949. Posebna izdanja SAN. Knj. CLIV. Matematički institut. Knj. I.
78. Kašanin, R. — *Le coefficient d'approximation moyenne et le coefficient de corrélation.* Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serb., t. I, Belgrade, 1947.
79. Kelley, Turman Lee. — *The Kelley Statistical Tables.* Revised 1948. — Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1948.
80. Kendall, M. C. — *Advanced Theory of Statistics.* Vol. I. 2nd ed. rev. — London, Charles Griffin and Company Limited, 1945.
81. Kendall, M. G. — *Advanced Theory of Statistics.* Vol. II. 3rd ed. — New York, Hafner Publishing Company, 1951.
82. Kendall, M. G. — *Exercises in Theoretical Statistics.* — London, Charles Griffin and Company Limited, 1954.
83. Kendall, M. G. — *Rank Correlation Methode.* — London, Charles Griffin and Company Limited, 1948.

84. Keynes, J. M. — *A Treatise on Probability.* — London, Macmillan and Co., Limited, 1952.
85. Khintchine, A. — *On unimodal distributions.* Inst. Math.-Meh. Toms. — 1938.
86. Knopf, Dr. Otto. — *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Teil I. — Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter und Co., 1923. Sammlung Goschen, № 508.
87. Kolmogorov, A. N. — *Foundations of the Theory of Probability.* Translation edited by Nathan Morrison. — New York, Chelsea Publishing Company, 1950.
88. Kolmogorov, A. N. — *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Ergebnisse der Math. — Berlin, Springer-Verlag.
89. Kolmogorov, A. N. — *Ueber die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Izv. Akad. Nauk SSSR, 1933.
90. Kunetz, G. — *Sur quelques propriétés des fonctions caractéristiques.* Thèse — Paris, 1937.
91. Lebesgue, H. — *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* 2-ème éd. — Paris, 1928.
92. Lebesgue, H. — *La mesure des grandeurs.* Monographies de l'Enseignement mathématique, № 1, Genève, 1956.
93. Leconte, Th. et Deltheil, R. — *Préparation à l'étude des probabilités.* — Paris, Librairie Vuibert, 1937.
94. Lévy, P. — *L'arithmètique des lois de probabilité et les produits finis de lois de Poisson.* — Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 3-ème: Les sommes et les fonctions de variables aléatoires. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 25—59.
95. Lévy, P. — *Calcul des probabilités.* — Paris, Gauthier-Villars, 1925.
96. Lévy, P. — *Sur la détermination des lois de probabilité par leurs fonctions caractéristiques.* C. R. Ac. Sc. 1922, p. 854.
97. Lévy, P. — *Sur la division d'un segment par des points choisis au hasard.* C. R., 208, 1939, p. 147.
98. Lévy, P. — *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* — Paris, Gauthier-Villars, 1937.
99. Lichnerowicz, A. — *Algèbre et analyse linéaires.* — Paris, Masson, 1947.
100. Linder, A. — *Statistische Methoden* für Naturwissenschafter, Mediziner und Ingenieure. — Basel, Brikhäuser. 1951.
101. Ljapunov, A. M. — *Nouvelle forme du théorème sur la limite des probabilités.* Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, t. XII, 1901.
102. Loeffel, H. — *Intégration d'un ensemble de fonctions caractéristiques par rapport à un paramètre.* C. R. Ac. Sc. 16 mai 1955.
103. Loevè, M. — *Étude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées.* (Thèse de doctorat). — Paris, 1946.
104. Loevè, M. — *Probability Theory.* — New York, Van Nostrand, 1955.
105. Malecot, G. — *Théorie mathématique de l'hérédité mendélienne généralisée.* (Thèse de doctorat). — Paris, 1938.
106. Malecot, G. — *Les mathématiques de l'hérédité.* Préface de L. Blaringhem. — Paris, Masson et Cie, 1948.
107. Markov, A. A. — *Исчисление вероятностей.* 4-е посмерт. изд. — Москва, 1924.
108. Markov, A. A. — *Разпространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга.* Изв. физ. — Мат. Каз. унив., 2-я сер. VJ № 4.
109. Misès, R. de. — *Généralisation des théorèmes de limite classiques.* — Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 3-ème: Les sommes et les fonctions de variables aléatoires. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 61—68.
110. Misès, R. de. — *Les lois de probabilités pour les fonctions statistiques.* Annales de l'Inst., H. Poincaré, t. VI, 1936, p. 185.
111. Misès, R. de. — *Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités.* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 2-ème: Les fondements du calcul des probabilités. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 57—66.
112. Misès, R. de. — *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.* — Berlin, Springer, 1936.
113. Montessus de Balore, R. de. — *Probabilités et statistiques.* Préface de M. Alliaume. — Paris, Librairie scientifique Hermann et Cie, 1931.
114. Murnaghan, F. *Introduction to Applied Mathematics.* — New York, John Wiley and Sons Inc., 1948.

115. Neyman, J. — *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics.* — Washington, 1938.
116. Neyman, J. — *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability.* 2nd ed. rev. and enlarged. — Washington, Graduate School U. S. Department of Agriculture, 1952.
117. Pearson, E. S. and Hartley, H. O. — *Biometrika Tables for Statisticians.* Vol. I. — London, the Syndics of the Cambridge University Prass, 1954.
118. Pearson, K. — *On the probability that two independent distributions of frequency are really samples from the same population.* B, 8 (1911), p. 250.
119. Pearson, Karl. — *Tables for Statisticians and Biometricians.* Part I and II. — London, Biometric Laboratory University College.
Part I: 3rd edition. — 1930.
Part II: 1st edition. — 1931.
120. Pearson, Karl. — *Tables of the Incomplete Beta-Function.* — London, the „Biometrica Office", University College, 1948.
121. Pearson, Karl. — *Tables of the Incomplete Γ-Function.* — London, His Majesty's Statoinery Office, 1922.
122. Poincaré, H. — *Calcul des probabilités.* — Paris, Gauthier-Villars.
123. Poincaré, H. — *La science et l'hypothèse.* — Paris, Flammarion.
124. Poincaré, H. — *Sciences et méthode.* — Paris, Flammarion.
125. Polya, G. and Szegö, G. — *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis.* Band I und II. — Berlin, Springer, 1925.
126. Polya, G. — *Remarks on Characteristic Functions.* Proc. Berkeley Symposium.
127. Polya, G. — *Sur la promenade au hasard dans un réseau de rues.* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 1-ère: Conferénces d'introduction. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 25—44.
128. Polya, G. — *Sur quelques points de la théorie des probabilités.* Annales de l'Inst. H. Poincaré, 1930.
129. Rao, C. R. — *Advanced Statistical Methods in Biometric Research.* — New York, John Wiley and Sons, Inc., 1952.
130. Romanovskij, V. P. — *Математическая статистика.* Москва, ГОНТИ, 1939.
131. Romig, Harry G. — *50—100 Binomial Tables.* — New York, John Wiley and Sons, Inc., 1947.
132. Sultsky, E. — *Sur un critérium de la convergence stochastique des ensembles de variables éventuelles.* C. R. Acad. Sc., t, 187, p. 370—372, Paris, 1928.
133. Steffensen, J. F. — *Fréquence et probabilité.* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 2-ème: Les fondements du calcul des probabilités. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 67—78.
134. Steinhaus, H. — *La théorie et les applications de fonctions indépendantes au sens stochastique.* Colloque consacré à la théorie des probabilités. Partie 5-ème. Les fonctions aléatoires. — Paris, Hermann et Cie, 1938, p. 57—73.
135. Todhunter, I. — *A History of the Mathematical Theory of Probability.* From the Time of Pascal to that of Laplace. — New York, Chelsea Publishing Company, 1949.
136. Uspensky, J. V. — *Introduction to Mathematical Probability.* — New York, McGraw-Hill Book Company, 1937.
137. Valiron, G. — *Théorie des fonctions.* — Paris, Masson, 1948.
138. Ville, J. — *Étude critique de la notion de collectif.* — Paris, Gauthier-Villars.
139. Ville, M. J. — *Principes d'analyse matricielle.* Publ. de l'Inst. de Statistique de l'Université de Paris, fascic. 2—3, 1955.
140. Weatherburn, C. F. — *Mathematical Statistics.* — Cambridge, 1947.
141. Weatherburn, C. F. — *A First Course in Mathematical Statistics.* 2-nd edition. — New York, Cambridge University Press, 1949.
142. Wiener, N. — *The Fourier Integral and Certain of its Applications.* — Cambridge, 1933.
143. Wilks, S. S. — *The Theory of Statistical Inference.* Ann Arbor, 1937.
144. Yule, G. U. and Kendall, M. G. — *An Introduction to the Theory of Statistics.* 14th edition. — New York, Hafner Publishing Company, 1950.

INDEKS