

Elfter Abschnitt.

Wetterkunde.

§ 187. Das Wetter.

Der landläufige Begriff „das Wetter“ wird bestimmt durch die Temperatur, die Feuchtigkeit und die Sichtigkeit der Luft, die atmosphärischen Niederschläge, die Verdunstung, den Wind und die Bewölkung, denen sich

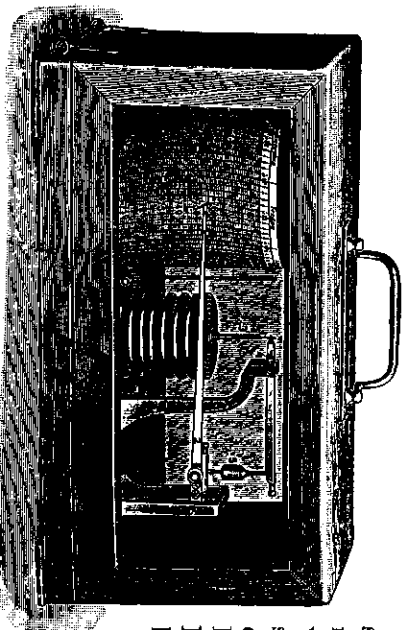


Fig. 600. Barograph.

zeitweilig noch die elektrischen Erscheinungen der Atmosphäre beigesellen. Die wissenschaftliche Wetterforschung hat gelehrt, daß außer diesen Zuständen noch der Luftdruck von besonderer Bedeutung ist, daß er in hohem Maße die anderen Zustände beeinflusst, mit ihnen in Wechselwirkung steht.

Um dem Witterungszustande zahlenmäßige Werte beilegen zu können, bedarf die Wetter-

Kunde oder die Meteorologie¹⁾ aller der Instrumente, mit deren Hilfe die genannten Zustände der Atmosphäre gemessen werden können.

1. Luftdruck. Zur Messung des Luftdruckes dient das Quecksilberbarometer; daneben findet das Aneroidbarometer Verwendung, und zwar besonders in der Form des selbstaufzeichnenden Barometers, des Barographen (Fig. 600). Bei diesem sind mehrere Aneroiddosen zu einer Säule so zusammengesetzt, daß sich ihre Formänderungen summieren; dadurch wird das Hebelwerk zur Übertragung der Formänderungen auf einen Zeiger, dessen äußerstes Ende eine Schreibfeder trägt, vereinfacht. Die Schreibfeder berührt eine durch ein Uhrwerk getriebene, sich in 24 Stunden oder in einer Woche einmal ganz herumdrehende, mit einem Papierstreifen bespannte Trommel und zeichnet auf ein vorgedrucktes Koordinatensystem den Barometerstand selbstständig in der

1) Vom griech. *metéōros* = in der Luft befindlich; *meteorologia* = Lehre von in der Luft befindlichen Dingen.

Form einer fortlaufenden Kurve (Barogramm) auf. Aus dem Barogramm kann dann der Barometerstand, der in irgendeinem Augenblicke geherrscht hat, abgelesen werden; auch sind die Veränderungen des Barometerstandes leicht zu übersehen. Die Aneroidbarometer und -Barographen sind jedoch nur Interpolationsinstrumente, deren Aufzeichnungen auf die Ablesungen eines Normalinstrumentes (Quecksilberbarometers) bezogen werden müssen.

Um die Barometerstände verschiedener Beobachtungsorte vergleichen zu können, muß man den abgelesenen Barometerstand auf Meereshöhe umrechnen. Bei der bekannten Höhe des Beobachtungsortes kann die Umrechnung mit Hilfe der in § 104 abgeleiteten, etwas unzuverlässigen barometrischen Höhenformel vorgenommen werden. Für geringe Höhen genügt es, zum abgelesenen Barometerstand auf je 11 m Höhe 1 mm hinzuzuzählen, um den gewünschten Barometerstand zu erhalten.

2. Die Temperatur. Neben dem gewöhnlichen Quecksilberthermometer findet der selbstaufzeichnende Thermograph Anwendung (Fig. 601). Der wesentliche Bestandteil ist ein Metallthermometer, das aus zwei verschiedenen Metallstreifen zusammengesetzt ist (Fig. 501), oder, wie in dem in Fig. 601 abgebildeten Apparate, eine kurze, mit Flüssigkeit gefüllte Bourdonsche Röhre (§ 102). Bei einer Erhöhung der Temperatur dehnt sich die in der Bourdonschen Röhre eingeschlossene Flüssigkeit mehr aus als die Rohrwandungen; infolgedessen wird der Innendruck vergrößert. Die Krümmung der Röhre wird verringert, und eine am Ende der Röhre angebrachte Stange überträgt die Bewegung des Rohrendes durch ein einfaches Hebelwerk auf einen Schreibstift, der die Temperatur dauernd auf eine langsam sich drehende Trommel anzeichnet. Wie der Barograph ist auch der Thermograph kein Normal-, sondern ein Interpolationsinstrument.

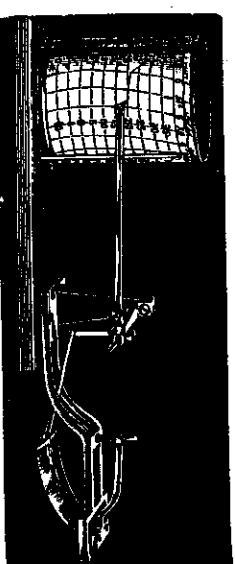


Fig. 601. Thermograph.

Dort, wo weder ein Thermograph aufgestellt werden kann, noch auch häufiger am Tage Ablesungen eines gewöhnlichen Thermometers vorgenommen werden können, mißt man nur die höchsten und tiefsten Tagestemperaturen. Diese liefern die sogenannten Extremthermometer. Auf den meteorologischen Beobachtungsstationen werden zur Bestimmung der höchsten und niedrigsten Temperaturen zwei besondere Apparate verwendet. Das Maximumthermometer ist ein wagerecht gelagertes Quecksilberthermometer (Fig. 602, unteres Therm.). Dieses besitzt (wie das medizinisch gebrauchte Fieberthermometer) eine verengte Stelle in der Quecksilberkapillare, durch welche das Quecksilber bei steigender Temperatur zwar hindurchfließt, bei abnehmender

dasgegen abreißt und dabei in der Röhre liegen bleibt. Das äußere Ende dieses Quecksilberfadens zeigt dann den Höchstwert der Temperatur an. Für die nächste Beobachtung muß der Faden des Thermometers durch ein- oder mehrmaligen kräftigen Ruck mit dem Quecksilber in der Kugel wieder zur Vereinigung gebracht und dadurch das Thermometer neu eingestellt werden. — Bei dem Minimumthermometer (Fig. 602, oberes Therm.) enthält das thermometrische Gefäß und die Kapillare Wein-geist oder Toluol. Auch dieses wird wagerecht gelagert. Ein in der Kapillare verschiebbares, mit verdicktem Ende versehenes Glasstäbchen wird bei abnehmender Temperatur mit zurückgenommen, bei zunehmender hingegen bleibt es an seiner Stelle liegen. Die Neuenstellung erfolgt durch Neigen des Thermometers, wodurch das Glasstäbchen wieder an das Ende des Flüssigkeitsfadens rückt.

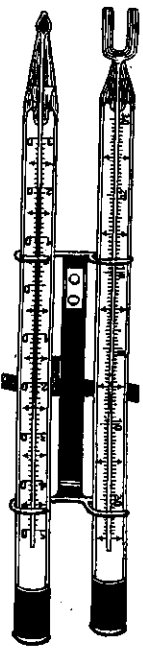


Fig. 602. Maximum- (unteres) und Minimum- (oberes) Thermometer.

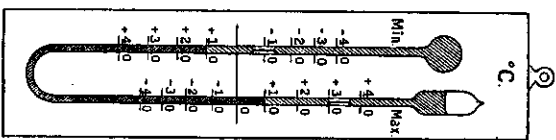


Fig. 603. Maximum- und Minimumthermometer nach Six.

Erwähnt sei hierbei noch ein in Deutschland viel verbreitetes vereinigtes Maximum- und Minimumthermometer (Fig. 603), das von Six¹⁾ (1782) angegeben wurde. Es gerät ziemlich leicht in Unordnung und wird deshalb in der Meteorologie nicht benutzt. Dieses Sixsche Thermometer besteht aus einem U-förmig gebogenen, an den Enden zu geschlossenen Erweiterungen aufgeblasenen Glasrohr, das im unteren Teile einen Quecksilberfaden enthält. Die Minimumseite ist vollständig mit Weingeist gefüllt; die Maximumseite enthält ebenfalls Weingeist, der aber das Gefäß am oberen Ende nicht vollständig anfüllt. Der Quecksilberfaden dient nur als Anzeiger, während der Weingeist im linken Schenkel die eigentliche thermometrische Substanz ist. Wenn sich der Weingeist im linken Schenkel beim Erwärmen ausdehnt, drückt er den Quecksilberfaden im linken Schenkel hinunter, im rechten Schenkel in die Höhe. An beiden Quecksilberkuppen kann man die augenblicklich herrschende Temperatur ablesen. Der Quecksilberfaden schiebt bei seiner Bewegung auf beiden Seiten ein kleines Eisenstäbchen vor sich her, das mit einem federnden Glasfaden versehen ist, die es mit leichter Reibung an irgendeiner Stelle des Rohres festhalten, damit es beim Zurückgehen des Quecksilberfadens nicht von selbst wieder herunterfällt. Die beiden Eisenstäbchen werden also bis zu den äußersten Grenzlagen des Quecksilberfadens vorgeschoben und bleiben hier liegen; sie zeigen daher mit ihren unteren Enden die höchste und niedrigste Temperatur an, die im Verlaufe eines gewissen Zeitraumes erreicht worden ist. Um das Thermometer wieder zu einer neuen Beobachtung tauglich zu machen,

1) James Six (+ 1793).

bringt man die beiden Eisenstäbchen mit einem kleinen Magneten, mit dem man am Glasrohr von oben nach unten entlang fährt, wieder bis zur Berührung mit den beiden Quecksilberkuppen.

Die Thermometer müssen so aufgestellt werden, daß sie die wahre Lufttemperatur anzeigen, sie müssen also vor Sonnenstrahlen und auch vor der Wärme- und Kälteausstrahlung benachbarter Wände geschützt werden. Man stellt sie deshalb in weiß angestrichenen, hoch aufgestellten Kästen mit jalousieartigen Wänden auf, durch die die Luft ungehindert hindurchwehen kann, in die aber die Sonnenstrahlen nicht eindringen können.

Besonders zuverlässig kann die Lufttemperatur mit dem Abmann¹⁾-schen Aspirations-thermometer gemessen werden. Bei diesem Instrumente ist das Thermometer durch eine gut polierte Schutzhülle gegen Wärmestrahlen geschützt (S. 572). Ein kleines Windrädchen, das durch ein Uhrwerk in Gang gesetzt wird, sorgt für geregelte Luftzufuhr von außen.

In § 156 ist schon auseinandergesetzt worden, daß die Lufttemperatur in höheren Regionen infolge der adiabatischen Ausdehnung der Luft niedriger ist als an der Erdoberfläche; daher muß bei vergleichenden Untersuchungen, z. B. auch bei der Aufertigung der Isothermenkarten (S. 627 u. 628) die an höher gelegenen Beobachtungsorten abgelesene Temperatur, ähnlich wie schon beim Barometerstande angegeben, auf Meereshöhe bezogen werden. Da aber die aus dieser Ausdehnung allein berechnete Temperaturdifferenz durch die Kondensationswärme des Wasserdampfes vermindert wird, so kann die Umrechnung der Temperaturangaben nicht nach einer einheitlichen Formel erfolgen. Es werden vielmehr die Mittelwerte der wirklich beobachteten Temperaturabnahme zur Umrechnung benutzt.

In Norddeutschland beträgt die durchschnittliche Temperaturabnahme mit der Höhe auf je 100 m im

Januar 0,39°	Mai 0,70°	September 0,56°
Februar 0,50°	Juni 0,70°	Oktober 0,58°
März 0,64°	Juli 0,67°	November 0,47°
April 0,69°	August 0,64°	Dezember 0,45°

im Jahre also durchschnittlich 0,58°.

3. Die Niederschläge. Die Niederschlagsmenge wird mit Hilfe des Regenmessers (Fig. 604) bestimmt. Der Regenmesser ist ein im Freien aufgestelltes zylindrisches Blechgefäß, dessen obere Öffnung bei den in Deutschland gebräuchlichen Apparaten gewöhnlich 100 oder 200 cm² groß ist. Die in diese Öffnung fallende Regenmenge wird mittels eines eingelöteten Trichters in einem oben engen Gefäße gesammelt; dann wird ihr Volumen mit dem Maßzylinder bestimmt. Sind während eines Tages 50 bzw. 100 cm³ Regenwasser in dem Gefäße gesammelt worden, so beträgt die Niederschlagshöhe des Tages 5 mm, denn die Wassermenge



Fig. 604. Regenmesser.

1) S. S. 468.

wirde, wieder auf 100 bzw. 200 cm² ausgebreitet, eine Schicht von 5 mm Höhe ergeben. — Gewöhnlich besitzen die Regenmesser eine Teilung, an der man unmittelbar die Regenhöhe in mm ablesen kann.

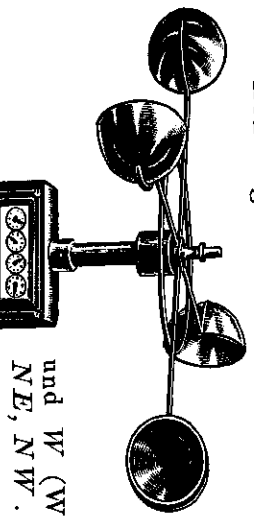


Fig. 605. Robinson'sches Schalenkreuz-Anemometer.

4. Der Wind. Die Windrichtung wird an einer hoch- und freistehenden Windfahne abgelesen. Die Hauptwindrichtungen werden mit N (Norden), E (Osten), S (Süden) und W (Westen) bezeichnet. Zwischenrichtungen sind NE, NW . . . , NNE usw.

Die Windstärke (Windgeschwindigkeit) bestimmt man mit dem Anemometer¹⁾, das für zuverlässige Messungen mit dem Robinson'schen Schalenkreuz (Fig. 605) ausgestattet wird. Das Schalenkreuz dreht sich im Winde immer in demselben Sinne, die emporgewölbte Seite der Schalen nach vorn, einerlei von woher der Wind weht (S. 343). Die Windgeschwindigkeit ist durchschnittlich $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie die lineare Geschwindigkeit der Schalen des Schalenkreuzes.

Für die Angabe der Windstärke (Tab. XV) ist die 12stufige Beaufort-Skala gebräuchlich. Es bedeutet in ihr

Windstärke	0	1	2	3	4	5	6
	mittlere Windgeschwindigkeit in m/sec	0	1,7	3,1	4,8	6,7	8,8
Art des Windes	Windstille	leiser Zug	leichter Wind	schwacher Wind	mäßiger Wind	frischer Wind	starker Wind
	Windstärke	7	8	9	10	11	12
Art des Windes	steifer Wind	stürmischer Wind	Sturm	voller Sturm	schwerer Sturm	Orkan	
	mittlere Windgeschwindigkeit in m/sec	12,9	16,4	18,0	21,0	(25)	(30)

Der englische Admiral Beaufort hatte die nach ihm benannte Skala der Windstärken 1805 eingeführt.

Die Windstärke wird auch mit Drucktafel bestimmt. Das sind rechteckige Tafeln, die an ihrer oberen Kante als Drehungsachse aufgehängt werden. Die Drucktafel wird je nach der Windstärke gehoben. Aus dem Hebungswinkel kann dann die Windstärke bestimmt werden (S. 342).

1) *ánemos* (Griech.) = Wind. 2) Th. B. Robinson (1792—1882).

Zwischen der Windgeschwindigkeit und dem vom Winde ausgeübten Druck besteht die durch folgende Tabelle dargestellte Beziehung (s. dazu § 110):

Windgeschwindigkeit in m/sec	1	2	4	6	7	9	12	15	20	24	36
Winddruck in kg/m ²	0,13	0,54	2,20	4,87	6,40	10,97	19,5	30,5	54,2	78,0	177

5. Die Bewölkung. Der Grad der Bewölkung wird durch die Angabe gekennzeichnet, wie viele Zehntel des ganzen Himmels mit Wolken bedeckt sind; hierbei wird durch 0 angegeben, daß der Himmel wolkenlos, durch 10, daß der ganze Himmel bedeckt ist. In den Wetterkarten wird durch den Grad der Ausfüllung der Kreise, die einen Beobachtungsort bezeichnen, der Grad der Bedeckung angedeutet. Man begnügt sich hier mit der Angabe der Viertel der Bedeckung angedeutet. Man begnügt sich hier mit der Angabe der Viertel der Bedeckung angedeutet. Man begnügt sich hier mit der Angabe der Viertel der Bedeckung angedeutet. Man begnügt sich hier mit der Angabe der Viertel der Bedeckung angedeutet.

Um die Art der Bewölkung bezeichnen zu können, hat zuerst Hova (1772—1864) drei Grundformen der Wolken unterschieden; sie heißen: 1. Federwolke oder der Cirrus, feine weiße, fadenförmige oder faserige Wolken, die den höchsten Luftschichten (8—10 km Höhe) eigen sind; sie bestehen aus feinen Eisnadeln, 2. die Hartenwolke oder der Cumulus, dunn dichte Wolken von oben abgerundeten Formen, die, wenn sie von oben beleuchtet werden, von weitem großen Baunwollenballen oder fernen, mit Schichten bedeckten Gebirgen ähnlich sehen, 3. die Schichtwolke oder der Stratus eine niedrige, weit ausgedehnte, zusammenhängende Wolkenschicht. Sie breitet sich oft über den ganzen Himmel aus und zeigt dann keine besondere Struktur der Stratus ist die Bewölkung, die den Himmel „grau in grau“ erscheinen läßt. Wenn sie nur in der Nähe des Horizontes auftritt, erscheint sie breite horizontale Streifung des Himmels.

Schon bei Howard hat sich eine Charakterisierung der Zwischenformen und eine weitergehende Klassifizierung als nötig erwiesen. Nach internationaler Vereinbarung (Paris 1889) werden jetzt allgemein 10 Wolkenformen unterschieden: Cirrus, Cirro-Stratus, Cirro-Cumulus, Alto-Cumulus (4 = hoch), Alto-Stratus, Strato-Cumulus, Nimbus (Regenwolke), Cumulus, nimbo-Nimbus (Gewitterwolke) und Stratus.

Von Interesse ist ferner noch der Zug der Wolken, der mit dem Wolkenspiegel beobachtet wird. Der Wolkenspiegel ist ein runder wogerechter Spiegelfläche auf dem die Haupt-Himmelsrichtungen angegeben sind. Man beobachtet auf dem Spiegelbildes der Wolken und schiebt daraus auf die Zugrichtung der Wolken selbst.

6. Die Feuchtigkeit wird am einfachsten mit Hilfe der im § 148 beschriebenen Hygrometer gemessen und gewöhnlich als relative Feuchtigkeit angegeben. 7. Von den elektrischen Erscheinungen der Atmosphäre (Gewittern usw.) wird noch im Anschlusse an die Elektrizität (Bd. II) die Rede sein.

§ 188. Die meteorologischen Beobachtungsstationen.

Der große Einfluß, den das Wetter auf die Tätigkeit der Menschen ausübt, hat schon seit den ältesten Zeiten den Wunsch rege werden lassen, das Wetter zu erforschen und womöglich, das Wetter voraussagen. Von einer wirklichen Erforschung kann aber erst dann die Rede sein, wenn man die Wetterelemente messend verfolgen kann. So gehen die ersten meteorologischen Beobachtungen auf die Zeit der Erfindung des Thermometers und des Barometers, also auf die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts zurück (Leibniz). Abgesehen von den Beobachtungen, die von einzelnen Gelehrten, besonders von Physikern, Geistlichen und Lehrern, gemacht worden sind, haben sich zuerst die Sternwarten mit meteorologischen Wissenschaften in Paris reich im Jahre 1666 gegründete Akademie der Wissenschaften in Paris reichete bald nach ihrer Gründung an zahlreichen Orten feste Beobachtungsstationen ein, auf denen der veränderliche Zustand der Atmosphäre regelmäßig gemessen werden sollte. Die Hauptschwierigkeit für die Beobachtungen und für die Möglichkeit, diese zu vergleichen, bestand in der Verschiedenheit der Meßinstrumente und besonders in dem Fehlen von einheitlich geregelten Skalen.

Erst gegen das Ende des achtzehnten Jahrhunderts gelang es den Bemühungen Alexander von Humboldts (1769—1859), die Regierungen des englischen und russischen Reiches zur Einrichtung zahlreicher meteorologischer Stationen zu veranlassen, die ihre Beobachtungen in übereinstimmender Weise ausführten. Diesem Beobachtungsnetze schloß sich dann das Gebiet der Vereinigten Staaten von Nordamerika auf die Anregung von Maury an. In Deutschland organisierten Mahlmann und H. W. Dove¹⁾ von Berlin aus die meteorologischen Stationen.²⁾ Dove war seit 1848 Direktor des im Jahre 1846 gegründeten Preussischen Meteorologischen Instituts in Berlin.

Deutschland besitzt heute über 300 meteorologische Stationen, auf denen dreimal täglich, um 7 Uhr morgens, um 2 Uhr nachmittags und um 9 Uhr abends die wichtigsten meteorologischen Elemente regelmäßig gemessen werden. Das Preussische Meteorologische Institut unterscheidet, internationalen Brauche gemäß, je nach dem Umfange und der Art der Beobachtungsstationen Stationen I., II. und III. Ordnung, ferner Regen- und Gewitterbeobachtungsstationen.

Auf den Stationen erster Ordnung werden die einzelnen Witterungsselemente außer zu den oben angegebenen regelmäßigen Beobachtungszeiten auch fortlaufend durch selbstregistrierende Instrumente aufgezeichnet. Diese Stationen unterstehen Fachleuten oder besonders vorgebildeten Beobachtern.

1) Der erste Direktor war Mahlmann, der schon 1848 auf einer Dienstreise in

Breslau starb. Dann kam Dove (1803—1879), der alles nahezu fertig übernahm.

2) Der Tübinger Prof. Gustav Schtöbler richtete 1832 in Würtemberg, zur selben Zeit der Minister W. v. Goethe im Großherzogtum Sachsen-Weimar zahlreiche Beobachtungsstationen ein.

§ 188. Die meteorologischen Beobachtungsstationen

Auf den Stationen zweiter Ordnung werden täglich dreimal Beobachtungen über Luftdruck, Temperatur und Feuchtigkeit der Luft, über Wind, Richtung, Niederschläge und andere meteorologische Erscheinungen angestellt. Auf den Stationen dritter Ordnung werden dreimal täglich dieselben Beobachtungen wie an den Stationen zweiter Ordnung gemacht, jedoch mit Ausnahme des Luftdruckes und der Luftfeuchtigkeit.

Durch diese Stationen werden die Wetterverhältnisse an der Erdoberfläche, d. h. in Luftschichten von sehr geringer Höhe, verfolgt. Hier werden aber die meteorologischen Elemente vielmehr als in höheren Schichten lokalen Störungen beeinflusst. Daher haben die an diesen Stationen gewonnenen Beobachtungsergebnisse vielfach nur lokale Bedeutung, und die Beobachtungen gezogenen Schlüsse können, wenn die lokalen Störungen stark sind, nicht verallgemeinert werden. Aus diesem Grunde ist es früh das Bedürfnis nach Stationen hervorgerufen, auf denen die Vorgänge in höheren Schichten der Atmosphäre beobachtet und untersucht werden können. Dies geschieht einerseits auf hochgelegenen Wetterwarten, wie sie z. B. in dem Eiffelturm in Paris (332 m Meereshöhe) oder auf hohen Bergen, dem Sonnblick in den Hohen Tauern (3105 m), der Zugspitze (2965 m) und Schneekoppe (1605 m), dem Brocken (1141 m), dem Feldberg im Taunus eingerechnet worden sind, und andererseits durch Untersuchungen in Luftballonen, Luftdrachen und Flugzeugen.

Mit einem bemannten Ballon haben die beiden deutschen Meteorologen Berson und Stüring¹⁾ am 31. Juli 1901 die größte Höhe von 10800 m erreicht. Die Luft ist in diesen Höhen schon so dünn, und ihr Gehalt an Sauerstoff so gering, daß das Atmen der freien Luft den Lungen nicht genügt. Sauerstoffzufuhr, daher ist die Mitnahme von Behältern mit reinem Sauerstoff notwendig, aus dem die Beobachter ihren Bedarf an Sauerstoff entnehmen. Ebenso ist guter Schutz gegen die grimme Kälte notwendig.

Die unbemannten Fesselballone bestehen aus Gummihüllen, die mit Wasserstoffgas gefüllt werden, und mit einem leichten Meteorograph (bestehend aus Barograph, Thermograph, Hydrograph und Anemograph) gerüstet sind. Sie werden besonders dann zur Feststellung der meteorologischen Verhältnisse in den höheren Luftschichten benutzt, wenn Wind oder schwache Luftbewegung in den niederen Schichten ein Aufblasen des Drachens unmöglich machen.

Mit der Verwendung unbemannter Freiballone hat Teisserenc de Bots²⁾ seit 1898 Versuche gemacht, und seinem Beispiele ist man weiter gefolgt. Die größte Höhe, die bisher mit einem solchen Registrierballon erreicht worden ist, beträgt bereits über 30 km. Diese höchsten Ballonaufstiege sind besonders für das Studium der Temperatur in den oberen Schichten der Atmosphäre große Bedeutung erlangt.

Die wissenschaftlichen Drachenaufstiege sind zuerst in Ameri-

1) R. Stüring, Prof., Potsdam, Meteorol. Observatorium.

Australien (Hargrave (S. 347), Neusüdwalles), und zwar seit dem Anfange der neunziger Jahre des verfloßsenen Jahrhunderts gemacht worden. Die größten Drachenstationen Deutschlands befinden sich in Lindenberg (Kreis Beeskow, bei Berlin), in Friedrichshafen am Bodensee und in Alkenwalde bei Cuxhaven. Meist wird der Kastendrache (§ 110) benutzt, in dessen Innern ein bereits oben erwähnter Meteorograph angebracht ist. Man verwendet mehrere hintereinander gespannte Drachen, indem man die Leine des höheren Drachen an der Oberseite des nächst tieferen befestigt, oder indem man von der Leine, die den obersten Drachen hält, Nebenleinen abzweigt, an denen die tieferen Drachen befestigt sind, die dann nur die Aufgabe haben, die Leine des höchsten Drachen zu tragen.

So hat man auch mit dem Drachen bedeutende Höhen gewinnen können. Die höchste Höhe von 7000 m wurde am Mount Weather Observatorium in Amerika im Jahre 1908 erreicht.

An einer Reihe von Stationen läßt man ferner bei günstiger Witterung kleine, mit Wasserstoff gefüllte Pilotballone aus Gummi oder Papier steigen, die mit einem für diese Zwecke besonders gebauten Theodoliten (§ 4) oder einem der früher in der Armee gebräuchlichen Entfernungsmeßer verfolgt werden, so daß ihre Flugbahn — und damit Windrichtung und Windgeschwindigkeit — festgestellt werden kann. Dieses Verfahren wird neuerdings auch zur Bestimmung der Windverhältnisse in den höheren Schichten über dem freien Ozean mit Erfolg angewendet.

Seit kurzer Zeit werden auch im Flugzeuge¹⁾ Meteorographen eingebaut, um auf diese Weise Kenntnisse von den meteorologischen Verhältnissen in der freien Atmosphäre zu gewinnen.

§ 189. Ordnung der Beobachtungsergebnisse. Klima.

Die große Zahl der Einzelbeobachtungen erfordert ein besonderes Ordnungssystem, da die erhaltenen Werte sonst durch ihre Menge geradzuerdrückend wirken und jede Übersicht unmöglich machen würden. Je nachdem beabsichtigten Zwecke geschieht die Ordnung auf besondere Weise. Ein Weg besteht darin, daß man aus allen Beobachtungen derselben Art, die sich auf einen größeren oder kleineren Zeitraum erstrecken, einen Mittelwert bildet.

Als Beispiel der Bildung eines Mittelwertes wählen wir das Tagesmittel der Temperatur. Würde man stündlich Thermometerablesungen machen, und würde man die Ablesungen eines Tages addieren und durch 24 teilen, so erhielte man das wahre Tagesmittel der Temperatur.

Wählt man statt dessen zweistündliche oder dreistündliche Ablesungen des Thermometers, so wird das berechnete Tagesmittel ungenauer; noch un-

1) Der Feindbund hat der Deutschen Seewarte zwei Flugzeuge zu diesem Zwecke frei gegeben.

§ 189. Ordnung der Beobachtungsergebnisse. Klima

genauer wird es, wenn die Beobachtungstermine noch weiter auseinander liegen. Da es aber praktisch kaum angängig ist, daß jede Stunde, Tag und Nacht hindurch, Thermometerablesungen gemacht werden, sofern man nicht selbstaufzeichnende Thermometer verwendet, hat man versucht, das wahre Tagesmittel aus nur wenigen Beobachtungen zu berechnen. Für klimatologische Zwecke hat man die drei Beobachtungstermine: 7 Uhr morgens, 2 Uhr nachmittags und 9 Uhr abends (nach Ortszeit) gewählt. Aus diesen drei Beobachtungen berechnet man das Tagesmittel. Das geschieht z. B. für die mittlere Temperatur, indem man zu der 7 Uhr-Beobachtung die 2 Uhr- und die doppelte Abendbeobachtung addiert und die Summe durch 4 teilt. Auch durch Bildung des arithmetischen Mittels aus der höchsten und niedrigsten Tagestemperatur läßt sich ein — allerdings etwas zu hohes — Tagesmittel gewinnen. Bei den übrigen meteorologischen Elementen erfolgt die Berechnung des Tagesmittels, falls dreimal täglich beobachtet wird, einfach durch Bildung des arithmetischen Mittels aus den Beobachtungen, da die täglichen Schwankungen bei ihnen in nicht so ausgeprägter Weise hervortreten wie bei der Temperatur. Für die Wettertelegraphie ist es erwünscht, die Beobachtungszeiten für ein großes Gebiet gleichzeitig zu wählen; eine internationale Einigung ist hierin noch nicht erzielt worden, jedoch wird eine Einigung auf die Zeiten 8 Uhr vormittags, 2 Uhr nachmittags und 7 Uhr abends (M. E. Z.) angestrebt.

In ähnlicher Weise werden aus den Tagesmitteln die Monatsmittel und die Jahresmittel, ebenso auch die Mittel für größere Zeiträume gebildet. Ein so gebildeter Mittelwert genügt aber nicht, um den Verlauf einer Erscheinung klar darzustellen, da alle Abweichungen vom Mittelwerte bei seiner Bildung verschwinden. Um ein naturgetreues und übersichtliches Bild von dem Verlaufe einer Erscheinung in ihrer Abhängigkeit von der Zeit zu erhalten, macht man von der Methode der graphischen Darstellung Gebrauch, indem man die Zeit als Abszisse und das zu untersuchende Witterungselement als Ordinate aufträgt und diese zur Zeichnung einer Kurve (Schnulnie) benutzt.

Als einfachste Beispiele hierfür können u. a. die Barogramme und die Thermogramme der selbstaufzeichnenden Apparate dienen, bei denen sich infolge der gleichmäßigen Umdrehung der den Papierstreifen tragenden Trommel die Zeit und der in jedem Augenblicke herrschende Luftdruck oder die Temperatur selbständig als Koordinaten auftragen und eine Kurve zeichnen, aus der man den Verlauf der Erscheinungen sofort ablesen kann.

Ein solches Barogramm enthält nun natürlich auch alle Abweichungen, die zufälligen Einflüssen entsprechen, die also etwa von Tag zu Tag wechseln. Bei der außerordentlichen Mannigfaltigkeit der Witterungsercheinungen und der diese beeinflussenden Faktoren sagt ein solches Bild aber nicht viel. Deshalb muß man die Beobachtungen vorerst in einer dem beabsichtigten Zwecke entsprechenden Weise ordnen. Man muß insbesondere die Zufälligkeiten dadurch zu beseitigen suchen, daß man aus einer großen Anzahl von einzelnen,

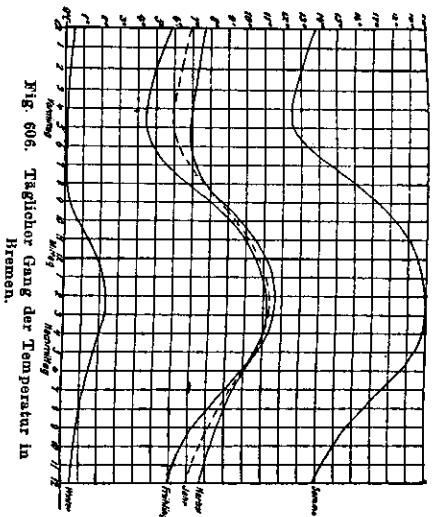


Fig. 606. Täglicher Gang der Temperatur in Bremen.

ursachen muß, so würden sich bei der Darstellung aller Beobachtungen des Jahres diese beiden Perioden vollständig überdecken und eine verwickelte Kurve ergeben, aus der jede einzelne Periode schwer zu erkennen ist. Will man aber nur eine dieser Perioden untersuchen, z. B. die tägliche Periode der Temperatur, so bildet man zuerst für jede Stunde des Tages die Mittelwerte aller im Laufe des Jahres beobachteten Temperaturen und zeichnet hiernach die Kurve des täglichen Ganges der Temperatur des Beobachtungsortes. So ist die in Fig. 606 gestrichelt abgebildete Kurve, die sich auf den Beobachtungsort Bremen bezieht, entstanden. Die anderen in derselben Figur erhaltenen Kurven zeigen den täglichen Gang der Temperatur, berechnet aus Mittelwerten der einzelnen vier Jahreszeiten. In diesen Kurven kommt die tägliche Periode gut zum Ausdruck. Insbesondere erkennt man, daß die höchste Temperatur erst gegen 2—3 Uhr nachmittags, die niedrigste gegen 5 Uhr morgens erreicht wird.

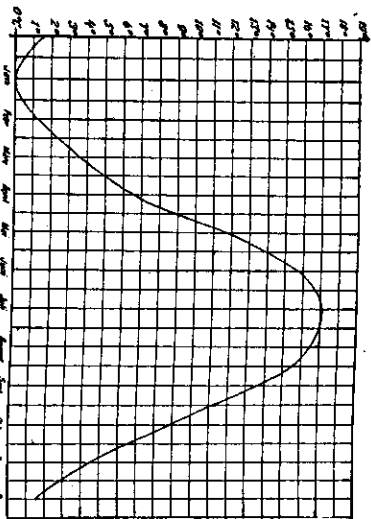


Fig. 607. Jährlicher Gang des Temperatur-Tagesmittels in Bremen.

unmittelbar beobachteten Werten, die noch mit allen durch die zufälligen Einflüsse verursachten Abweichungen versehen sind, die entsprechenden Mittelwerte bildet. Dann erst stellt man diese Mittelwerte in ihrer Abhängigkeit von der Zeit in einer Kurve dar.

Bedenken wir z. B., daß die Änderung der Stellung der Sonne zu einem Punkte der Erdoberfläche im Laufe des Tages und zur ganzen Erde im Laufe eines Jahres periodische Änderungen der Witterungselemente eines Ortes veranlaßt, so würden sich bei der Darstellung aller Beobachtungen des Jahres diese beiden Perioden vollständig überdecken und eine verwickelte Kurve ergeben, aus der jede einzelne Periode schwer zu erkennen ist. Will man aber nur eine dieser Perioden untersuchen, z. B. die tägliche Periode der Temperatur, so bildet man zuerst für jede Stunde des Tages die Mittelwerte aller im Laufe des Jahres beobachteten Temperaturen und zeichnet hiernach die Kurve des täglichen Ganges der Temperatur des Beobachtungsortes. So ist die in Fig. 606 gestrichelt abgebildete Kurve, die sich auf den Beobachtungsort Bremen bezieht, entstanden. Die anderen in derselben Figur erhaltenen Kurven zeigen den täglichen Gang der Temperatur, berechnet aus Mittelwerten der einzelnen vier Jahreszeiten. In diesen Kurven kommt die tägliche Periode gut zum Ausdruck. Insbesondere erkennt man, daß die höchste Temperatur erst gegen 2—3 Uhr nachmittags, die niedrigste gegen 5 Uhr morgens erreicht wird.

Diese Kurve veranlaßt die Frage, woher es kommt, daß die höchsten und tiefsten Temperaturen des Tages nicht mit den Kulminationen der Sonne zusammenfallen; sie zwingt zu dem Schlusse, daß die Erdoberfläche nicht sofort während der Einstrahlung der Sonnenstrahlen die dieser entsprechende Temperatur annimmt, sondern daß erst eine gewisse Zeit vergehen muß, um der Masse der Erdoberfläche die zur Temperaturerhöhung erforderliche Wärmemenge zuzuführen.

In ähnlicher Weise wie Fig. 606 ist die in Fig. 607 abgebildete

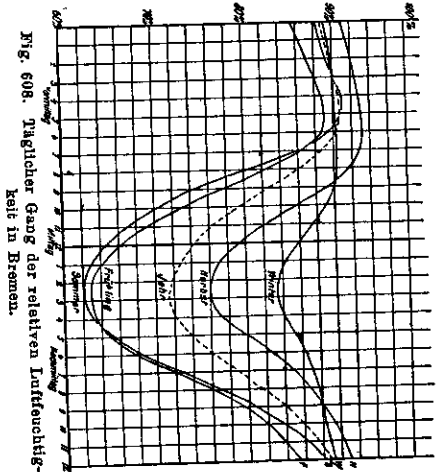


Fig. 608. Täglicher Gang der relativen Luftfeuchtigkeit in Bremen.

Kurve des jährlichen Ganges des Temperaturtagesmittels in Bremen gezeichnet. Hier kommt die jährliche Periode klar zum Ausdruck. In Fig. 608 ist der tägliche Gang der relativen Luftfeuchtigkeit desselben Beobachtungsortes Bremen abgebildet. Ein Vergleich dieser Kurve mit der Kurve des täglichen Ganges der Temperatur (Fig. 606) legt die Frage nahe, warum die höchste Tagestemperatur zu derselben Tageszeit herrscht, wie die niedrigste relative Luftfeuchtigkeit. Bedenken wir nun, daß mit der Erhöhung der Temperatur der Luft auch die Sättigungsmenge wächst, so ist die Erklärung dafür, daß die beiden Kurven fast entgegengesetzt laufen, nicht schwer zu finden.

Als weiteres Beispiel ist die Kurve des täglichen Ganges des Luftdruckes in Bremen in Fig. 609 abgebildet. Die Kurve regt sofort die Frage nach dem Grunde für die doppelte Periode des Luftdruckes an, die wir hier aber nicht weiter behandeln können.

In einzelnen Fällen gibt man nicht die Mittelwerte der Witterungselemente an, sondern man bildet nur die Summe. Es ist z. B. gebräuchlich, die Niederschlagsmenge an einem Orte durch die während eines Zeitraumes gefallene gesamte Regenhöhe zu kennzeichnen.

Zur Ergänzung der Mittelwerte dient noch die Kenntnis der extremen Werte, d. h. der größten und kleinsten Werte der beobachteten Größen, da ja die Mittelwerte auf sehr verschiedene Weise zustande kommen können.

Herner ist die Kenntnis der Häufigkeit einer Erscheinung oft von großem Nutzen. So ist es z. B. erwünscht, die Anzahl der Tage zu kennen, an denen die Sonne geschienen hat, an denen es geregnet hat, an denen die Regenhöhe einen bestimmten Betrag erreicht oder überschritten hat. Ebenso bestimmt man z. B. die Häufigkeit der Winde aus den verschiedenen Richtungen und die Häufigkeit der Bevölkerungsgrade.

Auch die Dauer eines Witterungselementes, z. B. des Sonnenscheines oder Regens, ist von Bedeutung.

Die Gesamtheit der meteorologischen Erscheinungen, die den Grimsahl, Physik. I. Große Ausgabe. 6. Aufl.

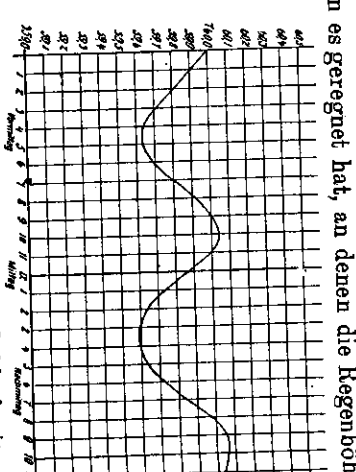


Fig. 609. Täglicher Gang des Luftdruckes in Bremen.

mittleren Zustand der Atmosphäre an irgendeiner Stelle der Erdoberfläche kennzeichnen, wird das Klima dieses Ortes genannt. Die Witterung ist nur eine einzelne Phase aus der Aufeinanderfolge der Erscheinungen. So kann man z. B. von dem milden und feuchten Klima Englands sprechen, wenn gleich auch dort einzelne Zeiträume vorkommen, in denen es kalt und trocken ist. Will man diese Zeiträume herausheben, so kann man das nur tun, indem man z. B. sagt: Die Witterung war in England im Dezember 1879 trocken und kalt.

Mit der Untersuchung des Klimas eines Ortes beschäftigt sich die Klimatologie, die ihrer Aufgabe nach in erster Linie beschreibender Natur ist, und die ein lebendiges Bild des Zusammenwirkens aller atmosphärischen Erscheinungen liefern soll. Sie darf sich aber nicht darauf beschränken, nur das Klima der einzelnen Orte tabellarisch zusammenzustellen, sondern sie muß durch eine systematische Darstellung, durch Zusammenfassung natürlich verwandter Klimate in größere Gruppen die Wechselwirkung und gegenseitige Bedingtheit der Klimate nachweisen.

Die Klimatologie beschäftigt sich nur mit einem Teile der wissenschaftlichen Aufgaben, welche die Meteorologie umfaßt. Neben ihr besteht als eine gewissermaßen übergeordnete Forschungsaufgabe die, die einzelnen atmosphärischen Erscheinungen auf bekannte physikalische Gesetze zurückzuführen und das Kräftepiel der atmosphärischen Vorgänge aufzudecken.

§ 190. Isothermen. Isobaren.

Die Vergleichung der Witterungselemente an verschiedenen Orten der Erdoberfläche geschieht am bequemsten und übersichtlichsten in der Weise, daß man die Größe der beobachteten Elemente oder der aus den Beobachtungen gebildeten Mittelwerte in eine Landkarte einträgt und diejenigen Orte miteinander verbindet, denen die gleichen Werte zugeordnet sind, oder indem man die eingetragenen Werte benutzt, um Kurven zu ziehen, auf denen Orte gleicher Werte liegen würden.

Isothermen. Trägt man die auf den Meeresspiegel bezogenen Mittelwerte der Temperatur in eine Landkarte ein und zeichnet danach die Linien gleicher Mitteltemperatur, so erhält man eine Isothermenkarte. In Fig. 610 (S. 627) sind die Jahres-Isothermen, in Fig. 611 die Januar-Isothermen, in Fig. 612 (S. 628) die Juli-Isothermen in die Weltkarte eingetragen.

Man sollte eigentlich erwarten, daß die Isothermen mit den Breitenkreisen parallel laufen, da ja die Sonneneinstrahlung für alle Orte derselben geographischen Breite zu derselben Jahreszeit die gleiche ist; das ist aber nicht der Fall. Vielmehr weichen die Isothermen sehr stark von den Parallelkreisen ab. Die großen Züge der Abweichungen sind durch die Verteilung von Land und Wasser bedingt. Das tritt besonders stark bei den Januar-Isothermen hervor. Die Januar-Isotherme von 0° C z. B. geht in Nordamerika bis südlich von 40° n. Br., schwenkt dann im Atlantischen Ozean stark nach Norden und erreicht in der Nähe der Westküste von Norwegen fast den

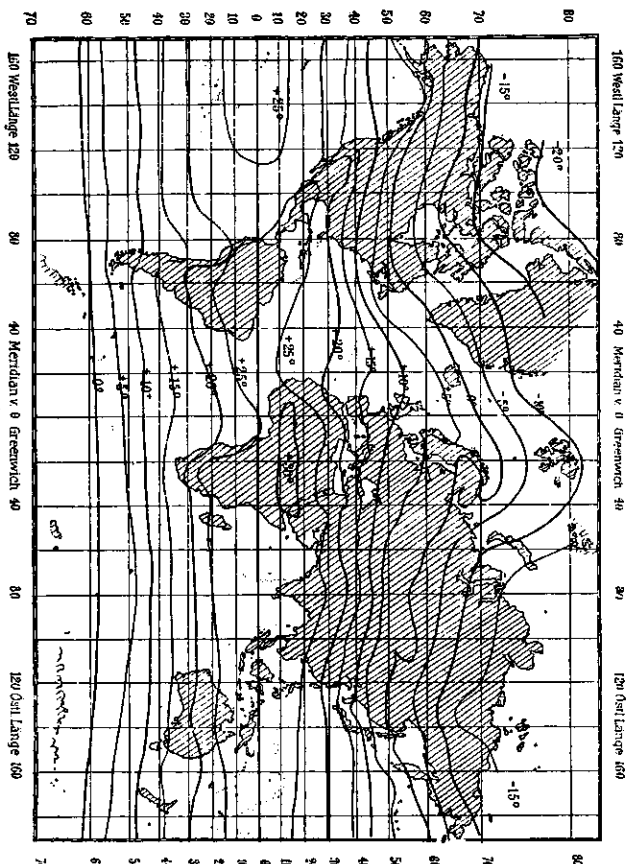


Fig. 610. Jahres-Isothermen.

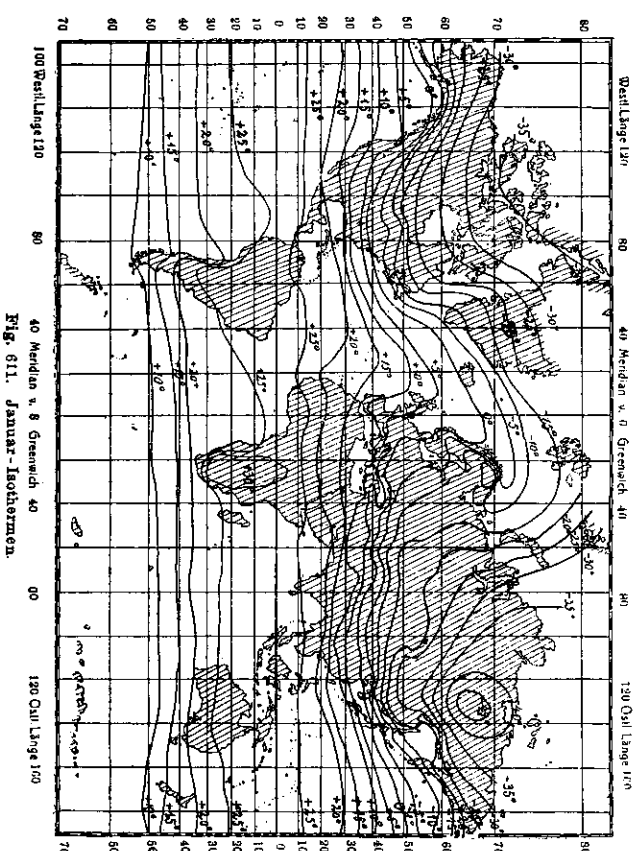


Fig. 611. Januar-Isothermen.

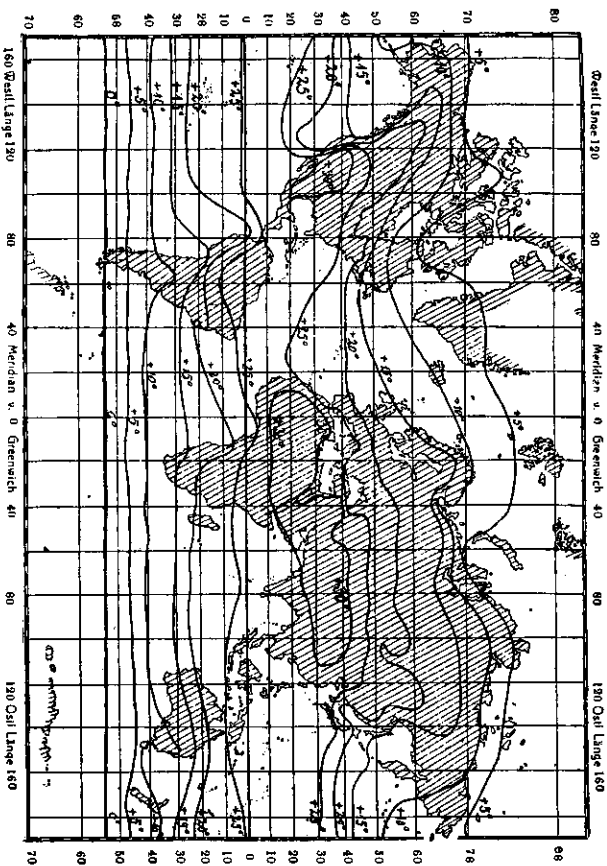


Fig. 612. Juli-Isothermen.

70. Breitengrad. Dann geht sie auf dem Festlande von Europa und Asien wieder südlich bis zu 35° n. Br. und erreicht im Stillen Ozean beinahe wieder den 60. Breitengrad.

Ähnliche Abweichungen zeigen die anderen Januar-Isothermen auf der nördlichen Halbkugel. Diese Abweichungen können wir auf verschiedene, in demselben Sinne wirkende Ursachen zurückführen: Bei Sonneneinstrahlung erwärmt sich das Wasser viel langsamer als das Land; denn erstens geht die Sonneneinstrahlung bis tief in das Wasser hinein, während sie beim Festlande nur auf eine verhältnismäßig dünne Schicht wirkt; ferner wird das Wasser durch die Wellenbewegung stark durchmischt, daher dringt auch aus diesem Grunde die Erwärmung tiefer in das Wasser ein, als es beim Festlande möglich ist. Die durch dieselbe Einstrahlung erwärmte Masse ist also beim Wasser größer als beim Festlande. Dazu kommt noch, daß die spezifische Wärme des Wassers viel größer ist als die des Festlandes (Tab. IV), so daß also auch dann schon, wenn die erwärmten Massen die gleichen wären, die Temperaturerhöhung des Wassers geringer sein würde als die des Landes.

Wenn nun im Winter Wasser und Land ihre Wärme wieder abgeben, so erfolgt die Temperaturerniedrigung beim Wasser wieder bedeutend langsamer als beim Festlande, das sich infolge seiner geringen Wärmekapazität sehr rasch abkühlt.

Die besonders starke Ausbiegung der Isothermen nach Norden an der Westküste von Europa ist in erster Linie auf eine warme Meeresströmung,

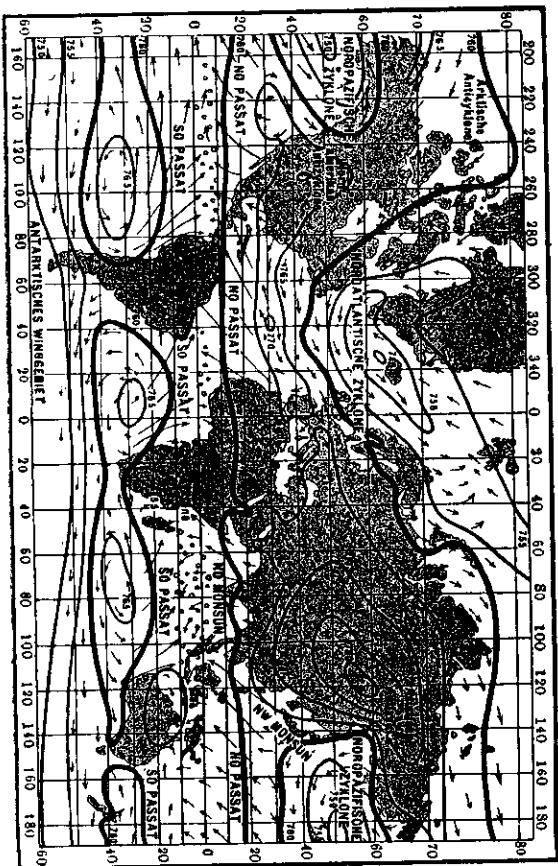


Fig. 613. Januar-Isobaren.

den Golfstrom, und eine mit ihr parallel gehende, vorwiegend nach Osten gerichtete Luftströmung zurückzuführen. Der Golfstrom wirkt durch seine gewaltige, mit dem Wasser mitgeführte Wärmemenge wie eine Warmwasserheizung Europas, besonders der Westküste Europas.

Auf der südlichen Halbkugel, deren Landmasse viel geringer ist als die der nördlichen, und auf welcher daher der Einfluß des Landes lange nicht so stark zur Geltung kommen kann, sind die Abweichungen der Isothermen von den Parallelkreisen bedeutend geringer. Immerhin ist der Einfluß des sich am weitesten nach Süden erstreckenden Festlandes von Südamerika sowohl auf die Januar-Isothermen wie auf die Juli-Isothermen deutlich erkennbar.¹⁾

Isobaren. Trägt man die auf den Meeresspiegel umgerechneten Mittelwerte des Barometerstandes für eine große Anzahl von Beobachtungsorten ein, und zeichnet man danach die Linien gleichen mittleren Luftdruckes, so erhält man eine Isobarenkarte.²⁾

In Fig. 613 ist die Karte der Januar-Isobaren, in Fig. 614 (S. 360) die Karte der Juli-Isobaren abgebildet. Die Januar-Isobaren zeigen das typische Bild der Luftdruckverteilung im nördlichen Winter, die Juli-Isobaren die Verteilung für den typischen Sommermonat.

In der Karte der Januar-Isobaren fallen auf der nördlichen Halbkugel

1) Doch ist der Einfluß der kalten Küstenströmungen nach Norden für den Isothermenverlauf über den Meeresspiegel nicht berücksichtigt.
 2) isos (griech.) = gleich; barys (griech.) = schwer.

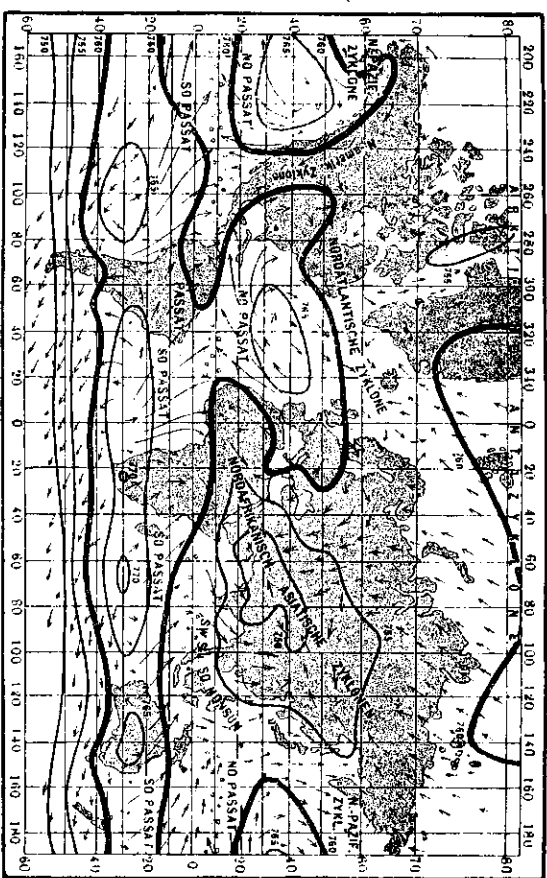


Fig. 614. Juli-Isobaren.

die Gebiete hohen Luftdruckes über den Kontinenten, besonders über dem asiatischen Festlande auf, denen die Gebiete niedrigen Luftdruckes über den Ozeanen, besonders über dem Atlantischen Ozean, gegenüberstehen.

Die ganze äquatoriale Zone hat einen verhältnismäßig niedrigen Luftdruck. Auf der südlichen Halbkugel sind die Unterschiede des Luftdruckes nicht sehr groß; doch ist beachtenswert, daß sich die Gebiete hohen Luftdruckes über den Ozeanen, die Gebiete niedrigen Luftdruckes über den im Vergleich schmalen Festlandgebieten finden.

Auf der Karte der Juli-Isobaren, also zur Zeit des nördlichen Sommers, befinden sich ausgedehnte Tiefdruckgebiete über den Kontinenten der nördlichen Halbkugel, besonders über dem großen asiatischen Festlande, während sich über den Ozeanen Hochdruckgebiete gebildet haben. Von diesen ist das ausgedehnte Hochdruckgebiet des Atlantischen Ozeans für uns besonders wichtig. Auf der südlichen Halbkugel treten keine bemerkenswerten Unterschiede im Luftdrucke hervor.

In die Isobarenkarten sind außerdem die mittleren Windrichtungen eingezeichnet. Es möge darauf aufmerksam gemacht werden, daß sich im Januar um die Gebiete niedrigen Luftdruckes über dem Atlantischen und dem nördlichen Stillen Ozean linksdrehende Windwirbel ausbilden. Ebenso erkennt man, wie sich im Juli um die Gebiete hohen Luftdruckes im Atlantischen und nördlichen Stillen Ozean große rechtsdrehende Windwirbel ausbilden, während im südlichen Atlantischen Ozean und im Indischen Ozean die Gebiete hohen Luftdruckes von linksdrehenden Windwirbeln umweht werden (S. 126, § 42).

Ähnlich wie es für die Isothermen und Isobaren ausgeführt worden ist, können auch die anderen Witterungselemente zu einem übersichtlichen Kartenbilde zusammengestellt werden. So zeichnet man Isanomalien als Linien gleicher Abweichungen von der Mitteltemperatur der Orte desselben Parallelkreises, Isohyeten¹⁾ als Linien gleicher Niederschlagshöhe und andere.

§ 191. Synoptische Wetterkarten.

Die Gesamtheit der im § 187 zusammengestellten Witterungselemente, die in einem bestimmten Augenblicke herrscht, bedingt auch den Zustand der Witterung im folgenden Augenblicke. Es wäre theoretisch denkbar, daß man aus dem augenblicklichen Wetterzustande den Zustand des nächsten Augenblickes und somit auch der folgenden Zeit berechnen könnte; aber die außerordentliche Mannigfaltigkeit der Witterungselemente macht dieses unmöglich. Trotzdem ist es möglich, aus der augenblicklichen Wetterlage über einem größeren Gebiete nutzbare Schlüsse auf das Wetter für die nächste Zeit zu ziehen, wenn man durch systematisches Vergleichen der Wetterlage von einem Tage zum anderen die Gesetze der Änderung kennengelernt hat. Die Vorbedingung dafür ist eine klare Übersicht über das in einem bestimmten Augenblicke herrschende Wetter. Ein solches übersichtliches Bild geben die synoptischen Wetterkarten.²⁾

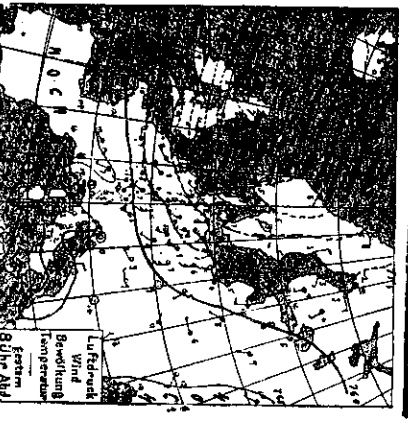
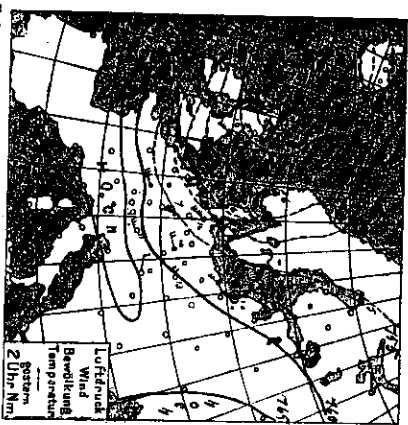
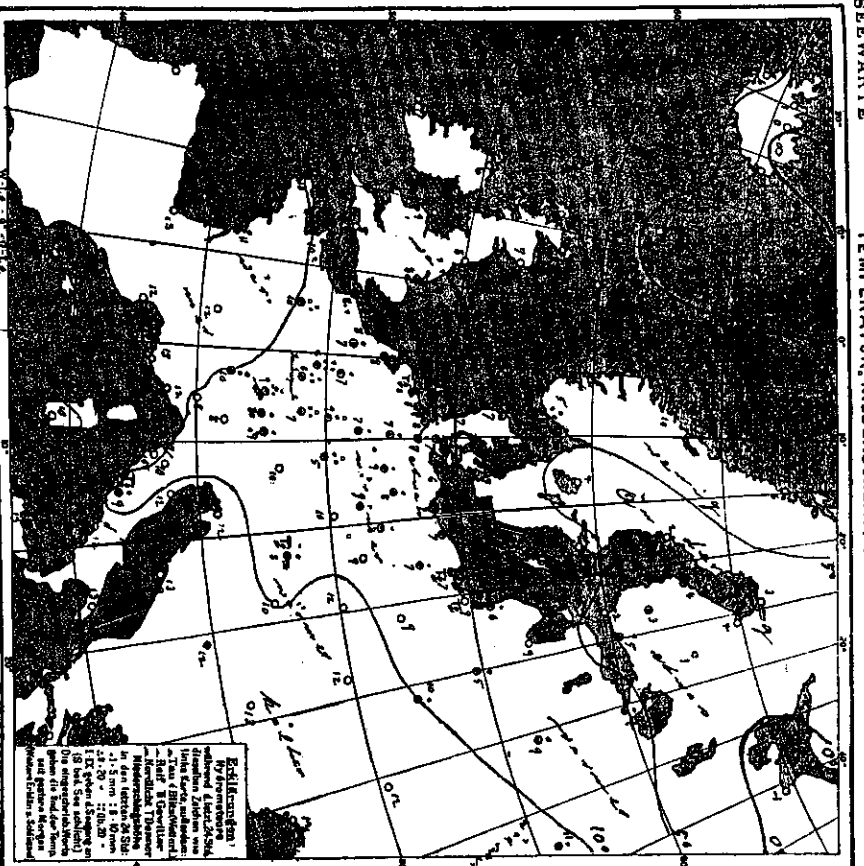
Nachdem Glaisher in England ein Netz meteorologischer Stationen eingerichtet hatte, stellte die Telegraphengesellschaft in der Londoner Ausstellung von 1851 eine große Karte aus, auf der von 22 Stationen zwei Monate hindurch für jeden Tag die Windrichtung (mittels eines Pfeiles), ferner Luftdruck und Bevölkerung aufgezeichnet waren. Nach seiner eigenen Aussage durch die Londoner Ausstellung dazu angeregt, veröffentlichte dann Buys-Ballot seine ersten synoptischen Karten im Jahrbock von 1852. Vom 16. September 1863 an veröffentlichte das Bulletin de l'Observatoire Impériale auf Anregung von Leverrier³⁾ regelmäßige tägliche Wetterkarten auf Grund telegraphischer Berichte. Damit begann ein neuer Zeitabschnitt für die Untersuchung der Witterungserscheinungen. Zur Zeit werden von den meteorologischen Zentralstellen aller größeren Kulturstaaten täglich derartige Wetterkarten für eine oder mehrere bestimmte Beobachtungstermine veröffentlicht.

Um das Zustandekommen einer synoptischen Wetterkarte zu beschreiben, halten wir uns an die von der Deutschen Seewarte in Hamburg herausgegebenen Wetterkarten. Außer von der Deutschen Seewarte werden noch von anderen Wetterdienststellen, z. B. Aachen, Berlin, München u. a. der-

1) *hyetós* (griech.) = Regen.

2) *syn* (griech.) = mit, zugleich; *optikós* (griech.) = das Sehen betreffend.

3) U. J. J. Leverrier (1811—1877), ursprünglich Chemiker, dann Astronom, berüchtigt wegen seiner Berechnung der Stellung des unbekanntem Planeten Neptun, der am berechneten Orte durch Galle in Berlin aufgefunden wurde.



Allgemeine Übersicht der Witterung am 3. Mai 1907, 8 Uhr Morgens.

Die Depression hat ihren Schwerpunkt nach gegenwärtig über dem Nordseegebiet, während sich der Hochdruck nach dem Mittelmeer hinzieht. Die Luftdruckverhältnisse sind in der Nordsee und im Mittelmeer sehr ungleichmäßig. Die Luftdruckverhältnisse sind in der Nordsee und im Mittelmeer sehr ungleichmäßig. Die Luftdruckverhältnisse sind in der Nordsee und im Mittelmeer sehr ungleichmäßig.

Nordsee: Eine schwache, vorwiegend östliche Strömung mit Regenfällen und starker Nebelbildung. Die Luftdruckverhältnisse sind in der Nordsee und im Mittelmeer sehr ungleichmäßig.

Mittelmeer: Eine schwache, vorwiegend westliche Strömung mit Regenfällen und starker Nebelbildung. Die Luftdruckverhältnisse sind in der Nordsee und im Mittelmeer sehr ungleichmäßig.

Atlantik: Eine schwache, vorwiegend westliche Strömung mit Regenfällen und starker Nebelbildung. Die Luftdruckverhältnisse sind in der Nordsee und im Mittelmeer sehr ungleichmäßig.

Hamburg, Deutsche Seewarte. H. 111. 1907.

Fig. 615.

Fig. 616.

artige Karten herausgegeben; doch erhält die Deutsche Seewarte von allen deutschen Wetterdienststellen das reichhaltigste Material aus dem In- und Auslande. Diese Karten sind auch deshalb besonders lehrreich, weil sie einen großen Teil des Küstengebietes umfassen, also eine Vergleichung der Verhältnisse auf dem Lande und auf dem Meere ermöglichen.

Jeden Morgen nach 8 Uhr erhält die Seewarte von durchschnittlich 210 in- und ausländischen Stationen, die sich über das Gebiet von Island bis Sizilien und von Irland bis Moskau erstrecken, die meteorologischen Beobachtungen in kurzen, nach einem bestimmten Schlüssel zusammengestellten Telegrammen mitgeteilt. Dann werden die Beobachtungen sofort tabellarisch zusammengestellt, und diese Tabelle wird zur Zeichnung der Wetterkarte benutzt, indem die auf Meereshöhe umgerechneten Zahlenwerte für Luftdruck und Temperatur gesondert in zwei Umrißkarten eingetragen werden, die vorher nur die durch Punkte angedeuteten Beobachtungsstationen enthalten. Es werden zunächst die Isobaren gezeichnet. In der auf S. 632 abgedruckten Karte (Fig. 615) geht die Isobare von 755 mm durch St. Matthieu, Paris, Kassel, Dresden, Breslau, nordwestlich an Warschau vorbei, durch Riga, Helsingfors, Kuopio, Uleåborg und Haparanda. In derselben Weise werden alle Isobaren für je volle 5 mm Druckunterschied gezeichnet. Die so erhaltene Karte ist die Isobarenkarte. In der Karte wird auch die an jeder Beobachtungsstation festgestellte Windrichtung in Form von Pfeilen eingetragen, die mit dem Winde fliegen und deren Spitzen in den Stationen selbst liegen. Bei Windstille wird ein konzentrischer Kreis um den Stationskreis gezeichnet. Die Windstärke wird nach der Beaufort-Skala durch Federn am Windpfeil ausgedrückt und zwar derart, daß nur halb so viel Federn an den Pfeil gezeichnet werden, wie die Nummern der Windstärke nach der erwähnten Skala beträgt.

Die Berölkung wird in der Weise angegeben, daß der Stationskreis weiß bleibt oder $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ oder ganz ausgefüllt wird, je nachdem der Himmel wolkenlos, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ oder ganz mit Wolken bedeckt ist.

In derselben Weise wird die zweite Karte (Fig. 616 auf S. 633) als Isothermenkarte gezeichnet. Die Bedeutung der Bezeichnungen ist in den Karten selbst erklärt.

Die abgedruckte Karte ist eine verkleinerte Nachbildung eines von der Deutschen Seewarte herausgegebenen Wetterberichtes vom 3. Mai 1907. Die beiden kleinen Karten unten links sind die Isobarenkarten für 2 Uhr nachmittags und 8 Uhr abends des vorhergehenden Tages. In dieser Karte befindet sich in der Gegend der Orkney-Inseln das Gebiet des vergleichsweise niedrigsten Luftdruckes (ein barometrisches Minimum, ein Tief oder eine barometrische Depression). Die Isobaren von 730 mm und 735 mm umgeben dieses Gebiet in geschlossenen Kurven. Nach außen folgen die Isobaren höheren Luftdruckes. Ganz im Osten und im Südwesten ist der Luftdruck am höchsten. Ist das Gebiet des höchsten Luftdruckes auch von geschlossenen Kurven umgeben, so heißt dieses Gebiet ein barometrisches Maximum oder ein Hoch.

Derartige synoptische Karten erscheinen täglich; sie geben einen genaueren Aufschluß über die Wetterlage. Aus Erfahrungen weiß man, wie sich die Isobaren zu verschiedenen pflegen, und daher ist man imstande, mit großer Wahrscheinlichkeit die Witterung des folgenden Tages voraussagen (Wetterprognose).¹⁾ Bei der Aufstellung der Wettervorhersage werden naturgemäß auch die von aerologischen Stationen übersandten Nachrichten über die meteorologischen Verhältnisse in den höheren Luftschichten, die durch Ballon- und Drachenaufstiege oder Pilotballone festgestellt sind, ausgiebig verwendet. Im allgemeinen ist die Wetterprognose in den Gegenden am unsichersten, in denen mehrere Einflüsse, z. B. der des Meeres und des Festlandes, zusammen treffen, z. B. in Hamburg. In Gegenden reiner Kontinentalklimas, z. B. für das innere Festland von Nordamerika, kann man mit großer Treffsicherheit Vorhersagen auf mehrere Tage machen. Auch für das innere Binnenland von Deutschland werden von den örtlichen Wetterstationen sehr viel sichere Prognosen gestellt, die zum Teil schon (Kälteprognose für Weinbaugenden) von großer praktischer Bedeutung sind.

§ 192. Die Bewegungsgesetze der Luft.

Die ganze Erdoberfläche ist mit einer Luftschicht von annähernd gleicher Höhe umgeben. Der durch das Gewicht der Luft verursachte Luftdruck nimmt mit der Höhe ab (§ 104). Wäre die Erde eine vollkommenere Kugel, wären fernere keine Temperaturunterschiede vorhanden, und befände sich die Erde in Ruhe (ohne Rotation), so würde auch die Luft in Ruhe sein. An der ganzen Erdoberfläche würde derselbe Luftdruck von (angenommen) 760 mm herrschen. In 11 m Höhe wäre der Luftdruck um 1 mm geringer. Würde man daher alle Punkte, an denen der Luftdruck 759 mm beträgt, verbinden, so erhielte man einer Erdoberfläche konzentrische Kugeloberfläche in annähernd 11 m Abstand von der Erdoberfläche. In derselben Weise kann man sich alle Punkte durch konzentrische Kugelflächen verbunden denken, die andere, aber unter sich gleiche Barometerstände haben. Derartige Flächen sollen Flächen gleichen Druckes heißen. Über einem nicht allzu großen Gebiete der Erdoberfläche können die Flächen gleichen Druckes als parallele wagerechte Ebenen angesehen werden, die in der Nähe der Erdoberfläche gleichen Abstand haben, deren Abstand voneinander in größeren Höhen aber größer wird (die punktierten wagerechten Linien in Fig. 617).

Wird ein begrenzter Teil C des betrachteten Gebietes von den Sonnenstrahlen erwärmt, so wird die über dem erwärmten Teile ruhende Luftsäule, besonders an der Erdoberfläche, in geringem Maße auch noch in einiger Höhe ausgedehnt. Dadurch werden die Flächen gleichen Druckes über dem Gebiete gehoben, sie bleiben keine wagerechten Ebenen mehr, sondern sie werden so gekrümmt, wie es in Fig. 617 durch die ausgezogenen Linien angegeben ist.

1) πρό (griech.) = vor, vorher; γνώσις (griech.) = Erkenntnis.

Solange die Flächen gleichen Druckes Ebenen sind, halten sich zwei Kräfte das Gleichgewicht, die auf jedes Lufttheilchen der wagerechten Ebene einwirken. Die eine dieser Kräfte ist die senkrecht nach unten gerichtete Schwerkraft; die andere Kraft tritt dadurch auf, daß von unten nach oben der Druck abnimmt, daß also jedes Lufttheilchen von unten einen größeren Druck nach aufwärts erfährt als von oben nach unten. Diese Kraft ist proportional der Druckabnahme längs der Wegeinheit, also dem Druckgradienten oder dem Druckgefälle, und sie steht senkrecht zu den Flächen

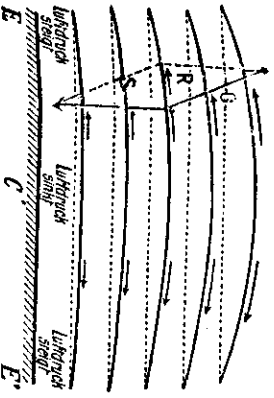


Fig. 617. Flächen gleichen Druckes bei Erwärmmg in der Mitte um C.

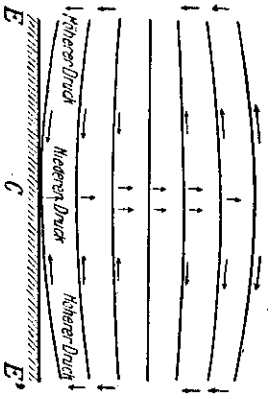


Fig. 618. Flächen gleichen Druckes nach längerer Erwärmmg.

gleichen Druckes (§ 85, Potentialgefälle und Niveaufläche s. auch § 114, 4.) Im stationären, bewegungsfreien Zustande der Atmosphäre müssen die Flächen gleichen Druckes so angeordnet sein, daß die sich aus dem Druckgefälle ergebende Kraft entgegengesetzt und gleich der Schwerkraft ist, die auf das Lufttheilchen wirkt. Die Flächen gleichen Druckes sind also wagerechte Ebenen. So wie aber, wie in Fig. 617, diese Anordnung der Druckflächen gestört ist, kann die Atmosphäre nicht mehr in stationärer Ruhe sein. Das Druckgefälle steht senkrecht zu den Flächen gleichen Druckes, ist also der Schwerkraft S nicht mehr entgegengesetzt gerichtet; die dem Druckgefälle entspringende Kraft G auf ein Lufttheilchen setzt sich mit seiner Schwere zu einer Resultante R zusammen, die nach jener Seite hin gerichtet ist, nach der die Druckflächen gegen die wagerechte Richtung nach unten geneigt sind. Das Lufttheilchen muß daher in Bewegung geraten; es fließt in einem spitzen Winkel zu den Flächen gleichen Druckes von Flächen höheren Druckes zu solchen niederen Druckes nach der Seite hin ab. Dadurch wird die über dem erwärmten Gebiete C liegende Luftsäule leichter, während die Luftsäulen in der Umgebung schwerer werden, d. h. das Barometer sinkt bei C , es steigt bei E und E' . Infolge dieses Einflusses bleibt die Erdoberfläche selbst keine Fläche gleichen Druckes mehr. Über E und E' findet sich nach einer gewissen Zeit der dem Barometerstande in C auf der Erdoberfläche gleiche Barometerstand erst in einiger Höhe (Fig. 618). Die unterste Fläche gleichen Druckes ist eine Fläche, die gewölbt zur Erdoberfläche ist, sie hat in C ihre tiefste Stelle. Daher gleitet die in der Nähe der Erdoberfläche befindliche Luft von E und E' dem Orte C des niedrigsten Luftdruckes zu. Aus dem Abfließen der Luft in der

Höhe und dem Zueitromen in der Tiefe ergibt sich dann die Notwendigkeit eines langsamen Aufsteigens der Luft über dem Gebiete tiefsten Druckes. So bildet sich der durch Fig. 618 dargestellte neue stationäre Zustand aus. Genau entgegengesetzt verlaufen die Strömungen über einem Gebiete, das stärker abgekühlt ist als die angrenzenden Gebiete.

Die hier hergeleiteten Beziehungen gelten in erster Linie für die großen Windsysteme der Erde, die durch die Erwärmung ausgedehnter Gebiete verursacht werden. In der schematischen Figur 619 bedeutet z. B. AQ ein äquatoriales Gebiet, das durch die Sonnenstrahlung stark erwärmt wird. Hier muß nach dem Vorhergesagten bei verhältnismäßig

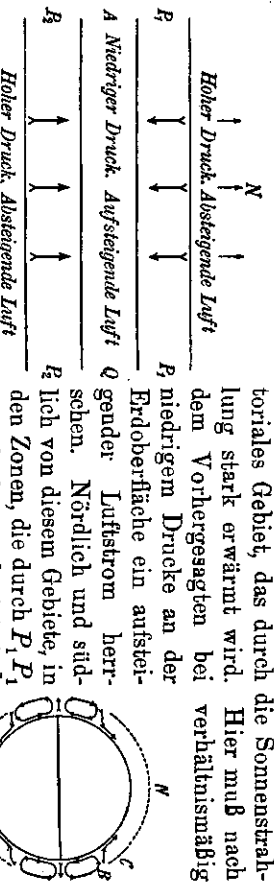


Fig. 619.

dem Gebiete AQ hinströmenden. Nördlich und südlich dieser Gebiete müssen absteigende Luftströme vorhanden sein.

Ein schematischer Schnitt durch die Erdkugel (Fig. 620) veranschaulicht das Gesagte noch mehr, indem hier auch die in den höheren Luftschichten herrschenden Winde zur Darstellung kommen.

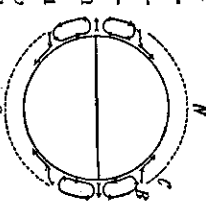


Fig. 620.

§ 193. Einfluß der Erdumdrehung.

Die im vorigen Paragraphen hergeleiteten Beziehungen würden unter der Voraussetzung gelten, daß sich die Erde nicht dreht. Durch die Erdumdrehung erfahren die Luftströme aber eine starke Ablenkung, die der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene des Foucaultschen Pendels (§ 42 und § 59) ähnlich ist.

Die Erklärung der Ablenkung der Winde durch die Erdumdrehung ist in den Betrachtungen des § 42 allgemein gegeben.

Es gilt:

Alle durch thermische oder mechanische Kräfte verursachten Luftströmungen erfahren durch die Drehung der Erde eine Ablenkung, und zwar auf der nördlichen Halbkugel nach rechts, auf der südlichen Halbkugel nach links.

§ 194. Die großen Windsysteme der Erde.

Die treibende Kraft für die Bewegung der Luft ist der Luftdruckunterschied; die Energiequelle hierfür ist die Sonnenwärme. Die Erdumdrehung verändert die Richtung der durch diese Energiequelle verursachten Luftbewegung. Hiermit sind die grundlegenden Ursachen für die Bewegungsgesetze der Luft gekennzeichnet. Wir wollen jetzt untersuchen, wie weit diese Grundlagen in den großen Windsystemen der Erde hervortreten.

Fig. 621 stellt die denkbar einfachsten Verhältnisse dar. AQ ist ein äquatoriales Gebiet, das sich weit in der Richtung der Parallelkreise ausdehnt. Hier herrscht nach § 192 infolge der starken Erwärmung durch die Sonnenstrahlen niedriger Luftdruck, und die Luft steigt hier in die Höhe. Zugleich strömt von den beiden nördlich und südlich angrenzenden Zonen Luft in dieses Gebiet. Die dadurch verursachten Winde werden infolge der Erdumdrehung im Norden nach rechts, im Süden nach links abgelenkt. So entsteht im äquatorialen Gürtel ein Gebiet der Windstillen, wo die Luft in Winde, und zwar im nördlichen Gürtel NE-Winde, im südlichen Gürtel SE-Winde.

Diese einfachen Verhältnisse können nur da eintreten, wo keine störenden Einflüsse vorhanden sind, wo insbesondere die Oberfläche der Erde gleichmäßig ist. Das ist sie aber nur über den ausgedehnten Ozeanen. So zeigt uns denn in der Tat ein Blick auf die Isobarenkarten (Fig. 613, 614), daß sich auf dem Atlantischen und Stillen Ozean an ein äquatoriales Gebiet der Windstillen oder Kalmen nach Norden ein ausgedehnter Streifen anschließt, in dem das ganze Jahr hindurch NE-Wind, der Nord-Ost-Passat, weht, und daß sich im Süden ein ausgedehnter Streifen befindet, in dem das ganze Jahr hindurch SE-Wind, der Süd-Ost-Passat, weht.

Die großartigste Abweichung von den normalen Verhältnissen der tropischen Zone zeigt das Gebiet südlich des asiatischen Festlandes, da diesem großen Festlandgebiete im Süden ein großes tropisches Meer gegenüberliegt. Wenn im Sommer die Sonne nördlich vom Äquator steht, erwärmt sie, besonders im Juli, den asiatischen Kontinent auf eine sehr hohe Temperatur, während das Wasser des Indischen Ozeans verhältnismäßig kühl bleibt. So entsteht über dem asiatischen Festland ein ausgedehntes Gebiet niedrigen Luftdruckes; hier ist der Luftdruck noch niedriger als über dem äquatorialen Gebiete. Daher schiebt der normalerweise sich ausbildende Süd-Ost-Passat über den Äquator hinüber, erfährt aber beim Überschreiten des Äquators eine durch die Erdumdrehung verursachte Ablenkung nach Osten. So entsteht ein während des nördlichen Sommers dauernd wehender SW-Wind, der Süd-West-Monsun¹⁾.

1) (Arabisch) mansim = Jahreszeit.

§ 194. Die großen Windsysteme der Erde

Während des nördlichen Winters, also besonders im Monat Januar, kühlt sich das asiatische Festland stark ab, seine Temperatur wird sehr niedrig im Vergleich zu der hohen Temperatur des tropischen Indischen Ozeans. Daher entsteht über dem Ozean ein Gebiet niedrigen Luftdruckes, dem ein ausgedehntes Gebiet hohen Luftdruckes auf dem asiatischen Festland gegenübersteht. Die durch diesen Luftdruckunterschied erzeugte treibende Kraft der Luft ist nun nach Süden gerichtet, und das Gebiet über Zentral- und Südastien ist

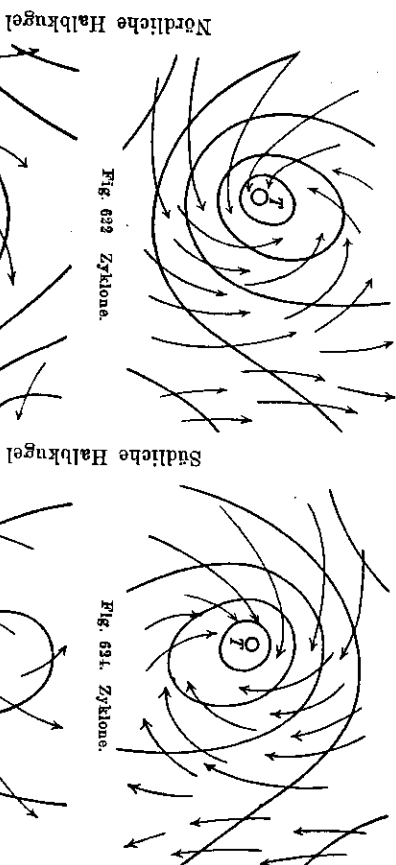


Fig. 622. Zyklone.

Fig. 621. Zyklone.

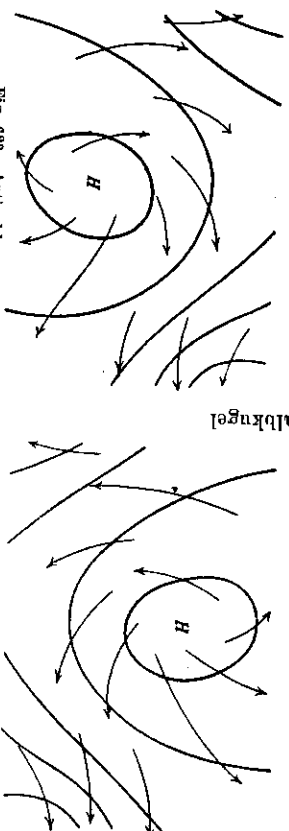


Fig. 623. Antizyklone.

Fig. 624. Antizyklone.

denselben Einflüssen ausgesetzt, wie sie durch den oberen Teil der Fig. 621 dargestellt sind. Da das Gebiet auf der nördlichen Halbkugel liegt, so wird die Luft nach rechts abgelenkt, und daher weht im nördlichen Winter an der Südküste Asiens dauernd NE-Wind, der Nord-Ost-Monsun genannt wird. Die Monsunwinde kommen nicht nur in der Tropenzone vor. Sie verlieren jedoch in den höheren Breiten wegen der allgemeinen Abschwächung der Temperaturunterschiede zwischen Land und Wasser und der allgemeinen Bewegung der Atmosphäre ihren eigentlichen Charakter und treten daher als solche nicht in Erscheinung.

Die übrigen ausgedehnten Gebiete hohen und tiefen Luftdruckes auf der Erde haben eine mehr geschlossene, allseitig umgrenzte Gestalt. Deshalb behandeln wir vorerst allgemein die Winde, die ein solches Gebiet umwehen müssen.

Die Figuren 622 und 623 beziehen sich auf die nördliche Halbkugel. In Fig. 622 befindet sich eine Darstellung der Windströmungen in einem von

den Isobaren allseitig umschlossenen Gebiete niedrigen Luftdruckes (eine Zyklone). Wenn die Erde sich nicht drehen würde, so müßte die Luft auf kürzestem Wege von außen in dieses Gebiet einströmen. Infolge der Erdrotation erfahren aber alle Winde eine Ablenkung nach rechts. Daraus ergibt sich, daß die Winde nicht unmittelbar auf das Zentrum des niedrigen Druckes zuströmen, sondern daß sie dieses Gebiet links vor sich haben. In Fig. 623 sind die Verhältnisse um ein Gebiet hohen Luftdruckes (eine Antizyklone) angedeutet. Wenn sich die Erde nicht drehte, würden die Winde unmittelbar aus dem Gebiete des hohen Luftdruckes heraus wehen. Infolge der Erdrotation erfolgt eine Ablenkung nach rechts. Die Winde wehen daher so, daß ein Beobachter, der dem Winde den Rücken zukehrt, der also mit dem Winde sieht, das Gebiet hohen Luftdruckes rechts hinter sich hat. Die auf der südlichen Halbkugel herrschenden Verhältnisse gehen aus den Figuren 624 und 625 zur Genüge hervor und bedürfen hier wohl keiner weiteren Erklärung.

Wir wollen nun noch untersuchen, wie die großen Windsysteme der Erde, die sich um derartige Gebiete hohen oder niedrigen Druckes ausbilden, und die aus den Isobarenkarten (S. 629 u. 630) zu ersehen sind, mit unseren Figuren übereinstimmen: Am klarsten kommen die Verhältnisse über den Ozeanen heraus, weil hier die Reibungswiderstände der Erdoberfläche gering sind, und weil auch der Unterschied zwischen Höhen und Tiefen fehlt.

Das große Tiefdruckgebiet über dem nördlichen Atlantischen Ozean, dessen Zentrum bei Island liegt, erzeugt während des nördlichen Winters einen gewaltigen Windwirbel, der in voller Übereinstimmung mit der Fig. 622 steht. Aus diesem Wirbel ergeben sich südwestliche Winde, die der Westküste Europas die feuchte, über dem Golfstrom und dem mittleren Atlantischen Ozean erwärmte Luft zuführen. Ja, man ist heute geneigt, anzunehmen, daß der Golfstrom zum größten Teil seinen Weg nach Europa nimmt, weil er durch die vorherrschenden Süd-West-Winde dorthin getrieben wird. Man bezeichnet ihn daher auch vielfach als atlantische Trift.

Die Windwirbel um die Tiefdruckgebiete der südlichen Ozeane während des nördlichen Winters sind in Fig. 624 dargestellt.

Das sich über dem nordatlantischen Ozean während des nördlichen Sommers ausbildende Hochdruckgebiet mit den Azoren als Zentrum stimmt mit dem Bilde von Fig. 623 überein. Dieser Wirbel bringt der Westküste von Europa vorwiegend westliche und nordwestliche Winde, die die verhältnismäßig kühle Luft des Atlantischen Ozeans zu uns bringen.

Das sich im nördlichen Sommer über dem asiatischen Festlande ausbildende ausgedehnte Tiefdruckgebiet mit seinen Windwirbeln stellt in gutem Einklange mit Fig. 622.

§ 195. Periodische Winde.

Die verschiedenen starke Erwärmung der Luft über Wasser und Land, deren Einfluß sich in hervorragendem Maße in der Entstehung der Monsune

mit einer jährlichen Periode zeigt, bedingt überall dort, wo Land und Wasser aneinanderstoßen, die Entstehung periodischer Winde schon von täglichem Wechsel.

Land- und Seewinde. An den Küsten ist am Tage das Land wärmer als das Wasser, während es in der Nacht umgekehrt ist. Daher steigt, ähnlich wie in Fig. 617 und 618, am Tage über dem Wasser der Luftdruck im Vergleich zu dem niedrigen Luftdrucke über dem Lande. Die Folge hiervon ist ein auf der Erdoberfläche wehender Wind vom Wasser zum Lande (Seewind), dem in einer gewissen Höhe über der Küste ein Luftstrom von entgegengesetzter Richtung gegenübersteht.

In der Nacht entsteht über dem kalten Lande hoher Luftdruck im Vergleich zu dem über dem Wasser herrschenden niedrigen Luftdrucke. Diese Luftdruckdifferenz erzeugt auf der Erdoberfläche den vom Lande zum Wasser hin wehenden Landwind, während in höheren Luftschichten der Wind wieder zum Lande zurückweht.

Berg- und Talwinde. In langen Gebirgstälern, die allmählich ansteigen, beobachtet man oft periodische Winde, die während des Vormittags das Tal hinaufwehen, und Winde, die während der Nacht vom Berge kommen und das Tal hinunterwehen. Diese Winde erklären sich leicht aus der Lage der Flächen gleichen Druckes zueinander.

Es möge in Fig. 626 ein langes Gebirgstal dargestellt sein, das sich von A aus nach C erhebt. Nehmen wir an, daß am frühen Morgen im ganzen Tale Windstille herrscht, so liegen die Flächen gleichen Luftdruckes wagerecht. A, C sei eine solche Fläche gleichen Druckes. Über dem tiefsten Punkte A des Tales lagert die Luftsäule AA_1 , die höher ist als irgendeine andere, z. B. BB_1 , das ist die über dem höher liegenden Punkte B ruhende Luftsäule. Wenn nun die in das Tal scheinende Sonne die Luft des Tales erwärmt, so erheben sich alle Punkte der vorhin betrachteten Fläche A, C , aber der Punkt A , erhebt sich um einen höheren Betrag als irgendein anderer, z. B. B , da ja die über A ruhende Luftsäule länger ist, sich also auch mehr ausdehnt. So kommt mit der allmählich größer werdenden Temperaturerhöhung die Fläche A, C in die geneigte Lage $A_2 C$. Die Luft erhält dadurch einen Bewegungsantrieb in der Richtung von A_2 nach C (S. 636), d. h. es entsteht während des Vormittags ein das Tal hinaufwehender Wind.

In entsprechender Weise entsteht während der Nacht ein Bergwind, der ins Tal hinab weht, denn die Luftsäule über A verkürzt sich mehr als irgendeine andere; daher senken sich die Flächen gleichen Luftdruckes nach der Talöffnung hin, und auf ihnen fließt die Luft aus dem Tale heraus ab.

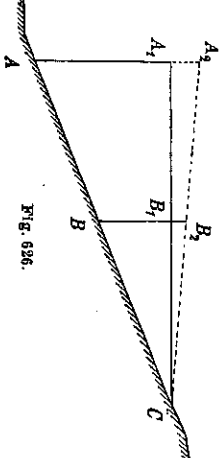


Fig. 626.

§ 196. Veränderliche Winde. Zyklonen und Antizyklonen.

An die Passatgebiete schließen sich bei ungefähr 30° nördlicher und südlicher Breite nach Norden und Süden diejenigen Gebiete an, in denen die Luft aus den höheren Luftschichten nach unten abfließt (vgl. Fig. 620 bei B). Diese Gebiete werden die Robbreiten¹⁾ genannt. Hier fließt die Luft an der Erdoberfläche teilweise nach den Polen, teilweise nach dem Äquator zu ab; daher wehen hier keine starken Winde, vielmehr ist dieses Gebiet mit den Kalmen vergleichbar, wenn auch die Windstillen nicht so stark ausgeprägt sind wie in der äquatorialen Zone.

Auf die Robbreiten folgen nach den Polen zu die Gebiete der veränderlichen Winde, in denen aber immer die Westwinde vorherrschen. In ihnen werden die durch die großen Windsysteme bestimmten durchschnittlichen Luftströmungen von mannigfaltigen Einflüssen verändert, die wir nur zum geringen Teile kennen. Da Mitteleuropa gerade in diesem Gebiete liegt, so interessiert es uns besonders.

Die Luftdruckverteilung ist hier von Tag zu Tag verschieden; daher sind auch die hier wehenden Winde, als Folge der Luftdruckverteilung, stets wechselnd. Wir können uns nur davon überzeugen, daß die oben allgemein abgeleiteten Gesetze der Winde auch in dem Gebiete der veränderlichen Winde gelten. Zu dem Zwecke werfen wir einen Blick auf die synoptische Karte von Fig. 615 auf S. 632 und beachten hier besonders, daß sich östlich von Nord-schottland ein Gebiet niedrigsten Luftdruckes gebildet hat (von 730 mm), das von geschlossenen Isobaren umgrenzt wird. Ein solches Gebiet heißt ein barometrisches Tiefdruckgebiet, ein Minimum oder eine Depression. Es wird auf der Wetterkarte als „Tief“ bezeichnet. Dieses Gebiet verhält sich nun genau so, wie es in Fig. 622 angedeutet ist. Es bildet sich um die Depression ein großer Windwirbel aus, der die Depression entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers (linksdrehend) umweht. Ein solcher Windwirbel ist also mit jeder Zyklone (S. 639) verbunden. Die Windgeschwindigkeit hängt in allen gemeinen davon ab, wie groß das wagerechte Luftdruckgefälle ist. Um dieses zahlenmäßig auszudrücken, gibt man an, wie groß der in Millimetern ausgedrückte Luftdruckunterschied ist, der auf die Strecke eines Äquatorgrades = 111 km entfällt. Diese Zahl heißt der Gradient des Luftdruckes (§ 192). So ist z. B. in der abgebildeten synoptischen Karte der Gradient bei Hamburg (annähernd) 2, denn zwei 111 km von einander entfernte Orte unweit Hamburgs weichen, wenn man die Entfernung senkrecht zu den Isobaren mißt, in ihrem Luftdrucke um 2 mm voneinander ab.²⁾ Es gilt nun im allgemeinen der Satz:

Die Windstärke ist dem Gradienten proportional.

1) Nach dem engl. Kapitän John Rob (1777—1866), dem Entdecker des magnetischen Nordpols (Bd. II), und seinem Neffen James Rob (1800—1862) benannt, der die Breiten um den Südpolarkontinent erforschte.

2) Dies entspricht an der Erdoberfläche einer Windgeschwindigkeit von etwa 7 m in der Sek., also Windst. 4 der Beaufort-Skala (S. 618).

§ 196. Veränderliche Winde. Zyklonen und Antizyklonen

Entsteht bei der Luftdruckverteilung (an einem Tage) ein begrenztes Gebiet höchsten Luftdruckes, das von Isobaren geringeren Luftdruckes umschlossen wird, so heißt dieses Gebiet ein barometrisches Maximum: es wird auf den Wetterkarten mit „Hoch“ bezeichnet. Ein solches Hochdruckgebiet verhält sich genau so, wie es die Fig. 623 andeutet; es wird von einem rechtsdrehenden Windwirbel, einer Antizyklone, umgeben.

Die Gesetze, nach denen sich die Winde um die Tiefdruckgebiete und Hochdruckgebiete ausbilden, wurden zuerst (1853) in Amerika von Coffin (1806—1873) und Ferrel (1817—1891) aufgestellt; sie sind dann etwas später (1857) von dem Holländer Buys-Ballot (1817—1891) unabhängig von den vorhin genannten Forschern entdeckt und veröffentlicht worden. Der wichtigste Teil des Buys-Ballotschen Gesetzes, das auch wohl einfach das barische Windgesetz genannt wird, lautet:

Auf der nördlichen Halbkugel hat ein Beobachter, der den Wind im Rücken hat, den Ort niedrigen Luftdruckes stets links vorn, auf der südlichen Halbkugel aber rechts vorn.

Für das Zustandekommen einer Zyklone kommen drei Kräfte in Betracht: 1. die Luftdruckdifferenz, 2. die durch die Erdumdrehung verursachte Ablenkung, 3. die durch die krummlinige Bahn des Windes verursachte Zentrifugalkraft.

Den Zyklonen des Gebietes der veränderlichen Winde ähnlich sind die großen Wirbelstürme, die an der Grenze des eigentlichen Äquatorgürtels auftreten. Man faßt sie auch wohl unter dem Sammelnamen der Zyklone zusammen, spricht aber in der Einzelzahl von einem Zyklon, im Gegensatz zu einer Zyklone, worunter man die oben besprochenen Windwirbel um ein barometrisches Tiefdruckgebiet versteht. In einigen Gebieten werden sie noch mit besonderen Namen belegt. Zu ihnen gehören die westindischen Hurricane¹⁾ und die unter dem Namen der Taifune bekannten Wirbelstürme des Ostchinesischen Meeres.

Der Durchmesser eines solchen Wirbelsturmes beträgt meist mehrere Kilometer. Im Mittelpunkt des Zyklons herrscht ein niedriger Luftdruck, und die Luft strömt oft mit ungeheurer Gewalt, mit Geschwindigkeiten von mehr als 50 m/sec, spiralförmig der Mitte zu. Die große Windgeschwindigkeit rührt von dem großen Druckgradienten her. Dieser entspringt entweder großen Druckunterschieden — es sind bisweilen 30 mm beobachtet worden —, vorwiegend scheint er seine Ursache darin zu haben, daß sich die nicht übermäßig große Luftdruckdifferenz auf ein verhältnismäßig kleines Gebiet erstreckt (S. 642). Die tropischen Wirbelstürme entstehen dann, wenn über einem ausgedehnten Gebiete unregelmäßige Luftdruckschwankungen vorkommen. Wenn sich dann irgendein Bewegungszentrum bildet, so vereinigen sich die an und für sich kleinen Energiezentren zu diesem gemeinsamen Zentrum und entwickeln auf kleinem Raume ungeheure Energien.

1) Vom westindischen haitianischen; davon stammen span. huracán und engl. hurricane, auch das deutsche Fremdwort „Orkan“.

Ganz örtlichen Charakter haben die Wasserhosen¹⁾ sowie die Tromben²⁾ oder Windhosen. Diese entstehen in den Vulkannenregionen als kleine Wirbelwinde mit ursprünglich wogerechter Wirbelachse, die sich allmählich nach unten verlängern und oft die Wasseroberfläche und den Erdboden erreichen. Je nachdem die Wirbel über Wasser oder Land hinwegziehen, erscheinen sie als Wasserhosen oder Tromben. Auch sie zeichnen sich durch niedrigen Luftdruck im Zentrum aus. Sie wirken daher segend auf die Umgebung und reißen Wasser, auf dem Lande Staub und manchmal auch Bäume und Gebäude mit in die Höhe. Wegen ihrer furchterlichen Heftigkeit und ihrer Häufigkeit sind die im Osten des nordamerikanischen Felsengebirges auftretenden Wirbelstürme berüchtigt. Sie werden dort Tornados³⁾ genannt.

Am Schluß dieses Paragraphen muß noch auf das Aufsteigen der Luft im Zentrum jedes zyklonalen Windwirbels hingewiesen werden. Dieses Aufsteigen ist erklärlich, wenn wir uns der Figuren 617 und 618 erinnern. Wir kommen darauf in § 199 noch zurück.

§ 197. Abnahme der Temperatur mit der Höhe.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß im allgemeinen auf hohen Bergen eine tiefere Temperatur herrscht als in tiefer liegenden Gebieten. Die entsprechende Beobachtung macht man bei Ballonfahrten. Die Temperaturerhöhe; doch kommen je nach der Jahres- und Tageszeit erhebliche Abweichungen von diesem Durchschnittswerte vor. So ist die Abnahme im Mai und Juni am stärksten, im Dezember und Januar am geringsten; sie ist ferner in den Mittagsstunden größer als an den übrigen Tageszeiten. Während der Nacht ist sogar die Temperatur am Erdboden meist niedriger als in Höhen von einigen hundert Metern, so daß man von einer Temperaturkehr (Temperaturinversion) sprechen kann. Im Hochsommer dagegen sind die dem erhitzten Erdboden anliegenden Schichten oft so heiß, daß man schon bei einer Erhebung um wenige Meter eine außerordentlich rasche Temperaturabnahme findet.

Sieht man von diesen Abweichungen ab, so kann man eine verhältnismäßig gleichartige Temperaturabnahme in allen geographischen Breiten beobachten. Da bei den Beobachtungen der Lufttemperatur an festen Beobachtungsstationen der Einfluß des Erdbodens nicht zu vermeiden ist, so kommt die Gesetzmäßigkeit der Temperaturabnahme mit der Höhe am besten bei Ballonfahrten oder bei Beobachtungen mit dem Drachen zum Ausdruck.

Die Kenntnis von der tatsächlichen Temperaturverteilung in der Atmosphäre ist noch sehr in der Entwicklung begriffen; es sind bisher nur Mittel-

1) In Wasserhose und Windhose hat „Hose“ noch die heute vergessene Bedeutung der nur für ein Bein gedachten Strumpfhose (noch heute in gewissen Gegenden Hose = Strumpf, Wadenstrumpf). S. dazu engl. hose = Schlauch.
2) vom ital. tromba = Kreisel; vielleicht von lat. turbo.
3) vom span. tornar = drehen.

werte bekannt, die alle nicht eehr genau gelten können. A. Peppler¹⁾ hat aus den bisherigen Sommerbeobachtungen eine Übersicht über die Verteilung der Temperatur mit der Höhe in drei Zonen der nördlichen Halbkugel zusammengestellt. Ein Auszug aus seiner Tabelle, der auf die mittleren Breiten von 10° 30' und 50° bezogen werden soll, ist die folgende Zusammenstellung:

Mittlere Sommertemperatur in Grad C												
unter	in 0	2	4	6	8	10	12	14	16 km Höhe			
10° n. Br.	26,0	15,3	6,0	— 3,6	— 15,7	— 30,6	— 45,4	— 60,5	(— 66)			
30° n. Br.	22,3	11,6	0,9	— 11,1	— 24,6	— 39,3	— 55,5	— 63,1	— 64			
50° n. Br.	15,4	4,8	— 6,0	— 18,8	— 33,0	— 46,0	— 51,1	— 51,2	— 51			

Die Art des Temperaturverlaufes mit der Höhe ist sehr auffällig; sie wird in Fig. 627 für die drei Breitenkreise dargestellt.

Berechnet man aus der obigen Tabelle die Abnahme der Temperatur für 100 m, so erhält man folgende Zusammenstellung:

unter	Temperaturgradient 100 m															
	zwischen 0—2	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	12—14	14—16 km Höhe								
10° n. Br.	0,54	0,47	0,48	0,61	0,75	0,74	0,76	(0,98)								
30° n. Br.	0,54	0,54	0,60	0,68	0,76	0,79	0,38	0,05								
50° n. Br.	0,53	0,54	0,64	0,71	0,65	0,28	0,01	0,00								

Die Erklärung für die verhältnismäßig hohe Temperatur der Luft in geringen Höhen liegt zum Teil darin, daß die Sonnenstrahlen, die Wärmequelle für die Erde, die klare Luft durchdringen, ohne von ihr wesentlich absorbiert zu werden. Die Energie der Sonnenstrahlen wird erst am Erdboden aufgenommen und erhöht dessen Temperatur; daher empfängt auch die Luft den größten Teil ihrer Temperaturerhöhung vom erwärmten Erdboden. Diese Erklärung allein genügt aber nicht, wenn man bedenkt, daß die Luft eine starke Durchmischung erfährt und daß ja die warme Luft, weil sie leichter als die kalte ist, aufsteigen muß.

1) A. Peppler, a. o. Professor der Meteorologie a. d. techn. Hochschule in Karlsruhe, Direktor der badischen Landeswetterwarte.

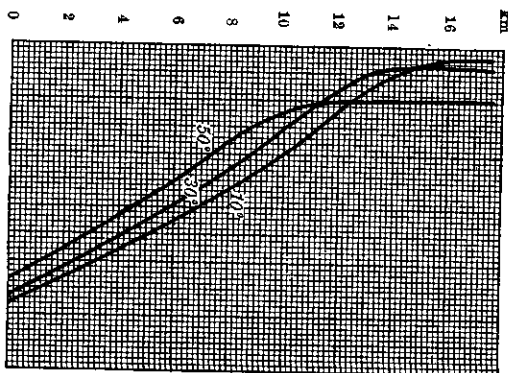


Fig. 627. Schmelzen, welche in 10°, 30° n. 50° geogr. Breite die Abnahme der Temperatur mit der Höhe zeigen.

Zur vollständigen Erklärung müssen wir auf § 156 hinweisen, in dem wir schon theoretisch berechnet haben, daß die Luft infolge ihrer adiabatischen Ausdehnung beim Aufsteigen eine Temperaturerniedrigung erfährt. Hier sehen wir, daß die Temperaturabnahme der Luft bei der Erhebung um 100 m annähernd 1°C sein würde, wenn sie vollkommen trocken wäre. Da nun die Luft mehr oder weniger feucht ist, und da die bei der Verdichtung des in der Luft vorhandenen Wasserdampfes frei werdende Wärme zur Temperaturerhöhung der Luft beiträgt, so ergibt sich der Mittelwert von $0,5^\circ\text{C}$ für 100 m, was mit den Beobachtungen in den Höhen bis etwa 4 km in guter

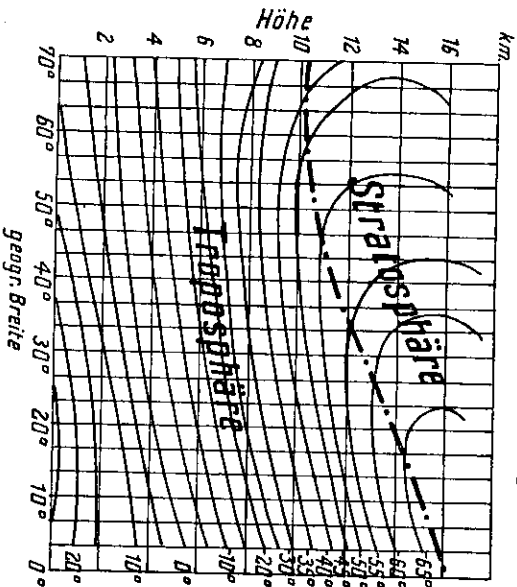


Fig. 638.
Der Verlauf der Isothermen in der Atmosphäre.

geren Höhen, in denen die verdichtete Wasserdampfmenge wesentlich größer ist. Erhebt man sich über 10 km über den Erdboden, so wird der Temperaturgradient wieder geringer. In noch höheren Luftschichten wird nach Ballonbeobachtungen die Lufttemperatur beständig oder nimmt sogar langsam zu. Das wird besonders anschaulich, wenn man in einem Meridianschnitt der Atmosphäre die Linien gleicher mittlerer Temperatur, die Isothermen der Atmosphäre, einzeichnet. In Fig. 628 sind diese von 5 zu 5 Grad gezogen. Der untere Teil der Atmosphäre, in welcher die Temperatur normalerweise nach oben abnimmt, heißt Troposphäre¹⁾; der obere Teil wird als Stratosphäre²⁾ oder auch als isotherme Zone bezeichnet. (Nimmt in der Stratosphäre die Temperatur nach oben langsam zu, so hat man eine Temperaturinversion. Temperaturinversionen treten anormalerweise auch in der Tropo-

Übereinstimmung ist.

Die stärkere Temperaturabnahme in größeren Höhen, also die größere Annäherung an den theoretisch berechneten Wert von $1^\circ\text{C}/100\text{ m}$, erklärt sich daraus, daß die Luft in diesen größeren Höhen schon sehr kalt ist und daher auch nur eine sehr geringe Menge von Wasserdampf enthält, der sich bei weiterer Abkühlung verdichten könnte. Daher wird der durch die adiabatische Ausdehnung und Abkühlung bedingte Wert in größeren Höhen durch die geringe Verdichtung nicht so stark verhindert wie in geringeren Höhen, in denen die verdichtete Wasserdampfmenge wesentlich größer ist.

1) von τρέψω (griech.) = wenden; τρόπος = Wendung und σφαίρα (griech.) = Kugel.
2) von στερνέρε (lat.) = hinbreiten, stratum = das Hingebreite, die Schicht.

§ 198. Die Ursachen für die Kondensation des Wasserdampfes in der Atmosphäre 647
sphäre auf.) Die Grenze der beiden liegt unter verschiedenen Umständen und in verschiedenen Breiten der Erde verschieden hoch; sie schwankt zwischen etwa 7 und 15 km. In höheren Breiten ist sie niedriger als nahe am Äquator. Ihre Höhe liegt im Sommerhalbjahre über Lappland bei etwa 10 km, in Mitteleuropa bei 11, in den Tropen bei 16 km.

Diese Tatsachen stehen mit der adiabatischen Abkühlung im Widerspruch. Ihre Erklärung kann nur darin gefunden werden, daß in diesen großen Höhen gar keine vertikalen Luftbewegungen mehr stattfinden, die eine adiabatische Abkühlung und eine Durchmischung verschiedener warmer Schichten verursachen könnten. Die Temperatur der Stratosphäre ist allein durch die unmittelbar absorbierte Sonnenstrahlung bedingt. Von den Polen der Erde nach dem Äquator zu nimmt die Temperatur der Stratosphäre erheblich ab, so daß in sehr großen Höhen die Luft über den Polen wärmer ist als am Äquator. Die Temperaturen der Stratosphäre sind über: Lappland etwa -45° , Mitteleuropa -55° , den Tropen -75° bis -80°C . Die Troposphäre ist derjenige Anteil der Atmosphäre, in der sich alle Wettervorgänge abspielen.

§ 198. Die Ursachen für die Kondensation des Wasserdampfes in der Atmosphäre.

Der in der atmosphärischen Luft enthaltene Wasserdampf kann sich erst dann zu Wasser verdichten, wenn die Temperatur unter den Taupunkt sinkt, d. h. wenn der Sättigungsdruck des Wasserdampfes in der abgekühlten Luft kleiner wird als die Dampfspannung des tatsächlich vorhandenen Wasserdampfes (§ 147). Hieraus folgt, daß der Kondensation immer eine Temperaturerniedrigung vorausgehen muß.

Eine solche Temperaturerniedrigung kann auf dreierlei Weise verursacht werden: 1. durch Wärmeausstrahlung, 2. durch Mischung kalter und warmer Luftmassen und 3. durch die adiabatische Ausdehnung der Luft.

1. Die Wärmeausstrahlung erstreckt sich nur auf die dem Erdboden oder anderen festen oder flüssigen Körpern unmittelbar anliegenden oder ihnen benachbarten Schichten, daher sind die aus dieser Ursache entstehenden Kondensationen nur unbedeutend; sie erstrecken sich auch nur auf Luftschichten von geringer Mächtigkeit. Auf diese Abkühlung ist die Nebelbildung über dem erkalteten Erdboden in wolkenlosen Nächten zurückzuführen. Infolge der Wärmeausstrahlung kühlen sich besonders der Erdboden selbst oder die freistehenden Gegenstände ab. Kommt nun die Luft mit diesen in Berührung, so verdichtet sich der Wasserdampf an diesen Gegenständen und veranlaßt so die Bildung von Tau oder Reif.

2. Die Kondensation bei der Vermischung von zwei mit Wasserdampf gesättigten Luftmassen verschiedener Temperatur wird durch ein Zahlenbeispiel am klarsten: Wir nehmen den für die Kondensation äußerst günstigen Fall an, daß sich gesättigt-feuchte Luft von 0°C mit einer gleichen Menge

gesättigt-feuchter Luft von 20° mischt. Es enthält dann ein Kubikmeter der kälteren Luft 4,9 Gramm Wasserdampf und ein Kubikmeter der warmen Luft 17,3 Gramm Wasserdampf. Vermischen sich diese beiden Luftmengen, so nehmen sie die Temperatur von 10° C an und enthalten zusammen 22,9 Gramm Wasserdampf, also entfallen auf jeden Kubikmeter der gemischten Luft 11,1 Gramm Wasserdampf. Nun ist aber Luft von 10° C schon bei einem Gehalte von 9,4 Gramm Wasserdampf gesättigt; folglich müssen 1,7 Gramm Wasserdampf durch Verdichtung zu Wasser werden. Bei dieser Verdichtung wird nun aber wieder Wärme frei, so daß demnach die Mischungstemperatur höher wird als 10° C. Zieht man diese Erwärmung mit in Rechnung, so ergibt sich, daß nur annähernd die Hälfte der oben berechneten Wasserdampfmenge zu flüssigem Wasser verdichtet wird. Die durch Mischung verschieden warmer, gesättigter Luftmengen verdichtete Wassermenge gibt nur in seltenen Fällen zu Niederschlägen Veranlassung (Mischungsregen).

3. Die hauptsächlichste Ursache zur Verdichtung des Wasserdampfes besteht in der adiabatischen Ausdehnung der aufsteigenden Luftmassen. Diese allein kommt wesentlich für die Bildung von Regen und Schnee in Frage. Auch hier wird ein Beispiel die Verhältnisse am besten erläutern: Wir nehmen an, daß die Luft an der Erdoberfläche bei einer Temperatur von 25° C mit Wasserdampf gesättigt sei, und daß sie bis zu einer Höhe von 2000 m gehoben werde. Die bei 25° C gesättigte Luft erfährt in diesem Falle eine Temperaturerniedrigung von $0,4^{\circ}$ C auf je 100 m, also von 8° C bei der Erhebung auf 2000 m; sie kommt daher in dieser Höhe mit einer Temperatur von 17° C an. Ein Kubikmeter der bei 25° C gesättigten Luft enthält 23 Gramm Wasserdampf. Ein Kubikmeter der bei 17° C gesättigten Luft enthält 14,5 Gramm Wasserdampf. Folglich müssen sich unter den erwähnten Umständen bei der Erhebung der Luft vom Erdboden auf 2000 m $23 - 14,5 = 8,5$ Gramm Wasser aus jedem Kubikmeter Luft ausscheiden.

Nehmen wir nun ferner an, der Luftstrom erhöhe sich mit einer lotrechten Geschwindigkeit von 2 m/sec, so würden sich aus dem aufsteigenden Luftstrom in der Stunde $2 \cdot 3600 \cdot 8,5$ Gramm = 61,2 Kilogramm Wasser verdichten. Das entspricht einer Regenhöhe von 61,2 mm/Minute. Eine solche Regenhöhe ist aber selbst bei den stärksten Gewitterregen in Europa außerordentlich selten.

§ 199. Die Kondensationen in Depressionen. Cumulusbildung. Der Föhn. Die Bora.

In den barometrischen Tiefdruckgebieten steigt die Luft auf. Daher findet in allen zyklonalen Wirbeln eine Verdichtung der Wasserdämpfe statt. In einer gewissen Höhe bilden sich Wolken und, bei zunehmender Kondensation, Niederschläge. In Fig. 629 sind schematisch die Witterungsverhältnisse in der Umgebung eines barometrischen Tiefdruckgebietes dargestellt. Hierbei ist angenommen, daß sich die Depression in der Richtung des Pfeiles AB

§ 199. Die Kondensationen in Depressionen. Cumulusbildung. Der Föhn. Die Bora. 649 bewegt. Auf den Unterschied in dem Verhalten der Witterung auf der Vorderseite und Rückseite des Wirbels, der auch in der Figur dargestellt ist, kann hier nur kurz eingegangen werden.

Das bezeichnende Merkmal eines heranahenden Tiefdruckgebietes ist die Bildung von Feder-(Cirrus-) und Schleierwolken (Cirro-Stratus) in der Himmelsrichtung, aus welcher das Tiefdruckgebiet herantritt, und in denen sich oft Sonnen- und Mondringe zeigen. Beim Vorrücken der Zykclone verdichten sich diese hohen Wolken mehr und mehr und gehen in tiefere Wolken über, die eine gleichmäßig grau-weiße Schicht bilden und als Schichtwolken (Alto-Stratus) bezeichnet werden. Dessen folgt sodann die eigentliche Regenwolke (Nimbus), aus der der Niederschlag fällt. Rückt nach dem Vorübergange des Mittelpunktes der Zykclone der Beobachtungsort auf die Rückseite des Wirbels, so liefern einzelne Böen noch kurze, kräftige Regen- und Graupelfälle aus Hautenwolken (Cumuli). Diese zeichnen sich durch eine verhältnismäßig ebene Unterfläche und eine ballonähnliche Form der oberen Teile aus. Das eigentümliche Aufblähen und Vorstoßen der Cumulusköpfe hat Bezdold durch plötzlich auftretende Erwärmungen erklärt, deren Ursache in einer raschen Kondensation der übersättigten Dämpfe zu suchen ist. Wenn nämlich die Luft ihren Sättigungszustand überschreitet, so bilden sich in reiner Luft nicht sofort Wassertropfen, weil es an Kondensationskernen (§ 147) fehlt. Erst wenn der Sättigungszustand beträchtlich überschritten ist, tritt in verhältnismäßig kurzer Zeit eine Kondensation ein, und dann entwickelt sich eben die Kondensationswärme, die die Luft zum plötzlichen weiteren Aufsteigen, also zu erneuter Abkühlung veranlaßt. Mit diesem raschen Aufsteigen an einer Stelle der Wolke geht aber ein Absteigen eines anderen Teiles Hand in Hand. Beim Absteigen nun wird die Temperatur adiabatisch erhöht, und die Luft bleibt hier nicht mehr gesättigt; daher lösen sich in diesen absteigenden Luftströmen die Wolken wieder auf. Das Auflösen der Wolke geschieht immer wieder in derselben Höhe, daher erscheint die Wolke nach unten wagerecht und oben begrenzt. Da nun die benachbarten Cumuli dasselbe Verhalten zeigen, so befinden sich auch die unteren Begrenzungsebenen aller in derselben Höhenlage befindlichen Cumuli in derselben wagerechten Ebene.

In den antizyklonalen Wirbeln findet ein Absteigen der Luft statt; dieses ist mit einer adiabatischen Erwärmung verbunden. Daher sind die antizyklonalen Wirbel durch heiteres Wetter ausgezeichnet.

Der Föhn. Mit diesem Namen bezeichnet man im engeren Sinne den warmen, trockenen Wind, der besonders an der Nordseite der Alpen von den

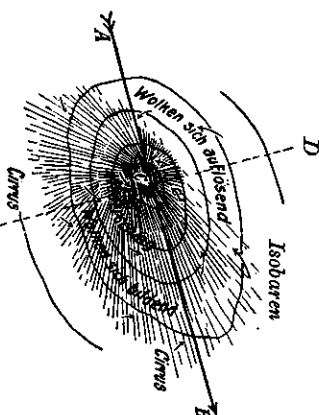


Fig. 629. Witterung in der Umgebung eines Tiefdruckgebietes.

Bergen herunterweht. Man hat aber diesen Namen auf alle dergleichen Winde erweitert. Nach den Auseinandersetzungen im vorigen Paragraphen ist die Erklärung für den Föhn nicht schwer: Wenn der auf ein Gebirge zuströmende Wind vom Gebirge nach oben abgelenkt und zum Aufsteigen gezwungen wird, so kühlt er sich während des Aufsteigens und der damit verbundenen Ausdehnung ab. Dabei nimmt auch der Sättigungsdruck des Wasserdampfes ab, und es kommt an der dem Winde zugekehrten Seite, der Luvsseite des Gebirges, zur Kondensation des Wasserdampfes und zu Niederschlägen. Der Wind ist demnach in der Höhe auf der Luvsseite kalt und feucht. Auf der dem Winde abgekehrten Seite, der Leeseite, aber steigt er von den Bergen wieder herunter; die Luft wird während des Absteigens adiabatisch erwärmt und kommt als wärmere Luft unten an. Auch hierfür möge ein Beispiel angeführt werden:

Wir nehmen an, ein mit Feuchtigkeit gesättigter Luftstrom, der in etwa Meereshöhe die Temperatur von 20°C hat, soll einen 2000 m hohen Gebirgskamm überscheiden. Da die Luft mit Feuchtigkeit gesättigt ist, so nimmt ihre Temperatur bei der Erhebung für je 100 m um $0,4^{\circ}\text{C}$, also beim Aufsteigen bis 2000 m um 8°C ab. Sie kommt oben mit einer Temperatur von 12°C an und hat unterwegs den größten Teil ihrer Feuchtigkeit abgegeben. Beim Absteigen findet nun aber weder Kondensation noch Verdampfen von Wasser statt; folglich nimmt ihre Temperatur beim Absteigen für je 100 m um 1°C , also im Ganzen um 20°C zu. Die Luft erlangt demnach am Fuße des Gebirges eine Temperatur von 32°C , d. h. also: sie ist um 12°C wärmer, als sie zu Anfang war. Dabei besitzt sie eine außerordentlich geringe relative Feuchtigkeit, weil der Sättigungsdruck des Wasserdampfes bei der hohen Temperatur recht hoch ist.

In genau derselben Weise wirken hohe Randgebirge eines Festlandes auf das Klima vor und hinter dem Randgebirge ein. Die Luft wird beim Aufsteigen auf die Höhe des Randgebirges kalt und gibt ihre Feuchtigkeit ab. Dann steigt sie in die hinter dem Randgebirge liegenden Gebiete als trockene, warme Luft wieder hinunter. Auch die hohe Niederschlagsmenge an südlichen Teile der Westküste Norwegens ist auf dieselbe Weise zu erklären.

Die Bora. In scheinbarem Widerspruche mit dem Vorigen steht die Entstehung der an der istrischen und dalmatinischen Küste auftretenden kalten Fallwinde, die unter dem Namen der Bora bekannt sind; denn man sollte erwarten, daß diese Winde als Fallwinde warm sind. Dabei ist aber zu bedenken, daß die mittlere Jahrestemperatur auf dem 350 m hohen Tafelgebirgsrande des Karstes bei Triest nur $1,5^{\circ}\text{C}$, dagegen im Meeresspiegel 5°C beträgt. Wenn nun die kalte Luft des Karstplateaus in die Ebene strömt und dabei wirklich eine Temperaturerhöhung um 1°C auf je 100 m erfährt, so kommt sie in Meereshöhe mit nur 5°C , also mit der in Meereshöhe im Januar durchschnittlich herrschenden Temperatur an. Wenn sich aber in einer besonders kalten Zeit die Luft auf dem Karstplateau weit unter 0°C abgekühlt hat und nun zum Meeresspiegel herunterfällt, so kommt sie auch trotz ihrer

beim Herabfallen stattfindenden Temperaturerhöhung mit einer Temperatur unten an, die ebensoweit unter dem Temperaturmittel der Meereshöhe liegt, wie sie oben auf dem Tafelgebirge unter das dortige Temperaturmittel abgekühlt war. Diese kalte, schwere Luft erhält beim Herabsinken eine orkanartige Geschwindigkeit (50—60 m), die die niedrige Temperatur der Bora noch unerträglicher macht, als sie schon ist; dazu kommt ihre große Trockenheit. Ähnlicher Natur und ähnlichen Ursprunges ist der Mistral der Provence und der französischen Mittelmeerküste.

§ 200. Die Wettervorhersage.

Der Wunsch, das Wetter im voraus bestimmen zu können, ist so alt und auch so verständlich, daß man lange, bevor es eine eigentliche Meteorologie gab, nach Regeln gesucht hat, nach denen man das Wetter vorher bestimmen kann. Diese sogenannten Wetterregeln oder Baurenregeln stützen sich nur zum kleinsten Teil auf wirkliche Beobachtungen; sie sind sehr häufig Verallgemeinerungen einzelner oder weniger Beobachtungen.

Wir wissen, daß der Luftdruck die treibende Kraft in der Atmosphäre ist, daß sich aus ihm die Lage der Zyklogen und Antizyklogen ergibt, und daß hiermit wieder die Temperatur und die Niederschläge in engem Zusammenhange stehen, wenn wir auch noch weit davon entfernt sind, die genaue Abhängigkeit dieser Größen voneinander zu kennen, oder gar aus einzelnen dieser Faktoren die anderen berechnen zu können. Wir wissen, daß außer den genannten Faktoren noch viele andere zur Bestimmung des Wetters mitwirken, die wir nur zum kleinsten Teile kennen und untersucht haben. Aus diesem Grunde ist eine Vorraberechnung des Wetters in den meisten Fällen heute noch völlig unmöglich. Aber wir können aus der Wetterlage eines Tages auf das Wetter des kommenden Tages gewisse Wahrscheinlichkeitschlüsse ziehen.

In erster Linie kommt bei der Beurteilung der Wetterlage die Kenntnis der synoptischen Wetterkarten in Frage, von denen wir in § 191 eingehend gesprochen haben. Würßen wir, wie die Isobarenkarte des folgenden Tages wäre, so könnten wir auch für diesen das Wetter mit ziemlicher Bestimmtheit voraussagen. Wissen wir daher, nach welchen Gesetzen sich die Änderung der Isobaren vollzieht, so ist ein Wahrscheinlichkeitschluß von heute auf morgen möglich. Erfahrungsmäßig liegen barometrische Hochdruckgebiete verhältnismäßig fest, während barometrische Tiefdruckgebiete meist wandern, d. h. von Tag zu Tag eine wesentlich verschiedene Lage auf der Landkarte zeigen. Bedenken wir nun, daß die barometrischen Tiefdruckgebiete die Winde und damit auch das Wetter in hohem Maße beeinflussen, so müssen wir in erster Linie auf die Tiefdruckgebiete unser Augenmerk richten.

Schon ein Vergleich der Hauptkarte von Fig. 615 auf S. 632 mit den beiden kleinen Karten unten links zeigt, daß sich an dem Tage der Wetter-

gelungen, eine Karte für die hauptsächlichsten Zugstraßen der Minima über Europa zu zeichnen, die in Fig. 630 wiedergegeben ist. Von diesen Zugstraßen wird I im Januar und September, II im Dezember und Januar, III im März,

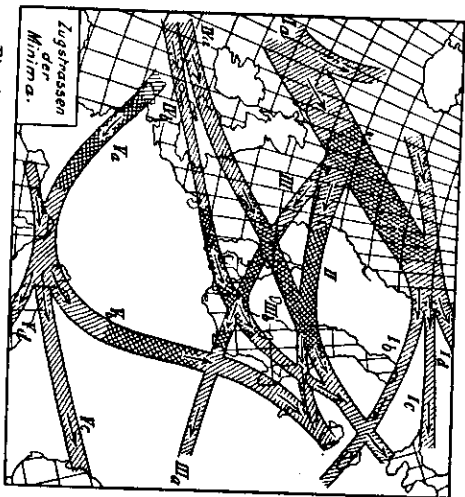


Fig. 630. Zugstraßen der Tiefdruckgebiete nach van Bebber.

IV im Juli und August, Va im Januar und April, Vb im Frühling, im Juli und im Oktober bevorzugt. Wir sehen aus dieser Zusammenstellung schon, daß ein sicherer Schluß auf die von einem heute bestehenden Tiefdruckgebiete eingeschlagene Zugstraße unmöglich ist. Gesezt aber, wir könnten die Zugstraße mit ziemlicher Sicherheit voraussagen, so könnten wir für Orte, in deren Nähe das Minimum vorüberzieht, den mutmaßlichen Verlauf der Witterung angeben.

Zu diesem Zwecke denken wir uns das Bild von Fig. 629, das uns den Witterungsstand in der Umgebung einer Zykclone veranschaulicht hat, über den untersuchten Ort in der Bewegungsrichtung AB hinweggeschoben.

Da die meisten Minima nördlich von uns vorbeiziehen, so nehmen wir an, der Beobachtungsort liege rechts von dem Wege AB , den der Mittelpunkt der Zykclone zurücklegt. Bei östlichen bis südöstlichen Winden tritt ein Fallen des Barometers ein, es bilden sich Cirruswolken, der Wind dreht ein Fallen dem Barometerstande über Süden bis Südwest, während zuerst stärkere Wolkenbildungen, dann starke Niederschläge auftreten. Beim Übersetzen der auf der Bewegungsrichtung AB senkrechten Geraden DE hat das Barometer seinen tiefsten Stand erreicht. Dann steigt das Barometer wieder, die Wolken lösen sich auf, und der blaue Himmel kommt wieder zum Vorschein, während der Wind zuerst rein westlich wird und allmählich bis Norden herumgeht.

Geht das Tief südlich vom Beobachtungsorte vorbei, so erfolgt die Drehung der Winde entgegengesetzt (links drehende Winde).

Diese Überlegung kann man natürlich nur bei solchen Wetterlagen machen, bei denen die Minima gut ausgeprägt sind, und zwar nur für Orte, die im Gebiete des zyklonalen Wirbels liegen. In den weitaus meisten Fällen liegen die Verhältnisse wesentlich schwieriger. Derartig wohlbegrenzte

1) W. J. van Bebber (1841—1910), Abteilungsvorsteher der Deutschen Seewarte in Hamburg.

Tiefdruckgebiete wie auf der in Fig. 615 abgebildeten Wetterkarte liegen nur selten vor; oft verlaufen die Isobaren fast geradlinig, oft auch steht das Wetter unter dem Einflusse eines ziemlich ruhig liegenden ausgedehnten Hochdruckgebietes und ist dann beständig, oft bilden sich mehrere Hochdruckgebiete und Tiefdruckgebiete zugleich aus. Trotz der sehr mehrere Hochdruckgebiete, und trotzdem eine systematische Untersuchung und Benützung der Wetterkarten erst seit verhältnismäßig kurzer Zeit möglich ist, hat die Auswertung der Wetterkarten zu Wettervorhersagen schon eine große Bedeutung erlangt; erfahrungsgemäß bestätigen sich die Wettervorhersagen der Deutschen Seewarte in etwa 80% der Fälle in bezug auf Temperatur, Bewölkung und Wind, in etwa 67% der Fälle in bezug auf die Niederschläge.

Die Darstellung und Erklärung der Bewegungsvorgänge in der Atmosphäre ist im letzten Jahrzehnte durch die erfolgreichen Arbeiten österrreichischer, norwegischer und deutscher Meteorologen in einen neuen Entwicklungsabschnitt getreten. Während seither allgemein der Verteilung des Luftdruckes die weitaus größte Bedeutung für den Witterungsverlauf beigemessen worden ist, geht das Bestreben der heutigen synoptischen Meteorologie dahin, durch eine zusammenfassende Betrachtung sämtlicher Witterungselemente die Zusammenhänge aufzudecken, welche die Bewegungen der Luftmassen bedingen. Diese neuerdings besonders von V. Bjerknes¹⁾ (Vater und Sohn), Wengert²⁾, Exner³⁾, A. Wegener⁴⁾ u. a. in Angriff genommenen Untersuchungen, die noch nicht zum Abschlusse gebracht worden sind, lassen auch für die praktische Meteorologie eine fruchtbringende Erweiterung der bestehenden Methoden zur Wettervorhersage erhoffen.

1) Vilhelm Bjerknes, seit 1917 Prof. der Geophysik an der neugegründeten Universität Bergen in Norwegen; vorher in gleicher Eigenschaft in Leipzig. Er ist der Sohn des Physikers C. A. Bjerknes (1825—1903) in Christiania.

2) Rob. Wengert, gest. 1922, a. o. Prof. und seit 1917 Direktor des geophysischen Institutes in Leipzig.

3) Felix M. Exner (geb. 1849), Prof. der Physik der Erde in Wien, Direktor der österr. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

4) Alfred Wegener, seit 1919 Abt.-Vorst. der Deutschen Seewarte und Privatdozent der Geophysik in Hamburg, vorher in Marburg.

Zwölfter Abschnitt.

Wellenlehre.

§ 201. Energieübertragung.

Wir hängen (Fig. 631) unter der Decke des Zimmers in einem Abstände von 50 cm voneinander an zwei Fäden von 2 m Länge zwei schwere Körper, z. B. Kilogrammstücke, als Pendel auf. Diese Pendel haben, da sie gleich lang sind, dieselbe Schwingungszeit. Wir verbinden die Enden der Fäden in etwa halber Höhe durch einen Faden von 70 cm Länge, den wir in der Mitte mit einer Kugel von 50 g* Gewicht belasten. Jetzt versetzen wir das erste Pendel in Schwingungen, deren Schwingungsebene senkrecht zu der Ebene ist, die durch das gemeinsame Ruhelage der beiden Pendel geht. Während das erste Pendel schwingt, hebt es die an dem Verbindungsfaden aufgehängte Kugel, die nun auf das zweite Pendel einen Zug ausübt. Zur Übertragung des vom ersten Pendel auf das zweite Zuges gerät auch das zweite Pendel in Schwingungen. Infolge des ersten Pendel verliert einen Teil seiner Bewegungsenergie. Das erste Pendel in seiner Bewegung immer dem zweiten voraus ist, so wirkt es auf das zweite beschleunigend ein, während es selbst bei jeder Schwingung eine Verzögerung erleidet; daher wird seine Schwingungsweite allmählich geringer. Nach etwa 10 Schwingungen hat das erste Pendel seine ganze Energie an das zweite abgegeben und ist selbst zur Ruhe gekommen, während nun das zweite mit voller Schwingungsweite, d. h. mit derjenigen Schwingungsweite, geföhrt hat.

Nun übernimmt das zweite Pendel die Rolle des ersten und überträgt bei jeder einzelnen Schwingung einen Teil seiner Energie wieder auf das erste, bis nach wiederum 10 Schwingungen das erste Pendel mit voller Amplitude schwingt und das zweite zur Ruhe gekommen ist.

Ein schwingender Körper kann einen anderen schwingungsfähigen Körper in Schwingungen versetzen, wenn die Schwingungszeit des zweiten mit der des ersten übereinstimmt, und wenn die schwingenden Körper durch eine gewisse Kraft (im vorliegenden Falle durch die Spannung des Fadens) miteinander verbunden sind. Die Verbindung wird **Koppelung** genannt.

Zwei gekoppelte, schwingungsfähige Körper können ihre Bewegungsenergie abwechselnd vollkommen aufeinander übertragen, wenn ihre Schwingungszeiten im ungekoppelten Zustande übereinstimmen, und wenn die Körper dieselbe Masse haben.

Ersetzen wir die die Koppelung bewirkende kleine Kugel durch eine Kugel von doppeltem Gewichte, so wird die Koppelung „enger“ als im ersten Falle, da die zwischen den beiden Körpern hervorgerufene Kraft größer wird. Die vollständige Übertragung erfolgt jetzt schon nach 5 Schwingungen. Bei noch engerer Koppelung, d. h. bei noch stärkerer Spannung des Verbindungsfadens, erfolgt die Übertragung in noch kürzerer Zeit.

Wir können uns die Koppelung so eng denken, daß schon nach einer viertel Schwingung eine vollkommene Übertragung auf den zweiten schwingungsfähigen Körper erfolgt. Dieser Fall tritt z. B. dann ein, wenn zwei gleich große Kugeln aus Elfenbein an gleich langen Fäden hängen und sich berühren. Beim Stoß der einen Kugel wird die gesamte Bewegungsenergie auf die zweite übertragen, indem die beim Zusammenstoß geweckte elastische Kraft die denkbar engste Koppelung erzeugt. Hängen wir mehrere elastische, gleich große Kugeln, einander berührend, nebeneinander auf (Fig. 632), so erfolgt beim Stoß der ersten Kugel *A* gegen die zweite die Übertragung auf diese vollständig. Die zweite stößt gegen die dritte, diese gegen die vierte usw.; die letzte Kugel *C* bewegt sich mit derselben Energie, also auch mit derselben Schwingungsweite schwingend, fort, mit der die erste den Stoß ausführte.

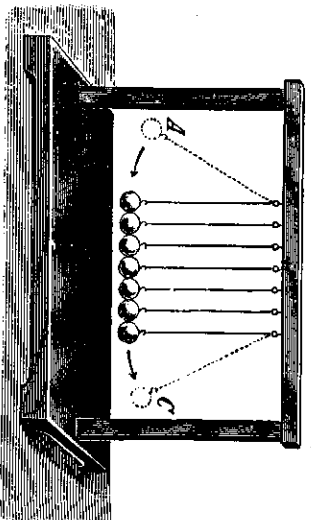


Fig. 632. Martiotte'scher Stoßapparat.

Die Energieübertragung erfolgt hierbei nach den in § 65 abgeleiteten Sätzen und Formeln über den elastischen Stoß. In bezug auf den durch Fig. 632 dargestellten Versuch, der im wesentlichen mit dem Versuche von Fig. 222 übereinstimmt, beachten wir noch, daß zur Energieübertragung von der ersten Kugel bis zur letzten eine gewisse Zeit vergeht. Nehmen wir an, die Kugelreihe wäre so lang, daß zur Energieübertragung von der ersten Kugel bis auf die letzte eine Sekunde vergeht, so können wir die Länge der Kugelreihe, also den Weg, den die Energie in einer Sekunde zurücklegt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energieübertragung nennen; sie ist größer als die Geschwindigkeit der stoßenden Kugel; die letzte Kugel fliegt früher fort, als die erste Kugel am entfernten Ende angekommen wäre, wenn sie sich frei bewegt hätte.

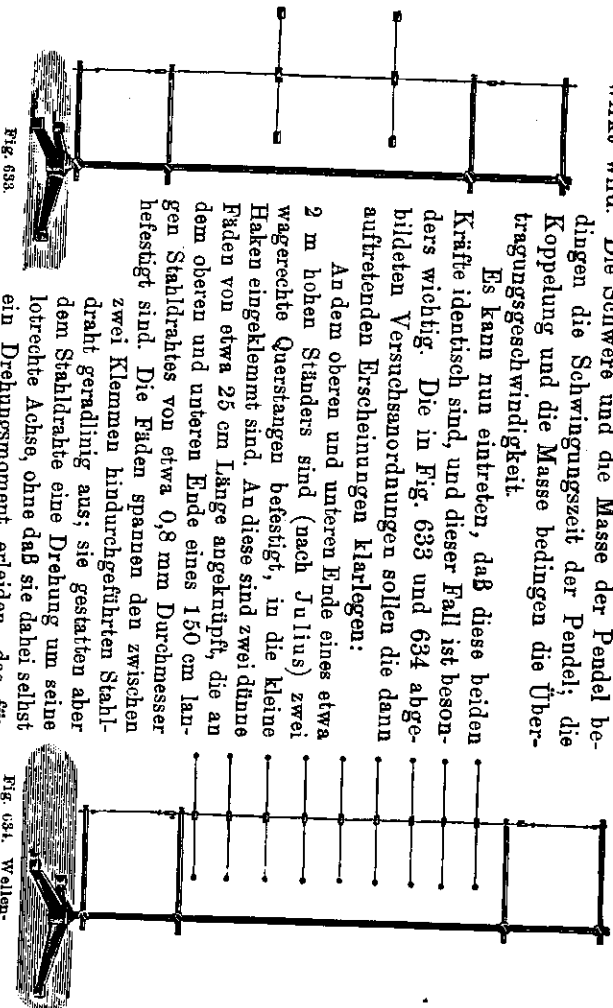
Der Übertragungsorganismus kann so dargestellt werden, wie die Bewegung eines gleichförmig bewegten Körpers, doch bewegt sich hierbei nicht der Körper selbst mit seiner ganzen Masse fort, sondern der Bewegungszustand

wird von Kugel zu Kugel durch die ganze Kugelreihe übertragen, wobei jede einzelne Kugel nur eine sehr kleine Strecke zurücklegt.

§ 202. Reflexionen am freien und am unfreien (festen) Ende.

Bei dem in Fig. 631 abgebildeten Versuche wirken zwei voneinander unabhängige Kräfte: 1. die Schwere, die jedes Pendel wieder in seine Gleichgewichtslage bringt, und 2. die Koppelung, die durch die Spannung des Verbindungsfadens infolge der Phasendifferenz der Pendelbewegung bewirkt wird. Die Schwere und die Masse der Pendel bedingen die Schwingungszeit der Pendel; die Koppelung und die Masse bedingen die Übertragungsgeschwindigkeit.

Es kann nun eintreten, daß diese beiden Kräfte identisch sind, und dieser Fall ist besonders wichtig. Die in Fig. 633 und 634 abgebildeten Versuchsanordnungen sollen die dann auftretenden Erscheinungen klarlegen:



An dem oberen und unteren Ende eines etwa 2 m hohen Ständers sind (nach Julius) zwei wagerechte Querstrangen befestigt, in die kleine Haken eingeklemmt sind. An diese sind zwei dünne Fäden von etwa 25 cm Länge angeknüpft, die an dem oberen und unteren Ende eines 150 cm langen Stahldrahtes von etwa 0,8 mm Durchmesser befestigt sind. Die Fäden spannen den zwischen zwei Klammern hindurchgeführten Stahldraht geradlinig aus; sie gestatten aber dem Stahldrahte eine Drehung um seine lotrechte Achse, ohne daß sie dabei selbst ein Drehungsmoment erleiden, das für die folgenden Versuche in Betracht käme.

An dem Stahldrahte können mit passenden Klammern Messingstangen wagerecht befestigt werden, die an ihren Enden durch aufgeschraubte Kugeln ein gewisses Trägheitsmoment erhalten. Wenn nun eine solche Stange an irgendeiner Stelle des Stahldrahtes befestigt wird, so kann man sie durch ein kurz wirkendes Drehungsmoment in eine Drehung um den Stahldraht als Achse versetzen. Der Stahldraht dreht sich hierbei ohne Hindernis mit, weil die beiden spannenden Fäden nähernd gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit. Klemmt man aber den Stahldraht an einem oder an beiden Enden fest, so führt die Stange infolge der Torsion des elastischen Stahldrahtes harmonische Schwingungen aus.

Jetzt wollen wir an dem Drahte zwei Querstrangen so festklemmen, wie es die Fig. 633 zeigt. Zunächst sollen beide Enden des Stahldrahtes frei bleiben, also nicht festgeklemmt werden. Dann lassen wir auf den unteren Querstab für kurze Zeit ein Kraftmoment wirken, das ihn in Drehung versetzt und den zwischen den beiden Querstrangen befindlichen Teil des Stahldrahtes zusammendrückt. Diese Tor-

§ 202. Reflexionen am freien und am unfreien (festen) Ende

sion wirkt nun auf beide Querstäbe mit gleich großen Momenten in entgegengesetztem Sinne. Die Folge hiervon ist, daß der untere Querstab eine Verzögerung und der obere eine Beschleunigung erfährt. Nach einiger Zeit kommt daher der untere Querstab vollständig zur Ruhe; zugleich hat aber der obere Querstab eine Bewegung angenommen, die genau mit der Bewegung übereinstimmt, die der untere Querstab zu Beginn des Versuches hatte.

Jetzt dreht sich der obere Querstab zuerst ohne Bewegungshindernis weiter; aber infolge der Drehung wird der zwischen den beiden Stäben liegende Teil des Stahldrahtes wieder in derselben Weise elastisch verdrückt, wie im ersten Teile des Versuches. Daher kehrt sich nun das Wechselspiel zwischen den beiden Stäben um. So gibt abwechselnd der eine Stab an den anderen seine ganze Energie ab. Die Erscheinung wird im weiteren Verlaufe nur durch die zwischen den beiden Massen wechselseitig auftretende elastische Torsion des Stahldrahtes und durch das Trägheitsmoment der beiden Massen bestimmt.

Wir befestigen nun nach Fig. 634 eine größere Anzahl gleicher Querstäbe an dem Stahldrahte. Der Stahldraht bleibe an seinen beiden Enden wieder frei beweglich wie vorher. Drehen wir nun den untersten Querstab, so verläuft zu Anfang die Erscheinung genau wie vorher; aber der zweite Querstab gilt, schon während er selbst durch die Elastizität des untersten Abschnittes des Stahldrahtes in Drehung versetzt wird, einen Teil seiner Energie an den dritten Stab ab, indem er diert. So werden auch der dritte und ebenso die nächsten Stäbe allmählich in Drehung versetzt, während die Drehung des untersten Stabes geringer wird. Nach einiger Zeit ist der unterste Stab vollständig zur Ruhe gekommen, nachdem er eine Drehung um einen Winkel ausgeführt hat, der von der Größe des im Anfange des Versuches wirkenden Kraftmomentes abhängt. Jeder folgende Stab führt genau dieselbe Drehung um genau denselben Winkel aus und kommt dann ebenfalls in Ruhe. So pflanzt sich die Drehung bis zum obersten Querstabe fort. Dieser aber erfährt keinen elastischen Widerstand, da ja das oberste Ende des Stahldrahtes frei drehbar ist. Daher dreht sich dieser Stab um denselben Winkel weiter, führt also im ganzen eine Drehung um den doppelten Winkel aus. Nun wirkt er wieder rückwärts auf die darunter hängenden Stäbe durch die elastische Torsion der Drahtteile. Die Drehung pflanzt sich in genau derselben Weise nach unten fort, während der Drehungssinn der einzelnen Stäbe derselbe bleibt, wie im Anfange. Das Spiel wiederholt sich viele Male, bis endlich die allgemeinen Bewegungswiderstände das Bild der Erscheinungen trüben.

Wir wollen jetzt das oberste Ende des Stahldrahtes festklemmen und wieder den untersten Querstab in Drehung versetzen. Zuerst verläuft die Erscheinung genau wie vorher; aber wenn die Drehung am obersten Ende angekommen ist, kann der oberste Stab seine Bewegung nicht widerstandslos ausführen, da er den obersten Teil des Stahldrahtes elastisch verdrücken muß. Die Folge dieser Verdrückung ist nun eine Rückwirkung auf den obersten Stab selbst, der nicht nur bald zur Ruhe kommt, sondern infolge der elastischen Spannung des obersten Drahtteiles wieder in seine Anfangslage zurückschwingt. Jetzt wirkt er wieder rückwärts auf die nach unten folgenden Querstäbe, indem er sie alle der Reihe nach zu einer Rückwärtschwingung veranlaßt. Haben wir nun inzwischen das unterste Ende des Stahldrahtes auch festgeklemmt, so geht die Bewegung bis an das untere Ende hinaus; aber hier kann der unterste Stab auch wieder nicht frei ausschlagen,

sondern er erzeugt eine elastische Verdrehung des untersten Drahtendes, und diese veranlaßt den untersten Querstab wieder zu einer Rückwärtsablenkung, die sich nun genau so nach oben fortpflanzt, wie es eben angeführt ist.

Diese Erscheinungen kommen um so schöner und reiner heraus, je größer die Zahl der Querstäbe und je länger der Stahl Draht ist. (Julius¹⁾ hat eine Wellenmaschine von $2\frac{1}{2}$ m Höhe gebaut, bei der 49 Querstäbe an dem lotrechten Draht durch Lösung befestigt sind. An dieser Wellenmaschine lassen sich die letzten Versuche gut durchführen. Der Grundgedanke dieser Wellenmaschine stimmt mit dem oben beschriebenen Apparate, mit dem man die Übertragung der Schwingungen im einzelnen noch besser verfolgen kann, überein.

Genau dieselben Erscheinungen treten ein, wenn mehrere Massen so miteinander elastisch gekoppelt sind, daß sie sich geradlinig bewegen können. Als Beispiel ist früher schon (§ 66) ein stehender Eisenhahnzug genannt worden, bei dem die Bremsen nicht angezogen sind. Hier wird ein auf das eine Ende ausgeübter Impuls allmählich auf das andere Ende übertragen. Auch die Kugelreihe von Fig. 222 und von Fig. 632 verhält sich so, wenn auch die Übertragung so rasch erfolgt, daß man die einzelnen Teile der Erscheinung nicht mit dem Auge verfolgen kann.

Denken wir uns die Kugeln in der Kugelreihe (Fig. 632) fest miteinander verbunden, so erhalten wir einen in allen Teilen vollkommen elastischen Stab. Die Bewegungsenergie eines auf das eine Ende dieses Stabes ausgeübten Bewegungsimpulses wird den ganzen Stab entlang bis zum anderen Ende übertragen. Ist das letzte Ende des Stabes frei beweglich, oder ist eine frei bewegliche, elastische Kugel davor gelegt, so fliegt diese, wie die letzte Kugel in der elastischen Kugelreihe, mit derselben Energie frei fort, mit der der Impuls angeführt worden ist. Es kann sogar der Fall eintreten, daß dann, wenn der elastische Stab keine große Zugfestigkeit besitzt, das letzte Ende des Stabes losgerissen wird und fortfliegt. In der Regel wird das selbständige Zerreißeln des Stabes nicht eintreten; dann wirkt die Bewegungsenergie des letzten Endes durch Zug und durch die durch den Zug hervorgerufene Elastizität wieder auf die rückwärts liegenden Teilchen ein und überträgt nun so seine Energie wieder bis zum ersten Ende. Es findet eine Reflexion der Energieübertragung am freien Ende des Stabes statt, wobei jedes einzelne Teilchen seine Teilbewegung in demselben Sinne ausführt, wie bei der Energieübertragung vom ersten zum letzten Teilchen. Die Reflexion der Energieübertragung erfolgt „mit gleicher Phase“.

Ist das zweite Ende des Stabes, also das Ende, das dem gestoßenen Ende des Stabes fern liegt, gegen eine feste, elastische Wand gelenkt, so kann die durch die Energie des letzten Endes hervorgerufene elastische Spannung die Wand nicht in Bewegung setzen; vielmehr bewerkstelligt diese Spannung einen auf das letzte Teilchen in entgegengesetzter Richtung ausgeübten Druck, wodurch ihm ein Impuls in der Richtung nach dem ersten Ende hin erteilt wird. Es erfolgt darauf wieder die Energieübertragung von Teilchen zu Teilchen, doch mit dem Unterschiede, daß die Richtungen der kleinen Bewegungen, die die einzelnen Teile ausführen, der ersten Bewegungsrichtung

1) W. H. Julius, Prof. in Utrecht.

entgegengesetzt gerichtet sind. Es findet eine Reflexion „mit entgegengesetzter Phase“ statt. Allgemein ergibt sich:

Erfolgt die Energieübertragung eines Bewegungsimpulses längs eines homogenen, elastischen Körpers, so geschieht sie nach den Gesetzen der gleichförmigen Bewegung bis zum Ende des Körpers hin. Hier erfolgt eine Reflexion, und zwar mit gleicher Phase, wenn das Ende frei ist, mit entgegengesetzter Phase, wenn das Ende fest ist. In beiden Fällen ist die Reflexion vollständig.

Reflexion an einem Mittel von veränderter Masse. An das entfernte Ende des elastischen Stabes soll sich jetzt, fest verbunden, ein Stab von demselben Materiale aber von geringerem Querschnitte anschließen: Sobald nun die Energie des Bewegungsimpulses an dem letzten Ende des ersten Stabes angelangt ist, geht nur ein Teil der Energie in den dünneren Stab über, gerade so, wie beim Stöße einer elastischen Kugel gegen eine andere elastische Kugel von geringerer Masse. Dieser Teil ist um so kleiner, je dünner der zweite Stab im Verhältnisse zum ersten ist. Der andere Teil der Energie wird mit gleicher Phase reflektiert.

Schließt sich an den ersten Stab, mit diesem fest verbunden, ein zweiter von demselben Materiale mit größerem Querschnitte an, so findet, wenn die Bewegungsenergie an dem Grenzpunkte angekommen ist, eine teilweise Reflexion mit entgegengesetzter Phase statt, indem auch hier ein Teil der Bewegungsenergie auf den zweiten Stab übertragen wird, gerade so wie beim Stöße einer elastischen Kugel gegen eine andere elastische Kugel mit größerer Masse.

Auch diese Erscheinungen kann man mit dem in Fig. 633 und Fig. 634 abgebildeten Apparate gut verfolgen, wenn man das Trägheitsmoment eines Teiles der Querstäbe durch aufgeschraubte größere Kugeln vergrößert.

Die Reflexion der Bewegungsenergie am Ende eines elastischen Körpers erfolgt mit gleicher Phase, wenn die auf die Längeneinheit kommende Masse das sich anschließenden Körpers geringer ist als die des ersten. Die Reflexion erfolgt mit entgegengesetzter Phase, wenn die auf die Längeneinheit entfallende Masse des zweiten Körpers größer ist als die des ersten Körpers.

In den letzten Fällen erleidet der erste Körper bei der Reflexion einen Energieverlust, der dem anderen Körper zugute kommt.

§ 203. Längs- und Querübertragung.

In den in § 202 besprochenen Versuchen mit der Kugelreihe oder dem elastischen Stabe war die Bewegungsrichtung der einzelnen Teilchen übereinstimmend oder gerade entgegengesetzt der Fortpflanzungsrichtung der Energieübertragung. Diese Art der Übertragung heißt eine *longitudinale* oder *Längsübertragung*. Bei dem im Eingange des § 201 beschriebenen Versuche mit den beiden Pendeln war die Bewegungsrichtung der einzelnen Pendel senkrecht zu der Richtung, in der die Übertragung vom ersten auf das zweite stattfand. Eine derartige Übertragung heißt *transversale* oder *Querübertragung*. Die Querübertragung tritt z. B. in folgenden Fällen ein:

Ein etwa 2 m langes und 50 cm breites netzartiges Gewebe (Fig. 635) wird an einer wagerechten, 2 m langen Leiste mit seiner einen Längsseite befestigt, während die unteren Maschen des Netzes in gleichen Abständen mit gleich schweren Kugeln belastet sind. Bringt man eine oder mehrere der Kugeln an dem einen

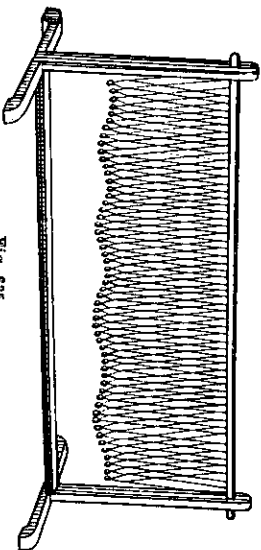


Fig. 635.
Welle in einer Reihe gekoppelter schwingender Punkte.

Ende durch einen sanften Schlag aus der Ebene des Netzes heraus, so wird dieses dadurch gespannt und überträgt die Bewegungsenergie der Kugeln auf die benachbarten, wobei die ersten zur Ruhe kommen. So verläuft die Übertragung allmählich bis zum letzten Ende des Netzes. Ist das letzte Ende frei, so findet eine Reflexion der Bewegungsenergie, die hier in Form von Schwingungen erfolgt statt. Die Schwingungen pflanzen sich wieder bis an das erste Ende fort. Man beobachtet, daß hierbei die Schwingungsphase unverändert bleibt. Ist dagegen das zweite Ende durch eine feste tritt bei der Reflexion eine Umkehrung der Phase ein.

Dieselbe Erscheinung kann man verfolgen, wenn man einen langen (ca. 50 m langen) Stahldraht wagrecht ausspannt und dann auf das eine Ende einen kurzen, aber kräftigen Schlag nach unten ausübt. Man beobachtet, wie die Abwärtsbewegung der einzelnen Teilchen sich längs des ausgespannten Drahtes fortpflanzt und dann am entgegengesetzten Ende reflektiert wird, wobei die Abwärtsbewegung in eine Aufwärtsbewegung verwandelt wird. Am festen Ende erfolgt eine Reflexion mit umgekehrter Phase. Auch an einem langen, ausgespannten Gummischlauch kann man die Erscheinung gut verfolgen, besonders wenn er mit Wasser gefüllt ist, da hierdurch seine Masse vergrößert und die Geschwindigkeit der Übertragung verkleinert wird.

Knüpft man an das entfernte Ende des ausgespannten Stahldrahtes oder des Gummischlauches einen Faden, also einen Körper, bei dem auf die Längeneinheit in geringerer Masse entfällt, und befestigt das entfernte Ende dieses Fadens in größerer Entfernung an einer festen Wand, so erfolgt am Ende des ausgespannten Körpers die Reflexion mit gleicher Phase. Da der Faden am Ende des Drahtes nicht masselos ist, so geht ein Teil der Energie in den Faden über, daher findet die Reflexion mit verringertem Ausschlag statt.

Eine lange, von parallelen Wänden begrenzte, oben offene Wasserrinne von mindestens 2 m Länge sei zum Teil mit Wasser gefüllt (Fig. 636). Taucht man in der Nähe des einen Endes der Rinne einen Körper ein, oder läßt man einen Stein oder einen Wassertropfen hier in das Wasser fallen, so wird das Wasser in Bewegung gesetzt. Die Bewegung eines einzelnen Teiles erfolgt, wie man an leichten, im Wasser schwebenden Körpern, z. B. Sägespänen, beobachten kann, an der Oberfläche in kreisförmigen Bah-

Fig. 636. Wasserrinne.

§ 204. Wasserwellen

661

nen; jedoch durchläuft jedes einzelne Teilchen nur einmal seine kreisförmige Bahn und überträgt hierbei seine Bewegungsenergie auf das nächst benachbarte, das nun in ähnlicher Weise wieder dem nächsten seine Energie mitteilt und hierbei selbst zur Ruhe kommt. So erfolgt auch hier eine Energieübertragung bis zum entferntesten Ende der Wasserrinne. An der Wasseroberfläche beobachtet man eine Erhöhung, einen Berg, und zwei Vertiefungen, zwei Täler, die sich die Wasserrinne entlang bewegen und nun am entfernten Ende reflektiert werden. Die die Energie übertragende Kraft ist bei der Wasserrinne die Schwerkraft der Wasserteilchen, vermöge welcher ein Ausgleich der Niveaudifferenz der einander benachbarten Teile erstrebt wird. Die Schwerkraft übernimmt hier die Rolle der Koppelung.

Auch die Energie von Torsionsbewegungen kann durch elastische Körper übertragen werden. Das ist mit dem Apparat von Fig. 633 und Fig. 634 schon gezeigt worden.

Bei den beschriebenen Energieübertragungen sind die einzelnen Teile des Körpers der Reihe nach Träger derselben Bewegungsenergie; sie führen daher alle um einen bestimmten Betrag später als die Bewegung bei jedem entfernteren Teilchen *Ubergangsgeschwindigkeit ist um so größer, je geringer die Masse der einzelnen Teile und je enger die Koppelung ist.*

§ 204. Wasserwellen.

Bei den bisher besprochenen Versuchen erfolgte nur ein einziger Bewegungsimpuls, der zur Folge hatte, daß jedes einzelne Teilchen nur einmal eine Bewegung ausführte. Wenn man nun das erste bewegte Teilchen in Schwingungen versetzt, indem man andauernd eine Hin- und Herbewegung verrichtet, indem man also das erste Stabende unmittelbar, nachdem es in Ruhe gekommen ist, in entgegengesetzter Richtung aus der Ruhelage bewegt, oder, indem man in die Wasserrinne in dem Augenblicke, wo das erste Wasserteilchen seine kreisförmige Bahn beendet hat, einen zweiten Wassertropfen hineinfallen läßt, so wird jeder folgende Impuls in derselben Weise übertragen wie der erste. Die Folge davon ist, daß der ganze Körper, der ganze Stab, das ganze Netz, der ganze Stahldraht, die ganze Oberfläche der Wasserrinne Schwingungen ausführt, jedoch so, daß jedes folgende Teilchen immer etwas später seine Bewegung ausführt als das vorhergehende. Nehmen wir an, daß der Stab, das Netz, der Stahldraht, die Wasserrinne unbegrenzt lang sind, so daß wir die durch die Reflexion hervorgerufene entgegengesetzte Bewegung einstellen vernachlässigen können, so entsteht ein längs der Körper sich bewegendes fortsetzendes Wellensystem (ein Wellenzug).

Die Entstehung der Wasserwellen ergibt sich (nach den Gebr. Weber^{1)) aus Fig. 637. Die einzelnen, mit den Zahlen 0—15 bezeichneten Punkte der in der ersten Figur ruhenden Wasseroberfläche führen kreisförmige Bahnen aus und durchlaufen diese Bahnen mit unveränderlicher Geschwindigkeit. Nachdem das}

¹⁾ Wellenlehre auf Experimente begründet von den Brüdern F. H. Weber und Wilh. Weber, Leipzig 1825.

nulle Teilchen $\frac{1}{3}$ seiner Bahn zurückgelegt hat, fängt das erste seine Bewegung an. Nachdem das nulle Teilchen $\frac{2}{3}$ seiner Bahn zurückgelegt hat, hat das erste $\frac{1}{3}$ zurückgelegt, und das zweite beginnt seine Bewegung. Dieser Bewegungszustand ist in Fig. 637 II dargestellt.

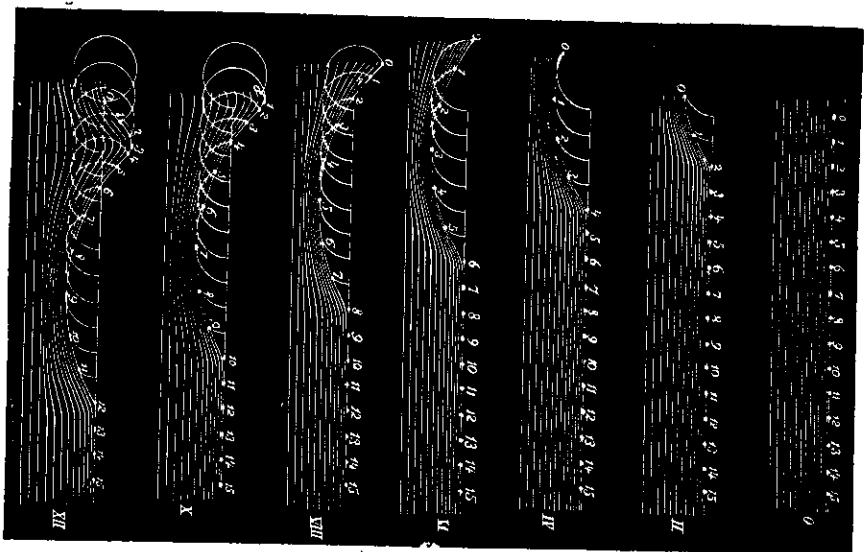


Fig. 637. Bildung von Wasserwellen durch kreisförmige Bewegung der Teilchen nach dem Gebr. Weber.

mit der anfänglichen Bewegungsrichtung zurück. In diesem Zeitpunkt, durch Fig. 637 XII dargestellt, ist eine vollständige Wellenbewegung zustande gekommen. Das zwölfte Teilchen befindet sich in demselben Bewegungszustand wie das nulle, während alle dazwischen liegenden um $\frac{1}{2}$ ihrer Kreisbahn den Nachbartheilchen gegenüber verschoben sind. Das durch Fig. 637 XII dargestellte Bild zeigt, wie ein Teil des Wassers sich über das ursprüngliche Niveau gehoben, während ein anderer sich unter das Niveau gesenkt hat. Der erstere Teil heißt ein Wellenberg, der letztere ein Wellental. Die Entfernung des nullten Teilchens vom zwölften heißt die Wellenlänge; die größte Erhebung oder die größte Vertiefung, d. h. also der Radius der Kreisbahn jedes

gestellt. In derselben Weise zeigen die Fig. IV bis XII das Zustandekommen einer Wasserwelle, indem jedesmal jedes einzelne Teilchen sich um $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ usw. seiner kreisförmigen Bahn weiter bewegt hat. So hat z. B. in Fig. VI das nulle Teilchen $\frac{1}{3}$, das erste $\frac{2}{3}$, das zweite $\frac{1}{3}$, das dritte $\frac{2}{3}$, das vierte $\frac{1}{3}$, das fünfte $\frac{2}{3}$ seiner kreisförmigen Bahn zurückgelegt, und das sechste Teilchen beginnt eben seine Bewegung. In diesem Augenblicke ist das nulle Teilchen wieder in der Höhe der Wasseroberfläche angekommen, hat aber nicht denselben Bewegungszustand, den es im Anfang hatte, da es jetzt im Begriffe ist, sich über die Wasseroberfläche zu erheben, während es zu Beginn der ganzen Wellenbewegung seine Abwärtsbewegung anfiel. Erst nachdem das nulle Teilchen die vollständige Kreisbahn durchlaufen hat, kommt es wieder in seine Anfangslage

§ 205. Beobachtung an Einzelwellen

einzelnen Teilchens, ist die Amplitude der Welle (Schwingungswerte der Welle). Bei einer Wasserwelle haben Wellenberg und Wellental nicht dieselbe Form; vielmehr ist der Wellenberg kürzer und steiler als das Wellental.

Die dargestellten Bewegungen können in der beschriebenen Form nur dadurch unterhalten werden, daß das nulle Teilchen immer aufs neue einen Bewegungsantrieb erhält.

Bei einer freien, ausgedehnten Wasseroberfläche, bei der der Bewegungsantrieb des nullten Teilchens etwa in der Mitte der Wasseroberfläche erfolgt, breiten sich die Wellen strahlenförmig aus. Daraus folgt, daß sich die dem nullten Teilchen mitgeteilte Bewegungsenergie auf eine um so größere Wassermasse verteilt, je weiter sich die Welle vom Erregungszentrum ausbreitet. Ist die dem nullten Teilchen mitgeteilte Bewegungsenergie $\frac{Mv^2}{2}$, so muß irgendwo dort, wo die in Bewegung gesetzte Wassermenge die vierfache Masse besitzt, die Energie $\frac{M}{2} \cdot v^2$ in die beiden Faktoren $\frac{4M}{2} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2$ zerfallen. Die Geschwindigkeit, mit der die vierfache Wassermasse die Gleichgewichtslage durchläuft, ist halb so groß wie die Geschwindigkeit, mit der das nulle Teilchen in Bewegung gesetzt wurde, m. a. W. die Schwingungswerte der Welle nimmt mit der Vergrößerung der Entfernung der Welle vom Wellenzentrum ab, dann allgemein ist die Schwingungswerte um so kleiner, um so geringer die Geschwindigkeit beim Durchgange durch die Ruhelage ist (S. 111).

Bei dem Versuche mit der Wasserwelle in der von parallelen Wänden begrenzten Wellenrinne tritt keine Verminderung der Schwingungswerte ein (wenn man von den durch die Reibung an den Wänden und durch die Reibung der einzelnen Wasserteilchen aneinander verursachten Bewegungshindernissen absieht), da die Masse der später in Bewegung gesetzten Wasserteile nicht größer ist als die der ersten Teilchen.

§ 205. Beobachtung an Einzelwellen.

Wenn man einen Stein in das Wasser wirft oder einen Wassertropfen auf die Wasseroberfläche fallen läßt, so breitet sich von der getroffenen Stelle ein aus wenigen Wellenbergen und Wellentälern bestehender, kreisförmiger Wellenzug aus, während am Ausgangspunkte selbst schon nach kurzem Auf- und Abschwingen keine Bewegung mehr wahrzunehmen ist. Fig. 638 ist nach einer photographischen Aufnahme einer Welle angefertigt, die durch einen in das Wasser geworfenen Ball erregt worden ist. Fig. 639 zeigt einen schematischen Durchschnitt durch eine sich kreisförmig ausbreitende Welle mit der Wellenlänge λ .

Der kreisförmigen Welle ist eine größere Anzahl von kleineren Wellen vorlagert, die sich durch ihr ganzes Aussehen, insbesondere durch ihre Schwingungswerte, von der Hauptwelle unterscheiden. Die Ursache für diese zweifache Art

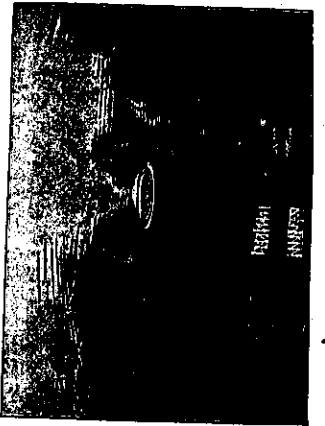


Fig. 638. Kreisförmiger Wellenzug.

Wellen vom Wellenzentrum aus ausbreiten, denn die ganze Energie des Erregungszentrums wird in kurzer Zeit an die Nachbartheile vollständig abgegeben.

Die Geschwindigkeit, mit der sich eine Wasserwelle ausbreitet, d. i. die Geschwindigkeit, mit der ein einzelner Teil der Welle vom Mittelpunkte aus strahlenförmig fortschreitet, ist von der Schwingungswerte unabhängig; bei geringen Wassertiefen im Vergleiche zur Wellenlänge ist sie auch von der Wellenlänge unabhängig (aber von der Wassertiefe abhängig), für größere Wassertiefen nimmt sie hingegen mit der Wassertiefe und dann auch mit der Wellenlänge zu, bis sie für sehr große Wassertiefen einen Grenzwert erreicht, welcher nur noch von der Wellenlänge abhängt. In flachen Gewässern, z. B. in der Nähe der Küste, kann ein aufmerksamer Beobachter aus dem Verhalten der Wellen Schlüsse auf die Wassertiefe ziehen, indem

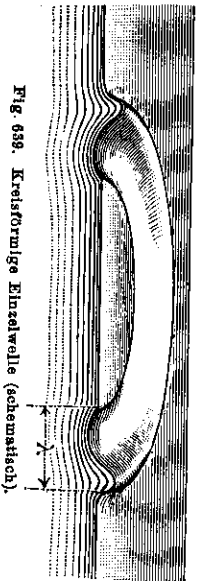


Fig. 639. Kreisförmige Einzelwelle (schematisch).

Wassertiefe ziehen, indem Teile einer ankommenden Welle, welche über seichten Grund gehen, hinter Teilen, welche über größere Tiefe gehen, zurückbleiben.

§ 206. Superposition der Wellen.

Läßt man gleichzeitig zwei gleiche Steine oder Wassertropfen in einem gewissen Abstände voneinander in das Wasser fallen, so breiten sich die erzeugten kongruenten Wellensysteme mit gleichen Geschwindigkeiten aus. Nach kurzer Zeit durchdringen sich die beiden Wellensysteme, und man beobachtet das in Fig. 640 nach einer photographischen Aufnahme angefertigte Bild. Man erkennt, daß die Punkte, die gleichzeitig den Wellenbergen beider Systeme angehören, Wellenberge von doppelter Höhe sind, daß die Punkte, die den Wellentälern beider Systeme angehören, Wellentäler doppelter Tiefe sind, daß dagegen die Punkte, die gleichzeitig dem Wellenberge des einen und dem Wellentale des andern Systems angehören, der freien Wasseroberfläche gegen-

über keine Niveaudifferenz zeigen. Diese Punkte behalten auch bei der Ausbreitung beider Wellensysteme ihre wechselseitige Lage zueinander mit geringen Verschiebungen bei. Die erhöhten Wellenberge und die vertieften Wellentäler bewegen sich auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke der beiden Wellenzentren. Längs dieser Mittelsenkrechten bewegt sich also eine kurze Welle mit erhöhter Schwingungswerte, während zu beiden Seiten der Mittelsenkrechten die Wasseroberfläche annähernd in Ruhe bleibt. Verfolgt man den Verlauf der Punkte in drei, um zwei gleiche Zeitintervalle verschiedenen Lagen, so erkennt man, daß die Geschwindigkeit der mittleren Punkte zuerst sehr groß ist, dann aber allmählich abnimmt und endlich der Ausbreitungsgeschwindigkeit der beiden primären Wellen gleich wird. Die seitlich liegenden Punkte geringster Schwingungswerte bewegen sich mit annähernd gleichbleibender Geschwindigkeit von der Verbindungsstrecke der Wellenmitten fort, entfernen sich aber immer mehr und mehr von der Mittelsenkrechten.

Daß die erhöhten und vertieften Punkte auf der Mittelsenkrechten liegen, hat seine Erklärung darin, daß diese Punkte von den Wellenmittlen gleichen Abstand haben, also demnach gleichen Phasen beider erzeugenden Wellen angehören. Für die Punkte geringster Schwingungswerte muß dagegen der Unterschied der Entfernungen von den beiden Wellenzentren eine halbe Wellenlänge sein. Der geometrische Ort für diese Punkte ist eine Hyperbel, bei der die Länge der Hauptachse gleich der halben Wellenlänge der primären Wellen ist. Die Punkte bewegen sich auf den Ästen dieser Hyperbel mit anfangs großer und später geringer werdender Geschwindigkeit vorwärts.

Wirft man gleichzeitig drei Steine I, II und III in das Wasser, oder läßt man gleichzeitig drei Wassertropfen in das Wasser fallen, doch so, daß die drei Punkte I, II und III in gerader Linie liegen und gleichen gegenseitigen Abstand voneinander haben, so bilden sich gleichzeitig drei kreisförmige Wellen aus, und es entstehen durch die Superposition¹⁾ sowohl der von I und II, wie der von II und III ausgehenden Welle Punkte, die den verschiedenen Punkten der vorigen Figur entsprechen. Außerdem entstehen dort, wo sich die Wellen I und III mit gleicher Phase durchkreuzen, also auf dem Mittelrote der Verbindungsstrecke von I und III, ebenfalls Punkte, die sich als Wellen doppelter Amplitude vor den übrigen auszeichnen. Auch diese Punkte bewegen sich senkrecht zur Verbindungsstrecke. Sie sind auf beiden Seiten von Ruhepunkten begleitet.

Vermeht man die Zahl der geradlinig nebeneinander auf die Wasseroberfläche fallenden Tropfen, so tritt eine Wiederholung der betrachteten

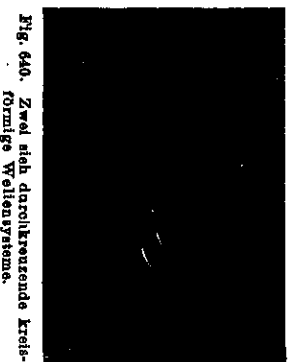


Fig. 640. Zwei sich durchkreuzende kreisförmige Wellensysteme.

1) superpositio (lat.) = Übereinanderlagerung. Das Prinzip der Superposition von Wellen kleiner Schwingungswerte wurde um 1800 von Thomas Young aufgestellt.

Fälle ein. Es entsteht eine Reihe von Punkten, die den Punkten mit vergrößerter Schwingungswerte entsprechen, und die sich senkrecht zur Verbindungsstrecke der getroffenen Stellen fortpflanzen. Die sich in größerer Entfernung seitlich ausbreitenden Ruhepunkte haben auf das Gesamtbild keinen Einfluß. Wenn man gleichzeitig eine große Anzahl geradlinig nebeneinander liegender Punkte der Wasseroberfläche etwa dadurch aus der Ruhelage bringt, daß man einen Stab wagrecht auf die Wasseroberfläche wirft, so breiten sich von den Enden des Stabes kreisförmige Wellen aus, während sich senkrecht zur Richtung des Stabes eine geradlinige, dem Stabe parallele Welle vorwärts bewegt.

Bei Verwendung eines Stabes von Kreisbogenform kann man jedes einzelne Stabelement als geradlinig betrachten. Abgesehen von den Wellen, die sich von den Enden kreisförmig ausbreiten, muß sich demnach eine durch größere Schwingungswerte ausgezeichnete, kreisförmige Welle nach beiden Seiten des Stabes fortpflanzen, deren Krümmungsmittelpunkt mit dem Mittelpunkte des kreisförmig gebogenen Stabes zusammenfällt. Hierbei kann man beobachten, wie die Amplitude der von der hohlen Seite des Stabes ausgehenden Welle zunimmt, da sich die Wellenenergie auf eine immer kleiner werdende Wassermasse konzentriert, während die Amplitude der sich nach außen ausbreitenden Welle abnimmt. Wir wollen die durch die Zusammenwirkung vieler Einzelwellen erzeugte Gesamtwelle *Frontwelle* nennen, im Gegensatz zu den Elementarwellen, die sich von jedem einzelnen Punkte des Stabes kreisförmig ausbreiten.

§ 207. Beobachtung an Wellensystemen.

Um ein System von kreisförmig sich ausbreitenden Wasserwellen zu erzeugen, muß man das Wasser an einem Punkte der Wasseroberfläche durch andauernde periodische Impulse zum Auf- und Abschwimmen veranlassen, damit von hier aus dem Wellensysteme dauernd neue Energie zugeführt wird. So ist z. B. das in Fig. 641 abgebildete zentrale Wellensystem dadurch entstanden, daß der im Mittelpunkt des Wellensystemes liegende Ball dauernd auf- und abbewegt worden ist.

Die Figur ist (wie die anderen Bilder der Wasserwellen) infolge der photographischen Aufnahme perspektivisch verzerrt, stellt aber die Wasserwellen so dar, wie wir sie mit dem Auge beobachten. Die durch die perspektivische Verzerrung entstandenen Ellipsen entsprechen in Wirklichkeit konzentrischen Kreisen.

Wir erregen nun gleichzeitig zwei benachbarte Punkte, indem wir an dem einen Ende eines schwingenden Stabes einen gabelförmigen Draht anbringen,

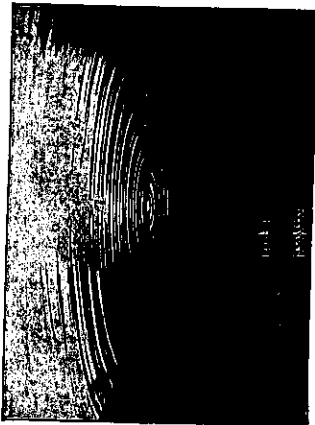


Fig. 641. Zentrales Wellensystem.



Fig. 642.

Interferenzbild zweier Wellenberge.



Fig. 643.

dessen beide Spitzen gleichzeitig in das Wasser eintauchen. Jetzt breiten sich von den beiden Eintauchstellen gleichzeitig zwei vollkommen gleiche kreisförmige Wellensysteme aus. Es bilden sich durch die Überlagerung der Wellenberge und Wellentäler der beiden Systeme Hyperbeln aus, von denen schon (§ 206) bei Besprechung der Fig. 640 die Rede war.

Fig. 642 zeigt die photographische Aufnahme der Erscheinung, die beim Durchdringen zweier zentraler Wellensysteme entsteht. Die Wellensysteme wurden dadurch erzeugt, daß quer über einen glatten See ein Tau gezogen war, an dem in geringem Abstände voneinander zwei Holzkugeln hingen. Das Tau wurde in Schwingungen versetzt, und hierdurch wurden die Kugeln zum periodischen Eintauchen in das Wasser gezwungen. Die ersten Interferenzhyperbeln¹⁾ diesseits und jenseits des Mittellotes auf der Verbindungslinie der Wellenmittelpunkte entsprechen einem Phasenunterschiede von einer halben Wellenlänge der in ihnen interferierenden Wellenlänge, die darauf beiderseitig folgenden Hyperbeln einem solchen von $\frac{1}{2}$ Wellenlängen usw. Die Wellenmittelpunkte sind die Brennpunkte aller dieser „konfokalen“²⁾ Hyperbeln. In so großem Abstände von den Wellenmittelpunkten, daß die Hyperbeln mit ihren Asymptoten vertauscht werden dürfen, können die Interferenzlinien als Gerade angesehen werden. In Fig. 643 ist ein Teil der sich durchdringenden Wellensysteme in größerem Maßstabe aufgenommen. Hier ist besonders darauf aufmerksam zu machen, daß die Wellen zu beiden Seiten der Interferenzhyperbeln entgegengesetzte Phase haben, daß nämlich unmittelbar an einen Wellenberg des einen Systemes ein Wellental des andern Systemes grenzt.

In Fig. 644 werden sechs nebeneinander liegende Punkte gleichzeitig erregt. In un-

1) interferer (frz.) = dazwischen kommen, aufeinanderstoßen.

2) focus (lat.) = Herd, Brennpunkt; confocal heißt: mit gemeinsamem Brennpunkte.



Fig. 644. Interferenz von 6 Wellensystemen, die von Punkten einer Geraden ausgehen.

mittelbarer Nähe der erregten Punkte entsteht ein unübersichtliches Nebeneinander von Wellenbergen und Wellentälern. In etwas größerer Entfernung jedoch in der rechten Seite der Figur erkennen wir die Ausbildung der geradlinigen Frontwellen. Die Fortpflanzungsrichtung steht zu der Verbindungslinie der erregten Punkte senkrecht, sie ist also in der Figur von dem erregten Punkte aus von links nach rechts gerichtet. Wenn wir in derselben Weise eine noch größere Anzahl von Punkten gleichzeitig erregen, so verschwindet das Durcheinander schon in unmittelbarer Nähe der erregten Punkte vollständig: es entsteht sofort eine geradlinige Frontwelle. Eine solche geradlinige Frontwelle kann man dadurch erzeugen, daß man an dem äußersten Ende eines schwingenden Stabes ein langes schmales Blech anbringt, das mit dem schwingenden Stabende periodisch in das Wasser eintaucht, oder dadurch, daß ein in das Wasser eintauchendes Brett periodisch hin- und hergeschoben wird. Die rechte Seite von Fig. 645 zeigt eine solche geradlinige Frontwelle, deren Bewegung von rechts nach links gerichtet ist.

§ 208. Huygenssches Prinzip.¹⁾

Wir stellen parallel mit den geradlinigen Frontwellen ein mit einer spaltförmigen Öffnung versehenes lotrechtcs Brett in das Wasser und beobachten eine vollständig neue Erscheinung (Fig. 645). Die Welle bewegt sich nicht etwa nur in einfach geradliniger Richtung durch die Öffnung weiter fort, vielmehr werden die in der Öffnung befindlichen Wasserteile zu einem neuen Wellenzentrum, und von hier aus breitet sich die Welle hinter der Wand kreisförmig aus.



Fig. 645. Vom Loche im Schirme geht eine Kreiswelle aus.

Aus diesem Versuche folgt, daß wir berechtigt sind, jeden einzelnen Punkt der zur Wellenbewegung veranlaßten Wasseroberfläche als ein neues Wellenzentrum anzusehen. Machen wir in das im Wasser stehende Brett drei Öffnungen nebeneinander, so können diese Öffnungen wieder als neue Erregungszentren angesehen werden. Vermehren wir die Zahl der Öffnungen, so ist das Bild übereinstimmend mit dem rechten Teile der Fig. 644, d. h. es bildet sich von

1) Christian Huygens (auch Huyghens geschrieben), geh. 1629, gest. 1696 im Haag, der bedeutendste Gelehrte seiner Zeit, ein hervorragendes Mitglied der neu gegründeten Akademie der Wissenschaften in Paris (§ 188, S. 620), kann als der erste Vertreter der neuzeitlichen Physik gelten. Er lieferte eine bahnbrechende Untersuchung über das physikalische Pendel (§ 57), wobei er den Begriff des Trägheitsmomentes (§ 53) prägte; er erfand die Pendeluhr und die Uhr mit Unruhregulierung (§ 7) und blamen beschäftigt. Er ist der Begründer der Wellentheorie des Lichtes 1678 (Traité de la lumière 1690). Doch hatte er hierin, wie er selbst angibt, in dem Jesuitenpater Ignatius Pardies (1638—1673) und Hooke (S. 181) Vorläufer.

diesen Öffnungen aus wieder eine geradlinige Frontwelle aus. Denken wir uns endlich diese Öffnungen in so großer Anzahl nebeneinander angebracht, daß wir die zwischen den Öffnungen stehenden Zwischenwände ganz vernachlässigen können, oder nehmen wir endlich die ganze Zwischenwand fort, so können wir trotzdem alle einzelnen Punkte der Stelle, an der wir uns die Scheidewand jetzt nur aufgestellt denken, ohne daß sie in Wirklichkeit dort steht, als Wellenzentren von neuen Elementarwellen ansehen. Diese Überlegung enthält die Grundgedanken des Huygensschen Prinzips:

In jeder Welle können wir jeden Punkt als Mittelpunkt eines neuen Elementarwellensystems ansehen. Die aus den Elementarwellen resultierende Welle ist mit der sich einfach ausbreitenden ursprünglichen Welle identisch.¹⁾

§ 209. Reflexion der Wellen.

Auf Grund des Huygensschen Prinzips werden die Vorgänge über die Reflexion der Wellen verständlich. In Fig. 646, die ebenfalls nach einer photographischen Aufnahme hergestellt worden ist, kann man auf der rechten Seite ein Stück des Brettes erkennen, durch dessen periodische Bewegung eine geradlinige Frontwelle erzeugt wird. Man erkennt hierbei gleichzeitig noch das von dem einen Endpunkte des Brettes ausgehende kreisförmige Wellensystem, das für unsere Betrachtungen jetzt ohne Bedeutung ist. Die geradlinige Frontwelle bewegt sich von rechts nach links und stößt dann gegen ein festes Brett. Die der rechten Seite der Figur zunächst liegenden Teile des festen Brettes werden zuerst von den geradlinigen Frontwellen getroffen, sie können als neue Erregungszentren angesehen werden, von denen sich Elementarwellen kreisförmig ausbreiten. Die weiter entfernt liegenden Teile des festen Brettes werden später getroffen und werden daher erst später als die zuerst getroffenen zu neuen Zentren von Elementarwellen. Durch die Zusammensetzung aller dieser Elementarwellen entsteht ein neues System von geradlinigen Frontwellen, das sich aber in der Richtung von links unten nach rechts oben fortbewegt. Das ursprüngliche geradlinige Wellensystem wird reflektiert und zwar ist der Winkel, den die Richtung des ursprünglichen

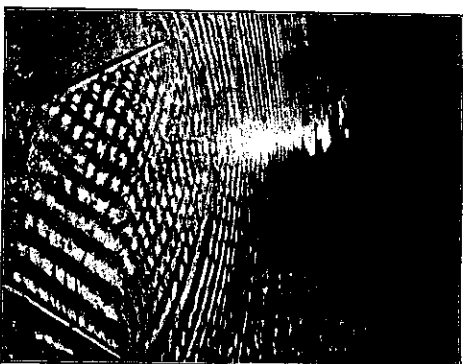


Fig. 646. Reflexion ebener Wellen.

1) Es sei bemerkt, daß das Huygenssche Prinzip in vielen Fällen gute Dienste zu leisten vermag, aber nicht mathematisch streng gültig ist. Eine einwandfreie Formulierung ist ihm (1882) von Kirchhoff gegeben worden; diese kann ohne eingehende Verwendung mathematischer Symbole in Worten kaum ausgesprochen werden; es muß dieserhalb auf Lehrbücher der theor. Physik verwiesen werden.



Fig. 647. Reflexion von ringförmigen Wellen an gerader Wand.

gang abgebildet, wie eine geradlinige Frontwelle an einer kreisförmig gekrümmten hohlen Wand reflektiert wird. Da die geradlinigen Frontwellen hier die neuen Elementarwellen früher aus als in der Mitte. Daher entsteht ein neues kreisförmiges Wellensystem, bei dem aber die Bewegungsrichtung der reflektierten Wellen nach einem Punkte gerichtet ist, der in der Figur als ein dunkler Fleck erscheint. Die Bewegungsrichtung der reflektierten Welle konvergieren nach diesem Punkte (Brennpunkt).

Erregen wir (Fig. 649) in dem Brennpunkte der kreisförmig gekrümmten Wand ein kreisförmiges Wellensystem, so wird der mittlere Teil der hohlen Wand zuerst getroffen, folglich bilden sich hier zuerst die Zentren der neuen



Fig. 648. Reflexion ebener Wellen an hohler Wand.

Wellensystemes mit der festen Wand bildet, gleich dem Winkel, den die Fortpflanzungsrichtung der reflektierten Welle mit der festen Wand bildet.

In derselben Weise entsteht der in Fig. 647 abgebildete Vorgang der Reflexion eines sich kreisförmig ausbreitenden Wellensystemes an einer festen Wand. Der Mittelpunkt der reflektierten Kreiswelle liegt ebenso weit hinter der festen Wand wie der Mittelpunkt des ursprünglichen Wellensystemes vor ihr.

In Fig. 648 ist der Vorgang der Reflexion ebener Wellen an einer kreisförmig gekrümmten hohlen Wand dargestellt. Da die geradlinigen Frontwellen hier die neuen Elementarwellen früher aus als in der Mitte. Daher entsteht ein neues kreisförmiges Wellensystem, bei dem aber die Bewegungsrichtung der reflektierten Wellen nach einem Punkte gerichtet ist, der in der Figur als ein dunkler Fleck erscheint. Die Bewegungsrichtung der reflektierten Welle konvergieren nach diesem Punkte (Brennpunkt).

Erregen wir (Fig. 649) in dem Brennpunkte der kreisförmig gekrümmten Wand ein kreisförmiges Wellensystem, so wird der mittlere Teil der hohlen Wand zuerst getroffen, folglich bilden sich hier zuerst die Zentren der neuen Elementarwellen aus, während die seitlichen Teile erst später getroffen werden. Durch Zusammensetzung aller von der hohlen Wand ausgehenden Elementarwellen entsteht eine geradlinige Frontwelle: das ursprüngliche kreisförmige Wellensystem wird als ein System geradliniger Frontwellen reflektiert.

In Fig. 650 endlich wird ein kreisförmiges Wellensystem von einer ebenen, kreisförmigen Wand wieder als Kreiswellensystem reflektiert; doch liegt der Mittelpunkt des neuen Wellensystemes hinter der festen Wand, und zwar näher an



Fig. 649. Reflexion von Wellen, welche vom Brennpunkte ausgehen.

Diese bei den Wasserwellen unmittelbar zu beobachtenden Erscheinungen treten bei allen Wellenbewegungen ein. Wir werden den Erscheinungen im besonderen in der Lehre vom Lichte wieder begegnen, wo auch die mathematische Behandlung erfolgt (§ 332).

§ 210. Luftwellen.

Bei den Wasserwellen findet die Fortpflanzung fast nur an der Oberfläche des Wassers statt. Anders liegen die Verhältnisse bei den Luftwellen, die dadurch entstehen, daß an einer Stelle des Raumes die Luft eine plötzliche Erschütterung, z. B. durch eine Explosion, erfährt. Eine Explosion bewirkt eine kurzdauernde Verdichtung der Luft in unmittelbarer Umgebung der Explosionsstelle. Die Luft wird dadurch aus ihrem ursprünglichen Gleichgewichtszustande gebracht, sie kehrt dann aber wieder in ihren Gleichgewichtszustand zurück. Sie dehnt sich hierbei aus und drückt die ihr zunächst liegenden benachbarten Schichten zusammen, die darauf ebenfalls wieder in die Gleichgewichtslage zurückkehren und die Luftschichten in ihrer Umgebung wieder verdichten. So pflanzt sich die Luftverdichtung von dem Erregungszentrum strahlig nach allen Seiten in Form einer oder weniger Kugelwellen aus. Folgen auf die erste Explosion im Erregungszentrum mehrere andere in regelmäßiger Folge, oder wird sonstwie die Luft periodisch verdichtet und verdünnt, z. B. durch eine tönende Pfeife, so wiederholen sich die einzelnen Impulse, und eine Luftwelle folgt der anderen, ähnlich wie oben eine Wasserwelle der anderen folgte. Hierbei können dann ähnlich wie bei der Wasserwelle Reflexionen an festen Wänden eintreten, die ähnlich wie bei den Wasserwellen verlaufen. Auch bei der Fortpflanzung des Lichtes treten ähnliche Erscheinungen auf, die bei der Lehre vom Lichte eingehend behandelt werden.



Fig. 650. Reflexion ringförmiger Wellen an erhabenen gekrümmter Wand.

§ 211. Fortschreitende Querwellen.

Führen die einzelnen Teilchen eines Körpers harmonische Schwingungen aus, und erfolgt die Energieübertragung von einem Teilchen zu einem andern in einer zur Elongation oder Verrückung der Schwingungen senkrechten Richtung, so entstehen in einer Reihe von Teilchen, über welche die Energieübertragung ihren Weg nimmt, Lagenbeziehungen, wie sie in Fig. 652 in 15 den Sätzen über die harmonischen Schwingungen dargestellt sind. Die Verrückung ist nach Fig. 651 eingetragen worden. Jedes folgende Teilchen fängt seine Bewegung immer um denselben Zeitabschnitt später an als das vorhergehende. In der Figur ist angenommen, daß das nullte Teilchen wieder

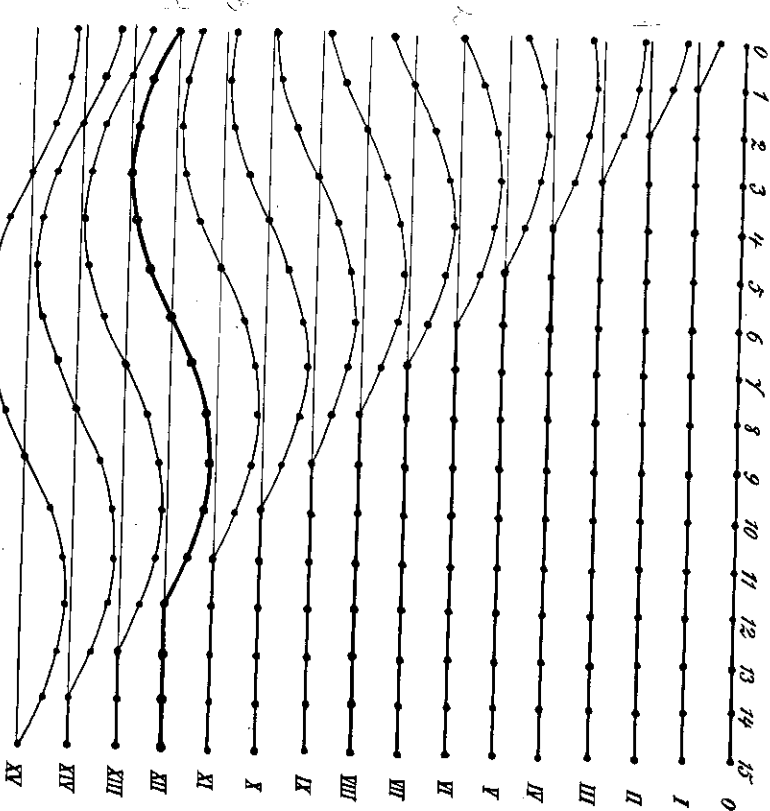
Fig. 651. Die Verrückungen y einer harmonischen Bewegung.

Fig. 652. Bildung der fortschreitenden Querwelle.

§ 211. Fortschreitende Querwellen. § 212. Mathematische Behandlung derselben. 673
in seine Anfangslage zurückgekommen ist und diese mit der anfänglichen Geschwindigkeit in der Anfangsrichtung durchläuft, wenn das zwölfte Teilchen seine Bewegung anfängt. Dieser Zeitpunkt entspricht der XII ten Reihe der Fig. 652.

Die Entfernung zweier Teile, die sich in demselben Bewegungszustande befinden, heißt die Wellenlänge; die größte Verrückung, d. i. der Radius des Kreises in Fig. 651 heißt die Amplitude oder Schwingungswerte der Schwingung. Die Welle wird transversale oder Querwelle genannt, wenn, wie in der Figur, die Bewegungsrichtung eines einzelnen Teiles zur Fortpflanzungsrichtung der Welle senkrecht ist.

§ 212. Mathematische Behandlung der Querwellen.

1. Die Wellengleichung. Das Bewegungsgesetz, nach dem ein einzelnes Teilchen eine Querschwingung ausführt, wird nach § 25 durch die Gleichung

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

dargestellt. Hierin bedeutet y die Elongation oder Verrückung, also die jedem Werte von φ zugehörige Ordinate des bewegten Teilchens, r die Schwingungswerte, also den Halbmesser des Kreises aus Fig. 651, während durch den Winkel φ der Zeitpunkt bestimmt ist, für den die Verrückung berechnet werden soll. Dieser Winkel heißt der Phasenwinkel. Braucht jeder Punkt zu einer vollständigen Schwingung die Zeit T , so heißt T die Schwingungszeit. Während der Schwingungszeit durchläuft φ alle Werte von 0 bis 2π , für die Zeitinheit hat also φ den Wert $\frac{2\pi}{T}$. Dem beliebigen Zeitpunkte t entspricht der Wert $\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t$. Hieraus folgt, daß wir das Bewegungsgesetz auch in der Form schreiben können

$$y = r \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right).$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Bewegung des Massenstückes zur Zeit $t = 0$ beginnt. Daher gilt diese Gleichung für das nullte Massenstückchen.

Das erste Massenstückchen fängt seine Bewegung erst nach einer bestimmten Zeit ϕ (in unserem Falle nach der Zeit $\frac{T}{12}$) an. Für dieses lautet also das Bewegungsgesetz $y_1 = r \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{T} (t - \phi) \right]$. Für das p te Massenstückchen müssen wir setzen

$$y_p = r \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{T} (t - p\phi) \right].$$

Nehmen wir zwischen dem nullten und dem um eine ganze Wellenlänge zu ihm entfernten Massenstücke n Teile (in unserem Falle 12) an, so ist $n\phi = T$, also $\phi = \frac{T}{n}$. Folglich lautet das Bewegungsgesetz für das p te Teilchen

$$y_p = r \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{p}{n} T \right) \right].$$

Die Wellenlänge, also der Abstand des nullten Teilchens vom n ten Teile, sei λ ; der Abstand des p ten Teilchens vom nullten sei x , so verhält sich $x : \lambda = p : n$.

Hieraus folgt endlich $y_0 = y_x = r \cdot \sin \left[2\pi \left(t - \frac{x}{\lambda} \cdot T \right) \right]$
oder
 $y_x = r \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$.

Diese Gleichung ist das Bewegungsgesetz für jedes Teilchen der Welle.

Die Gleichung enthält die beiden veränderlichen Größen t und x . Wollen wir aus der Gleichung das Bewegungsgesetz eines einzelnen Punktes ableiten, so wird x unveränderlich gehalten. Die Gleichung vereinfacht sich dann auf

$$y = r \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - c \right) \right].$$

Soll die Gleichung die Verrückung für alle Punkte der Welle in einem bestimmten Zeitpunkt ausdrücken, so müssen wir t als unveränderlich annehmen. Die Gleichung vereinfacht sich auf

$$y = r \cdot \sin \left[2\pi \left(c - \frac{x}{\lambda} \right) \right].$$

Der Vergleich der beiden Gleichungen bestätigt das, was die geometrische Herleitung der Welle ohne weiteres schon lehren muß: Für die Untersuchung einer Welle ist es unerle, ob man die aufeinanderfolgenden Bewegungszustände eines einzelnen Punktes oder die gleichzeitigen Bewegungszustände aller Punkte der Welle betrachtet, m. a. W.:

Die kinematographische Aufnahme der Bewegung eines einzelnen Punktes, einer Querwelle stimmt mit der photographischen Momentaufnahme der Gesamtwellen überein.

2. **Energie einer Welle.** Bildet man den Differentialquotienten der Schwingungsgleichung nach y und t als Veränderlichen, so erhält man die Geschwindigkeit des schwingenden Punktes

$$v_x = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi r}{T} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right].$$

Entsprechend ist die Beschleunigung

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{4\pi^2 r}{T^2} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot y_x.$$

Hat ein schwingender Massenpunkt die Masse m , so ist seine kinetische Energie $\frac{m v^2}{2}$, seine potentielle Energie (S. 106) $-\frac{m y_x \cdot y_x}{2} = \frac{2\pi^2}{T^2} \cdot y_x^2 \cdot m$. Die Gesamtenergie des schwingenden Punktes ist daher

$$E = \frac{m \cdot 2\pi^2 r^2}{T^2} \left\{ \cos^2 \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] + \sin^2 \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \right\} = \frac{2\pi^2 \cdot m \cdot r^2}{T^2}.$$

Daher gilt also auch für eine Welle:

Die Energie einer Welle ist dem Quadrate der Schwingungswerte proportional, dem Quadrate der Schwingungsdauer umgekehrt proportional und der Masse der schwingenden Punkte proportional. Jeder Punkt eines Wellenzuges hat den gleichen Energiewert, solange die Masse der Punkte und die Schwingungswerte längs des Wellenzuges gleich bleiben.

3. **Komponenten einer Welle und Superposition mehrerer.** Die Verrückungen y , die Geschwindigkeiten v der schwingenden Punkte und die Beschleunigungen γ

sind gerichtete Größen, die man nach dem Parallelogrammsatze in Komponenten zerlegen kann. Daher darf eine Querwelle in Komponenten zerlegt werden, deren Verrückungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der schwingenden Punkte die Komponenten der gegebenen Welle sind. Die Komponenten der Welle können als voneinander unabhängige Wellen behandelt werden, deren jede für sich den Gesetzen der Wellenbewegung gehorcht. Entsprechend können mehrere Wellen zu einer einzigen nach dem Parallelogrammsatze zusammengesetzt werden.

4. **Beziehung zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Schwingungszahl und Wellenlänge.** Fragt man, welche Punkte des Wellenzuges dieselbe Verrückung y_x nach Größe und Richtung haben, so ist das Argument der Sinusfunktion unveränderlich zu halten. Es haben also alle Punkte x vollkommen gleiche Verrückung, für welche gilt

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \text{const.}$$

Nimmt man im Sonderfalle die Verrückung, welche zur Zeit $t = 0$ im Punkte $x = 0$ vorhanden war, zum Gegenstande der Betrachtung, so erhält man

$$\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{t}{T} = c,$$

d. h. alle Punkte erhalten nacheinander die gleiche Verrückung, und zwar schreitet diese mit der Geschwindigkeit c längs der Wellenrichtung fort. Die Geschwindigkeit c heißt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle oder Wellengeschwindigkeit. Nennt man noch $\frac{1}{T} = \nu$ die Schwingungszahl oder Frequenz¹⁾ der Welle, so gilt

$$c = \nu \cdot \lambda.$$

Diese Gleichung kann auch unmittelbar aus der Anschauung leicht gewonnen werden. Denn während ein Massenteilchen eine vollständige Schwingung ausführt, bewegt sich die Welle um eine Wellenlänge λ vorwärts. Macht daher ein Massenteilchen in einer Sekunde ν Schwingungen, so hat sich die Welle um die Strecke $\nu \cdot \lambda$ vorwärtsbewegt. Das ist aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c .

5. **Gruppengeschwindigkeit.** Diese einfachen Betrachtungen gelten jedoch nur solange, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle c von der Wellenlänge λ unabhängig ist. Im anderen Falle sind die Verhältnisse viel verwickelter. Ein Versuch möge uns davon überzeugen, daß man unter gewissen in der Natur nicht seltenen Bedingungen bei der Wellenbewegung verschiedene Geschwindigkeiten zu unterscheiden hat.

Wir wollen dem einen Ende des in Fig. 635 abgebildeten, mit Bleikugeln beschwerten Netzes mit der Hand eine oder mehrere hin- und hergehende Querbewegungen erteilen und dann das Ende mit der Hand wieder festhalten. Dann schreitet die Erregung in der durch die Bleikugeln gebildeten Punktreihe in anderer Weise fort, als wir es bisher beschrieben haben. Verfolgen wir nämlich aufmerksam etwa einen sich fortplantenden Wellenberg, so beobachten wir, daß dessen Erhebung beim Fortschreiten von der erregenden Stelle fort kleiner und kleiner wird und

1) Als Frequenz bezeichnet man auch den Zahlenwert von $\frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, d. i. die Anzahl der Schwingungen in 2π Sekunden. Besser sagt man in diesem Sinne „Kreisfrequenz“.

schließlich ganz verschwindet. Dafür rücken hinter der verschwindenden Welle neue Wellen in ähnlicher Weise nach. Jede einzelne dieser Wellen kommt aber in der Bewegungsrichtung weiter wie die vorhergehende, ehe sie ganz verschwindet; in einem bestimmten Punkte der Punkteihe schaukeln sich mit anderen Worten die Punkte, über welche die Wellen hinweggehen, zu immer größeren Schwingungswerten hinauf. Die der Punkteihe erteilte Erregung verteilt sich erkennbar über eine gewisse Länge der Punkteihe. Innerhalb dieser Strecke erkennen wir eine Anzahl aufeinanderfolgender Wellen. Wir haben einen „Wellenzug“ oder eine „Wellengruppe“ vor uns, von der wir einen bestimmten Anfang und ein bestimmtes Ende angeben können. Diese Gruppe nun wandert mit ihrem Anfange, dem „Kopfe“ der Gruppe, mit einer kleineren Geschwindigkeit voran, wie die Wellen innerhalb des Zuges. Diese entstehen immer von neuem am hinteren Ende des Zuges, während innerhalb des Zuges jenem Kopfe zu nach vorn und verschwinden mit abnehmender Schwingungswerte, je mehr sie sich dem Kopfe nähern. Es ist nicht schwer, durch einen Versuch die Zeit zu bestimmen, welche die Erregung gebraucht, um das Netz zu durchwandern. Damit kann man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellengruppe, die wir *Gruppengeschwindigkeit* nennen wollen, als Quotienten von Länge der Punkteihe und beobachteter Zeit gewinnen.

Ändern wir den geschilderten Versuch in der Weise ab, daß wir nicht nach einigen wenigen Schwingungen das Ende des Netzes wieder ruhig halten, sondern fortfahren, das Ende dauernd in gleichmäßigem Rhythmus hin- und herzuschaukeln, so hat der erregte Wellenzug natürlich kein Ende, der Kopf durchwandert das ganze Netz, wird am Ende reflektiert und durchwandert das Netz wieder rückwärts bis zum Ausgange. Es bildet sich dann die in § 218 und § 220 beschriebene stehende Welle aus. Die Erscheinung einer besonderen Gruppengeschwindigkeit ist von diesem Augenblicke an in der Bewegung des Netzes nicht mehr aufzufinden. Wir haben nunmehr zwei einander entgegengesetzt wandernde beharrliche Wellenzüge, deren Schwingungswerte unveränderlich geworden ist. Ihre Phasen pflanzen sich mit größerer Geschwindigkeit als der Gruppengeschwindigkeit regelmäßig fort. Die Wellengeschwindigkeit c dieser Wellen kann aus Schwingungsdauer T und Wellenlänge λ bestimmt werden.

Der Grund dieses sonderbaren und vom allgemeinen abweichenden Verhaltens der Wellen am beschwerten unteren Ende des Netzes ist darin zu suchen, daß die Kugeln des Netzes eine gewisse Eigenschwingungsdauer besitzen. Es kann ja jede Kugel als Endpunkt eines Pendels aufgefaßt werden, das an der Querstange befestigt ist, welche das Netz trägt. Diese Pendel, von denen ein jedes mit dem benachbarten gekoppelt ist, haben das Bestreben, Schwingungen von der ihrer Pendellänge entsprechenden Eigenschwingungsdauer auszuführen. Schwingungen einer anderen als dieser Periode breiten sich, wie eine genauere theoretische Untersuchung lehrt, mit desto größerer Wellengeschwindigkeit aus, je näher die Periode mit jener Eigenschwingungsdauer übereinstimmt. *Erst bei unendlich wachsenden Schwingungszahlen, also verschwindender Schwingungsdauer und verschwindender Wellenlänge der Wellenbewegung haben die Gruppengeschwindigkeit und die Wellengeschwindigkeit denselben Wert* (s. dazu § 220). Dieser Satz gilt für jede Art von Wellenbewegung. — Es möge darauf hingewiesen werden, daß auch bei Wasserwellen im allgemeinen die Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge (§ 205) abhängt, daß auch — z. B. wenn man die Wellenlänge beobachtet, die von einem einzelnen fallenden Tropfen in einem tiefen Wasserbecken erzeugt werden — bei

genügender Aufmerksamkeit ähnliches Verhalten der Wellen in den Wellengruppen beobachtet werden kann, wie wir es für das beschwerte Netz beschrieben haben.

6. **Energiewanderung im Wellenzuge.** In einem fortschreitenden Wellenzuge entstehen an der Spitze des Zuges dauernd neue Wellen, z. B. an dem einen eines langen Seiles, dessen anderes Ende harmonisch hin- und herbewegt wird. Daber muß in einem Wellenzuge Energie wandern; die vorn in den Schwingungen der Spitze neu in die Erscheinung tretende Energie wird von hinten nachgeliefert. In einem solchen fortschreitenden Zuge wird nun in jeder Sekunde eine Strecke der Länge c neu in Schwingung versetzt. Daher muß die nachgelieferte Energie soviel mal die Schwingungsenergie eines Massenpunktes sein, als in der Strecke c schwingende Massenpunkte vorhanden sind. Hat nun ein Massenpunkt der Masse m die Länge Δx , den Querschnitt q und die Dichte s , so ist $m = q \cdot s \cdot \Delta x$, und auf der Strecke c liegen $\frac{c}{\Delta x}$ solcher Massenpunkte. Daher wandert durch den Querschnitt q in jeder Sekunde die Energie (s. oben 2.)

$$S = \frac{c}{\Delta x} E = \frac{2\pi^2 \cdot r^2}{T^2} \cdot q \cdot s \cdot \Delta x \cdot \frac{c}{\Delta x} = 2\pi^2 r^2 s^2 \cdot c \cdot q \cdot s.$$

Hat man zwischen Wellengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit zu unterscheiden, so bedeutet die Größe c in dieser Gleichung die Gruppengeschwindigkeit. Eine solche Energiewanderung (Energiestrahlung) findet auch dann statt, wenn am einen Ende des Wellenzuges die Energie durch Widerstände dauernd in Wärme verwandelt wird, so daß eine Abbremsung der Schwingung ein-treten würde, wenn die Energie nicht dauernd nachgeliefert würde. Wir lernen in der Macheschen Wellenmaschine (§ 215) eine Vorrichtung kennen, mit der man Wellen in einer Punkteihe erzeugen kann, deren Punkte überhaupt nicht gekoppelt sind. In einer solchen Welle findet natürlich keine Energiewanderung statt. Ähnlich muß in einem Wellenzuge in einer Punkteihe äußerst lose gekoppelter Punkte mit Eigenschwingungsdauer die Energiegeschwindigkeit bedeutend geringer sein als die Wellengeschwindigkeit.

§ 213. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Seilwellen.

Die Geschwindigkeit, mit der sich eine Querstange längs eines ausgespannten Seiles bewegt, hängt von der Spannung des Seiles, von seiner Dicke und der Dichte seines Materials ab. Diese Abhängigkeit kann auf folgende Weise durch Versuche bestimmt werden. Ein Stahldraht von etwa 0,9 mm Durchmesser und etwa 60 m Länge wird an den beiden Enden eines langen Korridors so ausgespannt, wie es in Fig. 653 abgebildet ist. Das eine Ende ist unmittelbar an der Wand befestigt, während zwischen dem anderen Ende und der Wand eine Federwaage und ein Flaschenzug eingespannt sind. Um eine bestimmte Länge der Saite abzugrenzen zu können, werden in der Nähe der

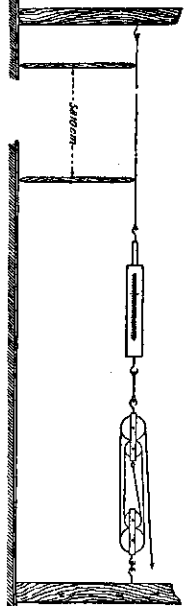


Fig. 653. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Seilwellen.

beiden Enden Bretter, deren obere Kanten zugeschärft sind, als Stege unter die Saite gestellt. Mittels des Flaschenzuges kann die Saite beliebig gespannt und die Spannung dann an der Federwage abgelesen werden. Führt man nun in der Nähe des einen Steges auf die Saite einen kurzen Schlag aus, so bewegt sich die durch den Schlag hervorwirkte Ausbuchtung nach unten bis zum entfernten Ende der Saite fort; hier wird die Ausbuchtung mit entgegen gesetzter Phase reflektiert und kehrt dann zum ersten Ende der Saite zurück. Hierauf erfolgt abermalige Reflexion. Die Welle bewegt sich so mehreremal hin und her. Beobachtet man nun, wievielmals sich die Welle in einer abgemessenen Zeit auf dem Drahte hin und her bewegt, so läßt sich daraus die Fortpflanzungsgeschwindigkeit berechnen.

Eine Beobachtung an einem 58,10 m langen Stahldrahte von 0,9 mm Dicke, der mit der Kraft von 5 kg^{*} gespannt wurde, ergab, daß die Welle die Saitenlänge in einer Minute 100 mal durchlief. Hieraus folgt, daß die Welle in einer Minute den Weg von 5810 m, in einer Sekunde also den Weg von annähernd 100 m zurücklegte.

Wenn die Spannung auf der Saite auf das Vierfache und das Neunfache ihres ursprünglichen Betrages gesteigert wird, steigt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf das Doppelte und Dreifache. Hieraus folgt: *Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Seiwellen ist der Quadratwurzel aus der Spannung des Seiles proportional.*

Wenn man einen Stahldraht von der doppelten Dicke, also von dem vierfachen Querschnitte, verwendet, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit halb so groß. Aus mehreren weiteren Beobachtungen mit Stahldrähten verschiedener Dicke folgt: *Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Seiwellen ist dem Durchmesser des Seiles, also der Quadratwurzel aus dem Querschnitte, umgekehrt proportional.*

Wenn man endlich Drähte von anderem Materiale, also auch von anderer Dichte, unternimmt, so folgt aus den Versuchen: *Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel aus der Dichte umgekehrt proportional.*

Bezeichnen wir ferner die Masse der Längeneinheit der Saite mit λ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit v , so können wir die beiden letzten Ergebnisse zusammenfassen: *Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel aus der Längendichte umgekehrt proportional.*

Es ist gebräuchlich, nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, sondern die Schwingungszahl einer Saite, nämlich die Anzahl der Hin- und Rückgänge einer Querwelle auf einer gespannten Saite anzugeben. Die Versuchsergebnisse lassen sich zusammenfassen in der Formel

$$v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{p}{\lambda}},$$

wo v die Schwingungszahl, l die Saitenlänge, p die Spannung und λ die Längendichte, d. h. die Masse der Längeneinheit bedeutet. Alle Größen sind im CGS-Systeme auszu drücken.

Die in dieser Gleichung enthaltenen Gesetze wurden zuerst auf rein experimentellem Wege von Mersenne (um 1636), die Formel selbst später (1715) auf mathematischem Wege von Taylor¹⁾ entwickelt.

§ 214. Die Längswellen.

Führen die einzelnen Teilchen eines Körpers harmonische Schwingungen aus, und erfolgt die Energieübertragung von einem Teilchen zu einem anderen

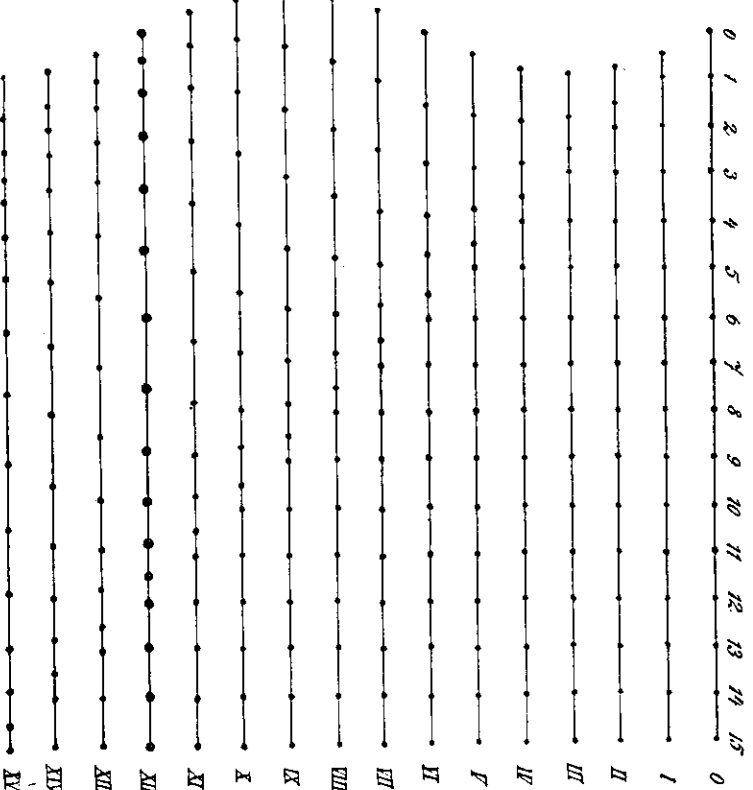


Fig. 654. Entstehung der Längswellen.

in derselben Richtung, in der die Teilchen ihre Schwingungen ausführen, so entstehen in einer Reihe von aufeinanderfolgenden Teilchen Bewegungsvorgänge, durch die sich die Teilchen periodisch einander nähern und voneinander entfernen; es treten also abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen im Körper auf. Fig. 654 zeigt die Entstehung und den Verlauf einer solchen Längswelle in 15 aufeinanderfolgenden Zeitpunkten.

Man findet die Längswelle am einfachsten nach Fig. 655, indem man eine Querwelle zeichnet und dann die einzelnen Vertiefungen um 90° dreht, wo

1) Brook Taylor (1685—1731), langjähriger Sekretär der Royal Society.

z. B. aus einer Verrückung der Querwelle nach oben eine Verrückung der Längswelle nach rechts, aus einer Verrückung der Querwelle nach unten eine Verrückung der Längswelle nach links wird. Beachtet man noch den Sinn der

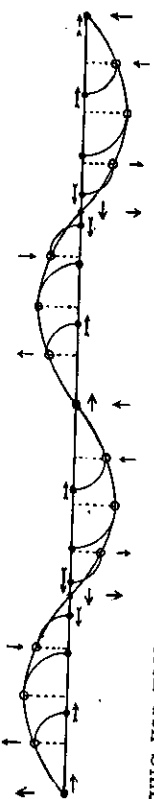


Fig. 654. Zusammenhänge zwischen Querwelle und Längswelle.

Bewegung der gezeichneten Querwelle und Längswelle sowohl wie den Sinn der Bewegung der einzelnen Massenteile, so sieht man aus der Figur sofort:

An den Verdünnungsstellen bewegen sich die Massenteile in denselben, an den Verdichtungsstellen im entgegengesetzten Sinne wie die ganze Welle.

Die Längswellen werden vorwiegend durch die Wirkung elastischer Kräfte unterhalten; es findet dann eine Energieübertragung von einem Massenteilchen zum nächsten genau in der Weise statt, wie es in § 66 auseinandergesetzt worden ist.

§ 215. Die Machsche¹⁾ Wellenmaschine.

Zur Veranschaulichung der Wellenbewegung dient die in Fig. 656 abgebildete Machsche Wellenmaschine. Sie besteht aus einer Reihe gleich langer Pendel, die nur in der zur Ebene der Fäden senkrechten Richtung schwingen können. Ist die die Machsche Wellenmaschine zur Darstellung einer Querwelle. Man versetzt die einzelnen Pendel nacheinander in Schwingungen, jedes folgende um denselben Zeitabschnitt später als das vorhergehende, indem man alle Pendel durch eine Leiste um denselben Betrag aus ihrer Gleichgewichtslage bringt und dann die Leiste gleichförmiger Geschwindigkeit an den Pendeln entlang zieht. Hierdurch wird jedes Pendel etwas später losgelassen als das vorhergehende, und es entsteht das Bild einer Querwelle der vorhin beschriebenen Art.

Durch eine besondere Vorrichtung kann man gleichzeitig die Aufhängung sämtlicher Pendel um einen beliebigen Winkel, also z. B. um 90°, drehen, wodurch die Pendel zu Schwingungen in der Richtung ihrer linearen Anordnung veranlaßt werden.

Wenn man ein auf der Schiene unterhalb der Pendel angebrachten kleinen Klotz mit gleichförmiger Geschwindigkeit unter den Pendeln so

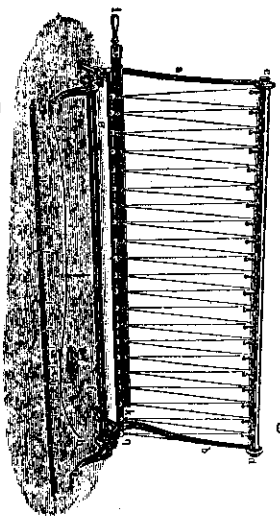


Fig. 656. Machsche Wellenmaschine.

¹⁾ Ernst Mach (1838—1916), 1867—1895 Prof. der Physik in Prag, dann bis 1901 Prof. d. Philos. in Wien.

entlang bewegt, daß die Pendel um einen kleinen Betrag aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht und dann losgelassen werden, so erfolgt die Bewegung der Pendel wieder so, daß jedes folgende um denselben Zeitabschnitt später die Schwingungen beginnt als das vorhergehende. Hierbei entsteht das Bild einer Längswelle.

Wenn man die Pendel in Querschwingungen versetzt hat, so kann man die Schwingungsebene durch eine allmähliche Drehung der Aufhängevorrichtung aus der Querrichtung in die Längsrichtung oder umgekehrt drehen. Dann erkennt man deutlich, daß für beide Arten von Wellen dasselbe Bewegungsgesetz gilt, daß der einzige Unterschied nur in der Bewegungsrichtung der einzelnen schwingenden Teile im Vergleich zur Fortpflanzungsrichtung der Welle besteht.

Die einzelnen Pendel der Machschen Wellenmaschine bewegen sich unabhängig voneinander, da bei ihnen keine Koppelung vorhanden ist. Die entstehende Welle ist daher gewissermaßen nur ein bewegtes Bild der Welle. Sollen die Vorgänge einer Wellenbewegung in der Natur genau nachgebildet werden, so müssen die einzelnen Pendel miteinander, etwa durch elastische Schnüre, gekoppelt werden, ähnlich wie bei der in Fig. 635 (§ 203) abgebildeten Netzwellenmaschine oder wie bei der in § 202 beschriebenen Juliussschen Wellenmaschine.

§ 216. Fortschreitende Wellen.

Die unmittelbare Beobachtung einer von der Machschen Wellenmaschine hervorgebrachten Welle oder der Welle auf einer Wasseroberfläche erzeugt die Vorstellung einer Vorwärtshbewegung, obgleich die einzelnen Teile nur eine Schwingungsbewegung um dieselbe Gleichgewichtslage ausführen. Diese scheinbare Vorwärtshbewegung hat zu der Bezeichnung fortschreitende Welle geführt.

Eine fortschreitende Welle kommt stets dann zustande, wenn sich eine Reihe von Massenpunkten nach demselben Schwingungsgesetze bewegt, wenn aber der Anfang der Bewegung zweier aufeinanderfolgender Punkte stets um denselben Zeitunterschied verschieden ist.

§ 217. Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Längswellen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Längswellen stimmt mit der Geschwindigkeit überein, mit der ein auf das eine Ende eines elastischen Stabes ausgeübter Impuls fortgepflanzt wird. In § 66 ist diese Geschwindigkeit c aus dem Elastizitätsmodul e und der Dichte s abgeleitet worden. Wenn sich beide Größen auf den Querschnitt von 1 cm² beziehen, und wenn der Elastizitätsmodul in dyn/cm² angegeben wird, so ist

$$c = \sqrt{\frac{e}{s}}.$$

Hieraus folgt z. B. für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem elastischen Stahldraht, da

$$e = 21\,000 \text{ kg/mm}^2 = 21\,000 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^2 = 2,06 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2$$

$$\text{und } s = 8,0 \text{ g/cm}^{-3} \text{ ist (s. a. S. 201),}$$

$$c = \sqrt{\frac{2,06 \cdot 10^{12}}{8,0}} \text{ cm/sec} = 5100 \text{ m/sec.}$$

Bemerkenswert ist, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit weder von der Schwingungswelle, noch von der Schwingungszahl abhängig ist, solange die Formänderung das einfache Hookesche Grundgesetz der Elastizität befolgt, d. h. der wirkenden Kraft proportional ist.

Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Längswelle in einer Luftsäule nach derselben Formel berechnen zu können, müssen wir den Elastizitätsmodul der Luft kennen. Wir denken uns eine Gasmenge vom Volumen V (cm^3) unter dem Drucke p (dyn/cm^2) in einem Zylinder mit beweglichem Kolben eingeschlossen, dessen Länge l und dessen Querschnitt q ist, so daß demnach das Volumen $V = l \cdot q$ ist. Diese Gasäule ist mit einem Drahte vergleichbar, der durch eine Kraft ausgedehnt oder zusammengeedrückt werden kann. Wird der Kolben mit der Kraft $\Delta P = q \cdot \Delta p$ belastet, so wird die Gasäule um den Betrag Δl verkürzt, also das Volumen um den Betrag $\Delta V = q \cdot \Delta l$ vermindert. Wir können auf diesen Vorgang das Hookesche Gesetz (S. 181) anwenden, jedoch müssen wir verschiedenen sinngemäße Umformungen der früher gegebenen Formel vornehmen, damit sie auf die Gasäule anwendbar ist: Die früher mit P bezeichnete Kraft muß mit $\Delta P = q \cdot \Delta p$, die früher mit b bezeichnete Längenveränderung mit $-\Delta l$ bezeichnet werden, da früher einer Zunahme der Länge eine Zunahme der Kraft entsprach, während jetzt eine Zunahme der Kraft eine Längenverminderung im Gefolge hat. Ferner haben wir früher den mit ϵ bezeichneten Elastizitätsmodul auf den in mm^2 ausgedrückten Querschnitt und auf eine in Kilogrammkräften ausgedrückte Kraft bezogen. Wir wollen jetzt aber alle Größen auf cm^2 und Dyn beziehen. Also müssen wir jetzt den Elastizitätsmodul, in Übereinstimmung mit der oben angegebenen Formel mit e bezeichnen. Demnach müssen wir das Hookesche Gesetz, das früher (S. 181) die Form $P = \epsilon \frac{b \cdot q}{l}$ hatte, jetzt in der Form $\Delta P = -e \frac{\Delta l \cdot q}{l}$ schreiben, woraus folgt $e = -\frac{\Delta P}{q} \cdot \frac{l}{\Delta l}$. Setzen wir nun noch $\frac{\Delta P}{q} = \Delta p$, und bedenken wir, daß $\frac{l}{\Delta l} = \frac{l \cdot q}{\Delta l \cdot q} = \frac{V}{\Delta V}$ ist, so folgt als Ausdruck für den Elastizitätsmodul eines Gases

$$e = -\Delta p \cdot \frac{V}{\Delta V} = -\frac{\Delta p}{\Delta V} \cdot V.$$

Die elastische Verlängerung eines Drahtes ist innerhalb der Elastizitätsgrenzen mit der Kraft proportional; ferner ist sie im Vergleiche zu seiner ganzen Länge so gering, daß wir die Drahtlänge bei der Anwendung des Hookeschen Gesetzes wie eine unveränderliche Größe behandeln können. Das Hookesche Gesetz dürfen wir daher nur auf sehr kleine Raumänderungen des Gases, also auf sehr kleine Kräfte anwenden, da wir sonst das Volumen V , das als Faktor auftritt, nicht mehr als unveränderlich ansehen dürfen. In der letzten Formel können wir unter dieser Voraussetzung den benutzten Differenzenquotienten $\frac{\Delta p}{\Delta V}$ durch den Differentialquotienten $\frac{dp}{dV}$ ersetzen. So erhalten wir dann als sinngemäße Größe für den Elastizitätsmodul eines Gases (und natürlich auch einer Flüssigkeit) den Ausdruck

$$e = -\frac{dp}{dV} \cdot V.$$

Setzen wir das in die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c einer

Längswelle ein, so ergibt sich

$$c = \sqrt{\frac{e}{s}} = \sqrt{-\frac{dp}{dV} \cdot \frac{V}{s}}$$

$-\frac{dp}{dV}$ ist die durch die Druckzunahme dp erfolgende relative Volumenabnahme, die sog. Kompression. Die durch die Druckzunahme I , etwa 1 Atmosphäre, erfolgende Volumenzunahme ist also $-\frac{dV}{V} \cdot I$, sie wird Zusammenrückbarkeit oder Kompressibilität genannt. Der reziproke Wert der Kompressibilität ist der Elastizitätsmodul oder die sogenannte Volumenelastizität (der Flüssigkeit oder) des Gases.

1. Unter der Annahme, daß die Fortpflanzung einer Längswelle in einem Gase ein isothermer Vorgang ist, setzen wir nach dem Boyleschen Gesetze (§ 103) $V \cdot p = \text{konst.}$ Differenzieren wir diese Gleichung, so erhalten wir $V \cdot dp + p \cdot dV = 0$, woraus folgt $-\frac{dp}{dV} \cdot V = p$. Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck für c ein, so erhalten wir

$$c = \sqrt{\frac{p}{s}}. \quad (\text{Formel von Newton 1686.})$$

Bei gewöhnlichem Luftdrucke ist $p = 76 \cdot 13,6 \cdot 981 \text{ Dyn/cm}^2$, $s = 0,001293 \text{ g/cm}^3$, also wird $c = \sqrt{\frac{76 \cdot 13,6 \cdot 981}{0,001293}} \text{ (cm/sec)} = 280 \text{ m/sec}$. Dieser Wert stimmt aber durchaus nicht mit dem beobachteten Werte für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Längswelle in der Luft überein.

2. Unter der Annahme, daß die Fortpflanzung einer Längswelle in einem Gase ein adiabatischer Vorgang ist, müssen wir das Poissonsche Gesetz (§ 154) $p \cdot V^\kappa = \text{konst.}$ (S. 488) anwenden. Durch Differentiation folgt

$$V^\kappa \cdot dp + p \cdot \kappa \cdot V^{\kappa-1} \cdot dV = 0.$$

Hieraus ergibt sich $-\frac{dp}{dV} \cdot V = \kappa \cdot p$. Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck für c ein, so erhalten wir

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{s}}. \quad (\text{Formel von Laplace 1816.})$$

Wir rechnen diesen Ausdruck für die Fortpflanzung der Längswelle in Luft bei gewöhnlichem Luftdrucke aus, indem wir setzen

$$p = 76 \cdot 13,6 \cdot 981 \text{ Dyn/cm}^2, \quad s = 0,001293 \text{ g/cm}^3, \quad \kappa = 1,4$$

$$\text{und erhalten } c = \sqrt{\frac{76 \cdot 13,6 \cdot 981 \cdot 1,4}{0,001293}} \text{ (cm/sec)} = 331,3 \text{ (m/sec).}$$

Dieser Wert stimmt mit dem für die Schallgeschwindigkeit beobachteten Werte recht gut überein. Gemessen wurde nämlich nach dem Ergebnisse sowohl der deutschen als auch französischen Schallmeßtrupps im letzten Kriege als Mittel aus vielen Tausenden von Beobachtungen bei sorgfältiger Berücksichtigung aller Umstände $c = 330,8 \text{ (m/sec)}$ in Luft von 0° C . (Bei 15° C ergab sich $c_s = 339,8 \text{ m/sec}$). Die erkennbare kleine Abweichung gegen unser berechnetes Ergebnis ist noch un-
aufgeklärt.) Wir müssen also die Fortpflanzung des Schalles als einen adiabatischen

1) Nach Bestimmungen der Phys.-Techn. Reichsanstalt ist für trockene und kohlendioxidfreie Luft $c_0 = 331,57 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Daraus folgt $\kappa = 1,403$. Für Wasserstoff wurde gefunden $c_0 = 1200,6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; daraus folgt $\kappa = 1,408$.

Vorgang ansehen. In der Tat ist die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verdichtungen und Verdünnungen der Luft bei der Fortpflanzung des Schalles so gering, daß ein Temperaturausgleich zwischen den einander benachbarten Luftteilen nicht stattfinden kann.

Dieses Ergebnis ist noch von einer weittragenden Bedeutung: Wir formen die oben abgeleitete Gleichung für c um und erhalten

$$\kappa = c^2 \cdot \frac{\rho}{p}.$$

Die auf der rechten Seite dieses Ausdruckes stehenden Größen können durch unmittelbare Beobachtung bestimmt werden, also können wir hieraus die Größe κ (den sog. Laplaceschen Faktor) berechnen. Die Größe $\kappa = \frac{c^2}{p}$ ist aber von großer Wichtigkeit für die Entscheidung der Frage, wie die Moleküle eines Gases zusammengesetzt sind (§ 136, § 183, 13). Nun können wir mit Hilfe der Fortpflanzung des Schalles in einem Gase das Verhältnis der spezifischen Wärme eines Gases bei unverändertem Drucke und bei unverändertem Volumen bestimmen und können hiermit zugleich entscheiden, ob ein Gasmolekül aus einem, aus zwei oder mehreren Atomen besteht. In der Tat ist auf diesem Wege zuerst die Einatomigkeit der Edelgase bestimmt worden, da chemische Methoden wegen der Reaktionslosigkeit dieser Gase versagen. Wenn die Schallgeschwindigkeit nach der in § 237 entwickelten Methode mittels der Kundtschen Staubfiguren gemessen wird, so genügen hierzu ganz geringe Gasmenngen. — Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Wasser s. S. 727.

§ 218. Stehende Querwellen.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die Körper, in denen sich die Wellen fortpflanzen, unbegrenzt seien. Dies entspricht aber nicht der Wirklichkeit; vielmehr treten an den Rändern eines Wasserbeckens oder an dem Ende einer gespannten Saite neue Einflüsse auf, die die Erscheinung wesentlich verändern.

Wir haben in § 213 gesehen, daß ein einzelner Impuls, einer wagenrecht ausgespannten Saite mitgeteilter, nach abwärts gerichteter Impuls, der eine wellenförmige Ausbuchtung der Saite nach unten zur Folge hat, am Ende der Saite zurückgeworfen wird, und zwar mit gleicher Phase, wenn das Ende der Saite frei, mit entgegengesetzter Phase, wenn das Ende der Saite fest ist. Diese Reflexion der einzelnen Impulse findet auch dann statt, wenn eine Reihe von Impulsen nach der Art der vorhin beschriebenen fortschreitenden Querwellen am Ende der Saite ankommt. Daraus folgt, daß nach der Reflexion einer Welle am Ende der Saite jeder einzelne Punkt der Saite, der sich schon im Gebiete der reflektierten Welle befindet, gleichzeitig dem Einflusse zweier Wellen ausgesetzt ist, nämlich erstens der Welle, die sich nach dem Ende hin bewegt, und zweitens der, die sich infolge der Reflexion in entgegengesetzter Richtung vom Ende zurückbewegt.

Wenn ein Körper gleichzeitig mehrere Bewegungen ausführt, so summieren sich die Bewegungen. Wenn die Einzelbewegungen in gleichen oder entgegengesetzten Richtungen erfolgen, so geschieht die Summation einfach

algebraisch, wenn sie einen Winkel miteinander einschließen, nach dem Satze vom Parallelogramme der Bewegungen. Die Geschwindigkeit eines Punktes, über den zwei Wellen hingehen, ist die geometrische Summe der Geschwindigkeiten, die ihm von jeder Wellenbewegung einzeln erteilt werden würde; ebenso ist eine Verrückung aus der Gleichgewichtslage die geometrische Summe der beiden Verrückungen, die ihm die Wellen einzeln geben würden. Die größte Verrückung einer regelmäßigen Welle ist die Schwingungswweite. Daher addieren sich beim Durcheinanderlaufen unabhängiger Wellenzüge auch die Schwingungsweiten geometrisch (Prinzip der Superposition von Wellen § 206, § 212). In unserem Falle der reinen Querwelle einer Saite ist ein einzelner Massenpunkt der Saite gleichzeitig zwei Bewegungen senkrecht zur linearen Anordnung der Teile, also von gleichen oder entgegengesetzten Richtungen ausgesetzt. Daraus folgt, daß der Ort, den ein einzelner Punkt der Saite unter dem Einflusse beider Bewegungen in jedem Augenblicke erreicht, durch Summation der den einzelnen Bewegungen zukommenden Verrückungen gefunden wird, wobei auf die Vorzeichen der Verrückungen Rücksicht zu nehmen ist.

In Fig. 657 ist in 19 aufeinanderfolgenden Phasen der Vorgang dargestellt, der sich abspielt, wenn sich zwei vollkommen gleiche Saite Wellen auf demselben Seile begegnen. Die sich von links nach rechts bewegende Welle ist punktiert, die sich von rechts nach links bewegende Welle ist gestrichelt bezeichnet. In I ist der Augenblick dargestellt, in dem die beiden Wellen mit ihren Anfängen in der Mitte M des Bildes zusammentreffen. In II haben sie sich schon mit $1/12$ Wellenlänge über die Mitte hinwegbewegt. In jeder folgenden Phase sind sie um ein weiteres Zwölftel einer Wellenlänge vorgerückt. Bei ihrem Zusammentreffen bildet sich durch Summation der Verrückungen eine neue Welle, die durch eine stark ausgezogene Linie dargestellt ist. In VII hat sich jede Welle gerade um eine halbe Wellenlänge vorwärts bewegt. Da jetzt jeder Punkt unter dem Einflusse jeder einzelnen Welle genau entgegengesetzt gleiche Verrückungen hat, so ist die Gesamtwirkung die, daß alle Punkte gerade in der Gleichgewichtslage sind, d. h. kein Punkt des Seiles besitzt eine von Null verschiedene Verrückung. Derselbe Zustand wird in XIII und XIX erreicht.

In den Phasen IV, X und XIV unterliegt die Mitte M des Seiles gerade der größten Verrückung beider Wellen nach derselben Seite hin. Infolge dessen erreicht dieser Punkt einen Ort, der doppelt so weit außerhalb der Gleichgewichtslage liegt, wie er liegen würde, wenn er nur an einer der beiden Wellenbewegungen teilnehmen würde. Ebenso verhalten sich die Punkte B in den Phasen X und XVII. Diese Punkte größerer Verrückung bleiben dauernd an derselben Stelle des Seiles; sie werden Wellenhäuche genannt.

Bemerkenswert sind ferner noch die Punkte K ; denn diese erfahren unter dem Einflusse der einen Welle immer genau die entgegengesetzt gleiche Verrückung, wie unter dem Einflusse der anderen Welle. Darum heißen diese Punkte dauernd in der Gleichgewichtslage; sie werden Knoten genannt.

Da sowohl die Punkte größter Schwingungswerte, wie die vollkommener Ruhe dauernd an demselben Orte stehen bleiben, so heißt die Welle eine **stehende Welle**, eine Bezeichnung, die bei der Beobachtung der Welle eine richtig erscheint.

Damit die Wellenlänge der stehenden Welle mit der Wellenlänge der sie erzeugenden fortschreitenden Welle übereinstimmt, müssen wir feststellen:

Die Wellenlänge einer stehenden Welle ist gleich dem Abstände eines Knotens vom übernächsten oder eines Bauchs vom übernächsten.

Wenn wir eine ausgespannte Saite, deren Länge dem Abstände zwischen den beiden Punkten K_1 und K_2 entspricht, anschlagen, so wird eine stehende Welle erzeugt, die an den beiden Enden der Saite einen Knoten und in der Mitte M einen Bauch hat. Die Wellenlänge ist gleich der doppelten Länge der Saite.

Entspricht die Saitenlänge dem Abstände der Punkte K_1 und K_2 , so entstehen Knoten an den Enden und in der Mitte. Dazwischen liegen zwei Bäuche. Die Wellenlänge stimmt dann mit der Länge der Saite überein.

Wenn die Saitenlänge der Entfernung der Punkte K_1' und K_2' entspricht, so entstehen außer den Knoten an den beiden Enden noch zwei Knoten

auf der Saite. Dazwischen liegen die drei Bäuche B_1 , M und B_2 . In allen diesen Fällen ist die Saite an beiden Enden fest; es findet eine Reflexion der fortschreitenden Welle am festen Ende, also mit entgegengesetzter Phase statt; daher müssen die Enden der Saiten zu Knoten werden.

Der Fall, daß die Enden lose sind, kommt bei einer Seite nicht vor, wohl aber bei einem schwingenden Stabe, der entweder in der Mitte oder an zwei Punkten eingeklemmt wird; diese werden dann nach Fig. 657 zu Knoten.

Wenn man auf einem langen ausgespannten Saite oder einer langen ausgespannten Drahtsaite an dem einen Ende andauernd fortschreitende Wellen erzeugt, die am andern Ende zurückgeworfen werden, so bilden sich stehende

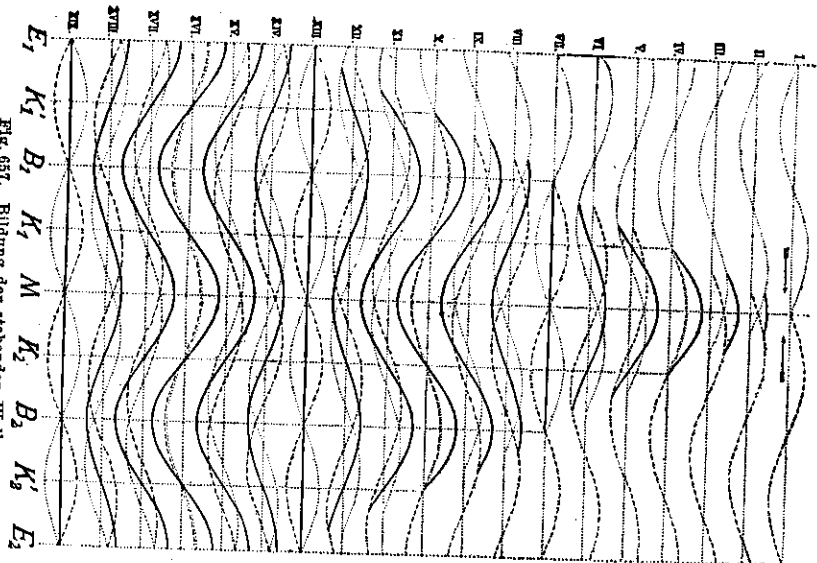


Fig. 657. Bildung der stehenden Welle.

Wellen, deren Länge von der Schwingungsdauer der fortschreitenden Wellen abhängt. Wenn in dem Augenblicke, in dem die erste fortschreitende Welle am entfernten Ende zurückgeworfen wird, eine neue Welle entsandt wird, so entsteht der in Fig. 657 zwischen K_1' und K_2 dargestellte Vorgang. Wenn dagegen schon in dem Augenblicke, in dem die erste Welle in der Mitte der Saite angekommen ist, eine neue Welle ausgesandt wird, so begegnen sich die erste reflektierte und die zweite erzeugte Welle schon im letzten Viertel der Saite mit entgegengesetzten Phasen; es entsteht also hier der erste Knoten. Erfolgen die an dem einen Ende erzeugten wellenartigen Einzelimpulse in rascherer Zeitfolge, so liegt der erste erzeugte Knoten dem entfernten Ende um so näher, je rascher die Einzelimpulse aufeinanderfolgen. Es ergibt sich:

Die Schwingungszahl ist der Wellenlänge umgekehrt proportional.

Der wesentliche Unterschied zwischen fortschreitender und stehender Welle kann folgendermaßen gekennzeichnet werden:

Bei einer fortschreitenden Welle haben alle Punkte dieselbe Schwingungswerte, aber ihre Phasen sind verschieden. Bei einer stehenden Welle haben alle Punkte zwischen zwei benachbarten Knotenstellen dieselbe Phase, aber ihre Schwingungswerte sind verschieden. An jedem Knoten springt die Phase um 180° , d. h. die Schwingungen benachbarter, durch einen Knoten getrennter Bereiche sind in entgegengesetzter Schwingung begriffen.

§ 219. Zusammengesetzte Wellen; Satz von Fourier.

Da sich die einzelnen Wellen gegenseitig nicht stören, sondern nach dem Satze von der Superposition der Bewegungen nur eine Welle erzeugen, deren Verrückung in jedem einzelnen Punkte durch Summation der gleichgerichteten Verrückungen der Einzelwellen gefunden wird (S. 674), so kann die Saite gleichzeitig mehrere Schwingungen ausführen.

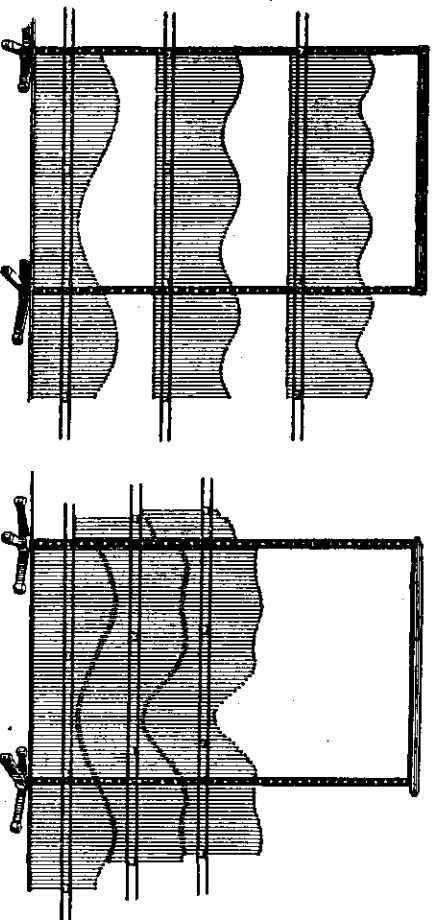


Fig. 658.

Zusammengesetzte Wellen.

Fig. 659.

1. **Mechanische Summierung der Ordinaten.** Die mechanische Summierung der Ordinaten zweier verschiedenen Wellen kann mit Hilfe der in Fig. 658 und 659 abgebildeten Wellenmaschine ausgeführt werden. Die Wellen sind durch eine Reihe von Kugeln, die an den Enden verschieden langer Stahlstäbe befestigt sind, dargestellt, wenn die unteren Enden der Stahlstäbe in einer wagerechten Geraden liegen. Die Stahlstäbe sind also selbst die Ordinaten der einzelnen Wellenpunkte. In Fig. 658 sind drei einzelne Wellen getrennt übereinander stehend dargestellt. In Fig. 659 sind die drei Wellensysteme aufeinander gesetzt, indem die oberen Stahlstäbe bis zum Auftreten auf die unteren Kugeln heruntersgehoben sind. Die mittlere Reihe in Fig. 659 zeigt die durch Superposition der beiden unteren Wellen von Fig. 658 entstandene, die obere Reihe der Kugeln die durch Superposition aller drei Wellen aus Fig. 658 zusammengesetzte Welle.

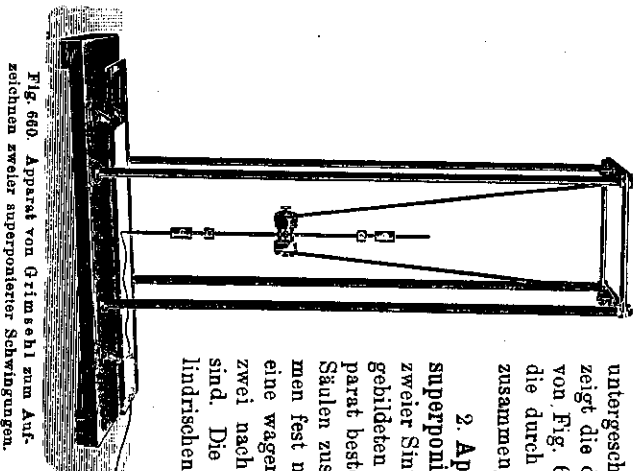


Fig. 660. Apparat von Grimsehl zum Aufzeichnen zweier superponierter Schwingungen.

2. **Apparat von Grimsehl zum Aufzeichnen zweier superponierter Schwingungen.** Die Zusammensetzung zweier Sinusschwingungen kann mit dem in Fig. 660 abgebildeten Apparat bequem ausgeführt werden. Der Apparat besteht aus einem kräftigen Ständer, der aus vier Säulen zusammengesetzt ist, die oben durch einen Rahmen fest miteinander verbunden sind. Am Rahmen ist eine wagerechte Achse leicht drehbar angebracht, an der zwei nach unten zusammenlaufende Stangen befestigt sind. Die Stangen sind am unteren Ende mit zwei zylindrischen Messingstückchen beschwert, die durch vier kräftige kurze Stangen in einem kleinen Abstände voneinander gehalten werden. Zwischen den Messingzylindern ist ein Stahltrahnt angehängt, und an diesem ist eine lotrecht hängende Querstange in ihrem Massenmittelpunkte festgeklammert. Auf dieser Stange sind vier Laufgewichte verschiebbar.

Die lotrechte Stange mit den Laufgewichten kann um den Stahltrahnt als Achse Torsionsschwingungen ausführen; der ganze aufgehängte Körper kann außerdem Pendelschwingungen ausführen. Diese beiden Arten von Schwingungen sind unabhängig voneinander.

Man kann die Schwingungszeit der lotrechten Stange durch Verschieben der Laufgewichte innerhalb weiser Grenzen verändern. Versetzt man nun sowohl das Pendel wie auch die lotrechte Stange gleichzeitig in Schwingungen, so führt das untere Ende der Stange ein dicker Glasstift leicht in der Stange verschiebbar ein. Dieser Stift zeichnet auf einer unten liegenden, bestäubten Glasplatte die Schwingungen auf. Natürlich würden diese Schwingungen nur einen einfachen Strich auf die Platte zeichnen; zieht man aber die Platte während der Schwingungen in einer einfachen Schlennebahn unter der zeichnenden Glasplatte mit gleichförmiger Geschwindigkeit entlang, so entsteht eine Kurve, die die Summe der beiden Schwingungen darstellt.

In Fig. 661 sind fünf Kurven abgebildet, die von diesem Apparate aufgezeichnet worden sind. Die beigezeichneten Zahlen bezeichnen die Verhältnisse der Schwingungszahlen der einzelnen Schwingungen. Es möge auf die Übereinstimmung der ersten Kurve mit der mittleren Kugelhreihe von Fig. 659 aufmerksam gemacht werden. Ferner sei erwähnt, daß die Schwingungszahlen der einzelnen Schwingungen bei der zweiten und der dritten Kurve in demselben Verhältnisse stehen; der Unterschied der beiden Kurven ist darin begründet, daß die Phasen der einzelnen Schwingungen gegeneinander verschoben sind.

Derartige Kurven werden uns bei den zusammengesetzten Schwingungen einer Saite wieder begegnen (§ 230).

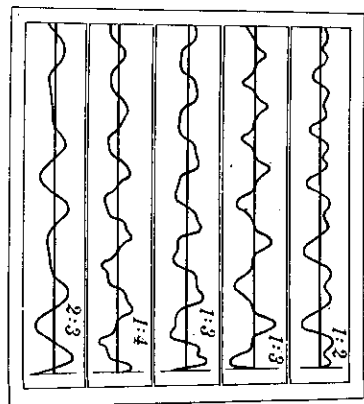


Fig. 661. Zusammengesetzte Wellen.

3. **Satz von Fourier.** Ein berühmter mathematischer Lehrsatz von Fourier¹⁾ sagt aus, daß es immer möglich ist, überhaupt eine jede Wellenbewegung, welche besondere „Form“ die fortschreitende Erregung auch haben mag, als eine Überlagerung von sinusförmigen Einzelwellen verschiedener Wellenlänge darzustellen. In mathematischer Zeichensprache erfährt dieser Satz die Darstellung:

$$y_x = f\left(\frac{x - ct}{\lambda}\right) = r_1 \sin 2\pi\left(\frac{x - ct}{\lambda_1} + \delta_1\right) + r_2 \sin 2\pi\left(\frac{x - ct}{\lambda_2} + \delta_2\right) + \dots$$

oder mit abkürzenden Symbolen

$$y_x = f\left(\frac{x - ct}{\lambda}\right) = \sum_{\lambda} r_{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{x - ct}{\lambda} + \delta_{\lambda}\right),$$

wobei die Summe zu bilden ist, wenn λ und mit ihm die Amplituden r und die Phasennunterschiede δ sich von Summand zu Summand ändern. Die Werte dieser Amplituden r und der Phasennunterschiede δ der einzelnen Partialwellen sind je nach der Form der Welle, also je nach der verschiedenen Art von f verschieden zu wählen. — In den meisten praktischen Fällen wird f eine periodische Funktion sein. Dann läßt sich unter allen Partialwellen eine solche größter Periode auffinden. Die Perioden der übrigen Partialwellen können in diesem Falle als ganzzahlige Teile dieser Grundschwingung aufgefaßt werden.

Die mathematische Darstellung erfährt dann die etwas einfachere Form:

$$y_x = \sum_{(n)} \left[a_n \sin \frac{2\pi n}{\lambda} (x - ct) + b_n \cos \frac{2\pi n}{\lambda} (x - ct) \right].$$

Die Summe ist jetzt über die in der eckigen Klammer stehenden Glieder zu erstrecken, wobei n der Reihe nach die ganzzahligen Werte von $n = 0$ bis $n = \infty$ annimmt. Die Koeffizienten a_n und b_n sind die Amplituden der Partialwellen; ihre Werte können durch besondere Rechenregeln, welche Fourier angegeben hat, ausgerechnet werden, wenn die Form der darzustellenden Wellenerregungen, also die

1) J. B. J. Fourier (1768—1830), Paris.

Grimsehl, Physik I. Große Ausgabe 6. Aufl.

Funktion f bekannt ist. Alle Methoden, seien es mathematische oder solche der praktischen Experimentierkunst, welche diese Amplituden der Partialwellen einer gegebenen Wellenform aufzusuchen gestalten, nennt man Methoden der harmonischen Analyse. Im Sinne der harmonischen Analyse ist als einfachste Wellenbewegung eine solche anzusprechen, welche durch ein einziges Glied der Fourierschen Reihe dargestellt werden kann; man nennt eine solche Wellenbewegung sinusförmig, sinoidal oder auch einfach rein harmonisch.

4. Zerstreuung oder Dispersion. Findet die Wellenerregung in einer Punktreihe statt, in welcher sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen als abhängig von der Wellenlänge erweist, so haben die einzelnen Partialwellen der Wellenerregung je verschiedene Geschwindigkeit. Die Partialwellen laufen dann mit der Zeit auseinander, sei es nun, daß diejenigen längerer Wellenlänge oder diejenigen kürzerer Wellenlänge den anderen vorausseilen. Die in einem gegebenen Augenblicke bestehende Form der Welle kann dann nicht erhalten bleiben wie in dem Falle, wo alle Partialwellen die gleiche Geschwindigkeit haben und wo sich die Form daher kongruent verschiebt. Man sagt, daß eine Zerstreuung oder eine Dispersion¹⁾ der Partialwellen stattfindet, wenn in der angegebenen Weise die einzelnen Anteile der Wellenbewegung verschiedene Geschwindigkeiten haben. In einer Punktreihe, oder allgemeiner in einem Mittel mit Punkten, die eine Eigenschwingungsdauer besitzen (S. 676), muß immer eine solche Dispersion stattfinden.

§ 230. Mathematische Behandlung der stehenden Welle. Schwebungen. Gruppengeschwindigkeit.

1. Stehende Welle bei Reflexion am freien Ende. Die Bildung einer stehenden Welle durch Superposition zweier fortschreitenden Wellen, von denen die zweite durch Reflexion der ersten am freien Ende entsteht, kann aus dem Bewegungssatze für jedes Teilchen einer fortschreitenden Welle abgeleitet werden. Nach § 212, 1 ist die Verrückung der ursprünglichen Welle zur Zeit t in einem Punkte, der vom Anfangspunkte der Saite von der Länge l den Abstand (die Laufstrecke) x hat,

$$y_x = r \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right].$$

Der betrachtete schwingende Punkt hat von dem anderen Ende der Saite den Abstand $(l - x)$. Findet Reflexion am freien Ende statt, so unterliegt der Punkt gleichzeitig der Bewegung der reflektierten Welle. Da nun dieser Punkt, als schwingender Punkt der reflektierten Welle betrachtet, im Sinne der Fortpflanzungsrichtung der Welle vom selben Punkte, als schwingender Punkt der ankommenden Welle betrachtet, den Abstand $2(l - x)$, also vom Anfangspunkte der Saite den Abstand $x + 2(l - x) = 2l - x$ hat, so trägt die Verrückung des Punktes unter dem Einflusse der reflektierten Welle

$$y_x' = r \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l - x}{\lambda} \right) \right].$$

1) dispersivere (lat.) = zerstreuen.

§ 230. Math. Behandl. der stehenden Welle. Schwebungen. Gruppengeschwindigkeit 691

Die Superposition der beiden Wellen ergibt die resultierende Verrückung

$$Y_x = y_x + y_x' = r \left\{ \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] + \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l - x}{\lambda} \right) \right] \right\}.$$

Sie kann nach der Gleichung $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ zu folgendem Ausdrucke umgeformt werden:

$$Y_x = 2r \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right) \right] \cos \left[2\pi \frac{l - x}{\lambda} \right].$$

Das ist die Schwingungsgleichung der stehenden Welle.

Die Knotenpunkte und Bauchstellen. Der Wert des zweiten Faktors $\cos \left(2\pi \cdot \frac{l - x}{\lambda} \right)$ hängt nur von der Lage des Punktes auf der Saite ab. Wenn der Faktor den Wert 0 annimmt, wird Y_x ebenfalls dauernd zu 0. Das tritt ein für die Punkte, für welche $2\pi \cdot \frac{l - x}{\lambda} = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ wird.

Aus dieser Gleichung berechnet sich $x = l - \frac{1}{2} \frac{(2n + 1)\lambda}{2}$, wobei n jeden ganzzahligen Wert einschließlich 0 annehmen kann. Im einzelnen berechnet sich hieraus die Lage der *Knotenpunkte* für die Werte $n = 0$ und $n = 1$ usw. zu $x = l - \frac{\lambda}{4}$, $x = l - \frac{3\lambda}{4}$ usw.

Der zweite Faktor des Ausdruckes für Y_x nimmt für $x = l$ den Wert 1 an. Am freien Ende $x = l$ der Saite hat der Punkt daher die größte Schwingungswerte $2r$, wir haben eine *Bauchstelle*. Die Knotenstellen haben voneinander die Abstände $\frac{\lambda}{2}$; der erste Knoten liegt um $\frac{\lambda}{4}$ vom freien Ende entfernt.

2. Reflexion am festen Ende. Bei der Reflexion am festen Ende tritt eine Umkehrung der Phase ein. Wir können dieses dadurch in Rechnung bringen, daß wir die Laufstrecke der reflektierten Welle noch um eine halbe Wellenlänge vergrößern. Für die hingehende Welle bleibt der Ausdruck

$$y_x = r \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

unverändert. Für die reflektierte Welle ist hingegen zu setzen

$$y_x' = r \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l - x + \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \right) \right].$$

Die durch Superposition der beiden Wellen erfolgte Verrückung wird durch Summation der beiden Ausdrücke gefunden und ergibt nach entsprechender Umformung

$$Y_x = 2r \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l + \frac{\lambda}{4}}{\lambda} \right) \right] \cos \left[2\pi \left(\frac{l - x + \frac{\lambda}{4}}{\lambda} \right) \right].$$

Das ist die Schwingungsgleichung der stehenden Welle.

Knotenpunkte und Bauchstellen. Auch hier hängt der zweite Faktor nur von der Veränderlichen x , also der Lage des Punktes ab, er nimmt für alle die-

jenigen Punkte den Wert 0 an, für welche $2\pi \left(\frac{l-x+\frac{1}{2}}{\lambda} \right) = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ wird.

Hieraus berechnet sich $x = l - \frac{n\lambda}{2}$, also $x = l, = l - \frac{\lambda}{2}, = l - \lambda, = l - \frac{3\lambda}{2}$ usw. für $n = 0, 1, 2, 3$ usw. Die Knotenpunkte haben wieder die Abstände $\frac{\lambda}{2}$ voneinander. Das feste Ende der Saite für $x = l$ ist selbst eine Knotenstelle.

Schwingungsweite der stehenden Wellen. Setzt man $x = l - \frac{n\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$ in die Gleichung für Y_2 , so erhält der zweite Faktor den Wert ± 1 . Der Ausdruck für die Verückung wird dann

$$Y_2 = 2r \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l+\frac{\lambda}{4}}{\lambda} \right) \right] = 2r \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ = -2r \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right),$$

d. h. für die Mitten zwischen den Knotenstellen, das sind die Wellenbäuche, gilt in beiden Fällen:

Die Schwingungsweite des Wellenbauches der stehenden Welle ist doppelt so groß wie die Schwingungsweiten der beiden fortschreitenden Wellen, aus deren die stehende Welle durch Überwindlagerung (Interferenz) entstanden ist.

3. Schwebungen. Superponieren wir zwei Wellenzüge gleicher Schwingungsweite r , aber verschiedener Periode, also auch verschiedener Schwingungszahl ν , aber gleicher Wellengeschwindigkeit c , so ergibt sich die mathematische Darstellung entsprechend der vorangehenden

$$Y_2 = r \sin \left[2\pi \nu \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] + r \sin \left[2\pi \nu_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ = 2r \cos \left[2\pi \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot \frac{\nu - \nu_1}{2} \right] \cdot \sin \left[2\pi \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot \frac{\nu + \nu_1}{2} \right].$$

Sind noch ν und ν_1 wenig voneinander verschieden, so daß $\nu - \nu_1 = \Delta\nu$ eine kleine Größe ist, so geht die Gleichung über in

$$Y_2 = 2r \cos \left[\frac{2\pi \Delta\nu}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \sin \left[2\pi \nu \left(t - \frac{x}{c} \right) \right].$$

Diese Gleichung können wir so deuten, daß wir sie als die einer einfach harmonischen Welle der Schwingungszahl ν aber der Schwingungsweite $2r \cos \frac{2\pi \Delta\nu}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right)$ betrachten. Die Amplitude ist also selbst eine periodisch veränderliche Funktion, und zwar hat sie in der Zeiteinheit $\frac{\Delta\nu}{2}$ mal den größten Wert $+2r$ und $\frac{\Delta\nu}{2}$ mal

den kleinsten Wert $-2r$. Sehen wir vom Vorzeichen für die Schwingungsweite ab, so können wir auch sagen, daß die Schwingungsweite in der Zeiteinheit $\Delta\nu$ mal zwischen den Werten Null und $2r$ periodisch schwankt. In einem bestimmten festen Punkte derselben schwingenden Punktreihe, mithin für $x = \text{constans}$, entsteht und verschwindet also die Schwingungsbewegung in der Zeiteinheit $\Delta\nu$ mal, indem die Schwingung zunächst mit verschwindend kleiner Amplitude einsetzt, sich dann allmählich auf die Amplitude $2r$ „hochschaukelt“ und dann mit abnehmender Amplitude wieder

§ 220. Math. Behandl. der stehenden Welle. Schwebungen. Gruppengeschwindigkeit 693

verschwindet, worauf das Spiel von neuem beginnt. Man nennt diese rhythmischen Anschwellungen und Wiederabnahmen der Schwingungsenergie die **Schwebungen** der beiden überlagerten Wellenzüge. So erhalten wir den Satz: *Die Zahl der Schwebungen in der Zeiteinheit ist gleich der Differenz der Schwingungszahlen der beiden überlagerten Wellenzüge.*

Betrachten wir nun aufeinanderfolgende Punkte der Wellenbewegung, nehmen wir x also als veränderlich an, so sehen wir die räumlichen Amplitudenwerte nebeneinander, welche wir bei unveränderlichem x nacheinander finden. Für alle Punkte der Abszissen x , welche der Gleichung $t - \frac{x}{c} = \text{const}$ genügen, z. B.

$t - \frac{x}{c} = 0$ oder $\frac{x}{c} = t$, behalten die Amplituden denselben Wert. Die Amplituden wandern also mit der Wellengeschwindigkeit c . Der unendlich ausgedehnte Wellenzug, welcher durch die letzte Gleichung für x dargestellt wird, erscheint durch die Punkte, für welche die Amplitude den Wert Null annimmt, in einzelne Teile unterteilt. Das geschieht für $\frac{2\pi \cdot \Delta\nu}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right) = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, wobei n eine ganze

Zahl ist. Für einen bestimmten Augenblick z. B. $t=0$, folgt daraus $x = -(2n+1) \cdot \frac{c}{2\Delta\nu}$.

d. h. in den Abständen $\frac{c}{\Delta\nu}$ des Wellenzuges folgen sich Nullstellen der Amplituden. Die Gesamtheit der unendlich ausgedehnten Wellenbewegung erscheint so aus einzelnen Wellenzügen der Längen $\frac{c}{\Delta\nu}$ zusammengesetzt, die mit der Wellengeschwindigkeit c hintereinander herlaufen.

4. Gruppengeschwindigkeit. Wir können den Fall noch verallgemeinern, indem wir annehmen, daß die Welle für die verschiedenen Schwingungszahlen ν und ν_1 auch verschiedene Wellengeschwindigkeiten besitzt, indem wir also den Schwebungsvorgang in einem Mittel betrachten, welches „Dispersion“ zeigt (§ 219, 4.). Die beiden übereinandergelegten Wellenzüge genügen dann der Gleichung

$$Y_2 = r \sin \left[2\pi \left(\frac{ct-x}{\lambda} \right) \right] + r \sin \left[2\pi \left(\frac{c_1 t - x}{\lambda_1} \right) \right],$$

wobei $c - c_1 = \Delta c$ und $\lambda - \lambda_1 = \Delta \lambda$ kleine Größen sein mögen. Fassen wir, wie in den beiden zuerst betrachteten Fällen die Summe auf der rechten Seite zu einem Produkte zusammen, so erhalten wir

$$Y_2 = 2r \cos \left[\frac{2\pi}{2} \left(t \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c_1}{\lambda_1} \right) - x \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \right) \right] \sin \left[\frac{2\pi}{2} \left(t \left(\frac{c}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda_1} \right) - x \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \right) \right].$$

Unter der Berücksichtigung, daß Δc und $\Delta \lambda$ kleine Größen sein sollen, dürfen wir schreiben

$$Y_2 = 2r \cos \left[\frac{2\pi}{2} \left(t \cdot \frac{\Delta c - c \cdot \Delta \lambda}{\lambda^2} + \frac{\Delta \lambda \cdot x}{\lambda^2} \right) \right] \sin \left[2\pi \left(\frac{ct-x}{\lambda} \right) \right].$$

Deuten wir wieder diese Gleichung in entsprechender Weise wie bei der vorangehenden Betrachtung (s. oben §), so stellt sie einen unendlich ausgedehnten Wellenzug der Wellenlänge λ dar, deren Wellen sich mit der Wellengeschwindigkeit c bewegen, deren Amplituden aber wiederum periodisch nach der Zeit und nach der Abszissenlänge x schwanken.

Die Amplitudenwerte Null teilen den unendlich ausgedehnten Wellenzug in einzelne Wellengruppen gleicher Länge. Die Wanderungsgeschwindigkeit dieser

Gruppen ist aber nicht mehr dieselbe wie die Wellengeschwindigkeit (§ 212, 5.). Wir finden ihren Betrag wie in der voranstehenden Betrachtung über die Schwebungen, indem wir das Argument der \cos -Funktion gleich Null setzen und nach dem Quotienten $\frac{x}{t}$ entwickeln. Das ergibt $(\lambda \cdot \Delta c - c \cdot \Delta \lambda) t + \Delta \lambda \cdot x = 0$

$$c' = \frac{x}{t} = c - \lambda \cdot \frac{\Delta c}{\Delta \lambda}.$$

Für verschwindende $\Delta \lambda$ und Δc geht die Gleichung über in

$$c' = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (\text{Gleichung von Rayleigh.})^1)$$

Diese Gleichung lehrt, wie man die Gruppengeschwindigkeit c' zu berechnen hat, wenn man die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit c von der Wellenlänge kennt. Sie lehrt ferner, daß mit verschwindender Wellenlänge die Gruppengeschwindigkeit gleich der Wellengeschwindigkeit wird (S. 676). Ist die Dispersion des Mittels der Wellenbewegung so beschaffen, daß die Wellengeschwindigkeit mit wachsender Wellenlänge auch wächst, ist also $\frac{dc}{d\lambda}$ positiv, so ist die Gruppengeschwindigkeit kleiner als die Wellengeschwindigkeit. Innerhalb einer Wellengruppe zwischen zwei aufeinanderfolgenden Amplituden vom Werte Null wandern also die Wellen vom hinteren Ende der Gruppe mit zunächst anwachsender, später wieder abnehmender Amplitude dem vorderen Ende der Gruppe zu (S. 676).

§ 221. Das photographische Bild einer schwingenden Saite.

In § 212 ist schon erwähnt worden, daß es bei der Untersuchung einer Welle einerlei ist, ob man die aufeinanderfolgenden Bewegungszustände eines einzelnen Punktes oder die gleichzeitigen Bewegungszustände aller Punkte der Welle betrachtet. Wenn man daher die kinematographische Aufnahme der Bewegung eines einzelnen Punktes ausführt, so enthält diese Aufnahme das vollständige Bewegungsgesetz der ganzen Welle. Die Ausführung einer solchen Aufnahme kann mit Hilfe des in Fig. 662 dargestellten Apparates bequem bewerkstelligt werden.

Auf einem Ständer ist ein astronomisches Fernrohr wagerecht aufgestellt. An der Stelle, wo das reelle Bild des mit dem Fernrohre beobachteten Gegenstandes erzeugt wird, ist eine Hülse angebracht, durch die eine photographische Platte in einem bestimmten Augenblicke hindurchfallen kann. Zu dem Zwecke ist auf die Hülse oben und unten eine schmale photographische Kassette, die durch einen Schieber verschlossen werden kann, leicht aufgesetzt. Die obere Kassette wird mit einer photographischen Platte versehen, der Schieber wird zurückgezogen, und die Platte fällt auf einen in der Hülse angebrachten Haltestift, der durch eine mit einem Gummhalle versehene pneumatische Auslösung in einem beabsichtigten Augenblicke zurückgezogen wird. Hierdurch wird die Platte frei und fällt durch das Fernrohr hindurch in die untere Kassette, aus der sie nachträglich zur Ent-

1) John William Strutt, genadt zum Lord Rayleigh (1842—1919), Prof. der Physik in London. Die ersten Beobachtungen über die Verschiedenheit von Gruppengeschwindigkeit und Wellengeschwindigkeit rühren von den Gebrüdern Weber (Witlh. Ed. 1804—1891, Ernst Hehr. 1796—1878) in Göttingen her S. 661.

wicklung herausgenommen werden kann. Beobachtet man nun irgendeinen bewegten Gegenstand durch das Fernrohr, so wird auf der fallenden Platte der Bewegungsvorgang kinematographisch aufgezeichnet. Zur Beobachtung einer schwingenden Saite wird diese lotrecht ausgespannt, und hinter der Saite wird ein hell beleuchteter Spalt oder der wagerechte Glühfaden eines Nernstbrenners aufgestellt. Wird nun die Saite in Schwingungen versetzt, so verdeckt der vor dem leuchtenden Faden befindliche Punkt der Saite während seiner Schwingungen wechselnde Punkte des Glühfadens. Stellt man das Fernrohr auf den leuchtenden Glühfaden scharf ein, und drückt man den Ball, so wird das bewegte Schattenbild auf der fallenden Platte

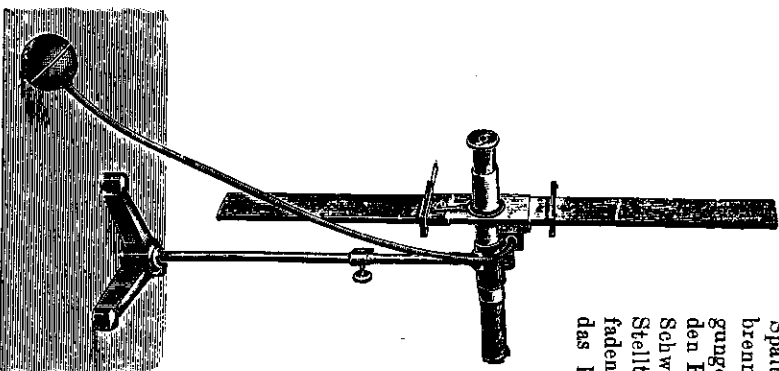


Fig. 662. Grimschischer Apparat zur photogr. Aufnahme schwingender Saiten.

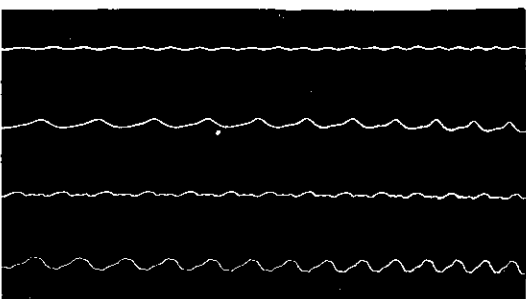


Fig. 668. Photographische Aufnahmen schwingender Saiten.

der Länge nach auseinandergezogen, und nach der Entwicklung der Platte erscheint das Bewegungsgesetz des beobachteten Punktes als eine halbe, wellenförmige Kurve auf dunklem Grunde. Die Figuren 663 I—IV zeigen die Aufnahmen von schwingenden Saiten. Bei der ersten Figur sieht man reine Sinusschwingungen, bei der zweiten sind auf der Sinusschwingung noch weitere Ausbuchtungen vorhanden, die davon herrühren, daß die Saite außer der Grundschwingung noch Schwingungen von doppelter Schwingungszahl ausführt, wodurch die sinusförmigen Ausbuchtungen der Grundschwingung nach der einen Seite vertieft, nach der anderen Seite verflacht werden (vgl. die mittlere Kurve in Fig. 659 und die erste Kurve in Fig. 661). Die beiden anderen Figuren zeigen außer den Grundschwingungen noch die 3. bzw. 5. Oberschwingung.

Der Charakter der verschiedenen Wellenformen äußert sich in einem verschiedenen Klange der tönenden Saite, wovon in § 239 weiter die Rede sein wird.

§ 222. Stehende Längswellen.

Die stehenden Längswellen kommen wie die stehenden Querwellen durch Superposition zweier entgegengesetzt gerichteter fortschreitender Wellen zustande, von denen die zweite gewöhnlich durch Reflexion der ersten entstanden ist.

Die zeichnerische Darstellung kann man am einfachsten auf Grund der Fig. 664 ausführen, indem man die Verrückungen einer gezeichneten stehenden Querwelle um 90° dreht. Die Verrückungen nach oben müssen dann nach rechts von der Gleichgewichtslage, die Verrückungen nach unten müssen nach links von der Gleichgewichtslage gezeichnet werden. Man erkennt aus der Figur:

An den Knotenpunkten (den Punkten dauernder Ruhe) treten die größten Dichtigkeitschwankungen auf, und die Bewegung der Masseanteile erfolgt in der Richtung von den Stellen größter Dichte nach den Stellen geringster Dichte. Hierdurch werden die Stellen geringster Dichte nach einer halben Schwingung zu Stellen größter Dichte und umgekehrt. Die Bäuche sind zugleich die Stellen geringster Dichtigkeitschwankungen.

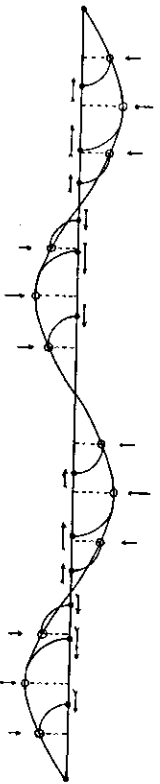


Fig. 664. Stehende Längswellen aus einer Querwelle.

Erfolgt die Bildung der stehenden Wellen durch Reflexion am festen Ende, so entsteht an diesem Ende infolge der entgegengesetzten Phasen der primären und der reflektierten Welle ein Knoten; erfolgt die Bildung der stehenden Welle durch Reflexion am freien Ende, so muß hier wegen der Gleichheit der Phase beider Wellen ein Bauch entstehen.

Die Anzahl der auf einem linearen, elastischen Körper entstehenden Knoten und Bäuche hängt von der Schwingungszahl der einzelnen Masseanteile ab.

Ein an beiden Enden eingeklemmter elastischer Stab muß immer an beiden Enden Knoten haben; außerdem können sich noch beliebig viele Knoten auf der ganzen Länge des Stabes in gleichen Abständen voneinander verteilen.

Ein an beiden Enden freier elastischer Stab hat sicher an beiden Enden Bäuche; außerdem können sich auf dem Stabe noch beliebig viele, durch Knoten voneinander getrennte Bäuche in gleichen Abständen voneinander ausbilden.

Ein an einem Ende eingeklemmter, am anderen Ende freier Stab hat am festen Ende einen Knoten, am freien Ende einen Bauch. Die übrigen etwa entstehenden Knoten und Bäuche verteilen sich gleichmäßig über die ganze Stablänge.

§ 222. Stehende Längswellen

Eine in einem Rohre eingeschlossene Luftsäule verhält sich wie ein elastischer Stab.

Die Längsschwingungen eines elastischen Stabes erfolgen so rasch, daß man sie nicht mit dem Auge verfolgen kann. Besser kann man die Längsschwingungen einer ausgespannten Spiralfeder verfolgen. An dieser kann man wenigstens die Lage der Knoten und Bäuche voneinander unterscheiden, da

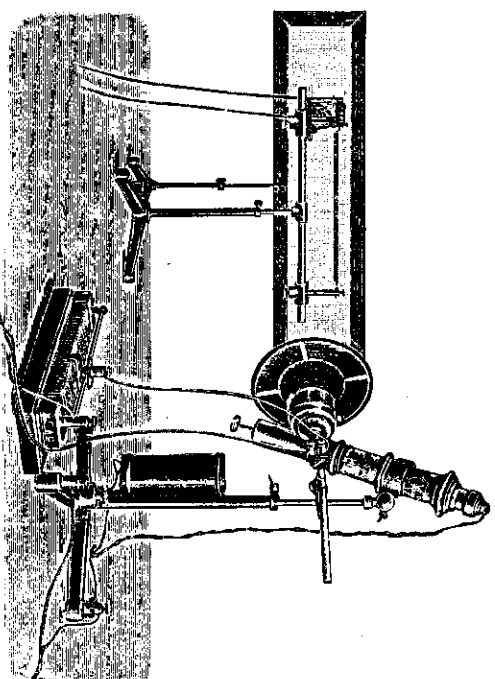


Fig. 665. Stroboskopischer Apparat.

die Spiralschwingungen an den Knoten, die dauernd in Ruhe bleiben, ein scharfes Bild geben, während die Spiralschwingungen an den Bäuchen infolge ihrer raschen, hin und her gehenden Bewegungen ein verschwommenes Bild erzeugen.

Für die Beobachtung rascher periodischer Bewegungen kann man die Versuchsanordnung abgebildet, aus welcher deren Grundgedanke hervorgeht. Wir sehen hier vor einem Schirme eine Spiralfeder ausgespannt, die durch einen elektrischen Antrieb in stehende Längsschwingungen versetzt werden kann. Ferner sehen wir eine kleine elektrische Bogenlampe, vor deren Öffnung eine mit einigen Schlitzern versehene Scheibe durch einen kleinen Elektromotor in Umdrehung versetzt werden kann. Die Umdrehungszahl der Scheibe kann mit Hilfe eines Vorschaltwiderstandes des Elektromotors innerhalb weiter Grenzen verändert werden.

Versetzt man die geschlitzte Scheibe in Drehung, so wird das aus der Lampe kommende Lichtbündel periodisch abgeblendet. Die Lampe sendet jedesmal dann einen Lichtblitz aus, wenn ein Schlitz vor der Lampenöffnung vorbeikommt.

1) *strobós* (griech.) = Wirbel.

Wir wollen annehmen, daß die Spiralfeder in jeder Sekunde 40 Längsschwingungen macht, und daß die mit vier Schlitzzen versehene Scheibe in jeder Sekunde 10 Umdrehungen macht, so daß also in jeder Sekunde 40 Lichtblitze in regelmäßiger Zeitfolge auf die Spiralfeder fallen. Dann wird die Spiralfeder durch jeden Lichtblitz immer in demselben Bewegungsstande beleuchtet; sie erscheint daher unserem Auge so, als ob sie stillstände.

Verringert man nun die Umdrehungszahl der geschlitzten Scheibe so, daß in jeder Sekunde 39 Lichtblitze erfolgen, so beleuchtet jeder folgende Lichtblitz die Spiralfeder in einem Bewegungszustande, der um $\frac{1}{40}$ einer ganzen Schwingung gegen den vorigen Bewegungszustand vorans ist. Während einer ganzen Sekunde werden dann alle 40 Bewegungszustände der ganzen Schwingung beleuchtet und dadurch sichtbar. So scheint dann die Spiralfeder nur ganz langsame Schwingungen zu machen, die man mit dem Auge bequem verfolgen kann, während sie in Wirklichkeit ganz normal schwingt.

Die Anwendung der stroboskopischen Beleuchtung kann man natürlich auch für die Untersuchung anderer periodischer Vorgänge benutzen.

Dreizehnter Abschnitt.

Akustik.

§ 223. Tonhöhe.

Wir beurteilen einen Ton nach seiner Höhe, Stärke und Klangfarbe.

1. **Monochord.** Zur Untersuchung der Tonhöhe betrachten wir zuerst die Vorgänge, die sich bei der Schwingung einer Saite abspielen. Wir haben in § 212 erwähnt, daß die Schwingungszahl einer Saite von ihrem Querschnitte und ihrem Materiale, also von ihrem Längendichte und außerdem von ihrer Länge und Spannung abhängt. Bei gleichbleibender Spannung ist die Schwingungszahl der Saite umgekehrt proportional ihrer Länge.



Fig. 666. Monochord.

Wir spannen eine Saite so auf, wie es Fig. 666 zeigt. Der dargestellte Apparat wird *Monochord*¹⁾ genannt; bei dem abgebildeten Monochord sind zwei Saiten aufgespannt. Mittels untergesetzter Stege können wir beliebige Längen der Saite abgrenzen und daher auch die Schwingungszahl des abgegrenzten Stückes innerhalb beliebiger Grenzen verändern. Die ganze Saite habe die Länge von 120 cm. Durch passende Spannung mittels des an dem einen Ende angebrachten Wirbels möge der Ton der Saite mit dem Tone *C* auf dem Klavier in Übereinstimmung gebracht werden.

2. **Relative Schwingungszahlen der Töne einer Tonleiter:** Setzt man in die Mitte der Saite einen Steg, so daß nur noch die 60 cm lange Saite schwingt, so entsteht der Ton *c*, also die Oktave des ursprünglichen Grundtones. Die Saitenlängen des Grundtones und der Oktave verhalten sich wie 2 : 1, also die Schwingungszahlen wie 1 : 2. Wenn man den Steg so verschiebt, daß der Reihe nach die Töne des Klavieres *C, D, E, F, G, A, H, c* erzeugt werden (in Fig. 667 sind die Stellen, wo der Steg unter die Saite zu setzen ist, durch die entsprechenden Buchstaben angegeben), und wenn man auf Grund des Verhältnisses der Saitenlängen das Verhältnis der Schwingungszahlen berechnet und dann dieses Verhältnis durch möglichst kleine ganze Zahlen ausdrückt, so erhält man folgende Zahlenreihe

<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>A</i>	<i>H</i>	<i>c</i>
24	27	30	32	36	40	45	48

Einem höheren Tone entspricht stets eine größere Schwingungszahl. Bestimmt

1) *mónos* (griech.) = allein; *chordé* (griech.) = Schnur, Saite.

man die absolute Schwingungszahl des Grundtones C , so erhält man jedesmal denselben Wert, unabhängig von der Entstehung des Tones. Hieraus folgt, daß die Tonhöhe nur von der Schwingungszahl abhängt.

Ein anderes Verfahren, die Schwingungszahl der Töne einer Oktave zu vergleichen, besteht darin, daß man auf einer kreisförmigen Scheibe acht konzentrische Löcherreihen anbringt, von denen die innerste Löcherreihe 24 Löcher, die dann folgende 27, die nächste 30 usw., die äußerste 48 Löcher oder ein ganzes Vielfaches dieser Zahlen enthält. Bringt man die kreisförmige Scheibe in rasche (aber recht gleichförmige) Umdrehung und bläst man einen Luftstrom gegen die einzelnen Löcherreihen, so wird ein Ton erzeugt, der um so höher ist, je rascher die Scheibe sich umdreht und je größer die Anzahl der Löcher in einer Löcherreihe ist. Bei gleichbleibender Umdrehungszahl hört man die Töne der Dur-Tonleiter, wenn man zuerst gegen die innerste Löcherreihe

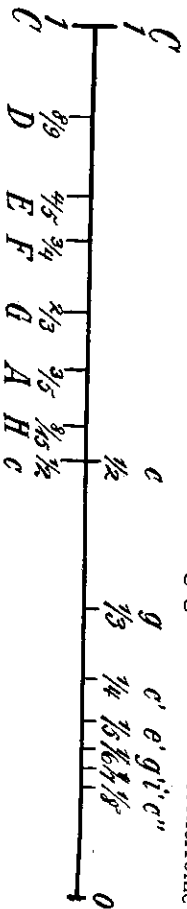


Fig. 667. Stellung des Stages am Monochord zur Erzeugung der bezeichneten Töne.

bläst und dann mit dem Blaströhre allmählich bis zur äußersten Löcherreihe fortschreitet. Stimmt der bei Benützung der innersten Löcherreihe erzeugte Ton mit dem Tone C des Klavieres überein, so stimmen die übrigen mit der gedrehten Scheibe erzeugten Töne mit den Tönen D, E, F, G, A, H, c überein (Lochsirene, vgl. § 228).

Wenn man auf einer Achse acht verschiedene Zahnräder anordnet, deren Zahnzahlen sich verhalten wie 24:27 usw.: 48, und berührt man bei gleichbleibender Umdrehungsgeschwindigkeit der Achse der Reihe nach die einzelnen Zahnräder mit einem Stück Papier, so erhält man ebenfalls die Töne der Dur-Tonleiter (Zahnrad-Sirene).

Ein Stahlstab von rechteckigem Querschnitte wird an einem Ende in einen Schnurstock eingeklemmt und mit dem Finger aus der Ruhelage gebracht. Der Stab schwingt hin und her (Fig. 668). Aus Beobachtungen an längeren Stäben, bei denen man die Schwingungszahlen zählen kann, kann man folgern, daß die Schwingungszahl dem Quadrate der Stablänge umgekehrt proportional ist. Klemmt man den Stab so lang ein, daß er beim Schwingen den Ton C gibt, und verkürzt man ihn in der Weise, daß die Töne in ihrer Höhe mit den Tönen der Oktave am Klavier übereinstimmen, so verhalten sich die Längen wie $1 : \sqrt{24} : \sqrt{27}$ usw.: $1 : \sqrt{48}$. Das Verhältnis der Schwingungszahlen stimmt also auch bei dieser Art der Erzeugung des Tones mit der oben angegebenen Zahlenreihe überein.

3. Töne der Oktave. Man bezeichnet die Töne der Oktave in ihrer Abhängigkeit vom tiefsten Tone, dem man den Namen *Prime* gibt, mit *Sekunde*,

Terz, Quarte, Quinte, Sexte, Septime, Oktave. In Fig. 669 sind die Töne der Tonfolge von c bis c'' durch ihre Lage auf der Klaviatur des Klavieres, durch ihre Buchstabenbezeichnung, durch Notenschrift und durch das Verhältnis der Schwingungszahlen ausgedrückt. Die zweite Zahlenreihe gibt das „Ver-

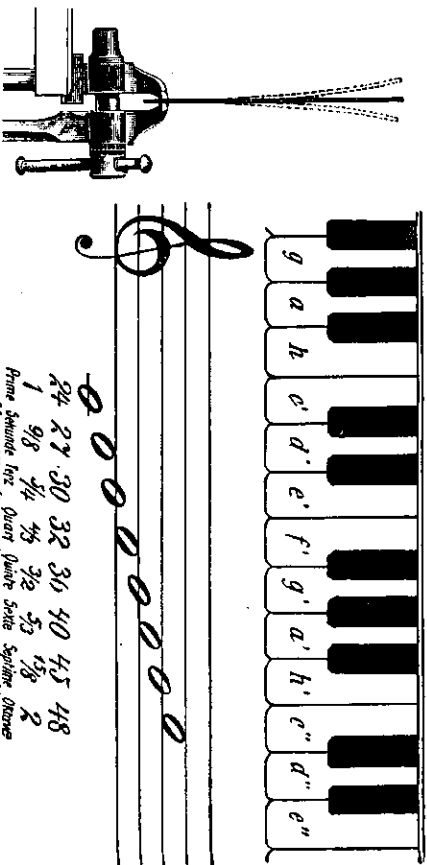


Fig. 668. Schwingender Stab.

Fig. 669. Klaviatur des Klavieres mit bezeichneten Tönen.

hältnis der Schwingungszahlen jedes einzelnen Tones zum Grundtone an; diese Zahlenreihe ist durch Division sämtlicher Zahlen der vorhergehenden Zahlenreihe durch 24 entstanden. Die letzte Zahlenreihe bezeichnet das Verhältnis der Schwingungszahlen zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Töne.

4. Das Intervall¹⁾ Die zwischen zwei Tönen bestehende Tonstufe wird in der Musik „Intervall“ genannt. Physikalisch bedeutet Intervall das Verhältnis der Schwingungszahlen der Töne. So ist z. B. das Intervall der Quinte das Verhältnis 3/2.

5. Dur- und Moll-Tonleiter. Die dargestellte Tonreihe ist die Tonreihe der Dur-Tonleiter. Bei der Moll-Tonleiter wird die Terz durch einen etwas tieferen Ton mit dem Intervalle 6/5 ersetzt. In der ersten Zahlenreihe (Fig. 669) muß man daher die Schwingungszahl 30 durch die Zahl 28,8 ersetzen, um die Zahlenreihe für die Moll-Tonleiter zu bilden.

6. Harmonische Tonreihe. Eine andere Tonfolge, die besonders bei der Untersuchung der Klangfarbe wichtig ist, ist die Tonreihe, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie die ganzen Zahlen 1 : 2 : 3 : 4 usw. Diese Reihe wird die harmonische Tonreihe genannt. Ausgehend von dem Grundtone C besteht sie aus folgenden Tönen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	c	g	c'	e'	g'	e''	c''	d''	e''	f''	g''

1) Von inter (lat.) = zwischen, vallus (lat.) = Schanzpfehl, intervallum (lat.) = Zwischenraum, Abstand, Lücke.

Von diesen Tönen gehören der 7. und der 11. Ton den musikalisch verwendeten Tonfolgen nicht an; sie sind daher mit besonderen Buchstaben bezeichnet.

In Fig. 667 sind die Stellen, an denen der die Saite abgrenzende Steg stehen muß, damit der rechte Teil der Saite den bezeichneten Ton gibt, durch die Zahl $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ usw. und durch die Tonbezeichnung bis zum Tone c'' angegeben.

7. Umfang der Tonreihe eines Klaviers (Fig. 670). So wie man vom Tone C um sieben Töne fortschreiten muß, um in der Dur-Tonleiter bis zum Tone c zu kommen, der die doppelte Schwingungszahl wie der Grundton C hat, kann

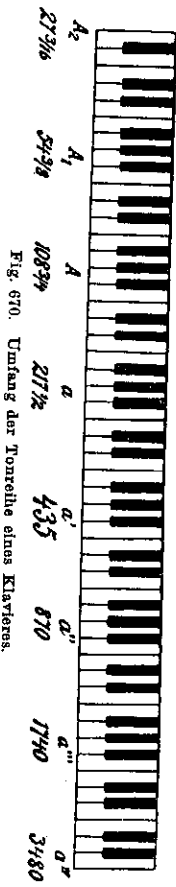


Fig. 670. Umfang der Tonreihe eines Klaviers.

man, von c weitergehend, eine neue Tonfolge bilden: c, d, e, f, g, a, h, c' , von denen jeder einzelne die Oktave des entsprechenden Tones der vorigen Tonreihe ist. Durch nochmalige Verdoppelung der Schwingungszahlen kommt man zu der Tonfolge c', d', e', \dots, c'' , dann zu der Tonfolge c'' bis c''' usw. Durch Halbierung der Schwingungszahl der ursprünglichen Tonreihe C bis c kommt man zu den Tönen der tieferen Oktave C_1, D_1, E_1, \dots, C usw.

Theoretisch läßt sich eine Tonfolge von beliebiger Tiefe bis zu beliebiger Höhe denken. Praktisch wird auf dem Klaviere nur die Tonreihe A_2 bis a'''' verwandt.

§ 224. Konsonanz, Dissonanz, Dreiklang.

Beim Zusammenklingen zweier in der Musik verwendeter Töne empfinden wir je nach der Wahl der Töne ein Wohlgefühl oder ein Unbehagen. Im ersten Falle sagen wir: die beiden Töne bilden eine Konsonanz¹⁾, im zweiten Falle eine Dissonanz.²⁾ Als Konsonanzen gelten Oktave ($C - c$), Quinte ($C - G$), Quarte ($C - F$), große Terz ($C - E$) und kleine Terz ($E - G$). Die in Klammern gesetzten Tonpaare bilden nur Beispiele der entsprechenden Konsonanzen. Zwei andere Quinten sind z. B. ($E - H$) und ($F - c$). Die Sekunde ($C - D$) und die Septime ($C - H$) sind die Hauptvertreter der Dissonanzen. Vergleichen wir das Verhältnis der Schwingungszahlen der Konsonanzen, so kommen wir zu dem eigentümlichen Gesetze.

Das Verhältnis der Schwingungszahlen der Konsonanzen läßt sich durch kleine ganze Zahlen (kleiner als 7) ausdrücken. Die Konsonanz ist um so vollständiger, je kleiner diese Zahlen sind (Schule der Pythagoräer um 500 v. Chr.).

1) consonante (lat.) = mittelmäßig.
2) dissonante (lat.) = verworren tönen.

§ 224. Konsonanz, Dissonanz, Dreiklang. § 225. Erweiterung der Tonleiter 703
Ordnen wir die Konsonanzen nach der Größe der das Verhältnis der Schwingungszahlen ausdrückenden Zahlen, so erhalten wir:

- Cc Oktave 1 : 2
- CG Quinte 2 : 3
- CF Quarte 3 : 4
- CA Sexte 3 : 5
- CE gr. Terz 4 : 5
- EG kl. Terz 5 : 6.

Daß gerade die Zahl 7 die Grenzzahl zwischen Konsonanz und Dissonanz ist, mag seinen Grund darin haben, daß dieser Zahl kein musikalisch gebrauchter Ton entspricht. Dadurch, daß also die Intervalle 6 : 7 und 7 : 8 fehlen, ist die Lücke zwischen den beiden Intervallen 5 : 6 und 8 : 9 besonders groß. Man rechnet (heute) 5 : 6 noch zu den Konsonanzen, dagegen 8 : 9 zu den Dissonanzen.

Sollen mehrere Töne eine Konsonanz bilden, so müssen sie dieses paarweise tun. Die vollkommenste Konsonanz ist der Dur-Dreiklang

$$C : E : G = 4 : 5 : 6.$$

Ergänzt man den Dreiklang durch die Oktave des Grundtones, also durch c , so wird er auch vierstimmiger Dreiklang

$$C : E : G : c = 4 : 5 : 6 : 8$$

genannt. In diesem kommen als konsonierende Intervalle die Oktave, die Quinte, die Quarte, die große und die kleine Terz vor.

Wenn man den Dur-Dreiklang noch durch einen Dreiklang nach oben durch die Töne $G : H : d$ und durch einen Dreiklang nach unten durch die Töne $F_1 : A_1 : C$ ergänzt, so erhält man die Tonfolge

$$F_1 : A_1 : C : E : G : H : d.$$

In dieser Tonfolge sind alle Töne der Dur-Tonleiter oder ihre tiefere bzw. höhere Oktave enthalten. (Aufbau der Tonleiter nach Chladni.)¹⁾

§ 225. Erweiterung der Tonleiter.

Die drei Arten der Sekunde. In der Dur-Tonleiter kommen drei verschiedene Arten von Sekunden vor mit den Intervallen

- 8 : 9 = $C : D = F : G = A : H$
- 9 : 10 = $D : E = G : A$
- 15 : 16 = $E : F = H : c$.

Ein Intervall ist um so kleiner, je näher es der 1 kommt (S. 701). Folglich ist das Intervall 15 : 16 kleiner als die beiden Intervalle 8 : 9 und 9 : 10.

1) Ernst Florens Friedrich Chladni (1756—1827), geb. in Wittenberg, gest. in Breslau, war von Hause aus Jurist, widmete sich aber später ganz seiner Lieblingswissenschaft, der Akustik, die er durch manche Entdeckung bereicherte.

Die Dur-Tonleiter mit beliebigem Grundtone. Es ist wünschenswert, daß man bei Benutzung eines Klavieres von jedem Tone ausgehend eine Dur-Tonleiter spielen kann, daß also z. B. auch von D ausgehend die oben bezeichnete Zahlenreihe 24, 27, 30 usw. bis 48 einer wirklich existierenden Tonfolge entspricht. Die Intervalle 8 : 9 und 9 : 10 liegen einander so nahe, daß sie nur schwer voneinander unterschieden werden können. (Man nennt das Verhältnis dieser Intervalle $9/8 : 10/9 = 81/80$ das „Komma“.) Daher kann man die Dur-Tonleiter von D aus anfangen mit D, E . Jetzt hätte als dritter Ton ein solcher zu folgen, dessen Schwingungszahl sich zu E verhalte wie 9 : 8 oder wie 10 : 9. Dieser Ton fehlt aber. Er muß höher als F und tiefer als G sein. Die ihm entsprechende Schwingungszahl kann man finden, indem man die Schwingungszahl von D (nämlich 27) mit $\frac{9}{4}$ (Intervall der großen Terz) multipliziert. Man kommt so zu einem Tone mit der Schwingungszahl 33,75. Geht man weiter, so ist noch die Einschaltung eines Tones zwischen e und d erforderlich, denn in der D-Dur-Tonleiter entspricht die Septime (mit dem Intervalle 15/8 und dem Grundtone 27) einem Tone mit der Schwingungszahl $27 \cdot 15/8 = 50,63$. Dieser Ton liegt zwischen e (48) und d (34).

Ausgehend von anderen Tönen als Grundton einer Dur-Tonleiter, kommt man zu dem Ergebnisse, daß zwischen den Tönen CD, DE, FG, GA, AH je ein neuer Ton einzuschalten ist. Die Einschaltung wird dadurch vorgenommen, daß man den tieferen Ton durch Multiplikation mit $25/24$ erhöht, dieser erhöhte Ton wird in der Notenschrift durch ein vorgesetztes Kreuz \sharp bezeichnet, oder indem man den höheren Ton durch Multiplikation mit $24/25$ erniedrigt. Diese Vertiefung wird in der Notenschrift durch ein vorgesetztes b bezeichnet. Die durch Erhöhung der Töne hervorgerufenen neuen Töne heißen Cis, Dis, Fis, Ais; die durch Erniedrigung erzeugten Töne heißen Des, Es, Ges, As, B. Bei Berechnung der einzuschaltenden Töne ergibt sich nun keine vollkommene Übereinstimmung, z. B. der Töne Cis und Des; denn die ihnen auf Grund der obigen Berechnung zukommenden Schwingungszahlen sind 25,0 und 25,92. Es wäre daher folgerichtig, zwischen C und D zwei neue Töne einzuschalten. Da diese beiden Töne aber in ihrer Tonhöhe sehr wenig voneinander verschieden sind, so ersetzt man sie durch einen einzigen, zwischen Cis und Des liegenden Ton, dem man beide Namen Cis und Des gibt.

Der Umfang der beim Klavier angewandten Tonfolge und der eingeschalteten Töne ist durch die Abbildung der Klaviatur Fig. 670 wiedergegeben.

Ausgleich der Intervalle. Dadurch, daß man zwischen C und D , ebenso zwischen D und E , zwischen F und G , zwischen A und H nur einen Ton anstatt zweier einschaltet, wird ein musikalischer Fehler gemacht. Um nun diesen Fehler möglichst klein zu machen, verteilt man bei den Instrumenten mit sog. festen Tönen, z. B. Klavier, Harfe, Orgel, den Fehler auf alle Töne der ganzen Oktave, indem man sämtliche 12 Intervalle zwischen den (durch die Ergänzung auf die Zahl 13 angewachsenen) Tönen der Oktave genau gleich macht. Das geschieht, indem man das Intervall der Oktave (2 : 1) auf 12 Intervalle, von denen jedes den Wert $\sqrt[12]{2} = 1,0595$ hat, verteilt. Eine in

dieser Weise gestimmte Tonfolge wird eine Tonfolge in gleichschwebend temperierter Stimmung genannt. In dieser Stimmung beträgt das Intervall CD nunmehr $(\sqrt[12]{2})^2 = 1,1225$, während es bei reiner Stimmung den Wert $27/24 = 1,1250$ haben sollte.

In Tabelle XVI sind die relativen Schwingungszahlen der Töne einer Oktave nach reiner und nach gleichschwebend temperierter Stimmung zusammengestellt.

Bei Musikinstrumenten mit beweglichen Tönen, z. B. bei der Violine, deren vier Saiten in ihrer ganzen Länge die Töne $GDAE$ erzeugen, stimmt der Musiker die hohen Töne nach dem Gehöre dadurch ab, daß er mit dem Finger das eine Ende der Saite auf den Geigenhals drückt und so ein bestimmtes Stück der Saite abgrenzt, welches nun allein schwingend den höheren Ton gibt. Der Violinspieler wendet, wenn er allein, z. B. ohne Klavierbegleitung spielt, die reine Stimmung an. Beim Zusammenspiel mit dem Klavier oder der Orgel muß er sich der gleichschwebenden Stimmung dieser Instrumente mit festen Tönen anpassen.

§ 226. Der Kammerton; das Stimmen der Musikinstrumente.

Kammerton. Man kann, lediglich auf Grund eines musikalisch gut ausgebildeten Gehöres, von irgendeinem beliebigen Tone, also z. B. von dem Tone, den eine Saite beliebiger Länge und beliebiger Spannung erzeugt, ausgehend, die durch die Dur-Tonleiter mit ihren Ergänzungen bestimmte Tonfolge festlegen und demnach irgendein in sich richtig gestimmtes Musikinstrument herstellen. Ein derartiges Instrument wird aber im allgemeinen nicht mit irgendeinem anderen, auf dieselbe Weise gestimmten Instrumente übereinstimmen, da der Grundton, von dem die Stimmung ausgeht, in beiden Instrumenten verschieden sein wird.

Um nun eine Übereinstimmung aller gebräuchlichen Instrumente zu ermöglichen, ist man übereingekommen, die Tonhöhe eines einzigen Tones willkürlich durch seine Schwingungszahl festzusetzen. Zu diesem Tone hat man den der mittleren Stimmlage der menschlichen Stimme entsprechenden Ton a' gewählt. Dieser Ton heißt der Kammerton. Die Schwingungszahl des Kammertones ist durch internationale Übereinkunft seit 1885 auf 435 Schwingungen festgesetzt worden. Er wird als Normal a' bezeichnet. Siehe auch Fig. 670 und Tabelle XVI.

Das Stimmen eines Musikinstrumentes geschieht in der Weise, daß man den Ton a' mit Hilfe einer Stimmgabel mit 435 Schwingungen zuerst stimmt und von diesem Tone ausgehend das Instrument in sich auf Grund des Verhältnisses der Schwingungszahlen nach dem Gehöre richtig stimmt. Die Stimmung wird ausgeführt, indem man von a' in Quinten nach oben und unten fortschreitet. Bei Musikinstrumenten mit festen Tönen muß man nachher noch eine Korrektur vornehmen, da ein Fortschreiten in Quinten mit einem Fortschreiten in Oktaven keine volle Übereinstimmung bringt. Dieses folgt

daraus, daß die siebente Oktave, mit dem Intervalle $2^7 = 128$, von der zwölften Quinte, mit dem Intervalle $(\frac{3}{2})^{12} = 129,7$ abweicht. Die nach Quinten ausgefüllte Stimmung wird nachträglich so geregelt, daß der höchste Ton (a^{IV}) genau die 7. Oktave des tiefsten Tones (A_2) ist. Hierbei wird auf reine Oktaven gestimmt, denn unser Ohr ist gegen unreine Oktaven viel empfindlicher als gegen unreine Quinten. Der unreinen, aber gleichschwebend temperiert gestimmten Quinte entspricht das Intervall $(\frac{1}{2})^7 = 1,498$, während es nach reiner Stimmung $\frac{3}{2} = 1,5$ sein müßte.

Das Stimmen eines Musikinstrumentes mit festen Tönen nach gleichschwebender Temperatur kann nur von Personen ausgeführt werden, die sich durch anhaltende Übung das musikalische Gehör für diesen Ausgleich, der dem natürlichen musikalischen Empfinden widerspricht, angeeignet haben.

§ 227. Tonereger.

Wir empfinden als Ton jedes unser Ohr treffende Luftwellensystem, dessen Schwingungszahl innerhalb der Grenzen 30 und 20000 liegt. Die Luftwellen sind fortschreitende Längswellen, bestehen also aus abwechselnden Luftverdichtungen und Luftverdünnungen. Als Tonereger oder Tonquelle kann daher jeder Körper dienen, der periodische Luftdruckschwankungen veranlaßt.

§ 228. Die Lochsirene.

Die theoretisch einfachste Tonquelle ist die Lochsirene (§ 227) von Cagniard Latour¹⁾: Vor der Öffnung einer mit einem Blasebalg versehenen Röhre (Fig. 671) dreht sich eine kreisförmige Scheibe um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse. Die Scheibe ist mit einer Reihe von kreisförmig angeordneten Löchern versehen, die sich bei der Drehung gerade vor der Ausströmungsöffnung der Röhre vorbeibewegen. Dadurch wird die Ausströmungsöffnung in periodischem Wechsel verschlossen und geöffnet. Der Luftstrom erfährt periodische Unterbrechungen: Jedesmal, wenn die Ausströmungsöffnung wieder verdeckt, so entsteht an derselben Stelle infolge der Trägheit der schon durchgeströmten Luft eine Luftverdünnung. Diese periodisch sich wiederholenden Impulse pflanzen sich in der elastischen

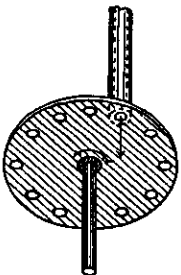


Fig. 671. Lochsirene.

1) Charles Cagniard de Latour (1777—1869) führte 1819 die erste Zählung der Schwingungen eines Tones mit seiner Sirene aus. Die sonderbare Bezeichnung „Sirene“ rührt davon her, daß der angewandte Apparat auch unter Wasser, mit stromendem Wasser statt mit Luft angetrieben, Töne ergibt und dadurch eine eigentlich recht fern liegende Beziehung zu den bezahrend sitzenden Inselbewohnern in der Odyssee veranlaßte. — Die Sirene wurde von Ludw. Friedr. Wilh. Aug. Seebeck (1806—1849), dem Sohne von Joh. Seebeck (S. 571), Gymnasiallehrer, zuletzt Prof. der Phys. in Leipzig, wesentlich verbessert.

Luft fort, gelangen so in genau derselben Aufeinanderfolge in unser Ohr und kommen uns dann als Ton zum Bewußtsein. Kennt man die Anzahl der Umdrehungen, die die Sirenscheibe in jeder Sekunde macht, so erhält man durch Multiplikation der Umdrehungszahl mit der Anzahl der Löcher in der Lochreihe die Schwingungszahl.

Zur Bestimmung der absoluten Schwingungszahl eines Tones gibt man der Lochsirene oft die in Fig. 672 abgebildete Gestalt. Sie besteht aus einem zylindrischen Luftgefäße, dessen Luftraum durch das untere Rohr mit einem Blasebalge verbunden wird. Die obere Grundfläche C des zylindrischen Gefäßes ist mit einer Reihe kreisförmig angeordneter Löcher versehen, die schräg durch die Platte der oberen Grundfläche gehobrt sind.

Diese Löcherreihe ist durch eine kreisförmige

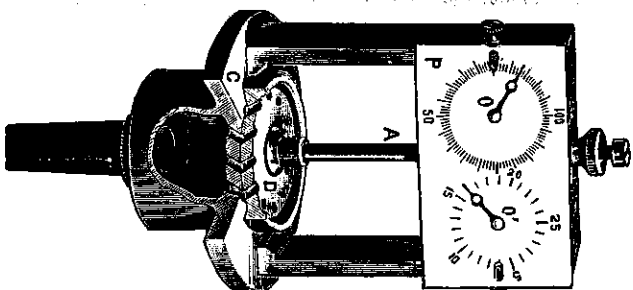


Fig. 672. Lochsirene von Cagniard Latour.

Platte verdeckt, die um eine durch ihren Mittelpunkt gehende, in Spitzen laufende Achse drehbar ist. Die sich drehende Platte hat genau so viele Löcher wie die Luftkammer. Die Bohrung dieser Löcher ist ebenfalls schräg ausgeführt, doch so, daß die Achse ihrer Bohrungen mit der Achse der Bohrungen in der Luftkammer rechte Winkel bildet.¹⁾ So wird bewirkt, daß die obere drehbare Platte durch die in der Luftkammer eingeschlossene und durch die Bohrungen austretende Luft nach Art der Turbine in Drehung versetzt wird. Bei der Drehung werden die sämtlichen Löcher abwechselnd gleichzeitig geschlossen und geöffnet. Die den Ton erzeugenden Luftimpulse kommen also gleichzeitig durch sämtliche Öffnungen und erzeugen so einen starken Ton. Mit der Achse A der sich drehenden Scheibe ist ein Zahnwerk P verbunden, das in Fig. 673 geöffnet abgebildet ist. Hier erkennt man, daß eine an der Achse sitzende Schraube ohne Ende in das Zahnrad R eingreift; dieses dreht dann bei jeder Umdrehung wieder das Zahnrad R um einen Zahn weiter. Das Produkt aus der am Zahnwerke abgelesenen Umdrehungszahl mit der Anzahl der Löcher in einer Reihe ist die Schwingungszahl des Tones.

Der Grundgedanke der Lochsirene findet bei der Dampfsirene Anwendung; diese wird durch hochgespannten Dampf betrieben und gibt hierbei einen sehr starken und auffallenden, heulenden Ton.

1) Vgl. Leitrad und Lantrad einer Turbine (Fig. 357, S. 303).

§ 229. Verschiedene Arten der Tonquellen.

Während bei der Lochsirene die austretende Luft unmittelbar zur fortschreitenden Wellenbewegung veranlaßt wird, ist bei allen übrigen Tonquellen ein Körper vorhanden, der zuerst in stehende (§ 218, § 220) Schwingungen versetzt wird und dann allmählich seine Schwingungsenergie an die umgebende Luft abgibt. Das ist in den meisten Fällen ein fester Körper; nur bei den Lippenpfeifen wird die eingeschlossene Luft selbst in stehende Schwingungen versetzt und gibt dann periodisch ihre Energie an die äußere Luft ab.

Die tonerregenden festen Körper können lineare Gebilde sein, wie Stäbe und Saiten; oder sie sind flächenhafte Gebilde, die entweder durch ihre Steifigkeit genügende Schnellkraft besitzen, wie Metallplatten und Glocken, oder die erst durch Spannung schwingungsfähig werden, wie die Membranen (Trommelfell). Auch körperliche Gebilde können zu Tonerregern werden; man hört z. B. einen Amboß klingen, wenn man mit dem Hammer darauf schlägt. Körperliche Gebilde werden zu musikalischen Zwecken kaum benutzt.

Je nach der Art der stehenden Wellen kann man die Tonerregere einteilen in solche, die transversal (quer) schwingen, und solche, die longitudinal (längs) schwingen.

§ 230. Transversal (Quer) schwingende Saiten.

Eine an beiden Enden befestigte, gespannte Saite hat bei Querschwingungen an den Enden sicher Schwingungsknoten (§ 220, 2). Sie wird entweder dadurch in Schwingungen versetzt, daß sie an irgendeiner Stelle gezupft, oder daß sie mit einem, mit Geigenharz eingeriebenen Geigenbogen gestrichen wird. Je nach der Art des Zupfens oder nach der Art des Streichens mit dem Geigenbogen bildet sich in der Mitte ein Schwingungsbauch (Fig. 674, 1), oder die Saite schwingt so, wie es die übrigen Bilder von Fig. 674 zeigen; sie schwingt also entweder als Ganzes oder in 2, 3, 4, 5 oder mehreren (aliquoten) Teilen. Das Schwingen in Teilen kann man dadurch begünstigen, daß man während des Streichens mit dem Geigenbogen eine derjenigen Stellen lose berührt, die zu Knoten werden sollen. Eine Saite vermag also außer ihrem Grundtone eine Reihe von höheren Tönen (Obertöne) zu geben.

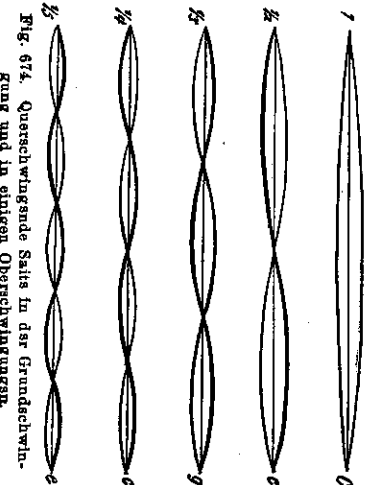


Fig. 674. Querschwingende Saite in der Grundschwingung und in einigen Oberschwingungen.

Aus Fig. 674 geht ferner hervor, daß die Tonhöhe des Tones, bei dem die Saite in der Mitte einen Knoten hat, dieselbe ist, als ob nur die eine Hälfte der Saite schwingen würde. Daraus folgt: Wenn der

§ 231. Transversal (Quer) schwingende Stäbe

709

Grundton der Saite C ist, so ist der erste Oberton c , d. i. der zweite Ton in der harmonischen Tonreihe. Auch die übrigen Obertöne stimmen mit den Tönen der harmonischen Tonreihe überein. In Fig. 674 sind die Schwingungsformen der Saite abgebildet, wenn sie ihren Grundton C und die ersten vier Obertöne c , g , e' und e' erzeugt. Die höheren Obertöne bilden sich dann besonders leicht, wenn die Saite mit einem Geigenbogen nahe ihrem einen Ende gestrichen wird, und wenn dann zugleich ein Punkt in der Nähe des mit dem Finger berührt wird. Die Lage der Knoten und Bäuche kann man dadurch sichtbar machen, daß man kleine Papierreiterchen auf die Saite setzt. Diese bleiben an den Knoten sitzen und werden an den Bäuchen abgeworfen.

Die Schwingungszahl einer schwingenden Saite kann mit Hilfe der in § 213 gegebenen Formel von Taylor (S. 678) $v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{p}{\rho}}$ berechnet werden, in der l die Länge der Saite, p ihre Spannung und ρ ihre Längendichte ist.¹⁾ Durch messende Versuche kann man die Schwingungszahl mit Hilfe der in Fig. 653 abgebildeten Versuchsanordnung finden, indem man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der fortschreitenden Querwelle auf einem langen Stahldrahte durch Versuche bestimmt und hieraus die Wellenlänge bzw. die Schwingungszahl eines kürzeren, als Saite angespannten Stahldrahtes berechnet.

Beispiel: Nach § 213 ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Querwelle auf einem 0,9 mm dicken, angespannten Stahldrahte bei der Spannung von 20 kg* gleich 19367 cm/sec. Um den Ton a' zu erzeugen, muß man von einer solchen Saite die Strecke 22,3 cm durch untergesetzte Stäbe abgrenzen; folglich ist die Wellenlänge auf der Saite $2 \cdot 22,3 = 44,6$ cm. Hieraus folgt für den Ton a' die Schwingungszahl $v = \frac{19367}{44,6} = 434,2$.

§ 231. Transversal (Quer) schwingende Stäbe.

Einen elastischen Stahlstab kann man entweder an den beiden Enden, in der Mitte oder an zwei beliebigen anderen Stellen auf feste Unterlagen auflegen. Die Unterstützungsstellen werden dann zu Knoten. Am leichtesten schwingt ein gerader Stab, wenn er so aufgelegt ist, wie es Fig. 675 zeigt. Bei einem geraden, homogenen Stabe liegen dann die Knoten auf $\frac{1}{6}$ bzw. $\frac{5}{6}$ seiner ganzen Länge; in der Mitte und an den beiden Enden bilden sich Bäuche. Es können auch andere Schwingungsarten entstehen, doch kommen sie nur unter besonderem äußeren Zwange zur vollen Ausbildung.

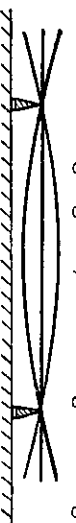


Fig. 675. Schwingend an drei elastischer Stab.

¹⁾ Die Berechnung gibt, besonders für hohe Töne, keine ganz genauen Werte, da die natürlichen „Steifigkeit“ der Saite einer Spannung gleichwertig ist, die in der Formel nicht zum Ausdruck kommt. Die Formel gilt nur für den idealen Fall einer vollkommen „weichen“ Saite, der jede Biegeunfestigkeit fehlt.

Schwingende Stäbe werden beim Glockenspiele am Schellenbaume, beim Klavier der Kinder und beim Holz-Stroh-Instrumente angewandt. Bei letzterem wird eine Reihe abgestimmter Holzstäbe auf zwei Strohhüden, die konvergierend zu einander auf den Tisch gelegt werden, so angelegt, daß die Strohhüden unter die Knotenstellen der schwingenden Holzstäbe zu liegen kommen. Die Stäbe werden bei diesen Instrumenten mit kleinen Hämmern in der Mitte angeschlagen.

§ 232. Stimmgabeln.

Stimmgabeln (Fig. 676) sind gebogene, quer schwingende Stäbe. Man schlägt eine Stimmgabel entweder mit einem weichen Hammer an, oder man bringt sie durch Anstreichen mit einem Geigenbogen an, oder Tönen. An den beiden Enden einer Stimmgabel entstehen immer Bäuche (Fig. 677); die Enden schwingen gleichzeitig gegeneinander und dann voneinander fort. In der Nähe der Krümmung der Stimmgabel, gleichweit von der Mitte entfernt, entstehen zwei Knoten. Die Mitte der Stimmgabel wird stets zu einem Bauche.



Fig. 676.
Stimmgabel.

Das Streben einer Stimmgabel, in der Mitte der Krümmung einen Bauch zu bilden, wird dadurch nicht besetzt, daß man in der Mitte einen Stab, den Stiel, anbringt, der in der Hand gehalten wird. Der Stiel der Stimmgabel kommt daher auch in Schwingungen, die sich hier als longitudinale Schwingungen fortsetzen. Wenn die Stimmgabel mit ihrem Stiele auf eine Unterlage (z. B. die Tischplatte) gesetzt wird, so übt der Stiel auf die Unterlage periodische Impulse aus und bringt sie ebenfalls in Schwingungen von derselben Schwingungszahl, also auch von derselben Tonhöhe, wie die Gabel. Daher wird der Ton der Stimmgabel beim Aufsetzen des Stieles auf den Tisch deutlicher hörbar (S. 715). Der Tisch nimmt bei jeder Auf- und Abwärtsbewegung des Stieles einen bedeutenden Teil der Bewegungsenergie der Stimmgabel auf; daher kommt die schwingende Stimmgabel viel rascher in Ruhe, wenn sie mit dem Stiele auf den Tisch gesetzt wird, als wenn sie frei in der Hand gehalten wird.

Für physikalische Versuche befestigt man den Stiel der Stimmgabel auf dem oberen Deckel eines hohlen Holzkastens (Resonanzkasten) (Fig. 678). Der Deckel wird durch die Vermittlung des Stieles zum Mitschwingen veranlaßt, und auch die Luft im Resonanzkasten kommt in Schwingungen derselben Tonhöhe; dadurch wird der Ton der Stimmgabel verstärkt.

Für die Schwingungszahl der Stimmgabel ist die bewegte Masse und die elastische Kraft maßgebend. Wie bei allen Schwingungen nimmt die Schwingungsdauer mit der Größe der bewegten Masse zu und mit der Kraft ab, die das Gleichgewicht herzustellen strebt, also hier mit der elastischen Kraft an den Biegestellen. Daher wird der Ton einer Stimmgabel tiefer, wenn man die bewegte Masse der Stimmgabel, z. B. durch Anschrauben eines Laufgewichtes an eine oder

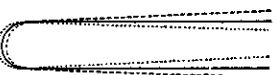


Fig. 677.
Knoten der Stimmgabel.

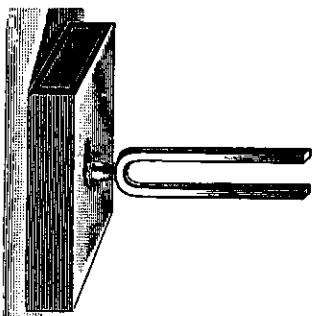


Fig. 678. Stimmgabel mit Resonanzkasten.

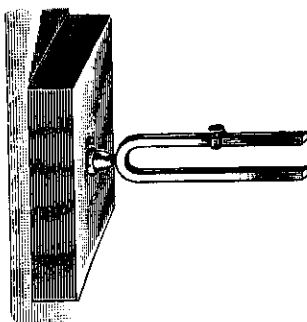


Fig. 679. Verstärkte Stimmgabel.



Fig. 680. Stimmgabel hoher Schwingungszahl.

beide Zinken, vergrößert (Fig. 679). Da die Masse des Laufgewichtes durch ihr Trägheitsmoment in bezug auf die Knotenstellen als Achsen wirkt, so wird der Ton um so mehr vertieft, je größer der Arm des Trägheitsmomentes ist, je näher also das Laufgewicht an dem freien Ende der Zinken sitzt.

Durch Dünnerstellen der freien Zinkenenden wird die bewegte Masse verringert, demnach der Ton erhöht. Felt man dagegen die Stimmgabel in der Nähe der Knotenstellen dünner, so wird hierdurch ihre Biegeelastizität verkleinert und dadurch der Ton der Stimmgabel vertieft.

Es können zwei Stimmgabeln von gleicher Tonhöhe hergestellt werden, von denen die eine lang und dick, die andere kurz und dünn ist. Die Schwingungsenergie der dickeren Stimmgabel ist aber größer, weil sie eine größere Masse hat. Daher verwendet man dort, wo man einen hohen Ton von geantogender Stärke und Dauer erzeugen will, Stimmgabeln mit großer Masse (Fig. 680).

§ 233. Tönende Platten.

Bringt man eine in der Mitte befestigte quadratische Metall- oder Glasplatte von gleichmäßiger Dicke zum Tönen, indem man nach Anleitung von Fig. 681 den Rand der Platte mit einem Geigenbogen in Schwingungen versetzt, so bilden sich auf der ganzen Platte stehende Schwingungen aus. Man kann den Schwingungszustand gut beobachten, wenn man feinen Sand auf die tönende Platte streut; denn dieser wird an den bewegten Stellen fortgeschleudert und an den ruhenden Stellen angesammelt. Es werden so die Knotenlinien sichtbar, die die Wellenhäuche voneinander trennen. Die auf den beiden Seiten einer Knotenlinie liegenden Bäuche schwingen mit entgegengesetzten Phasen. Die entstehenden Figuren heißen Chladnische Klangfiguren.¹⁾

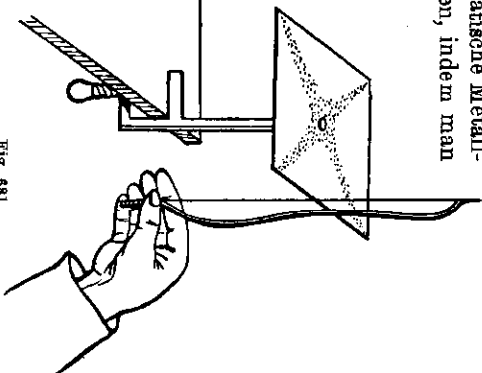


Fig. 681.

Erzeugung einer Chladnischen Klangfigur.

1) v. Fudrate § 224 S. 703.

Die Bildung bestimmter Knotenlinien kann man dadurch begünstigen, daß man die Platte während des Streichens mit dem Geigenbogen gleichzeitig an einem oder an zwei Punkten mit den Fingern der linken Hand leicht berührt. In den Figg. 681 bis 685 sind die einfachsten Klangfiguren quadratischer, in der Mitte befestigter Platten abgebildet. Jeder Klangfigur entspricht ein bestimmter Ton. Je verwickelter die Figur ist, je mehr Knotenlinien also entstehen, um so höher ist der dazu gehörige Ton. Die höheren Töne sind nicht harmonisch zum Grundtone.

Die Form der Chladnischen Klangfiguren ist anders, wenn statt der Mitte ein anderer Punkt der Platte befestigt wird.

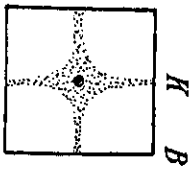


Fig. 682.

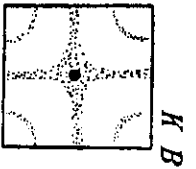
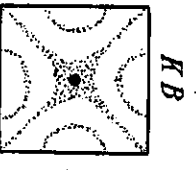
Fig. 683.
Chladnische Klangfiguren.

Fig. 681.

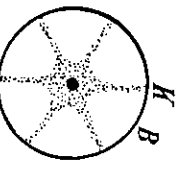


Fig. 685.

Kreisförmige Platten teilen sich meistens in eine gerade Anzahl von schwingenden Sektoren, die durch radiale Knotenlinien voneinander getrennt sind (Fig. 685). Am leichtesten entsteht hierbei die Teilung in sechs Sektoren.

Die Glocken sind gekrümmte Platten. Beim Tönen teilen sie sich ebenfalls, wie kreisförmige Platten, in Sektoren, die an der Aufhängungsstelle zusammenlaufen. Wenn man ein teilweise mit Wasser gefülltes Weinglas an Rande mit dem Geigenbogen anstreicht, so erkennt man die Bildung von Bäuchen und Knoten daran, daß das Wasser an den einzelnen Stellen der Gefäßwandung verschieden stark aufspritzt.

Die Overtöne der Platten und Glocken sind zum Grundtone im allgemeinen nicht harmonisch; die Kunst des Glockengusses besteht darin, durch Abmessen der Form und Dicke möglichst viele harmonische Overtöne zu erzielen und unharmonische zu vermeiden.

§ 234. Longitudinal schwingende Saiten.

Eine Saite kann man dadurch in Längsschwingungen versetzen, daß man sie mit einem mit Geigenharz eingeriebenen Ledertappen reibt. Die Enden der Saite werden hierbei sicher zu Knoten. Im einfachsten Falle entsteht in der Mitte der Saite ein Schwingungsbauch. Die Schwingungszeit einer longitudinal schwingenden Saite kann mit Hilfe der in § 66 entwickelten Formel aus dem Elastizitätsmodul e und der Dichte s berechnet werden (s. auch § 217).

Wenn eine Saite, longitudinal schwingend, ihren Grundton gibt, so ist die Wellenlänge λ auf der Saite doppelt so groß wie die Saitenlänge l , denn die Entfernung eines Knotens vom nächsten ist gleich der halben Wellenlänge. Hat man

daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c mit Hilfe der Formel $c = 100 \cdot \sqrt{\frac{e}{s}}$ m/sec berechnet (sie beträgt bei einem Stahlstrahle nach § 66 u. § 217 $c = 5100$ m/sec), so kann man auch die Schwingungszahl $\nu = \frac{c}{\lambda}$ berechnen, da allgemein $c = \nu \cdot \lambda$ ist (§ 212, 4). Für eine im Grundtone schwingende Saite von der Länge l m ist $\lambda = 2l$, folglich ist

$$\nu = \frac{100}{2l} \sqrt{\frac{e}{s}}.$$

Die Schwingungszahl einer longitudinal schwingenden Saite ist von ihrem Querschnitte und von ihrer Spannung fast vollständig unabhängig.

Beispiel: Eine 1 m lange Stahlsaiten gibt als longitudinalen Grundton den Ton mit der Schwingungszahl 2550. — Eine Stahlsaiten, die den Ton a' mit der Schwingungszahl 435 als Grundton geben soll, muß 5,86 m lang sein.

Wenn sich auf der Saite außer an den Enden noch in der Mitte ein Knoten bildet, so ist die Wellenlänge gleich der Saitenlänge, und der Ton ist die Oktave des Grundtones.

Die Overtöne longitudinal schwingender Saiten bilden die harmonische Tonfolge; denn die Verteilung der Knoten und Bäuche ist dieselbe, wie sie für Querwellen durch Fig. 674 dargestellt ist. Man kann aus den dort abgebildeten Querwellen die Längswellen finden (genau wie in Fig. 664 ausgeführt), indem man die Vertiefungen um 90° dreht. An den Knoten treten die größten Dichtigkeitsschwankungen, an den Bäuchen die geringsten Dichtigkeitsschwankungen auf.

§ 235. Longitudinal schwingende Stäbe.

Ein eingeklemmter, elastischer Stab kann durch Reihen in Längsschwingungen versetzt werden. Metallstäbe und Holzstäbe werden mit einem mit Geigenharz eingeriebenen Ledertappen, Glasstäbe mit einem nassen Korken gerieben. Die Klemmstelle wird stets zu einem Knoten. Ist die Mitte des Stabes eingeklemmt, so bilden sich an den freien Enden sicher Bäuche. Die Schwingungszahl kann in ähnlicher Weise berechnet werden, wie es bei den longitudinal schwingenden Saiten entwickelt worden ist. Die Overtöne entsprechen den ungeraden Zahlen der harmonischen Tonfolge.

Ein an einem Ende eingeklemmter Stab hat an der Klemmstelle einen Knoten, am freien Ende einen Bauch; seine ganze Länge ist, wenn er den Grundton gibt, gleich dem vierten Teile seiner Wellenlänge. Die Overtöne entsprechen auch hier den ungeraden Zahlen der harmonischen Tonfolge.

Soll ein eingeklemmter Stab an den Enden und in der Mitte Schwingungsbäuche haben, so muß man ihn im ersten und letzten Viertel seiner Länge eingeklemmen. Die Tonhöhe ist dann dieselbe, die ein an einem Ende eingeklemmter Stab von dem vierten Teile seiner Länge, oder die ein in der Mitte eingeklemmter Stab von der halben Länge haben würde. Ein im ersten und letzten Viertel seiner Länge eingeklemmter Stab gibt einen möglichst reinen Ton, da die an den beiden

Befestigungsstellen von beiden Seiten ausgetübten Drucke und Züge in entgegengesetzter Richtung wirken, daher also keine Spannung und Verschiebung an der Klemmstelle bewirken.

§ 236. Resonanz.

Aus dem in Fig. 631 abgebildeten Versuche mit den beiden gekoppelten Pendeln gleicher Schwingungszeit haben wir gesehen, daß ein schwingender Körper an einen anderen schwingungsfähigen Körper allmählich seine ganze Bewegungsenergie abgeben kann, und daß die Zeit, innerhalb der dieses geschieht, von der Art der Koppelung abhängt. Wir konnten durch enge Koppelung der beiden Pendel erreichen, daß schon nach wenigen Schwingungen die Gesamtenergie des ersten Pendels auf das zweite übertragen wurde. Wenn wir nun die Koppelung recht lose machen, also z. B. so, daß das den verbindenden Faden spannende Gewicht nur Bruchteile eines Grammes beträgt, so dauert es sehr lange, bis die ganze Energieübertragung beendet ist. Wir können sogar die beiden Pendel ohne sichtbare Koppelung dicht nebeneinander hängen und nun eine allmähliche Energieübertragung beobachten, die teilweise durch die am Aufhängepunkte der Decke auftretenden Verschiebungen, teilweise durch die Luftbewegung, die das erste Pendel verursacht, vermittelt wird.

Derartige Energieübertragungen treten auch bei Körpern auf, die so schnell schwingen, daß sie einen Ton geben. Hat man auf dem Monochord zwei gleiche Saiten gleich stark gespannt, so daß die Tonhöhe, also auch die Schwingungszahl beider Saiten vollkommen gleich ist, so beobachtet man, daß beim Zupfen der einen Saite auch die andere Saite in Schwingungen gerät. Die Amplitude der zweiten Saite nimmt rasch zu, während die Amplitude der ersten Saite ebenso rasch abnimmt. Dann wechselt das Spiel, die zweite Saite gibt ihre Energie wieder an die erste ab und kommt zur Ruhe. Dieses Wechselspiel kann man oft mehrmals nacheinander beobachten. Da die schwingenden Saiten gleichzeitig einen großen Teil ihrer Bewegungsenergie an die umgebende Luft abgeben, so wird die Schwingungsweite beider Saiten bald so gering, daß man die Beobachtung nicht lange verfolgen kann. Die Koppelung wird bei diesen beiden Saiten teilweise durch den Boden des Monochords, teilweise durch die zwischen ihnen vorhandene Luft bewirkt.

Bei passender Versuchsanordnung genügt für die Energieübertragung die Koppelung durch die Luft allein.

Wir stellen die beiden in Figg. 678 und 679 abgebildeten Stimmgabeln, die jetzt aber beide auf genau dieselbe Schwingungszahl abgestimmt sein müssen, in einiger Entfernung¹⁾ voneinander auf und schlagen die eine mit einem weichen Hammer kräftig an. Der von ihr ausgehende starke Ton weist uns, daß sie eine große Energiemenge an die Luft abgibt. In der Luft entstehen fortschreitende Luftwellen, also periodische Aufeinanderfolgen von

1) Gut aufeinander abgestimmte Gabeln erregen Resonanz bis in einen Abstand von mehreren Metern.

Luftverdichtungen und Luftverdünnungen. Diese kommen auch zur zweiten Stimmgabel und setzen sie in Schwingungen, deren Schwingungsweite innerhalb kurzer Zeit wegen der großen Zahl der Einzelimpulse so stark anwächst, daß sie selbst zu einem Tonereger wird. Eine an einem längeren Seidenfaden aufgehängte Glasperle, die das Ende der Stimmgabel in Ruhe gerade berührt, wird durch die Erregung der Stimmgabel fortgeschleudert und kann daher als Erkennungsmittel (Detektor) für die Resonanz dienen. Den erzeugten Ton hören wir besonders dann, wenn wir die erste Stimmgabel kurz nach dem Anschlagen durch Berührung mit dem Finger zum Schweigen bringen: die zweite Stimmgabel tönt weiter. Hat man die zweite Stimmgabel nicht allzuerst aufgestellt, so kann sich das Spiel wiederholen, indem die nun tönende zweite Stimmgabel wieder die erste zum Mittönen, zur Resonanz bringt.

Eine derartige Resonanz kann nur dann eintreten, wenn der zweite Körper dieselbe Schwingungszahl hat, wie der erste, denn nur in diesem Falle summieren sich die Einzelimpulse so, daß sie die von den ersten Impulsen hervorgerufenen Verrückungen verstärken. Weichen die beiden Stimmgabeln um eine Schwingung in der Sekunde voneinander ab, so treffen die Impulse in der zweiten Hälfte der Sekunde in genau entgegengesetzter Phase auf die zweite Stimmgabel und vernichten die Wirkung der ersten halben Sekunde vollständig. Bei größerer Verschiedenheit der Schwingungszahl tritt dieser Wechsel der Phase noch rascher ein, so daß es überhaupt zu keiner merklichen Wirkung kommt.

Die beiden resonierenden Körper brauchen nicht gleichzeitig zu sein; eine Stimmgabel kann auch eine Saite in Resonanz versetzen, wenn nur die Tonhöhe dieselbe ist.

Wenn wir eine tönende Stimmgabel vor die Öffnung eines Klavieres bringen, bei dem die Dämpfer durch Niederreten des Pedales abgehoben sind, so gerät diejenige Saite in vollkommene Resonanz, deren Schwingungszahl mit der der Stimmgabel genau übereinstimmt. Bei geringen Verschiedenheiten kann noch eine schwache Resonanz eintreten, bei größerer Verschiedenheit hört die Resonanz fast vollständig auf.

Ein Tonereger resoniert nur auf Töne seiner eigenen Höhe; diese Resonanz heißt daher **auswählende Resonanz**.

Ein Brett (die Tischplatte z. B.) kann bei enger Koppelung mit einem tönenden Körper ebenfalls in Mitschwingungen versetzt werden. Wenn man den Stiel einer Stimmgabel auf den Tisch setzt, so wird der Ton lauter, weil die Tischplatte zum Mitschwingen gezwungen und wegen der größeren schwingenden Fläche zum mehr Schallenergie an die Luft abgegeben wird (ausgestrahlt). Der Tisch hat aber keinen Eigenton. Er wird durch jeden Tonereger, der mit ihm eng gekoppelt ist, zwangsweise in Schwingungen versetzt, deren Schwingungszahl mit der Tonhöhe des Tonregers übereinstimmt. In ähnlicher Weise wirken die Holzplatte des Monochords, der Resonanzboden des Klavieres und die Wandungen der Violine. Diese Art der Resonanz heißt **allgemeine Resonanz**. Man muß sorgfältig darauf

achten, daß ein Resonanzboden keinen störenden Eigenton hat, da dieser sonst in besonders starkem Maße, stärker als alle übrigen, verstärkt werden würde.

§ 237. Tönende Luftsäulen.

Eine in einem Hohre eingeschlossene Luftsäule kann in stehende, longitudinale Schwingungen versetzt werden, wenn sie durch einen anderen schwingenden Körper erregt wird.

Bei der zuerst von Kundt¹⁾ angegebenen Versuchsanordnung (Fig. 686) wird ein Glasrohr wagrecht auf den Tisch gelegt. Das eine Ende des Rohres (in der Figur links) wird durch einen verschiebbaren Kolben luftdicht abgeschlossen, während in das offene Rohrende ein in der Mitte festgeklemmter Glasstab (oder Metallstab) mit seinem einen Ende etwas hineinragt. Auf dieses Ende des Glasstabes ist eine kleine leichte Korkscheibe aufgekittet. Bringt man nun den eingeklemmten Stab durch Reihen mit einem nassen Korke in Längsschwingungen, so werden die Enden des Stabes zu Bächen, die kleine Korkscheibe wird hin und her bewegt und erteilt der in dem Glasrohre eingeschlossenen Luftsäule in regelmäßiger Folge Impulse vom Charakter der Sinusschwingungen.

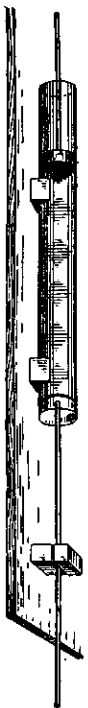


Fig. 686. Kundtsche Rohre.

Verschiebt man jetzt den Kolben am linken Ende

des Rohres, so hört man bei einer passenden Stellung, daß der von dem Glasstabe ausgehende Ton bedeutend verstärkt wird: die Luft in dem Glasrohre ist nun ebenfalls in stehende Längsschwingungen versetzt worden und ist selbst zu einer Tonquelle geworden.

Um die Art der Schwingungen der Luftsäule zu untersuchen, bringt man nach Kundt feinen Korkstaub in die Rohre. Bei Resonanz ordnet sich der Korkstaub in eigentümlich geschichteten Häufchen an, denn an den Schwingungsbäuchen wird der Korkstaub (ähnlich wie der Sand bei den Chladnischen Klangfiguren) fortbewegt, während er sich an den Knoten ansammelt. Man kann die Wellenlänge in der Luftsäule mit Hilfe der Staubfiguren abmessen und durch Vergleichung mit der Länge des geriebenen Stabes das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft und im Glasstabe bestimmen.

Wenn man die Rohre mit einem anderen Gase füllt, so ändert sich die Wellenlänge, da sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ändert; denn da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c durch die Laplacesche Gleichung $c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}}$ (§ 217) bestimmt ist, so verhalten sich bei gleichem κ die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und

1) August Kundt (1838—1894), Prof. der Physik in Bonn, veröffentlichte das beschriebene Verfahren zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Gasen und festen Körpern 1866.

dennach die Wellenlängen bei zwei verschiedenen Gasen umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Dichten der Gase $\lambda_1 : \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{\rho_1}} : \sqrt{\frac{1}{\rho_2}}$. Die Dichten sind den Molekulargewichten μ_1 und μ_2 proportional, folglich ist $\lambda_1 : \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{\mu_1}} : \sqrt{\frac{1}{\mu_2}}$. In

Worten:

Die Wellenlänge der Töne gleicher Schwingungszahl in Gasen verhalten sich bei gleichem Verhältnisse der spezifischen Wärmen umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Molekulargewichten der Gase.

Die Anregung zur Bildung stehender Längswellen bei einer Luftsäule kann durch jede periodische Bewegung erfolgen, und man kann durch Messung der Wellenlänge in Luft nach dem Kundtschen Verfahren aus der bekannten Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft nach der Formel $c = v \cdot \lambda$ (§ 212, 4) die Schwingungszahl der periodischen Bewegung ermitteln. Man kann auf diese Weise durch Staubfiguren in kleinen Röhren noch Schwingungen von wenigen mm Wellenlänge, die sehr hohen Tönen von 30000 und mehr Schwingungen entsprechen, messend verfolgen und so z. B. die Tonhöhe der Hörbarkeitsgrenze bestimmen. Zur Erzeugung solcher Töne verwendet man sehr kurze Röhren, die angeblasen werden. Die Galton¹⁾pfeife besteht aus einem solchen Röhrenchen mikrometrisch veränderlicher Länge und regerherber Anblasstellung. — Von besonderer Bedeutung ist folgende Erregung:

Wenn die Luft aus einem engen Spalte unter Druck austritt, so gerät sie kurz vor der Mündung in eigentümliche, pendelartig verlaufende Schwingungen, wie sie in Fig. 687 abgebildet sind.

Ähnliche pendelartige Schwingungen beobachtet man auch, wenn man eine kleine ruhende Flamme, z. B. die Flamme einer mit Terpentinöl gespeisten kleinen Lampe, in ruhiger Luft hrennen läßt. Der aufsteigende Rauchstrom gerät, nachdem er eine kurze Strecke geradlinig in die Höhe gestiegen ist, von selbst in Pendelschwingungen, die den in Fig. 687 abgebildeten ähnlich sind. Die Ursache dieser regelmäßigen Pendelungen ist in der Ablösung von Strömungswirbeln erkannt worden (S. 367, Fig. 434), die sich an dem engen Spalte bilden. (Das Gleichgilt, wenn ein Luft- oder Flüssigkeitsstrahl gegen eine scharfe Schneide strömt; auch hierbei treten an der Schneide Wirbel auf, die sich in regelmäßiger Folge ablösen und wieder neu bilden. Vgl. dazu das regelmäßige Flattern des Fahnenstückes im gleichmäßigen Winde, das auch durch abwechselnd rechts und links sich ablösende Luftwirbel hervorgerufen wird.)

Die Periode der Luftschwingungen hängt von der Spaltweite und von der Anströmungsgeschwindigkeit, also auch vom Drucke der austretenden Luft ab.

Wird einem in dieser Weise pendelnden Luftstrom eine Schneide (Lippe) gegenübergestellt (in Fig. 687 durch das schmale Dreieck dargestellt), so schlägt

1) Francis Galton, geb. 1832 in London, Arzt und Meteorologe.

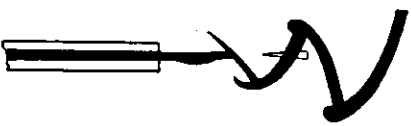


Fig. 687. Schwingender Luftstrahl.

die Luft periodisch gegen die linke und rechte Seite der Schneide und erzeugt so einen Ton (Schneidenton), dessen Höhe außer von den schon angegebenen Faktoren (Spaltöffnung und Luftdruck) von der Breite und Stellung der Schneide abhängt. Wenn wir nun die Schneide oben verlängern, so entstehen auf beiden Seiten der Schneide periodische Luftdruckschwankungen. Diese können zur Erregung von stehenden Schwingungen einer abgeschlossenen Luftsäule benutzt werden.

Lippenpfeifen. Vereinfacht man Spalt, Schneide und Luftsäule zu einem einheitlichen Apparate, so entsteht eine Lippenpfeife, wie sie in Fig. 688 im Längsschnitte abgebildet ist. Sie besteht aus der Luftkammer K mit dem Spalte S , dem die Lippe L gegenübersteht. Zwischen Spalt und Lippe liegt die Mundöffnung. An die Lippe schließt sich das Resonanzrohr R , das eigentliche Pfeifenrohr, an. Die aus dem Spalte S rhythmisch austretende Luft trifft gegen die Lippe L und erzeugt innerhalb des Rohres R stehende Längswellen der eingeschlossenen Luft, wenn die Periode der rhythmischen Bewegung der aus dem Spalte austretenden Luft mit der Schwingungszahl einer in der Luftsäule möglichen, stehenden Schwingung übereinstimmt. Eigentümlicherweise tritt nun eine Rückwirkung der in R eingeleiteten stehenden Schwingung auf die Periode der aus dem Spalte auftretenden Luftstöße ein. Wenn keine vollkommene Übereinstimmung vorhanden war, so stellt sie sich nachträglich von selbst ein. Die Pfeife spricht jedoch am leichtesten an, wenn von vornherein Übereinstimmung vorhanden ist; daher gehört zu jedem Pfeifenrohre eine günstigste Stellung von Spalt und Lippe.

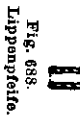


Fig. 688.
Lippenpfeife.
schieben der Lippe wird die Schwingungszahl des austretenden Luftstromes erhöht; daher kann eine Lippenpfeife, die bei breitem Spalte und weiter Mundöffnung ihren Grundton gibt, bei Verengung des Spaltes und der Mundöffnung ihre Obertöne erzeugen.

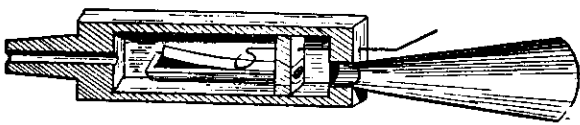


Fig. 689.
Zungenpfeife mit Schalltrichter.

Zungenpfeifen. Eine andere Art der Erregung stehender Schwingungen in einer Luftsäule wird bei den Zungenpfeifen angewandt (Fig. 689). Die aus dem Blasebalge kommende Luft tritt in die Luftkammer, kann aus dieser aber nur durch ein Rohr entweichen, das einen seitlichen Schlitz trägt. Über dem Schlitz ist eine elastische Zunge angebracht. Wenn nun die Geschwindigkeit der ausströmenden Luft zu groß wird, so wird die Zunge mitgerissen und verschließt dann die Ausströmungsöffnung. Wenn die Luft in der Luftkammer wieder zur Ruhe gekommen ist, hebt sich die Zunge wieder von der Spaltöffnung ab, es kann wieder Luft austreten, und das Spiel beginnt von neuem. (Das Spiel der Zunge bei der Zungenpfeife ist dem Spiel des Ven-

tilen bei einem hydraulischen Widder § 98 ähnlich.) Die Luft tritt in ähnlicher Weise periodisch aus der Luftkammer aus, wie sie aus der Ausströmungsöffnung einer Lochstreue austritt. Die austretende Luft erzeugt nun schon von selbst einen Ton. Dadurch, daß die Luft in ein längeres, mit Luft gefülltes, meistens konisches Rohr eintritt, wird die Luft auch in diesem Rohre in stehende Schwingungen versetzt und verstärkt so den Ton der austretenden Luft.

Infolge der eigenen Schwingungszahl der elastischen Zunge paßt sie sich lange nicht so leicht dem Eigentone des Resonanzrohres an, wie das bei einer Lippenpfeife geschieht. Will man daher den Ton einer Zungenpfeife verändern, so muß man die Schwingungszahl der Zunge dadurch verändern, daß man einen Teil der Zunge durch eine aufgedrückte Feder zum Schwingen unfähig macht, also die Länge der Zunge verändert.

Chemische Harmonika. Ein aus einer engen Spitze ausströmender Luft- oder Gasstrom hat eine gewisse Neigung, in Schwingungen zu geraten. Diese Neigung behält ein Wasserstoff- oder Leuchtgasstrom auch dann, wenn man ihn an der Öffnung entzündet, so daß eine solche Flamme entsteht. Führt man eine solche Flamme von unten in eine etwa 2—3 cm weite, lotrecht aufgestellte Glasröhre von etwa 1 m Länge ein, so bringt die Flamme bei passender geeigneter Höhe die Luft in der Glasröhre zum Tönen. Die Tonhöhe hängt nur von der Länge der Luftsäule ab. Die Flamme selbst gerät bei diesem Versuche in Schwingungen und zeigt, im Drehspiegel betrachtet, genau dieselbe Schwingungsform (Fig. 695) wie die Flammen bei der im nächsten Paragraphen beschriebenen Königischen¹⁾ Flammenkapsel.

Der Versuch führt vielfach den Namen „chemische Harmonika“, weil diese Art der Tonerzeugung zuerst von Higgins (1777) bei chemischen Versuchen mit Wasserstoffgas beobachtet worden ist. Der Versuch gelingt aber genau so gut mit einer kleinen Leuchtgasflamme, besonders dann, wenn man zwischen dem Gasblase und der Ausströmungsöffnung des Gases ein kleines Gasreservoir, etwa eine 1 Liter enthaltende Flasche einschaltet, weil die unmittelbare Nähe des Gasblases die Entstehung der Schwingungen verhindert.

Empfindliche Flammen. Läßt man Leuchtgas aus einer engen Öffnung strömen, und steigert man allmählich den Druck des ausströmenden Gases, so fängt die Flamme bei einem gewissen hohen Drucke an zu rauschen. Die Ursache hierfür liegt in der starken Reibung des Gases an den Rändern der Ausströmungsöffnung. Vermindert man dann den Druck des ausströmenden Gases so weit, daß das Rauschen eben aufhört, so zeigt die nun ruhig brennende Flamme ein eigentümliches Verhalten gegen hohe Töne. Sie zuckt sofort zusammen, wenn man in nicht allzu großer Entfernung einen hohen Ton hervorbringt, auch wenn dessen Höhe über der Hörbarkeitsgrenze liegt. Besonders empfindlich (sensitive) ist sie gegen das Klappern mit Glas, das Klirren mit einem Schlüsselbunde, das Knittern und Zerreiben von Papier oder das Schnalzen mit der Zunge.

1) Rud. König (geb. 1832 in Königsberg, † 1904), seit 1852 in Paris, Mechaniker, förderte die Akustik durch die Herstellung geeigneter Apparate und durch eigene wissenschaftliche Untersuchungen. Seine Werkstätten werden heute von Carpentier fortgeführt.

§ 238. Die Vorgänge in einer Pfeife.

Offene Pfeife. Bei einer an beiden Seiten offenen Pfeife bilden sich an den beiden Öffnungen sicher Wellenbäuche. Im einfachsten Schwingungsstande entsteht in der Mitte ein Knoten. Die Bäuche sind die Stellen größter Bewegung und geringster Druckschwankungen, die Knoten sind die Stellen geringster Bewegung und größter Druckschwankungen. Zur Untersuchung der Bewegungsvorgänge in einer Pfeife läßt man nach Fig. 690 in eine tönende Pfeife mit gläserner Wandung ein mit dünnem Papier überzogenes, leichtes Röhmchen, auf das man einige Sandkörner gestreut hat, an einem Faden in die Röhre hinab. Dort, wo die Luft in Ruhe ist, bleibt auch der Sand in Ruhe, während er dort lebhaft auf und ab tanzt, wo die Luft in Bewegung ist. Gibt die Pfeife ihren Grundton, so findet man die größte Ruhe in der Mitte der Pfeife und die stärkste Bewegung an ihren Öffnungen.

Die Druckverhältnisse werden (nach Kundt) mit Hilfe eines kleinen, in Fig. 691 abgebildeten mit Wasser gefüllten Manometers untersucht, dessen beide Öffnungen mit kleinen, aus dünnem Papier oder dünnem Gummi hergestellten Ventilen versehen sind, von denen sich das Ventil links nach außen öffnet, also sich bei äußeren Luftverdünnungen öffnet, bei äußeren Luftverdichtungen schließt, während sich das Ventil rechts nach innen öffnet, also auf äußere Luftverdichtungen anspricht. Senkt man das Manometer so, wie in Fig. 690 das leichte Röhmchen, mittels eines Fadens in die tönende Pfeife, so bleibt der Wasserstand des Manometers an den Bäuchen, also z. B. an den Enden der Pfeife, in beiden Schenkeln gleich; dagegen zeigt das Manometer in der Mitte der Pfeife, an dem Knoten, eine Druckdifferenz von einigen Zentimetern an. (Es sind schon Druckunterschiede von 30 cm Wassersäule beobachtet worden.) Man beachtet, daß die Druckschwankungen am Knoten ihren höchsten Wert haben.

Mit Erfolg wendet man zum Nachweise rascher Druckschwankungen in der Luft die Königsche Flammenkapsel an, die in Fig. 692 von außen, in Fig. 693 im Durchschnitte abgebildet ist. Aus Fig. 693 erkennt man, daß die Kapsel aus zwei voneinander getrennten Teilen besteht; die Trennung der beiden Teile wird durch eine dünne Membran aus Papier oder Gummi bewirkt. Wenn in das untere Rohr auf der rechten Seite Leuchtgas in die Kapsel tritt, so brennt es an der Brenneröffnung rechts oben mit ruhiger Flamme, solange die Membran in Ruhe ist. Wenn aber die Membran Schwingungen ausführt, so entstehen auch periodische Druckschwankungen im rechten Gasraum, infolge deren die Flamme zuckende Bewegungen in demselben Rhythmus ausführt. Beobachtet man die Flamme im rotierenden Spiegel (Fig. 694), so zieht sich das Flammenbild zu einem leuchtenden Flammenbände auseinander, an dem man die Zuckungen der Flamme erkennen



Fig. 691.

Kundtsches Manometer.

§ 239. Die Vorgänge in einer Pfeife

kann. Fig. 695 zeigt das Flammenbild im Drehspiegel, wenn die Membran in der Flammenkapsel von einfachen Schwingungen getroffen wird, die durch einen Schalltrichter (Fig. 693) aufgefangen werden. Man kann solche Flammenkapseln auch

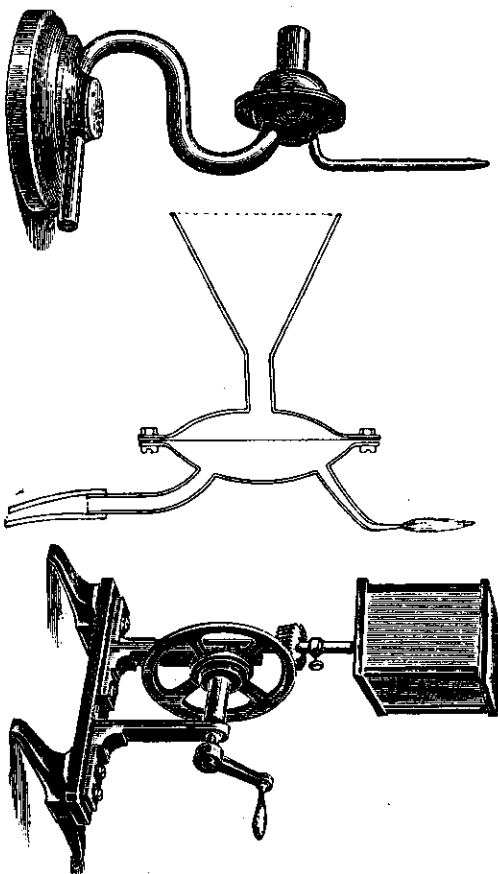


Fig. 692.

Königsche Flammenkapsel.

Fig. 693.

Fig. 694.

Drehspiegel.

unmittelbar vor einigen Öffnungen in der einen Wand einer tönenden Pfeife anbringen (Fig. 696) und kann so gleichzeitig an allen diesen Stellen die etwa eintretenden Druckschwankungen beobachten.

Nach Rubens können die Druckverhältnisse und die Lage der Knoten und Bäuche in einer Luftsäule, die stehende Schwingungen ausführt, gut mit dem in Fig. 697 abgebildeten Wellenrohre vorgeführt werden. Dieses ist ein dünnwandiges Eisenrohr, das auf der Oberseite mit einer Reihe von vielen kleinen Löchern versehen und an dem einen Ende mit einer dünnen Membran, am anderen Ende mit einem Stopfen verschlossen ist. Wird Leuchtgas in das Rohr geleitet, so strömt dieses aus den kleinen Öffnungen aus und kann hier entzündet werden. So entstehen kleine Flämmchen von gleicher Höhe. Wenn aber das Wellenrohr mit seinem Ende durch die Membran geschlossen Ende vor den Resonanzkasten einer laut tönenden Singsgabel gebracht wird, oder wenn man vor diesem



Fig. 695. Flammenbild der schwingenden Flamme im Drehspiegel. Grimsehl, Physik. I. Große Ausgabe. 6. Aufl.

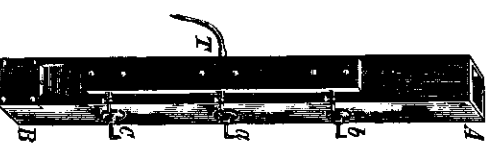


Fig. 696. Flammenkapseln in einer Pfeife.

Ende eine Pfeife zum Tönen bringt, so brennen die Flämmchen verschieden hoch und erzeugen das in der Figur dargestellte Bild. Jedes einzelne Flämmchen führt hierbei dieselben zuckenden Bewegungen aus wie bei der Königschen Flammenkapsel. Die stark zuckenden, also hoch brennenden Flämmchen entstehen an den Stellen größter Druckschwankungen, also an den Knoten der tönenden Röhre.

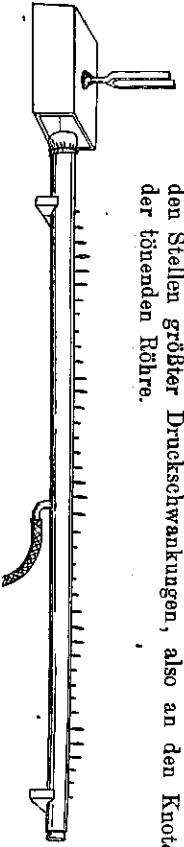


Fig. 697. Wellenrohr nach Ruhben.

Die Druck- und Bewegungsverhältnisse im Innern einer tönenden Pfeife sind mit den beschriebenen Hilfsmitteln oft und sorgfältig untersucht worden. Hierbei hat sich ergeben:

Wenn eine offene Pfeife ihren Grundton gibt, so entstehen in der Mitte als dem Orte geringster Bewegung und größter Dichtkeitschwankungen ein Knoten, an den Enden als Gebieten größter Bewegung und geringster Dichtkeitschwankungen Bäuche.

In Fig. 698 sind die Zustände im Innern einer offenen, ihren Grundton gebenden Pfeife in vier, $\frac{1}{4}$ Periode voneinander abstehenden Phasen dargestellt. In der ersten Phase herrscht überall dieselbe Dichte, aber die Luft bewegt sich von den Enden nach der Mitte hin und erzeugt so die durch das

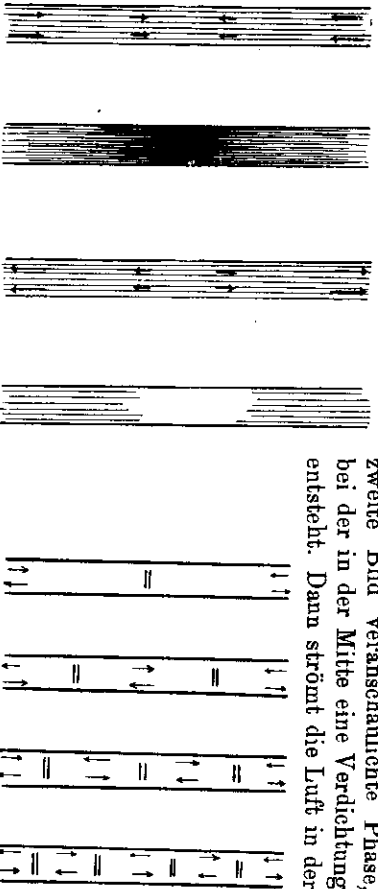


Fig. 698.

Schwingungszustände im Innern einer offenen Pfeife.

Fig. 699.

durch das dritte Bild dargestellten Weise wieder von der Mitte fort, verharret aber nicht in diesem Zustande gleichmäßiger Dichterverteilung; sondern bewegt sich darüber hinaus und erzeugt so die vierte Phase, bei der in der Mitte eine Verdünnung der Luft entsteht. Diese Aufeinanderfolge der Phasen wiederholt sich dann in stets derselben Weise.

Eine Pfeife kann auch Obertöne geben, indem sich hierbei die Luftsäule ähnlich in Knoten und Bäuche teilt, wie sich eine schwingende Saite

bei Querwellen in Knoten und Bäuche teilt. In Fig. 699 ist die Art der Teilung in einer offenen Pfeife dargestellt, wenn sie ihre vier ersten Obertöne hervorbringt. Die wagerechten Doppelpfeile deuten die Knoten, die Pfeile die Bäuche an.

Der Grundton und die Obertöne einer offenen Pfeife sind die Töne der harmonischen Tonfolge.

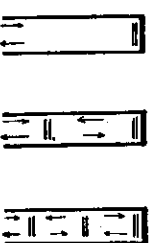


Fig. 700. Schwingungszustände im Innern einer geschlossenen Pfeife.

Gedackte Pfeife. Bei einer an einem Ende geschlossenen Pfeife entsteht am geschlossenen Ende stets ein Knoten, während sich an der Mündöffnung ein Bauch bildet. Die Lage der Knoten und Bäuche bei der gedackten Pfeife ist in der Fig. 700 dargestellt. Das erste Bild zeigt die Verhältnisse beim Ertonen des Grundtones; die beiden anderen deuten die Vorgänge beim Ertonen des ersten und zweiten Obertones an.

Der Grundton einer gedackten Pfeife ist derselbe wie der Grundton einer offenen Pfeife von doppelter Länge. Der Grundton und die Obertöne einer gedackten Pfeife gehören den ungeraden Tönen der harmonischen Tonreihe an.

Die Schwingungszahl ν eines Tones, die Wellenlänge λ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c hängen durch die Formel $\nu = \frac{c}{\lambda}$ (§ 212, 4) miteinander zusammen. Die Fort-

pflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft beträgt bei $0^\circ \text{C } c = 331 \text{ m/sec}$ (§ 217). Wenn eine offene Pfeife ihren Grundton gibt, so ist die Wellenlänge λ gleich der doppelten Pfeifenlänge, also ist die Schwingungszahl einer Pfeife der Länge der Pfeife umgekehrt proportional. Daraus folgt, daß man den Ton einer Pfeife durch Verlängerung der Pfeife vertiefen, durch Verkürzung der Pfeife erheben kann. Man kann also eine Pfeife auf verschiedene Tonhöhen abstimmen. Wie das bei einer offenen Pfeife geschieht, geht aus Fig. 701 hervor. Eine gedackte Pfeife kann man durch einen hineingeschobenen Stempel nach Fig. 702 auf verschiedene Tonhöhen abstimmen.

Man kann ferner den Ton einer offenen Pfeife dadurch vertiefen, daß man die obere Öffnung der Pfeife teilweise bedeckt. Hier- von macht man z. B. beim Abstimmen der Orgelpfeifen vielfach Gebrauch. Bei einem Waldhorne wird durch Hineinstecken der Verstärkerfaust in die Schallöffnung der Ton innerhalb gewisser Grenzen abgestimmt.



Fig. 701.

Verstärkerfaust in die Schallöffnung der Ton innerhalb gewisser Grenzen abgestimmt.



Fig. 702.

Verstärkerfaust in die Schallöffnung der Ton innerhalb gewisser Grenzen abgestimmt.

Tönende Luftsäulen werden bei vielen Musikinstrumenten verwendet: Die Flöte ist eine offene Lippenpfeife, deren Länge durch Öffnen und Schließen verschiedener Seitenöffnungen verändert wird. Die Trompete ist eine Zungenpfeife, bei der die vibrierenden Lippen des Bläasers den Ton verursachen; die Abstimmung auf einzelne Töne geschieht durch Klappen, durch welche einzelne Rohrwindungen ein- bzw. ausgeschaltet werden, die Rohrlänge also verändert wird. Bei dem Fagott ist eine vibrierende dünne Holz- oder Rohrplatte als Zunge vorhanden, und

die Abstimmung der Rohrklänge geschieht durch Öffnen seitlicher Löcher. Beim Waldhorn und bei der Fanfare dienen die Lippen des Bläasers als Zunge; das Waldhorn (und die Fanfare) hat eine unveränderliche Lage; die verschiedenen hohen Töne kommen dadurch zustande, daß die Luftsäule im Rohre entweder als Grundton oder in einem seiner Obertöne schwingt. Daher können diese Instrumente nur die der harmonischen Tonreihe angehörenden Töne erzeugen.

Auch das menschliche Sprachorgan (§ 244) ist im wesentlichen eine Zungenlippe.

§ 239. Klangfarbe.

Die Töne zweier verschiedener Tonreger sind auch dann voneinander verschieden, wenn beide Töne dieselbe Höhe und Stärke haben. Dieser Unterschied wird durch die Wörter Klang oder Klangfarbe gekennzeichnet. Sogar derselbe Tonreger kann Töne verschiedener Klangfarbe erzeugen, wenn die Erregung auf verschiedene Weise vorgenommen wird. Zupft man die Saite auf dem Monochord einmal in der Mitte, ein andermal in der Nähe eines Endes, so klingt der Ton im zweiten Falle heller als im ersten Falle.

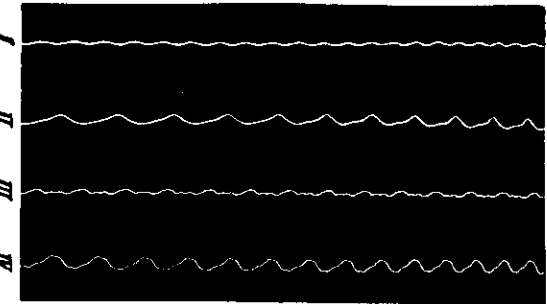


Fig. 703. Schwingungsfiguren, Obertöne zeigend.

Untersuchen wir die tönende Saite mit Hilfe der in Fig. 662 abgebildeten Versuchsanordnung, so erhalten wir die in Fig. 703 abgebildeten Schwingungsfiguren. Die erste Kurve (I) entsteht beim Zupfen der Saite in der Mitte, bei (II) wurde in der Nähe des ersten Drittels gezupft, bei III und IV lag die Zupfstelle dem einen Ende der Saite noch näher. Wir erkennen, daß der Klang von den Formen der Schwingungsfiguren abhängt. Der Ton klingt um so heller, je verwickelter die Schwingungsfigur ist.

Wir wissen aus Fig. 658 und Fig. 659, daß die verwickelten Schwingungsfiguren durch Superposition einzelner Sinusschwingungen entstehen (§ 219). Wir wissen ferner, daß eine Saite außer ihrem Grundton die harmonische Tonfolge bestimmten Obertöne zu geben vermag. Hieraus können wir folgern, daß der Klang eines Tones dadurch bedingt ist, daß der Tonreger außer seinem Grundtone gleichzeitig Obertöne erzeugt (Helmholtzsche Theorie der Klangfarbe).

Die Untersuchung des Klanges auf Grund der ihm zugrunde liegenden Schwingungsform kann auch mit Hilfe der Königlichen Flammenkapsel erfolgen. Das im Dreispiegel beobachtete Flammenband zeigt das Bild von Fig. 704, wenn der Grundton und der erste Oberton in dem die Membran der Flammenkapsel treffenden Klänge enthalten sind. Wenn außerdem noch die Quinte der Oktave ein Bestandteil des Klanges ist, so entsteht das in Fig. 705 abgebildete Flammenbild.

Auch der Charakter der verschiedenen Vokale unserer menschlichen Stimme ist nach Helmholtz durch das Mischwingen eines oder mehrerer Obertöne bedingt.



Fig. 704. Flammenbild im Dreispiegel, den ersten Oberton zeigend.

Zur Analyse eines Klanges, d. h. zur Untersuchung, welche Teiltöne in einem Klange vorhanden sind (S. 690), verwendet man nach Helmholtz Resonatoren. Das sind kugelförmige mit Luft gefüllte Gefäße von der in Fig. 706 abgebildeten Art. Es gibt auch zylindrische und kegelförmige Resonatoren. Die Resonatoren werden mit der engen Öffnung *b* in das Ohr gesteckt; sie verstärken den Ton, auf den sie abgestimmt sind. So hört man aus einem Tongemische, also auch aus einem Klange den durch den Resonator verstärkten Ton heraus, unter der Voraussetzung, daß er überhaupt in dem Klange vorhanden ist. Kugelförmige Resonatoren sind im Gegensatz zu zylindrischen oder kegelförmigen so gut wie frei von eigenen Obertönen (die möglichen Obertönegehören nicht der harmonischen Reihe an); sie verstärken daher nur einen Ton, den Grundton, durch Resonanz.



Fig. 706. Flammenbild im Dreispiegel, mehrere Obertöne ansetzend.

Im Phonographen (Edison) setzen die von einem Tonreger, also auch von der menschlichen Stimme, ausgehenden Luftschwingungen eine dünne Membran in Schwingungen. In der Mitte der Membran ist ein harter Stift befestigt, der gegen eine sich drehende Wachswalze, oder bei dem sog. Grammophon eine Hartgummi-scheibe, drückt. Beim Schwingen der Membran gräbt der Stift eine Furche in die Wachswalze ein, die an den verschiedenen Stellen je nach der Schwingungswerte der Schwingungen verschieden tief ist. So entsteht eine feste Reproduktion der Schwingungsform des Klanges. Dreht man dann die Wachswalze wieder an dem Stifte vorbei, so setzt sie den Stift, also auch die Membran, in Schwingungen derselben Art, wie die waren, die ursprünglich die Furche erzeugt haben. Es entstehen daher Klänge von derselben Art, wie die ursprünglich gegen den Phonographen gerichteten Klänge um so vollkommener und weniger verzerrt, je freier die aufnehmende Membran mit der Schreibvorrichtung von Eigenschwingungen ist.

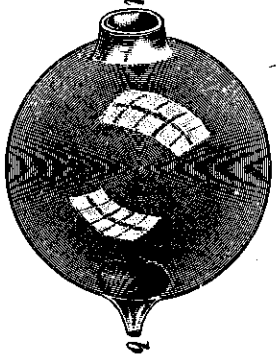


Fig. 706. Helmholtz'scher Resonator.

§ 240. Ausbreitung des Schalles.

Da der Schall aus einem Systeme von Wellen besteht, so breitet er sich in der Luft in derselben Weise aus, wie es bei Wasserwellen in §§ 204–209 dargestellt worden ist, mit dem Unterschiede jedoch, daß die fortschreitenden Wellen Längswellen sind, und daß die Ausbreitung im Raume erfolgt, daß also statt der Kreiswellensysteme Kugelwellensysteme entstehen. Hieraus folgt dann, daß die Intensität der sich ausbreitenden Wellen mit der Entfernung rascher abnimmt, als es bei Wasserwellen der Fall ist. Während bei den ebenen Wasserwellen die in Bewegung gesetzte Masse der Entfernung vom Wellenzentrum proportional ist, ist bei den räumlichen Luftwellen die in Bewegung gesetzte Masse dem Quadrate der Entfernung proportional.

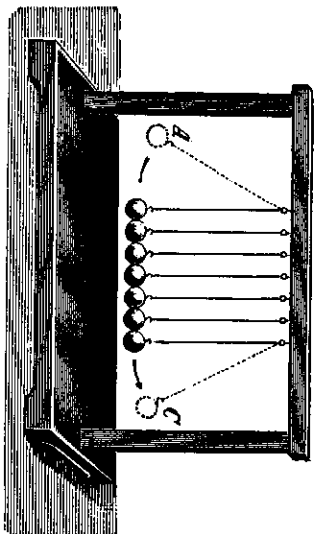


Fig. 707. Martialischeser Stoßapparat.

Hieraus folgt theoretisch, daß die Intensität des Schalles, d. h. die Energiemenge, die eine gewisse Luftmasse bei der Schallausbreitung erhält, dem Quadrate der Entfernung von der Schallquelle umgekehrt proportional ist. Trotz dieser scheinbar so einfachen Beziehung ist eine experimentelle Messung der Schallstärken bisher noch nicht in einwandfreier Weise möglich gewesen.

Daß die Ausbreitung und Fortpflanzung des Schalles normalerweise durch die Luft vor sich geht, folgt daraus, daß eine unter dem leer gepumpten Rezipienten einer Luftpumpe stehende Glocke durch Anschlagen des Klöppels wohl in Erschütterung versetzt werden kann, daß sie aber trotzdem nicht tönt. Man hat bei diesem Versuche darauf zu achten, daß die Erschütterungen nicht durch feste Körper auf die Außenwandungen des Rezipienten übertragen werden; daher muß man die Glocke auf eine weiche Unterlage stellen oder an elastischen Fäden (z. B. Wollfäden oder Gummitfäden) aufhängen.

Bei der Fortpflanzung des Schalles in Schallröhren findet nur eine geringe Verminderung der Schallintensität statt, weil sich die Energie der tönenden Luftmassen nicht allseitig ausbreiten kann; die Energieübertragung erfolgt ähnlich wie die Übertragung der Energie des Stoßes in einer Reihe von elastischen Kugeln (Fig. 707). Aus demselben Grunde erfolgt die Schallübertragung in einem ausgespannten Drahte oder Fäden (Fadentelephon) auf weitere Entfernung als durch die Luft. Legt man eine tickende Taschenuhr auf den Tisch, so hört man, wenn man auch das Ohr auf den Tisch legt, den Ton der tickenden Uhr noch in größerer Entfernung als in der freien Luft. Der Grund dafür ist der, daß die Energieübertragung auf dem Tische nur längs einer Fläche, also mit einer Intensität erfolgt, die der linearen Ent-

fernung umgekehrt proportional ist, während die Ausbreitung in der Luft räumlich, also umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung erfolgt.

Die flüssigen Körper sind zur Schallübertragung ebenfalls geeignet. In Wasser beträgt die Schallgeschwindigkeit nach den von Colladon und Sturm (1827) am Genfer See angeführten Beobachtungen 1435 m/sec.

Dieses Ergebnis können wir benutzen, um mit Hilfe der in § 217 abgeleiteten

Formel für die Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta V} \cdot s}$ die Kompressibilität $\frac{\Delta V}{V \cdot p}$

für $p = 1$ des Wassers zu berechnen. Es ergibt sich $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{s \cdot g}$. Für den Druck von einer Atmosphäre wird $\Delta p = 1000 \cdot 981 \text{ dyn/cm}^2$. Wenn wir daher noch $c = 143500 \text{ cm/sec}$ und $s = 1$ setzen, so wird

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1000 \cdot 981}{1 \cdot 143500^2} = 0,0000476 \approx \frac{1}{21000} \quad (\text{§ 87, S. 266}).$$

§ 241. Reflexion und Brechung des Schalles.

Die Reflexion des Schalles erfolgt nach demselben Gesetze, wie sie in § 209 für Wasserwellen dargestellt worden ist. An einer ebenen Wand wird der Schall so reflektiert, als ob die reflektierten Schallwellen von einer Tonquelle herrührten, die ebenso weit hinter der reflektierenden Wand liegt, wie die wirkliche Tonquelle vor der Wand liegt (akustisches Bild der Tonquelle). Der reflektierte Ton wird nur dann getrennt vom ursprünglichen Tone wahrgenommen (Echo), wenn die Tonquelle genügend weit von der Wand entfernt ist, damit zwischen dem Auftreffen der unmittelbaren und der reflektierten Schallwellen an unser Ohr genügend lange Zeit vergeht. Wir können in einer Sekunde etwa 10 Schallwahrnehmungen getrennt auffassen (s. dazu S. 737). Daher muß die Tonquelle (bei 17° C) von ihrem akustischen Bilde mindestens $\frac{340}{10} = 34 \text{ m}$, also von der reflektierenden Wand mindestens 17 m entfernt sein, wenn wir das Echo getrennt vom unmittelbaren Tone hören sollen.

Bei geringerer Entfernung hören wir die reflektierten Schallwellen nur als Verlängerung des ursprünglichen Tones (Nachhall). In geschlossenen Räumen dient der Nachhall zur Verstärkung der Tonerfüllung, wenn er so rasch erfolgt, daß er sich mit dem unmittelbaren Tone vermischt. Wenn dagegen der Nachhall erst so spät an unser Ohr gelangt, daß er sich mit einem späteren Tone vermischt, so macht er die Tonerfüllung undeutlich, verschwommen. (Störender Nachhall in großen Kirchen.)

Wenn sich eine Tonquelle im Brennpunkte eines großen sphärischen Hohlspiegels befindet, so verlassen die reflektierten Schallwellen den Hohlspiegel in einer ebenen Frontwelle (Fig. 649). Sie breiten sich daher nicht allseitig aus und können aus diesem Grunde auf größere Entfernung geradlinig übertragen werden. (Flüstergewölbe. Hörrohr. Sprachrohr.)

Beim Übergange der Schallwellen von einem Mittel in ein anderes tritt eine Richtungsveränderung der Schallstrahlen (eine Brechung) in ähnlicher Weise ein, wie wir es später beim Lichte eingehend behandeln werden. Es

ist gelungen, große, mit Kohlendioxyd gefüllte Hohlinsen aus dünnem Papier oder dünner Gummimembran herzustellen, durch die die Schallstrahlen in ähnlicher Weise vereinigt werden, wie die Lichtstrahlen durch eine konvexe Glaslinse (Sammellinse) konvergent gemacht werden.

Brechungen des Schalles durch verschieden warme Luftschichten sind die Ursache der häufig beobachteten anomalen Ausbreitung eines Schalles. So kann es vorkommen, daß von einer Stelle aus der Knall eines von einem liegenden Schützen abgefeuerten Gewehres anomalweise gar nicht, oder auch (selten) mehrfach gehört wird. Die letzte Beobachtung ist das akustische Gegenstück zum doppelten Bilde einer Luftspiegelung (s. diese).

§ 242. Interferenz der Schallwellen.

Die durch Überlagerung (Superposition) zweier Wellensysteme erzeugten Interferenzen können wie bei den Wasserwellen (Fig. 642 u. 643) auch bei Schallwellen auftreten. Sie werden hörbar, wenn die Schwingungszahlen der sie erzeugenden Töne entweder übereinstimmen oder nur wenig voneinander abweichen.

Die Bedingungen für das Entstehen zweier synchrone¹⁾ Wellensysteme sind für Luftwellen beispielsweise dadurch erfüllt, daß eine Stimmgabel frei in der Luft schwingt. Es gehen dann von beiden Zinken zwei gleiche Wellensysteme aus und geraten in Interferenz. Die größte Schwingungswelle der durch Superposition entstehenden Gesamtwelle bildet sich auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke der beiden Zinken aus. Zwischen diesen Punkten größerer Schwingungswelle entstehen zwei Hyperbeläste kleinerer Schwingungswelle.

Das Vorhandensein dieser Verhältnisse kann man mit dem Ohre wahrnehmen, wenn man um eine schwingende Stimmgabel herumgeht, oder wenn man die tönende Stimmgabel vor dem Ohre dreht. Man hört bei einer vollständigen Umdrehung der Stimmgabel ein viermaliges Wachsen und Abnehmen der Tonstärke. Der Ton erscheint am lautesten auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke der Zinken und erreicht ein zweites Maximum in der Geraden, die durch die beiden Zinken hindurchgeht. Dazwischen finden sich vier Richtungen geringster Tonstärke.

In Fig. 703 bedeuten die gestrichelten Rechtecke die beiden Zinkenenden im Grundriss; die beiden ausgezogenen Geraden sind die Richtungen größter Tonstärke, die gestrichelte Hyperbel (§ 206) gibt die Lage der Tonminima an. Die Form der Hyperbel hängt von der Entfernung der Gabelzinken und der Wellenlänge des Tones ab.

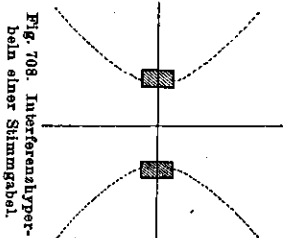


Fig. 703. Interferenz einer Stimmgabel.

1) Aus (griech.) *syn* = zusammen und *chronos* = Zeit; synchron wird im Sprachgebrauche der Physik für zwei Vorgänge gebraucht, deren einzelne Zustände gleichzeitig eintreten.

Stellt man zwei Stimmgabeln von gleicher Schwingungszahl nebeneinander auf, so treten außer den soeben betrachteten Tonstärkeschwankungen, die durch die beiden Zinken jeder einzelnen Stimmgabel verursacht werden, noch die Schwankungen auf, die von beiden Stimmgabeln zugleich herrühren. Man erhält auch hier wieder das Maximum auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke beider Stimmgabeln, denen sich seitlich zwei Gebiete minimaler Tonstärke von hyperbolischer Form anlagern. Bei größerer Entfernung der Stimmgabeln voneinander kann es zur Ausbildung mehrerer Hyperbeln maximaler und minimaler Tonstärken kommen.

Wenn die beiden Stimmgabeln einen geringen Unterschied der Schwingungszahlen haben, so wandern die Hyperbeln gleichsam schwingend um die Stimmgabeln herum, indem sie sich von der Stimmgabel größerer Schwingungszahl entfernen und der Stimmgabel geringerer Schwingungszahl nähern. Befindet sich der Beobachter in dem von den Hyperbeln durchmessenen Raume, so hört er, ohne seinen Platz zu verändern, die Tonstärkeschwankungen an einem gleichmäßigen An- und Abschwellen des Tones. Die so erzeugten Tonstärkeschwankungen werden Schwebungen (§ 220, 3.) genannt. Die Anzahl der Schwebungen ist gleich dem Unterschiede der Schwingungszahlen der beiden Stimmgabeln.

Ein lehrreicher Versuch zum Nachweise der Interferenz der Schallwellen, der auch dazu benutzt werden kann, die Wellenlänge eines Tones zu bestimmen, ist der folgende, zuerst von Quincke¹⁾ angegebene Versuch (Fig. 709): Das Rohr *T* gabelt sich in zwei Röhre, die bei *A* und *B* umgehogen sind und sich dann wieder zu dem Rohre *O* vereinigen; der eine Schenkel des Doppelrohres läßt sich posannenerartig auseinanderziehen. Wenn vor *T* eine Tonquelle angebracht wird, so treten die Schallwellen, nachdem sie sich zuerst in die beiden Schenkel des Doppelrohres verteilt und dann bei *O* vereinigt haben, hier wieder aus. Sind die Weglängen in den beiden Schenkeln gleich, so treten die beiden Teile der Schallwellen auch in *O* wieder mit gleicher Phase zusammen und verstärken sich zu annähernd der ursprünglichen Tonstärke. Zieht man aber den einen Schenkel um die Strecke *d* aus, verlängert man also die eine Weglänge um die Strecke *d*, so treten die beiden Teilwellen mit einem Phasennunterschiede in *O* zusammen. Beträgt die Wegdifferenz *2d* ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, so vernichten sich die beiden Teilwellen; man hört im Rohre *O* nichts, während dann, wenn die Wegdifferenz ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, ein Maximum der Tonstärke wahrnehmbar ist.

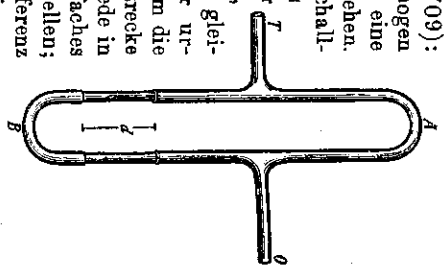


Fig. 709. Interferenzrohr nach G. Quincke.

Wenn zwei Tonquellen von annähernd, aber nicht genau gleicher Schwingungszahl einander so nahe sind, daß es nicht zur Bildung von Interferenzhyperbeln kommen kann, so treten auch Schwebungen auf, die wir uns nach Fig. 710 folgendermaßen erklären können: Es mögen fortschreitende Luftwellen von links kommen und sich nach rechts bewegen. Die Luftwellen

1) Georg Quincke (geb. 1834), hie 1908 Prof. d. Physik in Heidelberg.

mügen in zwei Wellensystemen gehören, von denen das eine die Schwingungszahl n (in der Figur punktiert gezeichnet, 9 Wellen), das andere die Schwingungszahl $n - 1$ (in der Figur gestrichelt gezeichnet, 8 Wellen) hat. Beim Fortschreiten überlagern sich die beiden Wellensysteme, und so entsteht das durch die ausgezogene Linie dargestellte Schwingungsbild. Wir erkennen, daß

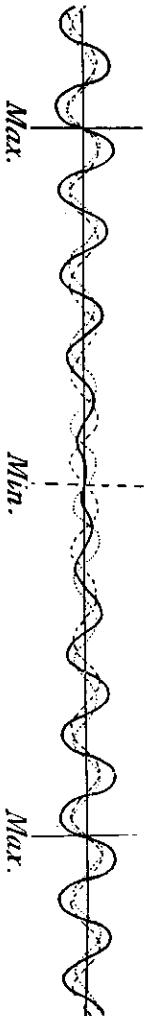


Fig. 710. Entstehung der Schwebungen zweier interferierender Töne.

nach je $4\frac{1}{2}$ bzw. 4 Schwingungen ein größter Wert der Schwingungsweite mit einem kleinsten wechselt. Diese Maxima und Minima schreiten nun ebenfalls von links nach rechts fort. Wird das Ohr von dem zusammengesetzten Wellensysteme getroffen, so hört es in jeder Sekunde ein Anschwellen und ein Ab-schwellen des Tones.

Beträgt die Schwingungszahl des einen Wellensystemes m , die des anderen n , so beträgt die Anzahl der Schwebungen in der Sekunde $m - n$.

Das Auftreten von Schwebungen ist ein sicherer Beweis dafür, daß zwei Töne zwar annähernd, aber nicht genau gleiche Tonhöhe haben. Beim Stimmen eines Musikinstrumentes macht man von dem Auftreten und Fortfallen der Schwebungen praktisch Gebrauch. (Auch beim Einstimmen der Sirene § 228.)

Die Dissonanz zweier Töne wird nach Helmholtz auf die Wirkung der Schwebungen zurückgeführt, welche wie jeder intermittierende¹⁾ Reiz, z. B. Flimmern von Licht, Kratzen u. dgl., eine unangenehme Empfindung hervorruft. Das Gefühl der Dissonanz zeigt sich nicht, wenn die Schwebungen so langsam sind, daß sie noch als einzelne getrennte Stöße wahrgenommen werden, oder wenn sie eine gewisse Häufigkeit überschreiten. Wie dies auch bei schnell intermittierendem Lichte, z. B. einer mit Wechselstrom genügender Frequenz betriebenen Bogen- oder Glühlampe, der Fall ist, hört die den Nerv ermüdende Reizwirkung auf, und es tritt eine Verschmelzung der Töne zu einem konsonanten Tongemische auf. Auch die Schwebungen der mannigfachen Obertöne geben zum Eintreten von Dissonanz bei dem Zusammenwirken zweier oder mehrerer Klänge Veranlassung. Ebenso können die im Intervalle immer näher zusammenrückenden hohen harmonischen Obertöne oder unharmonische Obertöne bereits einem einzelnen Klange dissonanten Charakter geben. Glocken können starke unharmonische Obertöne zeigen (§. 712).

Zwei einfache Töne können, besonders wenn sie kräftig auf einen Körper, sei es eine Luftmasse oder eine Membran, gemeinsam einwirken, weitere Töne hervorruft, die man Kombinationstöne nennt. Der stärkste pflegt der sog. Differenzton zu sein, der schon lange bekannt ist und von Guisepp

1) Intermittiere (lat.) = unterbrechen, eigentl. dazwischenschicken.

Tartini¹⁾ 1714 beschrieben wurde. Seine Tonhöhe entspricht der Differenz $n_1 - n_2$ der Schwingungszahlen der ihn hervorruftenden Töne. Im allgemeinen wesentlich schwächer, meist kaum hörbar, ist der sog. Summationston $n_1 + n_2$. Auch Differenztöne höherer Ordnung sind oft ziemlich kräftig bemerkbar. Die Theorie der Kombinationstöne ist von H. Helmholtz gegeben worden. Solche müssen überall dort auftreten, wo die Schwingungswerten so groß werden, daß die den schwingenden Körper in seine Gleichgewichtslage rücktreibende Kraft nicht mehr nach dem Hookeschen Elastizitätsgesetze der Entfernung aus der Gleichgewichtslage einfach proportional angesetzt werden kann. Treten im Ansatz für diese Kraft Quadrate oder noch höhere Potenzen der Verschiebungen auf, so ist die Direktionskraft nicht mehr symmetrisch. Kombinationstöne können sich auch erst an den verschiedenen Membranen innerhalb des Ohres bilden; sie sind dann außen im Luftraum noch nicht vorhanden und können daher nicht durch Resonatoren verstärkt werden. Man nennt sie dann entoptische²⁾ oder subjektive Kombinationstöne im Gegensatz zu den objektiven, durch Resonanz verstärkbaren.

§ 243. Der Dopplersche³⁾ Effekt.

Wenn eine pfeifende Lokomotive, eine läutende Straßenbahn oder ein klingender Radfahrer von vorneher an uns vorbeifährt, so hören wir eine plötzliche Erniedrigung des von der Lokomotive oder dem Radfahrer ausgehenden Tones. Das sind Sonderfälle der allgemeinen Tatsache: Wenn der Abstand zwischen uns und einer Tonquelle während des Tönens abnimmt, so klingt der Ton höher; wenn dagegen der Abstand größer wird, so klingt der Ton tiefer als bei unveränderter gegenseitiger Entfernung.

1. Das Mittel ruht relativ zum Beobachter. Während der Annäherung der Tonquelle an unser Ohr werden die Abstände der aufeinanderfolgenden Verdichtungen, d. h. die Wellenlängen, verkürzt, da uns der Ausgangspunkt der zweiten von der Tonquelle ausgesandten Verdichtung näher liegt als der Ausgangspunkt der ersten. Die Verkürzung δ ist gleich dem Wege, um den sich die Tonquelle während einer Schwingung unserem Ohre nähert (Fig. 711). Bewegt sich die Tonquelle T während einer Sekunde von T nach N um die Strecke a (Geschwindigkeit der Tonquelle zum ruhenden Ohre), so wird während einer Schwingung der Ausgangspunkt der Welle um die Strecke δ verschoben, also die ursprüngliche

1) Der Violinvirtuose Giuseppe Tartini (1692—1770) behandelte erst 1754 die Kombinationstöne in einem Aufsatze, nachdem schon 1744 der Lobensteinener Organist Georg Andreas Sorge zuerst öffentlich auf sie hingewiesen hatte.

2) entós (griech.) = inwardig, in, otós = das Ohr.

3) Christian Doppler (1803—1853), Professor der Mathematik in Wien, sprach das nach ihm benannte Prinzip 1842 zuerst aus in seiner Anwendung auf die Farbe der Gestirne. Er behauptete, daß ein selbstleuchtender Körper, z. B. ein Stern, der sich auf uns zu bewegt, eine Farbe haben müsse, die dem blauen Ende des Spektrums nahe sei; während seine Farbe rot sein müsse, wenn er sich von uns entfernt. — Buys-Ballot (1817 bis 1891) (§. 631) untersuchte experimentell 1845 den Effekt für bewegte Tonquellen. — S. dazu auch Bd. II, § 228.

Wellenlänge λ auf $\lambda' = \lambda - \delta$ vermindert. In einer Sekunde beträgt die Summe der Verkürzungen $n \cdot \delta = a$. Zwischen der Wellenlänge und der Schwingungszahl gelten die Beziehungen $c = \lambda \cdot n = \lambda' \cdot n'$ (§ 212, 4); folglich stellt die scheinbare Schwingungszahl n' mit der wirklichen Schwingungszahl n in folgender Beziehung

$$n' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - \delta} = \frac{c \cdot n}{n\lambda - n\delta} = \frac{c}{c - a} \cdot n.$$



Fig. 711. Dopplereffekt; bewegte Schallquelle, ruhender Beobachter.

Wenn sich die Tonquelle von unserem Ohre mit der Geschwindigkeit a entfernt, so wird

$$\lambda'' = \lambda + \delta, \text{ also } n'' = \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot n.$$

Fährt an einem ruhenden Beobachter ein lautender Radfahrer oder ein pfeifender Eisenbahnzug vorbei, so muß der Ton während der Annäherung zu hoch, während der Entfernung zu tief gehört werden. Im Augenblicke der Vorbeifahrt ändert sich der Ton um das musikalische Intervall $\frac{n''}{n} = \frac{c+a}{c-a}$.

Beispiel. Ein Radfahrer habe die Geschwindigkeit $a = 18$ km/sid $= 5$ m/sec, dann ist $\frac{n''}{n} = \frac{330+5}{330-5} = \frac{67}{65} = 1,03$. Das musikalische Intervall der Tonänderung ist daher ein wenig kleiner als ein kleiner halber Ton ($\frac{25}{24} = 1,04$). Für einen Eisenbahnzug mit 54 km/sid $= 15$ m/sec berechnet sich das Intervall entsprechend zu $\frac{330+15}{330-15} = \frac{23}{21} = 1,095$; es ist also etwa ein kleiner ganzer Ton ($\frac{10}{9} = 1,11$).

2. Das Mittel ruht relativ zur Tonquelle. Wenn sich das Ohr O der Tonquelle T mit der Geschwindigkeit a nähert (Fig. 712), so hört es während der Annäherung nicht nur die in einer Sekunde von T ausgehenden Schwingungen n , sondern auch noch die auf der Strecke OM liegenden Schwingungen d , also im ganzen die Schwingungszahl $n_1' = n + d$.

Fig. 712. Dopplereffekt; ruhende Schallquelle, bewegter Beobachter.

Es verhält sich aber $d : n = a : c$, folglich ist $d = \frac{n \cdot a}{c}$, also ist

$$n_1' = \frac{c+a}{c} \cdot n.$$

Wenn sich das Ohr von der Tonquelle entfernt, so tritt an die Stelle des positiven Zeichens das negative, es wird daher $n_1'' = \frac{c-a}{c} \cdot n$.

3. Nachweise und Beobachtungen. Die Veränderung der Tonhöhe bei einer Bewegung der Tonquelle kann man nachweisen, indem man eine an dem einen

Ende eines Gummischlauches heftigste Pfeife im Kreise herumschleudert, während man (am besten im Freien außerhalb des Zimmers) die Pfeife durch das andere Ende des Gummischlauches anbläst. Ein in der Ebene der Kreisschwingungen stehender Zuhörer hört dann das bei jeder Kreisschwingung auftretende Höher- und Tieferwerden des Tones.

Fahren zwei Eisenbahnzüge auf offener Strecke in entgegengesetzter Richtung an einander vorbei, und gibt der eine Zug während der Vorbeifahrt ein Pfeifensignal, so kann der Beobachter im anderen Zuge eine Änderung der Höhe des Tones bis zum Intervalle einer Terz beobachten.

Wenn man eine starke Stimmgabel (Fig. 680) von beispielsweise $n = 2000$ Schwingungen mit der Geschwindigkeit $a = 1$ m/sec einer Wand nähert, von der die Schallwellen reflektiert werden, so hört ein von der Wand weiter entfernt stehender Zuhörer deutliche Schwebungen. Die das Ohr des Zuhörers unmittelbar treffenden Schallwellen kommen von der Stimmgabel selbst, die Tonquelle entfernt sich; die reflektierten Schallwellen verhalten sich so, als ob sie von dem akustischen Spiegelhilde der Stimmgabel (hinter der Wand) ausgingen; dieses nähert sich dem Ohre mit derselben Geschwindigkeit. Das Ohr hört also zwei Töne mit den Schwingungszahlen n' und n'' . Da $c = 330$ m/sec, $a = 1$ m/sec, $n = 2000$ ist, so ist $n' = 2006$ und $n'' = 1994$,

folglich hört das Ohr 12 Schwebungen in der Sekunde.

§ 244. Das menschliche Sprachorgan.

Das menschliche Sprachorgan (Fig. 713

his 717) besteht aus den Lungen, der Luftröhre, dem Kehlkopf mit den Stimmbändern, der Mundhöhle, der Nasenhöhle und den die Form der Mundhöhle bedingenden Teilen: Zunge, Gaumen, Zähne, Lippen. In seiner Gesamtheit ist das Sprachorgan als eine Zungenpfeife anzusehen, bei der der eigentlich stimmbildende Teil die beiden Stimmbänder mit der zwischen ihnen liegenden Stimmritze sind. Die Lungen liefern den zum Anprechen der Stimmbänder nötigen Luftstrom. Bei

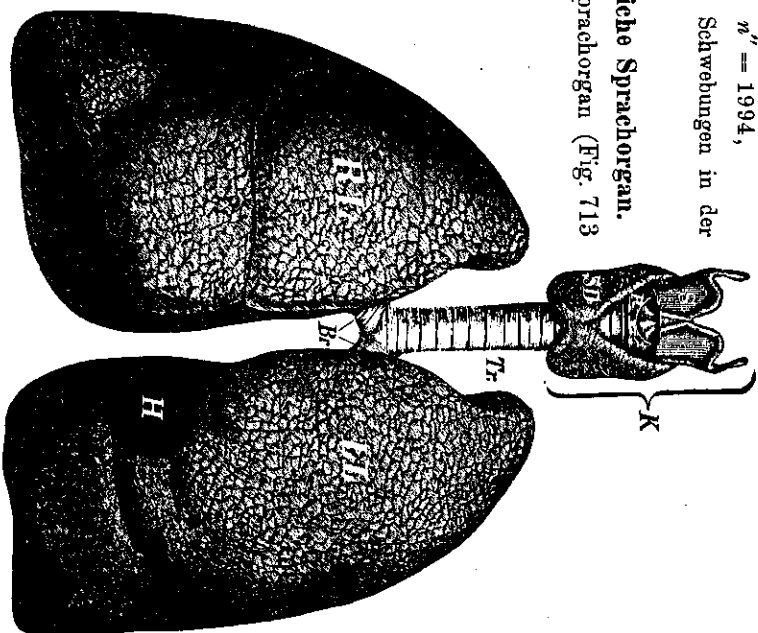


Fig. 713. Lungen mit Luftröhre und Kehlkopf. L, L. Unterer Lungenhügel. H, Herzraum. R, Rechter Lungengügel. Br, Bronchien. Z, Zäher. G, Gaumen. T, Tonsillen. B, Backenzähne. M, Mundhöhle. K, Kehlkopf. SB, Stimmbänder. S, Schlundkopf.

ruhigem Atmen (Fig. 715) sind die Stimmbänder schlaff und lassen einen breiten Zwischenraum zum ruhigen Durchgange der Luft. Beim Sprechen (Fig. 716) werden die Stimmbänder gespannt und einander genähert, so daß nur ein schmaler Zwischenraum, die Stimmritze, zwischen ihnen bleibt. Durchströmt die aus den Lungen getriebene Luft die Stimmritze, so geraten die Stimmbänder in Schwingungen, deren Schwingungszahl innerhalb nicht allzu weiter Grenzen durch verschiedenen starkes Anspannen geändert werden kann. Die Taschenbänder beim Anspannen hierbei die Schwingungen der Stimmbänder, wenn auch

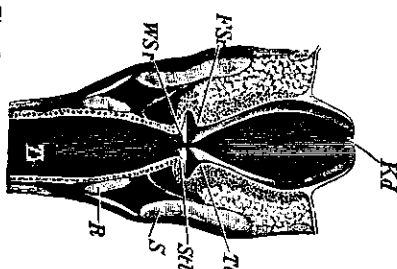


Fig. 714. Frontalansicht durch den Kehlkopf. *Tr* Luftröhre, *R* Ringknorpel, *S* Schildknorpel, *Stb* Stimmbänder, *7b* Taschenbänder, *Wsr* Wahre Stimmritze, *Fsr* Falsche Stimmritze, *Kd* Kehldedeckel.

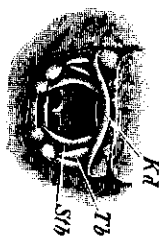


Fig. 715. Bild im Kehlkopfspiegel bei ruhigem Atmen. *Stb* Stimmbänder, *7b* Taschenbänder, *Kd* Kehldedeckel.



Fig. 716. Bild im Kehlkopfspiegel bei Bildung des Buchstehens „a“. *Stb* Stimmbänder, *7b* Taschenbänder, *Sr* Stimmritze, *Kd* Kehldedeckel.

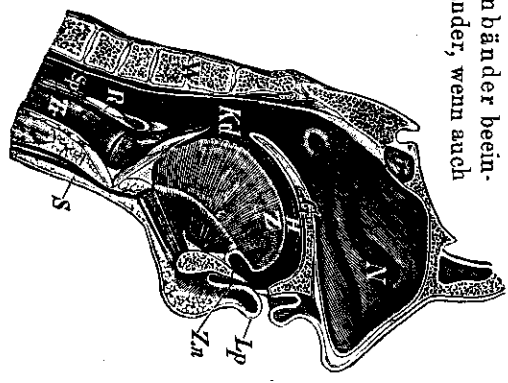


Fig. 717. Medianschnitt der Anzänge der Luftröhre und Speiseröhre. *N* Nasenhöhle, *H* Mundhöhle, *G* Gaumen, *Z* Zunge, *Lp* Lippen, *Sz* Zahne, *Kd* Kehldedeckel, *R* Ringknorpel, *S* Schildknorpel, *Tr* Luftröhre, *Sp* Speiseröhre, *W* Wirbelsäule.

nur wenig. Die durch die schwingenden Stimmbänder hervorgerufenen Luftschwingungen sind im allgemeinen aus sehr vielen Arten zusammengesetzt. Die Mundhöhle und die Nasenhöhle wirken als Resonanzräume. Da wir nun durch passende Stellung der Zunge, der Zähne und der Lippen die Form der Mundhöhle verändern können, so können wir aus dem Tongemische der Stimmbänder nach Willkür einzelne Töne verstärken, also den Klang des Tones beeinflussen. Die Stimmbänder mit dem verschieden eingestellten Resonanzraum des Mundes und Rachens treten besonders bei der Bildung der Vokale in Tätigkeit (Helmholtzsche Vokaltheorie). Bei der Bildung der Konsonanten kommen das Gaumensegel, die Zungenspitze und die Lippen an verschiedenen Stellen in selbständige Schwingungen, die entweder allein oder mit dem von den Stimmbändern herrührenden Tongemische vereint die Sprache erzeugen.

§ 245. Das menschliche Gehörorgan.

Das menschliche Gehörorgan (Fig. 718—722) besteht aus der Ohrmuschel, dem Gehörgange, dem Trommelfelle, den Gehörknöchelchen (Hammer, Amboss, Steigbügel), dem Vorhofe, dem Bogenkanal, der Schnecke und der Eustachischen Röhre.

Ein durch die Ohrmuschel und den Gehörgang in das Ohr eindringender Ton bringt das Trommelfell in Schwingungen, die durch die Gehörknöchelchen auf das ovale Fenster des Vorhofes übertragen werden. Das aus Vorhof, Bogenkanal und Schnecke zusammengesetzte Labyrinth ist mit Flüssigkeit gefüllt, die ebenfalls in Schwingungen versetzt wird. Die Schnecke ist durch eine Scheidewand in zwei getrennte, übereinanderliegende Hohlräume: die Paukentreppe und die Vorhofstreppe, geteilt. Diese Scheidewand besteht aus einem knöchernen, von der Achse der Schnecke ausgehenden Teile, an

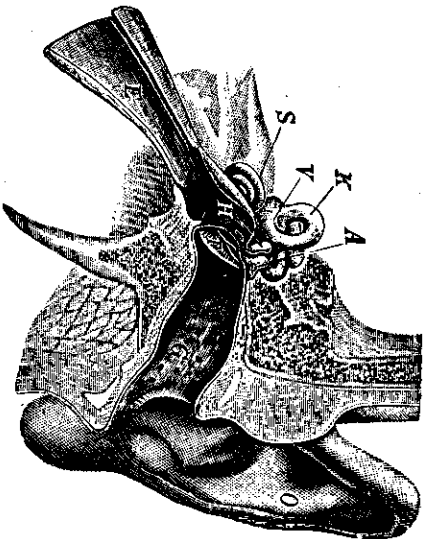


Fig. 718. Das Gehörorgan (Nakes Ohr). Alle Teile in ihrer natürlichen Lage. *O* Ohrmuschel, *G* Gehörgang, *T* Trommelfell, *A* Amboss, *H* Hammer, *V* Vorhof, *K* Halbkreisförmige Kanäle, *S* Schnecke, *E* Eustachische Röhre.

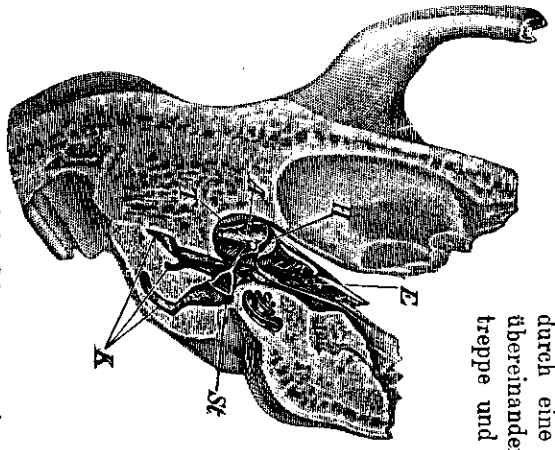


Fig. 719. Innere Ansicht durch das Gehörorgan, von oben gesehen. *T* Trommelfell, *H* Hammer, *A* Amboss, *St* Steigbügel, *E* Eustachische Röhre, *K* Halbkreisförmige Kanäle.

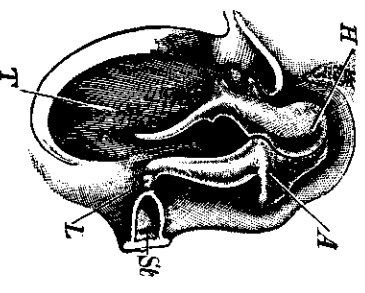


Fig. 720. Gehörknöchelchen, vom inneren Ohr aus gesehen. *T* Trommelfell, *H* Hammer, *A* Amboss, *St* Steigbügel, *L* Linsenknöchelchen.

den sich ein häutiger Teil nach außen anschließt. Die Scheidewand ist der eigentlich tonempfindende Teil. Der häutige Teil der Scheidewand und eine

1) So genannt nach dem Mediziner Bartolommeo Eustachio (gest. 1574 in Rom), der das Organ genauer beschrieb.

Reihe äußerst feiner Härchen (das Cortische¹⁾ Organ) kommen durch die Schwingungen der das Innere ausfüllenden Flüssigkeit ebenfalls in Schwingungen. Die einzelnen Fasern des Cortischen Organes und der häutigen Scheidewand sind verschieden dick und lang (die Zahl der Fasern beläuft sich auf etwa 5000) und daher für Schwingungen verschiedener Tonhöhe resonanzfähig. An die Basis der einzelnen Fasern schließen sich die einzelnen

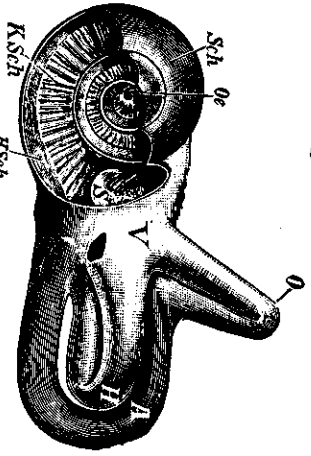


Fig. 721. Das Labyrinth des linken Ohres, die Schnecke teilweise geöffnet. *V* Vorhof; unter *P* das ovale Fenster. *O A H* Ohrer, äußerer und hinterer Bogenengang. *Sch* Schnecke. *K.Sch* und *H.Sch* Knochene und häutige Scheidewand. *Or* Öffnung, durch welche die beiden durch die Scheidewand getrennten Teile der Schnecke miteinander in Verbindung stehen. *S* Säckchen mit Gehörsteinchen.

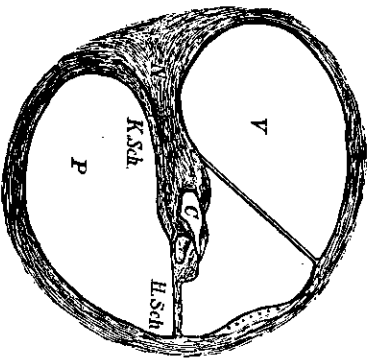


Fig. 722. Durchschnitt durch eine Windung der Schnecke. *P* Vorhofstreppe. *P* Partiturstreppe. *N* Nervenendigungsn. *K.Sch*, *H.Sch*, Knochene und häutige Scheidewand. *C* Cortisches Organ.

Nervenenden der Gehörneren an. Wenn nun ein Ton von bestimmter Tonhöhe das Ohr trifft, so bringt er, nachdem er durch die fehtknöchelchen und das Gehörwasser auf die häutige Scheidewand übertragen worden ist, eine ganz bestimmte Faser des Cortischen Organes in Schwingungen. Die an diese schwingende Faser sich anschließende Nervenfasern leiten den Reiz zum Gehirne (Resonanztheorie des Hörens).

Die Bogengänge stehen in drei aufeinander senkrechten Ebenen. Man nimmt an, daß wir durch ihre Mitwirkung die Fähigkeit erlangen, uns im Raume (oben, vorn, seitlich) zu orientieren und uns im Gleichgewichte zu halten. Wahrscheinlich wirken hierbei auch noch die im Säckchen *S* (Fig. 721) vorhandenen Gehörsteinchen (Otolithen) mit.

Die einzelnen Teile des Labyrinthes sind Hohlräume und Gänge in einem äußerst festen Knochen (Felsenbein), der im Innern der Schädelbasis liegt. In Fig. 719 ist die Anordnung gut zu sehen. Man darf sich durch die Figuren 718 und 719 nicht täuschen lassen, die leicht den Anschein erwecken, als ob die Teile frei in einem größeren Hohlraume lägen.

Umfang des Gehörs. Für das Ohr wahrnehmbar sind noch die Töne mit 30 Schwingungen bis zu Tönen von 20000 Schwingungen in der Sekunde. Die

1) 1861 von dem Marchese Alfonso Corti (1822—1876) zuerst genauer beschrieben. Corti promovierte 1847 in Wien, führte später anatomische Untersuchungen über das innere Ohr in Würzburg durch, mußte dann aber krankheits halber der Wissenschaft entsagen und widmete sich von 1862 an in seiner italienischen Heimat dem Landbau.

Empfänglichkeit des Ohres besonders für die höheren Töne ist für die verschiedenen Personen verschieden. Die Empfänglichkeit für hohe Töne nimmt mit dem Alter der Personen ab; mit 20 Jahren ist die obere Hörgrenze 19000, mit 35 etwa 15000, mit 47 Jahren etwa 13000 Schwingungen. So vermögen ältere Leute z. B. das Zirpen der Grille nicht mehr zu hören.

Empfänglichkeit des Gehörs. Die größte Empfänglichkeit des Ohres für geringe Schallreize liegt nach M. Wien bei der Schwingungszahl von 2300 Schwingungen in der Sekunde. Die Empfänglichkeit ist außerordentlich groß; es können (nach M. Wien) noch Töne durch das Gehör wahrgenommen werden, deren Schwingungen in der Luft größte Vertiefungen von viel weniger als einem Atomdurchmesser (10^{-8} cm) haben oder deren Druckschwankung weniger als 10^{-9} atm. beträgt. — Geübte Musiker besitzen andererseits auch eine außerordentliche Empfänglichkeit für den Unterschied zweier Töne; es genügt schon, daß zwei Töne im Tonbereiche mittlerer Tonhöhe (500—2500 Schwingungen) sich um Bruchteile einer Vollschrwingung unterscheiden, um als von verschiedener Tonhöhe erkannt zu werden. Dabei erweist sich die Unterschiedsschwelle für ein weites Tonbereich als unabhängig von der Tonhöhe. — Das ziemlich sichere Urteil darüber, in welcher Richtung von uns sich eine Schallquelle befindet, beruht nach neueren Untersuchungen von v. Hornbostel und Wertheimer (1915) darauf, daß wir ganz außerordentlich empfindlich für den Zeitunterschied sind, um den ein Schallreiz das eine Ohr früher erreicht als das andere. Ist dieser Zeitunterschied kleiner als 0,00003 sec, so wird die Schallquelle in der Mittelebene zum Abstände der beiden Ohren empfunden, zu der die Ohren symmetrisch liegen; ist der Zeitunterschied größer als dieser Schwellenwert, so wird die Schallquelle desto mehr seitlich empfunden, je größer der Zeitunterschied ist. Bei einem Zeitunterschiede von 0,0006 sec tritt der Eindruck größter Seitlichkeit (um 90° rechts oder links aus der Mittelebene) ein und bleibt für alle größeren Werte erhalten. Der Schwellenwert 0,00003 sec entspricht einem Schallwege von 1 cm, der Schwellenwert 0,0006 sec einem solchen von 21 cm. Sind die Schallreize keine kurz dauernden Geräusche (Knacke oder Knalle), sondern Töne, so ist für die Richtungsempfindung augenscheinlich der Zeitunterschied maßgebend, mit welchem die gleiche Schwingungsphase des Tones das eine und das andere Ohr erreicht. Daraus erhellt, daß Töne, deren Wellenlänge kleiner als 1 cm ist, nicht mehr werden lokalisiert werden können, wenn wir sie hören könnten. In der Tat sind schon die höchsten hörbaren Töne (Grillenzirpen) äußerst unsicher lokalisierbar, während bei Tönen mittlerer Tonhöhe die Richtung auf ungefähr 3° genau angegeben werden kann. — Triff ein kurz dauerndes Signal (ein Knack) das eine Ohr um einen Zeitunterschied von mehr als $12 \cdot 10^{-4}$ sec später als das andere Ohr, so wird das Signal doppelt empfunden. — Wir vermögen also unbewußt (als Richtung) noch Zeitunterschiede von $3 \cdot 10^{-5}$ sec, bewußt Zeitunterschiede von noch $1,2 \cdot 10^{-3}$ sec mit den Ohren zu empfinden.

ling fortpflanzt. Wir nennen den Weg des Lichtes einen Lichtstrahl. Unsere Erfahrung lehrt: Der Lichtstrahl ist geradlinig.

Im gewöhnlichen Sprachgebrauche nennen wir Lichtstrahl einen mehr oder weniger ausgedehnten, geradlinigen Lichtstreifen, der z. B. entsteht, wenn Sonnenschein durch eine kleine Öffnung eines undurchsichtigen Schirmes hindurchfällt. In der Physik sehen wir von der Breite des Lichtstrahles einstellungen ab, wir legen ihm also die Eigenschaft einer geometrischen Linie bei. Insofern wir in der Optik von dem Lichtstrahl als von einer geometrischen geraden Linie reden und den Verlauf der Lichtstrahlen von diesem Standpunkte aus untersuchen, heißt die Lehre vom Lichte die geometrische Optik.

Jeder Körper ist ausgeleuchtet, also muß auch jede Lichtquelle aus einer großen Anzahl von Punkten bestehen, von denen das Licht ausgeht. In der geometrischen Optik vernachlässigen wir vielfach die Ausdehnung der Lichtquelle und reden von einem Lichtpunkte oder von einer punktförmigen Lichtquelle.

Lichtstrahl und Lichtpunkt sind Idealbegriffe, geometrische Abstraktionen, denen kein in der Natur vorkommender Vorgang und kein Körper wirklich entsprechen. Wir können diesen Idealbegriffen im Experimente nabekommen, indem wir eine möglichst kleine Lichtquelle, z. B. den positiven Lichtkater eines elektrischen Bogenlichtes, verwenden, und indem wir den Lichtstrahl durch eine kleine Öffnung eines undurchsichtigen Schirmes vom übrigen Lichte absondern. Im folgenden soll von dieser Abstraktion Gebrauch gemacht werden.

Die Gesamtheit einer größeren Zahl paralleler Lichtstrahlen, der wir eine räumliche Ausdehnung zuschreiben, heißt ein paralleles Strahlenbündel. Die Gesamtheit einer größeren Zahl von Lichtstrahlen, die von einem Punkte divergent ausgehen, wird ein divergentes Strahlenbündel genannt.

§ 247. Ort der Lichtquelle.

Die Erfahrung, daß der Weg des Lichtstrahles eine gerade Linie ist, befähigt uns, den Ort einer Lichtquelle oder den Ort eines beleuchteten Körpers der Richtung nach zu bestimmen. Wir suchen den Ausgangspunkt des Lichtes stets in der Rückwärtsverlängerung der in unser Auge eintretenden Lichtstrahlen; doch können wir, wenn wir eine Lichtquelle nur von einer Stelle aus mit einem Auge betrachten, nicht angeben, in welcher Entfernung vom Auge sich die Lichtquelle befindet.

Gehen von einer Lichtquelle L Strahlen aus (Fig. 723), von denen zwei in der Figur durch IC_1 und IC_2 dargestellt sind, so können wir, wenn sich unser Auge in C_1 befindet, nur angeben, daß die Lichtquelle in der Richtung C_1L liegt. Ob sie aber z. B. in M_1 oder in N_1 liegt, können wir nicht entscheiden.

Befindet sich unser Auge in C_2 , so haben wir ebenfalls nur ein Urteil über die Lage der Lichtquelle in der Richtung C_2L . Wenn wir mit diesem

Vierzehnter Abschnitt.

Geometrische Optik.

§ 246. Lichtquellen. Durchsichtig und undurchsichtig. Lichtstrahl. Lichtpunkt.

Alles, was wir mit dem Auge wahrnehmen, ist Licht. Wir sehen einen Körper infolge des von ihm ausgehenden Lichtes. In einem vollkommen dunklen Zimmer sind die Körper vollständig unsichtbar, weil von ihnen kein Licht ausgeht.

Einige Körper senden Licht selbstständig aus (z. B. die Sonne, die Fixsterne, brennende Kerzen, das elektrische Licht), sie werden Lichtquellen genannt; andere werden erst dadurch sichtbar, daß sie von Lichtquellen beleuchtet und dadurch in den Stand gesetzt werden, auf sie auffallendes Licht zurückzustrahlen.

Körper, durch die das Licht hindurchgeht, heißen durchsichtig oder durchscheinend; Körper, die kein Licht hindurchlassen, heißen undurchsichtig. Zwischen durchsichtigen und undurchsichtigen Körpern bestehen keine festen Grenzen; vielmehr sind Körper, die im gewöhnlichen Sprachgebrauche durchsichtig genannt werden, z. B. klares Wasser, in dicken Schichten undurchsichtig (in der Tiefe des Meeres herrscht völlige Dunkelheit). Andererseits lassen undurchsichtige Körper in genügend dünnen Schichten Licht hindurch (dünnes Blattgold erscheint in der Durchsicht grün, dünne Silberfolie blau). Im allgemeinen wird Licht von den Körpern zum Teil zurückgestrahlt und zurückgeworfen (reflektiert), zum Teil durchgelassen, zum Teil verschluckt (absorbiert). Ein Körper, der alles Licht absorbiert, ist sowohl im auffallenden, wie im durchfallenden Lichte schwarz. Als einen *absolut* schwarzen Körper bezeichnet man einen solchen, der alles auf ihn fallende Licht verschlucken würde; einen solchen Körper gibt es in Wirklichkeit nicht; der „absolut schwarze“ Körper ist ein Idealbegriff. Wenn wir von einem undurchsichtigen Körper reden, so verstehen wir darunter einen Körper, der einen so geringen Teil des Lichtes durchläßt, daß das Licht weder mit unseren Sinnen noch mit anderen Hilfsmitteln in meßbarer Menge wahrnehmbar ist.

Wenn wir zwischen eine Lichtquelle und unser Auge einen undurchsichtigen Körper bringen, so sehen wir die Lichtquelle nicht, wenn die Lichtquelle, der undurchsichtige Körper und unser Auge in gerader Linie liegen. Hieraus folgt, daß sich (unter gewöhnlichen Verhältnissen) das Licht gerad-

Auge allein beobachten, so können wir die Lichtquelle auch in M_2 oder in N_2 suchen.

Wenn wir aber gleichzeitig mit beiden Augen beobachten, also den einen Strahl LC_1 mit dem einen Auge, den anderen Strahl LC_2 mit dem anderen Auge sehen, oder wenn wir kurz nacheinander erst von C_1 aus und dann von C_2 aus die Lichtquelle beobachten, so finden wir den Ort L , auch der Entfernung nach, im Schnittpunkte beider Strahlen. Der Ort von L wird um so genauer bestimmt, je näher der Winkel C_1LC_2 gleich einem rechten Winkel ist. Wollen wir daher die Entfernung eines weit entfernten Gegenstandes richtig einschätzen, so beobachten wir den Gegenstand kurz nach-

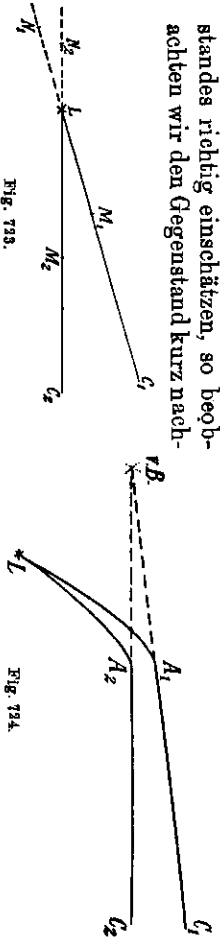


Fig. 723.

Fig. 724.

einander von zwei getrennt voneinander liegenden Orten aus: wir bewegen uns bei der Beobachtung seitlich hin und her. Für nahegelegene Gegenstände genügt die gleichzeitige Beobachtung desselben Gegenstandes mit beiden Augen.

Wir hängen in der Mitte des Zimmers unter der Decke an einem Faden einen Ring an auf, daß die Ebene des Ringes durch unser Auge geht, und geben dann, während wir das eine Auge zuzuhalten, auf den Ring los. Versuchen wir dann, von der Seite einen Bleistift in den Ring zu schieben, so gelingt uns dies erst nach vielen vergeblichen Versuchen. Wenn wir dagegen beide Augen offen haben, so gelingt uns der Versuch unfehlbar schon beim ersten Male. Im ersten Falle haben wir mit einem Auge nur eine Richtung, im zweiten Falle mit beiden Augen zwei Richtungen, also auch den Schnittpunkt dieser beiden Richtungen festgelegt.

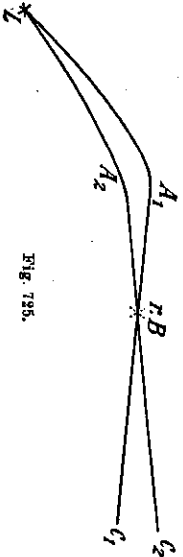


Fig. 725.

laufen, über die Richtung und die Lage der Lichtquelle getäuscht.

Wird z. B. (Fig. 724) die Richtung der von L ausgehenden Lichtstrahlen in A_1 und A_2 so verändert, daß sie von A_1 nach C_1 und von A_2 nach C_2 verlaufen, so suchen die in C_1 und C_2 befindlichen Augen die Lichtquelle in den Rückwärtsverlängerungen dieser beiden Strahlen, also in dem Schnittpunkte $v. B.$; es erscheint uns so, als ob die Lichtquelle in $v. B.$ wäre. Wir nennen in diesem Falle $v. B.$ das virtuelle¹⁾ oder scheinbare Bild der Lichtquelle L .

1) virtuell (franz.) = fähig zu wirken, möglich.

Werden (Fig. 725) die von L ausgehenden Lichtstrahlen in A_1 und A_2 in ihren Richtungen so verändert, daß sie sich, bevor sie unser Auge treffen, in $r. B.$ schneiden und dann weiter nach C_1 und C_2 verlaufen, so suchen die in C_1 und C_2 befindlichen Augen die Lichtquelle im Schnittpunkte $r. B.$ der Strahlen A_1C_1 und A_2C_2 ; hier scheint die Lichtquelle zu liegen. Wir nennen in diesem Falle $r. B.$ das wirkliche oder reelle Bild der Lichtquelle L .

Ein virtuelles Bild ist der Schnittpunkt der Verlängerungen der Strahlen, ein reelles Bild ist der Schnittpunkt der Strahlen selbst.

§ 248. Ausbreitung des Lichtes.

Auf der geradlinigen Fortpflanzung der Lichtstrahlen beruht die durch Fig. 726 dargestellte Erscheinung. In AB befindet sich eine ausgedehnte Lichtquelle, z. B. eine in Form eines F angeordnete Zusammenstellung kleiner Lampchen, die Lichtstrahlen

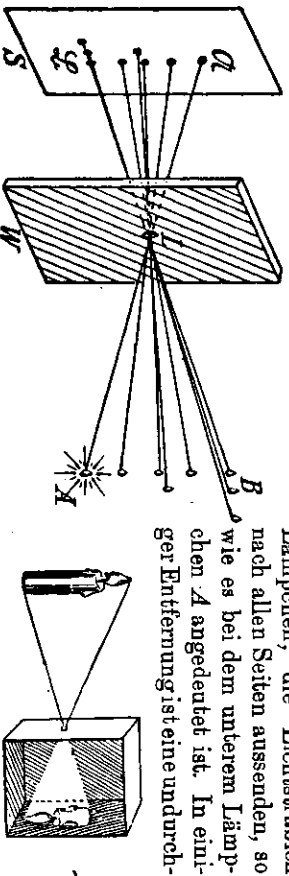


Fig. 726. Abbildende Hauptstrahlen bei der Lochkamera.

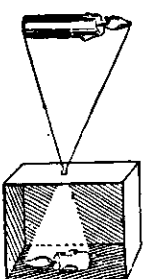


Fig. 727. Lochkamera.

sichtige Wand mit dem Loch L aufgestellt, in einiger Entfernung dahinter der weiße Schirm S . Von den von A ausgehenden Lichtstrahlen, die ein divergentes Strahlenbüschel bilden, kann nur ein sehr dünnes Strahlenbüschel ein Lichtstrahl in oben auseinandergesetztem Sinne durch das Loch L hindurchgehen. Dieses erzeugt die mit dem Schirme S einen hellen Fleck. In derselben Weise sendert die mit dem Loch versehene Wand W von allen übrigen Strahlenbüscheln je einen Lichtstrahl aus, der auf dem Schirme S einen hellen Lichtfleck erzeugt. Diese Lichtflecke ordnen sich nun auf dem Schirme zu einer Figur AB an, die dem Gegenstande AB ähnlich ist, die aber eine umgekehrte Lage hat, indem sowohl Oben und Unten als auch Rechts und Links vertauscht sind. Die auf dem Schirme erzeugte Lichtfigur ist kein eigentliches Bild im Sinne des vorigen Paragraphen.

Auf dem durch Fig. 726 dargestellten Grundgedanken beruht die Einrichtung der Lochkamera (Fig. 727), die auch Porttasche²⁾ Kamera genannt

2) Giambattista della Porta (1538—1616) in Neapel beschränkt die „camera obscura“ (Dunkelkammer) mit einer Linse. Die Lochkamera ist längst vor ihm bekannt gewesen, sie wird schon von Levi ben Gerson um 1321 als Mittel zur Sonnenbeobachtung erwähnt. Franciscus Maurolycus (1494—1576) in Konstantinopel und

wird. Die Bilder der Gegenstände durch eine solche Kamera sind desto schärfer, je kleiner das Loch ist; aber sie sind auch desto lichtschwächer. Unter eine gewisse Größe, etwa $\frac{1}{100}$ mm, darf man aber mit dem Lochdurchmesser nicht herabgehen, da dann die Bilder wieder unschärfer werden. Die Erklärung der Bildentstehung durch die geometrische Optik versagt in diesem Falle; es macht sich (durch Beugungen, s. § 324) die physikalische Natur der Lichtstrahlen geltend.

§ 249. Schatten. Finsternisse.

Schatten. Bringen wir in das Strahlengebiet der punktförmigen Lichtquelle P (Fig. 728) den undurchsichtigen Körper K , so entsteht hinter dem Körper der lichtlose Raum S , der Schatten.

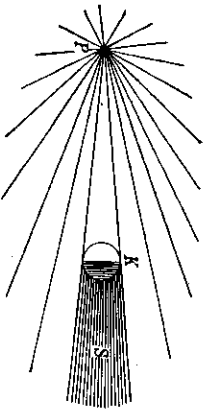


Fig. 728. Kernschatten, erzeugt durch eine punktförmige Lichtquelle.

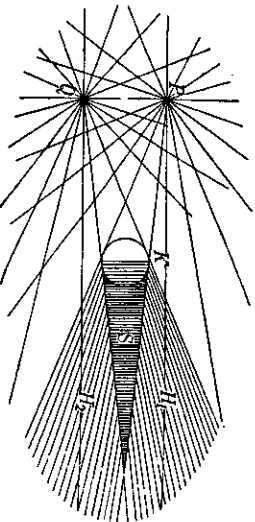


Fig. 729. Kernschatten und Halbschatten, erzeugt durch zwei punktförmige Lichtquellen.

In dem von zwei punktförmigen Lichtquellen P und Q (Fig. 729) beleuchteten Raume bildet der Körper K drei verschiedene Schattenräume. In den Raum S kommt überhaupt kein Licht (Kernschatten); der Raum H_1 wird nur von P , aber nicht von Q beleuchtet; der Raum H_2 erhält nur Licht von Q , aber nicht von P . Die Räume H_1 und H_2 , die nur teilweise beleuchtet sind, heißen Halbschatten.

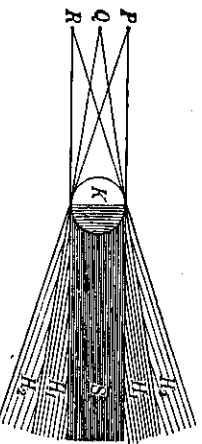


Fig. 730. Schatten durch eine ausgedehnte Lichtquelle.

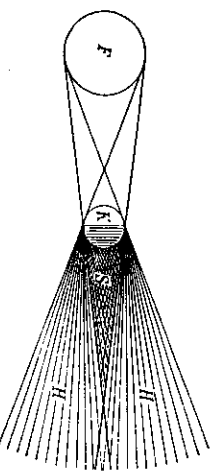


Fig. 731. Schatten eines Planeten durch die Sonnebeleuchtung.

In derselben Weise erzeugt der Körper K (Fig. 730) in dem von den drei Lichtpunkten P , Q und R beleuchteten Raume die Schatten S , H_1 und H_2 .

Später in Messina, erklärte auf Grund der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes die runden Lichtdecke, die im Schatten der Bäume entstehen, wenn Sonnenlicht durch die Blätterlöcher fällt. Schon Aristoteles hatte beobachtet, daß diese Sonnenbildchen bei parallelen Sonnenstrahlen stets kreisförmig sind.

Der Kernschatten S erhält gar kein Licht; die Halbschatten H_1 und H_2 werden nur von einer oder von zwei Lichtquellen beleuchtet; der übrige Raum erhält Licht von allen drei Lichtquellen.

Jeder Punkt der flächenförmig ausgedehnten Lichtquelle F (Fig. 731) sendet Lichtstrahlen in den Raum. Hinter dem undurchsichtigen Körper K entsteht der Kernschatten S und der Halbschatten H . In diesem Falle geht der Kernschatten allmählich in den Halbschatten und dieser in den vollen leuchteten Raum über, während in den Figuren 728, 729 und 730 die Schattenräume scharf gegeneinander abgegrenzt sind.

Bei einer ausgedehnten Lichtquelle erzeugt ein undurchsichtiger Körper verschwommene Schatten.

Sonnen- und Mondfinsternisse. Der in Fig. 731 dargestellte Vorgang entspricht (abgesehen von den unnatürlichen Größenverhältnissen) der Schattenbildung bei der Entstehung der Finsternisse. Wenn F die Sonne und K die Erde bedeutet, und wenn in den hinter K entstehenden Schattenraum der Mond tritt, so entsteht eine Mondfinsternis. Diese ist vollständig oder total, wenn die ganze Mondfläche in den Schattenraum, unvollständig oder partiell, wenn sie nur teilweise in den Schattenraum der Erde tritt.

Ist F die Sonne und K der Mond, so entsteht eine Sonnenfinsternis, wenn die Erde in den Schatten des Mondes tritt. Eine Sonnenfinsternis ist total, wenn der Kernschatten des Mondes die Erde trifft, partiell, wenn die Erde nur vom Halbschatten des Mondes getroffen wird.

§ 250. Lichtstrom, Lichtstärke, Beleuchtung.

Lichtstrom. Diejenige Lichtmenge, die eine Lichtquelle durch eine gegebene Fläche sendet, wird der Lichtstrom Φ durch diese Fläche genannt. Unter der Voraussetzung, daß eine Lichtquelle punktförmig ist, gilt das zuerst von Lambert¹⁾ aufgestellte Grundgesetz der Lichtverteilung, das durch die Erfahrung begründet ist, daß sich das Licht geradlinig ausbreitet:

Eine in einem homogenen, nicht absorbierenden Mittel befindliche punktförmige Lichtquelle strahlt durch jeden beliebigen Querschnitt eines räumlichen Winkels, dessen Scheitel die Lichtquelle ist, den gleichen Lichtstrom.

Lichtstärke. Die Lichtstärke oder die Intensität einer Lichtquelle ist der Lichtstrom, den die Lichtquelle in die Einheit des räumlichen Winkels aussendet. Beträgt der in den räumlichen Winkel ω gestrahlte Lichtstrom Φ , so ist $J = \frac{\Phi}{\omega}$ die Lichtstärke der Lichtquelle. Unter der vereinfachten Annahme, daß ein Lichtpunkt nach allen Seiten gleich viel Licht von der Lichtstärke J aussenden würde, würde der gesamte Lichtstrom, der von dem Lichtpunkte ausgeht, $4\pi J$ sein. Dieser Fall kommt in der Anwen-

1) J. H. Lambert, Mathematiker und Physiker, geb. in Mülhausen i. E. 1728, gest. in Berlin 1777.

dung kaum vor; vielmehr ist die Lichtstärke aller unserer Lichtquellen nach verschiedenen Richtungen verschieden. Nun können wir aber den Begriff der Lichtstärke durch die angegebene Gleichung auch dann definieren, wenn wir den räumlichen Winkel so klein wählen, daß wir die Lichtverteilung in ihm als gleichförmig ansehen dürfen. Völlig genau würde die Lichtstärke einer Lichtquelle in einer gegebenen Richtung durch den Differentialquotienten $J = \frac{d\Phi}{d\omega}$ bestimmt sein; in der Anwendung aber wählt man das Element des räumlichen Winkels immer noch so groß, daß der durch dieses Element hindurchgehende Lichtstrom einen noch meßbaren Wert hat.

Der räumliche Winkel. Umgeben wir eine punktförmige Lichtquelle, die ihr Licht nach allen Seiten gleichmäßig aussendet, mit einer Hohlkugel (Fig. 732), so fällt auf jede Flächeneinheit der inneren Kugeloberfläche gleich viel Licht. Grenzen wir auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Halbmesser l ein beliebiges Flächenelement von der Größe ω ab, und lassen wir einen vom Kugelmittelpunkte ausgehenden Lichtstrahl längs der Begrenzung des Flächenelements gehen, so entsteht eine kegelförmige Fläche, die einen Teil des Raumes begrenzt. Dieser begrenzte Raumteil wird räumlicher Winkel genannt; seine Größe wird durch das auf der Ein-

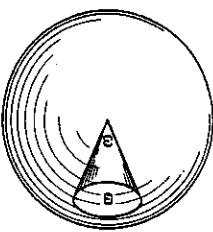


Fig. 732.

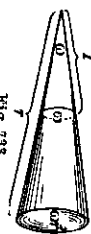


Fig. 733.

heitskugel liegende Flächenelement ω gemessen. Die Einheit des räumlichen Winkels schneidet aus der Oberfläche der Einheitskugel die Flächeneinheit aus. Wählen wir als Halbmesser der Einheitskugel ein Meter, so begrenzt die Einheit des räumlichen Winkels auf der Oberfläche derselben Einheitskugel die Fläche von ω Quadratmetern. Derselbe räumliche Winkel ω schneidet aus einer konzentrischen Kugel mit dem Radius r die Fläche $\omega \cdot r^2$ aus (Fig. 733). Eine durch den Kugelmittelpunkt gelegte Ebene können wir als einen räumlichen Winkel auffassen, der die Halbkugel begrenzt und demnach 2π beträgt. Der volle räumliche Winkel füllt den ganzen Raum der Kugel aus, und da die Kugeloberfläche $4\pi r^2$, also die Oberfläche der Einheitskugel 4π beträgt, so hat der volle räumliche Winkel die Größe 4π .

Belichtung. Von größtem praktischen Interesse ist die Lichtmenge, die eine gegebene Fläche trifft, die also diese Fläche „beleuchtet“, denn mit ihrer Hilfe wollen wir die auf der Fläche befindlichen Dinge sehen und unterscheiden. Wird eine Fläche s von dem Lichtstrom Φ getroffen, so fällt auf die Flächeneinheit die Lichtmenge Φ/s . Dieser Quotient heißt die Lichtstromdichte oder die Belichtung der Fläche. Die Belichtung ist der auf die Flächeneinheit fallende Lichtstrom.

Legen wir um eine punktförmige Lichtquelle als Mittelpunkt zwei konzentrische Kugelflächen mit den Radien r_1 und r_2 , so schneidet der räumliche Winkel ω aus ihnen die Flächen ωr_1^2 und ωr_2^2 aus. Beträgt der in den räumlichen Winkel ω strahlende Lichtstrom Φ , so ist die Belichtung auf den beiden Flächen $E_1 = \frac{\Phi}{\omega r_1^2}$ und $E_2 = \frac{\Phi}{\omega r_2^2}$. Da nun $\frac{\Phi}{\omega} = J$ die Lichtstärke der

Lichtquelle ist, so folgt $E_1 = \frac{J}{r_1^2}$, $E_2 = \frac{J}{r_2^2}$ und hieraus $E_1 : E_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2}$.

In Worten:

Die Belichtung, welche eine punktförmige Lichtquelle auf zwei Flächen erzeugt, die von dem Lichtstrahlen senkrecht getroffen werden, ist dem Quadrate der Entfernung dieser Flächen von der Lichtquelle umgekehrt proportional.

Dieses Gesetz wurde von Lambert als Entfernungsgesetz aufgestellt. Es gilt streng genommen nur für Teile konzentrischer Kugelflächen; es kann aber auch auf kleine ebene Flächen angewandt werden, wenn diese der Lichtquelle nicht zu nahe sind.

Legen wir (Fig. 734) in einem kleinen räumlichen Winkel ω durch einen Punkt, der vom Scheitel den Abstand r hat, zwei Flächen, von denen die eine senkrecht zur Achse des räumlichen Winkels liegt, während die andere um den Winkel i gegen die erste geneigt ist, so schneidet der räumliche Winkel ω aus der



Fig. 734.

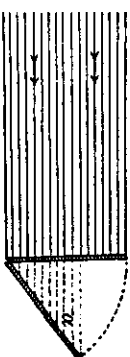


Fig. 735.

ersten Ebene die Fläche ωr^2 , aus der zweiten die Fläche $\omega r^2 \cos i$ heraus. Beträgt der den räumlichen Winkel durchstrahlende Lichtstrom Φ , so ist die Belichtung auf den beiden Flächen $E_1 = \frac{\Phi}{\omega r^2}$ und $E_2 = \frac{\Phi \cos i}{\omega r^2}$. Hieraus folgt die Proportion $E_1 : E_2 = 1 : \cos i$.

In Worten:

Die Belichtung einer Fläche, deren Normale mit der Strahlenrichtung einen Winkel bildet, ist dem Kosinus dieses Winkels proportional.

Bei der Ableitung dieses Satzes haben wir die Voraussetzung gemacht, daß die durch den räumlichen Winkel gelegten Flächenelemente mit allen in dem räumlichen Winkel liegenden Strahlen denselben Winkel bilden. Diese Bedingung ist dann erfüllt, wenn der räumliche Winkel sehr klein ist, wenn also entweder die Flächenelemente selbst sehr klein sind, oder wenn die Lichtquelle sehr weit entfernt ist. Daß der Kosinussatz für parallele Lichtstrahlen (z. B. Sonnenstrahlen) richtig ist, ergibt sich unmittelbar aus Fig. 735.

Lichtmessungen. Jede Messung besteht darin, daß die zu messende Größe mit einer Maßeinheit derselben Art verglichen wird; daher können wir auch eine Lichtmessung nur durch Vergleichung mit einer Lichteinheit ausführen. Während wir nun beispielsweise die Messung einer Länge durch wiederholtes Aneinanderlegen der Maßeinheit ausführen oder sogar durch Schätzung angeben können, wieviel mal so groß die Strecke ist als die Maßeinheit, können wir eine messende, d. h. zahlenmäßige Vergleichung zweier Lichtquellen nicht ausführen. Wir sind nicht einmal imstande, die Gleichheit der Lichtstärke

zweier Lichtquellen durch unmittelbare Anschauung festzustellen, wenn die Lichtquellen nicht identisch sind. So können wir z. B. nicht unmittelbar angeben, ob eine elektrische Glühlampe und eine daneben brennende Gasflamme gleiche oder verschiedene Lichtstärke haben, wenn der Unterschied nicht gar zu groß ist. Die Ursache hierfür liegt darin, daß wir im allgemeinen diejenige Lichtquelle für die absolut hellere halten, die spezifisch heller ist, die nämlich ihr Licht von einer kleineren Fläche aussendet. Eine elektrische Glühlampe erscheint uns aus dem Grunde heller als eine gleichstarke Gasflamme, weil ihr Licht nur von dem dünnen, glühenden Metall- oder Kohlefaden ausgeht, während die Gasflamme mit einer größeren Fläche leuchtet. Es geht uns bei der unmittelbaren Vergleichung zweier verschiedenartiger Lichtquellen ähnlich wie bei der unmittelbaren Vergleichung des Gewichtes eines Bleistückes und eines gleichschweren Holzstückes durch das Gefühl. Das Bleistück erscheint uns schwerer als das Holzstück. Hängen wir aber die beiden verschiedenartigen Körper an gleichartigen Fäden auf und hängen wir dann die belasteten Fäden über unseren Finger, so ist die Schätzung der Gleichheit des Gewichtes wesentlich sicherer. Wir übertragen das Gewicht auf gleichartige Körper, die dann unmittelbar verglichen werden. In ähnlicher Weise können wir zwei gleiche Flächen durch die zu vergleichenden Lichtquellen beleuchten; dann können wir Unterschiede in der Beleuchtung leicht erkennen, besonders dann, wenn die beiden Flächen unmittelbar aneinanderstoßen. Hier auf gründen sich fast alle Lichtmessungen.

Besondere Schwierigkeiten bereitet die Vergleichung zweier Lichtquellen von verschiedener Farbe; ja es ist im Grunde unmöglich, solche Lichtquellen zu vergleichen. In der Ausführung hilft man sich bei Lichtquellen, deren Farbe nicht allzusehr verschieden ist, in mancherlei Weise, z. B. dadurch, daß man farbige Gläser einschaltet, die die Farbenverschiedenheit verdecken. Eine einwandfreie Vergleichung zweier Lichtquellen von verschiedener Farbe kann man nur dadurch ausführen, daß man das Licht beider Lichtquellen spektral zerlegt und die einzelnen Komponenten der Lichtquellen in jedem Spektralbezirke vergleicht (s. dazu § 373).

Auf Grund des Lambert'schen Entfernungsgesetzes können wir die Beleuchtung einer Fläche durch eine Lichtquelle in gesetzmäßiger und meßbarer Weise verändern. Wir können dieselbe Fläche oder zwei nebeneinander liegende gleiche Flächen durch zwei verschieden starke Lichtquellen gleich stark beleuchten, wenn wir die stärkere Lichtquelle entsprechend weiter entfernt aufstellen als die schwächere.

Aus dem Lambert'schen Entfernungsgesetze folgt: Wenn eine kleine Fläche durch zwei verschiedene Lichtquellen beleuchtet wird, und wenn die Achse der beleuchtenden Lichtströme senkrecht auf der Fläche steht (oder mit ihr gleiche Winkel bildet), so ist die Beleuchtung durch beide Lichtquellen dann gleich, wenn sich die Quadrate ihrer Entfernungen von der beleuchteten Fläche verhalten wie die Lichtstärken der Lichtquellen.

Jede tatsächliche Lichtmessung gründet sich auf dieses Entfernungsgesetz: man mißt die Lichtstärke einer Lichtquelle, indem man die von ihr

erzeugte Beleuchtung mit der durch eine Lichteinheit erzeugten Beleuchtung gleichmacht. Die Lichtmessung heißt Photometrie und die zur Lichtmessung gebrauchten Apparate Photometer.

Lichteinheit. In Deutschland gilt als Lichteinheit die im Jahre 1884 von v. Hefner-Alteneck¹⁾ vorgeschlagene, mit Amylazetat (Essigsäure-Isocamyl-ester, $C_{17}H_{35}O_2$, wegen des eigentümlichen aromatischen Geruches auch Birnenäther genannt) gespeiste Lampe, die in Fig. 736 abgebildet ist. Das aus Neusilber bestehende Dochtrohr der Lampe soll eine Länge von 25 mm, einen äußeren Durchmesser von 8,3 mm und einen inneren Durchmesser von 8,0 mm haben und vom Dochte ganz ausgefüllt sein. Die Flamme soll 40 mm hoch brennen. Die Einstellung der Flammenhöhe geschieht mit Hilfe einer Visiervorrichtung (g) oder mittels eines von Krüß in Hamburg angegebenen optischen Flammenmaßes, bei dem eine Linse ein reelles Bild der Flamme auf einem durchscheinenden Maßstabe entwirft.

Der von der Hefner-Lampe in die Einheit des räumlichen Winkels ausgestrahlte Lichtstrom heißt 1 Hefnerkerze, sie wird mit (HK) bezeichnet. (Der Name Normalkerze ist unbestimmt, da in anderen Ländern andere Normalkerzen zur Definition der Lichtstärkeinheit zugrunde gelegt werden.)

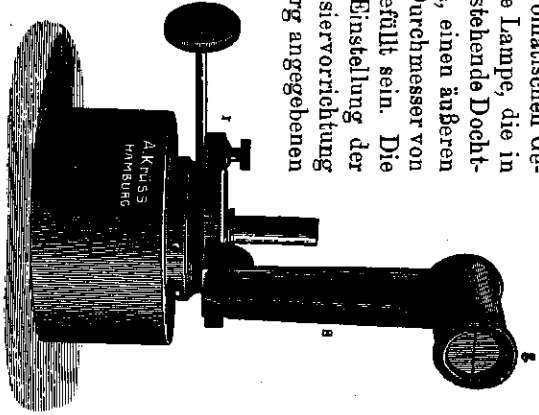


Fig. 736. Amylazetat-Hefnerkerze mit Visier-
vorrichtung zur Überwachung der Flammenhöhe.

Wenn eine Lichtquelle in die Einheit des räumlichen Winkels einen Lichtstrom sendet, der J mal so stark ist wie der von einer Hefnerkerze ausgesandte, so hat die Lichtquelle die Lichtstärke J (HK).

Die Einheit des Lichtstromes heißt ein Lumen²⁾, abgekürzt mit [Lm] bezeichnet. Wenn eine Fläche von s cm², von einer punktförmigen Lichtquelle mit der Lichtstärke J (HK) aus gesehen, unter dem räumlichen Winkel ω erscheint, so fällt auf die Fläche der Lichtstrom $\Phi = J \cdot \omega$ [Lm]. Befindet sich die (kleine) Fläche s in der Entfernung r von der Lichtquelle, und wird sie von den Lichtstrahlen senkrecht getroffen, so ist $\Phi = \frac{J}{r^2} \cdot s$ [Lm].

Die Einheit der Beleuchtung heißt Lux³⁾ (früher Meterkerze), abgekürzt durch den von ihm erfundenen Trommelanker der Dynamomaschinen und der Elektromotoren.

1) v. Hefner-Alteneck (1845—1907); außer durch seine Normallampe bekannt durch den von ihm erfundenen Trommelanker der Dynamomaschinen und der Elektromotoren.
2) Lumen (lat.) = Licht. Licht ist wie die Wärme eine Energieform. Daher muß es für die Einheit der Lichtmenge ein mechanisches Äquivalent geben. Praktisch wird es so gemessen, daß man zunächst untersucht, welche Wärmemenge der Einheit der Lichtmenge äquivalent ist und mit Hilfe des mechanischen Wärmeäquivalentes auf mechanisches Maß umrechnet. So hat man gefunden, daß 1 Lumen für einfarbiges Licht von 0,00180 Watt äquivalent ist.
3) lux (lat.) = Helligkeit.

mit $[Lx]$ bezeichnet. Wird eine [kleine] Fläche von $s \text{ cm}^2$ von dem Lichtstrom Φ getroffen, so beträgt ihre Beleuchtung $E = \frac{\Phi}{s} [Lx]$. Hat die Lichtquelle die Lichtstärke $J [HK]$, und wird sie von den Lichtstrahlen senkrecht getroffen, so ist ih e Beleuchtung $E = \frac{J}{r^2} [Lx]$, wobei r in Metern zu rechnen ist.

Flächenhelle. Wenn mehrere punktförmige Lichtquellen Licht aussenden, so ist der gesamte Lichtstrom gleich der Summe der von den einzelnen Lichtpunkten ausgehenden Lichtströme. Demnach ist auch die gesamte Beleuchtung einer Fläche gleich der Summe der durch die einzelnen Lichtpunkte erzeugten Beleuchtungen. Eine leuchtende Fläche kann man als die Gesamtheit einer großen Zahl von Lichtpunkten ansehen und demnach die oben angegebenen Definitionen und Gesetze sinngemäß auf eine leuchtende Fläche ausdehnen.

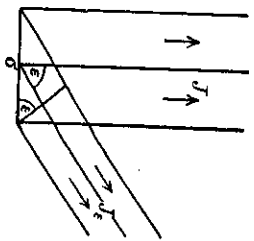


Fig. 737.

Man bezeichnet die Lichtmenge, die 1 cm^2 einer leuchtenden Fläche normal zur Fläche hat, mit Flächenhelle (spezifische Helligkeit, früher auch wohl mit Glanz). Ist die Lichtstärke einer leuchtenden Fläche von $\sigma \text{ cm}^2$ in der Richtung ihrer Normalen J , so ist ihre Flächenhelle $e = \frac{J}{\sigma}$. Wenn eine kleine Fläche σ in der Richtung ihrer Normalen die Lichtstärke J hat, so ist ihre Lichtstärke in einer Richtung, die mit der Normalen den Winkel e einschließt, $J_e = J \cdot \cos e$ (vgl. Fig. 737); folglich ist die auf die Einheit der scheinbaren Fläche bezogene Flächenhelle gleich $\frac{J_e}{\sigma \cdot \cos e} = \frac{J}{\sigma \cdot \cos^2 e}$, da die scheinbare Größe des unter dem Winkel e gesehenen Flächenelementes σ gleich $\sigma \cdot \cos e$ ist.

Die scheinbare Flächenhelle einer flächenhaften Lichtquelle ist unabhängig von der Richtung, von der aus sie gesehen wird.

Die Richtung dieser Tatsache geht am besten daraus hervor, daß eine nach allen Seiten gleich stark strahlende Kugel, z. B. die Oberfläche der Sonne, als gleichmäßig strahlendes¹⁾ erscheint. Man kann diese Erscheinung auch an einer Gasflamme, die mit einer Milchglaskuppel umgeben ist, beobachten. Eine ebene Milchglasplatte, die von einer Lichtquelle gleichmäßig beleuchtet und dadurch selbst zu einer Lichtquelle geworden ist, erscheint mit derselben Flächenhelle, einerlei, ob man sie unter rechtem Winkel oder schräg beobachtet. Von diesen Tatsachen wird beim Weberschen²⁾ Milchglasplatten-Photometer (§ 251) Gebrauch gemacht.

1) In der Tat strahlt die Sonnenscheibe, wie genaue Untersuchungen lehren, nicht für alle Farben gleichmäßig hell. Das \cos -Gesetz der Lichtstrahlung, auf welchem der Satz der gleichmäßigen Flächenhelle beruht, gilt genau nur für einen vollkommen schwarzen Körper. Die Abweichung lehrt daher, daß die Sonne nicht als ideal schwarzer Körper betrachtet werden kann.

2) Leonh. Weber, o. Prof. für theor. Physik in Kiel, 1848—1919.

Die messende Vergleichung der Lichtstärke einer Lichtquelle mit der Lichtstärke einer Normalkerze heißt Photometrie.¹⁾ Die in der Photometrie angewandten Apparate heißen Photometer.

Das Photometer von Ritchie (Fig. 738, angegeben 1829) besteht aus einem in einer innen geschwärzten Hülse untergebrachten, dreiseitigen Prisma ABC mit weißen Flächen AB und AC . Zu den beiden Seiten des Prismas werden die zu vergleichenden Licht-

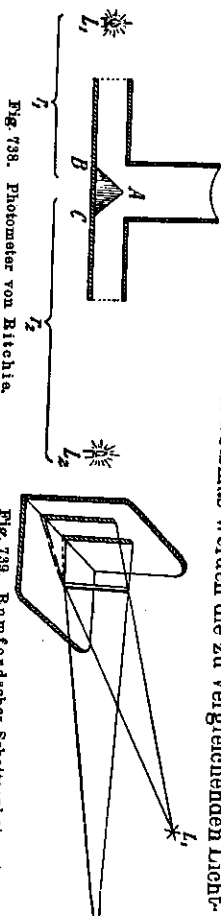


Fig. 738. Photometer von Ritchie.

Fig. 739. Rumford'sches Schattentphotometer.

quellen I_1 und I_2 in den Entfernungen r_1 und r_2 so aufgestellt, daß die beiden Flächen AB und AC gleich stark beleuchtet werden. Einem vor der Kante A befindlichen Auge S erscheint dann das Prisma als eine einfache Fläche, bei der die Kante A vollständig verschwindet.

Wenn beide Flächen gleich stark beleuchtet werden, so ist das Verhältnis der Lichtstärken bestimmt durch die Proportion

$$J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Beim Rumford'schen (S. 480) Schattentphotometer (Fig. 739, angegeben 1813) steht vor einer weißen Wand ein undurchsichtiger Stab, und vor diesem sind die beiden zu vergleichenden Lichtquellen I_1 und I_2 aufgestellt. Es entstehen zwei Schatten. Jeder der beiden Schatten erhält nur Licht von einer der beiden Lichtquellen. Wenn daher die beiden Schatten gleiche Beleuchtung haben, so ist das Verhältnis der Lichtstärken wieder durch die Proportion $J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2$ bestimmt.

Das Bunsensche Fettleckphotometer (1843) besteht aus einem kleinen weißen Schirme aus durchscheinendem Papier mit einem Fettlecke in der Mitte.



Fig. 740.

Bunsensches Fettleckphotometer.

Fig. 741.

Wird ein solcher Fettleck einseitig beleuchtet, so erscheint er von der Seite der Lichtquelle aus gesehen dunkel auf hellem Grunde (Fig. 740 A), von der entgegengesetzten Seite aus gesehen hell auf dunklem Grunde (Fig. 740 C), da durch den Fettleck mehr Licht durchgelassen und weniger Licht zurück-

1) phōs (griech.) = das Licht, métron (griech.) = Maß.

geworfen wird als von den übrigen Teilen des Papiers. Stellt man auf beiden Seiten des Fettflecks zwei Lichtquellen so auf, daß die Belichtungsstärke auf beiden Seiten gleich ist, so verschwindet der Fettleck fast vollständig (Fig. 740B).

Bei gleicher Belichtungsstärke besteht zwischen der Lichtstärke der Lichtquellen und dem Abstände der Lichtquellen vom Fettlecke wieder die Proportion $J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2$.

Mit Hilfe zweier zu beiden Seiten des Schirmes schräg aufgestellter Spiegel (Fig. 741) kann man gleichzeitig beide Seiten des Fettflecks beobachten. Da der Fettleck niemals vollständig verschwindet, so verschiebt man die Lichtquellen so lange, bis er von beiden Seiten gleich hell erscheint.

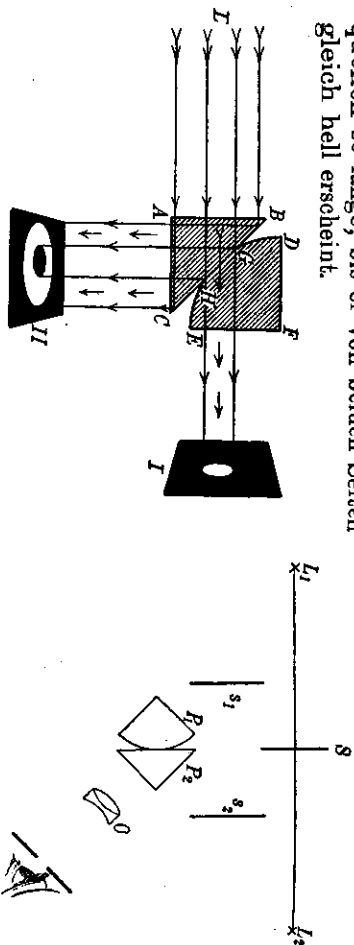


Fig. 743. Lummer-Brodhunscher Photometerwürfel. Fig. 743.

Der Bunsensche Fettleck würde eine völlig einwandfreie Vergleichung der beiden Lichtquellen ermöglichen, wenn er vollkommen durchsichtig und das Papier neben dem Fettlecke vollkommen undurchsichtig wäre, und wenn ferner die Grenze zwischen dem durchsichtigen und undurchsichtigen Teile vollkommen scharf gemacht werden könnte. Von diesen Überlegungen ausgehend haben Lummer¹⁾ und Brodhun 1889 einen Photometerwürfel erfunden, der im Grundgedanken den Bunsenschen Fettleck nachahmt, aber seine Schwächen vermeidet; daher nennt man den Lummer-Brodhunschen Würfel auch einen idealen Fettleck.

Die Einrichtung und die Grundlagen seiner Wirkungsweise gehen aus Fig. 742 hervor. ABC ist ein rechtwinkliges, gleichschenkeliges Glasprisma mit ebenen Seitenflächen. DEF ist ein rechtwinkliges Glasprisma, dessen Hypotenusenfläche DE kugelförmig ist. Der mittlere Teil GH dieser Fläche ist eben geschliffen, und mit diesem Teile sind die beiden Prismen in so inniger Verbindung zusammengepreßt („angesprengt“), daß alle Luft an der Berührungsstelle entfernt ist, und daß sich hier der zusammenge setzte Glaskörper wie ein einheitlicher Glaskörper verhält.

1) Otto Lummer, geb. 1860 in Gera, 1889 Mitglied der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, 1894 Professor, seit 1904 Professor der Physik an der Universität Breslau, ist besonders durch seine Arbeiten auf dem Gebiete der Optik bekannt geworden.

Wenn nun von L aus Lichtstrahlen rechtwinklig auf die Kathetenfläche AB fallen, so durchsetzen sie den mittleren Teil GH des Glaskörpers vollkommen ungehindert. Dort aber, wo die Lichtstrahlen die Grenzfläche von Glas an Luft treffen, also bei BG und HC , werden sie total reflektiert (§ 267) und verlassen den Glaskörper durch die Kathetenfläche AC . Stellt man nun in I und II weiße Schirme auf, so entsteht die in der Figur dargestellte Erscheinung: Auf dem Schirme I entsteht ein scharf begrenzter, elliptischer Lichtleck auf schwarzem Grunde; auf dem Schirme II dagegen ist die Mitte schwarz, und diese ist von einem hellen Lichtringe umgeben, der sich gegen die Mitte vollkommen scharf abhebt. Die äußere, schwarze Begrenzung des

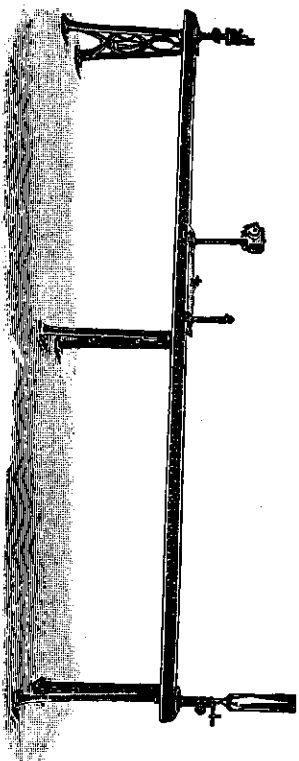


Fig. 744. Photometerbank.

Bildes auf II ist durch einen undurchsichtigen Lackanstrich auf der Kathetenfläche AC hervorgerufen. Hier braucht die Begrenzung nicht vollkommen scharf zu sein.

Ein solcher Photometerwürfel wird in der durch Fig. 743 veranschaulichten Weise mit den beiden Spiegeln s_1 und s_2 zu einem einheitlichen Apparat fest verbunden. Wird nun der Schirm s von den beiden Lichtquellen I_1 und I_2 beleuchtet, so sieht ein durch die Lupe O blickendes Auge durch die durchsichtige Mitte des Photometerwürfels nur die linke, von I_1 beleuchtete Seite des Schirmes S , während dasselbe Auge gleichzeitig durch die Randpartien des Photometerwürfels nur die rechte, von I_2 beleuchtete Seite des Schirmes S sieht. Da die Grenze zwischen der Mitte und den Randpartien vollkommen scharf erscheint, wenn die Lupe O auf die Berührungsstelle der beiden Prismen scharf eingestellt worden ist, so werden schon geringe Helligkeitsunterschiede mit großer Genauigkeit wahrnehmbar, während bei gleicher Belichtung der beiden Seiten des Schirmes S die Grenze vollständig verschwindet. Fig. 744 zeigt die Anstellung des Photometerwürfels, der Heferlampe und der zu messenden Lichtquelle auf einer Photometerbank.

Der Lummer-Brodhunsche Würfel ist auch in dem Wobersehen Flächenphotometer (§ 250) angewandt, von dem Fig. 745 eine schematische Abbildung und Fig. 746 ein äußeres Bild gibt. Dieses Photometer dient zur Untersuchung der Belichtung einer Fläche. m und m' (Fig. 745) sind zwei Milchgläser, die von einer kleinen, als Vergleichskerze dienenden Benzin-

flamme beleuchtet, die sich in der Entfernung r von m' befindet. m richtet man gegen die Fläche, deren Beleuchtung gemessen werden soll. Nun verschiebt man die Milchglasplatte m' so lange, bis für ein (in Fig. 745 von unten) durch den Photometerwürfel w blickendes Auge die Grenzfläche im Photometerwürfel verschwindet. Man verändert die Beleuchtung von m' dadurch in meßbarer Weise, daß man die Milchglasplatte m' innerhalb der Röhre verschiebt, also ihren Abstand von der Benzinflamme meßbar ändert. Man sieht den

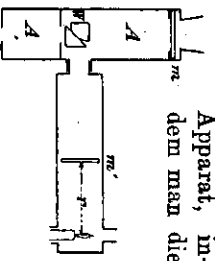


Fig. 745.

Wahresches Flächenphotometer.

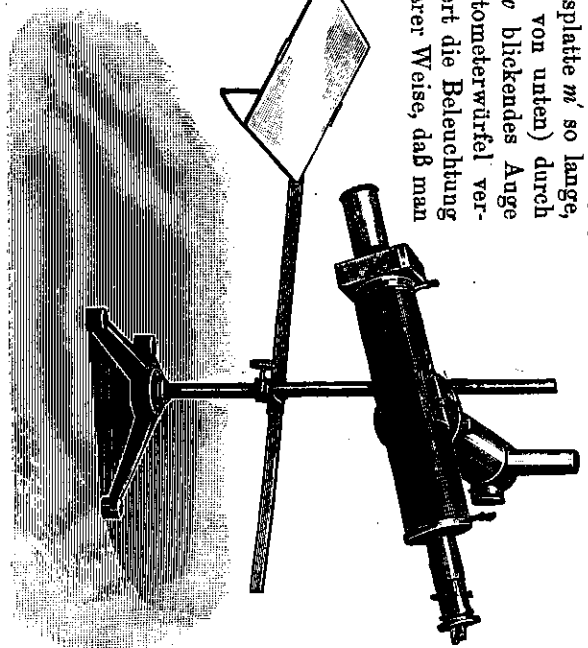


Fig. 746.

Milchglasplatte m' einstellt, während man den Apparat nach einer Fläche von bekannter Beleuchtung richtet. Für die Untersuchung der Beleuchtung von Arbeitsplätzen wird der in Fig. 747 abgebildete Beleuchtungsmesser nach Wingen benutzt. Bei diesem wird die kleine, unten links befindliche weiße Fläche von den benutzten Lichtquellen beleuchtet. Innerhalb des schwarzen Kastens befindet sich eine kleine, weiße Vergleichsfläche, die durch ein Benzinlämpchen von bestimmter Flammenhöhe beleuchtet wird. Diese Vergleichsfläche wird durch die Drehung eines Zeigers über einem Teilkreise

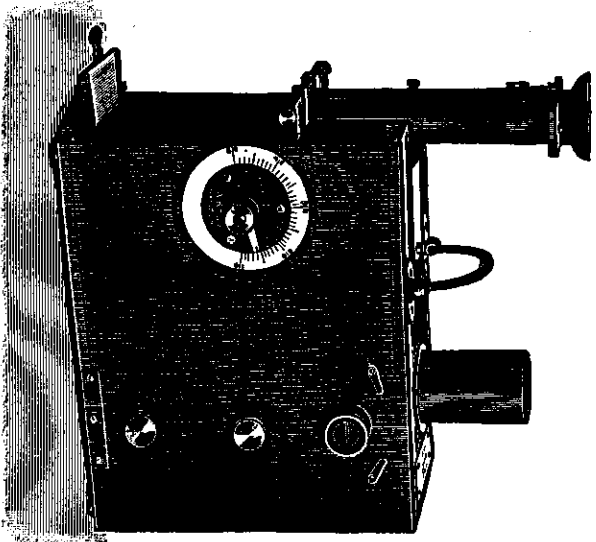


Fig. 747. Beleuchtungsmesser von Wingen.

gedreht und infolgedessen unter veränderlichem Winkel, also mit verschiedener Stärke beleuchtet. Man nimmt an, daß ein Arbeitsplatz genügend hell ist, wenn seine Beleuchtung mindestens 10 Lux beträgt.

§ 252. Lichtverteilung

§ 252. Lichtverteilung.

Bei den Definitionen und Entwicklungen in § 250 haben wir vorausgesetzt, daß die Lichtquelle punktförmig ist, und daß sie das Licht gleichmäßig nach allen Richtungen ausbreitet. Das ist nun bei keiner wirklich verteilten Lichtquelle der Fall, vielmehr ist die Lichtverteilung nach den verschiedenen Richtungen verschieden. Will man daher eine Lichtquelle vollständig bestimmen, so muß man ihre Lichtstärke nach den verschiedenen Richtungen gesondert untersuchen. Viele

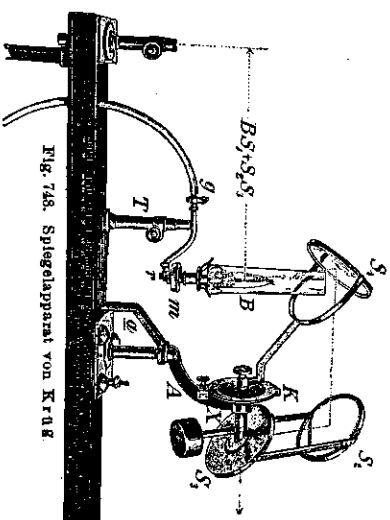


Fig. 748. Spiegelapparat von Kraß

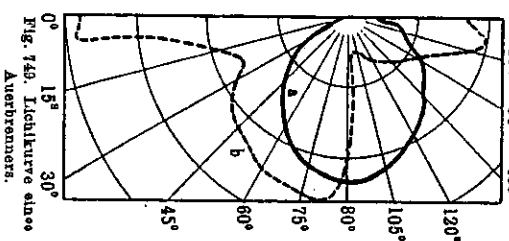


Fig. 749. Lichtkurve eines Auerformers.

Lichtquellen sind Umdrehungskörper, und daher können wir uns mit der Untersuchung der Lichtverteilung in einem einzigen Meridiane begnügen.

Eine elektrische Glühlampe kann man in jede beliebige Stellung bringen und demnach ihren Meridian so drehen, daß alle seine Punkte nacheinander in wagerechter Richtung, also parallel mit der Photometerbank leuchten. Alle übrigen Lichtquellen aber, besonders die mit Flamme brennenden, können nur in einer ganz bestimmten Stellung benutzt werden. Man kann nun aber offenbar die Photometerbank und auch die Vergleichslichtquelle nicht beliebig im Raume drehen; daher muß man besondere Vorrichtungen anwenden, die die von der Lichtquelle ausgehenden Lichtströme aus den zu untersuchenden Richtungen in die wagerechte Richtung bringen. In Fig. 748 ist ein von Krüß angegebener Spiegelapparat abgebildet, der aus drei fest miteinander verbundenen Spiegeln S_1 , S_2 und S_3 besteht, die um eine durch den Teilkreis K gehende wagerechte Achse gedreht werden können und so das Licht der Lichtquelle B aus beliebiger Richtung in die wagerechte, mit der Achse der Photometerbank zusammenfallende Richtung werfen.

Um eine anschauliche Übersicht über die Lichtverteilung zu erhalten, trägt man die in den verschiedenen Richtungen gemessenen Lichtstärken auf den Radien eines Polarkoordinatensystems ab und verbindet die Enden der so begrenzten Radien durch eine Kurve. In Fig. 749 ist die Lichtverteilung, die Lichtkurve, eines Auerbrenners abgebildet, und zwar ist a die Lichtkurve bei einem ohne Lampenkuppl brennenden Auerbrenner, b die Lichtverteilung, nachdem über denselben Brenner ein Albatrinschirm angebracht worden ist. Fig. 750 zeigt die Lichtverteilung einer Osramlampe.

Aus einer solchen Lichtkurve kann dann der gesamte Lichtstrom einer Lichtquelle berechnet werden. Ist die Lichtquelle L (Fig. 751) der Mittelpunkt

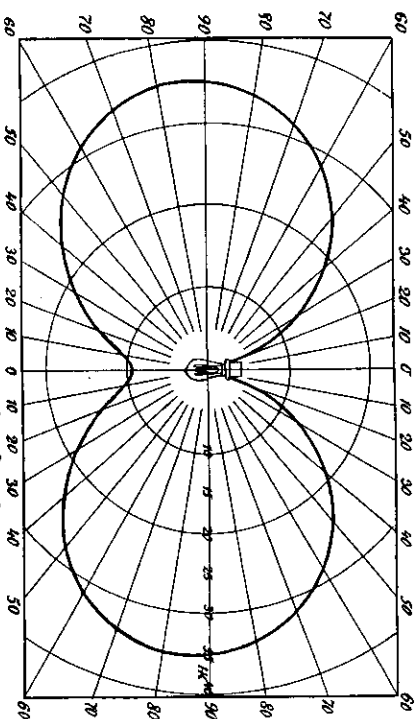


Fig. 750. Lichtverteilung einer Osramlampe.

der Einheitskugel, so kann man diese durch Meridiane und Breitenkreise in Flächenelemente $d\omega$ zerlegen, die dem räumlichen Winkel $d\omega$ gleich sind. Der Lichtstrom auf dieses Flächenelement wird nach § 250 durch das Produkt aus der Größe der Fläche mit der Lichtstärke J gefunden. Bildet man dieses Produkt $J \cdot d\omega$ für alle Elemente des räumlichen Winkels, so erhält man den Gesamtstrom Φ der Lichtquelle durch Addition aller einzelnen Lichtströme. Es ist demnach $\Phi = \int J \cdot d\omega$. Dividiert man diesen Ausdruck durch 4π , so erhält man die mittlere räumliche oder mittlere sphärische Lichtstärke der Lichtquelle; diese wird mit J_{m} bezeichnet. Man berechnet auch wohl den Lichtstrom nur für die obere oder untere Hälfte des vollen räumlichen Winkels und findet dann durch Division mit 2π die mittlere obere oder untere hemisphärische Lichtstärke, die dann mit J_{u} bzw. J_{o} bezeichnet wird.

Die Berechnung der mittleren Lichtstärke auf dem angegebenen Wege ist eine zeitraubende und mühsame Arbeit. Daher hat man versucht, den gesamten Lichtstrom durch eine einzige Messung zu bestimmen. Dieses ist durch die Anwendung des Ulbrichtschen Kugelphotometers möglich geworden. Das Kugelphotometer

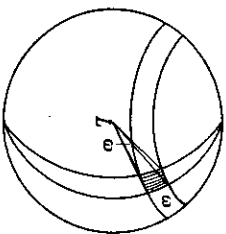


Fig. 751.

besteht aus einer großen Hohlkugel von 1 bis 3 m Durchmesser (Fig. 752), die innen matt und rein weiß angestrichen ist. Bringt man in eine solche Kugel die zu messende Lichtquelle, so wird das nach allen Seiten ausgestrahlte Licht vielfach diffus reflektiert, und jedes Flächenelement der inneren Kugelfläche wird gleich stark beleuchtet. Man braucht dann nur die Beleuchtungsstärke eines Flächenelementes der Kugel durch ein Schauloch hindurch zu messen und kann hieraus einen richtigen Schluß auf den gesamten Lichtstrom machen. Das Kugelphotometer integriert gewissermaßen alle einzelnen Lichtströme selbständig, daher ist es ein Integralphotometer.

Von großer praktischer Wichtigkeit ist endlich noch die Frage, wie groß die von einer Lichtquelle erzeugte Beleuchtungsstärke einer gegebenen Fläche ist. Man kann die Beleuchtung entweder unmittelbar mit einem der in § 251 beschriebenen Flächenphotometer oder Beleuchtungsmesser messen oder aus der Lichtverteilung der Lichtquelle unter Benutzung der Lambertsehen Gesetze (§ 250) berechnen, wenn man die Höhe und die Entfernung der Lichtquelle sowie den Winkel, unter dem die Lichtstrahlen die Flächen treffen, kennt.

§ 253. Die Reflexion des Lichtes.

Ist ein Körper von allen Seiten sichtbar, so sendet er nach allen diesen Seiten Licht aus. Ein von Sonnenlicht beleuchtetes Stück Papier sehen wir von allen Seiten, da es nach allen Seiten Licht zurückstrahlt, trotzdem das auffallende Licht aus parallelen Lichtstrahlen zusammengesetzt ist, die alle von derselben Richtung kommen (diffuse Reflexion).¹⁾ Dagegen erscheint uns eine von Sonnenlicht beleuchtete ebene Glasplatte von einer ganz bestimmten

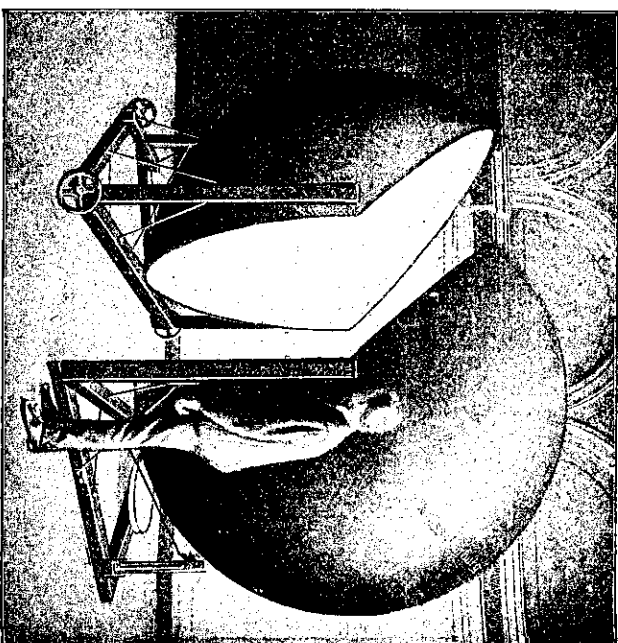


Fig. 752. Integralphotometer.

¹⁾ diffundäre = auseinandergeben, reflectäre = zurückbiegen.

Richtung aus gesehen so hell, daß wir vom reflektierten Lichte gebendet werden, während sie von anderen Seiten betrachtet dunkel, ja fast unsichtbar ist. Die Glasplatte wirft die auf sie fallenden Lichtstrahlen nur in einer ganz bestimmten Richtung zurück (regelmäßige Reflexion oder Spiegelung). Gleicherweise werfen alle möglichst weitgehend geglätteten (polierten) Körper, insbesondere Metalle, Licht regelmäßig zurück. Tritt ein paralleles Strahlenbündel durch die Öffnung eines undurchsichtigen Schirmes, so ist es nur dann sichtbar, wenn das Auge vom Lichtstrahl getroffen wird. Wenn man aber Staub aufwirbelt oder Rauch in den Gang des Lichtstrahles bringt, so wird der Gang des Lichtstrahles auch von der Seite her dadurch sichtbar, daß die einzelnen im Staube oder Rauche befindlichen kleinen Körperchen einen Teil des Lichtes nach allen Seiten zerstreuen.

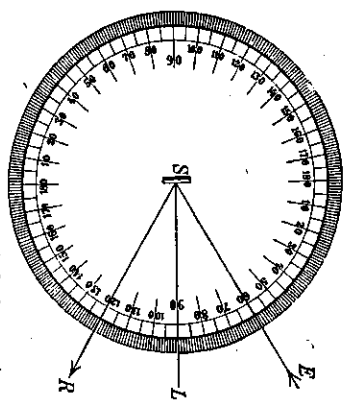


Fig. 753. Apparat für das Reflexionsgesetz.

Läßt man einen durch Staub allseitig sichtbar gemachten Lichtstrahl auf eine ebene Glasplatte oder einen Metallspiegel fallen, so beobachtet man, daß der reflektierte Lichtstrahl eine ganz bestimmte Richtung hat, die von der Richtung des einfallenden Lichtes abhängt. Eine gerade Linie, die senkrecht zur Ebene des Spiegels in dem Punkte errichtet ist, wo das Licht den Spiegel trifft, heißt das Einfallslot. Der Winkel zwischen dem Einfallslot und dem Einfallslot heißt der Einfallswinkel. Der Winkel zwischen dem Einfallslot und dem reflektierten Strahl heißt der Reflexionswinkel.

Die in Fig. 753 abgebildete, um ihren Mittelpunkt als Achse drehbare Scheibe trägt in ihrer Mitte einen kleinen ebenen Spiegel S; die Scheibe ist am Rande mit einer Gradenteilung versehen, deren mit 90° bezeichneter Teilstrich dort liegt, wo das auf dem Spiegel errichtete Einfallslot SL den Rand der Scheibe schneidet.

Ein in der Richtung des Einfallslotes auf den Spiegel fallender Lichtstrahl wird so zurückgeworfen, daß der reflektierte Strahl mit dem einfallenden Strahl zur Deckung kommt.

Wird die Scheibe so gedreht, daß der in der Richtung ES auf den Spiegel fallende Lichtstrahl mit dem Einfallslot SL den Einfallswinkel ESL bildet, so wird der Strahl in der Richtung SR zurückgeworfen, die mit dem Einfallslot den Reflexionswinkel LSR bildet.

Durch Beobachtungen ergibt sich das Reflexionsgesetz.¹⁾

1. Der einfallende Strahl, das Einfallslot und der reflektierte Strahl liegen in einer Ebene.

2. Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel.

1) Das Reflexionsgesetz wird Euklid in Alexandria (300 v. Chr.) zugeschrieben.

Dreht man den Spiegel S um einen beliebigen Winkel, während die Richtung des einfallenden Strahles unverändert bleibt, so dreht sich das Einfallslot um denselben Winkel, und der Einfallswinkel sowohl wie der Reflexionswinkel ändern sich um denselben Betrag; also dreht sich der reflektierte Strahl gegen den einfallenden Strahl um einen Winkel, der doppelt so groß ist wie der Drehungswinkel des Spiegels.

§ 254. Ebene Spiegel.

Vor einem ebenen Spiegel SS' (Fig. 754) befindet sich die punktförmige Lichtquelle L, von der aus die Lichtstrahlen auf den Spiegel treffen und nach dem Reflexionsgesetz reflektiert werden. Der Lichtstrahl LA wird in der Richtung AB, der Lichtstrahl LC in der Richtung CD reflektiert. Ein Auge, das von einem schmalen Strahlenbüschel mit dem mittleren Strahle AB getroffen wird, sucht die Lichtquelle auf BA oder in der Verlängerung von BA

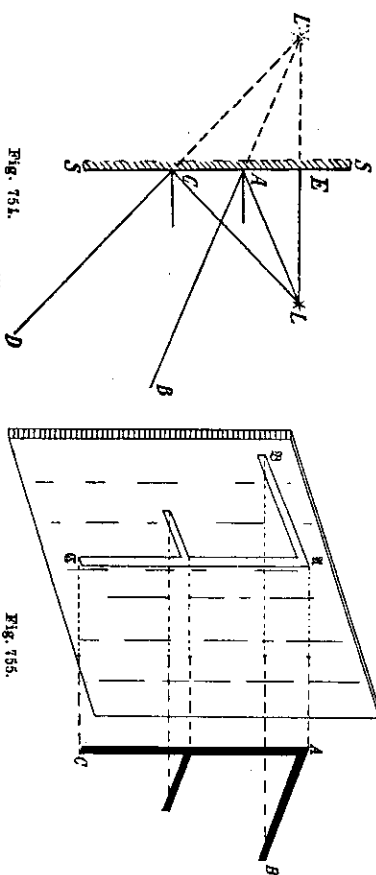


Fig. 754.

Virtuelle Bild eines ebenen Spiegels.

Fig. 755.

über A hinaus. Ein von einem Büschel mit dem mittleren Strahle (dem Hauptstrahle, S. 776) CD getroffenes Auge sucht die Lichtquelle auf DC oder auf der Verlängerung von DC über C hinaus. Beobachten wir gleichzeitig mit beiden Augen die Lichtstrahlen AB und CD, so suchen wir den Ort der Lichtquelle im Schnittpunkte der beiden Verlängerungen, in L'. Die Verbindungslinie LL' schneidet die Spiegelfläche in E. Aus dem Reflexionsgesetz und der daraus folgenden Kongruenz der Dreiecke vor und hinter dem Spiegel folgt:

LL' steht auf der Spiegelfläche senkrecht, L' befindet sich ebensoweit hinter dem Spiegel wie L vor dem Spiegel.

L' ist das virtuelle Bild (S. 740) von L, denn es ist der Schnittpunkt der Verlängerungen der in unser Auge treffenden Lichtstrahlen. Die Strahlen selbst schneiden sich natürlich schon aus dem Grunde nicht in L', weil überhaupt keine betrachteten Lichtstrahlen im Raume hinter dem Spiegel sind. Das Spiegelbild einer ausgedehnten Lichtquelle setzt sich aus den Spiegelbildern der einzelnen Punkte der Lichtquelle zusammen. Aus Fig. 755 folgt,

daß bei der Spiegelung die Richtung oben—unten unverändert bleibt, während die Richtungen vorn—hinten und rechts—links vertauscht werden, wenn man auch im Spiegelbilde rechts—links von der Richtung vorn—hinten im Spiegelbilde ans beurteilt.

§ 255. Anwendung des einfachen ebenen Spiegels.

Abgesehen von der Anwendung zum Toilettenspiegel, bei dem von der Tatsache Gebrauch gemacht wird, daß das Spiegelbild in seinen Größen- und Längsverhältnissen, mit Ausnahme seiner Spiegelverkehrten (symmetrischen) Lage zur Spiegelfläche mit dem vor dem Spiegel befindlichen Gegenstande übereinstimmt, wendet man den einfachen ebenen Spiegel dort an, wo man entweder einem gegebenen Lichtstrahle eine vorgeschriebene Richtung geben will, oder wo man aus der Richtungsänderung eines Lichtstrahles durch die Reflexion am Spiegel die Drehung des Spiegels berechnen will.

Mit Hilfe des Hellostaten¹⁾ werden Sonnenstrahlen durch eine Öffnung in der Wand in den Beobachtungsraum geleitet. Je nachdem der Spiegel des Hellostaten mit der Hand oder durch ein Uhrwerk dem Laufe der Sonne entsprechend gedreht wird, heißt er Hand-Hellostät (Fig. 756) oder Uhrwerk-Hellostät. Beim Uhrwerk-Hellostaten (Fig. 757) wird die Drehungsachse *E* des Spiegels der Erdaachse parallel aufgestellt; die Drehung erfolgt in 24 Stunden einmal. Der mit Hilfe des geteilten Deklinationskreises *D* richtig aufgestellte

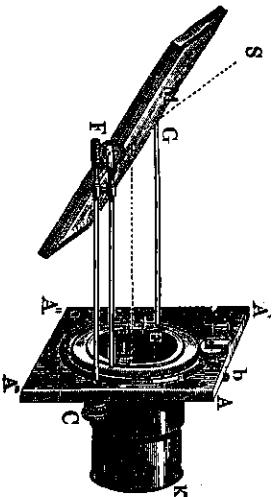


Fig. 756. Hellostaten Spiegel.

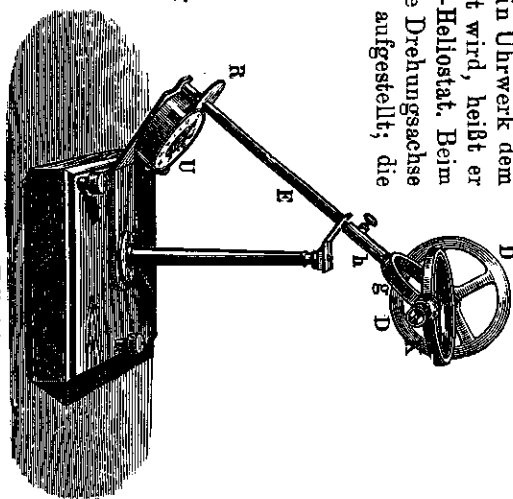


Fig. 757. Hellostät.

Spiegel reflektiert die Sonnenstrahlen dauernd in der Richtung parallel zur Erdaachse. Aus dieser Richtung werden die Strahlen dann durch einen zweiten Spiegel in irgendeine beliebige Richtung geleitet.

Das Reflex-Goniometer²⁾ (Fig. 758 im Grundriß, Fig. 759 in perspektivischer Ansicht) dient zur Bestimmung des Winkels, den zwei Flächen (z. B. eines Kristalles oder eines Prismas) miteinander bilden. Das Goniometer besteht aus einem Teilkreise *K*, in dessen Mitte ein kleines Tischchen *T* dreht-

1) *hélios* (griech.) = Sonne. — *status* (lat.) = festgesetzt, festgestellt.
2) *gonia* (griech.) = Winkel.

bar angebracht ist. Mit dem Tischchen ist ein mit einer Nullmarke oder einem Nonius *N* versehener, drehbarer Arm fest verbunden, an dem man die Drehung des Tischchens ablesen kann. Ferner ist ein mit einem Spalte und einer Sammellinse versehenes Rohr, das Kollimatorrohr¹⁾ *S*, an einem drehbaren Arme angebracht, dessen Drehungsachse mit der Achse des Tischchens und der Mitte des Teilkreises zusammenfällt. Die Drehung dieses Armes kann auch am Teilkreise abgelesen werden. Der Spalt des Kollimatorrohres hat eine solche Stellung zur Linse, daß die in den Spalt eintretenden Lichtstrahlen die Kollimatorlinse als paralleles Lichtstrahlbündel verlassen. Endlich sitzt an der Achse des Goniometers, um diese drehbar, ein mit einem Fernrohr *F* versehener Arm, dessen Drehung ebenfalls am Teilkreise abgelesen werden kann. Das Fernrohr wird so eingestellt, daß man dann, wenn das Fernrohr und das Kollimatorrohr in gerader Linie stehen, durch das Fernrohr ein deutliches Bild des Spaltes sieht.

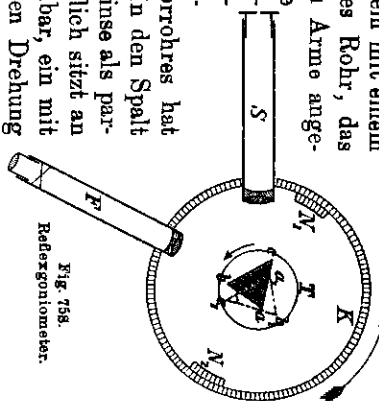


Fig. 758. Reflexgoniometer.

Um einen Winkel eines Prismas mit dem Reflex-Goniometer zu messen, setzt man (Fig. 758) das Prisma *abc* auf das Tischchen *T* so, daß die Kante des Prismas mit der Drehungsachse des Goniometers parallel ist. Ein durch das Kollimatorrohr *S* geleitetes Lichtstrahlbündel fällt auf die Fläche *bc* des Prismas und wird hier reflektiert. Das Fernrohr *F* wird dann so aufgestellt, daß man den zurückgeworfenen Lichtstrahl gut beobachten kann. Man dreht nun das Tischchen mit dem Prisma so, daß nun die zweite Prismenfläche *a_1c_1*, den durch das Kollimatorrohr fallenden Lichtstrahl in das Fernrohr spiegelt. Die neue Stellung des Prismas ist punktiert angedeutet. Der am Teilkreis

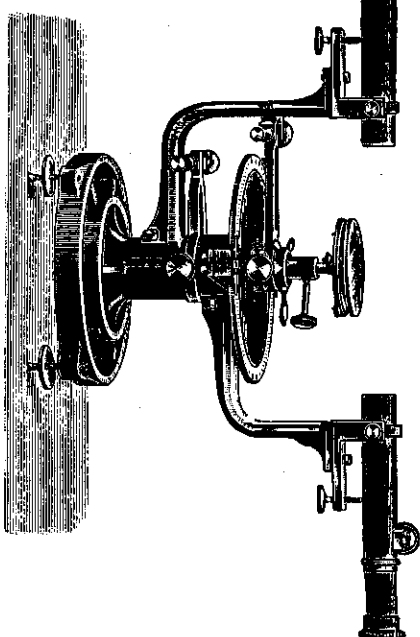


Fig. 759. Reflexgoniometer.

1) *limaire* (lat.) = feilen, genau untersuchen; von *lima* = Feile. Das Wort *collimare* ist irrtümlicherweise statt des echten überlieferten „*collimare*“ = in gerade Linie bringen“ auf Grund einer falschen galesteren Cicero-Stelle gebildet worden. Das Rohr müßte eigentlich „Kollimator“ heißen. Ursprünglich wurde das Hilfsfernrohr größerer Fernrohre Kollimator genannt, und dann ist diese Bezeichnung auch auf Beleuchtungsrohre ausgedehnt worden.

kreise abgelesene Drehungswinkel ist das Supplement des zu bestimmenden Prismenwinkels.

Die Spiegelablesung (Fig. 760) wird angewandt, um die Drehung eines kleinen Spiegels S (der etwa an der Magnethadel eines Galvanometers befestigt ist und mit der Magnethadel eine zu messende Drehung ausführt) genau zu

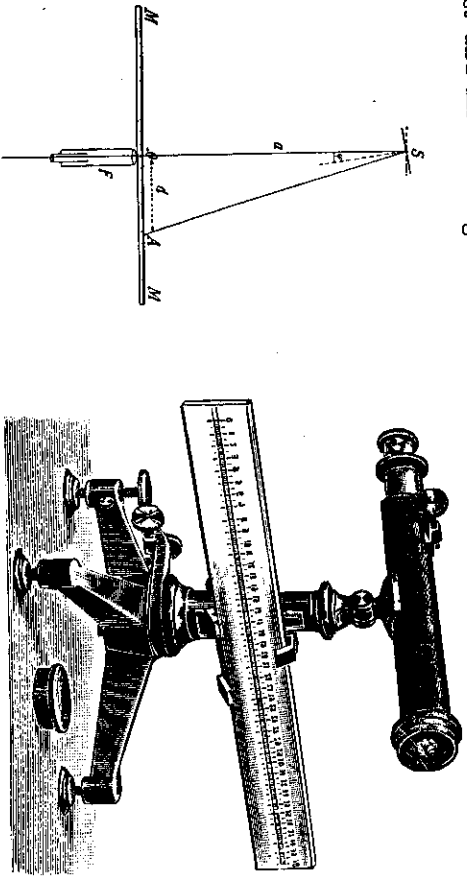


Fig. 760.

Poggendorffsche Spiegelablesung.

Fig. 761.

messen. In der abgemessenen Entfernung a wird das Fernrohr F so aufgestellt, daß das Einfallslot des Spiegels mit der Fernrohrachse zusammenfällt. Man sieht dann mit dem Fernrohre durch Reflexion im Spiegel die Nullmarke O eines quer zum Fernrohre, unmittelbar vor dem Objektiv aufgestellten Maßstabes MM .

Führt der Spiegel S eine Drehung um den Winkel φ aus, so dreht sich mit ihm das Einfallslot, und man sieht dann einen Punkt A des Maßstabes, für den $\angle OSA = 2\varphi$ ist. Die Lage des beobachteten Punktes A ist durch die Entfernung $OA = d$ bestimmt. Man kann $\text{tg } 2\varphi = \frac{d}{a}$ sehr genau beobachten, da d und a genau gemessen werden können. Für kleine Winkel φ kann man statt der Tangente des Winkels den Winkel selbst in Bogenmaß setzen; bei kleinen Ausschlägen ist daher der beobachtete lineare Ausschlag dem Ausschlagswinkel proportional.

Fig. 761 zeigt ein für Spiegelablesungen eingerichtetes Fernrohr.

§ 256. Zusammengesetzte Spiegel. Parallele Spiegel.

Die meisten gebäuchlichen Spiegel sind Glasspiegel, deren Rückseite mit Silber belegt ist. Ein auf einen belegten Glasspiegel fallender Lichtstrahl wird auf der vorderen Glassseite des Spiegels zum Teil reflektiert, zum Teil dringt er in das Glas ein. Der eindringende Teil des Strahles erfährt an der belebten Seite eine fast vollständige Reflexion, er kehrt also zur vorderen

§ 256. Zusammengesetzte Spiegel. Parallele Spiegel. § 257. Winkelspiegel 761

Spiegelfläche zurück und wird hier wieder in zwei Teile zerlegt, von denen wieder der eine in das Glas zurückgeworfen wird, der andere aus dem Glase austritt. Der im Glase verbleibende Teil wird wiederum an der Rückseite reflektiert und beim abermaligen Auftreffen auf die Vorderfläche in zwei Teile zerlegt. Zum dritten Male durchläuft dann der reflektirte Bestandteil des Strahles die Glasschicht hin und her, und der Vorgang wiederholt sich so oft, bis der verbleibende

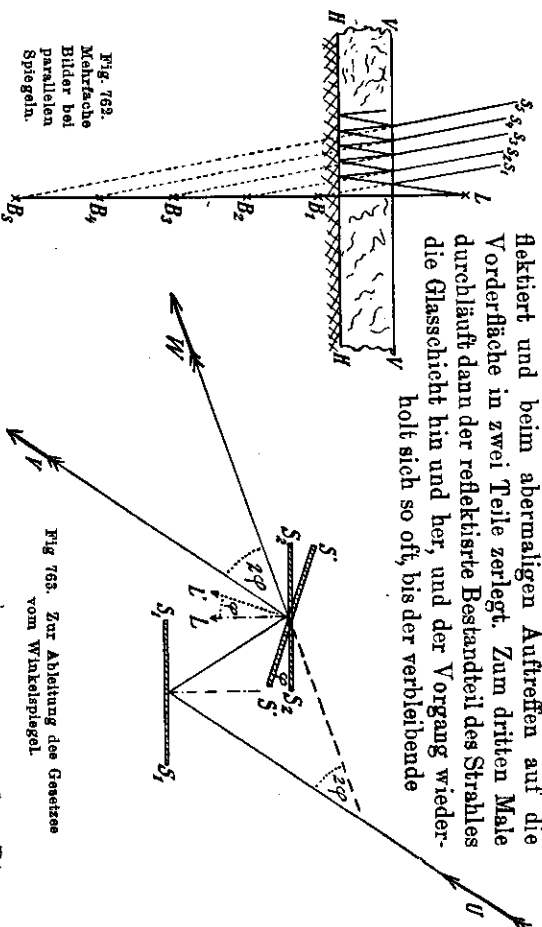


Fig. 762. Mehrfache Bilder bei parallelen Spiegeln.

Fig. 763. Zur Ableitung des Gesetzes vom Winkelspiegel.

Rest so schwach wird, daß er sich unserer Wahrnehmung entzieht. Dieser Vorgang ist in Fig. 762 dargestellt. Die Zerlegung ist für einen fast senkrecht auf die Vorderfläche VV des Spiegels auftretenden Lichtstrahl gezeichnet. Die belegte Hinterseite des Spiegels ist HH . Die Teilstrahlen, die aus der Vorderfläche austreten, sind durch S_1, S_2 usw. bezeichnet. (Auf die Richtungsveränderung, die der Strahl beim Eintritt in das Glas erfährt, soll vorläufig nicht eingegangen werden.) Wir erkennen, daß infolge der mehrfachen Reflexion eine größere Anzahl von Bildern der Lichtquelle L entstehen muß, die hintereinander liegen; daher sehen wir sie gewöhnlich nicht getrennt voneinander, wenn wir genau senkrecht in den Spiegel blicken. (Der Abstand der einzelnen Bilder B_1, B_2 usw. voneinander ist wegen der schon erwähnten Brechung im Glase $\frac{1}{3}$ der Glasdicke.)

§ 257. Winkelspiegel.

Die beiden Spiegel S_1S_1 und S_2S_2 (Fig. 763) mögen parallel zueinander aufgestellt sein. Der Lichtstrahl L trifft auf S_1S_1 , wird hier zurückgeworfen, trifft auf S_2S_2 und wird hier in der Richtung V zurückgeworfen. Da der Einfallswinkel des Strahles bei beiden Spiegeln wegen ihrer parallelen Lage zueinander gleich groß, also auch die Reflexionswinkel gleich groß sind, so ist der zweimal reflektirte Strahl V dem eintretenden Strahle L parallel. Wir drehen jetzt den Spiegel S_2S_2 um den Winkel φ in die Lage $S'S'$. Dadurch wird auch das Einfallslot L um den Winkel φ in die Lage L' gedreht, und der Einfallswinkel des auf $S'S'$ fallenden Strahles wird um φ größer; also wächst auch der Re-

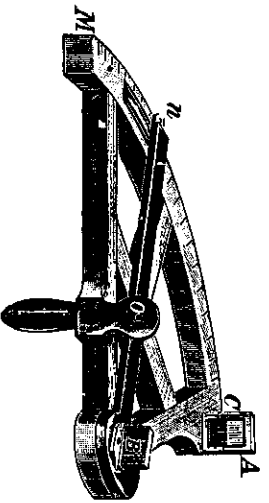


Fig. 764. Modell eines Spiegelsextanten.

Flexionswinkel um denselben Betrag. Folglich erfährt der zurückerworfene Strahl eine Drehung um den Winkel 2φ . Hieraus folgt, daß der jetzt reflektierte Strahl W mit dem ursprünglichen Strahle U den Winkel 2φ bildet.

Wird ein Lichtstrahl von zwei Spiegeln reflektiert, die einen Winkel miteinander einschließen, so wird der Strahl um einen Winkel abgelenkt, der doppelt so groß ist wie der von den Spiegeln eingeschlossene Winkel.

Von diesem Satze wird beim Spiegelsextanten Gebrauch gemacht (Fig. 764): Auf dem Kreisumfang eines aus Stäben zusammengesetzten Kreissektors (von etwa 60° , daher der Name Sextant) ist eine Kreisteilung MC angebracht. Durch den Kreismitelpunkt geht die Achse eines kleinen ebenen Spiegels B , dessen Ebene senkrecht auf der Ebene des Sektors steht. Er ist auf dem einen Ende eines Armes Bm befestigt. Das andere Ende dieses Armes ist mit einem Nonius n versehen, der eine genaue Ablesung der Stellung des Armes auf der Kreisteilung ermöglicht. Dem drehbaren Spiegel gegenüber sitzt auf dem einen Schenkel des Sektors ein zweiter Spiegel A , der nur in seiner unteren Hälfte eine Spiegelbelegung besitzt. Wenn die Ebene des drehbaren Spiegels B mit der Ebene des festen Spiegels A parallel ist, so muß der Nullpunkt des beweglichen Armes mit dem Nullpunkte der Kreisteilung zusammenfallen. Wenn wir durch das Loch (Dioptr) 1) O so nach A sehen, daß wir zugleich auf die Belegung und durch die obere nicht belegte Hälfte blicken, so treten gleichzeitig zwei Strahlenbündel in unser Auge, nämlich das durch die nicht belegte Hälfte von A unmittelbar eintretende Bündel und die Strahlen, welche erst von B nach A und von der belegten Hälfte von A nach O reflektiert werden. Sehen wir also z. B. durch O nach einem Sterne, während die beiden Spiegel parallel zueinander stehen, so sehen wir den Stern einmal durch das Glas A hindurch und (bei geringerer Neigung des Sextanten) dicht darunter in der Belegung von A . Wird jetzt der Spiegel B gedreht, so muß ein Strahl, der nach A und von dort durch O in das Auge reflektiert werden soll, von einer anderen Richtung auf B aufreffen. Wir sehen daher jetzt zwei Sterne untereinander stehen, die einen Sehwinkel α miteinander einschließen, der doppelt so groß ist wie der Winkel, um den B gedreht ist. Die Drehung von B kann an der Kreisteilung abgelesen werden. Die Angaben der Kreisteilung beziehen sich unmittelbar auf den Sehwinkel, unter dem uns die beiden Sterne erscheinen. Sie entsprechen also der doppelten Spiegelrotation.

In Fig. 764 ist ein sehr einfaches Modell eines Spiegelsextanten abgebildet, dessen Gestell aus Holzleisten zusammengesetzt ist. Für wirkliche Fein-

1) διά (griech.) = durch, optér (griech.) = Späher.

messungen wird der Apparat in Metall ausgeführt, und die Kreisteilung wird auf einem versilberten Streifen angebracht. Außerdem wird der Dioptr durch ein Fernrohr ersetzt, das eine sehr genaue Einstellung ermöglicht. Mit den gebrauchlichen Spiegelsextanten können Sehwinkel bis auf eine halbe Bogenminute genau gemessen werden.

Der Spiegelsextant ist ein sehr bequemes Hilfsmittel zur Messung des Schwinkels, um den zwei Sterne voneinander, der Sonnenrand vom Horizonte usw., entfernt sind. Der Hauptvorteil des Sextanten besteht darin, daß er keiner festen Aufstellung bedarf. Aus diesem Grunde findet der Spiegelsextant zur Winkelmessung an Bord der Schiffe die ausgedehnteste Anwendung.

§ 258. Hohlspiegel (Konkavspiegel).¹⁾ (Parallele Strahlen.)

Die Gesetze des ebenen Spiegels lassen sich auch auf kleine Flächenelemente von gekrümmten Flächen anwenden. Das Einfallslot eines solchen Flächenelementes ist die in diesem Punkte errichtete Normale.

Es seien in Fig. 765 L_1, A und L_2, B zwei einander sehr nahe Strahlen eines parallelen Strahlenbündels, die auf die beiden einander benachbarten Flächenelemente A und B eines gekrümmten Spiegels fallen. Die in A und B gezogenen Normalen der Spiegelfläche seien AN_1 und BN_2 . Die von den Spiegелеlementen reflektierten Strahlen schneiden sich in R . Nach dem Reflexionsgesetze ist $\angle I_1, AN_1 = \angle N_1, AR$ und $\angle I_2, BN_2 = \angle N_2, BR$. Der von einem benachbarten dritten Spiegелеlemente C zurückgeworfene Strahl des parallelen Strahlenbündels schneidet im allgemeinen die beiden ersten reflektierten Strahlen in zwei Punkten S und T , die nicht mit R zusammenfallen. In dem besonderen Falle aber, daß die Spiegелеlemente A, B und C Teile eines Umdrehungs-Paraboloides sind, fallen die drei Schnittpunkte R, S, T mit dem geometrischen Brennpunkte des Umdrehungs-Paraboloides zusammen; denn die Mathematik lehrt, daß der Brennstrahl und der Durchmesser einer Parabel mit der Normale in jedem Punkte gleiche Winkel bilden (Fig. 766). Hieraus folgt:

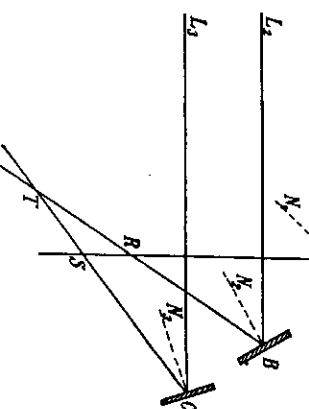


Fig. 765.

Wenn ein paralleles Strahlenbündel parallel zur Achse eines Spiegels von der Form eines Umdrehungs-Paraboloides auffällt, so gehen die reflektierten Strahlen alle durch den Brennpunkt F des parabolischen Spiegels (Fig. 767).

Die Mathematik lehrt ferner, daß der Halbmesser des Krümmungskreises im Scheitel einer Parabel gleich der doppelten Brennweite der Parabel ist, und

1) concavus (lat.) = hohl.

daß daher der Mittelpunkt M des Krümmungskreises (Fig. 768) vom Scheitel S doppelt so weit entfernt ist wie der Brennpunkt F der Parabel. Dieser Krümmungskreis schmiegt sich der Parabel so an, daß er in der Nähe des Scheitels

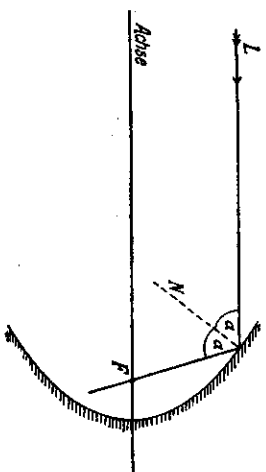
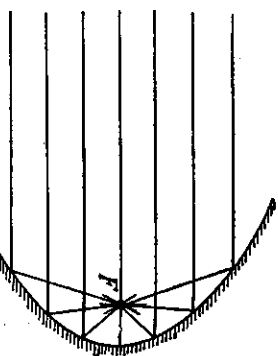


Fig. 766.

Parabolspiegel

Fig. 767.



statt der Parabel gesetzt werden kann. Daraus folgt, daß wir in der Optik einen parabolischen Spiegel durch einen Kugelspiegel ersetzen können, wenn wir nur den mittleren Teil des Spiegels benutzen, und wenn der Halbmesser der Kugel gleich der doppelten Brennweite des parabolischen Spiegels ist.

Ein aus einer Kugelschale bestehender Hohlspiegel heißt ein sphärischer Spiegel; die Gerade, die durch den Krümmungsmittelpunkt M (Fig. 769) und den auf der Spiegelfläche liegenden mittleren Punkt S , den Scheitelpunkt des Hohlspiegels, hindurchgeht, heißt die Hauptachse des Spiegels. Der Winkel $SM A = \alpha$, den ein vom Mittelpunkt M eines sphärischen Spiegels nach seinem äußeren Rande A gezogener Radius $M A$ mit der Hauptachse $M S$ bildet, heißt der Öffnungswinkel des sphärischen Spiegels.

Für kleine Öffnungswinkel kann ein parabolischer Spiegel durch einen sphärischen Spiegel ersetzt werden, dessen Halbmesser gleich der doppelten Brennweite des parabolischen Spiegels ist.

Fallen auf einen sphärischen Spiegel achsenparallele Strahlen, so vereinigen sie sich in einem Punkte, der in der Mitte zwischen Krümmungsmittelpunkt und Scheitel liegt, dem Brennpunkte des sphärischen Spiegels.

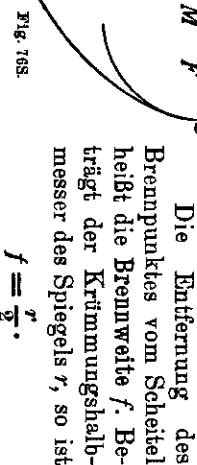


Fig. 768.

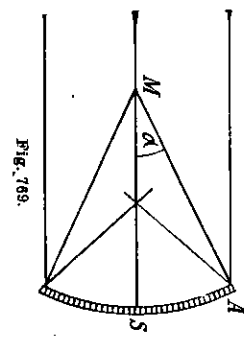


Fig. 769.

Die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel heißt die Brennweite f . Betrachtet man die Krümmungshalbmesser des Spiegels r , so ist

$$f = \frac{r}{2}.$$

Bei größeren Öffnungswinkeln vereinigt der sphärische Spiegel die achsenparallelen Strahlen nicht mehr in einem Punkte (Fig. 765). Die Durchschnittspunkte benachbarter Strahlen liegen auf einer in eine Spitze auslaufenden Fläche (Brennfläche). Die Spitze der Brennfläche ist der Brennpunkt.

Man sieht die Brennfläche, wenn Sonnenlicht auf die hohle Fläche eines versilberten Uhrglases fällt, und wenn man Rauch in den Strahlengang hineinbläst; sie erscheint besonders hell im Vergleich zum übrigen Raume. Die eigentümlich geförmte helle Linie, die entsteht, wenn Sonnenlicht in einem blanken Serviettenring oder Fingerring fällt, der auf einer weißen Unterlage liegt, ist der Durchschnitt der Brennfläche mit der weißen Unterlage, die Katakanstikka¹⁾ (Fig. 770).

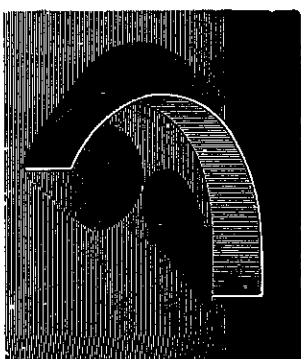


Fig. 770. Katakanstikka.

§ 259. Hohlspiegel (Konkavspiegel). (Divergente und konvergente Strahlen.)

1. Gegenstandspunkt und Bildpunkt auf der Achse. Die beiden Brennpunkte eines Ellipsenpunktes bilden mit der Normalen in diesem Punkte gleiche Winkel (S. 75). Stellt man daher eine punktförmige Lichtquelle in einem Brennpunkte eines Spiegels von der Form eines Umdrehungsellipsoids auf, so werden die Strahlen nach dem anderen Brennpunkte zurückgeworfen. Beide Punkte bestimmen die Achse des Ellipsoids.

Für kleine Öffnungswinkel kann man einen elliptischen Spiegel ebenfalls durch einen kugelförmigen Spiegel ersetzen, dessen Halbmesser gleich dem Halbmesser des Krümmungskreises im Scheitel der Ellipse ist.

Es ist also möglich, einen Spiegel von Kugelform herzustellen, der sowohl parallele Lichtstrahlen (§ 258), als auch die von einem Punkte ausgehenden divergenten Strahlen in einem Punkte vereinigt, wenn man nur den Öffnungswinkel des Spiegels genügend klein nimmt.

Es sei SAS (Fig. 771) ein Kugelspiegel mit dem Scheitel A und dem Krümmungsmittelpunkte M . G sei eine punktförmige Lichtquelle, von der aus divergente Strahlen auf den Spiegel fallen; $G C$ sei einer dieser Strahlen, GA ist ein anderer. Für ersteren ist CM das Einfallslot; GA wird in sich selbst zurückgeworfen. B ist der Vereinigungspunkt aller von G ausgehenden und vom Spiegel zurückgeworfenen Strahlen. Er heißt der dem Gegenstandspunkte G zugeordnete Bildpunkt. Der Strahl GC wird nach Punkte B der Achse so zurückgeworfen, daß $\sphericalangle GCM = \sphericalangle MCB$ ist. Da CM die Winkelhalbierende im ΔGCB ist, so folgt die Proportion $GC : CB = GM : BM$.

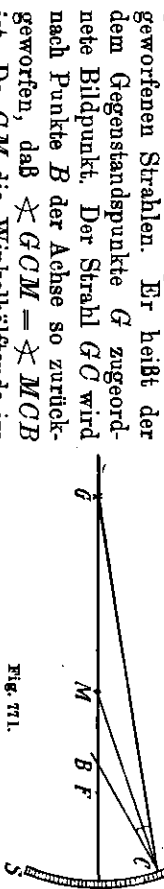


Fig. 771.

2. Festsetzung der Vorzeichen. Wir wollen an dieser Stelle eine Festsetzung über die Vorzeichen der maßgebenden Größen bei den Rechnungen

1) kata (griech.) = von, herab, gegen; kausitikós (griech.) = brennend.

mit den Abbildungsgesetzen in folgender Weise treffen: Das Licht falle immer von links nach rechts. Der Abstand eines Licht aussendenden Punktes von einem Spiegel werde stets im Sinne der Lichtbewegung positiv gerechnet. Es haben also in Fig. 771 GC und GA positiven Sinn, da sich das Licht von G zum Spiegel hin bewegt; BC und BA haben negativen Sinn, da sich das Licht vom Spiegel zu dem Punkte B hin bewegt. Wir wollen den Anfangspunkt der Zählung für die Strecken GA und BA in den Scheitel A des Spiegels legen, also ein für allemal die Strecken im Erstreckungssinne von A bis G und von A bis B rechnen. Das deuten wir durch die Bezeichnung AG und AB (im Gegensatze zu GA und BA) an. Dann hat in Fig. 771 AG negativen Sinn, AB positiven Sinn. Dann die Zählung AG ist entgegengesinnig der zugehörigen Lichtbewegung, die Zählung AB ist gleichsinnig. Es soll also $AG = -GA$ und $BA = -AB$ genommen werden. — Der Abstand des Krümmungsmittelpunktes M eines Spiegels soll

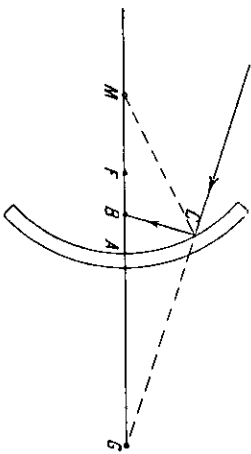


Fig. 772.

immer positiv gerechnet werden, wenn M links vom Scheitel A liegt (so daß der zurückgeworfene Strahl sich zum Mittelpunkt M hin bewegt).

Fig. 772 stellt uns den Strahlengang dar, wenn AG und AB positive Zahlenwerte habe. Der Gegenstandspunkt G auf der Achse des Spiegels liegt jetzt hinter dem Spiegel; von ihm gehen keine divergenten Lichtstrahlen mehr aus, sondern es zielen konvergente Strahlen auf ihn hin. Der Gegenstandspunkt G ist dann virtuell (§§ 247, 254), da sich nur die Verlängerungen der einfallenden Strahlen in ihm schneiden. Der zugehörige Bildpunkt B ist reell.

3. Die Scheitelwertengleichung. In Fig. 772 ist CM die Winkelhalbierende des Außenwinkels von $\triangle GBC$. Daher folgt wie oben (s. 1.) die Verhältnisgleichung

$$GC : CB = GM : BM.$$

Wir setzen zur Abkürzung $AG = a$, $AB = a_1$ und $AM = 2f$. (In Fig. 771 ist gemäß den Festsetzungen (o. 2.) also a negativ, in Fig. 772 positiv; in beiden ist a_1 und f positiv.) Wir nennen $AG = a$ die Scheitelweite (auch Schnittweite) des Gegenstandspunktes oder die Gegenstandsweite, $AB = a_1$ die Scheitelweite (Schnittweite) des Bildpunktes oder die Bildweite, $AF = \frac{1}{2}AM = f$ die Brennweite und merken: Der Hohlspiegel hat eine positive Brennweite; der Gegenstandspunkt ist bei positiver Scheitelweite virtuell, bei negativer Scheitelweite reell; der Bildpunkt ist bei positiver Scheitelweite reell, bei negativer Scheitelweite virtuell (s. o. 2.).

Beschränkung auf Nullstrahlen. Für kleine Öffnungswinkel (§ 258) $\sphericalangle CMA$ der abbildenden Strahlen fällt C in die Nähe von A . Die Strahlen haben zugleich eine sehr kleine Neigung $\sphericalangle CGA$ gegen die Achse. Solche

Strahlen sollen Nullstrahlen heißen. Für diese kann man GC durch GA und CB durch AB ersetzen. Unter dieser Beschränkung läßt sich die Verhältnisgleichung schreiben:

$$GA : AB = GM : BM.$$

Dafür kann man an der Hand von Fig. 772 setzen

$$-a : a_1 = -(2f + a) : (2f - a_1).$$

Daraus ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f}.$$

Diese Gleichung soll die Scheitelwertengleichung heißen; ihr Inhalt kann so ausgesprochen werden: Die reziproke Scheitelweite des Bildpunktes ist gleich der Summe aus der reziproken Scheitelweite des Gegenstandspunktes und der reziproken Brennweite.

Bemerkung: Es ist manchmal üblich, die Scheitelweite des Gegenstandspunktes im entgegengesetzten Sinne zu unserer Festsetzung positiv zu zählen. Dann erscheint die Gleichung symmetrisch in bezug auf die Größen a und a_1 . Unsere Festsetzung ist gewählt worden, um in Übereinstimmung mit späteren Festsetzungen bei der Betrachtung der Abbildung durch Linsen zu bleiben.

4. Die Zuordnung. Einem jeden Gegenstandspunkte G entspricht ein Bildpunkt B und umgekehrt. Man nennt B und G einander zugeordnete Punkte. In dieser Zuordnung können B und G ihre Stellung miteinander vertauschen, d. h. rückt der Gegenstand an den Ort seines vorherigen Bildes, so wandert das Bild an den Ort, den vorher der Gegenstand eingenommen hatte. (Involutrische) Zuordnung.)

Ist insbesondere $a = -2f$, fällt also der Gegenstand in den Krümmungsmittelpunkt, so ist $a_1 = 2f$. Im Krümmungsmittelpunkte begegnen sich also Bild und Gegenstand. Dasselbe gilt für den Scheitel A mit den Scheitelweiten $a = a_1 = 0$. Man nennt daher den Krümmungsmittelpunkt M und den Scheitelpunkt A die Doppelpunkte (auch Ordnungspunkte) der Zuordnung.

Für $a = \infty$ wird $a_1 = f$; entsprechend wird $a = -f$ für $a_1 = \infty$, d. h.: der Brennpunkt ist das Bild eines unendlich fernen Punktes; parallel zur Achse auf den Spiegel fallende Strahlen werden also im Brennpunkte vereinigt, oder, da die Zuordnung wechselseitig ist: das Bild des Brennpunktes ist der unendlich ferne Punkt der Achse; vom Brennpunkte aus auf den Spiegel fallende Strahlen werden also parallel zur Achse zurückgeworfen.

5. Die Newtonsche Abbildungsgleichung. Statt vom Scheitel A als Anfangspunkt der Zählung aus kann man die Abstände der ineinander abgebildeten Punkte G und B auch vom Brennpunkte F aus zählen.

Wir wollen die Abstände (Fig. 772) $FG = g$ und $FB = b$ die Brennpunktsweiten des Gegenstands- und Bildpunktes nennen und g wie a nach

1) involvere (lat.) = umwälzen; „involutorisch“ soll also etwas bedeuten, das umgekehrt werden kann.

rechts, b wie a_1 nach links positiv zählen. Es gilt dann

$$g = FG = FA + AG = a + f$$

$$b = FB = -AF + AB = a_1 - f,$$

und

$$a = g - f \text{ und } a_1 = b + f.$$

Die Gleichung der Scheitelweiten (s. o. 3) geht damit über in

$$\frac{1}{b+f} = \frac{1}{g-f} + \frac{1}{f}.$$

Nach geeigneter Umformung entsteht hieraus die Newtonsche Abbildungsgleichung oder Gleichung der Brennpunktswerten:

$$g \cdot b = -f^2.$$

6. **Konvergenzgleichung.** Die Scheitelweitengleichung kann durch eine andere Betrachtungsweise anschaulich abgeleitet werden. Daran anschließend bietet sich Gelegenheit, den Inhalt des Satzes auf eine andere Art auszudrücken, die in mancher Hinsicht Vorteile bietet. Nach Fig. 771 ist $\sphericalangle CMA$ Außenwinkel zum Dreieck CGM . Daher gilt

$$\sphericalangle CMA = \sphericalangle CGA + \sphericalangle GCM.$$

Da Winkel CBA Außenwinkel zum Dreieck CMB ist, gilt entsprechend

$$\sphericalangle CMA = \sphericalangle CBA - \sphericalangle BCM.$$

Addiert man die Gleichungen und berücksichtigt die Gleichheit der Winkel bei C , so folgt:

$$2 \sphericalangle CMA = \sphericalangle CGA + \sphericalangle CBA.$$

Denken wir uns nun um G und B mit GC und BC als Halbmesser Bögen geschlagen, so werden diese die Achse in um so größerer Nähe von A treffen, je geringer der Öffnungswinkel des Hohlspiegels ist. Für kleine Öffnungswinkel kann man diese beiden Bögen dann gleich dem Bogen AC setzen. Rechnen wir nun die Winkel der letzten Gleichung in absolutem Maße, also in Radien als Einheit, mit der Berücksichtigung, daß in der Fig. 771 GA und BA entgegengesetztes Vorzeichen haben, so sind die Winkelgrößen gleich den Verhältniszahlen von den zugehörigen Bögen und den Radien. Damit wird die Gleichung

$$\frac{2AC}{MA} = \frac{AC}{GA} + \frac{AC}{BA} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f}.$$

Aus der Ableitung sehen wir, daß die Größe $\frac{1}{a}$ ein Maß für die Größe des Winkels CGA ist, oder ein Maß für die Öffnung des Strahlenbündels, welches von G aus auf den Hohlspiegel fällt, wenn wir C als äußersten Spiegelpunkt betrachten. Ebenso ist $\frac{1}{a_1}$ ein Maß für die Öffnung des Strahlenbüschels, welches vom Spiegel her sich in B vereinigt. Daher hat man die Größen $\frac{1}{a} = A$ und $\frac{1}{a_1} = A_1$ die *Konvergenz des Gegenstandspunktes und Bildpunktes* genannt. Führt man noch für $\frac{1}{f} = D$ die Bezeichnung *Stärke des Hohlspiegels* ein, so erhält man nach Gullstrand¹⁾ die einfache Gleichung

$$A_1 = A + D,$$

1) A. Gullstrand, Prof. der physiol. Optik in Upsala.

§ 260. Der Zusammenhang zwischen den Scheitelweiten und Brennpunktswerten 769
 a. h. die *Konvergenz des Bildpunktes ist immer gleich der Summe aus der Konvergenz des Gegenstandspunktes und der Stärke des Hohlspiegels.*

Rechnet man a_1 , a und f in Metern, so erhält man die Konvergenzen und die Stärke des Hohlspiegels in *Dioptrien*. Ein Hohlspiegel hat also dann die Stärke 1 Dioptrie, wenn seine Brennweite $f = 1$ m oder sein Krümmungsradius $r = 2$ m ist.

§ 260. Der Zusammenhang zwischen den Scheitelweiten und Brennpunktswerten.

Nach unseren Festsetzungen (§ 259, 2, 3) ist der Gegenstandspunkt G (Fig. 771) in bezug auf den Hohlspiegel reell, wenn er links vom Hohlspiegel liegt, also für $-\infty \leq a \leq 0$. Nun ist $\frac{1}{a} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a}$ auch positiv, d. h. das Bild B reell, so lange $-\infty \leq a \leq -f$. Wird $a = -f$, so tritt ein Vorzeichenwechsel von a_1 ein. Es ist a_1 negativ, d. h. das Bild liegt rechts vom Spiegel und wird virtuell, wenn $-f < a < 0$ ist. Wandert also der reelle Gegenstandspunkt von links aus der Unendlichkeit nach rechts auf den Hohlspiegel zu, so wandert der reelle Bildpunkt vom Brennpunkte F aus nach links vom Spiegel fort. Im Krümmungsmittelpunkte begegnen sich beide. Hat der Gegenstandspunkt den Brennpunkt F erreicht, so ist der Bildpunkt nach links in die Unendlichkeit gewandert. Wandert nun aber der reelle Gegenstandspunkt in den Raum FA hinein, so erscheint ein virtueller Bildpunkt rechts von A , der dem Gegenstandspunkt entgegenwandert. In A für $a = a_1 = 0$ begegnen sich beide Punkte zum zweiten Male. Reelle Bildpunkte zwischen A und F erscheinen dann für alle virtuellen Gegenstandspunkte rechts von A .

Die durch die Gleichung $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f}$ bestimmte funktionale Abhängigkeit der Scheitelweiten voneinander ist in Fig. 773 graphisch dargestellt. Der reellen Bildpunkten entsprechende Teil der Kurve ist ausgezogen, der andere Teil gestrichelt worden. — Etwas einfacher stellt sich der Zusammenhang der Brennpunktswerten b und g dar; die Kurve der graphischen Darstellung ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Achsen der Brennpunktswerten b und g sind. Sie sind in Fig. 773 eingetragen.

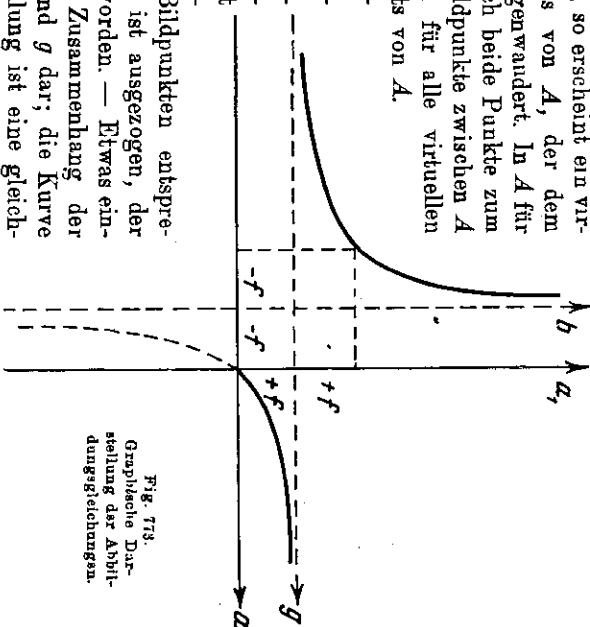


Fig. 773. Graphische Darstellung der Abbildungsgleichungen.

§ 261. Nebenachse. Vergrößerung. Sphärische Abweichung. Blenden.

1. Nebenachse. Wir können jede durch den Krümmungsmittelpunkt eines kugelförmigen Hohlspiegels gezogene Gerade als Achse betrachten. Wir wollen sie in Gegenüberstellung zu der schon eingeführten Hauptachse, die den Mittelpunkt des Spiegels mit dem Krümmungsmittelpunkte verbindet, eine Nebenachse nennen. Ziehen wir daher durch den seitlich gelegenen Punkt A' (Fig. 774) und den Krümmungsmittelpunkt M eine Gerade, und schlagen wir um M Kreise, die durch F , B und G gehen, und die die Nebenachse in F , B und G' schneiden, so gehört zu dem Gegenstandspunkte G' das Bild B' .
 2. Ebenes Bild. Bei kleinen Öffnungswinkeln können wir die Bögen $F'F'$, BB' und $G'G'$ durch die in F , B und G errichteten Lote ersetzen. Wenn daher als Gegenstand in G eine kleine ebene Fläche senkrecht zur Hauptachse aufgestellt ist, so entsteht in B ein dem Gegenstande ähnliches, senk-

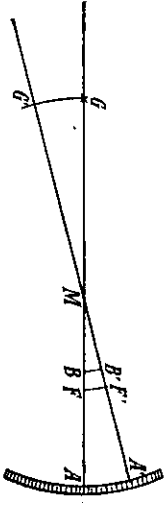


Fig. 774.

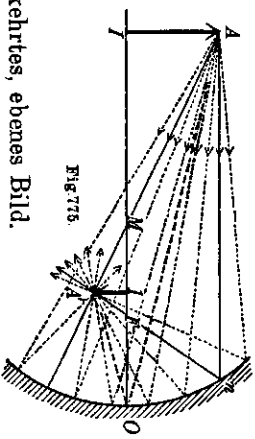


Fig. 775.

recht zur Hauptachse stehendes, umgekehrtes, ebenes Bild.

3. Vergrößerung. Das Verhältnis $BB' : GG' = v$ heißt die Vergrößerung des Bildes. Es gilt (Fig. 774) $BB' : GG' = MB : MG$. Daher ist $v = \frac{MB}{MG} = \frac{AB - AM}{AG - AM}$. Nun ist in Fig. 774 $AB = a_1$, $AM = r = 2f$ und $AG = -a$ zu setzen (§ 259, 2). Damit wird $v = \frac{a_1 - 2f}{-a - 2f}$. Mit der Gleichung $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f}$ (S. 767) oder $f = \frac{aa_1}{a - a_1}$ folgt daraus $v = \frac{a_1}{a}$. — Das kann man auch aus Fig. 775 unmittelbar ablesen.

4. Zeichnung des Bildes. In Fig. 775 ist dargestellt, wie man das Bild A' eines nicht auf der Hauptachse liegenden Punktes A durch Zeichnung finden kann, wenn man den Krümmungsmittelpunkt M und den Brennpunkt F des Spiegels kennt: Man zieht von A aus parallel zur Hauptachse den Strahl AM , der durch den Brennpunkt F zurückgeworfen wird. Ferner zieht man durch den Krümmungsmittelpunkt den Strahl AM , der vom Spiegel in sich selbst zurückgeworfen wird. Der Schnittpunkt A' ist dann das Bild von A ; in ihm schneiden sich auch alle übrigen, von A ausgehenden Lichtstrahlen.

Der Schnittpunkt O (Fig. 775) der Hauptachse MF mit dem Spiegel heißt der optische Mittelpunkt des Spiegels. Von allen Strahlen, die von A ausgehen und den Spiegel treffen, heißt AO der mittlere Strahl oder der Hauptstrahl des abbildenden Bündels (§ 254).

5. Bildwölbung. Nur bei kleinen Öffnungswinkeln der abbildenden Strahlen werden durch einen Kugelspiegel die von einem Gegenstandspunkte ausgehenden Strahlen wieder genügend genau in einem Bildpunkte vereinigt. Daher können auch nur kleine zu der Achse senkrecht stehende ebene Flächenstücke durch ebene Bilder abgebildet werden. Wir wollen einen Sonderfall betrachten, in welchem bei größeren Strahleneigungen der Strahlen gegen die Hauptachse zwar ein jeder Gegenstandspunkt noch einen scharfen Bildpunkt besitzt, in welchem aber das Bild gekrümmt erscheint.

Es sei M der Krümmungsmittelpunkt (Fig. 776), A der optische Mittelpunkt eines Hohlspiegels, F der Brennpunkt, und es befinde sich in G auf der Hauptachse MA ein ebener leuchtender Gegenstand. Von dem beliebigen Punkte P dieses Gegenstandes gehe nun ein Strahlenbündel aus. Wir wollen annehmen, daß dieses Lichtbündel keine große Öffnung habe und daß sein Hauptstrahl durch den Krümmungsmittelpunkt M geht. Der Achsenpunkt G des Gegenstandes möge seinen Bildpunkt in B haben; dann hat der beliebige Punkt P seinen Bildpunkt P' auf der Nebenachse $A'P$. Es gilt nach der allgemeinen Gleichung von § 259, 5, wobei wir $FB = F'P' = b$ und $FG = F'P = -g$ nehmen,

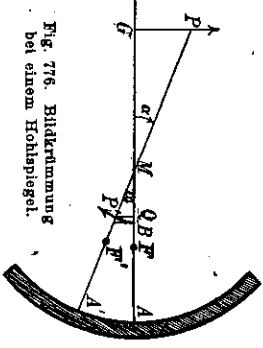


Fig. 776. Bildwölbung bei einem Hohlspiegel.

$F'P \cdot F'P' = -(MP + f)(f - P'M) = -f^2$.
 Daraus folgt $P'M = \frac{MP \cdot f}{MP + f}$. Ist nun die Nebenachse um den Winkel α gegen die Hauptachse geneigt, so ist $MP = \frac{FG - FM}{\cos \alpha} = \frac{-g - f}{\cos \alpha}$ und die Projektion von MP' auf die Hauptachse $MQ = MP' \cdot \cos \alpha$. Durch Einsetzen und Umformen erhält man

$$QM = \frac{(-g - f) \cdot \cos \alpha}{-g - 2f \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$BQ = -QB = \frac{2f \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} (g + f)^2}{g (g + 2f \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2})}$$

Legen wir durch B eine Ebene senkrecht zur Hauptachse GA , so hat der Bildpunkt P' von dieser Ebene den Abstand $QB = MB - MQ$. Hierin ist noch $MB = MF - BF = -f + b = -f - \frac{f}{g}$. Durch Einsetzen und Umformen erhält man

BQ hat somit für kleine Neigungswinkel α sehr kleine Werte, wächst aber mit wachsendem α stark an, d. h.: Je weiter entfernt sich in unserem Falle ein Gegenstandspunkt des achsensenkrecht ebenen Gegenstandes von der Achse befindet, um so mehr rückt sein Bildpunkt vom Spiegel fort aus der Bildebene heraus, welche durch den

Achsenpunkt bestimmt ist. Das Bild ist gekrümmt; es wendet dem Scheitel A die erhabene Seite zu. Wenn man daher in B einen ebenen Schirm zum Auffangen des reellen Bildes benutzt, so kann nur der mittlere Teil des Bildes scharf abgebildet werden, während die seitlichen Teile verschwommen erscheinen. Dann der Vereinigungspunkt der einen seitlichen Bildpunkt erzeugenden Strahlen liegt weiter vom Spiegel ab; die Strahlen haben sich auf dem Schirme noch nicht vereinigt; vielmehr entstehen als Durchschnittsfigur des Strahlenkegels mit dem ebenen Schirme kleine Kreise. Diese Kreise heißen Zerstreuungskreise.

6. Kugelgestaltfehler. Blenden. Die durch die Zerstreuungskreise hervorgerufene Unschärfe wird sphärische Abweichung oder *Aberration*¹⁾ genannt. Bei der Verwendung der Hohlspiegel zu optischen Instrumenten darf man nur solche von kleinen Öffnungswinkeln benutzen. Um die den Rand eines größeren Hohlspiegels treffenden Lichtstrahlen und die damit verbundene Unschärfe zu vermeiden, setzt man in den Gang der Lichtstrahlen undurchsichtige Schirme mit kreisförmigen Öffnungen, sogenannte Blenden. Die Wirkungsweise der Blenden wird in § 263 eingehend behandelt werden.

7. Andere Bildwölbungen. Eine enge Blende im Krümmungsmittelpunkte M wäre schon notwendig gewesen, um die Voraussetzung unserer obigen Betrachtung (s. o. 5.) über die Bildwölbung zu gewährleisten. Sie hätte die Aufgabe gehabt, von jedem Punkte P nur so schmale Bündel auf den Spiegel hindurchfallen zu lassen, daß je ein hinreichend scharfer Bildpunkt P' auf dem Hauptstrahl PM entstanden wäre. Statt dieser Bildwölbung durch eine Mittelpunktsblende kann man mit Hilfe von Blenden an anderen Stellen der Achse auch andere Bildwölbungen erzielen.

Es möge z. B. in Fig. 775 unmittelbar vor dem optischen Mittelpunkt O auf der Achse eine solche Blende gedacht werden, so daß von dem Gegenstandspunkte A — der jetzt achsenfern anzunehmen ist — nur ein schmales Bündel mit dem Hauptstrahl AO zur Abbildung beitragen kann. Es werde mit anderen Worten die Abbildung eines achsenfernen Gegenstandspunktes durch einen Hohlspiegel sehr kleiner Öffnung betrachtet. Der Bildpunkt A' ist dann der Krümmungspunkt der Strahlen des schmalen Büschels um den Hauptstrahl AO nach ihrer Reflexion. Der Hauptstrahl möge gegen die Hauptachse die Neigung α und die Projektion des Bildpunktes A' auf die Achse den Abstand a_1 von O haben. Wie eine eingehendere Rechnung zeigt, die eine Verallgemeinerung der Betrachtung in § 259, 6. ist, gilt dann die Gleichung $\frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{f \cos^2 \alpha}$. Für einen achsennahen Punkt hatten wir früher aufgefunden (S. 767) $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f}$, woin a der Abstand des Gegenstandes von O und f die Brennweite ist. Da $\frac{1}{f \cos^2 \alpha}$ größer ist als $\frac{1}{f}$, so muß a_1 kleiner sein als a . Je ferner also bei dieser Abbildung ein Gegenstandspunkt der Achse ist, desto näher liegt die Projektion seines Bildpunktes an O . Das Bild ist somit gekrümmt; es kehrt aber dem Spiegel seine hohle Seite zu.

1) aberratio (lat.) = Abirrtung, Zerstreuung.

§ 262. Erhabene Spiegel (Konvexspiegel).¹⁾

Bei den bisher betrachteten gekrümmten Spiegeln ist die hohle Seite einer Kugelfläche als spiegelnde Fläche benutzt worden, sie werden daher sphärische Konkavspiegel genannt. Verwendet man die erhabene oder konvexe Seite als spiegelnde Fläche, so heißen sie sphärische Konvexspiegel. Aus Fig. 777, in der ein sphärischer Konvexspiegel mit dem Krümmungsmittelpunkt M dargestellt ist, geht hervor, daß ein achsenparalleler Strahl $L_1 C$ divergent zur Hauptachse reflektiert wird. Die Rückwärtsverlängerung des reflektierten Strahles CR schneidet die Verlängerung der Hauptachse in F . Auch hier liegt F in der Mitte zwischen A und M . Wir nennen F den virtuellen Brennpunkt und AF die virtuelle Brennweite, die, da f entgegengesetzt wie beim Konkavspiegel gerechnet wird, auch negative Brennweite heißt.

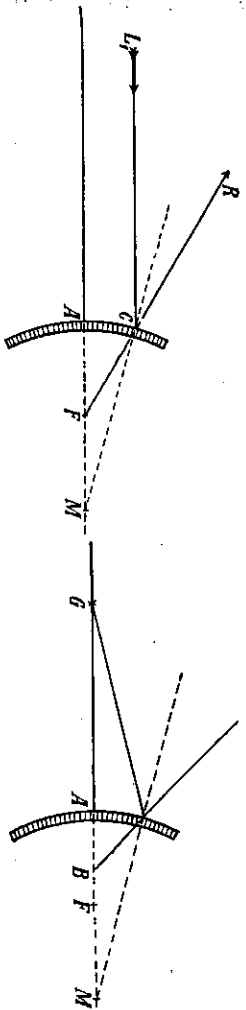


Fig. 777. Brennpunkt eines erhabenen Spiegels.

Fig. 775. Realer Gegenstandspunkt und virtueller Bildpunkt beim erhabenen Spiegel.

Bei einem Konvexspiegel können durch reelle Gegenstandspunkte nur virtuelle Bilder entstehen, denn die von der punktförmigen Lichtquelle G (Fig. 778) ausgehenden Strahlen verlassen den Spiegel nach der Reflexion stets divergent. Die Strahlen schneiden sich bei ihrer Rückwärtsverlängerung in einem hinter dem Spiegel liegenden Punkte B , dem virtuellen Bilde; die Scheitelweite AB ist negativ nach § 259, 2., 3. zu rechnen. Die Gleichung zwischen den Scheitelweiten und der Brennweite (Ableitung ähnlich wie bei Fig. 771), lautet wieder $\frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{f}$.

In dieser Gleichung ist die Brennweite negativ zu nehmen.

Die Zeichnung des Bildes für Punkte, die außerhalb der Achse des Konvexspiegels liegen, ist in Fig. 779 ausgeführt. Ein achsenparalleler Strahl Am wird so zurückgeworfen, daß der virtuelle Brennpunkt F' des erhabenen Spiegels der scheinbare Ausgangspunkt des zurückgeworfenen Strahles $m'v$ ist. Der nach dem Krümmungsmittelpunkte M zielende Strahl

1) convexus (lat.) = gewölbt, von convexiore = zusammengetragen.

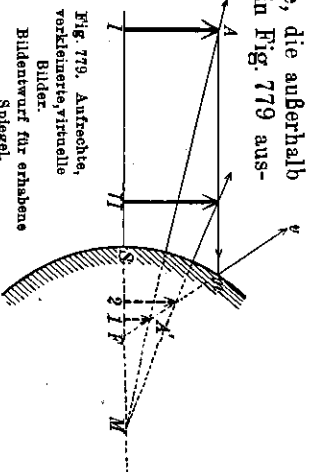


Fig. 779. Aufrechte, verkleinerte, virtuelle Bilder. Bildentwurf für erhabenen Spiegel.

774 AM wird in sich selbst zurückgeworfen. A' ist dann der scheinbare Ausgangspunkt der reflektierten Strahlen, also das virtuelle Bild von A . In der Figur ist die Konstruktion für zwei verschiedene Stellungen I und II des selben Gegenstandes ausgeführt worden. Von reellen aufrechten Gegenständen liefert der Spiegel virtuelle, aufrechte, verkleinerte Bilder.

§ 263. Blenden.

Eine punktförmige Lichtquelle sendet Strahlen nach allen Richtungen aus, wenn keine undurchsichtigen Körper dem Gange der Lichtstrahlen hindernd in den Weg treten; daher sehen wir eine solche Lichtquelle auch von allen Seiten in gleicher Weise. Wir sehen die Lichtquelle, trotzdem nicht alle Strahlen in unser Auge eindringen. Aus der Gesamtheit der von dem gesehenen Lichtpunkte ausgehenden Lichtstrahlen schneidet die Pupille P unseres Auges nur einen sehr kleinen Teil aus

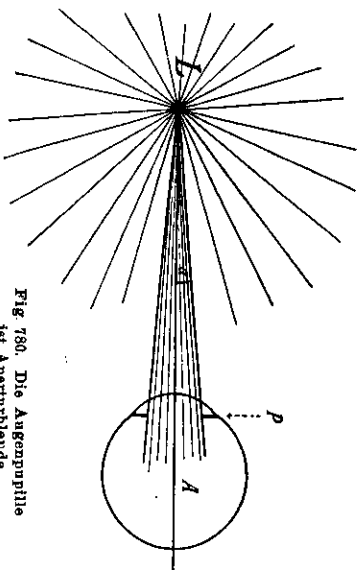


Fig. 780. Die Augenpupille ist Aperturblende.

(Fig. 780), der allein für das Sehen in Betracht kommt. Der Hauptstrahl des ins Auge gelangenden Bündels ist der Strahl von der Lichtquelle nach der Mitte der Pupille. Je größer die Pupille ist, um so größer ist die Zahl der in unser Auge eintretenden Strahlen, um so heller erscheint uns daher der gesehene Lichtpunkt. Die Helligkeit hängt ferner davon ab, wie weit der Lichtpunkt von unserem Auge entfernt ist. Denn da sich die Strahlen geradlinig ausbreiten, so ist die Grundfläche eines begrenzten Strahlenkegels um so größer, je weiter die Grundfläche vom Lichtpunkte entfernt ist. Sollen daher zwei Pupillen, die verschieden weit von der Lichtquelle entfernt sind, gleich viel Licht in die Augen lassen, so müssen sich die Durchmesser der Pupillen wie die Entfernungen von der Lichtquelle verhalten.

Hieraus folgt, daß die Helligkeit des uns zum Bewußtsein kommenden Bildes außer von der Intensität J der Lichtquelle von der Größe des Lichtkegels abhängt, dessen Spitze der Lichtpunkt und dessen Grundfläche unsere Pupillenöffnung ist. Dieser Lichtkegel heißt Öffnungskegel, und der (Kleine) Winkel α , den eine Seitenlinie des Öffnungskegels mit der Achse des Kegels bildet, heißt der Öffnungswinkel oder die Apertur.¹⁾ Die Grundfläche des Öffnungskegels (der räumliche Winkel) ist proportional α^2 , daher ist für die Helligkeit des Bildes eines leuchtenden Punktes der Ausdruck $J \cdot \alpha^2$ maßgebend.

1) Apertura (lat.) = Öffnung.

Da die Pupille den die Apertur bestimmenden Strahlenkegel aus der Gesamtheit der Strahlen abblendet, so heißt sie Aperturblende.

Es kann der Fall eintreten, daß noch eine andere Blende vorhanden ist, die aus der Gesamtheit der Lichtstrahlen einen Teil fortnimmt. Ist sie so angeordnet wie BB in Fig. 781, so hat sie auf die Öffnung des in unser Auge eintretenden Lichtstrahlenkegels keinen Einfluß. Denken wir uns aber die Lichtquelle L parallel der Blende BB nach

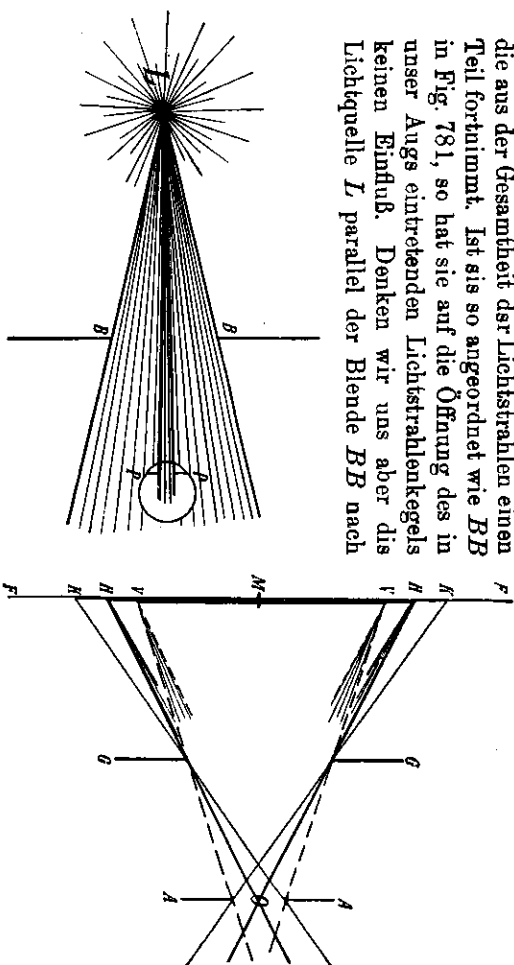


Fig. 781. BB ist Gesichtsfeldblende.

Fig. 782. Aperturblende AA und Gesichtsfeldblende GG .

oben verschoben, so ändert der durch die Blende BB gehende Lichtkegel seine Lage zum Auge, er rückt mit dem oberen Teile seiner Begrenzung der Pupille immer näher; es kann der Fall eintreten, daß er vollständig an der Pupille des Auges vorbeigeht. Dann kann das Auge die Lichtquelle nicht mehr sehen. Wir nennen die Gesamtheit aller Raumpunkte, von denen Licht in das Auge gelangen kann, also das vom Auge übersehbare Gebiet, das Gesichtsfeld. Wir erfahren also, daß die Blende BB das Gesichtsfeld begrenzt, abblendet; daher nennen wir BB eine Gesichtsfeldblende.

In Fig. 782 bedeutet FF eine Ebene, auf der sich eine punktförmige Lichtquelle bewegen möge, oder deren sämtliche Punkte Lichtquellen sind, z. B. ein beleuchtetes, also selbst wieder Licht aussendendes, an der Wand hängendes Gemälde. In einem beliebigen Abstände davon sei die Blende GG , z. B. eine Fensteröffnung in einer gegenüberliegenden Wand, angebracht. AA sei eine Aperturblende, z. B. die in übertriebener Größe gezeichnete Pupille eines ruhend auf M gerichteten Auges.

Der Punkt M verhält sich so wie der Punkt L der vorigen Figur. Die Blende GG hat auf den von M aus in die Aperturblende AA eintretenden Strahlenkegel keinen Einfluß. Ebenso verhalten sich die in der Nähe von M liegenden Punkte. Die äußeren Punkte, für die die Blende GG ohne Einfluß ist, sind die Punkte TV , denn sie senden noch einen vollen Lichtkegel (in der Figur angedeutet) aus, der die ganze Pupille AA ausfüllt.

Die sich an VV nach außen anschließenden Punkte senden Strahlenkegel

aus, deren Begrenzungsflächen noch durch die Aperturblende AA hindurchgehen. Die von HH ausgehenden Lichtstrahlen füllen die Blende AA nur zur Hälfte aus, und der äußerste Begrenzungsstrahl geht noch durch die Mitte von AA . Die Punkte KK endlich senden Strahlenkegel durch die Blende GG , von denen keiner mehr in die Öffnung der Aperturblende AA eintritt. Ebenso verhalten sich alle außerhalb KK liegenden Punkte.

Wir erkennen, daß GG das Gesichtsfeld (für ein in O befindliches unbewegliches Auge mit der Augenpupille AA) begrenzt, daher ist GG Gesichtsfeldblende. Das Gesichtsfeld ist nicht scharf begrenzt; vielmehr fängt die Begrenzung bei TV an und hört bei KK auf. Wenn wir in Zukunft den Begriff Gesichtsfeld gebrauchen, so verstehen wir hierunter den Teil des Gesichtsfeldes, der von Punkten begrenzt ist, die noch Strahlen in die Mitte des ruhenden Auges senden. Das sind die Hauptstrahlen.¹⁾ In diesem Sinne ist das Gesichtsfeld die ganze zwischen HH liegende Fläche.

Die Aperturblende bedingt durch ihre Größe die Helligkeit des gesehenen Bildes.

Die Größe des Gesichtsfeldes ist durch die Strahlen bestimmt, die von der Mitte der Aperturblende nach der Begrenzung der Gesichtsfeldblende gezogen werden.

§ 264. Das Gesichtsfeld eines ebenen Spiegels.

Vor dem ebenen Spiegel S (Fig. 783) befindet sich das Auge AP , dessen Pupille als Aperturblende wirkt. Von den Strahlen, die überhaupt auf den Spiegel fallen, können nur die durch die Pfeile angedeuteten Strahlen nach ihrer Reflexion in das Auge AP fallen. Der Rand des Spiegels begrenzt das im reflektierten Lichte übersehene Gesichtsfeld gerade so wie ein Loch in der Wand, also wirkt der Spiegel selbst durch seine Begrenzung GB als Gesichtsfeldblende.

Die von der Mitte der Pupille AP aus nach der Begrenzung der Gesichtsfeldblende gezogenen Strahlen würden das Gesichtsfeld begrenzen, wenn wirklich der Spiegel eine körperliche Blende wäre. Nun liegt aber das übersehene Gesichtsfeld infolge der Reflexion der Strahlen auf derselben Seite wie die Pupille AP . Wir müßten daher die Begrenzungsstrahlen nach dem Reflexionsgesetze reflektiert denken. Einfacher kommen wir zum Ziele, wenn wir das Bild der Pupille AP im Spiegel aufsuchen und von diesem Bilde aus nach der Begrenzung des Spiegels die Strahlen ziehen. Das Bild von AP ist EP . Wir ziehen von EP die Begrenzungsstrahlen nach der als Gesichtsfeld-

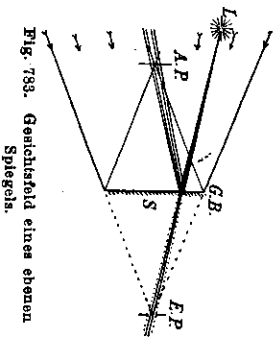


Fig. 783. Gesichtsfeld eines ebenen Spiegels.

1) Als Hauptstrahlen abbildender Strahlenbündel sollen auch sonst die mittleren Strahlen abbildender Bündel bezeichnet werden (§ 261, 4); ihre Lage ist bestimmt durch den Lichtpunkt und die Mitte derjenigen Aperturblende (Linsenfassung, Blendenöffnung), welche den Strahlenbündel am meisten einschränkt.

feldblende wirkenden Begrenzung GB des Spiegels. Wir können uns den Vorgang auch so vorstellen, als ob die Strahlen in EP , in das Bild der Pupille AP , eintröten. Daher nennt man EP die (hier virtuelle) Eintrittspupille und AP die Austrittspupille, insofern man dabei bedenkt, daß die Strahlen nach ihrer Reflexion das in Betracht kommende Gebiet durch die Blende AP verlassen.

Die Pupille des Beobachters ist Austrittspupille, das Spiegelbild der Pupille ist Eintrittspupille des ebenen Spiegels.

Zur Abgrenzung des Gesichtsfeldes suchen wir zuerst die Eintrittspupille auf, d. i. das Bild der Pupille des beobachtenden Auges, und ziehen von dessen Mitte aus die Begrenzungsstrahlen nach der Gesichtsfeldblende, also hier nach der als Gesichtsfeldblende wirkenden Begrenzung GB des ebenen Spiegels.

Von dem im Gesichtsfelde liegenden Lichtpunkte L gehen Strahlen nach allen Richtungen aus, auch sendet der Punkt Strahlen nach allen Punkten des Spiegels S ; doch geht nur ein geringer Betrag des reflektierten Lichtes durch die Pupille AP ; für die Erzeugung des vom Auge gesehenen Bildes des Punktes L haben die übrigen Strahlen keine Bedeutung. Um diesen Betrag, also den Strahlenkegel, der nach der Reflexion ins Auge eintritt, zu bestimmen, brauchen wir nur den Lichtkegel aufzusuchen, der seine Grundfläche in der Eintrittspupille EP hat. Die Eintrittspupille EP dient als Aperturblende.

§ 265. Das Gesichtsfeld eines Hohlspiegels.

Vor dem Hohlspiegel S (Fig. 784) befindet sich das (ruhende) Auge, dessen Pupille durch AP angedeutet ist. Das Auge übersieht den ganzen Kegel, der in der Mitte der Pupille seinen Scheitel und im Rande des Spiegels die Begrenzung seiner

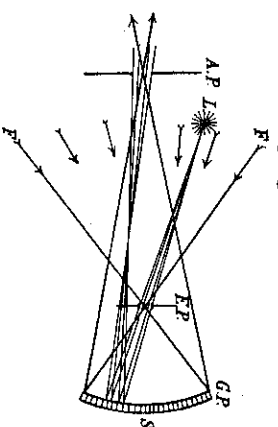


Fig. 784. Gesichtsfeld eines Hohlspiegels.

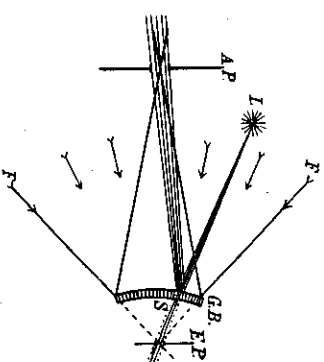


Fig. 785. Gesichtsfeld eines erhabenen Spiegels.

Grundfläche hat; also sieht das Auge im reflektierten Lichte auch alle die Lichtpunkte, die Strahlen innerhalb des soeben beschriebenen Kegels aussenden. Die äußersten Strahlen dieser Art sind durch FF angegeben; das übersehene Gesichtsfeld liegt also innerhalb FF .

Beyor die Strahlen FF auf den Hohlspiegel fallen, gehen sie durch einen Punkt der Achse, in welchem die Blende EP gezeichnet ist. Diese Blende EP kann als Eintrittspupille für alle diejenigen Strahlen angesehen werden, die nach der Reflexion durch die Austrittspupille AP gehen. Aus der Figur ergibt sich sofort, daß EP das zugehörige Bild von AP ist. Hieraus folgt für das Aufsuchen des Gesichtsfeldes:

Man sucht zu der als Austrittspupille wirkenden Augenpupille AP das optische Bild EP im Hohlspiegel. Dieses ist als Eintrittspupille anzusehen. Die Umrandung des Hohlspiegels ist die Gesichtsfeldblende. Das Gesichtsfeld wird von allen den Strahlen begrenzt, die von der Mitte der Eintrittspupille nach der Begrenzung des Hohlspiegels (oder im angegebenen Falle umgekehrt) gezogen sind.

Die Eintrittspupille EP ist die Grundfläche desjenigen von einem Punkte L des Gesichtsfeldes ausgehenden Lichtkegels, der nach der Reflexion in die als Austrittspupille wirkende Augenpupille AP eindringt. Die Eintrittspupille ist die Aperturblende für die Bildung des vom Auge AP wahrgenommenen Spiegelbildes irgendeines Punktes des Gesichtsfeldes.

Das Gesichtsfeld eines sphärischen Konkavspiegels wird nach Fig. 785 in der Weise gefunden, daß man zu der als Austrittspupille wirkenden Augenpupille AP das optische Bild EP geometrisch zeichnet; dieses wirkt als Eintrittspupille. Diejenigen Strahlen, die durch die Mitte der Eintrittspupille bis zur Begrenzung des als Gesichtsfeldblende GB wirkenden Spiegels S gezogen sind, begrenzen das Gesichtsfeld FF . Nur solche Strahlen kommen für die Wahrnehmung mit dem Auge AP in Frage, die von Punkten innerhalb des Gesichtsfeldes FF ausgehen; denn nur die Lichtquellen, die innerhalb FF liegen, können im Spiegel gesehen werden. Nur derjenige von L ausgehende Lichtkegel dringt ins Auge, dessen Basis in der Eintrittspupille EP liegt. Die Eintrittspupille ist Aperturblende.

Anmerkung: Wenn in einem Instrumente, das irgendwelche optisch wirkenden Vorrichtungen (Spiegel, Linsen usw.) enthält, Blenden angebracht sind, so wirken diese teils als Gesichtsfeldblenden, teils als Aperturblenden, sofern nicht die Pupille des Auges die Rolle einer dieser Blenden übernimmt. Auch die andere Begrenzung und die Fassung der Linsen und Spiegel können als Blenden wirken. Man hat zuerst zu untersuchen, welche Blende als Aperturblende wirkt; das ist im allgemeinen diejenige, die vom Gegenstande aus gesehen unter dem kleinsten Winkel erscheint. Entweder die Blende selbst, wenn sie zwischen dem Gegenstande und dem ersten optisch abbildenden Teile des Instrumentes liegt, oder aber sonst ihr optisches Bild, in dessen Mittelpunkt der Scheitel des als Gesichtsfeld begrenzenden Lichtkegels liegt, ist die Eintrittspupille des Instrumentes. Sie ist die Grundfläche eines jeden von den Punkten des Gesichtsfeldes ausgehenden Strahlenkegels, der für die Entstehung der Bilder in Frage kommt:

Die Eintrittspupille ist die Aperturblende des ganzen Systems.

Denkt man das Auge des Beobachters in die Mitte der Eintrittspupille versetzt, so erscheinen ihm die übrigen (zentrierten) Blenden bzw. Blendenbilder gleich-

sam wie konzentrische kreisrunde Fenster oder Luken, durch die hindurch er den Gegenstand beobachtet. Das kleinste dieser Blendenbilder begrenzt das gegenstandsseitige Gesichtsfeld; es wird Eintrittsluke genannt.

Die Eintrittsluke ist die gegenstandsseitige Gesichtsfeldblende.

§ 266. Brechung des Lichtes.

1. Lichtbrechung. Legt man auf den Boden eines undurchsichtigen Gefäßes eine Münze M , und stellt man sich so, daß die Münze dem Auge gerade durch den oberen Rand des Gefäßes verdeckt ist, so wird sie, wenn man Wasser in das Gefäß gießt, dem Auge von demselben Standpunkte aus sichtbar; sie scheint durch das Wasser bis M_1 gehoben zu sein (Fig. 786).¹⁾ — Taucht man einen geraden Stab schräg ins Wasser, so erscheint er an der Eintrittsstelle geknickt (Fig. 787), und zwar so, als ob jeder

(Fig. 787), und zwar so, als ob jeder

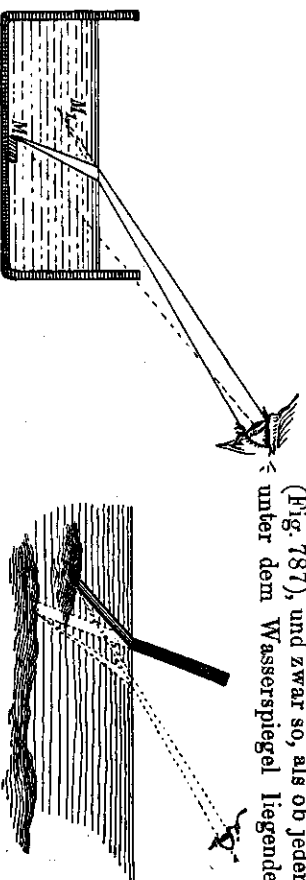


Fig. 786

Scheinbare Hebung eines Gegenstandes durch Lichtbrechung.

Fig. 787

Punkt des Stabes von seiner Stelle gerückt und gehoben wäre. Da die im Wasser liegenden Körper an einer anderen Stelle erscheinen, als sie in Wirklichkeit sind, so muß der Weg des Lichtes im Wasser und in der Luft verschieden sein von dem Wege, den das Licht zurücklegen würde, wenn es nur durch die Luft gehen würde.

Um das Verhalten eines Lichtstrahles beim Eintritt in Wasser zu verfolgen, machen wir folgenden Versuch: Ein zum Teil mit Wasser gefülltes Gefäß trägt an seiner Hinterwand eine weiße Scheibe, auf die ein Kreis gezeichnet ist (Fig. 788). Wir tauchen die Scheibe so weit ein, daß der Durchmesser JK des Kreises in gleicher Höhe mit dem Wasserspiegel liegt. LR stehe senkrecht auf der Wasseroberfläche. Lassen wir ein schmales Lichtstrahlenbündel E schräg so auf die Wasseroberfläche fallen, daß es die Grenzfläche von Luft und Wasser im Mittelpunkt des Kreises M trifft, so spaltet sich das Strahlenbündel in zwei Teile. Der eine Teil wird in der Richtung MS zurückgeworfen, der andere tritt ins Wasser ein. Das ins Wasser eintretende Strahlenbündel geht aber nicht in der ursprünglichen Richtung weiter, sondern es ist dem Durchmesser LR näher gerückt. Verändern wir die Richtung

¹⁾ Versuch schon dem Archimedes († 212 v. Chr.) bekannt.

des einfallenden Strahlenbündels, so ändert sich jedesmal die Richtung des durch das Wasser gehenden Strahlenbündels.

Diese Erscheinung nennt man **Brechung** (Refraction) des Lichtes. Der von seiner Richtung abgelenkte Strahl heißt der gebrochene Strahl. Der Winkel, den der gebrochene Strahl mit dem Einfallslot bildet, heißt der Brechungswinkel.

Fig. 788.
Brechung und Reflexion.

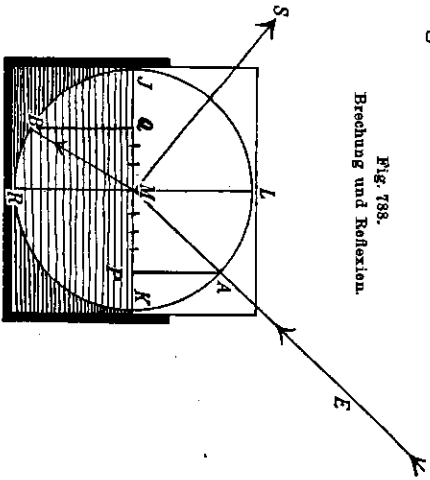
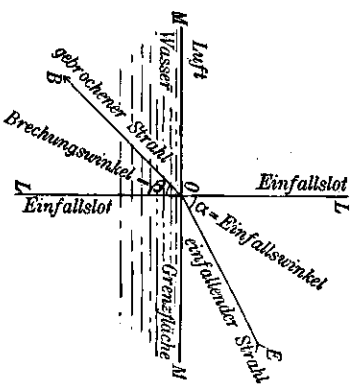


Fig. 789.



Eine Brechung des Lichtstrahles tritt stets ein, wenn das Licht aus Luft in irgendeinem andern durchsichtigen Körper in schräger Richtung fällt. Stellt man z. B. über einen längeren auf Papier gezogenen, geraden Strich einen Glaswürfel, und blickt man dann in schräger Richtung durch den Würfel nach dem Striche, so erscheint der von dem Würfel bedeckte Teil des Striches verschoben; die Verschiebung ist um so größer, je schräger man durch den Würfel hindurchsieht.

2. Das Brechungsgesetz. Die Versuche ergeben also folgendes Brechungsgesetz:

Treten Lichtstrahlen aus der Luft in einen andern durchsichtigen Körper ein, so werden sie von ihrer ursprünglichen Richtung um so mehr abgelenkt, je schräger sie die Begrenzungsfläche treffen.

Der einfallende Strahl, das Einfallslot und der gebrochene Strahl liegen in einer Ebene.

Mißt man bei allen Strahlen, die in verschiedenen Richtungen auf die ebene Begrenzungsfläche eines Körpers fallen, den jeweiligen Einfallswinkel und den Brechungswinkel, so findet man, daß beide Winkel in einer bestimmten Abhängigkeit voneinander stehen.

In Fig. 788 ist AM der einfallende, MB der gebrochene Strahl. Fällt man von A , wo der einfallende Strahl den Kreis schneidet, das Lot AP auf die Grenzfläche JK und von B , wo der gebrochene Strahl den Kreis schneidet, das Lot BQ auf JK , so findet man:

MP und MQ stehen immer in demselben Zahlenverhältnisse zueinander, wie groß auch immer der Einfallswinkel sein mag.

Beim Eintritt eines Lichtstrahles aus Luft in Wasser beträgt dieses Verhältnis

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{4}{3}.$$

Das Verhältnis $\frac{4}{3}$ heißt das Brechungsverhältnis oder der Brechungsexponent zwischen Luft und Wasser.

3. Snelliessches Brechungsgesetz. Man kann dem Brechungsgesetze eine einfachere Form geben, wenn man die trigonometrischen Funktionen des Einfallswinkels und des Brechungswinkels einführt.

Bezeichnet man nach Fig. 789 den Einfallswinkel mit α , den Brechungswinkel mit β , so ist immer

$$\sin \alpha : \sin \beta = n.$$

Diese Gleichung heißt das Snelliessche¹⁾ Brechungsgesetz.

In dieser Gleichung ist n das Brechungsverhältnis des Körpers, in den der Lichtstrahl von der Luft aus eintritt.

4. Optisch dichtere Mittel. Die verschiedenen durchsichtigen Körper brechen das Licht verschieden. Stärker brechende Körper nennt man optisch dichter. Die Stärke der Brechung wird durch das Brechungsverhältnis ausgedrückt. Luft hat die Brechungsstärke $n = 1$. Ist $n > 1$, so nennen wir den Körper (das optische Medium) optisch dichter; ist $n < 1$, optisch dünner als Luft.

Tritt ein Lichtstrahl von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Mittel (z. B. von Luft in Glas), so wird er stets zum Einfallslot hin gebrochen. Tritt er dagegen von optisch dichteren in ein optisch dünneres Mittel (z. B. von Glas in Luft), so wird er vom Einfallslot weggebrochen.

5. Das Brechungsverhältnis. Das Brechungsverhältnis hängt von der Natur der beiden durchsichtigen Körper ab, aus dem der Lichtstrahl kommt, und in den er eintritt.

Unter gewöhnlichen Verhältnissen (Fig. 788) lassen wir den Lichtstrahl aus Luft in einen andern durchsichtigen Körper z. B. Wasser oder Glas fallen. Tritt der Lichtstrahl aus einem luftleeren Räume in einen durchsichtigen Körper z. B. Glas ein, so ist das Verhältnis der Sinus des Einfallswinkels und des Brechungswinkels etwas anders, als wenn der Lichtstrahl von Luft in den Körper fällt. Wir nennen das Verhältnis der Sinus des Einfallswinkels α und des Brechungswinkels β beim Einfallen des Lichtes aus dem luftleeren Räume (S. 785) in den durchsichtigen Körper das „Brechungsverhältnis des Körpers“, (auch absolutes Brechungsverhältnis). Da aber das Verhältnis nur wenig geändert wird, wenn der

1) Willlebrord Snell van Royen, latinisiert Snellius, ein Holländer (1581—1626), fand das Gesetz um 1618; es wurde aber erst weiteren Kreisen durch Descartes bekannt, der es 1637 in seiner „Dioptrik“, wohl unabhängig von Snell, veröffentlichte. Die ersten Versuche, ein Brechungsgesetz zu finden, gehen auf den Alexandriner Claudius Ptolemäus (150 n. Chr.) zurück. Seine Messungen der Brechungswinkel an Wasser und Glas sind uns überliefert und stellen wohl die historisch älteste physikalische Experimentaluntersuchung vor.

Lichtstrahl aus Luft in den Körper fällt, so genügt es für uns in den meisten Fällen, folgende Begriffsbestimmung des Brechungsverhältnisses zu merken:

Das Brechungsverhältnis (Brechungsexponent oder Brechungsindex) eines Körpers ist das Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels eines Lichtstrahles, der aus Luft in den Körper eintritt.

Für angenäherte Berechnung genügt es zu merken: Das Brechungsverhältnis für Wasser ist $n = \frac{4}{3}$, für gewöhnliches Spiegelglas $n = \frac{3}{2}$. Genauere Werte finden sich in Tabelle XVII.

6. Die Ablenkung. Die Richtungsänderung, die ein Lichtstrahl bei der Brechung erfährt, heißt die Ablenkung. Für den Einfallswinkel α und den Brechungswinkel β ist die Ablenkung $\delta = \alpha - \beta$.

Die Ablenkung ist um so größer, je größer der Einfallswinkel ist, denn aus $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$ folgt $\sin \alpha - \sin \beta = (n - 1) \sin \beta$. Durch goniometrische Umformung wird hieraus

$$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = (n - 1) \sin \beta, \text{ also da } \alpha - \beta = \delta,$$

$$2 \sin \frac{\delta}{2} = (n - 1) \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}.$$

Mit wachsendem Winkel α wird auch β größer, daher nimmt der Zähler zu, während der Nenner $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ mit wachsenden Winkeln α und β kleiner wird. Folglich wird der ganze Ausdruck auf der rechten Seite, also auch $\sin \frac{\delta}{2}$ und δ selbst mit wachsendem Einfallswinkel größer.

7. Vertauschbarkeit des Lichtweges. Läßt man (Fig. 789) innerhalb Wasser den von O her eintretenden gebrochenen Lichtstrahl senkrecht auf einen ebenen Spiegel fallen, so daß der Lichtstrahl in sich selbst zurückgeworfen wird, so erleidet dieser bei O austretende Lichtstrahl eine Brechung vom Einfallslot fortgerade von der Größe, daß er auch in Luft mit dem eintretenden Strahle zusammenfällt, also auch in Luft in sich zurückkehrt. Bei der Vertauschung der Bewegungsrichtung eines Lichtstrahles mit der entgegengesetzten geht der Lichtstrahl sowohl bei der Reflexion als auch bei der Brechung in seiner eigenen Bahn zurück, oder ein möglicher Lichtweg kann sowohl vorwärts als rückwärts vom Lichte durchlaufen werden. Das ist der Satz von der Vertauschbarkeit der Lichtbewegung.

Tritt also ein Lichtstrahl aus dem durchsichtigen Körper wieder in Luft, so liegt jetzt der Einfallswinkel α_1 in dem durchsichtigen Körper, der Brechungswinkel β_1 in Luft, und es ist $\sin \alpha_1 = \frac{1}{n} \sin \beta_1$.

§ 267. Zeichnung des gebrochenen Strahles. Totale Reflexion.

Um zu einem einfallenden Strahle den zugehörigen gebrochenen Strahl durch Zeichnung zu finden, verfahren wir folgendermaßen: In Fig. 790 sei OO die ebene Grenzfläche des brechenden Körpers; beispielsweise sei der Raum

§ 267. Zeichnung des gebrochenen Strahles. Totale Reflexion

oberhalb OO von Luft, der Raum unterhalb OO von Glas erfüllt. Ein Lichtstrahl IA falle in A auf die ebene Grenzfläche. Wir errichten in A das Einfallslot SS_1 , und schlagen um A zwei Kreise, bei denen das Verhältnis der Halbmesser gleich dem Brechungsverhältnis ist. In unserer Figur verhalten sich, da $n = \frac{3}{2}$ (Glas) (§ 266) ist, die Halbmesser der beiden Kreise wie 3 : 2. Der einfallende Lichtstrahl schneidet den kleineren Kreis in B . Wir fallen von B aus auf OO das Lot, das OO in C und den größeren Kreis in D schneidet. Verbinden wir noch D mit A und verlängern wir DA über A hinaus, so gibt die Verlängerung AG den Gang des gebrochenen Lichtstrahles an. Es ist nämlich

✱ $S_1 A L = \angle A B C = \alpha$ der Einfallswinkel
 ✱ $S_1 A G = \angle C D A = \beta$ der Brechungswinkel.

und Aus der Figur folgt:

$$\sin \alpha : \sin \beta = \sin C B A : \sin C D A = \frac{AC}{AB} : \frac{AC}{AD} = AD : AB = n.$$

Wenn der Strahl aus Glas in Luft tritt, so ergibt sich die Zeichnung des gebrochenen Strahles aus der Figur unmittelbar, wenn man von der Geraden GA ausgeht, dann den Schnittpunkt D mit dem größeren Kreise sucht, das Lot DC fällt, das den kleineren Kreis in B schneidet, und nun A mit B verbindet.

Totale Reflexion. Wir erkennen aus Figur 790, daß die letzte Zeichnung nur dann ausführbar ist, wenn das von D auf OO gefällte Lot den kleineren Kreis schneidet. Die äußerste Grenzlage ist daher die, bei der OO das Lot den kleinen Kreis berührt. Die Grenzlage ist in Fig. 791 besonders gezeichnet. In diesem Falle tritt der gebrochene Strahl parallel (streifend) der Grenzfläche aus dem Glase aus. Für den die Grenzlage bestimmenden Grenzwinkel γ folgt aus

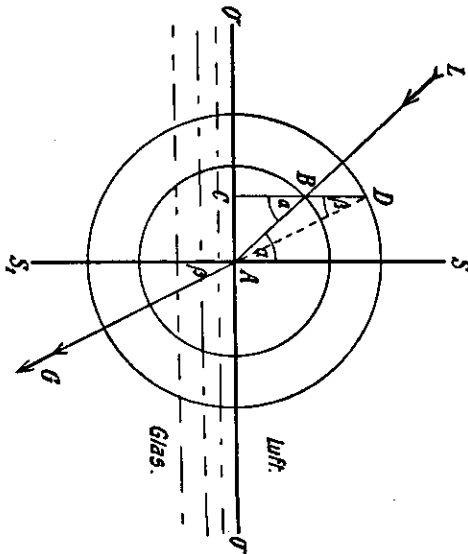


Fig. 790. Zeichnung des gebrochenen Strahles.

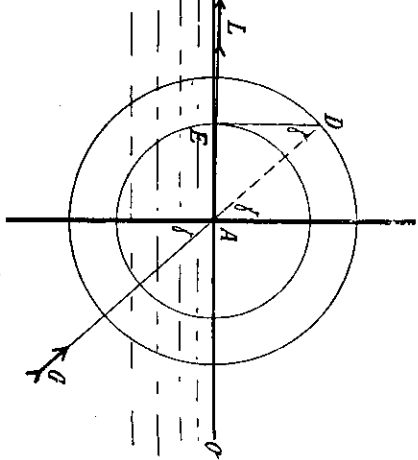


Fig. 791. Streifender Lichtstrahl.

Fig. 791 die Gleichung:

$$\sin \gamma = \sin ADE = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{n}$$

Da für Glas $n = \frac{3}{2}$ ist, so ist der Grenzwinkel bestimmt durch:

$$\sin \gamma = 0,67, \text{ also } \gamma = 42^\circ$$

Wird der Einfallswinkel im Glase größer, so gibt es keinen zu ihm gehörenden, in Luft liegenden Brechungswinkel; der Lichtstrahl kann dann aus dem Glase nicht austreten. Wenn ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier

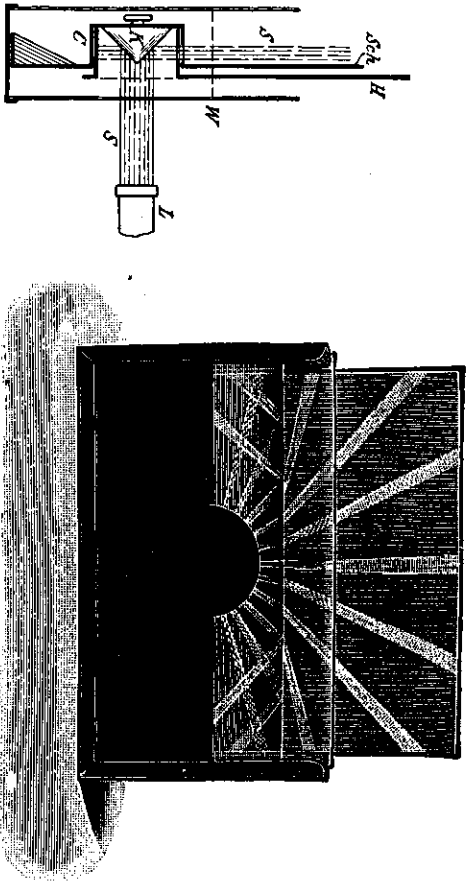


Fig. 792.

Grimschels Lichtbrechungsspekt.

Fig. 793.

brechender Mittel fällt, so tritt im allgemeinen sowohl eine Brechung als eine Reflexion ein. Wenn aber der Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel wird, so nimmt die Intensität des gebrochenen Strahles auf Null ab, und daher hat dann der reflektierte Teil des Strahles die volle Intensität des auffallenden Lichtes. Aus diesem Grunde nennt man diesen Vorgang totale Reflexion.

Eine totale Reflexion tritt stets ein, wenn ein Lichtstrahl aus einem optisch dichteren Mittel auf die Grenzfläche eines optisch dünneren Mediums fällt, und wenn der Einfallswinkel größer ist als der durch die Gleichung $\sin \gamma = \frac{1}{n}$ bestimmte Grenzwinkel der totalen Reflexion.

Man beobachtet die totale Reflexion, wenn man schräg von unten gegen die waagerechte Wasseroberfläche eines mit Wasser gefüllten Glases blickt, an dem eigentümlich intensiver Glanz, der so hell ist, als ob die Reflexion an einer polierten Silberplatte stattfände.

Das Verhalten eines Lichtstrahles, der aus einem optisch dichteren Mittel durch die Grenzfläche eines optisch dünneren Mittels tritt, kann in besonders auffallender Weise mit dem in Fig. 792 im Durchschnitt abgebildeten Apparate gezeigt werden. Die Fig. 793 stellt die dann eintretende Erscheinung dar: In eine mit Wasser gefüllte Glaswanne W wird ein auf der Vorderseite weißer Blechschirm

§ 267. Zeichnung des gebrochenen Strahles. Totale Reflexion

eingesetzt, der mit einem zylindrischen Blechansatze C versehen ist. Auf dem Boden dieses Ansatzes wird ein polierter, als Spiegel wirkender Metallkegel K mit rechtwinklig-gleichschenkeligen Achsenschnitte festgeschraubt. Ein von einer elektrischen Bogenlampe L ausgehendes paralleles Lichtstrahlenbündel S trifft die Spitze und die Seitenflächen des Kegels und wird hier durch Reflexion in ein ebenes, von der Achse des Kegels ausgehendes Strahlenbüschel verzandelt. Aus dem oberen Teile des zylindrischen Ansatzes können nun die Lichtstrahlen durch mehrere Öffnungen unter verschiedenen Winkeln austreten. Der mittlere Lichtstrahl, der die Wasseroberfläche rechtwinklig trifft, geht ungebrochen durch die Grenzfläche hindurch, die übrigen Strahlen werden in einen reflektierten und einen gebrochenen Teil zerlegt. Die äußersten Strahlen, die die Grenzfläche unter einem Winkel treffen, der größer ist als der Grenzwinkel der Totalreflexion, werden total reflektiert.

Zwei verschiedene Mittel. Tritt ein Lichtstrahl nicht von Luft in Glas, sondern von einem andern Mittel, z. B. von Wasser, in Glas (Fig. 794), so findet auch hier an der Grenzfläche eine Lichtbrechung statt. Zwischen dem im Wasser liegenden Einfallswinkel α und dem im Glase liegenden Brechungswinkel β besteht, wenn man das Brechungsverhältnis des Wassers mit n_1 , den des Glases mit n_2 bezeichnet, die Gleichung:

$$\sin \alpha : \sin \beta = n_2 : n_1$$

Dieser Gleichung kann man auch die Form geben

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

und sie sich als bequeme und allgemeinere Form des Brechungsgesetzes merken.

Die Gleichung läßt sich auf beliebig viele parallel geschichtete optische Mittel ausdehnen. Die Einfallswinkel seien i_1, i_2, i_3 usw., die zugehörigen Brechungsverhältnisse n_1, n_2, n_3 usw. Es gilt dann

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 = \dots = n_m \sin i_m$$

Die Größe $n \sin i$ ist also von einem optischen Mittel zu einem andern unveränderlich. (Sie ist eine optische Invariante.¹⁾)

Die Gleichung $\frac{\sin \alpha}{n_1} = \frac{\sin \beta}{n_2} = n$ für die Brechung eines Lichtstrahles, der aus Wasser in Glas eintritt, lehrt: Das Brechungsverhältnis n zweier Mittel (Wasser und Glas) gegeneinander ist gleich dem im richtigen Sinne genommenen Verhältnisse der Brechungsverhältnisse beider Mittel gegen ein drittes (Luft oder leerer Raum). Mit diesem Satze kann man alle gegen Luft gemessenen Brechungsverhältnisse in solche gegen den leeren Raum umrechnen. Das Brechungsverhältnis n_0 des Mittels Luft (bei 20° C § 351) gegen den leeren Raum ist $n_0 = 1,00028$. Hat daher ein Körper gegen Luft das Brechungsverhältnis n , gegen den leeren Raum n' , so muß gelten

$$\frac{n}{n_0} = n' \text{ oder } n' = n \cdot n_0 = n \cdot 1,00028.$$

¹⁾ invariant (lat.) = unveränderlich.

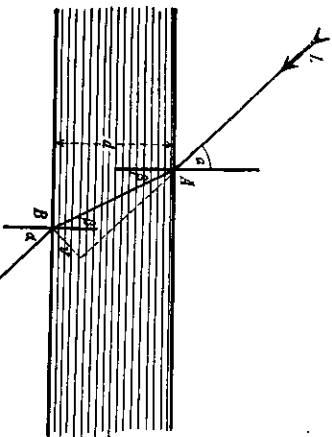
Grimschels, Physik. I. Große Ausgabe. 6. Aufl.

Diese Vergrößerung eines Verhältnisses kann erst dann praktische Bedeutung haben, wenn das Brechungsverhältnis n mit sehr großer Genauigkeit bekannt ist.

Fallt ein Lichtstrahl auf die Grenzflächen zweier Medien von gleichen Brechungsverhältnissen, so tritt keine Brechung ein, sondern der Lichtstrahl geht unverändert hindurch. Aus diesem Grunde sehen wir einen massiven Glasstab, der sich in einer Flüssigkeit von gleichem Brechungsverhältnisse, z. B. Zedernholzöl, befindet, nicht. — Durch Wasserstoffperoxyd gebleichte tierische Gewebe werden neuerdings dadurch vollkommen durchsichtig gemacht, so daß man die Knochen oder die mit Quecksilber gefüllten Bluthäuten innerhalb der unverletzten Gewebe beobachten kann, daß man die sorgfältig von allem Wasser befreiten Gewebe in Wintergrünöl einbettet, das mit den Geweben das gleiche Brechungsverhältnis hat. — Aus demselben Grunde sehen wir auch die Luft gewöhnlich nicht, da die von einer Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen ohne Richtungsveränderung in unser Auge gelangen. Dagegen sehen wir die Luft als Luftblasen im Wasser oder im Glase, weil hier an der Grenzfläche eine Brechung eintritt. Ein im Wasser schwimmender Fisch sieht nicht das Wasser, sondern infolge der an der Oberfläche eintretenden Lichtbrechung die Grenzfläche zwischen Wasser und Luft, daher gewissermaßen die Luft.

§ 268. Die planparallele Platte.

In Fig. 795 stellt der gestrichelte Streifen den Querschnitt durch eine von zwei parallelen Ebenen begrenzte durchsichtige Platte (z. B. von Glas)



dar. Ein Lichtstrahl IA fällt aus Luft auf die obere Begrenzungsebene der Platte unter dem Einfallswinkel α ; er wird zum Einfallslot h hin gebrochen. Der im Glase liegende Brechungswinkel ist β . Nun geht der Lichtstrahl geradlinig weiter und trifft die untere Begrenzungsebene in B ; der jetzt im Glase liegende Einfallswinkel ist, infolge der Parallelität der Begrenzungsebenen, gleich β . Der Strahl wird beim Austritte in die Luft vom Einfallslot h weggebrochen. Der jetzt in Luft liegende Brechungswinkel ist dem ersten Einfallswinkel α gleich, da für beide Begrenzungsebenen die Gleichung:

$$\sin \alpha : \sin \beta = n$$

Fig. 795. Parallelverschiebung durch eine planparallele Platte.

besteht (§ 266, 7.). Hieraus folgt, das der Lichtstrahl beim Durchgange durch die planparallele Platte keine Richtungsänderung erfährt, vielmehr wird der Lichtstrahl nur seitlich parallel verschoben.

Die Verschiebung ist um so größer, je größer die Dicke d der Glasplatte ist, und je größer der Einfallswinkel α ist. Sie berechnet sich nach Ausführung der

in der Figur punktiert angegebenen Hilfszeichnung zu

$$v = d \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}.$$

Man kann die Wirkung einer planparallelen Platte auf einen Lichtstrahl gut beobachten, wenn man nach Fig. 796 ein Lichtstrahlenbündel schräg von unten durch einen mit Wasser gefüllten Glaszrog leitet, dessen Boden aus einer Spiegelglasplatte besteht. Leitet man das Lichtstrahlenbündel so, daß es teilweise durch das Wasser, teilweise neben dem Troge vorbeigeht, so erkennt man auch die Größe der parallelen Verschiebung.

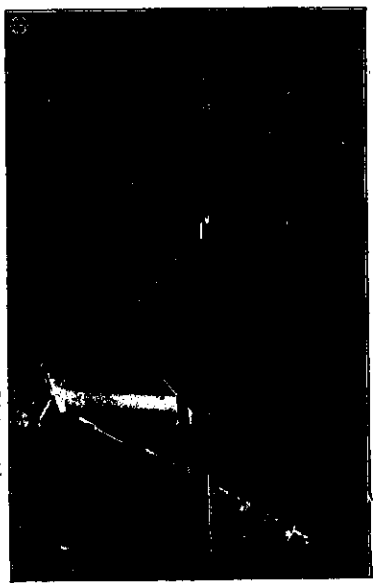


Fig. 796. Parallelverschiebung eines Lichtstrahles.

§ 269. Prismen.

1. Das Prisma. Ein optisches Prisma (Fig. 797) ist ein durchsichtiger Körper, bei dem zwei Begrenzungsflächen Ebenen sind, die einen Winkel miteinander einschließen. Die übrige Begrenzung ist für die Wirkung des optischen Prismas gleichgültig. Der Winkel ω , den die beiden begrenzenden Ebenen einschließen, heißt der brechende Winkel, und die Schnittkante AB der beiden brechenden Ebenen heißt die brechende Kante. Der brechende Winkel und die brechende Kante werden bei einem Prisma oft erst durch die Erweiterung der brechenden Ebenen gefunden. Eine Ebene, die senkrecht zur brechenden Kante durch das Prisma gelegt ist, heißt ein Hauptschnitt. Der Hauptschnitt schneidet die brechenden Ebenen nach geraden Linien, deren Schnittpunkt der Durchschnitt der brechenden Kante mit dem Hauptschnitt ist. Ein im Hauptschnitt auf den brechenden Ebenen errichtetes Lot liegt ganz innerhalb des

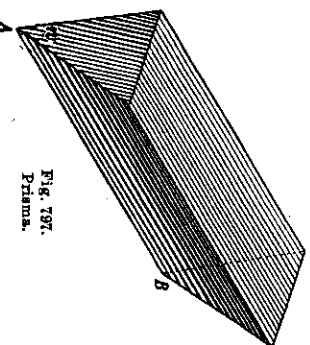


Fig. 797. Prisma.

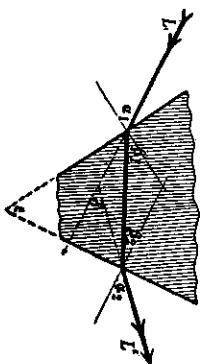


Fig. 798. Strahlengang beim Prisma.

Hauptschnittes. Ein im Hauptschnitt auf die brechende Ebene fallender Lichtstrahl bleibt bei der Brechung (§ 266, 2.) innerhalb des Hauptschnittes.

2. Der Strahlengang im Hauptschnitte. Wir betrachten im folgenden nur den Strahlengang in dem durch Fig. 798 dargestellten Hauptschnitte. Beim Eintritt eines Lichtstrahles aus Luft in das Prisma wird der Lichtstrahl

zum Einfallslotte hin gebrochen. Er geht im Glase geradlinig weiter, bis er die zweite brechende Ebene trifft, und hier wird er wieder vom Einfallslotte fort gebrochen. Infolge dieser zweifachen Brechung erfährt der Lichtstrahl eine Richtungsveränderung, eine Ablenkung. Die Ablenkung δ ist der Winkel, den der verlängerte auffallende Lichtstrahl mit dem rückwärts verlängerten austretenden Strahle einschließt.

Unter Benützung der in Fig. 798 angegebenen Bezeichnungen folgt

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 \quad \text{und} \quad \varepsilon = \beta_1 + \beta_2,$$

woraus sich ergibt $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon$.

Die Größe der Ablenkung δ hängt von der Größe der Winkel α_1 und α_2 und von dem brechenden Winkel ε des Prismas ab.

3. Der kleinste Wert der Ablenkung. Für $\alpha_1 = \alpha_2$ erreicht die Ablenkung bei demselben Prisma ihren kleinsten Wert (Minimum der Ablenkung bei symmetrischem Durchgange).

Beweis:

1. Wir nehmen an: $\alpha_1 \geq \alpha_2$, also $\alpha_1 - \alpha_2 \geq 0$. Durch Addition der beiden Gleichungen

$$\sin \alpha_1 = n \cdot \sin \beta_1$$

$$\sin \alpha_2 = n \cdot \sin \beta_2$$

und folgt $\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 = n(\sin \beta_1 + \sin \beta_2)$.

Durch goniometrische Umformung wird hieraus

$$2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = 2 n \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2},$$

und hieraus folgt, da $\beta_1 + \beta_2 = \varepsilon$ ist,

$$\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = n \sin \frac{\varepsilon}{2} \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Nun ist aber für $\alpha_1 \geq \alpha_2$ auch $\alpha_1 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \beta_2$, folglich auch

$$\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \geq \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2).$$

Da nun zu einem größeren Winkel ein kleinerer Kosinus gehört, so folgt

$$\cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) \geq \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2), \quad \text{also} \quad \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)} \geq 1.$$

Das Größenzeichen hat Gültigkeit für $\alpha_1 > \alpha_2$ und das Gleichheitszeichen für $\alpha_1 = \alpha_2$. Der obige Quotient erhält daher einen möglichst kleinen Wert für $\alpha_1 = \alpha_2$. In diesem Falle setzen wir $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; dann erlangt auch der Ausdruck für $\sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ — der (s. o. 2.) die Ablenkung δ bestimmt — den kleinsten Wert, nämlich $\sin \alpha = n \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}$.

2. Nehmen wir an: $\alpha_1 \leq \alpha_2$, so wird $\alpha_1 - \alpha_2 \leq 0$, also auch $\beta_1 - \beta_2 \leq 0$. Die Überlegung ist dieselbe wie für 1., doch mit dem Unterschiede, daß $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \leq \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)$ wird. Beide Werte sind aber negativ; dem absoluten Werte nach ist also wieder die Differenz der Einfallswinkel größer als die der Brechungs-

winkel. Für den Quotienten $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}$ kommt nur der absolute Betrag der Winkel in Frage, da der Wert des Kosinus für einen negativen Winkel mit dem Kosinusworte für einen gleich großen positiven Winkel übereinstimmt. Daher wird auch in diesem Falle $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)} \geq 1$, woraus sich wieder ergibt, daß die Ablenkung für $\alpha_1 = \alpha_2$ am kleinsten wird.

Die kleinste Ablenkung für den symmetrischen Durchgang des Lichtstrahles durch das Prisma kann durch den Versuch auf folgende Weise nachgewiesen werden.

Man benutzt ein Prisma (Fig. 799), dessen Hauptschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck ist, und dessen drei Begrenzungsflächen poliert sind. Läßt man nun ein paralleles Strahlenbündel auf das Prisma fallen, so wird ein Teil des Strahlenbündels von der einen Fläche reflektiert (in der Figur gestrichelt gezeichnet), während ein anderer Teil des Strahlenbündels durch Brechung an den beiden anderen Begrenzungsflächen abgelenkt wird (in der Figur durch ausgezogene Linien gezeichnet). Dreht man nun das Prisma langsam aus der Stellung I in Stellung II und dann in Stellung III, so beobachtet man, daß der gebrochene Teil des Strahlenbündels in dem Augenblicke die kleinste Ablenkung erfährt, wo er mit dem reflektierten Teile des Strahlenbündels parallel austritt; dadurch ist aber der symmetrische Durchgang gekennzeichnet.

4. Bestimmung des Brechungsverhältnisses aus der kleinsten Ablenkung. Die kleinste Ablenkung läßt sich sehr scharf beobachten. Man mißt ihren Wert δ und den brechenden Winkel ε des Prismas. Dazu kann in beiden Fällen das Spiegel-Goniometer, Fig. 758 u. 759, dienen. Beim symmetrischen Durchgange ist nun nach den letzten Gleichungen $\alpha = \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon)$ und $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon$, also auch $\sin \alpha = \sin \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon)$ und $\sin \beta = \sin \frac{1}{2}\varepsilon$. Durch Division findet man, da $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ ist, das Brechungsverhältnis

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}.$$

5. Ablenkung durch Prismen mit sehr kleinem brechenden Winkel. Ist der brechende Winkel eines Prismas sehr klein (Fig. 800), so vereinfachen sich die im vorletzten Abschnitte durchgeführten Berechnungen und die aus diesen abgeleiteten Formeln. Die beiden Einfallswinkel α_1 und α_2 , ebenso die beiden Brechungswinkel β_1 und β_2 unterscheiden sich dann nur wenig voneinander; es nähern sich die Werte $\alpha_1 - \alpha_2$ und $\beta_1 - \beta_2$ um so mehr

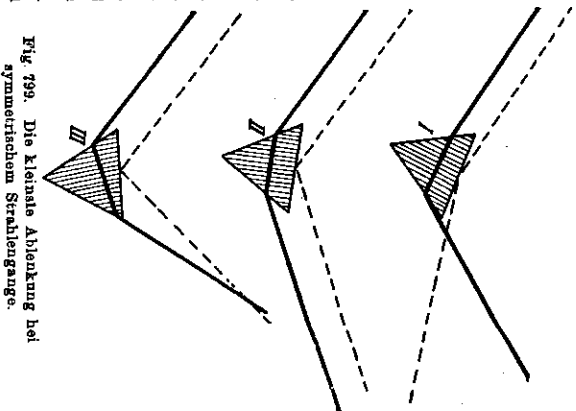


Fig. 799. Die kleinste Ablenkung bei symmetrischem Strahlengange.

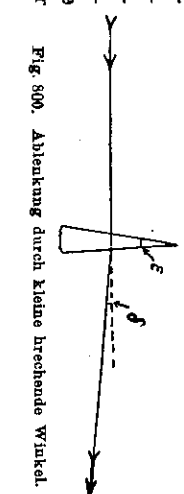


Fig. 800. Ablenkung durch kleine brechende Winkel.

dem Nullwerte, je kleiner ϵ wird. Der Quotient $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}$ nähert sich daher bei abnehmendem ϵ dem Werte 1. Damit vereinfacht sich die Gleichung, aus der wir den kleinsten Wert der Ablenkung abgeleitet haben, auf $\sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = n \cdot \sin \frac{\delta}{2}$. Die Ablenkung $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \epsilon$ ist von der Größe der Einfallswinkel unabhängig; es gilt für jeden Einfallswinkel die Gleichung

$$\sin \frac{\delta + \epsilon}{2} = n \sin \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir können daher bei einem Prisma mit einem kleinen brechenden Winkel den im vorhergehenden Abschnitte abgeleiteten Wert für n auch auf den Fall anwenden, daß der Durchgang des Lichtstrahles nicht mehr symmetrisch ist. Bedenken wir noch, daß wir für kleine Winkel statt des Sinus die Winkel selbst (in Bogenmaß gerechnet) setzen können, so wird $n = \frac{1}{2}(\delta + \epsilon)$, woraus folgt:

$$\delta = (n - 1) \epsilon.$$

Wäre das Prisma statt in Luft in einem Mittel des Brechungsverhältnisses n_1 eingebettet, so wäre nach S. 785 statt n das Verhältnis $\frac{n}{n_1}$ zu setzen, und es würde die entsprechende Formel lauten:

$$\delta = \frac{n - n_1}{n_1} \cdot \epsilon.$$

Für kleine brechende Winkel eines Prismas ist die Ablenkung bei beliebigem Einfallswinkel das Produkt aus dem brechenden Winkel des Prismas und dem Verhältnisse aus dem Unterschiede der Brechungsverhältnisse und dem kleineren Brechungsverhältnisse.

§ 270. Das Brechungsgesetz von Möbius.¹⁾

Den Inhalt des Brechungsgesetzes hat der Mathematiker Möbius durch die Verhältnisse gewisser Strecken wiedergegeben. Er legte dabei dem einfallenden und gebrochenen Strahle einen bestimmten Richtungssinn bei und zwar den Sinn, in dem sie vom Lichte durchlaufen werden.

Ein Lichtstrahl falle (Fig. 801) in A auf die Grenze zweier Mittel der Brechungsverhältnisse n und n' . Der Einfallswinkel gegen das Einfallslot im ersten Mittel sei α , der Brechungswinkel α' . Dann gilt (§ 267):

$$n \cdot \sin \alpha = n' \cdot \sin \alpha'.$$

Eine beliebige Gerade schneide das Einfallslot in M , den gebrochenen Strahl in P' , die Verlängerung des einfallenden Strahles in P . Durch zweimalige Anwendung des Sinussatzes der Trigonometrie auf die Dreiecke MPA und $M'P'A$ gewinnt man dann:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \widehat{M} \cdot MP}{PA} \quad \text{und} \quad \sin \alpha' = \frac{\sin \widehat{M'} \cdot M'P'}{P'A}.$$

1) A. F. Möbius, 1790—1868, Prof. d. Mathematik in Leipzig.

Mit der vorigen Gleichung ergibt das:

$$\frac{AP}{AP'} : \frac{MP}{MP'} = n.$$

Wir wollen $AP : AP'$ das Verhältnis der Strahlenabschnitte, $MP : MP'$ das Verhältnis der Geradenabschnitte $\frac{AP}{AP'} : \frac{MP}{MP'}$ und das Verhältnis $\frac{AP}{AP'} : \frac{MP}{MP'}$ der Verhältnisse ein Doppelverhältnis nennen. Dann kann das Brechungsgesetz von Möbius so ausgesprochen werden:

Das Doppelverhältnis aus den Strahlenabschnitten, welche eine Gerade und das Einfallslot auf den Geraden ausschneiden, und den Geradenabschnitten, welche die Strahlen und das Einfallslot auf der Geraden ausschneiden, ist dem Verhältnis aus den Brechungsverhältnissen gleich.

Der Vorteil dieses Lehrsatzes besteht in seiner unbeschränkten Anwendbarkeit; er bleibt immer, auch dem Vorzeichen nach, richtig, wie auch die Lage der schneidenden Geraden MP sei.

§ 271. Brechung durch Sammellinsen (Konvexlinsen).

1. Linse. Eine sphärische Linse (Fig. 802) ist ein aus einem durchsichtigen Stoffe (Glas) hergestellter Körper, der durch zwei Kugelhauben begrenzt ist. Ist die Linse in der Mitte dicker als am Rande, so heißt sie Konvexlinse. Die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Kugeln, zu denen die begrenzenden Kugelhauben gehören, heißen die Krümmungsmittelpunkte, die Kugelhalbmesser r_1 und r_2 heißen Krümmungshalbmesser.

Die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte heißt die Hauptachse der Linse.

2. Erfahrung. Die Beobachtung lehrt, daß ein paralleles Sonnenstrahlbündel durch eine Konvexlinse konvergent gemacht wird (Fig. 803). Der Schnittpunkt der Strahlen heißt der Brennpunkt F der Linse. Daß auch divergente Strahlen durch die Konvexlinse konvergent gemacht werden können, ergibt sich daraus, daß die Konvexlinse von Gegenständen, die im Endlichen liegen, reelle Bilder erzeugen kann.

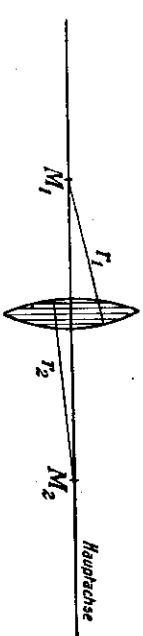


Fig. 802. Linse, Bikonvexlinse.

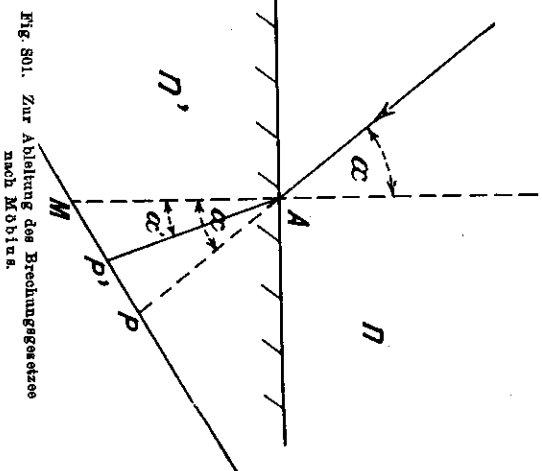


Fig. 801. Zur Ableitung des Brechungsgesetzes nach Möbius.

3. Wirkungsweise. Um die Wirkungsweise der Konvexlinsen zu untersuchen, stellen wir den in Fig. 804 abgebildeten Versuch an: Von drei übereinanderstehenden, mit Wasser gefüllten Glasgefäßen stellt

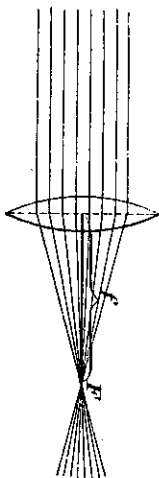


Fig. 803. Brennpunkt einer Linse.

das obere nach unten und das untere nach oben abgelenkt wird. In einiger Entfernung hinter den Glasgefäßen schneiden sich die drei Strahlenbündel.

Stellen wir statt der drei prismatischen Glasgefäße eine große Anzahl kleiner Prismen zusammen (Fig. 805), von denen die äußeren einen größeren

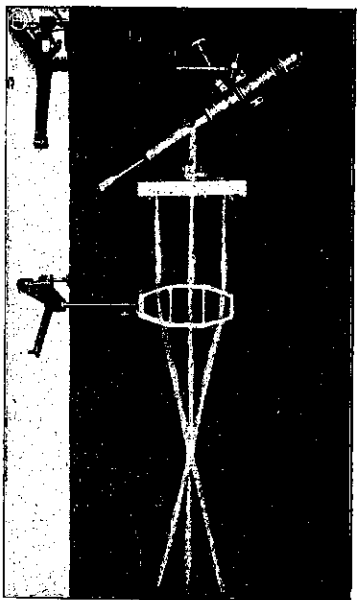


Fig. 804. Wirkungsweise einer Bikonvexlinse.



Fig. 805. Linse, aufgefäht als zusammengesetztes Prisma.

brechenden Winkel haben als die mittleren, so lenkt jedes Prisma die auf-fallenden Strahlen von seiner brechenden Kante weg, und zwar die äußeren Prismen mehr als die mittleren. Alle Strahlen können sich dann hinter diesem Apparat in einem Punkte vereinigen. Durch Vergrößerung der Anzahl der Prismen entsteht ein auf beiden Seiten krummflächig, konvex begrenzter Glaskörper. Bestehen die Begrenzungsflächen aus Kugelflächen, so entsteht die sphärische Konvexlinse.

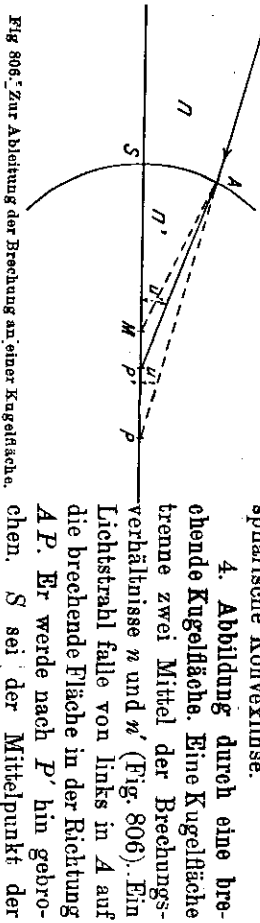


Fig. 806. Zur Ableitung der Brechung an einer Kugelfläche.

4. Abbildung durch eine brechende Kugelfläche.

Eine Kugelfläche trenne zwei Mittel der Brechungsverhältnisse n und n' (Fig. 806). Ein Lichtstrahl falle von links in A auf die brechende Fläche in der Richtung AP . Er werde nach P' hin gebrochen. S sei der Mittelpunkt der

brechenden Fläche, M deren Krümmungsmittelpunkt und $SM = AM = r$ deren Halbmesser. Dann heißt SM die Hauptachse der brechenden Kugelfläche, S der Scheitel. Die Schnittweiten $SP = a$ und $SP' = a'$ des einfallenden und gebrochenen Strahles, ebenso der Krümmungshalbmesser sollen von S aus nach rechts im Sinne der Lichtbewegung positiv gezählt werden (§ 259, 2).

Wir wenden nun auf Fig. 806 den Satz von Möbius (§ 270) an. Dann

$$\frac{AP}{AP'} : \frac{MP}{MP'} = \frac{n}{n'}$$

Beschränkung auf Nullstrahlen. Es möge auf die Fläche ein Strahlenbündel binzielen, dessen Strahlen nur sehr geringe Neigungen $u = \sphericalangle APS$ gegen die Hauptachse SM haben, so daß A in großer Nähe des Scheitels S liegt. Dann kann in vorstehender Gleichung AP durch $SP = a$ und $AP' = SP' = a'$ ersetzt werden (§ 259, 3). Setzen wir noch für $MP = SP - SM = a - r$ und $MP' = SP' - SM = a' - r$, so wird

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{a' - r}{a - r} = \frac{n}{n'}$$

Das läßt sich umformen in

$$a r n' + a' a n = a a' n' + a' r n$$

und weiter in die Grundgleichung für die brechende Kugelfläche:

$$\frac{n'}{a'} = \frac{n}{a} + \frac{n' - n}{r}$$

Abbildung. Die voranstehende Gleichung der Schnittweiten a' und a ist unabhängig von den Strahleneigungen u und u' des einfallenden und gebrochenen Strahles gegen die Achse. Alle einfallenden, nach P hinielenden Strahlen, die der vorangestellten Beschränkung genügen, werden daher durch P' hindurchgehen. Es ist also P' der (reelle) Bildpunkt des (virtuellen) Gegenstandspunktes P . Die voranstehende Grundgleichung ist daher die Scheitelweitengleichung der Abbildung.

Das eine der brechenden Mittel sei Luft. Ist das vordere Mittel Luft, so ist $n = 1$, und die Gleichung nimmt die Form an:

$$a) \quad \frac{n'}{a'} = 1 + \frac{n' - 1}{r};$$

ist hingegen das hintere Mittel Luft, so ist $n' = 1$, und die Gleichung erscheint in der Form:

$$b) \quad \frac{1}{a'} = \frac{n}{a} + \frac{1 - n}{r}$$

5. Abbildung durch eine Linse. Die Verbindungslinie (Fig. 807) der Krümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 zweier Kugelflächen ist die Hauptachse der Linse, welche von den beiden Kugelflächen begrenzt wird. Sie schneidet die Kugelflächen in den Scheiteln S_1 und S_2 . Links von S_1 , ebenso rechts von S_2 , möge das Mittel Luft sein; die Linse habe das Brechungsverhältnis n .

P ist virtueller Gegenstandspunkt für die vordere Fläche, also auch für die Linse; P' ist der Bildpunkt, der von dieser Fläche im Mittel mit dem Brechungsverhältnisse n erzeugt wird. Es gilt dann nach der Grundgleichung

(s. o. 4. a.):

$$\frac{n}{S_1 P'} = \frac{1}{S_1 P} + \frac{n-1}{S_1 M_1}$$

Für die zweite Fläche ist P' der Gegenstandspunkt; der Bildpunkt für die zweite Fläche und zugleich für die ganze Linse ist P_1 . Es gilt (s. o. 4. b.):

$$\frac{1}{S_2 P_1} = \frac{n}{S_2 P'} + \frac{1-n}{S_2 M_2}$$

Es sei noch die Linsendicke

$$S_1 S_2 = d, \quad S_1 M_1 = r_1, \quad S_2 M_2 = r_2, \quad S_1 P = a, \quad S_2 P_1 = a_1.$$

Dann ergibt die Addition der beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n}{S_2 P' + d} = \frac{1}{a} + \frac{n}{S_2 P'} + (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Beschränkung auf unendlich dünne Linsen (ideelle Linsen). Verschwindet d gegen $S_2 P'$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) (n-1).$$

Diese Abbildungsgleichung für eine ideelle Linse soll Linsengleichung genannt werden.

In dieser Gleichung ist nach der Ableitung und der Festsetzung der Vorzeichen (s. o. 4.) für reelle Gegenstandspunkte a negativ, für virtuelle Gegenstandspunkte positiv. Für reelle Bildpunkte ist hingegen a_1 positiv, für virtuelle Bildpunkte negativ.

Für die gebräuchlichsten Linsenformen, die sogenannten Bikonvexlinsen (Fig. 802, 803, 804, 805) hat r_2 negative Werte, da der Krümmungsmittelpunkt links von der Linse liegt. Plankonvexe Linsen heißen solche, für die $r_2 = \infty$ ist, während für die erste Fläche der Krümmungsmittelpunkt rechts von der Linse liegt (Fig. 838, 843). Linsen, wie in Fig. 807 angedeutet, deren Krümmungsmittelpunkte beide rechts von der Vorderfläche liegen und bei denen $r_2 > r_1$ ist (Fig. 807, 829), heißen konkavkonvexe Linsen (Menisken).

6. Brennpunkte der Linsen. Der Vereinigungspunkt der parallel auf die Linse fallenden Strahlen ist der Brennpunkt. Seine Entfernung von der Linse heißt die Brennweite; wir bezeichnen sie mit f_1 . Für $a = \infty$ wird $a_1 = f_1$.

§ 272. Hauptachse, Nebenachse, Brennebenen der Sammellinse, Vergrößerung 795

Setzen wir diese Werte in die Linsengleichung ein, so ergibt sich:

$$\frac{1}{f_1} = 0 + (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

oder

$$f_1 = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}.$$

Setzt man $a_1 = \infty$, so wird $a = f = -f_1$. Eine Linse besitzt also im Gegenstand zum Hohlspiegel zwei getrennt liegende Brennpunkte; der eine, der bildseitige Brennpunkt, liegt rechts von der Linse (Brennweite f_1), der andere, der gegenstandseitige Brennpunkt, liegt links vom Spiegel. Die Brennweiten sind einander entgegengesetzt gleich.

Setzt man die Brennweite f_1 in die Linsengleichung ein, so wird diese zu

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f_1},$$

also zur selben Gleichung, die wir beim Hohlspiegel schon kennen lernten und untersucht haben.

7. Konvergenzgleichung. $\frac{1}{f_1} = D$ nennt man auch die „Stärke“ oder Brechkraft der Linse. Sie ist dem Unterschiede der Brechungsverhältnisse des Linsenkörpers und der Luft proportional. Die Einheit der Brechkraft ist wie beim Hohlspiegel die Dioptrie. Ebenso wie beim Hohlspiegel (S. 768) bezeichnet man auch $\frac{1}{a} = A$ und $\frac{1}{a_1} = A_1$ mit *Konvergenz des Gegenstandspunktes* und *Konvergenz des Bildpunktes*, die beide in Dioptrien gezählt werden. Es gilt die Gleichung $A_1 = A + D$, d. h. die Konvergenz des Bildpunktes ist die Summe aus der Konvergenz des Gegenstandspunktes und der Stärke der Linse.

In dem besondern Falle, daß die beiden Krümmungshalbmesser der Linse entgegengesetzt gleich werden (wir setzen dann $r = r_1 = -r_2$) und daß die Linse eine Glaslinse mit dem Brechungsverhältnis $n = \frac{3}{2}$ ist, wird $f_1 = \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} \cdot \frac{1}{2r} = r$ (Kepler). Eine solche Glaslinse vom Krümmungshalbmesser 1m hat daher die Brechkraft von 1 Dioptrie (1 dptr).

8. Newtonsche Form der Gleichung. Führen wir in die Gleichung $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f_1}$ statt der Scheitelweiten a und a_1 die Werte $a = g - f_1$ und $a_1 = b + f_1$ ein, wo g und b die (von den zugeordneten Brennpunkten aus gezählten) Brennweiten sind (Fig. 809), so wird die Linsenformel umgewandelt in

$$bg = -f^2 = -f_1^2 = f f_1$$

(Newtonsche Form der Linsengleichung). Die Deutung dieser Gleichungen und die Darstellung ihrer Werte durch eine Kurve entspricht den Darlegungen aus § 260 über den Hohlspiegel.

§ 272. Hauptachse, Nebenachse, Brennebenen der Sammellinse, Vergrößerung.

Bei der Ableitung der Linsengleichung wurde vorausgesetzt, daß die Abmessungen der Linse klein sind im Vergleich zu den auf der Hauptachse

gemessenen Entfernungen (§ 271, 5.), sowie daß etwaige zur Hauptachse geneigte Strahlen nur kleine Winkel mit ihr bilden (§ 271, 4.).

Wir haben erfahren, daß für schmale Prismen die Ablenkung eines Strahles von dem Einfallswinkel unabhängig ist (S. 790). Wenn wir daher ein Bündel paralleler Lichtstrahlen auf eine Linse fallen lassen, das mit der Hauptachse einen kleinen Winkel bildet, so werden auch diese Parallelstrahlen in einem Punkte hinter der Konvexlinse vereinigt. Eine durch die Mitte O der Linse gehende Gerade, die zur Hauptachse geneigt ist, soll eine Nebenachse genannt werden. (In Fig. 808 ist HH die Hauptachse, NN eine Nebenachse.) Der Vereinigungspunkt der der Nebenachse parallelen Strahlen ist der Punkt F' , der auf der Nebenachse selbst liegen muß, da sie die Linse (abgesehen von



Fig. 808. Hauptachse und Nebenachse, Brennebene.

der wegen der verschwindenden Dicke verschwindenden Parallelverschiebung) unverändert durchsetzt. Es liegt F' ebensoweit hinter der Linse auf der Nebenachse, wie F auf der Hauptachse; folglich erhalten wir die Lage von F' , indem wir uns die Hauptachse mit allen auf ihr liegenden Punkten um die Mitte O der Linse gedreht denken. FF' ist ein kleiner Kreisbogen, den wir uns wegen der bekannten Voraussetzung durch ein Lot auf der Hauptachse ersetzt denken können. Ebenso wie die gezeichnete Nebenachse NN verhalten sich auch alle übrigen, d. h. es gibt zu jeder Nebenachse einen Brennpunkt (auf jeder Seite der Linse), zu dem alle mit der Nebenachse parallelen Strahlen nach ihrem Durchgange durch die Linse konvergieren. Die Gesamtheit aller dieser Brennpunkte liegt auf einer durch F senkrecht zur Hauptachse gelegten Ebene. Diese Ebene soll eine Brennebene der Linse heißen.

In den folgenden Figuren sind der Deutlichkeit halber (aus Platzmangel) die Breitenabmessungen im Vergleiche zur Längenabmessung übertrieben groß gezeichnet. Infolgedessen erscheinen die Winkel, die die benutzten Nebenachsen mit der Hauptachse bilden, auch zu groß. Hierdurch treten die Fehler, die der Voraussetzung entsprechend vernachlässigt werden sollen, in stärkerem Maße hervor als bei der wirklichen Anwendung dünner Linsen. Dergleichen sind die Brennebenen, die immer strich-punktiert gezeichnet sind, in viel zu großer Ausdehnung dargestellt. Bei dem wirklichen Gebrauche der Linsen kommt immer nur der mittlere Teil der Brennebenen in Wirksamkeit. In Zukunft soll weiter die Konvexlinse immer in Gerade angedeutet werden, bei der die gestrichelten Bögen am oberen und unteren Ende an die Art der Linse erinnern sollen.

So wie auf der Hauptachse HH (Fig. 809) zwei Brennpunkte F_1 und F_2 vorhanden sind und so wie jedem Lichtpunkte oder punktförmigen Gegen-

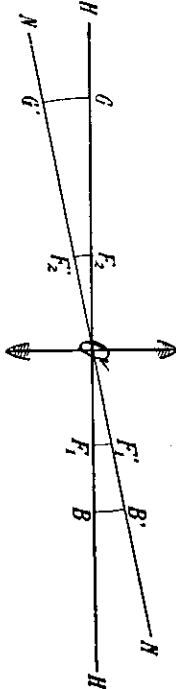


Fig. 809.

sie in die Lage der Nebenachse kommt. Die bei dieser Drehung entstehenden Bögen GG' und BB' können wieder als gerade Strecken angesehen werden, die auf der Hauptachse senkrecht stehen; daher nennen wir die zur Hauptachse senkrechte Ebene, die durch G geht, die Gegenstandsebene oder Objektebene und die Ebene, die durch B geht, die Bildebene.

Zur links liegenden Gegenstandsseite gehört die durch F_1 gehende, rechts liegende Brennebene und zur rechts liegenden Bildseite gehört die durch F_2 gehende, links liegende Brennebene.

Vergrößerung. Das Verhältnis $v = \frac{B'B}{G'G}$ heißt die lineare Vergrößerung der Abbildung. Nun ist $B'B' : G'G' = OB : OG = a_1 : a$. Daher ist die lineare Vergrößerung $v = \frac{a_1}{a}$, d. h. gleich dem Verhältnisse der Scheitelweiten des Bildes und Gegenstandes.

§ 273. Aufsuchen der Linsenbilder durch Zeichnung.

Die Bilder eines Achsenpunktes lassen sich bei einer idealen Konvexlinse nicht in der Weise finden, wie es beim Hohlspiegel möglich war, wo die Gleichheit des Einfallswinkels und Reflexionswinkels zur Zeichnung führte. Es ist nur notwendig, die beiden Brennebenen F_1, F_2 der Linse und die Mitte O der Linse zu kennen.

1. Auf der Hauptachse HH (Fig. 810) der Konvexlinse O mit den Brennebenen F_1, F_2 und F_2, F_1 liegt der Lichtpunkt G . Ein von G ausgehender beliebiger Strahl trifft die Linse in P . Wir zeichnen die zu PG parallele Nebenachse NN , die die Brennebene F_1, F_1 in Q schneidet. Da der zur Nebenachse parallele Strahl GP nach der Brechung die Nebenachse in der bildseitigen

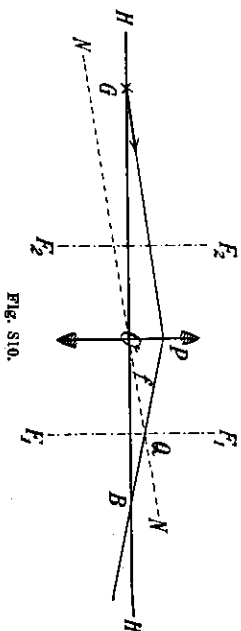


Fig. 810.

Brennebene schneidet, so muß der gebrochene Strahl von P aus durch Q gehen und dann die Hauptachse in B schneiden. Ebenso verhält sich jeder andere von G ausgehende Strahl; es ist also B das reelle Bild von G .

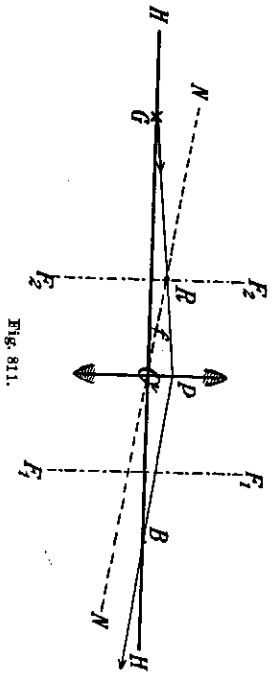


Fig. 811.

Durch Umformung ergibt sich die bekannte Abbildungsgleichung $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f_1}$ (§ 271, 6). Die Zeichnung ist also in Übereinstimmung mit der Linsengleichung.

2. (Bezeichnung wie in Fig. 810.) Ein von G ausgehender Lichtstrahl GP verläßt er die Linse nach seinem Durchgange durch die Linse parallel zu der durch R gehenden Nebenachse NN' . Wir ziehen daher die Nebenachse NN' durch R und O und ziehen durch P die Parallele zu NN' ; diese ist der gebrochene Strahl, der die Hauptachse HH in B schneidet. B ist das reelle Bild von G .

Anmerkung: Da $RO \parallel PB$ ist, so folgt $RO:PB = GO:GB$, also auch (da $RO = -OR = -f = f_1$ ist) $f_1 : a_1 = -a : (-a + a_1)$. Hieraus folgt wieder durch Umformung die Abbildungsgleichung $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f_1}$.

3. Wir führen die beiden Zeichnungen von Fig. 810 und 811 gleichzeitig aus und erhalten so die Fig. 812. Wir erkennen, daß

$$\Delta GRO \sim \Delta OQB$$

ist. Daher kann die Zeichnung auch folgendermaßen angeführt werden: Der beliebige Strahl GP schneidet F_2F_1 in R ; wir verbinden R mit O , ziehen durch O die Gerade $OQ \parallel GP$, die F_1F_2 in Q schneidet und ziehen endlich $QB \parallel RO$, so ist B das Bild von G .

Anmerkung: Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke GRO und OQB verhält sich

$$GR:RO = OQ:QB.$$

Setzen wir in sinngemäßer Übereinstimmung mit den in § 271, 8 gewählten Bezeichnungen den Abstand des Gegenstandes von der Brennebene F_2F_1 gleich

g und den Abstand des Bildes von der Brennebene F_1F_2 gleich b , so wird aus der angegebenen Proportion

$$-g : f_1 = f_1 : b \text{ oder } gb = -f_1^2$$

die Newtonsche Form der Linsengleichung.

Aus den angeführten Zeichnungen ergibt sich durch unmittelbare Anschauung, daß dann, wenn G in den Brennpunkt rückt, der gebrochene Strahl die Linse parallel zur Hauptachse verlassen muß, denn es wird in diesem Falle (Fig. 813) $GPQO$ ein Parallelogramm.

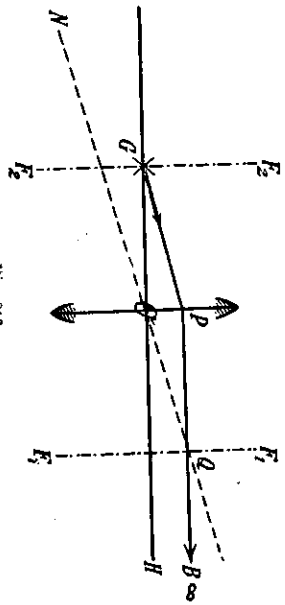


Fig. 813.

Ebenfalls ergibt sich unmittelbar, daß dann, wenn G zwischen den Brennpunkt und die Linse rückt, der gebrochene Strahl die Linse divergent zur Hauptachse verlassen muß, denn in diesem Falle (Fig. 814) ist $GP < OQ$. Da nun $GP \parallel OQ$ ist, so müssen die beiden die Enden verbindenden Geraden GO und PQ ihren Schnittpunkt über QP hinaus haben, d. h. der Schnittpunkt muß in B auf der Rückwärtsverlängerung des PQ liegen, also ist B ein virtuelles Bild von G .

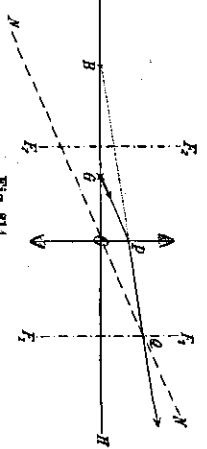


Fig. 814.

§ 274. Zerstreuungslinsen. Konkavlinse.

Ist die Mitte einer (dünnen) sphärischen Linse (§ 271, 1) dünner als der Rand, so heißt die Linse eine Konkavlinse. Im allgemeinen ist sie eine Zerstreuungslinse. (Siehe dazu § 278, 2f)

Wir betrachten nur ideale Konkavlinse, d. h. solche mit verschwindender Dicke, und behandeln nur Nullstrahlen (§ 271, 4), d. h. solche, die mit der Hauptachse so kleine Winkel einschließen, daß deren Bogen, Sinus und Tangente vertauscht werden können.

Die Beobachtung lehrt (Fig. 815), daß parallele Lichtstrahlen (Sonnenstrahlen), die zur Hauptachse parallel auf fallen, durch die Brechung in der Konkavlinse divergent gemacht werden, und zwar so, daß ihre Rückwärtsverlängerungen durch einen Punkt der Hauptachse gehen; sie scheinen also von diesem Punkte aus zu divergieren. Dieser Punkt heißt der (virtuelle) Brennpunkt der Konkavlinse, seine Entfernung von der Linse heißt die Brennweite; sie ist, da sie auf derselben Seite liegt, wie der Ursprung

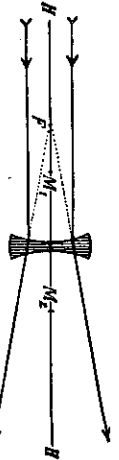


Fig. 815. Zerstreuungslinse, Konkavlinse.

der Strahlen (also entgegengesetzt wie bei den Konvexlinsen), negativ zu rechnen.

Die Wirkungsweise der Konkavlinsen wird ähnlich wie die der Konvexlinsen dadurch erklärt, daß man die Linsen aus unendlich vielen schmalen Prismen zusammengesetzt denkt, wobei die brechenden Winkel von der Mitte nach dem Rande hin zunehmen; jedoch ist die brechende Kante jedes Prismas der Hauptachse zugekehrt. Jedes Linsenelement wird durch ein Prismenelement ersetzt.

Die Abbildung durch eine Konkavlinse geborecht ganz den uns schon bekannten Gesetzen, denn sie wird bedingt durch die Abbildung durch zwei aufeinanderfolgende Kugelflächen (§ 271, 5). In ganz gleicher Weise wie für die Sammellinse muß daher auch die Scheitelwinkelformel für die Zerstreulinse abgeleitet werden.

Ob es sich um eine Sammellinse oder um eine Zerstreulinse handelt, ist nur durch das Vorzeichen der Brennweite bestimmt. Für diese fanden wir (§ 271, 7)

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Ist hierin $r_1 > r_2$, hat also in der Richtung von links nach rechts die erste Linsenfläche die geringere, die zweite die stärkere Krümmung; so ist f negativ; der bildseitige Brennpunkt wird virtuell und die Linse ist eine Zerstreulinse.

Liegen dabei beide Krümmungsmittelpunkte auf derselben Seite von O , sind also die Krümmungen gleichsinnig, so nennt man die Linse konvex-konkav (durchgehogene Zerstreulinse, Meniskus, s. S. 794); ist $r_1 = \infty$, so daß die Vorderseite der Linse eben ist, und r_2 positiv, so heißt die Linse plan-konkav, und ist schließlich r_1 positiv und r_2 negativ, so daß der Krümmungsmittelpunkt der Vorderfläche vorn, der der Hinterfläche hinten liegt, so heißt die Linse bikonkav (Fig. 815).

In der auch für die Zerstreulinse gültigen Gleichung

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f_1}$$

hat also f_1 einen negativen Wert.

Einem jeden reellen Gegenstandspunkte, der eine negative Scheitelweite a hat, entspricht danach wegen des negativen Sinnes von f_1 ein negativer Wert von a_1 . Dem absoluten Betrage nach ist daher a_1 kleiner als f_1 . Von jedem

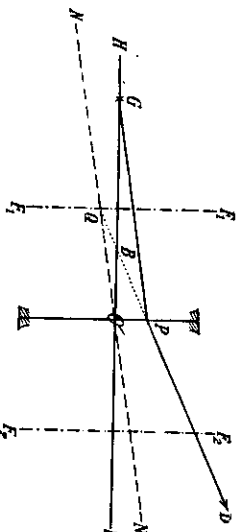


Fig. 815.
Keeller Gegenstandspunkt G und virtueller Bildpunkt B
bei einer Zerstreulinse.

reellen Gegenstände entsteht demnach ein virtuelles Bild innerhalb der Brennweite.

Die Zeichnung des Bildes einer punktförmigen Lichtquelle G geht aus Fig. 816 hervor. G befindet sich auf der Hauptachse HH' der in O befindlichen

Konkavlinse, deren Brennebenen F_1F_1 und F_2F_2 sind. Es ist zu beachten, daß die Brennebene einer Zerstreulinse für die von der einen Seite auftreffenden Strahlen auf derselben Seite liegt, von der die Strahlen herkommen. Ein beliebiger, von G ausgehender Lichtstrahl treffe die Zerstreulinse in P . Wir ziehen parallel zu GP die Nebenachse $N'N'$, die die Brennebene F_1F_1 in Q schneidet. Der Strahl GP , der der Nebenachse $N'N'$ parallel ist, verläßt die Linse divergent so, als ob er vom Divergenzpunkte Q herkäme. Wir ziehen QP und verlängern QP über P hinaus, um den weiteren Verlauf des Lichtstrahles PD zu finden. Der Schnittpunkt B von QP mit der Hauptachse HH' ist das virtuelle Bild von G .

§ 275. Abbildung eines Achsenpunktes durch eine Kugelfläche.

1. Optische Systeme. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir den Strahlengang durch eine einzelne Linse unter der Voraussetzung abgeleitet, daß sie unendlich dünn ist, und daß demnach die Sätze über die Brechung der Lichtstrahlen in einem schmalen Prisma angewandt werden können. Wir haben ferner vorausgesetzt, daß die Linse beiderseitig an Luft grenzt. Tatsächlich sind aber die Linsen nicht unendlich dünn; oft sind sie sogar aus mehreren, verschieden brechenden Substanzen zusammengesetzt, oft sind mehrere zu einem brechenden Systeme vereinigt, und endlich kann der Fall eintreten, daß Anfang und Ende des Strahles in Mitteln von verschiedenen Brechungsverhältnissen liegen. Als bezeichnetes Beispiel hierfür sei das in § 286 noch näher zu behandelnde menschliche Auge erwähnt. Hier tritt das Licht aus der Luft durch die Hornhaut, dann durch eine vor der Kristalllinse liegenden Flüssigkeit in die vordere Fläche der Kristalllinse, hierauf durch die hintere Fläche und endlich in den Glaskörper.

2. Grundgleichungen für die brechende Kugelfläche. Um den Strahlengang durch ein solches System von brechenden Flächen verfolgen zu können, greifen wir auf die in § 271, 4. abgeleitete Grundgleichung für die brechende Kugelfläche zurück:

$$(1) \quad \frac{n'}{a'} = \frac{n}{a} + \frac{n' - n}{r}.$$

3. Konvergenzgleichung. Setzt man noch nach A. Gullstrand $\frac{n}{a} = A$, $\frac{n'}{a'} = A_1$, $\frac{n' - n}{r} = D$, so erhält man die Grundgleichung (1) in der Form:

$$A_1 = A + D.$$

Hierin nennt man A die *Konvergenz des Gegenstandspunktes*, A die *Konvergenz des Bildpunktes* und D die *Brechkraft* der brechenden Fläche (s. dazu § 259, 7).

Die Konvergenzen und Brechkraft werden auch hier in Dioptrien gerechnet (S. 759).

4. Sonderfälle. a) Wird in der Grundgleichung (1) $n' = -n$ gesetzt, so hat man formal statt der Brechung die Reflexion nach dem Reflexionsgesetz, und die beiden letzten Gleichungen gehen in die entsprechenden Gleichungen auf S. 767 (S. 959) über. Da hierbei sich die Richtung des Strahles durch die Reflexion um-

kehrt, ist sowohl a' als auch r vom Scheitel aus auch links positiv zu zählen (§ 259, 2).

b) Wird $r = \infty$, so wird $a' = \frac{a \cdot n'}{n}$. Bei senkrechtem Blicke auf eine ebene brechende Fläche, oder wenigstens, wegen der Beschränkung auf Nullstrahlen, bei geringer Neigung der Blickrichtung gegen die senkrechte Richtung erscheint also ein im Abstände a hinter der brechenden Fläche liegender Gegenstandspunkt gehoben, und zwar ist sein Bild der Fläche auf den Abstand $\frac{a \cdot n'}{n}$ genähert. In praktischen Fällen wird meist $n' = 1$ sein; dem Auge erscheint also der Grund der Gewässer im Verhältnisse des Brechungsverhältnisses des Wassers gehoben, $a' = \frac{1}{n} = \frac{3}{4}$ (§ 266). Diese Eigenschaft kann dazu dienen, Brechungsverhältnisse zu messen. Betrachtet man etwa in Luft mit einem Mikroskope eine feine Marke auf der Oberseite einer planparallelen Platte des Brechungsverhältnisses n und der Dicke a und schiebt dann das Mikroskop um die Strecke a' nach unten, bis man scharf auf eine Marke an der unteren Fläche der Platte eingestellt hat, so ist $n = \frac{a}{a'}$.

5. Brennweiten. Der zugeordnete Gegenstandspunkt zum unendlich fernen Bildpunkte für $a' = \infty$ heißt der gegenstandseitige Brennpunkt; er wird im

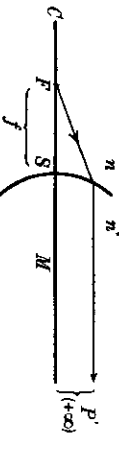


Fig. 817. Gegenstandseitiger Brennpunkt.

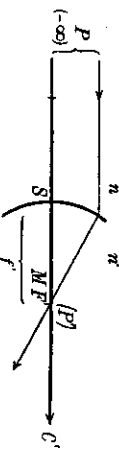


Fig. 818. Bildseitiger Brennpunkt.

Zukunft mit F bezeichnet (Fig. 817). Seine Entfernung vom Scheitel heißt gegenstandseitige Brennweite; diese soll mit f bezeichnet werden (§ 271, 6). Setzen wir in der Grundgleichung (1) $a = f$ und $a' = \infty$, so wird

$$0 = \frac{n}{f} + \frac{n' - n}{r}$$

$$f = -\frac{nr}{n' - n}$$

also Das Minuszeichen gibt an, daß der Brennpunkt F links von der brechenden Kugel im Mittel mit dem Brechungsverhältnisse n liegt.

Rückt P (Fig. 806) in unendliche Ferne, so wird $a = \infty$. Demnach wird das zweite Glied der Grundgleichung zu Null. Die besondere Lage, die der Bildpunkt P' dann annimmt, heißt der bildseitige Brennpunkt; wir bezeichnen ihn mit F' (Fig. 818) und nennen seine Entfernung vom Scheitel S die bildseitige Brennweite, die wir in Zukunft mit f' bezeichnen wollen. Wir erhalten diese Brennweite, indem wir in der Grundgleichung setzen $a = \infty$ und $a' = f'$. Hieraus folgt

$$\frac{n'}{f'} = \frac{n' - n}{r}$$

$$f' = \frac{nr}{n' - n}$$

also

Da dieser Wert positiv ist, so liegt der zweite Brennpunkt in dem zweiten Mittel mit dem Brechungsverhältnisse n' .

6. Andere Grundgleichung. Dividieren wir alle Glieder der Grundgleichung durch $\frac{n' - n}{r}$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{n'r}{n' - n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{n'r}{n' - n} \cdot \frac{1}{a'} + 1$$

In diesem Ausdrucke setzen wir die Werte für f und f' ein und erhalten

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1. \quad (\text{Grundgleichung 2})$$

Wenn in der Grundgleichung $a < f$ wird, so wird das erste Glied größer als die rechte Seite, und das zweite Glied muß negativ werden. Hiervon folgt, daß auch a' negativ werden muß, d. h. daß der Bildpunkt links vom Scheitel, also im ersten Mittel, liegen muß. Das ist nur dadurch möglich, daß die vom Gegenstandspunkte ausgehenden Strahlen nach der Brechung durch die Kugelfläche auseinander laufen. Daher entsteht in diesem Falle ein virtuelles Bild (Fig. 1006).

7. Verhältnis der Brennweiten. Durch Division der beiden Ausdrücke für f und f' erhalten wir die Gleichung

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$$

Die beiden Brennweiten an der brechenden Kugelfläche verhalten sich dem absoluten Betrage nach wie die Brechungsverhältnisse der Mittel, die durch die Kugelfläche voneinander getrennt werden.

Die Grundgleichungen in der abgeleiteten Form haben für jede beliebige Lage der in Betracht kommenden Punkte zueinander allgemeine Gültigkeit. Sie gelten auch für den Fall, daß der Krümmungsmittelpunkt der Kugel links von der Kugelfläche, also in dem Mittel mit dem kleineren Brechungsverhältnisse liegt. Wir brauchen dann nur für r negative Werte einzusetzen. Wir führen die Betrachtung über die Lage von Bildpunkt und Gegenstandspunkt zueinander hier nicht im einzelnen durch, weil sie nach dem Muster der oben angeführten Ableitung gemacht werden kann. Wir bemerken nur, daß in diesem Falle der erste Brennpunkt im zweiten Mittel und der zweite Brennpunkt im ersten Mittel liegt, sowie ferner, daß einem reellen, im ersten Mittel liegenden Gegenstandspunkte stets ein virtueller, ebenfalls im ersten Mittel liegender Bildpunkt zugeordnet ist.

Eine brechende Kugelfläche verhält sich, wenn sie so liegt, daß der Krümmungsmittelpunkt im Mittel mit dem größeren Brechungsverhältnisse liegt, wie eine unendlich dünne Sammellinse aus Glas. Wenn der Mittelpunkt der Kugel aber im Mittel mit dem kleineren Brechungsverhältnisse liegt, so verhält sich die Kugelfläche wie eine unendlich dünne Zerstreuungslinse aus Glas.

8. Die Newtonsche Form der Grundgleichung (§ 271, 8). Die Grundgleichung nimmt eine besonders einfache Form an, wenn man die Brennpunktsweite des Gegenstandspunktes und die Brennweite des Bildpunktes als Veränderliche einführt. Diese Größen mögen mit x und x' bezeichnet und im Sinne der Lichtbewegung positiv gezählt werden. Nach Fig. 819 haben wir dann zu setzen:

$$a = x + f \quad \text{und} \quad a' = x' + f'$$

worn a, f und x in Fig. 819 negative Größen sind. Wir setzen in Grundgleichung (2) ein und erhalten

$$\frac{f}{x+f} + \frac{f}{x} = 1.$$

Die Gleichung formen wir um und erhalten

$$xx' = ff'. \quad (\text{Grundgleichung 3})$$

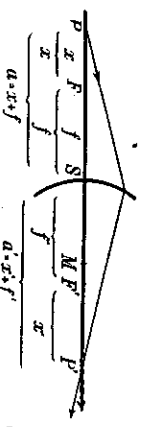


Fig. 819.

§ 276. Abbildung eines in der Nähe der Achse liegenden Punktes durch eine Kugelfläche.

1. Ein kleiner Bogen als Gegenstand. Denken wir uns in Fig. 806 auf S. 792 die durch den Mittelpunkt M der Kugel gehende Gerade, auf der P und P' liegen, um einen kleinen Winkel gedreht, so beschreiben P und P' kleine Kreisbögen, die in Fig. 820 punktiert gezeichnet worden sind. Wenn nun die Punkte P und P' nach der Drehung noch so nahe an der Achse liegen, daß wir für alle Winkel die Bögen und Sinus gleichsetzen dürfen, so dürfen wir auch statt der kleinen Kreisbögen die kurzen Tangenten dürfen, so setzen (s. dazu § 261, 1, 2). Ebenso wie nun dem auf der Achse liegenden Gegenstandspunkte P der auf der Achse liegende Bildpunkt P' zugeordnet ist, so muß auch dem achsennahen Gegenstandspunkte Q der achsennahe Bildpunkt Q' zugeordnet sein. Dem ausgedehnten Gegenstande PQ ist dann das ausgedehnte Bild $P'Q'$ zugeordnet.

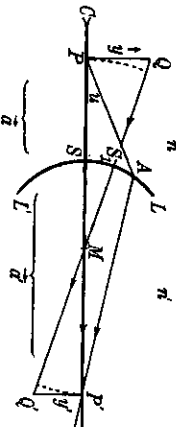


Fig. 820.

Wir haben also die Erkenntnis gewonnen: Eine kleine zur Achse SM senkrecht stehende Strecke PQ hat ihr Bild in einer kleinen zur selben Achse senkrecht stehenden Strecke $P'Q'$.

2. Kollineare¹⁾ Abbildung. Der grundlegenden Bedeutung dieser Erkenntnis wegen wollen wir ihr noch eine ganz allgemeine andere Begründung geben, die von dem Kunstgriffe einer Achsendrehung nicht Gebrauch macht. Hat P sein Bild in P' , so muß ein beliebiger außerhalb der Achse PM liegender Punkt Q sein Bild in einem Punkte Q' haben, der auf der Nebenachse QM mit dem Scheitel S_1 liegt. Nach dem Satze von Möbius (§ 270) gilt nun $\frac{AP}{MP} = \frac{MP}{MP} = \frac{n}{n}$. Da nach Voraussetzung alle Strahlen PA durch P' hindurchgehen, gilt diese Beziehung für alle Strahlen des Bündels mit der Öffnung SPA , daher auch für den Strahl PS . Somit ist auch $\frac{SP}{MP} = \frac{n}{n}$ und $\frac{S_1Q}{MP} = \frac{MQ}{MP} = \frac{n}{n}$. Daher ist auch $\frac{SP}{MP} = \frac{S_1Q}{MP} = \frac{MQ}{MP}$ oder wir finden in der Ausdrucksweise der Geometrie: Das Doppelverhältnis (§ 270) der vier Punkte (P, P', S, M) einer Geraden ist dem Doppelverhältnis (§ 270) der vier Punkte (P, P', S, M) einer Geraden ist dem Doppelver-

1) linea (lat.) = die Linie (eigentlich der Leinenfaden); kollinear soll bedeuten: Zu jeder Geraden (Linie) gehört eine andere Gerade.

§ 276. Abbild. eines in der Nähe der Achse lieg. Punktes durch eine Kugelfläche 805

hältnisse der vier Punkte (Q, Q', S, M) einer anderen Geraden gleich. Nun enthalten die Lehren der Geometrie den Lehrsatz: Haben vier Punkte einer Geraden dasselbe Doppelverhältnis wie vier Punkte einer anderen Geraden, und gehört zu diesen Punkten der Schnittpunkt (M) beider Geraden, so gehen die drei Verbindungslinien der anderen drei Punktepaare durch einen Punkt. Es müssen danach die Verbindungslinien PQ, SS_1 und $P'Q'$ sich in einem Punkte schneiden.

Beschränkung auf Nullstrahlen. Die bisherige Betrachtung gilt auf Grund der Voraussetzung eindeutiger Abbildung von P in P' und Q in Q' , sonst aber ohne jede Beschränkung. Wir wollen jetzt die Abbildung auf Nullstrahlen beschränken; die Neigung $\sphericalangle S_1MS$ soll also sehr klein sein. Dann dürfen wir für die Geraden SS_1 in jedem Falle die Tangente in S an die Kugelfläche setzen. PQ und $P'Q'$ schneiden sich daher bei dieser Beschränkung immer auf dieser Scheiteltangente. Alle Punkte einer Geraden PQ müsse also in Punkten einer Geraden $P'Q'$ abgebildet werden, die durch den Schnittpunkt von PQ mit der Scheiteltangente in S geht. Wir finden bei der gemachten Beschränkung somit die allgemein gültige Erkenntnis: Eine Gerade wird wieder als Gerade abgebildet. — Steht insbesondere die Gerade PQ senkrecht zu PM , so muß auch das Bild $P'Q'$ senkrecht zur selben Achse stehen, denn PQ und $P'Q'$ müssen dann beide parallel zur Tangente in S werden.

Eine Abbildung, bei der ein jeder Punkt wieder in einem Punkte, eine jede Gerade wieder in einer Geraden abgebildet wird, heißt eine kollineare Abbildung (Verwandtschaft). Eine Kugelfläche bildet kollinear nur bei der Beschränkung auf Nullstrahlen ab.

3. Satz von Helmholtz. Wir nennen den Winkel, unter dem ein vom Achsenpunkte P ausgehender Strahl PA die Achse verläßt, seine Strahlenneigung. Setzen wir (Fig. 820) $\sphericalangle SPA = u$ und ebenso $\sphericalangle C'P'T' = u'$ und $SA = s$, so ist, weil wegen der Beschränkung auf Nullstrahlen SA als mit der Scheiteltangente in S zusammenfallende Gerade (s. o. 2.) betrachtet werden darf,

$$\operatorname{tg} u = \frac{SA}{PS} = \frac{s}{a} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} u' = \frac{SA}{P'S} = -\frac{s}{a}$$

$$SP = -\operatorname{tg} u \quad \text{und} \quad SP' = -\frac{SA}{\operatorname{tg} u'}$$

Nach dem Satze von Möbius (s. o. 2.) gilt

$$\frac{SP}{SP'} = \frac{MP}{MP'}$$

Mit dem Vorigen ergibt das

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{MP}{MP'} = \frac{n}{n}$$

Wir nennen $PQ = y$ die Gegenstandsgröße und $P'Q' = y'$ die Bildgröße. Aus Fig. 820 liest man ab $\frac{MP}{MP'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{y}{y'}$. Damit wird aus der vorangehenden Gleichung

$$y \cdot n \cdot \operatorname{tg} u = y' \cdot n \cdot \operatorname{tg} u'$$

Diese Gleichung ist zuerst von Helmholtz (1856)¹⁾ in ihrer allgemeinen Bedeutung für die Abbildung durch optische Systeme erkannt worden. Wir wollen sie daher die Helmholtzsche Gleichung nennen. Ihren Inhalt können wir in dem Satze aussprechen:

Wenn ein achsensenkrecher Gegenstand durch eine Kugelfläche, die zwei brechende Mittel voneinander trennt, kollinear abgebildet wird, so bleibt das Produkt aus der Bildgröße, der trigonometrischen Tangente der Strahleneigung und dem Brechungsverhältnisse unverändert.

Das erwähnte Produkt ist eine Invariante (§ 267) der kollinearen Abbildung.

4. Die Seitenvergrößerung. Der Quotient aus der Bildgröße $P'Q' = y'$ und der Gegenstandsgröße $PQ = y$ soll die Seitenvergrößerung (Lateralvergrößerung)²⁾ genannt werden. Sie werde mit v bezeichnet; es ist also $v = \frac{y'}{y}$.

Wir schreiben die Helmholtzsche Gleichung in der Form

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\sin u}{\sin u'}$$

und setzen (s. o. 3.) $\operatorname{tg} u = \frac{s}{a}$ und $\operatorname{tg} u' = -\frac{s'}{a'}$.

$$v = \frac{y'}{y} = \frac{n a'}{n a}$$

Wir schreiben noch nach § 275, 7 für $\frac{n}{n'} = -\frac{f'}{f}$ und

$$a' = x' + f' \quad \text{und} \quad a = x + f$$

Dann gilt $v = -\frac{f'(x+f)}{f(x+f)}$.

Im Zähler ersetzen wir nach der Grundgleichung (3) (§ 275, 8) $f'f'$ durch ax' , so wird

$$v = -\frac{f(x+ax')}{f(x+f)} = -\frac{x'(f+x)}{f'}$$

Mit Hilfe der Grundgleichung (3) kann das in den gleichartigen Ausdruck

$$v = -\frac{f}{x}$$

umgeformt werden.

5. Die Tiefenvergrößerung. Wird ein Gegenstandspunkt P (Fig. 821) längs der Achse um einen kleinen Betrag dx nach P_1 verschoben, so verändert auch der zugeordnete Bildpunkt P' seine Lage; er wird nach P'_1 verschoben. Das Verhältnis der axialen Verschiebung des Bildpunktes zur axialen Verschiebung des zugeordneten Gegenstandspunktes heißt die Tiefenvergrößerung. Sie möge mit t bezeichnet werden.

1) Helmholtz selbst nennt im „Handbuch der physiol. Optik (1867)“ die Gleichung die Lagrangesche Gleichung.

2) Latius (lat.) = Seite.

§ 276. Abbild. eines in der Nähe der Achse lieg. Punktes durch eine Kugelfläche 807

Die Tiefenvergrößerung kann man am einfachsten aus der Newtonschen Form der Grundgleichung $ax' = ff'$ berechnen, indem man diese differenziert. So entsteht die Gleichung

$$x \cdot dx' + x' \cdot dx = 0.$$

Hieraus folgt

$$t = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x}$$

Fig. 821. Zur Ableitung der Tiefenvergrößerung.



Multiplizieren wir diesen Quotienten im Zähler und Nenner noch mit x und ersetzen dann das Produkt xx' im Zähler durch das gleiche Produkt ff' , so wird

$$t = -\frac{ff'}{x^2} = -\frac{x'}{f'}$$

Für den Fall, daß die Brechungsverhältnisse im ersten und letzten Mittel übereinstimmen, sind die gegenstandsseitige und die bildseitige Brennweite einander entgegengesetzt gleich. Daher vereinfacht sich dann der Ausdruck für die Tiefenvergrößerung zu $t = \frac{f^2}{x^2}$. Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem Ausdrucke für die Seitenvergrößerung $v = -\frac{f}{x}$ ergibt sich, daß die Tiefenvergrößerung gleich dem Quadrate der Seitenvergrößerung ist.

Aus diesem Satze folgt, daß bei der Abbildung eines räumlichen Gegenstandes eine Verzerrung eintreten muß, indem die Tiefenmessungen wesentlich stärker vergrößert oder verkleinert werden als die Seitenmessungen. Ferner sehen wir, daß es unmöglich ist, von allen Punkten eines räumlichen Gegenstandes auf einem ebenen Schirme ein scharfes Bild zu erhalten. Die Unschärfe in der Tiefe fällt besonders auf bei Vergrößerungen, weniger bei Verkleinerungen. Wenn man daher von einem räumlichen Gegenstande, z. B. von einer Landschaft, eine photographische Aufnahme macht, so wird das Bild um so schärfer, je stärker die Verkleinerung ist.

6. Das Konvergenzverhältnis oder angulare¹⁾ Vergrößerung. Das Verhältnis der Tangenten der Strahleneigungen vor und nach der Brechung wird das Konvergenzverhältnis genannt. Wir wollen es in Zukunft mit k bezeichnen. Wir hatten gefunden (s. o. 3.) $\operatorname{tg} u' = -\frac{s}{a'}$ und $\operatorname{tg} u = -\frac{s}{a}$. Folglich ist (s. o. 4.) $k = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{a}{a'} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{1}{v}$ oder $k \cdot v = \frac{n'}{n}$. Ersetzen wir (s. o. 4.) den ersten Quotienten $\frac{n'}{n}$ durch $-\frac{f}{f'}$ und v durch $-\frac{x'}{f}$ oder $-\frac{f}{x}$, so wird

$$k = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'}$$

7. Die subjektive Vergrößerung. Ein achsensenkrechter Gegenstand g , der sich in der Entfernung a vom Auge befindet, erscheint diesem unter einem gewissen natürlichen Sehwinkel φ , der auch scheinbare Größe heißt; dieser

1) angulus (lat.) = Winkel.

winkel ist durch die Gleichung $\tan \varphi = \frac{y}{a}$ bestimmt. Wird zwischen das Auge und den Gegenstand ein Linsensystem eingeschaltet, so wird hierdurch im allgemeinen der Sehwinkel, unter dem der Gegenstand erscheint, geändert. Der neue künstliche Sehwinkel ist durch den Winkel bestimmt, den ein vom höchsten Punkte des Gegenstandes ausgehender Strahl nach dem Durchlaufen des Linsensystemes mit der Achse des Systemes einschließt. Beträgt dieser Winkel ψ , so heißt der Quotient $w = \frac{\tan \psi}{\tan \varphi}$ die durch das Linsensystem bewirkte subjektive Vergrößerung des Gegenstandes.

§ 277. Abbildung durch ein zentriertes System brechender Kugelflächen.

1. Abbildung eines Achsenpunktes. In Fig. 822 sind um die auf derselben Achse CC_1 liegenden Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 Kugelflächen L_1, L_2 und

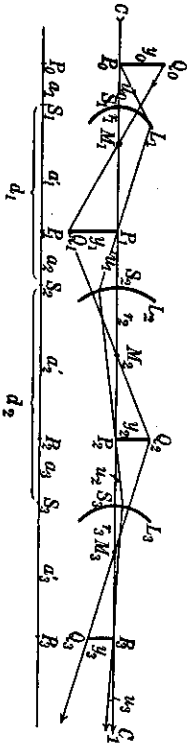


Fig. 822. Zentriertes System von Kugelflächen.

L_3 bezeichnet, die vier brechende Mittel mit den Brechungsverhältnissen n_0, n_1, n_2 und n_3 voneinander trennen. Kugelflächen dieser gegenseitigen Lage nennt man zentrierte Kugelflächen. Die Achsenscheitel sind mit S_1, S_2 und S_3 bezeichnet. Sie haben voneinander die Abstände $S_1S_2 = d_1$ und $S_2S_3 = d_2$. Ein lichtauswendender Gegenstandspunkt P_0 liege auf der Achse. Die Kugelfläche L_1 srenzt (bei Beschränkung auf Nullstrahlen) den auf der Achse liegenden Bildpunkt P_1 . Dieser dient als Gegenstandspunkt für die Kugelfläche L_2 , die wieder den neuen Bildpunkt P_2 erzeugt. P_2 ist wieder Gegenstandspunkt für L_3 , und von ihm wird durch die Kugelfläche L_3 der Bildpunkt P_3 erzeugt. So können wir uns noch eine ganze Reihe von Kugelflächen auf derselben Achse angefügt denken. Jedermal ist der von der einen Kugelfläche erzeugte Bildpunkt zugleich Gegenstandspunkt für die nächste Fläche. So möge die letzte Fläche mit L_m und das Brechungsverhältnis des rechts von ihr liegenden Mittels mit n_m bezeichnet werden. Wir können demnach auch sagen, daß das System der zentrierten Kugelflächen von dem im ersten Mittel liegenden Gegenstandspunkte P_0 einen Bildpunkt P_m im letzten Mittel erzeugt. Man drückt diese Tatsache auch wohl durch den Satz aus:

Ein von einem Lichtpunkte ausgehendes (homozentrisches) Strahlenbüschel wird durch ein System zentrierter Kugelflächen, die Mittel von verschiedenen Brechungsverhältnissen voneinander trennen (bei Beschränkung auf Nullstrahlen), wieder in ein homozentrisches Strahlenbüschel verwandelt.

Man kann die Lage des letzten Bildpunktes P_m berechnen, wenn man die Krümmungshalbmesser der Kugelflächen, die Abstände ihrer Mittelpunkte oder ihrer Scheitel und die Brechungsverhältnisse kennt.

Zur wirklichen Durchführung dieser Rechnung müße man die in § 271 abgeleitete Grundgleichung für jede Fläche aufstellen und hieraus die letzten Bildweite a'_m , unter Berücksichtigung der Scheitelabstände, berechnen. Das System der Gleichungen würde dann lauten:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{a_1} &= \frac{n_0}{a_1} + \frac{n_1 - n_0}{r_1} & a_1 &= a_1' + a_2 \\ \frac{n_2}{a_2} &= \frac{n_1}{a_2} + \frac{n_2 - n_1}{r_2} & a_2 &= a_2' + a_3 \\ \frac{n_3}{a_3} &= \frac{n_2}{a_3} + \frac{n_3 - n_2}{r_3} & a_3 &= \dots \\ &\dots & & \\ \frac{n_m}{a_m} &= \frac{n_{m-1}}{a_m} + \frac{n_m - n_{m-1}}{r_m} \end{aligned}$$

2. Abbildung eines achsensenkrechten Gegenstandes. Befindet sich in P_0 der achsensenkrechte Gegenstand P_0Q_0 von der Größe y_0 , so entstehen der Reihe nach die achsensenkrechten Bilder $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots, P_mQ_m$ von der Größe y_1, y_2, \dots, y_m . Die Seitenvergrößerung beträgt nach § 276, 4.

$$v = \frac{y_m}{y_0} = \left(\frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{a_1}{a_1'} \right) \cdot \left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{a_2}{a_2'} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n_{m-1}}{n_m} \cdot \frac{a_m}{a_m'} \right),$$

$$v = \frac{n_0}{n_m} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m}{a_1' \cdot a_2' \cdot \dots \cdot a_m'}$$

Ziehen wir von P_0 aus einen beliebigen Strahl mit der Neigung u_0 , so wird diese Neigung durch die brechenden Flächen der Reihe nach umgewandelt in u_1, u_2, \dots, u_m .

Für jede der Brechungen gilt der Helmholtzsche Satz

$$n_0 y_0 \operatorname{tg} u_0 = n_1 y_1 \operatorname{tg} u_1 = n_2 y_2 \operatorname{tg} u_2, \dots, n_{m-1} y_{m-1} \operatorname{tg} u_{m-1} = n_m y_m \operatorname{tg} u_m$$

Durch wiederholte Anwendung folgt hieraus also, daß der Helmholtzsche Satz für beliebig viele Brechungen gilt. Wir können ihn daher ganz allgemein in der Form der Gleichung schreiben

$$n_0 \cdot y_0 \cdot \operatorname{tg} u_0 = n_m \cdot y_m \cdot \operatorname{tg} u_m$$

3. Die angulare Vergrößerung oder das Konvergenzverhältnis ist (§ 276, 6.) das Verhältnis der Tangenten der Strahlenneigungen am Ende und am Anfange des Strahlenganges $k = \frac{\operatorname{tg} u_m}{\operatorname{tg} u_0}$, die Seitenvergrößerung war $v = \frac{y_m}{y_0}$. Mit der letzten Helmholtzschen Gleichung gilt also

$$k \cdot v = \frac{n_0}{n_m}$$

In dieser Gleichung liegt die tiefere Bedeutung des Helmholtz'schen Satzes, nämlich die Erkenntnis, daß *das Produkt aus der Seitenvergrößerung und der angularen Vergrößerung nur von den Brechungsverhältnissen im ersten und letzten Mittel abhängig, von allen zwischenliegenden Mitteln aber unabhängig ist.*

4. Hauptpunkte, Hauptebenen. Die unmittelbare Anschauung von Fig. 822 sowie der Ausdruck für die Seitenvergrößerung v belehren uns darüber, daß es für ein zentriertes System brechender Kugelflächen einen Gegenstandspunkt und einen zugeordneten Bildpunkt geben muß, in dem die Seitenvergrößerung eines achsensenkrechten Gegenstandes den Wert $v = 1$ erhält. Befindet sich (Fig. 823) der Gegenstand $P_0 Q_0 = y_0$ in dem einen dieser



Fig. 823. Hauptpunkte P_0 und P_m eines Systemes.

Fig. 824. Hauptebenen H und H' eines Systemes.

Punkte, so würde ein gleich großes, aufrechtes Bild $P_m Q_m = y_m$ in dem anderen zugeordneten Punkte entstehen.

Diese ausgezeichneten Punkte heißen Hauptpunkte des Systemes. Alle Strahlen, die durch den einen Hauptpunkt gehen, müssen auch durch den anderen Hauptpunkt gehen. Hiermit ist aber das Wesen der Hauptpunkte noch nicht gekennzeichnet, denn diese Eigenschaft hat jedes Paar von einander zugeordneten Punkten. Legen wir aber durch die beiden Hauptpunkte Ebenen (die Hauptebenen), so bildet sich jeder Punkt der einen Hauptebene durch einen auf der anderen Hauptebene liegenden Punkt ab, der zu dem Gegenstandspunkte eine kongruente Lage hat. Würde man die beiden Hauptebenen mit ihren auf ihnen festliegenden Gegenstands- und Bildpunkten zusammenschieben, so würden alle Teile beider Ebenen vollkommen zur Deckung kommen.

Kennt man die Hauptebenen eines Systemes, so weiß man, daß jeder durch einen Punkt der einen Hauptebene gehende Strahl durch einen Punkt der zweiten Hauptebene geht, der zu dem ersten Punkte kongruent liegt. Man braucht den Weg des Lichtstrahles durch das System gar nicht zu verfolgen. In Fig. 824 ist der Strahl R gezeichnet, der die erste Hauptebene in A trifft; er verläßt (als R') die zweite Hauptebene in A' . Wir können also durch die punktierte Gerade, die A mit A' verbindet, und die parallel zur Achse des Systemes ist, andeuten, daß wir über den Verlauf des Strahles innerhalb des Systemes nichts aussagen wollen. Selbstverständlich ist die Richtung von R' noch nicht bestimmt, sie ist in der Figur ganz willkürlich gezeichnet worden.

Will man die Lage der Hauptpunkte berechnen, so muß man in dem letzten Ausdrucke für die Seitenvergrößerung $v = 1$ setzen und dann das allgemeine Gleichungssystem mit zur Berechnung von a_1 und a_m benutzen. Wir können diese Berechnung hier nicht allgemein durchführen.

Kennt man die Hauptebenen HH und $H'H'$ sowie die Brennpunkte F und F' eines brechenden Systemes, so kann man angeben, wie Lichtstrahlen, die im Gegenstandsraume parallel sind, im Bildraume verlaufen. Wenn der achsenparallele Strahl S_1 (Fig. 825) die gegenstandsseitige Hauptebene HH in A trifft, so muß er das System im zugeordneten

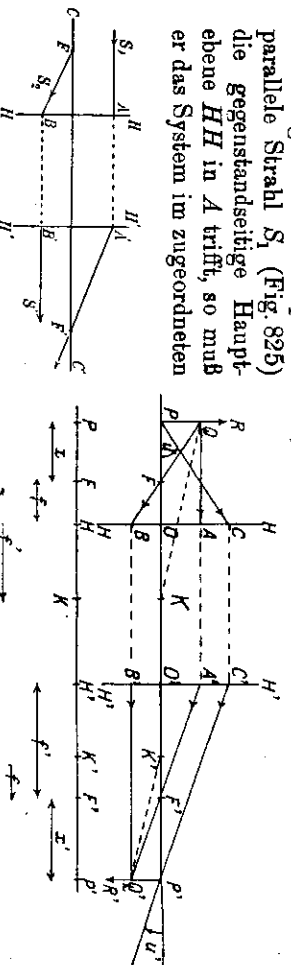


Fig. 825. Hauptpunkte O und O' , Hauptebenen H und H' , Brennpunkte F und F' , Knotenpunkte K und K' Gegenstand PQ und sein Bild $P'Q'$ eines kollinear abbildenden Systemes.

Fig. 826. Hauptpunkt O und O' , Hauptebenen H und H' , Brennpunkte F und F' , Knotenpunkte K und K' Gegenstand PQ und sein Bild $P'Q'$ eines kollinear abbildenden Systemes.

Punkte A' der bildseitigen Hauptebene $H'H'$ verlassen und dann durch den bildseitigen Brennpunkt F' gehen. Der vom gegenstandsseitigen Brennpunkte F ausgehende Strahl S_2 , der die gegenstandsseitige Hauptebene HH in B trifft, verläßt die bildseitige Hauptebene $H'H'$ im zugeordneten Punkte B' als achsenparalleler Strahl S' . Die beiden punktiert gezeichneten, achsenparallelen Geraden AA' und BB' geben aber nicht den Verlauf der Strahlen im Systeme an, sondern sie sind nur geometrische Hilfslinien, die die zugeordneten Punkte der beiden Hauptebenen verbinden.

5. Abbildungsgesetze bei eindeutiger (kollinear) Abbildung. Die Einführung von Hauptebenen und Hauptpunkten für ein beliebiges optisches System aus zentrierten Kugelflächen geht auf den Mathematiker C. F. Gauß¹⁾ (1840) zurück und bietet große Vorteile. Man kann mit Hilfe dieser Begriffe nämlich die früher für eine einzelne Kugelfläche gefundenen Abbildungsgesetze auf zusammengesetzte Systeme endlicher Dicke übertragen. Bei Kenntnis der Brennpunkte und Hauptebenen des Systemes läßt sich die Lage und Größe des Bildes zu einem gegebenen Gegenstande ganz ähnlich durch Zeichnung finden, wie das früher in § 273 ausgeführt wurde.

PR sei in Fig. 826 der durch das System abgebildete, achsensenkrecht Gegenstand. Dann zieht man von dem Gegenstandspunkte Q zwei Strahlen QA und QF parallel zur Achse und durch den gegenstandsseitigen Brennpunkt F . Die Schnittpunkte A und B dieser Strahlen mit der Hauptebene HH entsprechen den Punkten A' und B' der Hauptebene $H'H'$, welche von der Achse denselben Abstand haben wie A und B . Wir ziehen weiter $A'E'$ durch den bildseitigen Brennpunkt F' und $B'Q'$ durch B' parallel zur Achse. Beide Strahlen schneiden sich im Bildpunkte Q' von Q . Auf gleiche Weise kann man jeden Bildpunkt des Gegenstandes aufsuchen. Die Ausführung er-

1) C. F. Gauß, (1777—1855) in Göttingen, berühmter Mathematiker.

gibt dann das achsensenkrechte Bild $P'R'$. Diese Methode, durch Zeichnung den Bildpunkt zu finden, wurde zuerst von J. B. Listing (1851¹⁾) gebraucht.

Es möge dabei noch bemerkt werden, daß das angegebene Verfahren, jedem Punkte Q des Gegenstandsraumes einen ganz bestimmten Punkt Q' des Bildraumes zuzuordnen, den Abmessungen nach keiner Beschränkung unterworfen ist, sondern für alle Punkte des unendlich ausgedehnten Raumes gilt. Durch die angegebene Vorschrift, die Zeichnung auszuführen, erhält die erzielte Abbildung ganz bestimmte mathematische Eigenschaften, die man mit dem mathematischen Begriff „kollinear“ verwan^dt bezeichnet.

Die durch die Ausführung der Zeichnung festgelegten kollinearen Beziehungen zwischen Gegenstand und Bild sind dieselben, wie wir sie früher (§ 276, 2.) bei der Beschränkung auf Nullstrahlen kennen lernten. Wir lesen aus der Zeichnung die Proportion ab $\frac{P'R'}{F'O} = \frac{P'Q}{O'B}$ und $\frac{F'O}{F'Q} = \frac{P'Q}{O'A}$.

Das Produkt der Gleichungen ergibt

$$F'P \cdot F'P' = F'O \cdot F'O'.$$

Bezeichnen wir jetzt als *Brennweite die Abstände der Brennpunkte F und F' von den Hauptebenen*, $OF = f$, $O'F' = f'$, weiter die Abstände des Gegenstandes und Bildes von ihren Brennpunkten $F'P = x$, $F'P' = x'$, wobei f, f', x und x' im Sinne der Lichtbewegung positiv gezählt werden sollen (in Fig. 826 sind also x und f negativ), so geht die letzte Gleichung über in

$$xx' = f \cdot f'.$$

Das ist die Grundgleichung 3 auf S. 804 und die Newtonsche Abbildungsgleichung. Zu jedem x gehört ein eindeutig bestimmtes x' unabhängig von der Entfernung des Gegenstandspunktes Q von der Achse. Daher wird ein achsensenkrecht, ebener Gegenstand wiederum durch ein achsensenkrechtes, ebenes, ähnliches Bild abgebildet. Die Seitenvergrößerung ist (S. 806)

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{OB}{PQ} = \frac{FO}{FP} = -\frac{f}{x}$$

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{P'Q'}{O'A} = \frac{F'P'}{F'O} = -\frac{x'}{f'}$$

Setzt man beide Werte für $(-v)$ einander gleich und addiert auf beiden Seiten 1, so erhält man

$$\frac{1+x}{x} = \frac{f+x'}{f'}$$

Ziehen wir nun durch P und P' die zugeordneten Strahlen PC und $P'C'$ und nennen die Winkel, welche sie mit den Achsen bilden, u und u' , so erhalten wir, da $OC = OC'$ ist,

$$(x+f) \operatorname{tg} u = (x'+f') \cdot \operatorname{tg} u'.$$

1) Joh. Benedict Listing (1808–1882), geb. in Frankfurt, Prof. der Physik in Göttingen.

2) S. S. 804.

Mit der letzten Gleichung folgt durch Division

$$x \operatorname{tg} u = f' \operatorname{tg} u'$$

oder die Angularvergrößerung $k = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{x}{f'}$. Nennen wir noch die zugeordnete Gegenstandsgröße $PQ = y$ und Bildgröße $P'Q' = y'$, so ist nach der ersten Gleichung für die Seitenvergrößerung v

$$v = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x};$$

das Produkt beider Vergrößerungen ergibt $k \cdot v = \frac{y' \operatorname{tg} u'}{y \operatorname{tg} u} = -\frac{f'}{f}$. Bei kollinearer Abbildung ist das Produkt von Seitenvergrößerung und Konvergenzhöhenveränderlich (invariant). Die letzte Gleichung kann noch geschrieben werden

$$y' \cdot \operatorname{tg} u' \cdot f' = -f \cdot y \cdot \operatorname{tg} u.$$

Die kollineare Abbildung, deren Eigenschaften wir durch die letzten Betrachtungen an dem Listing'schen Bildentwurf kennen lernten, ist von optischen Vorbedingungen ganz unabhängig; sie ist ein rein mathematisches Problem. E. Abbe¹⁾ hat gezeigt, daß alle Eigenschaften der kollinearen Abbildung sich aus der einen Forderung ableiten lassen, daß zu jedem Punkte des Gegenstandsraumes eindeutig ein Bildpunkt im Bildraume zugeordnet ist, in welchem beliebig vielen Brechungen (und Spiegelungen) schneiden. Eine physikalisch erreichbare optische Abbildung ist daher nur solange als kollinear zu betrachten, als diese Forderung erfüllt werden kann. Das ist für den ganzen Raum niemals der Fall, sondern immer nur für größere oder kleinere Gebiete mit genügender Vollkommenheit zu erreichen.

Die in der letzten Gleichung ausgesprochene Bedingung ist der Form nach übereinstimmend mit der Helmholtz'schen Gleichung (S. 805). Diese wurde dort für brechende Kugelflächen bei Beschränkung auf Nullstrahlen abgeleitet. In dem fadenförmigen Raume um die Achse herum liefert ein zentriertes System brechender Kugelflächen also eine kollineare Abbildung. Setzen wir unsere Bedingung mit der erwähnten Gleichung identisch, so folgt durch Division der Gleichungen

$$\frac{f'}{n} = -\frac{f}{n'}. \quad \text{Das entspricht der Gleichung auf S. 803.}$$

Sie enthält eine optische Beziehung zwischen den Brennweiten und damit eine Bedingung über die Lage der Brennpunkte bei gegebenen Hauptebenen in Fig. 826.

1) E. Abbe 1840–1905, Professor in Jena, Mitbegründer und später alleiniger Inhaber des optischen Werkes von Carl Zeiss u. Gen., hat bedeutende Verdienste um die theoretische und praktische Förderung der Optik, zeichnete sich durch soziale Fürsorge aus, verzichtete uneigennützig zugunsten der Förderung wissenschaftlichen und sozialen Fortschrittes auf seinen Besitz.

6. Knotenpunkte. Das Konvergenzverhältnis $k = \frac{\tan u_m}{\tan u_0}$ kann für eine bestimmte Lage der einander zugeordneten Objekt- und Bildpunkte den he-sonderen Wert 1 erhalten. Das bedeutet, daß die Strahleneigung aller vom Objektpunkte ausgehenden Strahlen mit der Strahleneigung derselben Strahlen, die durch den zugeordneten Bildpunkt gehen, übereinstimmt. Die Berechnung dieser ausgezeichneten, Knotenpunkte genannten Punkte geschieht mit Hilfe der Helmholtz'schen Gleichung, indem wir $u = u'$ setzen. Dann wird daraus $fy = -f'y'$ für die Knotenpunkte. Nun ist $v = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f} = -\frac{f}{x}$. Aus diesen Gleichungen folgt $x = f'$ und $x' = f$. Die Knotenpunkte K und K' (Fig. 826) liegen also von den Brennpunkten F und F' um f' und f nach rechts entfernt. (In Fig. 826 ist f negativ.) Ist $n = n'$, ist also vor und hinter dem optischen Systeme das optische Mittel dasselbe, so sind die Brennweiten einander entgegengesetzt gleich. Aus der Bedingung $fy = -f'y'$ für die Knotenpunkte wird dann $y = y'$, d. h. die Knotenpunkte fallen in die Hauptpunkte.

Wir können die Eigenschaft der Knotenpunkte auch dadurch kennzeichnen, daß alle durch den einen Knotenpunkt gehenden Strahlen den andern Knotenpunkt parallel verlassen (Fig. 827).

§ 278. Abbildung durch Linsen endlicher Dicke.

1. Die Zusammensetzung eines optischen Systemes aus zwei optischen Systemen. a) Zeichenerklärung und Beziehungen. Zwei optische Systeme seien durch ihre Hauptebenen und ihre Brennpunkte gegeben. Die Achse sei gemeinsam. Das erste System möge (Fig. 828) die Hauptpunkte H_1 und H_1' , die Brennpunkte F_1 und F_1' , das zweite System die Hauptpunkte H_2 und H_2' , die Brennpunkte F_2 und F_2' haben. In Fig. 828 sei die Lage der Ebenen und Punkte schematisch gezeichnet; da von den Hauptpunkten aus die Brennweiten nach rechts positiv gezählt werden sollen, sind die Brennpunkte willkürlich beide rechts von den Hauptebenen in jedem Systeme angehen worden. Die gegenstandsseitige Brennweite des ersten Systemes sei $H_1F_1 = f_1$, die bildseitige $H_1'F_1' = f_1'$; die gegenstandsseitige Brennweite des zweiten Systemes sei $H_2F_2 = f_2$, die bildseitige $H_2'F_2' = f_2'$. Es möge noch der Abstand der einander „zugewandten“ Hauptebenen der beiden Systeme $H_1H_2 = d$ sein, der Abstand der „einander zugewandten“ Brennpunkte (das optische Intervall) der beiden Systeme $F_1'F_2 = \Delta$. Es befinde sich nun im Gegenstandsraume des ersten Systemes der Gegenstand $AB = y$ im Achsenpunkte A . AB wird durch das erste System im Achsenpunkte A' des Bildraumes des ersten Systemes als $A_1B_1 = y_1$ abgebildet. Dieses Bild ist zugleich für das zweite System der Gegenstand. Das zweite System bildet A_1B_1

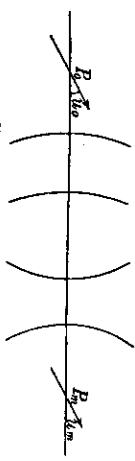


Fig. 827. Knotenpunkte K_0 und K_m des Systemes.

als $A'B' = y'$ in A' ab. Das aus beiden Einzelsystemen H_1, H_1' und H_2, H_2' zusammengesetzte Gesamtsystem bildet also den Gegenstand AB in A als $A'B'$ in A' ab. Bezeichnen wir noch die Koordinaten der Gegenstands- und Bildorte, von den jeweiligen Brennpunkten aus nach rechts positiv gemessen, mit $F_1A = x_1$; $F_1'A_1 = x_1'$; $F_2A_1 = x_2$ und $F_2'A' = x_2'$, so gelten die Abbildungsgleichungen (S. 812)

(1) $x_1 \cdot x_1' = f_1 \cdot f_1'$
 (2) $x_2 \cdot x_2' = f_2 \cdot f_2'$

Ferner lesen wir aus der Figur ab

$H_1'H_2 + H_2F_2 = H_1'F_1' + F_1'F_2$
 oder mit den eingeführten Bezeichnungen

(3) $d + f_2 = f_1' + \Delta$
 $F_1'A_1 = F_1'F_2 + F_2A_1$
 (4) oder $x_1' = \Delta + x_2$.

b) Die Brennpunkte. Wir wollen jetzt die Lage der Brennpunkte des Gesamtsystemes bestimmen. Der bildseitige Brennpunkt F' des Gesamtsystemes ist der Vereinigungspunkt achsenparalleler Strahlen im Gegenstandsraume des Systemes H_1, H_1' . Für solche Strahler wird $x_1 = \infty$, also nach (1) das zugeordnete $x_1' = 0$, nach (4) $x_2 = -\Delta$ und nach (2) $x_2' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta}$. Hierin bedeutet also $x_2' = F_2'F'$ den Abstand des bildseitigen Brennpunktes F' des Gesamtsystemes vom Brennpunkte F_2' . — Die Lage des gegenstandsseitigen Brennpunktes des Gesamtsystemes finden wir entsprechend, wenn wir in (2) $x_2' = \infty$ setzen und die zugeordneten Größen aufsuchen. Nach (2) folgt $x_2 = 0$, damit nach (4) $x_1' = \Delta$ und nach (1) $x_1 = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta}$. Hierin bedeutet also $x_1 = F_1F$ den Abstand des gegenstandsseitigen Brennpunktes F des Gesamtsystemes von F_1 .

c) Die Hauptebenen. Um die Lage der Hauptebenen des Gesamtsystemes zu bestimmen, müssen wir die Lage derjenigen beiden einander zugeordneten Punkte A und A' aufsuchen, in denen die Vergrößerung $\frac{y'}{y}$ den Wert 1 annimmt. Es gilt nun (S. 812)

(5) also soll sein $\frac{y_1}{y} = -\frac{f_1}{x_1}$ und $\frac{y'}{y_1} = -\frac{f_2'}{x_2'}$
 $\frac{y'}{y} = \frac{y'}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y} = \frac{f_1 \cdot f_2'}{x_1 \cdot x_2} = 1$.

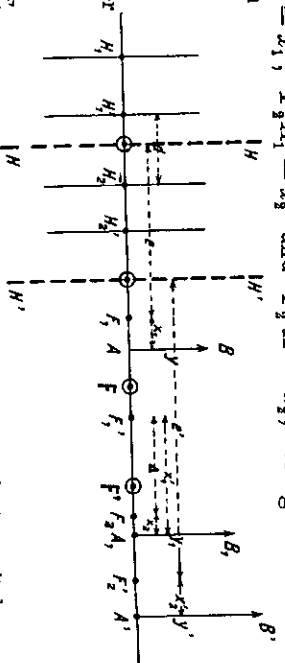


Fig. 828. Zusammensetzung zweier abblinder Teilsysteme mit den Hauptebenen H_1, H_1' und H_2, H_2' , den Brennpunkten F_1, F_1' und F_2, F_2' zu einem einzigen System mit den Hauptebenen H, H' und den Brennpunkten F, F' . Der Gegenstand AB wird durch das erste Teilsystem in A_1, B_1 , dieses Bild durch das zweite Teilsystem in A', B' abgebildet.

Ersetzen wir hierin x_2 aus (4), so wird

$$f_1 \cdot f_2 = x_1(x_1' - \Delta) = x_1 \cdot x_1' - x_1 \cdot \Delta$$

oder mit (1)

$$x_1 \cdot \Delta = f_1 \cdot f_1' - f_1 \cdot f_2$$

und

$$e = x_1 = \frac{f_1(f_1' - f_2)}{\Delta}$$

Hierin bedeutet e den Abstand der gegenstandsseitigen Hauptebene H des Gesamtsystemes vom Brennpunkte F_1 .

Das zugeordnete $e' = x_2$ findet man durch Einsetzen in (1), (4) und (2) zu

$$x_1' = \frac{f_1 \cdot f_1'}{x_1} = \frac{\Delta \cdot f_1'}{f_1' - f_2}$$

$$x_2 = x_1' - \Delta = \frac{\Delta \cdot f_1' - \Delta \cdot f_1' + \Delta \cdot f_2}{f_1' - f_2} = \frac{\Delta \cdot f_2}{f_1' - f_2}$$

und

$$e' = x_2 = \frac{f_2 \cdot f_2'}{x_2} = \frac{f_2'(f_1' - f_2)}{\Delta}$$

Hierin bedeutet e' den Abstand der bildseitigen Hauptebene H' von F_2 .

d) Die Brennweiten. Die Brennweiten des Gesamtsystemes sind nun die Abstände der Brennpunkte von den zugeordneten Hauptebenen H und H' . Wir haben (s. o. 1b)

$$f = HF = F_1F' - F_1H = x_{1,2} - e = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta} - \frac{f_1(f_1' - f_2)}{\Delta} = \frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}$$

$$f' = HF' = F_2'F' - F_2'H = x_2' - e' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta} - \frac{f_2'(f_1' - f_2)}{\Delta} = -\frac{f_2 \cdot f_1'}{\Delta}$$

Damit sind die Grundpunkte H, H', F, F' des Gesamtsystemes und seine Brennweiten aufgefunden worden. Rechnet man die Koordinaten des Gegenstandspunktes A und des Bildpunktes A' von den zugeordneten Brennpunkten F und F' des Gesamtsystemes aus mit

$$FA = x, \quad F'A = x',$$

so gilt wieder die Abbildungsgleichung

$$xx' = f \cdot f'$$

2. Brennweiten und Grundpunkte einer Linse endlicher Dicke. a) Erklärung. In Fig. 829 bedeuten L_1, L_1' und L_2, L_2' zwei Kugelflächen mit den Krümmungsmittelpunkten M_1 und M_2 , den Krümmungshalbmessern r_1 und r_2 und den Scheiteln S_1 und S_2 . Der Abstand der beiden Scheitel sei $S_1S_2 = d$. Das Mittel zwischen den beiden Kugelflächen (z. B. Glas) möge das Brechungsverhältnis n haben, während das Verhältnis n' des Mittels außerhalb dieser Kugelflächen (Luft) gleich 1 sei.



Fig. 829. Linse endlicher Dicke.

Jede der beiden brechenden Flächen L_1, L_1' und L_2, L_2' kann dann als optisches System der vorigen

Betrachtung (s. oben 1.) angesehen werden. Die Hauptebenen einer einzigen brechenden Kugelfläche fallen mit der Fläche selbst zusammen.¹⁾ H_1 und H_1' der vorangeschichteten Betrachtung fallen also in S_1, H_2 und H_2' fallen nach S_2 .

b) Die Einzelbrennweiten. Es sei $P_0 = P$ der achsiale Gegenstandspunkt für die erste abbildende Fläche, P_1 sein Bildpunkt, der zugleich Gegenstandspunkt für die abbildende Fläche L_2, L_2' ist, und schließlich sei $P' = P_2$ der Bildpunkt, der durch die Linse von dem Gegenstandspunkte $P_0 = P$ entworfen wird. Zählen wir die Koordinaten dieser Punkte von den Scheiteln S_1 und S_2 aus (nach rechts positiv) und nennen

$$S_1P_0 = S_1P = a, \quad S_1P_1 = p, \quad S_2P_1 = q \quad \text{und} \quad S_2P_2 = S_2P' = b,$$

und setzen wir ferner $n_0 = 1, n_1 = n, n_2 = 1$, so gelten die Abbildungsgleichungen für eine Kugelfläche (§ 271, 4.)

$$\frac{n}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n-1}{r_1}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{n}{q} + \frac{1-n}{r_2}$$

Man erhält aus ihnen die den abbildenden Flächen L_1, L_1' und L_2, L_2' zukommenden Brennweiten, wenn man a, p, q und b der Reihe nach gleich unendlich setzt und nach den Koordinaten des zugeordneten Punktes ausrechnet. In der Bezeichnungswiese des vorigen Abschnittes (s. oben 1a) erhält man dann

$$f_1 = a_\infty = -\frac{r_1}{n-1}; \quad f_1' = p_\infty = \frac{n r_1}{n-1}; \quad f_2 = q_\infty = -\frac{r_2}{1-n} = +\frac{n r_2}{n-1}$$

und

$$f_2' = b_\infty = \frac{r_2}{1-n} = -\frac{r_2}{n-1}.$$

Mit d und den aus r_1, r_2 und n berechneten Einzelbrennweiten $f_1, f_1'; f_2, f_2'$ kann dann zunächst der Abstand Δ der zugeordneten Brennpunkte (dis optische Länge) nach der Gleichung (3) des vorigen Abschnittes $\Delta = d + f_2 - f_1'$ gefunden werden.

c) Die Hauptpunkte. Wollen wir die Lage der Hauptpunkte unserer Linse in bezug auf die Linsenscheitel angeben, so sind noch zu den Werten e und e' des vorigen Abschnittes (s. o. 1c), welche die Abstände der Hauptebenen von den Brennpunkten F_1 und F_2' messen, die Entfernungen S_1F_1 und S_2F_2' dieser Punkte von den Scheiteln S_1 und S_2 hinzuzuzählen. Da die Hauptpunkte der beiden abbildenden Flächen aber mit diesen Scheiteln zusammenfallen, so sind $S_1F_1 = f_1$ und $S_2F_2' = f_2'$ die erste und letzte Brennweite.

1) Es gilt nämlich nach der Grundgleichung (§ 271, 4.) $\frac{n'}{a'} = \frac{n}{a} + \frac{n'-n}{r}$ und

nach Fig. 820 $v = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a-r}$. Bei gegebenem n, n', n, r ist durch beide Gleichungen a und a' bestimmt. Ist insbesondere $v = 1$, so muß $a = a'$ sein. Das ist erfüllt entweder für $a = a' = r$ oder $a = a' = 0$. Die Hauptebenen fallen also zu einer Ebene zusammen, und diese liegt im Scheitel S oder (bei vertauschten Brennweiten) im Krümmungsmittelpunkte M .

Optik, Physik, I. Grundle. Ausgabe, 6. Aufl.

Die Scheitelabstände der Hauptpunkte der ganzen Linse mögen $S_1H = s_1$ und $S_2H' = s_2$ sein. Dann ist also

$$s_1 = S_1H = S_1F_1 + F_1H = f_1 + e = f_1 + \frac{f_1(f_1' - f_2)}{\Delta} = \frac{f_1(\Delta + f_1' - f_2)}{\Delta} = \frac{f_1 d}{\Delta}$$

$$s_2 = S_2H' = S_2F_2' + F_2'H = f_2' + e' = f_2' + \frac{f_2'(f_1' - f_2)}{\Delta} = \frac{f_2'(\Delta + f_1' - f_2)}{\Delta} = \frac{f_2' d}{\Delta}$$

d) Die Brennweiten f und f' der Linse berechnen sich nach dem Ergebnis des vorigen Abschnittes (s. o. 1d) zu

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta} \quad \text{und} \quad f' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}$$

Da vor und hinter der Linse dasselbe brechende Mittel, nämlich Luft, vorhanden ist, so muß nach dem allgemeingültigen Satze (S. 813) [$n f + n' f' = 0$] für unsere Linse $f = -f'$ werden. Würden wir die zunächst berechneten Werte von f_1, f_1', f_2, f_2' aus den Größen r_1, r_2, d und n in die Gleichungen für Δ und weiter in die für s_1, s_2, f und f' einsetzen, so erhielten wir für diese Größen Schlußformeln, welche nur die gegebenen Stücke enthalten würden. Wir sehen aber davon ab, diese Schlußformeln hinzuschreiben, da sie ziemlich verwickelt sind und geringere Übersichtlichkeit bieten als die oben hingeschriebenen Gleichungen.

Es sei aber noch der Fall einer unendlich dünnen Linse behandelt. Für diese ist $d = 0$, also (o. 2b) $\Delta = f_2 - f_1'$ und (o. 2c)

$$f = -\frac{f_2 \cdot f_1'}{f_2 - f_1'} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{f} = -\frac{1}{f_2} = -\frac{f_2 - f_1'}{f_2 \cdot f_1'} = -\frac{f_2}{f_2 \cdot f_1'} + \frac{1}{f_1'}$$

Durch Einsetzen (s. oben 2b) erhält man für die Brechkraft der Linse

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{(n-1)r_2 n r_1} - \frac{n-1}{r_2} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

in Übereinstimmung mit S. 795.

e) Der Abstand der Hauptebenen einer Linse der Dicke d von einander ist nach 2c)

$$a = d - s_1 + s_2 = \frac{d}{\Delta} (\Delta - f_1 + f_2')$$

f) Zahlenbeispiele. Es sollen die gewonnenen allgemeinen Ergebnisse an einigen Zahlenbeispielen durchgeführt werden. Wir betrachten zunächst eine Bikonvexlinse aus Glas mit den gegebenen Maßen (Fig. 830)

$$r_1 = 4 \text{ cm}, \quad r_2 = -2 \text{ cm}, \quad d = 0,4 \text{ cm}, \quad n = 1,5.$$

Dann ist

$$f_1 = -\frac{r_1}{n-1} = -\frac{4}{0,5} = -8 \text{ cm}, \quad f_2 = \frac{r_2}{n-1} = -\frac{-2}{0,5} = +4 \text{ cm}$$

$$f_1' = \frac{n r_1}{n-1} = +12 \text{ cm}, \quad f_2' = -\frac{n r_2}{n-1} = +4 \text{ cm}$$

$$\Delta = d + f_2 - f_1' = 0,4 - 6 - 12 = -17,6 \text{ cm}$$

$$s_1 = \frac{f_1 \cdot d}{\Delta} = \frac{-8 \cdot 0,4}{-17,6} = \frac{2}{11} = 0,18 \text{ cm}$$

$$s_2 = \frac{f_2' \cdot d}{\Delta} = \frac{4 \cdot 0,4}{-17,6} = -\frac{1}{11} = -0,09 \text{ cm}$$

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta} = \frac{-8 \cdot (-6)}{-17,6} = -\frac{48}{17,6} = -\frac{30}{11} = -2,73 \text{ cm}$$

$$f' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta} = -\frac{12 \cdot 4}{-17,6} = +\frac{30}{11} = +2,73 \text{ cm}$$

Der gegenseitige Abstand der Hauptebenen ist

$$a = d - s_1 + s_2 = 0,4 - 0,18 - 0,09 = +0,13 \text{ cm}$$

Wie aus der Rechnung hervorgeht, ändern sich die Größen Δ, s_1, s_2, f und f' erheblich mit der Linsendicke d . Für $d = 6 \text{ cm}$, so daß die Krümmungsmittelpunkte zusammenfallen, wird $a = 0$, die beiden Hauptebenen fallen zu einer einzigen zusammen. Ist $d = 8 \text{ cm}$, so wird

$$\Delta = -10 \text{ cm}, \quad s_1 = +6,4 \text{ cm}, \quad s_2 = -3,2 \text{ cm}, \quad f' = -f = 4,8 \text{ cm},$$

$$a = -1,6 \text{ cm}$$

Die Hauptebenen liegen jetzt vertauscht und sind auf 1,6 cm auseinandergerückt, die Brennweite ist beträchtlich gewachsen. Für $d = 18 \text{ cm}$ wird $\Delta = 0$, Hauptebenen und Brennpunkte sind in die Unendlichkeit gerückt; die Linse hat nicht mehr die Eigenschaft einer Sammellinse. (Sie bildet jetzt teleskopisch ab, § 291.) Für $d > 18 \text{ cm}$ wird Δ positiv; damit vertauschen auch s_1, s_2, f und f' ihr Vorzeichen. Die Hauptebenen liegen dann also außerhalb der Linse wieder in der ersten Reihenfolge, und die Linse ist eine Zerstreuungslinse geworden (trotzdem sie in der Mitte dicker als am Rande ist).

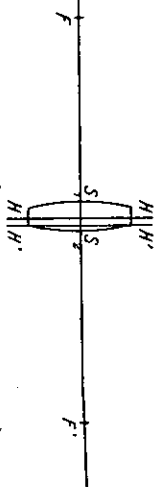


Fig. 830. Glaslinse ($n = 1,5, r_1 = 4 \text{ cm}, r_2 = -2 \text{ cm}$) mit ihren Hauptebenen und Brennpunkten.

3. Optische Systeme, die durch Zusammenstellung einzelner dünner Linsen gebildet werden. Es mögen zwei so dünne Linsen zu optischen Systemen zusammengestellt werden, daß wir die Hauptebenen der Linsen als mit den Linsen zusammenfallend betrachten können (denn für $d = 0$ wird — s. o. 2c und 2e $s_1 = s_2 = a = 0$). Ferner sei vor und hinter jeder der beiden Linsen dasselbe brechende Mittel, nämlich Luft, vorhanden. Es ist dann $-f_1 = f_1'$ und $f_2' = -f_2$. Der Abstand d des Systemes ist jetzt ohne weiteres der Abstand der beiden dünnen Linsen voneinander; die Abstände s_1 und s_2 des Systemes werden je von den Linsen aus gemessen. Unter diesen Voraussetzungen vereinfachen sich unsere Formeln zu

$$\Delta = d - f_1' - f_2, \quad s_1 = -\frac{f_1' \cdot d}{\Delta}, \quad s_2 = \frac{f_2 \cdot d}{\Delta}, \quad -f' = +f = \frac{f_1 \cdot f_2'}{\Delta} = +\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}$$

Ob das System ein sammelndes (kollektives) oder zerstreues (dispansives) ist, hängt von dem Vorzeichen von Δ ab (s. o. 2f).

Häufig schreibt man die letzte Gleichung noch in anderer Form, indem man nicht die Brennweite, sondern die Brechkraft des Systemes angibt:

Berühren die dünnen Linsen einander unmittelbar, so daß $d = 0$ gesetzt werden kann, so gilt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

d. h. die (in Dioptrien gezählten) Brechkraften zweier dünner, unmittelbar einander berührender Linsen addieren sich.

4. Knotenpunkte. Die Lage der Knotenpunkte in einer Linse von endlicher Dicke kann nach Fig. 831 auch durch folgende Überlegung bestimmt werden.

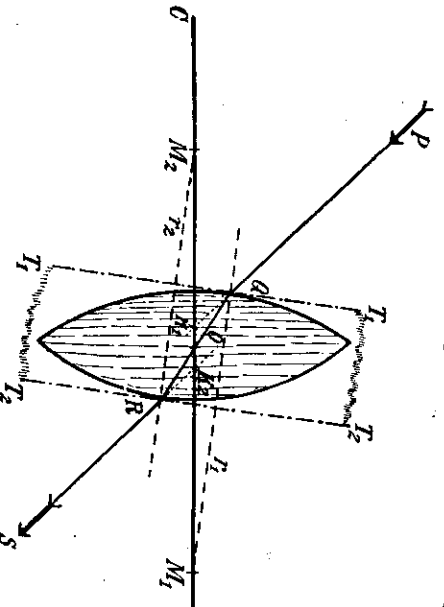


Fig. 831. Knotenpunkte (K_1 und K_2), sowie optischer Mittelpunkt einer Linse endlicher Dicke.

gentialebenen T_1T_1 und T_2T_2 an die Kugelflächen, so begrenzen diese eine planparallele Platte, und wir können annehmen, daß QR zu einem Lichtstrahl P gehört, der bei Q in die Platte eintritt und sie bei R wieder (als Strahl S) parallel verschoben verläßt. Verlängern wir P in seiner Richtung und S nach rückwärts, so erhalten wir die Schnittpunkte K_1 und K_2 mit der Linsenachse CC . Diese beiden Punkte sind die Knotenpunkte der Linse. Da vor und hinter dem optischen Systeme, der Linse, das Mittel dasselbe sein soll, nämlich Luft, so fallen die Knotenpunkte K_1 und K_2 mit den Hauptpunkten zusammen (S. 814). Der Punkt O , in dem der Strahl QR die Linsenachse schneidet, wird der optische Mittelpunkt der Linse genannt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OQK_1 und ORM_1 , folgt die Proportion und hieraus folgt:

$$OQ : OR = r_1 : r_2,$$

Der optische Mittelpunkt einer Linse teilt die Linsendicke im Verhältnis der Krümmungsradien.

5. Scharversuche. a) Parallelverschiebung. Man kann die Parallelverschiebung eines Lichtstrahles an den Knotenebenen objektiv darstellen,

indem man einen Lichtstrahl schräg durch eine recht dicke Linse hindurchleitet. Die Abbildung in Fig. 832 ist nach einer photographischen Aufnahme eines solchen Lichtstrahles angefertigt worden, der durch hineingeblassenen Tabakrauch sichtbar gemacht worden ist (siehe oben 4.).

Die zu den in Fig. 833 bis 838 abgebildeten Versuchen benutzten dicken Linsen wurden in der Weise hergestellt, daß auf zwei einander gegenüberliegende Flächen eines Glaswürfels von 4 cm Kantlänge Plankonvexlinsen mit Kanadabalsam aufgekittet wurden. Die Strahlengänge sind durch Tabakrauch sichtbar gemacht und dann photographiert worden; dagegen wurden die Umrisse der Linse nachträglich in die Photographien eingezeichnet. Fig. 833 zeigt, daß ein Strahl, der so auf die Linse fällt, daß er sie parallel verschoben wieder verläßt, die Achse der Linse in zwei Punkten, den Knotenpunkten K und K' schneidet (s. dazu § 277, 6.).

b) Aufsuchen der Hauptebene. In Fig. 834 fallen auf eine Bikonvexlinse, deren Krümmung auf beiden Seiten verschieden ist, drei einander parallele Lichtstrahlen; diese werden durch die Linse konvergent gemacht und schneiden sich in dem bildseitigen Brennpunkte F' . Verlängert man die ein-

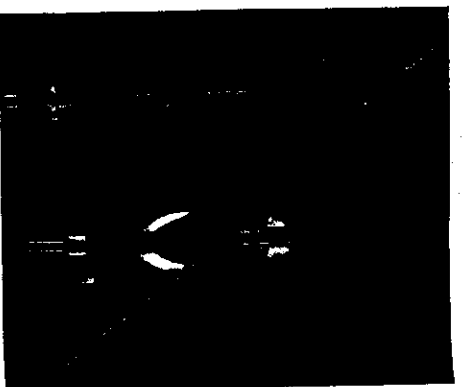


Fig. 832. Ein Lichtstrahl durch die Knotenpunkte erleidet nur Parallelverschiebung.

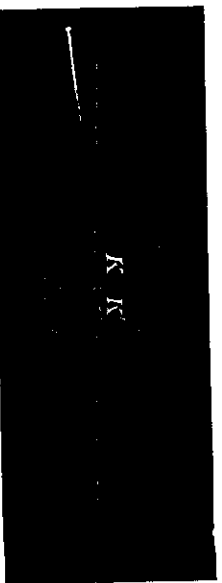


Fig. 833. Die Knotenpunkte einer dicken Linse.

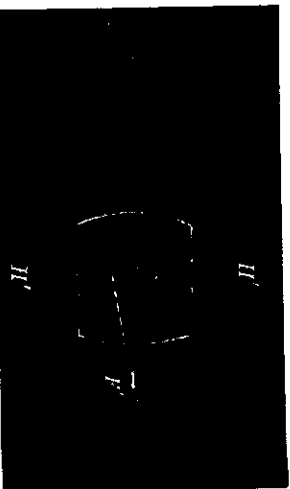


Fig. 834. Bildseitige Hauptebene und bildseitiger Brennpunkt.

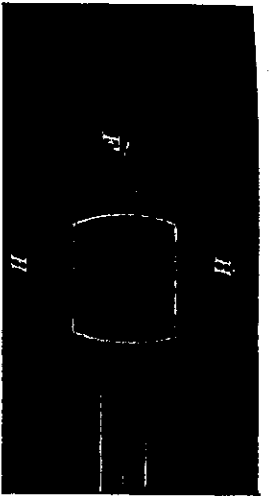


Fig. 836. Gegenstandsseitige Hauptebene und gegenstandsseitiger Brennpunkt.

rungen in der gegenstandsseitigen Hauptebene HH' .

In dem durch Fig. 836 dargestellten Versuche sind durch dieselbe Linse gleichzeitig drei einander parallele Strahlen von beiden Seiten auf die Linse geleitet. So entstehen gleichzeitig die beiden Brennpunkte F und F' . Die Abstände der Brennpunkte von ihren zugehörigen Hauptebenen sind die beiden Brennweiten; diese sind hier, da die Strahlen aus Luft durch Glas wieder in das erste Mittel (Luft) eintreten, einander gleich, obgleich die Brennpunkte verschiedene Entfernungen von den Linsenscheiteln haben (s. dazu oben 2. d).

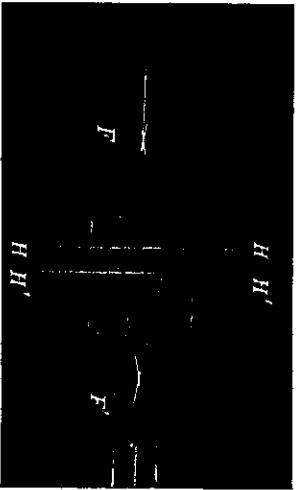


Fig. 836. Hauptebenen und Brennpunkte.

Die unsymmetrische Lage der Brennpunkte und der Hauptebenen zur Linse zeigt sich bei dem in Fig. 837 dargestellten Versuche besonders auffallend. Bei diesem Versuche ist auf die eine Seite eines Glaswürfels eine Plankonvexlinse, auf die gegenüberliegende Seite eine Plankonkavlinse aufgekittet worden. Der Versuch zeigt, daß die Hauptebene HH' ganz außerhalb der Linse liegt. Dementsprechend liegt der Brennpunkt F dicht an dem einen Linsenscheitel, während der Brennpunkt F' weiter

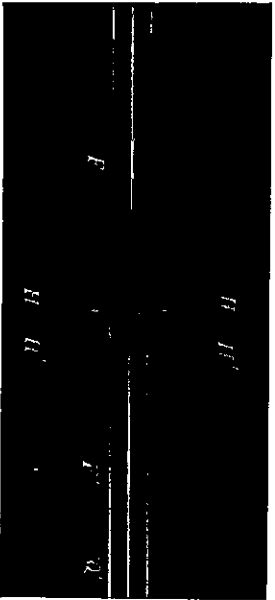


Fig. 837. Hauptebenen und Brennpunkte einer Konkavkonvexlinse.

In Fig. 835 gehen vom Punkte F drei Strahlen aus, die nach ihrem Durchgange durch die Linse diese parallel verlassen. Der Ausgangspunkt dieser Strahlen ist der gegenstandsseitige Brennpunkt F . Verlängert man die eintretenden Strahlen in ihrer Richtung und die austretenden Strahlen nach rückwärts, so schneiden sich diese Verlänge-

ren von dem anderen Linsenscheitel entfernt ist; aber die beiden Brennweiten sind einander gleich.

Im Anschluß an den vorigen Versuch sei noch der durch die Fig. 838 und 839 dargestellte Versuch erwähnt. Hier treten drei einander

parallele Strahlen auf ein aus zwei Linsen zusammengesetztes Linsensystem (s. oben 3.), von denen die Linse L_1 eine Plankonvexlinse und die Linse L_2 eine Plankonkavlinse ist. Bei diesem Linsensysteme liegen beide Haupt-

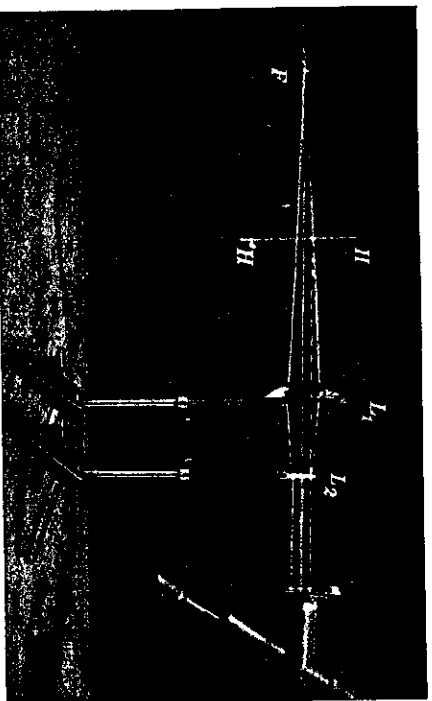


Fig. 838. Gegenstandsseitige Hauptebene und gegenstandsseitiger Brennpunkt eines Systems aus zwei Linsen.

ebenen HH und $H'H'$ außerhalb des Linsensystemes auf derselben Seite. Die unsymmetrische Lage der beiden Brennpunkte kommt gut zur Dar-

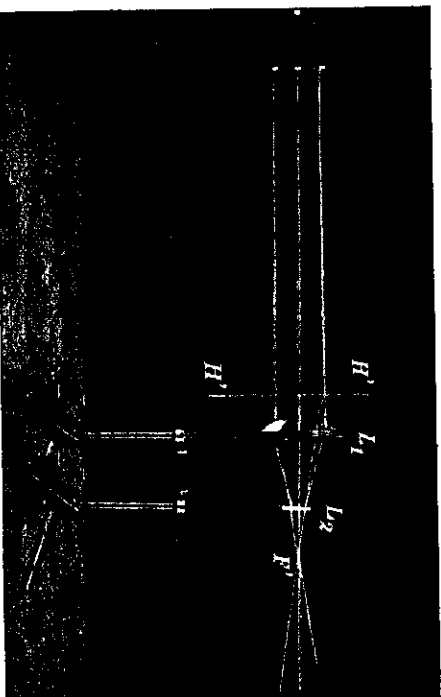


Fig. 839. Bildseitige Hauptebene und bildseitiger Brennpunkt eines Systems aus zwei Linsen.

stellung; trotzdem sind aber hier wieder die beiden Brennweiten einander gleich, da das erste und das letzte Mittel dasselbe Brechungsverhältnis haben.

§ 279. Abbildung eines achsensenkrechten Gegenstandes durch eine Linse von endlicher Dicke.

In dem durch Fig. 840 dargestellten Versuche gehen drei Strahlen von einem außerhalb der Linsenachse liegenden Punkte Q aus. Der eine Strahl geht durch den gegenstandseitigen Brennpunkt F ; er verläßt die Linse parallel zur Achse. Verlängert man den eintretenden und den austretenden Strahl, so schneiden sie sich in der gegenstandseitigen Hauptebene HH' . Der zweite Strahl tritt parallel zur Linsenachse in diese Linse ein; nach dem Austreten

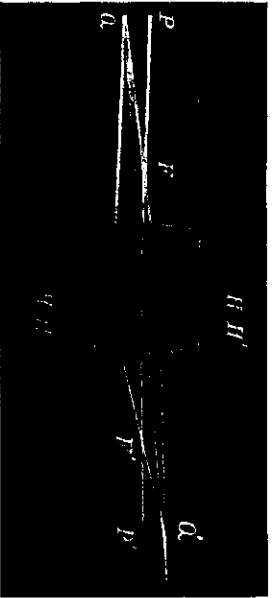


Fig. 840. Abbildung eines achsensenkrechten Gegenstandes.

aus der Linse verläßt er diese konvergent zur Linsenachse und geht durch den bildseitigen Brennpunkt F' . Die Verlängerungen des eintretenden und des austretenden Strahles schneiden sich in der bildseitigen Hauptebene $H'H'$. Der dritte Strahl zielt zum gegenstandseitigen Knotenpunkte, der hier mit dem gegenstandseitigen Hauptpunkte zusammenfällt; er verläßt die Linse parallel verschoben so, als ob er vom bildseitigen Knotenpunkte, der wieder mit dem bildseitigen Hauptpunkte zusammenfällt, herkäme. Der Schnittpunkt der drei ausgewählten Strahlen ist der Bildpunkt Q' , der dem Gegenstandspunkte Q zugeordnet ist.

Dieser Versuch ist der Fig. 826 nachgebildet, nach der man mittels der drei ausgewählten Strahlen den Bildpunkt eines Gegenstandes durch Zeichnung finden kann, wenn man die Hauptpunkte und die Brennpunkte einer Linse kennt.

Wenn das erste Mittel, also das Mittel, in dem sich der Gegenstand befindet, ein Brechungsverhältnis hat, das von dem des letzten Mittels verschieden ist, wie z. B. beim Auge, so fallen die Hauptpunkte nicht mit den Knotenpunkten zusammen. In diesem Falle muß man also die Lage der Brennpunkte, der Hauptpunkte und der Knotenpunkte des Systemes kennen, wenn man mittels der drei ausgewählten Strahlen den einem Gegenstandspunkte zugeordneten Bildpunkt zeichnen will.

§ 280. Die Aberration.

Bei allen unseren bisherigen Überlegungen und Untersuchungen in bezug auf Linsen haben wir vorausgesetzt, daß die außerhalb der Achse liegenden Punkte dieser dennoch so nahe liegen, daß die von ihnen ausgehenden Lichtstrahlen die Achse unter einem Winkel schneiden, für den wir den Sinus mit der Tangente und dem Bogen vertauschen dürfen. Lassen wir auch diese Ein-

§ 279. Abbild. eines achsensenk. Gegenstandes durch eine Linse. § 280. Aberration 825

schränkung fallen, so werden die mathematischen Entwicklungen sehr vereinfacht. Wir wollen uns daher nur mit der experimentellen Untersuchung der neu auftretenden Erscheinungen beschäftigen. Auch hier sind die Figuren durchweg durch photographische Aufnahmen des Strahlenganges gewonnen.

Bei dem durch Fig. 841 dargestellten Versuche geht ein Lichtstrahl als axialer Strahl durch die Mitte einer Plankonvexlinse hindurch, die ihre ebene Fläche der Lichtquelle zuwendet. In geringem Abstände hiervon lauten zwei achsenparallele Strahlen, die durch die Linse konvergent gemacht werden und die Achse hinter der Linse in F_m schneiden. Dieser Punkt ist der bildseitige Brennpunkt im Sinne der früheren Festsetzungen.

Außerdem fallen noch zwei parallele Strahlen in größtem Abstände von der Achse auf Gebiete, die dem Rande der Linse nahe sind (sogenannte Randstrahlen). Diese werden ebenfalls durch die Linse konvergent gemacht und schneiden dann die Achse in einem Punkte F_r . Dieser Punkt fällt aber nicht mit F_m zusammen, vielmehr liegt er der Linse wesentlich näher. Denken wir uns nun ein volles paralleles Strahlenbündel von links auf die Linse fallend, so vereinigen sich nicht mehr alle Strahlen dieses Bündels in einem Punkte, sondern die Vereinigungspunkte jeder Zone¹⁾ liegen getrennt voneinander.

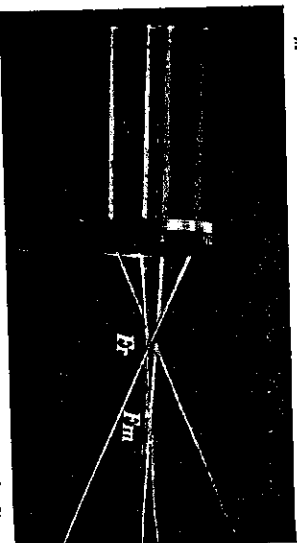


Fig. 841. Randstrahlen haben kürzere Brennweite als die Strahlen in Achsennähe.

Die Strecke $F_r F_m$ heißt die Aberration (§ 261, 6.) der Linse. Man spricht oft auch wohl von einer sphärischen Aberration. Zu diesem Ausdrucke wird man dadurch veranlaßt, daß die in Fig. 841 dargestellte Erscheinung in der Kugelform der Begrenzungsfläche begründet ist. Man kann nun zwar Formen von Linsenflächen berechnen und Linsen von den berechneten Formen praktisch herstellen, die von einem bestimmten Gegenstandspunkte ausgehende Lichtstrahlen in einem Punkte, also ohne Aberration, vereinigen. Immer aber tritt auch in diesem Falle für jeden anderen Gegenstandspunkt wieder Aberration auf. Es ist demnach die Aberration keineswegs eine Erscheinung, die nur der Kugelfläche eigentümlich ist. In Wirklichkeit ist die Aberration bei Linsen, die von Kugelflächen begrenzt werden, kleiner als bei anderen Linsenformen, wenn man nicht nur Strahlen von einer besonders ausgewählten Divergenz vereinigen will.

Die Aberration ist nicht nur eine Funktion der Linsenform, sondern

1) Das Wort Zone wird hier im mathematischen Sinne als Kugelzone gebraucht; es bedeutet einen (schmalen) Oberflächestreifen auf der Linsenoberfläche, der von der Achse überall gleichen Abstand hat.

auch eine Funktion der Winkel, unter denen die Lichtstrahlen die Linsenflächen schneiden. Das geht aus folgendem Versuche hervor:

Wir drehen die in dem vorigen Versuche benutzte Plankonvexlinse um, so daß sie nun den parallel auftallenden Lichtstrahlen ihre gewölbte Seite zuwendet. Dann entsteht die

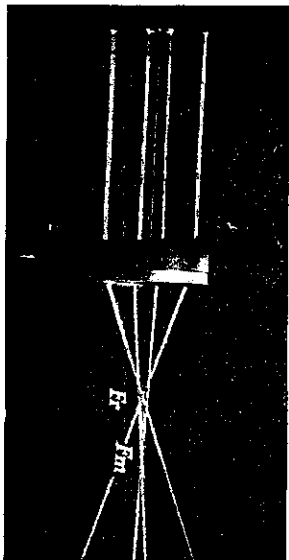


Fig. 842. Die Aberration $F' - F''$ ist verkleinert.

punkte mit der Achse durch Rückwärtsverlängerung der Strahlen bis zur Achse aufsuchen, wenn man die Aberration nachweisen will.

Durch geeignete Kombination zweier oder mehrerer Linsen kann man die Aberration für gewisse Zonen beseitigen. Ein derartiges System heißt sphärisch korrigiert. In Fig. 843 ist der Verlauf dreier paralleler Strahlen durch ein aus einer Plankonvexlinse und einer Plankonkavlinse zusammengesetztes, für zwei Zonen sphärisch korrigiertes System dargestellt. Aber ein solches System ist für zwei Zonen oder höchstens drei Zonen, aber niemals für alle Zonen aberrationsfrei.

Fig. 843. Sphärisch korrigiertes System.

§ 281. Der Astigmatismus.

Wenn wir eine Linse herstellen, die auf der einen Seite durch einen Teil einer Kugelfläche, auf der anderen Seite durch einen Teil einer Zylinderfläche begrenzt ist, und wir stellen die Linse so auf, daß die geradlinigen Erzeugenden der Zylinderfläche lotrecht stehen; so stimmt ein durch die Achse gelegter lotrechter Schnitt mit dem Hauptschnitte einer Plankonvexlinse, ein waagrechter Schnitt mit dem Hauptschnitte einer Bikonvexlinse überein, und zwar ist die Krümmung der einen Fläche der Bikonvexlinse ebenso groß wie die Krümmung der konvexen Fläche der Plankonvexlinse. Würden nun parallele Lichtstrahlen auf jede der beiden zuletzt genannten Linsen treffen, so würde jede (unter Vernachlässigung der Aberration) die parallelen Strahlen in ihrem

bildseitigen Brennpunkte vereinigen, aber die bildseitige Brennweite der Bikonvexlinse würde kleiner sein als die der Plankonvexlinse. Hieraus folgt, daß die zu Anfang dieses Paragraphen erwähnte, durch eine Kugelfläche und eine Zylinderfläche begrenzte Linse parallele Lichtstrahlen, die in einer vertikalen Ebene liegen, in einem anderen Punkte vereinigt als parallele Lichtstrahlen, die in einer horizontalen Ebene liegen. Der letztere Punkt würde näher an der Linse liegen als der erstere.

Dieser Versuch ist in Fig. 844 wirklich ausgeführt. Hier treten durch eine Blende von der Form eines Kreisrings parallele Lichtstrahlen aus einer elektrischen Bogenlampe aus und fallen auf eine Linse, die auf der linken Seite zylindrisch (mit lotrechter Erzeugenden) und rechts sphärisch gekrümmt ist. Im unteren Teile der Figur blickt der Beobachter in wagerechter Ebene, in der sich die Strahlen in dem Punkte F_A zu vereinigen scheinen. Damit nun gleichzeitig eine Betrachtung desselben Strahlenganges von oben, also in lotrechter Ebene, ermöglicht wird, ist oberhalb des Strahlenganges ein langer schmaler Spiegel unter 45° geneigt aufgestellt, in dem man nun den Strahlengang von oben sieht. Hier erkennt man den Vereinigungspunkt F' , der Strahlen in lotrechter Ebene. Einen Vereinigungspunkt für alle Strahlen in jeder beliebig geneigten Ebene senkrecht zur Achse der Linse, so erhalten wir als Durchschnittsfiguren im allgemeinen Ellipsen, und in den Punkten F'_A und F''_A wird die wagerechte bzw. die lotrechte Achse der Ellipsen zu Null; hier entsteht eine wagerechte bzw. eine lotrechte Strecke.

Fig. 844. Astigmatismus; Brennweiten in den beiden Hauptschnitten.

Die beiden mittleren Teile der Fig. 844 sind durch unmittelbares Photographieren des durch Tabakrauch sichtbar gemachten Strahlenbüschels gewonnen worden. (Der Spiegel ist in der Photographie nicht zu erkennen.) Die beiden darüber und darunter dargestellten Figuren sind dadurch gewonnen worden, daß in den Strahlengang desselben Strahlenbüschels kleine, schwach bestäubte Spiegelglasplatten eingesetzt worden sind, auf denen sich dann die Querschnitte deutlich sichtbar abheben. Von diesen Querschnitten ist dann eine photographische Aufnahme etwas schräg von vorn gemacht worden. Daher würden die beiden Teile der Figur, die die Querschnitte des

828 Strahlenbüschels darstellen, um etwa 45° um eine lotrechte Achse gedreht werden müssen, wenn sie genau zu den beiden mittleren Teilen der Figur passen sollten; dann würden aber alle Querschnitte natürlich nur als kurze Strecken erscheinen, die die wesentliche Form der Querschnitte nicht erkennen lassen.

Das, was hier für parallele Strahlen ausgeführt worden ist, gilt auch für divergente Strahlen, die von einem Gegenstandspunkte ausgehen; daher kann die zu dem Versuche von Fig. 844 benutzte Linse von einem Gegenstandspunkte kein punktförmiges Bild erzeugen. Aus diesem Grunde nennt man die beschriebene Erscheinung Astigmatismus¹⁾, und eine den Astigmatismus zeigende Linse heißt eine astigmatische Linse. Sie kommt nicht selten beim



Fig. 845. Astigmatismus schiefer Bündel.

auf die Linse fallen. Man spricht dann, zum Unterschiede vom erst erwähnten Astigmatismus, vom Astigmatismus schiefer Bündel.

In Fig. 845 ist ein durch eine ringförmige Löcherblende gehendes paralleles Strahlenbündel durch eine sphärische Bikonvexlinse geleitet; jedoch die Linse um eine lotrechte Gerade so gedreht worden, daß die Achse der Linse einen Winkel von 45° mit der Richtung der Lichtstrahlen bildet. Die Figur ist ebenso wie beim vorigen Versuche durch eine photographische Aufnahme des Strahlenganges hergestellt worden. Ein oberhalb des Strahlenganges geneigt aufgestellter Spiegel gestattet die gleichzeitige Betrachtung der Erscheinung in einer lotrechten Ebene. Die Erscheinung stimmt im wesentlichen mit der in Fig. 844 abgebildeten Erscheinung überein. Die Linse verhält sich zu einem unter großem Winkel zur Achse durch die Linse gehenden Strahle so, als ob sie stärker gekrümmt wäre.

Hieraus folgt, daß eine Linse einen Gegenstandspunkt, der weit von der Achse entfernt ist, nicht durch punktförmige Vereinigung der Lichtstrahlen abbilden kann. Die Abbildung ist dann keine eindeutige mehr.

§ 282. Die Sinusbedingung.

Infolge der Aberration und des Astigmatismus schiefer Bündel wird im allgemeinen von einem punktförmigen Gegenstande kein völlig punktförmiges (eindeutiges) Bild erzeugt. Wir haben aber erfahren (§ 280), daß man durch Kombination mehrerer Linsen ein sphärisch korrigiertes Linsensystem her-

Auge vor.

Der Astigmatismus tritt auch bei einer Linse auf, die beiderseitig sphärisch begrenzt ist, wenn die Strahlen unter starker Neigung gegen die Achse vom erst erwähnten

stellen kann, das, praktisch genommen, in der Achse aberrationsfrei ist. Es lassen sich also sphärisch korrigierte Systeme auffinden, die einen axialen Gegenstandspunkt aberrationsfrei in einen axialen Bildpunkt abbilden.

In Figg. 846 und 847 möge LL ein in der Achse aberrationsfreies System andeuten, das hier der Übersichtlichkeit halber als einfache Konvexlinse gezeichnet worden ist. Es sei P' der axiale Bildpunkt, der dem axialen Gegenstandspunkte P zugeordnet ist. Denken wir uns nun in P eine kleine achsensrechte Fläche $PQ = y$, so wird diese als achsensrechtes Bild $P'Q' = y'$ abgebildet. Die Vergrößerung $v = y' : y$ können wir mit Hilfe der in § 277 entwickelten Gleichungen berechnen. Wir dürfen nun nicht ver-

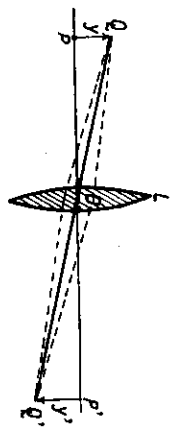


Fig. 846. Ein von dem Gegenstandspunkte Q ausgehendes schmales Lichtstrahlenbündel wird durch den schenkmalen Teil des abbildenden Systems in einem Bildpunkte Q' vereinigt.

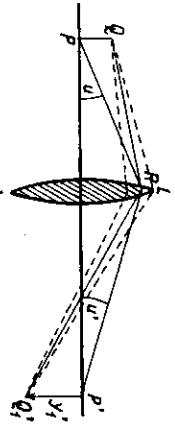


Fig. 847. Ein von dem Gegenstandspunkte Q ausgehendes schmales Lichtstrahlenbündel wird durch den schenkmalen Teil des abbildenden Systems (durch die Randzone) in einem anderen Bildpunkte Q' vereinigt.

gessen, daß jene Gleichung nur unter der Voraussetzung einer Abbildung durch Lichtstrahlen in unmittelbarer Nähe der Achse abgeleitet wurden; sie gelten streng nur für einen fadenförmigen Raum um die Achse herum. In einem solchen Falle ist die Strahlenvereinigung eindeutig; alle von Q ausgehenden Strahlen werden in Q' vereinigt (Fig. 846).

Bei abbildenden Systemen größerer seitlicher Ausdehnung ist aber die Strahlenvereinigung im allgemeinen keine eindeutige mehr. Ein schmales schenkmales Bündel mit dem Hauptstrahle QO vereinigt sich etwa in einem anderen Bildpunkte Q' (Fig. 846) als wie ein anderes schmales Bündel mit dem Hauptstrahle QR , das aus Randstrahlen gebildet wird (Fig. 847). Es möge sich im Punkte Q_1 vereinigen. In einem solchen Falle muß die Vergrößerung von der Zone¹⁾ der Linse abhängen; denn das Bündel durch den optischen Mittelpunkt O des Systemes (Fig. 846) liefert die Bildgröße $P'Q_1 = y_1'$, das Bündel der Randzone R (Fig. 847) die Bildgröße $P'Q_1' = y_1''$. Ein von P aus nach R gehender Strahl möge die Achse mit der Neigung u verlassen, während der gebrochene Strahl RP' die Achse mit der Neigung u' erreicht. Für kleine Strahleneigungen u und u' gilt die in § 276 abgeleitete Helmholtzsche Gleichung. Da das Brechungsverhältnis im ersten und letzten Mittel dasselbe ist, vereinfacht sie sich zu $v = \frac{y'}{y} = \text{tg } u : \text{tg } u'$.

Die Vergrößerung ist dann unabhängig von der Strahleneigung u . Das gilt aber nicht mehr, wenn u eine gewisse kleine Größe überschreitet. Dann ist

1) Siehe S. 825.

die Vergrößerung des Bildes im allgemeinen verschieden, wenn es durch Strahlen erzeugt wird, die durch verschiedene Zonen der Linse gehen. Tritt dieser Fall tatsächlich ein, so kann also ein axialer Punkt P sehr wohl punktförmig abgebildet werden (s. z. B. aplanatische Punkte der Kugelfläche, § 333, 4.), aber die durch verschiedene Zonen erzeugten Bilder Q und Q' eines achsen-nahen Punktes fallen dann nicht mehr zusammen. Dann wird das durch das gesamte Strahlenbündel mit dem halben Öffnungswinkel u erzeugte Bild des achsennahen Punktes Q unscharf.

Scharfe Bilder würden natürlich entstehen, wenn die Helmholtzsche Gleichung auch für grobe Strahleneigungen u durch die Eigenart eines abgebildenden Systems allgemein erfüllt werden könnte. Das ist aber nicht der Fall. Diese Bedingung ist immer an kleine Strahleneigungen der abbildenden Strahlen gegen die Achse geknüpft. Die technische Optik muß sich nun von dieser Beschränkung freimachen. Je größer nämlich der Öffnungswinkel der verwandt werden, d. h. desto heller werden die Bilder. Daher hat die konstruierende technische Optik ein sehr großes Interesse daran, zu wissen, unter welchen Bedingungen auch bei endlich geöffneten abbildenden Bündeln eine von der Zone unabhängige Vergrößerung des Gegenstandes erfolgen kann. Darauf hat als erster E. Abbe die richtige Antwort gegeben. Er hat aus der physikalischen Natur der Lichtbewegung heraus nachgewiesen, daß für endliche Neigung der abbildenden Strahlen gegen die Achse, die Gleichheit der Vergrößerung für alle Zonen eines aberrationsfreien Linsensystems bedingt ist durch die Beziehung

$$\sin u' : \sin u = \text{const.}$$

Für den Fall, daß das Brechungsverhältnis im gegenstandsseitigen Mittel n und im bildseitigen Mittel n' ist, lautet die Sinusbedingung (Beweis s. § 333, 6.)

$$n' \cdot \sin u' : n \cdot \sin u = y : y' = \text{constans.}$$

Das abbildende System muß also so hergerichtet sein, daß das Verhältnis $\frac{n' \cdot \sin u'}{n \cdot \sin u}$ zugeordneter Punkte des Bild- und Gegenstandsraumes über die ganze Öffnung der Linsenfläche einen unveränderlichen Wert hat (s. § 333, 6.). Die Abbesche Sinusbedingung ist außer für die Unabhängigkeit der Vergrößerung von der abbildenden Zone auch noch dafür die Bedingung, daß ein achsennahes Flächenelement mit weitgeöffneten Bündeln verzerrungsfrei abgebildet wird.

Wie Helmholtz gezeigt hat, führt auch die Forderung, ein achsennahes kleines Flächenelement mit der nach den physikalischen Gesetzen größtmöglichen Helligkeit abzubilden, zur selben Sinusbedingung, die von dem abbildenden System erfüllt werden muß.

Punkte, für die die Sinusbedingung erfüllt ist und die zugleich aberrationsfrei ineinander abgebildet werden, heißen nach E. Abbe aplanatische Punkte (§ 333, 4.).

Da nach § 813 für jede punktförmige Abbildung durch gerade Strahlen bei unveränderlicher Vergrößerung die geometrisch geforderte Helmholtzsche Gleichung gelten muß, also $n' \cdot \text{tg } u' = n \cdot \text{tg } u = y : y' = \text{const}$, so steht außer für kleine Strahleneigungen, die Sinusbedingung damit in Widerspruch. Daraus folgt, daß eine punktförmige Abbildung beliebig großer Räume durch weit geöffnete Bündel physikalisch nicht herzustellen ist. Ist für ein einziges Punktpaar auf der Achse die Sinusbedingung erreicht worden und dadurch in diesem Punkte eine eindeutige punktförmige Abbildung ermöglicht (s. aplanatisches Punktpaar der Kugelfläche, s. § 333, 6.), so läßt sich auf der Achse niemals ein zweites Punktpaar angeben, für das gleichzeitig die Sinusbedingung erfüllt werden kann.

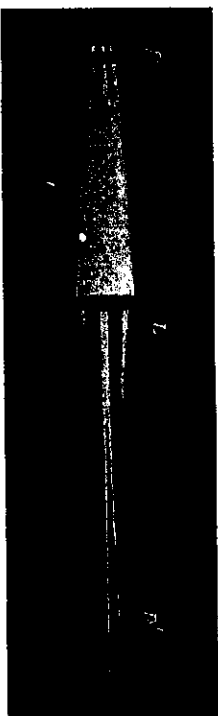


Fig. 848. Unschärfe Abbildung achsennaher Punkte.

Fig. 848 ist nach einer photographischen Aufnahme hergestellt worden, bei der drei leuchtende Gegenstandspunkte P durch eine aberrationsfreie Linse L abgebildet worden sind. Durch eine auf der Linse befestigte Blende sind ein durch die Mitte gehendes, abbildendes Strahlenbündel und zwei abbildende Strahlenbündel, die nahe dem Rande durch die Linse hindurchgehen, abgeblendet worden. Wenn wir an der Stelle P' der Achse, an der der axiale Punkt abgebildet wird, eine lotrechte Bildebene errichten, so erkennen wir, daß die Bilder der achsennahen Punkte, die von den mittleren Strahlen erzeugt werden, weiter von der Achse entfernt liegen, als diejenigen, die durch den Rand der Linse hindurchgehen. Natürlich ist dieser Unterschied in der Figur nur sehr gering; er würde aber trotzdem eine Unschärfe des Bildes der achsennahen Punkte auf der Bildebene hervorbringen.

§ 283. Verzeichnung durch Blendeneffekt.

Eine einfache, gewöhnliche Linse zeigt Aberration und Astigmatismus. Daher zeichnet eine solche Linse unscharf, besonders dann, wenn man einen ausgedehnten Gegenstand, der sich auf einer zur Linsenachse senkrechten Ebene befindet, auf einer achsensenkrechten Bildebene abbilden will.

Bei dem in Fig. 849 abgebildeten Versuche¹⁾ ist auf der einen Seite einer gewöhnlichen Bikonvexlinse als leuchtender Gegenstand eine Reihe von

1) Die Linse ist durch ihre Fassung verdeckt und daher in dem photographischen Bilde nicht zu erkennen. In den Figg. 851, 852, 853 sind die Linse und die Blende nachträglich in das photographische Bild eingezeichnet worden.

hell beleuchteten Punkten, die senkrecht zur Linsenachse angeordnet sind, aufgestellt worden. Jeder dieser Punkte sendet Lichtstrahlen durch die Linse, und diese macht jedes einzelne Strahlenbündel konvergent. Die Figur zeigt unmittelbar, daß die Orte der größten Vereinigung jedes einzelnen Strahlenbündels nicht in einer zur Linsenachse senkrechten Ebene, sondern auf einer krummen Fläche liegen, deren hohle Seite der Linse zugewandt ist. Bringt man nun einen Lotrechten, ebenen Schirm senkrecht zur Linsenachse in den Bildraum, so

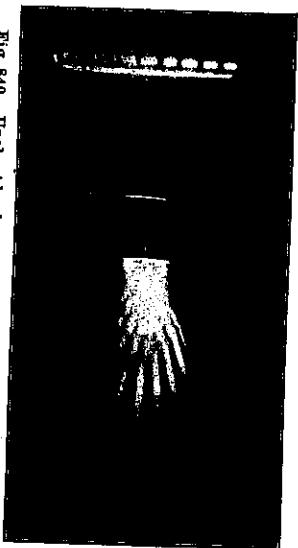


Fig. 849. Unabhängige Strahlenbündel; die Bildpunkte liegen auf einer krummen Fläche.

der Schirm um so näher an die Linse gerückt werden, je größer die Entfernung der scharf einzustellenden Bildteile von der Achse ist. Unter Schärfe kann natürlich in diesem Falle nicht absolute Schärfe, d. h. punktmäßige Abbildung, verstanden werden, vielmehr wird die Schärfe aller Teile durch die Aberration und die Nichterfüllung der Sinusbedingung und außerdem die der Randpartien durch den Astigmatismus schiefer Büschel noch stark gestört sein.

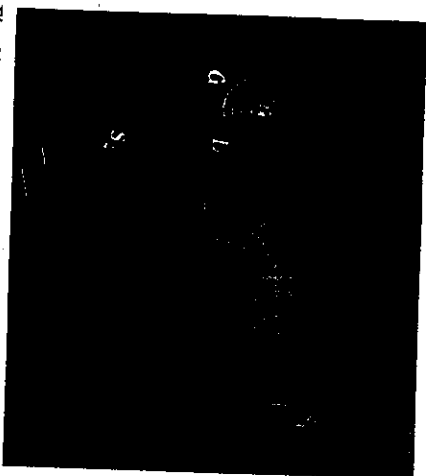


Fig. 850. In verschiedenen Abständen von der Linse werden die Mitte und der Rand scharf abgebildet; die radialen Striche haben eine andere Bildentfernung als die dazu senkrechten Bögen.

punkt der Kreise und der innerste Kreis scharf erscheinen. In dieser Stellung des Auffangschirmes sind die Bilder der äußeren Kreise unscharf. Wird nun aber die bestäubte Glasplatte näher an die Linse herangerückt, so daß sie nunmehr in die Stellung S_2 kommt, so werden die äußeren Kreise scharf abgebildet; dagegen ist das Bild der axialen Teile des Objektes unscharf. In der Figur sind

Zu dem in Fig. 850 abgebildeten Versuche ist als Gegenstand G ein auf eine von hinten beleuchtete Mattglasscheibe gezeichnetes System von konzentrischen Kreisen benutzt worden, das von einigen radialen Geraden durchschnitten wird. In geringem Abstände vor diesem Gegenstande steht die stark gekrümmte Konvexlinse L . Diese erzeugt nun ein reelles Bild des Gegenstandes. Zum Auffangen des Bildes ist eine schwach bestäubte Spiegelglasscheibe S_1 benutzt worden, die so aufgestellt wurde, daß der Mittelpunkt der Kreise scharf erscheint. In dieser Stellung aber die bestäubte Glasplatte näher an die Linse herangerückt, so daß sie nunmehr in die Stellung S_2 kommt, so werden die äußeren Kreise scharf abgebildet; dagegen ist das Bild der axialen Teile des Objektes unscharf. In der Figur sind

gleichzeitig zwei Spiegelglasplatten aufgestellt worden, und von dem ganzen Vorgange ist eine Photographie aufgenommen, so daß demnach beide Bildebenen gleichzeitig in der Figur zur Darstellung kommen. Man kann ferner auf der hinteren Platte S_2 erkennen, daß nicht zugleich ein Kreis und ein Radius scharf abgebildet wird; vielmehr liegt der scharf abgebildete Teil des Radius weiter nach dem Rande zu als der scharf abgebildete Kreis. Diese Verschiedenheit ist durch den Astigmatismus der sehr schräg durch die Linse gehenden Strahlen begründet. Natürlich kommt in der Abbildung dieser Unterschied bei weitem nicht so gut zur Darstellung, wie in dem Versuche selbst und wie in der Photographie, nach der die Abbildung angefertigt worden ist.

Die Unschärfe der Bilder in den durch Fig. 849 und 850 dargestellten Versuchen ist darin begründet, daß die abbildenden Strahlenbüschel nicht zu einem Punkte vereinigt worden sind, der auf dem Schirme liegen soll, sondern daß die Stelle der engsten Vereinigung vor oder hinter dem Schirme liegt, daß also der Schirm immer die Durchschnittpunktfigur mit einem noch konvergerten oder schon wieder divergent gewordenen Strahlenbüschel erzeugt. Eine solche Durchschnittpunktfigur würde, wenn kein Astigmatismus vorhanden wäre, ein einfacher Kreis (Zerstreuungskreis, S. 712) sein. Unter dem Einflusse des Astigmatismus aber entsteht ein eigentümlich geformter Lichtfleck, den man wohl mit dem Namen „das Korn“¹⁾ bezeichnet. Wenn man nun den abbildenden Strahlenkegel sehr klein wählt, so wird der Zerstreuungskreis ebenfalls klein, und daher wird die auf dem Schirme entstehende Lichtfigur einem scharfen Bilde ähnlich, und zwar um so ähnlicher, je weniger der abbildende Strahlenkegel geöffnet ist.

Mittels der Lochkamera haben wir schon in § 248 (Fig. 726 und 727) ohne Linsen von einem leuchtenden Gegenstande eine Lichtfigur erzeugt die einem umgekehrten Bilde vergleichbar ist. Diese Lichtfigur entstand dadurch, daß von allen Strahlen, die von den Punkten des leuchtenden Gegenstandes ausgehen, ein sehr schmales Strahlenbündel durch die kleine Lochblende abgeblendet wurde. Hieraus folgt, daß man durch eine irgendwie in den Strahlengang eingeschaltete Lochblende das Bild (das eigentlich diesen Namen gar nicht verdient) für ein größeres Gebiet scharf machen kann. Durch eine solche Blende können auch die unscharfen Bilder von Gegenständen mit größerer Tiefenausdehnung, d. h. mit Punkten von verschiedener Entfernung von der Linse, scharf gemacht werden.

Die Wirkung einer Lochblende auf einen Strahlenkomplex, der durch eine stark gekrümmte Konvexlinse erzeugt wird, untersuchen wir, indem wir in den Strahlengang des durch Fig. 851 dargestellten Versuches, der dem Versuche von Fig. 849 im wesentlichen gleich ist, eine Lochblende einschalten. In dem durch Fig. 852 dargestellten Versuche ist diese Lochblende auf der Bildseite der Linse in geringem Abstände von ihr aufgestellt worden. Man erkennt, daß hierdurch die Strahlenbündel schärfer umgrenzt werden und daß

¹⁾ corna (lat.) = Haar.

auf der bestäubten Spiegelglasplatte, die wieder als Auffangschirm dient, sieben ziemlich scharf begrenzte Lichtflecke entstehen, die den Gegenstand bildmäßig darstellen. Man kann deutlich erkennen, daß die bildnerzeugenden Strahlen schon in dem Versuche von Fig. 851 vorhanden gewesen sind, und

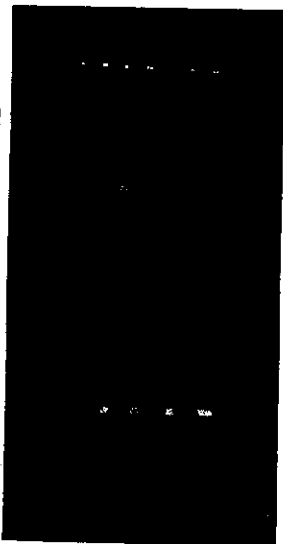


Fig. 851. Abbildung ohne Lochblende.

daß die Lochblende nur die äußersten Teile der einzelnen Strahlenkegel durchläßt.

Schaltet man nach Fig. 853 eine Lochblende auf der Gegenstandsseite der Linse ein, so wird auch jetzt der Gegenstand bildmäßig dargestellt, indem die Lochblende nur den innersten Teil der Strahlenkegel hindurchläßt, die ohne eingeschaltete Blende (nach Fig. 851) durch die ganze Linse hindurchgehen. Vergleichend wir die beiden Fig. 852 und 853 miteinander, so sehen wir, daß die auf demselben Schirme entstehenden Bilder einander nicht gleich sind; vielmehr ist das Bild von Fig. 852 weiter auseinander gezogen, während das Bild von Fig. 853 nach der Mitte zusammengedrängt ist. Wir müssen aber besonders hervorheben, daß nicht die Blende der eigentlich bildnerzeugende Teil in den beiden Versuchen ist, sondern daß die bildnerzeugende Linse in dem durch Fig. 851 dargestellten Versuche schon beide Bilder von Fig. 852 und 853 erzeugt hat,

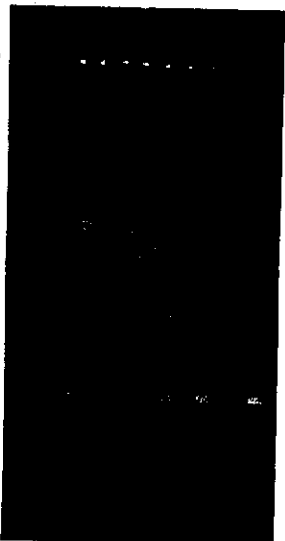


Fig. 852. Wirkung der Lochblende auf der Bildseite.

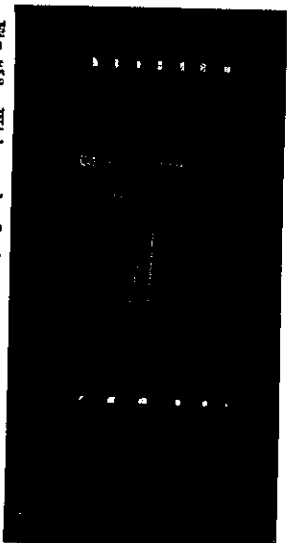


Fig. 853. Wirkung der Lochblende auf der Gegenstandsseite.

und daß die Blenden nur Teile derselben vorher vorhandenen Lichtfigur ausblenden. Diese eigentümliche Wirkung der Blenden kommt besonders auffallend zur Darstellung, wenn man als Gegenstand ein System von parallelen geraden Linien verwendet, die ein anderes ebensolches Liniensystem rechtwinklig schneiden.

Die Figg. 854, 855 und 856 zeigen die Bilder, die eine stark gekrümmte Linse von einem solchen Kreuzgitter erzeugt. Fig. 854 ist ohne Blende er-

zeugt worden. Bei Fig. 855 war eine Lochblende auf der Bildseite, bei Fig. 856 auf der Gegenstandsseite der Linse eingeschaltet worden. Wir erkennen, daß in Fig. 854 das ganze Bild, besonders aber die äußeren Teile unscharf sind. Die Unschärfe wird durch die eingeschalteten Blenden vermindert; aber es entsteht in Fig. 855 die eigentümliche Verzeichnung, bei der die Randpartien auseinandergezogen sind (kissenförmige Verzeichnung). Durch eine auf der Gegenstandsseite der Linse eingeschaltete Blende entsteht die Verzeichnung, bei der die am Rande liegenden Teile nach der Mitte zusammengedrängt werden (tonnenförmige Verzeichnung). Die Begründung für diese Verzeichnungen ist schon in den durch Figg. 851, 852 und 853 dargestellten Versuchen enthalten.

Noch klarer aber werden uns die beiden Verzeichnungen durch die schematischen Figg. 857 und 858.

In Fig. 857 bedeutet OC' die Achse der Linse LL , die von dem achsensenkrechten Gegenstande PQ ein Bild erzeugen soll. Wir stellen den Auffangschirm S so auf, daß auf ihm der Achsenpunkt P scharf abgebildet wird. Der Punkt P' soll also der dem Gegenstandspunkte P zugeordnete Bildpunkt sein. Wir wissen nun, daß infolge der Aberration und des Astigmatismus die von dem Gegenstandspunkte Q ausgehenden Strahlen ihre engste Vereinigung in einem Punkte Q' haben, der der Linse näher liegt als der Schirm. Hinter diesem Punkte (dem Bildpunkte Q' des Gegenstandspunktes Q) gehen die Strahlen wieder auseinander und erzeugen auf dem Schirme einen hellen Fleck, der in der Figur durch XY angedeutet ist. Die Mitte dieses Fleckes ist R . Dieser Punkt wird von dem Hauptstrahle (§ 263) erzeugt, der durch die Mitte der Linse LL geht. Schalten wir nun nach Fig. 857 die Lochblende BB auf der Bildseite der Linse ein, so wird aus dem ganzen, von Q ausgehenden Strahlenbündel ein enger Kegel ausgesondert, der nun auf dem Schirme S einen viel kleineren Lichtfleck R'

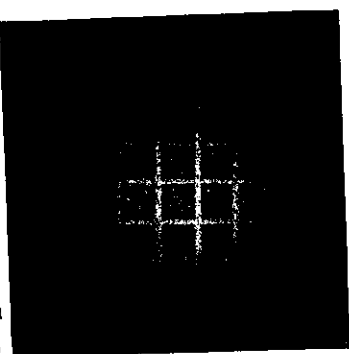


Fig. 854. Unscharfes Bild eines Kreuzgitters ohne Blende.

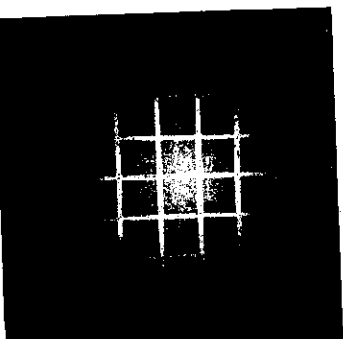


Fig. 855. Kreuzgitter mit Lochblende auf der Bildseite. Kissenförmige Verzeichnung.

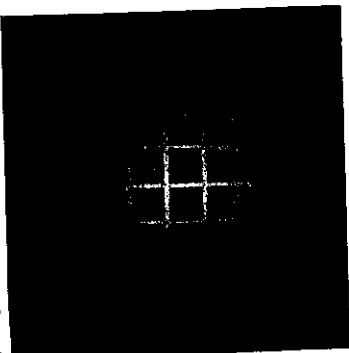


Fig. 856. Kreuzgitter mit Lochblende auf der Gegenstandsseite. Tonnenförmige Verzeichnung.

erzeugt. Würde R' mit R zusammenfallen, so würde R' bei genügender Kleinheit ein Bild erzeugen, das zu dem Gegenstandspunkte vollkommen geometrisch ähnlich liegt; aber R' liegt weiter von der Mitte des Schirmes ab als R ; daher erscheint das entstehende Bild in den Randteilen auseinandergezogen; das Bild ist verzeichnet. Der Grad der Verzeichnung ist um so größer, je größer der Abstand des Gegenstandes von der Linsenachse ist, denn für weit entfernte Punkte rückt die Stelle der engsten Vereinigung der aus der Linse austretenden Strahlen immer dichter an die Linse heran.

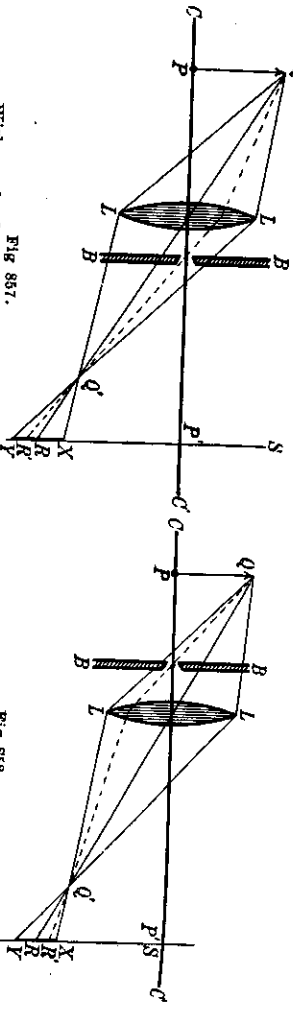


Fig. 857. Wirkung der Lochblende auf der Bildseite.

Fig. 858. Wirkung der Lochblende auf der Gegenstandsseite.

Aus Fig. 858 geht die Entstehung der tonnenförmigen Verzeichnung durch eine gegenstandsseitig eingeschaltete Blende genügend klar hervor. In dieser Figur stimmen alle Bezeichnungen mit denen von Fig. 857 vollständig überein. Man sieht leicht, daß die gegenstandsseitige Blende gerade nur diejenigen Teile des Strahlenbündels hindurchläßt, die einen Lichtfleck auf dem Schirme erzeugen, der näher an der Achse der Linse liegt als der Punkt R , der eine geometrisch ähnliche Abbildung bewirken würde.

Aus den obigen Überlegungen geht hervor, daß eine Blende nur dann keine Verzeichnung verursacht, wenn sie so in den Strahlengang eingeschaltet wird, daß die durch den optischen Mittelpunkt der Linse gehenden Strahlen allein hindurchgelassen werden. Eine solche Einschaltung ist aber nur bei Linsensystemen möglich, die aus mindestens zwei Linsen bestehen. Die Blende muß dann zwischen die beiden Linsen gesetzt werden.

Allerdings ist hierbei und bei der obigen Betrachtung vorausgesetzt, daß die Hauptpunkte der abbildenden Systeme frei von sphärischer Verzeichnung sind. Da nun aber photographische Systeme symmetrischer Form, bei denen die Hauptstrahlen durch die Hauptpunkte gehen, doch schon sehr merklich verzeichnen, so werden dadurch die Schlüsse, die wir machten, je nach dem Grade der Verzeichnung abgeändert.

Tangensbedingung. Ein verzerrungsfreies oder verzeichnungsfreies (orthoskopisches) Bild muß in allen seinen Punkten gleiche Vergrößerung haben. Ist PRQ der Gegenstand, $P'R'Q'$ das zugeordnete Bild (Fig. 859), so muß also sein $\frac{P'R'}{P'Q'} = \frac{PQ}{PQ'}$ oder $\frac{P'R'}{PR} = \frac{P'Q'}{PQ}$. Zwischen dem Gegenstandspunkte P der Achse und dem abbildenden Linsensysteme befinde sich nun eine Blende B_1 ; der Achsen-

punkt O sei der Mittelpunkt ihrer Öffnung. Ebenso befinde sich zwischen dem abbildenden Systeme und dem zugeordneten Achsenpunkte P' des Bildes in dem O zugeordneten Achsenpunkte O' eine entsprechende Blende B_2 . Dann müssen sich die Hauptstrahlen der von Q und R ausgehenden Strahlenbündel sowohl vor der Brechung in O als nach der Brechung in O' schneiden. Haben nun die Hauptstrahlen QO und RO die Neigungen w_1 und w_2 gegen die Achse, nach dem Durchgang durch das System die zugeordneten Hauptstrahlen die Neigungen w'_1 und w'_2 , so gilt $\frac{P'Q'}{P'Q} = \frac{P'R'}{PR} = \frac{P'O}{P'O'}$. Auf einem zur Achse senkrechten Schirme in P' bestimmen die Hauptstrahlen die Punkte Q' und R' und damit nach den vorangehenden Betrachtungen das Bild $P'R'Q'$ von PRQ . Es muß also $\frac{P'Q'}{P'Q} = \frac{P'R'}{PR} = \frac{P'O}{P'O'}$. Die oben aufgestellte Bedingung für die Verzeichnungsfreiheit nimmt damit die Form an

$$\frac{\text{tg } w'_1}{\text{tg } w_2} = \frac{\text{tg } w'_1}{\text{tg } w_2}$$

Fig. 860. Verzeichnungsfreie Abbildung durch ein optisches System mit zwei Blenden in den zugeordneten Punkten O und O' verlangt die Tangensbedingung $\frac{\text{tg } w'_1}{\text{tg } w_2} = \frac{\text{tg } w'_1}{\text{tg } w_2}$.

In der konstruierenden Optik wird diese Bedingung, die von Strahlen großer Neigung gegen die Achse erfüllt sein soll, die Tangensbedingung genannt. Sie darf nicht mit der Helmholtz'schen Gleichung (S. 813) verwechselt werden; unsere Tangensbedingung macht eine Aussage über die Strahleneigungen der Hauptstrahlen in den zugeordneten Achsenpunkten O und O' ; jene eine Aussage über die Strahleneigungen zugeordneter Strahlen in den Achsenpunkten P und P' .

§ 284. Anwendung der Konkavlinse zur Dunkelkammer (photographische Kamera).

Die photographische Kamera (Fig. 860) ist ein lichtdichter Kasten (Dunkelkammer, s. § 248, Fußn. 2), dessen Seitenwände nach Art einer Ziehharmonika aus einem Lederbalge gebildet sind, der eine Veränderung des Abstandes zwischen der Vorderwand und Hinterwand der Kamera ermöglicht. Die Vorderwand ist in der Mitte durchbohrt und hier mit einer Sammellinse oder einem kollektivem (S. 819) Linsensysteme, dem Objektiv¹⁾, versehen; die Hinterwand besteht aus einer mattgeschliffenen Glasscheibe, der Einstellscheibe, die durch die photographische Platte ersetzt werden kann.

Stellt man die photographische Kamera einem Gegenstande gegenüber auf, so kann das Objektiv bei passender Einstellung ein

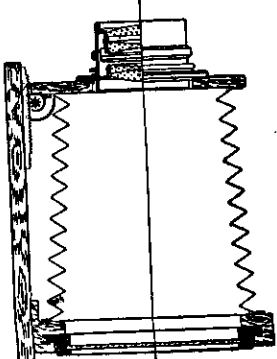


Fig. 860. Photographischer Apparat.

1) Das in Fig. 860 abgebildete Objektiv ist ein aus vier Linsen zusammengesetztes Zeiß'sches Tessar.

reelles Bild des Gegenstandes auf der Einstellscheibe erzeugen. Ist der Gegenstand weit entfernt, so muß die Einstellscheibe mit der Brennebene des Objektivs zusammenfallen. Bei Annäherung des Gegenstandes muß die Kamerascheibe nachgezogen werden, d. h. die Entfernung zwischen Objektiv und Einstellscheibe muß gemäß der Gleichung $\frac{1}{a} = \frac{1}{f} + \frac{1}{y}$ vergrößert werden, wenn ein scharfes Bild des Gegenstandes erzeugt werden soll.

Bildfehler. Bei einer photographischen Aufnahme soll das erzeugte Bild dem Gegenstande ähnlich sein, auch soll es in allen Teilen der Bildebene scharf sein. Das ist aber durch eine einzelne Linse nicht zu erreichen, da eine solche immer alle diejenigen Fehler aufweist, die in den vorhergehenden Paragraphen eingehend behandelt worden sind: Sphärische Aberration, Astigmatismus und Verzeichnung. Dazu kommt noch die **chromatische oder Farbabweichung**; diese kann erst besprochen werden, wenn die Dispersion (§ 301 F.) des Lichtes behandelt worden ist.

Die erwähnten Linsenfehler rühren alle davon her, daß ein Teil der abbildenden Strahlen zu nahe dem Rande der Linsen auftritt, oder daß das Objektiv noch Strahlen von Gegenstandspunkten erhält, die weit von der Hauptachse entfernt sind, so daß diese Strahlen größerer Neigung nicht mehr als Nullstrahlen angesehen werden können. Die Linsenfehler kann man zum Teil dadurch beseitigen, daß man statt einer einzelnen Linse ein sammelndes Linsensystem anwendet, teilweise dadurch, daß man durch Einschalten von Blenden die Mitwirkung der Randstrahlen bei der Erzeugung der Bilder bis zu einem gewissen Grade hindert. In welcher Weise die Blenden bzw. die Fassungen von Spiegeln und Linsen die Helligkeit bzw. die Größe des Gesichtsfeldes beeinflussen, ist in § 265 abgeleitet worden. Wir haben dort erfahren, daß man für die Untersuchung der Wirkungsweise eines zusammengesetzten photographischen Objektivsystems zuerst die Lage und Größe der Aperturblende und dann das Gesichtsfeld von der Mitte der Aperturblende aus bestimmen muß.

Wenn eine Blende unmittelbar vor das Objektiv gesetzt wird, so ist diese selbst **Eintrittspupille** und zugleich **Aperturblende**. Wenn dagegen die Blende im Innern des Objektivsystems sitzt, so findet man ihre **Öffnung** praktisch am einfachsten, indem man die Einstellscheibe auf einen unendlich fernem Gegenstand einstellt und sie dann durch einen undurchsichtigen Schirm mit einem kleinen Loch in der Mitte ersetzt, das von hinten beleuchtet wird. Die von dieser punktförmigen Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen verlassen das Objektivsystem parallel; dadurch entsteht auf einem unmittelbar vor die vordere Objektivlinse gehaltenen Stückchen Pauspapier ein heller Kreis, der als **Öffnung** oder als **Eintrittspupille** angesehen werden kann; sein Durchmesser sei a .

Das **Gesichtsfeld** hängt in erster Linie von dem Durchmesser derjenigen Linsenfassungen ab, die als Gesichtsfeldblenden wirken. Man kann das bildseitige Gesichtsfeld durch den Versuch feststellen, indem man die Größe des hellen Kreises bestimmt, der auf der Einstellscheibe erzeugt wird, wenn das Objektiv gegen den hellen Himmel gerichtet ist.

Man kann jeden Punkt der durch den Versuch festgelegten Eintrittspupille als Scheitelpunkt eines Strahlenkegels ansehen, dessen Grundfläche das ganze bildseitige Gesichtsfeld ist. Daraus folgt, daß die **Helligkeit** des Bildes auf der Mattscheibe erstens von der Anzahl der in der Eintrittspupille liegenden Punkte, d. h.

also von der Flächengröße der Eintrittspupille, abhängt; sie ist ihr proportional, also ist sie auch proportional dem Quadrate des Öffnungsdurchmessers a .

Ferner ist die Helligkeit des Bildes dem Quadrate der Entfernung der beleuchteten Fläche von der Lichtquelle, also hier der Entfernung der Einstellscheibe vom Objektiv, umgekehrt proportional. Für ferne Gegenstände ist die Entfernung der Einstellscheibe vom Objektiv gleich der Brennweite f des Objektivs; folglich ist die Helligkeit des Bildes auf der Einstellscheibe proportional dem Quadrate des Quotienten aus dem Öffnungsdurchmesser dividiert durch die Brennweite. Dieser Quotient $q = \frac{a}{f}$ heißt die **relative Öffnung**.

Natürlich hängt wegen der Reflexionen und sonstigen Lichtverluste die Helligkeit des eingestellten Bildes noch von der Art und Zahl der im Objektiv enthaltenen Linsen ab; sie ist um so größer, je geringer die Zahl der Linsen ist. Daher wendet man bei der photographischen Aufnahme von Gegenständen, bei denen kleine Verzeichnungen ohne Belang sind, z. B. bei Landschaften, möglichst Objektive mit nur einer (achromatischen) Linse an. Diese Linsen werden Landschaftslinsen genannt. Zur Kennzeichnung der Helligkeit des Bildes auf der Einstellscheibe ist die Bezeichnung des Objektivs durch seine relative Öffnung gebrauchlich. Die Kenntnis der Helligkeit des Bildes, also besonders die Kenntnis der relativen Öffnung eines photographischen Objektivs ist von großer Wichtigkeit, da von ihr die Expositionszeit abhängt, d. h. die Zeit, die nötig ist, um eine photographische Platte richtig zu belichten. Für Objektive desselben Systemes gilt der Satz:

Die Helligkeit des Bildes ist dem Quadrate der relativen Öffnung proportional.

Folglich ist die Expositionszeit E dem Quadrate der relativen Öffnung umgekehrt proportional: $E = \frac{k}{\left(\frac{a}{f}\right)^2}$. In diesem Ausdrucke ist k eine Konstante des Objektivsystems.

Die Bildgröße. Ein Gegenstand der Größe y habe von der gegenstandsseitigen Hauptebene den großen Abstand a . Der Hauptstrahl von der Spitze des Gegenstandes zum Hauptpunkte bilde mit der Achse den Winkel φ . Dann ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{a}$. Da vor und hinter dem Objektiv dasselbe Mittel, Luft, vorhanden ist, fallen die Hauptpunkte mit den Knotenpunkten zusammen. Der Hauptstrahl findet seine Fortsetzung also vom bildseitigen Hauptpunkte aus unter demselben Neigungswinkel gegen die Achse. Das Bild der Größe y' befindet sich im Brennpunkte, da der Abstand a sehr groß genommen werden soll. Daher gilt auch $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{y'}{f}$. Daraus folgt $y' = -f \cdot \operatorname{tg} \varphi = -\frac{f \cdot y}{a}$.

Es ist φ die scheinbare Größe des Gegenstandes (§ 246, 7). Die scheinbare Größe der Sonne ist z. B. 31'. Eine Photographie der Sonne hat daher den Bildurchmesser $y' = f \cdot \operatorname{tg} 31'$. Sie könnte zur Bestimmung der Brennweite f benutzt werden. — Um große Bilder zu erhalten, muß man also mit Systemen großer Brennweite photographieren.

§ 265. Der Projektionsapparat.

Während die photographische Kamera von einem außerhalb liegenden, fernem Gegenstande ein reelles Bild auf der Einstellscheibe bzw. der photo-

graphischen Platte in der Nähe des bildseitigen Brennpunktes erzeugt, wird beim Projektionsapparate¹⁾ von einem im Apparate in der Nähe des Brennpunktes befindlichen Gegenstande ein reelles (vergrößertes) Bild außerhalb des Apparates auf einem großen Schirme erzeugt. Da man bei jeder Linse die Lage von Bild und Gegenstand vertauschen kann, so kann man jede photographische Kamera als Projektionsapparat verwenden, indem man jede

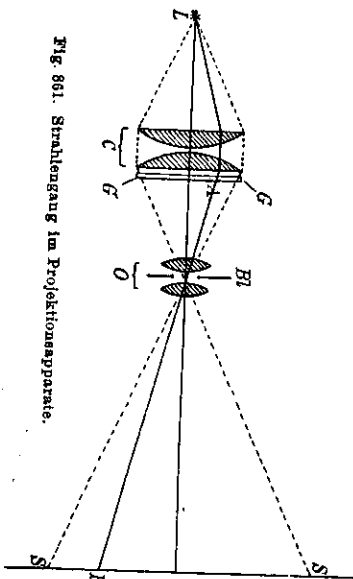


Fig. 861. Strahlengang im Projektionsapparate.

stark beleuchtetes Glasbild (Diapositiv) an die Stelle der Einstellscheibe bringt und vor der Kamera in angemessenem Abstände den Projektions-schirm aufstellt.

Bei der vergrößerten Projektion wird die vom Gegenstande ausgehende Lichtmenge B auf eine größere Fläche ausgebreitet. Will man daher ein genügend helles Projektionsbild erhalten, so muß man das Diapositiv sehr stark beleuchten. Aus diesem Grunde verbindet man mit dem das Bild erzeugenden Objektiv eine besonders starke Lichtquelle, deren Strahlen in passender Weise so geleitet werden, daß sie möglichst vollständig zur Erzeugung des Bildes beitragen. Hieraus ergibt sich folgende Anordnung des Projektionsapparates (Fig. 861).

In einem leuchtichten Kasten (der Kasten ist in der Figur nicht mit gezeichnet) ist eine starke Lichtquelle L , z. B. eine elektrische Bogenlampe, untergebracht. In einer Öffnung des Kastens sitzt der Kondensor²⁾ C , ein häufig aus zwei Plankonvexlinsen zusammengesetztes Linsensystem. Durch den Kondensor wird der in der Figur gestrichelt angedeutete Strahlenkegel konvergent gemacht, d. h. von der Lichtquelle L in der Öffnung der Projektions-

1) Der Projektionsapparat ist aus der „Zauberlaterne“ (laterna magica) hervorgegangen. Der deutsche Jesuit Athanasius Kircher hat von 1646 ab als erster verschiedene Anordnungen angegeben, wie man mit einem als Kondensor dienenden Hohlspiegel und einer Projektionslinse durch Sonnen- und Kerzenlicht vergrößerte Bilder an die Wand werfen kann. Die zu entwerfenden Bilder wurden dabei auf den Spiegel selbst gemalt. Etwa 1653 hat in Löwen der Mathematiker Andreas Tacquet mit Kirchers Apparat „des V. Martins ganze Reise aus China ins Niederland vorgestellet“. Das dürfte der erste Lichtbildvortrag gewesen sein. Die nachweislich erste richtige Zauberlaterne mit auswechselbaren, auf ebene Glasplatten gemalten Bildern (Diapositiven) und einem schon zweilinsigen Objektiv führte — durch Taquet von 1658 ab an in vielen Städten vor und erregte damit ungeheures Aufsehen. Auch Chr. Huygens, der mit Walgenstein in Verbindung stand, besaß um jene Zeit eine richtige Zauberlaterne. Diese hatte sogar schon eine Linse als Kondensor, während Walgenstein dafür noch einen Hohlspiegel anwandte.

2) condensare (lat.) = verdichten.

tionallinse ein reelles Bild erzeugt. Unmittelbar vor dem Kondensor kommt das Diapositiv GG' . Dieses wird nun von hinten durch den Strahlenkegel sehr stark beleuchtet. In angemessenem Abstände vor dem Kondensor ist das Projektionsobjektiv O angebracht, das im Innern die Blende H trägt. Das Objektiv erzeugt von dem als Gegenstand wirkenden Diapositiv GG' auf dem Schirme SS' ein reelles Bild. In der Figur ist der Hauptstrahl des Strahlenkegels gezeichnet, der vom Punkte A des Gegenstandes ausgehend den Bildpunkt B erzeugt.

In den meisten Fällen ist der Projektionschirm SS' so weit entfernt, daß der Gegenstand GG' annähernd in der ersten Brennebene des Objektivs aufgestellt werden muß; folglich ist der Abstand des Objektivs von der Vorderseite des Kondensors annähernd gleich der Brennweite des Objektivs. Sollen alle durch den Kondensor C konvergent gemachten Strahlen zur Erzeugung des Bildes ausgenutzt werden, so muß der konvergente Strahlenkegel zur Eintrittspupille des Objektivs konvergieren; daraus ergibt sich, daß es nicht gleichgültig ist, welche Brennweite der Kondensor hat. Um symmetrischen Durchgang der Strahlen durch den Kondensor zu erhalten, bringt man den Konvergenzpunkt der durch den Kondensor gehenden Strahlen ebenso weit vor den Kondensor, wie die Lichtquelle L dahinter, d. h. man wählt die Stellung so, daß der Konvergenzpunkt vom Kondensor um die doppelte Brennweite des Kondensors entfernt ist. Daraus ergibt sich als günstigste Anordnung die, daß die doppelte Brennweite des Kondensors annähernd gleich der Brennweite des Objektivs ist.

Bei den sogenannten Epitlaskopen wird das Bild nicht durch das durch den Gegenstand hindurchgegangene Licht entworfen, sondern man beleuchtet den abzubildenden Gegenstand auf schwarzem Hintergrunde äußerst kräftig mit auffallendem Lichte und bildet ihn in dem zerstreut zurückgeworfenen Lichte ab. Es ist natürlich hierbei unmöglich, den Gegenstand einfach in den Strahlengang des Lichtes zwischen Kondensor und Objektiv hineinzu stellen, wie das in Fig. 861 mit dem Diapositiv GG' angedeutet ist. Der Gegenstand kommt vielmehr zwischen C und O der Fig. 861 in eine wagerechte Lage unterhalb des gezeichneten Strahlenganges; das Licht vom Kondensor her wird durch einen (vorzüglich ebenen) richtig geeigneten Silberspiegel dann auf den wogerechten Gegenstand geleitet und das zerstreut zurückgeworfene Licht durch einen entsprechenden Spiegel wieder in den Strahlengang der Abbildung 861 hineingebracht. Der Gegenstand ist dadurch selbstleuchtend geworden, während bei dem gewöhnlichen Gebrauche des Projektionsapparates der Gegenstand durchleuchtet wird, d. h. gewissermaßen nur als Schirmblende wirkt, die aus dem beleuchtenden Strahlenkegel gewisse Strahlen ausblendet. Das von einem Epitlaskope gelieferte Bild ist im allgemeinen bedeutend lichtschwächer als das des gewöhnlich benutzten Projektionsapparates, da der beleuchtete Gegenstand den größten Teil der auffallenden Strahlen absorbiert und in Richtungen zerstreut, die zur Abbildung nicht beitragen. Daher bedürfen die Epitlaskope sehr viel stärkerer Lichtquellen. Dafür kann

man aber ohne Umstände Abbildungen oder Texte eines Buches, einer Postkarte usw., auch natürliche Gegenstände wie Schmetterlinge, Blumen, Gesteine u. a. einem großen Kreise in natürlichen Farben vorführen, wobei selbstverständlich darauf gesehen werden muß, daß der abzubildende Gegenstand möglichst in einer Ebene angeordnet ist.

Die Bildgröße. Wir dürfen den Gedankenengang (§ 284, S. 839), den wir zum Aufsuchen der Bildgröße des photographischen Bildes eines fernen Gegenstandes durchführten, rückwärts verfolgen. Es ist jetzt α der Abstand des Bildes von der bildseitigen Hauptebene des Projektionsobjektivs, y' die Größe des Diapositivs, y die Größe des Bildes. Dann ist $y = -\frac{\alpha \cdot y'}{f}$ und die Vergrößerung $w = \frac{y}{y'}$ $= -\frac{\alpha}{f}$. Um große Bilder zu erhalten muß man also mit Systemen kleiner Brennweite projizieren.

§ 286. Das menschliche Auge.

1. Bau des Auges. Das menschliche Auge besteht aus dem äußeren Auge und dem Augapfel. Zum äußeren Auge (Fig. 862) rechnet man die Augen-

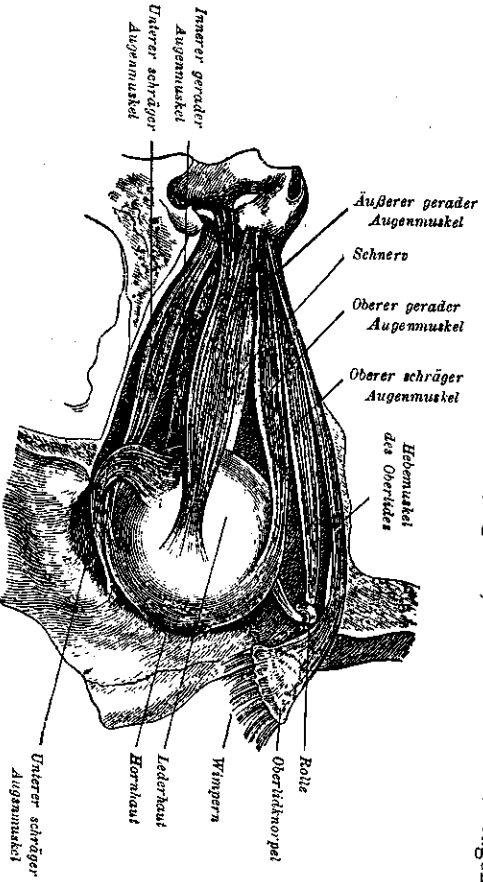


Fig. 862. Die Augenmuskeln des rechten Auges nach Entfernung der Schläfenwand.

brauen, die Augenlider mit den Augenwimpern, die Tränenrüse und die den Augapfel bewegenden Muskeln. Der Augapfel (Fig. 863) besteht, physikalisch betrachtet, aus einer fast kugelförmigen, von vorn nach hinten etwas zusammengedrückten Dunkelkammer, die mit einem als Objektiv dienenden Systeme von brechenden Substanzen ausgestattet ist. Er ist durch 6 Muskeln in der Augenhöhle wie in einem Kugelgelenke nach allen Richtungen drehbar.

Die äußere Hülle des Augapfels ist (Fig. 863) die weiße Lederhaut (Sklerotica) L , die sehr fest und derbe ist und das Auge vor Verletzungen schützt. Die Lederhaut ist in ihrem vorderen Teile durchsichtig und heißt hier Hornhaut (Cornea) H . Im Innern ist die Lederhaut mit der dunkel gefärbten Ader-

haut (Chorioidea) A ausgekleidet, die gleichzeitig die das Auge ernährenden Blutgefäße und die das Augeninnere vor zerstreutem Lichte schützende dunkle Pigmentschicht enthält. Die Aderhaut geht in ihrem vorderen Teile in die mit einem Loch (Pupille) P versehenen Regenbogenhaut (Iris) J über. An die Aderhaut schließt sich nach innen zu die rosa gefärbte Netzhaut (Retina) N an, die aus den Verzweigungen und Endigungen des Sehnerven besteht. In Fig. 864 ist ein stark vergrößerter Schnitt durch die Netzhaut abgebildet.

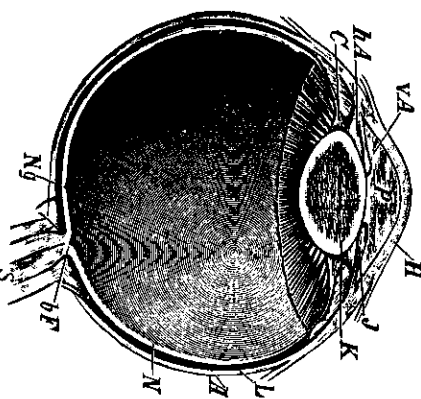


Fig. 863. Augapfel des linken Auges.

Die der Pupille gerade gegenüberliegende Stelle der Netzhaut enthält die größte Zahl der Zäpfchen, sie ist die empfindlichste Stelle der Netzhaut. Sie wird wegen ihrer Farbe gelber Fleck oder wegen ihrer Form Netzhautgrube (Ng in Fig. 863) genannt. Dort, wo der Sehnerv in das Augeninnere eintritt, befinden sich keine Nervenenden. Diese Stelle ist für Licht unempfindlich, sie wird blinder Fleck bF genannt. Der blinde Fleck liegt vom gelben Flecke aus an der der Nase zugekehrten Seite.

Vom Vorhandensein des blinden Fleckes kann man sich überzeugen, wenn man das Kreuz von Fig. 865 mit dem rechten Auge fixiert, während man die ganze Figur etwa 20 cm vom Auge hält.



Der kreisförmige Fleck verschwindet dann, weil sein Bild auf den blinden Fleck fällt (Fig. 866). Daß wir gewöhnlich vom Vorhandensein des blinden Fleckes nicht gestört werden, beruht

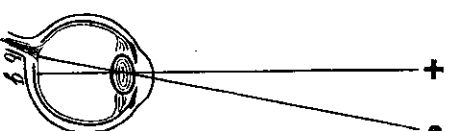


Fig. 866. Erklärung dazu.

Die Netzhaut hat einen sehr verwickelten, geschichteten Bau. Die durch die Palle gekennzeichnete Seite ist dem Lichte zugewandt. Als eigentlich lichtempfindlicher Teil wird die Schicht Sc angesehen, die aus einer sehr großen Anzahl von Stäbchen St und Zäpfchen Z zusammengesetzt ist, die merkwürdigerweise vom Lichte abgewandt sind.

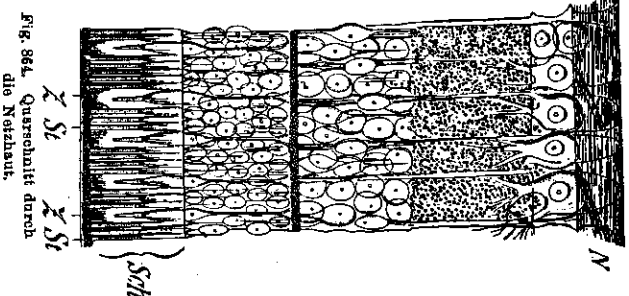


Fig. 864. Querschnitt durch die Netzhaut.

vorwiegend darauf, daß wir alle Gegenstände gleichzeitig mit beiden Augen betrachten.

Hinter der Iris liegt die Kristalllinse (K in Fig. 863), ein durchsichtiger, hornartiger Körper, dessen Brechungsverhältnis von außen nach innen zunimmt. Führt man zur leichteren Übersicht einen mittleren Wert ein (Totalindex), so ist dieser 1,4085. Die Kristalllinse hat annähernd die Form eines verkürzten Umdrehungselipsoides, dessen hintere Fläche etwas stärker gekrümmt ist als die vordere. Die Kristalllinse teilt den Innenraum des Auges in zwei ungleich große Räume: Die vordere Augenkammer vA zwischen Kristalllinse und Hornhaut ist mit einer farblosen Flüssigkeit (dem Kammerwasser) gefüllt, deren Brechungsverhältnis mit dem des Wassers übereinstimmt. Der Raum zwischen Kristalllinse und Netzhaut enthält einen gallertartigen, durchsichtigen Stoff (Glaskörper), dessen Brechungsindex dem des Wassers fast gleich ist. Die Verbindungslinie der Mitte der Pupille oder des Hornhautscheitels mit der Mitte der Netzhautgrube heißt die Augenachse; sie steht auf allen die brechenden Substanzen des Auges begrenzenden Flächen senkrecht.

2. Das Auge als optisches System. Treten Lichtstrahlen in das Auge ein, so werden sie an den drei brechenden Flächen: Hornhaut, Vorderfläche der Kristalllinse und Hinterfläche der Kristalllinse gebrochen. In einem recht-sichtigen (emmetropen)¹⁾ Auge im Ruhezustande werden die parallel mit der Augenachse eintretenden Strahlen zur Netzhautgrube konvergent gemacht; diese ist demnach der Brennpunkt für das die Lichtstrahlen brechende System. Das Auge sieht im Ruhezustande unendlich (sehr) weit entfernte Gegenstände scharf.

3. Die Maßgrößen und Grundpunkte des Auges. Nach A. Gullstrand sind für das rechtsichtige Auge im Mittel folgende Werte gefunden worden: Die Achsenlänge von Hornhautscheitel bis zur Netzhautgrube ist etwa 24 mm. Die Hornhaut H in Fig. 863 hat eine Dicke von 0,5 mm, ihr Brechungsverhältnis ist 1,376. Der Krümmungshalbmesser ihrer vorderen Begrenzungsfläche ist im Scheitel 7,7 mm, der der hinteren 6,8 mm. Die Flüssigkeit in der vorderen Augenkammer (vA, Fig. 863), das Kammerwasser, hat das Brechungsverhältnis 1,336. Die Brechkraft des Systems aus der Hornhaut und des von ihr begrenzten Kammerwassers ist 43,05 Dioptrien. Der Krümmungshalbmesser der vorderen Begrenzungsfläche der Linse K ist 10 mm, der der hinteren 6 mm. Vom Alter von etwa 20 Jahren an trennt sie sich in eine äußere Rindenschicht und einen Linsen Kern. Die Rindenschicht hat ein durchschnittliches Brechungsverhältnis 1,386, die Kernlinse ein solches von 1,406. Die Linse hat eine Brechkraft von 19,11 Dioptrien. Das optische System aus Hornhaut, Kammerwasser und Linse hat eine gesamte Brechkraft von 58,64 Dioptrien. Der gegenstandsseitige Hauptpunkt liegt 1,35 mm, der bildseitige 1,60 mm hinter dem vorderen Hornhautscheitel. Der angeführten Brechkraft entspricht eine Brennweite von 17,06 mm; der vordere Brennpunkt liegt also

1) ϵ_n (griech.) = Vorsilbe, die zur Verstärkung des in der nächsten Silbe bezeichneten Begriffes dient; μ (griech.) = Maß; μ_n (griech.) = Auge. Also emmetrop = im richtigen Maße sehend.

17,06 — 1,35 = 15,71 mm vor dem Hornhautscheitel. Der hinter der Linse liegende Glaskörper G hat ein Brechungsverhältnis 1,336. Der hintere bildseitige Brennpunkt des genannten optischen Systems liegt 24,39 mm hinter dem Hornhautscheitel, die bildseitige Brennweite beträgt also 24,39 — 1,60 = 22,79 mm. (Die Brennweite ist im Verhältnis 1,336 mal so groß wie die vordere s. § 275, 7, § 277, 5.)

Nach Listing können die drei brechenden Flächen für optische Betrachtungen annähernd durch eine Kugelfläche ersetzt werden, deren Krümmungsmittelpunkt K (Fig. 867) in der Nähe der hinteren Fläche der Linse liegt. Man kann daher den Verlauf eines parallel mit der Augenachse HH in das Auge eintretenden Lichtstrahles SBG dadurch zeichnen, daß man den parallelen Strahl bis zum Schnittpunkte B mit der Kugelfläche zieht und diesen Punkt B mit der Netzhautgrube G verbindet. Das so vereinfachte Auge wird reduziertes Auge genannt. Alle Lichtstrahlen WN' , die durch den Krümmungsmittelpunkt K der eben beschriebenen Kugelfläche gehen, verändern beim Durchgange durch das Auge ihre Richtung nicht. Der Punkt K wird Knotenpunkt des reduzierten Auges genannt. (Die eigentlichen beiden Knotenpunkte des Auges sind durch die Angabe der Lage der Hauptebenen und durch die Brennweiten bestimmt, s. § 277, 6.)

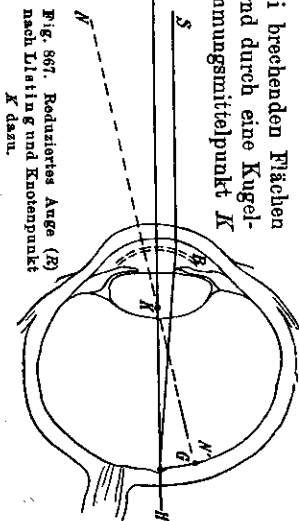


Fig. 867. Reduziertes Auge (μ) nach Listing g und Knotenpunkt K dazu.

4. Die Empfindlichkeit des Auges. Die lichtempfindliche Netzhaut des Auges dient als Aufgangsschirm für die von dem optischen Systeme entworfenen Bilder. Nicht alle Teile der Netzhaut sind in gleicher Weise befähigt, einerseits geringe Lichtreize zum Bewußtsein zu bringen, andererseits an einem betrachteten Gegenstande feinere Einzelheiten zu erkennen. Beide Arten von Empfindungen sind in ihrer größten Leistungsfähigkeit an verschiedene Teile der Netzhaut gebunden.

Die Fähigkeit, möglichst viele Einzelheiten an einem betrachteten Gegenstande zu erkennen, ist in anderer Ausdrucksweise das Vermögen, zwei optisch verschiedene, nahe beieinander stehende punktförmig kleine Gegenstände noch als getrennt zu erkennen. Das Maß dieser Fähigkeit nennt man Sehschärfe. Sie kann durch den reziproken Abstand zweier Punkte zahlenmäßig angegeben werden, die eben noch als getrennt empfunden werden. Die Sehschärfe ist in der Netzhautgrube bei weitem am größten; von ihr aus nach dem Rande der Netzhaut zu nimmt sie schnell ab. Deshalb wird auch durch Augen- und Kopfbewegungen das Auge so gerichtet, daß der Gegenstand, der die Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt und „scharf“ ins Auge gefaßt wird, sein Bild in der Netzhautgrube entwerfen muß. Das Sehen mit der Netzhautgrube soll direktes Sehen, ein Sehen außerhalb der Netzhautgrube indirektes Sehen genannt werden (s. dazu § 289).

Unter Empfindlichkeit des Auges schlechthin versteht man seine Fähigkeit, durch geringe Lichtmengen gereizt zu werden, so daß der Reiz noch zum Be-

wußsein kommt. Als Maß für die Empfindlichkeit kann der reziproke Wert jener Lichtmengen genommen werden, die ein punktförmiger Gegenstand, etwa ein Stern, in das Auge senden muß, um gerade noch mit Bewußtsein empfunden zu werden. Je nach den Umständen ist dieser Schwellenwert des Lichtstromes sehr verschieden; vor allem ist er von der Farbe in weitem Maße abhängig (s. dazu § 373). Es hat sich nun herausgestellt, daß die Netzhautgrube keineswegs die lichtempfindlichste Stelle der Netzhaut ist. Davon kann man sich überzeugen, wenn man versucht, am nächtlichen Himmel sehr lichtschwache Sterne noch zu erkennen. Man findet dabei, daß man solche Sterne beim direkten Sehen nicht entdeckt, sie aber indirekt sieht, wenn man dicht am Orte ihrer Stellung vorbeilicht. Es sind also die Netzhautteile neben der Netzhautgrube für die schwächsten Lichtreize empfindlicher als die Netzhautgrube selbst. Diese Eigentümlichkeit dürfte in dem Mangel der Netzhautgrube eines rechtsichtigen Auges an Stäbchen seinen Grund haben. Die Stäbchen sind also im Auge wahrscheinlich die lichtempfindlichsten Elemente (§ 374).

Wollen wir uns über einen ausgedehnten Bezirk des Gegenstandes genauer unterrichten, so pflegen wir mit großer Geschwindigkeit das Auge in seiner Höhlung zu drehen. Die Hauptachse durchläuft dann nacheinander die einzelnen Teile des durchmusteren Gegenstandes, und die gewonnene Aufeinanderfolge der genau gesehenen Teilbilder liefert uns erst die genauere Anschauung und das Urteil über den Gegenstand. Zum Unterschiede von dem indirekten Sehen nennt man dieses Sehen mit bewegtem Auge das *direkte Sehen* oder *Blicken*. Die Hauptstrahlen der ins Auge fallenden Bündel von den einzelnen Flächenelementen des Gegenstandes her schneiden sich in der Mitte der Augenpupille. Diese ist also der Mittelpunkt der Sehstrahlen beim indirekten Sehen, daher auch das Perspektivitätszentrum der durch die Sehstrahlen vermittelten räumlichen Perspektive. Beim bewegten Auge schneiden sich die Hauptstrahlen in den aufeinanderfolgenden Stellungen des Auges im *Augendrehpunkte*. Man nennt diese Strahlen die *Blicklinien*. Der Mittelpunkt der durch die Blicklinien vermittelten räumlichen Perspektive, welche für unsere Raumschauung maßgebend ist, ist der Augendrehpunkt.

§ 287. Akkommodation des Auges. Brillen.

1. Linsenkrümmung. Die stärkste Brechung erfahren die Lichtstrahlen beim Eintritt in die Hornhaut (§ 286, 3). Die durch die Kristalllinse hervorgerufene Ablenkung ist nur gering. Die Kristalllinse hat vorwiegend die Aufgabe eines korrigierenden Organes. An der Kristalllinse greift ein ringförmiger Muskel, der Ziliarmuskel (*C* in Fig. 863), an, durch dessen Tätigkeit ihre Krümmung vergrößert werden kann.

Der Vorgang dieser Linsenkrümmung ist durch H. Helmholtz und A. Gullstrand aufgeklärt worden. Die Kristalllinse ist an zwei dünnen Häutchen befestigt. Das ist erstens die dünne durchsichtige *Glassaht*, die im inneren Auge überall der Netzhaut aufliegt und den Glaskörper umschließt.

Sie verschmilzt mit dem hinteren Teile der Linse, an die sie längs eines Kreises senkrecht zur Linsenachse angeheftet ist. Zwischen dieses Häutchen und den Ziliarteil der Netzhaut schiebt sich dann ein zweites Häutchen ein, die Zonula (Ligamentum suspensorium lentis). Sie ist eigenartig, wie eine Halskrause, gefaltet und setzt sich in stark gewellter Linie an der Linsenkapsel fest. Mit der Linse ist sie in deren mittlerem (äquatoriellem) Teile fest verbunden; die wellenförmige Anheftungslinie greift an einem größeren Teile des Linsenkörpers nach vorn und hinten über den Kreis des größten Linsendurchmessers (Äquators) über. Andererseits ist die Zonula mit den Ziliarfortsätzen verbunden, welche in ihre Falten eingreifen; die Fortsätze stehen in Verbindung mit dem Ziliarmuskel. Nach A. Gullstrand ist im unangestregten Auge das Zonulaband elastisch gespannt und vergrößert durch seinen elastischen Zug den größten Linsendurchmesser (Äquator), so daß sich die Linse, diesem Zuge folgend, elastisch deformiert und sich an der vorderen und hinteren Fläche abflacht. Durch die Zusammenziehung des Ziliarmuskels werden dann die ziliaren Ursprungsstellen der Zonula, besonders die zu der vorderen Fläche gehenden Teile, nach der Linse hin verschoben. Dadurch wird die Spannung des Zonulabandes geringer, sein Zug an der Linse läßt nach, damit auch deren elastische Deformation, die Linse wird in der Achse dicker und krümmt ihre Flächen, besonders die vordere, stärker. Diese Entspannung kann nur so weit fortgesetzt werden, bis das Zonulaband schlaff geworden ist. Dann ist die größtmögliche Linsenkrümmung erreicht (auch wenn der Ziliarmuskel sich noch weiter zusammenzieht).

Der mittlere Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche eines normalen jugendlichen Auges (§ 286, 3) schwankt zwischen 10,4 mm bei nicht zusammengezogenem Ziliarmuskel (voller Spannung der Zonula) und etwa 5,7 mm bei voller Entspannung. Bei größerer Krümmung der Kristalllinse werden die Strahlen stärker abgelenkt; parallele Strahlen werden dann also schon vor der Netzhaut vereinigt, während Strahlen, die divergent in das Auge eintreten, auf der Netzhaut vereinigt werden können. Das Auge besitzt infolgedessen die Fähigkeit, auch von Gegenständen, die im Endlichen liegen, deutliche, reelle Bilder auf der Netzhaut zu erzeugen.

2. Akkommodation. Die Fähigkeit des Auges, seine Brennweiten der Entfernung der beobachteten Objekte anzupassen, heißt Anpassungsvermögen oder Akkommodation des Auges.

Die Änderung der Brennweite der Linse beim Akkommodationsvorgange beruht aber nicht allein auf der Änderung der Krümmung besonders der vorderen Fläche. Vielmehr spielt dabei auch noch nach Gullstrands Untersuchungen der eigenartige Bau der Kristalllinse eine Rolle. Der Körper der Linse ist nämlich nicht homogen, sondern besteht aus einer großen Anzahl feinsten Häutchen, die wie Schalen einer Zwiebel übereinanderliegen und in einer einschließenden Haut, der Linsenkapsel zusammengehalten werden. Das Brechungsverhältnis dieser Häutchen nimmt von außen nach innen zu (§ 286, 3). Beim Akkommodationsvorgange verschieben sich die Häutchen

gegenseitig. Dabei verdicken sich die inneren Schichten verhältnismäßig mehr als die äußeren, und dadurch ändert sich das mittlere Brechungsverhältnis (Totalindex) der Linse um den erheblichen Betrag von 1,409 bei Akkommodationsruhe bis 1,426 bei größter Akkommodation.

3. **Fernpunkt.** Ein rechtsichtiges (emmetropes) Auge vereinigt Strahlen, die aus dem Unendlichen kommen, auf der Netzhaut, wenn das Auge nicht akkomodiert; es erzeugt von unendlich fernem Gegenständen scharfe Bilder auf der Netzhaut. Der Fernpunkt eines emmetropen Auges, d. i. der am weitesten entfernte Punkt, den ein Auge noch scharf sehen kann, liegt im Unendlichen. Ein Auge ohne Akkommodationsanspannung ist immer auf den Fernpunkt eingestellt.

4. **Nahpunkt.** Ein jugendliches, rechtsichtiges Auge vermag die Kristalllinse so umzuformen, daß es noch von Gegenständen, die 10 cm vor dem Auge liegen, scharfe Bilder auf der Netzhaut erzeugt. Der nächste Punkt, auf den das Auge noch einstellen kann, wird der Nahpunkt genannt. Bei der Akkommodation auf sehr nahe Entfernungen wird der Ziliarmuskel angestrengt; man empfindet das als Schmerzgefühl im Auge. Infolge der Gewohnheit des Auges, sich der Entfernung von 20 bis 30 cm (der Entfernung des Buches beim Lesen und Schreiben) anzupassen, empfinden wir die Anstrengung des Ziliarmuskels bei dieser Entfernung nicht. Diese Entfernung wird auch wohl deutliche Sehweite genannt, eine Größe, die naturgemäß von einem Auge zum andern wechselt.

5. **Weitsichtigkeit.** Augen, deren Akkommodationsvermögen nur so weit reicht, daß Gegenstände nur dann scharf gesehen werden können, wenn sie weiter als 30 cm entfernt sind, deren Nahpunkte also mehr als 30 cm vom Auge abliegt, heißen weitsichtig, wenn dabei noch der unendlich ferne Punkt der Fernpunkt bleibt. Strahlen, die von näheren Gegenständen G als 30 cm

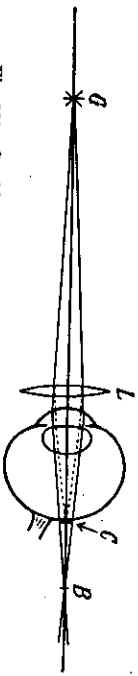


Fig. 868. Strahlengang bei weitsichtigem Auge ohne und mit Brille.

(Fig. 868) in ein weitsichtiges Auge eintreten, werden erst hinter der Netzhaut in B vereinigt, so daß statt eines punktförmigen Bildes

auf der Netzhaut ein Zersetzungskeis C entsteht. Das Bild der Gegenstände auf der Netzhaut wird dann unscharf. Dadurch, daß man vor weitsichtige Augen eine Sammellinse I setzt, werden die von nahen Punkten ausgehenden, zu stark divergenten Strahlen schwächer divergent oder parallel gemacht, so daß sie von einem weiter entfernten liegenden Punkte, auf welchen das weitsichtige Auge noch einstellen kann, herzukommen scheinen. *Der Weitsichtige muß beim Lesen in der Nähe eine Sammellinse als Brille tragen, deren Brennweite um so kleiner ist, je weitsichtiger er ist.* Die Augen werden im vorgerrückten Lebensalter infolge der geringeren Elastizität der Organe (Zonula und Linse) weitsichtig und überichtig. Die durch das Alter weitsichtig gewordenen

Augen heißen **alterssichtig (presbyop)**.¹⁾ Daher müssen ältere Leute Konvergenzbrillen tragen, wenn sie lesen wollen, oder sie müssen die Schrift weit von sich entfernt halten.

6. **Übersichtigkeit.** Wenn ein Auge nur solche Strahlen auf der Netzhaut vereinigen kann, die konvergent in das Auge eintreten, so heißt es **übersichtig oder hypermetrop**.²⁾ Sein Fernpunkt und ebenso sein Nahpunkt liegen als virtuelle Gegenstandspunkte hinter dem Auge. Ein übersichtiges Auge kann von Gegenständen, die vor dem Auge liegen, überhaupt kein scharfes Bild auf der Netzhaut erzeugen. *Der Übersichtige muß auch schon beim Sehen in die Ferne eine Konvergenzbrille tragen, durch welche die parallelen Strahlen, ebenso wie die divergenten Strahlen, die von einem endlichen Gegenstande herrühren, vor ihrem Eintritt in das Auge konvergent gemacht werden.*

7. **Kurzsichtige (myope)**³⁾ Augen sind solche, die parallele Lichtstrahlen vor der Netzhaut in D (Fig. 869) vereinigen; es entsteht dann auf der Netzhaut ein Zerstreuungskreis C . Von Gegenständen, die dem Auge näher liegen, werden scharfe Bilder auf der Netzhaut erzeugt. Der Fernpunkt des kurzsichtigen Auges liegt im Endlichen, und zwar meist in geringem Abstände vom Auge. Der Nahpunkt kurzsichtiger Augen kann bei hochgradiger Kurzsichtigkeit bis auf wenige Zentimeter an das Auge herangerückt sein. Kurzsichtige Personen, bei denen der Fernpunkt der Augen näher als 30 cm (die deutliche Sehweite normaler Augen) liegt, müssen auch beim Lesen Brillen tragen. *Die Brillen kurzsichtiger Personen müssen konkav sein, damit der Vereinigungspunkt der Lichtstrahlen weiter nach hinten verschoben wird, die Strahlen also schon stärker divergent in das Auge eintreten, und zwar so, als ob sie von einem zwischen Nähe- und Fernpunkt des Auges liegenden Punkte herkämen.* Die Kurzsichtigkeit kann nicht durch angestregte Akkommodation überwunden werden, da durch die Zusammenziehung des Ziliarmuskels die Krümmung der Kristalllinse stets vergrößert, aber nie verkleinert werden kann. Tragen Kurzsichtige keine Brillen, so kann durch das Anspannungsbestreben des Auges, die Netzhaut dem Vereinigungspunkt der Strahlen näher zu rücken, eine ernste Schädigung, selbst eine Loslösung der Netzhaut veranlaßt werden. Die negative Brennweite der Brillen kurzsichtiger muß um so kleiner sein, je kurzsichtiger die Augen sind.

Die Ursache der Kurzsichtigkeit kann in einer zu großen Krümmung der brechenden Flächen oder in einer zu großen Länge des Augapfels von

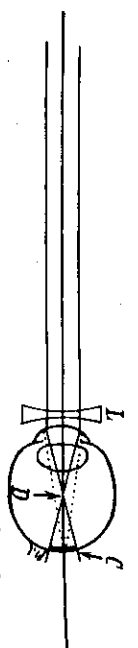


Fig. 869. Strahlengang bei einem kurzsichtigen Auge ohne und mit Brille.

1) presby's (griech.) = alt.

2) hyper (griech.) = über.

3) myo (griech.) = ich schließe zu, verengere die Augen. Kurzsichtige drücken die Augenlider zum Zwecke des deutlicheren Sehens (Blendenwirkung) zusammen.

Grimseh, Physik. I. Großo Ausgabe. 6. Aufl.

orn nach hinten liegen. Durch übermäßige Annäherung der ins Auge gefaßten Gegenstände, z. B. der Bucher, an das Auge im jugendlichen Alter kann durch die gewohnheitsmäßige große Akkommodation Kurzsichtigkeit erworben werden.

8. Brillennummer. Die Brillengläser wurden früher durch ihre Brillennummer gekennzeichnet. Diese drückte den in Zoll gemessenen Krümmungshalbmesser der Begrenzungsflächen einer Gläse aus, die auf beiden Seiten gleich stark gekrümmt ist. Da das Brechungsverhältnis der für die Brillengläser benutzten Gläser annähernd gleich 1,5 ist, so ist die alte Nummer annähernd gleich der in Zoll gemessenen Brennweite der Linse (§ 271, 7.). Diese Bezeichnung der Brillengläser hat man jetzt fast allgemein verlassen; man gibt vielmehr die Brechkraft einer Linse in Dioptrien (§. 795) (in Abkürzung dptr.) an: Eine Linse hat die Brechkraft von einer Dioptrie, wenn ihre Brennweite 1 m beträgt. Eine Linse hat die Brechkraft von D Dioptrien, wenn sie mit D hintereinandergesetzten Linsen von je einer Dioptrie gleichwertig ist (§ 273, 3.). Hieraus folgt, daß eine Linse von D Dioptrien die Brennweite von $\frac{1}{D}$ m hat. Man kann demnach auch sagen: Die *Dioptrienzahl einer Linse ist der reziproke Wert ihrer in Metern gemessenen Brennweite*.

Ein Brillenglas mit der alten Nummer p und dem Brechungsverhältnis 1,5 hat die Brennweite von p Zoll. Da nun 1 Zoll = 0,02615 m oder etwa $\frac{1}{38}$ m ist, so beträgt die Brennweite der Linse $\frac{p}{38}$ m, also ist ihre Brechkraft $D = \frac{38}{p}$ (dptr.). Hieraus folgt die Gleichung

$$D \cdot p = 38.$$

Diese Gleichung benutzt man zur Umrechnung der alten Linsenbezeichnung in die neue. Konkavlinsen werden durch ein positives, Konkavlinsen durch ein negatives Vorzeichen der Dioptrienzahl gekennzeichnet.

9. Astigmatismus. Viele Augen leiden an einem angeborenen Astigmatismus (§ 281). Dieser Fehler kann durch den Gebrauch von Brillen mit astigmatisch abbildenden Linsen behoben werden. Wäre das Auge außer dem astigmatischen Fehler rechtsichtig, d. h. hätte es für ein Strahlenbündel irgendeiner Ebene durch die Achse den unendlich fernen Punkt als Fernpunkt, so könnte der Fehler durch eine Zylinderlinse aufgehoben werden. Diese hätte dann die Aufgabe, den Fernpunkt auch in der zur erst erwähnten senkrechten Ebene durch die Augenachse in die Unendlichkeit zu verlegen. Meist ist aber mit dem angeborenen Astigmatismus ein anderer Augenfehler, z. B. Kurzsichtigkeit, verbunden. Dann müssen Linsen doppelter Krümmung in zwei aufeinander senkrechten Ebenen als Brillen benutzt werden. Man wählt dann heute solche mit torischen Flächen zum Gebrauche. Eine torische Fläche ist eine solche, die entsteht, wenn man einen Kreisbogen um eine Achse rotieren läßt, die in seiner Ebene liegt, aber nicht durch den Kreismittelpunkt geht. Für den erfolgreichen Gebrauch astigmatischer Brillen ist notwendig, daß zunächst die Achsen des Astigmatismus vom Auge sorgfältig bestimmt werden und dann die Brillengläser in den Brillengestellen an befestigt sind, daß ihre eigenen Hauptebenen des Astigmatismus mit denen des Auges zusammenfallen.

Beim Gebrauche einer jeden gewöhnlichen Brille wirkt der Astigmatismus schiefer Büschel (§. 828) störend. Der Brillenträger sieht daher durch die Brille die Gegenstände nur scharf, wenn er durch die Mitte der Gläser in der Richtung ihrer

§ 288. Einwirkung des Lichtes auf die Netzhaut; Nachbilder. Tätigkeit der Iris 851

Achse hindurchblickt. Dreht er bei ruhig gehaltener Brille das Auge in seiner Höhlung, so treten nur noch schiefe Büschel mit astigmatischer Verzerrung durch die Brille in sein Auge. Sehr häufig kann man beobachten, daß Kurzsichtige beim scharfen Zusehen absichtlich schief durch das Brillenglas blicken, manchmal durch dessen äußeren Rand. Das ist ein Zeichen, daß die Augen dieser Kurzsichtigen astigmatisch sind. Durch die Erfahrung haben sie sich den schiefen Fixierblick angewöhnt, weil in dieser Stellung der Astigmatismus der schiefen Büschel gerade den Astigmatismus ihrer Augen aufhebt oder doch auf einen kleinsten Betrag herabdrückt. Da weit über die Hälfte aller Kurzsichtigen den schiefen Fixierblick durch die Brille hat, wird einerseits bewiesen, daß der angehornte Astigmatismus weit verbreitet ist. Andererseits geht aber daraus hervor, daß der Astigmatismus der schiefen Büschel beim Gebrauche der Brille sehr wohl empfunden wird. Hochgradig Kurzsichtige gewöhnen sich daher beim Brillengebrauche ganz ab, das Auge in seiner Höhlung zu drehen; beim Durchmustern eines Gegenstandes geben sie dem Auge die notwendigen Richtungen nur noch durch entsprechende Kopfbewegungen. Sie verlernen ganz zu „blicken“ und haben den eigenhändig starren Blick, wenn sie die Brille absetzen. Daher ist es ein Fortschritt, daß neuerdings Brillengläser in Gebrauch kommen, welche den Astigmatismus schiefer Büschel verändern und ganz vermeiden. Man erreicht das erstere durch den Gebrauch sogenannter „durchgebogener“ Gläser, indem man für Kurzsichtige nicht bikonvexe sondern konvexkonkave, für Weitsichtige nicht bikonvexe, sondern konkavkonvexe Gläser sphärischer Krümmung in Anwendung bringt. Solche Gläser (Meinßen)¹⁾ heißen punktförmig abbildend. Zwei Formen, die Ostwaldsche²⁾ und die Wollastonsche³⁾, sind in Gebrauch; die erstere ist die weniger stark durchgebogene Form. Vollständiger wird der Astigmatismus schiefer Büschel durch die sogenannten Punktgläser⁴⁾ beseitigt, deren Oberfläche nicht mehr genaue Kugelformung besitzt. Man kann diese asphärischen Gläser sich dadurch entstanden denken, daß in jeder Blickrichtung von der Achse her auf eine sphärische Fläche eine geringe Substanzmenge des brechenden Körpers aufgetragen ist, um die Brechung ein wenig zu ändern und dadurch den Astigmatismus zu beheben. Beim Gebrauche müssen diese Gläser offenbar zum Augendepunkt immer dieselbe vorgeschriebene Lage haben.

§ 288. Einwirkung des Lichtes auf die Netzhaut; Nachbilder. Tätigkeit der Iris.

Trifft Licht auf die Netzhaut, so tritt eine chemische Veränderung in dem Gewebe der Netzhaut ein, die sich in einer Verfärbung des die Netzhaut färbenden Stoffes, des Sehpurpurs, äußert. Wie diese chemische Veränderung uns als Licht zum Bewußtsein kommt, ist uns unbekannt. Unmittelbar nach der Einwirkung des Lichtes auf die Netzhaut hält diese an der erregten Stelle infolge der

1) *meniskos* (griech.) = Mondchen, d. i. Verkleinerung von *mene* = Mond. Also hier: Im Querschnitt von der Form der Mondsichel.

2) Ostwald, Augenarzt in Paris, hat die Form durch Berechnung gefunden.

3) William Hyde Wollaston, engl. Arzt (1766—1838), bekannt durch zahlreiche physikalische Erfindungen und Entdeckungen.

4) Berechnet zuerst von M. v. Rohr für die optischen Werkstätten von Carl Zeiss in Jena.

chemischen Veränderung des Sehpurpurs an ihrer Sehkraft ein. Das kann man besonders dann beobachten, wenn man in helles Licht gesehen hat: man ist geblendet. Die chemische Veränderung wird durch die Tätigkeit des Blutes wieder rückgängig gemacht. Ist sie so stark gewesen, daß erst nach einiger Zeit der normale Zustand wieder erreicht wird, so empfinden wir Nachbilder, die erst allmählich verschwinden.

Man unterscheidet positive und negative Nachbilder. Die positiven Nachbilder entstehen dann, wenn der Lichtreiz des Sehnerven so stark gewesen ist, daß die zurückbleibende und erst allmählich wieder verschwindende chemische Veränderung des Sehpurpurs selbst als Licht empfunden wird: hierbei erscheinen die hellen Partien eines stark beleuchteten und betrachteten Gegenstandes auch nach dem Wegsehen oder beim Schließen des Auges hell. Die negativen Nachbilder rühren von einer Ermüdung des Sehnerven an den vom Lichte getroffenen Stellen her, infolge deren die hellen Stellen des beobachteten Gegenstandes im Nachbilde dunkel erscheinen, wenn man nach einer gleichmäßig und schwach beleuchteten Fläche sieht (§ 372).

Die Pupille des Auges ist im allgemeinen als Aperturbliende aufzufassen; sie beeinträchtigt die Menge des die Netzhaut treffenden Lichtes. Die Iris besitzt die Fähigkeit, die Pupille zu erweitern oder zu verengen. Beim Betrachten stark leuchtender Gegenstände verkleinert sich die Pupille unwillkürlich; hierdurch wird die Netzhaut des Auges vor einem Übermaße des eintretenden Lichtes geschützt. Im Dunkeln erweitert sich die Pupille, damit die in das Auge eintretende Lichtmenge noch genügt, um die Stäbchen und Zäpfchen zu erregen.

§ 289. Der Sehwinkel.

Sehschärfe oder Auflösungsvermögen des Auges. Wird beim Sehen nur ein Zäpfchen erregt, so haben wir die Empfindung eines leuchtenden Punktes. Ist daher der Gegenstand so klein oder so weit entfernt, daß sein Bild auf der Netzhaut nicht gleichzeitig auf mehrere Zäpfchen fällt, so können wir keine Einzelheiten des Gegenstandes erkennen¹⁾, das „Auflösungsvermögen“ ist überschritten. Die Größe des Netzhautbildes eines leuchtenden Gegenstandes hängt von seiner Größe und seiner Entfernung ab. In der Netzhautgrube stehen die Zäpfchen am dichtesten; hier beträgt ihr Abstand nur etwa 0,004 mm. Ein Netzhautbild von dieser Größe kommt zustande, wenn durch den Knotenpunkt des Auges zwei Strahlen eintreten, die einen Winkel von 1' einschließen²⁾, die also auch unter diesem Winkel in das Auge eintreten. Das kann beispielsweise zwei Lichtstrahlen, die von zwei 0,2 mm voneinander entfernten Punkten ausgehen, welche vom Auge 1 m entfernt sind. Sind zwei Punkte in der Entfernung von 1 m mehr als 0,3 mm voneinander entfernt, so fällt ihr Bild auf zwei verschiedene Zäpfchen; sie werden daher getrennt wahrgenommen.

1) Er erscheint „rund“, schon bei Euklid (300 v. Chr.).

2) Hooke (S. 131) fand 1674 für die Grenze des Auflösungsvermögens den Sehwinkel von 1'.

Sehwinkel. Der Winkel, unter dem zwei von zwei getrennten Punkten ausgehende Strahlen in das Auge eintreten, wird der Sehwinkel oder die scheinbare Größe (S. 807) der die beiden Punkte verbindenden Strecke genannt. Die Größe des Seh winkels allein bedingt die Größe des Netzhautbildes. Zwei Gegenstände A und B , die die Abstände a und b vom Auge haben, haben gleiche Sehwinkel, wenn sich verhält $A : a = B : b$. Dieses Verhältnis ist die Tangente des Seh winkels.

Da wir beim Sehen mit einem Auge (über die Vorgänge beim zweifügigen Sehen siehe § 377) nur ein Urteil über die Größe des Seh winkels, also über das Verhältnis der wahren Größe eines Gegenstandes zu seiner Entfernung, haben, so können wir nur bei bekannter Entfernung des Gegenstandes auf seine wahre Größe oder bei bekannter Größe auf seine wahre Entfernung schließen. Wenn wir dagegen keine von diesen beiden Größen durch die Erfahrung kennen, so können wir über die wahre Größe und die wahre Entfernung vollständig getäuscht werden. So erscheinen uns z. B. die Sonne und der Mond, die beide annähernd denselben Sehwinkel haben, auch gleich groß und gleich weit entfernt.

Da die Tangente des Seh winkels eines Gegenstandes der Quotient aus seiner Größe und seiner Entfernung ist, so kann der Sehwinkel auf zweierlei Art vergrößert werden, nämlich entweder dadurch, daß der Gegenstand vergrößert wird, oder dadurch, daß seine Entfernung vom Auge verringert wird. Eine Annäherung des Gegenstandes an unser Auge hat für die Größe des Netzhautbildes denselben Erfolg, wie eine Vergrößerung des Gegenstandes. Wollen wir daher Einzelheiten eines Gegenstandes sehen, so müssen wir ihn so dicht ans Auge bringen, daß der den Einzelheiten zukommende Sehwinkel größer als 1' ist. Die Annäherung an unser Auge unterliegt dabei den durch die brechenden Substanzen des Auges bedingten Grenzen: Wir dürfen einen Gegenstand nicht näher bringen, als der Nahpunkt liegt, da sonst sein Bild verschwommen ist.

§ 290. Die Lupe.

1. Gegenstand innerhalb des Nahpunktes. Auf der Achse des Auges liege der Punkt G (Fig. 870) näher als der Nahpunkt des Auges. Ein von G ausgehender, gestrichelt gezeichneter Lichtstrahl trifft die die Kugelfläche des reduzierten Auges (§ 286, 3) darstellende Fläche in C . Infolge der zu starken Divergenz der von G kommenden Lichtstrahlen schneidet der gebrochene Strahl die Augenachse erst in einem Punkte H , der weit hinter der Netzhaut liegt. CH kann auch noch divergent zur Augenachse sein. Durch eine unmitttelbar vor das Auge gesetzte Konvexe Linse L kann der Gang des Lichtstrahles so verändert wer-

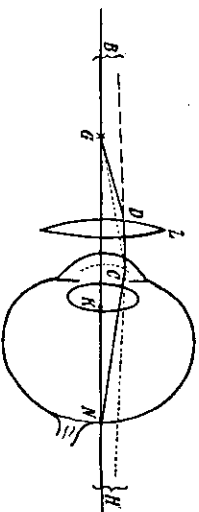


Fig. 870. Strahlengang beim Gebrauch einer Lupe.

den, daß er auf dem Wege $GDCN$ in N auf die Netzhautgrube fällt. Der in das Auge eintretende Lichtstrahl DC hat dann eine Neigung, die von Strahlen herzurühren scheint, die vom Punkte B ausgehen. Ist B der Nahpunkt des Auges, so vermag das mit der Linse L bewaffnete Auge den Punkt G noch als Punkt (ohne Zerstreuungskreis) wahrzunehmen. Das nicht mit der Linse L bewaffnete Auge würde nur dann den Gegenstand scharf sehen, wenn er sich in B befinden würde.

2. Vergrößertes Bild im Nahpunkte. Ein ausgedehnter Gegenstand (Fig. 871) möge die durch GG' bzw. BG'' dargestellte wirkliche Größe haben.

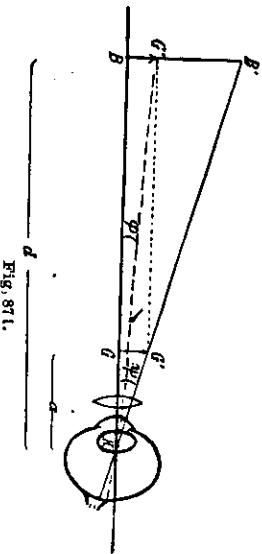


FIG. 871.

Lupe eine Vergrößerung des Seh winkels erfolgt, so wird auch das Netzhautbild vergrößert. Die subjektive Vergrößerung w (S. 807) ist durch das Verhältnis der Tangenten der beiden Seh winkel ψ und φ bestimmt; daher ist

$$w = \frac{GG'}{BG''} = \frac{KB}{KG} = \frac{a_1}{a}$$

$$w = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{KB}{KB} = \frac{KB}{KG} = \frac{a_1}{a}$$

Hier ist KG die wahre Entfernung a des Gegenstandes vom Auge. KB ist die Entfernung a_1 des durch die Konvexlinse L erzeugten virtuellen Bildes vom Auge. Nehmen wir nun an, daß die Linse L so dicht an das Auge gehalten wird, daß wir die Lupe) und den Knotenpunkt des Auges als zusammenfallend betrachten können, so sind die beiden Größen a und a_1 , die hier beide negativ zu nehmen sind, mit der Brennweite f_1 der Linse durch die allgemeine Linsengleichung (S. 795) $-\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{f_1}$ verbunden, woraus sich berechnet $\frac{a_1}{a} = 1 + \frac{a}{f_1}$.

Die durch die Lupe hervorgerufene subjektive Vergrößerung ist also

$$w = 1 + \frac{a}{f_1}$$

Wenn wir die Lupe unmittelbar vor das Auge halten und den Gegen-

1) Vom franz. Loupe; dieses Wort ist eigentlich eine medizinische Bezeichnung und bedeutet in Anlehnung an das lat. *lupus* (Wolf) eine „Wolfgeschwulst“, d. i. eine kreisförmige Geschwulst unter der Haut. Wegen der ähnlichen Form wurde das Wort dann auch für eine Glaslinse gebraucht; im heutigen Sprachgebrauche versteht man unter einer Lupe ein Handvergrößerungsglas, mit dessen Hilfe man kleine Gegenstände genau erkennen will.

stand durch die Lupe mit größter Akkommodation betrachten, so bringen wir den Gegenstand in eine solche endliche Entfernung, daß das Bild BG'' im Nahpunkte des Auges liegt. Nennen wir die Entfernung des Nahpunktes vom Auge d , so beträgt die Vergrößerung

$$w = 1 + \frac{d}{f_1}$$

Hieraus folgt, daß eine Lupe um so stärker vergrößernd wirkt, je geringer ihre Brennweite und je weiter der Nahpunkt des die Lupe nutzenden Auges vom Auge entfernt ist. Die Lupe ist also besonders wertvoll für weitsichtige Augen, während für kurzsichtige Augen, bei denen d nur klein ist, die Vergrößerung nur gering ist.

3. Vergrößertes Bild im Fernpunkte. Wir müssen den Vorgang der Lupevergrößerung beim Gebrauche der Lupe häufig auch anders auffassen. Ein Gegenstand BG'' befindet sich im Abstände $BK = a_1$ vom Knotenpunkte des reduzierten Auges. Er hat eine scheinbare Größe φ (Fig. 871), die bestimmt ist durch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{BG''}{a_1}$. Auf der Netzhaut liegt bei dieser Betrachtung ein Bildchen der Größe y' . Es ist dann auch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{t}$, wenn t der Abstand des Punktes K von der Netzhaut ist. — Nun werde zwischen den Gegenstand BG'' und das Auge eine Lupe eingeschaltet. Der Gegenstand werde so lange verückt, bis das Auge sein Bild durch die Lupe ohne jeden Akkommodationszwang erblickt.

In der Tat werden alle optischen Instrumente am wirksamsten ausgenutzt, wenn sie mit nicht akkommodiertem Auge benutzt werden. Das gilt sowohl für Lupen, als auch für Mikroskope und Fernrohre. Nach A. Gullstrand pflegen nur Unerfahrene, besonders Jugendliche, ganz unüblicherweise auf die Nähe zu akkommodieren, wenn sie sich dieser optischen Instrumente bedienen.

Dann muß also die Lupe von jedem Punkte des Gegenstandes ein paralleles Strahlenbündel liefern, so daß das durch die Lupe entworfenen Bild im Unendlichen liegt. Wenn das der Fall sein soll, muß sich aber der Gegenstand GG' in der vom Auge abgewandten Brennebene der Lupe befinden. Er hat somit von der Lupe den Abstand f . Ziehen wir vom höchsten Punkte G' den Hauptstrahl durch den gegenstandeseigenen Hauptpunkt (durch die Mitte einer unendlich dünnen Lupe), so hat dieser gegen die Achse eine Neigung ψ , wobei $\operatorname{tg} \psi = \frac{G'G}{f}$ ist. Damit hat auch im Bildraume der Lupe das

ganze von G' divergent ausgehende und von der Lupe aus auf das Auge auffallende Parallelstrahlenbündel diese Neigung. Der Gegenstand hat also nunmehr für das Auge die scheinbare Größe ψ . Das nichtakkommodierte Auge entwirft auf der Netzhaut ein Bildchen der Größe y'' . Dann gilt $\operatorname{tg} \psi = \frac{y''}{t}$, wenn wir annehmen dürfen, daß durch die Akkommodationsänderung von der Sehweite a_1 auf den Fernpunkt der Abstand K vom Augenhintergrunde sich nicht merklich geändert hat. Bei den beiden Betrachtungen des Gegenstandes, einmal im Abstände a_1 vom Auge ohne Lupe und ein zweites Mal mit be-

856
waffertem Auge im Brennpunkte G der Lupe, kann uns also nur eine Vergrößerung zum Bewußtsein kommen:

$$w = \frac{y''}{y'} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} \psi}{1 \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{GG'}{a_1 G'} = \frac{BG'}{a_1} = \frac{a_1}{f}.$$

Setzen wir hierin noch für $\frac{1}{f}$ die Brechkraft D der Lupe in Dioptrien ein, so erhält man

$$w = a_1 \cdot D.$$

Die Vergrößerung ist das Produkt aus dem Abstände des Gegenstandes bei Betrachtung ohne Lupe und der Brechkraft der Lupe.

Hierin ist a_1 in m zu rechnen, wenn D in Dioptrien gezählt wird. Die Vergrößerung hat ihren größtmöglichen Wert, wenn ohne Lupe der Gegenstand im Nahpunkte mit dem Abstände d von K betrachtet wurde. Dann ist $w = \frac{d}{f} = d \cdot D$.

Bemerkung. Die Betrachtung oben unter 2. würde bei den Voraussetzungen, die wir soeben über die Stellungen des Gegenstandes machten, eine unendlich große Vergrößerung ergeben. Das entspricht offenbar nicht der Empfindung und liegt in der für diesen Fall unzweckmäßigen Begriffsbestimmung für die Vergrößerung begründet. — Die unter 3. behandelte Vergrößerung ist unabhängig vom Abstände der Lupe vom Auge.

In dem unter 3. festgestellten Ausdrucke $w = a_1 \cdot D$ ist der Faktor a_1 eine ganz willkürliche Größe und hängt davon ab, in welchem Abstände vom Auge der Gegenstand vor Benutzung der Lupe beobachtet wurde, oder in anderer Ausdrucksweise, welches Vergleichsbild zur Beurteilung der Vergrößerung zugrunde gelegt wurde. (Individuelle Vergrößerung). Es ist herkömmlich, für a_1 die „deutliche Sehweite“ im Betrage von 25 cm, oder $a_1 = \frac{1}{4} m$ zu setzen. Hält man das ein für allemal fest, so hätte man: $w = \frac{D}{4}$; die Vergrößerung wäre also immer gleich dem vierten Teile der Brechkraft der Lupe. — Wollte man sich von dem willkürlichen Faktor ganz frei machen, so könnte man zur Angabe der Vergrößerung einfach den Wert D selbst wählen, d. h. $a_1 = 1 m$ setzen. Da D die Dimension einer reziproken Länge hat, man aber gewohnt ist, die Vergrößerung als (dimensionslose) Verhältniszahl zweier Strecken zu behandeln, so hat sich eine solche Angabe für die Vergrößerung einer Lupe bisher nicht einbringen können.

4. Einfache Mikroskope. Es wurde bisher angenommen, daß die Lupe bei ruhendem Auge benutzt wird. Das gilt bei stark vergrößernden Lupen, die man auch einfache Mikroskope nennt. Sie lassen sich nur für achsennahe Gebiete korrigieren und bilden nur diese scharf ab. Daher blickt man unwillkürlich nur in der Richtung der Achse durch die Lupe hindurch; will man einen anderen Punkt des Bildes scharf sehen, so richtet man dorthin Auge und Lupe, ohne ihre gegenseitige Stellung zu ändern. In diesem Falle schneiden sich die Hauptstrahlen in der Mitte der Augenpupille.

5. Verantlupen. Sowie die Lupe aber ein angedehnteres Bildfeld liefern soll, was allerdings nur bei kleineren Vergrößerungen erreichbar ist, genügt diese Voraussetzung nicht mehr. Beim Durchmusteren des Bildfeldes dreht sich dann das Auge in seiner Höhle um den Augendrehpunkt. Die Haupt-

strahlen müssen sich also in diesem Punkte schneiden. Die sphärischen und chromatischen Fehler (S. 838) einer so benutzten Lupe sind daher derart zu beheben, daß das Auge in jeder Drehstellung verzeichnungs- und astigmatismusfreie Bündel empfängt und daß diese Bündel auch die richtige Neigung besitzen. Auf die Forderung einer solchen Korrektur in bezug auf den Augendrehpunkt hat zuerst A. Gullstrand hingewiesen. In den optischen Werkstätten von C. Zeiß in Jena wurden dann diesen Forderungen entsprechende Lupen durch M. v. Rohr berechnet und unter dem Namen *Verantlupen* in den Handel gebracht.

6. Perspektivitätszentrum von Photographien. Da das für unsere räumliche Anschauung maßgebende Perspektivitätszentrum der Augendrehpunkt ist (S. 846), so erhalten wir von einem Bilde nur dann den richtigen räumlichen Eindruck, wenn beim Betrachten des Bildes die Hauptstrahlen von dem Bilde her sich in dem Augendrehpunkte schneiden und gegenseitig dieselben Neigungen besitzen wie beim unmittelbaren Betrachten des abgebildeten Gegenstandes. Im anderen Falle erscheint das Bild verzerrt oder von falschen Größenverhältnissen. Ein (weit entfernter) Gegenstand wird durch ein photographisches Objektiv in der Brennebene abgebildet. Das Perspektivitätszentrum der Abbildung ist der vordere Brennpunkt; denn ein Auge, dessen Augendrehpunkt im vorderen Brennpunkte der Objektivlinse liegt, sieht einen jeden Bildpunkt der hinteren Brennebene durch die Objektivlinse hindurch genau in derselben Entfernung und unter demselben Winkel gegen die Achse hinter der Linse, als der ursprüngliche photographierte Gegenstand vor der Linse lag. Will man daher von einer photographischen Aufnahme einen richtigen natürlichen Eindruck empfangen, so muß das Bild in entsprechender Weise durch eine Lupe von der Brennweite des aufnehmenden Objekts betrachtet werden. Alle anderen Betrachtungsweisen mit unbewaffnetem Auge würden nur dann das Bild richtig empfinden lassen, wenn wir die Linse durch entsprechende Augenakkommodation ersetzen könnten; im anderen Falle müssen immer unrichtige Größenverhältnisse den Eindruck stören. Es ist nun in der Tat überraschend, in welchem Maße bei Unterstützung des Auges schon durch eine gewöhnliche Lupe die Körperlichkeit einer Photographie hervortritt, trotzdem die Beobachtung nur einseitig ist (§ 378). Für Zwecke der Bildbetrachtung werden Verantlupen entsprechender Brennweiten besonders hergestellt; bei ihrem Gebrauche muß das Bild in der einen, der Augendrehpunkt in der anderen Brennweite sich befinden.

§ 291. Die Fernrohre.

Die Fernrohre oder teleskopischen¹⁾ Systeme (s. dazu § 278, 2f.) haben den Zweck, das Netzhautbild eines fernen Gegenstandes, also den Sehwinkel, unter dem der ferne Gegenstand erscheint, zu vergrößern, ohne daß die Akkommodation des Auges verändert wird. Da ein unendlich ferner Gegenstand in unser Auge parallele Strahlen sendet, so betrachtet ein rechtsichtiges Auge

1) tele (griech.) = fern, skopein (griech.) = spähen.

den fernem Gegenstand sowohl mit als ohne Fernrohr ohne Akkommodation (Akkommodation auf unendlich). Hieraus folgt, daß die parallel in ein Fernrohr eintretenden Lichtstrahlen das Fernrohr auch wieder parallel verlassen müssen.

Die beiden Hauptvertreter der teleskopischen Systeme sind 1. das aus einem sammelnden Objektiv (mit positiver Brennweite) und einem zerstreuenden Okulare (mit negativer Brennweite) bestehende holländische oder Galileische Fernrohr, 2. das aus einem sammelnden Objektiv und einem sammelnden Okulare bestehende astronomische oder Keplersche Fernrohr.

§ 292. Das holländische (Galileische) Fernrohr.

1. Zusammensetzung. Beim holländischen Fernrohre (Fig. 872) sind ein sammelndes Objektiv und ein zerstreuendes Okular so angebracht, daß der zweite Brennpunkt des Objektivs mit dem zweiten Brennpunkte des Okulars zusammenfällt.

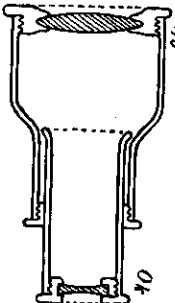


Fig. 872. Holländisches Fernrohr (schematisch).

Das sammelnde Objektiv L_1 in Fig. 873¹⁾ hat den Brennpunkt F . Die parallel mit der Hauptachse in das Objektiv eintretenden Lichtstrahlen werden so gebrochen, daß sie zum Brennpunkte F hin zusammenlaufen. Das zerstreuende Okular L_2 , das die Strahlen wieder parallel machen soll, hat seinen Brennpunkt auch in F . Hieraus folgt, daß der Abstand des Okulars vom Objektiv, also die Länge l des holländischen Fernrohres gleich der Differenz der Brennweiten von Objektiv und Okular sein muß:

$$l = f_1 - f_2.$$

2. Strahlengang. Der Strahlengang im holländischen Fernrohre für beliebige (nicht achsenparallele) Strahlen geht aus Fig. 874 hervor. Auf der

1) Das besonders früher nach Galilei benannte Fernrohr ist nicht von diesem zuerst hergestellt worden. Die Erfindung wird einem der holländischen Brillenmacher Zacharias Jansen 1601 oder Franz Lippershey in Middelburg zugeschrieben. Der letztere suchte am 2. Oktober 1608 um einen niederländischen Schutzbrief nach. Von der Erfindung hatte Galilei gehört, und er machte darauf selbst Versuche mit der Zusammenstellung zweier Linsen; es gelang ihm, im Mai 1609 ein Fernrohr zu zusammensetzen. Galileis Hauptverdienst besteht in der Verbesserung des Fernrohres. Die von ihm gebauten Rohre übertrafen an Güte weit die andern seiner Zeit. Sie gestatteten feinere astronomische Beobachtungen, die damals gewaltiges Aufsehen erregten und zu außerordentlich wichtigen Aufschlüssen über die Himmelskörper geführt haben.

2) Fig. 873 ist durch eine photographische Aufnahme des Strahlenganges in der Weise entstanden, daß zuerst der Strahlengang photographiert worden ist, den das Objektiv L_1 allein, also ohne das Okular L_2 , erzeugt; dann ist auf derselben Platte eine Aufnahme gemacht worden, nachdem das Okular L_2 eingesetzt worden war, das nun die im ersten Teile der Aufnahme zu F konvergierenden Strahlen wieder parallel macht.

treten, das sich unmittelbar hinter dem Okulare befindet. Nur Strahlen, die nach der Brechung durch A hindurchgehen, können Hauptstrahlen sein. Ein solcher Strahl sei DA . Da er durch die Mitte des Okulars geht, so erfährt er hier keine Richtungsveränderung. Der Strahl DA würde, wenn er unverändert weiterginge, die Brennebene F_1F_1 in C treffen. Zeichnen wir die durch C gehende Nebenebene NN durch die Mitte O des Objektivs, so wissen wir, daß der Strahl DA vor Eintritt in das Objektiv mit dieser Nebenebene parallel gehen muß (da sein Schnittpunkt C mit der Nebenebene NN nach der Brechung in der Brennebene F_1F_1 liegt). Wir finden also die Richtung des einfallenden Strahles S , indem wir

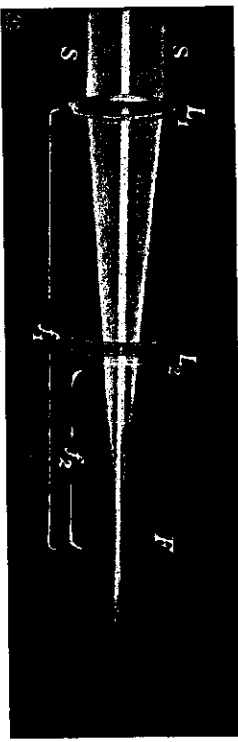


Fig. 873. Brennpunkte im holländischen Fernrohr.

$SD \parallel NN$ ziehen. SD würde nun, wenn das Objektiv nicht vorhanden wäre, in der geradlinigen Verlängerung weitergehen und die Hauptachse CC' in E treffen, folglich muß in E die Eintrittspupille $E.P.$ liegen. Wir fassen das dahin zusammen:

Die Verlängerung des auf das Objektiv treffenden Strahles S schneidet die Fernrohrachse in der Eintrittspupille E unter dem Winkel φ . Unter diesem Schwinke würde uns der unendlich ferne Gegenstand, der uns den Strahl S zusendet, ohne Fernrohr erscheinen. Der im Fernrohre verlaufende und in das Auge eintretende Strahl DA schneidet die Fernrohrachse in der Austrittspupille A unter dem Winkel ψ ; unter diesem Schwinke erscheint derselbe Gegenstand, wenn er durch das Fernrohr beobachtet wird.¹⁾

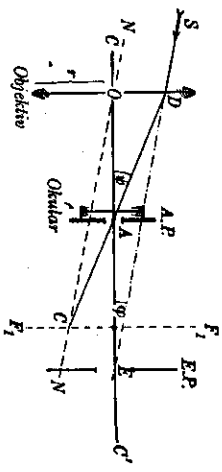


Fig. 874. Strahlengang im holländischen Fernrohre.

1) Diese Betrachtungen ändern sich für ein bewegtes, „dickendes“ Auge; es schneiden sich dann die Hauptstrahlen nicht in der Pupillennitte A , sondern im Augendrehpunkte.

3. Vergrößerung. Die Vergrößerung des Seh winkels ist die subjektive

$$\text{Vergrößerung (S. 807)} \quad w = \frac{\text{tg } \psi}{\text{tg } \varphi} = \frac{OA}{DO} = \frac{OE}{OA}. \quad OA \text{ ist die Länge } l - f_1 - f_2$$

des Fernrohres. Da E die Mitte der Eintrittspupille ist, so ist E das vom Objektiv erzeugte virtuelle Bild der Austrittspupille, folglich besteht die Gleichung $\frac{1}{OA} = \frac{1}{OE} + \frac{1}{f_1}$. Hieraus berechnet sich $\frac{OE}{OA} = \frac{f_1}{f_1 - OA}$, und da $OA = f_1 - f_2$, also $f_1 - OA = f_2$ ist, so folgt

$$w = \frac{\text{tg } \psi}{\text{tg } \varphi} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Beim holländischen Fernrohre ist die Vergrößerung gleich dem Quotienten aus den beiden Brennweiten von Objektiv und Okular.

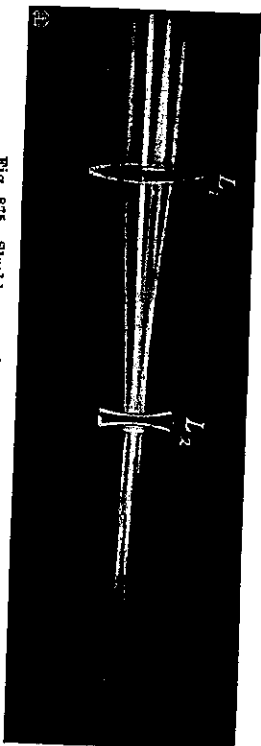


Fig. 875. Strahlengang im holländischen Fernrohr.

4. Das Gesichtsfeld. Das bildseitige Gesichtsfeld ist für ein ruhendes Auge durch die Strahlen begrenzt, die durch den äußersten Rand des Objektivs eintreten und durch die Mitte A der Augenpupille $A. P.$ gehen. In Fig. 875 ist der Strahlengang eines axialen parallelen Strahlenbündels und eines parallelen Strahlenbündels, das durch den Rand des Objektivs geht, nach einer photographischen Aufnahme abgebildet. Das Objektiv ist die Gesichtsfeldblende des holländischen Fernrohres.

Ist der Halbmesser der Objektivfassung r , so ist nach Fig. 874 der bildseitige Gesichtswinkel bestimmt durch $\text{tg } \psi = \frac{r}{f_1 - f_2}$. Da $\text{tg } \varphi = \frac{\text{tg } \psi}{w}$ ist, so ist der gegenstandsseitige Gesichtswinkel φ bestimmt durch

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{w} = \frac{r}{f_1 - f_2} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{r}{f_1 - f_2}.$$

Aus dem ersten Quotienten geht hervor:

Das gegenstandsseitige Gesichtsfeld nimmt (bei gleicher Länge des Fernrohres) in demselben Maße ab, in dem die Vergrößerung zunimmt.

In der Tat kann das berechnete Gesichtsfeld nicht voll ausgenutzt werden. Beim Blicken mit bewegtem Auge, zu dessen Unterstützung das Fernrohr dient, schneiden sich die Hauptstrahlen, welche das Gesichtsfeld begrenzen, nicht in der Mitte der Augenpupille, sondern dahinter im Augendrehpunkte.

§ 292. Das holländische (Gallische) Fernrohr

Dadurch wird der bildseitige Gesichtswinkel ψ in Fig. 874 eingeschränkt und damit auch der gegenstandsseitige Gesichtswinkel φ verkleinert.

5. Die Helligkeit. Für die Abbildung irgendeines Punktes kommt nur das Lichtbündel in Betracht, das nach der Brechung als Lichtkegel in die Augenpupille $A. P.$ (Fig. 876) eintritt. Wenn das Fernrohr nicht vorhanden wäre, so würde dieses Lichtbündel als paralleles Strahlenbündel durch die Eintrittspupille $E. P.$ gehen. Die Größe der Eintrittspupille ist daher für die Helligkeit der Abbildung eines einzelnen Punktes maßgebend. Zwischen dem Halbmesser ρ der Eintrittspupille und dem Halbmesser p der Augenpupille besteht die Proportion $\rho : p = CD : CA = f_1 : f_2$. Da nun $f_1 : f_2 = w$ ist, so folgt

$$\rho = p \cdot w.$$

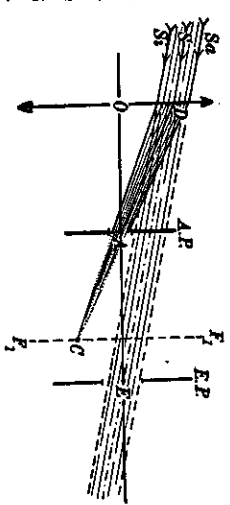


Fig. 876. Eintrittspupille $E. P.$ und die Austrittspupille $A. P.$ des holländischen Fernrohres.

Die Helligkeit H , mit der ein einzelner Punkt durch das Fernrohr abgebildet wird, ist dem vom Gegenstandspunkte her ins Auge gelangenden Lichtstrom und damit dem Flächeninhalt der Eintrittspupille $E. P.$, also $\pi \rho^2$, proportional, folglich ist die Helligkeit des Bildes bedingt durch den Ausdruck

$$H = \pi p^2 w^2.$$

Die Augenpupille ist Aperturblende.

Die Helligkeit des durch ein holländisches Fernrohr erzeugten Bildes eines Punktes ist dem Quadrate des Pupillenhalbmessers und dem Quadrate der Vergrößerung des Fernrohres proportional.

Das holländische Fernrohr vergrößert gleichzeitig den Sehinkel und die Helligkeit der einzelnen Bildpunkte. Blickt man mit einem Opernglas, das aus zwei miteinander verbundenen holländischen Fernrohren besteht, abends nach dem Sternennimmal, so sieht man eine bedeutend größere Anzahl von Fixsternen als mit dem bloßen Auge. Das ist nicht die Folge der Vergrößerung des Seh winkels eines Sternes, der auch jetzt noch unmeßbar klein ist, sondern die Folge der vergrößerten Helligkeit.

Da infolge der Vergrößerung des Seh winkels die einzelnen Punkte weiter auseinandergerückt erscheinen, so findet eine Erhöhung der Flächenhelligkeit des Gesichtsfeldes oder flächenhafter Gegenstände nicht statt. Die geringen Lichtverluste im Fernrohre beim Durchgange durch die Linsen sind ohne größere Bedeutung. Die Lichtstärke des holländischen Fernrohres ist daher einer seiner Hauptvorzüge. Es wird deshalb gern dort gewählt, wo man lichtschwache Gegenstände beobachten will, wie bei der Seefahrt als Nachtglas, im täglichen Leben als Theaterglas.

§ 293. Das Keplersche¹⁾ oder astronomische Fernrohr.

1. Zusammensetzung. Beim Keplerschen Fernrohr (Fig. 877) sind auf der Hauptachse die beiden Sammellinsen: das Objektiv und das Okular so angebracht, daß der zweite Brennpunkt des Objektivs mit dem ersten Brennpunkte des Okulars zusammenfällt.

Dadurch wird erreicht, daß die der Hauptachse parallelen Strahlen SS (Fig. 878) nach ihrer Brechung im Objektiv nach F zusammenlaufen und von F aus auseinanderlaufen.

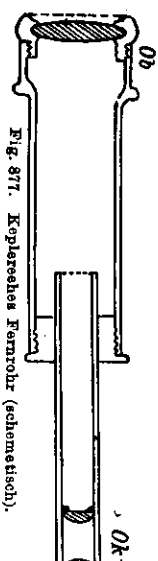


Fig. 877. Keplersches Fernrohr (schematisch).

Hier werden sie wieder so gebrochen, daß sie das Okular parallel zur Hauptachse verlassen.

Das Objektiv hat die Aufgabe, von einem fernen Gegenstande ein reelles Bild in seiner Brennebene zu entwerfen. Dieses Bild wird durch das Okular als Linse betrachtet. Wird also das auf der Mattscheibe eines photographischen Apparates entworfenen Bild durch eine Linse betrachtet, so ist diese Verbindung beider optischen Instrumente im Wesen ein Keplersches Fernrohr.

Beim Keplerschen Fernrohr ist der Abstand des Okulars vom Objektiv, also die Länge l des Fernrohrs gleich der Summe der beiden Brennweiten f_1 und f_2

$$l = f_1 + f_2.$$

2. Aperturblende. Bei der Ausführung des Keplerschen Fernrohrs verwendet man stets Objektive von größer und Okulare von kleiner Brennweite; daher soll eine entsprechende Voraussetzung auch hier gemacht werden. Aus Fig. 878 ist unmittelbar ersichtlich, daß der Durchmesser des auftretenden parallelen Strahlenbündels SS zum Durchmesser des das Keplersche Fernrohr verlassenden Strahlenbündels in demselben Verhältnis steht, wie die Brennweite des Objektivs zu der des Okulars. Werden die Öffnungen der Linsen voll ausgenutzt, so müssen sich die Durchmesser von Objektiv und Okular eines richtig gebauten Fernrohrs daher wie die Brennweiten verhalten. Dabei darf die

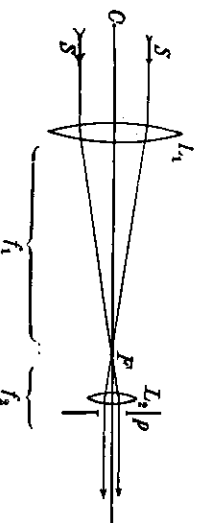


Fig. 878. Strahlengang im Keplerschen Fernrohr (schematisch).

1) Das nach Kepler benannte Fernrohr aus zwei Konvexlinsen ist von Kepler in einer 1611 erschienenen Schrift über Optik beschrieben, aber von Kepler selbst nie hergestellt und gebraucht worden. Es wurde zuerst von dem Jesuitenpater Christian Scheiner 1615 ausgeführt. Scheiner gilt auch schon an, daß man aus drei Linsen ein Fernrohr zusammensetzen kann, das sich zur Beobachtung irdischer Gegenstände deshalb gut eignet, weil man damit die Gegenstände aufrecht sieht. "Terrestrisches Fernrohr."

Okularöffnung nicht wesentlich größer als der Durchmesser der Augenpupille sein, weil sonst ein Teil der Lichtstrahlen nicht ins Auge gelangen würde. Nehmen wir z. B. an, daß die Brennweite des Objektivs 10mal so groß ist wie die des Okulars, so ist der Durchmesser des austretenden Strahlenbündels nur $1/10$ von dem des eintretenden Strahlenbündels. Der Durchmesser p der Augenpupille betrage 6 mm. Dann muß der Durchmesser des Objektivs 6 cm sein, wenn die Pupille und die Fassung des Objektivs in gleicher Weise das eintretende Strahlenbündel begrenzen. Tatsächlich richtet man das Fernrohr meist so ein, daß der Durchmesser der Objektivfassung kleiner ist, als dem angegebenen Verhältnisse entspricht. Daraus folgt, daß in diesem Falle die Fassung des Objektivs allein bestimmend ist für die Menge des in das Keplersche Fernrohr eintretenden Lichtes:

Die Objektivfassung ist meist die Aperturblende des Keplerschen Fernrohrs.

3. Austrittspupille. In diesem praktisch meist in Frage kommenden Falle gehen (Fig. 879) die Hauptstrahlen aller Gegenstandspunkte, also auch der seitlich gelegenen, durch den Mittelpunkt des Objektivs; sie erfahren durch das Okular eine Brechung nach der Hauptachse hin und schneiden diese dort, wo das durch das Okular erzeugte Bild des Objektivs liegt.

Das optische Bild des Objektivs ist daher die eigentliche Austrittspupille des Fernrohrs.

Bei einigen besonders lichtstarken Keplerschen Fernrohren (Nachtgläsern) kann diese Austrittspupille größer als die Augenpupille sein. In diesem Falle ist die Augenpupille Aperturblende. Bei ruhendem Auge, also indirektem Sehen, würde ein Fernrohr beim Gebrauche gerade voll ausgenutzt werden, wenn das durch das Okular erzeugte Bild der Objektivöffnung in die Augenpupille fällt. So wie aber das Auge das Gesichtsfeld durchmusteret, wird es in seiner Höhlung gedreht. Es kommen daher beim Blicken nur dann alle Hauptstrahlen ins Auge, wenn die Austrittspupille des Fernrohrs im Augendrehpunkte liegt; die Austrittspupille muß dann größer sein als die Augenpupille.

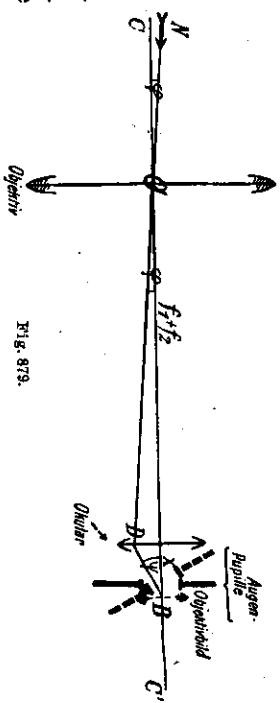


Fig. 879.

4. Vergrößerung. In Fig. 879 sind diese Verhältnisse dargestellt. NO ist der von einem seitlich gelegenen Gegenstandspunkte durch die Mitte des Objektivs gehende Hauptstrahl (gleichzeitig eine Nebenachse des Objektivs). Die Verlängerung von NO trifft das Okular in D und wird hier zum Punkte B der Hauptachse gebrochen. B (der Augendrehpunkt) möge vom Okulare den Abstand x haben. Die eintretenden Strahlen bilden mit der Fernrohrachse

den Sehwinkel $\sphericalangle NOC = \varphi$; durch das Fernrohr betrachtet, erscheint derselbe Gegenstandspunkt unter dem Sehwinkel $\sphericalangle DBO = \psi$. Das Verhältnis der Netzhautbilder mit und ohne Benutzung des Fernrohres, also auch das Verhältnis der Tangenten der Sehwinkel, ist die subjektive Vergrößerung (S. 807) w des Keplerschen Fernrohres.

Aus Fig. 879 folgt unmittelbar $w = \frac{\text{tg } \psi}{\text{tg } \varphi} = -\frac{f_1 + f_2}{x}$.

Da B das optische reelle Bild des Objektivs ist, das durch das Okular mit der Brennweite f_2 erzeugt wird, so gilt die Linsengleichung (S. 795)

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{f_1 + f_2} + \frac{1}{f_2}$$

woraus folgt $\frac{f_1 + f_2}{x} = \frac{f_1}{f_2}$;

folglich ist auch $w = -\frac{f_1}{f_2}$.

Die Vergrößerung des Keplerschen Fernrohres ist gleich dem Quotienten der beiden Brennweiten von Objektiv und Okular.

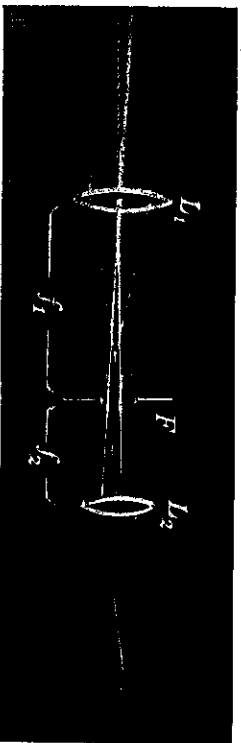


Fig. 880. Strahlengang im Keplerschen Fernrohr.

5. Gesichtsfeldblende. In Fig. 880 ist nach einer photographischen Aufnahme ein Strahlenbündel dargestellt, das die Entstehung des Bildes eines unendlich fernen Achsenpunktes bewirkt. Ferner zeigt die Figur den Verlauf eines parallelen Strahlenbündels, das von einem seitlichen, oberhalb der Achse liegenden Punkte ausgeht. Als paralleles Strahlenbündel trifft es auf das Objektiv, vereinigt sich in der gemeinsamen Brennebene der beiden Linsen, geht von hier aus auseinanderlaufend weiter und wird durch das Okular gleichzeitig parallel gemacht und der Hauptachse zu gebrochen.

In der gemeinsamen Brennebene bringt man eine körperliche Blende an, die nur die mittleren Strahlen durchläßt, die Randstrahlen dagegen und die etwa durch Reflexionen an den Linsenflächen und Linsenfassungen zerstreuen und daher störenden Lichtstrahlen abblendet. Da in der gemeinsamen Brennebene ein reelles Bild des unendlich fernen Gegenstandes entsteht, so begrenzt die hier angebrachte Blende das Gesichtsfeld; sie ist die eigentliche Gesichtsfeldblende des Keplerschen Fernrohres.

Das gegenstandsseitige Gesichtsfeld ist durch dasjenige Strahlenbündel bestimmt, dessen Achse S (Fig. 881) durch die Mitte O des Objektivs L_1 geht

und den Rand der Blende B berührt. Hat die Blendenöffnung den Halbmesser d , so folgt für den gegenstandsseitigen Gesichtswinkel die Gleichung

$$\text{tg } \gamma = \frac{d}{f_1}$$

Das Gesichtsfeld ist dem Quadrate dieses Ausdruckes proportional. Hieraus folgt:

Das gegenstandsseitige Gesichtsfeld des Keplerschen Fernrohres ist der Blendenöffnung

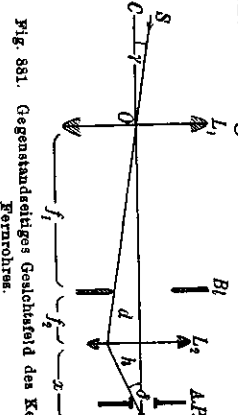


Fig. 881. Gegenstandsseitiges Gesichtsfeld des Keplerschen Fernrohres.

direkt, dem Quadrate der Brennweite des Objektivs umgekehrt proportional; es ist von der Brennweite des Okulars und von der Öffnung des Objektivs unabhängig.

Der bildseitige Gesichtswinkel δ (Fig. 881) ist durch die Vergrößerung bestimmt

$$\text{tg } \delta = w = -\frac{f_1}{f_2} \quad \text{Hieraus folgt:} \\ \text{tg } \delta = -\frac{f_1}{f_2} \cdot \text{tg } \gamma = -\frac{d}{f_2}$$

Das bildseitige Gesichtsfeld des Keplerschen Fernrohres ist der Blendenöffnung direkt und dem Quadrate der Brennweite des Okulars umgekehrt proportional.

(Beim holländischen Fernrohre (§ 292) war gerade der Durchmesser des Objektivs für das Gesichtsfeld maßgebend.)

6. Schlüsselochbeobachtung. Wenn beim Keplerschen Fernrohre die Austrittspupille in den Augendrehpunkt Z (Fig. 881) gebracht werden kann, so läßt sich auch beim Blicken das Gesichtsfeld voll ausnützen, während beim holländischen Fernrohre der Gesichtswinkel durch das *Blicken* beschränkt wird. Nicht immer gestattet aber die Einrichtung des Instrumentes, das Auge nahe an das reelle Bildchen, welches das Okular von der Objektivfassung erzeugt, heranzubringen; die Austrittspupille liegt dann vor dem Augendrehpunkte. Das Gesichtsfeld des Fernrohres kann in diesem Falle nur durch diesen kleinen Kreis als Fenster hindurch betrachtet werden. Er schränkt das Gesichtsfeld in ähnlicher Weise ein, wie etwa das Schlüsseloch, durch das hindurch man das Innere eines Zimmers zu überblicken bestrebt ist, das Blickfeld begrenzt. Um dabei ein möglichst großes Gesichtsfeld zu überblicken, nützt es nichts, das Auge in der Höhlung zu drehen, vielmehr muß man seitliche Kopf- und Augenbewegungen zu Hilfe nehmen, um noch Strahlen aufzufangen, die schräg durch das Loch hindurchkommen. Die Mitte des Schlüsseloches, bei uns die Mitte der Austrittspupille, ist dann Perspektivitätszentrum, denn in ihr schneiden sich die Hauptstrahlen unabhängig vom Auge. Beim holländischen Fernrohre ist das von dem Okulare erzeugte Bild des Objektivs virtuell und liegt daher immer zwischen Okular und Objektiv, also weiter von dem Drehpunkte des Auges entfernt. Die Betrachtungen über

die „Schlüssellochbeobachtung“ des Blickfeldes gelten daher sinngemäß auch für das holländische Fernrohr; sie spielen hier aber eine geringere Rolle, da der Abstand der Austrittspupille vom Auge größer ist als beim Keplerschen Fernrohre.

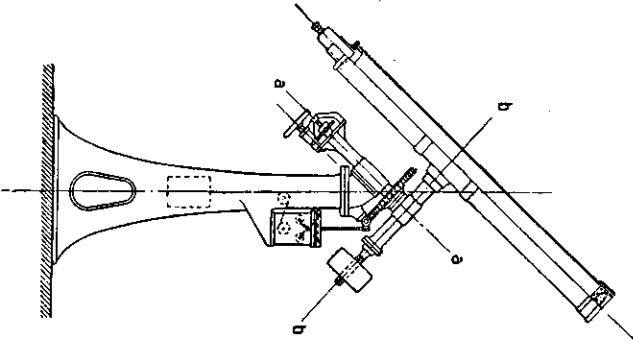


Fig. 882. Parallaxisch aufgestelltes Fernrohr.

des Fernrohres. An dieser Achse greift ein Uhrwerk an, das sie in 24 Stunden einmal entgegen dem Drehsinne der Erde, also mit der Bewegungsrichtung der Sterne dreht. Hat man nun einen Stern im Fernrohre eingestellt, so folgt das Fernrohr ohne unser Zutun dem Laufe des Sternes, der Stern bleibt also im Fernrohre dauernd sichtbar. Man nennt diese Art der Aufstellung die **parallaxische Aufstellung** eines Fernrohres.

§ 294. Das terrestrische Fernrohr.

Um die beim Keplerschen Fernrohre störende Umkehrung des Bildes zu beseitigen, bringt man (beschrieben von Kepler um 1611, von Schryl zu Rheita um 1645) zwischen Objektiv und Okular noch eine Sammellinse (die Umkehrungslinse) an (Fig. 883).

Die in das Fernrohr eintretenden parallelen Strahlen SSS werden durch das Objektiv in der durch den Brennpunkt F_1 des Objektivs gehenden Brenn-ebene im Punkte A zur Vereinigung gebracht. Von hier aus gehen sie anseinanderlaufend weiter und werden darauf durch die Umkehrlinse wieder hinter dieser Linse in B zur Vereinigung gebracht. Ist die Entfernung des Objektiv-

7. Lage des Bildes. Die unmittelbare Anschauung von Fig. 879 belehrt uns, daß die Sehwinkel φ und ψ zur Achse entgegengesetzt liegen; hieraus folgt, daß der durch das Keplersche Fernrohr beobachtete Gegenstand umgekehrt erscheint. Das stört den wissenschaftlichen Beobachter nicht, besonders dann nicht, wenn er das Fernrohr zur Meßzwecke verwendet. Wenn man aber eine Landschaft oder Personengruppen im umgekehrten Bilde sieht, so ist der Eindruck durchaus nicht derselbe wie bei der Betrachtung in aufrechter Lage. Daher zieht man zur Beobachtung eines Vorganges oder einer Landschaft das holländische Fernrohr vor oder verwendet das im folgenden Paragraphen beschriebene terrestrische Fernrohr.

8. Parallaxisch aufgestelltes Fernrohr. Die Fernrohre werden in den Sternwarten meist in der in Fig. 882 dargestellten Weise aufgestellt. Das Fernrohr ist um die Achse aa und die Achse bb drehbar, kann daher in alle Richtungen (nach Stundenwinkel und Abweichung) eingestellt werden. Die Achse aa steht der Erdochse parallel, sie heißt die Polachse und Abweichung) eingestellt werden. Die Achse aa steht der Erdochse parallel, sie heißt die Polachse und Abweichung) eingestellt werden. Die Achse aa steht der Erdochse parallel, sie heißt die Polachse und Abweichung) eingestellt werden.

brennpunktes F_1 von der Umkehrlinse gleich der doppelten Brennweite der Umkehrlinse, so liegt (und das ist in der Figur angenommen) auch der Vereinigungspunkt B in der doppelten Brennweite der Umkehrlinse auf der anderen Seite der Fernrohrachse. Von hier aus laufen die Strahlen wieder auseinander und treffen auf das Okular. Liegt B in der ersten Brennebene des Okulars, so verlassen die Strahlen das Okular parallel und treten parallel in die Augenpupille ein. Jetzt treten die Strahlen von derselben Seite der Fernrohrachse in das Auge ein, wie bei der Beobachtung ohne das Fernrohr; der Gegenstand erscheint, auch durch das Fernrohr betrachtet, aufrecht.

In dem hier besonders behandelten Falle, daß der Vereinigungspunkt B von der Umkehrlinse ebensoweit entfernt ist wie der Vereinigungspunkt A , ist der Abstand der Brennebene des Objektivs von der Brennebene des Okulars gleich der vierfachen Brennweite der Umkehrlinse. Um diese Strecke muß also das Keplersche Fernrohr verlängert werden, wenn es durch Zwischenschaltung einer Konvexlinse zu einem terrestrischen Fernrohre umgestaltet werden soll.

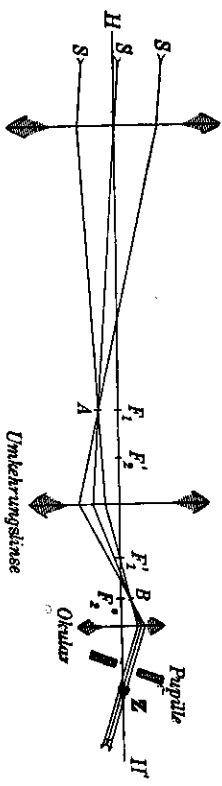


Fig. 883. Strahlengang im (schematischen) terrestrischen Fernrohre.

linse und f'' die Brennweite des Okulars ist, so ist die Länge l des terrestrischen Fernrohres

$$l = f + 4f' + f''.$$

Ein terrestrisches Fernrohr hat immer eine unbequeme Länge. Dazu kommt noch ein weiterer Uebelstand: Die durch das Objektiv zentral hindurchgehenden Strahlen gehen durch die Umkehrlinse nicht zentral hindurch; daher kann die Umkehrlinse selbst als Gesichtsfeldblende wirken und das Gesichtsfeld verkleinern. Endlich bewirken die als Randstrahlen gebrochenen Strahlen eine Vergrößerung der sphärischen Aberration und der Verzeichnung.

Anmerkung: Die obige Darstellung der Bauart eines terrestrischen Fernrohres ist schematisch; wirkliche Ausführungen zeigen davon noch mehrfacher Hinsicht Abweichungen. Wenn man zwei astronomische Fernrohre hintereinanderschaltet und dabei zweckmäßigerweise so verfährt, daß die Austrittspupille des ersten mit der Eintrittspupille des zweiten zusammenfällt, so stellt diese Zusammenstellung auch ein Fernrohr dar, welches aufrechte Bilder liefert. Das Okular des ersten der beiden gedachten Teilfernrohre und das Objektiv des zweiten besorgen dann die Bildumkehr an Stelle der einen in der obigen Darstellung angenommenen Umkehrlinse. In Über-

einstrahlung mit dieser Auffassung enthalten die Ausführungen der terrestrischen Fernrohre meist zwei Linsen, denen die Aufgabe der Bildumkehr zukommt. Es ist nicht notwendig, sich die Wirkungsweise eines solchen Fernrohres mit 2 Umkehr-Linsen in der angedeuteten Weise vorzustellen; bei manchen Ausführungen ist es zweckmäßiger, die beiden Linsen als Teile eines bildumkehrenden, terrestrischen Okularsystems (§ 300), an Stelle der einen Okularlinse der schematischen Betrachtung, anzusehen. Dann besteht das terrestrische Fernrohr auch nur aus Objektiv und Okular wie die anderen Gattungen der Fernrohre.

§ 295. Das Prismenfernrohr.

Die beim terrestrischen Fernrohr erwähnten Uebelstände sind beim Zeißschen Prismenfernrohr¹⁾ (Fig. 884) vermieden. Die in der Pfeilrichtung in das Objektiv eintretenden Lichtstrahlen werden an den beiden Kathetenflächen eines total reflektierenden, rechtwinkligen Prismas total reflektiert; sie kehren in entgegengesetzter Richtung und parallel zu den einfallenden Strahlen verschoben wieder zurück, fallen nun auf ein zweites total reflektierendes Prisma, dessen Kante rechtwinklig zur Kante des ersten Prismas ist. Hier werden die Strahlen noch einmal durch zweimalige Reflexion in ihrer Richtung umgekehrt und gehen dann in ursprünglicher Richtung, aber parallel verschoben durch das Okular des Fernrohres.

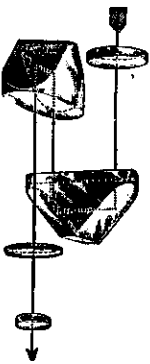


Fig. 884. Strahlengang im Prismenfernrohr.

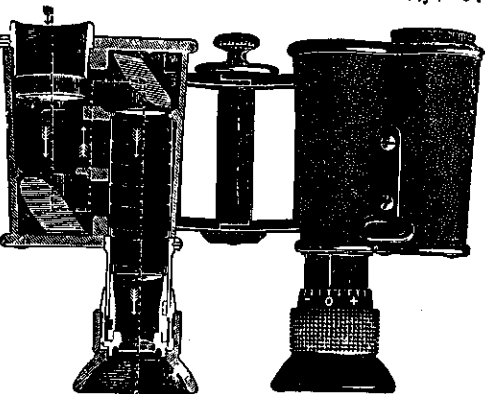


Fig. 885. Prismenfernrohr von A. B. C.

Bei den beiden Reflexionen im ersten Prisma werden die Strahlen in ihrer Lage zueinander so vertauscht, daß die oberhalb der Hauptachse und parallel zu ihr ein tretenden Strahlen nach unten zu liegen kommen. Infolge der Reflexionen im zweiten Prisma findet in derselben Weise eine Vertauschung

¹⁾ Die Verwendung der Umkehrungsprismen ist schon 1850 von dem italienischen Ingenieur Ignazio Porro (meist in Paris lebend) entdeckt worden, und bald darnach hat man in Paris die Herstellung von Prismenfernrohren versucht, aber infolge der durch mangelhafte Glasmelzen und ungenügende Genauigkeit des Schliffes verursachten Mißerfolge wieder aufgegeben. So ist diese Erfindung bald gänzlich in Vergessenheit geraten. 1893 hat E. Abbe das Prismenfernrohr aufs neue erfunden, und in den Zeißschen Werkstätten sind dann die ersten brauchbaren Prismenfernrohre hergestellt worden. Von den Porroschen Versuchen erfährt Abbe erst durch das deutsche Patentamt, das sie wieder ans Licht zog und ihre wegen eine Patenterteilung ablehnte.

der Lagen links-rechts statt. Durch die zweifache Vertauschung wird die Anordnung der Strahlen vollkommen vertauscht; daher kommt das ohne die beiden totalreflektierenden Prismen in umgekehrter Lage erscheinende Bild des Gegenstandes sowohl in wagenrechter als auch in lotrechter Anordnung in eine Lage, die mit der des Gegenstandes übereinstimmt. Die beiden Prismen ersetzen in ihrer umkehrenden Wirkung die Umkehrungslinse im terrestrischen Fernrohr, ohne die Uebelstände der Linse zu haben; denn Randstrahlen im Sinne der Randstrahlen bei Linsen gibt es bei den Prismen nicht, weil alle Teile der ebenen Flächen gleichwertig sind.

Außerdem erreicht man noch den Vorteil, daß wegen des zweifach geknickten Strahlenganges im Fernrohr eine Verkürzung des Fernrohres gegenüber dem Keplerschen Fernrohr möglich ist.

Das Prismenfernrohr wird wegen seiner Kürze oft als zweifaches Fernrohr zum gleichzeitigen Gebrauche mit beiden Augen (binokular) gebaut, wird also als Opernglas oder Falsteecher (Fig. 885) verwandt.

Da die in das Fernrohr eintretenden Strahlen eine seitliche Verschiebung erfahren, so kann man es so einrichten, daß die Objektive weiter auseinanderstehen als die Okulare. Die Folge davon ist, daß ein durch das binokulare Prismenfernrohr schauender Beobachter eine Landschaft so betrachtet, als wären seine Augen weiter auseinander gerückt. Dieser Umstand begünstigt eine Erhöhung der Plastik der betrachteten Landschaft (§ 379).

Anmerkung. Statt zweier Prismen ist in anderen Ausführungen des Grundgedankens nur ein einziges „Umkehrprisma“ besonderer Gestalt angewendet worden; Prismenfernrohre mancher Werkstätten enthalten sogar statt total reflektierender Prismenflächen Silberspiegel.

§ 296. Punktförmige Gegenstände.

Um die Wirkungsweise eines Fernrohres beim Betrachten eines fernen Gegenstandes zu verstehen, muß man unterscheiden, ob der Gegenstand trotz der großen Entfernung noch unter einem meßbaren Sehwinkel erscheint, oder ob der Sehwinkel infolge der großen Entfernung unter jedes Maß herabsinkt, der Gegenstand also punktförmig erscheint. Der letztere Fall tritt z. B. bei der Beobachtung eines Fixsternes durch ein Fernrohr ein (S. 861). Ein Fixstern erscheint mit unbewaffnetem Auge, wie auch durch ein Fernrohr betrachtet, punktförmig; daher kann auch von einer eigentlichen Vergrößerung eines einzelnen Fixsternes nicht die Rede sein. Trotzdem verwendet man auch zur Beobachtung des Fixsternhimmels die Fernrohre.

Der Nutzen besteht darin, daß 1. die Abstände zweier Fixsterne voneinander vergrößert erscheinen und daß 2. die Fixsterne heller erscheinen.

Während bei der Betrachtung eines Fixsternes mit unbewaffnetem Auge nur dasjenige Strahlenbündel in das Auge dringt, das die Pupilleneröffnung zum Querschnitt hat (die Pupille ist Aperturblende), wird bei Benutzung eines richtig gebauten Keplerschen Fernrohres das Netzhautbild von dem ganzen Strahlen-

bündel erzeugt, das das Objektiv zum Querschnitt hat (das Objektiv ist Aperturbündel). Infolgedessen sind punktförmige Objekte in demjenigen Verhältnisse heller, in dem die Größe des Objektivs zur Pupillengröße steht; das ist aber für ein richtig gebautes Fernrohr das Quadrat der Vergrößerung. Der gleichmäßig helle Hintergrund oder flächenhafte Gegenstände können höchstens ihre natürliche Helligkeit erreichen (S. 861). Man sieht daher mit dem Fernrohr auch noch Fixsterne (aber auch nur punktförmig), die wegen ihrer geringen Lichtstärke dem unbewaffneten Auge nicht mehr wahrnehmbar sind.

Aus diesem Grunde verwendet man auf den größeren Sternwarten Fernrohre mit Objektiven von sehr großen Durchmessern. Damit die am Rande des Objektivs eintretenden Lichtstrahlen keine zu große sphärische Aberration erzeugen, muß das Objektiv nicht zu stark gekrümmt sein, also eine sehr grobe Brennweite haben. Beide Gründe sind die Ursache für die riesenhaften Abmessungen der Fernrohre neuzeitlicher Sternwarten. Es besitzen die Objektive der vier größten Fernrohre, nämlich des Yerkes-Observatoriums in Williams Bay Wisc. einen Durchmesser von 102 cm und 19 m Brennweite, der Lick-Sternwarte auf dem Mount Hamilton in Kalifornien 91 cm Durchmesser und 18 m Brennweite, der Sternwarte von Mendon bei Paris 83 cm Durchmesser und 16 m Brennweite, des astrophysikalischen Observatoriums in Paris 80 cm Durchmesser und 12 m Brennweite.

Neben der Helligkeit nimmt auch das Auflösungsvermögen (§ 330) der Fernrohre mit wachsendem Objektivdurchmesser zu. Die beiden Teilsterne eines Doppelsternsystems können also desto leichter voneinander getrennt beobachtet werden, je größer der Objektivdurchmesser d ist. Erfahrungsmäßig ist der kleinste Winkelabstand zweier Sterne, die noch eben getrennt gesehen werden, $\varphi = \frac{116''}{d}$, wenn d in mm gemessen wird. Den Kehrwert $\frac{d}{116''}$ nimmt man als Maß für das Auflösungsvermögen. — Um in einem ausgedehnten Gegenstande viele Einzelheiten zu erkennen, ist es in ähnlicher Weise notwendig, nahe beieinanderliegende Punkte und Linien noch getrennt zur Empfindung zu bringen. Doch liegen hierbei die Verhältnisse nicht so günstig wie bei Doppelsternen; von einem bestimmten Objektivdurchmesser ab trägt eine weitere Vergrößerung des Durchmessers nicht mehr zu einer Vergrößerung des Auflösungsvermögens bei. Für die Erkennung von Einzelheiten auf Planetenscheiben werden Objektivdurchmesser von mehr als $d = 300$ mm kaum ausgenutzt werden können; eine mit größeren Objektiven erzielte stärkere Vergrößerung ist also vielleicht begunn aber an sich nutzlos, da sie nicht mehr Einzelheiten zeigt. — Für die Beobachtung von irdischen fernem Gegenständen ist die Ausnutzung stärkerer Vergrößerungen noch mehr beschränkt. Der Grund ist wesentlich in der Unruhe der Luft, in der unregelmäßigen Durchmischung warmer und kalter Strömungen zu suchen, wodurch der Lichtstrahl unregelmäßig hin- und her abgelenkt wird, so daß die beobachteten Dinge nicht ruhig zu stehen scheinen. Das unregelmäßige Funkeln der Fixsterne am nächtlichen Himmel, das schon mit bloßem Auge zu beobachten und unter dem Namen Sznittillation bekannt ist, hat dieselbe Ursache und ist ein Beispiel dieser Störung.

§ 297. Gegenstände, die im Endlichen liegen. § 298. Fadenkreuz, Okularmikrometer 871

§ 297. Gegenstände, die im Endlichen liegen.

Bisher hatten wir vorausgesetzt, die durch ein Fernrohr beobachteten Gegenstände seien so weit entfernt, daß die von einem Gegenstandspunkte in das Fernrohr eintretenden Strahlen als parallel angesehen werden können. Nun finden die Fernrohre aber auch zur Beobachtung von Gegenständen, die im Endlichen liegen, Anwendung. In diesem Falle muß der Abstand zwischen Okular und Objektiv so vergrößert werden, daß das vom Objektiv erzeugte reelle Bild des Gegenstandes mit dem ersten Brennpunkte des Okulars zusammenfällt, wenn das beobachtende Auge auf unendlich eingestellt ist, also ohne Akkommodation beobachtet. Häufig wird allerdings von den Beobachtern so eingestellt, daß sie ihre Akkommodation $1\frac{1}{2}$ – 2 Dioptr. ausspannen. Man muß dann das Fernrohr um so weiter ausziehen, je näher der Gegenstand liegt.

§ 298. Fadenkreuz, Okularmikrometer.

An der Stelle, wo das reelle Bild des Gegenstandes liegt (§ 293, 5), bringt man bei Fernrohren, die zu Messungen dienen, ein sog. Fadenkreuz an, das man mit dem Bilde des Gegenstandes zusammenfallen läßt. Das Fadenkreuz besteht entweder aus einem lotrechten und einem wagerechten feinen Faden (Spinnwebfäden)¹⁾, deren Schnittpunkt genau in der Achse des Fernrohres liegt, oder aus einem Systeme mehrerer wagerechter und lotrechter Fäden. Endlich ersetzt man das Fadenkreuz auch wohl durch einen auf Glas mit einer feinen Diamantspitze gerissenen, getätzten oder photographierten Maßstab, mit Hilfe dessen man dann sofort die Größe des Seh winkels ablesen kann, unter dem einzelne Teile des Gegenstandes erscheinen. Solche Maßstäbe heißen Okularmikrometer.

§ 299. Das Mikroskop.

1. Zusammensetzung. Das zusammengesetzte Mikroskop besteht wie das Keplersche Fernrohr aus einem sammelnden Objektiv und einem sammelnden Okulare. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß die in das Objektiv eintretenden Strahlen nicht von einem unendlich fernem Gegenstande ausgehen, also nicht parallel eintreten. Der Gegenstand liegt in der Nähe des ersten Brennpunktes des Objektivs außerhalb der Brennweite. Der hintere Brennpunkt des Objektivs und der vordere des Okulars fallen nicht wie beim Keplerschen Fernrohre zusammen, sondern haben einen bestimmten Abstand δ (optisches Intervall oder Tubuslänge (§ 278, 1)) voneinander.

Das Objektiv hat die Aufgabe, von einem seinem Brennpunkte sehr nahen Gegenstande ein reelles, stark vergrößertes Bild zu entwerfen. Dieses Bild wird durch das Okular als Lupe betrachtet. Wird also das von einem Projektionsapparat auf einer Mattscheibe entworfen Bild von rückwärts durch eine Lupe betrachtet, so ist die Zusammenstellung des Projektionsobjektivs und der Lupe im Wesen ein zusammengesetztes Mikroskop.

1) Aus dem Eierkokon der Kreuzspinne.

In Fig. 886 ist O der Mittelpunkt des Objektivs, seine beiden Brennebenen sind F_2, F_2' und F_1, F_1' . O' ist der Mittelpunkt des Okulars mit den beiden Brennebenen F_2', F_2'' und F_1', F_1'' . Die Brennweite des Objektivs sei f_1 , die Brennweite des Okulars sei f_2 . Das Objekt G befindet sich außerhalb der Brennweite des Objektivs.

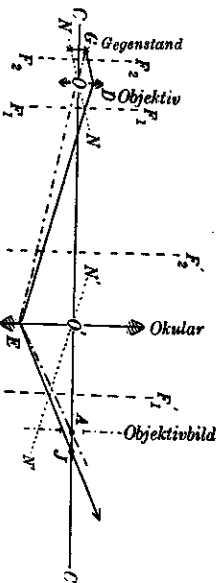


Fig. 886. Der Strahlenverlauf im Mikroskope.

Hauptachse CC' liegenden Gegenstandspunkte G ausgeht und das Objektiv in D trifft. Um die Richtung des gebrochenen Strahles zu bestimmen, ziehen wir die zu GD parallele Nebenachse NN' . Der das Objektiv in D treffende Strahl geht durch den Schnittpunkt der Nebenachse mit der Brennebene F_1, F_1' und trifft das Okular in E . Ziehen wir dann durch die Mitte O' des Okulars parallel zu DE die Nebenachse $N''N'''$ und verbinden ihren Schnittpunkt mit der Brennebene F_1', F_1'' mit E , so schneidet der gebrochene Strahl die Hauptachse in J .

3. Aperturblende. Die von dem Punkte G des Gegenstandes ausgehenden Strahlenbündel werden in ihrer Öffnung $\sphericalangle OGD$ durch die Fassung der vorderen Linse des Objektivs (oder durch eine Blende, die hinter dieser Linse im Objektivsysteme liegt) begrenzt; diese Linsenfassung (oder seine Blende) ist daher Aperturblende des Mikroskops.

4. Austrittspupille. Wir zeichnen das durch das Okular entworfene Bild dieser Aperturblende im Objektiv, indem wir OE ziehen und mit Hilfe der hierzu parallelen (in der Figur nicht gezeichneten) Nebenachse die Richtung des gebrochenen Strahles EA finden. A ist der Mittelpunkt des Bildes der Aperturblende. Alle durch das Objektiv hindurchgehenden Strahlen, die das Okular treffen, gehen auch durch das Bild der Aperturblende hindurch; die Hauptstrahlen aller abbildenden Strahlenbündel müssen sich also in A schneiden. Das in A liegende Bild der Aperturblende ist die Austrittspupille des Mikroskops. Soll das beobachtende Auge möglichst alle Strahlen auffangen, die durch das Mikroskop hindurchgegangen sind, so muß es demnach so gehalten werden, daß die Austrittspupille in A mit der Pupille des Auges zusammenfällt.

5. Gesichtsfeldblende. Wir finden die Gesamtheit der vom Gegenstandspunkte G ausgehenden und an der Bilderzeugung teilnehmenden Strahlen, indem wir den Verlauf des ganzen Strahlenkegels zeichnen, der seinen Scheitel in G hat, und dessen Grundfläche das Objektiv ist. Der Verlauf des Strahlenkegels ist in Fig. 887 abgebildet. Der auseinanderlaufend in das Objektiv eintretende Strahlenkegel wird durch das Objektiv in B zur Vereinigung ge-

bracht. Von hier aus laufen sie wieder auseinander und werden, da B innerhalb der ersten Brennweite des Okulars liegt, durch das Okular so gebrochen, daß sie dieses noch divergent verlassen. Die Grundfläche des auseinanderlaufenden Strahlenkegels ist die schon früher gezeichnete Austrittspupille. Der Schnittpunkt B des Strahlenkegels ist das durch das Objektiv erzeugte reelle Bild von G . An dieser Stelle wird eine physikalische Blende B' angebracht, die das reelle Bild begrenzt. Diese Blende ist Gesichtsfeldblende; denn, wird die Blendendöffnung eingeschränkt, so gelangen nur noch Hauptstrahlen GB durch das Mikroskop hindurch, die von Punkten G ausgehen, welche näher an der Achse liegen.

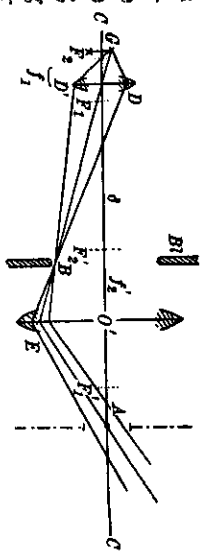


Fig. 887. Gesichtsfeldblende B' .

6. Die Vergrößerung. Das reelle Bild B (Fig. 887) entsteht in unmittelbarer Nähe der Brennebene F_2' . Fiele das Bild B mit der Brennebene F_2' vollständig zusammen (s. Fig. 888), so wäre das aus dem Okulare austretende Strahlenbündel parallel; es würde dem in A befindlichen Auge so erscheinen, als ob die Strahlen aus dem Unendlichen kämen, das Auge müßte also ohne Akkommodation beobachten. Das Mikroskop wird häufig so eingestellt, daß das virtuelle Bild in der deutlichen Sehweite erscheint. (Nach anderen Erfahrungen soll häufiger beim Sehen durch ein optisches Instrument die Akkommodation um etwa 1 bis $1\frac{1}{2}$ Dioptrien angespannt werden (S. 871).) Daher müssen die Strahlen mit einer solchen Divergenz aus dem Okulare austreten, daß ihr Divergenzpunkt in der deutlichen Sehweite liegt. Gegen die kleine Brennweite (von nur wenigen Millimetern) der bei Mikroskopen zur Verwendung gelangenden Okulare ist aber die deutliche Sehweite (von gegen 25 cm) immer als eine verhältnismäßig große Größe anzusehen. Der Divergenzpunkt B des in das Okular eintretenden Büschels liegt daher immer in unmittelbarer Nähe der gegenstandseitigen Brennebene des Okulars.

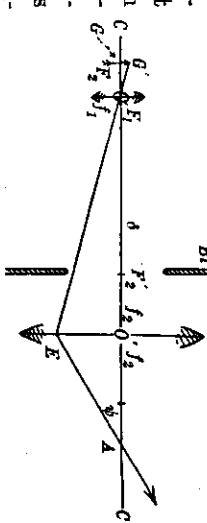


Fig. 888. Der Sehwinkel α , der durch das Mikroskop gesehenen Bilde.

Der Abstand δ der einander zugewandten Brennpunkte im Innern des Mikroskops, die optische Tubuslänge, ist stets groß (meist gegen 16 cm) gegenüber den Brennweiten von Okular und Objektiv (die höchstens einige Millimeter betragen). Der bildseitige Brennpunkt des gesamten Mikroskops ist das reelle Bild des bildseitigen Brennpunktes des Objektivs. Dieser letztere Brennpunkt aber, ebenso wie die Aperturblende, haben wegen der Größe der Tubuslänge gegenüber der Brennweite des Okulars „große“ und

zwar unter sich wenig verschiedenen große Abstände von dem gegenstandsseitigen Brennpunkte des Okulars. Ihre Bilder, also der bildseitige Brennpunkt des ganzen Mikroskopsystemes und die Austrittspupille A , liegen daher sehr nahe beieinander und zwar nahe beim bildseitigen Brennpunkte F_1 des Okulars. Wenn das am Orte der Austrittspupille A befindliche Auge daher das vom Mikroskope gelieferte Bild in der deutlichen Sehweite d sieht, so kann ohne merklichen Fehler — d zugleich als der Abstand x' des vom Mikroskope entworfenen Bildes vom bildseitigen Brennpunkte des Mikroskopes betrachtet werden.

Die Seitenvergrößerung eines abbildenden Systemes ist aber (§ 276, 4.) $w = -\frac{x'}{f'}$, worin f' die bildseitige Brennweite ist. Für ein aus zwei im selben Mittel liegenden optischen Systemen zusammengesetztes System berechnet sich nach § 278, 1 d. die bildseitige Brennweite zu $f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}$, worin f_1' und f_2' die beiden bildseitigen Brennweiten der Einzelsysteme sind und Δ der Abstand der einander zugewandten Brennpunkte ist. Damit wird ($\Delta = \delta$, $f_1' = f_1$, $f_2' = f_2$):

$$w = \frac{x' \cdot \delta}{f_1 f_2} = -\frac{\delta \cdot d}{f_1 f_2} \quad (\text{Abbe}).$$

Setzt man $d = \frac{1}{4} m$, rechnet man δ in m und die Brechkraft $D_1 = \frac{1}{f_1}$ und $D_2 = \frac{1}{f_2}$ in Dioptrien, so ist

$$w = -\frac{\delta}{4} \cdot D_1 \cdot D_2.$$

Bemerkung: In einfacher Weise folgt — vom Vorzeichen sei abgesehen — die Abbesche Formel für die Vergrößerung eines zusammengesetzten Mikroskopes aus der früher gemachten Bemerkung (§ 290, 3.), daß nach Gullstrand die optischen Instrumente meistens und am wirkungsvollsten mit nicht akkommodierten Augen (also Akkommodation Null Dioptr., s. o.) benutzt werden. Für eine Lupe, wir dürfen allgemein sagen für ein als Lupe benutztes abbildendes System, hatten wir früher (§ 290, 3.) gefunden $w = \frac{a_1}{f_1}$, worin a_1 herkömmlich gleich der deutlichen Sehweite gesetzt werden sollte. Nun ist die Brennweite eines aus zwei Systemen zusammengesetzten Systemes (§ 278, 1 d.) $f = \frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}$. Somit hätten wir $w = \frac{a_1 \cdot \Delta}{f_1 \cdot f_2}$ oder in der hier gewählten Bezeichnung

$$w = \frac{\delta \cdot d}{f_1 \cdot f_2}.$$

Betrachtet man das Mikroskop als eine Vereinigung von Projektionsapparat (Objektiv) und Lupe (Okular), so kann man diese Formel sich auch so entstanden denken: Ein Gegenstand der Größe y' wird durch das Projektionsobjektiv im Abstände δ in der Größe $y = -\frac{y'}{f_1} \cdot \delta$ abgebildet (§ 285, S. 842). Die Lupe vergrößert dieses Bild noch einmal im Verhältnisse $\frac{d}{f_2}$ (§ 290, 3.). Daher ist die Bildgröße $y'' = -y' \cdot \frac{\delta}{f_1} \cdot \frac{d}{f_2}$, also die Vergrößerung $w = \frac{y''}{y'} = -\frac{\delta \cdot d}{f_1 \cdot f_2}$.

Die Vergrößerung eines Mikroskopes ist proportional der deutlichen Sehweite des Beobachters und dem Abstände der einander benachbarten Brennpunkte der beiden Linsen; sie ist umgekehrt proportional dem Produkte der Brennweiten. Aus der unmittelbaren Anschauung der Fig. 888 und 889 ergibt sich, da die Sehwinkel ψ und φ auf entgegengesetzten Seiten der Achsen liegen, daß das mit dem Mikroskope beobachtete Bild somit eine zum Gegenstande umgekehrte Lage hat.

§ 300. Zusammengesetzte Objektive und Okulare.

1. Fernrohrobjektive. Bei der Berechnung der Wirkungsweise der optischen Instrumente haben wir angenommen, daß sowohl das Objektiv als auch das Okular immer nur aus einer einzelnen Linse besteht, deren Dicke vernachlässigt werden kann. In der tatsächlichen Anwendung hat man es aber stets mit aus mehreren Linsen zusammengesetzten Systemen zu tun. Als Objektiv eines Fernrohres verwendet man gewöhnlich ein System, das aus einer Sammellinse aus Kronglas und aus einer Zerstreuungslinse aus Flintglas zusammengesetzt ist (§ 307, 5.). Hierdurch erreicht man, daß die bei einfallenden Linsen auftretenden farbigen Ränder des Bildes verschwinden. Außerdem kann man durch geeignete Wahl der Krümmungshalbmesser die sphärische Aberration für die hochstärksten Strahlen aufheben.

2. Mikroskopobjektive. An die Objektive stark vergrößernder Mikroskope werden besonders hohe Anforderungen gestellt, damit das Bild weder farblich noch verzeichnet, trotzdem der Gegenstand durch weitgeöffnete Strahlenbündel abgebildet werden soll. Die Objektive der Mikroskope sind daher immer aus mehreren Linsen von verschiedenen Glassorten zusammengesetzt. Fig. 890 zeigt einen vergrößerten Schnitt durch ein sogenanntes zehnlinsiges Apochromatensystem.¹⁾

3. Feldlinse und Augenlinse. Auch die Okulare der Fernrohre und der Mikroskope bestehen aus zusammengesetzten Linsensystemen, durch welche die sphärische Aberration, der Astigmatismus, die Verzeichnung und die Farbabweichung (§ 307) vermindert werden sollen. Gewöhnlich bestehen die Okulare aus zwei Linsen, von denen die dem Gegenstande zunächst liegende (die Feldlinse oder das Kollektiv) eine ähnliche Aufgabe zu erfüllen hat, wie die Kondensorlinse des Projektionsapparates; sie soll alle zur Bilderzeugung beitragenden Strahlenbündel sammeln, so daß alles Licht in die Pupille des

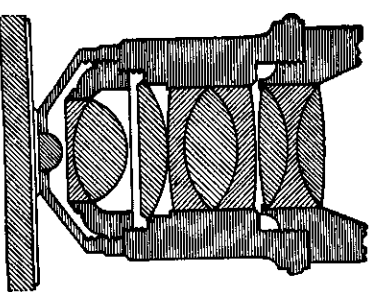


Fig. 890. Zehnlinsiges Mikroskopobjektiv; Apochromatensystem.

1) Ein Apochromat ist nach Abbe ein Mikroskopobjektiv, bei dem nicht nur die Farbenvermischung längs der Achse verbessert, sondern auch die chromatische Differenz der sphärischen Aberration für zwei Farben beseitigt ist.

beobachtenden Auges gelangt. Bei Abwesenheit einer anderen Gesichtsfeldblende ist die Fassung der Feldlinse für die Größe des Gesichtsfeldes maßgebend. Die andere Linse der Okulare ist die Augenlinse; sie ist besonders für die Vergrößerung maßgebend.

4. Huygenssches Okular. Das Huygenssche Okular (1703) (Fig. 891) besteht aus zwei Plankonverglinsen, deren erhabene Seiten dem Objektiv zugekehrt sind und deren Abstand gleich der halben Summe der Brennweiten der einzelnen Linsen ist. Die

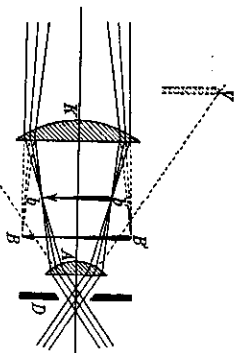


Fig. 891. Huygenssches Okular mit (großer) Feldlinse und (kleiner) Augenlinse.

größere Linse K (die Feldlinse (§ 307, 5)) steht so, daß sie von den vom Objektiv herkommenden Strahlen schon getroffen wird, ehe diese sich zu dem reellen Bilde BB' vereinigt haben; daher verlegt sie dieses Bild nach bb' . Die von hier aus ausgehenden Strahlen ver-

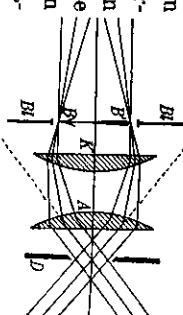


Fig. 892. Ramsdensches Okular mit gleichem oberer Feld- und Augenlinse.

den dann durch die kleinere Linse A (die Augenlinse) beim Fernrohre parallel gemacht; daher erscheint dem durch den Okulardeckel D schauenden Beobachter das Bild VV' im Unendlichen. Beim Beobachten mit geringer Akkommodationsanspannung behält das austretende Strahlenbüschel eine schwache Divergenz, wenn etwa dem Beobachter das virtuelle Bild VV' in der deutlichen Sehweite erscheint. Da das reelle Bild bb' im Innern des Okulars entsteht, so kann man ein Fadenkreuz oder ein Okularmikrometer nur hier anbringen, und das ist mit gewissen Unbequemlichkeiten verbunden. — Ist f_1' die Brennweite der Feldlinse, f_2' die Brennweite der Augenlinse, d der Abstand der Linsen und f_3 die Brennweite des Gesamtkulars, so gilt etwa $f_1' : f_2' : d : f_3 = 2 : 6 : 4 : 3$.

5. Ramsdensches Okular. Das Ramsdensche¹⁾ Okular (Fig. 892) besteht aus zwei einander gleichen Plankonverglinsen, die einander ihre gekrümmte Seite zukehren und deren Abstand etwa gleich der Brennweite jeder einzelnen Linse ist. Dieses Okular erhält eine solche Stellung, daß die vom Objektiv herkommenden Strahlen sich noch vor Eintritt in die Feldlinse vereinigen: das vom Objektiv erzeugte reelle Bild BB' des Gegenstandes liegt außerhalb des Okulars. Man kann demnach auf der an dieser Stelle angebrachten körperlichen Blende B ein Fadenkreuz oder ein Okularmikrometer anbringen, das mit dem Gegenstande gleichzeitig und an derselben Stelle

1) Jesse Ramsden (1735—1800), der Schwiegersonn und Geschäftsnachfolger von John Dollond (S. 891). Das Okular wurde 1783 angegeben.

abgebildet wird (§ 298). Beim Fernrohre treten die Strahlen parallel aus dem Okulare durch den Okulardeckel D ; daher erblickt ein Beobachter das Bild VV' im Unendlichen. — Ist f_1' die Brennweite der Feldlinse, f_2' die Brennweite der Augenlinse, d der Abstand der Linsen und f_3 die Brennweite des ganzen Okulars, so gilt also $f_1' : f_2' : d : f_3 = 1 : 1 : 1 : 1$. Auch beim Ramsdenschen Okular ist somit der Abstand d der beiden Linsen etwa gleich der halben Summe der beiden Einzelbrennweiten (§ 307, 5).

Das Huygenssche und das Ramsdensche Okular erzeugen beim Mikroskope reelle Bilder der Objektivlinse dicht hinter der Augenlinse, so daß man die Augenpupille in ihre Nähe bringen kann. Durch diese Austrittspupille des ganzen Mikroskopes wird dann wie durch ein Schlüsselloch (§ 293, 6) das im Unendlichen (in der deutlichen Sehweite) liegende Bild beobachtet. Man muß kleine Kopf- und Augenbewegungen machen, um seitliche Teile des Gesichtsfeldes zu sehen.

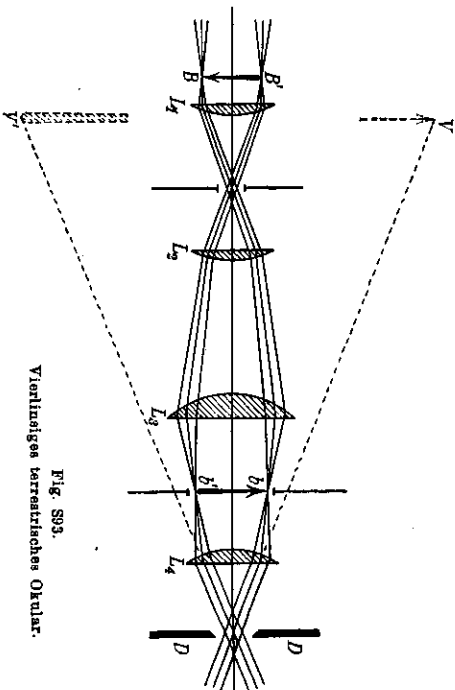


Fig. 893. Ventilatiges terrestrisches Okular.

6. Terrestrisches Okular. Das vierlingsige (§ 294) terrestrische Okular eines Fernrohres (Fig. 893) kann als ein zusammengesetztes Mikroskop aufgefaßt werden, das von dem vom Fernrohr-objektiv erzeugten reellen umgekehrten Bilde BB' ein zu diesem umgekehrtes Bild VV' erzeugt. Dieses ist demnach im Vergleiche zum Gegenstande aufrecht. Die beiden Linsen I_1 und I_2 zusammen bilden das Objektiv, die beiden Linsen I_3 und I_4 das Huygenssche Okular. Das aus den beiden Linsen I_1 und I_2 bestehende Objektiv erzeugt unter Mitwirkung der Feldlinse I_3 des Okulars das reelle Bild bb' , das zu dem vom Objektiv erzeugten reellen Bilde BB' umgekehrt, also zum Objekte aufrecht ist. Die Augenlinse I_4 des Okulars macht dann die von bb' weitergehenden Strahlen parallel, so daß demnach ein durch den Okulardeckel DD blickender Beobachter das aufrechte Bild VV' im Unendlichen sieht.

7. Neuere Okulare enthalten mehr als zwei Linsen. Dadurch erreicht man eine vollkommene Besehung der Bildfehler. Erwähnt seien die Okulare von Kellner aus drei Linsen, die aus vier Linsen zusammengesetzten orthoskopischen Okulare und das fünfinsige Okular von Erfle.

8. Die Helligkeit des Bildes, das ein optisches Instrument von einem Gegenstandspunkte erzeugt, ist durch die vom Gegenstandspunkte ausgehende

Lichtmenge bestimmt, die durch die Blenden und Linsen des optischen Instruments in das Auge des Beobachters eintritt. Sowohl beim Keplerschen und terrestrischen Fernrohr wie auch beim Mikroskop ist das Objektiv die Aperturblende (§ 299, 3), die die Menge der abbildenden Strahlen begrenzt. Dann beim Fernrohr alle Strahlen unter sehr kleinem Winkel zur Achse eintreten, so ist die Helligkeit des Bildes nur vom Durchmesser des Objektivs abhängig und demnach nur durch die aus praktischen Gründen beschränkte Größe des Objektivs (besonders auch durch den hohen Preis eines großen Objektivs) beschränkt (§ 296). Beim Mikroskop dagegen kann man den Objektivdurchmesser nicht beliebig vergrößern, da das Objektiv eines stark vergrößerten Mikroskops eine sehr kleine Brennweite haben muß, und da Linsen mit kleinerer Brennweite auch einen nur sehr kleinen Durchmesser haben können. Will man daher von einem unter einem Mikroskop liegenden Gegenstande möglichst viel Licht zur Abbildung ausnutzen, so muß man einen Strahlenkegel mit einem sehr weiten Öffnungswinkel in das Mikroskop leiten.

Ein mikroskopisches Objekt wird gewöhnlich auf einem aus einer parallelen Spiegelglasplatte bestehenden Objektträger in einem geeigneten Stoff, z. B. Kanadabalsam, eingebettet und dann mit einem dünnen Deckgläschen bedeckt. In Fig. 894 ist in vergrößertem Maßstabe die Lage eines

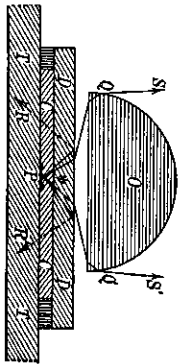


Fig. 894. Mikroskopisches Objekt mit Deckgläschen bei Trockensystemen.

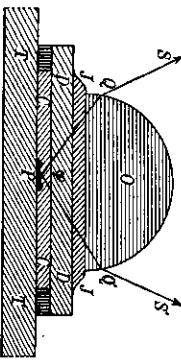


Fig. 895. Mikroskopisches Objekt mit Deckgläschen bei homogenem Immersionsverhältnis.

Objektes P zu der Frontlinse O eines Mikroskopobjektivs angedeutet. Es bedeuten TT den Objektträger, P das Objekt, CG die Einbettungsschicht, DD das Deckgläschen und O die halbkugelige Frontlinse des Objektivs, die vom Deckgläschen durch eine dünne Luftschicht getrennt ist. Von den Lichtstrahlen, die von P ausgehen, kann nur ein Strahlenbündel in die Luftschicht und demnach auch in das Objektiv eintreten, dessen gesamter Öffnungswinkel ψ kleiner ist als der doppelte Grenzwinkel der totalen Reflexion. Strahlen R , die außerhalb dieses Öffnungswinkels liegen, werden total reflektiert.

9. Immersionssysteme. Man vermeidet¹⁾ die totale Reflexion an der Luftschicht dadurch, indem man in den Zwischenraum zwischen dem Deckgläschen und der unteren Fläche der Frontlinse eine geeignete Flüssigkeit, z. B. Öl, bringt. Ein Objektivsystem eines Mikroskops, bei dessen Berechnung auf eine solche Ölschicht Rücksicht genommen ist, heißt ein Objektivsystem für Öl-Immersion.²⁾ Hat das Öl dasselbe Brechungsverhältnis wie das Deckgläs-

1) Nach Amici 1840.

2) immergère (lat.) = eintauchen.

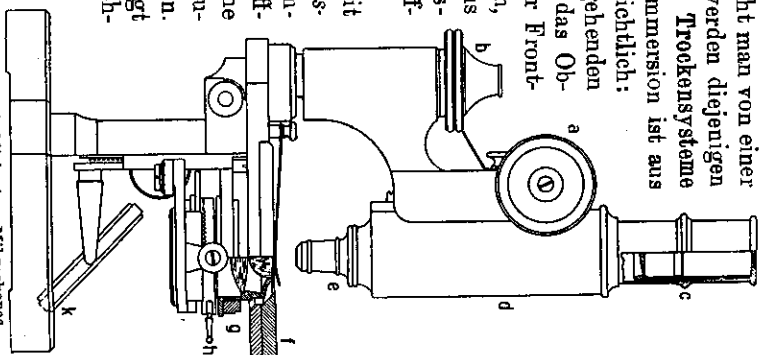
chen und die Frontlinse des Mikroskops, so spricht man von einer homogenen Immersion. Im Gegensatz hierzu werden diejenigen Systeme, die ohne Immersion benutzt werden, Trockensysteme genannt. Die Wirkungsweise der homogenen Öl-Immersion ist aus der schematischen Zeichnung von Fig. 895 ersichtlich: Der Öffnungswinkel φ des vom Objekte P ausgehenden Strahlenkegels ist nur dadurch beschränkt, daß das Objekt P nicht unmittelbar an der Unterfläche der Frontlinse liegen kann. Er kann fast 180° betragen, da die Strahlen von P aus bis zum Austritte aus der Frontlinse O geradlinig verlaufen. Bei Wasser-Immersionssystemen sind so große Öffnungswinkel nicht zu erreichen.

10. Auflösungskraft. Neben der Helligkeit wird auch die Auflösungskraft oder das Auflösungsvermögen (§ 296) des Mikroskops durch ein Immersionssystem infolge der Vergrößerung des Öffnungswinkels wesentlich vergrößert. Die Ursache hiervon kann aber erst nach Behandlung der Benutzungserscheinungen (§ 330) besprochen werden.

Die Helligkeit des Mikroskopbildes hängt natürlich wesentlich auch von der Art der Beleuchtung des Objektes ab. Da ein mikroskopisches Objekt nur klein ist, und da die abbildenden Strahlen mit großem Öffnungswinkel in das Objektiv auseinandertretend eintreten sollen, so wirken auch die beleuchtenden Strahlen im allgemeinen am günstigsten, wenn sie das Objekt stark konvergent treffen. Daher bringt man nach dem Vorschlage von Abbe unter dem Objektivischen des Mikroskops ein Linsensystem an, das die vom Beleuchtungsspiegel kommenden Lichtstrahlen konvergent macht.

11. Das vollständige Mikroskop. In Fig. 896 ist ein Mikroskop von gewöhnlicher Form abgebildet. Hierin bedeutet a den Trieb zum Heben und Senken des Tubus d , b die Schraube zur Feinjustierung, c das Okular, e das Objektiv, f den Mikroskopstisch, g den mehrinsigen Kondensator, h eine Irisblende, k den Beleuchtungsspiegel.

Fig. 896. Anblick eines Mikroskops gebrauchlicher Form.



§ 301. Dispersion des Lichtes.

Fällt ein durch eine kreisförmige Blende begrenztes Bündel paralleler Sonnenstrahlen in einem dunklen Zimmer auf einen weißen Schirm, so entsteht auf dem Schirme ein runder weißer Fleck.

Bringt man in den Strahlengang ein Glasprisma mit der brechenden Kante nach unten (Fig. 897 und Tafel I, Fig. 898), so daß die Strahlen das Prisma in symmetrischem Durchgange durchsetzen, so tritt außer der schon bekannten

Ablenkung des Strahlenbündels gleichzeitig eine fächerförmige Ausbreitung des gebrochenen Strahlenbündels ein; der weiße Fleck auf dem Schirme verschwindet, und statt seiner ent-

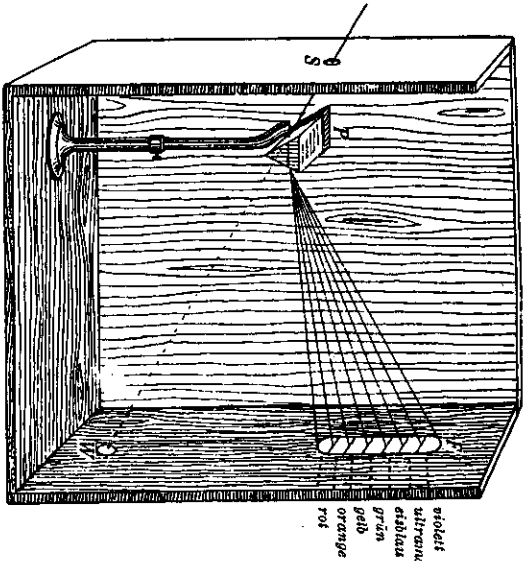


Fig. 897. Zerlegung weißen Lichtes.

steht oberhalb der ursprünglich beleuchteten, weißen Stelle ein Farbenband F , dessen oberes Ende violett und dessen unteres Ende rot ist. Zwischen den beiden äußersten Farben treten viele verschiedene Farben auf, deren Zahl wegen der allmählichen Übergänge nicht angebar ist; doch ist es (nach Newton) gebräuchlich, aus der großen Zahl die sieben Farben: rot, orange, gelb, grün, eisblau, ultramarin, violett hervorzuheben. Diese Farben heißen auch Regenbogenfarben. Das ganze Farbenband wird **Spektrum** genannt.¹⁾

Die Hervorhebung der „sieben“ Grundfarben im Spektrum entspringt dem Bestreben Newtons, die Ausdehnung des Spektrums mit einer akustischen Oktave zu vergleichen. Betrachtet man aber das Spektrum unvorhergenommen, so fällt auf, daß über beträchtlich große Abschnitte an den Enden des spektralen Farbbandes hin die Empfindung „Rot“ und „Blau“ sich nicht merklich ändert. Die Farben „Orange“ und „Gelb“ erweisen sich ferner auf äußerst kleine Bereiche im Vergleich zur ganzen Länge des Spektrums beschränkt. Hingegen nimmt die Farbenempfindung „Grün“ oder besser „Gelbgrün“ zwischen Rot und Blauviolett den bei weitem größten Abschnitt von dem noch übrigen Teile in der Mitte ein. Zusammenfassend können wir also sagen, daß uns das spektrale Farbband im wesentlichen in drei Abschnitten erscheint, nämlich Rot, Gelbgrün und Blauviolett. Zwischen diesen Farben sind dann für unsere Empfindung die anderen Übergangsfarben als im Verhältnis zum ganzen Spektrum schmale Anteile eingeschaltet. — Versuche haben ergeben, daß wir im Spektrum etwa 160 verschiedene Farbenempfindungen voneinander zu unterscheiden vermögen.

Bläst man in den Gang des abgelenkten Strahlenfächers Rauch, um den ganzen Verlauf des Farbbandes in der Luft sichtbar zu machen, so beobachtet man, daß unmittelbar hinter dem Prisma nur die äußersten Ränder des Strahlenfächers gefärbt sind, und daß die Mitte rein weiß ist, daß aber die Farben um so klarer hervortreten, je weiter entfernt vom Prisma der Strahlenfächer untersucht wird.

Man erkennt ferner, daß der violette Teil des Strahlenfächers am stärksten, der rote Teil am schwächsten durch das Prisma abgelenkt ist.

1) spectrum (lat.) = Erscheinung, Geoparat.

Wie Newton zuerst (1704) nachgewiesen hat, ist das weiße Sonnenlicht kein einfaches Licht; sondern es ist aus den verschiedenfarbigen Strahlen des Spektrums zusammengesetzt. Es findet eine Zerlegung oder **Dispersion**¹⁾ des zusammengesetzten Lichtes

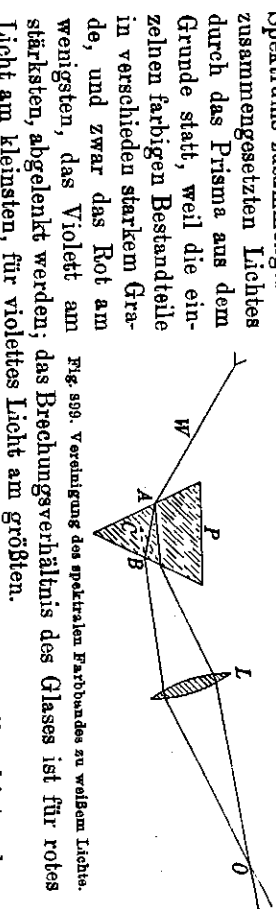


Fig. 898. Vereinigung des spektralen Farbbandes zu weißem Licht.

durch das Prisma aus dem Grunde statt, weil die einzelnen farbigen Bestandteile in verschieden starkem Grade, und zwar das Rot am wenigsten, das Violett am stärksten, abgelenkt werden; das Brechungsverhältnis des Glases ist für rotes Licht am kleinsten, für violettes Licht am größten.

Dadurch erklärt sich auch die Erscheinung, daß unmittelbar hinter dem Prisma nur die Ränder des Strahlenbündels gefärbt sind, während die Mitte noch weiß ist. In der Mitte des Strahlenbündels sind nämlich die einzelnen Teile noch nicht völlig getrennt, vielmehr durchkreuzen sich hier noch die verschiedenen Teile verschiedener Strahlen und erzeugen so das weiße Licht. Durch Vereinigung der einzelnen farbigen Bestandteile des Farbbandes kann man wieder Weiß erzeugen. Läßt man zu dem Zwecke die farbigen Strahlen auf eine Reihe kleiner Spiegel fallen, die so gedreht werden, daß die reflektierten farbigen Strahlen denselben Fleck eines weißen Schirmes gleichzeitig beleuchten, so erscheint dieser Fleck weiß.

Die Vereinigung kann auch durch einen großen Hohlspiegel oder durch eine große Sammellinse bewerkstelligt werden. Die Vereinigung durch eine große Sammellinse L nach Fig. 899 und Tafel I, Fig. 900 ist besonders lehrreich; sie zeigt, daß tatsächlich die Vereinigungsstelle O der Strahlen weiß ist, daß aber jenseits der Vereinigungsstelle die Strahlen wieder dispergieren, und zwar in einer Anordnung, die der Anordnung der Farben vor der Vereinigungsstelle entgegengesetzt ist.

Unmittelbar hinter dem Prisma findet noch keine vollständige Trennung der einzelnen farbigen Strahlen statt. Die Trennung ist um so vollständiger, je weiter entfernt vom Prisma das Spektrum aufgefangen wird, und je schmäler das auf das Prisma auftretende Strahlenbündel ist. Wollte man auf diesem Wege die Trennung möglichst vollständig machen, so würde das Spektrum sehr bald zu Lichtschwach werden.

§ 303. Das reine Spektrum, Spektralapparat.

Durch folgende, von Fraunhofer²⁾ zuerst angegebene Anordnung kann man das Spektrum rein erhalten, ohne seine Lichtstärke zu gering zu machen

1) dispersive (lat.) = zerstreuen.

2) Jos. von Fraunhofer (1787—1826), Schöpfer der deutschen Präzisionstechnik, bedeutender Optiker, von 1823 an Professor in München, besonders berümt durch die Entdeckung der Spektrallinien, seine Arbeiten über Beugung und seine Verbesserungen an den Fernrohren.

Grimehrt, Physik. I. Große Ausgabe. 6. Aufl.

(Fig. 901 und Tafel I, Fig. 902). Durch den schmalen Spalt S , der von links aus möglichst hell durch Sonnenlicht beleuchtet wird, fallen die Lichtstrahlen auf die Sammellinse L . Sie werden durch diese konvergent gemacht und vereinigen sich im Punkte B zu einem rechten Bilde des Spaltes, das entweder

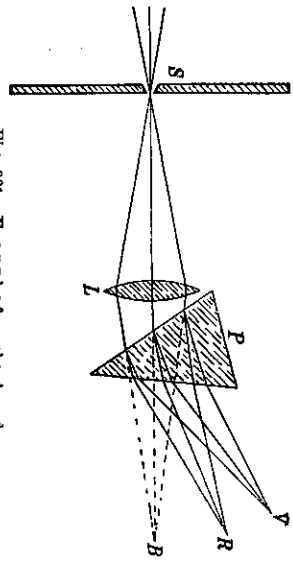


Fig. 901. Fraunhoferische Anordnung.

auf einem weißen Schirme ausgefangen oder auch von rechts aus mit bloßem Auge oder durch eine Lupe betrachtet wird. Unmittelbar hinter der Linse wird das Prisma P so aufgestellt, daß seine brechende Kante dem Spalte parallel ist. Jedes Strahlenbündel, das im Punkte B vereinigt werden würde, wenn das Prisma nicht vorhanden wäre, erfährt durch dieses eine Ablenkung und eine Zerlegung (Dispersion). In der Figur sind nur die begrenzenden violetten und roten Strahlen gezeichnet. Alle roten Strahlen werden jetzt zu einem Bilde R , alle violetten Strahlen zu einem Bilde V und ebenso alle übrigen Farbenstrahlen zu Bildern vereinigt, die zwischen R und V liegen. So kommt ein auf einem Schirme auffangbares Spektrum zustande, das seiner Entstehung nach aus aufeinanderfolgenden einzelnen farbigen Bildern des Spaltes besteht.

Wenn man statt des geradlinigen Spaltes S einen Spalt von irgendeiner anderen Form verwendet, so haben auch die einzelnen Teilbilder des Spektrums die veränderte Gestalt des Spaltes.

Vollkommener noch ist die ebenfalls von Fraunhofer angegebene, durch Fig. 903 und Tafel I, Fig. 904 dargestellte Anordnung: In den Gang der aus dem Spalte S austretenden Lichtstrahlen wird die Sammellinse C (die Kollimatorlinse) so gestellt, daß die Strahlen parallel austreten; der Spalt S liegt

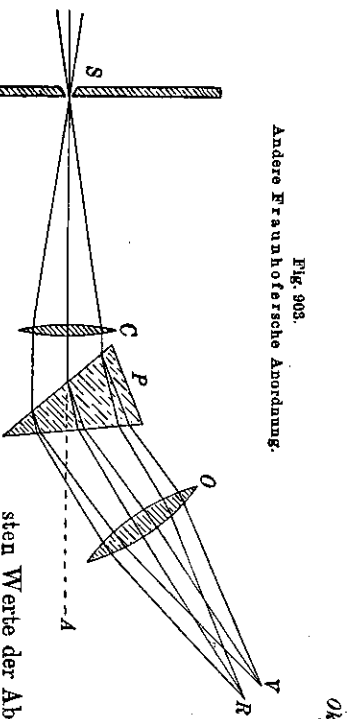


Fig. 903. Andere Fraunhoferische Anordnung.

also in der Brennebene der Linse C . Unmittelbar hinter C wird das Prisma P so angeordnet, daß die parallelen Strahlen das Prisma in symmetrischem Durchgange, also mit dem kleinsten Werte der Ablenkung, durchsetzen.

Nachdem die Strahlen durch das Prisma abgelenkt und zerstreut worden sind, wieder auf eine Sammellinse O , die jedes System paralleler Licht-

strahlen in ihrer Brennebene zu einem Bilde des Spaltes vereinigt. Die einzelnen Spaltbilder sind dann wieder zu einem reinen Spektrum angeordnet. Der Vorteil dieser Anordnung liegt darin, daß alle gleichfarbigen Strahlen das Prisma unter denselben Bedingungen durchlaufen, also auch dieselbe Ablenkung und Zerstreung erfahren, während bei der Anordnung von Fig. 901 und Tafel I, Fig. 902 die einzelnen Strahlen das Prisma konvergent, also unter verschiedenen Winkeln, durchlaufen.

Man kann bei der Ausführung der Versuche nach Fig. 901—904 das Spektrum auf einem weißen Schirme auffangen, also objektiv darstellen. Man kann aber auch hinter dem Spektrum VR eine Sammellinse Ok aufstellen und durch diese, wie durch eine Lupe, das Spektrum subjektiv beobachten. Man muß die subjektive Beobachtung dann ausführen, wenn die Beleuchtung des Spaltes so lichtschwach ist, daß eine objektive Vorführung ausgeschlossen ist.

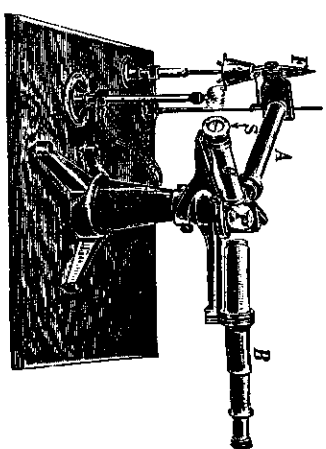


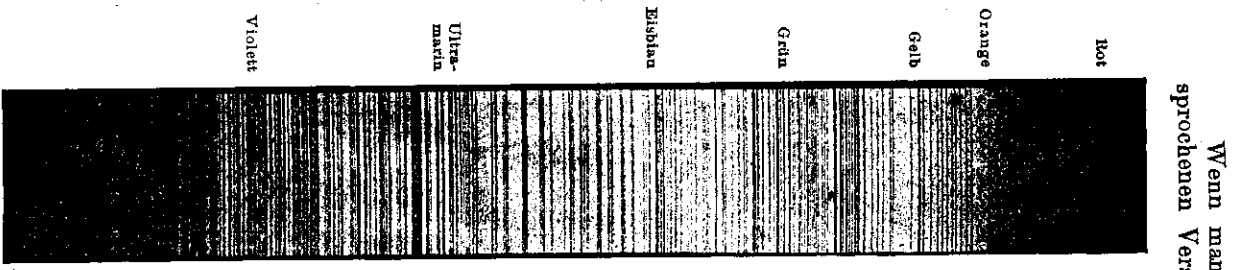
Fig. 905. Spektroskop von Kirchhoff und Bunsen.

Die beiden Linsen O und Ok sind die beiden Bestandteile: Objektiv und Okular eines einfachen Keplersehen Fernrohres. Vereinigt man diese Bestandteile der Versuchsanordnung zu einem einheitlichen Apparat, so erhält man den zuerst von Kirchhoff¹⁾ und Bunsen gebauten Spektroskopapparat, von dem Fig. 905 eine perspektivische Ansicht gibt.

Auf einem festen Standfüße steht das dreiseitige Prisma P . Der einen Prismenfläche steht das Kollimatorrohr A gegenüber, das an dem dem Prisma zugekehrten Ende eine Sammellinse (die Kollimatorlinse), am entfernten Ende im Abstände der Brennweite von ihr einen durch eine Mikrometerschraube verstellbaren Spalt trägt. Der anderen Prismenfläche steht das auf Unendlich eingestellte Fernrohr B gegenüber. Bei richtiger Einstellung geht das Licht einer vor dem Spalte aufgestellten Flamme oder des Sonnenlicht durch den Spalt und wird durch die Kollimatorlinse parallel gemacht; dann wird es durch das Prisma P abgelenkt und zerlegt und tritt durch das Fernrohr B in das Auge des Beobachters. Meistens ist noch ein drittes Rohr, das Skalenlinse C , vorhanden, das an dem dem Prisma zugewandten Ende eine Sammellinse und an dem abgewandten Ende eine mikrometrische Skala enthält. Das Skalenrohr ist so betrieft, daß die Strahlen, die von der beleuchteten Skala ausgehen, an der Vorderfläche des Prismas reflektiert werden und dann in das Beobachtungsfernrohr gelangen. Der Beobachter sieht demnach das Spektrum und die Skala übereinander und kann so die Lage der einzelnen Teile des Spektrums messend verfolgen.

1) R. Kirchhoff (1824—1887), seit 1854 Prof. d. Physik in Heidelberg, seit 1875 in Berlin.

§ 303. Die Fraunhofer'schen Linien.



Wenn man das Spektrum des Sonnenlichtes nach einer der eben besprochenen Versuchsanordnungen bei scharfer Einstellung der Linsen genau untersucht, so beobachtet man, daß das Spektrum von einer großen Zahl dunkler Linien durchsetzt wird, die der Richtung des Spaltes parallel sind. Man beobachtet ferner, daß diese Linien eine unveränderliche Lage haben, einerlei unter welchen Bedingungen das Sonnenlicht, ob als direktes Sonnenlicht oder als diffuses Tageslicht, den Spalt beleuchtet. Die Linien wurden 1814 von Fraunhofer entdeckt; er selbst beobachtete bereits gegen 600. Die stärksten Linien werden nach Fraunhofer mit den Buchstaben *A* (dunkelrot), *B* (hellrot), *C* (orange), *D* (gelb), *E* (grün), *F* (eisblau), *G* (ultramarin), *H* (violett) bezeichnet (Fig. 906, Tafel I). Die Linien *A*, sowie *G*, *H*, *I* sind nur in sehr lichtstarken Spektren sichtbar, während die Linie *D* in den hellsten Teilen des Spektrums am leichtesten zu beobachten ist. Fig. 907 ist eine Nachbildung der von Fraunhofer angeführten Zeichnung dieser Linien. Auf Taf. I ist das Spektrum mit seinen Hauptlinien farbig ausgeführt. Die Linien dienen uns auch heute noch zur sicheren Orientierung im Spektrum. Mit Vervollkommnung der optischen Hilfsmittel ist die Zahl der beobachteten Fraunhofer'schen Linien auf viele Tausend angewachsen.

Untersucht man mit dem Spektroskop die Glühbirne, das ein glühender fester Körper ausstrahlt, z. B. das Licht einer elektrischen Glühlampe oder Bogenlampe, das Licht einer Kerze oder einer Leuchtgasflamme, so findet man darin keine dunklen Linien: das Spektrum ist *kontinuierlich*.¹⁾

Das von glühenden Gasen ausgesandte Licht bringt ein nur aus einzelnen hellen Linien bestehendes *diskontinuierliches* Spektrum hervor, das daher *Linienpektrum* heißt. Näheres siehe § 309.

§ 304. Mischfarben, Komplementärfarben.

Nur wenn alle Teile des spektralen Strahlenfächers wieder vereinigt werden, entsteht weißes Licht. Wenn dagegen vor der Vereinigung einige Teile durch eingeschaltete Schirme abgeblendet oder durch ein eingeschaltetes

§ 303. Die Fraunhofer'schen Linien. § 304. Mischfarben, Komplementärfarben 885
schmales Prisma seitlich abgelenkt werden, so vereinigt sich der Rest des Strahlenfächers zu einer besonderen Mischfarbe.

In Fig. 908 und Tafel I, Fig. 909 ist die Versuchsanordnung schematisch abgebildet, durch die ein reines Spektrum zu Weiß vereinigt wird. Die Linse *L* würde die durch den Spalt *S* eintretenden Strahlen ohne das dazwischen geschaltete Prisma *P* in *B* zu einem reellen Spaltbilde vereinigen. Durch das Prisma *P* wird jeder einzelne Strahl abgelenkt und zerstreut. So kommt das reine Spektrum in *C* zustande. Schaltet man nun hier eine Sammellinse ein, deren Brennpunkt etwa halb so groß ist wie die Entfernung von *C* nach der Vorderfläche *F* des Prismas *P*, so vereinigt die Linse die von jedem Punkte der

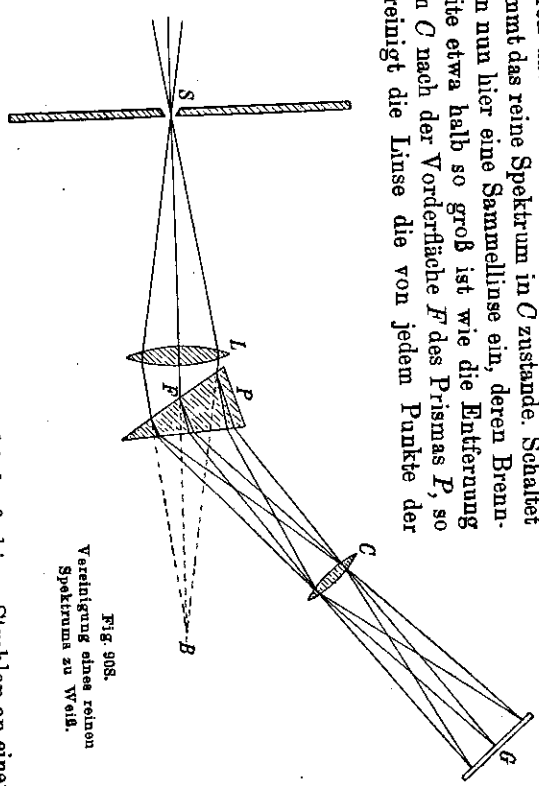


Fig. 908. Vereinigung eines reinen Spektrums zu Weiß.

Vorderfläche auseinanderlaufenden verschiedenfarbigen Strahlen an einer Stelle *G* hinter der Linse, deren Abstand wieder gleich der doppelten Brennweite von *C* ist: es entsteht ein reelles, umgekehrtes, farbloses Bild der Fläche *F* in *G*. Da die von *F* ausgehenden Strahlen nur in der Ebene des Prismenschnittes auseinanderlaufen, aber nicht in Ebenen parallel zur brechenden Kante des Prismas, so kann die Linse *C* eine Zylinderlinse sein, deren Zylinderflächen zur Ebene der Fig. 908 und 909 senkrecht stehen.

Wenn man nun unmittelbar vor *C* ein schmales Prisma *K* mit kleinem brechenden Winkel einschaltet (in Fig. 910 auf Tafel I ist der Teil der Fig. 902 und Fig. 909, der rechts vom Prisma liegt, noch vergrößert dargestellt), so werden dadurch z. B. die grünen Strahlen seitlich abgelenkt. Es entsteht dann neben dem ursprünglich weißen Bilde der Fläche *F*, die nun aber gefärbt erscheint, ein von den grünen Strahlen allein herrührendes grünes Bild der Fläche *F*. Das ursprünglich weiße Bild der Fläche *F* erscheint nunmehr in der aus dem Restbetrage des Spektrums entstehenden Mischfarbe Rot. Solche Mischfarben haben für unsere Empfindung im allgemeinen dieselben Farbwerte, wie wir sie auch im Spektrum finden. Als einzige Mischfarbe, die im Spektrum nicht vorkommt, treten durch Mischen von Rot und Violett die Purpurtöne auf.

1) *continuus* (lat.) = zusammenhängend.

In der geschilderten Weise kann man durch Verschieben des schmalen Prismas K längs des reinen Spektrums jeden Teil der Strahlen seitlich ablenken. Das Ergebnis ist:

abgelenkter Teil	rot	orange	gelb	grün	eisblau	ultramarinblau	violett
Mischfarbe des Restes	blaugrün	eisblau	ultramarinblau	purpur	orange	gelb	grün-gelb

Wenn man den abgelenkten Teil mit der Mischfarbe des Restes wieder vereinigt, so erhält man natürlich wieder Weiß. Je zwei in der Tabelle übereinanderstehende Farben ergänzen sich zu Weiß; daher heißen die Farben paarweise Ergänzungsfarben oder Komplementärfarben.¹⁾

Trotz der gleichen Empfindungswerte verhalten sich die reinen Spektralfarben in der oberen Reihe der Tabelle physikalisch verschieden von den Mischfarben der unteren Reihe. Wenn man nämlich den das Bild auffangenden Schirm nicht in dem Konvergenzgebiete G aufstellt, sondern weiter entfernt, so tritt wieder ein Zerfall in die einzelnen Bestandteile ein.

Es gelingt auch, einzelne Teile des gesamten Spektrums paarweise zu Weiß zu vereinigen. Diese Teile sind dann reine Ergänzungsfarben. Sie ordnen sich paarweise genau wie in der obigen Tabelle. Das Weiß aber, das durch die Vereinigung von nur zwei reinen Ergänzungsfarben entsteht, ist physikalisch nicht identisch mit dem Weiß des Sonnenlichtes; denn eine Zerlegung durch ein Prisma oder einen Spektralapparat bringt wieder nur die beiden ursprünglichen Farbenteile, nicht das ganze Spektrum hervor.

Eine Farbe kann also in mannigfacher Weise zustande kommen; das Auge vermag diese Verschiedenheit nicht zu entdecken, es kann die Farben nicht analysieren, wie das getübte Ohr einen Klang analysieren kann. Aus diesem Grunde ist der Spektralapparat einer der wichtigsten optischen Apparate, da er uns fehlerlos die Zusammensetzung des Lichtes verrät.

Newton führte die Vereinigung oder Mischung einzelner Farben mit dem Farbenkreis²⁾ aus. Wenn man nämlich einen Kreis sektorenweise mit Farben bemalt, die den Spektralfarben entsprechen, so erhält man bei der raschen Umdrehung des Kreises den Eindruck von schmutzigem Weiß oder Grau. Wir vermögen die einzelnen Farben nicht mehr getrennt zu unterscheiden, sondern erhalten denselben Eindruck, als ob die Farben gemischt wären (additive Farbmischung). Daß das erzeugte Weiß kein reines Weiß ist, hat seine Ursache zum Teile darin, daß es unumgänglich ist, alle Farben in genau denselben Farbwerten und in derselben Anordnung auf den Kreis zu malen, wie sie das Spektrum bietet, zum Teil darin, daß ja der Farbenkreis nicht so viel Licht aussendet, als er aussenden würde, wenn die ganze Fläche rein weiß wäre.

Die Mischung der Ergänzungsfarben kann ebenfalls mit einem Newtonschen Farbenkreis ausgeführt werden.

1) *compléaire* (lat.) = anfüllen, vollständig machen.

2) Der Versuch war schon dem Claudius Ptolemäios (150 n. Chr.) bekannt.

§ 305. Körperfarben.

Etwas wesentlich Verschiedenes von dem physikalischen Begriffe der Spektralfarben sind die Körperfarben oder die Pigmente.¹⁾ Ein rotes Stück Tuch kann unserem Auge nur dadurch rot erscheinen, daß es in bezugungem Maße rotes Licht aussendet. Da das Tuch selbst aber keine Lichtquelle ist, so muß es Licht zurückstrahlen, das von einer Lichtquelle kommt, die selbst rotes Licht enthält. Daher erscheint uns das rote Tuch sowohl im Tageslichte als auch bei gewöhnlichem Lampenlichte rot. Bringen wir aber das rote Tuch in das objektive Spektrum des Sonnenlichtes, so erscheint es nur in dem roten Teile des Spektrums rot, dagegen in den übrigen Teilen des Spektrums schwarz, sofern es eben nur rotes Licht zurückstrahlt. Meist ist aber das rot aussehende Tuch nicht einfarbig; dann strahlt es außer dem roten Lichte auch noch anders gefärbte Lichtstrahlen zurück, wenn auch schwächer. Hält man ein größeres Stück gefärbten Tuches in das ganze Spektrum, so überblickt man mit einem Male, welche Teile des Spektrums von dem Tuche verschluckt (absorbiert), welche zurückgestrahlt werden. Man erkennt dann leicht, daß Körperfarben, die dem Auge gleichfärbig erscheinen, oft ganz verschiedene Teile des Spektrums, manchmal nur schmale Gebiete, mit verschiedener Stärke zurückwerfen bzw. verschlucken.

Hält man in den Gang der Strahlen, die durch einen Spektralapparat hindurchgehen, oder an irgendeiner Stelle des Strahlenganges von Fig. 901 oder 903 ein färbiges Glas, so verschwindet aus dem Spektrum ein Teil mehr oder weniger vollständig; das färbige Glas verschluckt einen Teil der Spektralfarben, ein anderer Teil wird hindurchgelassen. Das Gemisch des hindurchgelassenen Teiles der Spektralfarben erzeugt in unserem Auge den Eindruck der Körperfarbe des gefärbten Glases. Das durch Absorption des Lichtes in dem färbigen Körper veränderte Spektrum heißt das Absorptionsspektrum des Körpers. Aus dem Absorptionsspektrum eines Körpers kann man oft erkennen, welche Farbstoffe in einem gefärbten Körper enthalten sind.

Auf Tafel II ist unter den Linienspektren der Figur 918 das kennzeichnende Absorptionsspektrum des seltenen Elementes Neodym abgebildet, das es in den meisten seiner Verbindungen zeigt.

Wir machen also die Erfahrung: Die Körperfarbe eines Pigmentes wird wesentlich bestimmt durch die beim Durchgange des Lichtes durch den Körper absorbierte Farbgebiete. Buntgläser, gefärbte Wolle usw. sehen rot aus, wenn von dem auffallenden weißen Lichte das zu dem Rot ergänzende Blau-grün mehr oder weniger stark verschluckt wird; ebenso entstehen blaugefärbte Pigmente durch Absorption von gelb und umgekehrt. Im reflektierten Lichte sehen die Pigmentfarben manchmal anders aus; Fuchsin-kristalle und eingetrocknete rote Tinte schimmern grün. Dieses Verhalten beruht darauf, daß die stark absorbierten Farbgebiete auch eine bevorzugte Reflexion erfahren.

1) *pigmentum* (lat.) = Färbstoff.

Gemischte Pigmente. Durch Vermischen von blauem und gelbem Pigment (z. B. Ölfarben oder Wasserfarben) entsteht meist ein grünes Pigment, nicht aber, wie man nach dem Verhalten der Spektralfarben erwarten sollte, die Farbe Weiß. Die Ursache für diese Abweichung ist folgende: Die gelben Pigmente halten fast alle Spektralfarben zurück, die dem blauen Ende des Spektrums angehören, dagegen lassen sie die dem roten Ende des Spektrums angehörenden Strahlen (von grün an) durch oder werfen sie zurück. Die blauen Pigmente verschlucken alle Strahlen, die dem roten Ende des Spektrums angehören, dagegen lassen sie die dem blauen Ende des Spektrums angehörenden Strahlen (ebenfalls von grün an) durch oder werfen sie zurück. Lagern nun in einem Pigmentgemische beide Pigmente dicht neben- und übereinander, so fällt das von einem blauen Pigmentteile zurückgeworfene oder durchgelassene Strahlengemisch: Grün, Blau und Violett auf ein benachbartes gelbes Pigmentteilchen; dieses aber verschluckt von dem Strahlengemische die blauen und violetten Strahlen; daher verlassen nur die grünen Strahlen das Gemisch ohne Veränderung. Die grüne Farbe des Pigmentgemisches ist um so satter, je inniger die Mischung der einzelnen Pigmentfarben erfolgt; denn nur in diesem Falle müssen die auftallenden Strahlen beide Arten der Pigmentfarben nacheinander und wiederholt treffen, und erst hierdurch tritt eine vollständige Absorption aller Strahlen mit Ausnahme des Grün ein. Die grüne Farbe ist aber niemals so leuchtend hell wie bei einer Pigmentfarbe, welche ohne Mischung schon grün aussieht; denn das gelbe und blaue Pigment der Mischung verschlucken stets auch einen Teil des grünen Lichtes, während bei einer einheitlichen grünen Pigmentfarbe der grüne Anteil des auffallenden weißen Lichtes ziemlich ungeschwächt bleiben kann.

Man nennt die durch wiederholte Absorption der Strahlen in zwei oder mehreren Pigmenten entstandenen Farben Differenzfarben. Durch Vereinigung mehrerer Spektralfarben entsteht die Summationsfarbe.

Die Differenzfarbe der beiden Pigmente Blau und Gelb ist Grün: die Summationsfarbe der beiden Spektralfarben Blau und Gelb ist Weiß.

§ 306. Maß der Dispersion.

Die Entstehung des Spektrums ist auf die Verschiedenheit der Brechungsverhältnisse für die verschiedenen Strahlen des Spektrums zurückzuführen. Das Brechungsverhältnis ist einmal abhängig von dem brechenden Stoff, ein andermal von der Farbe der Strahlen. In Tabelle XVII sind die Brechungsverhältnisse einiger brechenden Stoffe für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien angegeben.

Nach S. 790 ist die Ablenkung δ für kleine brechende Winkel ϵ eines Prismas durch die Gleichung $\delta = (n - 1)\epsilon$ bestimmt. Unter Benutzung dieser Gleichung kann man mit Hilfe der in Tabelle XVII angegebenen Werte von n die Größe der Ablenkung für die einzelnen Strahlenarten bei einem gegebenen brechenden Winkel des Prismas berechnen und daher auch das ganze Spek-

trum entwerfen. Das ist in Fig. 911 für gleiche brechende Winkel der Prismen aus den vier verschiedenen Stoffen: Wasser, Kronglas, Flintglas und Schwefelkohlenstoff ausgeführt; die Spektren sind so übereinander gezeichnet, daß die Linie C in allen vier Spektren an derselben Stelle liegt. Man erkennt, daß die Länge des Spektrums je nach der Art des brechenden Stoffes des Prismas verschieden ist.

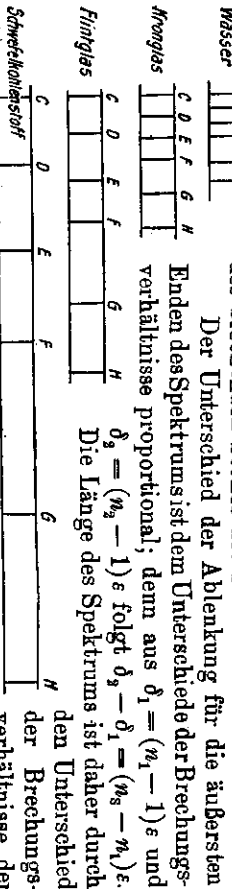


Fig. 911. Länge der Spektren unter sonst gleichen Umständen.

des Spektrums bestimmt. Da die äußersten Enden des Spektrums, besonders das violette Ende, sehr Lichtschwach sind, so berücksichtigt man bei der Berechnung der Länge des Spektrums diese nur zwischen den Linien H und C. Man nennt den Unterschied der Brechungsverhältnisse eines Stoffes für die Linien H und C die spezifische Dispersion ϕ . Es ist $\phi = n_H - n_C$. Diese Größe ist in Tabelle XVII in der letzten Spalte angegeben. Die Differenz der Brechungsverhältnisse für irgendwelche andere Fraunhofer'sche Linien wird die dem betreffenden Gebiete zukommende partielle Dispersion genannt. Die Dispersion für die lichtstärksten Teile des Spektrums zwischen den Linien C und F wird auch wohl mittlere Dispersion genannt. Das Verhältnis dieser Differenz $n_H - n_C$ zu dem um 1 verminderten Brechungsverhältnisse für die D-Linie ist die relative Dispersion der brechenden Substanz. Um übersichtliche Zahlen zu erhalten, pflegt man nach Abbe ihren reziproken Wert anzugeben und ihn zu bezeichnen durch

$$v = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

Die gesamte Dispersion eines Prismas mit dem kleinen brechenden Winkel ϵ ist $\Theta = \phi \cdot \epsilon$.

Die in Tab. XVII für leichtes Kronglas und für schweres Flintglas angegebenen Werte der Brechungsverhältnisse gelten für zwei Glassorten, von denen die erste eine sehr geringe, die zweite eine sehr große spezifische Dispersion besitzt. Sie können nur als Beispiele dienen; es gibt heute eine große Anzahl von Glassorten mit den verschiedensten optischen Eigenschaften. Die im nächsten Paragraphen gewählten Beispiele stimmen mit den in der Tabelle angegebenen Sorten nicht überein; die dort gewählten Beispiele gelten für solche Glassorten, wie sie gewöhnlich für die in Frage kommenden Prismen und Linsen benutzt werden.

§ 307. Das achromatische¹⁾ Prisma, die achromatische Linse.

1. Achromatisches Prisma. Die Ablenkung δ_0 für die Fraunhofer'sche Linie C und die gesamte Dispersion Θ beträgt bei einem Prisma mit dem brechenden Winkel ϵ aus

$$\begin{aligned} \text{gewöhnlichem Kronenglas } \delta_0 &= 0,5160 \epsilon & \Theta &= 0,0089 \epsilon \\ \text{gewöhnlichem Flintglas } \delta_0 &= 0,6144 \epsilon & \Theta &= 0,0171 \epsilon. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß zwei Prismen aus Kronenglas und aus Flintglas mit denselben brechenden Winkeln nahezu gleiche Ablenkung erzeugen, daß aber die Dispersion, also auch die Länge des erzeugten Spektrums, bei Flintglas annähernd doppelt so groß ist wie bei Kronenglas. Andererseits kann man aus den beiden Glassorten Prismen mit gleicher Dispersion erzeugen; ihre brechenden Winkel müssen sich umgekehrt wie die

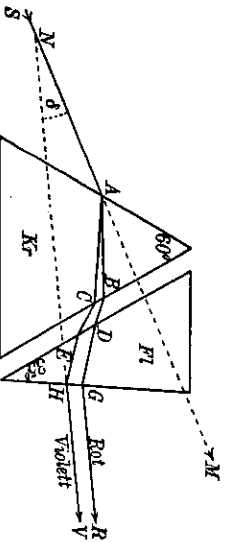


Fig. 912. Achromatisches Prisma.

sie ihre brechenden Kanten nach entgegengesetzten Richtungen kehren, so entsteht ein zusammengesetztes Prisma, das die Lichtstrahlen annähernd ohne Farbenzerstreuung ablenkt. Ein solches Prisma heißt ein achromatisches Prisma. In Fig. 912 ist ein achromatisches Prisma abgebildet, das aus einem Kronenglasprisma mit einem brechenden Winkel von 60° und einem Flintglasprisma mit einem brechenden Winkel von 35° zusammengesetzt ist. Ein von links auf das Kronglasprisma fallender Strahl wird beim Eintritt in das Prisma in einen Farbfächer zerlegt, dessen äußerste Grenzen AB (rot) und AC (violett) angegeben sind. Die Zerstreuung wird dann durch das Flintglasprisma aufgehoben, und die beiden Strahlen GR (rot) und HV (violett) treten parallel zueinander und um den Winkel δ gegen die ursprüngliche Strahlenrichtung abgelenkt aus. Wenn statt eines Strahles ein ganzes Strahlenbündel von S aus auf das Prisma tritt, so vereinigen sich alle parallel austretenden farbigen Komponenten wieder zu Weiß (mit Ausnahme der äußersten schmalen Randpartien, die aber abgeblendet werden können).

2. Achromatische Linse. Die Wirkungsweise der Linsen haben wir erklärt (§ 271, 3.), indem wir sie als aus schmalen Prismen zusammengesetzt ansahen. Daraus folgt, daß auch Linsenkombinationen aus Kronenglas und Flintglas möglich sind, die sich in bezug auf ihre Ablenkung wie einfache Linsen verhalten, die aber keine Farbenzerstreuung zeigen. Solche Linsenkombina-

1) $\chi\rho\mu\alpha$ (griech.) = Farbe; achromatisch = ungefärbt.

tionen heißen achromatische Linsen; sie bestehen aus einer bikonvexen Linse aus Kronenglas und einer plankonvexen Linse aus Flintglas; sie wirken wie einfache plankonvexe Linsen ohne Dispersion. Die Objektive der Fernrohre bestehen durchweg aus achromatischen Linsen. Wären die Fernrohre mit einfachen Linsen ausgestattet, so würden die Bilder der beobachteten Objekte farbige Ränder erhalten.¹⁾

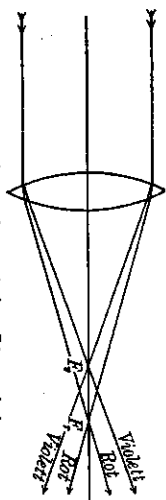


Fig. 913. Bei nicht achromatischen Linsen haben verschiedene Farben verschiedene Brennpunkte.

Während sich bei einer gewöhnlichen Linse die violetten Strahlen eines parallel einfallenden Strahlenbündels in einem Brennpunkte F_v (Fig. 913) vereinigen, der der Linse näher liegt als der Brennpunkt F_r für die roten Strahlen, treten bei einer aus einer sammelnden Kronglasslinse und einer zerstreuenden Flintglasslinse zusammengesetzten achromatischen Linse die farbigen Anteile parallel aus und vereinigen sich daher in demselben Brennpunkte F (Fig. 914).

3. Sekundäres Spektrum. Die Achromasie besteht bei den beschriebenen Prismen- und Linsenkombinationen streng genommen nur für zwei beliebig gewählte Stellen des Spektrums (bei obigen Beispielen für die Linien C und H), für die übrigen Teile des Spektrums findet wegen ungleicher partieller Dispersion keine vollständige Beseitigung der Dispersion statt; die noch vorhandene chromatische Abweichung wird das sekundäre Spektrum der Kombination genannt. Durch Zusammenstellung einer größeren Zahl von Linsen aus verschiedenen Glassorten kann man auch das sekundäre Spektrum zum größten Teile beseitigen, wenn die Glasarten es erlauben. In den Mikroskopochromaten (Fig. 890) ist das sekundäre Spektrum ganz unmerklich gemacht worden.

Ferner besteht die Achromasie nur für die parallel zur Achse durch die Linsen gehenden Lichtstrahlen; daher beobachtet man auch bei einem Fernrohre (besonders bei gewöhnlichen Opernglässern) farbige Ränder, wenn man schräg durch das Fernrohr hindurchblickt.

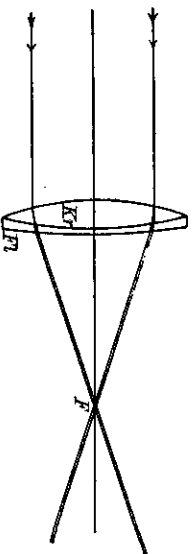


Fig. 914. Achromatische Linsen.

1) John Dollond (1706–1761), ein Bètingie, ursprünglich Seidenweber in London, später Optiker, baute 1757 das erste achromatische Fernrohr für den Handel. Schon 1729 war allerdings die Möglichkeit der Achromasie dem Theoretiker Chester Moor Hall bekannt. Inwieweit Dollond von Hall abhängig ist, läßt sich heute nicht mehr nachweisen. Ebenso wie 1747 Loomh. Euler auf die Möglichkeit einer Achromatisierung hin; Samuel Klingenshtern, der um 1754, angeregt durch Euler, sich damit beschäftigte, beeinflusste nachweislich schon im Ganzen behaltliche Versuche Dollonds. Newton glaubte, daß eine Brechung des Lichtes ohne Zerstreuung unmöglich sei. Daher hielt er auch die Herstellung stark vergrößernder Fernrohre wegen der unvermeidlichen Dispersion für unmöglich.

4. **Chromatische Abweichung des Auges.** Auch das menschliche Auge ist nicht vollkommen achromatisch. Blickt man mit stark nach unten gehengtem Kopfe nach einer oberen Fenstersprosse des Zimmers, so erscheint der untere Rand jeder Sprosse rot, der obere blau. — Sticht man mit einer Nadel ein feines Loch in ein Blatt Papier und beobachtet durch dieses Loch hindurch einen kleinen Gegenstand außerhalb der Mitte des Gesichtsfeldes, so erscheint er mit gefärbten Rändern.

5. **Bedingung der Achromasie.** Es werde ein System aus zwei Linsen verschiedener brechender Stoffe, etwa zweier verschiedener Glassorten, gebildet. Unter welchen Umständen ist die Kombination achromatisch?

Sind die Einzelbrennweiten für Natriumlicht (D -Linie) f_1 und f_2 , so ist die Brennweite des Systemes bestimmt durch (§ 278, 3)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

worin d der Abstand der zugewandten Hauptebenen ist. Ferner ist

$$\frac{1}{f_1} = (n_{1D} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\S 272, 6) \quad \text{und} \quad \frac{1}{f_2} = (n_{2D} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Das System möge für die Fraunhofersehen Linien F und C achromatisiert sein. Dann gilt in leichtverständlicher Bezeichnung $f_F = f_C$ oder $\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{1F}} - \frac{1}{f_{1C}} &= (n_{1F} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - (n_{1C} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= (n_{1F} - n_{1C}) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{n_{1F} - n_{1C}}{n_{1D} - 1} \cdot \frac{1}{f_1}. \end{aligned}$$

Führen wir noch hierin das in § 306 angeführte Maß ν von Abbe für die relative Dispersion ein, so ist

$$\frac{1}{f_{1F}} - \frac{1}{f_{1C}} = \frac{1}{n_1 f_1} \quad \text{Ebenso ist}$$

$$\frac{1}{f_{2F}} - \frac{1}{f_{2C}} = (n_{2F} - n_{2C}) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{n_{2F} - n_{2C}}{n_{2D} - 1} \cdot \frac{1}{f_2} = \frac{1}{n_2 f_2}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{1F} f_{2F}} - \frac{1}{f_{1C} f_{2C}} &= \frac{1}{f_{1F} f_{2F}} - \frac{1}{f_{2F} f_{1C}} + \frac{1}{f_{2F} f_{1C}} - \frac{1}{f_{1C} f_{2C}} \quad \text{oder} \\ &= \frac{1}{f_{1F} f_{2F}} - \frac{1}{f_{1C} f_{2C}} + \frac{1}{f_{2F} f_{1C}} \left(\frac{1}{f_{1F}} - \frac{1}{f_{1C}} \right) = \frac{1}{f_{2F} f_{1C}} \left(\frac{1}{f_{1F}} - \frac{1}{f_{1C}} \right) + \frac{1}{f_{1C} f_{2C}} \left(\frac{1}{f_{2F}} - \frac{1}{f_{2C}} \right) \end{aligned}$$

Da, auf der rechten Seite eine Differenz nicht mehr vorkommt, darf man näherungsweise setzen $f_{2F} = f_2$ und $f_{1C} = f_1$. Damit wird

$$\frac{1}{f_{1F} f_{2F}} - \frac{1}{f_{1C} f_{2C}} = \frac{1}{f_1 f_2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Die Bedingung $\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C}$ der Achromasie geht dann über in

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_1 n_1} + \frac{1}{f_2 n_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) = 0.$$

Sonderfälle. 1. Es mögen die beiden Linsen aus demselben Stoffe (Glas) bestehen. Dann ist $n_1 = n_2$ und es folgt

$$\frac{f_1 + f_2}{2} = d.$$

Das ist die Bedingung, welche im Huygensschen und Ramsdenschen Okular (§ 300, 4., 5.) erfüllt ist.

2. Es sei $d = 0$; es sollen die beiden dünnen Linsen sich somit berühren. Dann ist

$$\frac{f_2}{f_1} = -\frac{n_1}{n_2}.$$

Danach muß also ein sammelndes und ein zerstreues System miteinander zusammengesetzt werden, deren Brennweiten sich umgekehrt verhalten wie die Abbe'schen Maße für die Dispersionen. Das ist die Bedingung, welche in chromatischen Fernrohrobjektiven (§ 300, 1. u. ob. 2.) erfüllt ist.

§ 308. Das geradsichtige Prisma.

Verbindet man zwei Prismen aus Kronglas und Flintglas mit entgegengesetzt gerichteten brechenden Kanten und von solchen brechenden Winkeln

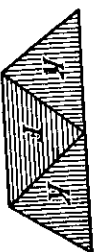


Fig. 915. Geradsichtiges Prisma.

miteinander, daß die mittlere Ablenkung bei der Prismen aufgehoben wird, so ist die Dispersion des Flintglasprismen



Fig. 916. Geradsichtiges Prisma.

mas annähernd doppelt so groß wie die des Kronglasprismen. (Die genaueren Verhältnisse der brechenden Winkel können aus den im vorigen Paragraphen angegebenen Werten für δ und σ berechnet werden.) Bei einem solchen brechenden Prisma verläßt das Strahlenbündel in seinem mittleren Teile die Zusammenstellung in annähernd derselben Richtung, in der das eintrittende Strahlenbündel auf die Kombination fällt. Daher wird ein solches Prisma ein geradsichtiges¹⁾ Prisma genannt. Es wird gewöhnlich aus drei oder aus fünf Prismen nach Art der fünf Fig. 915 und Fig. 916 zusammengesetzt. Die einzelnen Prismenflächen verkittet man mittels Kanadabalsam miteinander, um Reflexionen an den Übergangflächen möglichst zu vermeiden. In Fig. 917 ist der Strahlengang eines Lichtstrahles und seine Zerlegung durch ein geradsichtiges Prisma dargestellt, das aus zwei Flintglasprismen und drei Kronglasprismen zusammengesetzt ist. Der gelbe Teil des Spektrums verläßt das Prisma ohne Ablenkung, der rote Teil wird nach oben, der violette nach unten abgelenkt. In den verbleibenden kleineren gerad-

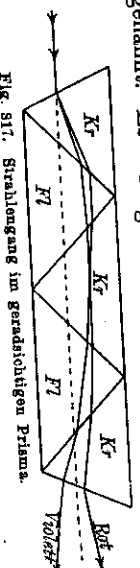


Fig. 917. Strahlengang im geradsichtigen Prisma.

1) Die geradsichtigen Prismen sind zuerst von dem italienischen Physiker Amici (1786—1863) hergestellt worden; sie werden daher auch vielfach Amici'sche Prismen genannt.

sichtigen Handspektroskopen ist ein geradschiebiges Prisma mit einem regelbaren Spalte, einer Kollimatorlinse und einem kleinen Fernrohr in einem Rohre angeordnet.

§ 309. Emissionsspektren¹⁾, Spektralanalyse.

Schon bei der oberflächlichen Vergleichung unserer gebräuchlichen Lichtquellen erkennen wir auffallende Verschiedenheiten: Das Petroleumlicht ist gelber als das elektrische Glühllicht; Gasleuchten mit einem Glühstrumpf senden grünliches Licht aus; die bengalischen Flammen senden vorwiegend Licht einer einzelnen Farbe aus. Die Zusammensetzung des Lichtes kann mit dem Spektralapparate (Fig. 905) untersucht werden. Die Spektren der Lichtquellen heißen Emissionsspektren.

Das Spektrum von glühenden festen oder flüssigen Körpern ist kontinuierlich, das Spektrum glühender Gase besteht aus einzelnen oder aus Gruppen von hellen Linien.

Die durch hohe Temperatur bewirkte Lichtaussendung eines Körpers wird Temperaturstrahlung genannt (§§ 365 bis 369).

Die Helligkeit (Strahlenergie) nimmt mit Erhöhung der Temperatur der Lichtquelle sehr rasch zu. Die Intensität der dem violetten Ende des Spektrums angehörenden Strahlen nimmt hierbei rascher zu als die Intensität der dem roten Ende des Spektrums angehörenden Strahlen.

Wird ein Körper allmählich erhitzt, so sendet er bei einer wenig über 400°C liegenden Temperatur ein eigentümliches graues Licht (Grauglut) aus, das besonders an den peripheren Teilen der Netzhaut, wo die Stäbchen der Netzhaut wesentlich zahlreicher sind als die Zapfchen (S. 846), empfunden wird. Das ausgesandte Licht ist farblos. Bei Erhöhung der Temperatur auf über 500° beginnt der Körper mit dunkler Rotglut zu leuchten (Drapersches Gesetz 1847), die bei weiterer Temperatursteigerung heller wird, und der sich allmählich mehr und mehr Strahlen beigesellen, die dem violetten Teile des Spektrums angehören. Die farbige Glut wird vorwiegend an denjenigen Teilen der Netzhaut empfunden, wo die Zapfchen vorherrschen, d. i. besonders in der Netzhautgrube. Wird die Temperatur des glühenden Körpers weiter erhöht, so geht die Rotglut in Gelbgut und dann zuletzt in Weißglut über. Bei den höchsten Temperaturen spricht man auch von einer Blauglut.

In allen Fällen ist das Spektrum der glühenden festen oder flüssigen Körper kontinuierlich. In der Flamme einer Kerze, einer Öllampe, eines Leuchtgasbrenners leuchten nicht die glühenden Gase, sondern die aus Kohlenwasserstoffen ausgeschiedenen, fein verteilten Kohleteilchen; daher zeigen diese Flammen auch kontinuierliche Spektren. In der Flamme der Petroleumlampe, die eine verhältnismäßig niedrige Temperatur hat, leuchten die Kohleteilchen gelbrot. Durch gut geregelte Luftzufuhr (besonders von erwärmter Luft) kann die Temperatur erhöht und damit ein weißeres Licht erzeugt werden. Auch

1) emittiere (lat.) = aussenden.

die Farbe des Gasglühlichtbrenners (Anerlicht) ist zum großen Teile auf die hohe Temperatur der Bunsenflamme zurückzuführen. Die glühenden Kohle spitzen des elektrischen Bogenlichtes senden wegen ihrer hohen Temperatur ein bis weit über das Violette hinausreichendes Spektrum aus.

Die Spektrallinien glühender Gase sind im allgemeinen von der chemischen Natur der Gase abhängig; daher ist man imstande, aus dem Spektrum eines glühenden Gases auf die chemische Zusammensetzung des Gases einen sicheren Schluß zu ziehen. Die Zahl der von einem glühenden Gase erzeugten Spektrallinien nimmt im allgemeinen mit der Temperatur zu; die bei niedriger Temperatur schwachen Spektrallinien werden bei hoher Temperatur heller, und neue Linien treten auf.

Man erzeugt das Spektrum eines Metaldampfes, indem man vor dem Spalt des Spektralapparates (Fig. 905) einen Bunsenbrenner stellt und mittels eines Platindrathes Spuren des zu verdampfenden Metallsalzes in die Flamme bringt. Hierbei beobachtet man, daß das Spektrum des Salzes im wesentlichen von der Natur des Metalles, weniger von der Natur der das Salz bildenden Säure oder des Halogens abhängt. In Fig. 918 Taf. II sind die charakteristischsten Linien einiger Metalle dargestellt. Für das Natrium ist eine helle Linie in Gelb (die D -Linie $\lambda = 589 \text{ m}\mu$, s. § 314) bezeichnend, die bei starker Dispersion (etwa durch mehrere hintereinander angeordnete Prismen) in zwei dicht nebeneinander liegende Linien zerfällt (§ 303); das Lithium zeigt eine besonders helle Linie im Rot, eine schwächere im Orange; Kalium zwei Linien im äußersten Rot und eine Linie im äußersten Violett; Barium zeigt ein sogenanntes Bandenspektrum; dieses besteht aus hellen breiteren Teilen des Spektrums, die an der einen Seite besonders hell sind und an der andern Seite verwaschen erscheinen. Das Barium zeigt sehr helle Banden im Grün.

Die schon bei gewöhnlicher Temperatur gasförmigen Körper werden zum Leuchten gebracht, indem man sie in ein Geißler'sches Rohr (Bd. II) einschließt und die Entladungen eines Induktionsapparates durch das Rohr hindurchleitet. Nicht immer erhält man dabei für einen chemischen Stoff dasselbe Spektrum. Je nach dem Gasdrucke und den Entladungsverhältnissen des Induktionsapparates ändert häufig das Spektrum seine Zusammensetzung von Grund auf. So kennt man vom Argon ein „rotes“, „blaues“, „grünes“ Spektrum, in denen je die Linien der benannten Farbe vorherrschen. Auch vom Sauerstoffe und Stickstoffe sind mehrfache Spektren bekannt. Reicht sicher erscheint im Geißler'schen Rohre unveränderlich das Wasserstoffspektrum (Fig. 918). Der Wasserstoff zeigt hierbei eine intensive rote, eine grün-blaue, eine blaue und eine violette Linie; der Sauerstoff zeigt die einzige stets deutliche Bandenrot (bei $617 \text{ m}\mu$) (Fig. 918); der Stickstoff erzeugt ein ausgeprägtes Bandenspektrum mit vielen sich durch das ganze Spektrum hindurchziehenden Banden, so daß das Spektrum den Eindruck einer kannelierten Säule macht (Kanneliertes Spektrum) (Fig. 918). Sehr scharfe und hellglänzende Linien zeigen im Geißler'schen Rohre die einatomigen Gase, also Quecksilberdampf und die

Edelgase Helium und Neon (Fig. 918). Für Quecksilber sind besonders eine intensiv gelbe sowie eine physikalisch interessante grüne Linie charakteristisch, für Helium eine gelbe Linie¹⁾ in großer Nähe der Natriumlinie. Das Neon-Spektrum zeigt viele Linien zwischen Rot und Gelb und einiger schwächere Linien im Grün. Von allen Linienspektren ist das Neon-Spektrum am leichtesten zu erhalten.

Läßt man den elektrischen Funken in der Luft zwischen zwei Metallspitzen überspringen, so beobachtet man neben den dem Metalle eigentümlichen Linien auch die Linien des Sauerstoff- und des Stickstoffspektrums.

Die Forschungsmethode, bei der man aus der Art des Emissionsspektrums auf die chemische Natur des glühenden Körpers schließt, heißt die Spektralanalyse.²⁾ Mit der Spektralanalyse lassen sich noch $3 \cdot 10^{-7}$ mg Natrium und $1 \cdot 10^{-7}$ mg Lithium nachweisen.

§ 310. Umkehrung der Spektrallinien. Erklärung der Fraunhoferschen Linien.

Wenn man mit demselben Prisma das reine Sonnenspektrum und unmittelbar darunter das Emissionsspektrum eines glühenden Gases erzeugt, so fallen die hellen Linien des Emissionsspektrums stets mit einigen Fraunhoferschen Linien zusammen. Insbesondere fällt die gelbe Natriumlinie mit der Fraunhoferschen D-Linie genau zusammen.

Bei einigen Spektralapparaten ist vor die obere Hälfte des Spaltes ein kleines total reflektierendes Prisma gesetzt, durch das von der Seite her Sonnenlicht in das Kollimatorrohr eintreten kann, während der untere Teil des Spaltes von der untersuchten Lichtquelle beleuchtet wird.

Zwischen den Emissionsspektren glühender Gase und den Fraunhoferschen Linien besteht ein enger Zusammenhang.

Kirchoff beobachtete 1859, als er zufällig eine mit Kochsalz gefärbte Weingeistflamme vor den Spalt des Spektralapparates hielt, während Sonnenlicht den Spalt beleuchtete, daß die D-Linie besonders dunkel und scharf wurde, während er erwartete, daß die D-Linie sich als besonders helle gelbe Linie auszeichnen würde. Auf Grund dieser Beobachtung schloß er, daß das helle Sonnenlicht durch die gelbe Natriumflamme eine teilweise Absorption erfahren müßte, und zwar gerade in dem Teile des Lichtes, das die Natriumflamme selbst auszusenden vermag. Diese Tatsache verallgemeinerte Kirchoff zu dem Satze:

Ein glühendes Gas absorbiert von den Strahlen einer heißeren Lichtquelle einen Teil derjenigen Strahlen, die es selbst aussendet.

1) An dieser Linie wurde das Element Helium 1868 von dem englischen Astronomen John Norman Lockyer (geb. 1836, Direktor des South Kensington Laboratory) im Lichte der Sonnenprotuberanzen als ein vom Natrium verschiedenes Element erkannt; erst 26 Jahre später konnte Ramanay an derselben Linie zeigen, daß Helium auch auf der Erde vorkommt.
2) Lyo (griech.) = ich löse; analysis = Auflösung, Zerlegung.

Die objektive Darstellung des Kirchoffschen Satzes geschieht bequem mit der Versuchsanordnung aus Fig. 919. Hier ist L eine kleine Bogenlampe, deren Lichtstrahlen durch das sammelnde Objektiv O parallel austreten. Na ist ein mit einem Blechzylinder umgebener Bunsenbrenner, in dem in einem kleinen, im Innern des Zylinders angebrachten Eisenstiftel ein erbsengroßes Stück metallischen Natriums zum Verdampfen gebracht wird. In der Höhe der Natriumflamme ist der Blechzylinder an zwei gegenüberliegenden Seiten spaltförmig durchbrochen, so daß die Strahlen des elektrischen Bogenlichtes unmittelbar durch die Natriumflamme hindurch auf den Spalt S eines Kollimatorrohres treffen. Durch die Kollimatorlinse O wird ein reelles Spaltbild auf dem Schirme Sch erzeugt. Durch das unmittelbar hinter der Kollimatorlinse stehende Flintglasprisma P wird auf Sch ein reines Spektrum entworfen, das vollständig kontinuierlich ist, wenn man die Natriumflamme zur Seite rückt.

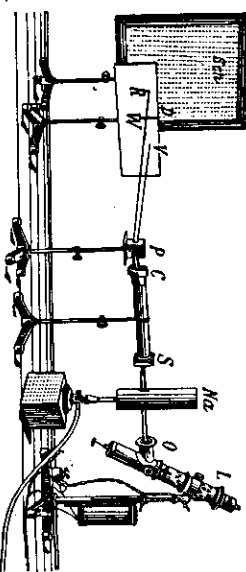


Fig. 919. Glimschleibische Anordnung zur Erzeugung von Fraunhoferschen Linien.

Wird dagegen die Natriumflamme in der abgebildeten Weise in den Gang der Lichtstrahlen gebracht, so erscheint im gelben Teile des Spektrums eine dunkle Linie, die Absorptionsslinie des Natriumdampfes, die mit der gelben Emissionslinie des glühenden Natriumdampfes (Fraunhofersche D-Linie) zusammenfällt. Verdeckt man O mit einem undurchsichtigen Blatte Papier, so verschwindet natürlich das ganze Spektrum; aber an der Stelle der dunklen D-Linie tritt jetzt die helle Natriumlinie auf. Schaltet man bei der Darstellung der dunklen Linie unmittelbar vor dem Schirme Sch den mit einem schmalen Ausschnitt versehenen weißen Schirm W so ein, daß nur der Teil der Strahlen durch den schmalen Ausschnitt hindurchgeht, der der dunklen D-Linie zukommt, so stellt man auf dem dahinterstehenden (durchscheinenden) Schirme die D-Linie als dunkle gelbe Linie. Die dunkle gelbe Linie ist also nicht absolut schwarz, sondern sie ist noch gelb, aber in ihrer Lichtstärke geschwächt; sie erschien nur dunkel im Vergleich mit den übrigen, nicht teilweise absorbierten Teilen des Spektrums.

Der durch Fig. 919 dargestellte Versuch heißt die „Umkehrung“ der Natriumlinie. Es ist gelungen, außer der Natriumlinie auch andere Emissionsspektren nachzuweisen.

Auf Grund der Umkehrung der Emissionsspektren gilt für die Entstehung der Fraunhoferschen Linien im Sonnenspektrum die folgende Erklärung: Die Sonne besteht aus einem Kerne von sehr hoher Temperatur, der ein kontinuierliches Spektrum aussendet, als ob er fest oder flüssig wäre¹⁾; dieser Kern (Photosphäre) ist von einer Schicht glühender Gase umgeben,

1) Auch Gase unter sehr hohem Drucke senden ein kontinuierliches Spektrum aus; Der Sonnenkern kann also auch aus einer Gasmasse unter hohem Drucke bestehen; für diese Auffassung sprechen zahlreiche Gründe.
Grimseh, Physik I. Große Ausgabe, 6. Aufl.

welche diejenigen Lichtstrahlen teilweise absorbieren, die sie selbst auszu- senden vermögen. Daraus folgt, daß in der Sonnenhülle (Chromosphäre, auch Atmosphäre) alle die Stoffe in glühend gasförmigen Zustande vorhanden sind, deren Emissionsspektren mit den einzelnen Gruppen der Fraunhofer- schen Linien übereinstimmen. Da nun die Emissionsspektren aller auf der Erde vorkommenden Stoffe mit Teilen der Fraunhofer'schen Linien überein- stimmen, so folgt ferner, daß in der Chromosphäre der Sonne alle auch auf der Erde vorkommenden Stoffe vorhanden sind. Über die chemische Zusam- mensetzung des Sonnenkernes können wir aus dem Sonnenspektrum nichts schließen.

Daß die Sonne von einer sehr dicken Hülle glühender Gase umgeben ist, folgt noch daraus, daß man bei einer Verflüchtigung der eigentlichen Sonnen- scheinbe, also des Sonnenkernes, das Emissionsspektrum der Chromosphäre allein erhält. Hierbei treten die Wasserstofflinien und Heliumlinien, auch Kalziumlinien, besonders stark hervor. Sie gehören den obersten Schichten der Chromosphäre an.

§ 311. Anomale Dispersion.

Im allgemeinen ist das Brechungsverhältnis eines Stoffes für das violette Licht größer als für das rote, und die Farben ordnen sich in einem Spektrum, das durch ein Prisma aus einem solchen Stoffe erzeugt wird, in der Reihen- folge: Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Violett. Tritt diese Farbenfolge auf, so nennt man die das Spektrum hervorruftende Dispersion eine normale Disper- sion. Im Gegensatz hierzu spricht man von einer anomalen Dispersion eines Stoffes, wenn ein aus diesem Stoffe hergestelltes Prisma ein Spektrum mit einer Farbenfolge erzeugt, die von der obigen verschieden ist. Bei derartigen Stoffen kann beispielsweise das Brechungsverhältnis für rotes Licht größer als für das violette Licht sein.

Die anomale Dispersion ist zuerst von Le Roux 1861 am Joddampfe beobachtet worden; aber erst Christiansen¹⁾ hat 1870 die Erscheinung gründ- lich untersucht, nachdem er sie beim Fuchsin beobachtet hatte. Er bestimmte die Brechungsverhältnisse einer weingeistigen Fuchsinlösung von 18,8% Ge- halt mittels eines aus dieser Lösung hergestellten Prismas vom brechenden Winkel 1° 14'. Die Ergebnisse seiner Messung für die Fraunhofer'schen Linien sind:

B	C	D	E	F	G	H
1,450	1,502	1,561	—	1,312	1,265	1,312.

In Fig. 920 ist das von Christiansen beobachtete Spektrum graphisch dargestellt. In ihr bedeuten die Abszissen die Ablenkungen, und die Ordinate sind den Intensitäten der Farben proportional; die kleine Strecke *ab* gibt die Länge des Spektrums an, das der zur Lösung benutzte Weingeist bei demselben

¹⁾ Christian Christiansen (1848—1917). Von 1881—1912 Professor der Physik in Kopenhagen.

brechenden Winkel erzeugt. Durch Vergleichung dieser Strecke mit der Länge der ganzen Figur erhält man eine Vorstellung von der außerordent- lichen Größe der Dispersion der alkoholischen Fuchsinlösung ($\delta = 0,276$) im Vergleich zu der des Wein- geistes ($\delta = 0,013$). Man kann sich ein gutes Bild vom Fuch- sinpektrum machen, indem man aus einem normalen Di- sensionspektrum das von der Fuchsinlösung absorbierte Grün ausscheidet und dann die beiden noch übrig- bleibenden Teile des Spektrums miteinander vertauscht.

Kundt wiederholte die Christiansenschen Versuche und fand, daß alle Stoffe mit Oberflächenfarben, insbesondere solche mit metallischem Glanze (§ 305), eine starke anomale Dispersion zeigen. Diese Stoffe absorbieren in Lösung ein fast scharf begrenztes Spektralgebiet; in der Nähe des Absorptions- gebietes tritt die Abweichung vom normalen Verhalten besonders stark her- vor. Das zeigte sich auch beim Fuchsin, dessen weingeistige Lösung schon in sehr dünnen Schichten einen ausgeprägten grüngoldigen Metallglanz, der darin seinen Grund hat, daß die grün-gelben Strahlen, welche stark absorbiert werden, auch sehr stark reflektiert werden.

Die Kundtschen Untersuchungen haben die Erkenntnis gebracht, daß ganz allgemein eine Dispersion durch eine Absorption bedingt ist. Wüh- den wir aber Stoff kennen ohne Absorption für irgendeine Lichtgattung, so dürfte dieser Stoff auch keine Dispersion zeigen.

Bei seinen Untersuchungen benutzte Kundt die Methode der gekrenzten Prismen, deren Anordnung aus Fig. 921 hervorgeht: Ein weißer Lichtstrahl *L* fällt auf das Prisma *I* mit der wagerechten brechenden Kante *K*, *K*₁; hier- durch wird er in einen in lotrechten Ebene ausgebreiteten Farbfächer zer- legt, der auf dem lotrechten Schirme *S* das Spektrum *AH* hervorruft würde, wenn nicht in den Strahlen- gang das Prisma *II* mit der lotrechten brechenden Kante *K*₂, *K*₃ gestellt worden wäre. Dieses bricht aber jeden der einzelnen Strahlen des Farben- fächers. Wenn man das Prisma *II* aus demselben Stoffe be- steht wie das Prisma *I*, so wird der violette Teil des Farbfächers, der sonst nach *H* kommen würde, am stärk- sten, der rote Teil, der den Punkt *A* erzeugen würde,

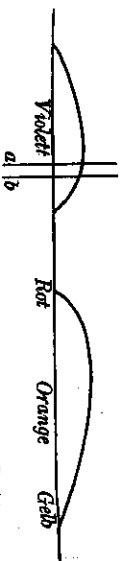


Fig. 920. Von Christiansen beobachtetes anomales Spektrum durch Prisma mit Fuchsinlösung.

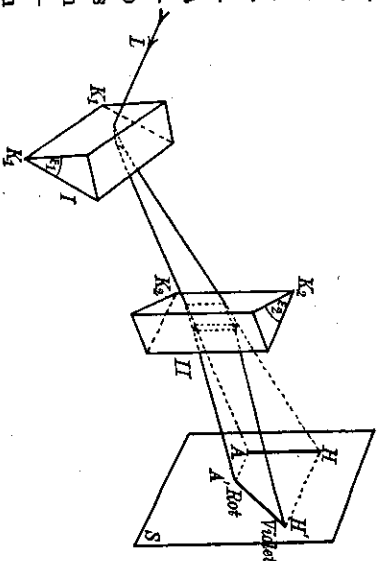


Fig. 921. Kundtsche Methode der gekrenzten Prismen.

am schwächsten abgelenkt; daher entsteht auf dem Schirme *S* das schräg liegende, geradlinige Spektrum *A'H'*. Das auf dem Schirme *S* entstehende Bild ist in Fig. 922 noch einmal besonders gezeichnet. Aus dieser Figur geht die Zusammensetzung der Ablenkungen der durch die Fraunhofer'schen Linien bezeichneten Teile

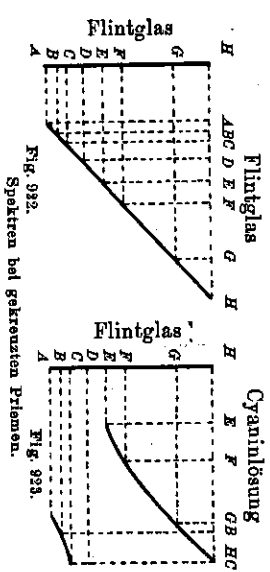


Fig. 922. Spektren bei gekreuzten Prismen.

des Spektrums klar hervor. Das schrägliegende sich ergebende Spektrum ist geradlinig, da angenommen ist, daß beide Prismen aus demselben Stoffe bestehen. Besteht das zweite Prisma aus einem anderen Stoffe wie das erste, so entsteht durch Zusammenwirkung der beiden Prismen nur dann ein geradliniges Spektrum, wenn die Brechungsverhältnisse der beiden Stoffe für alle Teile des Spektrums einander proportional sind. Wenn dieses aber nicht der Fall ist, so entsteht ein krummliniges Spektrum. So würde sich z. B. durch die Kreuzung zweier Prismen, von denen das eine aus Kronglas, das andere aus Flintglas besteht, in Fig. 921 ein krummliniges Spektrum ergeben.

In Fig. 923 ist das Spektrum dargestellt, das entsteht, wenn ein Flintglasprisma mit einem Prisma aus konzentrierter Cyaninlösung gekreuzt wird. Das der *D*-Linie nahe Gebiet wird vom Cyanin vollständig verschluckt; das von der einen Seite an das Absorptionsgebiet grenzende, der *C*-Linie entsprechende Spektralgebiet wird stärker anomal gebrochen als das auf der andern Seite angrenzende Gebiet der *E*-Linie, trotzdem diese im normalen Spektrum dem violetten Ende viel näher liegt als die *C*-Linie.

Die Tatsache, daß alle anomal dispergierenden Substanzen in festem Zustande metallische Reflexion zeigen und wie die Metalle schon in den dünnsten Schichten für gewisse Spektralgebiete vollkommen undurchlässig sind, führte Kundt auf den Gedanken, daß die Metalle selbst ebenfalls anomale Dispersion zeigen würden. Seine Vermutungen wurden durch den Versuch voll bestätigt. Kundt stellte außerordentlich dünne, keilförmige Metallschichten her, mittels deren er die Brechungsverhältnisse der Metalle für verschiedene Spektralgebiete bestimmen konnte. Hierbei stellte er dann auch die eigentümliche Tatsache fest, daß die Brechungsverhältnisse der Metalle (besonders für langwellige Strahlen) und ihre elektrische Leitfähigkeit in einer einfachen Beziehung zueinander stehen. Diese Versuche wurden später von Du Bois und Rubens¹⁾ sowie Hagen und Rubens (s. Bd. II) wiederholt und in mannigfacher Weise erweitert.

Bei einem Versuche, die Natrumlinie des Spektrums nach der in Fig. 919 dargestellten Anordnung umzukehren, um also die Entstehung der Fraunhofer'schen Linien in Berlin, vorher an der Techn. Hochschule in Charlottenburg.

hofschen Linien vorzuführen, beobachtete Kundt 1880 zufällig die durch Fig. 924 dargestellte Erscheinung. Die durch die Absorption des Lichtes im glühendem Natriumdampfe erzeugte dunkle *D*-Linie zeigte eigentümliche Verzerrungen, deren Erklärung Kundt in der anomalen Dispersion des Lichtes suchte und fand. Die Natriumflamme hatte bei diesen Versuche als Prisma mit wagnecher brechender Kante gewirkt; Kundt hatte also unbeabsichtigt die Versuchsanordnung der gekreuzten Prismen angewandt und hierdurch die Erscheinung hervorgerufen.

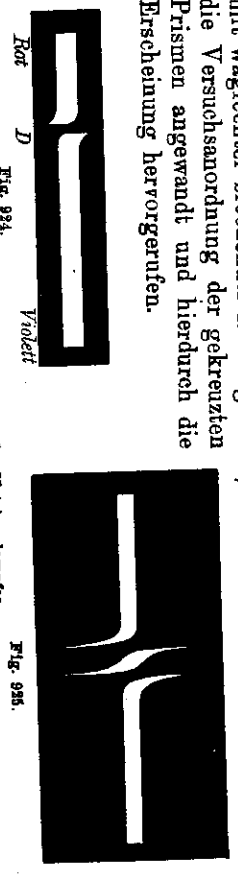


Fig. 924. Anomale Dispersion des Natriumdampfes.

Fig. 925.

H. Becquerel¹⁾ wiederholte 1898 die Versuche über die anomale Dispersion durch glühende Dämpfe unter Anwendung eines Spektralapparates mit einer so starken Dispersion, daß dabei die *D*-Linie in ihre beiden Teile (§ 309) aufgelöst wurde. Hierbei entdeckte er die durch Fig. 925 dargestellte Erscheinung. In der Nähe jeder der beiden Absorptionslinien wird das Brechungsverhältnis des Natriumdampfes für die nach Rot hin liegenden Strahlen außerordentlich groß und für die nach der violetten Seite angrenzenden Strahlen außerordentlich klein, ja selbst kleiner als 1.

Mehrere Metalle, wie Silber, Gold, Kupfer zeigen auch im festen Zustande für Natrumlicht Brechungsverhältnisse kleiner als 1; sie dispergieren also auch anomal.

Auf die Schlußfolgerungen, die aus der Gesamtheit der Erscheinungen der anomalen Dispersion über die Natur des Lichtes und der optischen Eigenschaften der Körper sowie auf die Beziehungen zwischen ihrem optischen und elektrischen Verhalten gezogen werden, kann hier nicht eingegangen werden; sie finden erst eine erschöpfende Erklärung in der Elektronentheorie.

§ 312. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.

1. Aus der Jupitermondvorfinstörung. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes hat zuerst der dänische Astronom Ole Römer²⁾ (1673) bestimmt.

1) Henry Becquerel, 1862—1908, zuletzt Prof. a. d. Polytechn. Hochschule in Paris; auch sein Vater Alexander Edmond, † 1891, und sein Großvater Antoine César, † 1876, waren bekannte Physiker.

2) Ole Römer (1644—1710) war von 1669—1675 Assistent des Direktors Domenico Cassini an der Sternwarte in Paris. Beide ergänzten in dieser Zeit die von Cassini seit 1660 angelegte Tabelle der Verunstörungen der Jupitermonde. Die Wahrnehmung der Verzögerung der Verfinstörung und seine Erklärung dafür teilte Römer am 22. XI. 1675 der Pariser Akademie mit; doch diese verhielt sich ebenso wie Cassini ablehnend gegen eine Erklärung durch eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Er berechne sie aus der Verspätung des Eintrittes der Verfinsternung eines Jupitertrabantens während der Zeit, in welcher sich die Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne vom Jupiter entfernt.

In Fig. 926 stelle der Kreis um S die Bahn der Erde und der kleine Kreis um J die Bahn des ersten Jupitertrabantens dar, dessen Umlaufzeit 1,769 Tage oder rund $42\frac{1}{2}$ Stunden beträgt. Während sich die Erde in I oder in III befindet, erscheint einem auf der Erde stehenden Beobachter die Umlaufzeit (d. i. die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verfinsternungen des Jupitertrabantens) in voller Übereinstimmung mit der wahren Umlaufzeit des Jupitertrabantens. Zwar sieht der Beobachter den Eintritt einer Verfinsternung nicht in dem Augenblicke, wo er wirklich erfolgt, sondern um so viel später, als Zeit vergeht, bis das Licht vom Jupiter auf die Erde kommt; aber die Verspätung ist bei zwei aufeinanderfolgenden Verfinsternungen dieselbe, also stimmt der Zeitunterschied mit der wirklichen Umlaufzeit überein. Wenn da-



Fig. 926. Verschiedene Stellungen von Erde, Sonne und Jupiter.

gegen die Erde in II ist, sich also vom Jupiter entfernt, so wird die Umlaufzeit des Jupitertrabantens scheinbar verlängert; denn während des einmaligen Umlaufes des Trabanten um den Jupiter hat sich die Erde um ein beträchtliches Stück vom Jupiter entfernt. Es werden wieder zwei aufeinanderfolgende Verfinsternungen später beobachtet, als sie tatsächlich stattfinden; aber, da das Licht bei der nächsten Verfinsternung einen weiteren Weg zurückzulegen hat als bei der vorhergehenden, so ist die Beobachtung bei der nächsten Verfinsternung um mehr verspätet als bei der vorhergehenden. Daher wird eine scheinbare Verlängerung der Umlaufzeit beobachtet. Dasselbe tritt ein bei jeder Umlaufzeit des Jupitertrabantens, während sich die Erde von I über II nach III bewegt. Im Gegensatz hierzu erscheint während der Zeit, wo sich die Erde von III über IV nach I bewegt, jene Umlaufzeit verkürzt. Diese einzelnen scheinbaren Verlängerungen der Umlaufzeit des Trabanten auf der einen Seite der Erdbahn (I, II, III) und ebenso die einzelnen Verkürzungen auf der anderen Seite der Erdbahn (III, IV, I) summieren sich. Wenn man nun, von dem Augenblicke I an, aus der wahren Umlaufzeit den Augenblick berechnet, wo in III eine Verfinsternung eintreten muß, so zeigt die Beobachtung eine Verspätung dieses Eintrittes um 1000 Sekunden. Berechnet man von dem Augenblicke III an aus der wahren, d. h. aus der mittleren beobachteten Umlaufzeit den Augenblick der Verfinsternung in I, so beobachtet man eine Verspätung um 1000 Sekunden. Das muß die Zeit sein, die das Licht gebraucht hat, um den Weg von I nach III, also den ganzen Erdbahndurchmesser, zurückzulegen. Der Erdbahndurchmesser beträgt 300 000 000 km; also legt das Licht im Infuleren Raume in einer Sekunde den tausendsten Teil dieses Weges, d. i. 300 000 km, zurück.

2. Aus der Aberration des Lichtes. Bradley¹⁾ beobachtete (1725) auf

¹⁾ James Bradley (1692–1762), Prof. der Astronomie und später Kgl. Astronom in Greenwich. Die Messungen wurden mit einem Fernrohr und Mikrometer vor-

einer Privatsternwarte in Kew bei London, daß die Fixsterne ihren scheinbaren Ort am Himmel nicht unverändert beibehalten, sondern daß sie während eines Jahres einen kleinen Kreis, eine kleine Ellipse oder eine kurzgeradlinige Strecke um ihren mittleren Ort zu beschreiben scheinen, je nachdem die Fixsterne in der Nähe des Poles der Ekliptik, weiter davon ab, oder in der Ebene der Ekliptik (Ebene der Erdbahn) selbst stehen. Die scheinbare Verschiebung des Fixsternortes geschieht stets im Sinne der wahren Bewegung der Erde um die Sonne. Der Durchmesser des Kreises, die große Achse der Ellipse und die geradlinige Verschiebung haben bei allen Fixsternen denselben Wert von 40,9 Bogensekunden. Bradley nannte diese Erscheinung die Aberration¹⁾ des Lichtes und den Winkel der Verschiebung die Aberrationskonstante; er erklärte die Aberration durch die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und stellte eine einfache Beziehung zwischen der Aberration, der wahren Bewegung der Erde, und der Geschwindigkeit des Lichtes auf.

Zum Verständnis der Aberration machen wir folgenden Vergleich: Wir denken uns (Fig. 927) auf einem Eisenbahnwagen E ein Ofenrohr R lotrecht auf-

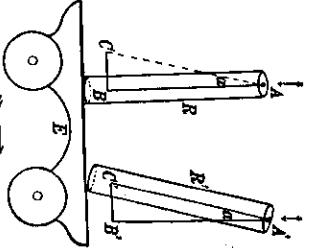
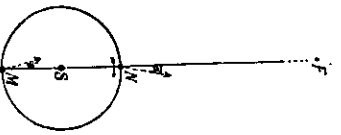


Fig. 927. Gedankenversuch zur Erklärung der Aberration.

gestellt, während Regentropfen bei A durch die Mitte der oberen Öffnung lotrecht herunter fallen. Bei ruhendem Eisenbahnwagen fallen die Regentropfen durch das Rohr hindurch auf den Boden des Wagens, ohne die Seitenwände zu berühren. Ist dagegen der Eisenbahnwagen im Sinne des darunter gesetzten Pfeiles in Bewegung und legt er, während ein Tropfen von A nach B fällt, einen Weg von der Größe BC zurück, so setzen sich die beiden Bewegungen AB und BC , relativ zum Wagen betrachtet, zu der resultierenden Bewegung AC zusammen, die mit der Richtung AB den Winkel α einschließt. Die Folge hiervon ist, daß der Regentropfen gegen die innere Wandung des Ofenrohres anschlägt. Will man das verhindern, so muß man das Rohr in die Stellung R' um den Winkel α im Sinne der Bewegung des Wagens neigen. Bei dieser Neigung durchläuft der lotrecht fallende Regentropfen das Rohr längs der Achse. Es ist $\tan \alpha = \frac{BC}{AB}$, also gleich dem Verhältnisse der Geschwindigkeit des fahrenden Eisenbahnwagens zur Geschwindigkeit des fallenden Regentropfens. Wir betrachten nun die Verhältnisse bei der Beobachtung eines in der Ebene der Ekliptik stehenden Fixsternes F (Fig. 928), der von der Erde aus beobachtet wird. Der wahre Ort des Fixsternes sei der Gegenpunkt der Sonne am Himmel. Der Kreis um S gibt die Erdbahn an, N und M sind die beiden Punkte der gemommen, wie es so genau bis dahin noch nicht angewandt worden war. Die Entdeckung wurde 1728 veröffentlicht.

Fig. 928.



¹⁾ aberratio (lat.) = Abirrung.

Erdbahn, in denen die Erde dem Fixsterne am nächsten und von ihm am fernsten ist, in denen also die Bewegung der Erde senkrecht zur Verbindungslinie NE erfolgt. Infolge der Bewegung der Erde muß man sowohl in N wie in M das Beobachtungsfernrohr neigen, damit das vom Fixsterne kommende Licht das Rohr längs der Achse durchläuft. Der Neigungswinkel ist die halbe Aberrationskonstante $\frac{\alpha}{2} = 20,45$ Bogensekunden im Sinne der Bewegung der Erde, also beidemal in entgegengesetztem Sinne. Es ist hier nach der vorangestellten Betrachtung $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ das Verhältnis der Bahngeschwindigkeit v der Erde zur Lichtgeschwindigkeit c , also $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{c}$, woraus für die Lichtgeschwindigkeit folgt $c = \frac{v}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$. Nun ist $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 20,45'' = 0,0001$

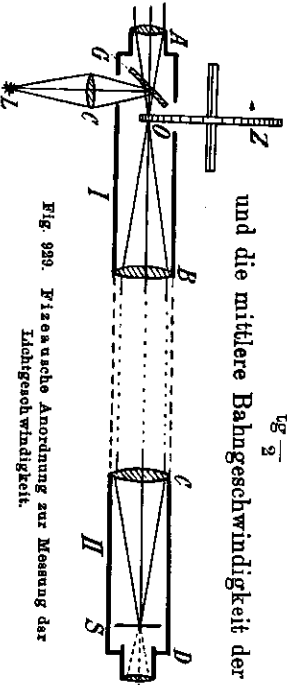


Fig. 929. Fizeausche Anordnung zur Messung der Lichtgeschwindigkeit.

und die mittlere Bahngeschwindigkeit der Erde $v = 30$ km/sec; also ergibt sich für die Lichtgeschwindigkeit der Wert $c = 300\,000$ km/sec.

3. Fizeaus experimentelle Methode.

Fizeau (1849) bestimmte die Lichtgeschwindigkeit durch messende Versuche auf der Erde: An den Endpunkten einer Standlinie von 8633 m Länge waren zwei auf unendlich einstellbare Fernrohre I und II (Fig. 929) mit ihren Objektiven einander gegenüber so aufgestellt, daß ein durch das eine Fernrohr schauender Beobachter das Fadenkreuz des eigenen Fernrohres mit dem Fadenkreuz des anderen in Deckung befindlich sah. An die Stelle des Fadenkreuzes im Beobachtungsfernrohr I wurde der gezähnte Teil O eines Zahnrades parallel zur optischen Achse um eine rasche Umdrehung um seine mit der Fernrohrachse parallele Achse versetzt werden konnte. Zwischen dem Okulare A des Beobachtungsfernrohres und dem Zahnradkranz O war eine ebene unbelegte Spiegelscheibe G , unter 45° gegen die Fernrohrachse geneigt, angebracht. Von der außerhalb des Fernrohres befindlichen punktförmigen Lichtquelle L gingen Strahlen aus, die durch eine Sammellinse C konvergent gemacht und von der Spiegelscheibe so reflektiert wurden, daß in der Ebene des Zahnradkranzes bei O ein reelles Bild von L entstand. Befand sich hier eine Lücke des ruhenden Zahnrades, so gingen die Strahlen divergent weiter und verließen, durch das Objektiv B parallel gemacht, das Fernrohr I in der Richtung der Achse beider Fernrohre. Das Strahlenbündel trat in das Objektiv des Fernrohres II ein, wurde konvergent gemacht und traf dann auf einen ebenen Metallspiegel S , der dort

eingesetzt war, wo sich sonst das Fadenkreuz des Fernrohres II befand. Nach der Reflexion des konvergenten Strahlenbündels legten die Strahlen denselben Weg, den sie gekommen waren, wieder in umgekehrter Richtung zurück und konnten nun durch das Okular A des Fernrohres I und durch die durchsichtige Glasscheibe G hindurch beobachtet werden.

Wurde nun das Zahnrad Z in Umdrehung versetzt, so trat bei einer bestimmten Umdrehungsgeschwindigkeit Dunkelheit des Gesichtsfeldes ein. Hatte sich nämlich beim Hin- und Rückgange des Lichtstrahlenbündels das Zahnrad gerade um eine Zahnbreite gedreht, so traf ein auf dem Hinwege gerade auf den nächsten Zahn. Bei Verdoppelung der Umdrehungsgeschwindigkeit hellte sich das Gesichtsfeld wieder auf, weil das Licht, das beim Hinwege durch eine Zahnücke hindurchgeht, auf dem Rückwege gerade durch die nächste Zahnücke gehen konnte. Bei weiterer Vergrößerung der Umdrehungsgeschwindigkeit des Zahnrades trat abwechselnd Helligkeit und Dunkelheit des Gesichtsfeldes ein.

Fizeau verwandte ein Zahnrad mit 720 Zähnen und ebensovielen Zahnücken. Lücken und Zähne hatten gleiche Breite. Zum ersten Male trat Dunkelheit ein, als sich das Rad in einer Sekunde 12,6 mal herumdrehte. Dann betrug die Zeit, die verging, bis eine Zahnücke ihren Platz mit dem nächsten Zahn vertauscht hatte, $\frac{1}{12,6} \approx \frac{1}{18000}$ Sekunde. Während dieser Zeit

mußte das Licht den Weg von einem Fernrohr bis zum anderen zweimal durchlaufen, also einen Weg von $2 \cdot 8633 \text{ m} \approx 17 \text{ km}$ zurücklegen. Das Licht würde also in einer Sekunde den Weg von 18000 · 17 km = 306000 km zurücklegen.

Perron fand 1901 nach derselben Methode mit vervollkommenen Hilfsmitteln über eine Strecke von 46 km den genannten Wert (auf den leeren Raum umgerechnet)¹⁾ $299\,860 \pm 80$ km. Mit diesem Zahlenwerte stimmen auch die neuesten Werte der auf astronomischen Wege bestimmten Lichtgeschwindigkeit aufs trefflichste überein. Als Wert der Lichtgeschwindigkeit im luftleeren Raume wird meist der Wert 300000 km/sec benutzt. Die Abweichung dieses Wertes von dem in Luft gemessenen ist so gering, daß sie für die meisten Berechnungen vollständig vernachlässigt werden kann.

4. Foucaults experimentelle Methode. Wenige Jahre, nachdem Fizeau in der beschriebenen Weise zum ersten Male die Lichtgeschwindigkeit auf experimentellem Wege bestimmt hatte, veröffentlichte Foucault²⁾ (1862) eine zweite Methode, durch die er die Lichtgeschwindigkeit mittels eines sich drehenden Spiegels messen konnte. Der wesentlichste Teil seines Apparates ist ein kleiner ebener Spiegel, der um eine lotrechte Achse in rascher Umdrehung versetzt werden kann. Mit einer kleinen Turbine, die ähnlich wie die in Fig. 672 abgebildete Sirene von Cagniard-Latour durch Druckluft in

1) Ist c_L die Geschwindigkeit in Luft, c diejenige im leeren Raume, $n = 1,00028$

(S. 785) das absolute Brechungsverhältnis der Luft, so ist $c = c_L \cdot 1,00028$ (§ 331).

2) S. Fußnote S. 178.

1) H. Fizeau (1819—1896), Prof. der Physik in Paris, hat bedeutende optische Untersuchungen gemacht. Er führte auch den Kondensator im Induktor ein (Bd. II).

Bewegung gesetzt wird, erreichte Foucault eine Umdrehungszahl von mehr als 800 in einer Sekunde. Die Umdrehungszahl bestimmte er durch den bei der Umdrehung erzeugten Ton.

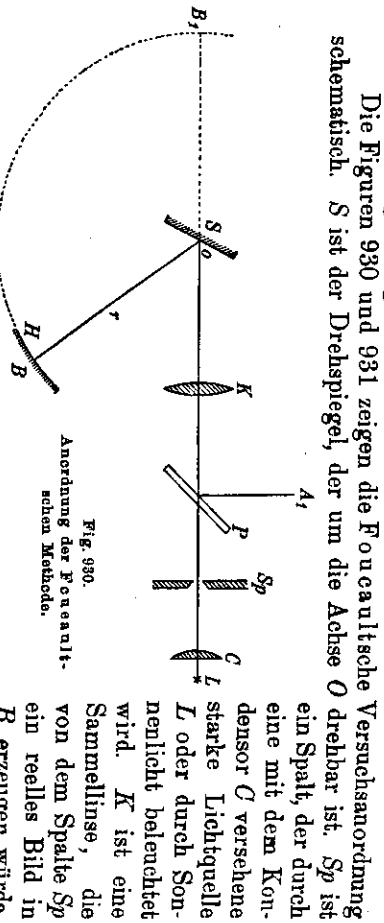


Fig. 930.
Anordnung der Foucault'schen Methode.

wenn der Spiegel S nicht vorhanden wäre. Durch den Spiegel S, der vorläufig ruhen möge, werden die Lichtstrahlen so reflektiert, daß das reelle Bild des Spaltes auf dem sphärischen Hohlspiegel H in dem Punkte B entsteht. Der Krümmungsmittelpunkt des Hohlspiegels H muß in die Umdrehungsachse O des Spiegels S fallen; dann reflektiert er alle auf ihn von S herkommenden Strahlen auf den Spiegel S zurück. Es entsteht demnach durch die in sich zurückkehrenden Strahlen ein reelles Bild des Spaltes, das mit dem Spalte selbst zusammenfällt. Der Lichtweg *SpOBOL* gibt dann den Hauptstrahl des abbildenden Lichtbündels an.

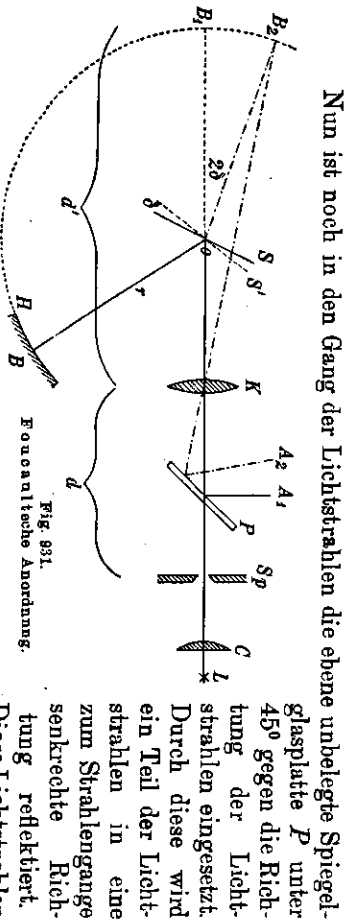


Fig. 931.
Foucault'sche Anordnung.

erzeugen ein reelles Bild des Spaltes in A_1 , das durch ein mit einem Okularmikrometer versehenes Mikroskop beobachtet wird.

Bringen wir nun den Spiegel S in langsame Umdrehung, so entsteht das Spaltbild A_1 nur dann, wenn die vom Spiegel S reflektierten Strahlen den Hohlspiegel H wirklich treffen. Hieraus folgt, daß das Spaltbild periodisch erscheint und verschwindet. Vergrößern wir die Umdrehungszahl allmählich, so flimmert das Spaltbild zuerst, aber schon bei einer Drehgeschwindigkeit

von etwa 10 Umdrehungen in der Sekunde erscheint es unserem Auge beständig.

Wir wollen nun die Drehgeschwindigkeit des Spiegels S so weit steigern (Fig. 931), daß sich der Spiegel während der Zeit, während welcher das Licht vom Spiegel S auf den Hohlspiegel H fällt und nun wieder zum Spiegel S zurückkehrt, um einen kleinen meßbaren Winkel δ gedreht hat, also in die Lage S' gekommen ist. Die Folge davon ist, daß das vom Spiegel S' erzeugte virtuelle Bild des Punktes B nicht mehr in B_1 , sondern in B_2 liegt (§ 255 Fig. 763); die Verlängerung von B_2O ist der reflektierte Strahl zu BO nach der Drehung des Spiegels, und es ist $\sphericalangle B_1OB_2 = 2\delta$. Die von S' reflektierten Strahlen scheinen dann von B_2 her zu kommen; sie gehen durch die Sammellinse K und erzeugen nun ein reelles Bild des Spaltes in A_2 . B_2KA_2 ist der Hauptstrahl des abbildenden Bündels nach der Spiegelung. Dieses Spaltbild ist gegen das Spaltbild A_1 , um einen Betrag e verschoben, der auf dem Okularmikrometer des Beobachtungsmikroskopes gemessen werden kann.

Bezeichnen wir noch den Krümmungsradius des Hohlspiegels mit r , die Entfernung des Spaltes Sp von der Sammellinse K mit d und die Entfernung des Bildes B_2 von der Sammellinse mit d' , bezeichnen wir ferner die Umdrehungszahl des Drehspiegels S in einer Sekunde mit n und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes mit c , so ergeben sich folgende Beziehungen:

Die Winkelgeschwindigkeit des gedrehten Spiegels ist $2\pi n$. Da das Licht zum Durchlaufen der Strecke OB hin und zurück, also für den Weg $2r$ die Zeit $\frac{2r}{c}$ braucht, so ist der Winkel δ , um den sich der Spiegel während dieser Zeit gedreht hat,

$$\delta = 2\pi n \frac{2r}{c} = \frac{4\pi nr}{c};$$

folglich ist

$$\sphericalangle B_1OB_2 = 2\delta = \frac{8\pi nr}{c}.$$

Der Winkel B_1KB_2 verhält sich zum Winkel B_1OB_2 (bei der Kleinheit dieser Winkel) umgekehrt wie die zugehörigen Schenkel r und d' ; also ist

$$\sphericalangle B_1KB_2 = \frac{8\pi nr}{c} \cdot \frac{r}{d'} = \frac{8\pi nr^2}{cd'}.$$

Da nun der Spalt, also auch die Spaltbilder A_1 und A_2 , von der Sammellinse K die in der Richtung der Lichtstrahlen gemessene Entfernung d haben, so folgt endlich, daß die Strecke $A_1A_2 = e$, um die sich das im Mikroskope beobachtete Spaltbild verschoben hat, beträgt:

$$e = d \cdot \sphericalangle B_1KB_2 = \frac{8\pi nr^2 d}{cd'}.$$

Aus diesem Ausdrucke, in dem alle Größen mit Ausnahme von c unmittelbar meßbar sind, folgt

$$c = \frac{8\pi nr^2 d}{ed'}.$$

Folglich kann die Lichtgeschwindigkeit auf diese Weise gemessen werden.

Beispiel: Bei Anwendung eines Hohlspiegels vom Krümmungshalbmesser $r = 9 \text{ m} = 9 \cdot 10^3 \text{ cm}$ war eine Sammellinse so aufgestellt, daß $d = 2 \text{ m} = 2 \cdot 10^3 \text{ cm}$ und $d' = 10 \text{ m} = 10 \cdot 10^3 \text{ cm}$ war. Als der Spiegel die Umdrehungszahl $n = 800$ in der Sekunde erreicht hatte, beobachtete man eine Verschiebung des Spaltbildes um $e = 1,08 \text{ mm} = 1,08 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$.

Setzen wir die angegebenen Zahlenwerte in die obige Formel ein, so wird

$$c = \frac{8 \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3}{1,08 \cdot 10^{-1} \cdot 10 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

5. **Messung in Wasser.** Foucault schaltete nun ferner in den Gang der Lichtstrahlen zwischen S und H eine mit Wasser gefüllte Röhre ein. Auf diese Weise konnte er auch die Lichtgeschwindigkeit im Wasser messen. Die Foucaultschen Messungen ergaben, daß sich das Licht im Wasser mit einer Geschwindigkeit fortplant, die nur drei Viertel von der in Luft gemessenen Geschwindigkeit ist. Das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten stimmt genau mit dem Verhältnisse der Brechungsindizes überein.

Die Foucaultschen Versuche sind aus dem Grunde besonders wichtig gewesen, weil sie die Frage entschieden haben, ob die Geschwindigkeit in optisch dichteren Mitteln kleiner oder größer als in optisch dünneren Mitteln ist. Diese Frage hängt eng mit der Frage zusammen, ob das Licht nach der Newtonschen Emissionshypothese¹⁾ aus kleinen Teilchen (Korpuskeln) besteht, die von der Lichtquelle ausgesendet werden und geradlinig fortfliegen, oder ob die Ausbreitung des Lichtes nach Art der Wellenbewegung erfolgt. Die Foucaultschen Versuche haben endgültig zugunsten der Wellentheorie des Lichtes entschieden.

6. **Gruppen Geschwindigkeit und Wellengeschwindigkeit.** Die voranstehend beschriebenen Methoden, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zu bestimmen, messen eigentlich nicht alle in gleicher Weise dieselbe Größe. Die Methoden von Fizeau und Römer nämlich liefern augenscheinlich die Geschwindigkeit, mit welcher ein abgeschnittener Wellenzug, eine Wellengruppe, sich bewegt. Auch die Methode von Foucault liefert, wie eine eingehendere Untersuchung zeigt, den Wert der Gruppen Geschwindigkeit (S. 693), und nur die Methode der Aberration nach Bradley liefert nach der üblichen Auffassung über den Vorgang der Lichtbewegung die Wellengeschwindigkeit. Im leeren Raume haben nun alle Wellenlängen des Lichtes dieselbe Geschwindigkeit, es findet keine Dispersion statt. Daher ist für den leeren Raum die Gruppen Geschwindigkeit und die Wellengeschwindigkeit vom selben Werte (§ 220). Das wird aber anders für Mittel, in welchen Dispersion stattfindet (S. 690). Ein Mittel von hoher Dispersion ist

1) In allerdings nicht ganz klarer Weise hatte schon Descartes (Dioptrik 1637), die Überlieferung des Plato weiter ausbauend, die Lehre entwickelt, daß man sich das Licht als bewegte körperliche Teilchen vorzustellen habe. Mit Hilfe dieser Vorstellung gelang ihm auch die Ableitung des Brechungsgesetzes. Einen schärften Gegner in der Folgezeit aus seiner Auffassung des Brechungsgesetzes fand Descartes sofort in Fermat (§ 334), der das Brechungsgesetz in anderer Weise begründen konnte und zu der leichter einzusehenden Forderung gelangte, daß das Licht im optisch dichteren Mittel sich langsamer ausbreiten müsse. § 315 Fußnote.

z. B. Schwefelkohlenstoff. In ihm ist die Wellengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit verschieden. In der Tat nun bestimmte A. Michelson¹⁾ nach der Methode von Foucault in Schwefelkohlenstoff die Lichtgeschwindigkeit zu $c'' = \frac{c}{1,77}$, während nach dem Brechungsverhältnisse berechnet nur $c' = \frac{c}{1,64}$ folgen sollte, wenn c die Geschwindigkeit in Luft ist. Nach S. 694 ist nun der Wert der Gruppengeschwindigkeit $c'' = c' - \lambda \frac{dc'}{d\lambda}$, worin c' die von der Wellenlänge abhängige Wellengeschwindigkeit in dem dispergierenden Mittel ist. Für Schwefelkohlenstoff berechnet sich aus den Dispersionsmessungen $\frac{\lambda}{c'} \frac{dc'}{d\lambda} = 0,075$. Damit wird die Gruppengeschwindigkeit

$$c'' = c' - \lambda \cdot \frac{dc'}{d\lambda} = c' \cdot 0,925 = c' (1 - 0,075).$$

Setzen wir hierin ein $c' = \frac{c}{1,64}$, so folgt:

$$c'' = \frac{c \cdot (1 - 0,075)}{1,64} = \frac{c}{1,77}$$

in voller Übereinstimmung mit der Messung von Michelson. So wird durch diese Messung die Formel von Rayleigh bestätigt.

1) S. Fußnote § 320. Bei Wiederholung der Foucaultschen Versuche in Luft hatte Michelson gefunden (für den leeren Raum s. S. 905) $c = 299850 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Das stimmt mit dem Perrötschen Werte (S. 905) $c = 299860 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ überein. Aus den astronomischen Methoden findet man heute nach Newcomb $c = 299860 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$, also ebenfalls in vollkommener Übereinstimmung.