

Fünfter Abschnitt.

## Die Kraftübertragung.

### § 69. Mechanismen.

Eine Kraft wirkt niemals auf einen einzelnen Körper, sondern sie wirkt immer zwischen zwei Körpern, und zwar in den meisten Fällen so, daß sie den Abstand der beiden Körper zu verändern strebt; d. h. die Angriffslinie der Kraft fällt im allgemeinen mit der Verbindungslinie der beiden (punktartig angenommen) Körper zusammen. Wenn die Körper ausgedehnt sind



Fig. 232.  
Ein Stein wird  
durch ein Seil  
gezogen.

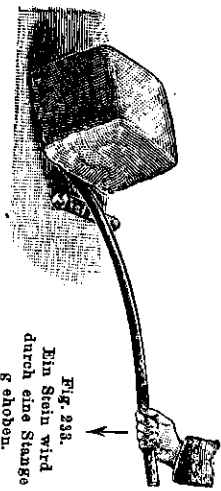


Fig. 233.  
Ein Stein wird  
durch eine Stange  
gehoben.

auch zu den Fernkräften zählte, jetzt auf gewisse Spannungen in dem zwischen den Körpern vorhandenen Mittel (oder auch leeren Räume) zurückgeführt wird.

Die beiden Körper, zwischen denen mechanische Kräfte wirken, sind gewöhnlich durch ein Zwischenglied: einen (gelenkigen) Stab (z. B. den biegsamen Arm), ein Seil, oder sonstwie miteinander verbunden; auch eine in einem Rohre eingeschlossene Flüssigkeit oder ein Gas können als Zwischenglied dienen. Die Verbindungsglieder selbst werden bei der Kraftwirkung verändert, indem in ihnen gewisse (elastische) Spannungen (S. 182) hervorgerufen werden; infolge dieser Spannungen wird die Kraft von dem einen Körper zum anderen übertragen. Ziehen wir z. B. (Fig. 232) mittels eines Seiles einen Stein fort, so muß das Seil erst gespannt werden, ehe der Stein

dem Zuge der Hand folgt; heben wir (Fig. 233) einen Stein mit Hilfe eines darunter geschobenen Stabes, so gerät der Stab zuerst infolge der Biegung in einen elastischen Spannungszustand, und erst wenn diese Spannung eine gewisse Größe erreicht hat, wird der Stein gehoben.

Das letzte Beispiel belehrt uns darüber, daß wir einer Kraft unter Vermittelung eines Zwischengliedes (des Stabes) eine veränderte Richtung und Größe geben können, während im ersten Beispiele nur der Angriffspunkt der Kraft in der Richtung des Seiles verschoben wird. Vorrichtungen, durch deren Vermittelung eine Kraft auf einen Körper wirkt, werden Mechanismen genannt.

Nach Gallileis Vorschlag hat man die Mechanismen auf sechs sogenannte einfache Maschinen: „Hebel, Rolle, Wellrad, schiefe Ebene, Keil, Schraube“ zurückzuführen versucht; aber viele der jetzt gebräuchlichen Mechanismen lassen sich auf diese einfachen Formen nur schwer zurückführen.

Das Wesen jedes Mechanismus besteht darin, daß seine einzelnen Teile nur ganz bestimmt vorgeschriebene Bewegungen gegeneinander ausführen können. Von diesem Gesichtspunkte ist Reuleaux<sup>1)</sup> ausgegangen, der jeden Mechanismus in sogenannte Elementenpaare zerlegt. Unter einem Elementenpaare versteht Reuleaux zwei Körper, die sich ganz oder teilweise umschließen oder so ineinander eingreifen, daß die Teile des einen Körpers sich nur auf bestimmten vorgeschriebenen Bahnen bewegen können, wenn der andere Teil fest ist; eine solche Verbindung wird zwangsläufig genannt. Nach Reuleaux gibt es drei niedere und vier höhere Elementenpaare. Die drei niederen Elementenpaare sind: das Prismenpaar, das Zylinderpaar und das Schraubenpaar.

Das Prismenpaar besteht aus einem Prisma, das von einem Hohlprisma umschlossen wird; diese beiden Elemente können sich nur parallel zu einer Seitenkante des Prismas gegeneinander verschieben. Man spricht auch dann von einem Prismenpaare, wenn die Führung längs einer geraden Linie durch geradlinige Geleisstücke zwangsläufig bewirkt ist; so ist z. B. in Fig. 234 ein Prismenpaar abgebildet, bei dem ein zylindrischer Stab von einem zylindrischen Hohlkörper umschlossen wird, und bei dem eine Drehbewegung durch eine am Zylinder angebrachte Nut und eine in die Nut eingreifende Schraubenspitze verhindert wird. Bei der in Fig. 238 abgebildeten Schraubkurbel ist das Prismenpaar  $P$  durch zwei Geleisstücke ersetzt, zwischen denen ein passendes Metallstück (der Kreuzkopf der Schraubkurbel) geradlinig zwangsläufig geführt wird.



Fig. 234.  
Prismenpaar.

Das Zylinderpaar (auch Drehkörperpaar genannt) besteht aus einem Zylinder, der von einem Hohlzylinder so umschlossen wird, daß sich die beiden Elemente nur drehend umeinander (ohne Verschiebung) bewegen können. In Fig. 235 ist ein Stück einer zylindrischen Welle abgebildet, die sich in dem dazugehörigen Lager nur drehen kann; denn eine Verschiebung wird

1) Franz Reuleaux, 1839—1906, Professor der Maschinenbaukunde in Charlottenburg.

durch zwei auf die Welle aufgesetzte Ringe, von denen in der Figur nur der eine zu sehen ist, verhindert.

Das Schraubenpaar besteht aus zwei Körpern, die sich, wie in Fig. 236 abgebildet, nur so gegeneinander bewegen können, wie eine Schraubenmutter gegen die Schraube. Die Schraubenbewegung kann als zusammengesetzt aus einer Drehung und einer Verschiebung aufgefaßt werden.

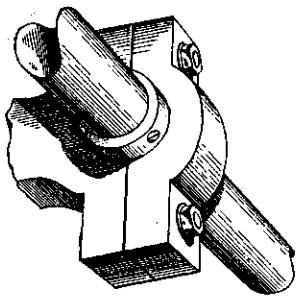


Fig. 236. Zylinderpaar oder Drehkörperpaar.

Bei den drei niederen Elementenpaaren können die zwangsläufigen Bewegungen auf die Bahn einer geraden Linie und eines Kreises zurückgeführt werden. Findet die zwangsläufige Relativbewegung so statt, daß die Bahnen der Teile des einen Körpers höhere Kurven gegenüber dem als fest angenommenen zweiten Körper beschreiben, so heißt das Elementenpaar ein höheres Elementenpaar. So bildet z. B. ein auf einer geradlinigen Schiene rollendes Rad mit der Schiene zusammen ein höheres Elementenpaar, weil jeder Punkt des rollenden Rades relativ zur Schiene eine Zyklonoide beschreibt.

Ein zweites Beispiel eines höheren Elementenpaares ist in Fig. 237 abgebildet. Hier bewegt sich ein gleichseitiges Bogendreieck zwangsläufig innerhalb eines quadratischen Hohlkörpers. Jeder Punkt des Bogendreiecks und

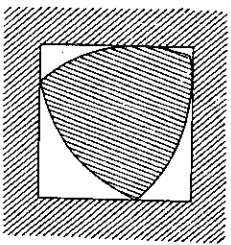


Fig. 237. Höheres Elementenpaar.

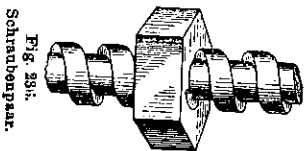


Fig. 238. Schraubenpaar.

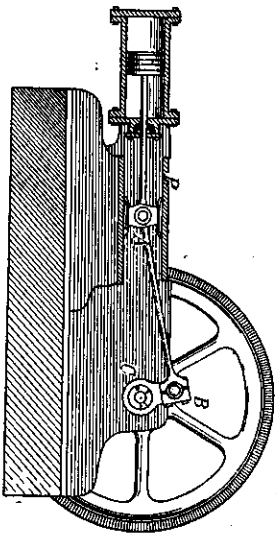


Fig. 239. Sauberkurbel.

jeder mit ihm starr verbundene Punkt bewegt sich hierbei auf einer Kurve, die aus mehreren Ellipsenbögen zusammengesetzt ist. Werden mehrere Elementenpaare so zusammengesetzt, daß ein Element des einen Paares mit einem Element eines anderen Paares starr verbunden ist, so entsteht eine kinematische Kette. Als Beispiel diene die in Fig. 238 abgebildete Sauberkurbel, durch die die hin- und hergehende Bewegung eines Dampfkolbens einer Dampfmaschine in die Umdrehungsbewegung eines Schwungrades umgewandelt wird. Die Sauberkurbel besteht aus dem Prisma  $P$  und den drei Zylinderpaaren  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

Sind die beiden Teile eines Elementenpaares so miteinander verbunden, daß sie bei jeder Kraftwirkung ihre Lage nur in der vorgeschriebenen Weise zwangsläufig ändern können, so heißt die Verbindung formschlüssig; wird dagegen der Zwanglauf erst durch die Mitwirkung einer in bestimmter Weise wirkenden Kraft gesichert, so heißt die Verbindung kraftschlüssig. So ist z. B. das Achsenlager von Fig. 235 formschlüssig. Denken wir uns aber den oberen Teil des Achsenlagers entfernt, so ist der Zwanglauf der Welle nur dann gesichert, wenn die Welle durch ihr Gewicht im Lager festliegt, würde aber das Lager umgedreht werden oder würde eine Kraft nach oben auf die Welle wirken, so würde der Zwanglauf vernichtet werden. Ein Achsenlager ohne die obere Hälfte ist demnach ein kraftschlüssiges Elementenpaar.

Der nun folgenden Besprechung der Mechanismen legen wir noch ein anderes Einteilungsprinzip zugrunde. Wir behandeln zuerst die Kraftübertragungen, bei denen nur elastische Zug- und Druckspannungen auftreten. Hierher gehören die Stange und das Seil. Daran schließt sich die Besprechung der Mechanismen, für welche der Projektionsatz Anwendung findet, bei denen es sich also nur um reine Verschiebungen handelt. Endlich betrachten wir die Kraftübertragungen, bei denen der Momentensatz angewandt wird, d. h. solche Mechanismen, bei denen nur Drehbewegungen auftreten.

Wir behandeln die Mechanismen ternär zuerst unter der Voraussetzung, daß keine Bewegungshindernisse, wie z. B. die Reibung, vorhanden sind, und dann untersuchen wir die Verhältnisse unter Berücksichtigung der tatsächlich immer auftretenden Bewegungswiderstände.

In allen Fällen wird durch eine auf einen Körper wirkende Kraft in dem Körper eine elastische Spannkraft geweckt, die der Kraft selbst entgegengesetzt gerichtet und ihr an Größe gleich ist, solange keine Bewegung erfolgt. Wird aber der Körper beweglich gemacht, so setzt sich die potentielle Energie der Spannkraft (S. 183) in kinetische Energie um: der Körper wird bewegt. Die Kraftübertragung ist nur innerhalb der Grenzen möglich, in denen die durch eine Kraft bewirkte Formänderung wieder verschwindet, wenn die Kraft zu wirken aufhört, d. h. also innerhalb der Elastizitätsgrenzen der Körper. Ist die zu übertragende Kraft so groß, daß eine dauernde Formänderung erfolgt, so ist die elastische Spannung nicht mehr an jeder Stelle des Körpers nach beiden Seiten gleich groß (S. 182), und es kann der Fall eintreten, daß der Körper, der die Kraft übertragen soll, seinen Zusammenhang verliert, daß er also bricht. Wir betrachten die Kraftübertragung nur unter der Voraussetzung, daß die Elastizitätsgrenzen nicht überschritten werden. Innerhalb dieser Grenzen nennen wir die Körper widerstandsfähig. In den meisten praktischen Vorkommenden Fällen sind die auf den Körper wirkenden Kräfte so klein, daß die elastischen Formänderungen im Vergleiche zur Größe des ganzen Körpers ganz vernachlässigt werden können. Wir wollen die tatsächlich immer auftretenden Formänderungen nicht berücksichtigen und einen starren Körper voraussetzen.

§ 70. Die Stange, das Stangensystem.

Die Stange ist ein fester Körper, der imstande ist, Druck- und Zugkräfte in der Krafrichtung zu übertragen. Die Stange besteht im einfachsten Falle aus einem prismatischen oder zylindrischen Stabe.

Stellen wir eine Stange  $AC$  (Fig. 239) lotrecht auf dem Erdboden  $E$  auf und belasten sie am oberen Ende  $A$  mit dem Gewichte  $G$ , so werden durch die Kraft  $G$  in jedem Querschnitte, z. B. bei  $B$ , elastische Spannungen (S. 182)  $G_1$  und  $G_2$  nach entgegengesetzten Richtungen erzeugt. Die nach oben gerichtete Spannung  $G_1$  ist gleich und entgegengesetzt der Spannung, die in dem unmittelbar über  $B$  befindlichen Querschnitte der Spannung, hält dieser also das Gleichgewicht, und daher bleibt hier eine nach oben gerichtete Spannung übrig, die sich wieder in derselben Weise auf den darüber befindlichen Querschnitt überträgt. Das geht so fort, bis sich die letzte nach oben gerichtete Spannung mit der wirkenden Kraft  $G$  das Gleichgewicht hält. In derselben Weise pflanzt sich die im Querschnitte  $B$  erzeugte, nach unten gerichtete Spannung auf einen tiefer liegenden Querschnitt bis an das unterste Ende  $C$  der Stange fort. Hier entstehen die nach oben gerichtete Spannung  $G_3$  in der Stange und die nach unten gerichtete Spannung  $G_4$  im Erdboden. Das Ergebnis ist also, daß in jedem Querschnitte der Stange entgegengesetzt gleiche, elastische Spannungen auftreten, die die elastische Formänderung wieder rückgängig zu machen bestrebt sind, die also die durch das Gewicht  $G$  (wenn auch unmerkbar wenig) verkürzte Stange wieder auf die ursprüngliche Länge bringen wollen. Die Folge ist die Übertragung der durch das Gewicht  $G$  erzeugten Kraft auf das untere Ende der Stange.

Auch bei der wagrecht gerichteten Stange in Fig. 240, durch die eine auf das eine Ende wirkende Kraft  $P$  auf den Stein  $K$  übertragen und durch welche der Stein auf dem Erdboden fortgeschoben werden soll, findet die Kraftübertragung in der Weise statt, daß in jedem Querschnitte, z. B. in  $B$ , zwei entgegengesetzt gleiche Spannungen  $P_1$  und  $P_2$  geweckt werden, die den zusammengedrückten Stab wieder auszuweiten streben. Es bleibt am Ende  $C$  nur die Kraft  $P$  übrig, die unmittelbar am Steine angreift und diesen fortschiebt, wenn sie größer ist als der Reibungswiderstand  $R$  des Steines am Erdboden. Sie versetzt den Stein dann in eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, deren Beschleunigung sich in bekannter Weise aus dem Unterschiede der beiden Kräfte  $(P-R)$  und der Masse des Steines berechnen läßt.

Derselbe Stab kann auch Zugkräfte übertragen. Die Verhältnisse überstellt man aus Fig. 241 sofort; sie unterscheiden sich von der vorigen nur dadurch, daß die Richtungen aller Kräfte entgegengesetzt sind. Die Zugkraft  $P$  wird unter Vermittelung der Stange auf den Stein übertragen und wirkt dann hier als Kraft  $P_4$  in unveränderter Richtung und Stärke.

Das Stangensystem (vgl. auch Fig. 218, 219, 220 in § 63). Wenn zwei Stangen in der durch Fig. 242 angegebene Weise an ihren oberen Enden gelenkig miteinander verbunden sind und mit ihren unteren Enden rechtwinklig auf den Widerlagern  $B$  und  $C$  aufstehen, so ruft eine in  $C$  hängende

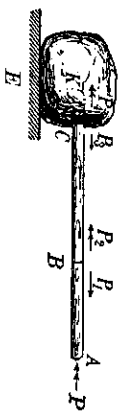


Fig. 240.

Druck- und Zugspannung in einer wagerechten Stange.

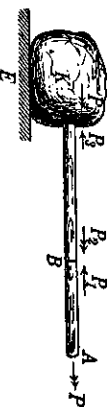


Fig. 241.

Last  $G$  oder eine dort wirkende Kraft in beiden Stangen elastische Spannungen hervor, deren Größe durch das Vektorparallelogramm  $AEDF$  bestimmt wird. Von diesem Vektorparallelogramm sind die Größe und Richtung der Diagonalen durch die Größe und Richtung der Kraft  $G$  bestimmt. Die Richtung der Seiten stimmt mit der Richtung der Stangen überein. Die durch die Vektoren  $AE$  und  $AF$  bestimmten Kräfte stellen die in den Stangen erzeugten

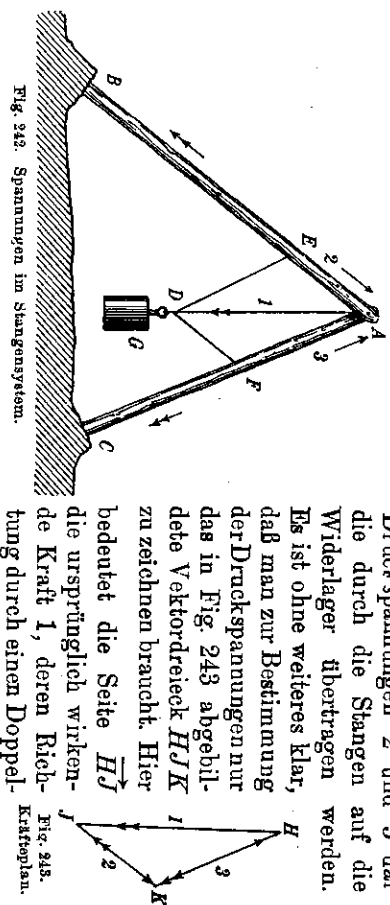


Fig. 242. Spannungen im Stangensystem.

Fig. 243. Kräfteplan.

Druckspannungen 2 und 3 dar die durch die Stangen auf die Widerlager übertragen werden. Es ist ohne weiteres klar, daß man zur Bestimmung der Druckspannungen nur das in Fig. 243 abgebildete Vektordreieck  $HJK$  zu zeichnen braucht. Hier bedeutet die Seite  $HJ$  die ursprünglich wirkende Kraft  $I$ , deren Richtung durch einen Doppelpfeil angegeben ist. Rechnet man die Vektoren  $\vec{JK}$  und  $\vec{KH}$  in der durch den einfachen Pfeil angegebenen Richtung, so bilden  $\vec{HJ}$ ,  $\vec{JK}$  und  $\vec{KH}$  ein geschlossenes Vektordreieck, d. h. die durch diese Vektoren bestimmten Kräfte halten sich das Gleichgewicht; rechnet man aber die Vektoren  $\vec{KJ}$  und  $\vec{HK}$  in der durch die Doppelpfeile angedeuteten Richtung, so ersetzen die durch diese Vektoren bestimmten Kräfte die ursprüngliche Kraft; sie sind die Komponenten der ursprünglichen Kraft  $G$ .

Von dieser Bezeichnung wollen wir weiterhin mit Nutzen Gebrauch machen: Die durch einen einfachen Pfeil veranschaulichten Vektoren sollen die Kräfte bezeichnen, die einer gegebenen Kraft das Gleichgewicht halten, während die durch einen doppelten Pfeil veranschaulichten Vektoren die Ersatzkräfte einer gegebenen Kraft darstellen sollen.

Bei dem in Fig. 244 abgebildeten Stangensystem, das im praktischen

Leben sehr oft angewandt wird, sind drei Stangen  $AB$ ,  $AC$  und  $AD$  an ihren oberen Enden gelenkig verbunden, während sich die unteren Enden unter rechten Winkeln gegen Widerlager stützen. Im gemeinsamen oberen Endpunkte wirkt das Gewicht  $G$  mit einer lotrecht nach abwärts gerichteten Kraft. In Fig. 245 ist die durch den Vektor  $\vec{E}\vec{F}$  dargestellte Kraft durch ein Vektorparallelogramm räumlich zerlegt. Man ersieht sofort, daß zur Bestimmung der Komponenten nur der räumliche Streckenzug  $\vec{E}\vec{J}\vec{H}\vec{F}$  gezogen zu werden braucht, dessen Endpunkte mit den Endpunkten des Vektors  $\vec{E}\vec{F}$  zusammenfallen und dessen Richtungen den Richtungen der Stangen in dem Stangensysteme von Fig. 244 parallel sind. Rechnet man den Streckenzug in der Richtung  $\vec{F}\vec{H}\vec{J}\vec{E}$ , so bildet er mit seinem Vektor  $\vec{E}\vec{F}$  ein räumliches, geschlossenes Vektorviereck, und die einzelnen Vektoren  $\vec{F}\vec{H}$ ,  $\vec{H}\vec{J}$ ,  $\vec{J}\vec{E}$  bedeuten die Kräfte, die der gegebenen Kraft  $G = \vec{E}\vec{F}$  das Gleichgewicht halten; rechnet man aber den Streckenzug in

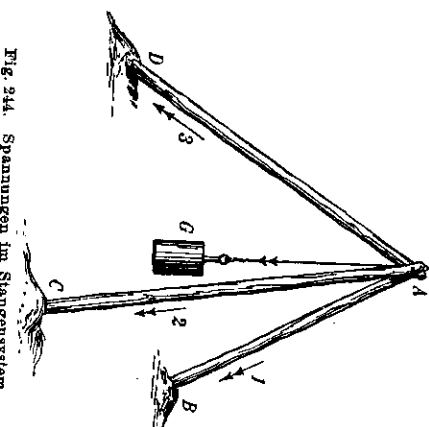


Fig. 244. Spannungen im Stangensystem.

der Richtung  $\vec{E}\vec{J}\vec{H}\vec{F}$ , so stellen die Vektoren  $\vec{H}\vec{J}$ ,  $\vec{J}\vec{E}$  und  $\vec{E}\vec{J}$  die drei in der Richtung der Stangen wirkenden Komponenten der Kraft  $G$  dar. Aus Fig. 245 sowohl wie aus Fig. 243 erkennt man ferner sofort: Wenn die in einer Stange geweckten elastischen Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen voneinander fortgerichtet sind, so werden Druckkräfte übertragen. Bei der Übertragung von Zugkräften sind die geweckten elastischen Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen, aber einander zugewandt gerichtet. Das ist ja auch selbstverständlich; denn wenn Druckkräfte übertragen werden, so wird die Stange verkürzt, und die geweckten elastischen Spannungen suchen die Stange wieder auf die ursprüngliche Länge auszu dehnen; während infolge der Übertragung von Zugkräften die Stange gedehnt wird, und die geweckten elastischen Spannungen die Stange wieder auf die ursprüngliche Länge zusammenzuziehen streben.

Das durch Fig. 244 abgebildete Stangensystem möge als einziges Beispiel für die räumliche Zerlegung einer Kraft in einem Stangensysteme genügen. In bei weitem den meisten Fällen erfolgt die Zerlegung einer Kraft nur in einer Ebene, daher wollen wir uns hier auch in Zukunft auf diese wichtigen Fälle beschränken.

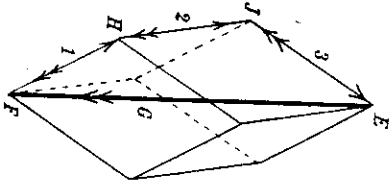


Fig. 245. Kräfteplan.

In dem in Fig. 246 abgebildeten Stangensysteme sind drei Stangen zu einem rechtwinkligen Dreieck verbunden. Die beiden Ecken der lotrechten Stange  $BC$  sind an einer festen Mauer drehbar befestigt, während an der hervorstehenden Ecke  $A$  das Gewicht  $G$  als lotrechte Kraft wirkt. Wir zeichnen für die Ecke  $A$  das Vektordreieck  $DEF$  in Fig. 247, indem wir den Vektor  $\vec{D}\vec{E}$  gleich und parallel dem Vektor der Kraft  $G$  zeichnen und von  $D$  und  $E$  aus Parallelen zu den Stangen  $AB$  und  $AC$  des Stangensystemes von Fig. 246 ziehen. Das Vektordreieck  $DEF$  ist geschlossen, wenn die Kräfte 2 und 3 die durch die einfachen Pfeile bezeichneten Richtungen haben. Diese Richtungen tragen wir in Fig. 246 bei  $A$  als einfache Pfeile ein. Die mit den Doppelpfeilen bezeichneten Richtungen, die den einfachen Pfeilen entgegengesetzt sind, sind die elastischen Spannungen 2 und 3, die nun durch die Stangen  $AB$  und  $AC$  auf die entfernten Enden  $B$  und  $C$  übertragen werden. Hieraus folgt, daß in der Stange  $AB$  Zugspannungen, in der Stange  $AC$  Druckspannungen entstehen. Die nach  $B$  übertragene Zugspannung wirkt rechtwinklig zur Wand und wird demnach von ihr vollständig aufgenommen. Die in  $C$  wirkende Druckspannung 3 wirkt hier schräg nach abwärts. Um ihre Komponenten zu bestimmen, schließen wir das Vektordreieck  $DEH$  (Fig. 247) unmittelbar an den Vektor  $\vec{D}\vec{E}$  an, der nun aber in der Richtung des doppelten Pfeiles zu rechnen ist. Wir ziehen zu dem Zwecke  $\vec{F}\vec{H}$  und  $\vec{H}\vec{D}$  als Lotrechte und Waagrechte. Die lotrechte Komponente wirkt (entgegengesetzt dem durch einen einfachen Pfeil bezeichneten Vektor) in der Richtung des doppelten Pfeiles lotrecht nach abwärts und wird durch die Festigkeit der Angel in der Mauer aufgenommen. Die waagrechte Komponente wirkt senkrecht gegen die Mauer und wird daher von dieser unmittelbar aufgenommen. Die Fig. 247 belehrt uns mit einem Blicke über die Spannungsverhältnisse in dem Stangendreieck von Fig. 246, daher wird Fig. 247 Kräfteplan des Stangendreiecks genannt.

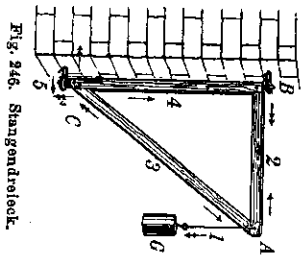


Fig. 246. Stangendreieck.

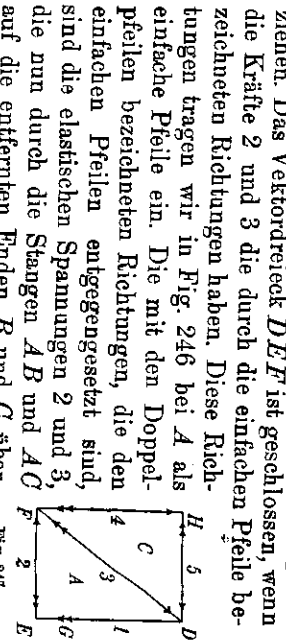


Fig. 247. Kräfteplan.

Nach denselben Grundsätzen können die Kraftverhältnisse in jedem Stangensysteme durch eine einfache Zeichnung untersucht werden. Diese Grundsätze finden vorwiegend bei der Bestimmung der Kraftverhältnisse der aus Stangen zusammengesetzten Dach- und Brückenanordnungen Anwendung, bei denen man, wie schon in § 63 erwähnt worden ist, alle Spannungen auf Zug- und Druckspannungen zurückführt. Die Kraftverhältnisse der in Fig. 218, 219 und 220 abgebildeten Dachkonstruktionen können durch einen Kräfteplan in einfacher Weise nach dem oben durchgeführten Muster zeichnerisch bestimmt werden.

§ 71. Das Seil.

Ein Seil ist jeder biegsame Körper, durch den Zugkräfte übertragen werden können. In diesem Sinne nennen wir die Kette, den Treibriemen, einen biegsamen Draht, eine Darmsaite, einen Bindfaden usw. ein Seil. Ein Seil kann auch aus mehreren der angegebenen Körper zusammengesetzt sein. An denjenigen Stellen, wo von der Biegsamkeit des Seiles kein Gebrauch gemacht wird, kann es durch eine Stange ersetzt werden.

Wirkt an dem einen Ende eines Seiles, dessen anderes Ende mit einem Körper verbunden ist, eine Zugkraft, so ruft diese in jedem Querschnitte des Seiles in ähnlicher Weise Zugspannungen (S. 182) hervor, wie die Zugkraft  $P$  bei dem in Fig. 241 abgebildeten Stabe. Da sich diese Zugspannungen von einem Querschnitte zum benachbarten gegenseitig aufheben, so bleibt nur die Zugkraft übrig, die unmittelbar am Körper angreift. Das Seil überträgt demnach eine Zugkraft in unveränderter Größe von einem Ende bis zum anderen; dagegen ruft eine Druckkraft infolge der Biegsamkeit des Seiles in ihm keine Spannungen hervor, also ist es auch nicht zur Übertragung von Druckkräften fähig. Mit der Biegsamkeit sind aber manche andere Vorteile verbunden, die das Seil als Mittel zur Kraftübertragung besonders geeignet machen.

§ 72. Die Seilmaschine.

*Eine an dem einen Ende eines Seiles wirkende Zugkraft wird längs des ganzen Seiles in unveränderter Größe übertragen.*

Hierbei ist die Länge des Seiles ohne Einfluß auf die übertragene Kraft. Die Anwendung des Seiles zur Kraftübertragung ist überall dort von Vorteil, wo ein unmittelbarer Angriff der Kraft un bequem ist. Beispiele: Ein Schleppdraht wird mit dem Schleppzuge durch die Schlepptrasse verbunden. Mit Hilfe des Seiles wird ein Stein aus einer Grube gehoben. Mechanischer Glockenzug. Mit dem Zügel kann der Kutscher dem Pferdeköpfe einen einseitigen Zug erteilen. Das Pferd ist mit dem Wagen durch die Stränge verbunden. Bei einem Eisenbahnzuge dient jeder einzelne Wagen zur Übertragung des Zuges der Lokomotive auf die hinteren Wagen. Das Steuer an einem Schiffe wird mit Hilfe zweier Ketten und Kettenstangen von einer entfernteren Stelle des Schiffes aus bewegt.

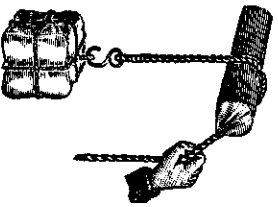


Fig. 248. Seil um einen Balken.

Infolge der Biegsamkeit des Seiles kann es um einen festen Körper, z. B. einen glatten, abgerundeten Balken, gelegt (Fig. 248) oder durch einen glatten Porzellanring (bei der Zuggarbine) gezogen werden, wodurch eine Veränderung der Zugrichtung ermöglicht wird. Wenn vorausgesetzt wird, daß hierdurch die Bewegungsfreiheit des Seiles in seiner Längsrichtung nicht beeinträchtigt wird, so wird die Spannung des Seiles auch bei der Richtungsveränderung nicht an Größe verändert, so daß also auch jetzt die Kraftübertragung ohne Veränderung der Kraftgröße erfolgt.

§ 71. Das Seil. § 72. Die Seilmaschine

In der Anwendung verursacht die Einfügung eines Hilfsmittels zur Richtungsveränderung eine Beschränkung der Bewegungsfreiheit, die von der Art des benutzten Körpers abhängt. Raue und kantige Körper beschränken die Bewegungsfreiheit mehr als glatte abgerundete Körper; daher gleitet man die Stelle, an der das Seil den Körper berührt, oder bestreicht ihn an dieser Stelle mit Schmiermitteln (Öl, Schmierseife).

Das vollkommenste Mittel zur Verminderung der Bewegungshindernisse besteht in der Anwendung einer Rolle, d. h. einer kreisförmigen, um eine durch den Mittelpunkt gehende Achse leicht drehbaren Scheibe, in deren Rand eine Nut eingeschnitten ist, über die das Seil gelegt

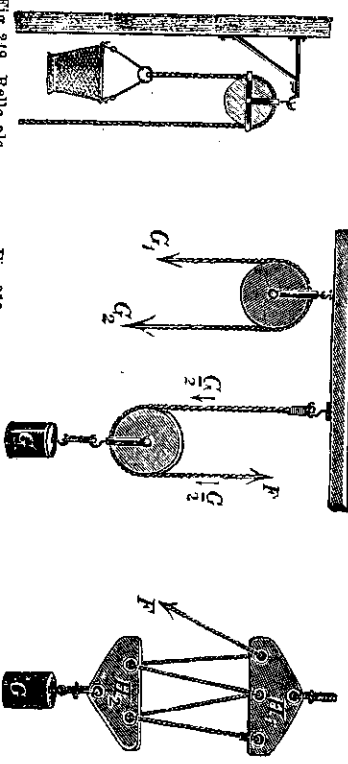


Fig. 249. Seil an Seilführung.

Fig. 250. Feste Rolle.

Fig. 251. Lose Rolle.

Fig. 252. Grundriß des Flaschenzuges.

wird (Fig. 249). Bei der Bewegung des Seiles dreht sich die Rolle mit, und da man die Achse der Rolle sehr sorgfältig glätten und schmieren oder in einem Kugellager laufen lassen kann, so kann man hierdurch die Reibung bis auf einen geringen Betrag beschränken.

Hängt man an das eine Ende eines über eine Rolle (Fig. 250) geführten Seiles einen Körper von dem Gewichte  $G_1$ , so spannt er das Seil und überträgt infolge dieser Spannung das Gewicht auf das andere Seilende, so daß, wenn auch an dieses Ende ein Körper von demselben Gewichte  $G_2$  gehängt wird, keine Bewegung eintritt. Wenn dagegen  $G_1 > G_2$  ist, so erfolgt eine Bewegung in der Richtung der größeren Kraft, also hier in der Richtung des größeren Gewichtes (feste Rolle).

Befestigt man das eine Ende eines Seiles an einem Haken (Fig. 251), führt dann das Seil um eine Rolle, an deren Achse der Körper von dem Gewichte  $G$  hängt, und läßt an dem anderen Ende des Seiles eine Kraft  $F$  senkrecht nach oben wirken, so spannt  $G$  beide Seilenden, und zwar jedes mit der Spannung  $\frac{G}{2}$ . Ist nun  $F = \frac{G}{2}$ , so tritt keine Bewegung ein. Ist dagegen  $F > \frac{G}{2}$ , so tritt eine Bewegung nach oben bzw. nach unten ein (lose Rolle).

Führt man das an einem Haken mit dem einen Ende befestigte Seil in der durch Fig. 252 dargestellten Weise abwechselnd durch eine Reihe von

Löhern, die in zwei Holzstücken  $H_1$  und  $H_2$  angebracht sind, von denen  $H_1$  befestigt ist, dagegen  $H_2$  mit dem Körper von dem Gewichte  $G$  belastet ist, und läßt man dann an dem freien Ende des Seiles die Kraft  $F$  wirken, so spannt  $G$  alle Seile gleichzeitig, und auf jedes Seil entfällt die Spannung  $\frac{G}{n}$ , wo  $n$  die Anzahl der Seile bedeutet. Ist nun  $F = \frac{G}{n}$ , so tritt keine Bewegung ein; ist  $F > \frac{G}{n}$ , so bewegt sich  $G$  aufwärts oder abwärts.

Anstatt der in Fig. 252 dargestellten Holzstücke  $H_1$  und  $H_2$  verwendet man meistens zwei Rollensysteme, von denen jedes auf einer gemeinsamen Achse drehbar ist, die in einer sogenannten Schere oder Flasche sitzt. Die eine Flasche wird fest aufgehängt, an der anderen hängt der Körper  $G$ . Eine derartige Verbindung mehrerer fester und loser Rollen heißt ein Flaschenzug (Fig. 253).

Der Differentialflaschenzug wird in § 76 behandelt werden.

Bei einem Flaschenzuge mit  $n$  gespannten Seilen  $K$  muß die Kraft, die den am Flaschenzuge hängenden Körper hält,  $\frac{1}{n}$  so groß sein wie das Gewicht  $G$  des angehängten Körpers.

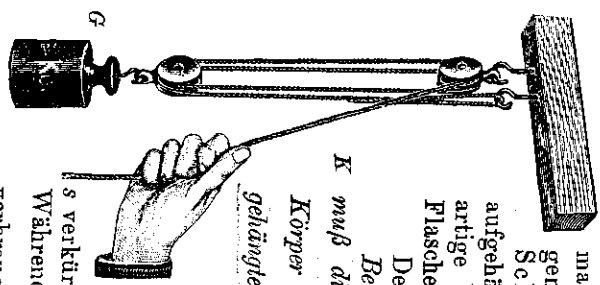


Fig. 252. Flaschenzug.

Man macht vom Flaschenzuge beim Heben größerer Lasten mittels kleiner Kräfte Gebrauch. Trotz des Kraftgewinnes findet aber kein Arbeitsgewinn statt; denn, um die Last  $G$  auf die Höhe  $s$  zu heben, müssen  $n$  Seile um die Strecke  $s$  verkürzt, also das ganze Seil um  $ns$  verkürzt werden. Während also beim Heben der Last  $G$  die Arbeit  $Gs$  verbraucht wird, leistet die Kraft  $F = \frac{G}{n}$  die Arbeit

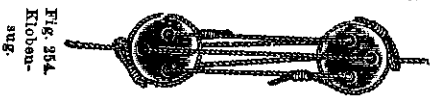


Fig. 253. Klobenzug.

Die von  $F$  aufgewandte Arbeit ist der von  $G$  verbrauchten Arbeit gleich.

Ein Flaschenzug ohne Rollen, bei dem nur ausgedehnte Löcher in zwei Holzstücken zur Führung der Seile benutzt werden, heißt ein Klobenzug (Fig. 254). Eine bekannte Anwendung findet der Klobenzug zum Straffziehen der Wanten bei einem Segelschiffe. Die Wanten (fälschlich oft Strickleitern genannt) sollen den Mast im Schiffe nach den Seiten zu festschlagen, damit bei starkem seitlichen Winde die Masten infolge des auf die Segel wirkenden Druckes nicht gehrochen werden. Zu dem Zwecke muß den Wanten eine bedeutende Spannung gegeben werden, da ja ein Seil erst dann Zugkräfte übertragen kann, wenn es gespannt ist. Zur Herstellung dieser Spannung werden die Klobenzüge verwendet.

Auch beim Aufspannen eines Sonnensegels an einer Stange mit Hilfe eines Seiles, das abwechselnd durch Löcher im Sonnensegel und um die zur Befestigung dienende Eisenstange geführt wird (Fig. 255), findet der Grundsatz des Flaschenzugs Anwendung, indem die starke Spannung des Sonnensegels durch die Multiplikation der Spannung jeder einzelnen Schlinge mit der Anzahl der Schlingen entsteht.

Ferner kann man jede Naht als Anwendung des Grundgedankens des Flaschenzugs betrachten.

Hierher gehört endlich die Erklärung für den außerordentlich hohen Druck, den eine Garn- oder Drahtspule durch das aufgewickelte Garn oder den Draht auszuhalten hat, denn die Drucke sämtlicher Windungen addieren sich. Will man daher die gesamte Druckkraft berechnen, so hat man den Druck jeder einzelnen Windung mit der Windungszahl zu multiplizieren.

Der Einfluß der Bewegungswiderstände (Reibungs- und Biegungswiderstand des Seiles) bei der Seilmaschine. Wenn ein Seil über einen glatten, abgerundeten Balken, durch einen Porzellanring oder über eine Rolle geführt wird, so treten bei der Bewegung des Seiles Reibungswiderstände  $W$  auf, die sich durch das Produkt aus der Druckkraft  $D$  und dem Reibungskoeffizienten  $q$  (§ 203) ausdrücken lassen. Diese Widerstände wirken immer der bewegenden Kraft entgegen. Wenn also, nach Fig. 256, die Kraft  $P$  an dem Seile zieht und die Kraft  $P_2$  überwinden soll, so muß  $P_1 > P_2$  sein. Diese beiden Kräfte setzen sich nach dem Parallelogrammsatze zu der Resultierenden  $D$  zusammen. Hiernach folgt: Es muß  $P_1 = P_2 + W = P_2 + D \cdot q$  sein.  $D$  ist offenbar proportional jeder der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Wir können also schreiben:  $D = P_2 \cdot k$ . Hiernach folgt:  $P_1 = P_2 + P_2 k q = P_2 \cdot (1 + k q)$ . Hierzu tritt noch der Biegungswiderstand des Seiles als Summand. Im allgemeinen ist dieser Biegungswiderstand des Seiles als  $k_1$  im Vergleiche zu dem Reibungswiderstande, besonders dann, wenn das Seil nicht allzu dick ist, und wenn scharfe Ecken und Kanten vermeiden werden. Vernachlässigen wir diesen Summanden, so besteht also zwischen  $P_1$  und  $P_2$  Proportionalität. Schreiben wir

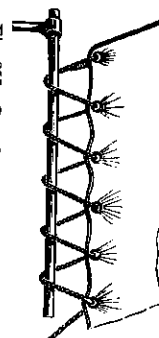


Fig. 255. Grundsatz des Flaschenzugs.

die letzte Gleichung in der Form  $P_1 = \eta \cdot P_2$ , so nennen wir  $\eta$  das Güterverhältnis oder den Wirkungsgrad der Kraftübertragung; es wird meistens in Prozenten ausgedrückt.

Den Reibungswiderstand kann man durch Anwendung einer Rolle wesentlich verringern, also das Güterverhältnis vergrößern. In der stark schematischen Fig. 257 bedeutet der kleine gestrichelte Kreis die Achse und der große Kreisring die Scheibe der Rolle, durch die Druckkraft  $D$ , die auf den äußeren Umfang der Scheibe in  $A$  wirkt, wirft diese im Punkte  $B$  gegen die Welle gedrückt. Da nun bei der Drehung der Rolle an der Berührungsstelle  $B$  der Reibungswiderstand längs eines Weges überwinden werden muß, der wesentlich kleiner ist, als wenn der Reibungswiderstand in  $A$  überwinden werden müßte, so tritt er bei der Drehung der Rolle um die Welle in viel geringerem Maße in Wirksamkeit. Er wird vermindert auf den  $r$ ten Teil. Der Reibungswiderstand ist also um so kleiner, je kleiner der Radius  $r$  der Welle und je größer der Radius  $R$  der Scheibe ist. Außerdem kann man die Reibung durch Schmiermittel, die zwischen die Welle und Scheibe der Rolle gebracht werden, wesentlich vermindern. Immerhin gilt aber auch hier die Gleichung:  $P_2 = \eta \cdot P_1$ .

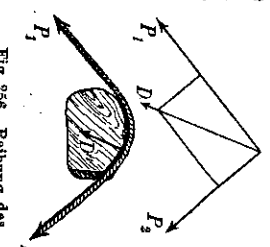


Fig. 256. Reibung des Seiles.

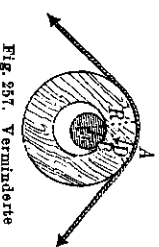


Fig. 257. Verminderte Reibung.

Der Wert für  $\eta$  ist außerordentlich verschieden. Wir können ihn bei den praktisch ausgeführten großen Rollenzügen zu etwa  $\frac{1}{4}$  oder 75% annehmen. Bei den kleineren Rollen, wie sie bei physikalischen Apparaten gebraucht werden, und die oft in feinen, wohnpolierten Achsen oder zwischen Spitzen gelagert sind, kann er der 1 oder 100% sehr nahe gebracht werden. Ein vorzügliches Mittel zur Verminderung der Reibung, auch bei großen Rollen, besteht in der Anwendung des Kugellagers. Bei diesem ist zwischen Scheibe und Welle der Rolle ein Kranz von Kugeln angebracht, die sich alle drehen und hierbei nur eine rollende Reibung erfahren.

Beim gemeinen Flaschenzuge (Fig. 258) treten folgende Verhältnisse auf: Die Last  $Q$  hängt an der unteren Flasche; sie wird in dem in der Figur angenommenen Beispiele durch die Spannungen in vier Seilen gehalten. Wenn nun an dem äußeren, freien Seile die Kraft  $P$  wirkt,  $P_1$  die die Last  $Q$  heben soll, so ist die durch die Kraft  $P$  verursachte Spannung im ersten Seile  $P_1 = P \cdot \eta$ ; die Spannung im zweiten Seile  $P_2 = P_1 \cdot \eta = P \cdot \eta^2$ . Ebenso folgt für die anderen Spannungen  $P_3 = P \cdot \eta^3$ ,  $P_4 = P \cdot \eta^4$ . Verwenden wir einen Flaschenzug von  $n$  Seilen, so ist die Spannung in jedem folgenden Seile wiederum  $\eta$  mal so groß, wie im vorhergehenden. Da die Last  $Q$  gleich der Summe aller Spannungen sein muß, so folgt

$$Q = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = P\eta + P\eta^2 + P\eta^3 + \dots + P\eta^n = P\eta \cdot \frac{1 - \eta^n}{1 - \eta} = P \cdot \frac{\eta}{1 - \eta} (1 - \eta^n).$$

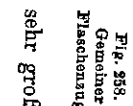


Fig. 258. Gemeiner Flaschenzug.

Aus dieser Gleichung ergibt sich, daß mit Vermehrung der Seile die Wirkung der Kraft nicht proportional mit der Anzahl der Seile vergrößert wird, sondern in einem wesentlich geringeren Maße. Bei einem gemeinen Flaschenzuge, bei dem das Güteverhältnis einer Rolle  $\eta = \frac{2}{3}$  sein möge, kann auch bei einer noch so großen Anzahl der Rollen und Seile nur eine Vereinfachung der Kraft erzeugt werden, denn wenn  $n$  sehr groß ist, so ist  $\eta^n = 0$ , also vereinfacht sich der obige Ausdruck zu

$$Q = P \cdot \frac{\eta}{1 - \eta} = P \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 3P.$$

§ 73. Anwendung des Projektionssatzes.

Die geneigte Bahn (schiefe Ebene). Wir haben in § 19 die Bewegung auf der geneigten Bahn rein phoronomisch untersucht. Die Beschleunigung, mit der die Bewegung erfolgte, war, wenn der Neigungswinkel  $\alpha$  ist,  $b = g \cdot \sin \alpha$ . Folglich muß die Kraft, mit der sich ein Körper die Bahn abwärts bewegt, die Größe  $mg \sin \alpha$  haben.

Die geneigte Bahn können wir als eine zwangsläufige Bahn ansehen und daher die Kräfteverhältnisse nach § 40 untersuchen. In Fig. 259 stellt  $HH'$  eine wagerechte Ebene dar, gegen welche die durch  $AB$  angelegte Ebene unter dem Neigungswinkel  $\alpha$  geneigt ist. Auf der Bahn liegt der Körper  $K$  mit der Masse  $m$ . Auf  $K$  wirkt also die Kraft  $G = mg$  lotrecht nach unten unter einem Winkel gegen die Bahn. Die Bewegungskomponente  $W$  wird

durch die Projektion von  $G$  auf die Bahn gefunden. Da  $\angle W GK = \alpha$  ist, so ist die Bewegungskomponente

$$W = G \sin \alpha = mg \sin \alpha,$$

folglich muß sich (S. 86) die Masse  $m$  auf der Bahn abwärts mit der Beschleunigung  $b = \frac{W}{m} = g \sin \alpha$  bewegen, ein Ergebnis, das mit dem in § 19 gefundenen übereinstimmt.

Während der Körper die ganze Bahn  $AB$  durchläuft, bewegt er sich um die Strecke  $AC$  lotrecht nach unten; er leistet also die Arbeit  $G \cdot AC$ . Aus der Gleichung  $W = G \sin \alpha$  folgt, da  $\sin \alpha = \frac{AC}{AB}$  ist,  $W = G \cdot \frac{AC}{AB}$ , demnach ist  $W \cdot AB = G \cdot AC$ . Der Körper leistet also dieselbe Arbeit, einerlei, ob er sich längs der geneigten Bahn oder lotrecht nach unten bis zur Horizontalebene bewegt.

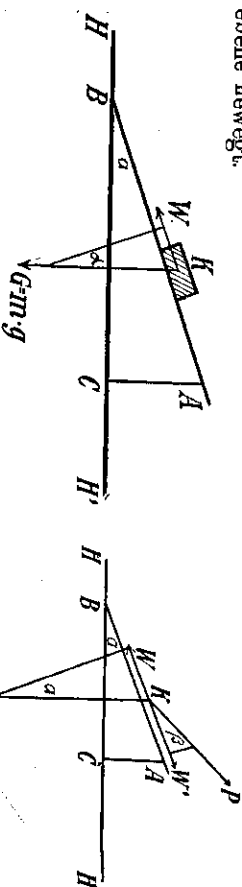


Fig. 259. Körper auf schiefer Ebene.

Fig. 260.

Die Druckkraftkomponente beträgt  $D = G \cdot \cos \alpha = mg \cos \alpha$ .

Soll der Körper  $K$  (Fig. 259) längs der geneigten Bahn durch eine parallel zur geneigten Bahn wirkende Kraft nach oben bewegt werden, so muß die bewegende Kraft um einen geringen Betrag größer sein als die Kraft

$$W = G \sin \alpha,$$

die den Körper abwärts bewegt.

Wenn die Kraft  $P$  nicht parallel zur geneigten Bahn wirkt, sondern so wie in Fig. 260 schräg nach oben in einer Richtung, die mit der geneigten Bahn den Winkel  $\beta$  einschließt, so kommt von dieser auch nur die Projektion auf die Bahn  $W' = P \cdot \cos \beta$  für die Bewegung des Körpers in Frage. Je nachdem  $W' \geq W$  ist, wird der Körper nach oben bewegt, er bleibt in Ruhe, oder er bewegt sich nach abwärts. Die Druckkraftkomponente der Kraft  $P$  wirkt in dem untersuchten Falle so, daß sie die durch das Gewicht von  $K$  verursachte Druckkraftkomponente auf die Bahn vermindert.

Die geneigte Bahn findet bei der Anlage von Landstraßen und Eisenbahnen Anwendung; die Anwendung der Schrotrohren, mittels deren Waren auf einen Wagen aufgeladen werden, beruht auf demselben Grundgedanken; die Kraft, mit der man einen Berg aufwärts steigt, ist um so geringer, je geringer die Neigung des Berges ist; die Geschwindigkeit des fließenden Wassers ist durch die Neigung

des Flußbettes und der Wasseroberfläche bestimmt; das Wasser fließt um so rascher, je größer die Neigung (hier Gefälle genannt) ist; um steile Anhöhen mit geringerer Kraft zu ersteigen, legt man die Wege schräg und im Zickzack (Serpentinen) an. In allen Fällen bleibt zur Erreichung einer bestimmten Höhe trotz der veränderten Kraftgröße der Arbeitsaufwand derselbe (wenn von den Reibungswiderständen abgesehen wird).

**Einfluß der Reibung.** Die Bewegung eines auf wagerechter Unterlage ruhenden Körpers durch eine wagerecht wirkende Kraft ist in § 67 bei der Ableitung der Reibungsgesetze behandelt worden. Wirkt auf einen auf wagerechter Ebene  $HH'$  (Fig. 261) liegenden Körper  $K$  vom Gewichte  $G$  die Kraft  $P$  schräg nach oben unter dem Neigungswinkel  $\beta$ , so wirkt als Bewegungskomponente die Projektion  $W' = P \cdot \cos \beta$ . Diese hat den Reibungswiderstand zu überwinden. Nach § 67 ist der Reibungswiderstand  $R$  gleich dem Produkte aus der Normaldruckkraft  $D$  und dem Reibungskoeffizienten  $\varrho$ . Die

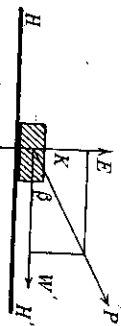


Fig. 261.

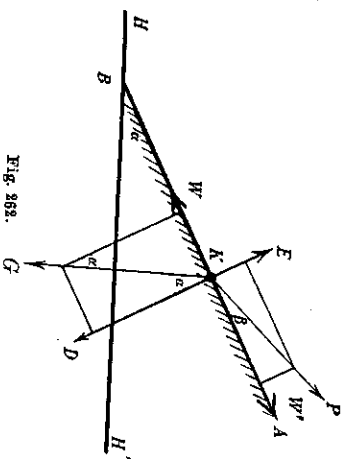


Fig. 262.

Normaldruckkraft ist gleich der Differenz des Eigengewichts  $G$  des Körpers und der lotrecht nach oben wirkenden Komponente  $E = P \cdot \sin \beta$  der bewegenden Kraft; also ist  $R = (G - P \sin \beta) \cdot \varrho$ . Soll eine Bewegung des Körpers erfolgen, so muß

$$P \cdot \cos \beta > (G - P \sin \beta) \cdot \varrho \text{ sein.}$$

Liegt der Körper  $K$  (Fig. 262) auf der geeigneten Bahn  $AB$  (Neigungswinkel  $\alpha$ ), und wirkt die Kraft  $P$  unter dem Neigungswinkel  $\beta$  gegen die Bahn schräg nach oben, so wird der Körper aufwärts bewegt, wenn die Bewegungskomponente  $W' = P \cdot \cos \beta$  größer ist als die parallel zur Bahn nach abwärts wirkende Bewegungskomponente  $G \cdot \sin \alpha$  des Gewichtes, vermehrt um den Reibungswiderstand. Der Reibungswiderstand  $R$  ist gleich dem Produkte aus der Normalkraft und dem Reibungskoeffizienten  $\varrho$ . Die Normaldruckkraft ist gleich dem Unterschiede der Komponente  $D = G \cdot \cos \alpha$  und der nach oben wirkenden Kraftkomponente  $E = P \cdot \sin \beta$ . Es ist also  $R = (G \cdot \cos \alpha - P \cdot \sin \beta) \cdot \varrho$ . Daher lautet die Bedingung für die Aufwärtsbewegung des Körpers

$$P \cos \beta > G \sin \alpha + (G \cos \alpha - P \sin \beta) \cdot \varrho.$$

Der Reibungswiderstand wirkt immer der beachtlichsten Bewegung entgegen. Wenn wir daher die Bedingung aufstellen wollen, unter der sich der Körper trotz der Wirkung der Kraft  $P$  und infolge seines Gewichtes abwärts bewegen soll, so müssen wir den Reibungswiderstand parallel zur Bahn nach oben wirkend rechnen, ihm also das entgegengesetzte Vorzeichen wie in der obigen Ableitung geben. Dann folgt sofort

$$G \cdot \sin \alpha > P \cos \beta + (G \cos \alpha - P \sin \beta) \cdot \varrho.$$

In durchaus ähnlicher Weise werden die Bewegungsbedingungen für die Fälle aufgestellt, wo die Kraft eine andere Richtung hat, oder wo mehrere Kräfte auf den Körper wirken.

Genau dieselben Überlegungen müssen dann gemacht werden, wenn sich ein Körper ohne Drehung auf irgendeiner zwangsläufigen Bahn bewegen soll.

**Der Keil.** Um die Wirkungsweise des Keiles zu berechnen, muß man zuvor die Bahn des Keiles kennen. In Fig. 263 wird der Keil angedeutet, um einen Balken, der eine Hauswand abstützen soll, in die Höhe zu treiben. Hierbei wird der Keil wagerecht auf dem Erdboden durch eine Kraft  $P$  verschoben, und hierdurch wird die durch die Last des Balkens und der abgestützten Hauswand hervorgerufene Druckkraft  $L$  aufgehoben bzw. überwunden. In der schematischen Fig. 264 bedeutet  $BB'$  die Bahn des Keiles. Die Druckkraft  $L$  des Balkens ist durch die Strecke  $DA$  dargestellt, deren Richtung auf der Breitseite  $EG$  des Keiles senkrecht steht. Für die Bewegung kommt nur die Projektion  $AO$  der Druckkraft auf die Bahn in Frage. Diese Bewegungskomponente würde den Keil von links nach rechts schieben, wenn nicht von rechts nach links auf den Rücken des Keiles die Kraft  $P$  wirkte. Je nachdem die Kraft  $P$  den Keil nur halten oder ihn nach links bewegen soll, wodurch der Balken in die Höhe getrieben wird, muß  $P \geq AO$  sein. Es verhält sich  $AD : AC = EG : GH$  und, wenn  $P = AC$  ist,

Fig. 263. Anwendung des Keiles.

Fig. 264.

$$L : P = EG : GH.$$

Die von der Kraft  $P$  ausgeübte Druckkraft  $L$  verhält sich zur Kraft selbst wie  $EG : GH$ , also wie die Länge des Keiles zu seinem Rücken.

Hieraus folgt, daß die Druckkraft, die man mit einem Keile ausüben kann, um so größer ist, je länger und schmaler, d. h. je spitzer der Keil ist.

Auch in diesem Falle findet, obgleich man mit einer kleinen Kraft einen großen Druck ausüben kann, kein Arbeitsgewinn statt, da der wagerechte Weg des Keiles zu dem nach oben gerichteten Wege des unteren Balkenendes im umgekehrten Verhältnisse der Kräfte steht.

In Fig. 265 ist dargestellt, wie der Keil zum Holzspalten benutzt wird. Unter der Annahme, daß der Holzklötz nach beiden Seiten des Keiles gleich nachgiebig ist, geht die Wirkungsweise aus der schematischen Fig. 266 hervor. In diesem Falle fällt die Bahn des gleichschenkligen Keiles mit der Mittellinie zusammen. Wir können daher



Fig. 265. Anwendung des Keiles mit der Mittellinie zusammen. Wir können daher

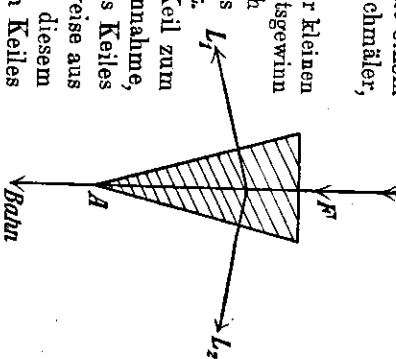


Fig. 266.



den Keil ansehen als zusammengesetzt aus zwei Keilen, die in der Art von Fig. 264 wirken. Es muß  $P$  gleichwertig den beiden senkrecht zu den Breitseiten des Keiles wirkenden Druckkräften  $L_1$  und  $L_2$  sein.

Die Wirkungsweise der meisten scharfen Instrumente (Beile, Messer, Nadeln, Nägel) beruht auf der Anwendung des Keiles. Die Instrumente dringen um so leichter ein, je scharfer und spitzer sie sind.

Der Einfluß der Reibung wird beim Keile ähnlich wie bei der geneigten Bahn berechnet.

§ 74. Die Schraube.

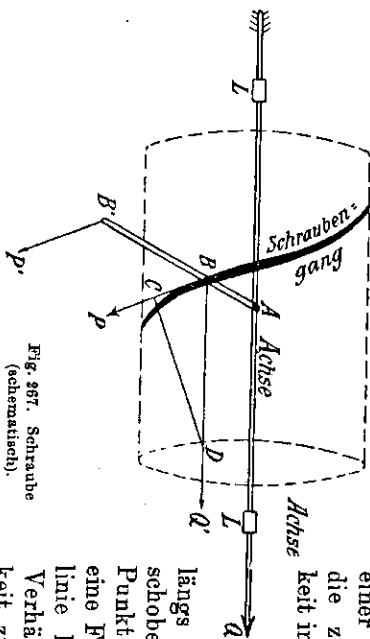


Fig. 267. Schraube (schematisch).

Die Schraubendrehung entsteht dadurch, daß sich ein Körper um eine Achse dreht, während sich die Achse selbst gleichzeitig in ihrer Richtung mit einer Geschwindigkeit  $Q$  in ihrer Richtung verschiebt, die zur Umdrehungsgeschwindigkeit  $P$  in einem unveränderlichen Verhältnis steht. Damit ein Körper eine Schraubendrehung ausführt, muß er längs einer Achse geradlinig verschoben werden können, und ein Punkt außerhalb der Achse muß eine Führung auf einer Schraubendrehungslinie haben, deren Steigung das Verhältnis der axialen Geschwindigkeit zur Umdrehungsgeschwindigkeit ist.

In der schematischen Zeichnung (Fig. 267) ist die Lagerung der Achse durch  $LL$  ausgeführt.  $B$  ist der längs der Schraubendrehungslinie zwangsläufig geführte Punkt der Schraube. Wirkt an dem Punkte  $B$  in der Richtung der Schraubendrehungslinie, also in der Richtung der Bahn, die Kraft  $P$ , so wird dadurch die Schraube so bewegt, daß sich die Achse in ihren Lagern in der Richtung des gedehnten Pfeiles bewegt. Die physikalische Aufgabe besteht darin, zu bestimmen, wie groß die in axialer Richtung wirkende Kraft  $Q$  ist, die da diese Achse geradlinig bewegt wird, kann die Kraft  $Q$  nach § 43 durch eine ihr gleich große, parallele, in  $B$  wirkende Kraft  $Q'$  ersetzt werden. Die Kraft  $Q'$  ist der Kraft  $P$  dann gleichwertig, wenn  $P$  gleich der Projektion von  $Q'$  auf die Bahn ist. Hieraus folgt: Es sind  $P$  und  $Q$  gleichwertig, wenn sich verhalten  $P : Q = BC : BD$ .

Dieses Verhältnis drückt die Schraubendrehung aus. Es ist auch gleich dem Verhältnis der Ganghöhe zur Ganglänge, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man nach Fig. 268 ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete gleich der Ganghöhe, dessen andere gleich dem Schraubenumfange ist, dessen Hypotenuse also gleich der Ganglänge ist, so um die Schraube herum legt, daß die Hypotenuse mit der Ganglänge zusammenfällt.

Eine in der Gangrichtung wirkende Kraft stellt zu der ihr gleichwertigen in der Richtung der Schraubendrehung wirkenden Kraft im Verhältnis der Ganghöhe zur Ganglänge.

Bei der praktischen Ausführung der Schraube wird meistens nicht nur ein Punkt längs einer Schraubendrehungslinie geführt, sondern sie besteht aus einer

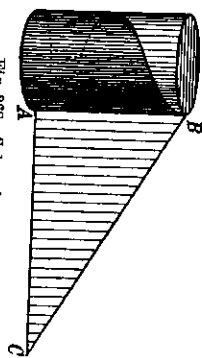


Fig. 268. Schraubendrehung.



Fig. 269. Schraubenspindel.



Fig. 270. Schraubenspindel.

zylindrischen Spindel, in die der Schraubengang in Form einer Schraubendrehungslinie körperlich eingeschnitten ist (Fig. 269). Die Schraubendrehung (Fig. 270) dient dann gleichzeitig als Führung für die Verschiebung längs der Achse und die längs der Schraubendrehungslinie erfolgende Schraubendrehung.

Die vorzüglichsten Anwendungen findet die Schraube bei der Schraubendrehung, bei der Schraubendrehung und als Befestigungsschraube. In Fig. 271 ist eine Schraubendrehung abgebildet, wie sie zum Heben großer Lasten, z. B. beim Anheben eines Wagens, gebraucht wird. Mittels dergleichen Schrauben hat man auch ganze Häuser in die Höhe gehoben.

Der Wirkungsgrad der Schraube unter dem Einfluß der Reibung. Bei der Schraubendrehung ruht die Last auf der Schraube und drückt nun die einzelnen Schraubengänge lotrecht gegen die Schraubendrehungslinie der Schraubendrehung. Die hierdurch verursachte Reibung vermindert das Güterverhältnis der Schraube.

Wir nehmen an, daß die Schraube flachgängig ist, und daß sie so leicht in der Mutter sitzt, daß sie

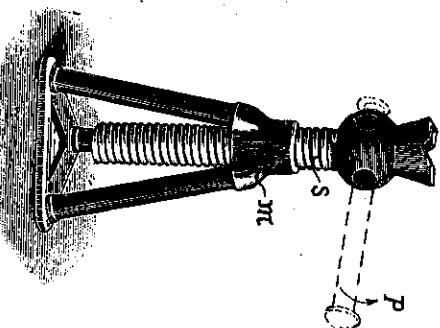


Fig. 271. Schraubendrehung.

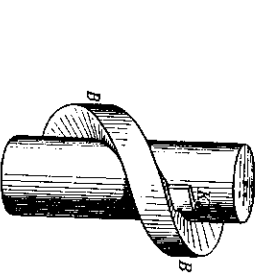


Fig. 272. Körper K auf Schraubengänge AB.

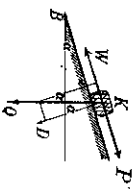


Fig. 273.

keinen seitlichen Druck erfährt, daß sie sich also nicht klemmt. In diesem Falle können wir die Reibung berechnen. Nach § 67 ist der Reibungswiderstand von der Größe der einander berührenden Flächen unabhängig. Wir machen daher keinen Fehler, wenn wir nach Fig. 272 die ganze Last durch den Körper  $K$  setzen denken, der auf dem einzelnen Schraubengänge  $AB$  entlang gleitet. Dann können wir ein einzelnes Element des Schraubenganges durch eine geneigte Bahn mit dem Neigungswinkel  $\alpha$  ersetzen. So entsteht die schematische Fig. 273. Hat

der Körper  $K$  das Gewicht  $Q$ , so wirkt bei reibungsloser Bewegung die Komponente  $W = Q \sin \alpha$  als abwärts gerichtete Bewegungskomponente der Last. Soll demnach die Last gehoben werden, so muß die Kraft  $P$  größer als  $Q \sin \alpha$  sein. Wenn wir die Reibung berücksichtigen wollen, so bedenken wir, daß die Last die Normalkraft  $D = Q \cos \alpha$  senkrecht zur Bahn erzeugt. Ist der Reibungskoeffizient  $\rho$ , so folgt als Reibungswiderstand  $R = Q \cos \alpha \cdot \rho$ . Dieser wirkt immer der beobachtigten Bewegung entgegen. Soll daher die mit Reibung bewegliche Last auf der Bahn durch die Kraft  $P'$  gehoben werden, so muß  $P' > W + R$  sein. Setzen wir hier die obigen Werte ein, so folgt

$$P' > Q \sin \alpha + Q \cos \alpha \cdot \rho.$$

Das Verhältnis der beiden Kräfte  $P : P'$  ist das gesuchte Güteverhältnis  $\eta$ , also ist

$$\eta = \frac{Q \sin \alpha}{Q \sin \alpha + Q \cos \alpha \cdot \rho} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \rho}.$$

Bei einer eisernen Schraube, die sich in einer eisernen Schraubenmutter ohne Klemmung bewegt, können wir unter der Voraussetzung, daß die Schraube gut geschmiert ist, als Reibungskoeffizienten  $\rho = 0,1$  annehmen. Wir berechnen dann das Güteverhältnis für die drei Neigungswinkel  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\alpha = 3^\circ$  und  $\alpha = 1^\circ$ . Der Neigungswinkel  $\alpha = 20^\circ$  entspricht annähernd der Annahme, daß die Ganghöhe der Schraube gleich ihrem Durchmesser ist; der Neigungswinkel  $\alpha = 3^\circ$  entspricht, annähernd der Steigung der gehäutlichen Schrauben, z. B. auch der Schraube mit dem sogenannten Löwenherzgewinde und mit dem Witworthgewinde.

$$\text{Für } \alpha = 20^\circ \text{ wird } \eta \approx \frac{0,34}{0,34 + 0,9 \cdot 0,1} = 0,8.$$

$$\text{Für } \alpha = 3^\circ \text{ wird } \eta \approx \frac{0,052}{0,052 + 0,99 \cdot 0,1} = 0,35.$$

$$\text{Für } \alpha = 1^\circ \text{ wird } \eta \approx \frac{0,017}{0,017 + 1,00 \cdot 0,1} = 0,15.$$

Aus diesen Beispielen ersieht man, daß das Güteverhältnis für kleine Steigungen der Schraube wesentlich kleiner ist als für große Steigungen. Man würde also auch bei der Schraube (ähnlich wie beim Flaschenzuge) eine Kraft durch Anwendung von Schrauben mit beliebig kleiner Ganghöhe nicht beliebig vergrößern können.

Ferner ersieht man leicht, warum eine Schraube mit kleiner Ganghöhe nicht von selbst durch eine in der Richtung der Schraubenachse wirkende Last aus der Mutter bewegt wird. Ersetzen wir den Reibungskoeffizienten nach § 67 durch den Reibungswinkel  $\varphi$  auf Grund der Gleichung  $\rho = \tan \varphi$ , so folgt, daß sich die Schraube nur dann infolge der Last bewegen kann, wenn der Steigungswinkel  $\alpha$  der Schraube größer ist als der Reibungswinkel  $\varphi$ . In dem oben angenommenen Beispiele, wo sich eine fachhängige eiserne Schraube ohne Klemmung in einer gutgeschmierten eisernen Schraubenmutter bewegt, ist der Reibungswinkel  $\alpha = 6^\circ$ ,  $\tan 6^\circ = 0,1$  ist. Es kann also erst dann die Schraube durch eine in der Richtung der Achse wirkende Last aus der Mutter gedrückt werden, wenn der Steigungswinkel der Schraube größer als  $6^\circ$  ist. Bei den gebräuchlichen Befestigungsschrauben aus Metall, die in einem metallischen Schraubengewinde sitzen, ist aber der Steigungswinkel etwa  $3^\circ$ . Also würde bei diesen, auch wenn sie gut geschmiert sind und ohne Klemmung sitzen, eine Gefahr für das Lockern nicht eintreten, wenn nur

ein axialer Druck erfolgt. Nun werden solche Schrauben aber gewöhnlich nicht geschmiert; außerdem werden sie meist mit etwas Klemmung eingesetzt, und endlich werden sie scharfhängig gemacht. Diese Faktoren verhindern die selbständige Lockerung in noch erheblichem Maße; es muß nur dafür gesorgt werden, daß keine drehende Kraft, die in der Richtung des Schraubenganges wirkt, auftritt. Durch eine drehende Kraft kann eine Bewegung verursacht werden, und eine solche benutzen wir ja auch beim Lösen der Schrauben.

Bei den zum Zusammenschrauben von Holz benutzten scharfhängigen Schrauben scheidet sich die Schraube beim Einschrauben in das Holz ihre Mutter selbst; daher sitzt eine solche Schraube mit Klemmung in der Mutter, und ihre Reibung ist daher wesentlich größer, als es in dem obigen Beispiele angenommen worden ist.

**Die Schraube ohne Ende, Schneckenwinde oder Bauwinde.** Der in Fig. 274 abgebildete Mechanismus besteht aus einer Schraube  $S$ , deren Spindel unverschiebbar, aber drehbar gelagert ist; ihre Gewindgänge greifen in die Zähne eines Zahnrades ein, das um eine durch seinen Mittelpunkt gehende Achse drehbar ist. Die einzelnen Zähne des Zahnrades können als Ausschnitte aus den Gewindgängen einer Schraubenmutter aufgefaßt werden. Wird die Schraube  $S$  um ihre Achse mit Hilfe der Kurbel  $K$  rechts herumgedreht, so werden die in die Schraubengänge eingreifenden Zähne des Zahnrades (das hier Schneckenrad genannt wird) von links nach rechts bewegt, und infolgedessen wird das ganze Schneckenrad rechts herumgedreht. Da bei fortgesetzter Drehung der Schraube die Zähne des Schneckenrades in ununterbrochener Folge ohne Ende in die Gewindgänge eingreifen, so heißt die ganze Vorrichtung eine Schraube ohne Ende.

Eine am Umfange der Schraube angreifende Kraft  $P$  bewegt die Zähne des Schneckenrades in der Richtung der Schraubenachse mit einer Kraft  $P'$  vorwärts, und es verhält sich  $P : P'$  wie der Umfang der Schraube zu ihrer Ganghöhe. In dem abgebildeten Mechanismus tritt eine weitere Vergrößerung der Kraft durch die Anwendung der Kurbel  $K$  und ferner dadurch auf, daß die zu hebende Last nicht am Umfange des Schneckenrades, sondern an einer Welle mit kleinerem Radius angreift. Die Wirkungsweise dieser Teile kann aber erst nach der Besprechung der Anwendung des Momentensatzes im nächsten Paragraphen behandelt werden. Wir kommen daher später noch einmal auf die Schraube ohne Ende zurück (§ 76).

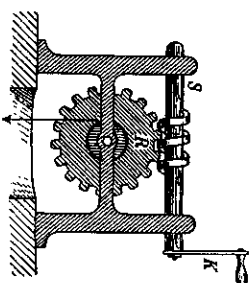


Fig. 274.  
Schneckenwinde.

### § 75. Anwendungen des Momentensatzes.

Auf die Anwendungen des Momentensatzes beim Hebel mit seinen Abarten ist schon auf S. 131 kurz hingewiesen worden.

In Fig. 275 ist dargestellt, wie eine zum Heben eines schweren Steines dienende Hebestange als zweiarmer Hebel wirkt, denn hier greifen die Last  $L$  und die hebende Kraft  $P$  (bzw.  $Q$ ) an verschiedenen Seiten der als Achse dienenden Unterlage  $A$  an. In Fig. 276 ist dargestellt, wie eine Hebestange als einarmer Hebel wirkt, denn hier wird das auf dem Erdboden

ruhende Ende  $A$  der Stange als Achse benutzt, während die Last  $L$  und die Kraft  $P$  an derselben Seite angreifen.

Wenn in Fig. 275 der Arm  $AB$  der Kraft fünfmal so groß ist, wie der Arm der Last, so wird die Kraft durch die Hebestange verfünffacht. Wenn die Kraft in  $C$  angreift und wenn die Kraft  $AC$  zehnmal so groß ist wie der Lastarm, so wird die Kraft in zehnfacher Größe auf die Last übertragen.



Fig. 275. Zweitarmliger Hebel.

Fig. 276. Einarmiger Hebel.

In diesem Falle wird die Kraft vergrößert; zugleich wird aber bei einer Drehung der Weg der Kraft, nämlich der von  $C$  beschriebene Bogen, verkleinert auf den von  $L$  beschriebenen Bogen, so daß das Produkt aus Kraft und Weg, also die geleistete Arbeit, unverändert bleibt. Diese Anwendung ist die am meisten gebräuchliche. In vereinzelt Fällen aber wird der Kraftweg auf Kosten der Kraftgröße vergrößert. Als bezeichnetes Beispiel hierfür möge die Wirkung des Hebels bei der Bewegung des Unterarmes durch den Bogenmuskel nach Fig. 277 besprochen werden. Hier greift der am Schulterblatt befestigte Muskel (der zweiköpfige, d. i. biceps)  $M$  an einer der Achse des Unterarmes (dem Ellenbogen) nahen Stelle  $A$  an. Wenn mit der Hand  $H$  eine Last  $L$  mittels eines Strickes  $Q$  gehoben werden soll, so muß die vom Bogenmuskel ausgeübte Kraft soviel mal so groß sein, wie die Länge des Unterarmes größer ist als der Abstand des Ansatzpunktes  $A$  des Bogenmuskels vom Ellenbogen  $E$ . Hierbei wird zugleich der Weg, den die Hand zurücklegt, in demselben Verhältnisse größer. Ein in dieser Weise benutzter Hebel wird Wurthebel genannt.

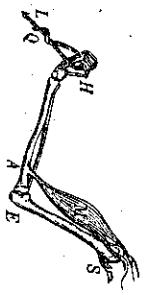


Fig. 277. Unterarm des Hebels.

Das Wellrad (Fig. 278) besteht aus einer um eine Achse drehbaren, zylindrischen Welle  $W$ , auf der eine zylindrische Scheibe  $R$  konzentrisch befestigt ist. Sowohl über die Welle, wie über das Rad sind Seile gelegt. Wenn eine Kraft  $P$  an dem um das Rad gelegten Seile zieht, so wird hierdurch das um die Welle gelegte Seil aufgewickelt und eine am Ende des Seiles befestigte Last  $L$  gehoben. Als Kraft- und Lastarm kommen die Radien des Rades und der Welle in Betracht; daher wird die Kraft in

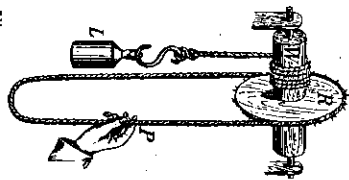


Fig. 278. Wellrad.

§ 75. Anwendungen des Momentensatzes

demselben Verhältnisse vergrößert, in dem der Radius  $r_1$  des Rades zu dem Radius  $r_2$  der Welle steht. Es ist also  $P = \frac{r_2}{r_1} \cdot L$ .

Der Einfluß der Reibung und des Biegunswiderstandes der beiden Seile wirkt in ähnlicher Weise, wie es bei der Rolle schon besprochen worden ist. Beträgt das Güterverhältnis (§ 72)  $\eta$ , so besteht die Gleichung

$$\eta \cdot P = \frac{r_2}{r_1} \cdot L.$$

In dieser Art sind die Winden hergestellt, die früher in großen Speichern allgemein zum Heben der Lasten auf die verschiedenen Böden angewandt worden sind.

Die Kurbel (Fig. 279) kann auf das Wellrad zurückgeführt werden, indem gewissermaßen nur ein Radius des Rades übriggeblieben ist, an dessen Ende die Kraft unmittelbar angreift. Auch der Haspel und das besonders auf Schiffen vielfach gebräuchliche Gangspill und das Göpelwerk sind im wesentlichen umgeformte Kurbeln.

Das Zahnrad besteht aus zwei Rädern, die an ihrem Umfang durch dort angebrachte Zähne so verbunden sind, daß sich gewissermaßen der Umfang des einen Rades auf dem des anderen ohne Gleitung abwickelt. Denken wir uns nach



Fig. 279. Kurbel.

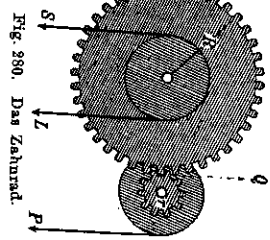


Fig. 280. Das Zahnrad.

Fig. 280 mit jedem der Zahnäder Wellen von den gleichen Durchmessern  $l$  fest verbunden, so wird die an dem Umfang der Welle des kleinen Zahnrades angreifende Kraft  $P$  auf den Umfang dieses Rades mit der Kraftgröße  $Q$  übertragen, und es ist  $P \cdot l = Q \cdot r$ . Die Kraft  $Q$  wird dann auf die Welle des großen Zahnrades mit der Kraftgröße  $S$  so übertragen, daß  $Q \cdot R = S \cdot l$  ist. Hieraus folgt die Proportion  $P : S = r : R$ , d. h. also, die Kraft wird in demselben Verhältnisse vergrößert, in dem die beiden Radien der ineinander eingreifenden Zahnäder stehen. Da nun diese Radien sich zueinander verhalten wie die Umfänge der beiden Räder und diese wieder wie die Anzahl der Zähne, so folgt, daß das Verhältnis der Zahnzahl beider Räder gleich dem Verhältnisse der beiden Kräfte ist. Beträgt die Zahnzahl des kleinen Rades  $n$  und die des großen Rades  $N$ , so besteht die Gleichung  $P \cdot N = S \cdot n$ . Eine an derselben Welle des großen Rades hängende Last  $L$  kann demnach durch die Kraft  $P$  gehoben werden, wenn  $P > \frac{n}{N} \cdot L$  ist.

Beträgt das durch die Achsenreibung beider Räder, durch die Reibung der Zähne gegeneinander und durch den Biegunswiderstand der beiden Seile bedingte Güterverhältnis  $\eta$ , so ist  $\eta \cdot P = \frac{n}{N} \cdot L$ . Der Quotient  $\frac{N}{n}$  bestimmt sowohl das Verhältnis der Kraftgrößen wie auch das umgekehrte Verhältnis der zurückgelegten Wege. Er wird das Übersetzungsverhältnis genannt.

Wenn mit den Achsen der beiden Zahnräder wiederum andere Zahnräder fest verbunden sind, so hat man, um das Übersetzungsverhältnis eines Zahnradsystems zu berechnen, das Produkt aller Übersetzungsverhältnisse der ineinander eingreifenden Zahnräder zu bilden. In den Uhrwerken benutzt man ein solches Zahnradsystem, um mittels einer an der Welle des größten Zahnrades angreifenden Feder oder eines dort wirkenden Gewichtes das sich am schnellsten drehende kleinste Zahnrad zu bewegen. Hierbei ist die Kraft, mit der das schnellste Zahnrad bewegt wird, meistens nur sehr gering, so daß demnach die Kraft der Feder oder des Gewichtes in erster Linie zur Überwindung der Reibungswiderstände aufgebraucht wird.

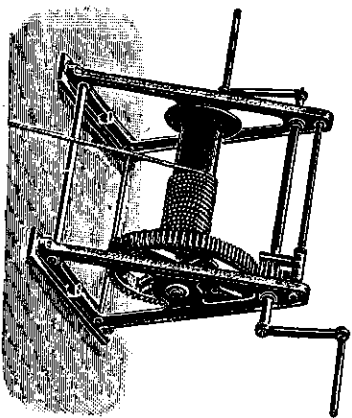


Fig. 281. Winde.

In Fig. 281 ist eine Winde abgebildet, die aus einer Kurbel, zwei Zahnrädern und einem Wellrad zusammengesetzt ist. Das Übersetzungsverhältnis ist gleich dem Produkte der Übersetzungsverhältnisse dieser drei Teile.

Sollen die Achsen der Zahnräder gegenüber geneigt sein, so müssen konische Zahnräder benutzt werden. Bei senkrecht aufeinanderstehenden Achsen werden auch wohl Kronräder angewandt. Endlich kann man die Zähne des größeren Zahnrades an der Innenseite seines Umfanges anbringen und an das kleinere Zahnrad innerhalb des größeren laufen lassen.

Der Treibriemen verbindet die Umfänge zweier Räder mit verschiedenen Radien so miteinander, daß die Umfangsgeschwindigkeit der beiden Räder gleich ist. In letzter Hinsicht bewirkt also der Treibriemen genau dasselbe

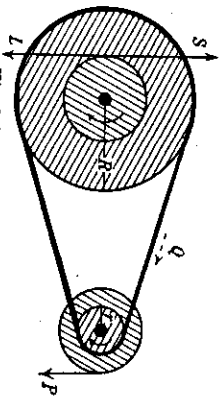


Fig. 282. Treibriemenanordnung.

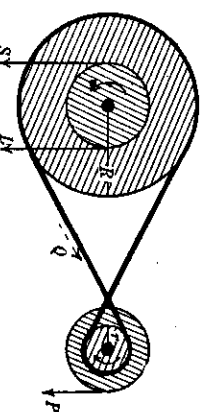


Fig. 283. Treibriemenanordnung.

wie die Zähne bei den Zahnrädern. Bei dem in Fig. 282 abgebildeten Treibriemen bewegen sich beide Räder in demselben Sinne, bei dem in Fig. 283 abgebildeten gekreuzten Riemen in entgegengesetzten Richtungen. Das Übersetzungsverhältnis ist durch das Verhältnis  $r/R$  der Radien der beiden Räder bestimmt. Durch den Treibriemen können zwei Räder verbunden werden, deren Achsen weit voneinander entfernt sind. Außerdem können die Achsen gegeneinander geneigt sein.

Die Wagen mit ihren verschiedenen Formen: gemeine Wage, Zeigerwage, Brückenwage usw. (mit Ausnahme der Federwage) bilden Anwendungen des

Hebels oder des Momentensatzes. Sie werden fast ausnahmslos in der Weise benutzt, daß zwei durch das Gewicht zweier Körper bestimmte Kräfte einander das Gleichgewicht halten. Dieses Gleichgewicht muß sicher (stabil) sein, damit ein auf der einen Seite wirkendes Übergewicht einen der Größe dieses Übergewichtes entsprechenden Ausschlag erzeugt.

Die gemeine Wage (Fig. 284) besteht aus einer festen Stange (dem Wagebalken), die um eine durch ihren Mittelpunkt gehende wagerechte Achse in lotrechter Ebene drehbar ist. Bei feinen Wagen besteht der Wagebalken aus einem leichten, aber trotzdem wenig biegsamen Rahmen aus dünnen Metallstäben. An den Enden des Wagebalkens sind zwei gleiche Wagschalen angebracht. Bei unbelasteten Wagschalen steht der Wagebalken wagerecht. Wenn die Wagschalen mit Körpern von gleichem Gewichte belastet werden, wenn also an beiden

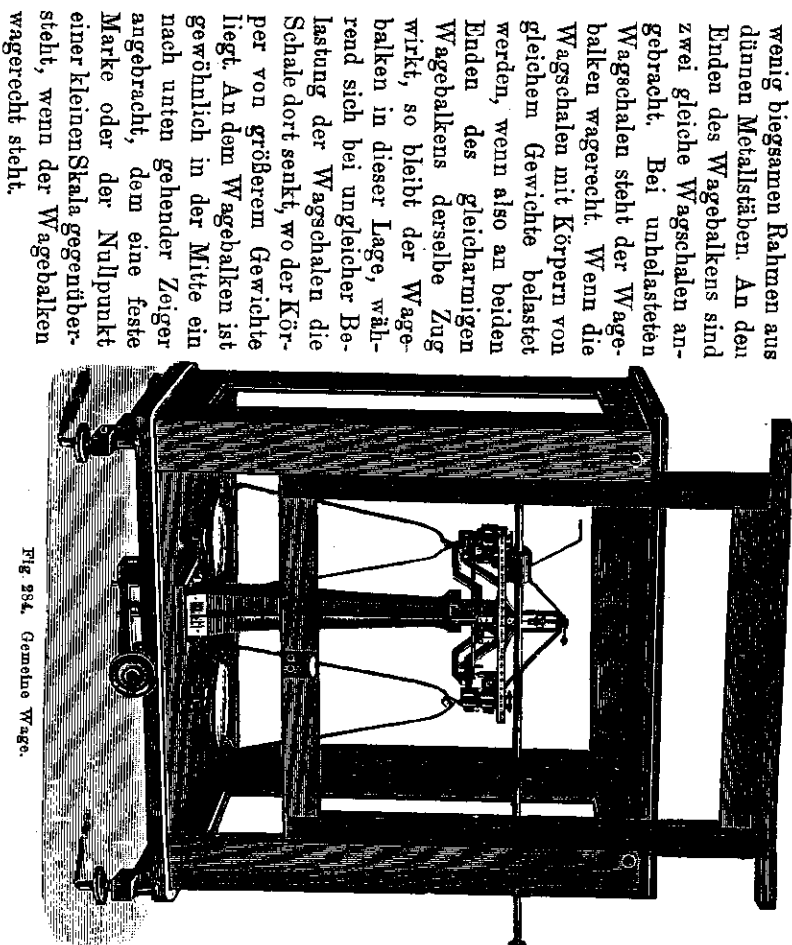


Fig. 284. Gemeine Wage.

Enden des gleicharmigen Wagebalkens derselbe Zug wirkt, so bleibt der Wagebalken in dieser Lage, während sich bei ungleicher Belastung der Wagschalen die Schale dort senkt, wo der Körper von größerem Gewichte liegt. An dem Wagebalken ist gewöhnlich in der Mitte ein nach unten gehender Zeiger angebracht, dem eine feste Marke oder der Nullpunkt einer kleinen Skala gegenübersteht, wenn der Wagebalken wagerecht steht.

Die Belastung der Wage darf nicht so groß sein, daß die Belastung hervorgerufene Formveränderung des Wagebalkens dauernd bestehen bleibt. Vielmehr muß der Wagebalken nach Aufhören der Belastung wieder seine ursprüngliche Form annehmen.

Man hat für physikalische Beobachtungen Wagen gebaut, die bei einer Belastung von einem Kilogramm noch einen meßbaren Ausschlag geben, wenn der eine Körper um ein tausendstel Milligramm schwerer ist als der andere. Derartige Wagen müssen, wenn eine Wägung ausgeführt werden soll, in einem die Wage umgebenden, sie vor Luftzug und Temperaturschwankungen

schriftlichen Glaskasten aufbewahrt werden (wie in Fig. 284). Die Wägung darf nur bei geschlossenem Kasten vorgenommen werden.

Um Bruchteile eines Milligramms zu wägen, ist in der Höhe der Drehungsachse des Wagebalkens eine geradlinige schmale Schiene (Reiterlineal) mit dem Wagebalken fest verbunden, die in hundert Teile der halben Balkenlänge eingeteilt ist, wobei der Nullpunkt der Teilung in der Mitte liegt. Man setzt mit einer von außen zu betätigenden Hebelvorrichtung kleine Zentigrammgewichte (Reitergewichte) von der Form Fig. 285. der Fig. 285 auf eine Stelle des Reiterlineals. Befindet sich das Reitergewicht auf dem Teilstrich 100, so wirkt es auf die Wage wie ein Zentigramm\*; befindet es sich über dem Teilstrich  $a$ , so wirkt es wie  $\frac{a}{100}$  c g\*.

Bei Präzisionswägungen ist auf den Auftrieb Rücksicht zu nehmen, den jeder Körper in der Luft erfährt (§ 107).

Die Empfindlichkeit einer Wage wird durch die Größe des Übergewichtes  $U$  bestimmt, das einen noch meßbaren Ausschlag gibt. Sie ist umgekehrt proportional dem Werte von  $U$  oder proportional dem reziproken Werte  $\frac{1}{U}$  dieses Übergewichtes.

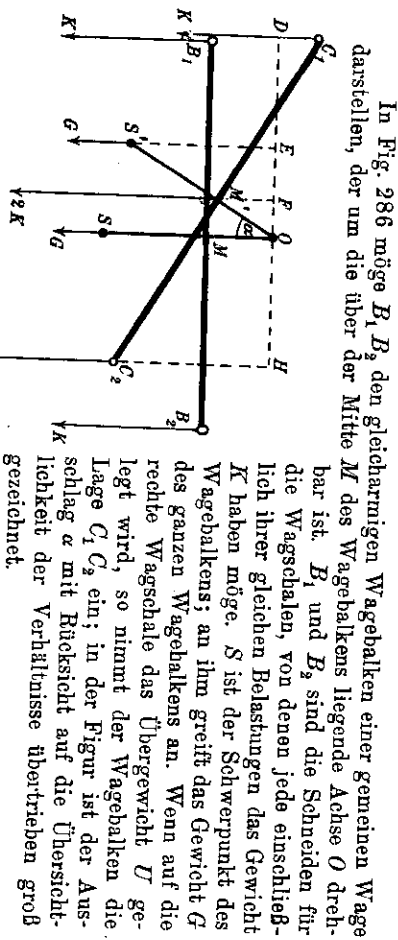


Fig. 286. Empfindlichkeit der Wage.

In Fig. 286 möge  $B_1, B_2$  den gleicharmigen Wagebalken einer gemeinen Wage darstellen, der um die über der Mitte  $M$  des Wagebalkens liegende Achse  $O$  drehbar ist.  $B_1$  und  $B_2$  sind die Schneiden für die Waagschalen, von denen jede einschließlich ihrer gleichen Belastungen das Gewicht  $K$  haben möge.  $S$  ist der Schwerpunkt des Wagebalkens; an ihm greift das Gewicht  $G$  des ganzen Wagebalkens an. Wenn auf die rechte Waagschale das Übergewicht  $U$  gelegt wird, so nimmt der Wagebalken die Lage  $C_1 C_2$  ein; in der Figur ist der Ausschlag  $\alpha$  mit Rücksicht auf die Unersticklichkeit der Verhältnisse übertrieben groß gezeichnet.

In der geneigten Lage greifen an dem Wagebalken die Kräfte  $K$  im Punkte  $C_1, C_2$ ;  $K + U$  im Punkte  $C_3$  und  $G$  im Punkte  $S$ ; an. Wir können die beiden in  $C_1$  und  $C_3$  angreifenden Kräfte durch eine in der Mitte  $M$  des Wagebalkens wirkende Kraft  $2K$  ersetzen. Ziehen wir nun durch die Achse  $O$  eine wagerechte Gerade und verlängern wir die Kräfte  $2K$  bis zu ihren Schnittpunkten mit dieser Geraden, so können wir die Momentengleichung aus der Figur ablesen; sie lautet:  $U \cdot OH = 2K \cdot OF + G \cdot OE$ . Hieraus folgt als Maß der Empfindlichkeit die Gleichung

$$\frac{1}{U} = \frac{OH}{2K \cdot OF + G \cdot OE}.$$

Aus diesem Ausdrucke folgt, daß die Empfindlichkeit im allgemeinen in hohem Maße von der Gesamtbelastung  $2K$  abhängt. Der Hebelarm  $OF$  der Gesamtbelastung

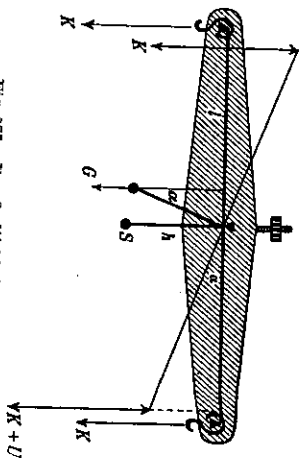
ist in der Formel für  $\frac{1}{U}$  positiv zu rechnen, wenn, wie in Fig. 286, die geometrische Mitte  $M$  der Schneiden sich unterhalb der Achse  $O$  des Wagebalkens befindet. Das Drehmoment  $2K \cdot OF$  ist also dann bei einer Drehung des Wagebalkens ein rücktreibendes, und die Empfindlichkeit  $\frac{1}{U}$  nimmt mit steigender Belastung  $2K$  ab. Wenn dagegen die Mittelschneide  $O$  des Balkens sich unter der geometrischen Mitte  $M$  befindet, so liegt  $OF$  nach der anderen Seite, das Drehmoment  $2K \cdot OF$  ist ein die Drehung des Wagebalkens förderndes und zählt in der Formel negativ. Es ist aus der Formel ersichtlich, daß die Empfindlichkeit  $\frac{1}{U}$  dann mit steigender Belastung zunimmt und sogar unendlich wird, wenn  $2K \cdot OF = G \cdot OE$  wird. Die Wage klappt dann beim kleinsten Übergewichte mangels eines rücktreibenden Drehmomentes völlig um. Der Wagebalken ohne Übergewicht befindet sich, wenn die letzte Beziehung gerade erfüllt ist, im indifferenten Gleichgewichte. Es verhält sich in diesem Falle das Balkengewicht zur Gesamtbelastung wie die Entfernung des Mittelpunktes der Endschneiden zu der des Balkenschwerpunktes von der Drehungsachse. Die Drehmomente des Balkengewichtes und der Gesamtbelastung heben sich gerade auf. Wird mit steigender Gesamtbelastung deren Drehmoment noch größer, so ist der Wagebalken bei wagerechter Stellung im labilen Gleichgewichte und kippt beim Verlassen dieser Lage von selbst um.

Der Arm  $OF$  der Gesamtbelastung wird um so kleiner, je geringer der Abstand der Achse  $O$  von der Verbindungsgeraden der Endschneiden  $C_1$  und  $C_2$  des Wagebalkens ist. Wenn die Mitte  $M$  des Wagebalkens mit der Achse  $O$  zusammenfällt, so wird  $OF = 0$ . Die Resultierende  $2K$  der Gesamtbelastung geht dann bei jeder Stellung des Wagebalkens durch die feste Achse, wird durch deren Gegenwirkung von der Gesamtbelastung  $2K$  unabhängig. Deshalb ist man bestrebt, bei der Ausführung der gemeinen Wage so zu verfahren, daß die Mittelschneide des Wagebalkens mit der geometrischen Mitte der beiden Endschneiden zusammenfällt. Für diesen Fall soll der Ausschlag  $\alpha$  des Wagebalkens auf Grund der Fig. 287 berechnet werden. Aus dieser Figur ergibt sich unter Benutzung der dort angegebenen Bezeichnungen die Momentengleichung

$$K \cdot l \cos \alpha + G \cdot h \sin \alpha = (K + U) \cdot l \cdot \cos \alpha.$$

$$\tan \alpha = \frac{U \cdot l}{h \cdot G}.$$

Fig. 287. Empfindlichkeit der Wage.



Hieraus folgt  
Der Ausschlag wächst also mit dem Übergewichte und mit abnehmendem Abstände  $h$  des Schwerpunktes von der Mittelschneide. Der Ausschlag bei einem gegebenen Übergewichte kann dadurch recht groß gemacht werden, daß man den Schwerpunkt sehr dicht an die Mittelschneide heranrückt. Um dieses auszuführen, bringt man oben an dem Wagebalken die in der Figur schematisch angedeutete Schraube an. Ferner folgt aus dem Ausdrucke, daß der Ausschlag mit dem Quotienten aus der Balkenlänge und dem Balkengewichte wächst. Früher hat man versucht, diesen

Quotienten dadurch recht groß zu machen, daß man die Balkenlänge  $l$  groß mache. Man hat aber hierbei übersehen, daß man dann auch das Gewicht des Wagebalkens vergrößern mußte, um ihn genügend fest zu machen. Nach § 61 ist der Biegungsfehler bei gleicher Belastung proportional mit der dritten Potenz der Länge. Die Dicke und daher Masse des Wagebalkens muß daher in viel höherem Verhältnis zunehmen als die Balkenlänge, wenn die Durchbiegung des Wagebalkens nicht vergrößert werden soll. Also erreicht man auf diesem Wege keine Vergrößerung der Empfindlichkeit.

Zuerst hat Bunge in Hamburg diesen Fehler erkannt, und er hat daraufhin Wagen mit recht kurzen Wagebalken gebaut, die sich, da sie sehr leicht gebaut werden können, in der Tat als viel empfindlicher erwiesen haben als die früheren Wagen mit langen Wagebalken. Außerdem haben sie den Vorteil, daß Wagen mit kurzen Wagebalken eine nur kleine Schwingungsdauer besitzen.

Bei der Ableitung des obigen Ausdrucks für  $\tan \alpha$  ist vorausgesetzt worden, daß sich der Wagebalken wie eine mathematische gerade Linie verhalte. Das tut er in Wirklichkeit aber nicht, da alle Körper unter dem Einflusse der Kräfte verbogen werden. Wenn nun eine Wage so gebaut ist, daß die Mittelschneide mit der Mitte des Wagebalkens genau zusammenfällt, wenn die Wage nicht belastet ist, so rückt diese Mitte sofort höher, sobald die Wage belastet wird, und die Empfindlichkeit wird von der Belastung  $2K$  in oben ausgeführter Weise abhängig. Man hat auch schon Wagen gebaut, deren Empfindlichkeit von der Belastung unabhängig wurde, indem man die Aufhängepunkte der Wagschalen höher als die Mittelschneide  $M$  legte. Die theoretische Zunahme der Empfindlichkeit kann dann so abgeglich werden, daß sie sich gerade mit der Abnahme der Empfindlichkeit bei wachsender Belastung wegen der Durchbiegung der Wagebalken aufhebt.

Als praktisches Maß für die Empfindlichkeit muß angegeben werden, wie groß das Übergewicht ist, das bei einer gegebenen Gesamtbelastung einen bestimmten Ausschlag, etwa den eines Skalenteiles, gibt.

Die Brückenwage<sup>1)</sup>, von der Fig. 288 ein schematisches Bild gibt, besteht aus dem auf der Schneide  $O$  liegenden eigentlichen Wagebalken  $GOAB$ , an dessen einem Ende  $G$  die Wagschale zur Aufnahme der Gewichtsstücke hängt. An dem anderen Ende des Wagebalkens hängen drehbar die beiden Stangen  $AC$  und  $BE$ .  $E$  ist das eine Ende eines wahren Hebels, dessen anderes Ende auf der festen Schneide  $F$  ruht. In  $C$  ist das eine Ende der sogenannten Brücke befestigt, deren anderes Ende um eine Schneide  $D$  drehbar ist, die auf dem Hebel  $EF$  ruht. Wenn die Proportion besteht  $OA : OB = FD : FE$ , so bewegt sich die Brücke bei einer virtuellen Verschiebung (§ 76) immer parallel zu sich selbst auf und ab. Wenn angenommen wird, daß  $OA = \frac{1}{n} OB$  und demnach auch  $FD = \frac{1}{n} FE$  ist, so würde sich, wenn  $A$  um  $1$  mm gesenkt wird,  $B$  um  $n$  mm senken; also würde sich auch  $E$  um  $n$  mm und demnach wiederum  $D$  um  $1$  mm senken. Die beiden Enden  $C$  und  $D$  der Brücke senken sich demnach um denselben Betrag.

Eine beliebige Last  $L$ , die auf der Brücke ruht, erzeugt in  $C$  und  $D$  zwei Anlagendrucke  $X$  und  $Y$ . Der in  $C$  wirkende Druck  $X$  überträgt sich in umveränderter Größe nach  $A$ . Der in  $D$  wirkende Druck  $Y$  überträgt sich auf Grund des Momentensatzes an den Punkt  $E$  und erzeugt hier den Druck  $\frac{1}{n} Y$ , der sich

1) Erfunden von Quintenz und Schwillgné in Straßburg 1823.

in unveränderter Größe auf  $B$  überträgt. Da  $OB = n \cdot OA$  ist, so wird der in  $B$  wirkende Druck in  $n$ -facher Größe auf den Punkt  $A$  übertragen. Hieraus folgt, daß sich der in  $D$  wirkende Anlagendruck  $Y$  durch das Stangensystem in unveränderte Größe auf  $A$  überträgt. Daher wirkt in  $A$  die Summe der beiden Anlagendrucke  $X + Y = Q$ . Die auf der Brücke liegende Last  $L$  wirkt also durch Vermittlung des Stangensystemes so, als ob sie unmittelbar in  $A$  hänge.

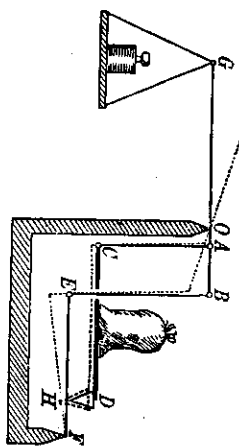


Fig. 288. Brückenwage.

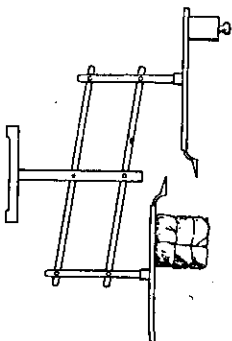


Fig. 289. Tafelwage.

Wenn das Verhältnis der beiden Wagebalken  $OG : OA = 10 : 1$  ist, so heißt die Brückenwage Dezimalwage, weil das Gewicht der in der Wagschale liegenden Gewichtstücke nur gleich dem zehnten Teile des Gewichtes der auf der Brücke liegenden Last zu sein braucht.

Wenn sich  $OG : OA = 100 : 1$  verhält, so entsteht eine Zentesimalwage.

Bei der in Fig. 289 schematisch abgebildeten Robervalschen<sup>1)</sup> Tafelwage, die in Kaufmännern vielfach benutzt wird, wird durch das doppelte Stangensystem bewirkt, daß sich beide Wagschalen nur parallel zu sich selbst auf und ab bewegen können. Die Folge davon ist, daß eine auf die eine Wagschale gelegte Last und die auf die andere Wagschale gelegten Gewichtstücke immer in derselben Weise wirken, unabhängig davon, an welcher Stelle der Wagschalen sie liegen.

### § 76. Das Prinzip der virtuellen Arbeit.

Als Ausdruck der Erfahrung gilt in der Mechanik der Satz von der Erhaltung der Arbeit (S. 111):

*Bei jeder (verlustlosen) mechanischen Kraftübertragung bleibt die von einer Kraft geleistete Arbeit unverändert.*

Dieser Satz gilt ganz allgemein. Durch Bewegungshindernisse, wie z. B. die Reibung, eintretende scheinbare Arbeitsverluste sind immer mit einer entsprechenden Wärmenentwicklung verbunden. Man hat sich gewöhnt, diese auftretenden Wärmemengen als der verlorenen Arbeit gleichwertige Energie anzusehen.

In Fig. 290 sei schematisch ein Mechanismus  $M$  angedeutet, dessen Einzelheiten nicht bekannt zu sein brauchen, der aus beliebigen Stangen,

1) Giles Personne, der sich nach seinem Geburtsort de Roberval nannte, Franzose, lebte 1602—1676, verdienstvoller Physiker seiner Zeit, erfand außer der Tafelwage 1670 noch das Aräometer (s. d.).

Seilen, Rädern usw. zusammengesetzt sein kann. Er möge die im Punkte  $A_1$  wirkende Kraft  $P_1$  nach dem Punkte  $A_2$  so übertragen, daß hier die Kraft  $P_2$  erzeugt wird. Wirkt nun die Kraft  $P_1$  längs des in ihrer Kraftrichtung liegenden Weges  $A_1 B_1 = s_1$ , so leistet sie die Arbeit  $P_1 \cdot s_1$ . Infolge der Vermittlung des Mechanismus  $M$  wirkt dann die Kraft  $P_2$  längs des in ihrer Kraftrichtung liegenden Weges  $A_2 B_2 = s_2$  und verrichtet demnach die Arbeit  $P_2 \cdot s_2$ . Der Satz von der Erhaltung der Arbeit wird erfüllt durch die Gleichung  $P_1 s_1 = P_2 s_2$ .

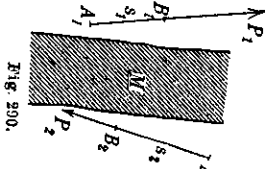


Fig. 290.

**Virtuelle Arbeit.** Diesen Satz können wir auch anwenden, um der Gleichgewichtsbedingung zweier (oder mehrerer) Kräfte an einem Mechanismus eine allgemeine Form zu geben: Wenn sich die beiden (oder mehrere) Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  (Fig. 291) unter Vermittlung irgendeines Mechanismus das Gleichgewicht halten, so können wir durch eine sehr kleine, von außen wirkende Ursache eine verschwindend kleine Verschiebung der Angriffspunkte aus der Gleichgewichtslage hervorzubringen oder herorgebracht denken (virtuelle) Verschiebung, durch die z. B. der Angriffspunkt  $C_1$  der Kraft  $P_1$  um die Strecke  $\delta s_1$  nach  $D_1$  in der Richtung der Kraft verschoben wird, während gleichzeitig der irgendwie gekoppelte Angriffspunkt  $C_2$  der Kraft  $P_2$  um die Strecke  $\delta s_2$  entgegen der Richtung der Kraft  $P_2$  verschoben wird. Hierbei leistet die Kraft  $P_1$  die virtuelle Arbeit  $P_1 \cdot \delta s_1$ , die Kraft  $P_2$  die negative virtuelle Arbeit  $-P_2 \cdot \delta s_2$ .

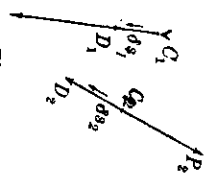


Fig. 291.

**Prinzip der virtuellen Arbeit.** Es besteht Gleichgewicht, wenn die Summe der beiden virtuellen Arbeiten gleich Null ist. Als allgemeingültig hat sich das Prinzip erwiesen:

*Ein System von Kräften, die an einem durch beliebige Mechanismen verbundenen Punktssysteme angreifen, ist dann im Gleichgewichte, wenn bei einer virtuellen Verschiebung die Gesamtarbeit Null ist.* (Johann Bernoulli 1717 Lagrange 1788.)

Stellt man dieses *Prinzip von der virtuellen Arbeit* an die Spitze der Mechanik, so kann man aus diesem heraus alle Sätze über die mechanische Kraftübertragung (ohne Berücksichtigung der Bewegungswiderstände) ableiten. Als Beispiele behandeln wir den Differentialflaschenzug, die Schraubwinde und die Zugspannung in einem Schwungrade.

**Der Differentialflaschenzug** (Fig. 292) besteht aus zwei auf derselben Achse sitzenden und fest miteinander verbundenen Rollen mit den ungleichen Radien  $R$  und  $r$ , um die eine Kette ohne Ende in der aus der Figur ersichtlichen Weise so gelegt ist, daß sie in den Nuten der Rollen nicht gleiten kann. In der einen Schlinge der Kette hängt eine lose Rolle, an deren Achse die zu hebende Last  $L$  befestigt

1) virtuel (franz.) = fähig zu wirken, möglich.

ist. An dem Kettenende, das über die Rolle mit dem großen Radius geht, greift die Kraft  $P$  an, die die Last  $L$  heben soll. Die Kraft  $P$  hält der Last  $L$  das Gleichgewicht, wenn bei einer virtuellen Verschiebung die gesamte virtuelle Arbeit gleich Null ist. Wenn durch eine kleine virtuelle Verschiebung die Doppelrolle um den kleinen Winkel  $\delta\alpha$  gedreht wird, so verschiebt sich der Angriffspunkt der Kraft  $P$  um die Strecke  $R \cdot \delta\alpha$  in der Kraftrichtung; hierbei leistet die Kraft  $P$  die virtuelle Arbeit  $P \cdot R \cdot \delta\alpha$ . Die Kette I wird um dieselbe Strecke  $R \cdot \delta\alpha$  verkürzt, und die Kette II wird um die Strecke  $r \cdot \delta\alpha$  verlängert; also wird die Schlinge der Kette, an der die Last  $L$  hängt, um  $(R - r) \cdot \delta\alpha$  verkürzt, und da diese Verkürzung sich auf beide Kettenenden verteilt, so wird die Last um  $\frac{1}{2}(R - r) \cdot \delta\alpha$  gehoben. Demnach leistet die Last die negative Arbeit  $-\frac{1}{2}L(R - r) \cdot \delta\alpha$ . Die Summe der virtuellen Arbeiten soll Null sein, folglich besteht die Gleichung

$$P \cdot R \cdot \delta\alpha - \frac{1}{2}L \cdot (R - r) \cdot \delta\alpha = 0,$$

und hieraus folgt die Gleichgewichtsbedingung

$$P \cdot R = \frac{1}{2}L \cdot (R - r).$$

Bei der in Fig. 274 abgebildeten Schneckenwinde berechnen wir die Strecke, um die die Last  $Q$  gehoben wird, wenn die Kurbel  $K$  einmal herumgedreht wird. Die Länge der Kurbel sei  $l$ , die Anzahl der Zähne des Schneckenrades sei  $n$  und der Radius der Welle, um die das Seil gelegt ist, an der die Last  $Q$  hängt, sei  $r$ . Wenn die Kurbel einmal herumgedreht wird, so legt der Angriffspunkt der Kraft den Weg  $2\pi l$  zurück. Hierbei dreht sich die Schraube ohne Ende einmal herum und bewegt demnach das Schneckenrad um einen Zahn weiter, also dreht sich das Schneckenrad, da es  $n$  Zähne hat, um den  $n$ ten Teil einer vollständigen Umdrehung. Um denselben Betrag dreht sich auch die Welle, und daher verkürzt sich das Tragseil der Last um den  $n$ ten Teil des Umfanges der Welle, also um  $\frac{1}{n} \cdot 2\pi r$ . Folglich entspricht dem Wege  $2\pi l$  des Angriffspunktes der Kraft  $P$  der Weg  $\frac{1}{n} \cdot 2\pi r$  des Angriffspunktes der Last  $Q$ . Bei einer ganzen Umdrehung der Kurbel leistet die Kraft die Arbeit  $P \cdot 2\pi l$ , während die Last die negative Arbeit  $-\frac{1}{n} \cdot 2\pi r$  leistet. Da die Gesamtarbeit gleich Null sein soll, so muß die Gleichung bestehen  $P \cdot 2\pi l - \frac{1}{n} \cdot 2\pi r = 0$ . Hieraus folgt die Gleichgewichtsbedingung für die Schraubwinde

$$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{l} \cdot Q.$$

**Die Zugspannung in einem Schwungrade.** Ein ringförmiges Schwungrad habe die Masse  $m$ , den inneren Radius  $r$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Betrachtet wir ein Massenelement  $\Delta m$  des Schwungrades, so greift an diesem eine Fliehkraft im Betrage  $\Delta m \cdot \omega^2 \cdot r$  an (S. 98), die senkrecht zum Umfange des Rades nach außen gerichtet ist. Könnte das Teilchen dem Zuge folgen, so würde es sich bei einer virtuellen Verrückung um  $\Delta r$  vom Mittelpunkt des Ringes entfernen, die virtuelle Arbeit wäre also  $\Delta m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \Delta r$ . Da alle Teile des Schwungrades

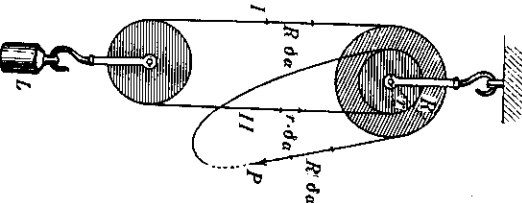


Fig. 292. Differentialflaschenzug.

in gleicher Weise nach außen streben, ist das Solwungrad infolge der Umdrehung etwas elastisch gedehnt und in einem Spannungsstate. Diese Zugspannung im Radkranze ist bestrebt, den Radumfang zu verkleinern, also zwei beliebige seiner Punkte einander zu nähern. Würden wir durch den Radkranz (Fig. 293) einen Schnitt  $AB$  führen, so würden die beiden Enden des auseinander geschrittenen Ringes sich infolge der Spannung voneinander entfernen. Das könnten wir verhindern, wenn wir von außen eine Kraft  $P$  aufwenden, die die beiden Enden zusammenhält; es muß dann  $P$  der Spannung im Radkranze das Gleichgewicht halten, also die Spannung durch die Größe  $P$  gemessen werden. Denken wir uns nun alle

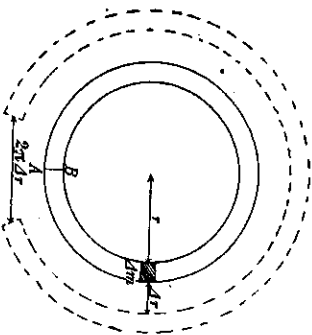


Fig. 293.

Punkte des Rades um die virtuelle Verrückung  $\Delta r$  nach außen verschoben, so entfernen sich beim Schritte  $AB$  die Enden voneinander um die Strecke  $2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r = 2\pi\Delta r$ . Während der geringen Verrückung  $\Delta r$  und  $2\pi\Delta r$  ist die Spannung im Radkranze unverändert  $P$  geblieben. Somit ist gegen die Kraft  $P$ , welche die Enden am Schnitt  $AB$  zusammenzuhalten strebt, die Arbeit  $P \cdot 2\pi\Delta r$  geleistet worden. Die bei der Verrückung der Massenelemente  $\Delta m$  geleisteten virtuellen Arbeiten werden positiv gerechnet, da die virtuellen Verrückungen in der Kraftrichtung erfolgen; die am Schnitt geleistete Arbeit wird negativ gerechnet, da die virtuelle Verrückung  $2\pi\Delta r$  im entgegengesetzten Sinne her folgt. Die Summe der virtuellen Arbeiten ist Null. Daher gilt

$$\sum \Delta m \cdot v^2 \cdot r \cdot \Delta r - P \cdot 2\pi\Delta r = 0 \quad \text{oder}$$

$$v^2 r \Delta r \sum \Delta m = P \cdot 2\pi\Delta r \quad \text{und} \quad P = \frac{v^2 \cdot m \cdot r}{2\pi}$$

d. h. die tangential im Radkranze auftretende Zugspannung ist der 2te Teil der Summe der gesamten radial gerichteten Fliehkräfte.

**Virtuelle Arbeit der Zwangs- und Trägheitskräfte.** Die Mechanismen bilden zwangsläufige Systeme, deren Bewegungsmöglichkeiten durch Zwänge wie Achsenlager, Gleitbahnen vorgeschrieben sind. Die Zwangskräfte verhindern Bewegungen in ihrer Richtung, stehen also auf den Bahnen der möglichen Bewegung für jeden Systemteil senkrecht. Nach § 40 ist für einen unter dem Einflusse von Zwangskräften  $II$  und treibenden Kräften  $P$  stehenden Massenpunkt die Gleichgewichtsbedingung, daß die Vektorsumme aller Kräfte Null sein muß:

$$\Sigma (II + P) = 0.$$

Führt der Massenpunkt eine kleine mögliche, d. h. durch die Zwangskräfte erlaubte Bewegung, virtuelle Bewegung aus, so leisten die Zwangskräfte, da sie auf dieser Bewegung senkrecht stehen, keine Arbeit; es ist für eine virtuelle Verrückung  $\delta s$ :

$$\Sigma II \delta s = 0.$$

Es muß bei Gleichgewicht daher  $\Sigma P \cdot \delta s = 0$

sein, d. h. die Resultierende aller Kräfte  $P$  auf der virtuellen Bewegung senkrecht stehen.

Ist die gedachte Bewegung  $\delta s$  des Massenpunktes keine virtuelle, sondern eine beliebige, nicht zu den Zwangskräften senkrechte, so verschwindet  $II\delta s$  nicht, und die Gleichgewichtsbedingung lautet, daß für jedes beliebige  $\delta s$

$$\Sigma II \cdot \delta s + \Sigma P \cdot \delta s = 0$$

sein muß, was nur möglich ist, wenn  $\Sigma (II + P)$  selbst verschwindet.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit kann man auch zur Formulierung der Bedingung dynamischen Gleichgewichtes zwischen treibenden Kräften  $P$ , Trägheitskräften  $T$  und Zwangskräften  $II$  verwenden. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte verschwindet, wenn also:

$$\Sigma (P + T + II) \cdot \delta s = 0$$

ist. Die Produkte  $II\delta s$  verschwinden, weil Zwangskräfte senkrecht zu den virtuellen Verschiebungen sind, also muß

$$\Sigma (P + T) \cdot \delta s = 0$$

sein, d. h. die vektorielle Resultierende aus den Kräften  $P$  und  $T$  muß senkrecht zu der möglichen Bewegung sein, um Gleichgewicht bestehen zu lassen.

Handelt es sich um ein System von Massenpunkten, z. B. um einen starren Körper, so hat man die Summe über die bei einer virtuellen Verschiebung des Körpers stattfindenden Verschiebungen  $\delta s$  aller seiner Massenpunkte auszuaddieren, der Faktor  $\delta s$  tritt alsdann unter das Summenzeichen. Es braucht dann die Resultierende der Kräfte auf einen Massenpunkt nicht senkrecht auf dessen virtueller Bewegung zu stehen, die virtuelle Arbeit mithin nicht für jeden Teil des Systemes zu verschwinden, weil sie durch andere Teile der Summe, durch die virtuelle Arbeit anderer Systemteile aufgehoben werden kann.

Die Betrachtungen dieses Abschnittes bilden eine Vereinigung des d'Alembert'schen Prinzips (§. 120) mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit.

1) Jean le Rond d'Alembert (1717—1783), einer der Mathematiker der klassischen Zeit Frankreichs.



*Zwei Massen stehen einander an mit einer Kraft, die dem Produkte der Massen direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.*

Haben zwei Massen  $m$  und  $m_1$  voneinander die Entfernung  $r$ , so ist die Anziehungskraft bestimmt durch die Gleichung

$$\mathfrak{P} = f \cdot \frac{m \cdot m_1}{r^2} \quad 1)$$

Newton legte diesem Gesetze universelle Gültigkeit bei. Das Newtonsche Gravitationsgesetz hat sich in vollem Umfange bei allen Beobachtungen bewährt. Newton konnte die Gültigkeit des Gravitationsgesetzes nur für die großen Massen der Weltkörper unseres Planetensystems zeigen. Zwar vermutete er zwischen den kleineren Massen auf der Erde auch eine solche Anziehung, doch hielt er sie für zu gering, als daß sie durch Versuche nachgewiesen werden könnte. Aus diesem Grunde war es Newton auch nicht möglich, den Faktor  $f$  in obiger Gleichung zu bestimmen, da ihm die Größe der Massen der Weltkörper selbst unbekannt war.

Daß die Anziehung dem Produkte der Massen proportional ist, folgt aus dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion auf folgende Weise:

Die Masseneinheit von 1 g möge auf eine zweite gleiche Masseneinheit von 1 g in einem gegebenen Abstände  $r$  mit der Kraft  $P$  wirken, so wirkt die Masse von  $m$  g auf die zweite Masse von 1 g in derselben Entfernung mit der Kraft  $m \cdot P$ , da jede einzelne Gramm-Masse die Kraftwirkung  $P$  ausübt. Daraus folgt, daß die zweite Gramm-Masse auf die erste Masse  $m$  auch die Kraftwirkung  $m \cdot P$  ausübt. Setzen wir nun an die Stelle der zweiten Gramm-Masse die Masse von  $m_1$  g, so wirkt jede einzelne Gramm-Masse auf die erste Masse  $m$  mit der Kraft  $m \cdot P$ , also die Masse  $m_1$  mit der Kraft  $m \cdot m_1 \cdot P$ . Hieraus folgt, daß die gegenseitige Anziehung der beiden Massen  $m$  und  $m_1$  gleich  $m m_1 \cdot P$  ist. Die Anziehung ist also dem Produkte der Massen proportional.

### § 78. Die Gravitationskonstante.

In der Gleichung  $\mathfrak{P} = f \cdot \frac{m m_1}{r^2}$  kommen die drei Größen: Kraft, Masse und Länge vor, für die schon früher als Maßenheiten: Dyn, Gramm und Zentimeter festgesetzt worden sind. Daher können wir über die Konstante  $f$ , die Gravitationskonstante, nicht mehr willkürlich verfügen, sondern müssen sie durch Versuche bestimmen.

Es gelang zuerst Cavendish<sup>2)</sup> im Jahre 1798, die Gravitationskonstante

1) Legen wir in die eine Masse  $m$  den Anfangspunkt der Zählung von  $r$ , so daß  $r$  den Richtungssinn von  $m$  nach  $m_1$  hin hat, so ist die Kraft, mit der  $m_1$  nach  $m$  gezogen wird, diesem Richtungssinne entgegengesetzt gerichtet. Um das zum Ausdrucke zu bringen schreibt man häufig folgerichtiger:  $\mathfrak{P} = -f \cdot \frac{m \cdot m_1}{r^2}$ .

2) Henry Cavendish (1731–1810).

## Sechster Abschnitt.

# Gravitation. Potentialtheorie.

### § 77. Gravitation.

Alle Körper haben auf der Erdoberfläche dieselbe Fallbeschleunigung (Abgesehen von der durch die Achsendrehung der Erde verursachten Verminderung durch die Zentrifugalkraft und der durch die Abplattung der Erde verursachten Abweichung); daraus schließen wir, daß die nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtete Anziehungskraft der Erde, die Schwerkraft, den Massen § 32 das Gewicht als Kraftmaß benutzen.

In § 21 haben wir abgeleitet, daß die Bewegung des Mondes auf eine nach dem Mittelpunkte der Erde hin gerichtete Zentralbeschleunigung des Mondes zurückzuführen ist. Es liegt nahe, als Ursache für die Zentralbeschleunigung ebenfalls Anziehungskräfte, die von der Erde ausgehen, anzunehmen. Nun ist aber die Zentralbeschleunigung des Mondes  $\frac{1}{3600}$  der Fallbeschleunigung in einem Punkte der Erdoberfläche. Da die Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkte 60mal so groß ist wie die eines Punktes der Erdoberfläche, und da  $60^2 = 3600$  ist, so führt ein Vergleich der Zentralbeschleunigung des Mondes mit der Fallbeschleunigung auf der Erde zu dem Ergebnisse, daß die Anziehungskraft der Erde dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Diese Überlegung wurde von Newton 1666 zuerst ausgeführt.

Aus dem zweiten Keplerschen Gesetze folgerten wir schon in § 27 (S. 76 n. 78), daß die Planeten bei ihrem Umlaufe um die Sonne eine nach der Sonne gerichtete zentrale Beschleunigung erfahren, woraus wir jetzt folgern können, daß die Sonne der Ausgangspunkt einer Zentralkraft ist. Aus dem ersten Keplerschen Gesetze folgerten wir, daß die zentralen Beschleunigungen des Planeten in seiner Bahn dem Quadrate der Entfernungen seiner Bahnpunkte von der Sonne umgekehrt proportional sind. Aus dem dritten Keplerschen Gesetze folgerten wir, daß die zentralen Beschleunigungen aller Planeten zur Sonne ebenfalls dem Quadrate ihrer Entfernungen umgekehrt proportional sind. Jetzt ziehen wir den Schluß, daß die Ursache eine Zentralkraft ist, die sowohl bei demselben Planeten in seinen einzelnen Bahnpunkten wie auch bei den verschiedenen Planeten dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Newton (1687) schloß aus diesem das Gravitationsgesetz:

mit einer Versuchsordnung, die durch Fig. 294 schematisch dargestellt ist, zu bestimmen, die man *Drehwaage*<sup>1)</sup> nennt.

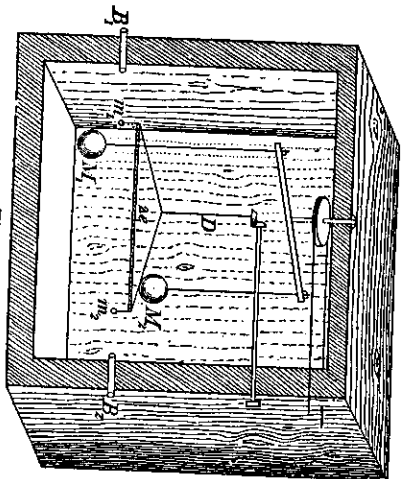


Fig. 294.

In einem gegen Temperaturschwankungen geschützten Räume war an einem befestigt, an dessen Enden an zwei langen Stangen zwei Bleikugeln  $M_1$  und  $M_2$  hingen, von denen jede die Masse  $M = 158$  kg hatte. Unter der Drehungsachse des Gerätes war ein Torsionskopf, an dem ein dünner versilberter Kupferdraht befestigt war, von außen drehbar angebracht. An dem unteren Ende des Kupferdrahtes hing mittels zweier dünner gespreizter Drähte ein leichter Querk balken aus dünnem Holze von derselben Länge wie der Querbalken des großen Gerätes, an dessen Ende zwei kleine Bleikugeln  $m_1$  und  $m_2$  von je  $m = 730$  g Masse aufgehängt waren. Das Torsionsmoment des Aufhängerdrahtes wurde durch

Torsionsschwingungen bestimmt, und zwar betrug die Schwingungsdauer  $T = 1680$  sec. Zwischen der Schwingungsdauer  $T$  eines in Torsionsschwingungen versetzten Körpers, seinem Torsionsmomente  $M_T$  (Direktionskraft) und dem Trägheitsmomente  $\Theta$  besteht (§ 57 u. 62) die Gleichung  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{M_T}}$ , woraus folgt  $M_T = \frac{4\pi^2 \cdot \Theta}{T^2}$ .

Das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers berechnet sich, wenn man die geringe Masse des Holzbalkens vernachlässigt, zu  $\Theta = 2m\ell^2$ . Folglich ist das Torsionsmoment des Drahtes  $M_T = \frac{4\pi^2 \cdot 2m\ell^2}{T^2}$ . Werden in diese Gleichung die Werte aus den Cavendishschen Versuchen  $m = 730$  g,  $\ell = 91,44$  cm,  $T = 1680$  sec eingesetzt, so folgt  $M_T = \frac{8\pi^2 \cdot 730 \cdot 91,44^2}{1680^2} = 170,75$  (dyn · cm).

Cavendish drehte das Gerüst mit den beiden großen Bleikugeln, die in ihrer Anfrangslage von den beiden kleinen Bleikugeln möglichst weit entfernt lagen, so weit, daß sie den kleinen Kugeln bis auf  $r = 20,32$  cm genähert waren. Hierdurch wurden die kleinen Kugeln um  $\delta = 1,946$  cm aus ihrer Gleichgewichtslage abgelenkt. Die Ablenkung wurde mittels zweier durch die Wände des Beobachtungsräumtes hindurchgehender Fernrohre  $B_1$  und  $B_2$  gemessen.

Die großen Bleikugeln erzeugen durch die Anziehung auf die kleinen das Kraftmoment  $2\mathfrak{P}e$ , wenn  $\mathfrak{P}$  die Anziehungskraft auf jeder Seite ist. Dieses Kraftmoment muß demjenigen Drehungsmomente des Aufhängerdrahtes, welches der Ablenkung entspricht, gleich sein. Der Ablenkung  $\delta$  entspricht die Winkelrehung  $\frac{\delta}{\ell}$ , folglich ist der in Rechnung zu bringende Betrag des Drehungsmomentes  $M_T \cdot \frac{\delta}{\ell}$ .

1) Die Drehwaage wurde 1768 von dem engl. Pfarrer John Michell erdacht, aber erst durch A. Coulomb (1736—1806) (S. 203) in weiteren Kreisen bekannt.

Hieraus folgt, wenn Kraftmoment und Drehungsmoment des verdrehten Drahtes gleich gesetzt werden,  $2\mathfrak{P}e = M_T \cdot \frac{\delta}{\ell}$ , also ist  $\mathfrak{P} = \frac{M_T \cdot \delta}{2e\ell}$ . Unter Benutzung der schon bekannten Werte  $M_T = 170,75$  Erg,  $\delta = 1,946$  cm,  $e = 91,44$  cm folgt  $\mathfrak{P} = \frac{170,75 \cdot 1,946}{2 \cdot 96,44^2} = 0,01987$  Dyn. Die Masse  $M = 158000$  g zieht die Masse  $m = 730$  g in einer Entfernung von  $r = 20,32$  cm mit der Kraft von  $P = 0,01987$  Dyn an.

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze ist  $\mathfrak{P} = f \cdot \frac{Mm}{r^2}$ , also ist  $f = \frac{\mathfrak{P}r^2}{Mm}$ . Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Größen sind nach den Cavendishschen Versuchen bekannt. Sie ergeben für die Gravitationskonstante den Wert  $f = \frac{0,01987 \cdot 20,32^2}{158000 \cdot 730} = 7,11 \cdot 10^{-8}$ . Cavendish führte 29 verschiedene Versuchsreihen zur Bestimmung der Gravitationskonstanten aus und erhielt als Mittelwert aus allen diesen Versuchen:

$$f = 6,717 \cdot 10^{-8}$$

Die Bestimmung der Gravitationskonstanten ist später von verschiedenen Physikern nach einem Verfahren, welches dem Cavendishschen Verfahren ähnlich ist, wiederholt worden. Ein etwas anderes Verfahren wandte zuerst Jolly<sup>1)</sup> 1878 an, indem er mittels einer sehr empfindlichen Waage die Anziehung bestimmte, die eine Bleikugel auf eine über ihr angebrachte Quecksilberkugel ausübt.

Die neuesten und zuverlässigsten Versuche sind von Richarz<sup>2)</sup> und Krigar-Menzel 1896 in einer unterirdischen Kasmatte in Spandau ausgeführt worden. An den Enden einer empfindlichen Waage wurden zwei gleiche Massen von 1 kg mittels zweier Fäden so aufgehängt, daß sich die eine Masse oberhalb, die andere unterhalb eines Bleiklotzes von etwa 2 m<sup>3</sup> Rauminhalt befand. Der Bleiklotz verminderte das Gewicht des unter ihm hängenden Kilogrammstückes und vermehrte das Gewicht der über ihm hängenden Masse. Die Gewichtsdiﬀerenz wurde gemessen und hieraus die Gravitationskonstante berechnet. Aus diesen Versuchen ergab sich für die Gravitationskonstante der Wert

$$f = (6,685 \pm 0,011) \cdot 10^{-8} \left[ \frac{\text{Dyn} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}^2} \right],$$

welcher Wert jetzt als der zuverlässigste angesehen wird.

Setzt man in das Gravitationsgesetz für die beiden Massen die Masseneinheit, für die Entfernung die Längeneinheit ein, so folgt:

Eine Masse von 1 g zieht eine andere in der Entfernung von 1 cm befindliche Masse von 1 g mit der Kraft von  $6,685 \cdot 10^{-8}$  Dyn, d. i. ungefähr  $1/15000000$  eines Dyn, an. Man nennt diese Kraft auch die *astronomische Krafteneinheit*.

In dem Newtonschen Gravitationsgesetze kommen nur physikalische Größen vor, über deren Einheiten nach dem Grundsätze des absoluten Maß-

1) G. Ph. von Jolly (1809—1884), Prof. der Physik in München.

2) Franz Richarz, 1860—1920, prom. in Berlin 1884, von 1884—1896 Bestimmung der Gravitationskonstanten, hab. in Bonn, 1896 o. Prof. d. Phys. in Greifswald, 1901 daes. Marburg.

systemes (S. 23) verfügt worden ist; daher kann man das Gesetz nicht in einer Form schreiben, in welcher die Proportionalitätskonstante verschwindet (s. dazu S. 23).

### § 79. Mittlere Erddichte, Masse der Himmelskörper.

Die Anziehung der Erde erteilt jedem in der Nähe der Erdoberfläche befindlichen Körper die Beschleunigung  $g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$  (gal);  $d$  h, die auf die Masse  $m$  von der Erde ausgeübte Anziehungskraft hat die Größe  $\beta = m \cdot g$  Dyn. Nehmen wir an (die Berechtigung zu dieser Annahme wird in § 83 nachgewiesen werden), daß die gesamte Erdmasse  $M$  auf einen außerhalb der Erde befindlichen Körper durch ihre Gravitation ebenso wirkt, wie wenn die Erdmasse im Mittelpunkt der Erde vereinigt wäre, so können wir nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze diese Erdmasse berechnen. Wir kennen nämlich die Anziehungskraft und die Entfernung des Erdmittelpunktes von dem angezogenen Körper, den Erdradius  $r = 6370 \text{ km}$ . Es ist diese Anziehungskraft

$$\beta = \frac{f \cdot M m}{r^2}.$$

Sie muß dem Werte  $m \cdot g$  gleich sein, woraus folgt

$$f \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot g.$$

Aus dieser Gleichung kann die Größe  $M$  der Erdmasse berechnet werden. Die Bestimmungen der Gravitationskonstanten  $f$  lassen also zugleich das großartige Ergebnis zu, die ganze Erde zu „wiegen“. Als Erfolg dieser Anwendung pflegt man gewöhnlich statt der außerordentlich großen Zahl, welche die Masse der Erde ausdrückt, die mittlere Erddichte anzugeben, d. h. diejenige Dichte, die eine homogene Kugel haben müßte, wenn sie der Erde an Rauminhalt gleich wäre und dieselbe Anziehung ausüben würde wie die Erde.

Bezeichnen wir die mittlere Erddichte mit  $\rho_m$ , so ergibt sich für die Masse der Erde der Wert  $M = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_m$ . Diesen Wert setzen wir in die obige Gleichung ein und erhalten

$$\frac{f \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_m \cdot m}{r^2} = m g, \text{ woraus folgt } \rho_m = \frac{3g}{f \cdot 4\pi r}.$$

Da nun  $2\pi r$  der Erdumfang  $40000 \text{ km} = 4 \cdot 10^8 \text{ cm}$ ,  $g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ ,  $f = 6,685 \cdot 10^{-8}$  ist, so folgt  $\rho_m = \frac{6,685 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^8}{3 \cdot 981} = 5,50 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

Die mittlere Erddichte beträgt  $5,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

Die mittlere Erddichte der obersten Schichten der Erde hat etwa den Wert:  $2,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  (mittlere Gesteinsdichte). Hieraus folgt, daß in größeren Tiefen der Erde Körper angehäuft sein müssen, die eine bedeutend größere Dichte haben als die Schichten in der Nähe der Erdoberfläche.

Die einzigen sicheren Kenntnisse über einige Eigenschaften des Erdinnern haben wir in den letzten Jahren durch die Beobachtung und das Studium der Erdbeben erhalten. Aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen können wir einen Schluß auf die Elastizitätsverhältnisse der

jenigen Teile des Erdkörpers machen, die von den Erdbebenwellen durchlaufen werden. Wir wissen nun, daß die Ausbreitung der Erdbebenwellen teilweise längs der Erdoberfläche, teilweise durch das Erdinnere, durch einen Teil des Erdkernes, erfolgt. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines auf einen Körper ausgeübten Stoßes von der Dichte des Körpers und von seinem Elastizitätsmodul abhängt (S. 201), so können wir, da wir die mittlere Dichte der Erde kennen, auch einen Schluß auf den Elastizitätsmodul der Erde ziehen.

Nach dem augenblicklichen Stande der Erdbenenforschung nimmt man an, daß die Erde aus einem metallischen Kerne besteht, der von einem Steinmantel umgeben ist. Die Dichte des Erdkernes beträgt etwas über  $8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ; sein Elastizitätsmodul ist etwa 5mal so groß wie der des Stahles, wahrscheinlich infolge des auf ihm lastenden außerordentlich hohen Druckes. Man nimmt wegen der Dichte, der Startheit und der magnetischen Eigenschaft der Erde als Hauptbestandteil des Erdkernes Eisen an. In Übereinstimmung hiermit steht, daß etwa die Hälfte der Meteorite, welche aus dem Weltraum auf die Erde schlugen und welche vielleicht als Trümmerstücke eines der Erde benachbarten Planeten oder gar als unangebranntes Baumaterial der Planeten betrachtet werden dürfen, aus gediegenem reinem Eisen bestehen. Der den Metallkern der Erde umgebende Steinmantel hat eine Mächtigkeit von etwa 1500 km.

Über den Aggregatzustand des Erdinnern wagt man keine Vermutung auszusprechen, da es unbekannt ist, wie sich ein Körper bei den im Innern der Erde herrschenden ungeheuren Drucken und wahrscheinlich auch sehr hohen Temperaturen verhält.

Bewegt man sich in das Erdinnere hinein, so nimmt anfangs die Fallbeschleunigung zu, da man sich der Hauptmasse der Erde mehr nähert; denn die Dichte der Erde ist ja im Innern größer als an der Oberfläche. Dann aber muß eine Abnahme der Fallbeschleunigung eintreten; denn wenn man tiefer in das Erdinnere hineingeht, so wirken die oberhalb befindlichen Erdmassen anziehend nach oben und vermindern daher die Anziehung nach dem Mittelpunkt. Im Mittelpunkt der Erde selbst muß die Anziehung, also auch die Fallbeschleunigung, gleich Null sein.

Die Zunahme der Fallbeschleunigung beim Eindringen in das Erdinnere ist von Airy<sup>1)</sup> 1827 und 1834 in den Steinkohlenbergwerken von Harton in Cornwall nachgewiesen worden; er fand, daß die Fallbeschleunigung der Erde in einer Tiefe von 393 m um  $\frac{1}{19200}$  ihres an der Oberfläche der Erde beobachteten Wertes zugenommen hat. Beobachtungen in noch größeren Tiefen sind noch nicht ausgeführt worden.

**Masse der Sonne.** Auf S. 76 fanden wir für die Beschleunigung, welche ein Planet auf die Sonne hin erfährt,  $\gamma = \frac{4\pi^2 a^3}{T^3} \cdot \frac{1}{r^2}$ . Ist nun die Sonnenmasse  $M$ ,

1) G. B. Airy (1801—1892), Direktor der Sternwarte in Greenwich.

die Planetenmasse  $m$ , so muß nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze die Beschleunigung

$$\gamma = \frac{f \cdot M \cdot m}{m \cdot r^2} = \frac{f \cdot M}{r^2}$$

sein. Setzen wir das mit dem vorigen gleich, so erhalten wir

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{f}$$

Hierin sind  $a$ , die grobe Halbachse der Planetenbahn, und  $T$ , die Umlaufzeit des Planeten, durch astronomische Beobachtungen bekannt. Für Erde und Mars wurde auf S. 77 angegeben  $\frac{R^3}{T^2} = \frac{a^3}{T^2} = 3,29 \cdot 10^{24}$ . Daher ist  $M = \frac{4\pi^2 \cdot 3,29 \cdot 10^{24}}{6,69 \cdot 10^{-8}} = 1,98 \cdot 10^{33}$  g. In ähnlicher Weise kann man die Masse eines jeden Zentralkörpers berechnen, wenn man die Umlaufzeit und den Abstand eines Trabanten kennt, z. B. die Masse des Mars oder des Jupiter aus den Bahnen und der Umlaufzeit ihrer Monde. Die Masse der Venus hingegen, von der kein Mond bekannt ist, oder die Masse des Erdmondes müssen aus anderen, weniger leicht zugänglichen Beobachtungen gefunden werden.

§ 80. Die Arbeit ist unabhängig vom Wege.

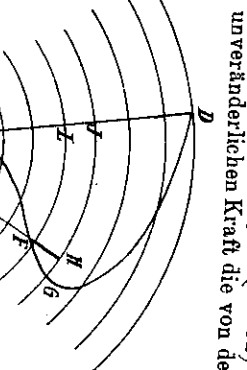


Fig. 295.

Wir haben in § 36 (S. 102) nachgewiesen, daß in dem Wirkungsbereiche einer unveränderlichen Kraft die von der Kraft geleistete Arbeit unabhängig von der Bahn ist, längs der sie geleistet wird, daß sie also nur von der Anfangs- und Endlage des Körpers abhängig ist. Dieser Satz gilt aber auch für den Fall, daß die Kraft nach einem bestimmten Punkte gerichtet ist und in irgendeiner Weise von der Entfernung abhängt, wie nunmehr bewiesen werden soll:

Es befinde sich (Fig. 295) die Masse  $m$  in  $O$ , die Masse  $m_1$  in  $C$ ;  $m_1$  werde von  $C$  nach  $D$  bewegt. Es erfolge die Bewegung einmal geradlinig längs  $CD$ , das andere Mal krummlinig längs der Bahn  $CFGD$ . Es soll nachgewiesen werden, daß die zur Bewegung erforderliche Arbeit in beiden Fällen dieselbe ist. Wir legen um  $O$  eine große Anzahl von konzentrischen Kugeln, die so dicht nebeneinander liegen, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kugelflächen liegendes Stück der gekrümmten Bahn als geradlinig betrachtet werden kann. Ein solches Stück sei  $FG$ . Wir ziehen den Radius  $OF$  und verlängern ihn bis zum Durchschnitte  $H$  mit der durch  $G$  gehenden Kugelfläche. Dann grenzen wir ein Gebiet ab, das das Dreieck  $FGH$  vollständig enthält und welches so klein ist, daß wir die Kräfteerrichtungen in allen Punkten dieses Gebietes als parallel ansehen können. Zur Bewegung des Körpers von  $F$  nach  $G$  ist dieselbe Arbeit erforderlich, wie zur Bewegung von  $F$  nach  $H$ . Der zwischen denselben Kugelflächen liegende Bestandteil  $LJ$  des Weges ist dem Wege  $FH$  gleich. Die in den einzelnen Punkten von  $LJ$  wirkenden Kräfte sind den Kräften gleich, die in den einzelnen Punkten des Weges  $FH$  wirken. Die zur Bewegung des Körpers längs  $FH$  erforderliche

Arbeit ist also gleich der Arbeit, die zur Bewegung des Körpers längs  $LJ$  erforderlich wäre.

Diese Überlegung können wir für jeden kleinen Bestandteil des gekrümmten Weges  $CFGD$  ausführen, denn jedem kleinen Teil des gekrümmten Weges entspricht derjenige Teil des geraden Weges  $CD$ , der zwischen denselben Kugelflächen liegt. Die Summation der Arbeit längs des gekrümmten Weges ergibt die Gesamtarbeit, die dann gleich der Gesamtarbeit längs des geraden Weges ist. Ein Raum, innerhalb dessen sich gewisse Kräfte bemerkbar machen, und zwar derart, daß einem jeden Raumpunkte eine nach Größe und Richtung ganz bestimmte Kraft zugeordnet ist, nennt man ein Kraftfeld oder kurz ein Feld. In diesem Sinne spricht man vom Schwerfeld, elektrischen Felde, magnetischen Felde. Damit können wir den Satz aussprechen:

Im Newtonschen Gravitationsfelde (d. h. in dem Raume, wo das Newtonsche Gesetz gilt) ist die zum Bewegen eines Körpers von einem Punkte zu einem anderen erforderliche Arbeit unabhängig vom Wege.

§ 81. Die Arbeit in einem von mehreren Kräften erzeugten Felde.

In dem Punkte  $M$  (Fig. 296) mögen auf einen Körper die Kräfte  $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$  wirken. Die Kräfte haben die Resultierende  $R$ . Dann ist  $MR$  die Bahn, längs der der frei bewegliche Körper  $M$  unter dem Einflusse der Kräfte  $P$  bewegt wird. Die Richtungen der Kräfte  $P_1, P_2 \dots P_n$  mögen mit  $MR$  die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  einschließen, wobei die Winkel  $\alpha$  alle im Sinne der wachsenden Winkel gezählt werden. Dann ist nach § 39

$$R = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n = \sum P \cos \alpha.$$

Bewegt man den Körper  $M$  entgegen der Richtung der Resultierenden  $R$  um die Strecke  $MN = s$ , die so klein ist, daß sich auf ihr weder die Richtung noch die Größe der Resultierenden  $R$  ändert, so ist zu dieser Bewegung die Arbeit  $A = R \cdot s$  erforderlich.

Multipliziert man die beiden Seiten der Gleichung  $R = \sum P \cos \alpha$  mit  $s$ , so folgt

$$R s = \sum P \cos \alpha \cdot s.$$

Hierin bedeutet jeder Summand  $P \cos \alpha \cdot s$  auf der rechten Seite der Gleichung die Arbeit, die bei der Bewegung des Körpers längs der Strecke  $s$  geleistet werden müßte, wenn er nur von dieser einen Kraft  $P$  beeinflugt würde. Nennen wir diese Einzelarbeiten

$$A_1 = P_1 \cos \alpha_1 \cdot s, \quad A_2 = P_2 \cos \alpha_2 \cdot s \text{ usw.},$$

so nimmt die rechte Seite der Gleichung die Form  $\sum A_n$  an.

Die linke Seite der Gleichung ist die Arbeit  $A$ , die geleistet werden muß, um den Körper längs der Wegstrecke  $s$  entgegen der Richtung der Resultierenden  $R$  zu bewegen. Es folgt daher  $A = \sum A_n$ , in Worten:

Wird ein von mehreren Kräften beeinflusster Körper in dem Kraftfelde bewegt, so ist die zur Bewegung erforderliche Arbeit gleich der algebraischen Summe der

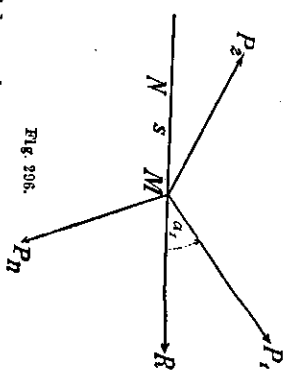


Fig. 296.

*Einzelarbeiten, die geleistet werden müßten, wenn man den Körper um dieselbe Wegstrecke, beeinflusst von jeder einzelnen Kraft, bewegen würde.*

Bei der Ableitung dieses Satzes haben wir vorausgesetzt, daß die Bewegung nur längs einer so kleinen Wegstrecke erfolgte, daß sich die Richtung und Größe der Resultierenden nicht ändern. Den Satz können wir aber auf jede beliebig große Wegstrecke erweitern, indem wir die große Wegstrecke in so kleine Teile zerlegen, daß für jedes einzelne Wegsegment der Satz Gültigkeit hat. Die Gesamtarbeit längs der großen Wegstrecke finden wir dann durch Summation der Einzelarbeiten der Wegsegmente.

Während die Resultierende mehrerer Kräfte durch wiederholte Anwendung des Parallelogrammgesetzes oder durch das Kräftepolygon, also durch geometrische Summation, gefunden wird, wird die zur Bewegung in einem von mehreren Kräfte beeinflussten Kraftfeld erforderliche Arbeit durch algebraische Summation (unter Berücksichtigung der Vorzeichen) der Einzelarbeiten gefunden; daher gilt allgemein für jedes beliebige Kraftfeld der Satz:  
*Die Arbeit ist eine Skalargröße.*

**§ 82. Die Arbeit im Newtonschen Gravitationsfeld. Das Potential.**

Der Raum, der eine Masse  $M$  umgibt, besitzt ein Kraftfeld, in dem jede andere Masse  $m$  unter der Einwirkung der von  $M$  ausgehenden Anziehung (Gravitation) steht. Durch die Einführung einer Masse  $m$  in das von  $M$  erzeugte Gravitationsfeld wird das von  $M$  erzeugte Kraftfeld verändert, da auch von  $m$  Gravitationskräfte ausgehen. Wir wollen im folgenden voraussetzen, daß  $m$  im Vergleich vernachlässigen können; mit dieser Voraussetzung deckt sich die Annahme, daß  $M$  seinen Ort nicht verändert, wenn  $m$  bewegt wird.



Beindet sich (Fig. 297)  $M$  in  $A$  und  $m$  in  $B$ , und ist  $AB = r$ , so übt  $M$  auf  $m$  nach dem Gravitationsgesetz die Anziehungskraft  $P = f \cdot \frac{Mm}{r^2}$  aus. Es soll die Arbeit berechnet werden, die erforderlich ist, um  $m$  entgegengesetzt der anziehenden Kraft bis zum Punkte  $C_1$  zu bewegen, der von  $A$  die Entfernung  $r_1 = r + \Delta r$  hat.

Die Arbeit wird durch das Produkt aus Kraft und Weg berechnet. Der Weg ist  $BC_1 = r_1 - r$ . Wenn die zwischen den beiden Massen wirkende Kraft längs des ganzen Weges  $BC_1$  unverändert bliebe, so würde die Arbeit durch den Ausdruck  $f \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot (r_1 - r)$  bestimmt sein. In Wirklichkeit hat aber bei der Bewegung des Körpers von  $B$  nach  $C_1$  die Kraft auf die Größe  $f \cdot \frac{Mm}{r_1^2}$  abgenommen. Hätte die Kraft auf der ganzen Wegstrecke diese Größe gehabt, so betrüge die aufgewandte Arbeit  $f \cdot \frac{Mm}{r_1^2} \cdot (r_1 - r)$ . Der zu berechnende wirkliche Wert  $A$  der Arbeit liegt zwischen den beiden berechneten Grenzen. Es besteht also die Ungleichung

$$f \cdot \frac{Mm}{r_1^2} \cdot (r_1 - r) < A < f \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot (r_1 - r),$$

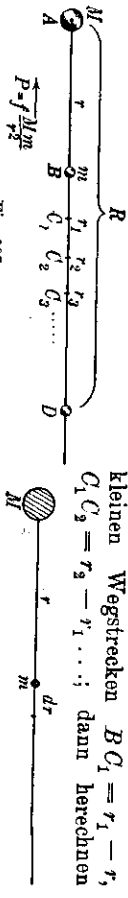
§ 82. Die Arbeit im Newtonschen Gravitationsfeld. Das Potential 251  
welche sich umformen läßt in

$$\frac{r}{r_1} < f \cdot \frac{A r_1 r}{f \cdot Mm \cdot (r_1 - r)} < \frac{r_1}{r}.$$

Die beiden Quotienten auf der linken und rechten Seite der Ungleichung sind das Verhältnis der beiden Entfernungen  $r_1$  und  $r$  der beweglichen Masse  $m$  von der festen Masse  $M$  und ihr reziproker Wert. Die beiden Quotienten nähern sich um so mehr der Einheit, je weniger  $r_1$  von  $r$  verschieden ist. Wenn wir daher vorläufig annehmen, daß die Bewegung der Masse  $m$  längs einer unendlich kleinen Wegstrecke erfolgt, für welche  $\frac{r_1}{r} = 1$  gesetzt werden kann, so wird

$$\frac{A \cdot r_1 r}{f \cdot Mm \cdot (r_1 - r)} = 1. \text{ Hieraus folgt } A = f \cdot Mm \cdot \frac{r_1 - r}{r_1 r} = f \cdot Mm \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Diese Gleichung gilt einstweilen nur unter der Voraussetzung, daß die beiden Punkte  $B$  und  $C_1$  einander sehr nahe liegen. Wenn die Masse  $m$  längs des endlichen Weges  $BD$  (Fig. 298) bewegt werden soll, so zerlegen wir zur Berechnung der hierzu erforderlichen Arbeit den Weg  $BD = R - r$  in die sehr kleinen Wegstrecken  $BC_1 = r_1 - r$ ,  $C_1 C_2 = r_2 - r_1, \dots$ ; dann berechnen



wir für jedes dieser Wegsegmente die Arbeiten und addieren sie, so ergibt sich als Gesamtarbeit

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n \\ = f \cdot Mm \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + f \cdot Mm \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \dots + f \cdot Mm \cdot \left( \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right) \\ = f \cdot Mm \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right).$$

In der Klammer heben sich alle Summanden mit Ausnahme der ersten und letzten fort, und wir erhalten  $A = f \cdot Mm \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_n} \right)$ .

Der Ausdruck stimmt mit dem vorher berechneten der Form nach überein. Er gilt aber jetzt für die Bewegung von  $m$  längs einer endlichen Strecke.

Bei Anwendung der Differential- und Integralrechnung vereinfacht sich die Ableitung folgendermaßen (Fig. 299):

Es werde die Masse  $m$ , die sich in der Entfernung  $r$  von  $M$  befindet, von der Masse  $M$  um das Wegsegment  $dr$  fortbewegt, längs dessen die von  $M$  auf  $m$  ausgeübte Kraft den beständigen Wert  $P = f \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$  hat. Das zu dieser Bewegung erforderliche Arbeitselement beträgt

$$dA = f \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot dr.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$A = \int f \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot dr = f \cdot Mm \int \frac{dr}{r^2}.$$

Soll die Masse  $m$  aus der Entfernung  $r$  in die Entfernung  $R$  gebracht werden, so hat man als Integrationsgrenzen  $r$  und  $R$  zu nehmen; es wird also

$$A = f \cdot Mm \int_r^R \frac{dr}{r^2} = f \cdot Mm \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^R,$$

woraus folgt

$$A = f \cdot Mm \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Um die Masse  $m$  geradlinig in dem von  $M$  erzeugten Gravitationsfelde längs einer Strecke zu bewegen, deren Verlängerung durch  $M$  geht und deren Endpunkte von  $M$  die Abstände  $r$  und  $R$  haben, ist die Arbeit

$$A = f \cdot Mm \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \text{ erforderlich.}$$

Der Ausdruck für die Arbeit im Gravitationsfelde, die Gravitationsarbeit, nimmt dann einen besonders einfachen Wert an, wenn  $R = \infty$  wird, denn dann wird  $\frac{1}{R} = 0$ . Wenn also die Masse  $m$  von  $B$  aus ganz aus dem Gravitationsfelde, dem Wirkungsbereiche von  $M$ , entfernt wird, so vereinfacht sich der Ausdruck auf

$$A = f \cdot \frac{Mm}{r}.$$

Wird die Masse  $m$  der Einheit der Masse gleich, also  $m = 1$  g, so wird  $A = f \cdot \frac{M}{r}$ . Dieser Ausdruck wird das Potential<sup>1)</sup> genannt. Für die Bezeichnung des Potentials ist der Buchstabe  $V$  gebräuchlich.

Das Potential  $V = f \cdot \frac{M}{r}$  einer Masse  $M$  in bezug auf einen in der Entfernung  $r$  befindlichen Punkt ist die Arbeit, die geleistet werden muß, wenn die Masse von 1 g aus der Entfernung  $r$  bis ins Unendliche gebracht werden soll.

Die Masse 1 g, aus der Entfernung  $r$  ins Unendliche gebracht, würde den Zuwachs  $V$  an potentieller Energie erfahren. Umgekehrt wird sie, aus dem Unendlichen bis in die Entfernung  $r$  fallend, den gleichen Betrag Bewegungsenergie erhalten.

Bei unserer Ableitung hatten wir die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß die Masse  $M$  punktförmig sei. Befinden sich in einem Raume die Massen  $M'$  und  $M''$ , so können wir sowohl von dem Gravitationsfelde von  $M'$  und dem von  $M''$  wie auch von dem gemeinsamen Gravitationsfelde beider Massen sprechen. Wir wissen, daß die Arbeit in einem von mehreren Kräften erzeugten Kraftfelde gleich ist der Summe der Arbeiten, die geleistet werden müßten, wenn jede Kraft einzeln wirkte. Hieraus folgt, daß wir das Potential in jedem Punkte eines von mehreren Massen erzeugten Gravitationsfeldes durch Summation der Einzelpotentiale berechnen können, denn das Potential ist eine ungerichtete Größe.

1) Der Name Potential wurde von Gauß (1836) eingebürgert, nachdem G. Green (1828) Potentialfunktion vorgeschlagen hatte. Der Begriff selbst wurde von Lagrange (1777) aufgestellt.

Hat die Masseneinheit in dem untersuchten Punkte von den Einzelmassen  $M'$ ,  $M''$  usw. die Abstände  $r'$ ,  $r''$  usw., so ist das Gesamtpotential

$$V = V' + V'' \dots = f \frac{M'}{r'} + f \frac{M''}{r''} \dots = f \sum \frac{M}{r}.$$

Ist statt der einzelnen punktförmigen Massen ein aus lauter Massenelementen  $dM$  zusammengesetzter Körper vorhanden, so geht über Summenausdruck in das Integral

$$V = f \cdot \int \frac{dM}{r}$$

über,

wobei die Integrationsgrenzen durch die Begrenzung des Körpers bestimmt sind.

Das Produkt aus dem Potentiale der Masse  $M$  und der Masse 1 g ist eine Arbeitsgröße; die Einheit des Potentials ist also

$$\frac{1 \text{ Erg}}{1 \text{ g}} = \frac{1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}}{1 \text{ g}} = 1 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = 1 \text{ cgl}^2$$

d. h. die Einheit des Potentials ist das Quadrat der Geschwindigkeitseinheit.

Eine punktförmig gedachte Masse  $M$  hat die Einheit des Potentials im Abstände 1 cm, wenn die Masse durch die Gleichung bestimmt ist

$$V = 1 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = f \cdot \frac{M}{1 \text{ cm}} = 6,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Dyn cm}}{\text{g}^2} \cdot M$$

oder  $M = \frac{1 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} \cdot \text{g}^2}{6,7 \cdot 10^{-8} \cdot \text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ g} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ kg} = 15 \text{ t}$ .

Potential und potentielle Energie. Ist  $r_0$  der kleinste Abstand, auf welchen sich eine (punktförmig gedachte) Masse von 1 g der (punktförmig oder kugelförmig gedachten) Masse  $M$  nähern kann, so muß man von außen die Arbeit

$$A = f \cdot M \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

aufwenden, um die Masseneinheit aus dem Abstände  $r_0$  in den Abstand  $r$  zu bringen. Diese Arbeit kann jederzeit wiedergewonnen werden, wenn man die Masseneinheit aus dem Abstände  $r$  bis in den Abstand  $r_0$  von  $M$  fallen läßt. Es ist also  $A$  die potentielle Energie der Masseneinheit im Abstände  $r$ . Die potentielle Energie der Masse  $m$  im Abstände  $r$  von  $M$  ist somit

$$A = f \cdot m \cdot M \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right).$$

Meist kommt es bei der Verschiebung einer Masse  $m$  im Gravitationsfelde der Masse  $M$  nur darauf an, Unterschiede der potentiellen Energie zu berechnen. Dann kann man die Konstante  $\frac{1}{r_0}$  außer Betracht lassen und hat für die potentielle Energie der Masseneinheit

$$V = -\frac{f \cdot M}{r}.$$

In diesem Sinne gilt der Satz: Die potentielle Energie der Masseneinheit in einem bestimmten Punkte eines Gravitationsfeldes ist gleich dem negativen Potentialwerte in diesem Punkte. Den kleineren Potentialwerten entsprechen also die größeren potentiellen Energien und umgekehrt.

Bemerkung: Schreibt man das Newtonsche Gravitationsgesetz in der Form

$$\mathfrak{P} = -\frac{f \cdot M \cdot m}{r^2} \quad (\text{S. 243, Fußnote 1}),$$

so hat man auch  $V = -\frac{f \cdot M}{r}$  zu setzen.

In diesem Falle gilt: Das Potential in einem Punkte des Gravitationsfeldes ist bis auf eine additive Konstante gleich der potentiellen Energie der Masseneinheit in diesem Punkte.

Die Gravitationskraft ist eine Zentralkraft (S. 155). Potentiale sind nur bei anderen Zentralkräften möglich, wie wir es bei der Gravitationskraft kennen gelernt haben, da nur bei diesen die potentielle Energie allein vom Abstände  $r$  abhängt.

§ 83. Das Potential einer Kugelschale und einer Kugel in einem äußeren Punkte.

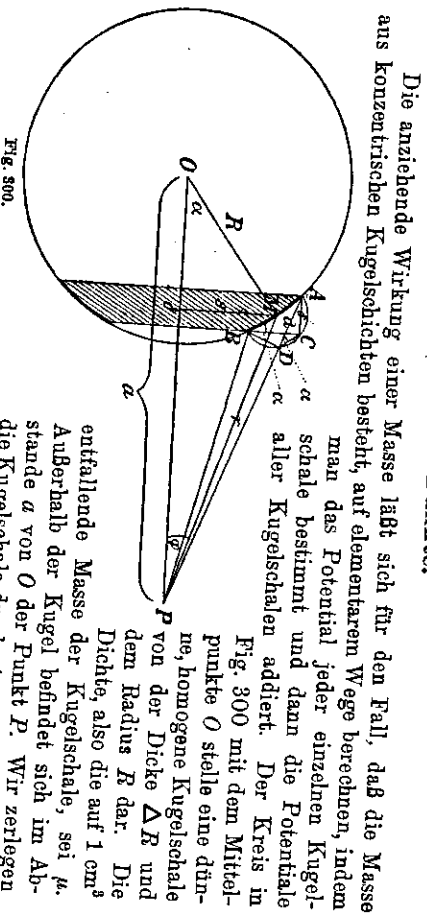


Fig. 300.

Die anziehende Wirkung einer Masse läßt sich für den Fall, daß die Masse aus konzentrischen Kugelschichten besteht, auf elementarem Wege berechnen, indem man das Potential jeder einzelnen Kugelschale bestimmt und dann die Potentiale aller Kugelschalen addiert. Der Kreis in Fig. 300 mit dem Mittelpunkte O stelle eine dünne, homogene Kugelschale von der Dicke  $\Delta R$  und dem Radius  $R$  dar. Die Dichte, also die auf 1 cm<sup>3</sup> entfallende Masse der Kugelschale, sei  $\mu$ . Außerhalb der Kugel befindet sich im Abstände  $a$  von O der Punkt  $P$ . Wir zerlegen die Kugelschale durch eine große Anzahl von Ebenen, die senkrecht zu  $OP$  gelegt sind, fernere Breite gestrichelt gezeichnet. Die Höhe der Kugelzone sei  $\delta$ , die Entfernung des Punktes  $P$  von einem Punkte der Zone sei  $r$ , der Winkel, den  $r$  mit  $a$  bildet, sei  $\varphi$ .

Die Oberfläche der Zone ist  $2\pi R \cdot \delta$ , also ist ihre Masse, da die Schichtdicke  $\Delta R$  ist,  $m = 2\pi R \delta \Delta R \mu$ . Das durch die Zone im Punkte  $P$  erzeugte Potential ist  $V = \frac{f \cdot m}{r} = \frac{f \cdot 2\pi R \delta \Delta R \mu}{r}$ . Das von der ganzen Kugelschale herrührende Potential im Punkte  $P$  ist also

$$V = \sum \frac{f \cdot 2\pi R \delta \Delta R \mu}{r} = f \cdot 2\pi R \cdot \Delta R \cdot \mu \cdot \sum \frac{\delta}{r}$$

Wir ziehen noch die in Fig. 300 gezeichneten Hilfslinien  $PA$  und  $PB$ , fallen das Lot  $BD \perp AP$ , ziehen  $AC \parallel OP$  und  $BC \perp AC$ .

Der über  $AB$  als Durchmesser geschlagene Halbkreis muß durch  $C$  und  $D$  gehen, weil diese Punkte Scheitelpunkte von rechten Winkeln sind. Es ist  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$  als Umfangswinkel über  $AC$ , ferner ist  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle MOP = \alpha$ .

§ 83. Das Potential einer Kugelschale und einer Kugel in einem äußeren Punkte 255  
Da endlich  $\sphericalangle CAD = \varphi$  ist, so ist

$$\Delta ACD \sim \Delta OMP.$$

Nennen wir noch die Differenz der beiden Entfernungen  $AP - BP = d$ , so folgt die Proportion  $\frac{d}{a} = \frac{d}{a}$ . Der Ausdruck für  $V$  kann daher geschrieben werden

$$V = f \cdot 2\pi R \Delta R \mu \cdot \sum \frac{d}{a} = \frac{f \cdot 2\pi R \Delta R \mu}{a} \cdot \sum d.$$

Da  $d$  die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte von  $r$  ist, so ist  $\sum d$  der Differenzwert des größten und kleinsten Wertes von  $r$ , also die Differenz  $a + R - (a - R) = 2R$ . Folglich ist  $V = \frac{f \cdot 4\pi R^2 \Delta R \mu}{a}$ .

$4\pi R^2 \Delta R \mu$  ist die Gesamtmenge  $m$  der auf der Kugelschale befindlichen Masse. Folglich ist

$$V = \frac{f \cdot m}{a}.$$

Denselben Wert würden wir auch erhalten, wenn die Gesamtmenge  $m$  im Mittelpunkte der Kugelschale vereinigt wäre. Daraus folgt:

Das Potential eines Punktes außerhalb einer Kugel, deren Masse aus konzentrischen, homogenen Kugelschalen zusammengesetzt ist, in bezug auf diese, ist gleich dem Potentiale desselben Punktes in bezug auf die im Mittelpunkte der Kugel vereinigte Masse der Kugel. Hieraus folgt:

Eine kugelförmige Masse wirkt auf einen außerhalb liegenden Punkt so, als ob die Masse im Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre.

Denn jede einzelne Kugelschale kann durch eine im Mittelpunkte vereinigte Masse ersetzt werden. Wir können also z. B. zur Berechnung der Anziehung der Erde oder der Sonne auf eine außerhalb dieser Körper befindliche Masse annehmen, daß die Masse der anziehenden Kugel im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre (S. 246).

Das Oberflächenpotential der Erde. Das Potential eines auf der Erdoberfläche befindlichen Punktes ist  $V_0 = f \cdot \frac{M}{R}$ , wo  $M$  die Gesamtmenge der Erde und  $R$  der Erdradius ist. Die Gesamtmenge ist  $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_m$ , wo  $\rho_m$  die in § 79 berechnete mittlere Erddichte  $5,5 \text{ (g} \cdot \text{cm}^{-3}\text{)}$  ist. Es ist  $R = 6,37 \cdot 10^8 \text{ cm}$ ,  $f$  (die Gravitationskonstante)  $= 6,686 \cdot 10^{-8}$ . Folglich ist die Gesamtmenge

$$M = \frac{4}{3}\pi \cdot 6,37^3 \cdot 10^{24} \cdot 5,5 = 5,97 \cdot 10^{27} \text{ g}$$

und das Oberflächenpotential

$$V_0 = \frac{6,686 \cdot 10^{-8} \cdot 5,97 \cdot 10^{27}}{6,37 \cdot 10^8} = \frac{3,98 \cdot 10^{20}}{6,37 \cdot 10^8} = 6,248 \cdot 10^{11} \text{ Erg.}$$

Diese Arbeit müßte geleistet werden, um die Masse von 1 g von der Erdoberfläche fort ins Unendliche zu entfernen. Hierzu wäre die Arbeit erforderlich, die eine Dampfmaschine von 1 PS in etwa  $1\frac{1}{2}$  Minuten leisten könnte. Dasselbe Arbeit wird der Erde zugeführt, wenn der Körper von der Masse 1 g aus dem Weltensraum auf die Erde fällt. Die kinetische Energie, die die fallende Masse erlangt, ist  $\frac{v^2}{2}$ , da  $m = 1 \text{ g}$  ist. Die kinetische Energie ist der oben berechneten Arbeit gleich, folglich ist  $\frac{v^2}{2} = 6,248 \cdot 10^{11}$ , woraus sich berechnet  $v = 11,18 \text{ km/sec}$ . Das ist die End-

geschwindigkeit, mit der ein aus dem Weltensraum auf die Erde fallender Körper auf der Erdoberfläche ankommen würde, wenn keine Bewegungshindernisse vorhanden wären.

Mit derselben Geschwindigkeit müßte ein Körper senkrecht in die Höhe geschossen werden, wenn er aus dem Kraftfeld der Erde herausgebracht werden sollte, unter der Annahme, daß keine Luftwiderstände vorhanden wären. Die Geschwindigkeit, mit der die großen Geschütze ihre Geschosse abschießen, beträgt etwa 1 km/sec. Man müßte daher, wollte man einen Körper aus dem Anziehungserreiche der Erde in lotrechter Richtung fortschießen, die Anfangsgeschwindigkeit etwa 11 mal so groß machen können, wie sie bei den großen Geschützen gebräuchlich ist.

§ 84. Das Potential einer Kugelschale in einem inneren Punkte.

Es stimmt Fig. 300 mit Fig. 301 überein mit dem Unterschiede, daß P in Innern der Kugelschale liegt. Die Berechnung des Potentials im Punkte P führt auf dem im vorigen Paragraphen abgeleiteten Wege zu dem Ausdrucke

$$V = \frac{f \cdot 2\pi R \Delta R \mu}{a} \cdot \sum d.$$

$\sum d$  erhält jetzt aber einen anderen Wert. Es ist  $\sum d = R + a - (R - a) = 2a$ . Folglich wird

$$V = \frac{f \cdot m}{R}.$$

Dieser Weg ist von a völlig unabhängig; folglich ist das Potential im Innern einer Kugelschale unveränderlich mit dem Orte. Wenn man daher den Punkte P innerhalb der Kugel verschiebt, so wird wegen dieser Unveränderlichkeit keine Arbeit geleistet. Die Arbeit ist das selbst, gleich Null werden. Hiervaus folgt:

*Eine auf einer Kugelschale gleichmäßig verteilte Masse übt auf eine in ihrem Innern befindliche Masse keine Kraft aus.*

Wenn die Masse der Erde homogen wäre, so müßte die Schwere stetig abnehmen, wenn man in das Innere der Erde eindringt; denn der Teil der Erde, der weiter vom Erdmittelpunkte entfernt ist als der untersuchte Punkt im Innern der Erde, ist eine Kugelschale, die auf das Innere keine Anziehung ausübt; daher wirkt nur der Teil der Erde noch anziehend auf den untersuchten Punkt, der dem Erdmittelpunkte näher liegt. Wir wissen (§ 79), daß die Dichte der tieferen Erdschichten größer ist als die der oberflächlichen Schichten. Da nun beim Eindringen in die Erde der Abstand von den tieferen und dichteren Schichten kleiner wird, so nimmt die Schwere zuerst zu. (Das stimmt mit den Airy'schen Beobachtungen überein § 79.) Dann erst wird eine Abnahme der Schwere eintreten. Im Mittelpunkte der Erde muß die Anziehung gleich Null sein.

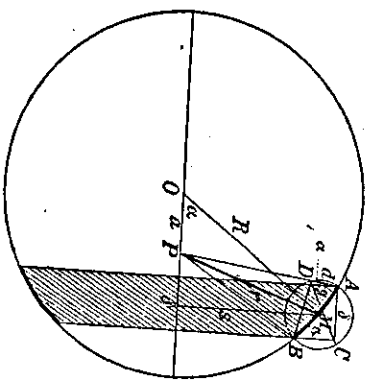


Fig. 301.

§ 85. Niveauflächen.

Niveauflächen oder Äquipotentialflächen sind solche Flächen, auf denen das Potential überall denselben Wert hat.

Niveauflächen einer Kugel. Für eine kugelförmige Masse gilt die Gleichung  $V = f \cdot \frac{M}{R}$ . Aus diesem Ausdrucke folgt, daß alle Punkte, die vom Mittelpunkte der kugelförmigen Masse gleich weit entfernt sind, dasselbe Potential haben, daß also die Niveauflächen im Gravitationsfeld einer kugelförmigen Masse konzentrische Kugeln sind. — Der Potentialwert auf den Potentiaflächen ist dem Halbmesser der Niveauflächen umgekehrt proportional; die Niveaus höchsten Potentials liegen der gravitierenden Masse am nächsten.

Niveauflächen der Erde. Wir wollen die die Erde umgebenden Niveauflächen aufsuchen, für die die Potentialdifferenz immer 1  $\frac{\text{Erg}}{g}$  beträgt. Auf der Erdoberfläche ist das Potential (§ 83)  $V_0 = \frac{f \cdot M}{R} = \frac{3,98 \cdot 10^{20}}{R}$  Erg. In der Höhe h über der Erdoberfläche ist das Potential  $V_h = \frac{3,98 \cdot 10^{20}}{R+h}$  Erg. Da  $V_h$  um 1  $\frac{\text{Erg}}{g}$  geringer sein soll als  $V_0$ , so muß  $V_0 - V_h = 1$ , also  $\frac{3,98 \cdot 10^{20}}{R} - \frac{3,98 \cdot 10^{20}}{R+h} = 1$  sein, woraus folgt  $h = \frac{R^2}{3,98 \cdot 10^{20} - R}$ .

Für  $R = 6,37 \cdot 10^8$  cm wird  $h = \frac{6,37^2 \cdot 10^{16}}{3,98 \cdot 10^{20} - 6,37 \cdot 10^8}$ . Da der zweite Summand im Nenner gegenüber dem ersten vernachlässigt werden kann, so berechnet sich hieraus  $h = \frac{1}{1}$  cm.

Dieses Ergebnis war zu erwarten; denn, wenn wir 1 g auf der Erdoberfläche um 1 cm heben, leisten wir die Arbeit von 981 Erg; es wird also die Arbeit von 1 Erg geleistet, wenn wir das Gramm nur um  $\frac{1}{981}$  cm heben. Die die Erde umgebenden Niveauflächen mit der Potentialdifferenz von 1  $\frac{\text{Erg}}{g}$  haben demnach in der Nähe der Erdoberfläche den Abstand von  $\frac{1}{981}$  cm.

In größeren Höhen ist der Abstand zweier Niveauflächen von derselben Potentialdifferenz größer. Wenn wir in der Gleichung  $h = \frac{R^2}{3,98 \cdot 10^{20} - R}$  statt R den Wert nR setzen, so folgt  $h' = \frac{n^2 R^2}{3,98 \cdot 10^{20} - nR}$ . Da wir die beiden Nenner für h und h' wegen des überwiegenden großen Wertes des ersten Summanden als gleich ansehen können, so ergibt sich  $h' = n^2 h$ . Hiervaus folgt, daß der Abstand zweier Niveauflächen von 1  $\frac{\text{Erg}}{g}$  Potentialdifferenz in der n-fachen Entfernung von der Erde auf das n<sup>2</sup>-fache gewachsen ist.

Feldstärke. Wir können aus dem gegenseitigen Abstände der Niveauflächen desselben Potentialunterschiedes einen Schluß auf die Kraft machen. Wird ein Punkt der Masse 1 g aus der Niveaufläche des Potentials V<sub>1</sub> in die Niveaufläche des höheren Potentials V<sub>2</sub> geschoben, so ist die aufgewandte Arbeit A = V<sub>2</sub> - V<sub>1</sub> (Gravimehl, Physik. I. Große Ausgabe. 6. Aufl.)



unabhängig vom Wege. Da nun die Arbeit gleich dem Produkte aus der Gravitationskraft  $\mathfrak{G}$  und dem Wege  $s$  ist, also  $A = \mathfrak{G} \cdot s$ , so berechnet sich die Kraft durch den Quotienten  $\mathfrak{G} = \frac{A}{s} = \frac{V_2 - V_1}{s}$ . Denken wir uns um eine Masse

alle Niveauflächen gelegt, deren Potentialdifferenz 1  $\frac{\text{Erg}}{\text{g}}$  beträgt, so ist der Abstand  $s$  der Niveauflächen dem reziproken Werte der an der betrachteten Stelle des Gravitationsfeldes herrschenden Kraft  $\mathfrak{G}$  proportional. Man nennt die auf 1 cm Wegstrecke entfallende Potentialdifferenz das **Potentialgefälle** oder den **Potentialgradienten**. Ferner heißt die auf eine Gramm-Masse wirkende Anziehungskraft die **Feldstärke**; daher folgt:

*Die Feldstärke ist zahlenmäßig dem Potentialgefälle gleich.*

Der Gradient der ungerichteten Größe Potential ist eine gerichtete Größe. Das Potentialgefälle soll stets den Richtungssinn vom Orte höheren Potentials zu einem solchen niederen haben; daher ist der Sinn von Feldstärke und Potentialzunahme auf der Streckeneinheit einander entgegengesetzt. Schreiben wir für  $V_2 - V_1 = \Delta V$  und  $\Delta s$  statt  $s$ , wobei wir die Streckenzunahme  $\Delta s$  positiv zählen, wenn  $\Delta V$  und  $\Delta s$  im selben Sinne zunehmen, so müssen wir also ansetzen

$$\mathfrak{G} = - \frac{\Delta V}{\Delta s}.$$

**Homogenes Feld.** Ein Feld heißt ein **homogenes Feld**, wenn gleichen Wegstrecken  $\Delta s$  in derselben Richtung immer gleiche Potentialunterschiede  $V_2 - V_1$  entsprechen. Daraus folgt, daß auch die Potentialgradienten in derselben Richtung immer denselben Wert haben müssen, d. h. die **Feldstärke in einem homogenen Felde ist nicht vom Orte abhängig, sondern überall vom selben Werte**. Als Beispiel eines homogenen Feldes kann das Feld der Erde innerhalb kleiner Höhenunterschiede von der Erdoberfläche ab an gerechnet dienen. Es ist nämlich (§ 83)

$$V = f \cdot \frac{M}{R}$$

und für kleine Höhenunterschiede  $h$

$$V_h = f \cdot \frac{M}{R+h}$$

Da  $h \ll R$  angenommen wird, darf man dafür schreiben

$$V_h = \frac{f \cdot M}{R+h} = \frac{f \cdot M}{R} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1} = \frac{f \cdot M}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = \frac{f \cdot M}{R} - \frac{f \cdot M \cdot h}{R^2}.$$

Der erste Summand ist darin das Potential  $V_0 = \frac{f \cdot M}{R}$  an der Oberfläche der Erde (S. 257). Wir wollen festsetzen, daß für unsere Betrachtung dieses Potential, also für  $h = 0$ , willkürlich zum Werte Null gezählt werden soll. Dann gilt  $V_0 = -\frac{f \cdot M \cdot h}{R^2}$ . Nun ist  $\frac{M \cdot f}{R^2} = g$  (S. 246). Daher erhalten wir

$$V_h = -g \cdot h.$$

Die Niveauflächen sind also Ebenen, die der Horizontalenebene im Abstände  $h$  parallel sind. In der Tat ist nun ein Potentialgradient

$$\mathfrak{G} = - \frac{V_2 - V_1}{s} = - \frac{V_2 - V_1}{h_2 - h_1} = \frac{g(h_2 - h_1)}{h_2 - h_1} = g$$

§ 85. Niveauflächen  
unabhängig vom Orte. Die Feldstärke des homogenen Erdfeldes ist

$$\mathfrak{G} = 981 \frac{\text{Dyn}}{\text{g}} = 981 \text{ gal.}$$

Die Feldstärke ist die Kraft auf die Masseneinheit. Die Kraft auf die Masse  $m$  ist daher das Produkt aus der Masse und der Feldstärke, also  $\mathfrak{F} = m \cdot \mathfrak{G} = m \cdot g$ . Die potentielle Energie ist der negative Potentialwert (S. 253), daher  $E_p = -m \cdot V_h = m \cdot g \cdot h$  (S. 110 oben).

**Inhomogenes Feld.** Ist ein Feld nicht homogen, so kann es näherungsweise mit desto größerer Sicherheit als homogen betrachtet werden, ein desto kleinerer Raumbezirk betrachtet wird. Ändert sich bei der Verschiebung um den Weg  $\Delta s$  der Wert des Potentials um  $\Delta V$ , so gilt demnach

$$\mathfrak{G} = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} = - \frac{dV}{ds}.$$

Es gilt also allgemein: Die Feldstärke ist gleich dem negativen Differentialquotienten des Potentials nach einem in irgendeiner Richtung gerechneten Wege.

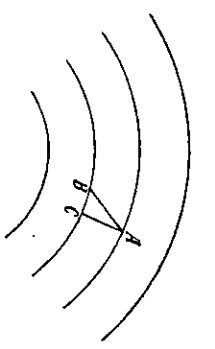


Fig. 302. Größer Gradient zwischen zwei Niveauflächen.

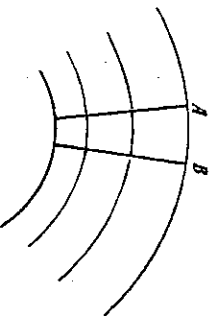


Fig. 303. Niveauflächen und Kraftlinien.

**Kraftlinie.** Aus der Gleichung  $\mathfrak{G} = - \frac{dV}{ds}$  folgt: Wenn wir zwei Punkte  $A$  und  $B$  (Fig. 302) zweier benachbarter Niveauflächen miteinander verbinden, so ist die längs dieser Verbindungslinie ( $AB = ds$ ) herrschende Kraft um so größer, je kürzer die Verbindungslinie ist. Die kürzeste Verbindungslinie ist die Strecke  $AC$ , die auf den beiden Niveauflächen senkrecht steht. Eine in  $A$  frei bewegliche Masse würde daher in der Richtung  $AC$  beschleunigt werden. Denken wir uns noch mehrere Niveauflächen, so erfährt die Masse immer ihre Beschleunigung auf einer senkrecht zu den Niveauflächen stehenden Linie. Daher wird eine solche Linie **Kraftlinie** genannt.

*Die Kraftlinien stehen auf den Niveauflächen senkrecht.*  
Ein homogenes Feld hat also parallele Kraftlinien.

**Einheitskraftlinie.** Ziehen wir (Fig. 303) von den Punkten  $A$  und  $B$  derselben Niveaufläche Kraftlinien, so nähern sie sich in demselben Maße, in dem die Niveauflächen einander näher rücken, also um so mehr, je größer das Potentialgefälle ist. Aus der Dichtigkeit der Kraftlinien können wir auch einen Schluß auf die Feldstärke an dem betrachteten Punkte ziehen. Zu dem Zwecke setzen wir fest: Dort, wo das Kraftfeld die Feldstärke 1 hat, soll durch 1  $\text{cm}^2$  eine Kraftlinie gezogen werden, diedann **Einheitskraftlinie** genannt wird.

Beim Gravitationsfelde der Erde gehen nach dieser Bestimmung an der Erdoberfläche durch  $1 \text{ cm}^2$  981 Einheitskraftlinien, da die Feldstärke  $981 \frac{\text{Dyn}}{\text{g}}$  (S. 259) beträgt. Denken wir uns um jede solcher Einheitskraftlinien eine dieselbe einschließende Röhre gelegt, also den ganzen Raum in röhrenförmige Räume eingelegt, so nennen wir eine solche Röhre eine **Einheitskraftföhre**. Auf der Erdoberfläche wird  $1 \text{ cm}^2$  von 981 Einheitskraftföhren durchschnitten.

**Kraftfluß.** Die Anzahl der Einheitskraftlinien, die eine gegebene abgegrenzte Fläche durchschneiden, wird der **Kraftfluß** durch diese Fläche genannt. So beträgt auf der Erdoberfläche der Kraftfluß durch  $1 \text{ cm}^2$  981, durch  $10 \text{ cm}^2$  9810.

Man verwendet dort, wo kein Mißverständnis möglich ist, statt der Worte Einheitskraftlinie und Einheitskraftföhre vielfach die kürzeren Worte Kraftlinie und Kraftföhre in demselben Sinne.

### § 86. Das zusammengesetzte Kraftfeld. Erde und Sonne.

Der Hauptnutzen der Potentialtheorie besteht in der Anschaulichkeit der Darstellung eines Kraftfeldes; denn man überschaut mit einem Blicke die Feldstärke und Kraftrichtung in jedem Punkte eines Kraftfeldes, wenn man die Niveauflächen und Kraftlinien des Feldes zeichnet. *Ein weiterer Nutzen besteht darin, daß das Potential als Arbeitsgröße eine skalare Größe ist.* Wenn man daher das Gesamtpotential zweier Kraftfelder bestimmen will, so braucht man nur die beiden Potentiale der einzelnen Felder zu addieren. Dagegen muß man die Zusammensetzung der Kräfte nach dem Parallelogrammgesetze ausführen, da die Kraft eine Vektorgröße ist.

Eine in dem Raume zwischen Sonne und Erde befindliche Masse wird gleichzeitig von der Sonne und der Erde angezogen. Das von der Erde herrührende Potential können wir für jeden Punkt bestimmen.

Die Masse der Sonne ist nach S. 248  $M = 1,98 \cdot 10^{33} \text{ g}$ , die der Erde nach S. 246  $m = 5,97 \cdot 10^{27} \text{ g}$ .

Das durch Sonne und Erde hervorgerufene zusammengesetzte Kraftfeld hat in einem Punkte  $P$ , der vom Mittelpunkte der Sonne den Abstand  $R_1$  und vom Mittelpunkte der Erde den Abstand  $R_2$  hat, den Potentialwert  $V = f \cdot \left( \frac{M}{R_1} + \frac{m}{R_2} \right)$ .

Nach Einsetzen der Werte für  $M$ ,  $m$  und  $f$  und nach passender Umformung folgt  $V = 3,99 \cdot 10^{20} \cdot \left( \frac{3,32 \cdot 10^5}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ .

Da der erste Summand in der Klammer bedeutend größer als der zweite Summand ist, wenn nicht  $R_2$  im Vergleiche zu  $R_1$  einen sehr kleinen Wert hat, so geht aus diesem Ausdrucke hervor, daß das zusammengesetzte Kraftfeld so aussieht, als ob es nur von der Sonne hervorgerufen würde; ausgenommen sind die Gebiete, die der Erde sehr nahe sind. An derjenigen Stelle, wo  $1 \text{ g}$  von der Sonne und der Erde gleich stark angezogen wird, hat das Potential einen kleinsten Wert; dieser Punkt ist etwa 40mal so weit vom Erdmittelpunkte entfernt wie ein Punkt der Erdoberfläche. Eine an dieser Stelle (dem neutralen Punkte) befindliche Masse befindetet sich im Zustande des unsicheren (labilen) Gleichgewichtes; denn es ist  $\delta V = - \frac{dV}{ds} = 0$ , die Feldstärke also vom Werte Null. Die potentielle Energie hat in diesem Punkte aber einen größeren Wert als in jedem benachbarten Punkte. Daher muß das Gleichgewicht unsicher sein (§ 51).

### Siebenter Abschnitt.

## FLÜSSIGKEITEN.

### § 87. Flüssige Körper.

**Kohäsion flüssiger Körper.** In § 43 wurde darauf hingewiesen, daß es in der Natur vollkommen starre Körper nicht gibt. Der Begriff eines „starren Körpers“ ist ein Idealbegriff. Unter einem solchen wollten wir einen Körper verstehen, dessen Punkte eine gegenseitige Verrückung nicht zulassen. Diesem Begriffe steht der Begriff eines flüssigen Körpers gegenüber. Tauchen wir einen Stab in Wasser, so dringt der Stab in das Wasser ein, ohne einen

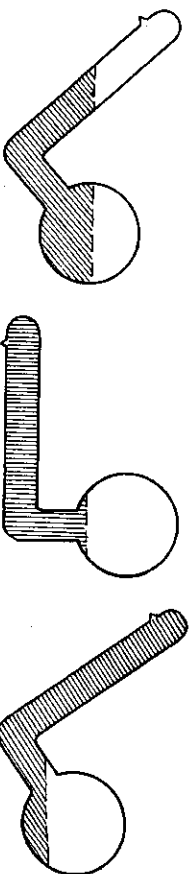


Fig. 304.

Fig. 305.

Fig. 306.

Wasserhammer in verschiedenen Lagen.

merklichen Widerstand zu erfahren. Eine genauere Untersuchung zeigt aber, daß auch zwischen den einzelnen Teilchen von Wasser und anderen Flüssigkeiten in geringem Maße ein Streben beobachtet werden kann, zusammenhängend zu bleiben.

Man überzeugt sich leicht durch folgenden Versuch mit einem sogenannten „Wasserhammer“. Das ist ein beiderseits geschlossenes rechtwinklig, gebogenes Glasrohr, dessen einer Schenkel in eine Kugel ausläuft, und das zu einem gewissen Betrage mit Wasser gefüllt, im übrigen aber äußerst sorgfältig von aller Luft befreit ist. Wird das Rohr so gehalten (Fig. 304), daß das Knie nach unten zeigt, so stellt sich das Wasser im allgemeinen in beiden Schenkeln gleich hoch ein. Man kann dabei nun leicht beobachten, daß diese Einstellung nicht stetig erfolgt. Zu dem Zwecke halte man zunächst den längeren Schenkel wagrecht und das Kugelende nach oben (Fig. 305). Bei guter Luftleere soll das Wasser dann mit laut klatschendem, fast metallisch klingendem Geräusche an die Glaswandung schlagen. Ein übrigbleibendes sehr kleines Luftbläschen läßt man in dem Kugelteil aufsteigen oder bringt es durch wiederholtes Anschlagen zur Auflösung. Neigt man nun das Rohr allmählich in die zuerst beschriebene Lage (Fig. 304), so bleibt das Wasser noch meist eine Zeitlang in dem gehobenen Schenkel haften, reißt dann plötzlich ab und stellt sich in die zuerst beschriebene Lage ein. Bei sehr langsamer und vorsichtiger Neigung gelingt es sogar meist, das Ab-

reißen ganz zu vermeiden. Dann hängt die Wassermasse am Rohre nach unten (Fig. 306). Das Wasser zeigt also einerseits eine gewisse Haftkraft (Adhäsion, S. 202) an der Rohrwandung, andererseits reißt das Gewicht des unteren Teiles der Wassermasse nicht von dem oberen Teile ab, wie man erwarten sollte. Die Wasserfäden zeigen daher Zusammenhangskraft (Kohäsion). Ähnliche Versuche kann man mit Quecksilber machen.

**Klebrigkeit.** Die einzelnen Teile einer Flüssigkeit halten sich gegenseitig also auch mit einer gewissen Kraft fest. Bsprenge man eine saubere ebene Glasplatte mit einigen Tropfen Wasser und legt darauf eine zweite ebene Platte, so läßt es sich erreichen, daß zwischen den Platten sich keine Luft mehr, sondern nur noch eine dünne Wasserschicht befindet. Die Platten haften dann ziemlich fest aneinander, so daß man sie kaum in der Richtung senkrecht zur Plattenfläche voneinander abreiben kann. Die Platten "kleben" aneinander. Einmal hängt die Wasserschicht mit der Molekularkraft an den Glasflächen, die man "Adhäsion" zu nennen pflegt (S. 202) und die erfahrungsmäßig zwischen Wasser und Glas sehr groß ist. Andererseits muß aber auch die Kohäsion des Wassers der Kraft Widerstand entgegensetzen, welche die Platten auseinanderzureißen bestrebt ist (und die bei dem Versuche größer sein muß als die Kraft, die auf Rechnung des Luftdrucks zu setzen ist).

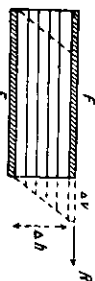


Fig. 307. Innere Reibung.

**Innere Reibung.** Verschiebt man die Platten seitlich (Fig. 307) gegeneinander, so ist ebenfalls eine nicht unbeträchtliche Kraft aufzuwenden, um einen Widerstand zu überwinden. Wir wollen diesen Vorgang etwas näher betrachten. Offenbar haften an beiden Glasplatten unmittelbar äußerst dünne Wasserhäutchen durch die große molekulare Adhäsion. Denn nach gegfückter Trennung erweisen sich beide Platten als benetzt. Zwischen diesen fest an den Platten haftenden Häutchen liegen andere Wasserschichten, die bei der seitlichen Verschiebung aneinander vorbeigleiten müssen. Bewegt sich die obere Platte nach rechts und wird die andere festgehalten, so wird auch die unterste, der ruhenden Platte unmittelbar anliegende Wasserschicht in Ruhe bleiben; die darüberliegenden Schichten werden mit steigender Geschwindigkeit nach rechts wandern, in je größerem Abstände sie von der unteren liegen. Jede einzelne Wasserschicht eilt also der unmittelbar weiter nach unten zu liegenden gegenüber etwas vor, bleibt der unmittelbar weiter nach oben zu liegenden gegenüber aber etwas zurück. Da die Schichten selbst zu einem gewisse Betrage aneinander haften, muß eine der Reibung ähnliche Kraft auftreten, die der gegenseitigen Verschiebung der einzelnen Schichten entgegenwirkt. Man nennt diese Kraft die Zähigkeit (auch Klebrigkeit) oder innere Reibung der Flüssigkeiten. Der Zähigkeiten verschiedener Flüssigkeiten vergleicht man durch die Werte der Zähigkeitsmoduln oder der Koeffizienten der inneren Reibung.

*Der Zähigkeitsmodul (das Zähigkeitsmaß) oder Koeffizient der inneren Reibung gibt an, welche Kraft in Dyn erforderlich ist, um in einer*

*Flüssigkeitsschicht von einem Quaderzentrimeter Fläche und 1 cm Schichthöhe die obere Schichtfläche gegen die untere und parallel zu ihr mit der Geschwindigkeit von 1 <sup>cm</sup>/<sub>sec</sub> (ecl) in Bewegung zu halten.*

Ist der Zähigkeitsmodul einer Flüssigkeit  $\eta$ , die Flächengröße (Fig. 307) der aneinander vorbeigleitenden Schichten  $F$ , der Geschwindigkeitsunterschied zwischen der obersten und der untersten Schicht  $\Delta v$ , die Höhe der Schicht senkrecht zur Bewegungsrichtung gemessen  $\Delta h$ , so hat sich für die Gesamtkraft  $R$  der inneren Reibung der Ansatz bewährt

$$R = \eta \cdot F \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h},$$

$$\text{oder für } \text{Lim } \Delta h = 0 \quad R = \eta \cdot F \cdot \frac{dv}{dn}.$$

Die experimentelle Bestimmung der Zähigkeitskoeffizienten kann in verschiedener Weise durchgeführt werden. Man läßt etwa zu dem Zwecke in einer Flüssigkeit (in einem Gase) eine wagerechte Scheibe, die an einem dünnen Drahte aufgehängt ist, langsame Torsionsschwingungen ausführen und stellt dieser schwingenden Scheibe sehr nahe eine zweite feste Scheibe gegenüber. Dann muß die Zähigkeit der Flüssigkeit diese Torsionsschwingungen abbremsen (dämpfen). Aus der beobachteten Abnahme der Schwingungswerte läßt sich dann ein Schluß auf den Zähigkeitskoeffizienten ziehen. — Ein anderer viel beschrittener Weg ist der, daß man durch ein Kapillarrohr von bekanntem Querschnitte und von bekannter Länge mit bekannter Kraft Flüssigkeit hindurchdrückt. Der Innenwand des Rohres legt sich dann eine feste adhärerende Flüssigkeitshaut an. Diese bewirkt, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit nach der Rohrmitte hin stetig zunimmt. Man kann daher das Rohrinne in koaxiale zylindrische Schichten zerlegen, die aneinander innere Reibung erfahren. Je größer der Koeffizient der inneren Reibung ist, desto größere Kräfte werden dazu gehören müssen, in der Zeiteinheit eine bestimmte Flüssigkeitsmenge durch das Rohr hindurchzupressen. Diese ist dem wirklichen Drucke direkt, der Länge des Rohres verkehrt proportional, also auch dem Druckgefälle, d. h. dem Quotienten aus Druck und Länge proportional. Aus den Mengen der in einer gewissen Zeit durch ein solches Rohr hindurchgeströmten Flüssigkeit kann dann wieder der Koeffizient der inneren Reibung gefunden werden (Methode von Poiseuille 1840; Transpirationsmethode).

**Zahlenwerte.** Auf diese Weise hat man gefunden für Wasser von 0°  $\eta = 0,0179$ , für Wasser von 18°  $\eta = 0,01055$ , Alkohol von 18°  $\eta = 0,0130$ , Äther von 18°  $\eta = 0,00256$ , Glycerin von 18°  $\eta = 11,0$ , Rizinnöl von 18°  $\eta = 12,0$ . Daraus erkennt man, daß Wasser etwa 4 mal so große innere Reibung besitzt wie Äther. Schüttelt man eine Flasche mit Wasser und eine gleiche mit Äther, so lehrt in der Tat der bloße Anblick, daß Äther viel beweglicher als Wasser ist, daß die Ätherteilchen sich leichter, also reibungsloser gegeneinander verschieben als die von Wasser.

**Innere Reibung und feste Körper.** Flüssigkeiten sehr großer innerer

Reibung sind die fetten Öle, Syrup, Honig, Leim usw. Betrachten wir Stoffe immer größerer Zähigkeit, so verschieben sich bei gegebenem Kräften die Teilchen der Stoffe immer langsamer gegeneinander, und die Stoffe nehmen mehr und mehr den Charakter von Körpern an, die wir feste Körper nennen. Beispiele dafür bieten Pech, Asphalt, Siegellack. Eine Siegellackstange verhält sich bei einem kurzen Schläge wie ein fester Körper; sie zerbricht in scharfkantige Stücke. Unterstützt man aber eine Siegellackstange in der Nähe ihrer Enden in zwei Punkten und läßt sie wagrecht liegen, so biegt sie sich im Laufe von zwei Wochen und Monaten so vollständig durch, daß die Enden beinahe senkrecht nach unten zeigen. Asphalt oder Pech „fließen“ im festen Zustande, z. B. Pech im Laufe der Jahre, durch einen Trichter hindurch. Trotzdem sind die dabei sich bildenden „Pechtropfen“ fest und spröde. Ein Körper, welcher in die Unterseite einer Pechscheibe eingegossen wird, hebt sich im Laufe der Jahre seines Auftriebes wegen allmählich durch die Pechscheibe hindurch; er „taucht auf“ wie im Wasser.

Man kann daher auch die Zähigkeiten dieser Körper nach ganz ähnlichen Methoden messen wie die der Flüssigkeiten. Man steckt etwa in der Mitte eines Holzzylinders aus Metall einen Stab, gießt den Zwischenraum mit Siegellack aus und belastet nach dem Erhärten den eingeschmolzenen inneren Stab mit einem Zuggewichte. Dessen zieht dann im Laufe der Monate die Siegellacksschicht auseinander. Der Versuch ist ein fast vollkommenes Gegenstück zu der Strömung einer zähen Flüssigkeit durch ein Kapillarrohr. Er gestattet, die Zähigkeit von Siegellack in gleicher Weise zu berechnen. Man hat gefunden  $\eta = 9,5 \cdot 10^{10}$  bis  $11,5 \cdot 10^{10}$ .

Doch auch andere feste Körper wie Kupfer, Stahl usw. sind bildsam, plastisch, wenn nur die Kräfte groß genug sind, welche die einzelnen Teile der Körper gegeneinander verschieben. Wie man einen Stab in Wasser tauchen kann, so können Kupfer- und Stahlplatten mit genügend großen Kräften „gestanzt“ werden. Kupfer läßt sich durch ein dünnes Loch einer festen Platte pressen. Stahl läßt sich recken. Daher kann man für alle diese Festen per Koeffizienten der inneren Reibung angeben wie für Siegellack. Man hat gefunden für Eis etwa  $10^{12}$ , für Stahl etwa  $10^{17}$ , während die Werte für Kupfer und Nickel tiefer liegen.

Gase. Auch Gase haben innere Reibung, die man wie die von Flüssigkeiten bestimmen kann. So hat Sauerstoff  $\eta = 0,000212$ , Luft von  $20,20^\circ \text{C}$   $\eta = 0,000181$ , Wasserstoff  $\eta = 0,000093$ .

Ideal starre Körper. Wir können also zusammenfassend sagen: Alle Körper zeigen innere Reibung. Aber die Körper, die wir starre Körper zu nennen pflegen, haben eine Zähigkeit, die über  $10^{10}$  mal so groß ist wie die der Flüssigkeiten. Daher ist es für viele Zwecke praktisch, diese Eigenschaft zu idealisieren und als idealstarre Körper solche mit einer unendlich großen inneren Reibung, also ohne gegenseitige Verschiebbarkeit der Teilchen abzutrennen. Je größer und je langandauernder aber die Druckkräfte sind, die auf starre Körper einwirken, desto mehr müssen diese die Eigenschaften der Flüssig-

keiten zeigen: Unter den gewaltigen Dampfkräften und Pressen der modernen Großtechnik verhält sich Stahl wie ein plastischer Körper; unter den ungeheuren langdauernden Drucken der Eismassen eines Gletschers auf die Unterlage vermögen die gedrückten Eisschichten zu „fließen“; unter den Drucken einer 6 Kilometer dicken Gesteinsschicht quillt Steinsalz<sup>1)</sup> in Spalten und Schächten empor; unter Drucken von 12 und mehr Kilometern Gesteinsschicht muß sich das Innere der Erde verhalten wie eine zähe Flüssigkeit. Es wird in diesem Falle praktisch unmöglich, einen festen oder flüssigen Zustand unterscheiden zu wollen.

Ideale Flüssigkeiten. Flüssigkeiten (und Gase) sind Körper mit einer sehr kleinen inneren Reibung. Wir wollen daher auch den Begriff der Flüssigkeit idealisieren und eine ideale Flüssigkeit (d. h. nur in der Idee vorhandene) eine solche nennen, deren Zähigkeit verschwindend ist, deren Teilchen also widerstandslos gegeneinander verschiebbar sind. Solange wir von Erscheinungen absehen, die bei den wirklich in der Natur vorhandenen Flüssigkeiten infolge ihrer inneren Reibung auftreten, dürfen wir die Flüssigkeiten als ideale Flüssigkeiten betrachten. Dieser Begriff soll daher den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt werden.

Zusammendrückbarkeit. Wenn man auf eine in einem starkwandigen Gefäße eingeschlossene Flüssigkeitsmasse einen großen Druck ausübt, so wird die Flüssigkeit zusammengedrückt. Sie erfährt eine meist sehr geringe Raumverminderung. So wird z. B. eine Wassermasse, die in einem ungeschlossenen Stabzylinder von 1 cm<sup>2</sup> Querschnitt und 100 cm Länge eingeschlossen ist, bei einer Belastung eines den oberen Abschluß herstellenden, wasserdicht schließenden, aber beweglichen Stempels mit 220 kg\* um die Strecke von 1 cm zusammengedrückt. Die Flüssigkeitssäule hat dann nur noch einen Rauminhalt von 99 cm<sup>3</sup>. Nimmt man die Belastung von dem Kolben wieder fort, so nimmt das Wasser das ursprüngliche Volumen wieder an. Das Wasser besitzt also eine Volumelastizität. Die Kraft, die eine Flüssigkeit auf die Hälfte des Volumens zusammendrücken würde, unter der Voraussetzung, daß sich auch unter so hohen Drucken die Flüssigkeit ebenso verhält wie bei den uns zur Verfügung stehenden Drucken, müßte außerordentlich groß sein. Sie würde bei Wasser etwa 1100000 kg\* auf das Quadratcentimeter betragen.

Wegen des großen Elastizitätsmoduls vernachlässigt man vielfach die Zusammenrückbarkeit der Flüssigkeiten und sagt, die Flüssigkeiten seien inkompressibel.<sup>1)</sup> Die Eigenschaft, nicht zusammendrückbar zu sein, pflegt man dann auch den idealen Flüssigkeiten zuzuschreiben.

Der Rauminhalt, den eine Flüssigkeit einnimmt, wenn außer dem Atmosphärendruck kein äußerer Druck auf sie wirkt, nennt man schlechtweg „Volumen der Flüssigkeit“. Dieses so festgesetzte Volumen hat für eine bestimmte Flüssigkeitsmasse (unter der Voraussetzung einer bestimmten Temperatur) einen ganz bestimmten Wert.

<sup>1)</sup> compressible (lat.) = zusammenrückbar.

Die Größe der Zusammenrückbarkeit einer Flüssigkeit kann mit dem in Fig. 308 schematisch abgebildeten Apparate experimentell bestimmt werden: In ein zylindrisches Glasrohr  $R$ , das an oberen Ende durch eine Verschränkung  $S$  luftdicht verschlossen werden kann, wird ein zylindrisches Glasgefäß  $G$  eingesetzt, das oben in ein enges Rohr  $K$  ausläuft. Dieses Glasrohr wird mit der zu untersuchenden Flüssigkeit so weit gefüllt, daß sie bis in das enge Rohr reicht. Das untere Ende des Umhüllungsrohres  $R$  läuft in ein mehrfach verzweigtes Glasrohr aus, mit dem es durch einen Schlauch mit der Druckpumpe (einer Radialpumpe)  $P$ , mit dem Manometer  $M$  und mit dem nach außen mündenden Hahne  $H$  verbunden ist. Der Rauminhalt des Gefäßes  $G$  und die Weite des Rohres  $K$  müssen bekannt sein. Verdichtet man mittels der Druckpumpe die Luft in dem Umhüllungsgefäß und die in ihm enthaltene Flüssigkeit aus, der am Manometer  $M$  abgelesen werden kann. Infolge dieses Druckes sinkt der Flüssigkeitsspiegel in  $K$ . Aus der Veränderung der Oberflächehöhe und des Rauminhaltes von  $G$  kann dann die Zusammenrückung der Flüssigkeit berechnet werden.

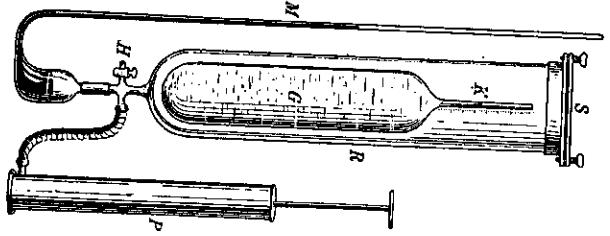


Fig. 308. Zusammenrückbarkeit von Wasser.

Bei einem solchen Versuche ergab sich, daß das Wasser durch den Druck einer Atmosphäre um  $\frac{1}{29000}$  seines ursprünglichen Rauminhaltes zusammengedrückt wird. In einer Tiede des Meeres von 1000 m herrscht infolge des darüberstehenden Wassers der Druck von 100 Atmosphären. Hier wird also der Rauminhalt von 1 Liter Wasser um etwa  $4,4$  cm<sup>3</sup> vermindert.

**§ 88. Die Oberfläche einer Flüssigkeit.**

Ein im Innern einer Flüssigkeit befindlicher Körper mit demselben spezifischen Gewichte wie die Flüssigkeit kann ohne Arbeitsaufwand bewegt werden, wenn die Bewegung so langsam erfolgt, daß die kinetische Energie des Körpers und der (durch den Körper in Bewegung gebrachten) Flüssigkeit vernachlässigt werden kann.

Aus der widerstandslosen Verschiebbarkeit der Teile einer Flüssigkeit folgt, daß die Oberfläche der Flüssigkeit stets senkrecht ist zu der auf die Flüssigkeit wirkenden Kraft, oder, wenn mehrere Kräfte wirken, zu der Richtung der Resultierenden dieser Kräfte; denn eine schräg zur Oberfläche wirkende Kraft kann in zwei Komponenten zerlegt werden, von denen die eine senkrecht, die andere parallel zur Oberfläche wirkt, von denen die eine Oberfläche wirkende Kraft bewirkt eine Verschiebung der Flüssigkeitsteile zueinander, bis die Oberfläche eine solche Gestalt angenommen hat, daß die sie senkrecht auf sie wirkende Komponente übrig bleibt.

Im besonderen folgt hieraus, daß die Oberfläche wagerecht gerichtet ist, wenn die Flüssigkeit nur der Schwere unterworfen ist. Bei Wasserbecken geringerer Ausdehnung erscheint die Oberfläche als eine wagerechte Ebene,

da die Schwerkraft in allen Teilen als parallel angesehen werden kann. Bei großen Wasserbecken, Seen, Meeren, den Ozeanen, ist die Oberfläche gekrümmt, da die Schwerkraft in verschiedenen, weit voneinander entfernten Punkten der Oberfläche nicht mehr als parallel angesehen werden können.

Wenn über eine größere Wasseroberfläche andauernd ein gleichmäßiger Wind in derselben Richtung weht, so erfolgt die Verschiebung der Wasserteile der Oberfläche so lange, bis die Resultierende aus Winddruck und Schwere wieder auf der Oberfläche senkrecht steht. Daraus folgt, daß das Wasser an der Seite, von welcher der Wind weht, niedriger, an der Seite, nach welcher der Wind weht, höher steht als bei Windstille.

Weht der Wind nicht gleichmäßig, sondern mit veränderlicher Stärke und Richtung, so treten Störungen der Gleichgewichtslage der Oberfläche ein. Die Wasseroberfläche schwingt, gleichsam pendelnd, in den einzelnen Teilen um die Gleichgewichtslage; es entstehen Wellen, die um so höher werden, je stärker die einzelnen Windstöße sind. Die auf dem freien Ozeane beobachteten Wellen erreichen hierbei eine Höhe bis zu 10 m. Daß die Wellen in der Nähe der Küsten und besonders in Meerbusen noch wesentlich größere Höhe erreichen, beruht darauf, daß sich die kinetische Energie der durch den Wind auf dem offenen Meere bewegten Wassermassen im Meerbusen auf eine geringere Wassermasse überträgt. Bei seichten Küsten wird die Bewegung des Wassers am Boden durch die dort stattfindende Reibung vermindert, während die Geschwindigkeit an der Oberfläche annähernd dieselbe bleibt. Die Wellen überstürzen sich (Brandung).

**Rotierende Flüssigkeit.** Setzt man ein mit Wasser gefülltes Gefäß in schnelle Umdrehung, so wirken außer der lotrecht nach unten wirkenden Schwere noch die wagerecht gerichteten Fliehkräfte. Schwere und Zentrifugalkraft setzen sich in jedem Punkte zu einer Resultierenden zusammen, die für die verschiedenen Teile des Wassers verschiedene Richtungen hat. In der Drehachse ist die Zentrifugalkraft gleich Null; hier wirkt die Schwere allein. Die Wasseroberfläche ist daher an dieser Stelle wagerecht. Je weiter entfernt die Wasserteile von der Drehachse sind, um so größer ist bei festgehaltener Winkelgeschwindigkeit die Zentrifugalkraft; die Resultierende der beiden Kräfte nimmt eine der wagerechten Richtung näher kommende Richtung an. In der Nähe der Ränder des Gefäßes muß sich daher die Wasseroberfläche um so mehr der Lotrechten nähern, je größer der Durchmesser des Gefäßes und je größer die Winkelgeschwindigkeit ist. Eine einfache Rechnung ergibt in diesem Falle für die Form der Oberfläche der sich drehenden Flüssigkeit ein Umdrehungsparaboloid.

Das in Fig. 309 abgebildete und zum Teil mit Flüssigkeit angefüllte Gefäß sei um die Achse  $OM$  in Umdrehung versetzt, die Winkelgeschwindigkeit betrage  $\omega$ . Auf das Flüssigkeitsteilchen  $A$  wirkt die Schwerkraft lotrecht abwärts und die Zentrifugalkraft wagerecht. Die Schwerkraftsenkung durch  $AD = g$ , die Zentrifugalbeschleunigung durch  $AC =$

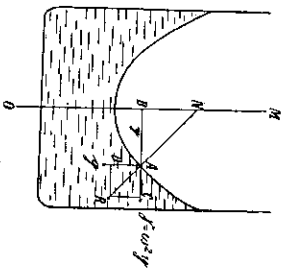


Fig. 309. Rotierende Flüssigkeit.

$\gamma = \omega^2 y$  dargestellt, wo  $y$  den Drehradius für das Teilchen  $A$  bedeutet. Die resultierende Beschleunigung wird nach dem Parallelogrammsatze gefunden. Ihre Richtung  $AR$  muß auf der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht stehen, d. h.  $AR$  muß Drehachse in  $N$ . Aus der Ähnlichkeit der Verlängerung von  $AR$  schneidet die folgt die Proportion  $NB : AB = CR : AC$ . Da nun  $AB = y$ ,  $CR = g$  und  $AC = \omega^2 y$  ist, so ist  $NB : y = g : \omega^2 y$ , woraus folgt  $NB = \frac{g}{\omega^2}$ .  $NB$  ist die Subnormale an der Begrenzungskurve. Diese ist, wie die abgeleitete Gleichung zeigt, von dem Orte  $A$  unabhängig. Die einzige Kurve, bei der dieses der Fall ist, ist die Parabel; bei dieser ist die Subnormale gleich dem Halbparameter  $p$ . Die Oberfläche der rotierenden Flüssigkeit ist demnach ein Umdrehungsparaboloid, dessen Halbparameter  $p = \frac{g}{\omega^2}$  ist. (Vgl. das konische Pendel § 23.)

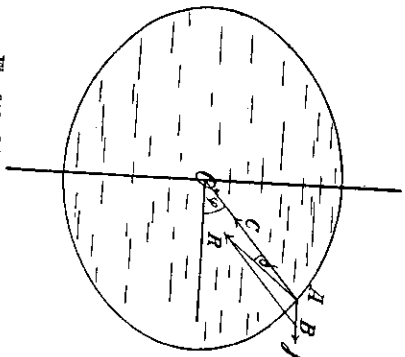


Fig. 310. Meeressoberfläche.

**Die Meeressoberfläche.** Wäre die Erde vollkommen homogen und mit Wasser umgeben, so müßte bei ruhender Erde die Meeressoberfläche eine vollkommene Kugel bilden; denn die Resultierende aller Gravitationskräfte wäre dann nach dem mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfallenden Massenmittelpunkt gerichtet. Also stünde die Wasseroberfläche an allen Stellen auf diesen Kraftrichtungen senkrecht. Infolge der Erdrotation tritt zu der nach dem Massenmittelpunkte gerichteten Gravitationskraft noch die senkrecht zur Drehachse gerichtete Zentrifugalkraft. Die Zentrifugalbeschleunigung in der geographischen Breite  $\varphi$  ist, wenn der Radius des Breitenkreises  $\rho$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist,  $\gamma = \omega^2 \rho$ , und da  $\rho = r \cos \varphi$  ist, so folgt  $\gamma = \omega^2 r \cos \varphi$ . Die nach dem Massenmittelpunkte  $O$  (Fig. 310) gerichtete Gravitationsbeschleunigung und die Zentrifugalbeschleunigung setzen sich nach dem Parallelogrammsatze zu der Resultierenden  $AR$  zusammen. Diese ist die wirklich beobachtete Schwerbeschleunigung  $g$ .

Setzen wir  $\angle CAR = \delta$ , so besteht die Proportion  $\sin \delta : \sin \varphi = \omega^2 r \cos \varphi : AR$ . Man kann wegen der Kleinheit von  $\delta$  in der Proportion  $AR = g$  setzen. Hierin ist  $r = 6,37 \cdot 10^8$  cm der Radius der Erde,  $\omega = \frac{2\pi}{86164}$  die Winkelgeschwindigkeit der Erde, woraus sich berechnet  $\omega^2 r = 3,3874$ . Es wird daher  $\sin \delta : \sin \varphi = 3,3874 \cos \varphi : g$ , also  $\sin \delta = \frac{3,3874 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{g} = \frac{1,694 \sin 2\varphi}{g}$ .

Für die geographische Breite  $\varphi = 45^\circ$  erreicht  $\delta$  seinen größten Wert; es wird  $\sin \delta_{45} = \frac{1,694}{981}$ , woraus folgt  $\delta_{45} = 6'$ .

Die durch die Umdrehung der Erde erzeugte Veränderung der Schwererichtung

§ 89. Ebbe und Flut

beträgt für die geographische Breite von  $45^\circ$  ungefähr 6 Minuten. Die Oberfläche des Meeres steht auf dieser verändernden Schwererichtung senkrecht, also muß sie von der Kugelgestalt abweichen.

Unsere Berechnungen sind unter der Annahme ausgeführt, daß die Erdmasse vollkommen homogen ist, und daß die Erde frei von Erhebungen und Vertiefungen ist. Die Unebenheiten haben zur Folge, daß die wahre Gestalt der Meeressoberfläche nicht unbedingt von der berechneten abweicht, wenn auch im großen und ganzen Übereinstimmung herrscht. Denkt man sich die wirkliche Meeressoberfläche durch die Kontinente und Inseln erweitert, so nennt man die so entstehende, den wirklichen Verhältnissen angepaßte Form ein Geoid.<sup>1)</sup> Die wahre Gestalt des Geoids läßt sich nur auf Grund sorgfältiger geodätischer Messungen bestimmen.

§ 89. Ebbe und Flut.

**Ebbe und Flut.** An den Küsten beobachtet man zweimal innerhalb 24 Stunden ein Ansteigen (Flut) des Meerwassers bis zu einem höchsten Stande (Hochwasser), worauf dann wieder ein Fallen (Ebbe) des Wassers bis zu einem niedrigsten Stande (Niedrigwasser) erfolgt. Die Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Hochwasserständen vergeht, stimmt genau mit einem halben Mondumlaufe um die Erde überein; daher liegt die Vermutung nahe, daß die Stellung des Mondes zur Erde die Ursache für die Ebbe und Flut (die Gezeiten, Tiden) ist.

**Erklärung.** Die Erklärung der Erscheinung hat bereits Newton gegeben. Eine vollständige Behandlung des Problems ist außerordentlich schwierig, weil eine ganze Reihe von Faktoren die Ebbe und Flut in ihren beobachteten Einzelheiten verursachen und beeinflussen. In großen Zügen ist die Erklärung folgendermaßen zu geben: Mond und Erde fallen bei ihrer Bewegung um ihren gemeinsamen Massenmittelpunkt gewissermaßen fortwährend auf dessen zu, jeder der Himmelskörper mit der Zentripetalbeschleunigung seiner Bahn, die durch die Anziehung nach dem anderen Himmelskörper hin veranlaßt wird. Die Erde ist nun so groß — ihr Durchmesser ist  $\frac{1}{80}$  der Erde—Mondentfernung —, daß die Gravitationskraft, die der Mond ausübt, an verschiedenen Teilen ihrer Oberfläche merkbar verschieden ist. Die Erde als Ganzes wird deshalb auf ihrer Bahn mit einer Beschleunigung gegen den Mond hin sich bewegen, die einer mittleren anziehenden Kraft auf die ungefähr im Erdmittelpunkt vereinigt gedachte Erdmasse entspricht. Die dem Monde zugewandten Wassermassen der Erde wollen beschleunigter, die ihm abgewandten Massen weniger beschleunigt nach dem Mond hin fallen. Aus beiden Gründen findet eine Wasserrückhaltung statt. Auf der dem Monde zugewandten Erdseite überwiegt die anziehende Kraft des Mondes die das Wasser zurückhaltende (zentrifugale) Trägheit, während auf der abgewandten Erdhälfte die (zentrifugale) Trägheit der Wassermassen vorherrscht und die letzteren nach der mondabgewandten Richtung treibt.

**Der gemeinsame Massenmittelpunkt.** Wenn sich der Mond um die Erde dreht, so erfolgt seine Drehung nicht um den Mittelpunkt der Erde, sondern beide

1)  $\text{Geoid}$  (griech.) = Erde.

Körper drehen sich in der Umlaufzeit  $T' = 2,3606 \cdot 10^6$  Sekunden um eine Achse, die durch den gemeinsamen Massenmittelpunkt von Mond und Erde geht. Die Masse der Erde ist ( $S$  83 u. S. 260)  $M = 5,97 \cdot 10^{27}$  g, die Masse des Mondes ist  $m = 7,4935 \cdot 10^{25}$  g, sie ist  $\frac{1}{79,667}$  von der Erdmasse; folglich teilt der gemeinsame Massenmittelpunkt von Erde und Mond die Verbindungsstrecke von Erde und Mond, die die Länge  $R = 3,8442 \cdot 10^{10}$  cm hat, im Verhältnis  $1 : 79,667$ . Der gemeinsame Massenmittelpunkt ist also um die Strecke  $e = \frac{3,8442 \cdot 10^{10}}{80,667}$  cm  $= 4,7655 \cdot 10^8$  cm vom Erdmittelpunkte entfernt. Da der Erdradius  $6,37 \cdot 10^8$  cm ist, so liegt der gemeinsame Massenmittelpunkt beider Körper noch innerhalb der Erde in etwa  $\frac{3}{4}$  Erdradius.

**Störungen.** Denken wir uns die Erde als vollkommen glatte Kugel, die überall mit einer Wasserschicht umgeben ist, die sich reibungslos auf der Erdoberfläche bewegen kann, so würde sich eine Erhöhung sowohl auf der dem Monde zugewandten, wie auf der abgewandten Seite ausgebildet haben, unter der sich nun die um ihre Achse sich drehende Erde bewegt; daher würde sich die Flutwelle relativ zur Erdoberfläche immer im Sinne der scheinbaren Mondbewegung über die Erde fortbewegen. In Wirklichkeit wirken aber die Unebenheiten der festen Erdoberfläche, besonders die aus der Wasseroberfläche hervorragenden Festländer auf die dauernde Ausbildung der Flutwelle störend; aus diesem Grunde muß sie sich jedesmal beim Mondumlaufe aufs neue bilden.

**Sturmfluten.** Gleich wie der Mond, so erzeugt auch die Sonne zwei Flutwellen. Die Flutbeschleunigungen der Sonnenflut sind etwas weniger als halb so groß wie die Flutbeschleunigungen der Mondflut.

**Zusammenwirken beider.** Wenn die Sonnenflut mit der Mondflut zusammenfällt, so bewirkt sie eine Erhöhung der Mondflut. Daher kommt es, daß dann, wenn Sonne und Mond mit der Erde in gerader Linie stehen, die Flut besonders hoch ist. Diese Stellung tritt ein, wenn wir Vollmond oder Neumond haben. Die dann eintretende größte Flut heißt Springflut oder Springtide. Wenn dagegen der Mond im ersten oder im letzten Viertel steht, so erniedrigt die Sonnenflut die Mondflut. Wir haben dann Nippflut oder dove (taube) Tide. Der Unterschied zwischen dem Wasserstand bei Hochwasser und Niedrigwasser wird Tidenhub genannt. Der Tidenhub ist naturgemäß auf dem offenen Meere nicht zu beobachten, weil es dort an einem Vergleichsobjekte fehlt; doch können die Hebungen und Senkungen des Wasserstandes an den ozeanischen Inseln beobachtet werden. Hier ist der Tidenhub nur gering; er beträgt bei der Insel St. Helena ungefähr 1 m. An den Küsten der Festländer steigert er sich stellenweise auf 10 bis 20 m. An den schen Nordseeküste ist der durchschnittliche Tidenhub in Emden 2,76 m, in Wilhelmshaven 3,46 m, in Bremerhaven 3,31 m, in Cuxhaven 2,70 m. Den höchsten Betrag erreicht der Tidenhub in der Fundy-Bai an der Ostküste von Nordamerika bei Springflut, wo ein Tidenhub von über 20 m beobachtet worden ist.

Der Tidenhub ist an den Küsten größer als auf dem offenen Meere, und die Flut steigt besonders hoch in einem sich allmählich verengenden Meerbusen, weil die Energie, die die Flutwelle mit sich führt, beim Eintritt in den Meerbusen auf eine immer kleiner werdende Wassermasse übertragen wird, die daher eine größere Steighöhe erlangen muß.

**Hafenzeit.** Die höchste Erhebung der Flutwelle tritt erst dann ein, wenn der Mond den Zenith- oder Nadirstand schon überschritten hat, da die Ausbildung der Flutwelle eine gewisse Zeit erfordert. Starke Verzögerungen erleidet die Flutwelle in den Flüssen; denn die sich auf dem offenen Meere ausbildende Flutwelle muß erst in dem Flusse aufsteigen. Den Zeitunterschied zwischen der Kulmination des Mondes am Vollmond- oder Neumondtage und dem Eintritt des Hochwassers bezeichnet man als Hafenzeit. Diese beträgt z. B. für Cuxhaven 0<sup>h</sup> 49<sup>m</sup>, für Hamburg 5<sup>h</sup> 11<sup>m</sup>. In den Untertäufen der Flüsse verzögert sich der Eintritt der Ebbe gegenüber dem Hochwasser; nach Eintritt der Ebbe, während das Wasser schon abläuft, steigt es noch. Denken wir uns einmal, es fände überhaupt kein Abfließen des Wassers statt, so müße schon infolge des aus dem Oberlaufe des Flusses nachströmenden Wassers ein dauerndes Ansteigen des Wassers eintreten.

**Gegenseitige Durchkreuzung mehrerer Fluten.** Es kann eintreten, daß die Flutwellen denselben Ort auf zwei oder mehr verschiedenen Wegen erreichen. So kommt z. B. in die Nordsee eine Flutwelle um die Nordküste von Schottland herum und eine andere durch den Kanal. Diese beiden Wellen durchkreuzen einander und verstärken oder schwächen sich gegenseitig. Der Vorgang wird dadurch noch verwickelter, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flutwelle in tiefem Wasser größer ist als in flachem Wasser. Ferner sind die Winde für die Bildung der Flutwelle von der größten Bedeutung, da der Wind das Wasser vor sich her treibt.

**Sturmfluten.** Treten nun alle die Flutwelle erzeugenden Kräfte gleichzeitig in demselben Sinne wirkend ein, so entstehen verheerende Sturmfluten, die die zum Schutze der Küsten errichteten menschlichen Bauwerke in kurzer Zeit zerstören und vernichten können.

**Rückwirkung auf die Bewegung der Erde.** Durch den Mond werden die beiden Flutwellen auf der Erde in ihrer relativen Lage zum Monde festgehalten. Die Reibung der Flutwellen verurteilt daher eine Bremsung der Erde bei ihrer täglichen Umdrehung, wie vergleichsweise ein Rad durch zwei Bremsklötze gebremst wird. Somit muß die Tageslänge allmählich zunehmen. Als der Mond noch im feurigflüssigen Zustande sich befand, hat die Erde außerordentlich viel stärkere Flutwellen auf ihm hervorgerufen, deren Bremswirkung auf die wesentlich kleinere sich drehende Masse des Mondes viel größer gewesen ist. Sie hat die Eigendrehung der Erde so weit vernichtet, bis Ebbe und Flut keine fortschreitende Bewegung an der Mondoberfläche mehr hatten. Deswegen dreht der Mond sich in der Zeit des Umlaufs um die Erde auch einmal um sich selbst und wendet uns stets dieselbe Seite zu.

### § 90. Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten.

Ein beliebig gestaltetes Gefäß sei an einer Stelle mit einem Zylinder versehen, in dem ein Kolben dicht schließend, aber leicht beweglich angebracht ist. Das nunmehr allseitig geschlossene Gefäß sei mit Wasser gefüllt. Das Gewicht des Wassers möge einseitigen verachtlässigt werden. Wird auf den Kolben eine Kraft ausgeübt, so wird dadurch das Wasser, wenn auch nur in geringem Maße, zusammengedrückt. Infolge der Volumensatzzeit und der leichten Verschiebbarkeit tibt nun das Wasser auf die sämtlichen Teile der Wandung des Gefäßes eine senkrecht zur Wandung gerichtete Kraft aus. Eine Kraft senkrecht zu einer Fläche und auf die Flächeneinheit bezogen heißt

**Druck.** (Einheit im C. G. S.-System  $\frac{\text{Dyn}}{\text{cm}^2}$ ) Der Druck ist an allen Stellen der Wandung derselbe (Pascal)<sup>1)</sup> Hat der Kolben den Querschnitt  $1 \text{ cm}^2$ , und beträgt der Druck auf den Kolben  $1 \text{ kg}^*$ , so wird jeder Quadratcentimeter der Wandung mit der Kraft von  $1 \text{ kg}^*$  senkrecht nach außen gedrückt (Fig. 311). Macht man einen Teil der Wandung beweglich, indem man einen zweiten Zylinder mit dicht schließendem Kolben einsetzt, so wird dieser zweite Kolben infolge des auf den ersten ausgeübten Druckes mit so viel Kilogramm nach außen bewegt, wie die Fläche Quadratcentimeter enthält. Der auf die Flächeneinheit ausgeübte Druck wird der hydrostatische<sup>2)</sup> Druck genannt.

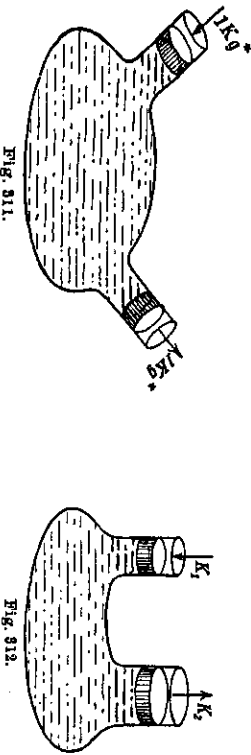


Fig. 311. Fortsetzung des Druckes an Flüssigkeiten.

Bringt man in ein Gefäß (Fig. 312) zwei dicht schließende Zylinderkolben mit kreisförmigen Querschnitten an, deren Radien  $r_1$  und  $r_2$  betragen, deren Flächeninhalte sich also verhalten wie  $r_1^2 : r_2^2$ , und drückt man den ersten Kolben mit der Kraft  $K_1$  nach innen, so wird der zweite mit der Kraft  $K_2$  nach außen bewegt. Es besteht alsdann die Gleichung:

$$K_1 : K_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Die drückende Kraft ist der Größe der getriebenen Fläche oder bei kreisförmigem Kolben dem Quadrate des Kolbenradius proportional. Man macht von dieser Beziehung bei der hydraulischen Presse Gebrauch.

§ 91. Die hydraulische Presse.

Die hydraulische<sup>3)</sup> Presse (Fig. 313) besteht im wesentlichen aus zwei miteinander verbundenen, mit Flüssigkeit gefüllten, zylindrischen Gefäßen  $C$  und  $E$ , in denen die beiden Kolben  $K$  und  $D$  von ungleichen Durchmessern, luftdicht abgeschlossen, auf und ab bewegt werden können. Wird der Kolben  $D$  in den Zylinder  $E$  hineinbewegt, so wird die in  $E$  befindliche Flüssigkeit unter Hebung des Ventiles  $B$  in den Zylinder  $C$  hineingedrückt. Der Druck

1) S. 275.

2) hydor (griech.) = Wasser; statos = stehend. statiké téchné (griech.) = Wissenschaft vom Stillstehen (vom Gleichgewichte).

3) hydor = Wasser. anlos = Flöße; hydraulos = Wasserflöße, das ist eine früher benutzte Orgel mit 7 Flößen, in der die zum Anblasen erforderliche Luft durch Wasser verdrängt wurde. Der Name hydraulisch ist dann später auf die ganze Lehre von der Bewegung des Wassers angewandt. Die hydraulische Presse ist vom englischen Ingenieur Brahma (1749—1814) erfunden.

pflanzt sich durch die Flüssigkeit auf den Kolben  $K$  fort und hebt ihn dadurch in die Höhe. Der auf  $D$  ausgeübte Druck wird so viel mal vervielfältigt auf  $K$  übertragen, wie der Querschnitt von  $D$  in dem Querschnitt von  $K$  enthalten ist. Der Weg, den der Kolben  $K$  zurücklegt, verhält sich zu dem von  $D$  zurückgelegten Weg, wie sich der Querschnitt von  $D$  zum Querschnitt von  $K$  verhält, denn das von  $D$  verdrängte Flüssigkeitsvolumen muß dem Volumen gleich sein, um das der Raum  $C$  durch Heben von  $K$  vergrößert ist. Das Produkt aus Kraft und Weg, also die bei  $D$  und  $K$  geleistete Arbeit bleibt unverändert.

Damit beim Heben von  $D$  der Kolben  $K$  nicht wieder zurückgeht, ist das Ventil  $B$  angebracht, das sich beim Heben von  $D$  schließt, während sich das Ventil  $A$  öffnet und ein Nachströmen von Flüssigkeit aus dem Gefäße  $G$  in den Zylinder  $E$  ermöglicht, so daß beim wiederholten Ab- und Aufwärtsbewegen von  $D$  eine fortgesetzte Hebung von  $K$  erfolgt. Hierbei wird die Pressplatte  $P$  dem Widerlager  $W$  genähert, und ein zwischen  $P$  und  $W$  befindlicher Körper wird zusammengedrückt. Das Ventil  $V$  wird durch eine von außen zu betätigende Schraube geöffnet, wenn  $K$  wieder abwärts bewegt werden soll, denn dann kann die in  $C$  befindliche Flüssigkeit ohne Hindernis nach  $G$  zurückfließen. Die Bewegung von  $D$  erfolgt mit Hilfe des Hehels  $H$ , durch den eine weitere Vergrößerung der Kraft im Verhältnisse der Hebelarme bewirkt wird.

Es werden Pressen gebaut, mit denen Drucke von  $50000 \text{ kg}^*$  und mehr ausgeübt werden können. Die Pressen finden besonders Anwendung zur Prüfung der Widerstandsfähigkeit von Materialien gegen starken Druck; denn bei einer solchen Prüfung will man einen hohen Druck erzeugen, ohne daß dabei der Angriffspunkt der Kraft um einen großen Betrag bewegt wird.

Das die beiden Zylinder  $E$  und  $C$  verbindende Rohr kann eine bedeutende Länge haben, ohne daß an der Wirkungsweise der Presse etwas geändert wird; der Zylinder  $E$  mit dem in ihm beweglichen Kolben  $D$  (also eine einfache Kompressionspumpe) kann sich daher an einem Orte befinden, der von dem Standorte der eigentlichen Presse, bestehend aus Zylinder  $C$ , Kolben  $K$ , Pressplatte  $P$  und Widerlager  $W$ , weit entfernt ist. Dann haben wir eine hydraulische Kraftübertragung durch ein einfaches starkwandiges Rohr von einem Orte zu einem entfernten Orte. Es kann auch eine Kompressionspumpe gleichzeitig durch ein mehrfach verzweigtes Rohr mit mehreren Pressen verbunden werden, die dann gleichzeitig im Betrieb gesetzt werden können.

Grimsehl, Physik. I. Große Ausgabe. 6. Ausg.

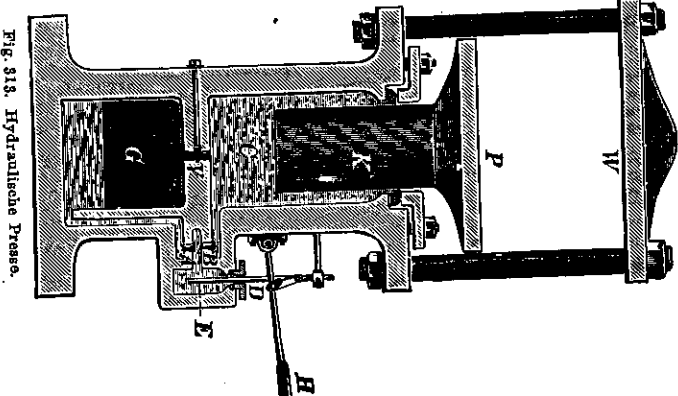


Fig. 313. Hydraulische Presse.



§ 92. Bodendruck. Seitendruck. Aufdruck.

Ein leeres, zylindrisches Gefäß wird auf eine Wage gestellt und diese durch Gewicht ins Gleichgewicht gebracht. Gießt man nun Wasser in das Gefäß, so sinkt die Wage. Das Wasser übt einen nach abwärts gerichteten Druck auf den Boden des Gefäßes aus. Dieser Druck ist dem Gewichte der im Zylinder je Flächeneinheit enthaltenen Wassersäule gleich. Er wird der Bodendruck genannt.

Um sich von der Wirkung des Wassers auf die Seitenwände unabhängig zu machen, wenn man den Bodendruck untersuchen will, kann man den Boden allein beweglich machen, während die Seitenwänden des Gefäßes in einem festen Halter aufgestellt werden. Zur Untersuchung des Bodendruckes dient der in Fig. 314 abgebildete

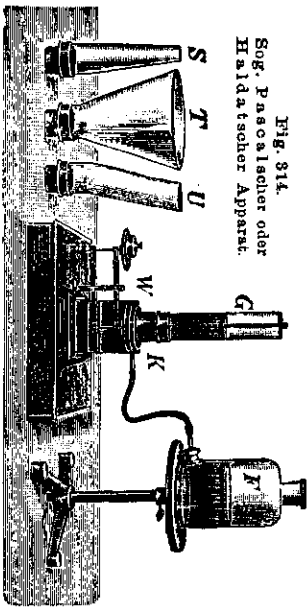


Fig. 314.  
Sog. Pascalscher oder  
Malda'scher Apparat.

Apparat.

In eine zylindrische Fassung  $K$  können Gefäße von verschiedenen Formen wasserrecht eingesetzt werden. Der untere Rand der Fassung wird durch eine wasserrecht abgeschlossene, kreisförmige Metallplatte gebildet. Sie ist die eine Wagschale der gleicharmigen Wage  $W$ . Auf die andere Wagschale können

gewichtstücke zur Messung des Bodendruckes gesetzt werden. Im Innern der Fassung ist noch ein lotrechter Stab mit einer Zentimeterteilung angebracht, an dem man die Höhe der Flüssigkeitssäule ablesen kann. Zur bequemeren Füllung ist auf einem seitlichen Ständer eine mit Wasser gefüllte, mit Ausflußöffnung versehene Flasche  $F$  aufgestellt, die durch einen Schlauch mit der Hülse  $K$  in Verbindung steht. Man belastet die linke Seite der Wagschale mit einem Gewichte von z. B. 200 g\* und hebt die Flasche  $F$ , so daß sich das Gefäß  $G$  mit Wasser füllt. Bei einer bestimmten Füllhöhe wird der Bodendruck so groß, daß das Wasser zwischen Boden und Hülse austritt und von selbst einen bestimmten Stand annimmt, bei dem die Druckkraft des Bodendruckes gleich dem Gewichte des auf die linke Wagschale gesetzten Gewichtstückes ist. Aus der abgemessenen Flächengröße des beweglichen Bodens und der Füllhöhe des Gefäßes  $G$  kann der Rauminhalt, also auch das Gewicht der zylindrischen Wassersäule, bestimmt werden.

Die Beobachtung zeigt, daß die Kraft des Bodendruckes gleich dem Gewichte der über dem Boden befindlichen zylindrischen Flüssigkeitssäule ist.

Ersetzt man das zylindrische Gefäß  $G$  durch eins der links neben dem Apparat abgebildeten Gefäße  $S$ ,  $T$  und  $U$ , so müssen auch diese Gefäße bis zu derselben Füllhöhe wie das zylindrische gefüllt werden, damit die Kraft des Bodendruckes dem aufgesetzten Gewichte gleich ist. Hieraus folgt der von Stevin<sup>1)</sup> aufgefundenen Satz:

1) Simon Stevin (Stevens) (1548—1620), holländischer Wasserbaumeister.

Der Bodendruck ist von der Form der Gefäße unabhängig und nur von der lotrechten Höhe der Flüssigkeitssäule über dem Boden abhängig.

Die auffallende Tatsache, daß hier verschieden große Wassermengen denselben Bodendruck ausüben, wird „hydrostatisches Paradoxon“ genannt. Dasselbe ist zuerst von Pascal<sup>2)</sup> nachgewiesen worden; deshalb wird der Apparat, mit dem der Bodendruck gemessen wird, auch der „Pascalsche Apparat“ genannt.

Die Erklärung des Pascalschen Paradoxons möge unter Zugrundelegung der Fig. 315 geschehen. Die drei abgebildeten Gefäße I, II und III haben dieselbe Grundfläche  $AB$ , und sie sind alle bis zu derselben Höhe mit Flüssigkeit gefüllt. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Bodendruckkraft in I gleich dem Gewichte der ganzen Flüssigkeitssäule  $ABCD$  ist.

Das Gefäß II denken wir uns zylindrisch auf die Größe  $EFD C$  erweitert; dann ist der Druck auf  $EF$  gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule  $EFD C$ . Der auf  $A$  Benützte Teil dieser Druckkraft verhält sich nun zu dem Gesamtdrucke, wie sich die gedruckten Flächen  $AB:EF$  verhalten; daher entfällt auf  $AB$  (bei dem zylindrisch erweiterten Gefäße) nur der Druck, der gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule  $ABHG$  ist. Denken wir uns nun in das erweiterte Gefäß die Wandungen  $AC$  und  $BD$  lose eingesetzt, so ändern diese an den Druckverhältnissen nichts; sie werden selbst in der Flüssigkeit von allen Seiten gleich stark gedrückt und bleiben im Gleichgewichte. Das Gleichgewicht wird aber auch nicht gestört, wenn die Wandungen  $AC$  und  $BD$  fest mit dem Boden verbunden sind. Wenn wir dann endlich die außerhalb  $AC$  und  $BD$  befindliche Flüssigkeit entfernen, so ändert auch dieses an dem Bodendrucke nichts. Allerdings werden jetzt die Seitenwänden einseitig durch die Drucke  $P$  und  $P'$  gedrückt, und die lotrecht abwärts gerichteten Komponenten dieser Drucke bewirken, daß das Gefäß schwerer ist, als es sein würde, wenn nur der Bodendruck wirken würde.

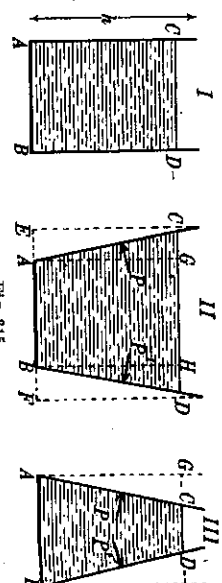


Fig. 315.

Das Gefäß III denken wir uns zylindrisch auf die Größe  $ABHG$  erweitert. In diesem Gefäße würde der Bodendruck auf  $AB$  gleich dem Gewichte der zylindrischen Flüssigkeitssäule  $ABHG$  sein. Denken wir uns nun wieder die Wandungen  $AC$  und  $BD$  lose eingesetzt, so sind diese im Gleichgewichte, da die Flüssigkeit von beiden Seiten gleich stark drückt. Also können wir die Wandungen auch fest mit dem Boden verbinden, ohne an dem Bodendrucke etwas zu ändern. Entfernen wir dann die außerhalb  $AC$  und  $BD$  befindliche Flüssigkeitsmasse, so ändern dort auch das am Bodendrucke nichts. Aber die schrägen Seitenwänden erleiden jetzt die einseitigen Drucke  $P$  und  $P'$  schräg nach oben. Dadurch werden die

1) παρά (griech.) = gegen, τόκός (griech.) = ich seheins.

2) Blaise Pascal (1626—1666), französischer Mathematiker.

immer elastischen Gefäßwandungen um ein wenig nach außen gebogen, und es werden in ihnen elastische Gegenspannungen geweckt, die den Drucken  $P$  und  $P'$  das Gleichgewicht halten. Die lotrecht aufwärts gerichteten Komponenten dieser Drucke werden im Gleichgewichte gehalten durch lotrecht abwärts gerichtete Komponenten der elastischen Gegenspannungen. Diese aber müssen dem Betrage nach ebenso groß sein wie die Drucke der Flüssigkeiten in den Räumen  $GA C$  und  $HB D$ , denn bei lose eingesetzter Wandung hielten sie an Stelle der elastischen Spannungen  $P$  und  $P'$  das Gleichgewicht. Der Bodendruck wird also dadurch nicht geändert; er ist gleich dem Gewichte der zylindrischen Flüssigkeitssäule, die den Boden als Grundfläche und die Entfernung des Bodens vom Flüssigkeitsspiegel zur Höhe hat.

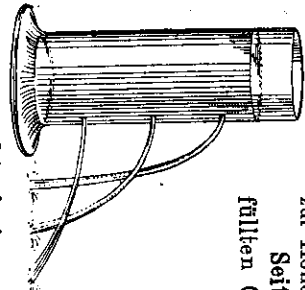


Fig. 316. Seitendruck.

Seitendruck. Macht man in die Wand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes an irgendeiner Stelle ein Loch, so fließt das Wasser aus, und zwar um so stärker je tiefer die Öffnung unter der Flüssigkeitsoberfläche liegt (Fig. 316). Das Wasser fließt infolge des von der Flüssigkeit seitlich ausgeübten Druckes (Seitendruck) aus. Denken wir uns einen Teil der Gefäßwandung herausgeschnitten, so ist der Seitendruck auf diesen Teil

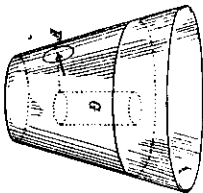


Fig. 317.

der Wandung gleich dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, die die gedrückte Fläche zur Grundfläche und die Entfernung der Oberfläche vom Schwerpunkt der gedrückten Fläche zur Höhe hat.

Die Gesamtkraft des Seitendruckes auf die Fläche  $F$  (Fig. 317) ist gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule  $G$ .

Ein Wasserleitungsrohr platzt infolge des Wasserdruckes um so leichter, je tiefer es liegt.

Aufdruck. Um ein leeres Glas mit dem Boden zuerst ins Wasser zu tauchen, muß man einen gewissen Druck von oben nach unten ausüben. Sobald der Druck aufhört, steigt das Glas nach oben. Das Wasser übt auf den eingetauchten Körper einen Druck, den Aufdruck, in der Richtung von unten nach oben aus.

Besonders auffallend zeigt sich der Druck nach aufwärts, wenn man in ein mit Wasser gefülltes Gefäß (Fig. 318) einen Glaszylinder senkt, der an seiner Unterseite durch eine untergelegte, ebene Metallplatte geschlossen werden kann. Die Platte wird beim Einsenken an einem in der Mitte befindlichen Faden gehalten. Läßt man den Faden los, so fällt die Platte nicht ab, sie wird durch den Aufdruck festgehalten. Schüttet man in den Zylinder Schrotkörner, oder gießt man Wasser hinein, so fällt bei einer gewissen Belastung der Boden ab. Das Gesamtgewicht von Platte und Schrotkörnern ist dann der Gesamtkraft des Aufdruckes gleich. (Versuch von s' Gravesande 1742.)<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Wilhelm Jacob s' Gravesande (1688—1742), Prof. in Leiden, veröffentlichte

Die Kraft des Aufdruckes ist gleich dem Gewichte einer Wasserssäule, die die gedrückte Fläche als Grundfläche und die Höhe der Wasserssäule über der gedrückten Fläche als Höhe hat.

Taucht man ein lotrechtes, dünnes Glasrohr (Fig. 319), dessen unteres Ende U-förmig gebogen ist, in Wasser ein, so wird durch das Wasser die Luft in dem Rohre zusammengedrückt, wenn man während des Eintauchens das obere Ende des Rohres mit dem Finger verschließt. Setzt man an die untere Öffnung kleine Glasröhrenden von der neben dem Zylinder abgebildeten Gestalt, so steigt das Wasser in allen Fällen bei derselben Tiefe des Eintauchens um dieselbe Höhe. Hieraus folgt:  
Der Druck im Innern einer Flüssigkeit ist an derselben Stelle nach unten, nach der Seite und nach oben gleich groß.

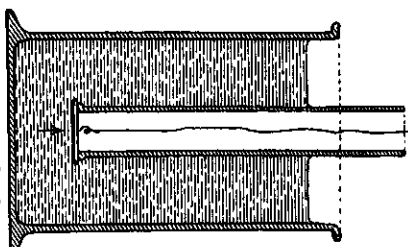


Fig. 318. Aufdruck.

sache folgt aus der leichten

Fig. 319. Versuch zum Aufdruck.

Verschiebbarkeit der Flüssigkeiten und der Volumenelastizität von selbst; denn wenn der Druck an irgendeiner Stelle im Innern der Flüssigkeit nach einer Seite größer wäre als nach einer anderen, so müßte eine Bewegung der Wassertheile an dieser Stelle erfolgen, und zwar so lange, bis ein Ausgleich des Druckes eingetreten ist.

### § 93. Verbundene Gefäße.

Taucht man (Fig. 320) in ein mit Wasser gefülltes Gefäß ein Brett, so bilden die Teile der Wasseroberfläche zu beiden Seiten des Brettes Teile derselben wagerechten Ebene. Das tun sie auch dann noch, wenn sich das Brett mit seinen Kanten den Gefäßwandungen vollständig anschließt, wenn also die Oberfläche in zwei vollständig getrennte Teile zerfällt, doch so, daß das Wasser unten noch im Zusammenhange bleibt.

Wenn zwei oder mehrere getrennte Gefäße an ihren unteren Teilen so miteinander verbunden sind, wie es Fig. 321 zeigt, so heißen sie verbundene oder kommunizierende<sup>1)</sup> Gefäße.

1720 das erste Lehrbuch der Experimentalphysik. Der Versuch war schon Stevyn bekannt.

<sup>1)</sup> communis (lat.) = gemeinsam, communicare = verbinden.

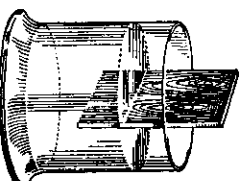


Fig. 320. Verbundene Gefäße.

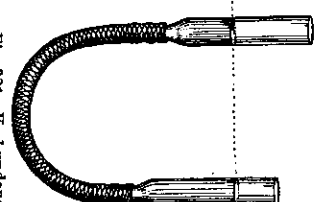


Fig. 321. Verbundene Gefäße.

In verbundenen Gefäßen steht das Wasser gleich hoch, oder die Flüssigkeitspiegel in verbundenen Gefäßen, die alle mit derselben Flüssigkeit gefüllt sind, bilden Teile ein und derselben wagerechten Ebene.

Das Gesetz der verbundenen Gefäße findet vielfache Anwendung. Die Flüssigkeit steht in der Glasblanne ebenso hoch wie im Ausguß (Fig. 322).

Um den Flüssigkeitsstand in einem Behälter mit undurchsichtigen Wänden zu erkennen, bringt man ein Wasserstandsglas an. Dampfessel (Fig. 323), Petroleumbehälter.

Auf dem Gesetze der verbundenen Gefäße beruht die Anlage der Wasserleitungen in den Städten. Aus hochgelegenen natürlichen Wasserbecken oder von den Behältern der Wassertröme, in die das Wasser durch gewaltige Pumpen gehoben wird, wird durch ein weitverzweigtes Röhrensystem das Wasser in die Häuser geleitet und strömt aus den Röhren, wenn die Hähne geöffnet sind, desto kräftiger aus, je höher der Wasserspiegel des Behälters über der Ausflußöffnung liegt.

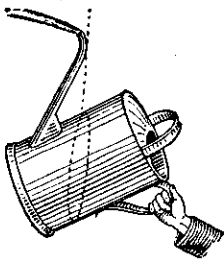


Fig. 322

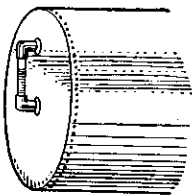


Fig. 323

Gesetz der verbundenen Gefäße.

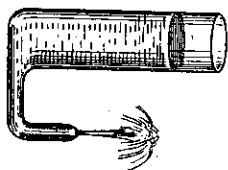


Fig. 324

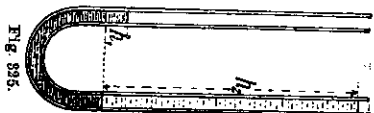


Fig. 325

Ist von zwei miteinander verbundenen Röhren die eine bedeutend kürzer als die andere und mit einer feinen Öffnung versehen, so fließt beim Hineingießen von Wasser in das lange Rohr die Flüssigkeit in einem kräftigen Strahle aus der Mündung des engen Rohres (Fig. 324). Es entsteht ein Springbrunnen.

Befindet sich in Landstrichen mit muldenförmig gelagerten Schichten eine aus Sand, Geröll oder Kies bestehende Schicht zwischen zwei undurchlässigen Schichten, z. B. aus Ton, so können in die Kiesschicht an der Stelle, wo sie zutage tritt, Niederschläge eintreten und sich in der Schicht sammeln. Macht man an einer tiefergelegenen Stelle eine Bohrung bis in die wasserführende Schicht, so tritt hier das Wasser in kräftigen Strahle heraus. Brunnen, die auf diese Weise angelegt werden, heißen artesisische Brunnen.<sup>1)</sup>

Bei Hochwasser tritt in Felder und Wiesen, die in der Nähe eines eingedeichten Flusses liegen, Wasser aus dem Boden, wenn der Wasserspiegel des Flusses sich über das Niveau der Felder und Wiesen erhebt.

Gießt man in den einen Schenkel einer U-förmig gebogenen Röhre eine Kochsalzlösung und darauf reines Wasser, so ist der Stand der beiden Flüssigkeiten verschieden: das Wasser steht höher als die Salzlösung. Dasselbe Er-

1) Nach der französischen Landschaft Artois.

§ 94. Das Archimedische Prinzip. Das Schwimmen der Körper. Metazentrum 279

scheinung tritt ein, wenn man zuerst Quecksilber und dann Wasser in ein U-Rohr einfüßt (Fig. 325). Die Wassersäule  $h_2$  ist 13,6 mal so lang wie die Quecksilbersäule  $h_1$ .

Befinden sich in verbundenen Gefäßen zwei verschiedene Flüssigkeiten, so sind sie dann im Gleichgewicht, wenn sich die Höhen der Flüssigkeitssäulen umgekehrt wie die spezifischen Gewichte der Flüssigkeiten verhalten.

Die Erklärung ist folgende:

Die Druckkraft im Innern einer Flüssigkeit auf ein Flächenelement ist gleich dem Gewichte der senkrecht über diesem Flächenelement befindlichen Flüssigkeitssäule. Ist daher die Größe dieses Flächenelementes  $\Delta q$ , sein senkrechter Abstand vom Niveau  $h$ , das spezifische Gewicht  $s$ , so beträgt die Kraft auf das Flächenelement  $h \cdot s \cdot \Delta q$ .

Wenn man den einen Schenkel eines U-Rohres (Fig. 325) mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte  $s_2$ , den anderen mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte  $s_1$  füllt, so erleidet an der Grenzschicht das Flächenelement von der einen Seite den Druck  $h_1 \cdot s_1 \cdot \Delta q$ , von der anderen Seite den Druck  $h_2 \cdot s_2 \cdot \Delta q$ . Das Flächenelement kann also nur dann in Ruhe sein, wenn  $h_1 \cdot s_1 = h_2 \cdot s_2$  ist, wenn also die Proportion  $h_1 : h_2 = s_2 : s_1$  besteht.

Von dieser Beziehung macht man Gebrauch, um das spezifische Gewicht zweier Flüssigkeiten zu vergleichen. Darauf, daß in einem U-förmigen Rohre, das rechts mit Wasser, links mit Quecksilber gefüllt ist, die Wassersäule 13,6 mal so hoch ist wie die Quecksilbersäule, folgt, daß das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13,6 beträgt.

Angenommene  
Flüssigkeiten  
verrechnenden  
spezifischen  
Gewichtes.

Zur Vergleichung des spezifischen Gewichtes zweier Flüssigkeiten auf Grund gleicher Erklärung kann (besonders bei mischbaren Flüssigkeiten) der in Fig. 326 dargestellte Apparat dienen. Ein U-förmiges Rohr, an dessen Biegung ein lotrecht nach oben gelandetes, verschließbares Ansatzrohr angebracht ist, wird mit seinen beiden Schenkeln in die zu vergleichenden Flüssigkeiten getaucht; dann werden die Flüssigkeiten in beiden Röhren gleichzeitig durch Ausaugen am mittleren Rohre gehoben. Die Höhen der gehobenen Flüssigkeitssäulen verhalten sich auch hier umgekehrt wie die spezifischen Gewichte, das heißt gleichem Querschnitte an Gewicht gleich sein müssen. Hier dient der Luftdruck dazu, gleich schwere Flüssigkeitssäulen zu heben.

#### § 94. Das Archimedische Prinzip. Das Schwimmen der Körper. Metazentrum.

Ein in eine Flüssigkeit vollständig eingetauchter Körper verliert so viel an Gewicht, wie die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge wiegt.

Der Gewichtsverlust wird Antriebs genannt. Die Erklärung folgt für einen prismatischen Körper leicht aus der Berechnung des Druckunterschiedes der Flüssigkeit auf die obere und untere Fläche des eingetauchten Körpers. Einen Körper von unregelmäßiger Gestalt (Fig. 327) kann man durch

lotrechte Schnitte in eine Reihe lotrechter Prismen zerlegen und für jedes einzelne den Unterschied der an der oberen und unteren Fläche herrschenden Drücke berechnen. Durch Summation der Druckdifferenz erhält man auch hier den Auftrieb für den ganzen Körper.

*Der Auftrieb eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers ist gleich dem Gewichte der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmasse.*

Dieser Satz wird das Archimedische Prinzip genannt.)

Wenn man einen vollständig eingetauchten Körper dreht, so geht die Angriffslinie des Auftriebes immer durch den Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) der verdrängten Flüssigkeitsmenge; folglich ist der Massenmittelpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge bei einem vollständig eingetauchten Körper

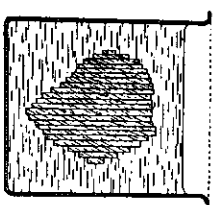


Fig. 327. Ein getauchter Körper, in lotrechte Prismen zerlegt.

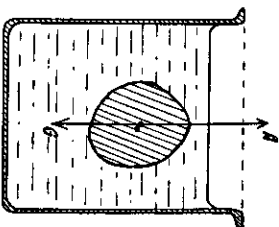


Fig. 328. Zusammenfallende Massenmittelpunkte.

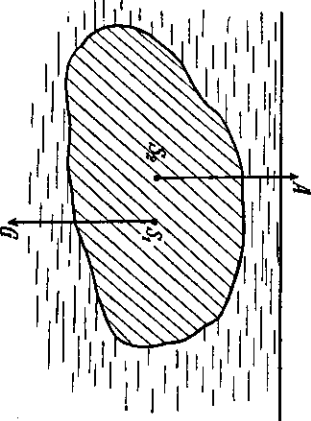


Fig. 329. Nicht zusammenfallende Massenmittelpunkte.

auch der Angriffspunkt des Auftriebes. Taucht man (Fig. 328) einen Körper vollständig ein und läßt ihn dann los, so wirken auf ihn zwei verschiedene Kräfte: erstens der Auftrieb  $A$ , zweitens das Gewicht  $G$  des Körpers. Halten die Angriffspunkte dieser beiden Kräfte zusammen oder liegen sie lotrecht übereinander, so sinkt, steigt oder schwebt der Körper, je nachdem  $G \geq A$  ist. Liegen der Massenmittelpunkt  $S_1$  des Körpers und der Massenmittelpunkt  $S_2$  der verdrängten Flüssigkeitsmenge nicht senkrecht übereinander (Fig. 329), so tritt außerdem noch ein Kräftepaar auf, das den Körper so lange dreht, bis wieder die Angriffspunkte lotrecht übereinander liegen.

Ist bei einem vollständig eingetauchten Körper das Gewicht kleiner als der Auftrieb, so steigt der Körper in die Höhe, bis ein Teil des Körpers über die Flüssigkeitsoberfläche herausragt. Von diesem Augenblicke an wird der Auftrieb geringer, weil die verdrängte Flüssigkeitsmenge geringer wird; der Körper steigt so lange, bis der Auftrieb dem Gewichte des Körpers gleich wird.

*Bei einem schwimmenden Körper ist das Gewicht des Körpers gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeitsmenge.*

1) Archimedes (287—212 v. Chr.) zu Syrakus war von König Hiero mit der Untersuchung einer goldenen Krone auf ihren Goldgehalt beauftragt worden. Er entdeckte gelegentlich eines Bades das Gesetz vom Auftriebe, mit Hilfe dessen er den Goldgehalt bestimmen konnte, ohne die Krone zu beschädigen. (Heureka = ich hab's gefunden!)

**Stabilität schwimmender Körper.** Es ist ohne weiteres klar, daß ein Körper sicher (stabil) schwimmt, wenn sein Massenmittelpunkt tiefer liegt als der Massenmittelpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmasse. Denn dann hat der Schwerpunkt des Körpers die tiefstmögliche Lage und die potentielle Energie hat einen kleinsten Wert (§ 51, S. 147). Es kann aber unter gewissen Umständen auch dann noch ein stabiles Schwimmen des Körpers eintreten, wenn sein Massenmittelpunkt  $S_1$  oberhalb des Massenmittelpunktes  $S_2$  der verdrängten Flüssigkeitsmenge liegt. Beim Seitwärtskippen (virtuelle Verrückung) des Körpers, z. B. nach rechts, verschiebt sich, je nach der Form des eintauchenden Teiles, der Massenmittelpunkt  $S_2$  der verdrängten Flüssigkeit gegen den Massenmittelpunkt des Körpers nach links (Fig. 330) oder rechts (Fig. 331). Es tritt also jetzt ein Kräftepaar auf, das im ersten Falle rechtsdrehend, im zweiten Falle linksdrehend ist. Das rechtsdrehende Kräftepaar würde ein Weiterdrehen des Körpers verursachen, während das linksdrehende Kräfte-

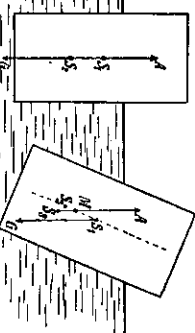


Fig. 330. Unsichere Lage.

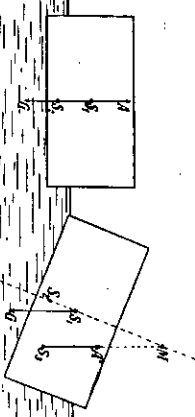


Fig. 331. Sichere Lage.

paar eine Zurückdrehung in die ursprüngliche Lage zur Folge hat. Im ersten Falle schwimmt der Körper unsicher (labil), im zweiten sicher (stabil).

Um zu entscheiden, ob ein Körper in unsicherer (labiler) oder sicherer (stabiler) Gleichgewichtslage schwimmt, zieht man durch die Massenmittelpunkte  $S_1$  des Körpers und  $S_2$  der verdrängten Flüssigkeitsmenge in der Gleichgewichtslage eine gerade Linie  $S_1S_2$  und dreht dann den Körper um einen kleinen Betrag aus der Gleichgewichtslage. Eine lotrechte Linie, die jetzt durch den Massenmittelpunkt  $S_2$  der verdrängten Flüssigkeitsmenge gezogen wird, schneidet die vorhin gezogene gerade Linie in einem bestimmten Punkte  $M$ , der das Metazentrum genannt wird. Liegt das Metazentrum unterhalb des Schwerpunktes des Körpers wie in Fig. 330, so tritt ein Kräftepaar auf, das den Körper noch weiter aus seiner Gleichgewichtslage entfernt. Die Gleichgewichtslage ist unsicher. Liegt dagegen das Metazentrum oberhalb des Schwerpunktes des Körpers, wie in Fig. 331, so wird der Körper wieder in seine Gleichgewichtslage zurückgedreht. Die Gleichgewichtslage ist also sicher. Je höher das Metazentrum über dem Schwerpunkt des Körpers liegt, um so größer ist die Stabilität des Schwimmens. Um die Stabilität bei einem Schiffe recht groß zu machen, versteht man die schweren Waren möglichst weit unten oder versieht das Schiff mit einem Bleikiele. Auch kann man dadurch, daß man das Schiff in der Wasserlinie weit ausladend baut, eine Erhöhung der Stabilität erreichen.

**Anmerkung:** Wenn ein Schiff auf bewegter See fährt, so wird es besonders in der Nähe der Wasseroberfläche durch die Wellen von seitlichen Kräften beeinflusst, die ihre Richtung andauernd wechseln. Wenn nun der Massenmittelpunkt des Schiffes sehr tief liegt, so ist das Moment dieser Kräfte in bezug auf den Massenmittelpunkt als Drehpunkt sehr groß, da die Kräfte an einem großen Arme wirken. Daher schaukeln dann die Wellen das Schiff andauernd stark hin und her und machen den Aufenthalt auf dem Schiffe unerträglich. Aus diesem Grunde darf man, in dem Bestreben, die Stabilität zu erhöhen, den Schwerpunkt des Schiffes nicht zu tief legen.

Die Stabilität eines schwimmenden Körpers, z. B. eines Schiffes, wird durch das Moment des Kräftepaars gemessen, welches das Schiff wieder in seine „kielrechte“ Lage zu drehen strebt, wenn es um einen Winkel  $\varphi$  aus dieser Lage gekippt worden ist. In Fig. 332 sei ein Schnitt senkrecht zur Längsachse eines

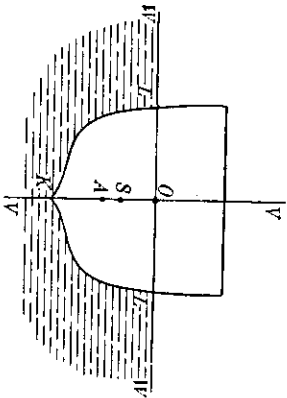


Fig. 332. Kielrechte Schiffsanlage.

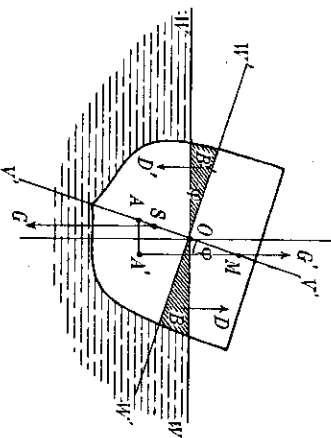


Fig. 333. Um den Kippwinkel  $\varphi$  geneigtes Schiff.

Schiffes abgebildet. Der Schwerpunkt des Schiffes sei  $S$ , an ihm greift das Gewicht  $G$  des Schiffes als lotrecht nach unten wirkende Kraft an. Der Schwerpunkt der verdrängten Wassermenge sei  $A$ , an ihm greift der Auftrieb  $G'$  an; dieser ist gleich dem Gewicht  $G$ , daher wird das Gewicht eines Schiffes auch wohl „Wasserverdrängung“ oder „Displacement“ genannt. In der kielrechten Lage, bei der die Mittelebene  $VV$  des Schiffes lotrecht steht, halten sich  $G$  und  $G'$  das Gleichgewicht.

**Das aufrichtende Drehmoment.** Wird das Schiff seitlich um den kleinen Winkel  $\varphi$  nach rechts gekippt (Fig. 333), so nimmt die Mittelebene die Lage  $V'V'$  an. Auf der rechten Seite taucht dann ein in der Figur gestrichelt gezeichneter keilförmiger Körper ein, auf der linken Seite taucht ein volumengleicher Keil aus, während eine durch den Punkt  $O$  gehende, zur Längsachse des Schiffes parallele Gerade ihre Lage beibehält. Diese Linie geht durch den Schwerpunkt der Fläche, die von der „Wasserlinie“ begrenzt wird (wie bei gewissen Voraussetzungen bewiesen werden kann). Beim Kippen verändert der Schwerpunkt  $S$  seine Lage im Schiffskörper nicht; aber der Schwerpunkt der verdrängten Wassermenge wird in anderer Höhe wie  $A$  liegt. Die beiden gleichen Kräfte  $G$  und  $G'$ , von denen  $G$  in  $S$  und  $G'$  in  $A'$  angreifen, erzeugen ein aufrichtendes Kräftepaar.  $M$  ist das Metazentrum des Schiffes. Die Entfernung des Metazentrums  $M$  vom Schwerpunkt  $S$  wird die metazentrische Höhe  $MS = h$  genannt. Das Moment des „aufrichtenden“ Kräftepaars ist

$$M = G \cdot h \cdot \sin \varphi.$$

§ 94. Das Archimedische Prinzip. Das Schwimmen der Körper. Metazentrum 283

Das Moment des aufrichtenden Kräftepaars kommt zustande durch das Zusammenwirken von Auftrieb und Gewicht. Es darf nicht verwechselt werden mit dem Momente des Auftriebes für sich allein.

**Moment des Auftriebes.** Die großen Ozeandampfer haben eine Wasserlinie, die durch Fig. 334 schematisch angegeben ist. In ihrem größten Teile haben sie annähernd gleichen Querschnitt; nur an den beiden Enden wird ihr Querschnitt wesentlich kleiner; am vorderen Ende, dem Bug, laufen sie scharf zu, am hinteren Ende, dem Heck, sind sie abgerundet. Vernachlässigen wir diese beiden Enden, so können wir die metazentrische Höhe berechnen. Ohne diese beiden Enden habe das Schiff die Länge  $l$  und an der Wasserlinie die unveränderliche Breite  $b$ . Bezeichnen wir ferner die Größe des Querschnittes, soweit er in Wasser eintaucht, also  $LK$  in Fig. 332, mit  $F$ , so ist das Volumen des verdrängten Wassers gleich  $F \cdot l$ . Dieser Ausdruck stimmt zahlenmäßig mit dem Gewichte  $G$  des Schiffes überein.

Beim Kippen des Schiffes ist (nach Fig. 333) der Angriffspunkt des Auftriebes  $G'$  um die Strecke  $AA' = MA \cdot \sin \varphi = (h + e) \sin \varphi$  verschoben, und hierdurch ist in bezug auf  $A$  als Drehpunkt das Moment  $M = G' \cdot AA' = G(h + e) \cdot \sin \varphi$  entstanden, wenn  $AS = e$  ist. Da man nun  $G = Fl$  setzen kann, gilt auch

$$M = Fl(h + e) \sin \varphi.$$

**Andere Berechnung desselben Momentes.** Dieses Moment ist dadurch zustande gekommen, daß auf der rechten Seite der eintauchende Keil einen im Schwerpunkt  $B$  dieses Keils lotrecht nach oben wirkenden Auftrieb  $D$  erzeugt hat, und daß auf der linken Seite der Auftrieb  $D'$  des austauchenden Keils, der in seinem Schwerpunkte  $B'$  angreifen hat, nicht mehr wirkt. Wollen wir daher die Wirkung des austauchenden Keils in Rechnung ziehen, so muß er lotrecht abwärts wirkend gerechnet werden. Die beiden gleichen Kräfte  $D$  und  $D'$  erzeugen demnach ein Kräftepaar mit der Kraftgröße  $D$  und mit dem Arme  $BB'$ . Das Moment dieses Kräftepaars ist daher  $M = D \cdot BB'$ . Das Moment eines Kräftepaars kann auf eine beliebige zu den Kräften senkrechte Achse bezogen werden (S. 142). Wir dürfen es also wieder auf  $A$  als Drehpunkt beziehen.

Nun ist  $D$  gleich dem Gewichte der von dem Keil verdrängten Wassermenge, also zahlenmäßig gleich seinem Rauminhalte, und dieses ist gleich dem Produkte aus dem Querschnitt des Keils und seiner Länge  $l$ . Der Querschnitt kann für kleine Kippen als Dreieck mit der Flächengröße  $\frac{1}{2} \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \sin \varphi$  berechnet werden, wenn  $b$  die Schiffsbreite ist. Ferner ist  $BB' = \frac{2}{3}b$ , also ist

$$M = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \sin \varphi \cdot l \cdot \frac{2}{3}b = \frac{1}{12} b^3 l \cdot \sin \varphi.$$

**Metazentrische Höhe.** Dieses Moment ist dem oben berechneten Momente  $M$  gleich, also besteht die Gleichung

$$F \cdot l \cdot (h + e) \sin \varphi = \frac{1}{12} b^3 \cdot l \cdot \sin \varphi.$$

Hieraus berechnet sich die metazentrische Höhe zu

$$h = \frac{1}{12} \frac{b^3}{F} - e.$$

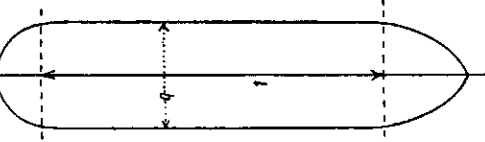


Fig. 334. Wasserlinie.

Wenn  $h$  positiv ist, so ist das aufrichtende Moment  $M_R = G \cdot h \cdot \sin \varphi$  positiv, d. h. die Gleichgewichtslage des Schiffes ist sicher (stabil). Das Gleichgewicht wird stetig (indifferent), wenn  $h = 0$  ist; es wird unsicher (labil), wenn  $h < 0$  ist.

Die praktische Bestimmung der metazentrischen Höhe eines Schiffes führt man aus, indem man ein bekanntes Gewicht  $P$  auf dem Deck des Schiffes seitlich um eine gemessene Strecke  $p$  verschiebt und den hierdurch bewirkten Kippwinkel  $\varphi$  an einem im Schiffe angebrachten Klinometer (Neigungsmesser) mißt. Dieser Apparat besteht aus einem Pendel, dessen Ausschlag an einem mit dem Schiffskörper verbundenen geteilten Kreisbogen abgelesen wird. Das Gewicht  $P$  erzeugt hierbei das Drehmoment  $P \cdot p \cos \varphi$ , und dieses ist dem aufrichtenden Momente  $M_R = G \cdot h \cdot \sin \varphi$  gleich, also besteht die Gleichung

$$G \cdot h \cdot \sin \varphi = P \cdot p \cdot \cos \varphi,$$

woraus folgt

$$h = \frac{P \cdot p}{G \cdot \tan \varphi}.$$

**Schlingern und Stampfen.** Beträgt das Trägheitsmoment des ganzen Schiffes  $\Theta$ , so beträgt die Schwingungsdauer der seitlichen Eigenschwingung des schwingenden Schiffes, des „Schlingerns“, (§ 57)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{M_R}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{G \cdot h}},$$

da für kleine  $\varphi$  gesetzt werden darf  $M_R = G \cdot h \cdot \varphi = M_{R_1} \varphi$ .

Hieraus folgt, daß die Schwingungsdauer eines Schiffes um so größer ist, je kleiner die metazentrische Höhe  $h$  ist. Ein Schiff mit geringer metazentrischer Höhe fährt daher sehr ruhig. Auf den großen Dampfern pflegt man die metazentrische Höhe für kleine Kippwinkel nur einen oder einige Meter groß zu machen, um den tazen-trische Höhe für größere Kippungen größer wird, um die metakippens (Kanterns) auszuschließen. Ferner hat die Schiffsführung dafür zu sorgen, daß die Periode, in der die Querwellen das Schiff treffen, nicht mit der Schwingungsdauer der Eigenschwingungen des Schiffes übereinstimmt, da sonst infolge von Resonanzwirkung der Kippwinkel über die erlaubte Grenze hinaus wachsen könnte.

In ähnlicher Weise, wie man die metazentrische Höhe für Querkippungen berechnen oder praktisch messen kann, kann man eine entsprechende Größe für Kippungen in der Längsrichtung bestimmen. Die metazentrische Höhe bedingt die Schwingungsdauer des „Stampfens“ eines Schiffes.

### § 95. Anwendung des Archimedischen Prinzipes zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Körper.

Mit Hilfe des Archimedischen Prinzipes kann man das Gewicht der von einem Körper verdrängten Wassermenge durch den Auftrieb messen. Man macht hiervon zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes fester Körper in folgender Weise Gebrauch.

Spezifisches Gewicht fester Körper. Der Körper wird an einem Faden unterhalb einer kurzen Wagschale einer gewöhnlichen Wage aufgehängt

(Fig. 335). Dann wird das Gewicht  $G$  des Körpers in gewöhnlicher Weise bestimmt. Hierauf stellt man ein Gefäß mit Wasser so unter die Wage, daß der aufgehängte Körper vollständig in das Wasser eintaucht. Er wiegt jetzt scheinbar weniger. Das scheinbare Gewicht  $H$  wird ebenfalls bestimmt. Die Differenz der beiden Gewichtbestimmungen ( $G - H$ ) ist der Auftrieb, also auch das Gewicht der dem Körper an Volumen gleichen Wassermenge. Beträgt die Gewichts-differenz ( $G - H$ ) Gramm, so ist das spezifische Gewicht

$$s = \frac{G}{G - H}.$$

Durch den in Fig. 335 dargestellten Versuch wird zugleich der Nachweis geliefert, daß die aus dem Gefäße ausgeschlossene Wassermenge wirklich gleich der durch den Auftrieb bestimmten Wassermenge ist.

Eine zur Messung des Auftriebes besonders hergerichtete Wage mit einer kurzen Wagschale wird hydrostatische Wage genannt. Statt einer solchen kann man auch eine gewöhnliche Wage benutzen, wenn man den Körper oberhalb der Wagschale mittels eines Fadens an dem Haken aufhängt, an dem die Wagschale hängt, und wenn man das Gefäß mit dem Wasser bzw. mit dem untersuchenden Flüssigkeit auf eine sog. Brücke oberhalb der Wagschale und unterhalb des hängenden Körpers so stellt, daß der Körper in die Flüssigkeit eintaucht, daß aber die Brücke die freie Bewegung der Wagschale nicht hindert.

**Spezifisches Gewicht flüssiger Körper.** Man bestimmt mit der hydrostatischen Wage das Gewicht  $G$  eines beliebig gestalteten, an die Wage gehängten festen Körpers (z. B. des neben der Wage in Fig. 335 abgebildeten Glaskörpers), taucht dann den Körper zuerst in Wasser und darauf in die zu untersuchende Flüssigkeit ein und bestimmt jedesmal das scheinbare Gewicht  $F$ , so ist der Auftrieb in Wasser ( $G - H$ ), in der zu untersuchenden Flüssigkeit ( $G - F$ ). Folglich ist das spezifische Gewicht der Flüssigkeit

$$s = \frac{G - F}{G - H}.$$

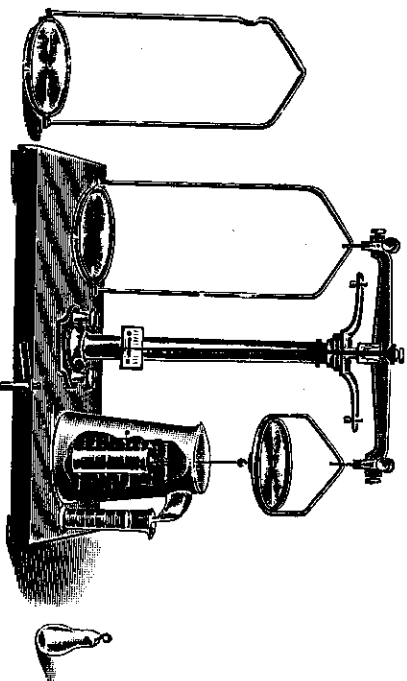


Fig. 335. Hydrostatische Wage

Aus dem archimedischen Prinzipie für schwimmende Körper folgt, daß ein Körper um so tiefer einsinkt, je geringer das spezifische Gewicht der Flüssigkeit ist. Auf diesem Prinzipie beruht die Wirkungsweise der Aräometer- oder Sankwagen, die gewöhnlich die in Fig. 336 abgebildete Gestalt haben:

Ein aus Glas geformter Hohlkörper ist an seinem unteren Ende durch Quecksilber oder Blei beschwert, damit der Massenmittelpunkt möglichst tief liegt. An den oberen Teil des Glaskörpers schließt sich ein zylindrischer Ansatz (die Spindel) an, in dessen Innern eine empirische Teilung angebracht ist. An der Teilung liest man das spezifische Gewicht der Flüssigkeit ab, in der das Aräometer schwimmt. Die größeren spezifischen Gewichte stehen dabei unten, die kleineren oben an der Teilung.

Aräometer, die zur Bestimmung des Prozentgehaltes einer Flüssigkeit dienen, werden je nach der Art der Flüssigkeit, für die sie bestimmt sind, Saccharometer (für Zuckerlösungen), Alkoholometer (für Alkohol), Säurwagen usw. genannt. Da das spezifische Gewicht solcher Flüssigkeiten außer von ihrem Prozentgehalte auch von der Temperatur abhängt, so werden diese Apparate für eine bestimmte Temperatur (gewöhnlich 15° C) geeicht. Für andere Beobachtungstemperaturen müssen Umrechnungen gemacht werden, die auf Grund besonders berechneter Tabellen ausgeführt werden.

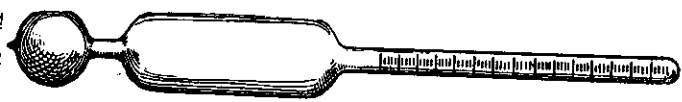


Fig. 336. Aräometer. Aus einer Öffnung, die am Boden oder in einer Seitenwand eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäßes gemacht wird, tritt das Wasser mit einer Geschwindigkeit aus, die durch das Torricelli-  
Aräometer. siehe?) Ausflußgesetz (1644) bestimmt ist.

Die Ausflußgeschwindigkeit ist gleich der Geschwindigkeit, die ein Körper erlangen würde, wenn er vom Spiegel der Flüssigkeit bis zur Ausflußöffnung frei fallen würde.

Begründung: 1. Nach dem Grundgesetze der Mechanik. In dem in Fig. 337 abgebildeten Gefäße sei am Boden eine Öffnung vom Querschnitt  $q$  angebracht, und das Gefäß sei bis zur Höhe  $h$  über der Öffnung mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte  $s$  gefüllt. Auf die in der Ausflußöffnung befindliche Flüssigkeitsmenge wirkt als bewegende Kraft das Gewicht der auf ihr lastenden Flüssigkeitskolumne. Es ist  $P = qhs$ . Während des Zeitelementes  $\Delta t$  tritt die Flüssig-

1) *araiós* (griech.) = dünn, in übertragener Bedeutung: flüssig. Das Aräometer, wahrscheinlich schon im Altertum bekannt, wurde von Robertval (S. 237) nachgefunden.  
2) Evangeliste Torricelli (1608—1647), Schüler von Galilei, außer durch sein Ausflußgesetz besonders berühmt durch den nach ihm benannten Versuch (§ 101) zur Messung des Luftdruckes. Das Ausflußproblem ist einer der Ausgangspunkte der theoretischen Hydraulik.

§ 96. Das Aräometer.

§ 97. Der Ausfluß der Flüssigkeiten

keissäule vom Querschnitte  $q$  und der Höhe  $\Delta h$  aus der Öffnung heraus. Ihre Masse ist  $m = q\Delta h \cdot s$ . Unter dem Einflusse der Druckkraft  $P$  erfährt sie die Beschleunigung  $\gamma$ . Es ist

$$P = mb, \text{ also } b = \frac{P}{m} = \frac{q \cdot h \cdot s \cdot g}{q \cdot \Delta h \cdot s} = \frac{g \cdot h}{\Delta h}.$$

Während die kleine Flüssigkeitssäule mit der berechneten Beschleunigung  $b$  die Höhe  $\Delta h$  durchläuft, erlangt sie die Geschwindigkeit (§ 13, S. 29)

$$v = \sqrt{2b \cdot \Delta h} = \sqrt{\frac{2gh \cdot \Delta h}{\Delta h}} = \sqrt{2gh}.$$

Das ist aber dieselbe Geschwindigkeit, die ein von der Höhe  $h$  frei herabfallender Körper erlangen würde.

2. Nach dem Energieesatze. Man erhält den Wert für die Ausflußgeschwindigkeit auch durch eine energetische Überlegung. Die kinetische Energie der ausfließenden Flüssigkeitsmenge kann nur durch Verwandlung von potentieller Energie der im Gefäße ruhend gedachten Flüssigkeit entstanden sein. Wenn nun aus dem Gefäße in Fig. 337 unten Flüssigkeit ausströmt, so wird die Flüssigkeit auch innerhalb des Gefäßes in Bewegung sein; diese ist desto geringer, je größer der Querschnitt  $Q$  des Gefäßes im Vergleiche zum Querschnitte  $q$  der Öffnung ist. Wir wollen daher den Bewegungszustand der Flüssigkeit innerhalb des Gefäßes berücksichtigen; es falle der Spiegel der Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit  $V$ .

In einer kleinen Zeit  $\tau$  hat sich dann der Spiegel der Flüssigkeit um die Höhe  $\Delta h$  gesenkt. Es ist also in dieser Zeit eine Flüssigkeitsmenge  $\Delta h \cdot Q \cdot s$  aus dem Gefäße ausgeflossen. Da die ideale Flüssigkeit inkompressibel ist, muß das Volumen dieser Flüssigkeit auch aus dem Querschnitte  $q$  und der Strahlenlänge  $\Delta l$  des in der Zeit  $\tau$  ausgetretenen Flüssigkeitsfadens berechnet werden können zu  $q \cdot \Delta l$ . Es ist also

$$Q \cdot \Delta h = q \cdot \Delta l.$$

Nun ist  $\frac{\Delta h}{\tau} = V$  und  $\frac{\Delta l}{\tau} = v$ . Daher gilt auch

$$Q \cdot V = q \cdot v \text{ (Kontinuitätsgleichung).}$$

Die Flüssigkeitsmenge  $Q \cdot \Delta h \cdot s$  hat die kinetische Energie  $Q \cdot \Delta h \cdot s \cdot \frac{v^2}{2}$  und die potentielle Energie  $Q \cdot \Delta h \cdot s \cdot h \cdot g$  (S. 259). Die in der Zeit  $\tau$  ausgetretene Flüssigkeitsmenge  $q \cdot \Delta l \cdot s$  hat die kinetische Energie  $q \cdot \Delta l \cdot s \cdot \frac{v^2}{2}$ . Da weder Energieverlust noch -gewinn eintreten soll, ist

$$Q \cdot \Delta h \cdot s \cdot \frac{v^2}{2} + Q \cdot \Delta h \cdot s \cdot h \cdot g = q \cdot \Delta l \cdot s \cdot \frac{v^2}{2}$$

und der ersten Gleichung wegen

$$\frac{V^2}{s} + h \cdot g = \frac{v^2}{s} \text{ oder } h = \frac{v^2 - V^2}{2g}.$$

Wird Druckhöhe einer Flüssigkeit in Geschwindigkeit verwandelt, so ist der 2g-te Teil der Differenz der Geschwindigkeitsquadrate stets gleich der Druckhöhe.

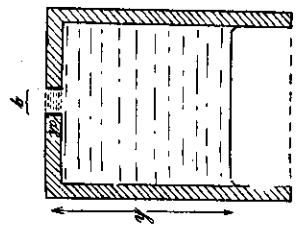


Fig. 337. Ausflußgefäß.

Wir können noch umformen zu

$$h = \frac{v^2}{2g} \left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right) \quad \text{und mit} \quad \frac{V}{v} = \frac{Q}{Q^*}$$

$$h = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{Q^2 - Q^{*2}}{Q^2} \quad \text{oder} \quad v^2 = 2g h \cdot \frac{Q^2 - Q^{*2}}{Q^2}$$

Das ist die Gleichung von Daniel Bernoulli:)

Für große  $Q$  gegenüber  $q$  geht sie über in das Torricellische Ausflußgesetz  $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ .

Ist  $Q$  so groß, daß demgegenüber  $q$  vernachlässigt werden kann, so ist das gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Geschwindigkeit  $V$ , mit welcher der Wasserspiegel sinkt, unmerklich klein ist.

Bemerkung Die Öffnung  $q$  braucht nicht im Boden angebracht zu sein, wie in Fig. 337 gezeichnet wurde, sie kann auch in der Seitenwandung liegen. Dann ist die Druckhöhe  $h$  der Abstand ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel.

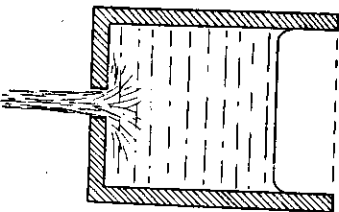


Fig. 338.  
Strahleneinströmung.

Die beobachtete Ausflußmenge bleibt hinter der berechneten zurück. Hierfür lassen sich zwei Gründe angeben:

1. tritt an der Ausflußöffnung ein beträchtlicher Reibungsverlust ein, 2. beobachtet man, daß der aus der Öffnung ausfließende Flüssigkeitsstrahl unmittelbar unterhalb der Ausflußöffnung eine Einschnürung (Fig. 338) erfährt, infolge deren als Ausflußquerschnitt nur der durch die Einschnürung bedingte Querschnitt zu rechnen ist. Die wirkliche Ausflußmenge beträgt annähernd  $\frac{2}{3}$  der berechneten.

Der zweite dieser Gründe bleibt auch für eine „ideale“ Flüssigkeit bestehen. Denn die aus der Öffnung strömenden Flüssigkeitsteilchen gelangen nicht nur den Seiten her zu. Daher werden innerhalb des Gefäßes die Strömungslinien außer den Rand der Öffnung herum umgebogen. Dabei muß sich die Trägheit der sehr hoch zuströmenden Wasserteilchen geltend machen. Ihr zufolge werden sie noch einen Teil der nach dem Mittelpunkt des Querschnittes hin gerichteten Geschwindigkeit beibehalten, nachdem sie schon in den Querschnitt eingetreten sind. Die Wasser großen Teile ihre Bewegung dem Mittelpunkt des Querschnittes zu auch noch fortsetzen, nachdem der Strahl schon durch die Öffnung in der Gefäßwandung hindurchgetreten ist, d. h. der Strahl wird sich zusammenziehen. Das dauert so lange bis durch Druckwirkungen aus dem Innern des Strahles heraus diese zentrifugale

1) Daniel Bernoulli (1700–1782), Sohn des berühmten Mathematikers Johann Bernoulli, geb. in Groningen, dann längere Zeit in Rudland, schließlich in der Heimatstadt Basel der Familie Bernoulli Professor bis zu seinem Tode. Die Gleichung findet sich in Hydrodynamica, Argentorati 1738.

Bewegung aufgehoben ist. Dann erst wird der Querschnitt des Strahles für den weiteren Verlauf des Strahles eine unveränderliche Größe angenommen haben. Bis zur Erreichung dieses „engsten Querschnittes“ wird aber auch im Innern des Strahles der Druck noch nicht ganz aufgehoben sein. — Während die Wasserteilchen gezogen werden, um den Rand der Ausflußöffnung herumzufließen, macht sich die Trägheit als zentrifugale Trägheitskraft geltend. Diese ist am Rande der Öffnung schräg gegen die Strahlachse in das Gefäßinnere hineingerichtet. Die Trägheitskräfte müssen daher einen Teil der hydrostatischen Druckkraft  $P = q \cdot h \cdot s \cdot g$  aufheben, so daß diese nicht voll zur Geltung kommen kann; im Strahle herrscht also auch nach seinem Austritte aus der Gefäßöffnung eine Druckspannung, nämlich von innen nach außen wirkend ein Restteil des Flüssigkeitsdruckes, von außen nach innen wirkend die Zentrifugalkräfte.

Vom Gefäßinnern her treffen an der Ausflußöffnung Strömungslinien zusammen, in denen die Flüssigkeit nicht überall dieselbe Geschwindigkeit hat. Daher muß sich bei den „nicht idealen“ Flüssigkeiten, mit denen man es praktisch immer zu tun hat, die „innere Reibung“ (S. 262) geltend machen.

An der Austrittsöffnung bilden sich Flüssigkeitswirbel (S. 206) aus, diese verzehren wegen der inneren Reibung einen Teil der kinetischen Energie der bewegten Flüssigkeitsteilchen; im weiteren Verlaufe des Strahles gleichen sich die Geschwindigkeitsunterschiede der Strömungslinien im Innern des Strahles aus. Der Strahl hat dann in allen seinen Teilen dieselbe Geschwindigkeit; diese ist des Reibungsverlustes wegen aber geringer, als sie der theoretischen Forderung nach sein sollte.

4. Die Bewegungsgröße des Strahles. Hat die Öffnung in dem Gefäße den Querschnitt  $q$ , so wird der Strahl den eingeschmürten Querschnitt  $\alpha \cdot q$  besitzen, wo  $\alpha < 1$  ist. In der Zeit  $\tau$  fließt also aus der Gefäßöffnung, die wir uns in der Seitenwand denken wollen, die Flüssigkeitsmenge  $\alpha \cdot q \cdot v \cdot s \cdot \tau$  aus. Sie führt eine Bewegungsgröße  $\alpha \cdot q \cdot v \cdot s \cdot \tau \cdot v = \alpha \cdot q \cdot s \cdot v^2 \cdot \tau$  mit sich fort. Im eingeschmürten Querschnitte herrscht der Druck Null. Daher muß dieser Bewegungsgröße nach dem Impulssatze ein Impuls  $P' \cdot \tau = \alpha \cdot q \cdot s \cdot v^2 \cdot \tau$  entsprechen. Setzen wir hierin nach dem Torricellischen Ausflußgesetz  $v^2 = 2gh$ , so wird

$$P' = \alpha \cdot q \cdot s \cdot 2g \cdot h.$$

Die hydrostatische Druckkraft auf den eingeschmürten Querschnitt ist aber

$$P = \alpha \cdot q \cdot s \cdot g \cdot h.$$

Die Kraft, welche das Gefäß im entgegengesetzten Sinne der Ausflußgeschwindigkeit erfüllt, ist also das Doppelte der statischen Druckkraft auf den Strahlquerschnitt.

Man nennt diese dynamische Druckkraft Reaktionskraft.

Die Reaktionskraft ist eine gerichtete Größe, da sie der Bewegungsgröße an Richtung immer entgegengesetzt sein muß. Der Flüssigkeitsdruck ist an sich ungerichtet. Wie eine elastische Spannung (S. 183) heben im Innern einer Flüssigkeit sich um jeden Punkt herum die statischen Druckkräfte auf; nur an den Unstetigkeitsflächen, den Gefäßwandungen, kann das nicht eintreten. Hier kommen daher die statischen Druckkräfte zur Entfaltung und stehen immer senkrecht zur Gefäßwandung.



Die Richtigkeit des Satzes über die Reaktionskraft ist schon von D. Bernoulli durch Versuche nachgewiesen worden.

Hängt man das mit Wasser gefüllte Gefäß Fig. 337 bei verschlossener Öffnung  $q$  an eine Waage und tariert die Waage ein, entfernt dann den Verschluss der Öffnung und sorgt noch dafür, daß das unten ausfließende Wasser restlos gleichmäßig dem Gefäße oben wieder zugeführt wird, so zeigt die Waage eine Gewichtsverminderung auf seiten des Gefäßes. Denn ein Wasserzylinder des Querschnittes  $\alpha \cdot q$  und der Höhe  $h$  (in Wirklichkeit einer etwas größeren Höhe) wird von der Waage nicht mehr getragen. Würde dieser ausfallende Gewichtsanteil sich allein auf die Waage gelend machen, so müßte sie eine Gewichtsverminderung um das Gewicht  $\alpha \cdot q \cdot h \cdot s \cdot g$  anzeigen. Das ist nun nicht der Fall. Die Waage zeigt eine Gewichtsverminderung um den doppelten Betrag. Die zweite Hälfte stellt den Überschuß der Reaktionskraft gegenüber dem statisch wirksamen Drucke dar.

Der oben eingeführte Zahlenfaktor  $\alpha$  heißt die *Einschrümwungszahl* (Kontraktionskoeffizient). Für ein kreisförmiges Bodenloch in einer dünnen Wandung ist  $\alpha = 0,64$ .

Nach dem Torricellischen Ausflußgesetze sollte in der Zeiteinheit aus der Öffnung die Menge  $M = q \cdot v \cdot s = q \cdot s \cdot \sqrt{2gh}$  ausströmen. Sie ist aber geringer (s. o. 3.). Man setzt daher  $M = \beta \cdot q \cdot s \cdot \sqrt{2gh}$  und nennt  $\beta$  die *Ausflußzahl* (Ausflußkoeffizient). Für ein kreisförmiges Bodenloch in dünner Wandung ist  $\beta = 0,63$ , also etwas kleiner als  $\alpha$ .

Wählt man zum Ausflusse geeignet geformte Ansatzröhren, so kann man die Strahleneinschrümwung vermeiden. Dann wird also  $\alpha = 1$ . Es läßt sich aber  $\beta$  nicht über den Wert 0,91 bringen, da immer, unabhängig von der Strahleneinschrümwung ein Teil der Bewegungsenergie durch innere Reibung verzehrt und dadurch die Ausflußgeschwindigkeit herabgesetzt wird.

5. Der Ausfluß aus langen Röhren. Wenn in eine Rohrleitung an dem einen Ende genau so viel Wasser eintritt, wie am andern austritt, so fließen in jedem Augenblicke durch jeden Querschnitt der Rohrleitung gleich große Wassermengen (Kontinuitätsbedingung). Das ist auch dann der Fall, wenn der Querschnitt an den einzelnen Stellen der Rohrleitung verschieden ist; denn sonst müßte sich das Wasser an einzelnen Stellen andauernd aufstauen, an anderen müßte ein andauerndes Abfließen ohne gleich großen Zufluß eintreten, wodurch der betrachtete Rohrteil überhaupt von Wasser frei würde. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist bei ungleichem Querschnitte verschieden. Sie ist dort am größten, wo der Querschnitt am kleinsten ist. Wenn  $q$  der Querschnitt und  $v$  die Geschwindigkeit, so ist  $q \cdot v$  an allen Stellen unveränderlich. Eine solche Strömung heißt stationäre Strömung. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß der Bewegungszustand an irgendeinem Punkte der Leitung andauernd derselbe ist, obgleich sich die bewegten Flüssigkeitsmassen stets ändern, und obgleich die Zustände an den verschiedenen Punkten der Leitung voneinander verschieden sein können.

Wenn die Flüssigkeit aus einem weiteren Teile eines Rohres in einen engeren eintritt, so nimmt ihre Geschwindigkeit aus dem angegebenen Grunde

zu. Da nun die bewegte Wassermenge unverändert bleibt, so wird die kinetische Energie an dieser Stelle plötzlich verändert.

6. Druckabfall bei gleichmäßigem Querschnitte. Setzt man in der Nähe des Bodens eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäßes (Fig. 339) ein langes wagerechtes Rohr von gleichmäßigem Querschnitte an, aus dessen äußerstem Ende die Flüssigkeit ausfließt, so kann der Fall eintreten, daß infolge des großen Reibungswiderstandes im Rohre die Ausflußgeschwindigkeit sehr klein ist, daß also der Flüssigkeitsdruck annähernd gleich Null ist. An der Stelle, an der das Rohr an das Gefäß angeschlossen ist, ist der Flüssigkeitsdruck nach § 92 durch die Höhe des Spiegels der Flüssigkeit bestimmt. Er hat also, auf die Einheit des Querschnittes bezogen und in  $g^*/\text{cm}^2$  berechnet, den Wert  $h$ . Setzt man nun auf das Rohr eine Reihe von lotrechten Steigrohren in beliebigen Abständen voneinander auf, so steigt in den Röhren die Flüssigkeit in die Höhe. Die Steighöhe ist ein Maß für den an der Ansatzstelle ausgeübten Druck. Die Ausführung des Versuches lehrt, daß dann die oberen Enden der Flüssigkeitssäulen auf einer vom Wasserspiegel des Gefäßes bis zur Ausflußöffnung gerichteten geraden Linie liegen. Hieraus folgt, daß die Druckabnahme proportional der am Ausflußrohre gemessenen Länge ist.

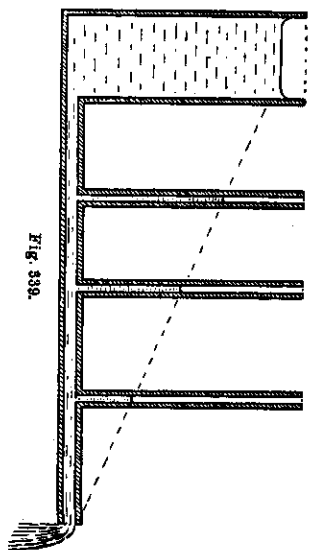


Fig. 339.

7. Druckabfall bei ungleichmäßigem Querschnitte. Wenn an irgendeiner Stelle des im übrigen zylindrischen Ausflußrohres (Fig. 340) eine Verengung vorhanden ist, so nimmt der Druck bis zu der Verengung gleichmäßig ab, dann folgt eine plötzliche Druckabnahme, und von nun an ist wieder die Druckabnahme proportional der Rohrlänge. Wir können uns die Verengung ersetzt denken durch ein Rohr von demselben Querschnitte, wie ihn der übrige Teil des Rohres hat, aber von solcher Länge, daß der Teil der geneigten, geraden Linie, die die untern Wasserspiegel in den Steigrohren verbindet, die Verlängerung der ge-

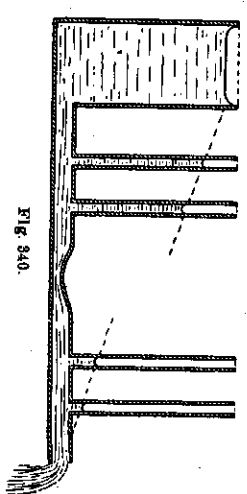


Fig. 340.

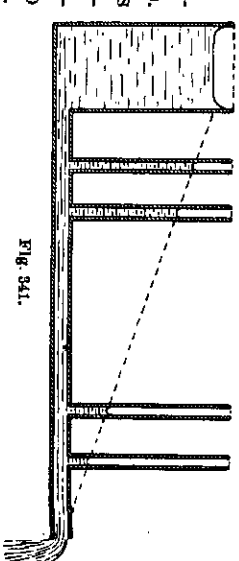


Fig. 341.

raden Linie ist, die die oberen Wasserspiegel in den Druckrohren verbindet (Fig. 341). Hieraus folgt:

*Man kann bei Flüssigkeitsströmen ein kurzes enges Rohr durch ein langes weites Rohr ersetzen.*

8. Reibungsverlust. Da wir annehmen, daß das Wasser mit einer zu vernachlässigenden Geschwindigkeit aus der Ausflußöffnung ausfließt, so geht die Strömung mit einem Energieverluste Hand in Hand, der in der Reibung begründet ist, die die durch Adhäsion fest an den Rohrwandungen haftende äußerste Flüssigkeitshaut auf das Wasser ausübt. Der Energieverlust ist bei zylindrischen Rohren proportional der Rohrlänge.

Ist das Ausflußrohr so weit, daß die Flüssigkeit am Erde noch mit merklicher Geschwindigkeit auströmt, so geht nur ein Teil der kinetischen Energie durch die Reibung verloren. Das

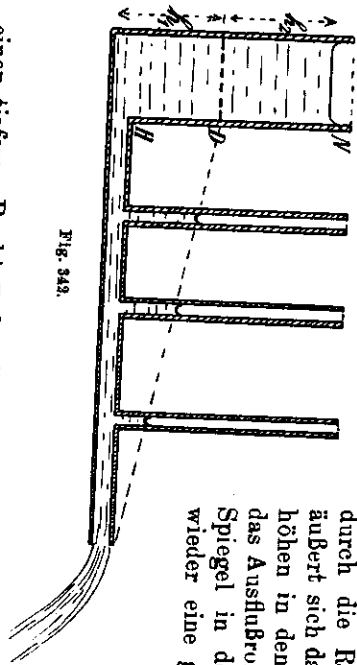


Fig. 342.

einen tieferen Punkt  $D$  des Gefäßes (Fig. 342). Liegt der Punkt  $D$  um die Strecke  $h_1$  oberhalb der horizontalen Ausflußöffnung  $H$  und um die Strecke  $h_2$  unterhalb des Flüssigkeitsspiegels, so heißt  $h_1$  Druckhöhe und  $h_2$  Geschwindigkeitshöhe der Flüssigkeit. Die Druckhöhe  $h_1$  ist diejenige Geschwindigkeitshöhe der Flüssigkeitssäule, der zur Überwindung der Reibungswiderstände dient; die der Druckhöhe entsprechende Energie nimmt längs des ganzen Ausflußrohres proportional der Länge ab, während die Geschwindigkeitshöhe  $h_2$  denjenigen Betrag der Energie liefert, vermöge dessen die Flüssigkeit aus der Ausflußöffnung herausschießt. Die Ausflußgeschwindigkeit ist  $v = \sqrt{2gh_2}$ .

Wenn die Reibung in dem Ausflußrohre so gering ist, daß man sie vollständig vernachlässigen kann, so steigt in keinem der auf das zylindrische Ausflußrohr aufgesteckten Druckanzeiger die Flüssigkeit in die Höhe. Die ganze Flüssigkeitshöhe ist Geschwindigkeitshöhe, und die Druckhöhe ist gleich Null.

9. Druckabfall bei wechselndem Querschnitte. Die Verhältnisse ändern sich wesentlich, wenn man statt des zylindrischen Ausflußrohres ein solches mit wechselndem Querschnitte wählt.

Es möge in Fig. 343 ein Stück des Ausflußrohres dargestellt sein, wo der weitere Querschnitt  $q_1$  in den engeren Querschnitt  $q_2$  übergeht. Da die

§ 97. Der Ausfluß der Flüssigkeiten 293

durch jeden Querschnitt fließende Wassermenge unveränderlich ist, so muß, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  sind, die Gleichung bestehen  $v_1 q_1 = v_2 q_2$  (s. oben 2. u. 5.), d. h. also: die Geschwindigkeit des strömenden Wassers nimmt beim Eintritt in den engeren Rohrtteil zu.

Erweitert sich der Querschnitt wieder bei  $q_3$ , so nimmt hier die Geschwindigkeit wieder ab. Hieraus folgt, daß die kinetische Energie des fließenden Wassers an den verschiedenen weiten Stellen des Ausflußrohres verschieden groß ist; sie ist am größten an den Stellen kleinsten Querschnittes, an denen die Geschwindigkeit, dem Torricellischen Ausflußgesetze entsprechend,  $v = \sqrt{2gh}$  ist. Demnach ist hier die kinetische Energie der Masseneinheit des fließenden Wassers  $E_k = \frac{v^2}{2}$ . An einer Stelle, wo der Querschnitt  $n$ mal

so groß ist als an der engeren Stelle, beträgt die Geschwindigkeit nur  $\frac{v}{n}$ , also ist hier die kinetische Energie der Masseneinheit  $E'_k = \frac{v^2}{2n^2}$ , folglich um den Betrag  $E_k - E'_k = \frac{v^2}{2} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2}$  kleiner. Dieser

Energiebetrag ist aber nicht verloren gegangen; sondern er ist in der Form von potentieller Energie des Wassers vorhanden. Die potentielle Energie äußert sich in einem Drucke des Wassers gegen die Rohrwandungen (S. 287). Die Entstehung dieses Druckes kann man auch unmittelbar einsehen. Man bedenke, daß das in den erweiterten Teil mit größerer Geschwindigkeit einströmende Wasser infolge seiner Trägheit auf das voranströmende, langsamere fließende Wasser nachdrängt. Wegen der Stauwirkung muß also dieses Wasser zusammengedrückt werden und damit in einen Spannungszustand geraten, der als Druck auf die Gefäßwandung beobachtet werden kann. Setzt man nach Fig. 343 Druckrohre an den verschiedenen Stellen auf das Ausflußrohr, so steigt das Wasser in den Druckrohren und zeigt hierdurch von selbst den Druck an. An der eben betrachteten Stelle steigt das Wasser auf die Druckhöhe  $\frac{n^2 - 1}{n^2} \cdot h$ , welche der oben angegebenen Abnahme der potentiellen Energie entspricht.

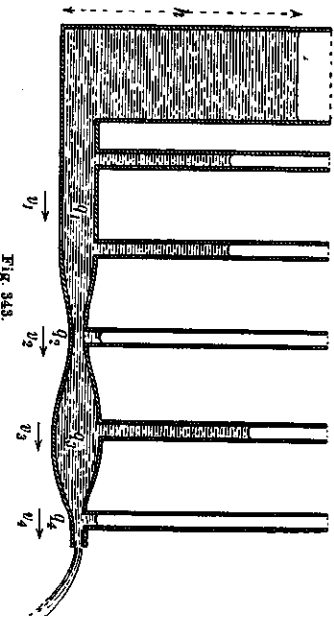


Fig. 343.

10. Der hydrodynamische Druck. Der durch die Strömung des Wassers hervorgerufene Druck wird hydrodynamischer Druck genannt.

Die Größe des hydrodynamischen Druckes kann auch ohne jede energetische Betrachtung gefunden werden, wenn wir die oben herangezogene Trägheitswirkung des auf geringere Geschwindigkeit abgebremsten Wassers rechnerisch untersuchen. Das möge im folgenden geschehen. Auf eine gewisse Länge  $l$  möge die Röhre

(Fig. 343) den gleichförmigen Querschnitt  $q_2$  haben; in diesem Rohrteile herrsche der Wasserdruk  $P_2$ . Es erweitert sich dann der Querschnitt längs einer gewissen Strecke auf den Querschnitt  $q_3$ , der, wie wir annehmen wollen, wieder längs einer gewissen Länge unverändert helgehalten werden soll. Im Rohrteile des Querschnittes  $q_3$  herrsche der Wasserdruk  $P_3$ . Ist nun ein beliebiger Querschnitt des Rohres zwischen denen von  $q_2$  und  $q_3$  von der Größe  $q$  und seine Entfernung von der Höhe eines sehr dünnen Wasserscheibchens des Querschnittes  $q$ , welches wir senkrecht zur Achse des Rohres ausgeschnitten denken. Das Volumen dieses Scheibchens ist  $q dx$  und damit auch seine Masse. Ist die Geschwindigkeit, mit der das in diesem Scheibchen enthaltene Wasser strömt,  $v$ , so ist die Beschleunigung, weil der Querschnitt  $q$  als wachsend, die Geschwindigkeit  $v$  also als abnehmend betrachtet wird. Bei jedem beschleunigten Körper macht sich eine Trägheitskraft  $\Pi = -b \cdot m$  (S. 86) geltend. In unserem Falle ist daher die vom Scheibchen herrührende Trägheitskraft  $d\Pi = + \frac{dv}{dt} \cdot q \cdot dx$ . Denken wir uns nun den ganzen Rohrteil, in welchem die Erweiterung stattfindet, vom letzten Querschnitt  $q_2$  bis zum ersten Querschnitt  $q_3$  hin, in lauter Scheibchen der Dicke  $dx$  zerlegt, so übt jedes von ihnen nach rechts hin einen solchen Trägheitsdruck aus. Diese Einzeldrücke addieren sich. Wenn wir uns einmal den betrachteten Rohrteil senkrecht gestellt denken, so daß  $q_3$  wagerechte Bodenfläche,  $q_2$  wagerechte obere Grenzfläche element  $q dx$  je mit der scheinbaren Schwere  $\frac{dv}{dt} \cdot q \cdot dx$  nach „unten“ auf den Boden  $q_2$  drücke. Nach dem Stevin-Pascalschen Satze vom Bodendruk ist dieser aber unabhängig von der Form des Gefäßes; der Flüssigkeitsdruck ist für dieselben Flächeninhalt derselbe. Wir brauchen daher nur die Flächeninhalt der beschleunigten Scheibchen zu betrachten. Der Trägheitsdruck für die Flächeninhalt ist  $dP = \frac{dv}{dt} \cdot dx$ , und die Summe aller dieser Drucke ist  $P = \int \frac{dv}{dt} \cdot dx$ , wobei das Integral über alle  $x$  von  $q_2$  bis  $q_3$  zu erstrecken ist. Nun kann man das Integral umformen in

$$P = \int \frac{dx}{dt} \cdot dv \quad \text{und, da} \quad \frac{dx}{dt} = v \text{ ist, in } P = \int_{v_2}^{v_3} v dv = \frac{v_3^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}.$$

Auf dem Querschnitt  $q_3$  lasten von links her die Drucke  $P_2$  und  $P_3$ , von rechts her  $P_3$ . Diese müssen sich das Gleichgewicht halten. Also gilt

$$P_2 + \frac{v_3^2 - v_2^2}{2} = P_3, \text{ d. h. :}$$

Im weiteren Rohrteile ist der Druck um den hydrodynamischen Druck größer als im engeren Rohrteile; dieser letztere ist der Differenz der Geschwindigkeitsquadrate in beiden Rohrteilen proportional.

Die Gleichung, in der man noch die Drucke  $P_2$  und  $P_3$  durch die Druckhöhen als  $h_2 g$  und  $h_3 g$  messen kann, und die dadurch die Gestalt

$$gh_2 + \frac{v_3^2}{2} = gh_3 + \frac{v_2^2}{2}$$

annimmt, ist die verallgemeinerte Bernoullische Gleichung (s. oben I.). Aus ihr geht hervor, daß in allen Querschnitten der Leitung die Summe aus der Druckhöhe  $gh$  und dem halben Geschwindigkeitsquadrate  $\frac{v^2}{2}$  unveränderlich ist. Das kann dazu führen, daß an Rohrstellen, in denen  $v$  sehr große Werte annimmt, der auf die Rohrwandung ausgeübte Druck negativ wird (Fig. 344).

11. Saugwirkung. Gestaltet man die Ausflußröhre so, wie es in der Fig. 344 schematisch angegeben ist, daß sich nämlich ein enges Rohr nach außen erweitert, so ist der Druck an der äußeren Öffnung natürlich gleich Null (d. h. gleich dem äußeren Luftdruck). Da nun der Druck an der engeren Stelle geringer sein muß, so muß er hier negativ (d. h. kleiner als der äußere Luftdruck) sein; daraus folgt, daß hier das aufsteigende Wasser eine saugende Wirkung ausüben muß. Diese Saugwirkung kann man beobachten, wenn man wie in der Figur angedeutet, dort, wo sich die engste Stelle zu erweitern beginnt, ein Steigrohr nach unten ansetzt und dieses in ein Gefäß mit gefärbtem Wasser taucht. Dieses Wasser wird entweder nur um einen bestimmten

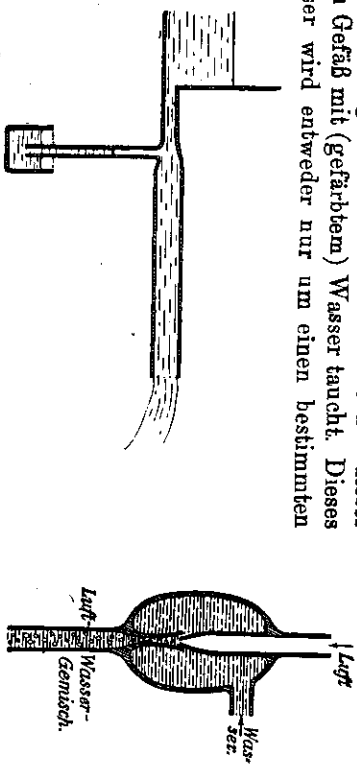


Fig. 344. Saugwirkung.

Fig. 345. Wasserstrahlpumpe.

Betrag in die Höhe gehoben oder es wird so stark angesaugt, daß es mit dem ausfließenden Wasser fortgeführt wird, wodurch also das Gefäß entleert wird.

12. Anwendungen. Bei den Wasserstrahlpumpen<sup>1)</sup> (Fig. 345) strömt Wasser aus einem weiteren Rohre plötzlich in ein engeres. In letzteres hinein ragt von oben her mit einer Spitze das Luftzufuhrrohr, das zum auspumpenden Raume (Rezipienten) führt. An der Stelle, wo das Wasser die Pumpe verläßt, besitzt es Atmosphärendruck. In dem engen ringförmigen Zwischenraume zwischen Ausflußrohr und Zuleitungsrohr hat das Wasser eine ungemein hohe Geschwindigkeit und deshalb einen weit unter dem Atmosphärendruck liegenden dynamischen Druck, der bei einer guten Wasserluftpumpe nicht wesentlich höher als der Dampfdruck des Betriebswassers ist. Ebenso weit wird der Rezipient ausgepumpt.

Die Zuführungswege von Wasser und Luft in Fig. 345 können auch vertauscht werden, ohne die Wirkung der Wasserstrahlpumpe zu beeinträchtigen.

1) Erfinden von R. W. Bunsen (1811—1899).

Bei den Wasserstrahlgebläsen wird das in einer Wasserstrahlpumpe erzeugte Luft-Wasser-Gemisch in ein hohes Gefäß geleitet, das oben und unten eine Öffnung hat. Aus der oberen Öffnung strömt dann die Luft, aus der unteren Öffnung das Wasser getrent aus.

Dem hydrodynamischen Drucke ähnlich ist die Saugwirkung, die die Luft ausübt, wenn sie aus einem engen Rohre in ein weiteres oder unmittelbar ins Freie ausströmt. Bei den Zerstäubern (Fig. 346) saugt die aus dem engen Rohre *B* ausströmende Luft aus einem Gefäße eine Flüssigkeit durch das Rohre *A* an. Diese Flüssigkeit mischt sich bei *m* zu einem feinen Flüssigkeitsstaube mit der ausströmenden Luft.

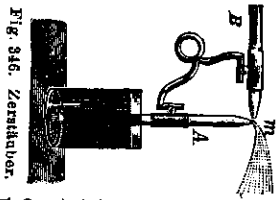


Fig. 346. Zerstäuber.

Ein lehrreiches Beispiel für die Saugwirkung ausströmender Luft bietet der in Fig. 347 abgebildete Apparat von Clément und Desormes.<sup>1)</sup> Dieser besteht aus einer runden, in der Mitte durchbohrten Blechscheibe von etwa 10 cm Durchmesser, welche an das eine Ende eines Rohres angelötet ist. Bläst man kräftig in das Rohr hinein so wird etwa 1 cm darunter gehaltenes Stück Pappe, das sogar mit Gewichten beschwert sein kann, gegen die Öffnung gesaugt.

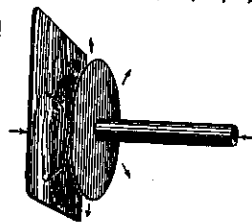


Fig. 347. Versuch von Clément u. Desormes.

Auf dem Grundgedanken der Wasserstrahlpumpen beruht auch die Wirkungsweise des Bunsenbrenners. Durch das aus enger Öffnung strömende Gas wird Luft angesaugt und mit dem Gase gemischt. — Die neueren Quecksilberdampfstrahlpumpen (S. 330) für Luftpumpenzwecke stellen ebenfalls nur eine Abart der Wasserstrahlpumpen dar. Bei ihnen wird durch Quecksilberdampf, der aus einer Öffnung strömt, die Luft angesaugt, der Quecksilberdampf dann kondensiert. Auf demselben Grundgedanken beruhende Wasserdampfstrahlpumpen waren für verschiedene Zwecke in der Technik schon längere Zeit in Gebrauch.

### § 98. Energie der Flüssigkeitsströme.

Wenn man den Hahn einer Wasserleitung plötzlich schließt, so hört man oft einen scharfen Knall, der davon herrührt, daß die in der Wasserleitung strömende, also mit einer gewissen kinetischen Energie bewegte Wassermasse plötzlich zur Ruhe kommt und ihre Energie in einem Stöße gegen die Rohrwandungen abgibt, der so stark sein kann, daß die Rohrwandungen gesprengt werden. Hat die Wasserleitung in der Nähe des Hahnes eine undichte Stelle, so springt aus dieser im Augenblicke des Hahnenschlusses das Wasser in schnellem Strahle heraus.

Durch folgende Versuchsanordnung (Fig. 348) kann man dieses Verhalten durch den Versuch nachweisen.

An ein hochstehendes, mit Wasser gefülltes Gefäß schließt sich ein weites Rohr lotrecht nach unten an, das an seinem unteren Ende zu einem wagerechten

1) S. später X. Abschnitt.

### § 98. Energie der Flüssigkeitsströme

Rohre umgebogen ist. Hier kann das Rohr durch einen Hahn mit weiter Bohrung verschlossen werden. Kurz vor dem Hahn ist an das wagerechte, weite Rohr ein engeres Glasrohr angesetzt, das höher ist als der Wasserspiegel in dem hoch stehenden Gefäße. Öffnet man den Hahn, so fließt ein Teil des Wassers aus. Die ganze Wasserstau erhält eine gewisse kinetische Energie. Wird nun der Hahn plötzlich geschlossen, so steigt infolge der Trägheit der bewegten Wassermasse das Wasser in dem engen Steigrohre, und zwar bedeutend höher, als der Wasserspiegel in dem oberen Gefäße ist. Ein Teil der kinetischen Energie der großen bewegten Wassermasse wird dabei in kinetische Energie der in dem engen Rohre befindlichen kleinen Wassermasse umgewandelt. Die Geschwindigkeit der kleinen Wassermasse wird bedeutend größer, demnach steigt das Wasser auch bedeutend höher als das ursprüngliche Niveau. Man kann also mit dieser Vorrichtung Wasser höher heben, als es gefüllt ist. Der aus der letzten Tatsache scheinbar folgende Widerspruch gegen das Energiegesetz (S. 111) löst sich dadurch, daß die Energie einer großen Wassermasse mit einer kleinen Geschwindigkeit in Energie einer kleinen Wassermasse mit großer Geschwindigkeit umgesetzt wird. Es ist unmöglich, mit dieser Vorrichtung ein Perpetuum mobile<sup>1)</sup> herzustellen, da der Energiegewinn der kleinen aufsteigenden Wassermasse durch den Energieverlust der aus dem unteren Hahne ausfließenden Wassermasse gedeckt wird.

Eine auf Grund des angegebenen Verhaltens eingerichtete Wasserhebmachmaschine ist der von Montgolfier<sup>2)</sup> (1796) erfundene hydraulische Widder, von dem Fig. 349 eine schematische Darstellung gibt. Ein aus einem hohen Behälter gespeistes, weites Fallrohr *F* kann in der Nähe seines unteren Endes durch ein Ventil *V* abgeschlossen werden. Dieses ist so schwer, daß es den Druck der ruhenden Wasserstau überwindet, also nach unten sinkt und dem Wasser den Austritt aus der Leitung gewährt. Dieses fließt aus dem geöffneten Ventil *V* aus. Hat es nun dabei eine genügend große Geschwindigkeit erlangt, so reißt es das Ventil *V* in die Höhe und schließt dadurch die Ausflußöffnung. Infolge des nun eintretenden Stoßes das bewegten Wassers öffnet sich ein kleines Ventil *Z*. Durch dieses strömt eine geringe Wasser-

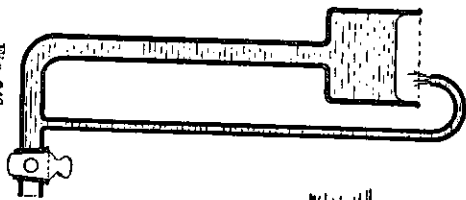


Fig. 348.

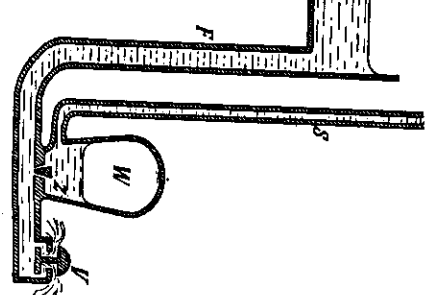


Fig. 349. Hydraulischer Widder.

1) Perpetuus (lat.) unaufhörlich; mobilis (lat.) = beweglich. Im Sprachgebrauch der früheren Zeit verstand man unter einem perpetuum mobile eine Maschine, die aus dem Nichts dauernd Arbeit leisten sollte.

2) Joseph Michel Montgolfier (1740—1810), Papierfabrikant in Annonay; berüht durch den Aufstieg des ersten, mit heißer Luft gefüllten Luftballons, den er 1783 in Gemeinschaft mit seinem Bruder Jacques Étienne M. in die Wege leitete.

menge mit großer Geschwindigkeit in den Windkessel W. Hierdurch wird die Luft zusammengedrückt und das Wasser in dem Steigrohr S in die Höhe getrieben. Die Wirkung des hydraulischen Widders erhöht man dadurch, daß man das Rohr F recht lang macht; man führt es also nicht, wie in der Figur angegeben, unmittelbar senkrecht, sondern in geringer Neigung schräg nach unten; durch diese Anordnung wird die Masse des bewegten Wassers vergrößert.

### § 99. Wasserräder, Turbinen.

1. **Energie der Wasserläufe.** Die natürlichen Wasserläufe enthalten einen gewissen Vorrat an mechanischer Energie, der in mannigfaltiger Weise ausgenutzt werden kann. Die Energiemenge ist bestimmt durch das Produkt aus dem Gewichte einer Wassermenge mit der Höhe, von der sie auf ein tieferes Niveau herabsinken kann. Diese Energiemenge setzt sich beim natürlichen Wasserlaufe in kinetische Energie um. Man kann die potentielle Energie der gelobenen Wassermenge unmittelbar ausnutzen, wenn das Wasser ein großes Gefälle hat, wenn also (besonders in gebirgigen Gegenden) der Oberlauf des Wassers vom Unterlaufe nicht zu weit entfernt ist. Man kann aber auch die kinetische Energie der bewegten Wassermenge ausnutzen.

2. **Wasserräder.** Die ältesten Formen der Vorrichtungen zur Ausnutzung der Energie des Wassers sind die Wasserräder. Je nachdem das Wasser am Scheitel, in der Höhe der Achse oder in der Nähe des tiefsten Punktes des Rades seine Energie an dieses abgibt, unterscheidet man oberflächliche, mittelschlächliche und unterschlächliche Wasserräder. Die oberflächlichen Wasserräder können nur dort angewandt werden, wo das Niveau des Oberlaufes so hoch über dem des Unterlaufes liegt, daß die Fallhöhe des Wassers größer als der Durchmesser des Wasserrades ist. Das Wasser fließt (Fig. 350) aus dem Durchmesser des Wasserrades ab. Das Wasser gegen die Wandungen der oberen Zellen und gibt hierbei die kinetische Energie an das Rad durch Stoß ab. Dann wirkt es durch sein Gewicht, indem es beim Drehen des Rades in den wasserreichen Zellen bis nahe an das Unterwasser heruntersinkt und sich dort entleert; hierbei gibt es die potentielle Energie ab, die es besaß, als es sich im Oberlauf befand. Im oberflächlichen Wasserrade ist die potentielle Energie des fallenden Wassers der größte Anteil der in ihm umgewandelten Wasserenergie. In der technischen Ausführung kann man oberflächliche Wasserräder bis zu höchstens 15 m Raddurchmesser bauen, höhere zur Verfügung stehende Wassergefälle also nicht durch eine einzige Anlage ausnutzen. Der Wirkungsgrad, d. h. das Verhältnis von der im Wasser zur Verfügung stehenden Energie zu der durch das Wasserrad wirklich nutzbar gemachten, ist bei oberflächlichen Wasserrädern günstig: er kann bis 80% erreichen.

Die unterschlächlichen Wasserräder (Fig. 351) werden dann angewandt, wenn das Gefälle des Wassers nur klein, dafür aber die Wassermenge groß ist. In ihnen wirkt das strömende Wasser durch Stoß gegen die in das

§ 99. Wasserräder, Turbinen 299

Wasser eintauchenden Schaufeln und gibt dabei seine kinetische Energie ab. Der Wirkungsgrad ist nur gering.

Die mittelschlächlichen Wasserräder bilden eine Zwischengruppe zwischen den beiden vorigen; sie werden bei mittlerer Gefällhöhe angewandt, indem man das Wasser in etwa halber Höhe in die Zellen des Wasserrades einströmen läßt. Je nach den Umständen nähern sich die mittelschlächlichen Wasserräder den oberflächlichen oder den unterschlächlichen. Oft gibt man dem in das Wasserrad strömenden Wasser durch geeignet geformte sogenannte Kulissen eine bestimmte Einstromungsrichtung, um die kinetische Energie möglichst günstig auszunutzen.

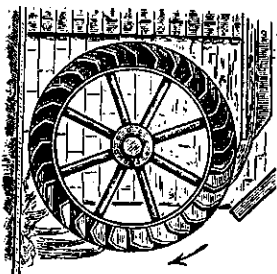


Fig. 350. Oberflächliches Wasserrad.

Die Wasserräder finden heute nur noch dort Anwendung, wo die Menge der im Wasser enthaltenen Energie nur gering ist. Das hat in erster Linie seine Ursache darin, daß man die Umdrehungsgeschwindigkeit eines Wasserrades nicht allzu groß nehmen darf, weil sonst das

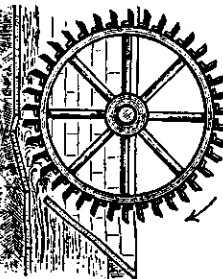


Fig. 351. Unterschlächliches Wasserrad.

Wasser infolge der Zentrifugalkraft aus dem Rade herausgeworfen wird, bevor es seine Energie vollständig an dieses abgeben hat. Die geringe Umdrehungsgeschwindigkeit zwingt außerdem bei den meisten modernen schnelllaufenden Maschinen zu einer Übersetzung aus dem Langsamen in das Schnelle, und eine solche Übersetzung ist immer mit großen Energieverlusten verbunden.

3. **Turbinen<sup>1)</sup>** Eine wesentlich vorteilhaftere Ausnutzung der Wasserenergie ist in den Turbinen (auch Kreisräder genannt) möglich. Jede Turbine besteht aus einem Leitapparat, der dem Wasser eine vorgeschriebene Einstromungsrichtung gibt, und einem Laufrade, dem eigentlichen Turbinenrade, in dem das Wasser seine Energie an dieses überträgt. Wenn der Leitapparat die Wasserenergie vollständig in kinetische Energie umwandelt, so daß das Wasser „drucklos“ in das Laufrad eintritt, das dann die kinetische Energie aufnimmt, so spricht man wohl von einer Aktionsturbine. Wenn dagegen der Leitapparat dem Laufrade die Wassermenge so zuführt, daß die Geschwindigkeit des einströmenden Wassers mit der des Laufrades nahezu übereinstimmt, so daß also das Wasser beim Einstömen in das Laufrad keine kinetische Energie abgibt, sondern erst durch Reaktion während seiner Be-

1) *turbo* (lat.) = Wirbel. Der Name Turbine ist zuerst (1826) von dem französischen Ingenieur Bourdin angewandt worden. Praktische Bedeutung hat die Wasserturbine als Antriebsmaschine großer Kraftanlagen erst seit dem großartigen Experimente 1881 erlangt, wo von Lauffen a. Neckar nach Frankfurt a. M. eine elektrische Kraftübertragung von 200 P. S. auf einer 175 km langen Strecke durchgeführt wurde. Die Energie lieferte ein Wasserfall in Lauffen und diese wurde vermittels Turbine und Dynamomaschine in elektrische Energie umgewandelt.

wegung im Laufrade und beim Ausstreten einen Druck auf dieses ausübt und die potentielle Energie an das Laufrad abgibt, so nennt man entsprechend die Turbine Reaktions-turbine. Bei der Aktionsturbine fließt das Wasser aus dem Leitapparat auf die Schaufeln des Laufrades mit großer Geschwindigkeit in einem mehr oder weniger freien Strahle. Der Wasserstrahl tritt meist aus einem Leitapparate aus, der aus einer im Querschnitte verstellbaren Düse besteht, die selbst das Ende einer Druckwasserleitung bildet. Der Wasserstrahl ist dabei allseitig frei und kann sich auf den Schaufeln des Rades unbehindert verbreitern. Daher werden diese Turbinen auch Freistrahlturbinen genannt. Eine solche ist z. B. die in Fig. 364 abgebildete Pelton-Turbine. Da ferner bei diesen Turbinen die Wasserstrahlen meist nur auf einen Teil der Schaufel des Laufrades geleitet werden, werden sie oft als Teilturbinen oder Partialturbinen gebaut. Die Schaufeln heißen ihrer Gestalt wegen auch „Becher“, daher wird auch der Name Becherturbinen gebraucht. Bei den Reaktions-turbinen übt das Wasser auf die Wandungen des Laufrades einen hohen Druck, eine starke Pressung aus (Hochdruck- oder Preßstrahl-turbinen). Bei ihnen muß das Wasser die Zellen des Laufrades immer vollständig ausfüllen (Vollturbinen). Je nach der Richtung, die das einströmende Wasser zur Achse der Turbine hat, unterscheidet man endlich Axialturbinen und Radial-turbinen; bei den letzteren kann der Leitapparat entweder das Laufrad umschließen, so daß demnach das Wasser von außen nach innen einfließt, oder das Leitrad kann innerhalb des Laufrades liegen. Ein Beispiel für die Hochdruck-turbine, Vollturbine und Radialturbine, bei der das Leitrad das Laufrad konzentrisch umschließt, ist die in den Fig. 361 und 362 abgebildete Francis-Turbine.

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich, daß die Zahl der möglichen Bauarten außerordentlich groß ist. Nicht selten liegt der Fall vor, daß dem Laufrade die Wasserenergie zum Teil als kinetische Energie zugeführt wird, daß sie aber zum Teil noch als Druckenergie vorhanden ist und dann im Laufrade ausgenutzt wird. Daher ist es manchmal schwer, zu entscheiden, ob man eine Turbine als Aktions- oder als Reaktions-turbine bezeichnen soll; die Unterscheidung der beiden Gattungen von Turbinen ist also nicht streng durchführbar.

4. Die Reaktionswirkung (S. 290) des Wassers kommt in dem in Fig. 352 dargestellten Versuche gut zur Anschauung: Hier ist am unteren Ende eines Trichters mittels eines Gummischlauches ein unten geschlossenes Rohr angebracht, das mit einer seitlichen Öffnung versehen ist, aus der das Wasser ausfließen kann. Wäre das Rohr vollständig geschlossen, so würde es senkrecht hängen, da sich die Drucke auf alle Wandteile aufheben würden. Ist aber die Ausflußöffnung frei, so treibt hier der Wasserdruck das Wasser nach der einen und das Rohr nach der anderen Seite, gerade so, wie in dem in Fig. 100 abgebildeten Versuche die sich ausdehnenden Pulvergase die beiden Geschobelle nach beiden Seiten treiben.

5. Diese Reaktionswirkung des ausströmenden Wassers wird in dem in Fig. 353 abgebildeten Segnersöhlen<sup>1)</sup> Wasserrade (1750) zu einer fortwährenden Drehung des Rades benutzt. Hierbei strömt das in einem drehbaren Behälter befindliche Wasser aus zwei oder mehreren Öffnungen aus, die seitlich an den wagerechten Armen eines lotrechten, als Achse des Apparates dienenden Rohres angebracht sind. Ist das Trägheitsmoment des ganzen drehbaren Teiles  $\Theta$ , und fließt aus den in der Entfernung  $r$  von der Achse angebrachten Ausflußöffnungen in einer Sekunde die Wassermasse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$  aus, so ist nach dem Impulssatze (S. 93, 154 u. 290) die nach einer Sekunde erlangte Winkelgeschwindigkeit  $w$  der Turbine durch die Gleichung  $\frac{\Theta}{r} \cdot w \cdot r = m \cdot v$  bestimmt. Bei dem abgebildeten Segnerschen Wasserrade ist der

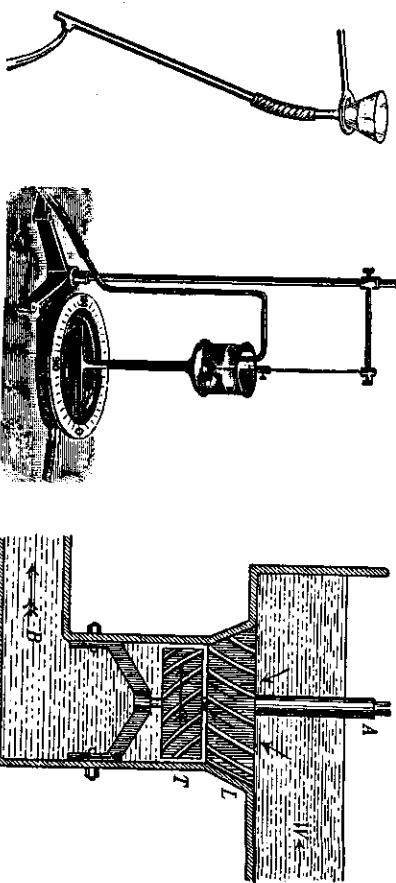


Fig. 352. Bask-tionswirkung.

Fig. 353. Segnersches Wasserrad.

Fig. 354. Henschel-Journal-Turbine.

drehbare Teil an einem elastischen Drahte aufgehängt. Daher erfolgt nach einer gewissen Winkeldrehung Einstellung in das Gleichgewicht. Wenn das Torsionsmoment des Aufhängedrahtes durch einen Vorversuch bestimmt worden ist, so kann man das Drehungsmoment mit Hilfe des Torsionswinkels berechnen, der an einer am Rande der unteren Aufhängeschale angebrachten Kreisstellung abgelesen werden kann.

6. In Fig. 354 ist schematisch eine im praktischen Gebrauche heute allerdings veraltete Henschel-Journal-Turbine abgebildet. Hier läuft das Wasser eines hochgelegenen Wasserlaufes  $W$  durch das feststehende Leitrad  $L$  ab, das dem Wasser eine schräge Richtung gibt. Unmittelbar unterhalb des ruhenden Leitrades sitzt das drehbare Laufrad  $Z$ , das ebenfalls mit schrägen, gebogenen Schaufeln versehen ist und durch das Wasser im Sinne des ein-gezeichneten Pfeiles gedreht wird. Soll das Wasser seine Energie vollständig an das Laufrad abgeben, so muß es dieses ohne tangentielle Komponente,

1) Segner (1704–77) in Göttingen; sein Wasserrad wurde erstmalig 1760 bei einer Getreidemühle in Nörten bei Göttingen benutzt.

also in axialer Richtung, verlassen. Das austretende Wasser fließt dann aus dem Wasserlaufe  $B$  ab.

7. Kraft eines Stoßes. Soll ein mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegter Körper von der Masse  $m$  seine Bewegungsenergie  $\frac{m \cdot v^2}{2}$  an einen anderen Körper abgeben, so ist hierzu eine gewisse Zeit  $t$  erforderlich, während welcher er gegen diesen Körper eine Kraft  $P$  ausübt und zugleich durch Reaktion einen Gegen-Druck  $-P$  von derselben Größe erfährt, der seine Geschwindigkeit vernichtet. Der Impuls  $-Pt$  des auf ihn wirkenden Reaktionsdruckes ist nach § 34 gleich seiner vernichteten Bewegungsgröße  $-mv$ ; es besteht also die Gleichung  $-Pt = -mv$ , woraus sich berechnet  $P = \frac{mv}{t}$ . Je kleiner die Zeit  $t$  ist, um so größer ist  $P$ ; nun darf aber die Kraft  $P$  nicht über ein gewisses Maß hinaus vergrößert werden, ohne daß der Zusammenhang des Körpers, auf den die



Fig. 355.



Fig. 356. Tangentiale Beaufschlagung.

Kraft wirkt, zerstört wird. Wenn beispielsweise eine Glaskugel mit großer Geschwindigkeit auf eine Steinplatte fällt, so zerspringt sie, weil ihre Geschwindigkeit in einer zu kurzen Zeit vernichtet werden soll, und weil demnach die zur Vernichtung der Bewegungsgröße erforderliche Kraft einen zu großen Wert erlangt; läßt man aber die Glaskugel auf eine weiche, nachgiebige Unterlage fallen, so wird die Zeit  $t$ , während welcher der Impuls  $Pt$  die Bewegungsgröße  $mv$  vernichtet, vergrößert und damit zugleich die Kraft  $P$  verkleinert.

Ähnliche Verhältnisse treten auf, wenn man die Geschwindigkeit einer bewegten Wassermasse plötzlich verändern will. Wenn man z. B. (Fig. 355) einen Wasserstrahl unter rechtem Winkel gegen eine feste Wand richtet, so muß er, nachdem er die feste Wand getroffen hat, seitlich ausweichen, er muß also seine Richtung um einen rechten Winkel ändern. Dieses kann nur dadurch geschehen, daß zu der ursprünglichen Bewegungsgröße  $mv$  durch Reaktion ein Impuls  $Pt$  hinzutritt, der die resultierende Bewegungsgröße  $m'v'$  erzeugt, deren Geschwindigkeit  $v'$  mit der ursprünglichen Geschwindigkeit  $v$  einen in vorliegendem Falle, in sehr kurzer Zeit erfolgten, so wird ein Teil der Reaktionskraft zum Zersprengen der Wassermasse verwandt. Hierzu ist ein gewisser Energiebetrag nötig, der dann natürlich der bewegten Wassermasse verloren geht.

8. Schaufelform. Will man einen solchen Energieverlust vermeiden, so muß man dafür sorgen, daß die Richtungsänderung des Wasserstrahles allmählich erfolgt, also während einer längeren Zeitdauer  $t$  vor sich geht; denn

dann bleibt die Kraft  $P$  des Impulses  $Pt$  nur klein. Dieses erreicht man dadurch, daß man (nach Fig. 356) den Wasserstrahl tangential auf die ablenkende Fläche strömen läßt.

Aus dieser Überlegung ergibt sich die Folgerung, daß man das Wasser in einer Turbine so leiten muß, daß es beim Austreten aus dem Leitrade in das Laufrad die Schaufeln des Laufrades tangential trifft. Dieser Forderung kann man durch richtige Formgebung der Schaufeln genügen. Man kann den Winkel berechnen, den die Schaufeln des Laufrades mit der Berührungsfäche der beiden Räder bei gegebener Einstromungsrichtung bilden müssen. Jedoch ist hierbei zu beachten, daß sich das Lauf- rad im Betriebe dreht; daher muß man die Richtung relativ zum bewegten Laufrade ausrechnen.

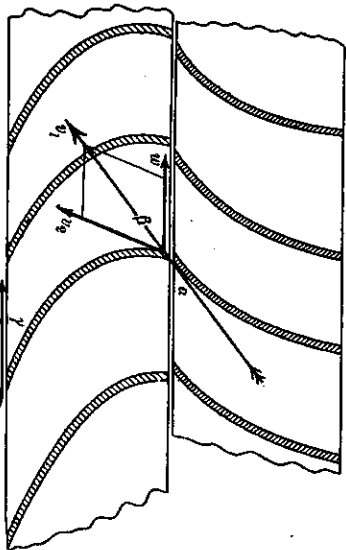


Fig. 357. Leitrad und Laufrad.

In Fig. 357 sei ein Teil des Leitrades  $L$  und des Laufrades  $T$  der in Fig. 354 abgebildeten Turbine mit einigen Schaufeln dargestellt. Wenn die Leitschaufeln dort, wo sie an das Laufrad grenzen, den Winkel  $\alpha$  mit der Berührungsfäche beider Räder haben, so tritt das Wasser mit der Geschwindigkeit  $v_1$  unter dem Winkel  $\alpha$  in das Laufrad ein. Dieses möge sich mit der Umfangsgeschwindigkeit  $w$  drehen. Dann zerlegt sich die Geschwindigkeit  $v_1$  in zwei Komponenten, von denen die eine  $w$  ist und die zweite durch das Geschwindigkeitsparallelogramm bestimmt wird. Nennen wir sie  $v_2$  und bezeichnen wir den Winkel, den  $v_2$  mit der gemeinsamen Fläche beider Räder hat, mit  $\beta$ , so ergibt sich

$$\sin \beta : \sin (\beta - \alpha) = v_1 : w \quad \text{und} \quad v_2 : v_1 = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Aus der ersten Proportion kann der Winkel  $\beta$ , den die Schaufeln des Lauf- rades an der Eintrittsfäche mit dieser bilden, berechnet werden; aus der zweiten ergibt sich die Geschwindigkeit, mit der das Wasser in das Laufrad einströmt.

Das Wasser muß das Laufrad mit der Geschwindigkeit  $v_2$  so verlassen, daß seine Richtung am Ende der Schaufel mit der Umfangsgeschwindigkeit  $w$  des Laufrades zusammen als Resultierende eine nach abwärts (axial) gerichtete Geschwindigkeit  $v_3$  hat. Bildet die Schaufel mit der Endfläche des Laufrades den Winkel  $\gamma$ , so ergeben sich als Folge der obigen Betrachtung die Gleichungen  $\cos \gamma = \frac{w}{v_2}$  und  $v_4 = v_3 \cdot \sin \gamma$ . Aus der ersten Gleichung wird der gesuchte Winkel  $\gamma$  berechnet; aus der zweiten folgt die Endgeschwin-

digkeit des austretenden Wasserstrahles. Die beiden Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  bestimmen die Form der Schaufeln des Laufrades.

9. Vollturbine. Wenn in das Laufrad so viel Wasser einströmt, daß alle seine Zellen voll gefüllt sind, so ergibt sich das Verhältnis der Geschwindigkeiten  $v_3 : v_2$  aus dem umgekehrten Verhältnisse des (rechtwinklig zu den Wandungen gemessenen) Strömungsquerschnitts jeder Zelle am Ende und Anfange jeder Zelle (wegen der Kontinuitätsbedingung). Wenn nun, wie in der Figur,  $v_3 > v_2$  ist, wenn also die Geschwindigkeit des Wassers im Laufrade wächst, so hat seine kinetische Energie im Laufrade zugenommen, also seine potentielle abgenommen. Da nun der Druck des Wassers beim Austritte aus dem Laufrade (im einfachsten Falle) gleich dem Atmosphärendrucke ist, so muß er im übrigen Teile des Rades größer gewesen sein. In diesem Falle ist die Turbine eine Hochdruckturbine und eine Vollturbine.

10. Freistrahlturbine. Fließt das Wasser aber aus dem Leitrade (oder aus einzelnen Düsen) nur in solcher Menge zu, daß das Laufrad nur teilweise ausgefüllt ist, so kann die Geschwindigkeit im Laufrade nicht zunehmen; daher muß das Wasser gleich mit voller kinetischer Energie einströmen. Infolgedessen kann es auch einen Zwischenraum zwischen den Düsen und dem Laufrade frei überspringen. Wir haben eine Freistrahlturbine und eine Partialturbine.

11. Die Francis-Turbinen mit Druckrohr und Saugrohr behaupten jetzt von allen Reaktionsturbinen das Feld. Bei ihnen ist das Leitrad konzentrisch um das Laufrad angebracht; der Eintritt des Wassers erfolgt also radial von außen. Diese Turbinen gehören also zu denen mit äußerer radialer Beführung. Ausführungsformen dieser Art wurden zuerst in größerem Maßstabe von dem nordamerikanischen Ingenieur J. B. Francis' 1845 erfunden und tragen daher allgemein seinen Namen, obwohl die vielgestaltigen heutigen Modelle sich von den ursprünglichen Formen und untereinander in vielen Einzelheiten wesentlich unterscheiden und erst seit etwa 1900 von europäischen Ingenieuren soweit systematisch entwickelt waren, daß sie den heutigen Anforderungen, besonders der Elektrotechnik, genügen. Da alle

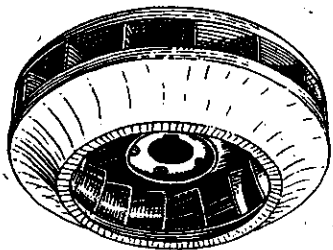


Fig. 358. Laufrad einer langsam laufenden Turbine.

Zellen des Laufrades vollständig mit Wasser gefüllt sind, kann das Laufrad ohne Schaden im Wasser laufen, kann auch in das Unterwasser verlegt werden. Der Abfluß des Wassers aus dem Innern des Laufrades wird technisch bequem durch ein Rohr erzielt, das im Unterwasser mündet und vorteilhaft auch zum „Saugrohr“ ausgebildet werden kann. Hierdurch erreicht man eine vorzügliche Druckausnutzung (Fig. 362).

12. Formen der Laufräder. Die Figuren 358, 359 und 360 geben die äußeren Ansichten von Laufrädern der Francis-Turbinen in verschiedenen Aus-

föhrungsformen wieder. Fig. 358 ist das Laufrad einer langsam laufenden, Fig. 360 ein solches einer schnell laufenden Turbine. Die Schaufeln, 14, 14 und 19 an der Zahl, sind schraubenförmig nach dem Austrittsrande des Wassers hin gekrümmt, so daß das radial von außen nach innen einströmende Wasser im Laufrade um  $90^\circ$  abgelenkt wird und axial wieder austritt. Je kleiner der Durchmesser des Laufrades ist, desto schneller vermag es zu laufen; nur bei kleinerem Durchmesser aber dieselbe Wassermenge auszunutzen wie bei größeren, muß die Höhe des Laufrades vergrößert werden. Damit

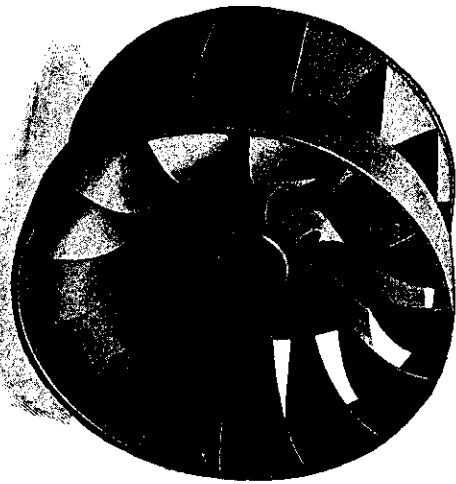


Fig. 359. Laufrad.

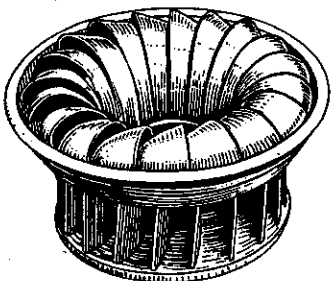


Fig. 360. Laufrad einer schnell laufenden Turbine.

ergeben sich die verschiedenen Laufradformen für verschiedene Schnellläufigkeit.

Fig. 361 gibt die Ansicht einer liegenden Doppel-Zwillings-Francis-Turbine mit herausgenommene Laufrädersysteme wieder (vier Laufräder mit je zehn Schaufeln). Fig. 362 zeigt die Anordnung einer Zwillingsmaschine mit zwei Laufrädern, der das Wasser durch ein Druckrohr zugeführt wird. Die Turbine ist auf derselben Welle mit einer Dynamomaschine gekuppelt.

13. Regelung der Wasserzufuhr. Die für den technischen Betrieb notwendige Regelung der Wasserzufuhr erfolgt heute fast nur noch durch drehbare Leitschau-feln. Diese von Professor Fink stammende Anordnung wurde von der deutschen Firma J. M. Voith in Heidenheim konstruktiv bis zur Vollendung durchgebildet und allgemein, auch in Amerika, angenommen.

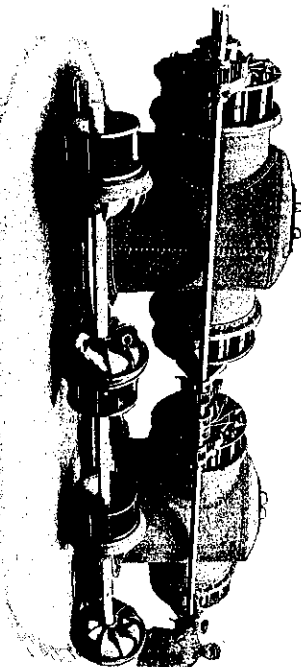


Fig. 361. Doppel-Zwillings-Francis Turbine.



men. Fig. 363 zeigt schematisch, wie die Leitschaufeln dem im Innern des Leitrades befindlichen Laufrade angeordnet sind. Vermittels eines an jeder Leitschaufel auffassenden Kurbeltriebendes können die Schaufeln durch Drehung um die festen Drehzapfen gedreht werden.

Dabei bewegen sich die inneren Schaufelenden nach auswärts, verengen dadurch den Einstromungskanal (Fig. 363 Mittelstellung) und können ihn bei gegenseitiger Berührung ganz verschließen. (Fig. 363 Geschlossen).

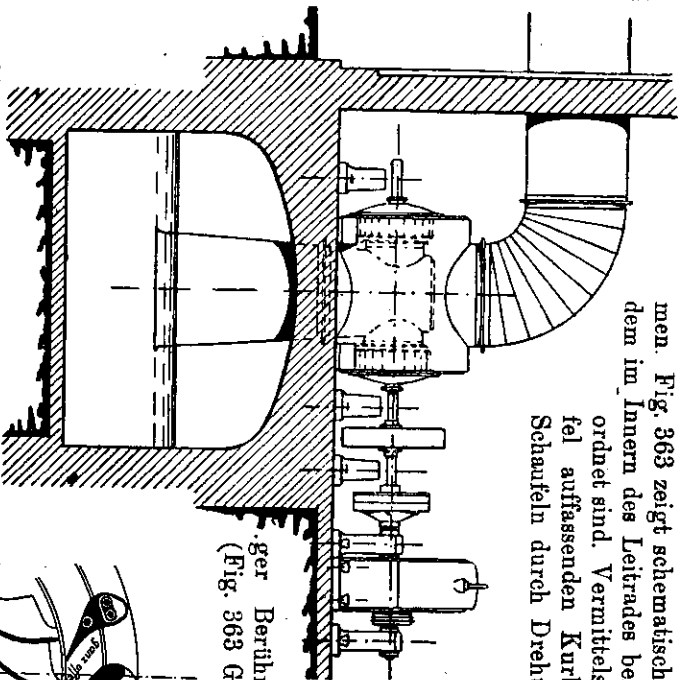


Fig. 363. Zwillingsturbine mit zwei Laufrädern und Sangrohr.

14. Pelton-Turbine. Als Beispiel einer Freistrahlturbine diene die in Fig. 364 abgebildete Pelton-Turbine. Hier wird das Wasser aus einer kreisrunden Düse einem Schaufelrade zugeführt, das in Fig. 365 noch einmal besonders abgebildet ist. Das Wasser strömt aus der Düse (nach Fig. 366) auf die mittlere scharfe Kante der gebogenen Schaufeln (Löffel) und gibt hier seine Energie vollständig ab, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Rades halb so groß ist wie die des strömenden Wassers; denn dann verläßt der rückwärts gebogene Strahl das sich drehende Rad mit der Geschwindigkeit Null.

Die Regelung des Wasserzuffusses erfolgt bei dieser Turbine (Fig. 364) durch eine sog. Nadel (Reglernadel), einen kegelförmig zugespitzten Zylinder, der durch ein Handrad mehr oder weniger tief in den kreisförmigen Querschnitt der Düse geschoben werden kann. Freistrahlturbinen mit dieser Regulierungsrichtung sind von dem amerikanischen Ingenieur Pelton angegeben worden; man nennt häufig — nicht zutreffend — auch anders regelbare Freistrahlturbinen Pelton-Turbinen.

15. Turbinenanlagen. Die Turbinenformen nach Francis und die Freistrahlturbinen (Pelton-Turbinen) sind die heute vollkommensten. Sie lassen

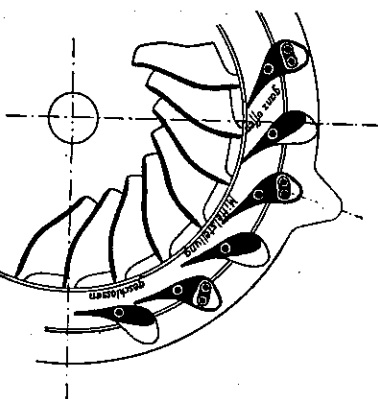


Fig. 365. Regelung der Wasserzufuhr.

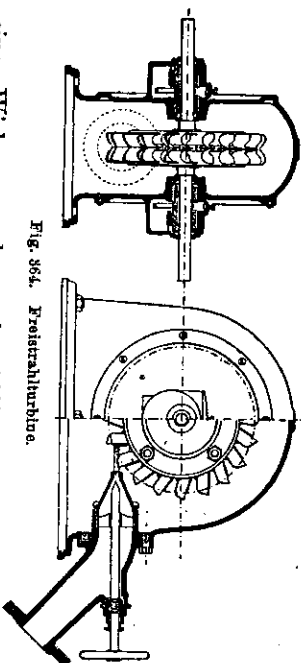


Fig. 364. Freistrahlturbine.

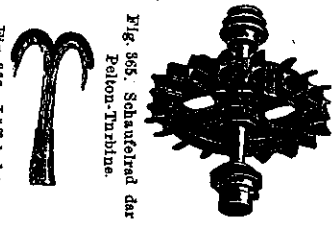


Fig. 366. Nadel der Pelton-Turbine.

einen Wirkungsgrad von über 80%<sup>1)</sup> erzielen und können in allen möglichen Größenabmessungen und Leistungen mit Nutzen verwandt werden. Man unterscheidet „Grobwasserkraftanlagen“ von 5000—15000 P.S. als Einheit, „Normalwasserkraftanlagen“ von 500—5000 P.S. Leistung als Einheit, „mittlere Wasserkraftanlagen“ von 100—500 P.S. Leistung als Maschineneinheit, „Kleinwasserkraftanlagen“ von 10—100 P.S. Leistung als Maschineneinheit. Es werden Anlagen gebaut von 0,05 cbm/sec Wassermenge bis 30 cbm/sec und mehr Verbrauch in einer Turbine, von 2 m Nutzhöhe bis 1700 m ausgenutztem Gefälle (Fully in der Schweiz). Man hat Turbinen von gegen 50 Umdrehungen bis hinauf zu 1000 Umdrehungen in der Minute.

§ 100. Raddampfer. Ruder. Steuer. Schiffschraube.

In den Wasserrädern und Turbinen wird die Wechselwirkung zwischen dem bewegten Wasser und den festen Körpern als Triebkraft benutzt. Man kann nun auch umgekehrt mittels einer Triebkraft die Bewegung eines festen Körpers gegen das Wasser verursachen. Das geschieht in den Vorrichtungen, die zur Bewegung der Schiffe im Wasser dienen.

Beim Raddampfer werden durch eine im Innern des Schiffes befindliche Dampfmaschine zwei seitlich an Schiffe angebrachte Schaufelräder in Drehung versetzt. Bei manchen flachgehenden Flußdampfern, die auch durch schmale Wasserrinnen fahren sollen, ist am hinteren Ende, dem Heck des Schiffes, nur ein Schaufelrad, das Heckrad, vorhanden. Wird das Schaufelrad in Fig. 367 im Sinne des dabei gezeichneten Pfeiles links herumgedreht, so übt die Schaufel S einen Druck gegen das Wasser aus, und gleichzeitig wird, unter Mitwirkung des vom Wasser ausgeübten Gegen-drucks, auf die Achse A das Rades ein Druck im entgegengesetzten Sinne ausgeübt, der das Schiff von rechts nach links bewegt.

In Fig. 368 ist ein Ruderboot im Grundrisse gezeichnet, das durch zwei

1) In Forsee (Schweden) hat man 94% erreicht.

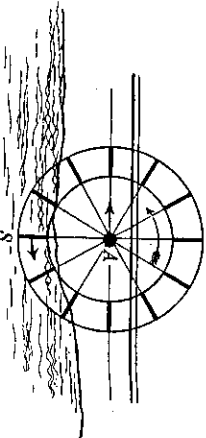


Fig. 367. Schaufelradtrieb.

Ruder bewegt wird. Die Ruder sind um die auf der Bordwand angebrachten Achsen  $A$  (die Dollen) drehbar. (Bei einigen Booten, den Auslegerbooten, liegen die Achsen über die Bordwand hinaus.) Der auf der Bank sitzende Ruderer zieht die in das Boot ragenden Enden der Ruder mit einer Kraft  $K$  nach rückwärts und dreht damit das Ruder. Die Kraft  $K$  wirkt dann durch das andere Ende des Ruders (das Ruderblatt) im Sinne des Pfeiles  $W$  drückend auf das Wasser und gleichzeitig auf die Achse  $A$  im Sinne des gezeichneten Pfeiles. Da das Wasser auf das Ruderblatt einen Widerstand ausübt, so kommt das Boot durch die beiden in  $A$  wirkenden Drucke in der Richtung  $V$  vorwärts.

Das Steuer ist am Heck des Bootes um die Achse  $S$  (Ruder- oder Steuer- spindel) drehbar. Wenn das Steuer mittels des Handgriffes  $P$  (Ruderpinne)

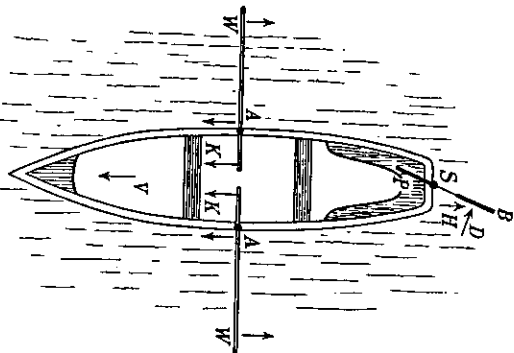


Fig. 368. Ruderboot.

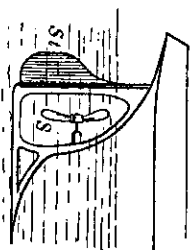


Fig. 379. Schiffsschraube.

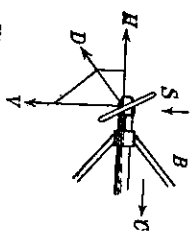


Fig. 370. Wirkung des Schraubendruckes.

in die gezeichnete Lage gedreht wird, so drückt das vorbeiströmende Wasser infolge der Bewegung des Bootes in der Richtung  $H$  auf das Steuerblatt. Von diesem Drucke kommt nur die senkrecht gegen das Steuerblatt wirkende Druckkomponente  $D$  in Wirksamkeit, die das Boot links herum treibt. Das Boot wird nach links (nach Backbord) abgelenkt, wenn der Handgriff des Steuerers nach der rechten Seite (nach Steuerbord) gedreht wird.

Die Schiffsschraube  $S$  (Fig. 369) befindet sich am Heck des Schiffes zwischen der Schiffswand und dem Steuer. Sie besteht aus zwei bis vier Klügeln, die gegen die Schraubachse um einen Winkel geneigt sind, der von  $90^\circ$  nur wenig abweicht. Die Schiffsschraube befindet sich bei ihrer Drehung ganz im Wasser. Wir betrachten nach Fig. 370 im Grundriß die Wirkung eines Schraubendruckes  $S$ , der sich gerade lotrecht oberhalb der Schiffsschraubachse befindet. Seine Bewegung ist durch den neben  $S$  gezeichneten Pfeil

abgegeben. Infolge dieser Bewegung übt er auf das Wasser einen Druck in der Richtung  $V$  aus, von dem aber nur die senkrecht zur Schraubenhfläche  $S$  wirkende Druckkomponente  $D$  in Rechnung zu setzen ist. Diese Druckkomponente  $D$  hat eine in der Richtung der Schraubachse wirkende Komponente  $H$  gegen das Wasser und treibt daher das Wasser nach hinten. Die andere, in der Figur nicht gezeichnete Komponente des Druckes  $D$  verursacht eine drehende Bewegung des Wassers um die Schraubachse. Infolge des Wasserwiderstandes übt das in der Richtung  $H$  gedrückte Wasser durch Reaktion einen Druck in der Richtung der Schraubachse aus, der diese und damit das ganze Schiff in der Richtung  $C$  vorwärts bewegt.

Das von der Schraube  $S$  (Fig. 369) nach rückwärts getriebene Wasser stößt, wenn das Steuer  $St$  zur Seite gedreht ist, mit großer Geschwindigkeit und demnach mit großem Drucke auf die eine Seite der Steuerfläche. Dieser Druck ist größer, als er dann sein würde, wenn dasselbe Schiff durch Ruderkraft oder durch Schaufelräder vorwärts bewegt werden würde. Daher braucht die Blattfläche des Steuerers eines Schraubendampfers nur schmal zu sein (viel schmaler als bei einem Raddampfer oder bei einem Ruder- oder Segelboote), wenn es eine Drehung des Schiffes hervorbringen soll.

Achter Abschnitt.

Luftförmige Körper.

§ 101. Der Luftdruck.

Wenn man ein etwa 1 Liter haltendes, im gewöhnlichen Sinne des Wortes leeres, d. h. mit Luft gefülltes Gefäß, das durch einen Hahn verschlossen werden kann, auf der Wage ins Gleichgewicht bringt (Fig. 371) und dann aus dem Gefäße mit dem Munde möglichst viel Luft aussaugt, so wird das Gefäß leichter.

Hieraus folgt, daß die Luft Gewicht hat. Öffnet man darauf den Hahn unter Wasser, so strömt so viel Wasser in das Gefäß ein, wie vorher Luft ausgesaugt worden ist. Aus dem Rauminhalte des eingeströmten Wassers und der durch das Saugen hervorgerufenen Gewichtsverminderung kann man das Gewicht von 1 Liter Luft bestimmen.

1 Liter Luft wiegt 1,293 g\*. Das spezifische Gewicht der Luft, also das Gewicht von 1 cm<sup>3</sup> Luft beträgt 0,001293 g\* · cm<sup>-3</sup>. Diese Angaben setzen voraus, daß der Versuch bei gewöhnlichem Luftdrucke (760 mm Quecksilber, vgl. unten) und bei der Temperatur 0° C (§ 130) ausgeführt worden ist.

Da die Luft Gewicht hat, so übt sie wie eine Flüssigkeit auf alle Körper einen Druck aus, der dem Gewichte der auf dem Körper lastenden Luftsäule gleich ist. Würde man die Höhe der Luftsäule kennen, und wäre das spezifische Gewicht der Luft an allen Stellen, auch in den oberen Schichten der Atmosphäre gleich dem spezifischen Gewichte an der Erdoberfläche, so ließe sich hieraus der Druck auf 1 cm<sup>2</sup> berechnen.

Der Luftdruck wirkt, wie der Druck der Flüssigkeiten, auf einen in Luft befindlichen Körper allseitig. Man kann daher den Luftdruck nur dadurch messen, daß man ihn einseitig wirken läßt, indem man z. B. ein zylindrisches Gefäß, das mit einem leicht beweglichen Kolben luftdicht verschlossen ist, luftleer macht und nun nach Fig. 372 den Kolben an die eine Seite einer Wage hängt und die andere Seite mit so viel Gewicht belastet, daß dem

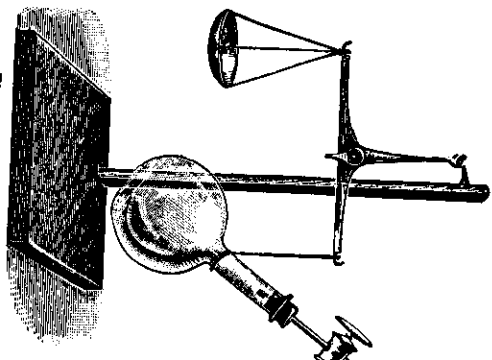


Fig. 371 Gewicht der Luft.

Luftdrucke das Gleichgewicht gehalten wird. Die praktische Ausführung dieser Versuchs bietet aus dem Grunde Schwierigkeiten, weil es nicht leicht ist, einen festen Kolben gleichzeitig luftdicht und leicht beweglich zu machen. Durch eine von Torricelli (Fußnote S. 286) angegebene Versuchsanordnung (Fig. 373) ist eine unmittelbare Messung des Luftdruckes möglich: Man füllt eine 90 cm lange, an einem Ende geschlossene Glasröhre mit Quecksilber, verschließt sie darauf mit dem Finger, taucht das Ende in ein Gefäß mit Quecksilber und läßt den Finger los. Das Quecksilber sinkt in dem Rohre nicht bis zum Spiegel des Quecksilbers im äußeren Gefäße, sondern bleibt in einer Höhe von 76 cm

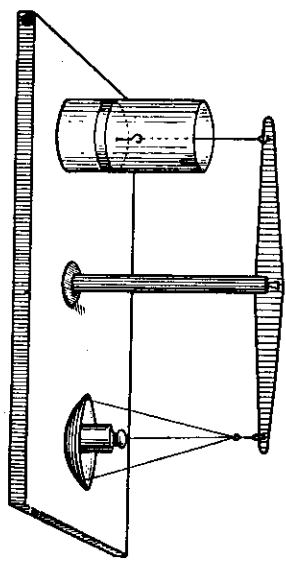


Fig. 372 Messung des Luftdruckes (schematisch).

über dem äußeren Spiegel stehen (die Höhe ist an verschiedenen Orten und an verschiedenen Tagen nicht immer dieselbe). Da das Rohr oberhalb des Quecksilbers luftleer verschlossen ist, so kann hier kein Luftdruck wirken. Dagegen wirkt der Luftdruck auch

auf das Quecksilber im offenen Gefäße und treibt es so weit in die Höhe, bis der vom Quecksilber angestülpte Druck dem äußeren Luftdrucke gleich ist. Die Höhe des Quecksilberstandes in dem Torricellischen Rohre ist unabhängig von der Weite des Rohres (von sehr engen Röhren abgesehen, bei denen nach § 125 die Kapillarität einen zu niedrigen Stand bewirkt); denn in einem doppelt so weiten Rohre ist das Gewicht des Quecksilbers doppelt so groß; aber auch der Luftdruck auf die untere Rohroffnung ist verdoppelt, da die Größe der gedrückten Fläche verdoppelt ist.

Um den Luftdruck auf die Fläche von 1 cm<sup>2</sup> zu bestimmen, können wir annehmen, daß das Rohr einen Querschnitt von 1 cm<sup>2</sup> hat. Dann drückt auf diese Öffnung das Gewicht von 76 cm<sup>3</sup> Quecksilber. Das Gewicht dieser Quecksilbermenge beträgt, da das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13,6 ist, 76 · 13,6 = 1033 g\*.

Der Luftdruck beträgt 1033 g\*/cm<sup>2</sup>.

Dieser Druck wird der Druck von 1 Atmosphäre (1 Atm.) genannt. In der Technik nennt man Atmosphärendruck (1 atm.) den Druck von 1 kg\*/cm<sup>2</sup>.

Der Luftdruck ist an denselben Orte an verschiedenen Tagen verschieden. Zu derselben Zeit ist der Luftdruck an zwei senkrecht übereinanderliegenden Orten ebenfalls verschieden, und zwar ist er oben kleiner als unten, da ja nur die oberhalb der Quecksilbersäule befindliche Luft einen Druck ausüben vermag. Da in der Nähe der Erdoberfläche 1 cm<sup>3</sup> Luft 0,001293 g\* wiegt,



Fig. 373 Torricelli'scher Versuch.

so vermindert sich der Luftdruck auf 1 cm<sup>2</sup> bei der Erhebung um 1 cm um 0,001293 g\*. Er vermindert sich um 1,36 g\* bei der Erhebung um 1,36 : 0,001293 = 1052 cm = 10,5 m. Hieraus folgt, daß das Quecksilber in dem Torricellischen Rohre um 1 mm fällt, wenn man sich um 10,5 m nach oben erhebt, da eine Quecksilbersäule von 1 cm<sup>2</sup> Querschnitt und 1 mm Höhe ebenfalls 1,36 g\* wiegt.

### § 102. Das Barometer.

Die Wichtigkeit der Kenntnis des Luftdruckes (1. weil es möglich ist, aus dem Luftdrucke auf die Höhe des Beobachtungsortes zu schließen, 2. weil Wind und Wetter in einer gewissen Beziehung zum Luftdrucke stehen; vgl. den Abschnitt XI „Wetterkunde“) hat zur Aufertigung einfacher Apparate geführt, die eine bequeme und genaue Beobachtung des Luftdruckes ermöglichen. Solche Apparate heißen Barometer.<sup>1)</sup> Man unterscheidet Quecksilberbarometer und Metallbarometer.

Die Quecksilberbarometer bestehen im wesentlichen aus einem Torricellischen Rohre mit einem dauernd daran befestigten Meßmaßstabe, an dem man den Stand des Quecksilbers sofort ablesen kann. Da eine Änderung des Luftdruckes eine Veränderung des Quecksilberstandes im Rohre und im unteren Gefäße zur Folge hat, so muß man entweder eine Einrichtung treffen, durch die man den Stand im unteren Gefäße wieder auf die ursprüngliche Höhe bringen kann, oder den Maßstab gegen das Quecksilberrohr verschiebbar einrichten, oder endlich sowohl den oberen wie den unteren Stand der Quecksilberkuppe am Maßstabe ablesen und hieraus den wahren Stand durch Addition oder Subtraktion berechnen.

Im Fortinschen Gefäßbarometer (Fig. 374) ist der Boden des unteren Quecksilbergefäßes aus Leder hergestellt. Mittels einer gegen den Boden drückenden Schraube *s* kann der Boden so weit gehoben oder

Fig. 374. Fortinsches Gefäßbarometer.

gesenkt werden, bis die Oberfläche des Quecksilbers im Gefäße wieder bis zur Nullmarke des Maßstabes eingelegt ist. Die Nullmarke des Maßstabes besteht hierbei meistens aus einer feinen, aus Glas oder Elfenbein hergestellten Spitze *r*, von der in der Quecksilberspitze ein Spiegelbild erzeugt wird. In dem Augenblicke, wo die Spitze ihr Spiegelbild berührt, ist der untere Spiegel auf Null eingestellt. Man hat dann nur noch den Stand der oberen Quecksilberkuppe am Maßstabe mittels eines Nominus *αα* (Fig. 375) abzulesen.

1) *báros* (griech.) = Schwere. Das Wort „Barometer“ wird zuerst im Jahre 1663 von Rob. Boyle gebraucht (S. 318).



Fig. 375. Nominus.



Fig. 376. Heberschalenbarometer.

### § 102. Das Barometer

Heberbarometer. Da infolge der Kapillarwirkung (§ 125) in einem engen Rohre eine größere Kapillardepression als in einem weiten eintreten würde, so gibt man dem Barometer die in Fig. 376 abgebildete Gestalt, nämlich eine gleiche Rohrerweiterung an dem oberen und unteren Ende, wo die Ablesung stattfindet. Der untere Teil ist U-förmig umgebogen; der untere, offene Schenkel bildet das Gefäß des Barometers. Da bei dieser Anordnung die Niveauschwankungen unten im Rohre ebenso groß sind wie oben, muß man das Rohr entweder mit einem verschiebbaren Maßstabe versehen, der so verschoben wird, daß die Nullmarke mit dem unteren Niveau übereinstimmt, oder man muß den Stand oben und unten ablesen.

Die Schwankungen des Luftdruckes, also auch des Barometerstandes, betragen höchstens nur wenige Zentimeter. Deshalb ist bei dem am Barometer angebrachten Maßstabe gewöhnlich nur der um 76 cm herumliegende Maßstab genau eingeteilt, während der übrige, doch nicht benutzte Teil des Maßstabes ungeteilt bleibt.

Die Wärme dehnt die Körper aus, vermindert also das spezifische Gewicht. Daher ist ein bei hoher Temperatur abgelesener Barometerstand höher, als er bei einer tieferen Temperatur sein würde. Für genaue barometrische Messungen ist also noch eine Temperaturkorrektur erforderlich. Um die Temperatur bequem bestimmen zu können, bringt man gewöhnlich unmittelbar am Barometer ein Thermometer an.

Das Stationsbarometer, ein Gefäßbarometer (Fig. 377), ist im Gebrauche fast aller meteorologischen Stationen Europas. Das Quecksilbergefäß *a* (Fig. 378) enthält in dem oberen Deckel eine kleine Schraube *L*, die Luftschraube, welche einen Verbindungsweg zwischen dem Lufttraume über dem Quecksilber im Gefäß *a* und der Außenluft verschließt. Es genügt, diese Schraube ein wenig zu lockern, um die Luftverbindung freizugehen. Die Skala des Barometers wird nur am Quecksilbermeniskus *d* abgelesen. Ihre Zahlenwerte geben die Länge der Quecksilbersäule zwischen dem oberen und unteren Quecksilberspiegel an. Da sich bei Luftdruckschwankungen auch dieser letztere hebt und senkt, enthält die Skala eine „reduzierte“ Teilung, *d. h.* ihre Teile sind so abgemessen, daß dadurch den Niveauänderungen im Gefäße *a* Rechnung getragen wird. Die Ablesung erfolgt mit Hilfe eines Nominusschlebers *N*, der durch Zahn und Trieb *S* (Fig. 377)

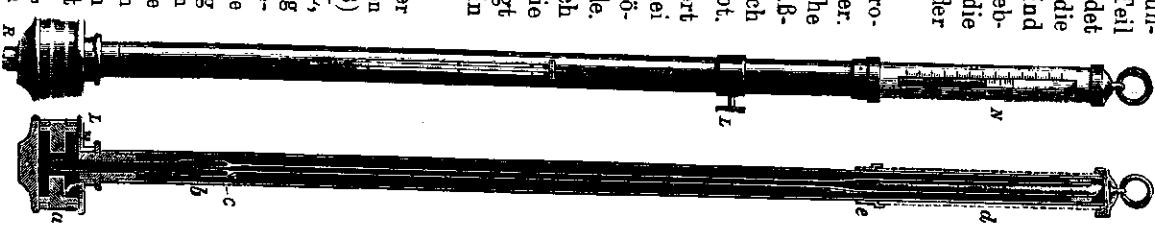


Fig. 377.

Fig. 378. Stationsbarometer. (Aus Tafel I, 1914 von R. Fuess, Berlin-Steigl.)

bewegt wird. Fig. 378 zeigt noch bei  $b$  eine „Luftfalle“ (nach Bunsen). Sie besteht darin, daß der obere Teil des Barometerrohres nach unten hin in eine Kapillare aus-eintaucht. Durch diese Einrichtung soll verhindert werden, daß Luftbläschen, die zufällig in das Quecksilber geraten sind, im Barometerrohre bis zum Vakuum aufsteigen und dieses verschlechtern können. Bei  $c$  in Fig. 378 sind solche abgefangene Luftbläschen im Bilde angedeutet. — Für den Transport wird die Stations-schraube  $R$  (Fig. 377), welche eine Bohrung in der Mitte des Gefäßbodens verschließt, durch eine längere Transportschraube ersetzt. Deren Spindel ist so lang bemessen, daß mit ihr ein federnder Verschluss gegen die untere Öffnung des Barometers fest angedrückt werden kann. Ehe sie eingesetzt wird, muß das

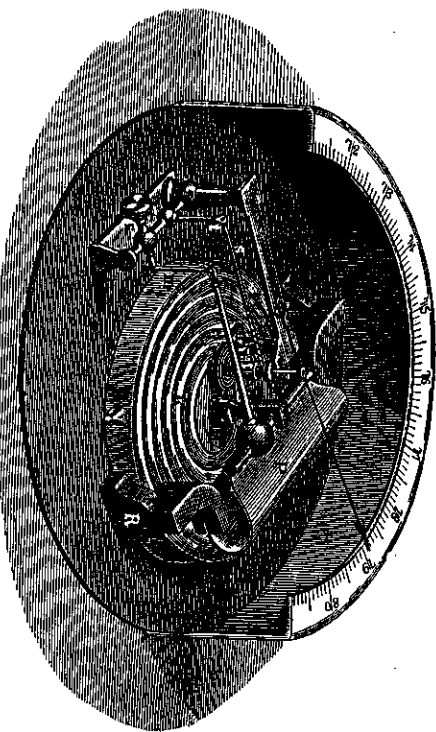


Fig. 378. Aneroidbarometer.

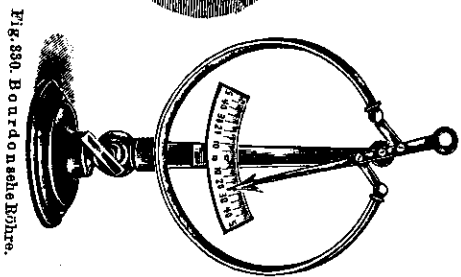


Fig. 380. Bourdon'sche Röhre.

Barometer erst langsam geneigt werden, bis das Quecksilber die gesamte Barometeröhre nach oben hin ausfüllt; dann wird das Barometer ganz umgekehrt, so daß der Boden nach oben zeigt.

Die Metallbarometer (Aneroidbarometer<sup>1)</sup>) (Fig. 379) bestehen im wesentlichen aus einer luftleeren, allseitig geschlossenen, flachen, zylindrischen Metalldose  $K$  mit elastischen Grundflächen. Die Metalldose würde wegen des auf ihr lastenden Luftdruckes vollständig zusammengedrückt werden. Um dieses zu verhindern, wird sie durch eine zwischen Boden und Deckel außen bei  $M$  befestigte, starke elastische Feder  $P$  auseinandergehalten. Wird der Luftdruck größer, so wird die Dose, also auch die elastische Stahlfeder, stärker zusammengedrückt und hierdurch ein mit der Feder verbundener Arm  $L$  abwärts bewegt. Das äußerste Ende des Armes greift an dem kurzen Arme

1) Ableitung nach franz. Wörterbüchern: an (griech.) = ohne, aér (lat., griech.) = Luft, An(a)eroid = ohne Luft. Es wird sonst die Ableitung: a nerós (griech.) = nicht feucht angegeben, weil sie keine Flüssigkeit enthalten. Die Aneroidbarometer mit der luftleeren Kapsel sind von L. Vidie (1848) (1805–1866) erfunden. Der Grundgedanke der Kapselbarometer wurde schon von Lehnhiz (1697) angegeben, zuerst von Joh. Ernst Zeiber (1760) (1720–1784, znl. Prof. der Math. in Wittenberg) ausgeführt.

in eines Winkelhebels an; an dem längeren Arme  $t$  sitzt eine Schnur oder eine feine Kette  $s$ , die um die Achse eines Zeigers gelegt worden ist. Eine ebenfalls an der Achse des Zeigers angebrachte feine Spiralfeder sorgt für eine gleichmäßige Spannung der Kette. Wird die Kette durch Vermittlung des Winkelhebels angezogen oder losgelassen, so wickelt sie sich von der Achse des Zeigers ab oder auf und dreht den Zeiger. Der Luftdruck bewirkt eine geringe Zusammenrückung der elastischen Metalldose. Sie wird durch die beschriebene Vorrichtung in vergrößerten Maße auf den Zeiger übertragen und dadurch leicht ablesbar gemacht. Die Einteilung, über der sich der Zeiger bewegt, wird empirisch durch Vergleichung mit einem Quecksilberbarometer hergestellt. Die auf der Teilung angebrachten Zahlen geben an, wie hoch die Quecksilbersäule eines Quecksilberbarometers unter dem Einflusse des herrschenden Luftdruckes (in Zenlimetern ausgedrückt) stehen würde.

Eine andere Form des Aneroidbarometers beruht auf der Wirkungsweise der Bourdon'schen Röhre<sup>1)</sup> (Fig. 380). Eine flache, luftleere Röhre ist fast bis zu einem Kreise zusammengebogen. Da die äußere Seite der Röhre eine größere Oberfläche als die innere Seite hat, so drückt der Luftdruck auf der Außenseite stärker und biegt dadurch die Röhre zusammen. Bei wachsendem Luftdruck nähern sich also die Enden, dem Luftdrucke entsprechend. Durch ein einfaches Hebelwerk wird die Bewegung der Enden auf einen Zeiger übertragen. Der am Fuße des Apparates angebrachte Hahn gestattet die Verbindung des Röhreninnern mit der äußeren Luft oder mit einem an den Fuß angeschlossenen Gasbehälter. Man kann demnach die Röhre luftleer machen oder auch den im Innern der Röhre herrschenden Druck verändern und messen.

### § 103. Druck und Volumen der Gase.

Aus dem im Eingang des § 101 beschriebenen Versuche geht hervor, daß nach dem Ausaugen noch die ganze Flasche von der zurückgebliebenen Luft angefüllt ist. Ebenso kann man in eine mit Luft gefüllte Flasche noch mehr Luft hineinlassen und dann durch Wägung der Flasche die Gewichtszunahme feststellen. Hieraus folgt, daß derselbe Raum von verschiedenen großen Luftmengen angefüllt werden kann. Auch kann man dieselbe Luftmenge in verschiedenen großen Räumen unterbringen; man kann eine bestimmte Luftmenge auf einen kleineren Raum zusammendrücken.

In dem in Fig. 381 abgebildeten zylindrischen Glasrohre von 1 m Länge und 1 cm<sup>2</sup> Querschnitt sei ein zylindrischer Kolben luftdicht schließend, aber doch leicht verschiebbar angebracht. Am oberen Ende der Kolbenstange befindet sich eine Wagschale. Das Glasrohr sei mit gewöhnlicher Luft gefüllt, die unter dem Drucke der Atmo-

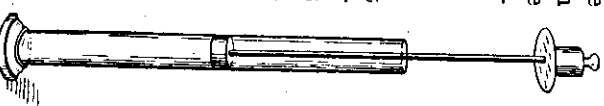


Fig. 381. Druck und Volumen der Luft.

1) Bourdon (1779—1854).

sphäre stellt, wenn der Kolben gerade die obere Öffnung verschließt. Belastet man dann die Wagschale so, daß der Kolben mit Wagschale und Belastung  $1 \text{ kg}^*$  wiegt, so sinkt der Kolben bis auf die Mitte des Glasrohres herunter, der Raum der eingeschlossenen Luft wird auf die Hälfte vermindert. Bei Belastung mit  $2, 3$  usw.  $\text{kg}^*$  sinkt der Kolben tiefer, die Luft wird weiter zusammengedrückt, ohne daß Luft entweicht. Beim Nachlassen des Druckes nimmt die Luft wieder ihr ursprüngliches Volumen ein.

Wir beachten, daß der äußere atmosphärische Luftdruck gleich dem Drucke von rund  $1 \text{ kg}$  auf  $1 \text{ cm}^2$  ist; die Belastung der Wagschale mit je  $1 \text{ kg}^*$  entspricht also der Vermehrung des Druckes um je  $1$  Atmosphäre. Wenn der Kolben mit  $1 \text{ kg}^*$  drückt, so beträgt der Druck  $2$  Atmosphären; bei der Belastung der Wagschale mit  $2 \text{ kg}^*$  beträgt der auf der Luft lastende Druck  $3$  Atmosphären usw. Die Beobachtung lehrt also, daß das Volumen der Luft dem Drucke umgekehrt proportional ist.

Die Ausführung des durch die Fig. 381 dargestellten Versuches ist deshalb schwierig, weil es kaum möglich ist, einen Kolben in einem Rohre zugleich luftdicht schließend und doch leicht beweglich herzustellen. Wesentlich leichter ist die Ausführung des Versuches, wenn man den Abschluß der Luft durch eine Flüssigkeit bewirkt und den Druck der Luft besonders mißt. Das kann mit dem in Fig. 382 abgebildeten Apparate geschehen: Dieser besteht aus einem Glasrohre (Rezipient<sup>1)</sup> genannt) von  $4-5$  cm Durchmesser und etwa  $120$  cm Länge, das an beiden Enden mit einem Dreiweghahn geschlossen werden kann. Der eine Schenkel des oberen Dreiweghahnes steht mit einem Schenkel eines U-Rohres in Verbindung, das etwa bis Mäßstab befindet. Der dritte Schenkel des oberen Dreiweghahnes ist frei; er kann durch einen Schlauch mit der Gasleitung oder irgend-einer anderen Gasquelle, z. B. einem Wasserstoff-Entwicklungsapparat, verbunden werden.

Der eine Schenkel des unteren Dreiweghahnes wird mit der Wasserleitung und der zweite freie Schenkel mit einem Wasserabflusse verbunden.

Das weite Glasrohr trägt eine Einteilung, deren Nullpunkt oben liegt und an der man ablesen kann, einen wie großen Rauminhalt das Rohr hat, von oben ab gemessen.

Zur Ausführung des in Frage stehenden Versuches wird der Wasserhahn der Wasserleitung geöffnet, während die Abflueitung durch den Dreiweghahn abgelaßt nun so viel Wasser in den Rezipienten einströmen, bis ein gewisses Volumen Luft, z. B.  $1200 \text{ cm}^3$ , im Rohre enthalten ist. Diese Luft steht unter dem einfachen Atmosphärendrucke. Jetzt dreht man den oberen Dreiweghahn so, daß nur noch die Verbindung zwischen dem Rezipienten und dem U-Rohre besteht. Endlich läßt man aus der Wasserleitung mehr Wasser eintreten. Dieses vermindert das

1) recipient (lat.) = aufnehmen.

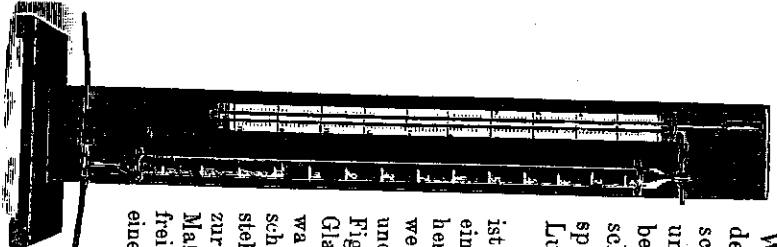


Fig. 381. Ableitung des Boyle'schen Gesetzes.

Volumen der im Rezipienten eingeschlossenen Luft. Gleichzeitig mit der Volumenverminderung beobachtet man ein Steigen des Quecksilbers im äußeren Schenkel des U-Rohres. Der Höhenunterschied in den beiden Schenkeln des U-Rohres gibt den im Rezipienten herrschenden Druck an. Es ist nun leicht, den zu jedem Volumen gehörenden Druck abzulesen.

Stellt man die zueinander gehörigen Werte von Volumen und Druck zusammen, so ergibt sich:

Das Volumen der abgeschlossenen Luftmenge ist dem Drucke umgekehrt proportional:

$$V_1 : V_2 = P_2 : P_1.$$

Folgender Apparat (Fig. 383) zum Nachweise des eben abgeleiteten Gesetzes ist weit verbreitet und soll daher noch beschrieben werden:

Ein zylindrisches Glasrohr von etwa  $50$  cm Länge, das am oberen Ende durch einen Hahn  $h$  verschlossen werden kann, ist an einem lotrechten Träger angebracht. Durch einen starkwandigen Gummischlauch ist das untere Ende  $a$  mit dem unteren Ende  $b$  eines anderen lotrechten, oben offenen Glasrohres verbunden, das in einer Führung an der mit einer Zentimeterteilung versehenen Skala lotrecht auf und ab bewegt werden kann. Der Hahn  $h$  steht bei  $100$  cm. Die beiden Glasrohre und der sie verbindende Schlauch sind teilweise mit Quecksilber gefüllt. Man senkt bei geöffnetem Hahn das verschiebbare Glasrohr so weit, daß unterhalb des Hahnes eine Luftsäule von  $10$  cm abgeschlossen ist. Dann stellt der Spiegel des Quecksilbers bei  $90$  cm. Darauf schließt man den Hahn. Die abgeschlossene Luft steht dann unter dem Drucke der äußeren Atmosphäre, der am Barometer abgelesen wird. Er möge  $74$  cm betragen.

Hält man nun das verschiebbare Glasrohr so weit, bis die unter dem Hahne abgeschlossene Luftsäule nur  $5$  cm lang ist, so daß also das Luftvolumen auf die Hälfte zusammengeedrückt worden ist, so steht der Quecksilberspiegel im geschlossenen Rohre bei  $95$  cm und im verschiebbaren Rohre bei  $169$  cm; der Höhenunterschied beträgt  $74$  cm. Jetzt befindet sich die Luftsäule unter dem Drucke der äußeren Atmosphäre, vermehrt um den Druck der Quecksilbersäule von  $74$  cm, also unter dem Drucke von  $2$  Atmosphären.

Senkt man das verschiebbare Rohr so weit, bis die abgeschlossene Luftsäule  $20$  cm lang ist, so steht das Quecksilber im verschiebbaren Schenkel  $37$  cm niedriger als im festen Schenkel. Der Druck ist auf die Hälfte vermindert.

Es ist ersichtlich, daß sowohl mit dem in Fig. 382 wie mit dem in Fig. 383 abgebildeten Apparate die zwischen dem Drucke und Volumen einer abgeschlossenen Luftmenge bestehende Beziehung für beliebige Luftmengen untersucht werden kann. Ferner läßt sich die Luft durch andere Gase ersetzen. Das geht besonders leicht bei dem in Fig. 382 abgebildeten Apparate.

Aus allen diesen Versuchen findet man das schon oben angegebene Ergebnis:

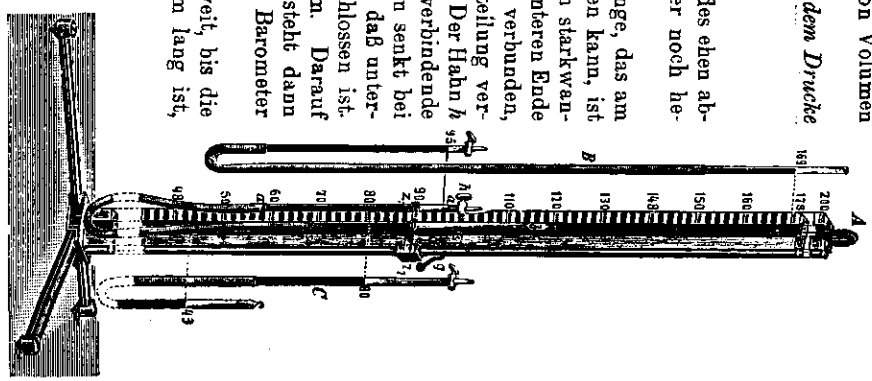


Fig. 383. Nachweis des Boyle'schen Gesetzes.

Das Volumen einer abgeschlossenen Gasmenge ist dem auf ihr lastenden oder von ihr ausgeübten Drucke umgekehrt proportional.

Bezeichnet man zwei Volumina einer Gasmenge mit  $V_1$  und  $V_2$  und die dazu gehörigen Drucke mit  $P_1$  und  $P_2$ , so kann man die Beziehung in der Form der Proportion:

$$V_1 : V_2 = P_2 : P_1,$$

$$V_1 \cdot P_1 = V_2 \cdot P_2$$

oder der Gleichung:

schreiben. In Worten heißt das:  
Das Produkt aus dem Volumen und dem Drucke einer abgeschlossenen Gasmenge ist unveränderlich.

Dieses Gesetz gilt (mit gewissen, später zu behandelnden Einschränkungen) für alle Gase. Es ist zuerst von Boyle<sup>1)</sup> 1662 und dann von Mariotte<sup>2)</sup> 1676 durch Versuche nachgewiesen worden. Es wird daher das Boyle'sche Gesetz oder das Mariotte'sche Gesetz genannt. Wir werden es in Zukunft immer das Boyle'sche Gesetz nennen.

Die Beziehung zwischen Druck und Volumen einer Gasmenge kann man graphisch darstellen, indem man den Druck als Abszisse auf einer wagerechten Achse und das Volumen als Ordinate auf einer hierzu senkrechten Achse abträgt.

Die durch das Boyle'sche Gesetz bestimmte Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel (Fig. 384).

Das Boyle'sche Gesetz gilt streng nur unter der Voraussetzung, daß die Drucke nicht allzu groß werden. Doch sind für Luft, Sauerstoff, Stickstoff und einige andere Gase die Abweichungen bis etwa

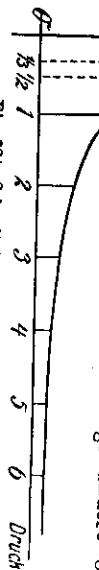


Fig. 384. Schematische zum Boyle'schen Gesetze.

für 100 Atm. Druck nur geringfügig. Der Druck darf aber nicht so weit gesteigert werden, daß das Gas dem Punkte nahe rückt, bei dem es verflüssigt wird. Die Abweichung des Verhaltens der Gase vom Boyle'schen Gesetze ist besonders durch Versuche von Regnault<sup>3)</sup> (1847—1862) genau untersucht worden. Es ist Van der Waals (1873,<sup>4)</sup> gelungen, eine Gleichung aufzustellen, die dem Verhalten der Gase auch bei höherem Drucke Genüge leistet. Die Gleichung lautet

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = c.$$

In dieser Gleichung (der Van der Waals'schen Zustandsgleichung) bedeutet  $P$  und  $V$  Druck und Volumen,  $a$ ,  $b$ , und  $c$  Konstanten, die von der Natur der Gase abhängen. Wir kommen auf diese Gleichung später noch einmal zurück.

1) Robert Boyle, englischer Physiker (1626—1691).  
2) Edme Mariotte, französischer Physiker (1620—1684); er hat wahrscheinlich die Boyle'sche Entdeckung gekannt.

3) H. V. Regnault (1810—1878), Direktor der Porzellanmanufaktur in Sèvres bei Paris, führte, von der franz. Regierung mit reichen Mitteln ausgestattet, großartige Experimentalforschungen durch, die hauptsächlich die genaue Bestimmung der verschiedenen Gaskonstanten zum Ziele hatten.

4) S. später.

**Druck und Spannung.** Wird durch einen von außen wirkenden Druck das Gas auf ein kleineres Volumen zusammengedrückt, so verhält sich das Gas wie ein elastischer Körper. Im zusammengedrückten Zustande müssen demnach in jedem Punkte des Gases auch Spannungen (S. 182) auftreten. Rund um jeden Punkt im Innern des Gases halten sich diese Spannungen das Gleichgewicht. Sie äußern sich als Druck daher nur an den Grenzen des Gasvolumens. Die Spannung ist eine ungerichtete Zustandsgröße des Gases; sie kann zahlenmäßig durch die Angabe des Druckes auf die Flächeneinheit gemessen werden, ist also dann dem Werte nach gleich dem Drucke. Doch sind Spannung und Druck verschiedene Begriffe, denn erstere herrscht auch im Innern, letzterer gilt genau genommen nur für die Begrenzungsfläche; erstere ist ungerichtet, letzterer steht immer senkrecht in bezug auf die gedrückte Fläche.

§ 104. Barometrische Höhenmessung.

Mit Hilfe des Boyle'schen Gesetzes kann man die Abnahme des spezifischen Gewichtes der Luft mit der Erhebung über der Erdoberfläche, also auch die Beziehung zwischen dem Barometerstande und der Höhe über der Erdoberfläche, auf folgende Weise ableiten:

Wir denken uns eine von der Erdoberfläche bis zur Grenze der Atmosphäre reichende, prismatische Luftsäule vom Querschnitte  $q$  (Fig. 385). In der Höhe  $h$  und in der Höhe  $h + \Delta h$  seien zwei wagerechte Ebenen gelegt, die also zwischen sich ein Luftprisma vom Querschnitte  $q$  und der Höhe  $\Delta h$  einschließen. In der Höhe  $h$  betrage der Barometerstand  $b$ , in der Höhe  $h + \Delta h$  sei er  $b - \Delta b$ . Dann ist das Gewicht der abgegrenzten Luftsäule gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule vom Querschnitte  $q$  und der Höhe  $\Delta b$ . Das Gewicht der Luftsäule ist  $G = q \cdot \Delta h \cdot s$ , das Gewicht der Quecksilbersäule  $G' = q \cdot \Delta b \cdot s'$ , wo  $s$  das spezifische Gewicht der Luft in dieser Schicht und  $s'$  das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist. Durch Gleichsetzung der beiden Werte entsteht die Gleichung

$$q \cdot \Delta b \cdot s' = q \cdot \Delta h \cdot s, \text{ also } \Delta b \cdot s' = \Delta h \cdot s.$$

Wir setzen hierbei voraus, daß die Luftschicht so niedrig ist, also  $\Delta h$  so klein ist, daß wir innerhalb dieser Schicht das spezifische Gewicht der Luft als unveränderlich ansehen können.

Wenn wir in irgendeiner anderen Höhe  $h_0$ , wo der Barometerstand  $b_0$  ist, ein Luftvolumen derselben Luftmenge mit dem spezifischen Gewichte  $s_0$  abgrenzen, so folgt nach dem Boyle'schen Gesetze, da die Barometerstände den an den betreffenden Stellen herrschenden Drucken proportional sind,  $s : b = s_0 : b_0$ , also  $s = \frac{s_0}{b_0} \cdot b$ .

Mit Benutzung der vorigen Gleichung folgt hieraus

$$\Delta b \cdot s' = \Delta h \cdot \frac{s_0}{b_0} \cdot b \text{ oder } \Delta b = \frac{s_0}{b_0 \cdot s'} \cdot \Delta h \cdot b.$$

Diese Gleichung drückt eine einfache Beziehung zwischen dem Barometerstande und der Abnahme des Barometerstandes bei gleichmäßigem Aufsteigen aus. Wenn wir nämlich das Aufsteigen so vornehmen, daß wir schrittweise immer um den gleich großen Betrag  $\Delta h$  aufsteigen, so hat, da  $s_0$ ,  $b_0$  und  $s'$  unveränderliche Größen

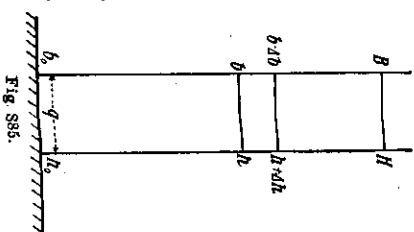


Fig. 385.

sind, der Faktor  $\frac{s_0}{b_0 s} \cdot \Delta h$  einen immer gleichbleibenden Wert  $k$ . Wir können also unter dieser Voraussetzung schreiben:

$$\Delta b = k \cdot b.$$

Die Abnahme des Barometerstandes ist, wenn wir immer um denselben Betrag in die Höhe steigen, dem Barometerstande selbst proportional,

oder, da der neue Barometerstand  $b' = b - \Delta b = b(1 - k)$ , und  $\frac{b'}{b} = 1 - k$  unveränderlich ist:

Die Barometerstände nehmen wie die Glieder einer geometrischen Reihe ab, wenn man sich stets um denselben Betrag, d. h. steigend wie die Glieder einer arithmetischen Reihe, erhebt.

Erhebt man sich von der Höhe  $h = 0$  mit dem Drucke  $b_0$  bis zur Höhe  $h = n \cdot \Delta h$  mit dem Drucke  $b$ , so gilt also nach diesem Satze

$$b = b_0(1 - k)^n \quad \text{oder} \quad \log \frac{b}{b_0} = -n \log(1 - k)$$

Setzt man hierin noch  $n = \frac{h}{\Delta h}$  und wählt  $\Delta h = 1$  m, so gilt

$$h = -\frac{b_0}{\log(1 - k)} \log \frac{b}{b_0} \text{ m.}$$

In dieser Gleichung ist  $k$  eine kleine Zahl, so daß auch  $\log(1 - k)$  eine kleine negative Zahl wird, die man nur ungenau aus gewöhnlichen Tafeln entnehmen kann. Daher ist der folgende Weg zur Berechnung der Formel vorzuziehen. Wir können die vorher abgeleitete Gleichung auch schreiben:

$$\Delta h = \frac{b_0 s'}{s_0} \cdot \frac{\Delta b}{b}.$$

Diese Beziehung ist um so genauer, je kleiner  $\Delta h$  und  $\Delta b$  sind. Gehen wir zur Grenze über und berücksichtigen wir gleichzeitig, daß die Änderung von  $h$  in entgegengesetztem Sinne erfolgt wie die von  $b$ , so dürfen wir schreiben

$$dh = -\frac{b_0 s'}{s_0} \cdot \frac{db}{b}.$$

Die gesamte Änderung der Höhe zwischen den Barometerständen  $b_0$  und  $b$  finden wir dann durch Integration dieser Gleichung zu

$$\int_{h_0}^h dh = -\int_{b_0}^b \frac{b_0 s'}{s_0} \cdot \frac{db}{b},$$

woraus folgt  $h - h_0 = \frac{b_0 \cdot s'}{s_0} \cdot (\log \text{ nat } b_0 - \log \text{ nat } b)$ .

Wenn die Höhe  $h_0 = 0$  angenommen wird, und wenn hier der Barometerstand  $b_0 = 76$  cm bestimmt ist, für den  $s_0 = 0,001293 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3}$  beträgt, so folgt, da  $s' = 13,6 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3}$  ist,

$$h = 76 \cdot \frac{13,6}{0,001293} \cdot (\log \text{ nat } 76 - \log \text{ nat } b) = 799\,000 (\log \text{ nat } 76 - \log \text{ nat } b)$$

oder, wenn wir von den natürlichen Logarithmen zu den Briggs'schen Logarithmen übergehen, indem wir noch mit dem reziproken Werte des Moduls des Briggs'schen Systemes  $\frac{1}{\log e} = \log \text{ nat } 10 = 2,3026$  multiplizieren,

$$h = 799\,000 \cdot 2,3026 \cdot (\log 76 - \log b) \text{ cm} = 1\,840\,000 \cdot (\log 76 - \log b) \text{ cm} \quad \text{oder} \\ h = 18\,400 \cdot (1,8808 - \log b) \text{ m.}$$

Die Bestimmung der Höhe mit Hilfe des Barometers ist sehr bequem; sie wird stets dort ausgeführt, wo eine andere Art der Höhenbestimmung (z. B. durch trigonometrische Messung) ausgeschlossen ist, wie bei Luftfahrten, oder auch bei Reisen durch unerforschte Gegenden. Doch wird bei allen barometrischen Höhenmessungen vorausgesetzt, daß während des Aufstieges von einem tieferen zu einem höheren Orte keine allgemeinen Barometerschwankungen in der Atmosphäre die Beobachtungen wesentlich beeinflussen.

### § 105. Luftpumpen.

Die Herstellung eines luftleeren Raumes kann theoretisch in folgender Weise geschehen. Ein zylindrisches Rohr sei an dem einen Ende durch einen Hahn verschließbar. In dem Zylinder läßt sich ein luftdicht schließender Kolben hin und her bewegen. Bei geöffnetem Hahne wird der Kolben ganz in den Zylinder hineingeschoben und so alle Luft daraus entfernt. Wird jetzt der Hahn geschlossen und der Kolben zurückgezogen, so würde der Zylinder luftleer sein, wenn tatsächlich vorher alle Luft entwichen wäre, und wenn der Kolben vollständig luftdicht abgeschlossen hätte. Diese Voraussetzung kann in Wirklichkeit niemals vollständig erfüllt werden. Auch bei vollkommen dicht schließendem Kolben verbleibt zwischen dem Kolben und dem Hahne ein kleiner Raum (der schädliche Raum), aus dem man die Luft nicht entfernen kann.

Ein vollkommen luftleerer Raum ist die Torricellische Leere oberhalb des Quecksilbers in der Barometeröhre, wenn sich beim Füllen des Rohres das Quecksilber an alle Teile der Rohrwandung vollkommen angeschlossen hat. Mit Hilfe des in Fig. 383 abgebildeten Apparates, den wir zum Nachweise des Boyleschen Gesetzes benutzt haben, läßt sich ebenfalls ein luftleerer Raum herstellen, wenn man vor dem Schließen des Hahnes  $h$  die Luft aus dem Rohre ganz entfernt und nun das bewegliche Rohr so tief senkt, daß der Spiegel des Quecksilbers in dem beweglichen Rohre tiefer unter dem Hahne steht, als dem Barometerstande entspricht.

Ein Raum, der Luft enthält, kann niemals luftleer gemacht werden, wenn nicht die Luft durch einen eingeführten festen oder flüssigen Körper verdrängt wird, da die in einem Raume vorhandene Luft, auch wenn ihre Menge noch so gering ist, stets den ganzen Raume ausfüllt. Man kann die Luft in einem solchen Raume nur verdünnen. Vorrichtungen, die dazu dienen, die Luft zu verdünnen, heißen Luftpumpen, eigentlich hesser Luftverdünnungspumpen. Man unterscheidet Kolbenluftpumpen, Kapselluftpumpen und Quecksilberluftpumpen.



**Kolbenluftpumpen.** Die Kolbenluftpumpe, erfunden von Otto v. Guericke) um 1635, von der in Fig. 386 ein sehr einfaches Modell abgebildet ist, besteht aus dem zylindrischen Rohre *CC*, dem sog. Stiefel, in dem ein Kolben luftdicht hin und her bewegt werden kann. Oft ist, wie in der Figur, die Kolbenstange als Zahnstange ausgebildet, die durch einen mit der Kurbel *g* versehenen Trieb *r* bequem bewegt werden kann. An den Stiefel schließt sich der Dreiweghahn *a* an, und an diesen, durch ein kurzes Rohr verbunden, der Teller, auf den eine, „Rezipient“ genannte, Glasglocke gesetzt werden kann. Der Dreiweghahn kann in vier verschiedene Stellungen (Fig. 387 I, II, III, IV) gebracht werden. In Stellung I verbindet er die äußere Luft *L* mit dem Rezipienten *R* und dem Stiefel *S*; in Stellung II nur Rezipient und Stiefel, in Stellung III Stiefel und äußere Luft, in Stellung IV Rezipient und äußere Luft.

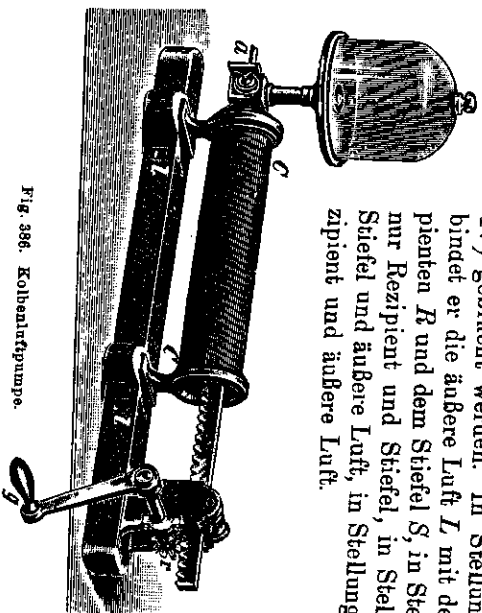


Fig. 386. Kolbenluftpumpe.

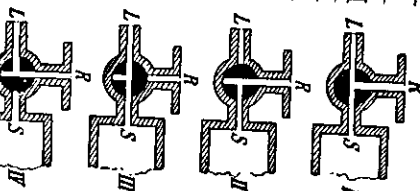


Fig. 387. Dreiweghahn in verschiedenen Stellungen.

Hat der Hahn zuerst die Stellung I, so werden der Rezipient und der Stiefel mit atmosphärischer Luft angefüllt. Man schiebt dann den Kolben bis dicht an den Dreiweghahn heran und bringt darauf den Hahn in die Stellung II. Beim Zurückziehen des Kolbens breitet sich die im Rezipienten befindliche Luft auf Rezipient und Stiefel aus; es tritt also eine Raumvergrößerung und damit nach dem Boyleschen Gesetze eine Druckverminderung ein. Dreht man darauf den Hahn in die Stellung III, und schiebt man den Kolben wieder bis an den Dreiweghahn heran, so wird die im Stiefel vorhandene Luft nach außen getrieben. Nachdem wieder die Stellung II hergestellt ist, wird der Kolben aufs neue zurückgezogen; infolgedessen breitet sich es tritt wiederum eine Druckverminderung ein. In Stellung III wird der Kolben wieder bis zum Hahne herangeschoben und die Luft aus dem Stiefel

1) Otto Guericke, nach der Erhebung in den Adelsstand O. v. Guericke, geb. 1602 in Magdeburg, dort 1627 Magist. v. 1646 ab Bürgermeister, gest. 1686 in Hamburg, hat um die experimentelle Untersuchung besonders der Gase und der Erscheinungen des Luftdruckes die größten Verdienste.

entfernt. So wird abwechselnd bei Stellung II der Kolben zurückgezogen, bei Stellung III wieder bis an den Hahn herangeschoben.

Der Zustand der im Rezipienten vorhandenen Luft wird durch ihren Druck gemessen. Die Messung erfolgt mit Hilfe eines kleinen Barometers, das entweder durch ein Seitenrohr mit dem Rezipienten dauernd in Verbindung steht oder unter den Rezipienten gesetzt wird. Da nur kleine Drucke gemessen werden, so braucht das Barometer nur wenige Zentimeter lang zu sein.

Man beobachtet bei jedem Kolbenzuge eine Verminderung des Luftdruckes. Beträgt das Volumen des Rezipienten  $R$ , das Volumen des Stiefels  $S$ , der Anfangsdruck im Rezipienten 760 mm, so hat sich nach einem Kolbenzuge das Volumen  $R$  auf den Raum  $R + S$  ausgedehnt, der Druck beträgt daher nach dem Boyleschen Gesetze nunmehr  $\frac{R}{R + S} \cdot 760$  mm. Der Faktor  $\frac{R}{R + S}$  wird Verdünnungsfaktor genannt. Nach  $n$  Kolbenzügen beträgt der Luftdruck nur noch

$$\left(\frac{R}{R + S}\right)^n \cdot 760 \text{ mm.}$$

Bei dieser Berechnung war vorausgesetzt, daß der Kolben und der Rezipient vollkommen luftdicht schließen, und daß keine atmosphärische Luft in den Hahnstellung III die Hahnbohrung mit atmosphärischer Luft gefüllt. Beträgt ein noch so großes Zahl von Kolbenzügen der Luftdruck niemals unter den Betrag  $\frac{R}{R + S} \cdot 760$  cm gebracht werden, auch dann nicht, wenn der Kolben tatsächlich bis dicht an den Hahn herangeführt werden kann.

Will man mit einer Kolbenluftpumpe noch geringere Drucke erzielen, so muß man noch einen zweiten Stiefel anbringen, mit dessen Hilfe nach jedem Kolbenzuge die Luft im schädlichen Raume besonders verdünnt wird. Dieser Stiefel wird dann auf der dem 1. Stiefel gegenüberliegenden Seite des etwas umgeformten Dreiweghahnes angebracht. So entsteht eine zweistiefelige Kolbenluftpumpe, mit der man die Verdünnung bedeutend weiter treiben kann als mit einer einstiefeligen Kolbenluftpumpe.

**Gaede-Kolbenpumpe.** Gaede<sup>1)</sup> hat neuerdings (1913) sogar drei Stiefelpumpen hintereinander geschaltet, von denen immer die folgende zur Beseitigung des schädlichen Raumes der vorhergehenden dient.

Dies Gaede-Kolbenpumpe, von der Fig. 388 eine Ansicht gibt, zeichnet sich durch mechanische und physikalische Unverwundlichkeit aus; sie gibt sehr hohe Luftverdünnungen (bis 0,00005 mm Quecksilberdruck), ist weitgehend gegen Wasserdämpfe unempfindlich und immer betriebsbereit. Die Wirkungsweise dieser technisch außerordentlich gut durchgebildeten Anordnung sei beschrieben.

1) Dr. Wolfgang Gaede, 1913—1917 a. o. Prof. d. Physik in Freiburg i. Br., seit 1919 a. o. Prof. an der Techn. Hochschule in Karlsruhe.

**Beschreibung.** Die Kolbenstange *D* (Fig. 389, I) hewegt die drei Kolben *A*, *B*, *C*. Die Kolben befinden sich zwischen den festen Decken *a*, *b*, *c*, *d* und sind mit kleinen Ventilen *o* versehen. Die Kolben fördern durch ihre Bewegung die Luft von *d* nach *o*, erzeugen somit in dem Raume bei *d* ein Vakuum. Der Rezipient wird auf den Normalschliff *R* mit Fett aufgesetzt, der durch das Rohr *m* mit dem Mantel *H* der Pumpe verbunden ist. Hat der Kolben *C* die tiefste Stellung erreicht (Fig. 389 IV), so stößt die Luft von *R* durch *m* zwischen dem Mantel *H* der Pumpe und dem Zylinder *G* und durch die Öffnung *n* in das Vakuum,

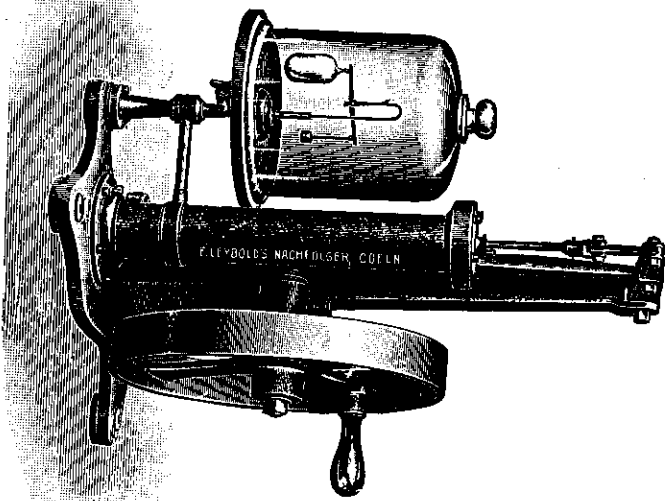


Fig. 388. Gaede-Kolbenpumpe.  
(E. Leybolds Nachr., Köln.)

steht. Die Luft entweicht bei diesem durch die Öffnung *q*. — Bei jeder Kompression kondensiert etwas Wasserdampf aus der Luft über dem Kolben *A*. Durch die Dichtungspalte bei *o* des Deckels *a* dringen Öltröpfchen ein. Diese vereinigen sich mit dem kondensierten Wasserdämpfen zu einer Öl-Wasser-Emulsion. Diese Öl-Wasser-Emulsion wird zusammen mit der Luft durch das Ventil *o* bei *a* und durch die über dem Ventile sitzende Röhre *P* und deren obere Öffnung *r* in den Raum *K* gefördert. Der Raum *K* ist mit einem Gewebe ausgefüllt, das die Eigenschaft hat, das Öl und Wasser der Öl-Wasser-Emulsion zu trennen. Auf dem Boden *M*, welcher den Raum *K* unten abschließt, sammelt sich infolge des höheren spezifischen Gewichtes Wasser an und kann, falls dies nach längerer Betriebszeit notwendig wird, durch das Rohrchen *N*, welches aus dem Deckel *O* der Pumpe herausragt, abgesaugt werden. Das vom Wasser getrennte Öl fließt durch das Rohrchen *s* in den Raum zwischen *a* und *M* und bewirkt von neuem ein Unsäglichmachen der Wasserdämpfe.

welches sich über dem Kolben *C* zwischen *C* und *e* gebildet hat. Bei der Aufwärtsbewegung des Kolbens gleitet die Kolbenstange mit dem verengten Teile durch den Kolben *C* hindurch, bis der Kolben durch den Anschlag bei *C* mitgenommen wird. In der oberen Kolbenstellung (Fig. 389, II) entweicht die über *C* befindliche Luft an der verengten Stelle der Kolbenstange vorher in den vorvakuierten Raum über dem Deckel *e*. Hat der Kolben die oberste Stellung erreicht, so bleibt er in dieser durch Adhäsion so lange stehen, bis die Kolbenstange sich so weit herabewegt hat, daß dieselbe die Öffnung in *e* verschließt und gegen *C* anschlägt, den Kolben *C* abwärts führt. Die zwischen *c* und *b* befindliche Luft (Fig. 389, I) wird durch den Kolben *B* nicht unmittelbar gegen die Atmosphäre, sondern gegen ein weiteres Vakuum abgegeben, welches durch die Bewegung des Kolbens *A* zwischen den Deckeln *b* und *a* entsteht.

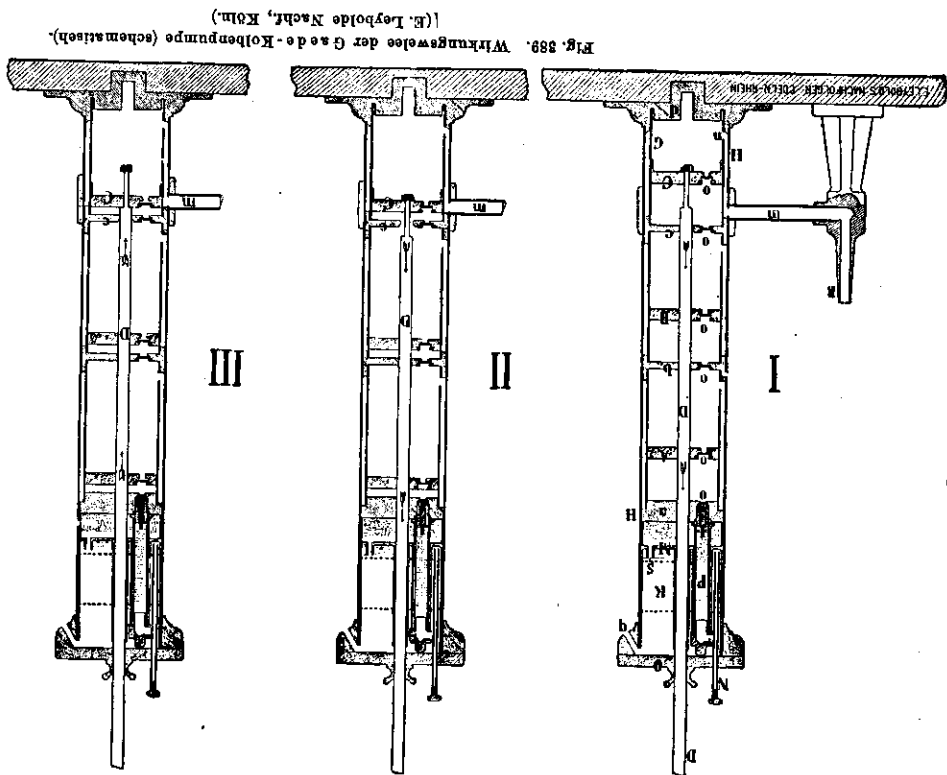


Fig. 389. Wirkungsweise der Gaede-Kolbenpumpe (schematisch).  
(E. Leybolds Nachr., Köln.)

**Öluffpumpen.** Um den schädlichen Raum bei Kolbenluftpumpen zu vermeiden, stellt man den Kolben auch wohl lotrecht und gießt auf seine obere Fläche eine Ölschicht, die bei der Hin- und Herbewegung des Kolbens den

Luftförmigen Abschluß sichert. Da das Öl bis dicht an die Hahnbohrung hinauf und in die Hahnbohrung hineingetrieben werden kann, so wird hierdurch der schädliche Raum ebenfalls vermieden.

**Kapselluftpumpen.** In Fig. 390 ist eine Gaedesche Kapselluftpumpe, die durch einen kleinen Elektromotor in Betrieb gesetzt wird, in ihrer äußeren Ansicht abgebildet. Fig. 391 zeigt einen Durchschnit senkrecht zur Drehungsachse und Fig. 392 einen lotrechten Durchchnitt durch die Drehungsachse. Die Welle *AB* trägt einen massiven Zylinder *A*, in dem zwei Stahlschieber *s*

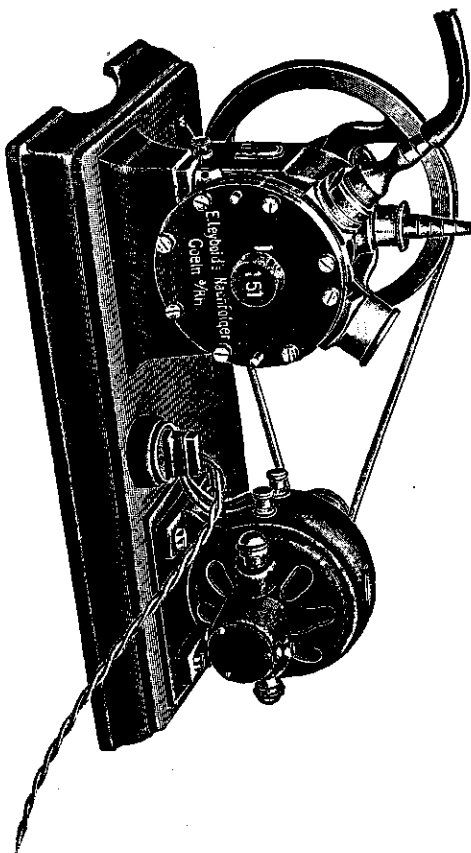


Fig. 390. Gaedesche Kapselluftpumpe.

radial verschiebbar sind. Die Stahlschieber werden durch eine zwischen ihnen angebrachte Spiralfeder auseinandergedrückt und so weit aus dem Zylinder geschoben, daß sie sich an die Innenwand des zylindrischen Gehäuses *G* anlegen. Die Achse *A* sitzt exzentrisch zu dem zylindrischen Gehäuse *G*. Die Vorderseite des Gehäuses ist durch eine aufgeschliffene Metallplatte luftdicht verschlossen. An dem oberen Teile des Gehäuses schließen sich links und rechts die beiden Ansätze *C* und *D* an. In dem Ansatz *D* sitzt ein kleines, sich nach außen öffnendes Ventil *a*. Ferner ist der Ansatz *D* sitzt ein kleines, kleinen Kanal *k* mit einem zylindrischen Luftgehäuse *O* verbunden, an dessen Oberseite die Düse *J* sitzt. Das Gehäuse *O* dient zugleich als Windkessel und als Ölbehälter. Das im unteren Teile von *O* befindliche Öl wird durch einen Metallring *r* bei der Drehung der Achse dauernd an die Achse befördert.

Wird die Achse und damit der Zylinder *A* im Sinne des in Fig. 391 gezeichneten Pfeiles gedreht, so vergrößert sich der durch den linken Schieber *s* abgeschlossene Raum des Gehäuses *G* dauernd; daher wird die Luft dauernd durch *C* angesaugt. Die unterhalb des linken Schiebers *s* befindliche Luft wird, da dieser Raum bei der Drehung der Achse dauernd verkleinert wird, durch das im Ansatz *D* befindliche Ventil und durch den Kanal *k* nach dem Windkessel *O* befördert. Von dort strömt sie aus der Düse *J* nach außen.

Soll die Luft in einem Gefäße verdünnt werden, so muß das Gefäß mit der Düse *C* verbunden werden.

Verbindet man dagegen ein Gefäß mit der Düse *J*, so wird die Luft in diesem Gefäße verdichtet (komprimiert).

Man kann daher die Kapselluftpumpe als Luftverdünnungs- und Luftverdichtungspumpe benutzen. Der aus der Düse *J* austretende Luftstrom kann auch als Gebläse benutzt werden.

**Quecksilberluftpumpen.** 1) Eine einfache Form der Quecksilberluftpumpe zeigt Fig. 393. An dem oberen Ende eines Glasrohrs *R* aus starkwandigem

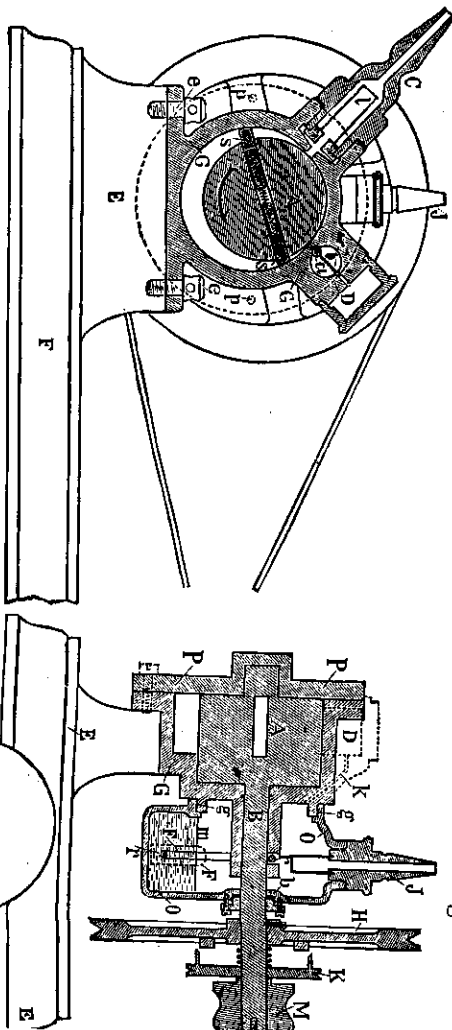


Fig. 391. Durchschnitt senkrecht zur Drehungsachse.

Fig. 392. Durchschnitt lotrecht durch die Drehungsachse.

Glasse von etwa 1 m Länge ist eine Kugel *G* von etwa 1 l Rauminhalt angeblasen, an deren oberes Ende sich ein besonders eingerichteter Hahn *H* anschließt. Das untere Ende des Rohres *R* steht durch einen starkwandigen, luftdicht schließenden Gummischlauch *S* mit einem zweiten kugelförmigen Gefäße *K* in Verbindung. Das Gefäß *K*, also auch der Schlauch und ein Teil des Rohres *R*, werden mit Quecksilber gefüllt. *K* kann gehoben und gesenkt und in seiner höchsten und tiefsten Stellung auf zwei Konsolen aufgehängt werden, die an dem starken Trägerbrette befestigt sind, vor dem die ganze Pumpe angebracht ist. Der Hahn *H* ist mit zwei schrägen Bohrungen versehen; in der in der Figur abgebildeten Stellung verhindert er die Kugel *G* mit dem nach links führenden Rohre *B*, das durch ein Schließstück aus Glas in den Hahnansatz eingesetzt wird. Dreht man den Hahn um 180°, so steht die Kugel *G* mit einem nach rechts gehenden Rohre *A* in Verbindung. Das Rohr *B* führt zu dem zu entleerenden Raume, z. B. zu einer elektrischen Glühlampe *L*, die angeschmolzen oder durch einen starkwandigen Gummischlauch mit *B* verbunden ist.

1) Ausgeführt zuerst von dem Glasbläser Heinrich Geißler (1814—79) in Bonn 1857 nach der Angabe von Plücker.

Hebt man das Gefäß *K* bei der Hahnstellung, die um 180° gegen die in in der Figur abgebildete gedreht ist, in die Höhe, so füllt sich das Gefäß *G* mit Quecksilber, und dieses verdrängt die Luft aus dem Gefäße; das Quecksilber tritt durch die Hahnbohrung hindurch, verdrängt also auch hier die Luft und tritt bis in die Erweiterung des Rohres *A*. Jetzt wird der Hahn um 90° gedreht, die obere Kugel *G* wird also von jeder Verbindung abgeschlossen. Sendt man darauf die Kugel *K* und stellt sie auf die untere Konsole, so fließt das Quecksilber aus *G* heraus, und es entsteht hier ein vollständig luftfreier Raum. Dreht man darauf den Hahn weiter bis zu der in der Figur abgebildeten Stellung, so dehnt sich die Luft in *L* auf den Raum *L* und *G* aus. Hierauf wird die Anfassung des Hahnes wiederhergestellt, durch Heben des Gefäßes *K* die Luft aus *G* wieder entfernt, der Hahn um 90° zurücksygedreht, das Gefäß *K* gesenkt und der Hahn in die abgebildete Stellung gebracht, worauf der nun noch in *L* verbliebene Luftrest sich wieder auf den Raum *L* und *G* ausbreitet.

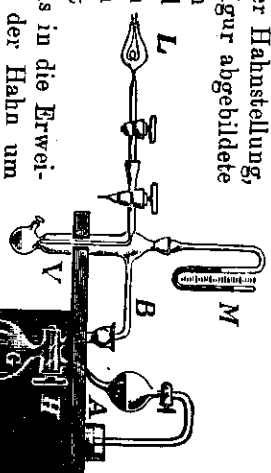


Fig. 333. Quecksilberluftpumpe.

Da bei der Quecksilberluftpumpe das Quecksilber stets die ganze Hahnbohrung ausfüllt, also auch hier alle atmosphärische Luft verdrängt, so ist kein schädlicher Raum vorhanden. Außerdem schließt sich das Quecksilber stets vollständig an die Glaswandungen an und bildet einen luftdichten Verschluss, so daß die theoretisch berechnete Verdünnung  $(\frac{L}{L+G})^n \cdot 760$  mm (annähernd) erreicht wird.

Die berechnete Verdünnung wird nur annähernd erreicht, da trotz des dicht schließenden Quecksilbers an den Gefäßwandungen des Gefäßes *G* stets Luftspuren hängen bleiben. Um den schädlichen Einfluß dieser anhaftenden Luftschicht möglichst klein zu machen, läßt man das Gefäß *G* nicht dauernd mit atmosphärischer Luft in Verbindung, sondern hält den Raum durch eine Vorpumpe auch dann noch luftverdünn, wenn die Luft aus dem Räume *G* durch Heben des Gefäßes *K* entfernt wird. Als Absperrung gegen den äußeren Luftraum dient die Erweiterung oben der rechten Seite angeschlossenen lotrechten Glasrohres mit dem am oberen Ende angeblasenen Absperrhahne, welche durch eine Vorpumpe von Zeit zu Zeit ausgepumpt wird.

Ein weiterer Grund dafür, daß die theoretisch berechnete Verdünnung der Luft nicht vollständig erreicht wird, liegt darin, daß stets etwas Feuchtigkeit in dem Räume *L* zu Beginn des Versuches vorhanden ist. Um diese Feuchtigkeit zu entfernen, ist noch eine besondere Vorlage *V* angebracht, die unten in eine mit

konzentrierter Schwefelsäure oder Phosphorperoxyd gefüllte Glasangel endet. Diese Körper sind stark wasserziehig (hygroscopisch) und trocknen daher die Luft. Das am oberen Ende dieser Vorlage angebrachte abgekürzte Barometer *M* dient zur Messung des Luftdruckes.

Es werden auch Quecksilberluftpumpen ohne jeden Hahn gebaut, bei denen dann keine Feldkämpfe den Raum verunreinigen, weil die auf jeder Schichtfläche nötige Entleerung des Hahnes vermieden ist. Auf ihre Einrichtung soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Die rotierende Gaedesehe Quecksilberluftpumpe. Ihre Einrichtung stimmt im wesentlichen mit der Einrichtung einer Gasuhr überein, doch mit dem Unterschiede, daß die in der rotierenden Quecksilberluftpumpe vorhandene Trommel hier von außen gedreht wird und nun in der Art eines Schöpfrades die Luft weiterbefördert, während bei der Gasuhr durch die bewegte Luft

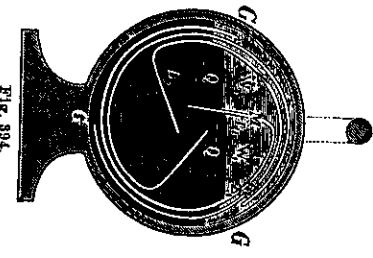


Fig. 394.

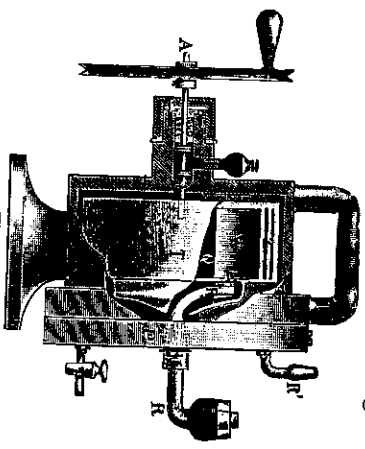


Fig. 395.

oder das bewegte Leuchtgas die Trommel in Bewegung gesetzt wird. Als Absperrflüssigkeit wird Quecksilber verwandt.

Die Pumpe ist in ihren Hauptteilen in Fig. 394 und 395 abgebildet. In einem zylindrischen Gehäuse *G* aus Gußeisen, das auf der einen Seite durch eine dicke Spiegelglasplatte mittels eines dicken Eisenringes *P* luftdicht verschlossen ist, wird eine eigentümlich geformte, durch Zwischenwände in drei Kammern abgetheilte Porzellantrommel *T* um die Achse *A* gedreht. Das Gehäuse ist bis zu etwa  $\frac{2}{3}$  Höhe mit Quecksilber *Q* gefüllt. Wird die Trommel mit dem auf der linken Seite von Fig. 395 befindlichen Handrade oder mit einem kleinen Elektromotor im Sinne des Uhrzeigers gedreht, also so, daß bei der Fig. 394 die Drehung entgegengesetzt der Drehung des Uhrzeigers erfolgt, so wird das Volumen der Kammer *W*<sub>1</sub> immer größer, da sie sich über das Niveau des Quecksilbers immer mehr erhebt. Diese Kammer *W*<sub>1</sub> steht in der abgebildeten Lage durch die Öffnung *L*<sub>1</sub> mit dem Rohre *R* in Verbindung. Wird daher in den äußeren Schliff des Rohres *R* ein Hohlkörper, z. B. ein Feiblersches Rohr, luftdicht eingesetzt, so wird die in diesem Hohlkörper vorhandene Luft zum Teil in die Kammer *W*<sub>1</sub> abgesaugt. Bei Weiterdrehen der Trommel kommt die Kammer *W*<sub>1</sub> in die Lage der Kammer *W*<sub>2</sub>;

das Volumen dieser Kammer verringert sich aber beim Weiterdrehen der Trommel; die in der Kammer befindliche Luft wird allmählich in den zwischen Trommel und Gehäuse liegenden Raum befördert; sie kommt auf diese Weise in Verbindung mit dem Rohre *R*. An dieses Rohr wird eine Wasserstrahlpumpe als Vorpumpe angeschlossen, die die Luft dauernd absaugt. Die Wasserstrahlpumpe braucht nur eine Leere von 10 bis 20 Millimetern Quecksilberdruck zu erzeugen. Wenn die Pumpe gut ausgetrocknet ist, kann man mit der Pumpe in 15 Minuten einen Raum von 6 Litern bis auf den Druck von 0,00007 Millimetern auspumpen.

In neuester Zeit hat wegen ihrer großen Leistungsfähigkeit eine neue Art von Luftpumpen, die man unter dem Namen Dampfstrahlpumpen zusammenfassen kann, in der Experimentiertechnik Bürgerrecht erworben. Die Wirkungsweise dieser Pumpen beruht auf dem Grundgedanken der Bunsenstrahlpumpe (S. 295); nur ist in ihnen der dort wirksame Wasserstrahl durch einen Dampfstrahl ersetzt. In diesen hinein diffundiert das Gas des auszupumpenden Raumes und wird dann von dem Strahle mit fortgerissen. Die Pumpen dieser Bauart, die zuerst von Gaede in seiner Diffusionspumpe (1915) angegeben und beschrieben wurde, haben von anderer Seite, erwähnt sei besonders Irving Langmuir<sup>1)</sup> (1916), mehrfach Abänderungen und Verbesserungen erfahren. Heute liegen sie in zahlreichen Formen vor.

Es sei aus ihrer Reihe als Beispiel eine besonders einfache beschrieben, die „Dampfstrahl-Vakuumpumpe nach Volmer“<sup>2)</sup> Fig. 396 gibt die Ansicht Fig. 397 ist eine schematische Zeichnung dazu.

In ihr bezeichnet *a* einen mit etwas Quecksilber beschickten Siedekolben; *d* und *e* sind Rückflußrohre für wieder kondensiertes Quecksilber. Der Raum *a* ist durch einen sich nach oben verjüngenden Aufsatz abgeschlossen, der in einer Düse bei *b* mündet. Dieser Aufsatz wird vom Räume *f* umgeben, der sich nach oben hin ebenfalls verjüngt, so daß zwischen der Düse *b* und der Wandung von *f* nur ein sehr enger ringförmiger Spalt offen bleibt. Der Raum *f* steht durch das Ansatzrohr *h* mit dem Rezipienten, durch die Rohre *i* und *e* mit dem Siedegefaße in Verbindung. Er mündet nach oben in den glockenförmig erweiterten Raum *c*. Dieser steht durch die Rohre *d* und *e* mit dem Siedegefaße *a*, durch ein Schlangrohr nach oben mit dem Rohre *v* in Verbindung. Das Rohr *v* führt zu einer gut wirkenden Vorvakuumpumpe, etwa einer Wasserstrahlpumpe. Das Schlangrohr sowie der glockenförmige Raum *c* ist von einem Kühlmantel *g* umgeben. In den vom Kühlmantel umschlossenen Raum kann durch das Rohr *k* Kühlwasser geschickt werden. Durch das Rohr *l* wird es wieder abgeleitet.

Zum Betriebe der Pumpeneinrichtung werden durch das Rohr *h* etwa 10–12 cm

1) Nordamerikanischer Physiker im Versuchslaboratorium der General Electric Company in Schenectady.

2) Prof. der theor. Chemie in Charlottenburg. Die Pumpe wird von Hanff und Buest in Berlin in den Handel gebracht, die auch die Abbildungen Fig. 396 und 397 geliefert haben.

Quecksilber eingegossen, die Verbindung mit dem Rezipienten und der Vorvakuumpumpe hergestellt und durch Schlauchverbindungen das Kühlwasser zu- und abgeführt. Man braucht von letzterem etwa  $\frac{1}{2}$  Liter in der Minute. Darauf wird die Vorvakuumpumpe in Tätigkeit gesetzt. Nach Erreichung des Vorräumens wird vorsichtig das Quecksilber in *a* zum Sieden erhitzt. Der aus der Düse *b* austretende Quecksilberdampfstrahl reißt nun aus dem Räume *f* die Luft mit. Das Gemisch aus Quecksilberdampf und Luft gelangt dann in den Raum *c*. Hier wird der Quecksilberdampf durch das Kühlwasser kondensiert. Das kondensierte Quecksilber fließt durch die Röhren *d* und *e* in das Siedegefaß *a* zurück; die mitgerissene Luft wird durch das Rohr *v* zur Vorvakuumpumpe befördert.

— Der Quecksilberdampfdruck im Siedegefaße *a* soll etwa 3–7 cm Quecksilbersäule betragen gegenüber dem Drucke des Vorräumens. Diese Differenz gibt sich an dem Stande des Quecksilbers in dem Rückflußrohre *e* zu erkennen. Sobald die Pumpe arbeitet, steigt das Quecksilber in dem Rohre *i* in die Höhe. Die Höhe der Quecksilbersäule im Rohre *i* über der Ablaufstelle des Quecksilbers, der Ansatzstelle der Röhren *d* und *e*, zeigt die Druckdifferenz zwischen Vorräumem und Hochvakuum an.

In der Technik sind durch Wasserdampf betriebene Dampfstrahlpumpen als Injektoren schon seit längerer Zeit in Gebrauch. Aus

einer Düse mit sehr großer Geschwindigkeit austretender Wasserdampf saugt nicht Luft, sondern Wasser an. Durch dieses wird der aus der Düse tretende Wasserdampf sofort kondensiert. Das angesaugte Wasser hat dabei durch den Dampfstrahl eine so große kinetische Energie erlangt, daß es im Stande ist, Gegenstände zu überwinden, z. B. als Speisewasser in Dampfkessel eingelassen zu werden.

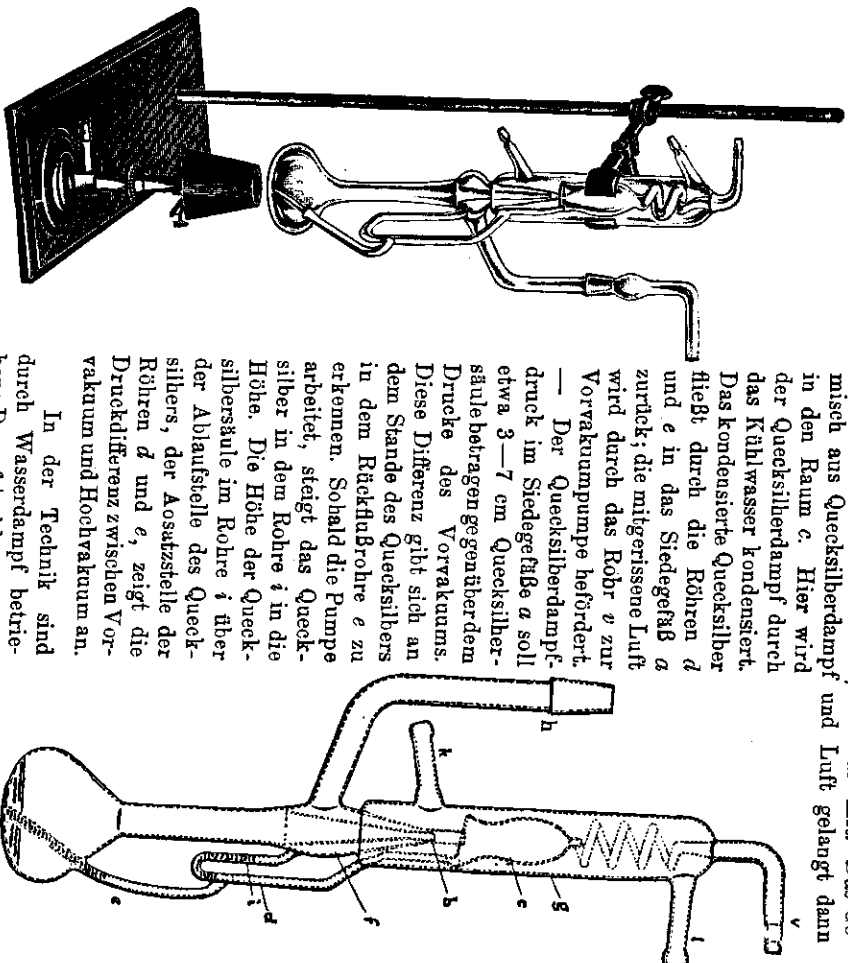


Fig. 396. Quecksilberdampfstrahlpumpe nach Volmer.

Fig. 397. Quecksilberdampfstrahlpumpe nach Volmer (schematisch).

§ 106. Stechheber. Saugheber. Wasserpumpen.

Der Stechheber oder die Pipette.<sup>1)</sup> Der in Fig. 398 abgebildete Stechheber oder die in Fig. 20 und 21 abgebildete Pipette können dadurch mit Flüssigkeit gefüllt werden, daß man sie mit dem Munde ansaugt oder in eine Flüssigkeit eintaucht. Verschiebt man dann den Stechheber während des Heraushebens aus der Flüssigkeit am oberen Ende mit dem Finger, so läuft im Stechheber befindlichen Luftrestes, vermehrt um den Druck der im Stechheber vorhandenen Flüssigkeitsmenge, gleich dem auf die untere Öffnung des Stechhebers wirkenden Luftdruck ist.

Der Saugheber (Fig. 399) besteht aus einem gebogenen

Rohre mit ungleich langen Schenkeln, dessen kürzerer Schenkel in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß eingetaucht wird. Ist der Heber vor dem Eintauchen vollständig mit Flüssigkeit gefüllt, oder saugt man, während er eintaucht, mit dem Munde am unteren Ende so lange, bis er mit Flüssigkeit gefüllt ist, so fließt diese andauernd durch den Heber aus dem unteren Ende ab. Die Wirkungsweise beruht darauf, daß ein Abfließen des Wassers von der oberen Kuppe *C* aus nach beiden Seiten deshalb nicht möglich ist, weil der äußere Luftdruck

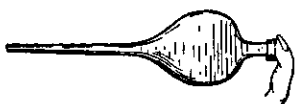


Fig. 398. Stechheber.

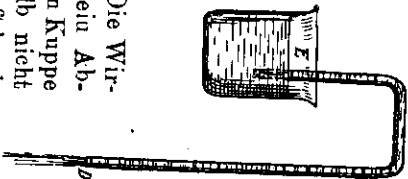


Fig. 399. Saugheber.

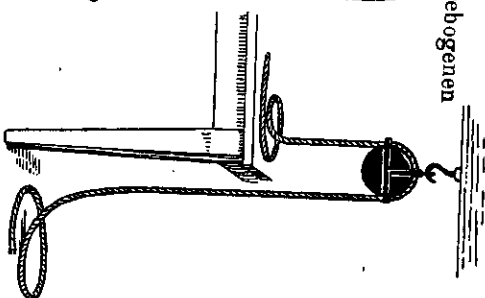


Fig. 400. Modell des Saughebers.

*C* verhindert. Das Gewicht der im äußeren Schenkel *CD* befindlichen Flüssigkeitssäule ist nun größer als das Gewicht der im Schenkel *CE* befindlichen Flüssigkeitssäule. Der Gewichtsunterschied in den beiden Schenkeln des Hebers treibt die Flüssigkeit nach außen, ähnlich wie das längere Seilende des Hebes in Fig. 400 abgebildeten, über eine Rolle geführten Seiles das kürzere Ende hebt, wodurch das ganze Seil über die Rolle hinweg vom Tische zum Erdboden getrieben wird. Daher kann der Heber nur so lange fließen, wie die äußere Öffnung *D* tiefer liegt als der Spiegel der Flüssigkeit im Gefäße.

In luftleeren Räumen hört der Heber gewöhnlich zu fließen auf, weil bei *C* die Flüssigkeitssäule abreißt, besonders dann, wenn geringe, bei *C* befindliche Luft vorhanden, und ist auch das im Gefäße vorhandene Wasser luftfrei, so kann bei vorsichtiger Handhabung der Heber auch noch im luftleeren Raume weiterfließen. In diesem Falle verhindert die Kohäsion (eine gewisse Zugfestigkeit) des Wassers (§ 87) das Abreißen des Flüssigkeitstades bei *C*.

1) pipe (franz.) = Röhre.

Die Saugpumpe (Fig. 401). In dem ausgemauerten Brunnenraume *B* ragt in das Wasser ein hölzernes oder eisernes Saugrohr *A*. An das Saugrohr schließt sich der Stiefel *E*, d. i. ein zylindrisches Rohr, in dem sich ein luftdicht schließender, durchbohrter Kolben mittels des Pumpenschwengels auf *D* verschieben läßt. Der Stiefel ist mit einer seitlichen Ausflußöffnung *V* (Bodenventil) *H*; ebenso ist die obere Öffnung der Kolbenbohrung durch ein Ventil (Kolbenventil) *C* geschlossen, beide Ventile können sich nur nach oben öffnen. Wird der Kolben gehoben, so entsteht unter ihm im Stiefel und Saugrohre ein luftverdünnter Raum, das Bodenventil öffnet sich, und das Wasser steigt in dem Saugrohre in die Höhe. Wird der Kolben abwärts bewegt, so schließt sich das Bodenventil; die zwischen dem Kolben und dem Ventil eingeschlossene Luft wird zusammengedrückt, sie öffnet das Kolbenventil und entweicht. Bei wiederholter Auf- und Niederbewegung des Kolbens tritt endlich das Wasser durch das Bodenventil in das Pumpenrohr, es wird mit dem Kolben gehoben und fließt aus der Ausflußöffnung heraus.

Die Druckpumpe. Infolge der Wirkung des Luftdruckes kann das Wasser nur bis zu einer Höhe von 10 m gehoben werden. Um das Wasser auf größere Höhen zu heben, wendet man die Druckpumpe an, mit der das Wasser durch den auf den Kolben ausgeübten Druck im Druckrohre zu beliebiger Höhe emporgetrieben werden kann. Die Druckpumpe (Fig. 402) hat einen massiven Kolben. Am unteren Ende des Stiefels ist ein Bodenventil *H* angebracht. Oberhalb dieses Ventiles ist am unteren Ende des Stiefels ein seitliches Steigrohr mit einem sich nach oben öffnenden Ventile *H'* angebracht. Das beim Heben des Kolbens in den Stiefel eintretende Wasser wird beim Niedergange des Kolbens in das Steigrohr gedrückt.

Die Kreiselpumpe (Zentrifugalpumpe), von der Fig. 403 einen Längs- und Querschnitt darstellt, besteht aus einem zylindrischen Gehäuse, in dem ein mit gebogenen Schaufeln versehenes Flügelrad *B* um die Achse *A* schnell gedreht wird. Das Gehäuse ist mit einem tangential angeschlossenen Steigrohr *D* und einem axialen Rohrstützen *C* versehen, an dem ein Saugrohr angeschlossen wird. Wenn das Gehäuse mit Wasser gefüllt ist, so wird dieses infolge der Zentrifugalkraft nach außen getrieben und erfährt hier einen Überdruck, der es in das Steigrohr *D* treibt. Gleichzeitig entsteht im axialen Raume des Gehäuses ein Unterdruck, infolge dessen der äußere Atmosphärendruck neues Wasser in das an *C* angeschlossene

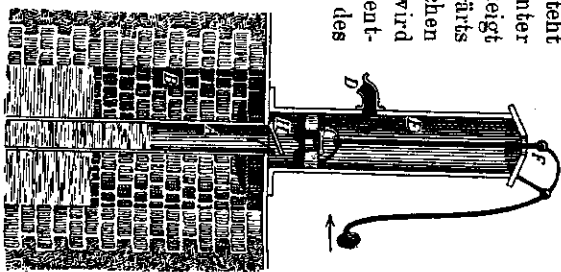


Fig. 401. Saugpumpe.

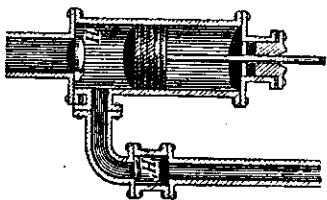


Fig. 402. Druckpumpe.

Saugrohr treibt. Die Pumpe kann erst wirken, wenn sie mit Wasser gefüllt ist; dann aber arbeitet sie nicht stoßweise, wie die Kolbenpumpe, sondern

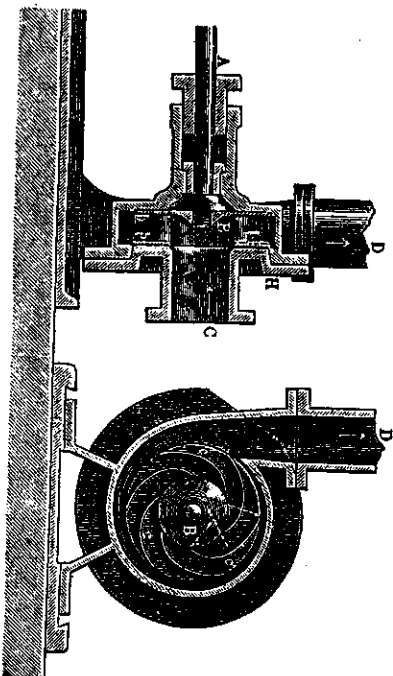


Fig. 403. Kreiselpumpe.

gleichmäßig. Da sie keine Ventile enthält, so ist sie auch dann zu gebrauchen, wenn das Wasser durch Schlamm oder sonstige stark verunreinigt ist; ja sie hebt sogar Sand und kleine Steine mit in die Höhe.

Den Kreiselpumpen gleichen im Grundgedanken die Schleudergebläse, durch welche große Luftmengen, allerdings mit nur geringer Pressung, bewegt werden können; diese finden vorwiegend zur Durchlüftung der Bergwerke Verwendung. Sehr häufig ist auch die Anwendung der Schleudergebläse bei den elektrisch angetriebenen Windzeugern zum Betriebe von Orgeln.

### § 107. Antrieb in der Luft. Luftballon.

Jeder Körper erfährt in der Luft einen Auftrieb, der sich wie bei den Flüssigkeiten nach dem Archimedischen Gesetze berechnen läßt; er ist gleich dem Gewichte der durch den Körper verdrängten Luftmenge. Daher wiegt ein Körper in der Luft weniger als im luftleeren Raume. Wir wägen die Körper gewöhnlich in der Luft. Um das wahre Gewicht eines Körpers zu erhalten, müssen wir ihn im luftleeren Raume wägen, oder wir müssen zu dem in Luft bestimmten Gewichte noch das Gewicht der vom Körper verdrängten Luft addieren: die Wägung muß auf den luftleeren Raum bezogen werden. Ein Kilogrammstück aus Messing (spezifisches Gewicht 8) hat ein Volumen von  $125 \text{ cm}^3$ . Der Körper verdrängt  $125 \text{ cm}^3$  Luft vom Gewicht  $0,16 \text{ g}^*$ . Das Kilogrammstück würde also im luftleeren Raume  $1000,16 \text{ g}^*$  wiegen.

Das Dasyometer<sup>1)</sup> (Fig. 404), das aus einem kleinen Wagebalken besteht, an dessen beiden Enden zwei in Luft gleich schwere, aber an Volumen ungleiche Körper hängen, befindet sich unter dem luftleeren Rezipienten einer Luftpumpe nicht mehr im Gleichgewicht, vielmehr sinkt der an Rauminhalt größere Teil nach unten. Der größere Körper ist nämlich in Wirklichkeit schwerer

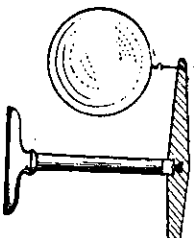


Fig. 404. Dasyometer.

1) dasy's (griech.) = dicht.

### § 107. Antrieb in der Luft. Luftballon

als der kleinere Körper; er erscheint nur deshalb in der Luft mit dem kleinen Körper gleichschwebend, weil er in Luft einen größeren Auftrieb erfährt.

Luftballon. Der Auftrieb in der Luft findet beim Luftballon (Fig. 405 u. 406) praktische Verwendung. Dieser besteht aus einer Leuchte, für Gase undurchlässigen Hülle aus gummiertem Baumwollstoff, über der ein Netz aus starken Seilen hängt, dessen Teile am unteren Ende in einem Ringe zusammengefaßt werden. An dem Ringe hängt die Gondel zur Aufnahme der Fahrgäste, Apparate und des mitgeführten Ballastes. Der Luftballon wird mit Leuchtgas oder Wasserstoffgas gefüllt.<sup>1)</sup> Er erfährt in der Luft einen Auftrieb, der gleich dem Gewichte der von ihm verdrängten Luftmasse ist. Er

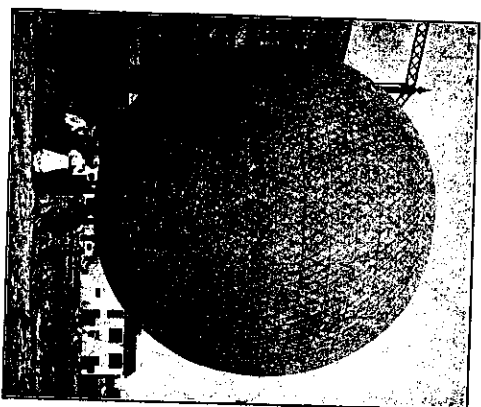


Fig. 405. Luftballon.

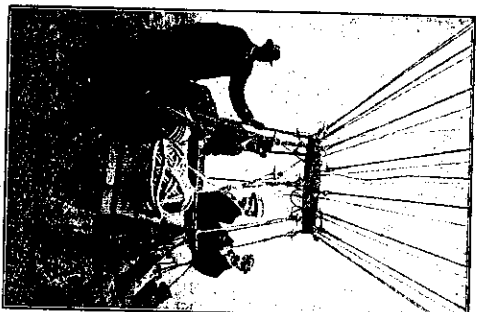


Fig. 406. Befestigung des Korbes.

steigt so lange, wie das Gewicht der Hülle mit Gondel und Besatzung samt dem Gewichte der Gasfüllung kleiner ist als das Gewicht der vom Ballon verdrängten Luft.

Den Unterschied des Gewichts von  $1 \text{ m}^3$  Luft und  $1 \text{ m}^3$  der Gasfüllung nennt der Luftschiffer den „Antrieb des Füllgases“.  $1 \text{ m}^3$  Luft wiegt an der Erdoberfläche  $\approx 1,3 \text{ kg}^*$ ,  $1 \text{ m}^3$  Wasserstoffgas  $\approx 0,1 \text{ kg}^*$ ,  $1 \text{ m}^3$  Leuchtgas  $\approx 0,6 \text{ kg}^*$ , also beträgt der Antrieb des Wasserstoffgases  $\approx 1,2 \text{ kg}^*$ , der des Leuchtgases  $\approx 0,7 \text{ kg}^*$ .

Das Fassungsvermögen der gebräuchlichsten, gewöhnlich mit Leuchtgas gefüllten Kugelballons für Sportfahrten beträgt  $1200 \text{ m}^3$  (bei  $\approx 13 \text{ m}$  Durchmesser). Ist ein solcher Ballon ganz (prall) mit Leuchtgas gefüllt, so beträgt sein „freier Antrieb“  $1200 \cdot 0,7 = 840 \text{ kg}^*$ .

Die Ballonausrüstung wiegt  $\approx 330 \text{ kg}^*$  (Hülle  $180 \text{ kg}^*$ , Netz  $60 \text{ kg}^*$ , Ring  $10 \text{ kg}^*$ , Korb  $50 \text{ kg}^*$ , Schleppseil  $20 \text{ kg}^*$  und sonstiges Zubehör  $10 \text{ kg}^*$ ). Ist der

1) Den ersten gasgefüllten Ballon (Wasserstoff) ließ Charles am 27. August 1783 in Paris steigen, daher trüber der Name Charlière für einen solchen Ballon.

Korb mit 4 Personen besetzt, deren Gewicht einschließlic Proviant zu 310 kg<sup>a</sup> angenommen werde, so beträgt das Gesamtgewicht 640 kg<sup>a</sup>; also ist die „Steigkraft“ des besetzten Ballons 840—640 = 200 kg<sup>a</sup>, die zu Beginn des Aufstieges durch Sandballast ausgeglichen wird (der Ballon wird „angewogen“). Steigt dieser Ballon in die Höhe, so kommt er in Gebiete, in denen der Luftdruck geringer ist, und zwar fällt der Barometerstand jedesmal um 1 mm, wenn sich der Ballon um  $\approx 10$  m, erhebt. Nach dem Boyle'schen Gesetze nimmt die Dichte der Luft und des Füllgases, also auch ihr Dichteunterschied, in demselben Verhältnisse ab. Da nun der freie Auftrieb des Ballons proportional ist mit dem Dichteunterschiede, trägt, wie im obigen Beispiele, der freie Auftrieb des prall mit Leuchtgas gefüllten, 840 kg<sup>a</sup>, so wird er bei einer Druckverminderung von 1 mm (also von  $\frac{1}{760}$  des ursprünglichen Druckes) um  $\frac{1}{760}$  seines Betrages, also um  $840 \text{ kg}^a / 760 \approx 1,1 \text{ kg}^a$  vermindert. Denselben Einfluß hat auch eine durch Witterungsänderung verursachte Änderung des Barometerstandes. Man müßte daher, wenn der Ballon steigen soll, für die Steighöhe um eine barometrische Höhenstrafe etwa 1,1 kg<sup>a</sup> Ballast auswerfen, wenn sonst keine Einflüsse wirken würden. Von bedeutendem Einflusse ist Wirkung dieser Einflüsse erst eingegangen werden, wenn das Gay-Lussac'sche Gesetz über die Ausdehnung der Gase durch die Wärme (§ 133) und die durch adiabatische Ausdehnung der Gase verursachte Temperaturänderung (§ 156) besprochen worden sind.

§ 108. Anwendungen des Boyle'schen Gesetzes.

Aus dem Boyle'schen Gesetze folgt, daß man durch Änderung des Volumens eines Gases auch gleichzeitig dessen Druck verändert. Vermindert man das Volumen eines Gases, so wird sein Druck vergrößert; vergrößert man sein Volumen, so wird sein Druck verkleinert.

Beim Atmen vergrößern wir durch Heben der Rippen oder durch Senken des Zwerchfelles den Rauminhalt des Brustkastens und damit zugleich das Volumen der im Brustkasten befindlichen Luft. Würden wir Mund und Nase geschlossen halten, so würde bei der Vergrößerung des Brustkastens der Druck der darin befindlichen Luft verkleinert werden. Beim Öffnen des Mundes strömt dann Luft infolge der Druckdifferenz der Innen- und der Außenluft von außen in die Lungen ein. — Ebenso wird durch Senken der Rippen und Heben des Zwerchfelles der Brustkasten verkleinert und der Druck der Innenluft vergrößert, die demnach durch Mund und Nase anströmt.

Beim Saugen vergrößern wir den Rauminhalt der Mundhöhle durch Zurückziehen der Zunge. Steht die Mundöffnung mit irgendeiner Flüssigkeit durch ein Rohr in Verbindung, so wird die Flüssigkeit durch das Rohr in den Mund getrieben, weil der äußere Luftdruck größer ist als der Luftdruck in der Mundhöhle. Das Saugen geschieht auch vielfach durch Erweiterung des Brustkastens mittels der Rippen oder durch Erweiterung der Mundhöhle infolge der Wirkung der Backenmuskeln.

§ 109. Anwendungen des Boyle'schen Gesetzes

Der Heronshall<sup>1)</sup> (Fig. 407) ist eine Flasche, die teilweise mit Flüssigkeit gefüllt ist. Durch den luftdicht verschlossenen Hals der Flasche führt eine Röhre fast bis auf den Boden des Gefäßes. Bläst man kräftig Luft durch die Röhre in die Flasche, so wird der Druck der Luft in der Flasche vergrößert, und die verdichtete Luft treibt das Wasser in einem Strahle durch die Öffnung der Röhre, wenn man die Öffnung wieder frei läßt.

Die Spritzflasche (Fig. 408) ist ein Heronshall, in den man dauernd Luft durch das Blasrohr hineinblasen kann, während ein Wasserstrahl aus dem Spritzrohr fließt.

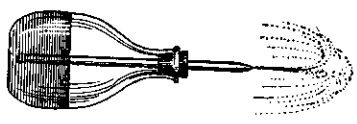


Fig. 407. Heronshall.

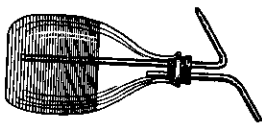


Fig. 408. Spritzflasche.

Der Gartestaatische Taucher<sup>2)</sup> (Fig. 409) ist ein kleiner, hohler, unten offener Glaskörper, der so weit mit Wasser gefüllt ist, daß er nur wenig leichter als Wasser ist, also beim Schwimmen nur wenig aus dem Wasser herausragt. Man bringt den Glaskörper in ein mit Wasser gefülltes Gefäß, das oben einen elastischen Verschuß hat. Übt man auf den Verschuß einen Druck aus, so pflanzt sich dieser durch das Wasser auf die Luft im Glaskörper fort; die Luft wird verdichtet, und es dringt mehr Wasser in den Glaskörper ein. Dadurch wird sein Auftrieb geringer und er sinkt. Läßt der Druck nach, so dehnt sich die Luft wieder aus und treibt das eingedrungene Wasser hinaus; der Auftrieb wird dadurch größer und der Körper steigt empor. Man gibt dem Taucher oft die Form eines kleinen Tentfels.

Die Gummipfelle der Heurekaipistole hatten an einer glatten Wand, weil unter der Gummischeibe der Luftdruck geringer ist (die Luft wird beim Aufschlagen des Pfeiles zum Teil herausgedrückt) als der von außen auf die Oberfläche der Scheibe wirkende Luftdruck. In ähnlicher Weise halten sich manche Tiere (z. B. der Laubfrosch, der Gecko u. a.) durch besondere Saugapparate infolge des Luftdruckes an einer Wand fest.

Manometer. Die Apparate, mit denen man den Druck eines Gases mißt, heißen Manometer.<sup>3)</sup> Bei dem in Fig. 410 abgebildeten offenen Manometer wird der Druck des in einem Behälter befindlichen Gases durch die Höhe der Flüssigkeitssäule gemessen, die das Gas zu heben vermag, wenn der Behälter durch den auf der linken Seite der Figur abgebildeten Schlauch mit dem mit

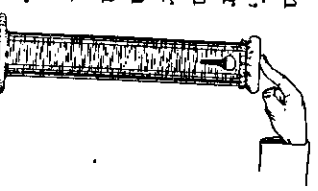


Fig. 409. Gartestaatische Taucher.

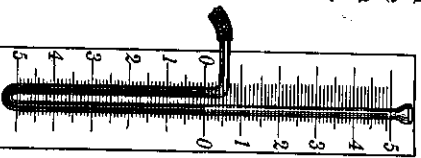


Fig. 410. Offenes Manometer.

1) Hero von Alexandrien (um 100 v. Chr.) beschreibt in zahlreichen Schriften viele Apparate seiner Zeit, doch ist vom Heronshalle nirgendwo die Rede.

2) René Descartes, mit lateinischem Namen Cartesius (1596 bis 1650), französischer Philosoph und Mathematiker.

3) Manó's (Gr.) = dünn.



einer Flüssigkeit gefüllten U-Rohre verbunden ist. Man muß den Flüssigkeitsstand in beiden Schenkeln des Rohres ablesen und diese beiden Angaben addieren. Für kleine Drucke wendet man zur Füllung Wasser an, für größere Drucke wird der Apparat mit Quecksilber gefüllt.

Bei dem in Fig. 411 abgebildeten geschlossenen Manometer wird die in dem U-Rohre enthaltene Flüssigkeit durch den Gasdruck ebenfalls zum Teile in den rechts liegenden Schenkel des Rohres getrieben. Dieser Schenkel ist aber geschlossen; er enthält Luft von gewöhnlichem Atmosphärendrucke. Die Luft wird zusammengedrückt, und an dem Maße der Raumverringerng kann man die Größe des Druckes ablesen. Wenn z. B. die Luft um die Hälfte zusammengedrückt ist, so steht sie, also auch das Gas in dem an das Manometer angeschlossenen Behälter, unter dem Drucke von 2 Atmosphären. Die Verringerung auf  $\frac{1}{2}$  der ursprünglichen Länge zeigt einen Druck von 3 Atmosphären an. Das geschlossene Manometer kann für hohe Drucke verwendet werden. Naturgemäß stehen die Angaben für hohe Drucke sehr dicht beieinander.

Die Metallmanometer, die vorwiegend zur Messung hoher Drucke, z. B. des Dampfdruckes in einem Dampfkessel, benutzt werden, sind ähnlich eingerichtet wie die Metallbarometer (§ 102). Die Angaben des Zeigers bedeuten entweder Atmosphären oder den als Höhe einer Quecksilbersäule ausgedrückten Überdruck. Unter Überdruck versteht man den Betrag, um den der Druck größer ist als der gewöhnliche Atmosphärendruck.

Manometer, mit denen man den Druck eines Gases mißt, wenn er geringer als der gewöhnliche Atmosphärendruck ist, werden auch wohl Vakuummeter<sup>1)</sup> genannt.

Zur Messung sehr geringer Gasdrucke, wie sie z. B. im Innern der Geißlerschen Röhren und der Röntgen-Röhren vorkommen, benutzt man das Vakuummeter nach MacLeod, das in einer ihm von Gaede gegebenen Form in Fig. 412 u. 413 abgebildet ist.

Das Vakuummeter wird mit dem Rohre  $a$  an den Raum angeschlossen, dessen Gasdruck gemessen werden soll. Die Form des mehrfach verzweigten Rohres geht aus der Figur genügend hervor.  $M$  ist ein oben geschlossenes, mit Quecksilber gefülltes Rohr, ein sogenanntes abgekürztes Barometer. Wenn das Rohr  $a$  mit einem nahezu luftleeren Gefäße verbunden ist, so steht das Quecksilber in den beiden Schenkeln des abgekürzten Barometers nahezu gleich hoch, so wie es Fig. 413 andeutet.

Die Rohrverzweigung bei  $K_2$  besteht aus einem engen Kapillarrohre, dessen Weite gleich der des rechts daneben liegenden, oben geschlossenen Rohres  $K_1$  ist.  $K_1$  ist eine oben geschlossene Kapillare, an die unten eine Kugel  $H$  angeblasen ist. Unterhalb dieser Kugel schließen sich das von  $a$  kommende Rohr und ein nach unten gehendes enges Rohr  $x$  an, das durch

<sup>1)</sup> vacuum (lat.) = das Leere.

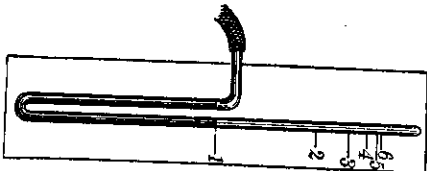


Fig. 411.  
Geschlossenes  
Manometer.

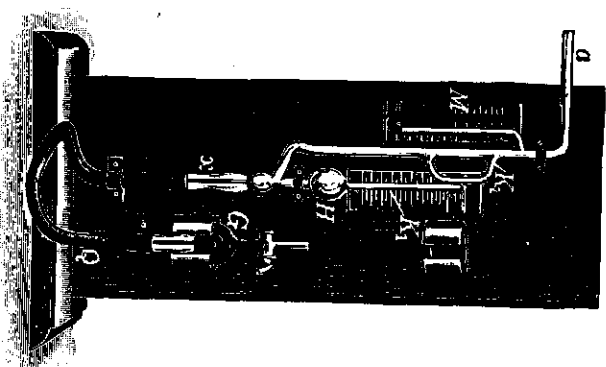


Fig. 412.  
Mac Leodsches Vakuummeter in der Ausführung nach Gaede.

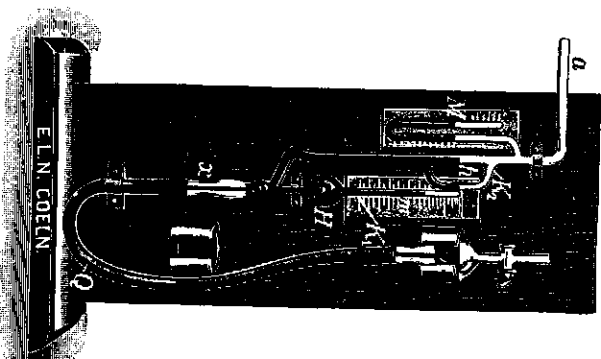


Fig. 413.

gefüllte Kugel  $G$  auf die obere Konsole gehoben. Dadurch nimmt die Oberfläche des Quecksilbers in den einzelnen Rohrschenkeln die in Fig. 413 andeuteten Stellungen an. Der in der Kugel  $H$  befindliche Luftrest wird durch das aufsteigende Quecksilber von der übrigen Luft abgeschnitten und zusammengedrückt. An dem kleinen Maßstabe kann man ablesen, wie groß der durch den Höhenunterschied in den beiden nebeneinanderliegenden Kapillarrohren bestimmte Druck der zusammengedrückten Luft ist.

Kennt man nun noch das Verhältnis des Rauminhaltes der Kugel  $H$  zu dem Innenraume der Kapillaren  $K_1$ , so kann man hieraus nach dem Boyleschen Gesetze berechnen, wie groß der Luftdruck in dem ganzen Apparate vor der Hebung des Gefäßes  $G$  war. Die bei  $m$  angebrachte Teilung ist nun gleich so angeführt, daß man den eigentlich erst durch Umrechnung zu bestimmenden Druck unmittelbar ablesen kann.

Mit dem Mac Leodschen Vakuummeter kann man noch Drucke messen, die kleiner als ein Millontel Millimeter Quecksilber sind.

einen starkwandigen Gummischlauch mit der mit Quecksilber gefüllten Kugel  $G$  verbunden ist.

Wenn die Kugel  $G$  auf der unteren kleinen Konsole hängt, so wie in Fig. 412, so wird der ganze Glaskörper von Quecksilber geleert und mit Luft von demselben Drucke angefüllt, wie sie der mit  $a$  verbundene Raum enthält, dessen Innendruck gemessen werden soll. Dann wird die mit Quecksilber

### § 109. Ausströmungsgeschwindigkeit von Gasen.

Strömt Gas unter dem Drucke  $p$  aus einer kleinen Öffnung aus, so läßt sich auf Grund einer ähnlichen Betrachtung wie in § 97 S. 287 ff. die Ausflußgeschwindigkeit  $v$  berechnen. Es rühre der Druck her von einer Flüssigkeitssäule der Höhe  $h$ , so wird für jedes ausströmende Kubikzentimeter Gas ein Kubikzentimeter Flüssigkeit die Druckhöhe  $h$  einbüßen. Sind  $\rho$  und  $s$  die Dichten von der Flüssigkeit bzw. Gas vom Drucke  $p$ , so ist der Verlust an potentieller Energie der Flüssigkeit gleich  $\rho gh$ , der Gewinn der Bewegungsenergie der Gasmenge gleich  $\frac{1}{2}sv^2$ . Beide müssen gleich sein, also

$$\rho gh = \frac{1}{2}sv^2$$

$\rho gh$  ist das Gewicht der Flüssigkeitssäule in Dyn von 1 qcm Querschnitt und  $h$  cm Höhe, d. h. der Druck, unter dem das Gas steht, mithin

$$v^2 = \frac{2p}{s}$$

Die Ausflußgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel aus der Gasdichte umgekehrt, der Quadratwurzel aus dem Gasdrucke direkt proportional.

Durch Vergleich der unter gleichem Drucke ausströmenden Volumina zweier Gase kann man hiernach deren Dichten aufeinander beziehen (Bunsensche Methode der Gasdichtebestimmung).

Im Zusammenhange mit dieser Erscheinung steht die später zu besprechende (§ 129) Diffusionsgeschwindigkeit von Gasen.

### § 110. Widerstand des Wassers und der Luft gegen eine bewegte Platte. Luftdrachen.

1. Zentraler Druck. In § 68 ist schon erwähnt worden, daß der Widerstand, den ein Körper im ruhenden Mittel erfährt, bei mittleren Geschwindigkeiten dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Hierbei war stillschweigend vorausgesetzt, daß der durch den Widerstand des Mittels auf diesen Körper hervorgerufene Druck zentral wirkt, daß also der Körper durch diesen Druck keine seitliche Bewegungskomponente und kein Drehmoment erfährt. Dieser einfachste Fall tritt z. B. dann ein, wenn der bewegte Körper ein Umdrehungskörper ist, dessen Umdrehungsachse mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt.

Auch eine ebene rechteckige Platte oder kreisförmige Scheibe, die sich senkrecht zu ihrer Ebene durch ein ruhendes Mittel bewegt, erfährt nur einen zentralen Druck. Dieser ändert sich in einem einfachen, senkrecht gegen die Platte wirkenden Widerstande gegen die Bewegung. Hierbei gibt die Platte einen Teil ihrer Bewegungsenergie an das umgebende Mittel ab, indem sie dieses selbst in Bewegung setzt. Die Art der Bewegung des Mittels kann man erkennen, wenn man in das Mittel kleine, schwebende Körper bringt, die an der Bewegung selbst teilnehmen (S. 206).

§ 110. Widerstand des Wassers u. der Luft gegen eine bewegte Platte. Luftdrachen 341

2. Stromlinien. Da alle Bewegungen nur Relativbewegungen sind, so treten entsprechende Erscheinungen auf, wenn man den in das Mittel eintauchenden Körper in Ruhe läßt und das Mittel gegen den Körper strömen läßt. Die Wirkung des eingetauchten Körpers besteht darin, daß die geraden Stromlinien des Mittels abgelenkt werden.

Taucht man eine ebene rechteckige Platte in strömendes Wasser, dessen Oberfläche mit leichten Körpern: Korkstaub, Bärhappsporen (Lykopodiumsamen) oder dergleichen bedeckt ist, an deren Bewegung die Bewegung des Wassers sichtbar gemacht wird, so biegen die Stromlinien in eigentümlicher Weise um diese Platte um. In Fig. 414 ist die Wirkung einer senkrecht gegen die Stromrichtung eingetauchten ebenen Platte abgebildet. Die Figur erkennt man, daß sich die Stromlinien vor der Mitte  $M$  der Platte  $PP$  nach beiden Seiten symmetrisch teilen und um die Platte herumfließen; aber sie biegen nicht etwa unmittelbar hinter der Platte wieder um, sondern sie entfernen sich zuerst noch weiter von der Platte. Es entsteht auf der Vorderseite der Platte ein senkrecht gegen sie gerichteter Druck. In den gekrümmten Teilen der Stromlinien treten nämlich wegen der Krümmung Zentrifugalspannungen  $Z$  auf. Diese können wir in je zwei Komponenten senkrecht und parallel zu der eingetauchten Platte zerlegen. Wegen der Symmetrie der Stromlinienanordnung zur Platte heben sich die der Platte parallelen Komponenten für je zwei Stromlinien auf, so daß nur die zur Platte senkrechten Druckkomponenten der Zentrifugalkräfte übrigbleiben. Der Punkt der Platte, von dem aus die einander entgegengesetzten Strömungen an der Platte ihren Ausgang nehmen, heißt der Staupunkt.

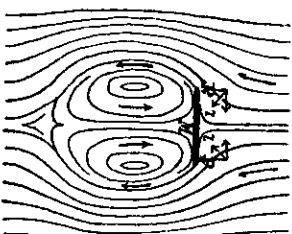


Fig. 414. Die Stromlinien einer Strömung gegen eine Platte.

3. Wirbelringe. Dürfte das Wasser als eine reibungslose, ideale Flüssigkeit betrachtet werden, und wären alle Störungen ausgeschlossen, so würde nach Helmholtz ein der Platte anhängendes, unendlich ausgedehntes „Totwasser“-gebiet aufzutreten, das von der strömenden Flüssigkeit umgeben und von ihr durch eine Unstetigkeitsfläche der Bewegung getrennt wäre. Die Unstetigkeitsfläche ist aber instabil, und es entstehen deshalb aus ihr Wirbel (Fig. 414) durch die das Totwassergebiet in ein Gebiet mit mehr oder minder unregelmäßig kreisender Bewegung verwandelt wird. So bildet sich auf der Rückseite der Platte ein „Unterdruckgebiet“ aus. Die Summe der Druckkräfte auf der Vorderseite und die Zugkräfte auf der Rückseite ergibt den Widerstandsdruck auf die Platte. Er entfällt etwa zu einem Drittel auf die Saugwirkung (Sog) der Rückseite. — Hinter der Platte löst sich von Zeit zu Zeit der Wirbelring los und wird von dem strömenden Wasser fortgeführt; an seiner alten Stelle bildet sich dann ein neuer.

4. Schräg gegen die Strömung stehende Platte. Taucht die ebene Platte schräg in das strömende Wasser ein (Fig. 415), so sind die Verhältnisse nicht mehr symmetrisch zur Platte. Die auf die Platte zustrebenden Stromlinien treten in der Nähe derjenigen Kante, die zuerst vom Wasser getroffen wird, und die wir die Oberkante nennen wollen, auseinander. Der Staupunkt, welcher bei querstehender rechteckiger Platte in deren Schwerpunkt fällt, liegt jetzt daher mehr der Oberkante zu, je schräger die Platte steht. Die Stromlinien umschlingen hinter der Platte jetzt einen unsymmetrischen Wirbelring.

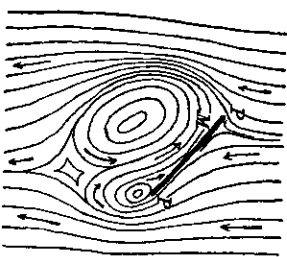


Fig. 415. Strömung und Strömungslinie bei geneigter Platte.

Während in der Gegend des Staupunktes nahe der Oberkante die Stromlinien sehr stark abgelenkt werden, kann das Wasser an der der Unterkante zunächst gelegenen Gegend ohne starke Richtungsänderung abfließen. Die Folge hiervon ist, daß sich auch die Druckwirkung des Wassers nicht mehr symmetrisch verteilt; sie ist an der Oberkante bedeutend größer als an der Unterkante. Aus diesem Grunde fällt der Angriffspunkt der Resultierenden der Druckkräfte nicht mehr mit dem geometrischen Mittelpunkt der Platte zusammen. Der Druckmittelpunkt ist gegenüber einer quer zur Strömung stehenden Platte der Mitte heraus ist um so größer, je kleiner der Winkel ist, den die Platte mit der Stromrichtung bildet.

Hieraus ergibt sich, daß eine rechteckige Platte, die um ihre Mittellinie drehbar in strömendes Wasser gesenkt wird, sich immer von selbst mit ihrer Fläche senkrecht zur Stromrichtung des Wassers zu stellen sucht. Fällt aber die Drehachse nicht mit der Mittellinie zusammen, so stellt sich die Platte unter einem ganz bestimmten Winkel ein, für den der Druckmittelpunkt in der Achse liegt.

5. Luftwiderstand gegen ebene Platten. Ähnliche Verhältnisse treten auf, wenn sich eine ebene Platte senkrecht zu ihrer Ebene in ruhender Luft bewegt, oder wenn eine ruhende Platte von senkrecht zu ihr stehenden Luftströmen getroffen wird. Auch hier entsteht auf der Vorderseite eine Druck-, auf der Hinterseite eine Saugwirkung. Beide setzen sich in jedem Punkte zu einer resultierenden Kraft zusammen. Die Summe aller solcher Kräfte über die ganze Oberfläche der Platte ist der Luftwiderstand der Platte gegen die sie bewegenden Kräfte oder die dynamische Druckkraft der bewegten Luft auf die Platte.

Für mittlere Geschwindigkeiten, etwa im Bereiche bis zu 100 m, bewährt sich für diesen Luftwiderstand bei ebenen Platten mit scharfen Kanten das früher erwähnte (S. 206) quadratische Widerstandsgesetz (Fig. 428)

$$D = k \cdot \rho \cdot F \cdot v^2$$

§ 110. Widerstand des Wassers u. der Luft gegen eine bewegte Platte. Luftwachen 343  
recht gut. Wir wollen es in der Form (S. 207)

$$D = c \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot F$$

gebrauchen und  $c$  die *Widerstandszahl* oder den *spezifischen Widerstand* der Platte nennen.

Es mögen alle in Betracht kommenden Größen in absoluten Einheiten (S. 23), also  $D$  in Dyn oder  $g \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ ,  $\rho$  in  $g \cdot \text{cm}^{-3}$ ,  $F$  in  $\text{cm}^2$  und  $v$  in  $\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$  gezählt werden. Dann stellt sich heraus, daß  $c$  eine von den gewählten Einheiten unabhängige, dimensionslose Größe ist. Geht man daher zu einem anderen „rationellen“ Maßsysteme über, so behält  $c$  ungedändert seinen Zahlenwert. In den Angaben der Technik ist es z. B. üblich,  $v$  in  $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ,  $F$  in  $\text{m}^2$ ,  $D$  in  $\text{kg}^*$  und die Masse von 9,81 kg als Einheit zu zählen, statt der Dichte  $\rho$  aber das spez. „Gewicht“ in  $\text{kg}^* \cdot \text{m}^{-3}$  anzugeben. Dann geht die Gleichung über in

$$D = \frac{c \cdot \rho \cdot v^2}{2} \cdot F,$$

worin  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$  ist. Häufig ersetzt man technisch noch in dieser Form der Gleichung  $\frac{v^2}{2g}$  durch die *Stauhöhe* (Geschwindigkeitshöhe, S. 292)  $h$ . Diese ist dann die nach dem Torricelli-Bernoullischen Satze (S. 288 u. 294) der Geschwindigkeit zugeordnete Druckhöhe des Mittels, und  $h \cdot \rho = p$  (in absoluten Einheiten  $h \cdot \rho \cdot g = p$ ) ist der *Staudruck*. Damit nimmt die Gleichung die etwas bequemere Form  $D = c \cdot F \cdot p$  an. Hierin ist noch  $F \cdot p$  das Gewicht jener Luftmenge, die den Querschnitt  $F$  belasten müßte, um nach dem Torricellischen Ausflusssatze die Geschwindigkeit  $v$  hervorzurufen.

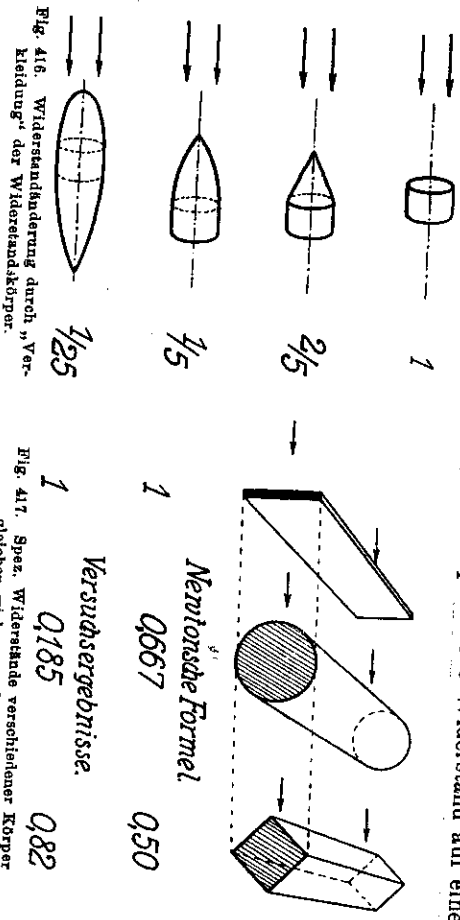
Der spezifische Widerstand  $c$  hängt zunächst von der Form, dann aber auch meist etwas von der Größe der Platte ab. Er hat in dem Gültigkeitsbereiche der Formel nach älteren Bestimmungen von Eiffel<sup>1)</sup> die ungefähren Werte: für eine quadratische Platte  $c = 1,12 - 1,26$ , für ein Rechteck mit dem Seitenverhältnisse 1 : 4  $c = 1,14$ , für eine kreisförmige Scheibe  $c = 1,08 - 1,24$  (s. dazu S. 206 u. S. 359). — Hält man die Form des quadratischen Widerstandsgesetzes auch noch für Geschwindigkeiten fest, die außerhalb seines Gültigkeitsbereiches liegen, so kann man dem dadurch Rechnung tragen, daß man die Widerstandszahl  $c$  als veränderlich mit der Geschwindigkeit  $v$  betrachtet.

6. Gewölbte Platten. Für eine gewölbte Platte, deren hohle Seite vorn ist, wird der spezifische Widerstand  $c$  größer als für eine ebene Platte; wenn dagegen die erhabene Seite vorn ist, so ist der spezifische Widerstand  $c$  kleiner als bei einer ebenen Platte. Darauf beruht die Wirkungsweise des Robynson'schen Schalenkreuzes zum Messen von Windstärken (§ 187).

1) Alexandre Gustave Eiffel, geb. 1832 in Dijon, durch Brücken- und andere Eisenbauten bekannter franz. Ingenieur. Von ihm wurde 1889 der 300 m hohe Eiffelturm auf dem Marsfelde in Paris erbaut. Die Versuche über den Luftwiderstand wurden zuerst durch Fallversuche von diesem Turme (1892 u. 1907), dann in Luftkanälen 1. auf dem Marsfelde, 2. in Autenil gewonnen.

7. Widerstandskörper. Sind die dem Luftstrome entgegenstehenden „Stirnflächen“ die Grundflächen ausgedehnter prismatischer Körper, so ist der Luftwiderstand kleiner als bei ebenen Platten gleicher Flächengröße. Besonders kleine Werte nimmt der spezifische Widerstand an, wenn die Widerstandskörper sich nach hinten verjüngen, also die sogenannte Fischform (S. 206) besitzen.

Bei beliebig gestalteten Körpern ist der spezifische Widerstand auf eine



Fläche  $F$  zu beziehen, welche die Projektion des Körpers auf eine Ebene darstellt, die senkrecht zur Stromrichtung steht.

Die allmähliche Abnahme des Widerstandes eines prismatischen Körpers durch „Verkleidungen“, die seine Gestalt in eine Fischform abändern, möge (nach Prandtl<sup>1)</sup>) Fig. 416 veranschaulichen. Durch das Aufsetzen einer scharfkantigen Spitze auf den in der obersten Reihe dargestellten zylindrischen Körper, der von einem Luftstrom in der Richtung seiner geometrischen Achse getroffen werden möge, wird der spezifische Widerstand auf  $\frac{1}{5}$  des ursprünglichen Wertes herabgedrückt; eine Spitze mit stetig gekrümmtem Umriss, so daß eine scharfe Kante vermieden wird, setzt ihn sogar auf  $\frac{1}{25}$  seines ursprünglichen Wertes herab. Wird dem Körper aber in ähnlicher Weise eine Spitze nach hinten angefügt, wobei wieder alle scharfen Kanten vermieden werden müssen, und erfolgt die Verjüngung des Körpers recht allmählich, wie in der untersten Reihe der Fig. 416 dargestellt ist, so hat der unverkleidete Körper nur mehr  $\frac{1}{5}$  des spezifischen Widerstandes, den bei Bewegung entgegengesetzt.

In welcher Weise besonders scharfe Kanten an den Umrissen des dem Flüssigkeitsstrom entgegenstehenden wirk samen Querschnittes den spezifischen Widerstand des Wassers u. der Luft gegen eine bewegte Platte. Luftdrachen 345

sehen Widerstand vergrößern, möge (nach Prandtl) noch Fig. 417 veranschaulichen.

Ein Brett, ein mit der geometrischen Achse quer zum Luftstrom stehender Zylinder und ein ebenfalls quer zum Luftstrom stehendes Prisma mit quadratischem Querschnitt, dessen eine Diagonalenrichtung in die Strömungsrichtung fällt, haben nach ausgeführten Messungen bei gleichen wirksamen Querschnitten  $F$  und mittleren Geschwindigkeiten Widerstände, die sich wie 1 : 0,185 : 0,82 verhalten. Also auch hier ist der Widerstand am Zylinder, der dem Luftstrom keine scharfe Kante darbietet, um die er herumfließen müßte, bei weitem am kleinsten.

Das Ergebnis der Messungen ist auch aus dem Grunde besonders bemerkenswert, als nach den Überlegungen, die ursprünglich zur Aufstellung der Newton'schen quadratischen Widerstandsformel geführt haben (S. 202), sich die Widerstände für alle Geschwindigkeiten wie 1 :  $\frac{2}{3}$  :  $\frac{1}{3}$  verhalten müßten. Die Newton'sche Theorie des Widerstandes stellt also die in Wirklichkeit vorliegenden spezifischen Widerstände auch nicht annähernd richtig dar.

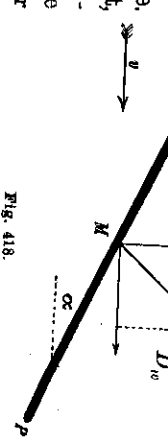


Fig. 418.

8. Geneigte Platten im Luftstrom. Strömt die Luft, die wir uns in wagerechter Richtung bewegt denken wollen (Fig. 418), gegen eine Platte, die gegen die Windrichtung unter einem Winkel  $\alpha$  geneigt ist, so steht die an der Platte angreifende dynamische Kraft  $D$  nicht mehr senkrecht zur Platte. Sie kann in zwei Komponenten  $D_a$  und  $D_w$  zerlegt werden, deren erstere, der Auftrieb, senkrecht nach oben gerichtet ist, und deren andere, der Rücktrieb oder der Widerstand schlechtbin, die Richtung der Windbewegung hat. Das Verhältnis dieser beiden Komponenten zueinander hängt in verwickelter Weise von dem Anstellwinkel  $\alpha$  ab. Für die beiden Komponenten gilt dann

$$D_a = c_a \cdot \frac{\rho^2 \cdot e}{2} \cdot F \quad \text{und} \quad D_w = c_w \cdot \frac{\rho^2 \cdot e}{2} \cdot F.$$

$c_a$  und  $c_w$  sind die (dimensionslosen) Auftriebs- und Widerstandszahlen, die durch geeignete Messungen als Funktionen des Winkels  $\alpha$  bestimmt werden können. Die Ergebnisse sind vom Seitenverhältnis (Länge zu Breite der Platte) stark abhängig.

Ältere Messungen der Auftriebs- und Widerstandszahlen sind wegen nicht genügend einwandfreier Versuchsbedingungen recht widerspruchsvoll. Erst in neuerer Zeit wurden zuverlässige Werte gewonnen. An solchen Messungen hat die Technik besonders in Hinsicht auf den Bau von Flugzeugen ein sehr großes Interesse. Als Tragflächen der Flugzeuge werden aber heute kaum mehr ebene Platten verwendet, sondern aus Gründen, auf die wir späterhin eingehen werden (§ 118, 5.), stärkste Krümmung nahe der Stirnseite liegt und deren Querschnitt nahe der

1) Naturwissenschaften X (1922), S. 173 u. S. 174.

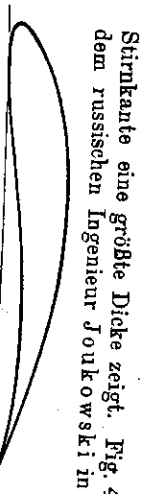


Fig. 419. Ein Joukowski-Profil einer Flügelfläche.

Stirnkannte eine größte Dicke zeigt. Fig. 419 möge das Profil einer solchen von dem russischen Ingenieur Joukowski in die Flugzeugtechnik eingeführten Joukowski-Flächeveranschaulichen. Derartige Flächen zeigen die bemerkenswerten Eigenschaften, daß sie nicht nur noch beim Anstellwinkel  $\alpha = 0^\circ$ , der hier gegen die Verbindungsschne der untersten Punkte gemessen wird, einen Auftrieb haben, sondern daß auch der Auftrieb bei kleinen negativen Anstellwinkeln bis herab zu  $\alpha = -5^\circ$  nicht verschwindet. Fig. 420 stellt (nach Prandtl) in zwei Schanlinien den spezifischen Auftrieb  $c_a$  und den spezifischen Widerstand  $c_w$  einer „unendlich breiten“ Joukowski-Fläche als Ordinaten in ihrer Abhängigkeit vom Anstellwinkel  $\alpha$  als Abszisse dar. Fig. 421 zeigt das gleiche nach Messungen an einer Fläche vom Seitenverhältnis 1 : 5 in einer anderen Darstellung. Die Widerstandszahl  $c_w$  bildet die Abszisse, die Auftriebszahl  $c_a$  die Ordinate der „Polarkurve“, in deren Punkten die zugehörigen Anstellwinkel eingetragen sind. Die angeschriebenen Zahlen sind durch 100 zu dividieren.

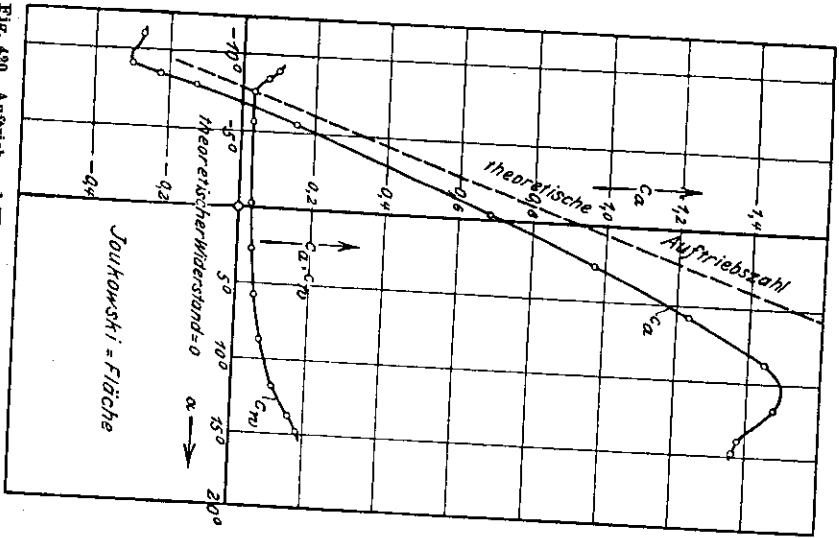


Fig. 420. Auftrieb und Widerstand abhängig vom Anstellwinkel. Die theoretische Auftriebszahl ist nach der Kutta'schen Theorie (S. 313) berechnet.

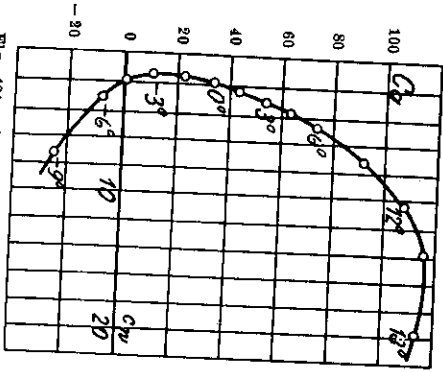


Fig. 421. „Polarkurve“, spez. Widerstand  $c_w$  und Auftrieb  $c_a$  in Abhängigkeit vom Anstellwinkel dargestellt.

9. Schweben einer Platte. Der Rücktrieb einer Platte kann dadurch unwirksam gemacht werden, daß wir die Platte unter einem gewissen Neigungswinkel längs einer lotrecht gestellten Bahn (Fig. 422) zwangsläufig führen. Das wollen wir uns so angeführt denken, daß mit der Platte im Druckmittel-

§ 110. Widerstand des Wassers u. der Luft gegen eine bewegte Platte. Luftdrachen 347 punkte eine Hülse fest verbunden ist, die längs eines lotrecht ausgespannten Drahtes verschiebbar ist. Bläst nun der Wind mit der Geschwindigkeit  $v$  waggerrecht gegen die schräg gestellte Platte, so kann nur der dynamische Auftrieb  $D_a$  zur Wirkung kommen, und die Platte würde lotrecht nach oben gehoben, wenn sie selbst kein Gewicht hätte. Hat sie aber das Gewicht  $G$ , so kann  $G \geq D_a$  sein. Im ersten Falle sinkt die Platte, im zweiten schwebt sie, im dritten steigt sie nach oben.

10. Luftdrachen. Wir können die zwangsläufige Führung der Fig. 422 auch in der Weise ausführen, daß wir im Druckmittelpunkte  $M$  (Fig. 423)

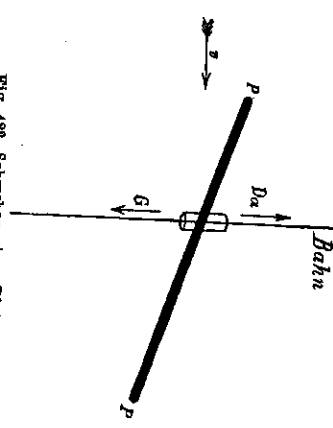


Fig. 422. Schweben einer Platte.

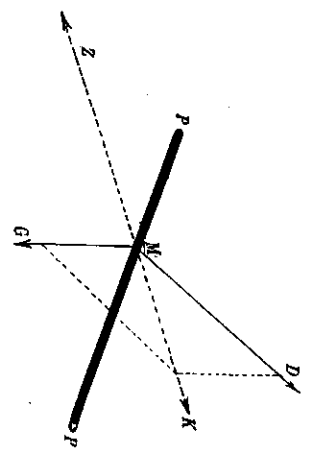


Fig. 423. Luftdrachen (schematisch).

ein Seil befestigen und an diesem einen in der Richtung  $Z$  wirkenden Zug ausüben. Wenn die Resultierende  $K$  aus dem dynamischen Drucke  $D$  und dem Gewichte  $G$  genau entgegengesetzt dem Zuge  $Z$  ist, und wenn dieser mit der Resultierenden an Größe gleich ist, so befinden sich die drei Kräfte im Gleichgewichte, und die Platte schwebt. Dieser Fall tritt beim Luftdrachen ein. Der Luftdrachen findet heute in der Form des Hargraveschen Kastendrachen (Fig. 424) vielfache Verwendung zu meteorologischen Beobachtungen. Eine möglichst leicht ausgeführte Sammlung von Instrumenten, bestehend aus einem Barographen, einem Thermographen, einem Anemometer<sup>1)</sup> und einem Hygrometer<sup>2)</sup> wird im Innern des Drachens aufgehängt. Dann läßt man den Drachen hochsteigen und kann so wichtige meteorologische Beobachtungen in großen Höhen anführen. Wenn man recht große Höhen erreichen will, werden mehrere Hargravesche Drachen hintereinander gespannt, denn der lange, haltende Stahldraht hat ein nicht unbedeutendes Gewicht. Dieses Gewicht wird dann von den unteren Drachen getragen.

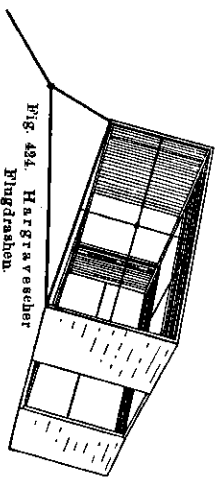


Fig. 424. Hargravescher Flugdrachen.

1) Siehe § 137.

2) Siehe § 143.

## § 111. Widerstands- und Auftriebsmessungen.

Die Kenntnis der dynamischen Widerstands- und Druckkräfte bei relativer Bewegung von Luft und Körper gegeneinander ist für die verschiedensten Aufgaben der konstruierenden Technik (Winddruck auf Brücken und Hochbauten, Fahrtwiderstand von Schnellbahnen und Kraftwagen, Luftwiderstand der Geschosse, nutzbare Druckkräfte in Turbinen und Windmühlen usw.) von recht großer Bedeutung. Vor allem aber mußte sie die Grundlage für eine planmäßige Entwicklung der Flugzeuge sein. Deshalb wurden schon frühzeitig (Newton, Widerstandsmessungen in Flüssigkeiten), sorgfältiger aber erst seit den Anfängen des

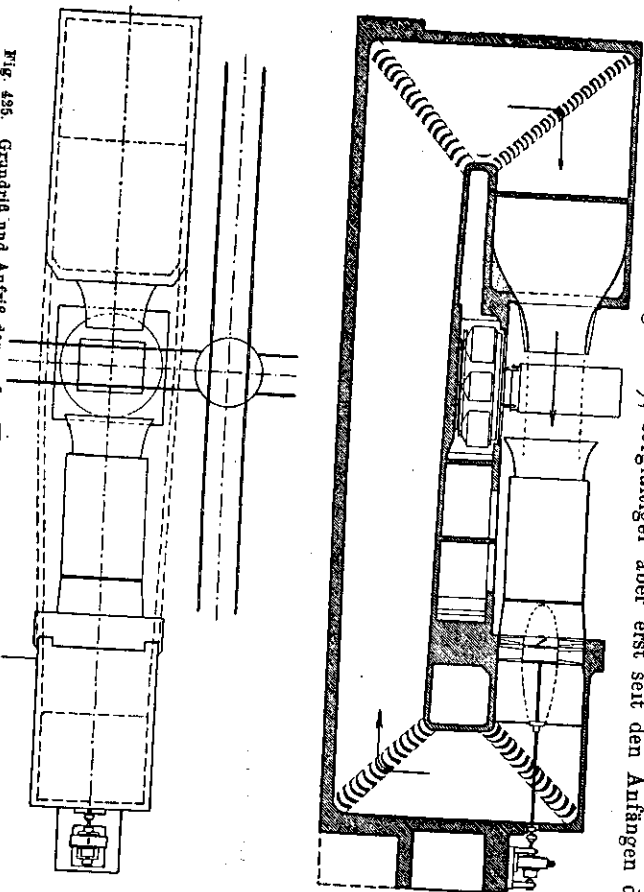


Fig. 436. Grundriß und Aufsicht der großen Windanlage der aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen.

neuzzeitlichen Flugzeugbaues Widerstands- und Auftriebsmessungen an in Luft bewegten Körpern oder an ruhenden Körpern im Luftstrom vorgenommen. Heute erst sind zur Bewältigung dieser Aufgabe wohl ausgestattete aerodynamische Laboratorien

Zur Erzielung einwandfreier Versuchsergebnisse ist bei solchen Messungen unbedingt erforderlich, „turbulente“ (S. 206 u. 351) Strömungen nach Möglichkeit auszuschalten. Die gegen die zu untersuchenden Körper strömende Luft soll vor Einbringen des Versuchskörpers in allen ihren Teilen geradlinig und gleichförmig strömen, also ganz wirbelfrei sein; wir wollen eine solche Strömung eine homogene Strömung nennen. Vielleicht die vollkommensten Einrichtungen sind zu diesem Zwecke in der von L. Prandtl<sup>1)</sup> eingerichteten aerodynamischen Versuchsan-

1) Ludwig Prandtl, geb. 1875, Prof. f. angew. Mechanik in Göttingen, Vorstand der aerodynamischen Versuchsanstalt.

## § 111. Widerstands- und Auftriebsmessungen.

anstalt in Göttingen geschaffen worden. Fig. 425 gibt den Grund- und Aufsicht der dortigen großen Windanlage. Durch einen Elektromotor — rechts in der Figur — wird eine große Luftschraube angetrieben; sie saugt die Luft von links nach rechts an und wirft sie in den Strömungskanal. Der Luftstrom wird dann viermal rechtwinklig umgelenkt, wobei sich sein Querschnitt allmählich erweitert. Er durchschneidet eine große Druckkammer. Ein System von engen parallelen Kanälen wirkt „gleichrichtend“ und unterdrückt alle turbulenten Wirbelungen. Schließlich tritt der Luftstrom — links oben in der Figur — aus einer Düse von 4 qm Querschnitt in den Versuchsraum aus. Gleich hinter dem Versuchsplatze wird die Strömung durch ein großes trichterförmiges Mundstück wieder aufgefangen und von neuem der Luftschraube zugeführt. Die Anlage gestattet (bei 300 PS. Motorleistung) eine höchste Strömungsgeschwindigkeit von  $52 \frac{m}{sec}$  zu erzeugen. (Eine

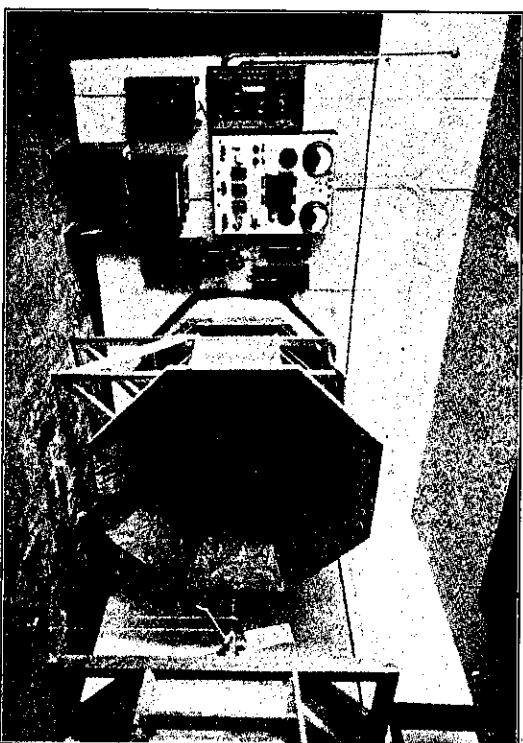


Fig. 425. Kleine Windanlage der aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen. Blick von der Düse zum Aufhängegerät.

Windstärke von  $35 \frac{m}{sec}$  wird bereits als Orkan bezeichnet!) Die Luftgeschwindigkeit kann dabei äußerst fein eingeregelt, völlig unveränderlich eingehalten und sicher gemessen werden bis herab zu einem kann mehr fühlbaren Lufthauche von  $1 \frac{m}{sec}$  Geschwindigkeit.

In einem solchen Luftstrom werden dann die zu untersuchenden Gegenstände — Platten, Körper, Flugzeugmodelle — an feinen Drähten aufgehängt. Diese Drähte greifen an Hebeln von Wagen an, die durch aufgesetzte Gewichte wieder ins Gleichgewicht gebracht werden, so daß auch die vom Luftstrom getroffenen Gegenstände zu diesem immer die gleiche Lage beibehalten. Die Ablesungen an der Waage erfolgen mehrfach, einmal, wenn nur die Aufhängedrähte ohne die zu untersuchenden Körper im Windstrom vorhanden sind, ein zweites Mal mit den aufgehängten Versuchskörpern. Der Unterschied der Ablesungen ergibt dann die

dynamischen Druckkräfte. Es sind Vorkehrungen getroffen, alle drei räumlichen Komponenten dieser Kräfte, den Rücktrieb, den Auftrieb und den seitlichen Abtrieb für sich zu bestimmen.

Fig. 426 zeigt einen Blick auf die kleinere Göttinger Anlage (mit  $1,2 \text{ m}^2$  Strahlquerschnitt) vom Versuchsplatze vor der Düse aus zum Aufsaugrichter hin. Vor der Düse rechts in der Figur befinden sich Windmühlentügel eines kleinen Modells, die an Drähten angreifen, welche an den Ablesewegen befestigt sind.

### § 112. Widerstand gegen die Trägheitskräfte und Zähigkeitswiderstand.

1. Widerstand gegen die Trägheitskräfte. Bewegt man mit der Hand ein Papststück (mit großer Geschwindigkeit) durch die Luft, so ist der Bewegungswiderstand gut fühlbar, wenn auch nicht groß. In einem außerordentlichen Maße erscheint nun der Widerstand verstärkt, wenn dasselbe Papststück durch Wasser bewegt wird. Es kann nicht zweifelhaft sein, daß die 820 mal so große Dichte des Wassers hiervon der Grund ist. In der Tat soll ja nach der Newtonschen Widerstandsgleichung (S. 206 u. S. 343) der Widerstand der Dichte proportional sein.

Das innere Wesen des Widerstandes in Newtonscher Auffassung beruht darin, daß der bewegte Körper einem gewissen Antheile des widerstehenden Mittels durch seine Bewegung Geschwindigkeit erteilt (§ 110, 1), daher die Trägheitskräfte des Mittels zu überwinden hat. Der Widerstand ist der Summe dieser Trägheitskräfte gleich. Er soll daher Widerstand gegen die Trägheitskräfte heißen. Die gegen die Trägheit von außen bei der Bewegung des Versuchskörpers aufgewandte Arbeit muß sich als kinetische Energie wiederfinden, die in dem widerstehenden Mittel nach der Bewegung des Körpers zurückbleibt. Wir rühren etwa mit einem zylindrischen Stabe in einer Flüssigkeit und ziehen den Stab heraus. Die kinetische Energie der in einer Flüssigkeit erzeugten Strömungen (des Nachlaufes S. 341) und Wirbel, welche leicht an schwimmenden Theilen fester Körper beobachtet werden können, entspricht dem gegen den Widerstand geleisteten Arbeitsaufwande.

2. Der Zähigkeitswiderstand. Wenn die Widerstände miteinander verglichen werden, die Wasser und ein sehr zähflüssiges Mittel, etwa Sirup, denselben und gleich bewegten Körpern entgegenseetzen, so entspringt der sehr viel größere Widerstand innerhalb des Sirups offenbar nicht dem Dichtemittel-Zähigkeit (S. 262) des Sirups. Die quadratische (Newtonsche) Widerstandsformel trägt dem Einflusse einer solchen Zähigkeit keine Rechnung oder beachtet aber ein jedes Mittel eine gewisse Zähigkeit. Im allgemeinen wird also der Widerstand eines Körpers in einem widerstehenden Mittel durch zwei Antheilen zusammensetzen müssen, deren einer sich von der Zähigkeit des Mittels unabhängig erweist, während der andere gerade durch die Zähigkeit bedingt ist. Dieser zweite Antheil, der Zähigkeitswiderstand, muß für „ideale“ Flüssigkeiten verschwinden.

### § 112. Widerstand gegen die Trägheitskräfte und Zähigkeitswiderstand 351

Erfahrungsmäßig ist der Widerstand in einem Mittel desto genauer der einfachen Geschwindigkeit proportional, je kleiner die Geschwindigkeit ist. In einem Geschwindigkeitsbereiche, für welches dieses lineare Geschwindigkeitsgesetz des Widerstandes gilt, ist nach Beobachtungen unter sonst gleichen Umständen der Widerstand dem Zähigkeitskoeffizienten  $\eta$  des Mittels (S. 263) proportional. In diesem Bereiche übt die Dichte des Mittels keinen Einfluß mehr auf den Widerstand aus; dieser ist von allen Trägheitswirkungen unabhängig geworden. Wir wollen die Bewegungen, für deren Geschwindigkeiten das lineare Widerstandsgesetz erfüllt ist, „schleichende“ Bewegungen (S. 207) nennen.

3. Schleichende Bewegung und Turbulenz. Bewegt sich ein Körper „schleichend“ durch ein widerstehendes Mittel, so müssen wir uns von der Art dieser Bewegung folgende Vorstellung machen: Die unmittelbar dem Körper anliegenden Flüssigkeitsteilen haften diesem Körper in einem fest mit ihm verbundenen dünnen Häutchen an (Adhäsion S. 262). Dieses Häutchen nimmt voll an der Bewegung des Körpers teil. Die diesem Häutchen anliegende Flüssigkeitsschicht bleibt nun in der Bewegung gegen das Häutchen zurück und so jede nach außen hin folgende Flüssigkeitsschicht gegen die vorhergehende. Die aufeinanderfolgenden Schichten gleiten also aneinander vorbei, ohne sich zu mischen. Aus diesem Grunde heißt diese Art der Flüssigkeitsbewegung auch wohl laminares<sup>1)</sup> Bewegung. Die Schichten haben also je einen Geschwindigkeitsunterschied gegeneinander und rufen an der dem Körper unmittelbar anliegenden Oberfläche der Flüssigkeit eine Kraft angrreifen, die nach S. 263 der Größe eines betrachteten Oberflächenelementes, dem Zähigkeitskoeffizienten und dem Geschwindigkeitsabfalle auf der Längeneinheit senkrecht zum Oberflächenelemente proportional ist. Einen gewissen kleinen Betrag an kinetischer Energie besitzt nur die Flüssigkeit in unmittelbarer Umgebung des Körpers; diese Energie wandert mit dem Körper durch die Flüssigkeit, gerade als ob seine Masse um einen gewissen kleinen Betrag vergrößert wäre. In den durchwanderten Theilen der Flüssigkeit bleibt aber keine kinetische Energie zurück; erkennbare Strömungen und Wirbel sind nicht mehr beobachtbar, wenn wir mit einem zylindrischen Stabe durch Sirup hindurchfahren sind und den Stab herausgezogen haben.

Bei einer gewissen „kritischen“ Geschwindigkeit pflegt nun dieser Bewegungszustand aufzuhören. Am besten ist nach dieser Richtung das Verhalten einer Flüssigkeit untersucht worden, die durch einen gewissen Druck durch kapillare Rohre hindurchgepreßt wird (G. Hagen 1834, O. Reynolds 1883<sup>2)</sup>). Bei kleinen Drucken ist die Geschwindigkeit dem Drucke direkt, dem Zähigkeitskoeffizienten und der Länge des Rohres umgekehrt proportional (S. 263). Die Strömung erfolgt laminaar, also so, daß koaxiale Schichten

1) lamina (lat.) = dünnes Stück („Lamelle“) aus Metall, Holz oder Gestein.

2) Osborne Reynolds, geb. 1812 in Belfast, seit 1868 Prof. der Ingenieurwissenschaften am Owens College in Manchester.

der Flüssigkeit sich aneinander vorbeischieben, ohne sich zu mischen; alle Flüssigkeitsfäden beschreiben gerade Bahnen parallel zur Achse des Rohres; dabei nimmt die Geschwindigkeit von der Wandung des Rohres nach dem Innern hin stetig und gesetzmäßig zu. Reynolds hat sich von diesem Strömungszustande dadurch überzeugen können, daß er einer bestimmten Stelle im Querschnitte der Eintrittsöffnung gefärbte Lösung zuführte. Bei fortschreitender Strömung in das Rohr hinein zog sich dann die Lösung zu einem feinen und gut beobachtbaren Faden parallel zur Achse auseinander, der sich mit der umgebenden Flüssigkeit nicht mischte.

Nach Überschreitung einer gewissen Geschwindigkeit tritt aber plötzlich Turbulenz<sup>1)</sup> (Wirbelung) ein. Sie gibt sich dadurch zu erkennen, daß bei gewöhnlicher Beleuchtung nunmehr der ganze Querschnitt des Rohres durch die Farblosung gefärbt wird. Im verdunkelten Zimmer konnte man beim Lichte elektrischer Funken die sich durcheinander verknäuelnden Wirbeläden erkennen, zu denen sich jetzt der vorher geradlinige, gefärbte Faden verwickelt hatte (Wirbelschlieren).

Die Turbulenz beginnt nie am Einlaufe in das Rohr, nähert sich ihm aber mit steigender Geschwindigkeit. Je glatter die Rohrwandung ist, bei desto höheren Geschwindigkeiten setzt sie ein. Hat bei schlechender Bewegung der aus dem Kapillarrohre austretende Wasserstrahl das Aussehen blanken Glases, so nach Eintritt der Turbulenz infolge kleiner Wellen auf der Oberfläche dasjenige gegossenen Glases. Die Durchflußgeschwindigkeit innerhalb des Rohres ist für einen größeren Teil des Querschnittes bei der turbulenten Bewegung dieselbe geworden. Bei der schlechenden (laminaren) Bewegung ist die mittlere Geschwindigkeit der Strömung dem Drucke streng proportional, oder — in anderer Ausdrucksweise — ist der Widerstand proportional der Geschwindigkeit. Bei turbulenter Bewegung in weiten Röhren ist aber mit steigender Geschwindigkeit der Widerstand wesentlich dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional.

Ist  $r$  der Halbmesser des Rohrquerschnittes,  $\eta$  der Zähigkeitskoeffizient,  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit und  $v_c$  die kritische Geschwindigkeit, bei welcher die turbulente Bewegung einsetzt, so fand O. Reynolds auf Grund vieler Versuche das von ihm theoretisch hergeleitete Gesetz

$$v_c = C \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot r}$$

Gut bestätigt. Hierin ist  $C$  eine dimensionslose Konstante, die nach neueren Bestimmungen etwa den Wert 1160 hat, wenn man für möglichst glatte Röhre und für starke Wirbelung in der Flüssigkeit vor Eintritt in das Rohr sorgt.

4. Das Widerstandsgesetz von Stokes. Auf schlechende (laminare) Bewegung bezieht sich ein Widerstandsgesetz, das ungemein wichtige Anwendungen erfahren hat. Es ist das die Gleichung von Stokes<sup>2)</sup> (1850) für den

1) turbo (lat.) = Wirbel, Wirbelwind, Kreisel.  
 2) George Gabriel Stokes (1819—1903), seit 1849 Prof. der Mathematik in Cambridge.

§ 112. Widerstand gegen die Trägheitskräfte und Zähigkeitswiderstand 353

Widerstand, den eine Kugel bei sehr langsamer Bewegung im widerstehenden Mittel erfährt. Er fand auf theoretischem Wege den Widerstand zu

$$D = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

worin  $r$  den Kugelhalbmesser bedeutet. Wirkt auf die Kugel eine Kraft  $P$ , so nimmt die Kugel eine solche Geschwindigkeit an, daß der Widerstand  $D$  der Kraft das Gleichgewicht hält. Es gilt dann  $v = \frac{P}{6\pi\eta r}$ . Diese Kraft sei insbesondere die Schwere der Kugel. Ist die Dichte der Kugel  $s$ , die des widerstehenden Mittels  $\rho$ , so gilt

$$P = \frac{4\pi r^3}{3} (s - \rho) \cdot g \quad \text{und} \quad v = \frac{2r^2(s - \rho)g}{9\eta}$$

Will man aus formalen Gründen auch für dieses Widerstandsgesetz die Form  $D = c \cdot \rho v^2 \cdot F$  beibehalten (S. 343), so ist einzusetzen

$$c = \frac{12 \cdot \eta}{r \cdot v \cdot \rho}$$

Die Widerstandszahl  $c$  erweist sich dann abhängig von der Geschwindigkeit  $v$  und der Abmessung  $r$  der Widerstandsfläche  $F = \pi r^2$ .

Die Gleichung von Stokes ist neuerdings durch Versuch mehrfach bestätigt worden. H. S. Allen (1900) stellte Untersuchungen an kleinen aufsteigenden Gasbläschen und kleinen sinkenden Kugeln an. Er fand, daß die Gleichung für in Wasser fallende Sandkörnchen ( $s = 2$ ) nur gültig ist, wenn  $r$  kleiner als 0,0085 cm bleibt. — Allen stellte bei seinen Versuchen noch fest, daß es ein Zwischengebiet zwischen dem Zähigkeitswiderstande (Bewegung in Schichten) und dem Widerstande gegen die Trägheit der turbulenten Bewegung (Bewegung in Wirbelschlieren) gibt, in dem der Widerstand proportional mit  $v^{1,5}$  zunimmt.

5. Die kinematische Zähigkeit. Erfahrungsmäßig liegt der Geschwindigkeitsbereich, für welchen das den Trägheitskräften entspringende quadratische Widerstandsgesetz gültig wird, bei desto höheren Geschwindigkeiten, je größere Zähigkeit das Mittel hat, auf welches es angewendet wird. Aus diesem Grunde ist es also für Äther schon bei kleineren Geschwindigkeiten gültig als für Wasser, und für Wasser wieder bei kleineren Geschwindigkeiten als für Glycerin usw., während wir für Sirup zu sehr hohen Geschwindigkeiten übergehen müßten, ehe es angewendet werden dürfte.

Die Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes besagt, daß in dem in Betracht kommenden Geschwindigkeitsbereiche der Widerstand wesentlich als solcher gegen die Trägheitskräfte aufzufassen ist (s. o. 1.). Je größer nun die Dichte des gerade betrachteten Mittels ist, bei desto kleineren Geschwindigkeiten wird auch die Trägheitswirkung zu überwiegender Geltung kommen müssen. Welches daher auch die allgemeine Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit sein mag, mit wachsender Geschwindigkeit muß der Gültigkeitsbereich des quadratischen Widerstandsgesetzes desto eher erreicht werden, je größer die Dichte der Flüssigkeit ist.



Vergleichen wir also die spezifischen Widerstände verschiedener Mittel untereinander, so wird die Abhängigkeit dieser Widerstandszahlen von der Geschwindigkeit für alle jene Mittel eine wesentlich gleiche sein müssen, für welche der Quotient  $v = \frac{\eta}{\rho}$  denselben Wert hat. Man nennt diesen Quotienten die **kinematische Zähigkeit** des Mittels.

Die Dichtigkeiten von Wasser und Luft verhalten sich bei 18° C. wie 0,999 : 0,00121 = 827 : 1. Die kinematischen Zähigkeiten sind hingegen für Wasser  $v = \frac{0,0106}{0,999} = 0,0106$  und für Luft  $v = \frac{0,00018}{0,00121} = 0,149$ . Die kinematische Zähigkeit von Luft ist also 14 mal so groß wie die von Wasser.

Im Gebiete des quadratischen Widerstandsgesetzes soll unter sonst gleichen Umständen der Widerstand im Wasser 827 mal so groß wie in Luft sein. Das wird durch die Erfahrung recht gut bestätigt; denn die Widerstandszahl  $c = 1,10$  für eine quadratische Platte und für Wasser (S. 343) ist neuerdings auch für Luft zum selben Werte bestimmt worden (Wieselsberger 1922).

Der Gültigkeitsbereich des quadratischen Gesetzes ist aber erfahrungsmäßig für Wasser ein anderer als für Luft. Er setzt für ein und denselben Körper in Wasser schon bei Geschwindigkeiten ein, die im Verhältnis der kinematischen Zähigkeiten, nämlich 14 mal so klein sind wie die Geschwindigkeiten, bei denen das quadratische Gesetz für Luft gültig wird. Wir wollen Geschwindigkeiten, zu denen bei veränderlicher Dichte  $\rho$  und veränderlicher Zähigkeit  $\eta$  aber unter sonst gleichen Umständen gleiche spezifische Widerstände gehören, *einander entsprechende kinematischen Zähigkeiten* nennen. Diese sind nach der angeführten Erfahrung den kinematischen Zähigkeiten proportional. *Somit muß die Abhängigkeit der Widerstandszahlen von dem Quotienten aus der Geschwindigkeit und der kinematischen Zähigkeit für alle Mittel die gleiche sein.* In mathematischer Ausdruckweise soll sich also darstellen lassen  $c = f\left(\frac{\eta}{\rho}\right)$ , und die unbekante Funktion  $f$  soll für ein und denselben Körper für alle Mittel dieselbe Funktion sein.

Der Ausdruck für die Widerstandszahl  $c$  nach dem Stokesschen Gesetze (s. o. 4.) erfüllt diese Forderung; ebenso erweist sich in der Reynoldsschen Turbulenzbedingung (s. o. 3.) der Quotient aus  $\frac{\eta}{\rho}$  für alle Mittel vom selben Werte.

6. Das Ähnlichkeitsgesetz für die Flüssigkeitsströmung. Reynoldssche Zahl. Wir haben (s. o. 5.) kennen gelernt, daß die dimensionslosen Widerstandszahlen  $c$  für zwei verschiedene Mittel dann einander gleich sind, wenn sie unter sonst gleichen Umständen auf denselben Quotienten von Geschwindigkeit und kinematischer Zähigkeit bezogen werden. Nun hängen die Widerstandszahlen  $c$  erfahrungsmäßig noch von der Gestalt und Größe des Widerstandskörpers ab. Durch Modellversuche können die Widerstandszahlen bestimmter Körper gemessen werden (§111). Es ist daher eine für die praktische

Nutzenanwendung wichtige Frage, unter welchen Umständen zwei Widerstandskörper gleicher Gestalt aber verschiedener Größe gleiche Widerstandszahlen  $c$  bedingen. Da diese Zahlen dimensionslose Größen sind, sollen sie ungenändert bleiben, wenn alle Bedingungen einander ähnlich bleiben. Was aber ist unter zwei einander „ähnlichen“ Strömungen zu verstehen? Es gehört dazu sicherlich nicht nur die geometrisch ähnliche Gestalt der Körper in beiden Fällen, sondern auch noch die Vergrößerung der Geschwindigkeit in einem gewissen Maßstabe, so daß auch die Stromlinien einander geometrisch ähnlich werden. Wie hat man nun diesen Maßstab zu bestimmen?

In einem Sonderfalle kann darauf schon eine Antwort erteilt werden. Für den Bereich der schleichenden Bewegung liefert die Stokessche Formel einen bestimmten Hinweis. Die Widerstandszahl  $c$  dieses Gesetzes kann dargestellt werden (s. o. 4.) durch

$$c = \frac{12 \cdot \eta}{r \cdot v \cdot \rho} = \frac{12}{r} \cdot \left(\frac{\eta}{\rho}\right).$$

Daraus geht hervor, daß  $c$  unverändertlich bleibt, wenn die dimensionslose Größe  $R = \frac{r \cdot v}{\eta}$  unverändertlich gehalten wird. Bei gleich bleibender kinematischer Zähigkeit  $\eta$  bleibt also die Widerstandszahl  $c$  für Kugeln ungenändert, deren Halbmesser — oder allgemeiner, deren lineare Abmessungen — sich umkehrt wie die Geschwindigkeiten verhalten.

Wie Reynolds entdeckte, darf man dieses Ergebnis verallgemeinern: *Zwei geometrisch ähnliche Körper haben unter sonst gleichen Umständen dann gleiche Widerstandszahlen, wenn sich die Geschwindigkeiten umkehrt verhalten wie irgend zwei einander entsprechende lineare Abmessungen der beiden Widerstandskörper.* In diesem Falle sind die Strömungen als einander „ähnlich“ zu betrachten.

Diese Erkenntnis wollen wir noch mit der anderen vereinigen, daß unter sonst gleichen Umständen auch gleiche Quotienten aus Geschwindigkeit und kinematischer Zähigkeit gleiche Widerstandszahlen bedingen. Bezeichnet daher  $d$  die veränderliche Länge einer entsprechend liegenden Abmessung in einer Reihe einander geometrisch ähnlicher Körper,  $v$  die veränderliche Geschwindigkeit, mit der diese Körper bewegt werden, und  $\eta$  die veränderliche kinematische Zähigkeit, so sind die Widerstandszahlen  $c$  für alle Geschwindigkeiten  $v$  dieselben, die mit  $d$  und  $v$  einen Ausdruck  $R = \frac{d \cdot v}{\eta}$  gleichen Zahlenwertes ergeben. In mathematischer Ausdrucksweise heißt das: Es muß sich die Widerstandszahl  $c$  für einander geometrisch ähnliche Körperformen durch dieselbe Funktion  $f$  des Argumentes  $R = \frac{d \cdot v}{\eta}$  ausdrücken lassen, also

$$c = f\left(\frac{d \cdot v}{\eta}\right) \text{ sein.}$$

Man nennt  $R$  die Reynoldssche Zahl und nennt Strömungen, die zu gleichen Reynoldsschen Zahlen gehören, einander ähnliche Strömungen. Das Ähnlichkeitsgesetz der Strömungen kann also so ausgesprochen werden: Bei geometrisch ähnlichen Widerstandskörpern sind

Strömungen als einander ähnlich anzusehen, die zu gleichen Reynoldsschen Zahlen gehören.

Mit Hilfe dieses Begriffes läßt sich auch das Ergebnis, das Reynolds für die kritische Geschwindigkeit des Eintritts der turbulenten Strömung gefunden hat (s. o. 3.), in dem einfachen Satze ausdrücken: Die Strömung in Röhren wird turbulent, wenn die auf den Röhrenabmesser bezogene Reynoldssche Zahl  $R = 1160$  überschritten wird. — Die Turbulenz tritt also für einander ähnliche Strömungen ein.

Der Satz von der Ähnlichkeit hat sich in der Erfahrung recht gut bewährt und ist von großer praktischer Bedeutung. Mit seiner Hilfe können widerstehendem Mittel angestellt hat, ohne weiteres auf Luft übertragen werden, wenn man nur zu dem gefundenen spezifischen Widerstande mit Hilfe der gleichen Reynoldsschen Zahl die zugehörige Geschwindigkeit für Luft aufsucht.

Hierbei muß allerdings noch vorausgesetzt werden, daß in Luft nicht allzu große Geschwindigkeiten auftreten. Denn es soll die Luft immer noch als eine Flüssigkeit von wesentlich unveränderlicher Dichte (als inkompressibel) betrachtet werden dürfen. Das trifft für alle Fragen der Flug- oder Winddrucktechnik ohne weiteres zu, gilt aber nicht mehr, wenn es sich, wie bei den Geschossen, um Geschwindigkeiten handelt, die mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar werden. In diesem Falle hängen die Widerstände von den Dichtänderungen in der Luft und deren Ausbreitung in hohem Maße ab.

§ 113. Neuere Messungen über die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit.

In Fig. 427 ist als Schaulinie die Änderung der Widerstandszahl  $c$  mit der Geschwindigkeit dargestellt, wie sie sich nach Messungen von Wieselsberger (1921) in der Göttinger aerodynamischen Versuchsanstalt für Zylinder ergeben hat, deren geometrische Achse quer zum Luftstrom stand. Der obere Linienzug bezieht sich auf unendlich lange Zylinder, der untere auf Zylinder, deren Durchmesser zur Höhe im Verhältnis 1:5 stand. Die Abszissen der Kurvenpunkte sind die von links nach rechts wachsenden Reynoldsschen Zahlen  $R = \frac{v \cdot d}{\nu}$  (§ 112, 6.), die Ordinaten die zugehörigen, von unten nach oben wachsenden Widerstandszahlen  $c$  (§ 110, 5.). Die Luftgeschwindigkeit wurde in der Versuchreihe von  $1,55 \frac{m}{sec}$  bis zu  $35,5 \frac{m}{sec}$  geändert; die Zylinderdurchmesser  $d$  wurden für den sehr langen Zylinder aus dem Wertgebiete von  $0,05$  mm bis  $300$  mm, für den kürzeren von  $4$  mm bis  $300$  mm gewählt. Da alle Messungen sich auf Luftstrom beziehen, ist die kinematische Zähigkeit dieser Versuchreihen unveränderlich. Die Reynoldsschen Zahlen ändern sich bei dem sehr langen Zylinder von  $R = 4,2$  bis  $R = 800\,000$ , für den kurzen von etwa  $400$  bis etwa  $700\,000$ . Um die Abhängigkeit der Widerstandszahl in diesen außerordentlich weiten Änderungserreichen auch für

§ 113. Neuere Mess. über die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit 357

kleine Reynoldssche Zahlen gut zur Anschauung zu bringen, ist der Schaulinien Darstellung nicht ein gewöhnliches Koordinatensystem zugrunde gelegt worden, sondern es werden sog. logarithmische Koordinaten angewendet. Für gleiche Streckenannahmen der Abszissen und Ordinaten schreiben also in der Kurvendarstellung die Reynoldsschen Zahlen und Widerstandszahlen nicht in gleichen Unterschiedswerten nach Art einer arithmetischen Reihe fort, sondern in gleichen Verhältnissen ihrer Werte nach Art einer geometrischen

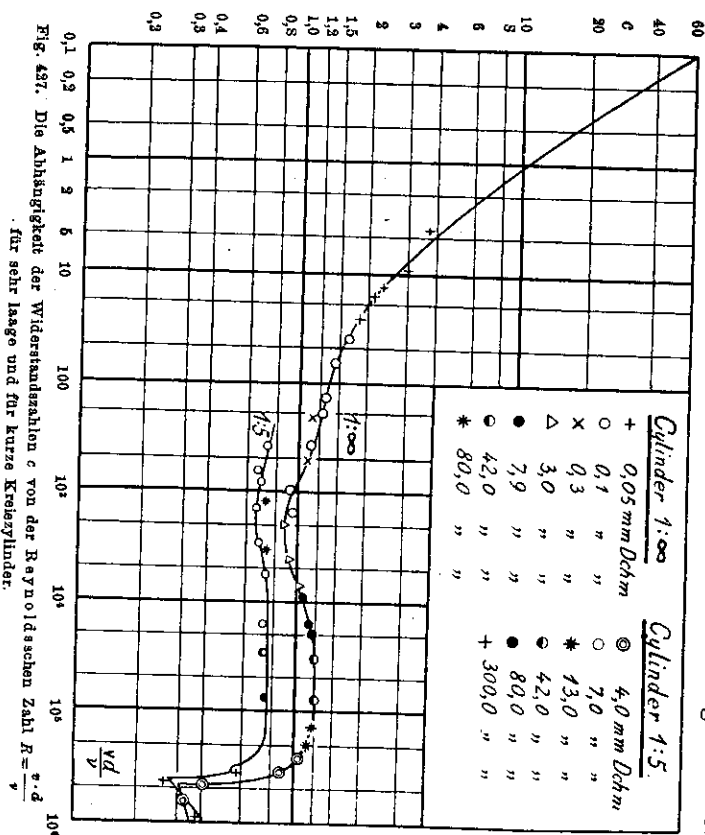


Fig. 427. Die Abhängigkeit der Widerstandszahlen  $c$  von der Reynoldsschen Zahl  $R = \frac{v \cdot d}{\nu}$  für sehr lange und für kurze Kreiszylinder.

Reihe. Die Reynoldsschen Zahlen 10, 100, 1000 usw. haben danach die doppelte, dreifache, vierfache usw. Abszisse, von der Reynoldsschen Zahl 0,1 als Anfang ab gerechnet, wie die Abszisse der Reynoldsschen Zahl 1.

Ein erstes in die Augen fallendes Ergebnis der Darstellung ist dieses, daß die  $c$ -Werte für alle Reynoldsschen Zahlen, auch wenn diese sich auf verschieden dicke Zylinder beziehen, sich auf dem gleichen Kurvenzuge liegen. Damit ist der experimentelle Nachweis für die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes der Strömung geliefert, soweit es von geometrisch ähnlichen Körpern handelt.

Ein zweites wichtiges Ergebnis folgt aus den Kurvenbildern: Für den unendlich langen Zylinder ist das quadratische Widerstandsgesetz nur von  $R = 15\,000$  bis  $R = 180\,000$  ziemlich gut erfüllt; denn die Widerstandszahl  $c = 1,2$  ist in diesem Gebiete unabhängig von  $R$ . Für den kurzen Zylinder

sind die Widerstandszahlen erheblich kleiner. Der Gültigkeitsbereich des quadratischen Widerstandsgesetzes ist ausgedehnter, dieses Gesetz aber nicht so gut erfüllt wie beim ersten Zylinder.

Im Übergangsgebiete von der schleichenden (laminaren) Bewegung zu dem Gebiete des quadratischen Widerstandsgesetzes fällt die Widerstandszahl mit wachsenden Reynoldsschen Zahlen stark ab, sogar unter den für das

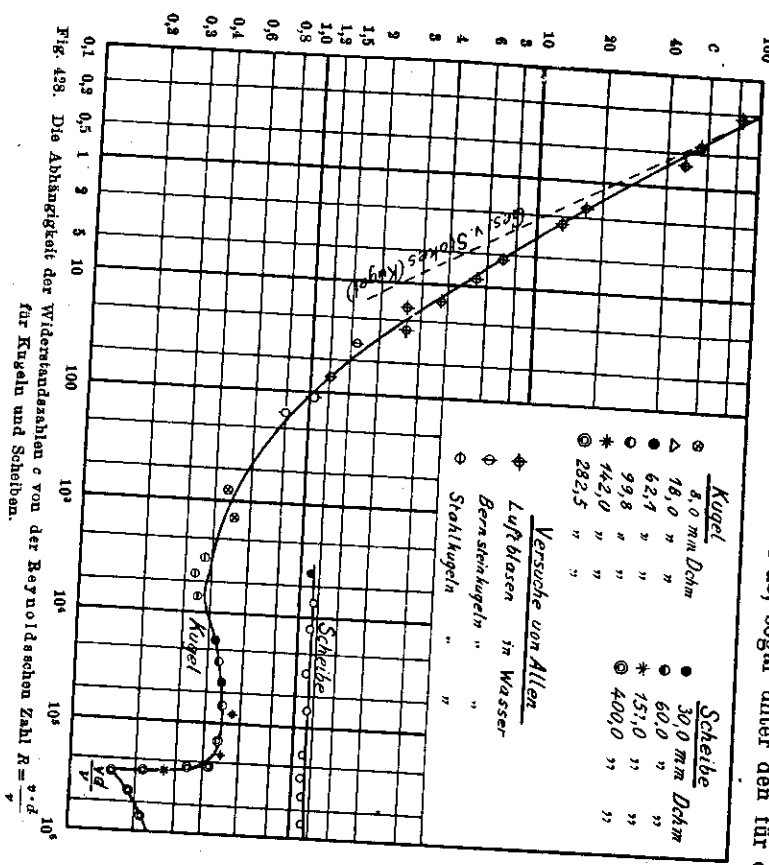


Fig. 428. Die Abhängigkeit der Widerstandszahlen c von der Reynoldsschen Zahl  $R = \frac{c \cdot d}{\nu}$  für Kugeln und Scheiben.

quadratische Widerstandsgesetz gültigen Wert. Ein Abfall, und zwar ein sehr steiler tritt nochmals für Reynoldssche Zahlen ein, die größer als 180 000 sind. Bei dieser „kritischen“ Reynoldsschen Zahl (§ 112, 3) strebt der spezifische Widerstand beider Zylinder einem sehr tief liegenden Minimum vom Werte c etwa 0,3 zu, um von da an mit steigender Geschwindigkeit wieder zu wachsen.

Fig. 428 zeigt Messungsergebnisse, die Wieselsberger (1922) in ähnlicher Weise mit Kugeln und mit kreisförmigen Scheiben erhalten hat. R Darstellung würden die Versuche von Allen (§ 112, 4) mit eingetragen. Trotz dem diese sich auf wirkliche Flüssigkeiten als widerstehende Mittel beziehen, fallen die zugehörigen Kurvenpunkte gut in die sonst gefundene c-Kurve

hinein. Damit ist der experimentelle Beweis geliefert, daß auch das Ähnlichkeitsgesetz (§ 112, 5) in bezug auf die Veränderlichkeit der kinematischen Zähigkeit gut erfüllt ist.

Das Gesetz von Stokes (§ 112, 4) schließt sich der Meßkurve im Bereiche unterhalb  $R = 1$  gut an. Das quadratische Widerstandsgesetz erscheint für die Kugel nur auf einen sehr kleinen Geschwindigkeitsbereich in der Gegend von  $R = 10^5$  beschränkt oder kaum wirklich erfüllt. Einen plötzlichen Abfall der Widerstandszahl zu einem scharfen Minimum finden wir bei einer kritischen Reynoldsschen Zahl von etwa  $2 \cdot 10^5$ . Dann folgt ein Wiederanstieg bei größeren Reynoldsschen Zahlen in ähnlicher Weise wie an den Zylindern.

Von diesem Verhalten ist in bemerkenswerter Weise der spezifische Widerstand senkrecht vom Luftstrom getroffener kreisförmiger Scheiben ganz frei. Wir sehen ferner, daß für diese das quadratische Widerstandsgesetz mit einer Widerstandszahl  $c = 1,10$  im ganzen Meßbereiche vorzüglich erfüllt ist.

§ 114. Die Potentialströmung.

1. Das Gravitationspotential. In § 82 ff. haben wir den Begriff des Potentials von Gravitationskräften kennen gelernt. Die Verteilung der Potentialwerte im Raume bestimmt eindeutig die Gravitationskräfte. Man findet für einen bestimmten Raumpunkt den in einer gegebenen Richtung vorhandenen Anteil der Gravitationskraft auf die Masseneinheit, wenn man von dem Raumpunkte aus um ein Streckenelement  $\Delta s$  in jener Richtung fortschreitet und aus dem Unterschiede des dadurch angeordneten Potentialwertes  $V$ , gegen das Ausgangspotential  $V_1$  mit dem Streckenelemente den Quotienten bildet. Dieser Quotient  $\frac{V_1 - V_2}{\Delta s}$ , der Potentialgradient (§. 258), ist zahlenmäßig gleich der Gravitationskraft (Feldstärke S. 258) in Richtung  $\Delta s$ .

2. Das Geschwindigkeitspotential. In der Lehre von den Strömungen einer idealen Flüssigkeit hat eine besondere Art von Strömung eine bevorzugte Stellung, das ist die sogenannte Potentialströmung. Man spricht von einer solchen, wenn sich die Geschwindigkeiten der Strömung in ähnlicher Weise von einem Geschwindigkeitspotential ableiten lassen, wie das oben für die Ableitung der Gravitationskräfte aus einem Potential in die Erinnerung zurückgerufen worden ist. Das Geschwindigkeitspotential einer Strömung ist also eine für jeden Punkt der Strömung angegebene Größe  $\Phi$  der Eigenschaft, daß ihr in einer bestimmten Richtung und in einem bestimmten Punkte gebildeter Gradient  $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$  die Geschwindigkeit der Strömung in diesem Punkte und in dieser Richtung angibt. Genau wie die Gravitationskräfte auf den Flächen gleichen Gravitationspotentials senkrecht stehen (§. 259), so stehen die Stromlinien der Flüssigkeit überall senkrecht zu den Flächen unveränderlichen

Geschwindigkeitspotentiale. Je mehr sich zwei Flächen bestimmter gegebener Geschwindigkeitspotentiale  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  irgendwo einander nahe kommen, desto größer ist an diesen Orten die Geschwindigkeit der Strömung. — Die Potentiale sollen nur vom Raume, nicht von der Zeit abhängen; Potentialströmungen sind also stationär (S. 290).

3. Die durch einen langen Zylinder gestörte homogene Potentialströmung. Fig. 429 möge im Querschnitte die Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit zur Anschauung bringen, die entsteht, wenn ein sehr langer Kreiszyylinder in eine ursprünglich homogene (§ 111) Strömung gebracht wird.

Von links nach rechts laufen die Stromlinien; die ursprüngliche homogene Strömung ist durch gestrichelte Gerade angedeutet. Die auf der Schar der Stromlinien senkrecht stehenden Linien in Strich-Punkt-Darstellung sind die Schnitte der Zeichenebene mit den zugehörigen Potentialflächen. (Auch in

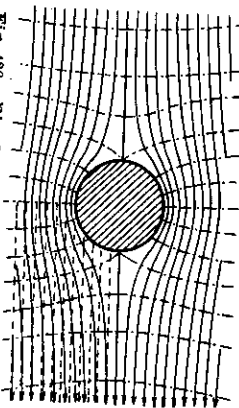


Fig. 429. Die durch einen langen Zylinder gestörte homogene Potentialströmung.

Fig. 430, 431, 435 sind die Potentiallinien durch Strich-Punkt-Kurven gekennzeichnet.) In weitem Abstände vom Zylinder werden die Potentialflächen mehr und mehr zu Ebenen, die Stromlinien zu Geraden. Ebene Potentialflächen mit den dazu senkrechten geraden Stromlinien sind die Merkmale der homogenen Strömung. Ist das Stromlinienbild eines Raumes in allen Schnitten senkrecht zu einer gewissen Richtung immer dasselbe, so heißt die Strömung eine „ebene“ Strömung. So ist die durch einen unendlich langen Zylinder — allgemeiner durch ein unendlich langes Prisma — gestörte homogene Strömung eine ebene.

4. Geschwindigkeitspotential und Druck. Die Flächen unveränderlichen Geschwindigkeitspotentials dürfen nicht mit den Flächen gleichen Druckes verwechselt werden. In einem betrachteten Punkte sei der Flüssigkeitsdruck  $p_1 = p$ , liegendes Flüssigkeitsprisma der sehr kleinen Grundfläche  $q$  und der Prismenhöhe  $\Delta s$  enthält die Masse  $q \cdot \Delta s \cdot \rho$ . Auf seine eine Grundfläche drückt die Kraft  $p \cdot q$ , auf die andere die Kraft  $-q(p + \Delta p)$ . Das Prisma erfährt daher eine beschleunigende Kraft  $-q(p + \Delta p) + q \cdot p$  in der Richtung zunehmender  $s$ . Daher ist die ihm erteilte Beschleunigung  $\frac{d^2 s}{dt^2} = -q \cdot \Delta p$  oder  $\frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta s}$ . Danach ist die Beschleunigung eines Flüssigkeitsteilchens dem Druckgradienten  $-\frac{\Delta p}{\Delta s}$  proportional. — Die letzte Gleichung kann geschrieben werden  $dv = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta s} \cdot dt$ .

Daraus folgt durch Integration von 0 bis  $t$   $v = -\frac{\Delta}{\Delta s} \left( \frac{1}{\rho} \int_0^t p dt \right)$ . Die Geschwindigkeit  $v$  der linken Seite stellt sich nunmehr als der Gradient einer Größe  $\Phi = \frac{1}{\rho} \int_0^t p dt$

dar. Diese muß daher mit dem Geschwindigkeitspotential identisch sein. — Das

Produkt aus einer Kraft  $P$  und der Zeitdauer  $t$  der Wirkung dieser Kraft war früher Impuls (S. 93) genannt worden. Daher können wir das Produkt  $p \cdot dt$  und das gesamte Integral  $\int p \cdot dt$  entsprechend als Druckimpuls bezeichnen. Das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  hat demnach die Bedeutung eines Quotienten aus demjenigen Druckimpuls, durch dessen Wirkung wir uns die Flüssigkeit aus der Ruhe auf die gerade vorhandene Geschwindigkeit  $v$  gebracht denken können, und aus der Dichte  $\rho$  der Flüssigkeit. Daraus folgt, daß alle Strömungen in einer idealen Flüssigkeit, die durch Druckwirkungen hervorgerufen worden sind, ein Geschwindigkeitspotential besitzen müssen; umgekehrt muß die Bewegung einer Potentialströmung in jedem Falle durch die Stoßwirkung eines in geeigneter Weise in der Flüssigkeit verteilten Druckes zur Ruhe gebracht werden können.

5. Das Wegintegral einer Potentialströmung. Das Produkt aus dem Streckenelemente  $AB$  (Fig. 430) und dem Geschwindigkeitsbetrage  $v_1$  der Strömung, der in die Richtung des Elementes fällt, ist festsetzungsgemäß (s. o. 2) der Potentialunterschied  $\Phi_1 - \Phi_2$  der Potentialwerte jener Potentialflächen, auf denen die Endpunkte  $A$  und  $B$  des Streckenelementes liegen. Bildet man  $AB \cdot v_1 + BC \cdot v_2 + \dots$ , worin  $v_1, v_2$  usw. die Geschwindigkeiten längs der Wegsegmente  $AB, BC$  usw. sind, und setzen sich die Streckenelemente  $AB, BC$ , usw. zu einer geschlossenen Figur zusammen, innerhalb der in allen Punkten Potentialströmung vorhanden ist — d. h. keine Potentialfläche endet —, so sind immer zwei Produkte dieser Summe einander entgegengesetzt gleich, etwa  $DE \cdot v_4 = -EF \cdot v_5$ . Die ganze Summe hat also den Wert Null. Das sprechen wir noch einmal in dem wichtigen Satze aus: Die Summe aus den Geschwindigkeit-Weg-Produkten oder das Wegintegral  $[AB \cdot v_1 + BC \cdot v_2 + \dots = \oint v ds]$  der Strömungsgeschwindigkeit verschwindet bei einer Potentialströmung, wenn die Wegstrecken der Summe (der Integrationsweg) einen geschlossenen Linienzug bilden, innerhalb dessen überall Potentialströmung vorhanden ist.

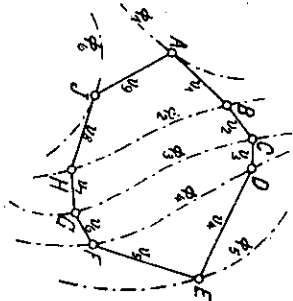


Fig. 430. Geschwindigkeit-Weg-Summe einer Potentialströmung.

Dieser Satz drückt die charakteristische Eigenschaft der Potentialströmung gegenüber anderen Strömungsarten aus. Wäre nämlich die Summe  $\Phi_1 - \Phi_2 = AB \cdot v_1 + BC \cdot v_2 + CD \cdot v_3 + DE \cdot v_4$  nicht gleich der Summe  $AJ \cdot v_5 + JH \cdot v_6 + HG \cdot v_7 + FE \cdot v_8$ , sondern änderte sich diese in jedem Falle der Wahl eines anderen Rückweges  $EFGHJA$ , so müßte man, vom Potential in  $A$  ausgehend, auf dem Wege  $AJHGF E$  jedesmal ein anderes Potential für den Punkt  $E$  finden als auf dem Wege  $ABCD E$ ; d. h. aber, das Potential in  $E$  wäre unbestimmt, eine Potentialströmung also nicht vorhanden.

6. Drehungsfreie Umlaufströmung. Ein unendlich ausgedehnter Körper werde von der Flüssigkeit so umströmt, daß alle Bahnlängen der Strömung

geschlossene Linien sind, welche den Körper in ihrem Innern enthalten. Wir wählen als Beispiel der Betrachtung einen unendlich ausgedehnten Zylinder, der auf konzentrischen kreisförmigen Linien umflossen wird. Unter welchen Umständen kann dann diese Strömung eine Potentialströmung sein?

Wir wollen zeigen, daß das der Fall ist, wenn die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  umgekehrt proportional mit dem Abstände  $r$  von der Zylinderachse abnimmt. Es soll also vorausgesetzt werden  $v = \frac{\text{const}}{r}$ , oder  $v \cdot r = \text{const}$  oder  $v \cdot r = v_0 \cdot r_0$ .

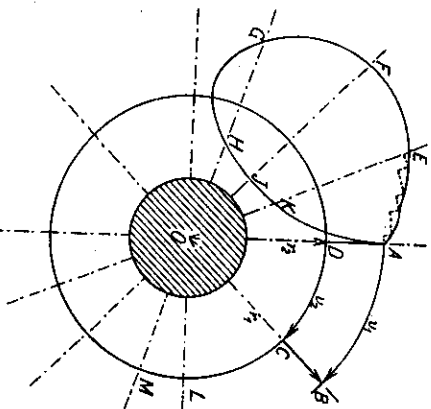


Fig. 431. Drehungsfreie Umräumung eines Zylinders.

Wir bilden (Fig. 431) die Summe der Geschwindigkeit-Weg-Produkte (das Wegintegral der Geschwindigkeit) längs eines Linienzuges  $ABCD$ , in welchem  $AB$  und  $DC$  zum Zylinder der konzentrische Kreisbögen und  $AD$  und  $BC$  zur Zylinderachse hinzielende gerade Strecken sind. Dann gilt für die Geschwindigkeit  $v_1$  längs des Bogens  $AB$  und die Geschwindigkeit  $v_2$  längs des Bogens  $DC$  nach Voraussetzung:  $v_1 : v_2 = OD : OA = r_2 : r_1$ . Ferner gilt  $AB : DC = OA : OD$ . Daraus folgt  $v_1 \cdot s_1 : v_2 \cdot s_2 = DC : AB$  oder  $v_1 \cdot AB - v_2 \cdot DC = 0$ . Da längs der Wegstrecken  $DA$  und  $BC$  die Geschwindigkeiten Null sind, so verschwindet also das ganze Geschwindigkeit-Weg-Integral längs des Linienzuges  $ABCD$ . — Das Ergebnis läßt sich verallgemeinern. Es kann gezeigt werden, daß bei der gemachten Voraussetzung für einen jeden geschlossenen Linienzug immer den Wert Null annimmt. — Die Strömung hat also ganz den Charakter einer Potentialströmung, die radialen Geraden  $AD$ ,  $BC$ ,  $EK$  usw. sind die Schnitte der Zeichenebene mit den Potentialflächen. Diese sind Ebenen eines Ebenbüschels und finden an dem Zylinder ihr Ende.

Die Summe der Geschwindigkeit-Weg-Produkte oder das Wegintegral der Geschwindigkeit verschwindet aber nicht, wenn der Linienzug den Zylinder umschlingt. Wir gehen etwa von  $D$  aus und verfolgen den Kreis über  $C$ ,  $L$ ,  $M$  usw. bis wieder nach  $D$ . Da längs des Kreises sich die Geschwindigkeit  $v_2$  nicht ändert, ist das Wegintegral  $2\pi \cdot OD \cdot v_2 = 2\pi r_2 \cdot v_2$ ; nach der gemachten Voraussetzung ist weiter  $2\pi \cdot OD \cdot v_2 = 2\pi r_2 \cdot v_2 = 2\pi r_0 \cdot v_0$ , also

1) Man ersetzt zu diesem Zwecke die beliebig gekrümmten Strecken  $AE$  usw. näherungsweise durch einen Linienzug, der abwechselnd aus kleinen konzentrischen Kreisbögen und radialen Streckenabschnitten gebildet wird, wie in Fig. 431 angedeutet ist. Für diesen geschlossenen stufenförmigen Linienzug gilt dann der Satz nach gleichen Überlegungen wie für  $ABCD$ , daher auch für den stetig gekrümmten Linienzug  $AE$  usw. als Grenzfall des anderen bei verschwindenden Bogenelementen

unabhängig von irgendeiner Konstanten der Stromlinie durch  $D$ . Somit haben alle Stromlinien denselben Wert des Wegintegrals  $Z = 2\pi r_0 v_0$ . — Das Ergebnis läßt sich verallgemeinern<sup>1)</sup> für alle irgendwie beschaffenen Summierungswege, welche den Zylinder einmal umschlingen. — Der Wert von  $Z$  heißt die Zirkulation der Strömung; er ist ein Maß für die Stärke der Umlaufströmung.

Wir wollen noch festsetzen, daß  $r_0$  der Halbmesser des Zylinderquerschnittes und  $v_0$  die Geschwindigkeit der Umlaufströmung unmittelbar am Zylindermantel sein soll. Führen wir die Winkelgeschwindigkeit  $w$  der Umlaufströmung, am Mantel gemessen, ein, so daß gilt  $w \cdot r_0 = v_0$ , so ist noch  $Z = 2\pi r_0^2 \cdot w$  oder  $Z = 2 \cdot f \cdot w$ , worin  $f = \pi r_0^2$  der Querschnitt des umströmten Zylinders ist.

Das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  einer solchen Umlaufströmung in irgendeinem Punkte ist also nicht mehr eindeutig (s. o. S.), aber es ist auch nicht vollständig unbestimmt, sondern es ist um Beträge unbestimmt, welche ganzzahlige Vielfache von der Zirkulation  $Z$  sind.

Die betrachtete Umlaufströmung heißt drehungsfrei, da während des Umlaufes die Flüssigkeitsteilchen keine Drehung ausführen. Ein sehr kleiner in der Flüssigkeit schwimmender Körper, der die Drehung der ihm anliegenden Flüssigkeitsteilchen mitemacht, würde nämlich während eines Umlaufes in bezug auf den umgehenden Raum immer dieselbe Richtungsorientierung beibehalten, während des Umlaufes also dem Zylinder nacheinander alle seine Seiten zuwenden.

Es schwimme etwa ein kreisförmiges Scheibchen (Fig. 432) sehr kleiner Ausdehnung mit dem Durchmesser  $AB = 2\varrho$  in der Flüssigkeit und es ziele in einem bestimmten Zeitpunkt dieser Durchmesser auf die Achse  $O$  des Zylinders.

Wären die Punkte des Scheibchens nicht starr miteinander verbunden, sondern wäre jeder Punkt für sich frei beweglich, dann würde durch die Bewegung mit der Flüssigkeit nach einer gewissen kleinen Zeit  $\tau$  die gegensätzliche Anordnung dieser Punkte sich gekündigt haben müssen. Denn die dem Mittelpunkt  $O$  der Umlaufströmung näher liegenden Punkte bewegen sich schneller als die ferner liegenden. Aus diesem Grunde werden auch die Punkte der Flüssigkeit, die zu Anfang der Betrachtung in der Geraden  $AO$  liegen, nach der Zeit  $\tau$  keine Gerade mehr erfüllen, sondern auf einer irgendwie gekrümmten Kurve liegen. Da das Scheibchen nun sehr klein sein soll, erfüllen die ursprünglich zwischen  $A$  und  $B$  liegenden Punkte dieser Kurve ein sehr kleines Kurvenstück  $A'B'$ , das wir als gerade Strecke behandeln dürfen. In der kleinen Zeit  $\tau$  wird der Mittelpunkt  $M$

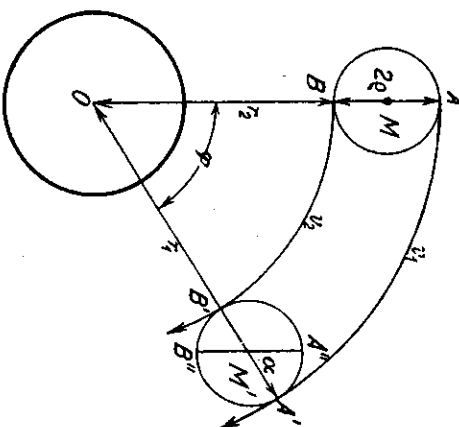


Fig. 432.

<sup>1)</sup> Nach einer ähnlichen Methode wie der in Fußn. 1), S. 362 angedeuteten.

des Durchmessers  $AB$  in die Lage  $M'$  gelangt sein, so daß der ursprüngliche Drehradius  $OM$  die Lage  $OM'$  eingenommen hat. Dieser möge die Kreise mit  $OA = r_1$  und  $OB = r_2$  um  $O$  in  $A'$  und  $B'$  schneiden; es möge weiter  $OM'$  um den Winkel  $\varphi$  gegen  $OM$  und  $A'B'$  um den Winkel  $\alpha$  gegen  $OM'$  geneigt sein. Dann gilt, wenn  $r$  klein genug genommen wird,  $BB' = B'B + B'B' = \varphi r_2 + \alpha \varphi = \varphi_2 r$  und  $AA' = AA' - A'A'' = \varphi r_1 - \alpha \varphi = \varphi_1 r$ . Daraus folgt  $(\varphi r_2 + \alpha \varphi) : (\varphi r_1 - \alpha \varphi) = \varphi_2 : \varphi_1$ ; mit der Voraussetzung  $\varphi_2 r_2 = \varphi_1 r_1$  folgt  $(\varphi r_2 + \alpha \varphi) : (\varphi r_1 - \alpha \varphi) = r_2 : r_1$  und daraus  $\varphi(r_2 + r_1) : [\varphi(r_2 - r_1) + 2\alpha\varphi] = (r_1 + r_2) : (r_1 - r_2)$ . Da noch  $2\varphi = r_1 - r_2$  ist, ergibt sich  $\varphi : (\alpha - \varphi) = 1 : 1$  oder  $\alpha = 2\varphi$ .

Die Punkte auf dem zu  $AB$  senkrechten Durchmesser (in Figur  $AB$  nicht gezeichnet) des Scheitels haben alle dieselbe Geschwindigkeit  $v_0 = \frac{\varphi(r_1 + r_2)}{2}$ , wenn wir diesen Durchmesser als mit dem Bogen mit  $OM$  um  $O$  zusammenfallend betrachten dürfen. Es bleibt daher die gegenseitige Anordnung dieser Punkte während der Umlaufbewegung ungetändert; die kurze Strecke, auf der sie liegen, bleibt immer zu  $OM$  bzw.  $OM'$  senkrecht. Es hat also in der zweiten Lage des Durchmessers in  $M'$  keine Drehung in bezug auf  $OM'$  stattgefunden.

Wenn somit die Punkte des Scheitels nicht starr miteinander verbunden wären, so wird jeder Durchmesser des Scheitels in der zweiten Lage durch  $M'$  eine andere Drehung in bezug auf  $OM'$  ausgeführt haben. Der Betrag dieser Drehung schwankt zwischen  $\alpha = 2\varphi$  und  $0$ . Nun sind aber die Punkte tatsächlich starr miteinander verbunden; daher wird jeder Durchmesser die gleiche mittlere Drehung aus allen diesen möglichen Drehungen ausführen müssen. Der beim unstarren Scheitels an meisten gedrehte Durchmesser wird beim starren Scheitels nicht gedreht weniger gedreht werden, wie der beim unstarren Scheitels gar nicht gedrehte Durchmesser beim starren tatsächlich gedreht werden muß. Das Mittel aller Drehungen ist also  $\frac{\alpha}{2} = \varphi$ . Beim starren Scheitels ist also der Durchmesser  $AB$  des Scheitels immer zu sich selbst parallel geblieben, d. h. die Bewegung ist drehungsfrei.

§ 115. Die Drehströmung.

1. Die Drehbewegung. Der zuletzt in § 114, 6. betrachtete Fall einer drehungsfreien Umströmung eines Zylinders bildet den Übergang von den Potentialströmungen zu den Drehbewegungen oder Wirbelströmungen. Denken wir uns den Durchmesser  $2r_0$  des Zylinders verschwindend klein, so wird die Zirkulation  $Z$  auch eine verschwindend kleine Größe. Wenn wir uns nun im Strömungsraume sehr viele solcher verschwindender umströmter Zylinder vorhanden denken, und wenn wir nach der Anleitung in § 114, 5. leicht-Weg-Produkten oder das Wegintegral der Geschwindigkeit bilden, so wird dieses je nach dem eingeschlagenen Wege zwischen  $A$  und  $B$  einen verschiedenen Wert annehmen müssen. Denn der Weg von  $A$  nach  $B$  und ein anderer Rückweg von  $B$  nach  $A$  wird eine gewisse Anzahl solcher umströmter

elementarer Zylinder umschließen; daher wird das Wegintegral über den geschlossenen Linienzug nicht Null sein können, sondern je nach dem Linienzuge beliebige Werte haben müssen.

Alle Strömungen, die nicht Potentialströmungen sind, gehören, wie die Umkehrung des Gedankenanges lehrt, den Drehströmungen oder Wirbelströmungen an. Der Name rührt daher, weil während der Strömung die kleinsten Flüssigkeitsteilchen zugleich noch eine Drehung ausführen.

Wird z. B. ein langer Kreiszyllinder auf Kreisbahnen nach einem anderen Abstandsgesetze der Geschwindigkeit umströmt als dem in § 114, 6 betrachteten, so verstehen sich die Flüssigkeitsteilchen nicht drehungsfrei. Wir wollen etwa annehmen, daß die Umströmung überall mit demselben Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  geschehe, so daß  $v = \omega \cdot r$  ist. Dann ist klar, daß bei einem einmaligen Umlauf ein schwimmendes Teilchen, etwa das Scheitelschen in Fig. 432, dem umströmten Zylinder immer dieselbe Seite zukehrt, somit während des Umlaufes gleichzeitig eine Umdrehung um die eigene Achse ausführt.

2. Die laminare Strömung. Es ist nicht notwendig, daß man in einer strömenden Flüssigkeit einzelne getrennte Wirbelgebiete erkennen und angeben kann, um die Strömung zu den Drehströmungen rechnen zu müssen; es genügt, als Kriterium dafür, daß das Geschwindigkeit-Weg-Integral über einen geschlossenen Weg in jedem Falle einen von Null verschiedenen Wert hat. Als Beispiel möge die laminare Strömung in einem Kapillarrohre (Fig. 433) betrachtet werden.



Fig. 433. Strömung in einem Kapillarrohre.

In der Mitte hat die Geschwindigkeit einen größten Wert  $v_{max}$ , an der Wandung ist die Geschwindigkeit Null. Wir bilden nun die Summe aus den Geschwindigkeit-Weg-Produkten längs des geschlossenen Weges: Vom Mittelpunkte  $A$  des Anfangsquerschnittes der Röhre längs der Achse bis zum Ende, dann senkrecht dazu bis zum Punkte  $C$  der Wandung, an der Wand zurück bis zum Anfang  $D$  der Röhre und von dort wieder bis zur Mitte  $A$ . Auf den drei letztgenannten Wegstrecken  $BC$ ,  $CD$  und  $DA$  ist die Geschwindigkeit in der Richtung der Wege Null. Das gesamte Wegintegral der Geschwindigkeit über den geschlossenen Weg  $ABCD A$  ist also  $\int_0^l v_{max} dx$ , wenn  $l$  die Länge der Röhre ist. In ähnlicher Weise kann für jeden anderen geschlossenen Integrationsweg ein Wert für das Wegintegral angegeben werden. — Sichtbare Wirbelungen treten in diesem Falle gar nicht auf, denn es schieben sich koaxiale Flüssigkeitsschichten überall in geradliniger Strömung aneinander vorbei. Eine so kleine Fläche aber auch innerhalb der betrachteten Strecke unser Summierungsweg umschlingen mag, immer bleibt ein angebarter Betrag der Geschwindigkeit-Weg-Summe übrig. Die Strömung verhält sich also so, als ob sie aus lauter unendlich dünnen Wirbelringen (Wirbelrädern) bestände, die die Achse konzentrisch umschlingen.

3. Vereinigte Wirbel- und Potentialströmung. Von der Wirbelströmung zur Potentialströmung ist nun folgender Übergang ohne Unstetigkeitsstellen

der Geschwindigkeitsverteilung denkbar: Innerhalb eines zylindrischen Raumes, wie er in Fig. 431 von dem festen Zylinder eingenommen wird, drehe sich eine Flüssigkeitsmenge um die Zylinderachse mit überall gleicher Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$ . Dann haben wir einen Wirbel mit einmündiger Winkelachse ist Wirbelachse. Innerhalb des Wirbelraumes ist ein Geschwindigkeitspotential nicht angebar. Der Wirbel soll nun außerhalb des zylindrischen Raumes von einer drehungsfreien Umströmung der in § 114, 6. behandelten Art umgeben sein und zwar derart, daß sie mit der Wirbelströmung an der gemeinsamen Grenze im Zylindermantel die gleiche Geschwindigkeit hat. Ist dann der Halbmesser des zylindrischen Wirbelraumes  $r_0$ , so gilt: für  $r < r_0$  ist  $v = r \omega_0$ , für  $r = r_0$  ist  $v_0 = r_0 \cdot \omega_0$  und für  $r > r_0$  ist  $v = \frac{v_0 \cdot r_0}{r} = \omega_0 \cdot \frac{r_0^2}{r}$ . Die Zirkulation  $Z = 2\pi \omega_0 r_0^2 = 2 \cdot f \cdot \omega_0$  ist dann zugleich ein Maß für die Wirbelstärke des Wirbels.

4. Wirbel in idealen Flüssigkeiten. In idealen Flüssigkeiten können Wirbel niemals verschwinden, wie Helmholtz gelehrt hat. Die an einer Wirbelbewegung beteiligte Flüssigkeit bleibt immer dieselbe, obgleich der Keit Reibung fehlt, kann sich die Wirbelbewegung nie erschöpfen. Umgekehrt kann in einer solchen Flüssigkeit ein Wirbel durch irgendwelche Druckwirkungen (§ 114, 4.) niemals entstehen. Bewegungen fester Körper durch ursprünglich wirbelfreie ideale Flüssigkeiten hindurch können daher niemals zu Wirbelbewegungen Anlaß geben; die entstehenden Strömungen können nur Potentialströmungen sein.

§ 116. Bewegung in wirklichen Flüssigkeiten.

1. Ideale und wirkliche Flüssigkeiten. Wie wir kennen gelernt haben (§ 110, 3.), treten in wirklichen Flüssigkeiten meistens Wirbelbewegungen auf, Grund kann nur in der inneren Reibung oder der Zähigkeit liegen. Der welche sich die wirkliche Flüssigkeit von der idealen unterscheidet. Unmittelbar dem festen Körper anliegend ist die Strömung längs des Körpers von laminarem Charakter und enthält daher elementare Wirbellinien (§ 115, 2.). In heute noch nicht genau bekannter Weise können unter gewissen Umständen diese elementaren Wirbelfäden sich zu größeren Wirbeln vereinigen, die dann den „turbulenten“ Bewegungszustand der Flüssigkeit (§ 112, 3.) veranlassen. Die genauere Untersuchung von ausgedehnten Wirbeln in wirklichen Flüssigkeiten hat gelehrt, daß im großen und ganzen die Wirbel in wirbelsind, wie es in § 115, 3. als ein möglicher Fall von vereiniger Wirbel- und Potentialströmung angenommen worden ist: Im Innern des Wirbels rotiert ein Flüssigkeitsfaden gewisser Ausdehnung mit derselben Winkelgeschwindigkeit seiner Teilchen, weiter außen ist diese wirkliche Wirbelbewegung von einer umlaufenden Potentialströmung umgeben.

§ 116. Bewegung in wirklichen Flüssigkeiten

2. Turbulente Strömung hinter einem Zylinder. Wir haben früher (S. 341) kennen gelernt, daß Strömungsversuche gegen Platten und andere Körper im ganzen folgenden Strömungsbild ergeben haben: Die auf den in ihren Weg gestellten Körper hinzielenden Stromlinien trennen auf der Stirnseite auseinander, um den Körper hindurchzulassen. Auf der Rückseite schließt sich im allgemeinen dem Körper ein Gebiet turbulenter Wirbelströmungen an, die „Schleppe“, die ihrerseits aber wieder von einem Gebiet „glatter“ Stromlinien umgeben ist. Fig. 434 zeigt ein Stromlinienbild der Strömung gegen einen langen Kreiszyylinder, wie er sich in einer wirklichen Flüssigkeit ergibt. Während in dem Bilde der Potentialströmung Fig. 429 die Stromlinienanordnung vor und hinter dem Zylinder ganz symmetrisch ist, ruft hier die durch die innere Reibung bedingte Turbulenz die starke Unsymmetrie hervor.

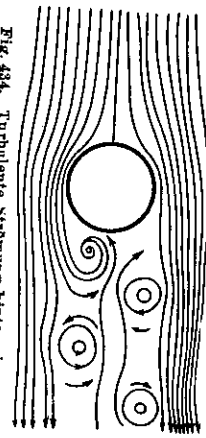


Fig. 434. Turbulente Strömung hinter einem Zylinder.

3. Stromlinienkörper. Wir haben erfahren (S. 206, 350), daß gerade die Turbulenz und Wirbelbildung den Widerstand bedingen, den ein fester Körper bei größeren Geschwindigkeiten in einer Flüssigkeit erfährt. Es liegt daher der Gedanke nahe, das Turbulenzgebiet dadurch auszuschalten, daß man bei gleicher Stirnfläche den hinteren Teil des Widerstandskörpers der Umgezung des Turbulenzgebietes anpaßt (S. 344). Das ist in der Tat möglich. Wenn alle scharfen Ecken und Kanten vermieden werden, und wenn besonders auf der Rückseite des Körpers die Krümmungen des Querschnitts ein gewisses Maß nicht übersteigen, so wird ein Turbulenzgebiet praktisch unterdrückt. Darauf beruht die große Widerstandsabnahme, die wir kennen lernten (§ 110, 7.), wenn man den wirksamen Widerstandsquerschnitt so „verkleidet“, daß der Körper die Fischform oder Tropfenform annimmt. Der ganze Umriss des Körpers wird dann außerhalb des sehr dünnen und dem Körper unmittelbar anliegenden Gebietes laminarer Strömung nahezu von Stromlinien ohne jegliche Drehströmung umflossen. Wir wollen daher einen solchen Körper Stromlinienkörper nennen.

Die Fischform, die Tropfenform, aber auch die früher erwähnte Joukowski-Fläche (S. 346) sind also solche Stromlinienkörper.

4. Stromlinienkörper und Potentialströmung. Da, abgesehen von der sehr dünnen Schicht laminarer Strömung, ein Stromlinienkörper in einer ebenen Strömung zu Wirbelgebieten keinen Anlaß gibt, so kann die Strömung in der Umgebung eines solchen Körpers nur eine Potentialströmung sein. In der Tat ist die innere Reibung der Luft und des Wassers — der Flüssigkeiten, bei denen diese Verhältnisse allein ein praktisches Interesse haben, — so gering, daß an sich für nicht zu große Strömungsgeschwindigkeiten diese innere Reibung keine merkliche Abweichung von der Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit bedingen kann, wenn sich ein Stromlinienkörper

durch diese Flüssigkeiten bewegt. Das bietet aber für die Einsicht in die Größe der dynamischen Druckkräfte eine gewisse Schwierigkeit. Es gilt nämlich für eine einfache Potentialströmung in einer idealen Flüssigkeit, wenn ebenfalls ein drehungsfreier Umlauf (§ 114, 6) ausgeschlossen ist, der merkwürdige Satz: *Bei reiner Potentialströmung (ohne Umlauf) wird von einer idealen Flüssigkeit auf einen festen Körper keine dynamische Druckkraft ausgeübt.* Eine Kugel, ein Zylinder erfahren also bei Bewegungen in einer idealen Flüssigkeit keine Widerstände; daher sollte auch für einen Stromlinienkörper in einer wirklichen Flüssigkeit der dynamische Widerstand — von dem sehr kleinen in der Schicht laminarer Strömung bedingten Widerstand abgesehen — und ebenso der dynamische Auftrieb verschwinden. Das widerspricht der Erfahrung. Daher sollen diese Verhältnisse genauer betrachtet werden.

### § 117. Stromlinien, Stromfäden und Drucke.

1. **Stromlinien und Strömungslinien.** Wird ein Körper, etwa ein Zylinder, durch eine Flüssigkeit hindurchgeführt, so kann die Bewegung der Flüssigkeit von zwei verschiedenen Standpunkten aus beschrieben werden (§ 110, 2). Entweder nämlich betrachtet man den Körper als ruhend, die gesamte Flüssigkeit also in Bewegung gegen den Körper. Dann sind die Stromlinien diejenigen Linien, deren Richtung in jedem Punkte mit der Richtung der dort befindlichen Strömungsgeschwindigkeit zusammenfällt. Die Gesamtheit aller Stromlinien in einer Flüssigkeit möge das „Stromlinienfeld“ oder das „Stromfeld“ heißen. Bei zeichnerischen Entwürfen solcher Stromlinienfelder sollen nicht beliebig viele Stromlinien gezeichnet werden, vielmehr soll die Geschwindigkeit „Eins“ ( $1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ ) im Strömungsfeld dadurch gekennzeichnet sein, daß ihr ein Abstand „Eins“ (1 cm) der Stromlinien entspricht. Experimentell kann man das photographische Bild der Stromlinienfelder um einen Widerstandskörper herum gewinnen, wenn man die Flüssigkeit mit staubfeinen Körperchen bestreut und dann eine Momentaufnahme durch eine Kamera macht, welche gleichzeitig mit dem Widerstandskörper bewegt wird, so daß sie zu diesem in relativer Ruhe ist. Jedes auf der Oberfläche schwimmende Körperchen ruft dann auf der Platte einen strichförmigen Eindruck hervor, dessen Strichlänge ein Maß der Belichtungsdauer ist. Die Gesamtheit dieser kleinen Striche setzt sich zum Stromlinienbilde zusammen.

Betrachtet man hingegen den Körper als bewegt, die Flüssigkeit im wesentlichen als ruhend, so führen die Flüssigkeitsteilchen nur jene Behindurchtreten zu lassen. Diese Bewegungen bestehen in gewissen kleinen Vertiefungen von einer Ruhelage vor Ankunft des Widerstandskörpers zu einer anderen nach seinem Vorbeigange. Die Linien, deren Richtung in jedem Punkte mit der Richtung dieser „Ausweichbewegung“ zusammenfällt,

sollen Strömungslinien<sup>1)</sup> heißen, da diese Ausweichbewegung den Begriff des „Flüssigkeitsstromes“ vermissen läßt. Das Bild der Strömungslinien kann durch photographische Aufnahmen in derselben Weise wie das Stromlinienbild gewonnen werden, wenn die Aufnahme mit relativ zur Flüssigkeit ruhender Kamera gemacht wird, während der Widerstandskörper vorbeibewegt wird. Fig. 429 stellt ein Stromlinienbild dar. Das zugehörige Strömungslinienbild ist in Fig. 435 wiedergegeben.

Strömungslinien und die Potentiallinien sind in diesem Beispiele Kreise, die durch die Achse des Zylinders gehen und deren Mittelpunkte auf zwei zueinander senkrechten Kreisdurchmessern liegen.

Das Strömungslinienbild geht somit dadurch in das Stromlinienbild über, wenn in jedem Punkte zur Flüssigkeitsströmung noch eine homogene Strömung geometrisch addiert wird. Im Stromlinienbilde erhalten zwei Anteile der Strömung Ausdruck, im Strömungslinienbilde nur der von der homogenen Strömung betrieile.

2. **Stromlinienröhren und Stromfäden.** Wird aus einer stationären (S. 290) strömenden Flüssigkeit eine Röhre ausgeschnitten, deren Wandungen von Stromlinien gebildet werden, so kann sich niemals die Flüssigkeit, der Stromfäden, innerhalb einer solchen Stromlinienröhre mit einem benachbarten Stromfaden mischen. Die Flüssigkeit muß sich daher in einer solchen Röhre gegebener Gestalt bewegen, als wenn die Röhre feste Wände hätte. Wegen der Unzusammendrückbarkeit ist die Geschwindigkeit in ihr an verschiedenen Stellen dem jeweiligen Querschnitte der Stromlinienröhre umgekehrt proportional (Kontinuitätsbedingung S. 287). In Stromlinienbildern ebener Strömungen, welche sich auf unendlich lange prismatische Widerstandskörper beziehen (S. 360), ist daher die Strömungsgeschwindigkeit dem jeweiligen Abstände zweier benachbarter Stromlinien umgekehrt proportional.

3. **Der Satz von Bernoulli im Stromfelde.** In jedem Punkte des Strömungsfeldes einer stationär strömenden Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  wird im allgemeinen ein gewisser von der Schwere unabhängiger und von Punkt zu Punkt veränderlicher Druck  $p$  vorhanden sein. Dieser kann gemessen werden durch einen von der Schwere verursachten hydrostatischen Druck der Druckhöhe  $z$  (S. 292), so daß  $p = z \cdot \rho \cdot g$  ist. Ein Flüssigkeitsteilchen des Rauminhaltes  $\Delta V$ , also der Masse  $\Delta V \cdot \rho$ , auf das ein Bodendruck der Druckhöhe  $z$

1) Stromlinien und Strömungslinien fallen im allgemeinen nicht mit den Bahnlinien der Flüssigkeit zusammen; das sind die Linien, längs deren sich die Flüssigkeitsteilchen bewegen. Doch ist bei allen stationären (S. 290), d. h. von der Zeit unabhängigen Strömungen, die Bahnlinie und Stromlinie identisch. Dazu gehören alle Potentialströmungen (§ 114, 2).

<sup>1)</sup> Grimechtl, Physik I. Große Ausgabe. S. 49ff.

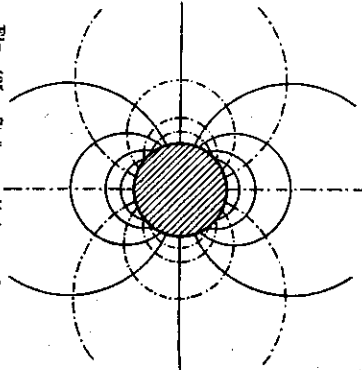


Fig. 435. Stromlinien und zugehörige Potentiallinien bei einem laugen Zylinder im homogenen Stromfelde. (Der Zylinder bewegte sich vorwärts nach links.)



angewandt wird, besitzt die potentielle Energie  $\Delta V \cdot \rho \cdot z \cdot g$  (S. 287). Hat das Teilchen noch die Ortshöhe  $h$  über einem gewissen Schwenkenniveau, so kommt dazu die von der Schwere herrührende potentielle Energie  $\Delta V \cdot \rho \cdot h \cdot g$ . Im Strömungsfelde einer Potentialströmung kann wegen mangelnder Reibung (§ 115, 4.) Energie nicht verschwinden. Daher muß die Summe aus der potentiellen Energie und der kinetischen Energie  $\Delta V \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2}$  des Flüssigkeitsteilchens bei seiner Verschiebung innerhalb des Stromfadens immer denselben Wert beibehalten. Es gilt also

$$\Delta V \cdot \rho \cdot z \cdot g + \Delta V \cdot \rho \cdot h \cdot g + \Delta V \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} = \text{const. oder, da } z = \frac{p}{\rho g} \text{ ist,}$$

$$\frac{p}{\rho \cdot g} + h + \frac{v^2}{2g} = \text{const.}$$

Bezeichnet man hierin  $\frac{v^2}{2g}$  als Geschwindigkeitshöhe (S. 292) — d. i. diejenige Höhe, die das Flüssigkeitsteilchen frei durchfallen haben müßte, um die Geschwindigkeit  $v$  zu erlangen (S. 34, 287, 292) —, so gilt also der Satz: *In allen Punkten einer Stromlinienröhre ist die Summe aus der Druckhöhe  $(z = \frac{p}{\rho \cdot g})$ , der Geschwindigkeitshöhe  $(\frac{v^2}{2g})$  und der Ortshöhe  $(h)$  unverändert vom selben Werte.* (Weniger allgemeine Fassung s. § 97, 2. 10.)

Größeren Geschwindigkeiten  $v$  entspricht also ein verminderter Druck  $p$  und umgekehrt. Verläuft insbesondere der Stromfaden wagerecht, so daß die Ortshöhe  $(h)$  unveränderlich ist, so gilt

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2},$$

worin  $p_0$  und  $v_0$  Druck und Geschwindigkeit in einem gegebenen Punkte der Stromlinienröhre — etwa im ungestörten homogenen Teile des Strömungsfeldes — bedeuten möge.

4. Die Bewegung eines Zylinders in einer idealen Flüssigkeit ist widerstandsfrei. In einer idealen Flüssigkeit ist die gegen einen sehr langen Zylinder gerichtete und durch diesen verzerrte, ursprünglich homogene Strömung eine Potentialströmung (§ 114, 2.).

In dem Staupunkte  $A$  (Fig. 436) und dem zu ihm symmetrisch liegenden Saugpunkte  $C$  ist die Geschwindigkeit der Strömung unmittelbar am Zylindermantel  $v = 0$ ; die Stromlinien treten an diesen Punkten am weitesten auseinander. Von diesen Punkten aus nimmt sie längs des Umfanges des Zylinders zu und erreicht in den Endpunkten  $B$  und  $D$  des zu  $A$   $C$  senkrechten Durchmessers größte Werte  $v_{\max} > v_0$ <sup>1)</sup>, wenn  $v_0$  die Strömungsgeschwindigkeit in sehr großer Entfernung vom Zylinder ist (oder die Geschwindigkeit, mit welcher der Zylinder

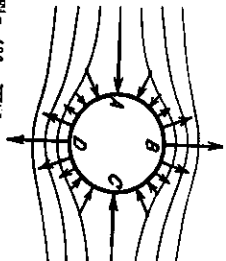


Fig. 436. Widerstandsreihe Bewegung eines Zylinders in einer idealen Flüssigkeit.

1) Die Theorie lehrt, daß  $v_{\max} = 2v_0$  ist.

durch die Flüssigkeit geführt wird). Es müssen also zwischen diesen vier Punkten solche liegen, in denen  $v = v_0$  ist. In ihnen herrscht nach dem Bernoullischen Gesetze (s. o. 3.) der Druck  $p = p_0$ . Wir wollen nun die Drucke  $P = p - p_0$  betrachten. Diese sind in der Umgebung von  $A$  und  $C$  auf den Zylinder zu, in der Umgebung von  $B$  und  $D$  vom Zylinder fort gerichtet, wie die in Fig. 436 eingezeichneten Pfeile angeben.

Diese Druckkräfte sind die einzigen Kräfte, welche an dem Zylinder angrreifen. Sie treten paarweise symmetrisch in bezug auf die Zylinderachse und zwar je in entgegengesetzter Richtung auf. Daher verschwindet die Gesamtergebnante aller dieser Druckkräfte. Der Zylinder muß sich also widerstandsfrei durch die Flüssigkeit bewegen.

5. Die widerstandsreihe Bewegung eines Stromlinienkörpers. Wenn sich die Stromlinien einem Körper anschmiegen und bei einer wirklichen Flüssig-

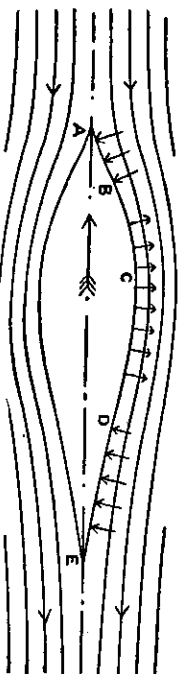


Fig. 437. Ein Stromlinienkörper bewegt sich in einer idealen Flüssigkeit widerstandsfrei.

keit von dem geringen Betrage des Widerstandes abgesehen wird, den die innere Reibung in der dünnen laminaren Schicht verursacht, so bleibt das Ergebnis der letzten Betrachtung auch für einen Körper gültig, für den nur eine Symmetrieachse vorhanden ist, die mit der Bewegungsrichtung des Körpers zusammenfallen möge. Die Drucke  $P = p - p_0$  sind auch in diesem Falle teils auf den Körper hin, zwischen  $A$  und  $B$  (Fig. 437) und  $D$  und  $E$ , teils von dem Körper fort gerichtet, zwischen  $B$  und  $C$  und  $C$  und  $D$ , weil an den erst erwähnten Bögen der Umgrenzung des Körpers die dem Körper unmittelbar anliegende Stromlinienröhre gegenüber der vom Körper ungestörten Strömung erweitert, zwischen  $B$  und  $D$  verengt ist. Die geometrische Summe aller dieser Druckkräfte verschwindet. Um das einzusehen, genügt vielleicht der Hinweis, daß die Bewegungsgröße (S. 97) der vor  $A$  in die erwähnte Stromlinienröhre einströmenden Flüssigkeit genau die gleiche Richtung und denselben Wert hat wie die hinter  $E$  austretende. Die Flüssigkeit kann also bei der Umströmung des Körperprofils von  $A$  nach  $E$  Impuls weder gewonnen noch abgegeben haben. — Da in einer idealen Flüssigkeit ein jeder Körper, welche Gestalt er auch haben mag, nur Potentialströmung hervorruft, also Stromlinienkörper ist, muß der Widerstand verschwinden.

### § 118. Die neueren Anschauungen über den dynamischen Druck und Auftrieb.

1. Das Stromlinienbild bei dynamischem Strömungsdruck. Darf die Bewegung einer wirklichen Flüssigkeit als reibungslos behandelt werden (§ 114.4), so kann die Strömung der Flüssigkeit nur eine Potentialströmung sein. Es

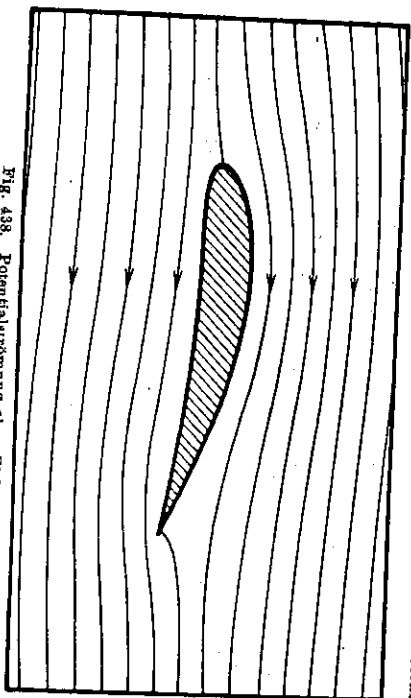


Fig. 438. Potentialströmung ohne Zirkulation.

graphisch festgelegt wurden (§ 117, 1), haben nun folgendes ergeben: Wird ein Körper von Stromlinienform, etwa eine Joukowski-Fläche,

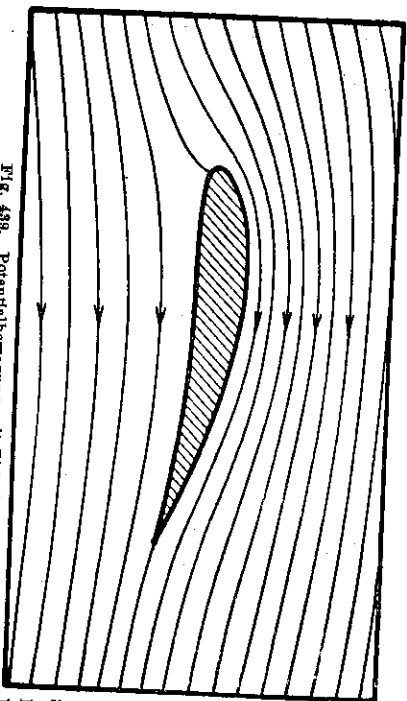


Fig. 439. Potentialbewegung mit Zirkulation.

unter einem gewissen Anstellwinkel (S. 345 u. 346) durch das Wasser hindurchbewegt, so tritt allerdings im ersten Augenblicke des Bewegungsbegines eine einfache Potentialströmung auf, wie Fig. 438 im Stromlinienbild zeigt.

Es muß daher nach § 117 scheinen, als ob ein dynamischer Druck oder ein Auftrieb einer Fläche durch die strömende Flüssigkeit nicht entstehen darf. Strömungsversuche in Wasser, bei denen sowohl das Stromlinienbild als auch das Strömungslinienbild photographisch

unter einem gewissen Anstellwinkel (S. 345 u. 346) durch das Wasser hindurchbewegt, so tritt allerdings im ersten Augenblicke des Bewegungsbegines eine einfache Potentialströmung auf, wie Fig. 438 im Stromlinienbild zeigt.

Dieser Strömungszustand bleibt aber erfahrungsmäßig nicht bestehen, vielmehr tritt an der Hinterkante sofort eine Wirbelbildung auf, die eine Umwandlung der ganzen Strömung gemäß Fig. 439 zur Folge hat. Der neue Zustand ist dadurch gekennzeichnet, daß auf der einen Seite der Fläche die Stromlinien sich zusammendrängen, auf der anderen auseinanderstreuen. Auf dieser zweiten Seite herrscht also Überdruck (S. 370), denn dem größeren Stromlinienabstände

§ 118. Die neueren Anschauungen über den dynamischen Druck und Auftrieb 373 entspricht eine kleinere Geschwindigkeit. Auf der ersten Seite mit den dichter liegenden Stromlinien herrscht Unterdruck. Das spiegelt die Tatsache wider, daß die unter einem gewissen Anstellwinkel durch die Flüssigkeit geführte Fläche eine zur Bewegungsrichtung senkrechte dynamische Kraft erfährt.

Wie nun das zugehörige Strömungslinienbild (Fig. 440) erkennen läßt, kann das sich einstellende Stromlinienbild aufgefaßt werden als hervorgerufen von einer Überlagerung der ursprünglichen Strömung nach Fig. 438 und einer drehungsfreien Zirkulationsströmung. Das Geschwindigkeitspotential dieser Umlaufströmung addiert sich in jedem Punkte zu dem der Potentialströmung nach Fig. 438; die Geschwindigkeiten der Umlaufströmung setzen sich in jedem Punkte mit denen der einfachen Potentialströmung nach Fig. 438 vektoriell zu dem Stromlinienfeld nach Fig. 439 zusammen.

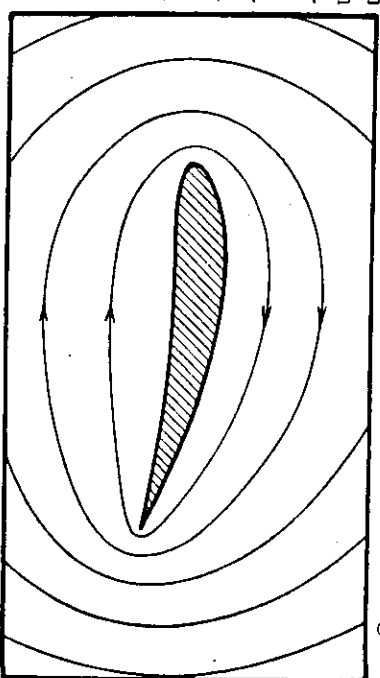


Fig. 440. Zirkulationsströmung.

2. Die an einem gedrehten und gleichzeitig fortgeführten Zylinder angreifende dynamische Druckkraft (Abtrieb). In § 115, 3. haben wir erfahren, daß die in der Natur vorkommende Bewegung großer Flüssigkeitswirbel im wesentlichen beschrieben werden kann als aus zwei Teilen bestehend, der Bewegung eines inneren Wirbelkernes konstanter Winkelgeschwindigkeit und einer diesen Kern umkreisenden Umlaufbewegung, deren Geschwindigkeit umgekehrt mit dem Abstände von der Wirbelachse wächst. Ersetzt man den Wirbelkern durch einen festen Zylinder gleicher Winkelgeschwindigkeit, so bleibt offenbar die Umlaufströmung erhalten. Wenn nun noch gleichzeitig der rotierende Zylinder geradlinig durch die Flüssigkeit hindurchgeführt wird, so muß sich das Stromlinienbild (Fig. 443) aus einer Umlaufbewegung (Fig. 441) und einer einfachen Potentialströmung (Fig. 442) zusammensetzen.

Das Stromlinienbild (Fig. 443) läßt erkennen, daß eine Kraft  $\mathfrak{P}$  senkrecht zur Strömungsrichtung das Ergebnis dieser Überlagerung sein muß.

Nach einer zuerst (1902) von Kutta<sup>1)</sup> gegebenen Lösung, die später (1910) von Joukowski verallgemeinert wurde, ist diese Kraft  $\mathfrak{P}$  für prismatische Körper von Stromlinienquerschnitt unabhängig von der besonderen Form des Querschnittes. Es gilt

$$\mathfrak{P} = \rho \cdot v_0 \cdot Z \cdot l,$$

worin  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit,  $v_0$  die Geschwindigkeit der fortschreiten-

1) W. M. Kutta, München.

den Bewegung,  $Z$  die Zirkulation des Umlaufes (§ 114, 6.) und  $l$  die Länge des Körpers ist.

3. Berechnung der Druckkraft für den rotierenden und fortschreitenden Kreiszyylinder. Wir wollen zunächst einmal die Annahme machen, das Strömungsfeld der „Kutta-Strömung“ nach Fig. 443 um den Zylinder könnte entstanden gedacht werden aus der Überlagerung einer ungestörten homogenen Strömung der Geschwindigkeit  $v_0$  und einer Umlaufströmung der Geschwindigkeit  $\frac{w \cdot r_0^2}{r}$  (§ 114, 6.). Es werde ein Punkt  $A$  (Fig. 444) im Abstände  $r$  vom Zylinder betrachtet.

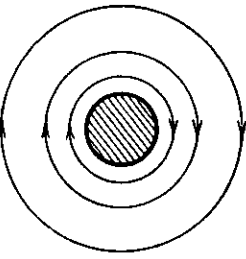


Fig. 441. Umlaufströmung.

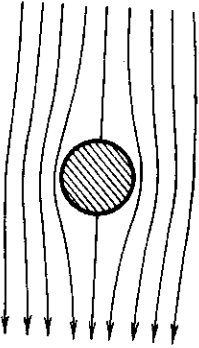


Fig. 442. Potentialströmung.

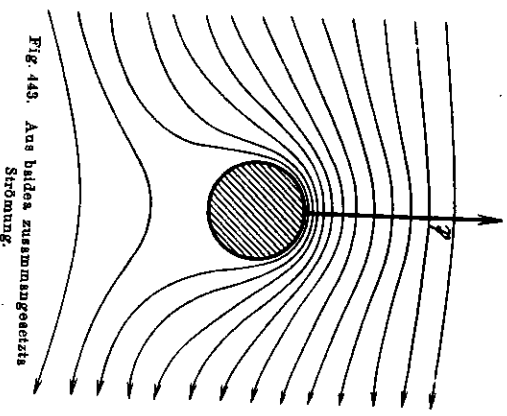


Fig. 443. Aus beiden zusammengesetzte Strömung.

Dann ist nach Fig. 444 der in der Richtung von  $v_0$  (X-Richtung) genommene Anteil der Umlaufgeschwindigkeit  $v_0 - v_x = \frac{w r_0^2}{r} \sin \alpha$  und der Anteil senkrecht dazu  $\frac{w r_0^2}{r} \cos \alpha$ . Daraus folgt

$$v_x = v_0 - \frac{w r_0^2}{r} \sin \alpha, \quad v_y = \frac{w r_0^2}{r} \cos \alpha$$

$$\text{und} \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 - \frac{2 v_0 \cdot w \cdot r_0^2}{r} \sin \alpha + \frac{w^2 r_0^4}{r^2}$$

Nach der Bernoullischen Gleichung (§ 117, 3.) ist der in  $A$  herrschende Druck

$$p = \rho \left( \frac{v_0^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right) = \rho \left( \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0 \cdot w \cdot r_0^2}{r} \sin \alpha - \frac{w^2 r_0^4}{2 r^2} \right).$$

Hält man  $r$  fest und läßt  $\alpha$  sich verändern, läßt man also  $A$  auf einem Kreise vom Radius  $r$  wandern, so ist der veränderliche Anteil dieses Druckes  $\frac{\rho \cdot v_0 \cdot w \cdot r_0^2}{r} \sin \alpha$ . Dieser veränderliche Anteil übt auf einen Streifen  $l \cdot \Delta \alpha$  eines zum gegebenen Zylinder konzentrischen Zylindermantels des Halbmessers  $r$  die Kraft aus

$$\Delta \mathfrak{P} = l \cdot r \cdot \Delta \alpha \cdot \frac{\rho \cdot v_0 \cdot w \cdot r_0^2}{r} \sin \alpha.$$

§ 118. Die neueren Anschauungen über den dynamischen Druck und Auftrieb 375

Die zu  $v_0$  parallelen und senkrechten Anteile dieser Kraft sind

$$\Delta \mathfrak{P}_x = \Delta \mathfrak{P} \cdot \cos \alpha = \frac{\rho \cdot v_0 \cdot w \cdot r_0^2 \cdot l}{2} \sin 2\alpha \cdot \Delta \alpha$$

$$\text{und} \quad \Delta \mathfrak{P}_y = \Delta \mathfrak{P} \cdot \sin \alpha = \frac{\rho \cdot v_0 \cdot w \cdot r_0^2 \cdot l}{2} \sin^3 \alpha \cdot \Delta \alpha$$

Summiert (integriert) man über alle  $\alpha$  von 0 bis  $2\pi$ , so folgt

$$\mathfrak{P}_x = 0$$

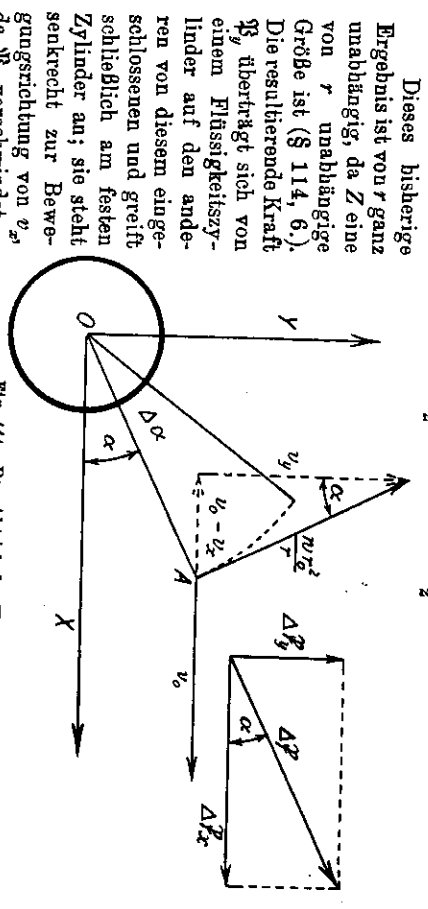
$$\mathfrak{P}_y = \frac{\rho \cdot v_0 \cdot w \cdot r_0^2 \cdot l \cdot 2\pi}{2} = \frac{\rho \cdot v_0 \cdot Z \cdot l}{2}$$


Fig. 444. Der Abtrieb der Kutta-Strömung.

Dieses bisherige Ergebnis ist von  $r$  ganz unabhängig, da  $Z$  eine von  $r$  unabhängige Größe ist (§ 114, 6.). Die resultierende Kraft  $\mathfrak{P}_y$  überträgt sich von einem Flüssigkeitszylinder auf den anderen von diesem eingeschlossenen und greift schließlich am festen Zylinder an; sie steht senkrecht zur Bewegungsrichtung von  $v_x$  da  $\mathfrak{P}_x$  verschwindet.

Das Ergebnis ist aber noch nicht vollständig. Es trägt jener Ausweichströmung nicht Rechnung, deren Strömungslinienbild in Fig. 435 wieder gegeben wurde und die bewirkt, daß in den Punkten  $B$  und  $D$  (Fig. 436) die Geschwindigkeit größer als  $v_0$  ist (§ 117, 4.). Die mathematische Physik lehrt nun bei der Behandlung ebener Potentialströmungen, daß diesen Ausweichströmungen Rechnung getrazen wird, wenn man zu  $v_x$  noch den Geschwindigkeitsanteil  $-\frac{v_0 r_0^2}{r^2} \cos 2\alpha$  und zu  $v_y$  den Anteil  $-\frac{v_0 r_0^2}{r^2} \sin 2\alpha$  hinzu addiert. Führt man damit die oben angeordnete Rechnung noch einmal durch und zwar für einen Punkt  $A$ , der auf dem Umfange des Zylindermantels wandert, so daß also  $r = r_0$  ist, so findet man den doppelten Wert wie vorher, nämlich

$$\mathfrak{P}_y = \rho \cdot v_0 \cdot Z \cdot l.$$

4. Beobachtungen zum Grundgedanken in dieser Theorie. Tennisbälle, die unterhalb der Mitte mit der Kante des Schlägers getroffen (geschnitten) werden und dadurch eine starke Rotationsbewegung um eine quer zur Flugrichtung liegende Achse erhielten, können durch die Auftriebskraft der Kuttaströmung aus ihrer normalen, parabolischen Flugbahn erheblich abgelenkt werden, wie Lord Rayleigh beobachtet hat. — Bei Schießversuchen aus glatten Geschützen wurden schon frühzeitig) zunächst unerklärliche Abweichungen von der regelmäßigen Flugbahn beobachtet.

1) Preisaufgabe der Berliner Akademie zur Erklärung dieser Abweichungen 1794.

obachtet; ist es bei einem Schießversuche durch vorgekommen, daß ein Geschloß, statt seine Bahn nach „vorn“ auszuführen, so stark nach unten und hinten abgelenkt wurde, daß es „hinten“ dem schießenden Mösser aufschlug (J. P. G. v. Heim 1840). Der Physiker Magnus<sup>1)</sup> klärte diese Erscheinungen auf (1852) und ist dadurch ein Vorgänger der neuen Erkenntnisse über die Kraftwirkung der Kutta-Strömung geworden. Bei den in Frage stehenden unregelmäßigen Flugbahnen hatten die kugelförmigen Geschosse wegen Unregelmäßigkeiten in der Gestalt und in der Lage des Schwerpunktes beim Abschlusse eine starke Drehbewegung um eine zur Flugbahn quer liegende Rotationsachse erhalten und erführen dadurch von der sie umgebenden Luftströmung ablenkende Kräfte. — Die dynamische Druckkraft der Kutta-Strömung spielt auch bei den Besonderheiten der Flugbahn des schnell rotierenden Bumerangs eine Rolle (§ 120, 5).

Ein rotierender aufgehängter Kreis, gegen den ein Luftstrom in der Richtung senkrecht zu seiner Achse geblasen wird, weicht senkrecht zum Luftstrom nach der Richtung aus, auf welcher die Richtung von Luftstrom und Drehung zusammenfällt (Magnus).

5. Entstehung der Umlaufströmung. Die Erkenntnis, daß alle Flächen, welche durch strömende Flüssigkeiten einen dynamischen Auftrieb erfahren, wie die Fläche des Papierdrachens oder die Tragflächen eines Flugzeuges, von einer Umlaufströmung umflossen werden, die sich der einfachen Potentialströmung überlagert, ist wichtig und weitreichend. Bietet sie doch z. B. die einzige Handhabe zu erklären, warum Tragflächen mit den Joukowski-Profilen noch bis zu Anstellwinkeln von  $-5^\circ$  herab einen Auftrieb erfahren. Die Newtonsche Theorie, welche das Zustandekommen der dynamischen Druckkräfte betrachtet, als stießen die Flüssigkeitsteilchen wie elastische oder unelastische Kugeln auf die Antriebsflächen (S. 260), ist zu einer solchen Erklärung völlig außerstande.

Erfahrungsmäßig ist die Zirkulation  $Z$  um eine Tragfläche herum der Geschwindigkeit  $v_0$  der ursprünglich homogenen Strömung streng proportional. Dadurch wird auch nach dieser Auffassung der Newtonsche Ansatz eines nach  $v$  quadratischen Antriebsgesetzes (§ 110, 8.) gerechtfertigt.

Eine ebene Fläche erfährt bei negativen Anstellwinkeln keinen Auftrieb. Eine Fläche des Joukowski-Profiles liefert deshalb für das Zustandekommen des Umlaufes erfahrungsmäßig besonders geeignete Bedingungen. In welcher Weise die Umlaufbewegung aber überhaupt zustandekommt, ist eine noch offene Frage. Der Umlauf besitzt eine gewisse Impulsgröße und zwar einen gewissen Drehimpuls (S. 154). Nach dem Satze von der Erhaltung des Impulses kann dieser Impuls nicht entstehen, ohne daß sich irgendwo die zugehörige Impulsgröße entgegengesetzten Vorzeichens wiederfindet. Da die einfache Potentialströmung im Beginne der Strömung (§ 118, 1.) keinen Drehimpuls besitzt, muß sich demnach beim Umströmen dieser Strömung in die Kutta-Strömung eine Impulsgröße von der umströmten Fläche abgelöst haben. Solches kann nur in Form eines Flüssigkeitswirbels entgegengesetzten Dreh-sinnes geschehen sein. Das ist der sogenannte in Fig. 445 am Ende der Fläche

1) H. G. Magnus (1802—1870), Prof. der Physik in Berlin.

§ 118. Die neueren Anschauungen über den dynamischen Druck und Auftrieb 377

gezeichnete „Anfahrwirbel“. Die im Raumgebiete  $AA$  der Fig. 445 vorhandene Summe der Zirkulationen ist Null; ebenso verschwindet das Impulsmoment. Zirkulation und Impulsmoment innerhalb des Raumes  $AB$  sind aber entgegengesetzt und gleich der Zirkulation und dem Impulsmomente im anschließenden Raume  $BA$ . Der Anfahrwirbel bildet sich in der Schicht laminaarer Strömung durch Vereinigung elementarer Wirbelfäden aus und wird dann durch die Strömung nach hinten entleert. Nach oben erhabene und glatte, nach unten hohle und vielleicht etwas rauhe, an der Vorderkante etwas verdickte und nach hinten schmal auslaufende Tragflächen, wie sie in der Natur beim Vogelflügel angetroffen werden, geben zur Ablösung solcher Wirbel des richtigen Drehsinnes besonders leicht Veranlassung und erzwingen dadurch die Einstellung der Umlaufströmung.

6. Ebene und nicht ebene Umläufe. Eine stationäre Umlaufströmung ist nach der Potentialtheorie der Flüssigkeitsströmungen nur möglich, wenn der umlaufene Körper unendlich lang ist oder sich bis an die Grenzen der Flüssigkeit erstreckt, wenn (§ 114, 2.) sind. Das ist nun bei allen praktischen Beispielen, wo man die Kutta-Strömung zur Erklärung von dynamischen Druckkräften an endlichen Flächen heranziehen muß — Drachenflächen, Flugzeugtragflächen, rotierender Tennisball usw. — sicherlich nicht der Fall. Man hat sich dann nach Lancheester<sup>1)</sup> vorzustellen, daß die Umlaufbewegung in seitlichen Wirbeln — sogenannten Wirbelzöpfen, welche an den Enden der Druckflächen angeheftet sind — auch über die betrachteten Körper hinaus ihre Fortsetzung findet (Fig. 446). Die Wirbelstärke dieser Wirbel (§ 115, 3.) ist dann zahlenmäßig gleich der Zirkulation (§ 114, 6.) der Umlaufströmung in der Mitte der Tragfläche. In einer idealen Flüssigkeit würden diese Wirbel unendlich lang sein, bez. bis an die Grenzen der Flüssigkeit reichen — etwa bis auf den Erdboden bei Flugzeugtragflächen —, in den wirklichen Flüssigkeiten finden sie wegen der inneren Reibung in einer gewissen Erstreckung ihr Ende.

Man kann die Ausbildung solcher Wirbelzöpfe unter ähnlichen Umständen recht gut an dem dampfenden Inhalte einer Tasse bei äußerst schwacher und regelmäßiger, seitlicher Luftströmung — besonders gut im Sonnenschein — beobachten. Die warme, dampferfüllte Luft an der Oberfläche des Tasseninhaltes erhält von der seitlich wirkenden Strömung

1) F. W. Lancheester, Prof. an der Techn. Hochschule in Birmingham.

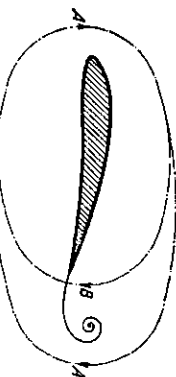


Fig. 445. Querschnitt einer Tragfläche mit Anfahrwirbel.

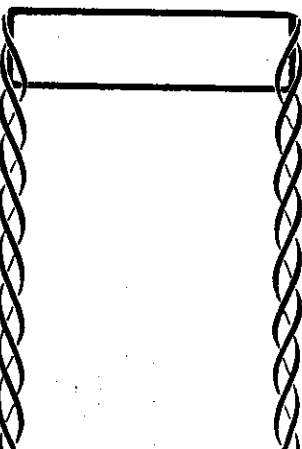


Fig. 446. Seitliche Wirbelzöpfe an den Enden einer Tragfläche.

mung eine Wirbelbewegung, zunächst in der anliegenden Schicht laminarer Strömung (§ 115, 2). Wegen ihres Auftriebes löst sich diese flächenhafte Wirbelschicht ab. Sie steigt infolge des seitlichen Lufthauches schräg nach oben. Von den Rändern her wickelt sich die Schicht dann zu den Wirbelköpfen auf (Fig. 447). Auch nach einer Störung dieser regelmäßigen Wirbelströmung durch turbulente Luftzug stellt sich das Strömungsbild immer wieder ein, sobald die Luft ruhig genug geworden ist. — An fast windstillen Tagen kann man eine ähnliche Beobachtung an der Rauchfahne hoher Schornsteine machen. Diese ist dann deutlich in zwei etwa parallele Säulen gegabelt, die am Rande der Schornsteinöffnung aufsitzen und in dem schwachen seitlichen Lufthauche wirbelnd schräg nach oben steigen. — Ähnlichen Ursprung haben die Wirbelköpfe der Flugzeugtragflügel. Der Überdruck der unter dem Flügel gestauten Luft und der Sog oberhalb der Flügel verursachen einen resultierenden nach unten gerichteten Geschwindigkeitsanteil der Strömung unter und hinter dem Tragdeck. Die dem Flugzeug anliegende Wirbelschicht wird von dem von vorn nach hinten gerichteten Strom von der Oberfläche des Tragdecks „abgeschält“ wie vorhin geschieht von den Seiten her zu den Wirbelköpfen aufrollt. Statt schräg nach oben wie bei dem Tassendampfe und der Rauchfahne sind diese Wirbelköpfe wegen des nach unten gerichteten Impulses, den die Luft bei der Loslösung vom Flugzeug durch die Umströmung erhalten hat, schräg nach unten und hinten gerichtet.

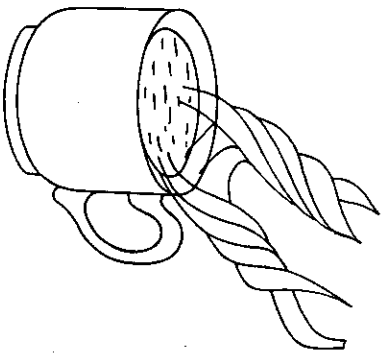


Fig. 447. Aufrollung der Wirbelschicht.

richteten Strom von der Oberfläche des Tragdecks „abgeschält“ wie vorhin geschieht von den Seiten her zu den Wirbelköpfen aufrollt. Statt schräg nach oben wie bei dem Tassendampfe und der Rauchfahne sind diese Wirbelköpfe wegen des nach unten gerichteten Impulses, den die Luft bei der Loslösung vom Flugzeug durch die Umströmung erhalten hat, schräg nach unten und hinten gerichtet.

7. Der Rücktrieb oder Widerstand. Während also nach dem Gedanken gange von Kutta der Auftrieb auch aus der reibungsfreien Potentialströmung erklärt und berechnet werden kann, bietet der Rücktrieb oder der Bewegungswiderstand auf der Grundlage der Potentialströmungen eine größere Schwierigkeit. Nach Prandtl hat man sich die Entstehung des Widerstandes so zu denken:

Die Wirbelzöpfe an den Enden einer endlichen Tragfläche sind mit einer nach unten gerichteten Luftströmung zwischen ihnen verknüpft. Die Geschwindigkeit dieser setzt sich mit der des von vorne kommenden Stromes zu einer Resultante zusammen. Diese Resultante ist dann nicht mehr wagrecht gerichtet, sondern um einen kleinen Winkel von vorn oben nach hinten unten geneigt. Die Richtung des relativ zum Flugzeug bewegten Luftstromes, der den dynamischen Auftrieb bewirkt, Bewegungsrichtung der Luft (§. 0. 6.), muß daher nicht allein nach oben, sondern auch ein wenig nach hinten gerichtet sein. Somit muß mit jedem dynamischen Auftriebe endlicher Tragflächen zugleich ein gewisser Rücktrieb verbunden sein, der die Komponente der gesamten dynamischen Druckkraft in der horizontalen Richtung ist. — Das ist der Grundgedanke der Widerstandstheorie von Prandtl. Sie hat eine ziemlich gute Bestätigung dadurch gefunden, daß man die gemessenen Rücktriebe einer Junkowski-Fläche aus den Auftrieben berechnen konnte (Fig. 420). — Auftrieb und Rücktrieb, die nach den Theorien der Kutta-Strömung und der Prandtl'schen Widerstandstheorie berechnet werden, erweisen sich immer als etwas

verschieden von durch Messung gefundenen Werten. Das rührt vom Zwischenspiel der Zähigkeit der Luft her; dadurch erscheint der Auftrieb der Theorie der Kutta-Strömung gegenüber etwas verkleinert (Fig. 420), der Rücktrieb oder Widerstand etwas vergrößert. Bei Abwesenheit von Reibung würde ein Auftrieb  $A$ , der innerhalb einer Spannweite  $b$  zur Wirkung kommt, nach Prandtl einen Mindestwiderstand

$$W = \frac{\rho A^2}{2A^3}$$

erfordern. Die zugehörige Leistung wäre  $W \cdot v$ .

§ 119. Windräder, Luftschrauben; lenkbare Luftschiffe.

1. Dynamische Druckkraft und Anstellwinkel. Wir machen ähnlich wie in Fig. 422 eine Platte  $PP$  (Fig. 448) so längs einer Bahn  $BB$  verschiebbar, daß sie mit dem Lote auf der Bahn den Winkel  $\alpha$  einschließt. Dann stellen wir sie in einen Luftstrom, der in Fig. 448 von links nach rechts zu denken ist. Die Platte erfährt in diesem Stromen einen Auftrieb  $D_c$  in der Richtung  $BB$ . Die wirksame Kraft ist dieselbe, die bei den Tragflächen der Flugzeuge als Auftrieb bezeichnet wird und die nach § 118 der Umlaufströmung um die Platte entspringt. Wird die Platte ruhend festgehalten, so hat diese dynamische Kraft unter  $c$  einem gewissen Anstellwinkel  $\alpha$  ihren größten Wert. Für sehr längliche, rechteckige ebene Flächen liegt dieser etwa bei  $8^\circ$ , für gewölbte Flächen bei etwa  $12^\circ$  (Fig. 420); bei kleinerem Seitenverhältnisse liegt er bei größeren Winkeln, so z. B. beim Quadrate bei rund  $40^\circ$ . Wenn sich die Platte nun längs der Führung  $BB$  mit der Geschwindigkeit  $c$  nach oben bewegt, so ist für die Bewegung des Windes relativ zur Platte nicht mehr der Wert  $v$  maßgebend, sondern die Resultante  $v'$  der Geschwindigkeit  $v$  und einer nach unten gerichteten Geschwindigkeit  $c$  des Windes relativ zur Platte (Fig. 449).



Fig. 448. Gegen einen Luftstrom geneigte und senkrecht zu ihr bewegte Platte.

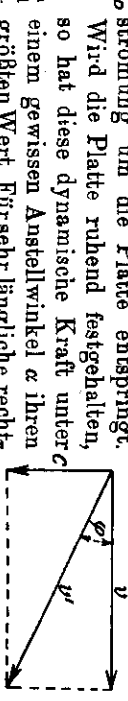


Fig. 449.

Der Neigungswinkel der Windströmung relativ zur Platte ist dann nicht mehr  $\alpha$ , sondern  $\delta = \alpha - \varphi$ , wobei  $\tan \varphi = \frac{c}{v}$  ist. Wenn daher auch im bewegten Zustande der Platte der Anstellwinkel  $\delta$  seinen günstigsten Wert beibehalten soll, so muß die Neigung  $\alpha$  mit wachsender Geschwindigkeit  $c$  größer und größer genommen werden. Je schneller sich die Platte bewegt, um so kleiner muß also der Winkel sein, den sie mit der Bahnrichtung ihrer Bewegung bildet.

2. Windräder. Wir wollen uns denken, daß nach Fig. 450 an einer Ache  $O$ , die senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht, zwei Arme angebracht sind, an deren Enden die Scheiben  $PP$  sitzen, und daß ein Luftstrom in der Richtung, in der wir das Bild ansehen, gegen die Platten weht. Die Platten werden dann in

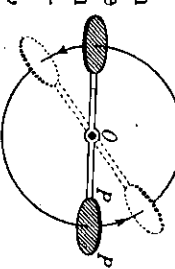


Fig. 450. Windrad.

einer Kreisbahn um die Achse  $O$  gedreht, wenn ihre Ebenen mit der Bahnrichtung, also hier mit der Ebene der Zeichnung einen Winkel bilden. Dieser Winkel muß (s. o. 1.) um so kleiner sein, je größer die vom Winde erzeugte Geschwindigkeit der Platten ist. Wenn mehrere Platten auf demselben Arme in verschiedenen Abständen von der Achse angebracht sind, so bewegen sich die äußeren Platten rascher als die, welche der Achse näher liegen. Also muß der Winkel, den sie mit der Bahnebene bilden, kleiner sein als der, den die achsennahen Platten mit der Bahnebene bilden. Hieraus folgt dann die bekannte windschiefe Form der gewöhnlichen Windmühlentügel, die in der Nähe der Achse stark, an den äußeren Enden aber unter sehr kleinem Winkel gegen die Bahnrichtung gedreht sind.

Im Grundgedanken so beschaffene Windräder werden als Antriebsvorrichtungen vielfach verwandt, durch welche die kinetische Energie des Windes zum Drehen von Mühlen, Pumpen usw. nutzbar gemacht wird. Sie werden bei Windmühlen mit 2—6, bei den sog. Windmotoren mit zahlreichen Flügeln ausgebildet. Diese sind um ihre Längsachse so aus der Ebene des Rades schraubenförmig verdreht, daß sie bei ihrer Bewegung dem Luftstrome die günstigsten Neigungswinkel darbieten. In den neueren Windmotoren sind die Anstellwinkel je nach der wechselnden Windstärke veränderlich, so daß man nach Belieben dem Winde einen größeren oder kleineren Energiebetrag entziehen kann.

3. Luftschraube. Wie hier ein Luftstrom drehende Bewegung liefert, wird umgekehrt durch die Drehung der Luftschrauben (Ventilatoren; s. a. Schiffschrauben S. 307) ein Luftstrahl, der Schraubenstrahl erzeugt. Die in der Zeiteinheit diesem Schraubenstrahl erteilte und fortgeführte Bewegungsgröße ist dem Werte nach gleich der Reaktionskraft, welche die Luftschrauben Fahrzeugen und Luftschiffen in der entgegengesetzten Bewegungsrichtung erteilt.

Die Luftschraube erteile dem Körper, an dem sie befestigt ist, die Geschwindigkeit  $c$ . Dann ist die in jeder Sekunde dem Körper von der Schraube erteilte Arbeitsleistung  $A = W \cdot c$ , wo  $W$  der Widerstand (Rücktrieb) ist, den der Körper (das Fahrzeug) im Mittel erfährt.

Würde sich die Luftschraube in einer festen Mutter bewegen, so würde sie in axialer Richtung mit der Geschwindigkeit  $c'$  fortschreiten, die mit der Geschwindigkeit  $v$  durch die Gleichung verbunden ist  $\frac{c'}{v} = tg \alpha$ , wenn  $\alpha$  den Neigungswinkel der Schraube und  $v$  die Umfangsgeschwindigkeit der Umdrehung bedeutet. Nun ist aber die Luft keine feste Schraubenmutter, vielmehr weicht sie vor der Luftschraube zurück; daher ist die wirkliche axiale Geschwindigkeit  $c$  kleiner als  $c'$ . Der Unterschied  $c' - c$  heißt die Schlupfung (slip) der Schraube und das Verhältnis  $c : c'$  der Nutzeffekt  $\eta$ . Er beträgt bei den besten Luftschrauben etwa 70%.

Die von der Schraube abgegebene Leistung ist damit

$$A = W \cdot c = W \cdot \eta \cdot c' = W \cdot \eta \cdot v \cdot tg \alpha.$$

Nun ist der Widerstand  $W$  näherungsweise proportional zu  $v^2$  (§ 110, 8). Damit folgt, daß die Leistung der Luftschraube der 3. Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

In Fig. 451 ist eine Luftschraube (Propeller)<sup>1)</sup> gebräuchlicher Form abgebildet. Die Steigung (Anstellwinkel) nimmt mit wachsender Entfernung von der Achse ab. Der Querschnitt des Schraubenflügels zeigt den Umriss des Joukowski-Profiles.

4. Lenkbare Luftschiff. Die Luftschiffe haben eine sehr schlanke Stromlinienform (§ 116, 3.) geringen Widerstandes. Das aus Duraluminium hergestellte starre Gerüst ist mit einer Haut aus gummiertem Baumwollstoff überzogen. Der Innenraum enthält große blasenförmige Behälter für den tragenden Wasserstoff.

In den unstarren, gerüstlosen Prallluftschiffen befand sich außerdem noch ein Luftsack oder Ballonet, der bei Gasverlust durch eine Pumpe aufgeblasen wurde, um die Hülle immer prall und formbeständig zu halten. Die bekanntesten starren Luftschiffe sind die vom Grafen Zeppelin gebauten, von denen Fig. 452 eine äußere Ansicht (teilweise aufgeschnitten) und Fig. 453 einen Querschnitt zeigt.

Der Vortrieb der lenkbaren Luftschiffe geschieht durch Luftschrauben, von denen beim Zeppelinluftschiff vier vorhanden sind, und zwar sitzen zwei vorn und zwei hinten an beiden Seiten.

Der Widerstand eines Luftschiffes setzt sich aus dem sogenannten Stirnwiderstande und dem Oberflächenwiderstande zusammen. Beträgt der größte Querschnitt des Luftschiffes  $Q$  und die Oberfläche  $Q$ , so können wir den Gesamtwiderstand in erster Annäherung nach technischem Maße (§ 110, 5.) in der Form schreiben  $W = (Q \cdot s + O \cdot r) \cdot v^2 \cdot \frac{\gamma}{g}$ .

Hierin bedeuten  $s$  und  $r$  zwei durch die Erfahrung bestimmte Beizahlen, die besonders von der Form der Vorder- und Hinterfläche, sowie von der Oberflächenbeschaffenheit der Lufröhre abhängen;  $\gamma$  ist die Geschwindigkeit des Luftschiffes,  $\gamma$  das spezifische Gewicht der Luft und  $g$  die Schwerebeschleunigung. Da die Leistung  $A$  bei der Fortbewegung durch



Fig. 451. Luftschraube (Propeller).

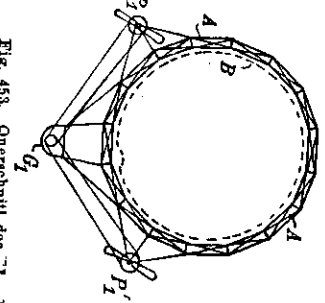


Fig. 453. Querschnitt des Zeppelins.



Fig. 452. Luftschiff nach Zeppelin.

1) propellere (alt.) = vorwärtsfahren.

die Luft proportional mit dem in einer Sekunde zurückgelegten Wege, also mit der Geschwindigkeit  $v$  ist, so folgt  $A = (Q \cdot s + O \cdot r) \cdot v^2 \cdot \frac{2}{g}$  (s. o. S.).

Diese Leistung, die durch die Luftschrauben an das Schiff abgegeben werden muß, ist also der dritten Potenz der Geschwindigkeit proportional. Würde beispielsweise ein Motor von 50 PS dem Luftschiffe eine Geschwindigkeit von 50 km/ Stunde erteilen, so müßte man, wenn man die Geschwindigkeit verdoppeln wollte, Motoren mit der Leistung  $8 \cdot 50 = 400$  PS benutzen.

Die gewaltigste Leistung eines Luftschiffes ist wohl die Fahrt von L 59 im November 1917, das den Auftrag hatte, von Yambul bei Burgas in Bulgarien nach Deutsch-Ostafrika zu fliegen, aber auf der Höhe von Karthum in Oberägypten drahtlos zurückbefohlen wurde. Mit 22 Mann Besatzung hat es die 6755 km lange Fahrtstrecke von Yambul nach Karthum und zurück ohne Zwischenlandung in 95 Stunden zurückgelegt.<sup>1)</sup> Deutsche Aufklärungsflugzeuge sind teilweise sogar mehr als 100 Stunden über See unterwegs gewesen und haben bis insland gekreuzt. Ein lenkbares Luftschiff muß sowohl in wagerechter wie in lotrechter Richtung gelenkt werden können; es sind demnach Seiten- und Höhensteuer notwendig, die gewöhnlich am hinteren Ende der Luftschiffe angebracht sind. Für die Höhensteuerung kommt außerdem noch in Betracht, daß das ganze Schiff, wenn das hintere Ende gehoben wird, als nach abwärts gerichteter Steuer wirkt, während, wenn das hintere Ende durch das Höhensteuer gesenkt wird, sich das Schiff schräg nach oben bewegt.

### § 120. Flugbewegungen.

Die Flugbewegungen können passiver oder aktiver Art sein, je nachdem dabei nur eine Wechselwirkung zwischen Schwere und Luftwiderstand stattfindet oder noch eine andere Kraft mit wirksam ist. Zu den passiven Flugbewegungen gehören daher alle Fallbewegungen in der Luft, die durch den Luftwiderstand merklich beeinflußt werden, wie die eines Geschosses oder einer Feder. Beispiele passiver Flugbewegungen sind der Fallschirm, der Gleitflug und teilweise der Flug des Bumerangs, aktive Flugarten der Vogelflug und der dynamische Flug der Flugzeuge.

1. Fallschirm. Läßt man ein rechteckiges oder kreisförmiges Stück steifen Papiers, z. B. eine Postkarte, in genau wagerechter Lage fallen, so verhält sie sich wie die in Fig. 414 abgebildete Platte. Infolge der in der

1) Die Leistungen des englischen Luftschiffes R 34, welches am 2. VII. 1919 den Atlantischen Ozean überflogen hat, stehen dahinter erheblich zurück, etwa 4000 km Fluglänge und 75 Stunden Fahrtdauer. Dieses Luftschiff von 200 m Länge und 56 000 cbm Fassungsvermögen ist eine treue Nachbildung des deutschen Luftschiffes L 33, das am 23. IX. 1916 fast unversehrt in die Hände der Engländer fiel. Die Fahrt ging von East Fortune in Nordost-Schottland nach Long Island bei New York. Die Rückfahrt dauerte 91 Stunden. Das Schiff wurde durch 6 Motoren von je 250 PS angetrieben. — Ein großes Luftschiff von 70 000 m<sup>3</sup> Gasfüllung ist gegenwärtig auf der Zepplin-Werft in Friedrichshafen für amerikanische Rechnung im Bau und soll im Mai 1923 beendet sein, um im Juni unter amerikanischer Flagge die Ausreise über den Atlantischen Ozean anzutreten.

### § 120. Flugbewegungen

Luft entstehenden Verdrichtungen vor der Platte und Verdünnungen hinter ihr, sowie infolge der auftretenden Wirbel erfährt sie einen zentralen dynamischen Widerstandsdruck, der ihren Fall verlangsamt. Sobald daher nach kurzer Zeit zunehmender Fallgeschwindigkeit der Widerstand gleich der Schwere geworden ist, wird die Bewegung gleichförmig, und die Platte fällt langsam schwebend zur Erde. Da nun aber die Luft, in welcher die Platte fällt, niemals in völliger Ruhe, sondern in unregelmäßiger, wirbeler Bewegung ist, so kann leicht der Fall eintreten, daß die Platte in eine schräge Lage gerät und dann anfängt zu schaukeln und in ganz unregelmäßigen Bewegungen herabzufallen.

Man kann das Auftreten solcher Schaukelbewegungen dadurch unterdrücken, daß man den Schwerpunkt der fallenden Platte möglichst tief legt, also z. B. dadurch, daß man an den vier Ecken eines quadratischen Papiertüchkes gleichlange Fäden befestigt, die in einem unter dem Papierstücke liegenden Punkte zusammengefaßt und hiermit einem schweren Körper beschwert werden (Fig. 454). Ein solcher „Fallschirm“ fällt, losgelassen, langsam zur Erde nieder.

Man kann einen Rest der Schaukelbewegung noch dämpfen, dadurch daß man im Scheitel des Fallschirmes eine kleine Öffnung anbringt. Die Trägkraft wird dadurch nicht merklich herabgesetzt und es entsteht eine Durchströmung, die stabilisierend wirkt.

Ein beschwerter Fallschirm nimmt eine gleichförmige Geschwindigkeit an. Die Schwere des belasteten Schirmes und der Luftwiderstand halten sich das Gleichgewicht. Je schwerer die Last ist, die der Fallschirm trägt, desto größer ist auch seine Fallgeschwindigkeit. Da diese Fallgeschwindigkeit durch den Luftwiderstand bestimmt ist, muß sie sich relativ zur Luft immer zum selben Betrage einstellen, wie auch der Bewegungszustand der Luft relativ zur ruhenden Erde sein mag. Fällt der Schirm etwa in einem aufsteigenden Luftstrom, so ist die Fallgeschwindigkeit des Schirmes gegenüber der ruhenden Erde der Unterschied der Geschwindigkeit, die der Schirm bei ruhender Luft haben würde, und der nach oben gerichteten Luftgeschwindigkeit. In starken aufsteigenden Strömungen kann es daher vorkommen, daß ein Fallschirm relativ zur Erde im selben Abstände bleibt oder gar steigt.

2. Gleitflug. Die Fallschirmbewegung einer Postkarte läßt sich leicht in die seitwärts fortschreitende Bewegung des Gleitfluges verwandeln, wenn man den mit dem Flächenmittelpunkte zusammenfallenden Schwerpunkt  $S$  dadurch gegen den einen Längsrand verschiebt, daß man diese mit einer sog. Bironade, Heftzwecke oder dgl. in der Mitte beschwert (Fig. 455). Neigt man den beschwerten Rand der Karte nun mit hochgehobener Hand etwa unter 45° abwärts und läßt sie los, so fährt sie einen Gleitflug aus. Wundervolle Gleitflieger, auf die zuerst F. Ahlborn hingewiesen hat, sind die etwa 10 cm großen geflügelten Samen der auf Java einheimischen Kürbispflanze

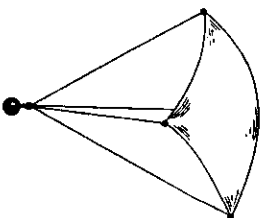


Fig. 454. Papierenhells eines Fallschirmes.

Zanonia macrocarpa. Die im Umriss nierenförmige Tragfläche dieser Samen hat infolge ihrer eigenartigen Wölbungen die Eigenschaft vollkommener Stabilität im Fluge; aus jeder Lage geht der Same augenblicklich in den schönen Gleitflug über.

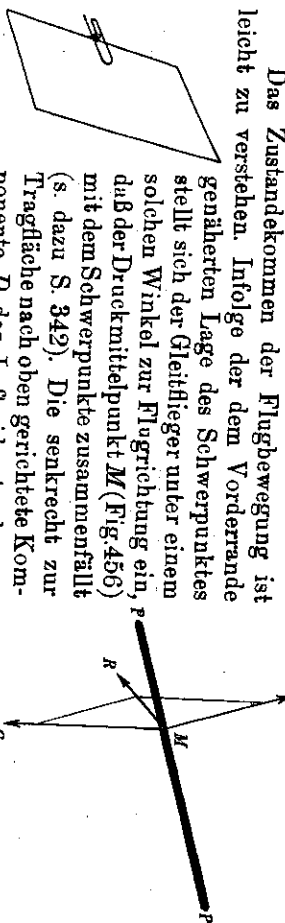


Fig. 455. Postkarte als Gleitflieger.

gibt dann mit dem Gewicht  $G$  eine

Fig. 456. Druckmittelpunkt und Schwerpunkt fallen zusammen.

nach vorn und abwärts gerichtete Resultierende  $R$ , die den Flug unterhält. **3. Vögelflug.** Der Segelflug<sup>1)</sup> der Vögel, bei dem bis auf geringfügige Gleitflüge in einem aufsteigenden Luftstrom oder in einem solchen, der sich häufig nach Geschwindigkeit oder Richtung ändert.

Im ersten Falle fällt der Vogel relativ zum aufsteigenden Luftstrom im Gleitfluge nach unten, gewinnt aber gleichzeitig durch diese ihn mitnehmende aufsteigende Strömung soviel an Höhe gegen die Erde, daß er entweder in ungenügenderm Abstände von ihr bleibt oder sich dieser gegenüber gar noch erhebt (s. oben 1. letzter Absatz; sog. statischer Segelflug).

Es möge als zweiter Fall der dynamische Segelflug betrachtet werden, wo ein Vogel in einem wagemachten Luftstrom veränderlicher Geschwindigkeit segelt. Vögelflug und Wind mögen dieselbe Richtung haben. In den Zeitabschnitten größerer Windgeschwindigkeit (von der ruhenden Erde aus beurteilt) möge der Vogel einen Gleitflug ausführen. Durch diesen verliert er an Höhe; dafür erlangt er eine Geschwindigkeit, die um einen gewissen Betrag größer als die Windgeschwindigkeit ist. Er hat also, gegen die ihn umgebende Luft beurteilt, Gegenwind. Würde der Vogel nun nach einem Gleitfluge gewisser Dauer durch Vergrößerung des Anstellwinkels seiner ausgebreiteten Flügel in einen steigenden Flug übergehen, so würde er — von Reibungs- und Turbulenzverlusten sei zunächst abgesehen — auf Kosten der ihm inwohnenden kinetischen Energie durch dynamischen Auftrieb höchstens einen so großen Gewinn an Höhe in dieser Phase des Segelfluges machen können, als er durch den Gleitflug vorher verloren hat. Sein durch den Gleitflug erworbener Geschwindigkeitsgewinn würde durch diese Steigung verzehrt werden. Wenn aber nun in dieser Phase des Segelfluges die Windgeschwindigkeit (von der Erde aus

1) Der Segelflug oder das Segeln der Vögel ist ein ganz anderer Vorgang als das „Segeln“ der Schiffe und darf durch den Gleichklang der Bezeichnung nicht mit diesem verwechselt werden.

beurteilt) kleiner ist als während des Gleitfluges, so bewegt sich der Vogel mit größerer Geschwindigkeit in bezug auf die ihn umgebende Luft als im Falle ungenügender Windstärke. Er verhält sich also gegenüber der Luft so, als ob er vorher im Gleitfluge eine größere Höhe durchfallen und dadurch Geschwindigkeit gewonnen hätte. Sein Auftrieb ist dieser größeren Geschwindigkeit in bezug auf die ihn umgebende Luft wegen größerer Geschwindigkeit gehobener Windgeschwindigkeit gewesen wäre; der Vogel muß also jetzt einen größeren Höhengewinn erlangen können als im anderen Falle. Somit muß es ihm möglich sein, wenn er bei großer Windgeschwindigkeit in Gleitflug übergeht, bei kleiner Windgeschwindigkeit steigt, daß er im ganzen an Höhe gewinnt oder daß er wenigstens wegen der unvermeidlichen Energieverluste bei hinreichenden Windschwankungen sich immer in gleicher Höhe hält.

Bei gleichmäßiger Windstärke kann auf die geschilderte Weise der Vogel niemals dauernd Höhe auf Kosten des Windes gewinnen. Das würde den Sätzen der Relativität aller Bewegungen und dem Energieprinzip widersprechen. Es müßte andernfalls dem Vogel möglich sein, auch bei Windstille durch das Verfahren dauernd Höhe aus dem Nichts zu gewinnen, denn es darf für den Auftrieb in beiden Phasen seines Segelfluges nur die Geschwindigkeit des Vogels gegenüber der Luft betrachtet werden. Da nur die Geschwindigkeitsschwankung des Windes für den Höhengewinn beim Anstiege im dynamischen Segelfluge maßgebend sein kann, darf auch der Anteil gleichförmiger Geschwindigkeit des Windes in beiden Phasen außer Ansatz bleiben; die Betrachtung darf also so durchgeführt werden, als ob der Vogel beim Anstiege auf Kosten seiner Geschwindigkeit von der ihm entgegenwehenden Luft gehoben wird, die eingehülte Geschwindigkeit aber danach bei Windstille durch Gleitflug wieder eingebracht wird. — Es ist heute außer Zweifel, daß die meisten großen Vögel vermöge einer außerordentlich feinen sinnlichen Empfindlichkeit für die Windströmungen und ihre Änderungen, die „Windfluktationen“, so wie aufsteigende Luftströmungen durch zweckentsprechende Steuerbewegungen der Flügel und des Schwanzes in ausgedehntestem Maße sich zum Fliegen beim „Segeln“ in der angedeuteten Art nutzbar machen. — Der Segelflug mit motorlosen Flugzeugen, der in dem letzten Jahre in Deutschland an der Wasserkuppe in der Rhön schöne Erfolge erzielt hat, spielte sich im aufsteigenden Luftstrom, dem „Hangwinde“ ab.

Beim Ruderfluge erzeugt der Vogel aktiv durch Flügelschläge nach unten Auftrieb. Dabei verdrehen sich seine Flügel etwas, indem der hintere Teil elastisch emporgehoben wird. Die dadurch schief gegen die Bewegungsrichtung stehende Flügelfläche erzeugt gleichzeitig den Vortrieb.

**4. Rollflug.** Wird die Postkarte (s. o. 2.) nicht so beschwert, daß ihr Schwerpunkt mit dem Druckmittelpunkte zusammenfällt, so liegen die Verhältnisse so, wie es in Fig. 457 abgebildet ist. Der dynamische Druck wirkt am Druckmittelpunkte  $M$ , und das Gewicht wirkt am Schwerpunkt  $S$ .

Jetzt entsteht ein Drehmoment. Um dieses zu erkennen, fügen wir nach Fig. 458 im Schwerpunkt

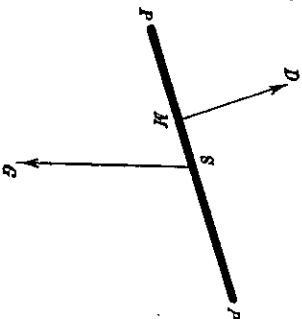


Fig. 457. Druckmittelpunkt und Schwerpunkt fallen nicht zusammen



S noch die beiden einander und dem dynamischen Drucke  $D$  gleichen, aber entgegengesetzten Kräfte  $D'$  und  $D''$  hinzu. Die beiden Kräfte  $D$  und  $D''$  bilden ein rechtstrehendes Kräftepaar, das die Vorderkante der Platte zu heben strebt; die beiden Kräfte  $G$  und  $D'$  setzen sich zu einer resultierenden  $R$  zusammen, die die Platte schräg abwärts zu bewegen strebt. Die Folge davon ist, daß die Platte eine schräg nach unten gerichtete Bewegung macht, und daß dabei gleichzeitig die Vorderkante gehoben wird.

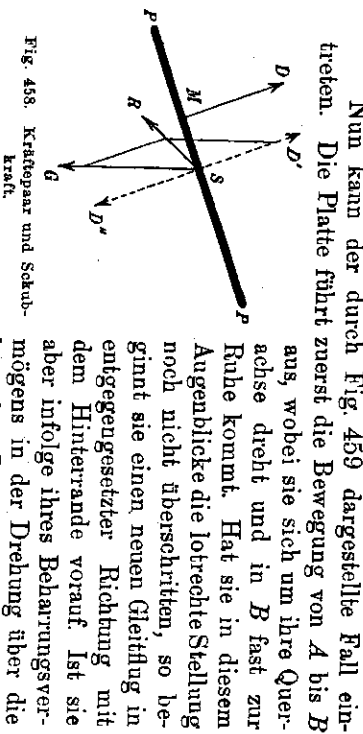


Fig. 458. Kräftepaar und Schubkraft.

so setzt sie nun die Drehung in demselben Sinne fort und geht aus der schaukelnden Flugbewegung in den Rollflug über. Die Flugbahn ist von da ab geradlinig und etwa unter  $30^\circ$ — $40^\circ$  gegen den Boden geneigt. Schmale Papierstreifen fallen stets im Rollflug.

5. Bumerang. Wie in den vorstehenden Fällen die einfache Fallbewegung, so ist es beim Bumerang die Bahn des schiefen Wurfes, die durch den Luftwiderstand in der überraschendsten Weise abgeändert wird. Die beiden Schenkel dieser aus hartem Holze geschnitzten Wurfgeschosse (Fig. 460) sind mehr oder weniger hakenförmig gestaltet. Die Ränder sind schneidenartig zugeshärft. Im Kleinen läßt sich der merkwürdige, zur Abwurfstelle ungefähr zurückkehrende Flug des Instrumentes leicht vorführen. Man braucht nur nach dem Muster der Umrißfiguren (Fig. 460) ein Stück Kartonpapier auszuscheiden (und den einen Schenkel ein wenig windschief zu verbiegen). Legt man das so erhaltene Modell eines Bumerangs auf eine Fläche als Unterlage, so daß der eine Schenkel über die Randkante herausragt, so kann man es durch Abknipsen mit dem Finger oder einem Stabe an diesem Schenkel leicht in Flug setzen. Bei einiger Übung gelingt es, den Impuls beim Abwurf so abzugleichen, daß das Modell nach einem kleinen Rundfluge in einer schräg aufwärts geneigten Ebene zur Abwurfstelle zurückkehrt.

Fig. 460 Bumerang.

Die den sonderbaren Flug bestimmende Eigentümlichkeit des Wurfes ist die Rotation

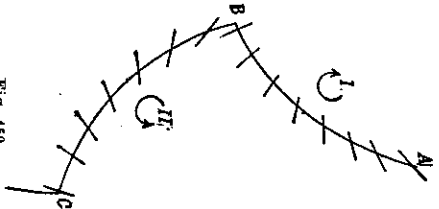


Fig. 459.

des Bumerangs um die zu seiner Ebene senkrechte Schwerpunktsachse. Zunächst machen sich dadurch alle Kreiselsätze geltend. Besonders muß nach dem Gesetze von der Erhaltung der Kreiselachse (S. 169) ein Schrauben oder Umschlagen der Bumerangebene, wie es beim Gleitfluge und Rollfluge einer ebenen Kartonplatte der Fall ist, unterdrückt werden. Der Körper wird somit zu einem reinen Gleitfluge gezwungen. Dann erzeugt die Umdrehung eine starke Umlaufströmung um die Rotationsachse. Wegen der Überlagerung dieser Umlaufströmung mit der Strömung der fortschreitenden Bewegung tritt eine senkrecht zur Flugrichtung und senkrecht zur Rotationsachse wirkende Kraft auf (§ 118, 2.3.). Eine solche muß aber die Bahn des Fortschreitens in eine gekrümmte Bahn verwandeln, so daß in jedem Punkte die Zentrifugalkraft dieser Normalkraft das Gleichgewicht hält (S. 98). Im luftleeren Raume würde sich der Bumerang natürlich nach den einfachen Wurfgesetzen bewegen, sein Schwerpunkt also eine Wurfparsel beschreiben wie bei jedem anderen Körper auch.

Man muß den Flug des Bumerangs teilweise schon zu den aktiven Flugarten zählen, da außer der Schwere und den dynamischen Luftdruckkräften die kinetische Energie der Wurfbewegung notwendige Vorbedingung ist. In diesem Sinne ist auch der Gleitflug der fliegenden Fische ungeschadet der ruhig ausgebreiteten großen Brustflossen aktiv, da er auch auf Kosten der vorher im Wasser durch Muskelarbeit erworbenen kinetischen Energie unterhalten wird.

### § 121. Flugzeuge.

Flugzeuge sind große Gleitflieger, die durch Motor und Luftschraube in ihrer Bewegungsrichtung durch die Luft gezogen oder geschoben werden. Sie werden auch nicht ganz zutreffend Drachenflieger genannt, denn ihre Tragflächen bilden zwar ähnlich wie beim Drachen gewisse Neigungswinkel gegen die Flugrichtung, aber diese als Anstellwinkel (§ 110, 8.) bezeichneten Neigungen sind kleine, etwa zwischen  $-4^\circ$  und  $+10^\circ$  schwankende Winkel (S. 379) und liegen daher in einem Bereiche der dynamischen Drucke, die von den zwischen  $20^\circ$ — $30^\circ$  liegenden Drachenwinkeln wesentlich verschieden sind.

Die motorlosen Gleitflieger sind durch das über den Gleitflug im vorigen Paragraphen Gesagte ohne weiteres verständlich. Führt man den dort beschriebenen Versuch mit der fliegenden Postkarte in großem Maßstabe durch, so entsteht ein Apparat, der die Grundform der Gleitflieger darstellt. Ein solcher Apparat kann ein beträchtliches Gewicht im langsamen Fluge weit fortführen.

Die ersten erfolgreichen Versuche mit Gleitfliegern im großen Maßstabe hat der deutsche Flugforscher Otto Lilienthal im Jahre 1890 angestellt. Lilienthal ist als unbestrittener Begründer und Pionier der Flugtechnik anzusehen. Er erreichte im Jahre 1896 mit einem Gleitflieger, der zwei übereinanderliegende Tragflächen (Doppeldecker) von zusammen  $18\text{ m}^2$  Flächeninhalt hatte, Flugweiten bis zu  $350\text{ m}$ . Bei diesen Versuchen bißte er sein Leben ein.

Auf Lilienthals Vorstudien gründeten die beiden Amerikaner Wilbur und Orville Wright ihre Versuche, die sie an der Küste von Nord-Karolina

in den Jahren 1901 bis 1903 mit Gleitfliegern ausführten, welche dem Lillienthalschen Doppeldecker nachgebildet waren. Die wesentlichste Neuerung an ihrem Apparat war die Steuerung, die in einer an der Vorderseite des Apparates angebrachten, um eine wagerechte Achse drehbaren Fläche bestand. Mittels der Steuerung konnten sie die Neigung ihres Apparates innerhalb gewisser Grenzen verändern, konnten also auch einem etwaigen Kippen des Apparates nach hinten oder vorn durch passende Stellung des Steuerers begegnen. Diese Fläche bildet die erste Grundform des bei allen modernen Flugapparaten angebrachten Höhensteuers.

Gegen Ende des Jahres 1903 setzten die Brüder Wright ihren ersten Motor in einen Gleitflieger ein: sie bauten den ersten Motorflieger, der sich nach dem Grundgedanken des Gleitfliegers in der Luft halten und vorwärtsbewegen konnte.

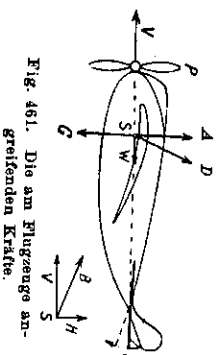


Fig. 461. Die am Flugzeuge anwirkenden Kräfte.

Um die Wirkungsweise der Kräfte am Flugzeuge zu verstehen, betrachten wir die schematische Fig. 461. Wenn der Maschine durch die Umdrehung der Luftschraube  $P$  ein Vortrieb  $V$  erteilt wird, so wirkt der Luftwiderstand in der Richtung  $D$  auf den Druckmittelpunkt  $S$  der Tragfläche. Dieser Druck  $D$  zerfällt in zwei Komponenten: in den wagerechten Widerstand  $W$  und den lotrecht nach oben gerichteten Auftrieb  $A$ . Der Vortrieb  $V$  hält bei stationärer Bewegung dem Widerstande  $W$  das Gleichgewicht. Dem Auftriebe  $A$  wirkt das Gewicht  $G$  der ganzen Flugmaschine entgegen. Wenn  $A = G$  ist, so bleibt die Flugmaschine in derselben Höhe; sie bewegt sich nur wagerecht vorwärts. Wenn  $A < G$  ist, so sinkt sie, und wenn  $A > G$  ist, so steigt sie. Der im letzteren Falle übrigbleibende Rest  $H$  des Auftriebes setzt sich dann mit dem Vortriebe  $V$  zu der Resultierenden  $B$  zusammen, die die Flugmaschine schräg aufwärts bewegt.

Je größer die durch den Vortrieb  $V$  erzeugte Geschwindigkeit ist, um so größer wird der Druck  $D$ , also um so leichter ist die Maschine im Schweben zu erhalten.

Durch geeignete Stellung eines vor oder hinter der Tragfläche angebrachten Höhensteuers  $HR$  kann der Tragfläche eine bis zu einem gewissen Grade beliebige Neigung gegeben werden. Die Maschine steigt, wenn die Vorderkante  $D$ , wie auch ihre beiden Komponenten  $A$  und  $W$  zu. Infolge der Vergrößerung von  $W$  wird dann aber die Geschwindigkeit der Maschine geringer. Hieraus folgt, daß die wagerechte Geschwindigkeit einer steigenden Flugmaschine kleiner ist als die einer wagerecht bewegten. Wird die Tragfläche durch Anwendung des Höhensteuers nach vorn geneigt und der Motor abgestellt, so wird die Maschine zu einem reinen Gleitflieger. Natürlich muß dann kurz vor der Landung der vordere Rand der Tragfläche wieder etwas gehoben werden, damit auch die wagerechte Komponente der Geschwindigkeit wieder vernichtet wird.

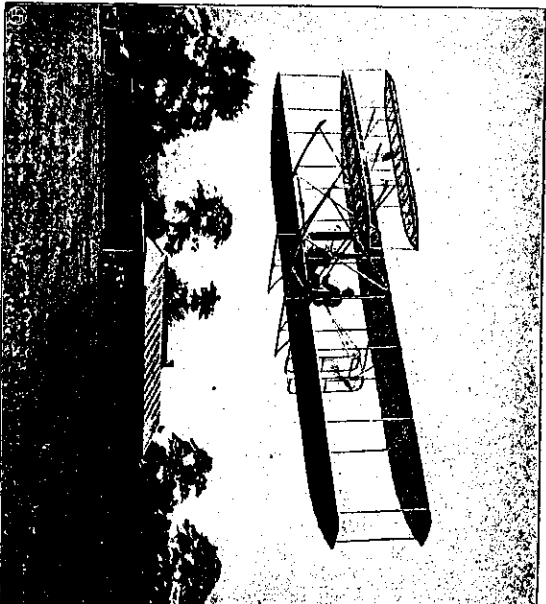


Fig. 462. Erster mit Motor ausgerüsteter Flugzeug der Brüder Wright auf einem Fluge am 8. August 1903 über dem Flugfeld von La Mans.

Der erste mit Motor ausgerüstete Drachenflieger der Brüder  $W$  und  $O$ . Wright ist in Fig. 462 abgebildet, wie er am 8. August 1908 über dem Flugfeld von La Mans einen Flug von etwa 2 Minuten Dauer ausführte. Man erkennt vorn das Höhensteuer, an der Hinterseite das Seitensteuer. Der Wrightsche Doppeldecker erforderte bei der Bedienung eine außerordentliche Aufmerksamkeit des Fliegers, da das Gleichgewicht in erster Linie von der richtigen Stellung des vorn liegenden Höhensteuers abhing. Bei den vielen späteren Bauarten der Drachenflieger hat man das Höhensteuer nach hinten verlegt und hat hinten auch noch besondere wagerechte Flächen angebracht, die die Sicherheit des Fliegens erhöhen; diese Flächen werden Stabilisierungsflächen oder Flossen genannt.

In Deutschland trat zuerst Hans Grade in Magdeburg mit größeren Leistungen hervor, indem er am 30. Oktober 1909 in Berlin eine Strecke von fast 3 km auf einer Maschine zurücklegte, die aus nur deutschem Material gebaut war. Die weitere Entwicklung der Flugzeuge hing besonders von der Schaffung eines leichten und starken Motors ab. Der französische 25 PS-Antoinette-Motor erwies sich als zu schwach. Erst als man Motoren mit 60 bis 100 und mehr PS wählte, stellten sich Dauererfolge ein, da man

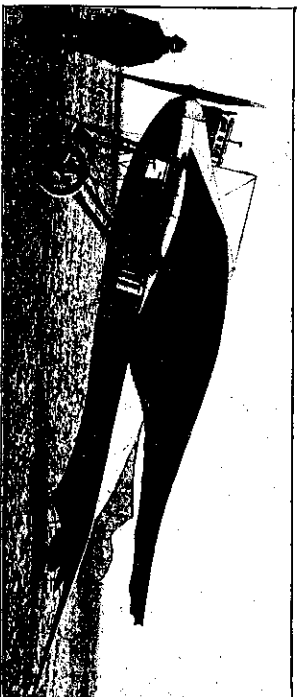


Fig. 463. Die „Tanber“.

durch die große Geschwindigkeit Herr der Böigkeit und Unruhe des Windes wurde, die den Flug am meisten gefährdeten. Sehr bekannt waren bis zum Kriege in Deutschland die durch ihre schöne Form ausgezeichneten Taube Flugzeuge (Fig. 463), deren Tragflächen nach dem Muster des schon erwähnten Zanoma-Samens gebaut waren und daher einen sehr hohen Grad von Stabilität besaßen. Während des Krieges trat die Forderung der Stabilität zurück gegen die der Geschwindigkeit und Wendigkeit, die der Luftkampf erforderte. So entstanden die kleinen, äußerst beweglichen Kampfflugzeuge, größere Zweisitzer für Beobachtung und Aufklärung, endlich die Großflugzeuge und die Riesen- oder R-Flugzeuge mit der Aufgabe, große Sprenglasten zu tragen. Nach dem Kriege sind die Verkehrsflugzeuge in den Vordergrund getreten, große Maschinen zum Transporte von Personen und Poststücken.

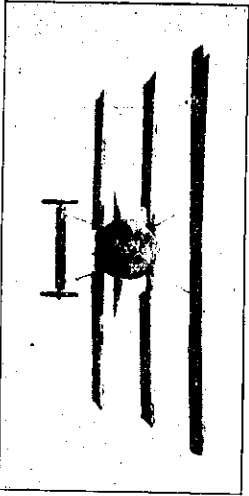


Fig. 464. Deutscher Kampfflugdecker der Fokker-Werke in Schwerin in Meckl.

Anordnung der einzelnen Teile können daraus ohne große Mühe abgelesen werden. Die drei Flügelpaare oder Tragdecks, Oberflügel (O.F.) oder oberes Tragdeck, Mittelflügel (M.F.) oder mittleres Tragdeck und Unterflügel (U.F.) oder unteres Tragdeck sind gegeneinander staffelförmig nach hinten angeordnet. Sie sind nach unten leicht geböhlt, ihr Querschnitt hat tropfenförmige Gestalt (Jonkowski-Profil). Gegen die Richtung der Motorachse, welche beim horizontalen Fluge wagrecht liegt, sind die Tragdecks um Winkel von einigen Grad geneigt. Der Anstellwinkel, die Neigung gegen die Längsachse, nimmt bei modernen Flugzeugen vom Rumpfe des Flugzeuges her nach außen hin meist ab, die Flügel sind also schwach windschief (s. dazu § 119, 1. 3.). Das obere Flügelpaar trägt jenseits einen beweglichen Teil (Q. R.), das Querruder, auch in Fig. 464 erkennbar. Diese Querruder sind mit der Steuerung so verbunden, daß sie gleichzeitig auf der einen Seite angehoben, auf der anderen gesenkt werden. Dadurch erhält diejenige Seite des Flugzeuges einen erhöhten dynamischen Auftrieb, auf der das Querruder den größeren Anstellwinkel hat. Durch die Steuerung des Querruders kann man also das Flugzeug Drehungen um seine Längsachse ausführen lassen, so daß es in die zum Fluge in einer Kurve nötige schräge Lage kommt. Vor der Stirnfläche des Rumpfes befindet sich der Propeller (Pr.). Hinter dem mittleren Tragdeck (M. F.) liegt der Fahrersitz (F. S.), und davor ist auf dem Rumpfe das Maschinengewehr (M. G.) an-

Fig. 464 ist die photographische Aufnahme eines im Kriege herausgekommenen deutschen Kampfflugdeckers der Fokker-Werke (Schwerin in Meckl.), während des Fluges von vorn gesehen.

Fig. 465 bringt die Konstruktionszeichnung desselben Flugzeuges. Sie zeigt es im Auftrieb, Grundriß und in der Vorderansicht. Die Maße in mm und die

gebracht. In Ruhe wird der Rumpf des Flugzeuges von dem Fahrersitz (F. G.) getragen, der Schwanzteil durch den Schwanzsporn (S. Sp.) gestützt, der auch bei der Landung als Bremse dient. Fahrersitz und Schwanzsporn sind in weitem Spielraum federnd mit dem Rumpfe verbunden. Am hinteren Ende des Schwanzteiles befindet sich die Stabilisierungsfläche (S. F.), welche gegen die Achsenrichtung des Motors unter größerem Winkel geneigt ist als die Tragdecks und daher auch tragende Wirkung hat. Sie ist auch in Fig. 464 gut zu erkennen. Am hinteren Teile der Stabilisierungsfläche ist das um eine wagerechte Achse bewegliche Höhensteuer (H. R.) eingelassen. Um eine lotrechte Achse ist das Seitensteuer oder Seitenruder (S. R.) drehbar, mit dessen Hilfe die Wendungen des Flugzeuges unter gleichzeitiger Betätigung der Querruder gegen die Flugrichtung ausgeführt werden.

Fig. 466 bringt noch eine zweite photographische Aufnahme eines Kampfflegers. Es ist ein Fokker-Doppeldecker D. VII. Auf ihr sind die seitlich herausstehenden Querruder im oberen Tragdecke sowie die von der Stabilisierungsfläche abgesetzte Höhensteuerfläche im Schwanzteile gut zu erkennen.

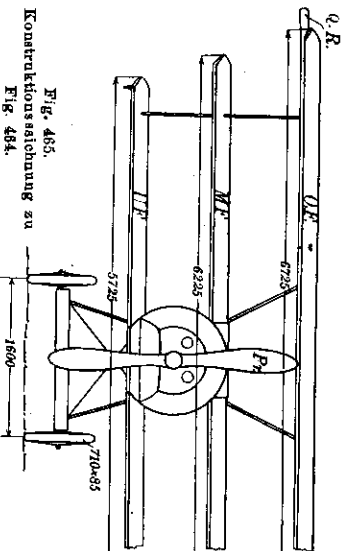
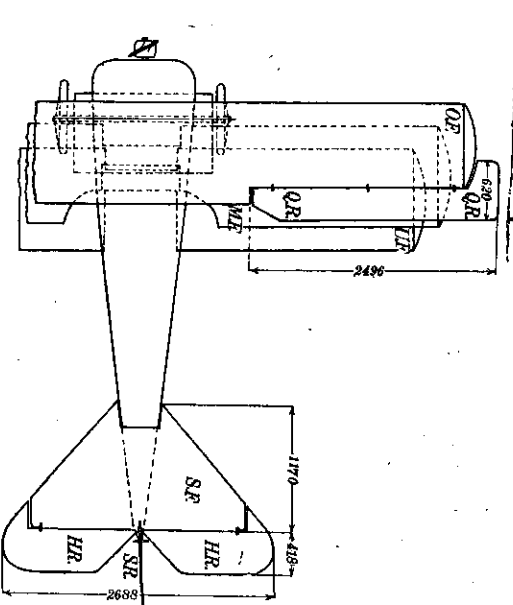
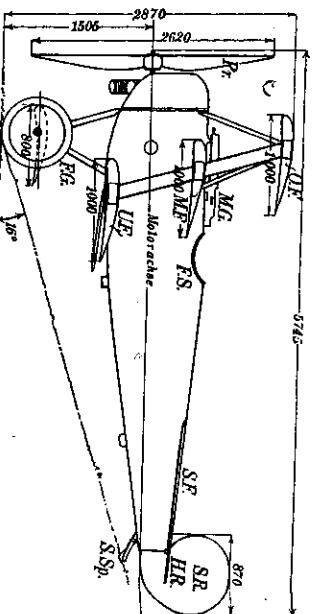


Fig. 465.

Fig. 464.

Konstruktionszeichnung zu

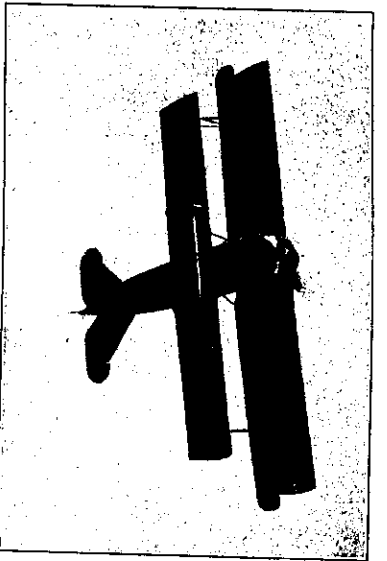


Fig. 166. Fokker-Kampfflugzeug, Doppeldecker D. VII.

leer ist 688 kg, sein Betriebsgewicht für  $1\frac{1}{2}$  Stunden 906 kg. Die gesamte Höhe des Flugzeuges ist 3 m, seine Gesamtlänge 7 m.

Eine noch größere Geschwindigkeit kann der Zweisitzer mit der Bezeichnung Rumpfler C. VII entwickeln, der für Aufklärungswecke verwendet wurde. Bei einer Spannweite von 17—18 m, angetrieben durch einen 260 PS-Maybachmotor, erreicht er eine Geschwindigkeit von über 220 km in der Stunde. Gewaltige Antriebsmotoren besitzen die Riesenflugzeuge. Ein solches deutsches R-Flugzeug hatte etwa 47 m Spannweite und wurde mit Motoren von insgesamt etwa 1800 PS Leistung angetrieben. Es konnte mehrere 1000 kg Nutzlast heben und damit eine Geschwindigkeit von 150 km und Höhen von 6000 m erreichen. Die Bombenbelastung im Kriege war etwa 60—75 Zentner, das würde einem Gewichte von 40—50 Personen entsprechen.

Die während des Krieges als wichtige Kampfmittel geschaffenen Flugzeuge sind zweifellos dazu berufen, auch im Frieden in veränderter Form als schnelle und sichere Verkehrsmittel eine bedeutsame Rolle in der künftigen Kulturentwicklung zu spielen. Es ist im Mai 1919 zuerst dem Führer Reed gelungen, die über 4000 km lange Strecke über den Atlantischen Ocean von Neu-Fundland über die Azoren in drei Abschnitten nach Lissabon in einer Flugzeit von 26 Stunden und 2 Minuten zu überfliegen. Die Maschine war ein amerikanisches Curtiss-Riesenflugboot mit vier 350 pferdigen Liberty-Motoren und hatte eine mittlere Reisegeschwindigkeit von 165 km in der Stunde.<sup>1)</sup>

1) Als erster überdug der Franzose Blériot 1909 den Ärmelkanal, der Franzose Garros 1914 das Mittelmeer. Der erste ununterbrochene Ozeanflug gelang am 14./15. Juni 1919 den Engländern Alcock und Brown auf einem Vickers-Doppeldecker mit zwei Motoren von je 230 PS Leistung. Sie flogen unmittelbar von Neu-Fundland nach Clifton in Irland. Die 3600 km lange Strecke wurde in 16 Stunden 12 Minuten zurückgelegt, die mittlere Reisegeschwindigkeit betrug also 220 km/St.; der Benzinverbrauch war etwa 2700 l.

933

Neben den Flugzeugen haben die Schrauben- und Schwingenflieger keinerlei Bedeutung erlangt. Bei dem Schraubenflieger soll der Auftrieb durch Luftschrauben mit senkrechter Achse bewirkt werden. Es stellen sich jedoch bei den Versuchen große Schwierigkeiten heraus, sowohl hinsichtlich der Stabilität wie der Landung.

Die Schwingenflieger sollen den Vogelflug unmittelbar nachahmen. Bei diesen Apparaten bewegen sich zwei Schwingen auf und ab. Während der Aufwärtsbewegung lassen sie die Luft wie durch ein Ventil hindurch, während sie bei der Abwärtsbewegung als geschlossene Fläche einen Druck nach unten auf die Luft ausüben und den Apparat hierdurch heben sollen. Bisher sind Versuche mit Schwingenfliegern noch nicht von Erfolg gekrönt worden.