УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

АНТОН БИЛИМОВИЋ
ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА

РАЦИОНАЛНА МЕХАНИКА

I

МЕХАНИКА ТАЧКЕ

ДРУГО ИЗДАЊЕ

Научна Књига
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1950

Штампарија и књиговезница „НАУЧНА КЊИГА" — погон II — Београд

САДРЖАЈ

ГЛАВА ДРУГА

Брзина покретне тачке

ГЛАВА ТРЕЋА

Убрзање покретне тачке

ОДЕЉАК ДРУГИ

Динамика тачке

ГЛАВА ЧЕТВРТА

Диференцијалне једначине кретања тачке и њихови интеграли

ГЛАВА ПЕТА

Елементарни проблеми кретања материјалне тачке

ГЛАВА ШЕСТА

Опште теореме о кретању материјалне тачке

ГЛАВА СЕДМА

Централне силе

ГЛАВА ОСМА

Општа теорија кретања неслободне тачке

ГЛАВА ДЕВЕТА

Кретање тачке по површини

ГЛАВА ДЕСЕТА

Кретање тачке по кривој линији

ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА

Кретање тачке са трењем

ГЛАВА ДВАНАЕСТА

Удар тачке о површину

ГЛАВА ТРИНАЕСТА

Општи принципи механике у примени на тачку. Канонична једначине

ГЛАВА ЧЕТРНАЕСТА

Статика тачке

ГЛАВА ПЕТНАЕСТА

Мале осцилације тачке

ГЛАВА ШЕСНАЕСТА

Релативно кретање тачке

ИЗ ПРЕДГОВОРА ПРВОМ ИЗДАЊУ

Овај уџбеник садржи један део предавања из рационалне механике, која сам, раније, држао на универзитету у Одеси, а од 1920 године на универзитету у Београду.

Избор и распоред материјала углавном је извршен под утицајем руске, нарочито петроградске, школе рационалне механике (Л. Эйлеръ, М. В. Остроградскій, П. Л. Чебышевъ, І. Сомовъ, Д. К. Бобылевъ, А. М. Ляпуновъ и др.), којој је припадао и мој драги учитељ Г. К. Сусловъ. Али ни класична дела и познати уџбеници других школа (енглеске, француске, немачке, италијанске) нису могли остати без утицаја на карактер мојих предавања.

Излагање предмета у овој књизи има теориски карактер. Уџбеник је намењен студентима математике, за које је од веће важности логичко-математичка структура механике него њене практичне примене.

Од почетка своје наставничке делатности ставио сам себи у задатак да у излагању механике што више искористим теорију вектора. Моја упорност у томе је нашла потпуно оправдање у савременој научној литератури, где се механички проблеми тумаче искључиво векторски.

У Београду, 6. V. 1939 г. А. Б.

ПРЕДГОВОР ДРУГОМ ИЗДАЊУ

У односу на прво, у овом издању учињене су незнатне промене. Разлике се састоје углавном у допунама: на неким местима је материјал првог издања проширен, а додат је сем тога и нов материјал. Сматрао сам за дужност да већ у механици тачке унесем у некој мери појмове коваријантних и контраваријантних величина и тако се, према наставним могућностима, приближим новој форми савременог научног излагања.

У вези са векторским излагањем мог курса механике учинићу ову примедбу. Мој учитељ проф. Г. К. Суслов у својим предавањима и уџбеницима (види 2-го издање његовог уџбеника „Основы аналитической механики". Киев 1911—1912 г.) искоришћавао је из савремене теорије вектора само појмове: слободног и везаног вектора, векторског сабирања и одузимања, момента, векторског извода и система вектора. Био је против коришћења те теорије у ширем облику. Није примењивао чак ни појмове скаларног и векторског производа. Супротно свом учитељу још од прве године мојих самосталних предавања механике у Одеси увео сам, тада први у Русији, у великој мери векторске операције. Целокупна, а нарочито руска литература, укључно и треће, посмртно издање (1946 г.) курса Г. К. Суслова под редакцијом проф. Н. Н. Бухгольц-а и В. К. Гольцман-а, показује да сам још 1915 године у Русији изабрао правилан пут за излагање универзитетског курса механике. Том путу сам следовао у својим предавањима механике и на Београдском универзитету разрађујући и даље тај курс уколико су дозвољавале прилике наставе тог предмета на нашем факултету.

Проф. В. Мишковић и проф. Т. Анђелић прочитали су нов рукопис и помогли ми при штампању књиге. На труду који су при томе уложили најсрдачније им захваљујем.

Изражавам захвалност радном колективу „Научне књиге" на великом залагању.

25. XI. 1948. А. Б.

УВОД

§ 0·1. Предмет рационалне механике

Анализа у ширем смислу те речи оперише само са једним основним елементом — са *количином*, која је у тесној вези са *бројем*. Анализа је апстрактна наука у том смислу што, иако поникла из материјалистичке основе, она је данас далеко отишла од бројања конкретних предмета и оперише често са облицима без непосредне конкретне природе. Ипак анализа и таква садржаја служи циљевима дубљег проучавања материјалистичког света, но она обухвата природне појаве само утолико уколико их можемо карактерисати помоћу једног или више бројева.

Геометрија уводи нов елемент — *простор*. Геометрија, у истом смислу као и анализа, без обзира на то што је поникла из практичних потреба, и још увек има огромну практичну примену, може се у својој теориској форми сматрати као апстрактна наука. Предмет геометрије сачињавају сва расуђивања и све конструкције које се односе било на стварни простор било на логички замишљени простор.

Апарат анализе и геометрије није довољан за описивање и класификацију свега што се проучава у природи. Појаве које проучавамо променљиве су и њихова промена стоји у вези са трећим елементом — са *временом*. Апстрактна наука, у истом смислу као и анализа и геометрија, која третира питања промене просторних облика у току времена, зове се *кинематика* (од грчке речи κίνημα — кретање).

Количина, простор и време нису једини елементи који се појављују у природи. Поред њих узимамо у обзир *материјалност*; ову особину уводимо помоћу *масе* као количине *материје*. Наука која се бави појавама са учешћем маса део је науке о природи, физике у ширем смислу те речи. Али, као што се из практичних наука о бројању, о мерењу земље итд. постепено издвојио теориски део и развиле се апстрактне науке, које се служе индуктивном и дедуктивном методом, — исто тако се из проучавања кретања и мировања материјалних тела издвојила нова дисциплина, која се зове *динамика* од грчке речи δύναμις — сила. Она је добила овај назив отуда што појам силе, који се може извести из наведених основних појмова, игра веома значајну улогу у овој науци.

Кинематика и динамика су две науке различите по својој логичкој структури, јер последња уводи масу и силу, које не улазе у кинематику. Али је веза између ове две науке толико јака да их она спаја у једну дисциплину, која се зове *механика*. Реч „механика" први пут је написана код Аристотела у његовој „Физици" (μηχανικά προβλήματα).

Пошто се под механиком често пута разумеју и оне дисциплине које имају практичан карактер, то се механика, као наука у горенаведеном апстрактном смислу, зове *теориска* или *рационална механика*. Назив „рационална" припада Њутну[1]). За универзитетске уџбенике механике тим називом се готово стандардно служе и сад писци у француској и италијанској врло богатој и значајној литератури; тај се назив паралелно са другим називима (теориска, општа, чиста, а по методи излагања — аналитичка, векторска) употребљује и у другим земљама, чак и у Немачкој. На Београдском универзитету тог назива су се придржавали универзитетски наставници и пре мене, па и мој претходник проф. М. Миланковић.

§ 0·2. Подела рационалне механике

Као што смо видели, рационална механика има два основна дела — кинематику и динамику. Кинематика се бави кретањем геометриских облика — тачака, линија, површина и геометриских тела. Динамика оперише са материјалним објектима. Грана динамике која се бави кретањем материјалних тела зове се *кинетика*, а грана која третира питања о телима која мирују зове се *статика*.

[1]) Код Њутна у предговору Принципија стоји: Mechanicam vero duplicem veteres constituerunt: *rationalem*, quae per demonstrationes accurate procedit, et *practicam*.

Према томе поделу рационалне механике можемо претставити овом схемом:

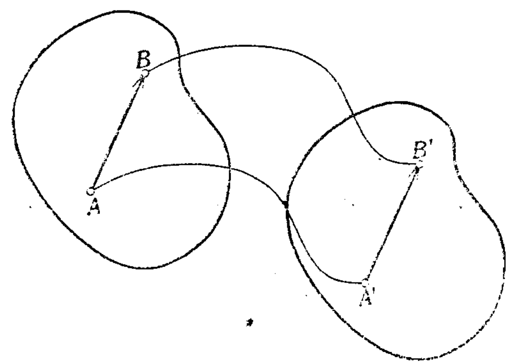
рационална механика
- кинематика
- динамика
  - кинетика
  - статика

§ 0·3. Кинематика тачке. Транслаторно кретање непроменљивог система

Као што смо навели, кинематика се бави кретањем геометриских објеката. Пошто геометриску тачку треба сматрати као најпростији геометриски елемент, треба пре свега проучавати *кинематику тачке*.

Замислимо сад један који било геометриски објект — линију, површину, тело или скуп таквих објеката. Ако се у току времена растојање између две ма које тачке таквог геометриског облика не мења, он се зове *непроменљив геометриски систем*. Такав систем може да мења свој положај у простору, но он увек задржава исти облик, исту конфигурацију својих делова.

Претпоставимо да се такав непроменљив систем креће. Изаберимо у њему две *произвољне* тачке A и B (слика 0). Дуж AB



Слика 0

увек има исту дужину, и у општем случају креће се на произвољан начин.

Ако за све време кретања система дуж AB остаје паралелна сама себи, кретање непроменљивог система зове се *транслаторно*.

Транслаторно кретање има ову важну особину. Ако знамо кретање једне тачке система, на пр. тачке A, кретање свих осталих тачака, на пр. тачке B, потпуно је одређено. Доиста, сваком положају тачке A одговара иста вредност вектора положаја тачке B у односу на тачку A, тј.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''} = \cdots$$

Према томе транслаторно кретање непроменљивог система потпуно је одређено кретањем једне тачке. На тај начин кинематика тачке стоји у вези са транслаторним кретањем сваког непроменљивог система.

§ 0·4. Појам материјалне тачке

Узмимо сад *непроменљив материјални систем*, тј. такав материјални систем, чији делови не мењају свој релативни положај један према другом; са њим везани геометриски систем такође је непроменљив. Непроменљив материјални систем зове се и *чврсто тело*. Ако се такво тело креће транслаторно, његово кретање можемо одредити кретањем само једне тачке тог тела. Ту тачку можемо сматрати као заступника транслаторно покретног чврстог тела. Тачка која заступа транслаторно покретно чврсто тело одређене масе зове се *материјална тачка*. То је геометриска тачка са којом је везана целокупна маса транслаторно покретног чврстог тела. Маса такве тачке може бити коначна, кад чврсто тело има коначну масу, и бесконачно мала, кад је тело бесконачно мало. Материјалне тачке бесконачно малих маса нарочито су важне из тог разлога што на такве тачке можемо поделити сваки материјални систем ма у каквом кретању.

Појам материјалне тачке важан је не само за проучавање транслаторно покретних тела. У механици система доказује се, да се у случају произвољног кретања сваког материјалног система, било непроменљивог било промењљивог, центар маса система креће на исти начин као што би се кретала материјална тачка, која има масу система, а на њу дејствује резултанта свих сила што дејствују на систем. Овај важан став треба сматрати као праву подлогу динамике материјалне тачке.

§ 0·5. Механика тачке

Кинематика геометриске тачке, која је довољна за проучавање транслаторног кретања геометриских облика, и динамика материјалне тачке, која је довољна и за проучавање транслаторног кретања чврстог тела и за проучавање кретања центра маса сваког система, заједно, сачињавају *механику тачке*, која претставља предмет ове књиге.

§ 0·6. Ознаке из теорије вектора

При излагању у овој књизи претпостављамо да је читаоцу позната *теорија вектора*. Овде ћемо навести само објашњење ознака које употребљујемо.

Вектор означавамо или са $\overrightarrow{AB}$, где је A почетак а B крај вектора, или једним словом са стрелицом горе, на пр. $\vec{r}, \vec{v}$. У последњем случају се интензитет вектора означује истим словом без стрелице на пр. r, v. Јединични вектор или *орт* означавамо или нарочитим словом, на пр. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, или пишемо овако: $ort\ \vec{r}$, што значи орт вектора $\vec{r}$, или најзад овако: $\vec{r}_0$, додавањем ознаци вектора индекса нула.

Ако на правој ма каквог вектора узмемо орт независно од смера тог вектора, можемо увести *алгебарску вредност вектора* у односу на тај орт. Она је једнака интензитету вектора, ако је смер изабраног орта исти са смером вектора, а разликује се знаком од интензитета, ако су орт и вектор супротног смера. Тако, на пр., израз $v_x \vec{i}$ за компоненту вектора $\vec{v}$ у правцу x осе са ортом $\vec{i}$ садржи алгебарску вредност v_x те компоненте.

Скаларни производ означујемо са $(\vec{A}\,\vec{B})$, векторски са $[\vec{A}\,\vec{B}]$.

Векторски извод означујемо са $\frac{d\vec{r}}{dt}$ или са $\dot{\vec{r}}$, ако се диференцирање врши по познатом аргументу.

Друге ознаке, на пр. за векторско сабирање, одузимање, за градијент итд., толико су уједначене да није потребно да их наводимо.

§ 0·7. Литература

Од главних класичних дела, која припадају творцима механике, можемо набројити ова :

'Αρχιμήδης (287—212 пр. Хр.) — Περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπικῶν, ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων (О уравнотеженим равнима или центри тешких равни). Има у немачком преводу E. Nizze. 1824

G. Galilei (1564—1642) — Discorsi e dimonstracioni matematiche. Leiden 1638. Има у немачком преводу у збирци Klassiker-Bibliothek Ostwald'a.

I. Newton (1642—1726). — Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686. Преведено је на више језика.

L. Euler (1707—1783) — Mechanica sive motus scientia analitice exposita. Petropoli 1736.

— Theoria motus corporum solidorum. Gryphiswaldiae et Rostockii 1765. Има немечки превод тих књига од J. Wolfers'a.

J. D'Alembert (1717—1783) — Traité de dynamique. Paris 1743.

J. L. Lagrange (1736—1813) — Mécanique analytique. Paris 1788.

P. S. Laplace (1749—1827) — Mécanique céleste. Paris 1799—1825.

L. Poinsot (1777—1859) — Éléments de statique. Paris 1804.

C. G. J. Jacobi (1804 — 1851) — Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866.

W. R. Hamilton (1805—1865) — Lectures on quaternions. London 1853.

H. Grassmann (1809—1881) — Ausdehnungslehre. Stettin 1844.

H. Poincaré (1854—1912) — Leçons de mécanique céleste. Paris 1905—10.

Опширнију литературу о механици могуће је наћи у овим књигама:

— Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. IV. Mechanik. Leipzig 1901—1935.

— Handbuch der Physik von Geiger und K. Scheel. B. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin 1927.

Читаоцу, који би желео да се упозна и са другим курсевима механике у границама механике тачке, можемо препоручити ове књиге (ред писаца је алфабетски):

P. Appell — Traité de mécanique rationnelle. T. I. Statique. Dynamique du point. Paris. Више издања.

И. Арновљевић — Основи теориске механике. I. 1947.

Д. Бобылевъ. — Курсъ аналитической механики. I. Часть кинематическая. С.-Петербургъ 1885. II. Часть кинетическая. Выпускъ первый: Механика матерьяльной точки. С.-Петербургъ 1888.

T. Levi-Civita e U. Amaldi — Lezioni di meccanica razionale. V. I. Cinematica. Principi e statica. V. II. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Parte prima. Bologna 1922—27.

R. Marcolongo — Meccanica razionale. Milano 1905. Немачки превод H. Timerding'a — Theoretische Mechanik. Leipzig 1911.

J. Nielsen — Vorlesungen über elementare Mechanik. Превод W. Fenchel'a. Berlin 1935.

P. Painlevé — Cours de mécanique. T. I. Paris 1930.

С. Г. Петровичъ — Курсъ теоретической механики.
Часть I. Кинематика. С.-Петербургъ 1912.
Частъ II. Динамика точки. С.-Петербургъ 1913.

К. Стојановић — Механика. Београд 1912.

Г. К. Сусловъ — Основы аналитической механики. Т. I. Часть I. Кинематика. Часть II. Динамика точки. Изд. 2. Кievъ 1911.

Г. К. Суслов — Теоретическая механика. Издание третье посмертное. Москва, Ленинград. 1946.

E. T. Whittaker — A treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge 1904. Треће издање 1927.

ОДЕЉАК ПРВИ

КИНЕМАТИКА ТАЧКЕ

ГЛАВА ПРВА

Коначне једначине кретања. Путања. Закон пута

§ 1·1 Одређивање положаја тачке у простору. Вектор положаја. Координате тачке

Пре проучавања кретања геометриске тачке навешћемо неколико познатих начина за одређивање положаја тачке у простору.

У синтетичкој геометрији положај тачке одређује се као пресек линија или површина чије се конструисање врши под датим условима.

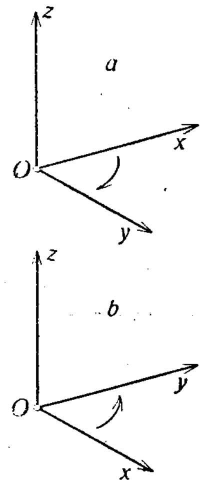
У теорији вектора одређивање положаја тачке, рецимо M, врши се помоћу вектора $\overrightarrow{OM}$ што спаја одређену тачку O простора са тачком M. То је *вектор положаја* тачке M у односу на тачку O.

Аналитичка геометрија даје за одређивање положаја тачке свој метод — метод координата. Координате тачке у простору су три броја, чије вредности одређују положај тачке. Има различитих начина — координатних система — помоћу којих се уводе таква три броја. Навешћемо неке од тих система.

§ 1·11 Декартов систем координата, ортогонални и косоугли

У Декартову систему координата узимамо три осе, рецимо Ox, Oy, Oz, које пролазе кроз исту тачку O, а не припадају истој равни. Оне чине *триједар* оса $Oxyz$. Ако свака оса стоји управно на двема осталим, триједар је *ортогоналан* и систем се зове ортогоналан. У противном случају он је *косоугли*.

Карактер оријентације оса може да буде или онај, који је, на пример, за ортогонални триједар показан на слици a (сл. 1, a), или онај показан на слици b (сл. 1, b). Први триједар се зове *леви* јер смерови оса Ox, Oy, Oz редом одговарају палцу, кажипрсту и средњем прсту леве руке у одговарајућем положају, други *десни* према десној руци. Ми ћемо употребљавати леви триједар. У том триједру, гледајући из оног дела простора куд је наперена оса Oz, видимо да се оса Ox креће у смеру кретања казаљке на часовнику, кад из свог положаја прелази преко угла од 90^0 у положај осе Oy.



Слика 1

Положај ма које тачке M простора према ортогоналном триједру $Oxyz$ одређен је помоћу бројева x, y, z. То су мерни бројеви, са одговарајућим знацима, пројекција вектора положаја $\overrightarrow{OM}$ на осе триједра. Вектор $\overrightarrow{OM}$ може да се сматра као збир три компоненте: $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ (сл. 2) у правцу одговарајућих оса. Дакле имамо

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

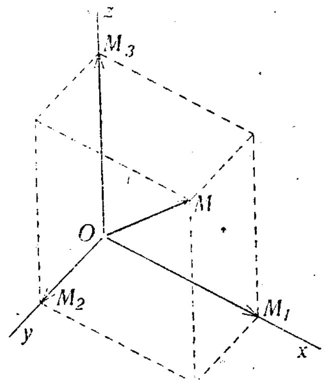
Пошто свака од тих компонената може бити претстављена као производ орта осе (вектора јединичне дужине) и пројекције вектора на ту осу, пишемо основну векторску једначину за ортогонални систем овако

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где су $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *основни ортови*, тј. ортови оса Ox, Oy, Oz.

У случају ортогоналног система може се свака од координата сматрати као скаларни производ вектора положаја и одговарајућег основног орта. Тако, на пример, имамо

$$x = (\overrightarrow{OM}, \vec{i}).$$



Слика 2

Према косоуглом триједру положај тачке можемо одредити на више начина. Један од начина састоји се у растављању вектора положаја $\overrightarrow{OM}$ (сл. 3) на три компоненте $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ дуж оса косоуглог триједра $Oxyz$. Ако ортове тих оса означимо са $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, једначина се може написати

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,$$

где су x, y, z три скалара, који се узимају за косоугле координате.

За одређивање положаја тачке у равни понекад се и у механици употребљују комплексни бројеви.

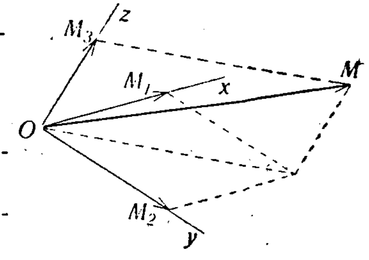
Ако су x и y Декартове координате тачке, комплексни број

$$z = x + yi,$$

где је $i = \sqrt{-1}$, својом вредношћу одређује положај те тачке,

После увођења поларних координата ρ и θ помоћу једначина

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta,$$



Слика 3

комплексни број се може изразити

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Помоћу имагинарног степена броја e, основе природних логаритама, комплексу можемо дати симболичку форму

$$z = \rho e^{\theta i} = e^{\alpha + \theta i},$$

где смо ставили

$$\rho = e^{\alpha}.$$

Наведена симболичка форма сад се нарочито често примењује у проучавању различитих специјалних кретања.

§ 1·111 Контраваријантне и коваријантне координате тачке

У општем случају можемо за одређивање положаја тачке у простору помоћу праволиниских координата узети три произвољна некомпланарна вектора[1])

$$(1) \qquad \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$$

са заједничким почетком O; они образују триједар вектора, који ћемо означити са T. Вектори (1) зову се *координатни вектори* тог триједра.

[1]) У овом параграфу масним словом **e** означаваћемо векторе и ради упрошћавања штампања нећемо додавати стрелицу.

Векторска једначина

(2) $$\overrightarrow{OM} = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3$$

уводи три скалара

(3) $$x^1,\ x^2,\ x^3$$

који се зову *контраваријантне координате* тачке у односу на дати триједар T.

Ако су координатни вектори (1) ортови, контраваријантне координате (3) су алгебарске вредности компонената вектора $\overrightarrow{OM}$ растављена дуж тих ортова.

Ако је дат вектор $\overrightarrow{OM}$, контраваријантне координате одређују се из једначине (2) скларним множењем одговарајућим векторским производом. Тако, на пр., множењем са $[\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3]$ добијамо

$$(\overrightarrow{OM},\ [\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3]) = x^1\,(\mathbf{e}_1\,[\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3]);$$

а одатле и из сличних једначина изводимо

(4) $$x^1 = \frac{1}{\Delta}\,(\overrightarrow{OM},\ [\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3]),\quad x^2 = \frac{1}{\Delta}\,(\overrightarrow{OM},\ [\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_1]),\quad x^3 = \frac{1}{\Delta}\,(\overrightarrow{OM},\ [\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2]),$$

где је

$$\Delta = (\mathbf{e}_1\,[\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3]).$$

Уведимо сад нове векторе

(5) $$\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2,\ \mathbf{e}^3$$

(6) $$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{\Delta}\,[\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3],\quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{\Delta}\,[\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_1],\quad \mathbf{e}^3 = \frac{1}{\Delta}\,[\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2].$$

Вектори (5) су *коњуговани* са векторима (1). Триједар конструисан од вектора (5) означимо са T'. Вектори (5) су *коњуговани координатни вектори.*

Између вектора (1) и (5) постоје везе

$$(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}^j) = \delta_i{}^j,$$

где је $\delta_i{}^j$ такозвани Кронекеров симбол који је једнак 1 кад је $i = j$, а нули кад је $i \neq j$.

Ако на векторе (5) применимо исти поступак који смо применили на векторе (1) за добијање вектора (5), добићемо поново векторе (1). Заиста, према једначинама (6), за нови, рецимо први, вектор имамо

(7) $$\mathbf{e}' = \frac{1}{\Delta'}\,[\mathbf{e}^2\,\mathbf{e}^3],$$

где је

$$\Delta' = (\mathbf{e}^1\,[\mathbf{e}^2\,\mathbf{e}^3]).$$

За израчунавање (7) искористимо вредности (6); налазимо

$$[\mathbf{e}^2\,\mathbf{e}^3] = \frac{1}{\Delta^2}\,[[\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_1]\,[\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2]] = \frac{1}{\Delta^2}\,(\mathbf{e}_2\,[\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_1])\,\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\Delta}\,\mathbf{e}_1,$$

при чему смо искористили познати образац из теорије вектора у облику

$$[\,[\vec{A}\,\vec{B}]\,[\vec{C}\,\vec{D}]\,] = (\vec{A}\,[\vec{B}\,\vec{D}])\,\vec{C} - (\vec{A}\,[\vec{B}\,\vec{C}])\,\vec{D}.$$

Помоћу добијене вредности из (7) изводимо

(8) $$\mathbf{e}' = \frac{1}{\Delta'}\,[\mathbf{e}^2\,\mathbf{e}^3] = \frac{1}{\Delta\Delta'}\,\mathbf{e}_1\,.$$

При израчунавању производа $\Delta\Delta'$ имамо за Δ'

$$\Delta' = (\mathbf{e}^1\,[\mathbf{e}^2\,\mathbf{e}^3]) = (\mathbf{e}^1,\ \frac{1}{\Delta}\,\mathbf{e}_1) = \frac{1}{\Delta^2}\,(\mathbf{e}_1\,[\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3]) = \frac{1}{\Delta}$$

и према томе можемо дефинитивно написати

$$\Delta\Delta' = 1.$$

На тај начин из (8) долазимо до

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}_1\,.$$

Примена истог поступка на векторе (5) довела нас је, дакле, поново до вектора (1). И тако можемо тврдити да су вектори (1) и (5) и њихови триједри T и T' међу собом коњуговани.

Помоћу вектора (5) контраваријантне координате (3) тачке M можемо из (4) изразити овако

(9) $$x^1 = (\overrightarrow{OM},\ \mathbf{e}^1),\quad x^2 = (\overrightarrow{OM},\ \mathbf{e}^2),\quad x^3 = (\overrightarrow{OM},\ \mathbf{e}^3).$$

Ове једначине показују да се контраваријантне координате изражавају скаларним производима вектора положаја тачке и координатних вектора коњугованог триједра.

С друге стране, ако узмемо векторе (5) и вектор положаја претставимо векторским збиром

(10) $$\overrightarrow{OM} = x_1\,\mathbf{e}^1 + x_2\,\mathbf{e}^2 + x_3\,\mathbf{e}^3,$$

величине су

$$(11) \qquad x_1, x_2, x_3$$

коваријантне координате тачке у односу на полазни триједар T. Ознаке коваријантних координата индексима доле и контраваријантних индексима горе усвојене су свуда у савременој литератури.

Помоћу вектора (1) триједра T коваријантне координате изражавају се вредностима

$$(12) \qquad x_1 = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_1),\ x_2 = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_2),\ x_3 = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_3).$$

Коваријантне координате у односу на триједар T су у исто време контраваријантне координате у односу на конјугован триједар T'.

Ако су вектори (1) ортови, коваријантне координате (11) не претстављају ништа друго до пројекције вектора положаја на осе тих ортова.

Ако су вектори (1) отогонални ортови, конјуговани вектори (5) су исто тако ортогонални ортови; у овом случају контраваријантне координате имају вредности одговарајућих коваријантних координата.

Објасниһемо зашто се једне зову ко-, а друге контра-варијантне координате.

Ови називи стоје у вези са начином како се понашају одговарајуће координате при трансформацији координата, тј. при прелазу на одређивање положаја тачке у односу на други координатни триједар.

Уведимо поред триједра T и њему конјугованог T' нове триједре: T^* са координатним векторима

$$(13) \qquad \mathbf{e}_1^*,\ \mathbf{e}_2^*,\ \mathbf{e}_3^*$$

и триједар $T^{*\prime}$, конјугован триједру T^*, са координатним векторима

$$\mathbf{e}^{1*},\ \mathbf{e}^{2*},\ \mathbf{e}^{3*}.$$

Узмимо да се нови координатни вектори (13) изражавају помоћу старих векторским једначинама

$$(14) \qquad \begin{aligned} \mathbf{e}_1^* &= l_1\, \mathbf{e}_1 + m_1\, \mathbf{e}_2 + n_1\, \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2^* &= l_2\, \mathbf{e}_1 + m_2\, \mathbf{e}_2 + n_2\, \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3^* &= l_3\, \mathbf{e}_1 + m_3\, \mathbf{e}_2 + n_3\, \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Означимо коваријантне координате вектора $\overrightarrow{OM}$ поново са

$$(11) \qquad x_1, x_2, x_3,$$

и одредимо исто тако коваријантне координате истог вектора $\overrightarrow{OM}$ у односу на триједар T^*; означимо њихове вредности са

$$x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*.$$

Како је, слично као у (12),

$$x_1^* = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_1^*),$$

са вредношћу $\mathbf{e}_1^*$ из једначина (14) имамо

$$x_1^* = l_1 (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_1) + m_1 (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_2) + n_1 (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_3).$$

На тај начин из ове и сличних једначина за друге координате можемо написати

$$(15) \qquad \begin{aligned} x_1^* &= l_1\, x_1 + m_1\, x_2 + n_1\, x_3, \\ x_2^* &= l_2\, x_1 + m_2\, x_2 + n_2\, x_3, \\ x_3^* &= l_3\, x_1 + m_3\, x_2 + n_3\, x_3. \end{aligned}$$

При упоређивању једначина (14) и (15) видимо да се у њима појављује иста схема коефицијената

$$(16) \qquad \begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{matrix}$$

и то у истом распореду при изражавању нових помоћу старих координата. Ова особина сагласности примене схеме (16), с једне стране, при промени координатних вектора, с друге, при трансформацији координата изражава се латинским префиксом *ко*.

Ако се сад постави задатак да се одреде контраваријантне координате вектора $\overrightarrow{OM}$ у односу на нови триједар T^*, и означимо их са

$$x^{1*},\ x^{2*},\ x^{3*},$$

треба искористити векторске једначине

$$\overrightarrow{OM} = x^1\, \mathbf{e}_1 + x^2\, \mathbf{e}_2 + x^3\, \mathbf{e}_3 = x^{1*}\, \mathbf{e}_1^* + x^{2*}\, \mathbf{e}_2^* + x^{3*}\, \mathbf{e}_3^*.$$

Ако у последњи збир унесемо, место вектора $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$ њихове вредности из (14) и изједначимо коефицијенте уз векторе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, добићемо једначине

$$x^1 = l_1\, x^{1*} + l_2\, x^{2*} + l_3\, x^{3*},$$
$$x^2 = m_1\, x^{1*} + m_2\, x^{2*} + m_3\, x^{3*},$$
$$x^3 = n_1\, x^{1*} + n_2\, x^{2*} + n_3\, x^{3*}.$$

При упоређивању ових једначина за трансформацију контраваријантних координата видимо да схема коефицијената (16) служи за састављање и ових једначина, но у овом случају је, прво, ред коефицијената другојачији — врсте и ступци су замењени — и, друго, схема даје не нове координате помоћу старих, већ, обратно, старе помоћу нових. Ова особина супротности изражава се латинским префиксом *контра*.

Даћемо још важне везе између ко- и контра-варијантних координата вектора, кад је триједар T окарактерисан помоћу скаларних производа својих координатних вектора. Означимо те скаларне производе схемом

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \hline \mathbf{e}_1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \mathbf{e}_2 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \mathbf{e}_3 & g_{31} & g_{32} & g_{33}\,, \end{array}$$

где је

$$(\mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j\, \mathbf{e}_i) = g_{ij} = g_{ji}\,.$$

Поћи ћемо од векторске једначине

$$\overrightarrow{OM} = x^1\, \mathbf{e}_1 + x^2\, \mathbf{e}_2 + x^3\, \mathbf{e}_3\,.$$

Да бисмо одредили коваријантне координате помножићемо скаларно ову векторску једначину редом векторима $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и добићемо

$$\begin{aligned} x_1 &= (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_1) = g_{11}\, x^1 + g_{12}\, x^2 + g_{13}\, x^3, \\ x_2 &= (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_2) = g_{21}\, x^1 + g_{22}\, x^2 + g_{23}\, x^3, \\ x_3 &= (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_3) = g_{31}\, x^1 + g_{32}\, x^2 + g_{33}\, x^3. \end{aligned} \tag{18}$$

Да бисмо одредили контраваријантне координате помоћу коваријантних, можемо поступити на два начина. Можемо, прво, решити једначине (18) по x^1, x^2, x^3, и добићемо

$$\begin{aligned} x^1 &= g^{11}\, x_1 + g^{12}\, x_2 + g^{13}\, x_3\,, \\ x^2 &= g^{21}\, x_1 + g^{22}\, x_2 + g^{23}\, x_3\,, \\ x^3 &= g^{31}\, x_1 + g^{32}\, x_2 + g^{33}\, x_3\,, \end{aligned} \tag{19}$$

где смо са g^{ij} означили вредност одговарајућег минора детерминанте

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{20}$$

подељена самом детерминантом; на пр.,

$$g^{21} = \frac{-(g_{12}\, g_{33} - g_{32}\, g_{13})}{g}\,. \tag{21}$$

На други начим можемо једначине (19) добити из једначине

$$\overrightarrow{OM} = x_1\, \mathbf{e}^1 + x_2\, \mathbf{e}^2 + x_3\, \mathbf{e}^3$$

скаларним множењем редом векторима $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ и, на пр., добићемо

$$x^1 = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}^1) = x_1\, (\mathbf{e}^1\, \mathbf{e}^1) + x_2\, (\mathbf{e}^1\, \mathbf{e}^2) + x_3\, (\mathbf{e}^1\, \mathbf{e}^3).$$

Да су овако добијене једначине идентичне са једначинама (19) треба показати да је

$$(\mathbf{e}^i\, \mathbf{e}^j) = g^{ij}.$$

Показаћемо да је, на пр.,

$$(\mathbf{e}^2\, \mathbf{e}^1) = g^{21}.$$

Ако ставимо вредности (6) у леву страну ове једначине, она ће постати

$$(\mathbf{e}^2\, \mathbf{e}^1) = \frac{1}{\Delta^2}\, ([\mathbf{e}_3\, \mathbf{e}_1]\, [\mathbf{e}_2\, \mathbf{e}_3])\,;$$

одавде, на основу познатог обрасца из теорије вектора

$$([\vec{A}\vec{B}]\, [\vec{C}\vec{D}]) = (\vec{A}\vec{C})\, (\vec{B}\vec{D}) - (\vec{A}\vec{D})\, (\vec{B}\vec{C}),$$

имамо

$$(\mathbf{e}^2\, \mathbf{e}^1) = \frac{1}{\Delta^2} \Big\{ (\mathbf{e}_3\, \mathbf{e}_2)\, (\mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_3) - (\mathbf{e}_3\, \mathbf{e}_3)\, (\mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2) \Big\} = -\frac{1}{\Delta^2}\, (g_{12} g_{33} - g_{32} g_{13})$$

или, на основу (21),

$$(\mathbf{e}^2\, \mathbf{e}^1) = \frac{1}{\Delta^2}\, g\, g^{21}.$$

Остаје још само да покажемо да је

$$\Delta^2 = g,$$

а то следује непосредно из теореме о множењу детерминаната, јер је

$$(\mathbf{e}_1\,[\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3])^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_3) \end{vmatrix}.$$

Тиме смо и на други начин потврдили једначине (19).

Најзад, показаћемо још како се изражава растојање тачке од почетка координатног триједра. Како је квадрат тог растојања квадрат вектора положаја $\overrightarrow{OM}$, треба било подигнути на квадрат леву и десну страну једначина

$$(2) \qquad \overrightarrow{OM} = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3\,,$$

$$(10) \qquad \overrightarrow{OM} = x_1\,\mathbf{e}^1 + x_2\,\mathbf{e}^2 + x_3\,\mathbf{e}^3\,,$$

било измножити скаларно стране ових једначина. Добићемо ова три израза за квадрат вектора $\overrightarrow{OM}$

$$\overline{OM}^2 = g_{11}\,x^{1\,2} + g_{22}\,x^{2\,2} + g_{33}\,x^{3\,2} + 2g_{23}\,x^2\,x^3 + 2g_{31}\,x^3\,x^1 + 2g_{12}\,x^1\,x^2,$$

$$\overline{OM}^2 = g^{11}\,x_1{}^2 + g^{22}\,x_2{}^2 + g^{33}\,x_3{}^2 + 2g^{23}\,x_2\,x_3 + 2g^{31}\,x_3\,x_1 + 2g^{12}\,x_1\,x_2,$$

$$\overline{OM}^2 = x_1\,x^1 + x_2\,x^2 + x_3\,x^3.$$

Израз квадрата растојања игра врло важну улогу у геометрији и назива се *метричка форма* у датом случају за дате линиске координате. Наведени обрасци изражавају метричку форму 1) помоћу само контраваријантних, 2) помоћу само коваријантних координата и, најзад, 3) помоћу контраваријантних и коваријантних координата тачке, односно вектора положаја. Најпростији облик има метричка форма која је изражена помоћу контра- и ко-варијантних координата тачке. Једноставност овог облика је главни разлог због кога се у случају косоуглог система уводе, напоредо са контраваријантним координатама, коваријантне координате тачке, односно вектора положаја.

Слично метричкој форми могу се написати и изрази за скаларни производ два вектора $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ који су дати својим контраваријантним односно коваријантним кординатама. Ако координате вектора $\overrightarrow{OM}$ означимо са x^1, x^2, x^3 односно x_1, x_2, x_3, а вектора $\overrightarrow{ON}$ са y^1, y^2, y^3 односно y_1, y_2, y_3, скаларни производ има једну од ових вредности:

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = g_{11}\,x^1\,y^1 + g_{22}\,x^2\,y^2 + g_{33}\,x^3\,y^3 + \\ + g_{23}\,(x^2\,y^3 + x^3\,y^2) + g_{31}\,(x^3\,y^1 + x^1\,y^3) + g_{12}\,(x^1\,y^2 + x^2\,y^1);$$

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = g^{11}\,x_1\,y_1 + g^{22}\,x_2\,y_2 + g^{33}\,x_3\,y_3 + \\ + g^{23}\,(x_2\,y_3 + x_3\,y_2) + g^{31}\,(x_3\,y_1 + x_1\,y_3) + g^{12}\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1);$$

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = x_1\,y^1 + x_2\,y^2 + x_3\,y^3 = x^1\,y_1 + x^2\,y_2 + x^3\,y_3.$$

Кратко ове обрасце можемо написати овако:

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \sum_{ij} g_{ij}\,x^i y^j = \sum_{ij} g^{ij}\,x_i\,y_j = \sum_i x_i\,y^i = \sum_i x^i\,y_i$$

или, најзад, у облику

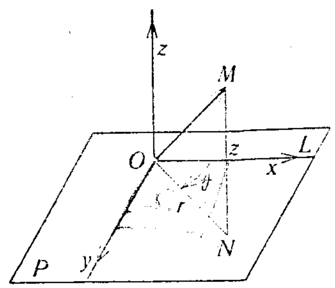
$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = g_{\alpha\beta}\,x^\alpha\,y^\beta = g^{\alpha\beta}\,x_\alpha\,y_\beta = x_\alpha\,y^\alpha = x^\alpha\,y_\alpha\,,$$

ако применимо правило да се при употреби грчких слова за два индекса, знак збира за те индексе изоставља.

§ 1·12 Поларно-цилиндрични систем

Нека је дата у простору (сл. 4) оријентисана раван P, у њој *поларна* оса OL и на тој оси тачка O, *пол* система.

Положај ма које тачке могуће је одредити: 1. растојањем z тачке M од равни P са одговарајућим знаком према оријентацији те равни, 2. растојањем r пројекције N тачке M на раван P од тачке O и 3. углом θ, што гради потег r са осом OL. Гледајући на позитивну страну равни P, угао θ се рачуна позитиван у смеру кретања казаљке на часовнику. Три величине r, θ, z представљају *поларно-цилиндричне* координате тачке у простору. Величине r и θ су *поларне* координате тачке у равни.



Слика 4

Ако конструишемо ортогонални триједар оса $Oxyz$ тако да осе Ox и Oy леже у равни P, оса Ox се поклапа са OL и Oz иде на позитивну страну од равни P, између поларно-цилиндричних и Декартових кордината можемо поставити ове везе:

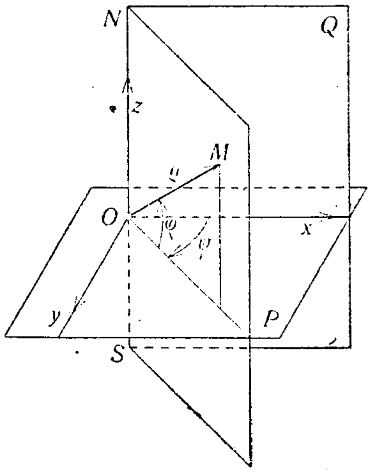
$$(1) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z\,.$$

Обратно, поларно-цилиндричне координате изражавају се овако помоћу Декартових:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\qquad z=z.$$

§ 1·13 Сферни систем

Назначимо у простору тачку O, *центар* система, осу SON и полураван Q чија граница је та оса (сл. 5). Сходно географским елементима, оса SON зове се *поларна оса*, полураван Q *први меридијан*, раван управна на оси кроз тачку O — *раван екватора.* Полураван што пролази кроз произвољну тачку M простора претставља *меридијан* те тачке.



Слика 5

Положај тачке у том систему одређујемо: 1. дужином потега $OM=\rho$, 2. углом φ што гради овај потег са равни екватора; он се рачуна као позитиван према N, а као негативан према S. Тај угао одговара *географској ширини.* Место њега можемо узети угао θ између потега и осе ON, који се зове *поларно растојање.* Јасно је да је $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$. 3. Углом ψ између првог меридијана Q и меридијана тачке M. Он се рачуна у равни екватора у смеру кретања казаљке на часовнику кад гледамо на ту раван из N. Три величине ρ, φ (или θ), ψ зову се *сферне* координате тачке у простору.

Конструишимо поново ортогонални триједар са почетком у тачки O, са осама Ox и Oy у равни екватора, при чему Ox оса лежи у првом меридијану, а оса Oz је наперена у правцу ON осе. Тада једначине за одређивање Декартових кордината помоћу сферних изгледају овако:

$$(1)\qquad x=\rho\cos\varphi\cos\psi,\quad y=\rho\cos\varphi\sin\psi,\quad z=\rho\sin\varphi.$$

Обратно, сферне кординате се изражавају помоћу Декартових овако:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \psi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot$$

§ 1·14 Елиптичке координате

Зауставимо се прво на случају елиптичких координата тачке у равни.

Нека је дата у равни елипса једначином

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

при чему претпостављамо да је

$$a>b.$$

Сматраћемо ову елипсу као *основну.*

Једначини

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1$$

одговара за сваку вредност λ конфокална централна крива, јер растојање c фокуса од центра за све ове криве задовољава услов

$$c^2=(a^2-\lambda)-(b^2-\lambda)=a^2-b^2=\text{const.}$$

Различитим вредностима променљиве λ одговарају криве и то за:

$\lambda<b^2$ елипса,

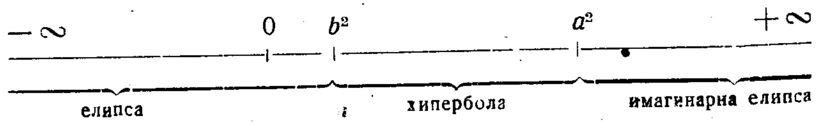
$\lambda=b^2$ — двострука дуж између тачака $(-c,\ 0)$ и $(+c,\ 0)$, која прелази у две двоструке полуправе ван ових тачака у правцу x осе,

$b^2<\lambda<a^2$ — хипербола,

$\lambda=a^2$ — двострука y оса,

$\lambda>a^2$ — имагинарна елипса.

Наведени услови, без дегенеративних случајева, приказани су на овој схеми



Кроз сваку тачку равни са координата x, y пролазе две криве, што одговарају коренима λ_1 и λ_2 квадратне једначине (1) по λ. Ако ту једначину напишемо у облику

$$(2) \qquad Q(\lambda) = x^2(b^2 - \lambda) + y^2(a^2 - \lambda) - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0,$$

и обратимо пажњу на промену знака функције $Q(\lambda)$ при промени λ, долазимо до ове таблице

λ	$-\infty$	b^2	a^2
$Q(\lambda)$	$-$	$+$	$-$

$\lambda_1 \qquad \lambda_2$

Из ње следује да наша једначина има један корен λ_1, између $-\infty$ и b^2, којем одговара елипса, и други корен λ_2 између b^2 и a^2; овом корену одговара хипербола. На тај начин свакој тачки у равни одговарају два броја

$$(3) \qquad \lambda_1, \ \lambda_2,$$

које можемо сматрати као *елиптичке координате тачке у равни.*

Ако су дате Декартове координате x, y, за одређивање елиптичких координата (3) исте тачке треба решити једначину (2) по λ.

Обратно, за одређивање Декартових координата x, y, кад су дате елиптичке координате (3), треба решити систем од две једначине

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_1} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_2} = 1,$$

линеарне по x^2 и y^2. Место тога можемо и овако поступити. Ставимо у једначину (2), коју можемо написати

$$Q(\lambda) = x^2(b^2 - \lambda) + y^2(a^2 - \lambda) - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) =$$
$$= -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0,$$

прво,

$$\lambda = a^2,$$

а затим

$$\lambda = b^2 ;$$

добићемо систем једначина у облику

$$x^2(b^2 - a^2) = -(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2),$$
$$y^2(a^2 - b^2) = -(b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2),$$

из којих непосредно добијамо решење

$$(3) \qquad x^2 = \frac{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)}{a^2 - b^2}, \qquad y^2 = \frac{(b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)}{b^2 - a^2}.$$

Из овог решења се види да сваком пару елиптичких координата одговарају четири тачке симетричне у односу на координатне осе. У сваком конкретном проблему допунски услови одређују ону тачку, која треба да одговара проблему.

На слици 6 нацртана је основна елипса чија је једначина

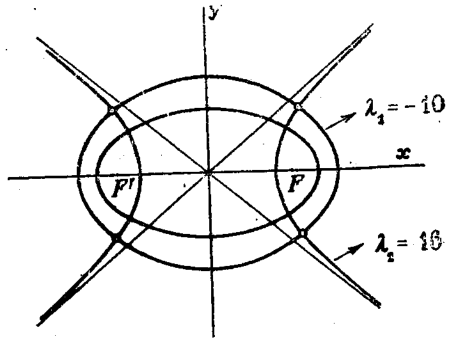
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

и четири тачке са елиптичким координатама

$$(4) \qquad \lambda_1 = -10, \quad \lambda_2 = 16.$$

Кроз сваку тачку пролази конфокална елипса са полуосама a_1, b_1, које се одређују из једначина

$a_1{}^2 = a^2 - \lambda_1 = 25 + 10 = 35$, $\quad b_1{}^2 = b^2 - \lambda_1 = 9 + 10 = 19$,



Слика 6

и имају приближне вредности

$$a_1 \approx 5,9, \qquad b_1 \approx 4,4;$$

и конфокална хипербола са полуосама a_2, b_2, одређеним из једначина

$$a_2{}^2 = a^2 - \lambda_2 = 25 - 16 = 9, \qquad -b_2{}^2 = b^2 - \lambda_2 = 9 - 16 = -7$$

са вредностима

$$a_2 = 3, \qquad b_2 \approx 2,6.$$

Декартове координате тачака са вредностима елиптичких координата (4) одређују се, на основу (3), из једначина

$$x^2 = \frac{35.9}{16} = \frac{315}{16}, \qquad y^2 = \frac{19.7}{16} = \frac{133}{16}$$

и имају приближне вредности за тачку у првом квадранту

$$x \approx 4,2; \qquad y \approx 2,9.$$

Замислимо сад у простору троосни елипсоид чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

за који претпостављамо

$$a > b > c.$$

Напишимо упоредно са том једначином и једначину конфокалне површине

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1, \tag{5}$$

где је λ променљиви параметар. Са његовом променом мења се површина што одговара једначини (5). Нацртана схема

$$-\infty \qquad 0 \qquad c^2 \qquad b^2 \qquad a^2 \qquad +\infty$$

елипсоид — једнокрилни, двокрилни хиперболоиди — имагинарни елипсоид

показује у коју врсту спада та површина кад се λ мења у одређеним границама.

Једначину (5) можемо написати у облику:

$$\begin{aligned} Q(\lambda) = {} & x^2(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)+y^2(c^2-\lambda)(a^2-\lambda)+ \\ & + z^2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)-(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Полином $Q(\lambda)$, кад се мења параметар λ, мења свој знак према схеми:

λ	$-\infty$	c^2	b^2	a^2
Q	$-$	$+$	$-$	$+$
	λ_1	λ_2	λ_3	

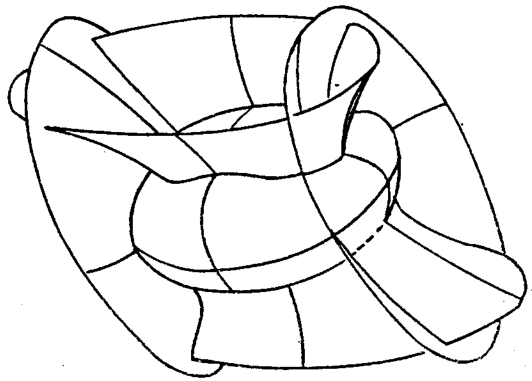
Према томе он има три стварна корена λ_1, λ_2, λ_3, којима одговарају елипсоид, једнокрилни хиперболоид и двокрилни хиперболоид. На слици су нацртане конфокалне површине другога реда.

На тај начин кроз сваку тачку простора пролазе три конфокалне централне површине другог реда. Три броја λ_1, λ_2, λ_3, који одређују те површине, а у исто време и тачку пресека тих површина (од осам тачака пресека бира се према допунском услову само једна), зову се *елиптичке координате тачке у простору*.

За одређивање координата x, y, z помоћу елиптичких координата λ_1, λ_2, λ_3 потребно је решити систем једначина

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_1}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_3}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_3}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_3}=1.$$



Слика 7

За тај циљ као, и у случају елиптичких координата у равни и овде морамо функцију $Q(\lambda)$ претставити са

$$\begin{aligned} Q(\lambda) = {} & x^2(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)+y^2(c^2-\lambda)(a^2-\lambda)+ \\ & + z^2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)-(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)= \\ = {} & (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) \end{aligned}$$

и ставити редом $\lambda=a^2$, $\lambda=b^2$, $\lambda=c^2$.

Као резултат добићемо

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2=\frac{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)(b^2-\lambda_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2=\frac{(c^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)(c^2-\lambda_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Види се да услед двоструких знакова после извлачења корена одређеним вредностима λ_1, λ_2, λ_3 одговарају осам тачака, од којих, према допунском услову, треба да одаберемо само једну.

Обратно, за одређивање елиптичких координата λ_1, λ_2, λ_3 помоћу Декартових x, y, z треба, као што смо видели, решити кубну једначину (5) или (6) по λ.

§ 1·2 Генералисане координате тачке. Координатне површине и координатне линије

Имали смо примере различитих координата: Декартових x, y, z, поларно-цилиндричних — r, θ, z, сферних — ρ, φ, ψ и елиптичких — λ_1, λ_2, λ_3. Има још много и других врста координата.

Уопште три броја, помоћу којих се одређује положај тачке у простору, зову се *генералисане координате* или, кратко, *координате* тачке у простору. Означимо та три броја са q_1, q_2, q_3. Претпостављамо да је за такве координате могуће написати једначине:

$$(1) \qquad x = f_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = f_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = f_3(q_1, q_2, q_3),$$

које одређују вредности Декартових координата x, y, z помоћу генералисаних q_1, q_2, q_3. Приметимо да десне стране претходних једначина могу да садрже и неке параметре, чије вредности треба да буду познате. Из једначина (1), обратно, можемо одредити генералисане координате q_1, q_2, q_3 у функцији Декартових координата x, y, z.

Ако једној координати, рецимо q_1, дамо константну вредност $q_1 = C_1$, а две остале координате узимају произвољне вредности, једначине

$$x = f_1(C_1, q_2, q_3), \quad y = f_2(C_1, q_2, q_3), \quad z = f_3(C_1, q_2, q_3)$$

одређују површину. Величине q_2 и q_3 играју тада улогу координата (Гаусових параметара) тачке на тој површини. После елиминисања тих координата једначина ове површине може се написати овако:

$$F_1(x, y, z) = C_1.$$

Ова површина, која одговара услову $q_1 = \text{Const} = C_1$ зове се *координатна површина* за прву координату. На сличан начин услову $q_2 = C_2$ одговара друга координатна површина са једначином

$$F_2(x, y, z) = C_2$$

и најзад услову $q_3 = C_3$ одговара трећа координатна површина са једначином

$$F_3(x, y, z) = C_3.$$

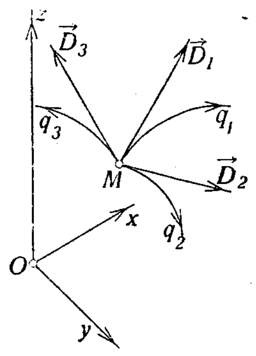
Пресек две координатне површине, дуж којег се мења само једна генералисана координата, рецимо q_1, претставља *координатну линију* што одговара тој координати. Једначине те линије у параметарском облику пишемо овако:

$$x = f_1(q_1, C_2, C_3), \quad y = f_2(q_1, C_2, C_3), \quad z = f_3(q_1, C_2, C_3).$$

Елиминисањем параметра q_1 једначине те исте линије могу се написати и овако:

$$F_2(x, y, z) = C_2, \quad F_3(x, y, z) = C_3.$$

Јасно је да кроз сваку тачку простора M (сл. 8) пролазе три координатне линије, дуж којих се мењају: за прву — само координата q_1, за другу — q_2, за трећу — q_3. На свакој од тих линија можемо назначити смер, у коме одговарајућа координата расте. Ако кроз тачку M повучемо дирке на те линије и на свакој означимо смер што одговара смеру координатне линије, добићемо триједар оса, који се зове *триједар оса генералисаних* или *криволиниских координата*. Ако ортове тих оса означимо са $\vec{D}_1, \vec{D}_2, \vec{D}_3$, триједар тих оса за тачку M можемо означити са $M\vec{D}_1\vec{D}_2\vec{D}_3$. Ако ортови $\vec{D}_1, \vec{D}_2, \vec{D}_3$ сачињавају за сваку тачку простора ортогонални триједар, систем координата зове се *ортогоналан*, у супротном случају он је *косоугли*.



Слика 8

У Декартову систему координатне површине су равни, које пролазе кроз дату тачку M и паралелне су равнима Oyz, Ozx, Oxy. Координатне линије су праве паралелне координатним осама. Пошто су координатне линије за сваку тачку простора праве, Декартов систем је *праволиниски*.

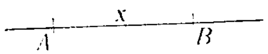
У поларно-цилиндричном систему услову $r = \text{const}$ одговара цилиндрична површина ваљка полупречника r са осом Oz; услову $\Theta = \text{const}$ одговара раван која пролази кроз ту осу; најзад услову $z = \text{const}$ одговара раван паралелна равни Oxy. Координатне линије за овај систем су: за координату r — права линија управна на оси Oz, за координату Θ — кружна линија, за координату z — права линија паралелна Oz оси. Пошто све координатне линије нису праве, систем је *криволиниски*.

У сферном систему за $\varrho = \text{const}$ имамо сферну површину, са $\varphi = \text{const}$, — конусну, за $\psi = \text{const}$ — раван. Координатна линија за ϱ је права што пролази кроз тачку O, за φ — кружна линија полупречника ϱ у равни меридијана, за ψ — кружна линија полупречника $\varrho \cos \varphi$ са средиштем на осовини Oz у равни паралелној екватору.

У систему елиптичких координата услову $\lambda_1 = \text{const}$ одговара површина елипсоида, услову $\lambda_2 = \text{const}$ — површина једнокрилног хиперболоида, услову $\lambda_3 = \text{const}$ — двокрилног хиперболоида. Координатна линија за λ_1 је пресек хиперболоида једнокрилног и двокрилног или, како је познато из диференцијалне геометрије, линија кривине на једној од тих површина. За λ_2 — координатна линија је пресек површина елипсоида и двокрилног хиперболоида, за λ_3 — то је пресек површина елипсоида и једнокрилног хиперболоида.

§ 1·3 Кретање тачке. Релативност кретања. Коначне једначине кретања

Уочимо праву и на њој две тачке A и B (сл. 9). Растојање тих тачака $AB = x$ може да се мења у току времена[1]). Тада се каже, да се ове две тачке крећу једна у односу на другу. Потпуно од наше воље зависи коју ћемо од тих тачака сматрати као непокретну. Кад сматрамо тачку A као непокретну, креће се тачка B; обратно, ако претпоставимо да је тачка B непокретна, креће се тачка A. Из простог факта промене узајамног растојања тих тачака не може се извести неко првенство кретања ма које од тих тачака. У овом смислу свако кретање има *релативан карактер:* ако се тачка B креће у односу на тачку A, онда се и тачка A креће у односу на тачку B. Док се налазимо само на тлу кинематике, не можемо да решимо питање коме кретању да дамо првенство.



Слика 9

Време протекло од једног до другог тренутка претставља величину, коју ћемо означавати са t (tempus). За јединицу времена узима се у науци секунда средњег времена, а то је $\frac{1}{86\,164{,}091}$ део звезданог дана. Практична правила за мерење времена углавном даје астрономија.

Ако се растојање x мења у току времена t, оно се јавља као функција времена, тј.

$$x = f(t).$$

Што се тиче природе функције f, она мора бити непрекидна, јер природа кретања претпоставља да тачка непрекидно прелази из једног положаја у други.

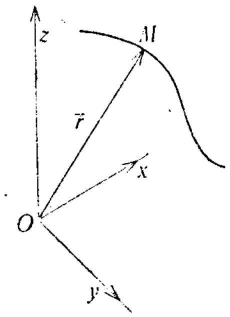
У општем случају, кад тачка, рецимо M, мења свој положај не дуж праве, већ произвољно у простору, вектор положаја

[1]) Време сматрамо као основни појам који се не дефинише.

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ те тачке у односу на непокретну тачку O триједра $Oxyz$ (сл. 10) мења у току времена своју векторску вредност и према томе може се написати

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1}$$

где са десне стране стоји одређена векторска функција аргумента t. Једначина (1) зове се *коначна једначина кретања тачке у векторском облику.* Помоћу те једначине за сваки тренутак t за време кретања можемо одредити положај покретне тачке M.



Слика 10

Векторској једначини (1) одговарају три скаларне једначине

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \tag{2}$$

које се зову *коначне једначине кретања тачке у Декартовим координатама.*

Кад је положај тачке одређен помоћу генералисаних координата q_1, q_2, q_3, кретање се одређује једначинама

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t), \tag{3}$$

или кратко

$$q_i = q_i(t), \qquad i = 1, 2, 3.$$

То су *коначне једначине кретања тачке у генералисаним координатама.*

§ 1·4 Путања (трајекторија). Линија путање

Геометриско место тачака у простору, са којима се у току кретања покретна тачка поклапа, зове се *путања* или *трајекторија тачке.* Јасно је да је путања тачке непрекидна линија.

Ако је кретање тачке одређено векторском једначином $\vec{r} = \vec{r}(t)$, путања је ходограф те вектор-функције.

У случају коначних једначина у Декартовим координатама:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \tag{1}$$

оне могу бити сматране као једначине путање у параметарском облику, при чему време t игра улогу параметра.

Забележимо да путањи припадају само оне тачке, које одговарају вредностима параметра t између, рецимо, t_0 и t_1, ако је кретање почело у тренутку t_0 и свршило се у t_1.

Ако елиминишемо параметар t из једначина (1), добићемо једначине

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \qquad \Phi_2(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

једне линије, која се зове *линија путање* или *линија трајекторије.* Јасно је да све тачке путање припадају овој линији, али обрнути закључак није увек тачан: линија путање може садржати и тачке, које не припадају путањи.

Узмимо прост пример. Ако је кретање одређено једначинама

$$x = R\cos\omega t, \quad y = 0, \quad z = 0$$

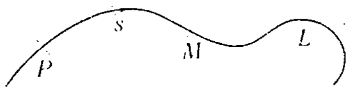
тачка се креће по Ox оси између тачака $(R, 0, 0)$ и $(-R, 0, 0)$ и на тај начин путања може да буде или један део или и цела дуж величине $2R$, узета једанпут или више пута поновљена. С друге стране, ако елиминишемо из горњих једначина време, добићемо једначине

$$y = 0, \quad z = 0,$$

којима одговара као линија путање цела Ox оса; јасно је да она садржи сем дужи $2R$ још и две полуправе, које не припадају путањи.

§ 1·5 Закон пута. Дијаграм пута

Нека покретна тачка M описује за време кретања путању L (сл. 11). Обележимо на њој одређену тачку P као почетак мерења дужине лука путање, узимајући при томе одређени смер за позитиван. Дужину PM са одговарајућим знаком означимо са s (прво слово латинске речи spatium — простор, пут, дужина).



Слика 11

Јасно је да величину s можемо сматрати као координату тачке на датој путањи. Једначина

$$s = s(t) \tag{1}$$

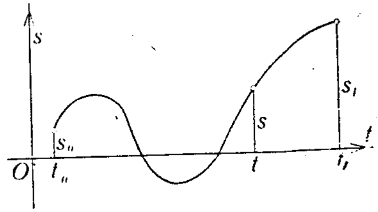
одређује тада положај покретне тачке на путањи.

Ако се у одређеном интервалу времена, рецимо од t_0 до t_1, покретна тачка креће само у једном правцу, s се мења монотоно, рецимо од s_0 до s_1, апсолутна вредност разлике $s_1 - s_0$ је дужина пута који је прешла тачка. Најзад, ако се s рачуна од почетног

положаја тачке ($s_0 = 0$) и позитивни смер тог рачуна одговара смеру кретања тачке, величина s одређује пређени пут тачке. Из тог разлога се једначина (1), која тада поставља директну везу између дужине пута и времена, зове *закон пута.*

Јасно је да је кретање тачке потпуно одређено кад су дати: 1. облик путање и 2. закон пута.

Често је у проучавању кретања тачке облик путање или унапред утврђен (на пример на жељезници) или не игра никакву улогу, тада се ово проучавање своди само на проучавање закона пута (распоред кретања). За што конкретније посматрање закона пута употребљава се графички метод. У том методу на једној оси се мери време t, на другој пут s (сл. 12). Једначини (1) тада одговара линија, која се зове *дијаграм* или *график* пута.

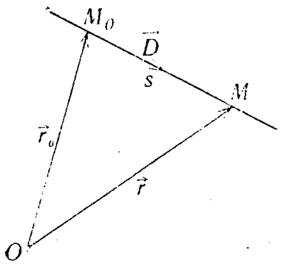


Слика 12

§ 1·6 Примери кретања тачке

§ 1·61 Праволиниско кретање

Кад је путања тачке права, кретање се зове *праволиниско.* За одређивање праволиниског кретања довољно је утврдити положај праве и одредити закон пута. Положај праве (сл. 13) можемо одредити једном тачком M_0 те праве и ортом $\vec{D}$ њена правца. Означимо са $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ векторе положаја ма које тачке M праве и тачке M_0; означимо даље са s растојање M_0M са знаком који одговара смеру $\vec{D}$ и, према томе, за вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ставимо



Слика 13

$$\overrightarrow{M_0M} = s\vec{D}.$$

Тада из троугла OM_0M имамо

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{D}.$$

Ако сматрамо s као променљиви параметар, написана једначина претставља векторску једначину праве. За време кретања тачке по правој мења се само s и једначина закона пута

$$s = s(t)$$

одређује кретање тачке. Према томе једначина

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{D}s(t)$$

је коначна векторска једначина праволиниског кретања.

Тој једначини одговарају три скаларне једначине истог кретања:

$$x = x_0 + \alpha s, \quad y = y_0 + \beta s, \quad z = z_0 + \gamma s,$$

где су ознаке очигледне.

За свако поједино праволиниско кретање координатни триједар увек можемо ставити у специјалан положај тако да се тачка M_0 поклапа са почетком координатног система и да путања лежи на Ox оси. Тада је

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0$$

и од претходних скаларних једначива остаје само једна

$$x = s(t),$$

која одређује свако праволиниско кретање по унапред утврђеној правој.

Када је функција s првог степена у односу на променљиву t, тј.

$$s = at + b,$$

кретање се зове *равномерно* или *једнолико;* у сваком другом случају оно је *неравномерно* или *променљиво.*

Променљиво кретање чији се закон пута изражава квадратном функцијом времена

$$s = at^2 + bt + c$$

зове се *једнако променљиво кретање.*

§ 1·62 Криволиниско кретање

Кад цела путања тачке не пада у исту праву, кретање тачке је *криволиниско.*

Криволиниско кретање зове се *равномерно,* ако се закон пута изражава једначином

$$s = at + b.$$

У противном случају и криволиниско кретање је *неравномерно.*

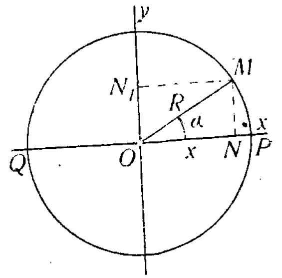
§ 1·621 Равномерно кружно кретање. Хармониско кретање

Од криволиниских кретања најпростије је *кружно кретање,* тј. кретање по кружној линији. Од кружних кретања најпростије је равномерно кружно кретање. Закон пута таквог кретања може се написати овако

$$s = at.$$

Пут s рачунамо од почетног положаја P покретне тачке (сл. 14), а време t од тренутка, кад је тачка била у положају P. Ако са α означимо централни угао POM, а са R полупречник круга, имамо

$$\alpha = \frac{s}{R} = \frac{a}{R}t,$$



Слика 14

или

$$\boxed{\alpha = \omega t,} \tag{1}$$

кад ставимо

$$\frac{a}{R} = \omega.$$

Пошто угао α потпуно одређује положај тачке на кружној линији, он се може сматрати као координата тачке на тој линији. Једначина (1) преставља тада *коначну једначину равномерног кружног кретања.*

Помоћу равномерног кружног кретања одређујемо особине једног важног праволиниског кретања.

Узмимо ма који пречник круга, на пр. PQ (сл. 14), и уочимо на том пречнику тачку N, пројекцију тачке M, која се креће равномерно по кругу. Тачка N врши кретање, које се зове *хармониско кретање.*

Ако положај тачке N одредимо помоћу координате x на оси Ox, коначну једначину хармониског кретања можемо написати

$$x = R \cos \omega t. \tag{2}$$

Јасно је да је хармониско кретање *осцилаторног* карактера: тачка се креће у границама од $+R$ до $-R$. За време T, које се одређује из услова

$$\omega T = 2\pi$$

и једнако је

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

помоћна тачка M изврши пун обрт, један циклус, а тачка N — једну целу осцилацију. То је *период* осцилације. Тачка O је *центар* осцилације. Удаљење тачке од центра је *елонгација* покретне тачке. Највећа елонгација, дужина R, је *амплитуда* осцилације. Величина

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

зове се *учестаност* или *фреквенција* осцилације. Ова величина има димензију времена на минус први степен, а бројно је једнака броју осцилација у секунди. Ако је за време, рецимо, t секунада, извршено m осцилација, фреквенција тог кретања износи

$$f = \frac{m}{t}\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

За јединицу фреквенције се узима фреквенција кретања са једном осцилацијом у секунди. Таква јединична фреквенција зове се *циклус* или *херц* са ознаком Hz по имену физичара Херца (1857—1894).

За карактеристику учестаности хармониског кретања може да служи и величина

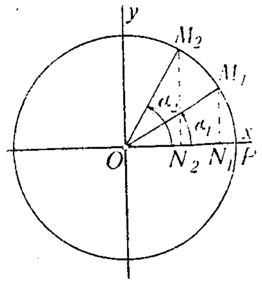
$$\omega = 2\pi f,$$

која је пропорционална фреквенцији f са коефицијентом пропорционалности 2π. Ова величина се зове *кружна фреквенција* (немачки — Kreisfrequenz) или *пулсација* (француски — pulsation). Кружна фреквенција има исту димензију као и фреквенција и разликује се од ње само бројним множиоцем 2π.

Угао $\alpha = \omega t$ зове се *фаза* осцилације. Ако имамо више осцилација, једна од друге могу да се разликују *фазном разликом*, на пр. $\alpha_2 - \alpha_1$ за тачке N_2 и N_1 са помоћним тачкама M_2 и M_1 (сл. 15).

Помоћу уведених величина T и f можемо коначну једначину (2) хармониског кретања написати још и

$$x = R\cos\omega t = R\cos\frac{2\pi}{T}t = R\cos 2\pi f t.$$



Слика 15

Ако, полазећи поново од тачке M, узмемо пројекцију N_1 (сл. 14) на други управни правац Oy, тачка N_1 врши такође хармониску осцилацију чија је једначина:

$$y = R \sin \omega t. \tag{3}$$

Две осцилације (2) и (3), кад се врше у истој правој, разликују се у фази за $\frac{\pi}{2}$.

Јасно је да график пута осцилације (3) синусоида, а осцилације (2) косинусоида.

У општем случају можемо коначну једначину хармониског кретања тачке написати

$$x = R\cos(\omega t + \beta),$$

где је угао β *почетна фаза* осцилације. За $\beta = 0$ имамо једначину (2), за $\beta = -\frac{\pi}{2}$ једначину (3).

Помоћу комплексног броја $\underline{z}$ у симболичкој форми можемо равномерно кретање помоћне тачке M, по кругу полупречника R, са кружном фреквенцијом $\underline{\omega}$ и почетном фазом β, претставити коначном једначином

$$z = Re^{i(\omega t + \beta)},$$

или

$$z = Ae^{i\omega t},$$

где је

$$A = Re^{i\beta}$$

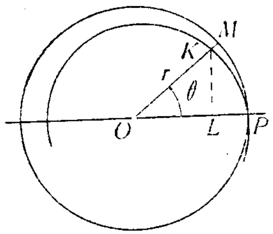
такозвана *комплексна амплитуда* кружног кретања. То је вектор, који својим интензитетом одређује полупречник круга кретања и својим положајем (аргументом) почетну фазу кретања.

Јасно је да сваки део, реалан или чисто имагинаран, комплексног броја z одређује одговарајуће хармониско кретање.

§ 1·6211 Опадајућа хармониска осцилација. Логаритамски декрамент

Уочимо поново кружну линију полупречника R. Кроз тачку P (сл. 16) те кружне линије повуцимо логаритамску спиралу чија је једначина

$$r = Re^{-k_1^2\Theta},$$



Слика 16

где су r и θ поларне координате тачке K спирале, а k_1^2 позитивна константа. Према томе, кад угао θ расте, дужина потега r *опада*. Нека сад угао θ расте пропорционално времену, тј.

$$\theta = \omega t,$$

где је ω опет сталан коефицијент. У том случају за промењљиву дужину потега имамо

$$r = Re^{-k^2 t},$$

где је $k^2 = \omega k_1^2$ нова позитивна константа.

Конструишимо сад пројекцију L на осу Ox тачке K што се креће по логаритамској спирали. Координата x те тачке има вредност

$$(1) \qquad x = Re^{-k^2 t} \cos \omega t .$$

Кретање тачке L је *квази-периодично кретање* и то *опадајућа хармониска осцилација*. После периода $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ кретање има исту фазу но тачка нема исти положај. Од тренутка $t = 0$ после сваког полупериода амплитуде имају узастопне вредности:

$$a_0 = R, \quad a_1 = Re^{-\lambda}, \quad a_2 = Re^{-2\lambda}, \ . \ . \ . \ ,$$
$$a_\nu = Re^{-\nu\lambda}, \quad a_{\nu+1} = Re^{-(\nu+1)\lambda}, \ . \ . \ . \ ,$$

где је λ позитивна константа

$$\lambda = \frac{k^2\pi}{\omega}.$$

Пошто је

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = e^\lambda,$$

константа λ има вредност

$$\lambda = \log a_\nu - \log a_{\nu+1},$$

тј. једнака је разлици природних логаритама две узастопне амплитуде. Из тог разлога се та константа зове *логаритамски декремент* опадајуће хармониске осцилације.

Ако за одређивање ове осцилације уведемо елементе:

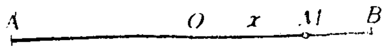
1. почетну амплитуду R,
2. период T одговарајуће хармониске осцилације и
3. логаритамски декремент λ,

једначину (1) можемо и овако написати

$$x = R\,e^{-2\lambda\frac{t}{T}} \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right).$$

§ 1·622 Осцилаторно кретање општег карактера

Замислимо на правој p дуж AB (сл. 17), на овој тачку O са



$$AO = OB = \rho .$$

Сл. 17

Претпоставићемо да покретна тачка M за време кретања не напушта дуж AB. Ако тачка M пролази кроз тачку O, прво, у једном смеру и креће се с једне стране те тачке, па се враћа и пролази кроз тачку O у супротном смеру, креће се с друге стране те тачке, па поново враћа и пролази кроз тачку O у првобитном смеру, каже се да тачка M врши *праволиниско осцилаторно кретање* око тачке O. Кретање тачке M између два узастопна пролаза кроз тачку O са истим смером кретања претставља једну *осцилацију* тачке M. Време T између оваква два узастопна пролаза је *време осцилације*.

Ако праву p претворимо у осу, положај тачке M можемо одредити координатом x, дужином OM са одговарајућим знаком. Свака осцилација, као и свако друго праволиниско кретање, одређује се законом пута

$$x = f(t),$$

који у потпуности карактерише кретање тачке за време T. Ако време t рачунамо од тренутка пролаза тачке M кроз O, имамо два услова

$$f(0)=0, \quad f(T)=0.$$

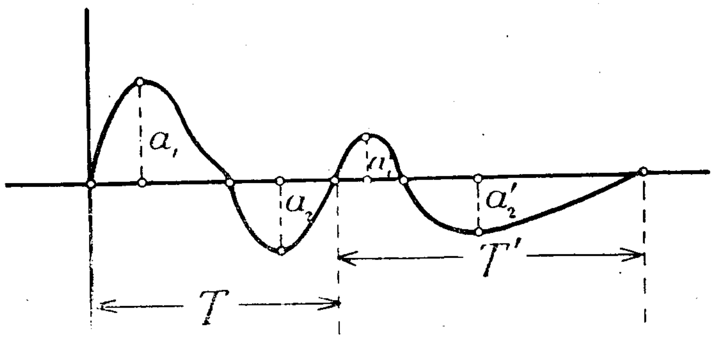
Поред тога, за сваку осцилацију треба да постоји такав тренутак $t_1 = kT$, где је $0<k<1$, за који је исто тако

$$f(kT)=0.$$

При томе координата x остаје у интервалу од 0 до t_1, рецимо, позитивна, а у интервалу од t_1 до T негативна или обрнуто.

Време осцилације T и закон пута могу бити различити не само за разна осцилаторна кретања тачке већ и за разне, рецимо и узастопне, осцилације истог осцилаторног кретања.

Свака осцилација има у општем случају две амплитуде — то су највећа отступања тачке M од тачке O на једну и другу страну. Само у специјалним случајевима те две амплитуде могу имати исте вредности. На слици 18 показани су закони пута за две наредне осцилације које се разликују како временом осцилације и амплитудама, тако и законом пута. T је време прве осцилације, T' — друге; a_1 и a_2 — амплитуде прве осцилације, a'_1 и a'_2 — амплитуде друге.



Сл. 18

Уочимо једно осцилаторно кретање. Ако је кретање тачке код свих осцилација тог кретања исто, осцилаторно кретање је *периодично*. Периодичност је особина која припада само специјалним осцилаторним кретањима. Осцилаторно кретање може, но не мора, бити периодично. Код периодичних осцилаторних кретања закони пута су исти за све осцилације датог кретања. Време периодичне осцилације је њен *период*. И код периодичних осцилација амплитуде a_1 и a_2 могу бити различите, а могу бити и једнаке.

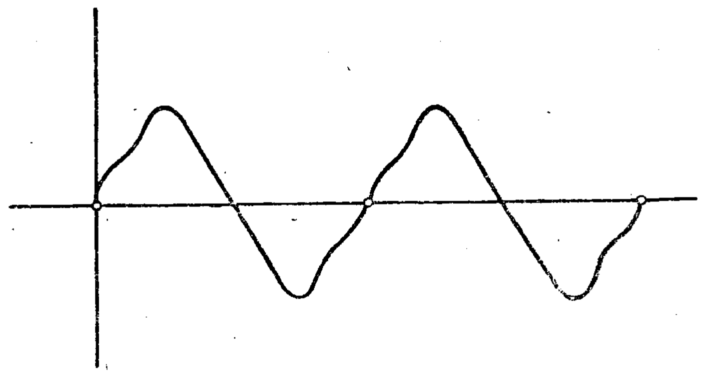
Нарочито је важан онај случај периодичних осцилација кад се период T дели у два једнака дела ($k=\frac{1}{2}$) и кад је кретање у једном делу симетрично са кретањем у другом делу. Функција $f(t)$ закона пута задовољава тада услов

$$f(t)=-f(T-t),$$

и то за све време осцилације, које рачунамо, као и раније, од $t=0$ до $t=T$, при чему за $t=\frac{1}{2}T$ имамо

$$f\left(\frac{1}{2}T\right)=0.$$

У овом случају амплитуде a_1 и a_2 су једнаке, тј. $a_1=a_2=a$. Пример за овакво периодично осцилаторно кретање приказан је графиком пута на слици 19.



Слика 19

Ако је при упоређивању осцилација, било истих било разних осцилаторних кретања, време осцилација исто, осцилације се зову *изохроне*. Изохроне осцилације могу бити периодичне, са истим или разним законима пута, а могу бити и непериодичне, са различитим законима пута. Амплитуде изохроних осцилација могу такође бити различите.

Видимо да праволиниске осцилације могу бити веома разно-
ког карактера; хармониска осцилација претставља посве специ-
ину а, у исто време, и најједноставнију врсту осцилаторног
етања тачке. Хармониска осцилација, као што смо видели, стоји
вези са равномерним кретањем помоћне тачке дуж кружне
иније. Ако се та помоћна тачка креће по кружној линији, ре-
имо, у истом смеру (прогресивно кретање), али на произвољан
ачин, њена пројекција на сталан пречник круга врши осцила-
орно кретање по закону пута

$$x = R\cos\varphi(t), \tag{1}$$

где је $\varphi(t)$ увек, рецимо, произвољна функција времена, која расте. Обе амплитуде овог кретања имају исту вредност, једнаку полупречнику помоћног круга.

Осцилација која одговара једначини (1) претставља уопштење хармониске осцилације, но не обухвата осцилације општег типа.

Хармониска осцилација, која опада, коју смо анализовали у претходном параграфу, претставља пример изохроне непериодичне осцилације. Ако закон пута за прву осцилацију узмемо у облику

$$x = Re^{-k^2 t}\cos\omega t, \tag{2}$$

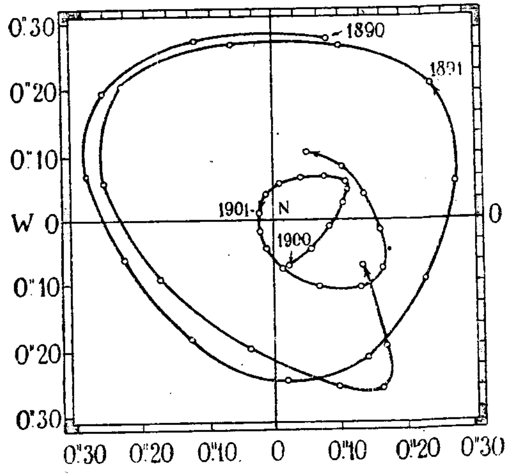
рачунајући време од $t=0$, за другу осцилацију, под условом да време опет рачунамо од почетка те осцилације, закон пута треба написати овако

$$x = Re^{-k^2(T+t)}\cos\omega t, \tag{3}$$

где је $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Како једначине (2) и (3) не дају исти положај тачке за исти моменат t, кретање тачке није периодично.

Слично случају праволиниског осцилаторног кретања могу бити описана и друга осцилаторна кретања тачке M око тачке O у равни и у простору. У случају кретања у равни тачка M не напушта одређену област равни око тачке O, рецимо површину круга полупречника ρ са средиштем у тачки O. У случају осцилаторног кретања у простору тачка M не напушта одређену запремину, на пр., запремину лопте полупречника ρ. Са примерима осцилација у равни и у простору упознаћемо се у вези са сабирањем два и више праволиниских кретања. Овде ћемо навести само један пример осцилаторног кретања у равни, кретање Земљина пола у северној поларној области, коју можемо због њених незнатних размера

сматрати за равну. Слика 20 даје то кретање у интервалима: 1890—91 г. и 1900—01 г. Остали познати подаци, за време од 1890 г. до 1938 г., нису наведени, јер би слика испала сувише компликована и непрегледна.



Слика 20

Учинимо још једну важну примедбу у вези са осцилаторним кретањима.

Има случајева, кад у низу осцилација сваке две узастопне осцилације не понављају исто осцилаторно кретање и не карактеришу према томе саме по себи једно периодично кретање, али да оне припадају групи, рецимо, од k узастопних различитих осцилација и да се такве групе периодички понављају и стварају према томе периодично кретање; групе се понављају, а у вези са тим понављају се у истом реду и у истој форми и поједине осцилације групе. Период таквог периодичког кретања је збир времена свих осцилација које сачињавају групу.


Слика 21

На слици 21 дат је пример таквог периодичког кретања.

§ 1·7 Слагање и разлагање кретања

Како смо видели (§ 1·3), свако кретање тачке можемо одредити векторском једначином

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}(t),$$

где је $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ вектор положаја покретне тачке M у односу на непокретну тачку O, а $\vec{r}(t)$ векторска функција времена.

Као сваки вектор, вектор $\vec{r}$ може бити резултат сабирања два или више посебних вектора, од којих, у општем случају, сваки може бити функција времена, тј.

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) + \ldots + \vec{r}_n(t),$$

где је n број вектора компонената; тај број може бити чак и бесконачно велики, а под претпоставком да је одговарајући векторски ред конвергентан. Свако кретање, одређено једначином

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

је *компонентно кретање* тачке M.

Ако су један или више компонентних вектора стални, можемо их искључити из описивања кретања тачке M и то на тај начин што ћемо за нову непокретну тачку, место тачке O, узети тачку O', крај геометриског збира свих сталних компонентних вектора.

Одређивање резултантног кретања помоћу компонентних кретања претставља операцију, која се зове *слагање* датих кретања. Обрнуто, одређивање два или више компонентних вектора, чија резултанта одређује дато кретање, је *разлагање* тог датог кретања. Увођење компонентних кретања има, углавном, за циљ претстављање неког компликованог кретања помоћу више кретања једноставније природе.

Наведимо неколико примера за слагање и разлагање кретања.

Слагање два равномерна кретања

У геометрији је познат читав низ кривих линија, које су везане за кретање тачке и према томе се сматрају као криве *кинематичког порекла*. У формирању ових кривих главну улогу играју два елементарна компонентна кретања: 1. праволиниско и 2. кружно. Састављена од таква два елемента, кретања могу бити како у равни, тако и у простору. Обично се при томе претпоставља да је свако елементарно кретање равномерно са законом пута израженим једначином

$$s = at + b,$$

али параметри a и b за разна елементарна кретања могу бити различитих вредности.

а. Пре свега покажимо да слагање два равномерна праволиниска кретања увек даје такође праволиниско кретање равномерног карактера. Претставимо свако од компонентних праволиниских кретања једначинама

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{10} + \vec{m}_1 t,$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{20} + \vec{m}_2 t,$$

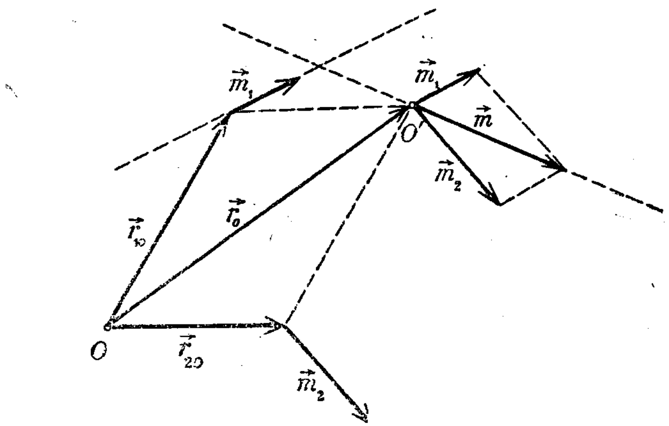
где су $\vec{r}_{10}$, $\vec{r}_{20}$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ стални вектори са познатим геометриским тумачењем. После сабирања претходних вектора имамо једначину

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{m}t, \tag{1}$$

где су

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2,$$
$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{10} + \vec{r}_{20},$$
$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2.$$

Једначина (1) показује да је резултантно кретање исто тако праволиниско и равномерно (сл. 22).



Слика 22

Ако су компонентна кретања дата једначинама

$$\vec{r}_1 = \vec{m}_1 t,$$
$$\vec{r}_2 = \vec{m}_2 t,$$

резултантном кретању одговара дијагонала паралелограма са врхом у тачки O и странама пропорционалним $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$. То је паралелограм за сабирање два праволиниска равномерна кретања који служи као основа за сабирање два кретања, јер се за бескрајно мали интервал времена свако кретање тачке може сматрати као кретање праволиниско и равномерно.

b. Узмимо сад случај слагања праволиниског равномерног кретања са равномерним кружним кретањем, при чему треба разликовати ова два случаја:

b'. Права линија првог кретања је компланарна са кругом другог кретања.

Нека је прво кретање дато једначином

$$\vec{r}_1 = \vec{m}_1 t \,, \tag{2}$$

где је m_1 сталан вектор, а друго једначином

$$\vec{r}_2 = R\vec{p} \,,$$

где је R стални полупречник круга и $\vec{p}$ променљив орт, чији положај одређујемо углом α; тај угао меримо у равни круга од положаја полупречника за $t = 0$. За равномерно кретање по кругу ставимо

$$\alpha = \omega t \,,$$

где је ω стална величина са димензијом

$$[\omega] = T^{-1} \,;$$

T је ознака времена.

Резултантно кретање одређено је једначином

$$\vec{r} = \vec{m}_1 t + R\vec{p} \,.$$

Трајекторија покретне тачке је крива — геометриско место тачке периферији круга, чији је угао обртања пропорционалан праволиниском померању центра тог круга. Како је познато, ова крива се зове *трохоида*. Како за сваки број m_1 можемо одредити такав полупречник ρ, за који имамо

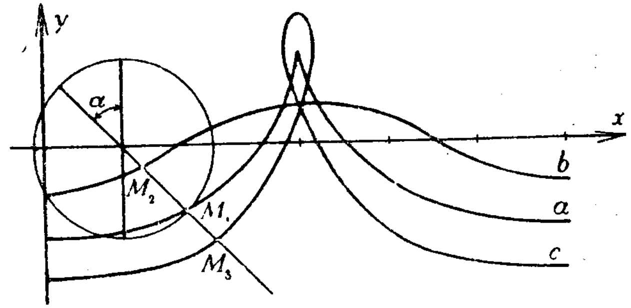
$$m_1 = \rho\omega \,,$$

за сваку трохоиду можемо конструисати круг полупречника ρ, који се за време кретања котрља без клизања по правој паралелној са правом (2), а на растојању ρ од те праве.

Ако је $R = \rho$, тј. ако је задовољен услов

$$m_1 = R\omega \,,$$

трохоида се претвара у циклоиду (сл. 23, крива *a*).



Слика 23

Кад је

$$m_1 > R\omega \,,$$

и значи $R < \rho$, трохоида је растегнута (сл. 23, крива *b*).

Најзад, ако је

$$m_1 < R\omega$$

и према томе $R > \rho$, трохоида је стегнута (сл. 23, крива *c*).

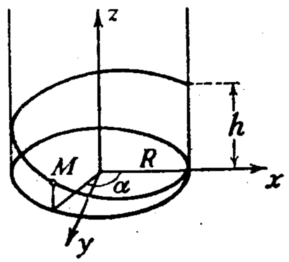
За састављање једначина трохоиде у скаларном облику уведимо осе Декартових координата и то тако како је показано на нашој слици (сл. 23). Једначине трохоиде у параметарском облику изгледају овако

$$x = m_1 t + R \sin \omega t \,,$$
$$y = R \cos \omega t \,,$$

где време t игра улогу параметра.

b''. Учинимо сад другу претпоставку да права праволиниског кретања није компланарна са равни кружног кретања.

Ако је вектор $\vec{m}_1$ управан на равни круга, покретна тачка, као што је познато, описује *завојницу* (сл. 24). За параметре завојнице обично се узимају: полупречник R цилиндра на коме се конструише завојница и *ход завојнице*, који има вредност растојања h између два узастопна завоја. Лако је показати да се помоћу параметара R и m_1 ход завојнице изражава



Слика 24

$$h = m_1 \frac{2\pi}{\omega} \,.$$

Једначине завојнице изгледају овако

$$x = R\cos\omega t\,,$$
$$y = R\sin\omega t\,,$$
$$z = m_1 t = \frac{h}{2\pi}\,\omega t$$

или у облику

$$x = R\cos\alpha\,,$$
$$y = R\sin\alpha\,,$$
$$z = \frac{h}{2\pi}\,\alpha\,,$$

ако место променљиве t узмемо угао α.

Ако права праволиниског кретања не стоји управно на равни круга, тачка описује *косу завојницу*, која може бити сматрана и као *елиптичка завојница*, јер раван управна на правој праволиниског кретања сече површину оног цилиндра на коме се налази крива по елипси.

c. Посматрајмо сад случај кад су оба компонентна кретања равномерна кружна кретања. Векторску једначину таквог кретања можемо написати

$$\vec{r} = R_1\vec{p} + R_2\vec{q}\,, \tag{3}$$

где су $\vec{p}$ и $\vec{q}$ променљиви ортови у равнима кругова. Означимо углове које гради сваки од тих ортова са полупречником што одговара тренутку $t = 0$ са α и β. Због равномерности једног и другог кретања имамо

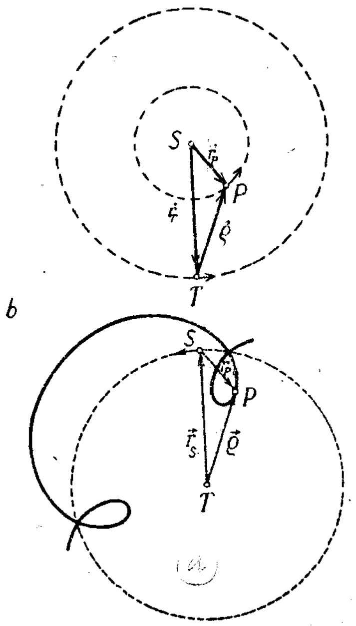
$$\alpha = \omega_1 t\,,$$
$$\beta = \omega_2 t\,,$$

где су ω_1 и ω_2 сталне величине.

Крива са векторском једначином (3) зове се *епитрохоида*. Параметри те криве су: R_1, R_2 и однос $k = \omega_1 : \omega_2$. У вези са вредностима тих параметара крива може имати различите специјалне форме.

Покажимо сад како се помоћу епитрохоидног кретања приближно објашњавају привидна планетска кретања посматрана са Земље.

Као што је познато, у свом стварном кретању, приближно посматраном, Земља и планете се крећу приближно у истој равни око Сунца, као центра, равномерно по кружним линијама. Означимо векторе положаја Земље и једне од планета у односу на Сунце са $\vec{r}_T$ и $\vec{r}_P$; то су вектори сталних интензитета, који се равномерно у истој равни обрћу (сл. 25, *a*). Ако вектор положаја планете у односу на Земљу означимо са $\vec{\rho}$, из троугла STP можемо написати



Слика 25

$$\vec{\rho} = -\vec{r}_T + \vec{r}_P\,.$$

Ако сада станемо на геоцентрично гледиште (сл. 25, *b*) и уведемо вектор положаја Сунца према Земљи

$$\vec{r}_S = -\vec{r}_T\,,$$

из одговарајућег троугла STP (сл. 26, *b*) следује

$$\vec{\rho} = \vec{r}_S + \vec{r}_P\,.$$

Како вектори $\vec{r}_S$ и $\vec{r}_P$ описују равномерно кружне линије, вектор $\vec{\rho}$ описује епитрохоиду. Ова епитрохоида и претставља ону трајекторију планете, коју опажамо са Земље. Наша слика приближно претставља трајекторију Меркура.

2. *Слагање хармониских осцилација*

a. Случај две осцилације истог правца и исте фреквенције.

Нека су дате две хармониске осцилације једначинама

$$x_1 = R_1\sin(\omega t + \beta_1)\,,$$
$$x_2 = R_2\sin(\omega t + \beta_2)\,.$$

Покажимо да је резултантно кретање са једначином

$$x = x_1 + x_2$$

такође хармониска осцилација исте фреквенције ω, тј.

$$x = R\sin(\omega t + \beta)\,,$$

и одредимо јој амплитуду R и почетну фазу β.

Пошто једначина

$$R \sin(\omega t + \beta) = R_1 \sin(\omega t + \beta_1) + R_2 \sin(\omega t + \beta_2)$$

треба да буде идентитет за сваку вредност t, после развијања леве и десне стране у

$$R \sin \omega t \cos \beta + R \cos \omega t \sin \beta = (R_1 \cos \beta_1 + R_2 \cos \beta_2) \sin \omega t + \\ + (R_1 \sin \beta_1 + R_2 \sin \beta_2) \cos \omega t ,$$

имамо ове две једначине

$$R \cos \beta = R_1 \cos \beta_1 + R_2 \cos \beta_2 ,$$
$$R \sin \beta = R_1 \sin \beta_1 + R_2 \sin \beta_2$$

за одређивање амплитуде R и фазе β.

Ако подигнемо леве и десне стране претходних једначина на квадрат и саберемо, за квадрат амплитуде R имаћемо

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2 R_1 R_2 \cos(\beta_2 - \beta_1) . \tag{3}$$

Са друге стране, ако поделимо те једначине, добићемо једначину

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R_1 \sin \beta_1 + R_2 \sin \beta_2}{R_1 \cos \beta_1 + R_2 \cos \beta_2} \tag{4}$$

за одређивање почетне фазе резултантне осцилације.

Обрасци (3) и (4) нарочито су важни у проучавању осцилаторних процеса, јер показују резултат два истовремена најпростија таква процеса.

Проучимо неке специјалне случајеве.

α. Амплитуде компонената су једнаке, тј. $R_1 = R_2$. Тада је

$$R = 2 R_1 \cos \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} , \tag{5}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} ,$$

одакле

$$\beta = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) + n \pi ,$$

где је n произвољан цео број.

Из (5) следује да највећа амплитуда у свим овим могућим случајевима износи двоструку вредност амплитуде компоненте. Најмања је вредност $R = 0$, кад је, на пр, $\beta_2 = \beta_1 + \pi$, тј. кад су осцилације супротног смера.

β. Фазе су једнаке или се разликују за $2 n \pi$, тј. $\beta_2 = \beta_1 + 2 n \pi$. Тада можемо ставити

$$R = R_1 + R_2 ,$$
$$\beta = \beta_1 = \beta_2 .$$

Ако су при томе и $R_1 = R_2$, онда имамо

$$x = 2 R_1 \sin(\omega t + \beta_1) ,$$

тј. исту осцилацију као и свака компонентна осцилација само са двоструком амплитудом.

γ. Разлика фаза износи π или уопште $(2n+1)\pi$. Тада је

$$R = R_1 - R_2 ,$$

при чему претпостављамо да је $R_1 > R_2$. Ако је пак и $R_1 = R_2$, онда је, како смо навели, $R = 0$ и тачка остаје на миру.

b. Случај више осцилација истог правца и исте фреквенције.

Ако треба да саберемо више хармониских осцилација исте фреквенције ω, које су дате једначинама

$$x_i = R_i \sin(\omega t + \beta_i) , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

где су ознаке очигледне, резултантна осцилација је одређена једначином:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} R_i \sin(\omega t + \beta_i) .$$

И овај збир можемо заменити једном осцилацијом

$$x = R \sin(\omega t + \beta) ,$$

при чему, слично претходном случају, за одређивање R и β имамо једначине

$$R \cos \beta = \sum_{i=1}^{n} R_i \cos \beta_i ,$$

$$R \sin \beta = \sum_{i=1}^{n} R_i \sin \beta_i .$$

Из ових једначина следује

$$R^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} R_i \cos \beta_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} R_i \sin \beta_i \right)^2$$

и

$$\operatorname{tg}\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} R_i \sin\beta_i\right) : \left(\sum_{i=1}^{n} R_i \cos\beta_i\right).$$

Како свзки квадрат наведених збирова можемо написати

$$\left(\sum_{i=1}^{n} R_i \cos\beta_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_i\, R_j \cos\beta_i \cos\beta_j\,,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} R_i \sin\beta_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_i\, R_j \sin\beta_i \sin\beta_j\,,$$

квадрат резултантне амплитуде може се одредити једначином

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_i\, R_j \cos\left(\beta_i - \beta_j\right).$$

c. Случај две осцилације различитих сталних правaца и истих фреквенција.

Зауставимо се на случају кад су два стална правца ортогонална. Тачка пресека тих праваца нека је у исто време центар једне и друге осцилације. Увођењем Декартових координата можемо две компонентне осцилације изразити једначинама

$$x = R_1 \sin(\omega t + \beta_1),$$

$$y = R_2 \sin(\omega t + \beta_2).$$

Ове једначине су у исто време параметарске једначине трајекторије. Да одредимо облик те трајекторије искључимо време из претходних једначина. Како те једначине можемо написати

$$\frac{x}{R_1} = \sin\omega t \cos\beta_1 + \cos\omega t \sin\beta_1\,;$$

$$\frac{y}{R_2} = \sin\omega t \cos\beta_2 + \cos\omega t \sin\beta_2\,,$$

из њих непосредно следује

$$\Delta\cdot\sin\omega t = \frac{x}{R_1}\sin\beta_2 - \frac{y}{R_2}\sin\beta_1\,,$$

$$\Delta\cdot\cos\omega t = -\frac{x}{R_1}\cos\beta_2 + \frac{y}{R_2}\cos\beta_1\,,$$

где је

$$\Delta = \cos\beta_1 \sin\beta_2 - \sin\beta_1\cos\beta_2 = \sin(\beta_2 - \beta_1).$$

После дизања на квадрат и сабирања из претходних једначина добијамо једначину

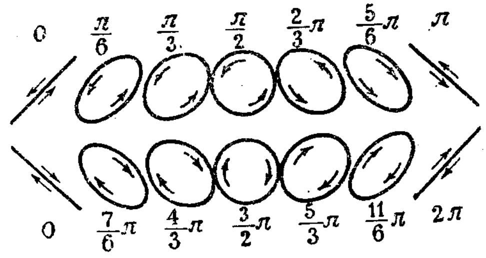
$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} - \frac{2\,x\,y}{R_1 R_2}\cos(\beta_2 - \beta_1) = \sin^2(\beta_2 - \beta_1)\,,$$

која показује да после сабирања две хармониске осцилације ортогоналних праваца, а истих фреквенција, у општем случају добијамо елиптичко кретање. То елиптичко кретање може да дегенерише како у праволиниско кретање, на пр. за случај $\beta_2 = \beta_1$, и то по правој

$$\frac{x}{R_1} - \frac{y}{R_2} = 0\,,$$

тако и у кружно кретање, кад је, на пр. $R_1 = R_2$ и $\beta_2 - \beta_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

На слици (сл. 26) показане су трајекторије тачке која врши две хармониске осцилације истих амплитуда $R_1 = R_2$ ортогоналних праваца. Изнад и испод слике су наведене разлике фаза тих осцилација.



Слика 26

Анализа случаја, кад два правца нису ортогонална, аналогна је претходном случају, само треба да се искористе косоугле координате.

d. Слагање осцилација различитих фреквенција.

α. Слагање осцилација истих праваца.

Две осцилације са једначинама

$$x_1 = R_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1)\,,$$

$$x_2 = R_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2)$$

у истом правцу x — осе најједноставније можемо сабрати графичким начином. Према томе да ли су фреквенције ω_1 и ω_2 самерљиве или не можемо добити периодична или непериодична кретања. Ако су ω_1 и ω_2 две самерљиве величине и

$$\omega_1 = n_1\,\omega\,, \qquad \omega_2 = n_2\,\omega\,, \tag{6}$$

где су: ω — највећа заједничка мера, n_1 и n_2 — два цела узајамно проста броја, онда је збир

$$x = x_1 + x_2 = R_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + R_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2)$$

периодична функција са периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = n_1 T_1 = n_2 T_2 ,$$

где су T_1 и T_2 периоди прве односно друге осцилације.

Ако су ω_1 и ω_2 несамерљиве величине, кретање има осцилаторни апериодичан карактер.

β. Слагање осцилација различитих правaца.

Као пример узмимо две осцилације дуж ортогоналних правaца са различитим али самерљивим фреквенцијама и ставимо поново (6).

Ако су те осцилације дате једначинама

$$x = R_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) ,$$
$$y = R_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2) ,$$

можемо ове једначине заменити једначинама

$$x = R_1 \cos \omega_1 t' ,$$
$$y = R_2 \sin(\omega_2 t' + \varphi) ,$$

где је t' време, које рачунамо од момента t_0, тј. ставимо

$$t = t' + t_0 ,$$

с тим да t_0 задовољава услов

$$\omega_1 t_0 + \beta_1 = \frac{\pi}{2} ,$$

и

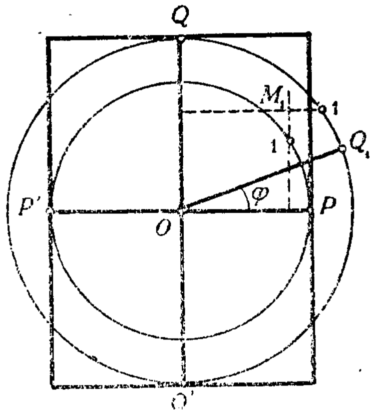
$$\varphi = \omega_2 t_0 + \beta_2 .$$

Ако изоставимо поново црту код t', имамо једначине у облику

$$x = R_1 \cos \omega_1 t ,$$
$$y = R_2 \sin(\omega_2 t + \varphi) .$$

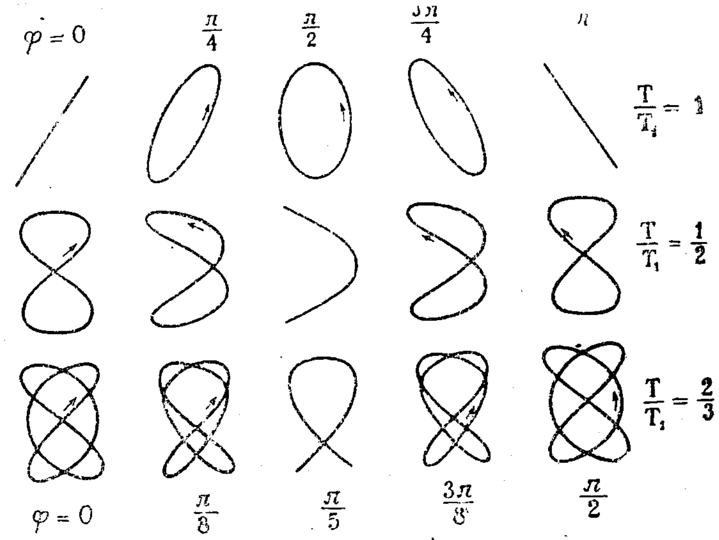
Нацртајмо сад правоугаоник са странама $2R_1$ и $2R_2$ (сл. 27) под претпоставком да је $R_2 > R_1$. На осама симетрије тог правоугаоника нацртајмо кружне линије пречника $PP' = 2R_1$ и $QQ' = 2R_2$. Поделимо обе кружне линије на $N = n_1 n_2$ једнаких

делова и то прву кружну линију од тачке P, а другу од тачке Q_1 за коју $\sphericalangle Q_1 O P = \varphi$. Ако су ти делови велики, сваки део можемо поделити још на произвољан број једнаких делова. Затим нумеришимо тачке на првој кружној линији од тачке P сваку n_1' у, а на другој од тачке Q_1 сваку n_2' у. Кроз прве тачке дељења повуцимо праве паралелне са QQ', а кроз друге — паралелне са PP'. Тачке пресека правих, које пролазе кроз тачке означене истим бројем на једној и другој кружној линији, припадају трајекторији тачке, која врши означене две хармониске осцилације. Тако су на нашој слици означене тачке 1 и 1 на првој и другој кружној линији. Одговарајуће паралелне праве секу се у тачки M_1, која припада трајекторији сложеног кретања.

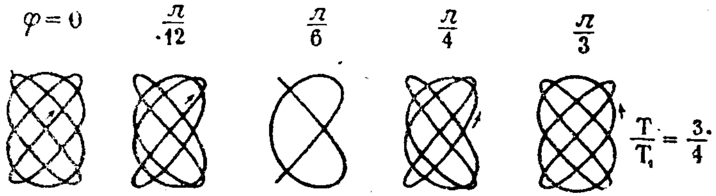


Слика 27

Као примере сложених осцилација наведимо слике, које се зову *Лисажуове фигуре* (сл. 28 *a* и *b*).



Слика 28 a



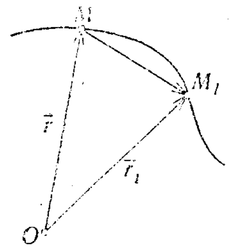
Слика 28 b

ГЛАВА ДРУГА

Брзина покретне тачке

§ 2·1 Померање тачке. Елементарно померање

Нека се тачка M креће по својој путањи (сл. 29). Уочимо два положаја ове тачке: један M у тренутку t, са вектором положаја $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ у односу на непокретну тачку O, и други M_1 у наредном тренутку t_1 $(t_1 > t)$ са вектором положаја $\vec{r}_1$.



Слика 29

Вектор $\overrightarrow{MM_1}$ показује *померање* тачке из положаја M у положај M_1 за време $t_1 - t = \Delta t$.

Померање тачке једнако је разлици вектора положаја, тј.

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta \vec{r}.$$

Ако је интервал времена $t_1 - t = \Delta t$ бесконачно мали, одговарајуће померање зове се *елементарно померање*.

Ако са x, y, z односно x_1, y_1, z_1 означимо Декартове координате тачака M и M_1, вектор померања $\overrightarrow{MM_1}$ има за координате разлике

$$x_1 - x = \Delta x, \qquad y_1 - y = \Delta y, \qquad z_1 - z = \Delta z.$$

За елементарно померање су величине $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ бесконачно мале.

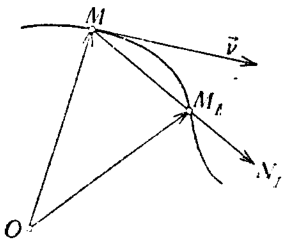
§ 2·2 Средња брзина тачке. Брзина тачке

Конструишимо померање $\overrightarrow{MM_1}$ покретне тачке из положаја M у положај M_1 што одговара интервалу времена $t_1 - t = \Delta t$. При томе због одређености претпостављамо да је $t_1 > t$ и према томе је $\Delta t > 0$.

Поделимо вектор $\overrightarrow{MM_1}$ скаларом Δt. Добићемо вектор (сл. 30)

$$\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \overrightarrow{MN_1} \tag{1}$$

који има: 1. исту основу са вектором $\overrightarrow{MM_1}$, 2. исти смер, јер је $\Delta t > 0$ и 3. интензитет у размери $\frac{1}{\Delta t}$ према дужини вектора $\overrightarrow{MM_1}$.



Слика 30

Тако конструисани вектор (1) зове се *средња брзина тачке* за интервал времена од t до t_1. Тај вектор има за координате:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}. \tag{2}$$

Јасно је, да у општем случају са променом Δt, а за сталан тренутак t, средња брзина мења своју векторску вредност. Претпоставимо да средња брзина тежи одређеној граничној вредности кад Δt тежи нули, тј. кад се t_1 бесконачно приближује тренутку t. Ова гранична вредност, кад постоји, зове се *брзина тачке у тренутку* t [1]). Дакле:

Брзина покретне тачке у датом тренутку је гранична вредност количника вектора померања тачке и одговарајућег интервала времена кад тај интервал тежи нули.

Ако брзину означимо са $\vec{v}$ (velocitas — брзина), можемо написати

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}.$$

Кад је положај тачке одређен вектором положаја $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ у односу на непокретну тачку O, брзина је векторски извод тог вектора по времену, тј.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

где смо тачком означили векторско диференцирање по времену.

[1]) Претпоставка $\Delta t > 0$ стоји у вези са посматрањем брзине само за *будуће* кретање тачке слично као што можемо да посматрамо само, рецимо, *десни* извод функције. За $\Delta t < 0$ имамо брзину исто тако у дати тренутак али према *прошлости*. За обичан тренутак обадве брзине имају исту векторску вредност, али има случајева кад се једна брзина разликује од друге, на пр., у случају удара тачке о површину.

Брзина као вектор има ове особине:

1. Основа брзине је тангента на путању у тачки M, јер гранични правац тетиве MM_1, кад се M_1 приближује M, одређује ту тангенту.

2. Смер брзине је наперен на ону страну, куд се тачка креће, јер смер померања $\overrightarrow{MM_1}$ одговара том смеру, а дељење са $\Delta t > 0$ и прелаз на граничну вредност не мењају тај смер.

3. Ако пут s рачунамо у смеру кретања тачке по путањи, интензитет брзине v једнак је изводу пута по времену, тј.

$$v = \frac{ds}{dt},$$

јер је

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Према томе, ако са $\vec{D}$ означимо орт тангенте на путању са смером у смеру кретања тачке, а у том истом смеру рачунамо и s, можемо написати основну векторску једначину за брзину

$$\vec{v} = v\vec{D} = \frac{ds}{dt}\vec{D}. \tag{3}$$

Приметимо у вези са овим обрасцем ово. За рачунање лука s на кривој линији путање можемо изабрати, независно ма од каквог кретања тачке, одређени почетак и одређени смер у ком тај лук расте. Према том смеру можемо поставити и смер орта тангенте $\vec{D}$, исто тако независно од кретања тачке. Ако помоћу таква лука поставимо закон пута за кретање тачке, извод $\frac{ds}{dt}$ може бити позитиван и негативан, али образац (3) остаје и тада на снази само под v и $\frac{ds}{dt}$ треба разумети *алгебарску вредност брзине у односу на орт* $\vec{D}$. Заиста, ако је $\frac{ds}{dt} > 0$, тачка се креће у смеру рашћења лука s, а то значи у смеру орта $\vec{D}$, што одговара обрасцу (3). Ако је $\frac{ds}{dt} < 0$, тачка се креће у смеру опадања s и има брзину супротну смеру орта $\vec{D}$, а то поново одговара обрасцу, јер се тај орт множи негативним скаларом.

Пошто координате средње брзине имају вредности (2), координате брзине у датом тренутку изражавају се изводима

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

тј. *Декартове координате брзине тачке једнаке су скаларним изводима Декартових координата те тачке по времену.*

Ако коначну једначину кретања тачке, рецимо, за x координату напишемо у облику $x = f_1(t)$, за одговарајућу брзину у различитим ознакама имамо

$$v \cos(\vec{v}, x) = v_x = v_1 = \frac{dx}{dt} = x' = f_1{}'(t) = \frac{d}{dt} f_1(t).$$

Интензитет брзине се изражава именованим бројем. Пошто за изражавање интензитета брзине делимо дужину временом, димензија брзине је

$$[\vec{v}] = LT^{-1},$$

где смо, како је уобичајено, помоћу средње заграде означили димензију њом обухваћене величине, са L — дужину, а са T — време.

У такозваном *апсолутном* систему за јединицу брзине се узима брзина од једног центиметра у секунди.

§ 2·21 Брзина праволиниског кретања. Дијаграми брзине

Као што смо видели (§ 1·61), коначна векторска једначина праволиниског кретања може се написати

$$(1) \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{D},$$

где су $\vec{r}_0$ и $\vec{D}$ стални вектори, а s функција времена.

За одређивање брзине $\vec{v}$ тог кретања треба диференцирати (1) по времену:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{ds}{dt}\vec{D}.$$

Пошто је вектор $\vec{D}$ сталан, закључујемо да *брзина праволиниског кретања увек има правац као и сама права путања.* Према томе за одређивање брзине кретања по унапред датој

правој довољно је да знамо само скалар $\frac{ds}{dt} = s'$, тј. алгебарску вредност брзине. Она је позитивна кад се тачка креће у смеру орта $\vec{D}$, а негативна је у противном случају. Њена апсолутна вредност једнака је интензитету брзине.

И у случају криволиниског кретања извод s', према једначини (3) претходног параграфа, одређује интензитет и смер брзине према тангенти са унапред означеним смером. У многим питањима, кад нас или не интересује облик путање, или је он унапред познат, за оцену уколико се кретање врши брже или спорије, служи само алгебарска вредност брзине, а понекад само њен интензитет.

За што конкретнију претставу везе алгебарске вредности брзине (кратко — брзине) и било времена, било положаја тачке, често пута се употребљује графички метод.

Како са увођењем брзине v имамо три променљиве величине

$$s, \quad v, \quad t$$

можемо нацртати три графика:

1. График пута као функције времена, $s = s(t)$,

2. График брзине као функције времена, $v = v(t)$,

3. График брзине као функције пута, $v = v(s)$,

при чему сваки график одређује и инверзну функцију, на пр., према потреби, можемо из првог графика одредити време t у тренутку положаја тачке на растојању s.

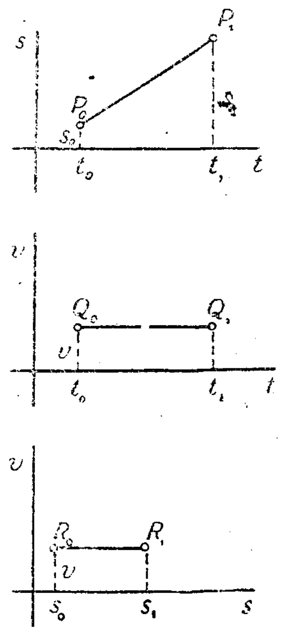
Наведимо неколико примера графика.

1. На слици 31 имамо:

a. график пута равномерног кретања — отсечак праве линије са једначином

$$s = v_0(t - t_0) + s_0$$

од тачке $P_0(t_0, s_0)$ до тачке $P_1(t_1, s_1)$.



Слика 31

b. график брзине као функције времена — отсечак праве

$$v = \mathrm{const.} = v_0$$

од тачке $Q_0\,(t_0, v)$ до тачке $Q_1\,(t_1, v)$.

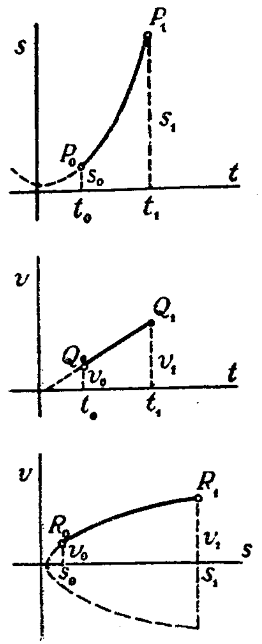
c. график брзине као функције пута — отсечак праве

$$v = \mathrm{const.} = v_0$$

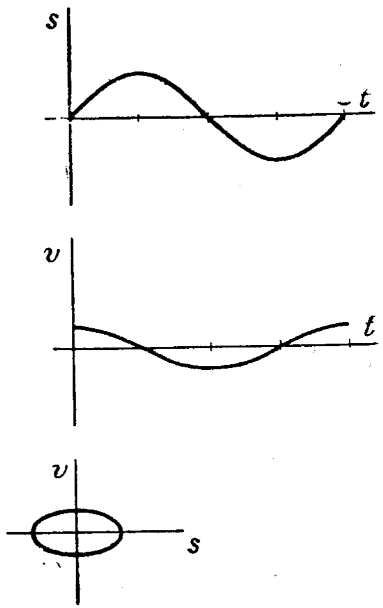
од тачке $R_1\,(s_0, v)$ до тачке $R_2\,(s_1, v)$.

2. Слика 32 даје графике једнако промењљивог кретања: *a.* график пута чија је једначина

$$s = at^2 + bt + c$$



Слика 32



Слика 33

је парабола; *b.* график брзине чија је једначина

$$v = s' = 2at + b$$

је права и *c.* график брзине као функције пута *s* једначине

$$v^2 = 4as + b^2 - 4ac$$

такође је парабола. Према вредностима параметара *a*, *b*, *c* и вредностима t_0 и t_1 графици имају различите положаје у равни. Лако је извршити елементарну анализу промене положаја две параболе и праве у вези са променом тих параметара. На слици је график дат једначином

$$s = \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$$

и одређен у интервалу

$$t_0 = 2 \quad \text{и} \quad t_1 = 5\,.$$

3. Најзад, слика 33 одговара хармониској осцилацији једначине

$$s = R\sin\omega t\,.$$

a. График пута је синусоида, *b.* график брзине у функцији времена — косинусоида, *c.* график брзине у функцији пута — елипса чија је једначина

$$\frac{s^2}{R^2} + \frac{v^2}{R^2\omega^2} = 1\,.$$

§ 2·3 Квадрат брзине

Из основне једначине

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{D}$$

за квадрат брзине имамо,

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{ds^2}{dt^2}\,.$$

Према томе се одређивање квадрата брзине своди на одређивање квадрата елемента дужине лука — ds^2, који се зове *метричка форма*. Сваком координатном систему одговара метричка форма за те координате.

За Декартове координате метричка форма има облик

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,,$$

а квадрат брзине

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2\,.$$

За које било криволиниске координате q_1, q_2, q_3 вектор положаја $\vec{r}$ тачке *M* треба сматрати као функцију тих координата а овё опет, сваку са себе, као функције времена. Према правилу за диференцирање сложених функција имамо

$$(1) \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} q_3' ,$$

где је, на пример, $q_1' = \dfrac{dq_1}{dt}$, а $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ је делимичан векторски извод вектора положаја по координати q_1. Координате тога извода су

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_1}.$$

Сваки од тих делимичних векторских извода има правац тангенте на одговарајућу координатну линију, а смер онај у коме одговарајућа координата расте. Према томе је

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = A_1 \vec{D}_1, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = A_2 \vec{D}_2, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = A_3 \vec{D}_3,$$

где смо, као и раније, са $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{D}_3$ означили ортове триједра координата q_1, q_2, q_3, а са A_1, A_2, A_3 интензитета одговарајућих вектора; дакле, на пр.,

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}.$$

Према томе из (1) за брзину можемо написати векторску једначину

$$(2) \qquad \vec{v} = A_1 q_1' \vec{D}_1 + A_2 q_2' \vec{D}_2 + A_3 q_3' \vec{D}_3 ,$$

и слично за померање

$$(3) \qquad \vec{ds} = A_1 \, dq_1 \vec{D}_1 + A_2 \, dq_2 \vec{D}_2 + A_3 \, dq_3 \vec{D}_3 ,$$

где су

$$A_1 q_1', \quad A_2 q_2', \quad A_3 q_3'$$

алгебарске вредности компонената брзине за осе триједра криволиниских координата, а $A_1 \, dq_1$, $A_2 \, dq_2$, $A_3 \, dq_3$ — компоненте елементарног померања.

Ако сад дигнемо v на квадрат, из (2) имамо

$$(4) \qquad v^2 = A_1^2 q_1'^2 + A_2^2 q_2'^2 + A_3^2 q_3'^2 + \\ + 2 B_1 q_2' q_3' + 2 B_2 q_3' q_1' + 2 B_3 q_1' q_2' ,$$

где је, на пр.,

$$B_1 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right) = A_2 A_3 \cos(\vec{D}_2 \vec{D}_3) = \\ = \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3}.$$

За ортогонални систем координата имамо

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0,$$

јер, на пример, за B_1 имамо, $\cos(\vec{D}_2 \vec{D}_3) = 0$, и квадрат брзине је

$$v^2 = A_1^2 q_1'^2 + A_2^2 q_2'^2 + A_3^2 q_3'^2 ,$$

а одговарајућа метричка форма

$$(5) \qquad ds^2 = A_1^2 \, dq_1^2 + A_2^2 \, dq_2^2 + A_3^2 \, dq_3^2 .$$

За косоугли систем је метричка форма према (4):

$$(6) \qquad ds^2 = A_1^2 \, dq_1^2 + A_2^2 \, dq_2^2 + A_3^2 \, dq_3^2 + \\ + 2B_1 \, dq_2 \, dq_3 + 2B_2 \, dq_3 \, dq_1 + 2B_3 \, dq_1 \, dq_2 .$$

Једначине (5) и (6) показују да елемент дужине лука ds може бити сматран као дијагонала паралелепипеда, чије су ивице $A_1 \, dq_1$, $A_2 \, dq_2$, $A_3 \, dq_3$, За ортогоналан систем тај паралелепипед је правоугли.

Из наведеног следује да израчунавање v^2 можемо извршити на два начина: аналитички, одређивањем x', y', z', или непосредно, геометриским одређивањем ивица означеног елементарног паралелепипеда и углова између њих.

На пр., за поларно-цилиндричне координате први начин, после диференцирања једначина (1) § 1·12, даје:

$$x' = r' \cos\theta - r\,\theta' \sin\theta ,$$
$$y' = r' \sin\theta + r\,\theta' \cos\theta ,$$
$$z' = z' ,$$

одакле имамо

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 + r^2 \theta'^2 + z'^2 .$$

По другој методи узимамо у обзир да прва ивица елементарног паралелепипеда дуж координатне линије, где се мења само r, износи dr; друга, где се мења само θ, претставља елемент лука кружне линије полупречника r са средишним углом $d\theta$, и према томе износи $rd\theta$; најзад, трећа ивица у правцу z осе износи dz. Пошто је систем ортогоналан, имамо

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2\,,$$

а то доводи до претходног обрасца.

За сферне координате из (1) § 1·13, после диференцирања, добијамо

$$v^2 = \rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2 + \rho^2 \psi'^2 \cos^2 \varphi\,.$$

Тај исти резултат следује из посматрања правоуглог паралелепипеда са ивицама:

$$d\rho, \quad \rho d\varphi, \quad \rho \cos\varphi \cdot d\psi\,.$$

Последња ивица је елементаран лук круга са полупречником $\rho\cos\varphi$, што одговара средишном углу $d\psi$ са центром на z оси.

Најзад, за елиптичне координате из (1) § 1·14, после израчунавања логаритамских извода и одређивања x', y', z', на пример, из прве једначине у облику

$$2\,\frac{x'}{x} = \frac{\lambda_1'}{\lambda_1 - a^2} + \frac{\lambda_2'}{\lambda_2 - a^2} + \frac{\lambda_3'}{\lambda_3 - a^2}\,,$$

квадрирањем и сабирањем долазимо до

$$4\,v^2 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{\varphi(\lambda_1)}\,\lambda_1'^2 + \frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2)}\,\lambda_2'^2 + \frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{\varphi(\lambda_3)}\,\lambda_3'^2\,,$$

где је

$$\varphi(\lambda) = (a^2-\lambda)\,(b^2-\lambda)\,(c^2-\lambda)\,.$$

§ 2·4 Компоненте и пројекције брзине за осе криволиниских координата

Израз квадрата брзине омогућава одређивање компонената и пројекција (ако се последње разликују од првих у случају косоуглих координата) брзине за осе криволиниских координата.

Означимо са v^1, v^2, v^3 алгебарске вредности компонената брзине у правцима оса криволиниских координата са ортовима $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{D}_3$. Тада имамо

$$\vec{v} = v^1 \vec{D}_1 + v^2 \vec{D}_2 + v^3 \vec{D}_3\,.$$

С друге стране имали смо у претходном параграфу (2)

$$(1) \qquad \vec{v} = A_1 q_1' \vec{D}_1 + A_2 q_2' \vec{D}_2 + A_3 q_3' \vec{D}_3\,.$$

Према томе за компоненте имамо

$$v^1 = A_1 q_1', \quad v^2 = A_2 q_2', \quad v^3 = A_3 q_3'$$

или

$$v^i = A_i q_i'. \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Затим, ако је познат облик квадрата брзине или метричке форме, посматрањем чланова са потпуним квадратима можемо одредити величине компонената. Чланови са производима омогућавају одређивање косинуса углова између оса криволиниских координата.

Тако, на пример, из

$$v^2 = \rho'^2 + \rho^2\varphi'^2 + \rho^2\psi'^2 \cos^2\varphi$$

одмах закључујемо да компоненте брзине имају вредности

$$\rho', \quad \rho\varphi', \quad \rho\psi' \cos\varphi\,.$$

За одређивање пројекција брзине v_1, v_2, v_3 на осе криволиниских координата узимамо квадрат брзине и стављамо

$$v^2 = 2T^* = (\vec{v}\,\vec{v})\,,$$

где смо са T^* означили половину квадрата брзине. После диференцирања претходне једначине по q_1' имамо

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_1'} = \left(\vec{v}\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1'}\right),$$

али из основне једначине

$$\vec{v} = A_1 q_1' \vec{D}_1 + A_2 q_2' \vec{D}_2 + A_3 q_3' \vec{D}_3$$

имамо

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1'} = A_1 \vec{D}_1$$

те према томе закључујемо

$$(2) \qquad \frac{\partial T^*}{\partial q_1'} = A_1 (\vec{v}\,\vec{D}_1) = A_1\, v \cos(\vec{v}\,\vec{D}_1) = A_1\, v_1\,.$$

Из ове и сличних једначина дефинитивно одређујемо вредности пројекција брзине:

$$v_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial T^*}{\partial q_1'}, \quad v_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial T^*}{\partial q_2'}, \quad v_3 = \frac{1}{A_3}\frac{\partial T^*}{\partial q_3'};$$

што можемо да напишемо и у општем облику

$$v_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial T^*}{\partial q_i'}. \qquad i = 1, 2, 3.$$

За сферне координате, на пр., имамо:

$$2T^* = \rho'^2 + \rho^2\varphi'^2 + \rho^2\psi'^2\cos^2\varphi,$$

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \rho, \quad A_3 = \rho\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \rho'} = \rho', \quad \frac{\partial T^*}{\partial \varphi'} = \rho^2\varphi', \quad \frac{\partial T^*}{\partial \psi'} = \rho^2\psi'\cos^2\varphi,$$

и према томе је

$$v_1 = \rho', \quad v_2 = \rho\varphi', \quad v_3 = \rho\psi'\cos\varphi,$$

§ 2·41 Генералисане контраваријантне и коваријантне координате брзине

Узмимо место ортова $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{D}_3$ триједра оса криволиниских координата за основне векторе тог триједра векторе

(1) $$\vec{e}_1 = A_1\vec{D}_1, \quad \vec{e}_2 = A_2\vec{D}_2, \quad \vec{e}_3 = A_3\vec{D}_3,$$

који се разликују од ортова скаларним множиоцима A_1, A_2, A_3, па означимо генералисане координате брзине за те векторе — контраваријантне (генералисане компоненте) са

$$\overline{v}^1, \ \overline{v}^2, \ \overline{v}^3,$$

а коваријантне (генералисане пројекције) са

$$\overline{v}_1, \ \overline{v}_2, \ \overline{v}_3.$$

Како једначину (1) претходног параграфа

$$\vec{v} = A_1 q_1'\vec{D}_1 + A_2 q_2'\vec{D}_2 + A_3 q_3'\vec{D}_3$$

можемо заменити једначином

$$\vec{v} = q_1'\vec{e}_1 + q_2'\vec{e}_2 + q_3'\vec{e}_3,$$

видимо да контраваријантне координате брзине имају вредности

$$\overline{v}^1 = q_1', \quad \overline{v}^2 = q_2', \quad \overline{v}^3 = q_3'$$

или кратко

(2) $$\overline{v}^i = q_i'. \qquad i = 1, 2, 3.$$

Са друге стране, како коваријантна координата брзине, на пр., $\overline{v}_1$ има вредност скаларног производа

$$\overline{v}_1 = (\vec{v}, \vec{e}_1) = A_1(\vec{v}\,\vec{D}_1),$$

а из једначине (2) § 2·4 имамо да је десна страна ове једначине једнака $\dfrac{\partial T^*}{\partial q_1'}$, долазимо до ових вредности коваријантних координата брзине у односу на генералисани триједар криволиниских координата:

$$\overline{v}_1 = \frac{\partial T^*}{\partial q_1'}, \quad \overline{v}_2 = \frac{\partial T^*}{\partial q_2'}, \quad \overline{v}_3 = \frac{\partial T^*}{\partial q_3'}$$

или кратко

(3) $$\overline{v}_i = \frac{\partial T^*}{\partial q_i'}. \qquad i = 1, 2, 3.$$

Видимо да увођење основних вектора са величинама (1) упрошћава како изразе (2) контраваријантних координата брзине, тако и изразе (3) коваријантних координата.

§ 2·5 Одређивање кретања тачке при датој брзини

Досада смо говорили о одређивању брзине тачке кад је познато кретање те тачке. Сад поставимо обрнуто питање, да се одреди кретање тачке кад је дата или сама брзина или услови кретања, који стоје у вези са брзином.

Пошто је брзина $\vec{v}$ први векторски извод по времену вектора положаја $\vec{r}$, тј.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

за одређивање вектора положаја $\vec{r}$ према датој брзини као функцији времена треба извршити векторску интеграцију

$$\vec{r} = \int \vec{v}(t)\,dt + \vec{C},$$

где је $\vec{C}$ произвољан константан вектор интеграције. Тај вектор можемо одредити из почетних услова кретања под претпоставком да је у тренутку t_0 тачка била у положају са датим вектором положаја $\vec{r}_0$. Пошто је за тај тренутак

$$\vec{r}_0 = \left(\int \vec{v}(t)\, dt \right)_{t=t_0} + \vec{C},$$

елиминисањем C из претходних једначина добијамо

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\, dt.$$

Тој векторској једначини у случају Декартових координата одговарају три скаларне једначине, од којих ћемо, примера ради, написати прву

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(t)\, dt = x_0 + \int_{t^0}^{t} \varphi_1(t)\, dt,$$

где су $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ — Декартове координате брзине.

У општем случају, за одређивање кретања тачке може бити дата веза између брзине $\vec{v}$, вектора положаја $\vec{r}$ и времена t. За генералисане координате та се веза одређује помоћу три скаларне једначине:

$$\psi_1\, (q_1', q_2', q_3';\ q_1, q_2, q_2;\ t) = 0,$$
$$\psi_2\, (q_1', q_2', q_3';\ q_1, q_2, q_3;\ t) = 0,$$
$$\psi_3\, (q_1', q_2', q_3';\ q_1, q_2, q_3;\ t) = 0,$$

које сачињавају систем диференцијалних једначина. Решење проблема се своди на интеграцију тог система, која нам даје три интеграла

$$F_1\, (q_1, q_2, q_3;\ C_1, C_2, C_3;\ t) = 0,$$
$$(1) \qquad F_2\, (q_1, q_2, q_3;\ C_1, C_2, C_3,\ t) = 0,$$
$$F_3\, (q_1, q_2, q_3;\ C_1, C_2, C_3,\ t) = 0,$$

где су C_1, C_2, C_3 — произвољне константе. Те константе можемо одредити из услова за почетни тренутак t_0:

$$F_1\, (q_1^0, q_2^0, q_3^0;\ C_1, C_2, C_3;\ t_0) = 0,$$
$$(2) \qquad F_2\, (\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot) = 0,$$
$$F_3\, (\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot) = 0,$$

где смо са q_1^0, q_2^0, q_3^0 означили вредности генералисаних координата тачке за почетни тренутак.

Ако ставимо вредности произвољних констаната одређених из (2) у једначине (1), добићемо дефинитивно коначне једначине кретања у имплицитном облику

$$\Phi_1\, (q_1, q_2, q_3;\ q_1^0, q_2^0, q_3^0;\ t, t_0) = 0,$$
$$\Phi_2\, (\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot) = 0,$$
$$\Phi_3\, (\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot) = 0.$$

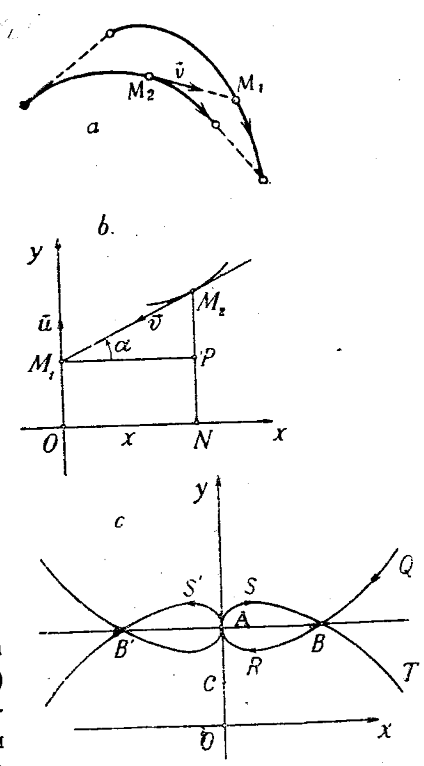
Као пример за одређивање кретања тачке, кад је дата веза између положаја тачке и њене брзине, решимо тако звани „проблем потере".

§ 2·51 Проблем потере

Нека је кретање покретне тачке M_1 (зец) дато (сл. 34, a) обликом путање и законом пута. Нека друга покретна тачка M_2 (пас) почне да се креће из одређеног положаја у одређено време тако, да има брзину одређеног интензитета увек наперену према тачки M_1. Треба одредити кретање тачке M_2.

Решимо овај проблем само за једноставан случај, кад је трајекторија тачке M_1 права и кад се она креће равномерно (сталном брзином u). Сем тога претпоставимо да се тачка M_2 креће брзином сталног интензитета v.

Уведимо у равни кретања координатни систем (сл. 34, b) са почетком у почетном положају тачке M_1 и са правцем y-осе у правцу трајекторије тачке M_1. Координате покретне



Слика 34 a, b, c

тачке M_2 означимо са x, y. Нека су M_1 и M_2 положаји покретних тачака у пренутку t. Спустимо нормалу $M_2 N$ на x-осу и повуцимо $M_1 P$ паралелно тој оси. Како права $M_1 M_2$ треба да буде тангента на трајекторију тачке M_2, из правоуглог троугла $M_1 M_2 P$ непосредно имамо

$$PM_2 = x \operatorname{tg} \alpha = x \frac{dy}{dx},$$

а пошто је, са друге стране,

$$PM_2 = NM_2 - OM_1 = y - ut,$$

јер је OM_1 пут тачке M_1 у равномерном кретању са брзином u из почетног положаја у тачки O кад је $t=0$, онда долазимо до једначине

$$y - ut = xy',$$

где је

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Диференцирајмо ту једначину по x, сматрајући t као функцију од x, тада имамо

$$-u \frac{dt}{dx} = x \frac{dy'}{dx} \tag{1}$$

Ако сад узмемо у обзир равномерност кретања тачке M_2 према којем је

$$\frac{ds}{dt} = v = \text{const.}$$

и елиминишемо прво из једначине (1) диференцијал dt,

$$-\frac{u}{v}\frac{ds}{dx} = x\frac{dy'}{dx},$$

а затим искористимо образац

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2},$$

онда из претходне једначине после раздвајања променљивих добијамо једначину

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = -k\frac{dx}{x},$$

где је

$$k = \frac{u}{v}.$$

Прва интеграција те једначине даје

$$\log\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = -k\log x + k\log c,$$

или

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = \left(\frac{c}{x}\right)^k, \tag{2}$$

где је c произвољна константа.

Пошто упоредо са једначином (2) можемо написати једначину

$$y' - \sqrt{1+y'^2} = -\left(\frac{x}{c}\right)^k, \tag{3}$$

која се добија из горње једначине (2) узимањем реципрочне вредности леве и десне стране, после сабирања (2) и (3) долазимо до једначине

$$2y' = \left(\frac{c}{x}\right)^k - \left(\frac{x}{c}\right)^k.$$

Интеграција ове једначине даје са новом интеграционом константом C:

1. за $k \neq 1$

$$\frac{2(y-C)}{c} = \frac{1}{1-k}\left(\frac{c}{x}\right)^{k-1} - \frac{1}{1+k}\left(\frac{x}{c}\right)^{1+k}. \tag{4}$$

Кад је k рационално и различито од јединице, ова је крива алгебарска.

2. за $k=1$

$$\frac{2(y-C)}{c} = \log x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\right)^2 \tag{5}$$

имамо трансцендентну криву.

Произвољне константе c и C се одређују из почетних услова за $t=0$:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y_0' = \frac{y_0}{x_0}.$$

За растојање

$$M_1 M_2 = \frac{x}{\cos\alpha} = x\sqrt{1+y'^2}$$

на основу (2) и (3) имамо

$$M_1 M_2 = \frac{x}{2}\left[\left(\frac{c}{x}\right)^k + \left(\frac{x}{c}\right)^k\right].$$

Анализирајмо сад три случаја:

1. $k > 1$ или $v < u$.

У овом случају вредност $M_1 M_2$ зависи, кад x тежи нули, од вредности степена

$$x^{1-k}$$

и према томе видимо да $M_1 M_2$ тежи бесконачности кад $x \to 0$. У току времена се растојање између тачака повећава.

2. $k = 1$ или $v = u$.

Кад $x \to 0$, растојање $M_1 M_2$ тежи сталној вредности $\frac{1}{2}c$.

3. $k < 1$ или $v > u$.

Кад је $x = 0$, $M_1 M_2 = 0$. Из (4) следује да се тачка M_2 поклопи са тачком M_1 у положају

$$x = 0, \quad y = C.$$

У проучавању трајекторије и кретања тачке M_2 зауставимо се на специјалном случају кад је

$$k = \frac{1}{2}.$$

Једначина (4) даје

$$(y - C)^2 = cx\left(1 - \frac{x}{3c}\right)^2$$

и одређује трајекторију у облику криве линије трећег реда (сл. 34, *c*) $QBRASBT$. Ова крива додирује осу Oy у тачки са ординатом C и има двоструку тачку B са координатама

$$x = 3c, \quad y = C.$$

Тангенте у тој тачки имају нагиб од 30° према правцу x-осе.

Кинематичку појаву у вези са том кривом треба овако посматрати. Кад се тачка M_1 креће у позитивном правцу y-осе, тачка M_2 се креће, рецимо из положаја Q, по грани $QBRA$ наше криве. У тачки A тачке M_2 и M_1 се поклапају. После тачке A тачка M_2 може да продужи своје кретање по грани $ASBT$ у смислу бежања од тачке M_1, а под истим геометриским условом да тангента на трајекторију тачке M_2 увек пролази кроз тачку M_1.

У вези са таквим кретањем можемо навести ову примедбу. После тачке A покретна тачка M_2, задовољавајући постављени геометриски услов о тангенти, може да настави своје кретање и то у смислу евентуалног бежања на један од ових начина: 1. По грани $ASBT$; 2. по Oy оси и 3. по грани $AS'B'T'$ криве симетричне са првом кривом у односу на Oy осу.

Овај пример показује да у математичком тумачењу неке појаве може наступити случај кад конкретно решење може да зависи од допунских услова проблема који у почетку нису били предвиђени и без којих проблем постаје неодређен.

§ 2·6. Уопштавање појма брзине за променљиве векторе и скаларе. Секторска брзина. Угаона брзина

Ако ма који вектор $\vec{R}$ зависи од времена, његов извод по времену $\frac{d\vec{R}}{dt}$ зове се *брзина тог вектора*. Према томе се појам брзине, као вектора, генералише у смислу примене не само на вектор положаја покретне тачке већ и на сваки други вектор. Димензија такве *генералисане векторске брзине* више не износи увек LT^{-1} већ зависи од природе вектора $\vec{R}$ који диференцирамо.

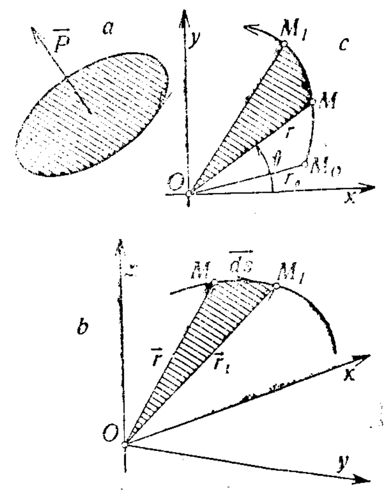
Исто тако, ако ма који скалар q зависи од времена, извод $\frac{dq}{dt}$ зове се брзина тог скалара. Таква брзина се јавља као *генералисана скаларна брзина*.

Узмимо примере.

Сваку равну, оријентисану (то значи са лицем и наличјем) површину (сл. 35, *a*) можемо довести у везу са вектором $\vec{P}$, који ћемо конструисати на овај начин. Он има правац управан на раван површине, смер од лица и интензитет — величину површине. Ако се тај вектор $\vec{P}$ мења у току времена, извод

$$(1) \qquad \frac{d\vec{P}}{dt}$$

зове се *површинска брзина*.



Слика 35

У специјалном случају површина $d\vec{P}$, ако се целокупна површина P и не налази у једној равни, може да се јави као сектор (сл. 35, *b*) између два потега $\vec{r}$ и $\vec{r}_1$ и елемента $\vec{ds}$ путање покретне тачке M. Тада се извод (1) зове *секторска брзина*. Означимо је са $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Пошто такву површину можемо изразити векторским производом

$$d\vec{P} = \frac{1}{2}\,[\vec{r}\,\vec{ds}],$$

то за секторску брзину имамо

$$\vec{S} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\,\frac{\vec{ds}}{dt}\right],$$

или

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\,[\vec{r}\,\vec{v}].$$

Координате секторске брзине према томе имају вредности

$$S_x = \frac{1}{2}\,(yz' - zy'), \quad S_y = \frac{1}{2}\,(zx' - xz'), \quad S_z = \frac{1}{2}\,(xy' - yx').$$

Ако се тачка креће у равни, рецимо Oxy, положај тачке можемо одредити помоћу поларних координата r и θ (сл. 35, *c*). Секторска брзина, која тада увек има правац z осе, може бити одређена својом алгебарском вредношћу, једним скаларом. Пошто је површина бесконачно малог сектора OMM_1, коју у прелазу ка граничној вредности можемо сматрати као површину кружног сектора, једнака

$$\frac{1}{2}\,r^2\,d\theta,$$

тај скалар има вредност

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}\,r^2\,\theta',$$

где је P површина сектора омеђеног кривом линијом и са два потега.

На сличан начин се уводи појам брзине за произвољан скалар који се мења у току времена. Јасно је да је таква брзина увек скалар.

Тако, на пр., ако запремина V геометриског објекта мења своју величину у току времена, извод $\frac{dV}{dt}$ је *запреминска брзина*.

Ако величину угла оцењујемо скаларом α, а он се мења у току времена, извод

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

зове се *скаларна угаона брзина*.

Са једним бесконачно малим[1]) углом можемо да вежемо и један вектор $\vec{d\alpha}$ (управан на равни угла, са смером од лица равни и са интензитетом једнаким мери угла у радијанима). Тада извод

$$\frac{\vec{d\alpha}}{dt} = \vec{\omega}$$

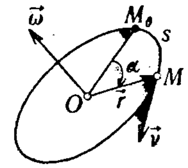
претставља такође неки вектор и зове се *векторска угаона брзина*.

Ако тачка M (сл. 36) врши кретање по кружној линији, средишни угао α је функција времена

$$\alpha = \alpha\,(t)$$

и према томе скаларна угаона брзина има вредност

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega.$$



Слика 36

Пошто интензитет брзине v има вредност

$$v = \frac{ds}{dt},$$

[1]) Учинимо једну примедбу. Ако поставимо услов да вектори могу заступати само величине чији збир може бити претстављен векторским збиром заступника, онда се коначни угао не може сматрати као векторска величина, јер правило сабирања два коначна обртања не одговара правилу сабирања два вектора (в. на пример, моју расправу: Геометриске основе рачуна са диадама. I. Диада и афинор. Београд 1930. стр. 221). То правило важи само у граничном случају сабирања два бесконачно мала обртања, па према томе и два таква угла.

а $ds = r\,d\alpha$, као лук кружне линије, онда је

$$v = r\frac{d\alpha}{dt} = r\omega,$$

тј. интензитет брзине тачке на кружној линији једнак је производу полупречника круга и скаларне угаоне брзине.

Ако уведемо векторску угаону брзину

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt},$$

помоћу ње можемо изразити векторску вредност брзине $\vec{v}$, и то помоћу израза

(2) $$\vec{v} = [\vec{\omega}\,\vec{r}],$$

јер написани векторски производ има правац, смер и интензитет брзине $\vec{v}$.

§ 2·61. Уздужна и попречна брзина

Претставимо вектор положаја покретне тачке M у односу на непокретну тачку O, вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, као производ интензитета r и орта, ort $\vec{r} = \vec{u}$, његова правца

$$\vec{r} = r\,\vec{u}.$$

Диференцирајмо чланове ове једначине по времену

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = r'\,\vec{u} + r\,\dot{\vec{u}},$$

где цртица означава скаларни извод, а тачка векторски извод по времену.

Ова једначина показује да брзину можемо раставити у две компоненте. Прва компонента има правац вектора $\vec{r}$; означимо је са $\vec{v}_r$, тј.

$$\vec{v}_r = r'\,\vec{u} = r' \operatorname{ort} \vec{r} = \frac{1}{r}\,r'\,\vec{r}.$$

Друга компонента има правац нормале на $\vec{r}$, јер извод од орта стоји управно на сам орт; означимо је са $\vec{v}_n$, тј.

$$\vec{v}_n = r\,\dot{\vec{u}}.$$

Према томе имамо

(1) $$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_n.$$

Прва компонента се зове *уздужна* или *радијална* брзина тачке, друга *попречна* или *трансверзална*.

За $r' > 0$ уздужна компонента показује *брзину удаљавања* тачке M од тачке O; за $r' < 0$ она одређује *брзину приближавања*.

Ако орт нормале у правцу и смеру извода $\dot{\vec{u}}$ означимо са $\vec{n}$, а диференцијал угла скретања правца вектора $\vec{u}$ са $d\theta$, другу компоненту можемо претставити

$$\vec{v}_n = r\,\dot{\vec{u}} = r\,\theta'\,\vec{n}.$$

Извод $\theta' = \dfrac{d\theta}{dt}$ је *брзина скретања* правца вектора положаја $\vec{r}$, односно његова орта $\vec{u}$.

Према томе образац (1) можемо написати

(2) $$\begin{aligned}\vec{v} &= r'\,\vec{u} + r\,\theta'\,\vec{n} = \\ &= \frac{r'}{r}\,\vec{r} + r\,\theta'\,\vec{n}.\end{aligned}$$

Као примену тог обрасца израчунајмо вредност секторске брзине

(3) $$\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{r},\ \vec{v}\right].$$

Ако искористимо (1) и узмемо у обзир да је компонента $\vec{v}_r$ колинеарна са $\vec{r}$ имамо

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{r},\ \vec{v}_n\right] = \frac{1}{2}\left[\vec{r},\ r\,\theta'\,\vec{n}\right] = \frac{1}{2}\,r^2\,\theta'\left[\vec{u},\ \vec{n}\right],$$

или

(4) $$\vec{S} = \frac{1}{2}\,r^2\,\theta'\,\vec{N},$$

где је $\vec{N}$ орт нормале на равни која садржи векторе $\vec{r}$ и $\vec{v}$. Смер те нормале зависи од смера брзине скретања правца вектора положаја.

Обратно, помоћу секторске брзине, као вектора, можемо изразити компоненту $\vec{v}_n$ на овај начин. Како је

$$\vec{v}_n = r\,\theta'\,\vec{n},$$

а

$$\vec{n} = \left[\vec{N},\ \vec{u}\right]$$

имамо на основу (4)

$$\vec{v}_n = r\,\theta'\left[\vec{N},\ \vec{u}\right] = \frac{2}{r}\left[\vec{S},\ \vec{u}\right]$$

или дефинитивно

$$\vec{v}_n = \frac{2}{r^2}\left[\vec{S},\ \vec{r}\right].$$

Једначину (2) можемо написати

$$\vec{v} = \frac{r'}{r}\vec{r} + \frac{2}{r^2}\left[\vec{S},\ \vec{r}\right].$$

Ако брзину скретања претставимо као вектор $\vec{\omega}$ (угаона брзина) са интензитетом θ' и са правцем и смером орта $\vec{N}$, тј. ставимо $\vec{\omega} = \theta'\vec{N}$, попречна брзина може бити претстављена, слично једначини (2) § 2·6, као векторски производ

$$\vec{v}_n = \left[\vec{\omega},\ \vec{r}\right];$$

вектор $\dot{\vec{u}}$ има при томе вредност

$$\dot{\vec{u}} = \left[\vec{\omega},\ \vec{u}\right].$$

Помоћу вектора угаоне брзине образац (2) можемо претставити и овако

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} \vec{v} &= r'\,\vec{u} + r\left[\vec{\omega}\ \vec{u}\right] = \\ &= \frac{r'}{r}\vec{r} + \left[\vec{\omega}\ \vec{r}\right]. \end{aligned}$$

Како је $\theta'\vec{N} = \vec{\omega}$, секторску брзину можемо изразити

$$\vec{S} = \frac{1}{2}r^2\,\vec{\omega}.$$

Обратно, брзина скретања правца, као угаона брзина, може бити одређена из једначине

$$\vec{\omega} = \frac{2}{r^2}\vec{S}$$

и према томе се помоћу вектора положаја $\vec{r}$ и његовог извода $\dot{\vec{r}}$ изражава

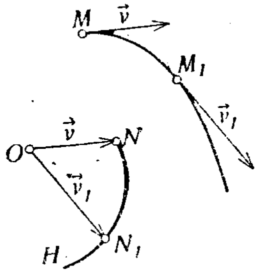
$$\vec{\omega} = \frac{1}{r^2}\left[\vec{r},\ \dot{\vec{r}}\right].$$

ГЛАВА ТРЕЋА

Убрзање покретне тачке

§ 3·1. Ходограф брзине

Ако се тачка M креће у простору, њена се брзина, вектор $\vec{v}$, у општем случају, мења у току времена.



Слика 37

Уочимо сталну тачку O (сл. 37) и конструишимо вредности вектора $\vec{v}$ као слободног вектора са почетком у тачки O. Крај вектора $\vec{v}$ у овом случају описује у простору криву линију H, која се зове *ходограф брзине*. Јасно је да свакој обичној тачки M путање покретне тачке одговара одређена брзина $\vec{v}$ и на тај начин одређена тачка N на ходографу брзине.

Какав је ходограф брзине за праволиниско кретање?

А какав за какво било равномерно кретање? А за праволиниско и равномерно кретање? А за равномерно кружно кретање?

Ако је коначна једначина кретања тачке у векторском облику

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

једначина ходографа брзине је

$$\vec{\rho} = \vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{\rho}(t),$$

где је $\vec{\rho}$ вектор положаја тачке тог ходографа. Коначним једначинама кретања за Декартове координате

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t)$$

одговарају једначине ходографа

$$\xi = f_1'(t) = \varphi_1(t), \quad \eta = f_2'(t) = \varphi_2(t), \quad \zeta = f_3'(t) = \varphi_3(t),$$

где су ξ, η, ζ — координате тачке N на ходографу. Ове једначине могу бити сматране као параметарске једначине ходографа брзине, где t игра улогу параметра. После елиминисања тог параметра добићемо две везе између координата ξ, η, ζ које одређују криву линију ходографа.

§ 3·11. Ходограф брзине планетског кретања

Према првом Кеплерову закону свака планета описује елипсу са Сунцем у једној жижи.

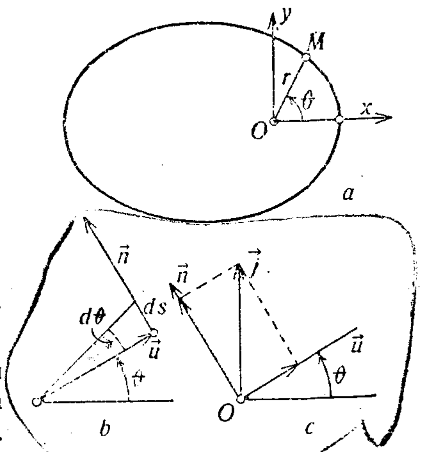
Према томе закону једначину путање (сл. 38, a) планете за поларне координате r и θ са полом у Сунцу можемо написати

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

или

$$(1) \qquad r(1 + e\cos\theta) = p,$$

где су: p параметар елипсе и e њен ексцентрицитет.



Слика 38

Други Кеплеров закон тврди да се кретање планета врши са константном секторском брзином. Пошто је секторска брзина у поларним координатама $\frac{1}{2} r^2 \theta'$, овај Кеплеров закон изражава се

$$(2) \qquad r^2\theta' = A,$$

где је A константа.

Ако вектор положаја $\vec{r}$ планете изразимо, слично § 2·61, овако

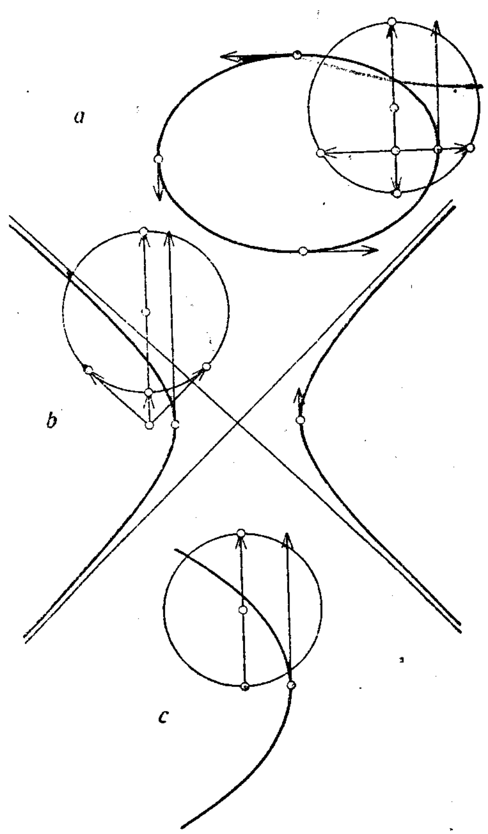
$$\vec{r} = r\vec{u}$$

и искористимо образац (2) § 2·61 за претстављање брзине тачке помоћу уздужне и попречне брзине, при чему улогу угла θ игра поларна координата планете (сл. 38, *b*), за вектор положаја $\vec{\rho}$ тачке ходографа можемо узети вредност

$$(3) \qquad \vec{\rho} = \vec{v} = r' \vec{u} + r\theta' \vec{n}.$$

Ако, даље, искористимо саму једначину (1)

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos\theta$$



Слика 39

и резултат диференцирања те једначине по времену у облику

$$r' = \frac{r^2\theta'}{p} e \sin\theta,$$

из (3) имамо

$$\vec{\rho} = \frac{r^2\theta'}{p}\left(e \sin\theta \cdot \vec{u} + \frac{p}{r}\vec{n}\right) = \frac{r^2\theta'}{p}\left[e(\vec{u}\sin\theta + \vec{n}\cos\theta) + \vec{n}\right].$$

Узимајући сад у обзир особину (2) и векторску једначину

$$\vec{j} = \vec{u}\sin\theta + \vec{n}\cos\theta,$$

која одговара разлагању (сл. 38, *c*) орта $\vec{j}$ осе y у две компоненте, можемо написати

$$\vec{\rho} = \frac{A}{p}(e\vec{j} + \vec{n}) = Re\vec{j} + R\vec{n},$$

где је

$$R = \frac{A}{p}.$$

Ова векторска једначина показује да је ходограф кружна линија, јер је први вектор сталан, — то је вектор положаја центра круга, а други има сталан интензитет R.

Ова расуђивања важе за сваку вредност ексцентрицитета e, а то значи да могу бити примењена на кретање по сваком конусном пресеку, само под условом да се кретање врши са сталном секторском брзином. Слика 39 показује положај круга ходографа брзине за елипсу (*a*), хиперболу (*b*) и параболу (*c*).

§ 3·2. Убрзање покретне тачке

Као што смо видели, први извод $\dot{\vec{r}}$ вектора $\vec{r}$ покретне тачке M по времену даје брзину:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

Брзина је са своје стране, у општем случају, вектор-функција времена. Извод брзине по времену, или други извод вектора положаја по времену, зове се *убрзање* или *акцелерација* покретне тачке. Ако убрзање тачке означимо са $\vec{w}$, имамо

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Пошто брзину $\vec{v}$ можемо сматрати као вектор положаја $\vec{\rho}$ помоћне тачке N на ходографу брзине, извод $\frac{d\vec{v}}{dt}$ у облику $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ може се протумачити и као брзина помоћне тачке N на ходографу. Дакле можемо казати *да је убрзање брзина помоћне тачке на ходографу брзине.* Према томе вектор-убрзање $\vec{w}$ има: 1. правац тангенте на ходограф, 2. наперен је на страну куда се креће помоћна тачка на ходографу брзине и 3. има интензитет једнак $\frac{d\sigma}{dt}$, где је $d\sigma$ елемент дужине лука ходографа.

Ако је кретање одређено коначним једначинама у Декартовим координатама

$$x=f_1(t),\qquad y=f_2(t),\qquad z=f_3(t),$$

брзина има координате

$$v_x=x'=f_1'(t),\qquad v_y=y'=f_2'(t),\qquad v_z=z'=f_3'(t),$$

а убрзање

$$w_x=x''=f_1''(t),\qquad w_y=y''=f_2''(t),\qquad w_z=z''=f_3''(t).$$

Интензитет убрзања се изражава именованим бројем. Пошто за израчунавање убрзања делимо брзину временом, димензија убрзања је

$$[\vec{w}]=[\vec{v}]\,T^{-1}=LT^{-2}.$$

У такозваном апсолутном систему за јединицу убрзања се узима убрзање кад за секунду израчунати прираштај брзине износи јединицу брзине, тј. центиметар у секунди. Кратко се каже да јединично убрзање износи један центиметар у секунди на квадрат.

§ 3·21. Скретање тачке. Девијација тачке. Оскулаторно параболичко кретање

Претпоставимо да за сваки тренутак t времена у интервалу од t_0 до t_1 вектор положаја $\vec{r}$ покретне тачке M можемо развити, као функцију времена, у конвергентан векторски ред

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\dot{\vec{r}}_0\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{\vec{r}}_0\Delta t^2+\frac{1}{3!}\dddot{\vec{r}}_0\Delta t^3+\ldots,$$

где је $\Delta t=t-t_0$ и тачке означавају векторске изводе, а нулти индекси показују да се вредности тих извода односе на тренутак t_0.

Упоредо са тачком M замислимо другу покретну тачку Q са вектором положаја $\vec{s}$, који се мења у току времена према једначини

$$\vec{s}=\vec{r}_0+\dot{\vec{r}}_0\Delta t. \tag{1}$$

Ова једначина показује да је у тренутку t_0 тачка Q била у истом положају са тачком M и да се после тог тренутка кретала праволиниски у правцу тангенте на трајекторију тачке M са сталном брзином једнаком почетној брзини тачке M.

За сваки тренутак t можемо конструисати вектор $\overrightarrow{QM}$ који спаја тачку на тангенти са одговарајућом тачком на кривој. Тај вектор показује отступање покретне тачке M од одговарајућег праволиниског кретања. Ово отступање зове се *скретање тачке* за дати тренутак t у односу на кретање за почетни тренутак t_0.

Скретање тачке, вектор $\overrightarrow{QM}$, има вредност

$$\overrightarrow{QM}=\vec{r}-\vec{s}=\frac{1}{2!}\ddot{\vec{r}}_0\Delta t^2+\frac{1}{3!}\dddot{\vec{r}}_0\Delta t^3+\ldots$$

Први члан десне стране ове једначине, вектор

$$\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}_0\Delta t^2,$$

претставља скретање тачке у ужем смислу тог појма. Такво скретање се зове такође *девијација тачке*. Девијација тачке има правац и смер убрзања тачке и кад је Δt бескрајно мала величина првога реда, девијација је бескрајно мала величина другога реда.

Замислимо још и трећу покретну тачку P са вектором положаја $\vec{p}$, чија је промена у току времена одређена једначином

$$\vec{p}=\vec{r}_0+\dot{\vec{r}}_0\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}_0\Delta t^2. \tag{2}$$

Из ове једначине видимо да се тачка P кренула заједно са тачком M, да она има заједничку са њом почетну брзину и исту девијацију.

Ако праволиниско равномерно кретање тачке Q према једначини (1) можемо сматрати као оскулаторно кретање првог реда за кретање тачке M, кретање тачке P, одређено једначином (2), биће оскулаторно кретање другога реда. За одређивање карактера тог кретања узмимо специјалне у општем случају косоугле осе координата Oxy у равни брзине $\dot{\vec r}_0$ и убрзања $\ddot{\vec r}_0$. Почетак оса сместимо у почетни положај тачке M, тада је $\vec r_0 = 0$. Осу Ox наперимо у правцу почетне брзине, тада вектор $\dot{\vec r}_0$ има за координате $(v, 0)$, при чему смо са v означили интензитет почетне брзине. Осу Oy наперимо у правцу убрзања, које тада има за координате $(0, w)$, где смо са w означили сталан интензитет тог убрзања. У случају таква избора оса, из векторске једначине (2) добијамо ове две скаларне једначине

$$x = v\,\Delta t,$$

$$y = \frac{1}{2}\,w\,\Delta t^2.$$

То су параметарске једначине параболе. Елиминацијом времена долазимо до једначине те параболе у облику

$$x^2 = 2\,\frac{v^2}{w}\,y.$$

На тај начин смо показали да за оскулаторно кретање другог реда можемо узети параболичко кретање.

§ 3·3. Тангенцијално и нормално убрзање

Према (3) § 2·2 брзину покретне тачке, вектор $\vec v$, можемо претставити

$$\vec v = v\,\vec D,$$

где је v алгебарска вредност брзине у односу на тангенту са ортом $\vec D$ који је наперен у смеру рачунања дужине лука s криве линије путање.

Диференцирајмо сад чланове претходне једначине по времену

$$(1)\qquad \dot{\vec v} = \vec w = \frac{dv}{dt}\,\vec D + v\,\frac{d\vec D}{dt}.$$

Извод орта $\vec D$ по времену можемо написати

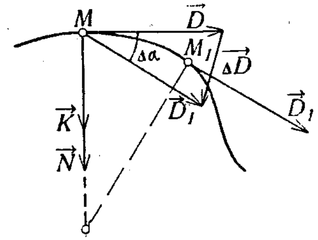
$$(2)\qquad \frac{d\vec D}{dt} = \frac{d\vec D}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec D}{ds}\cdot v.$$

Вектор $\dfrac{d\vec D}{ds}$ у томе изразу једнак је вектору $\vec K$ кривине криве линије путање у датој тачки[1]). Он је наперен у правцу главне нормале, чији ћемо орт означити са $\vec N$, има интензитет $\dfrac{1}{R}$, где је R полупречник кривине. Према томе је

$$(3)\qquad \frac{d\vec D}{ds} = \vec K = \frac{1}{R}\,\vec N.$$

---

[1]) То се може извести на овај начин. За тачку M (сл. 40) конструишимо орт $\vec D$ тангенте те тачке и орт $\vec D_1$ тангенте суседне тачке M_1 и означимо $MM_1 = \Delta s$, а прираштај орта $\vec D$ са $\overrightarrow{\Delta D}$, тј. ставимо $\overrightarrow{\Delta D} = \vec D_1 - \vec D$. Тада је $\dfrac{d\vec D}{ds} = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta \vec D}{\Delta s}$. У граничном положају правац вектора $\overrightarrow{\Delta D}$ тежи нормали на $\vec D$, а пошто лежи у оскулаторној равни, то је правац главне нормале са ортом $\vec N$. Интензитет ΔD вектора $\overrightarrow{\Delta D}$ може се заменити углом $\Delta\alpha$ између две суседне тангенте. Најзад је $\Delta s = R\,\Delta\alpha$, где је R полупречник круга кривине. Према томе интензитет вектора $\dfrac{d\vec D}{ds}$ је $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha} = \dfrac{1}{R}$. Узимајући у обзир правац, смер и интензитет, долазимо до једначине (3).



Слика 40

Ако искористимо ту вредност за једначину (2), из једначине (1) добијамо

$$\vec{w} = \frac{dv}{dt}\vec{D} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{D} + \frac{v^2}{R}\vec{N}. \tag{4}$$

Ова једначина показује да свако убрзање можемо раставити у две компоненте:

1. *Тангенцијално убрзање* у правцу тангенте на путању са вредношћу

$$\vec{w}_D = \frac{dv}{dt}\vec{D} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{D},$$

коју можемо изразити и овако

$$\vec{w}_D = v\frac{dv}{ds}\vec{D}.$$

2. *Нормално убрзање* у правцу главне нормале са вредношћу

$$\vec{w}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N}.$$

Нормално убрзање, пошто је увек наперено ка центру кривине, зове се и *центрипетално убрзање*.

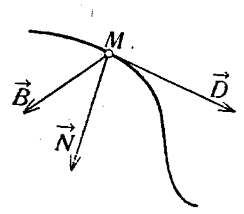
Према томе имамо векторску једначину

$$\vec{w} = \vec{w}_D + \vec{w}_N.$$

Обе означене компоненте припадају оскулаторној равни.

За сваку тачку путање можемо конструисати такозвани *природни триједар оса*, који чине *тангента* (орт $\vec{D}$), *главна нормала* (орт $\vec{N}$) и *бинормала*, чији орт означавамо са $\vec{B}$ (сл. 41). Раван која садржи тангенту и главну нормалу је *оскулаторна раван*. Убрзање припада тој равни. Како бинормала стоји управо на оскулаторној равни, убрзање нема компоненте у том правцу. Према томе за осе природног триједра можемо написати

$$\vec{w} = \overrightarrow{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_D} + \overrightarrow{\left(\frac{v^2}{R}\right)_N} + \overrightarrow{(0)_B}.$$



Слика 41

За одређивање алгебарских вредности тих убрзања можемо се послужити једначинама

$$w_D = \frac{d^2s}{dt^2} = (\vec{w}\,\vec{D}), \tag{5}$$

$$w_N = \frac{v^2}{R} = (\vec{w}\,\vec{N}), \tag{6}$$

а и једначином

$$w^2 = w_D^2 + w_N^2, \tag{7}$$

која одговара Питагориној теореми.

Тако за Декартове координате из (5) имамо

$$w_D = \frac{1}{v}(x''x' + y''y' + z''z'),$$

где је

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

За квадрат нормалног убрзања налазимо

$$w_N^2 = w^2 - w_D^2 = \frac{1}{v^2}\{w^2v^2 - (\vec{w}\,\vec{v})^2\} = \frac{1}{v^2}\{w\,v\sin(\vec{w}\,\vec{v})\}^2 = \frac{1}{v^2}[\vec{w}\,\vec{v}]^2;$$

одатле је

$$w_N^2 = \frac{1}{v^2}\{(y''z' - z''y')^2 + (z''x' - x''z')^2 + (x''y' - y''x')^2\}.$$

У случају праволиниског кретање убрзање се своди само на једну компоненту

$$\vec{w} = \frac{dv}{dt}\vec{D} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{D},$$

јер је $\frac{1}{R} = 0$.

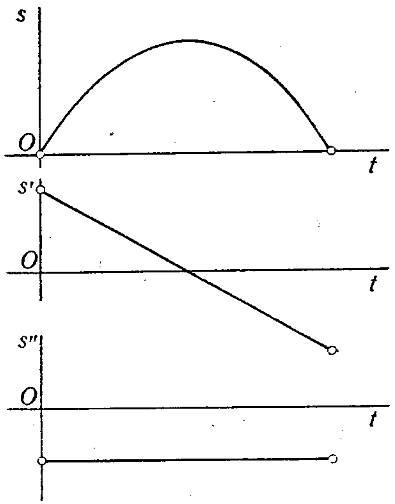
Видимо да у том случају убрзање може бити одређено само помоћу скалара $\frac{d^2s}{dt^2}$. Исти скалар и за криволиниско кретање тачке одређује убрзање, уколико се мисли само на промену интензитета брзине.

За равномерно кретање тангенцијално убрзање једнако је нули ($v = \text{const.}$, $\frac{dv}{dt} = 0$) и, према томе, за то кретање имамо само нормално убрзање

$$\vec{w} = \frac{v^2}{R}\vec{N}.$$

Према томе тачка која се креће равномерно по кругу полупречника R са интензитетом брзине v има убрзање наперено ка центру величине $\frac{v^2}{R}$.

Тачка нема убрзања само кад стоји или кад се креће равномерно и праволиниски.



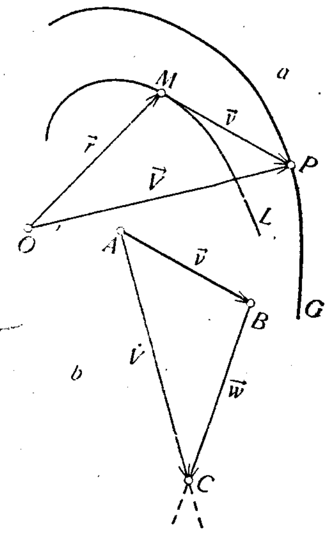
Слика 42

Скалар $\frac{d^2s}{dt^2}$, као што смо навели, омогућује — да се процени промена интензитета брзине v. За што конкретнију претставу тог скалара, као и у случају пута и алгебарске вредности брзине, употребљује се графичка метода. Дуж једне координатне линије меримо време, дуж друге — алгебарску вредност тангенцијалног убрзања — извод $\frac{d^2s}{dt^2}$. Према томе за свако кретање можемо нацртати у односу на време три графика (сл. 42 показује три графика за једнако успорено кретање), између којих можемо поставити везе искоришћавајући, с једне стране, геометриско тумачење извода, с друге — тумачење одређеног интеграла.

За оцену промене убрзања у вези са положајем тачке можемо цртати такође график са s и s'' на координатним осама.

§ 3·31. Велоцида

Узимајући одређене јединице за дужину и време, вектор положаја $\vec{r}$ покретне тачке M и брзину $\vec{v}$ можемо претставити на истој слици помоћу одређених дужина, независно од тога што су димензије тих вектора различите.



Слика 43

Нацртајмо брзину $\vec{v}$ (сл. 43, a) са почетком у покретној тачки M и означимо вектор положаја краја те брзине, тачке P, са $\vec{V}$. Тада имамо

$$(1) \qquad \vec{V} = \vec{r} + \vec{v}.$$

Кад се тачка M креће, тачка P мења свој положај у простору и описује линију која се зове *велоцида*. Значи, велоцида је геометриско место краја вектора брзине кад се њен почетак налази у покретној тачки.

Ако чланове једначине (1) диференцирамо по времену добићемо

$$\dot{V} = \dot{r} + \dot{v},$$

или

$$(2) \qquad \dot{V} = \vec{v} + \vec{w},$$

при чему вектор $\dot{V}$ има правац тангенте на велоциду, вектор $\vec{v}$ — тангенте на путању и вектор $\vec{w}$ — тангенте на ходограф брзине.

Написана векторска једначина може послужити за одређивање убрзања, ако су познате брзина тачке $\vec{v}$, као вектор, ходограф брзине и велоцида. Заиста, ако нацртамо брзину $\vec{v}$ (сл. 43, b) као вектор и из њеног почетка A повучемо правац AC тангенте на велоцнду, а из краја B — правац BC тангенте на ходограф, онда троугао ABC одговара једначини (2) и вектор BC има вредност убрзања $\vec{w}$.

§ 3·32. Убрзање планетског кретања

У параграфу 3·11 извели смо да брзина $\vec{v}$ код планетског кретања може бити изражена са

$$\vec{v} = \frac{A}{p} e\vec{j} + \frac{A}{p}\vec{n}.$$

После диференцирања те једиачине, узимајући у обзир сталност орта $\vec{j}$, имамо

$$\vec{w} = \frac{A}{p}\frac{d\vec{n}}{dt}.$$

Међутим је

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{n}}{d\theta}.\theta' = -\vec{u}.\frac{A}{r^2},$$

јер је извод орта $\vec{n}$ по углу обртања θ једнак нормалном орту са одговарајућим смером, а то је орт $-\vec{u}$, тј.

$$\frac{d\vec{n}}{d\theta} = -\vec{u} = -ort\,\vec{r}.$$

Сем тога смо из једначине $r^2\theta' = A$ ставили вредност θ'.
На тај начин имамо

$$\vec{w} = -\frac{A^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot ort\,\vec{r}.$$

Овај израз показују да *убрзање планетског кретања има правац потега са смером према жижи (центрипетално убрзање), а интензитет му је обрнуто пропорционалан квадрату растојања од жиже.*

Овај резултат важи за кретање тачке по сваком конусном пресеку са сталном секторском брзином у односу на жижу.

§ 3·4. Пројекције убрзања на осе криволиниских координата

Узмимо поново (§ 2·4) квадрат брзине

$$v^2 = (\vec{v}\,\vec{v}) = 2T^*$$

и диференцирајмо га по генералисаној брзини q'_1. Тада имамо

$$\left(\vec{v}\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_1'}\right) = \frac{\partial T^*}{\partial q_1'}. \tag{1}$$

Пошто из основних једначина за брзину (1) и (2) § 2·3

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}q_2' + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}q_3' = \tag{2}$$

$$= A_1 q_1'\vec{D}_1 + A_2 q_2'\vec{D}_2 + A_3 q_3'\vec{D}_3$$

имамо

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_1'} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} = A_1\vec{D}_1,$$

једначина (1) постаје

$$\left(\vec{v}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial T^*}{\partial q_1'}.$$

Диференцирање ове једначине по времену даје

$$\left(\dot{\vec{v}}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right) + \left(\vec{v}\,\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right) = \frac{d}{dt}\frac{dT^*}{dq_1'}. \tag{3}$$

Први члан леве стране има вредност

$$\left(\dot{\vec{v}}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right) = (\vec{w}, A_1\vec{D}_1) = A_1 w\cos(\vec{w}\,\vec{D}_1). \tag{4}$$

За трансформацију другог члана искористимо једначину

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q_1}, \tag{5}$$

која се лако доказује непосредним израчунавањем леве и десне стране. За леву страну имамо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1^2}q_1' + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1\,\partial q_2}q_2' + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1\,\partial q_3}q_3',$$

а за десну страну из (2) исти резултат

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1^2}q_1' + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1\,\partial q_2}q_2' + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1\,\partial q_3}q_3'.$$

Помоћу једначине (5) други члан једначине (3) можемо претставити

$$(6)\qquad \left(\vec{v}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right)=\left(\vec{v}\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial T^*}{\partial q_1}.$$

На основу (4) и (6) из (3) имамо

$$w\cos(\vec{w}\,\vec{D}_1)=\frac{1}{A_1}\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T^*}{\partial q_1'}-\frac{\partial T^*}{\partial q_1}\right).$$

Слично овом обрасцу изгледају обрасци и за остале пројекције, према томе можемо општи образац написати

$$(7)\qquad w\cos(\vec{w}\,\vec{D}_i)=\frac{1}{A_i}\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T^*}{\partial q_i'}-\frac{\partial T^*}{\partial q_i}\right).\qquad i=1,2,3.$$

Важно је обратити пажњу да десне стране тих једначина зависе само од квадрата брзине, наиме

$$2\,T^*=v^2=A_1^2\,q_1'^2+A_2^2\,q_2'^2+A_3^2\,q_3'^2+$$
$$+\,2\,B_1\,q_2'\,q_3'+2\,B_2\,q_3'\,q_1'+2\,B_3\,q_1'\,q_2'.$$

Образац (7) показују да су пројекције убрзања на осе криволиниских координата линеарне функције по q_1'', q_2'', q_3'' и квадратне по q_1', q_2', q_3'.

За поларно-цилиндричне координате r, θ, z са

$$2\,T^*=v^2=r'^2+r^2\theta'^2+z'^2$$

имамо

$$w\cos(\vec{w}\,\vec{D}_1)=r''-r\theta'^2,$$

$$w\cos(\vec{w}\,\vec{D}_2)=\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\theta').$$

$$w\cos(\vec{w}\,\vec{D}_3)=z''.$$

За сферне координате ρ, φ, ψ са

$$2T^*=v^2=\rho'^2+\rho^2\,\varphi'^2+\rho^2\cos^2\varphi\cdot\psi'^2$$

пројекције убрзања изгледају

$$w\cos(\vec{w},\vec{D}_1)=\rho''-\rho\,\varphi'^2-\rho\cos^2\varphi\cdot\psi'^2,$$

$$w\cos(\vec{w},\vec{D}_2)=\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{dt}\,(\rho^2\,\varphi')+\rho\sin\varphi\cos\varphi\cdot\psi'^2,$$

$$w\cos(\vec{w},\vec{D}_3)=\frac{1}{\rho\cos\varphi}\,\frac{d}{dt}(\rho^2\cos^2\varphi\cdot\psi').$$

§ 3·41. Генералисане коваријантне и контраваријантне координате убрзања

Слично § 2·41 уведимо и овде, место ортова $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{D}_3$, основне векторе

$$\vec{e}_1=A_1\,\vec{D}_1,\quad \vec{e}_2=A_2\,\vec{D}_2,\quad \vec{e}_3=A_3\,\vec{D}_3,$$

и означимо коваријантне координате убрзања у односу на триједар тих основних вектора са

$$\overline{w}_1,\ \overline{w}_2,\ \overline{w}_3,$$

а контраваријантне координате са

$$\overline{w}^1,\ \overline{w}^2,\ \overline{w}^3.$$

Како коваријантна координата, на пр. $\overline{w}_1$, има вредност

$$\overline{w}_1=(\vec{w},\vec{e}_1)=A_1\,(\vec{w},\vec{D}_1),$$

а пројекција $(\vec{w},\vec{D}_i)$ одређена је једначином (7) § 3·4, за коваријантне координате добијамо вредности

$$(1)\qquad \overline{w}_i=\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T^*}{\partial q_i'}-\frac{\partial T^*}{\partial q_i}.\qquad i=1,\,2,\,3.$$

За развијање десних страна написаних једначина (1) уведимо ознаке општијег карактера. Нека функција T^* буде одређена једначином

$$(2)\qquad 2T^*=\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}g_{kl}\,q_k'\,q_l'.$$

Нови коефицијенти везани су са старим једначинама:

$$A_1^2=g_{11},\quad A_2^2=g_{22},\quad A_3^2=g_{33};$$
$$B_1=g_{23}=g_{32},\quad B_2=g_{31}=g_{13},\quad B_3=g_{12}=g_{21}.$$

Ове једначине одговарају условима

$$(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j) = g_{ij}\,,$$

јер, на пр.,

$$(\vec{e}_1,\ \vec{e}_1) = A_1^2 = g_{11}\,, \quad (\vec{e}_2,\ \vec{e}_3) = A_2\,A_3 \cos(\vec{D}_2,\ \vec{D}_3) = B_1 = g_{23}\,.$$

Из (2) налазимо

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i'} = \sum_s g_{is}\, q_s'\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_i}\, q_k'\, q_l'\,. \tag{4}$$

Затим из (3) имамо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_i'} = \sum_s g_{is}\, q_s'' + \sum_s \sum_m \frac{\partial g_{is}}{\partial q_m}\, q_m'\, q_s'\,. \tag{5}$$

Како је

$$\sum_s \sum_m \frac{\partial g_{is}}{\partial q_m}\, q_m'\, q_s' = \sum_s \sum_m \frac{\partial g_{im}}{\partial q_s}\, q_m'\, q_s' = \frac{1}{2}\sum_s \sum_m \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial q_m} + \frac{\partial g_{im}}{\partial q_s}\right) q_m'\, q_s'\,,$$

из (1), ако искористимо (5) и (4), добијамо

$$\overline{w}_i = \sum_s g_{is}\, q_s'' + \sum_s \sum_m \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial q_m} + \frac{\partial g_{im}}{\partial q_s} - \frac{\partial g_{sm}}{\partial q_i}\right) q_m'\, q_s'$$

$$i = 1,\ 2,\ 3\,.$$

Ако уведемо нову ознаку

$$\begin{bmatrix} s\ m \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial q_m} + \frac{\partial g_{im}}{\partial q_s} - \frac{\partial g_{sm}}{\partial q_i}\right),$$

која се зове *Christoffel'ов симбол прве врсте*, горње изразе можемо краће написати

$$\overline{w}_i = \sum_s g_{is}\, q_s'' + \sum_s \sum_m \begin{bmatrix} s\ m \\ i \end{bmatrix} q_s'\, q_m'\,. \qquad i = 1, 2, 3 \tag{6}$$

Тако у детаљима изгледају коваријантне координате убрзања.

За одређивање контраваријантних координата убрзања треба према обрасцима (19) § 1·111 узети изразе

$$\overline{w}^j = \sum_i g^{ji}\, \overline{w}_i\,, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{7}$$

где су g^{ji} минори са односним знацима детерминанте

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

подељени самом детерминантом.

Како је

$$\sum_i g_{ik}\, g^{il} = \delta^l_k\,,$$

где је δ^l_k Кронекеров симбол са вредностима нуле, ако је $k \neq l$, и јединице, ако је $k = l$, примена обрасца (7) на изразе (6) даје

$$\overline{w}^j = q_j'' + \sum_i g^{ji} \sum_s \sum_m \begin{bmatrix} s\ m \\ i \end{bmatrix} q'_s\, q'_m\,. \qquad j = 1, 2, 3.$$

Ако сад уведемо још једну ознаку

$$\begin{Bmatrix} s\ m \\ j \end{Bmatrix} = \sum_i g^{ji} \begin{bmatrix} s\ m \\ i \end{bmatrix},$$

Christoffel-ов симбол друге врсте, контраваријантне координате убрзања можемо кратко изразити

$$\overline{w}^i = q_i'' + \sum_s \sum_m \begin{Bmatrix} s\ m \\ i \end{Bmatrix} q_s'\, q_m'\,, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

при чему смо у дефинитивном резултату заменили индекс j индексом i.

Приметимо да је за одређивање компонената убрзања у правцима криволиниских оса, тј. у правцима ортова $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{D}_3$ довољно сваку од контраваријантних координата убрзања помножити одговарајућим множиоцем A_1, A_2, A_3 како то следи из упоређивања две векторске једначине

$$\vec{w} = w^1\, \vec{D}_1 + w^2\, \vec{D}_2 + w^3\, \vec{D}_3$$

$$\vec{w} = \overline{w}^1\, \vec{e}_1 + \overline{w}^2\, \vec{e}_2 + \overline{w}^3\, \vec{e}_3 = \overline{w}^1\, A_1 \vec{D}_1 + \overline{w}^2\, A_2 \vec{D}_2 + \overline{w}^3\, A_3 \vec{D}_3\,,$$

јер је, на пр.,

$$w^1 = \overline{w}^1\, A_1\,. \tag{9}$$

§ 3·5. Генералисано убрзање за векторе и скаларе

Други извод по времену сваког вектора променљива у току времена претставља одговарајуће векторско убрзање: вектор $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$ је убрзање вектора $\vec{R}$. У том смислу долазимо до појма *генералисаног векторског убрзања*.

Тако, на пр., за оријентисану површину, претстављену вектором $\vec{P}$, вектор $\frac{d\vec{P}}{dt}$ је векторска површинска брзина, а вектор $\frac{d^2\vec{P}}{dt^2}$ је векторско површинско убрзање. Специјално из секторске брзине у векторском облику $\vec{S}$ (§ 2·6) добијамо вектор $\frac{d\vec{S}}{dt}$ као векторско *секторско убрзање*.

Исто тако, ако је извод $\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \vec{\omega}$ угаона брзина, вектор $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ је *угаоно убрзање*.

Слично томе, ако је скалар, рецимо q, функција времена, извод $q' = \frac{dq}{dt}$ је, као што смо видели (§ 2·6), генералисана скаларна брзина, а други извод $q'' = \frac{d^2 q}{dt^2}$ је *генералисано убрзање тог скалара*.

§ 3·6. Компоненте убрзања у вези са вектором положаја тачке

У § 2·61 из векторске једначине

$$\vec{r} = r\,\vec{u}\,,$$

где су: $\vec{r}$ — вектор положаја покретне тачке, r — његов интензитет и $\vec{u}$ орт његовог правца добили смо после диференцирања по времену образац (5)

$$\vec{v} = r'\,\vec{u} + r\,[\vec{\omega}\,\vec{u}] \tag{1}$$

за одређивање уздужне и трансверзалне компоненте брзине покретне тачке. Вектор $\vec{\omega}$ је угаона брзина скретања правца $\vec{u}$.

Ако једначину (1) још једанпут диференцирамо по времену, добићемо за убрзање

$$\vec{w} = r''\,\vec{u} + r'\,\dot{\vec{u}} + r'\,[\vec{\omega}\,\vec{u}] + r\,[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{u}] + r\,[\vec{\omega}\,\dot{\vec{u}}]\,.$$

Како је

$$\dot{\vec{u}} = [\vec{\omega}\,\vec{u}]$$

и на основу познатог обрасца из теорије вектора

$$[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{u}\,]] = \vec{\omega}\,(\vec{\omega}\,\vec{u}) - \vec{u}\,\omega^2 = -\,\omega^2\,\vec{u}\,,$$

раније написана једначина даје

$$\vec{w} = (r'' - r\,\omega^2)\,\vec{u} + 2r'\,[\vec{\omega}\,\vec{u}\,] + r\,[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{u}\,]\,. \tag{2}$$

Тај образац показује да убрзање тачке у општем случају има ове три компоненте

$$\vec{w}_r = (r'' - r\,\omega^2)\,\vec{u}\,,$$

$$\vec{w}_n = 2r'\,[\vec{\omega}\,\vec{u}\,]\,,$$

$$\vec{w}_\nu = r\,\,[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{u}\,]\,.$$

Прва, *радијална*, компонента има два колинеарна сабирка: *уздужни* са вредношћу $r''\,\vec{u}$ у смеру $\vec{r}$, ако је $r'' > 0$, и у супротном смеру, ако је $r'' < 0$, и *центрипетални* са вредношћу $-r\,\omega^2\,\vec{u}$; последњи део је наперен од покретне тачке према тачки O, почетку вектора положаја $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Друга, *попречна*, компонента има вредност

$$\vec{w}_n = 2\,r'\,\theta'\,\vec{n}\,,$$

где је $\vec{n}$, као и раније, орт нормале на орт $\vec{u}$ на страну скретања тог орта. Ова компонента је пропорционална брзини скретања θ' и уздужној брзини r'.

Трећа компонента, коју смо означили са $\vec{w}_\nu$, исто тако стоји нормално на правцу вектора $\vec{u}$, али у нормалној равни на тај правац орт те компоненте, вектор $\vec{\nu}$, заузима положај према вредности вектора $\dot{\vec{\omega}}$, угаоног убрзања, и у општем случају је различит од положаја вектора $\vec{n}$.

У случају равног кретања вектор $\vec{\omega}$ задржава исти правац нормале на равни кретања, ту исту особину има и вектор $\dot{\vec{\omega}}$. Како први вектор има алгебарску вредност θ', а други θ'', образац (2) за равно кретање изгледа

$$\vec{w}=(r''-r\,\theta'^2)\,\vec{u}+(2\,r'\,\theta'+r\,\theta'')\,\vec{n}.$$

Узимајући у обзир да је

$$2\,r'\,\theta'+r\,\theta''=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\theta'),$$

исти резултат можемо претставити

$$\vec{w}=(r''-r\,\theta'^2)\,\vec{u}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\theta')\,\vec{n}.$$

ОДЕЉАК ДРУГИ

ДИНАМИКА ТАЧКЕ

ГЛАВА ЧЕТВРТА

Диференцијалне једначине кретања тачке и њихови интеграли

§ 4·1. Маса

Појаве природе разликују се по својим особинама. Анализујући те особине делимо их у важне групе. Прво запажамо да можемо одвојити једну појаву од друге. Та особина стоји у вези са бројем и величином. Теорија односа појава према броју и величини је математичка анализа протумачена у ширем смислу тог појма.

Затим долазимо до констатација да појаве стоје у просторним односима. Теорија просторних односа чини геометрију.

Даље примећујемо да се све појаве дешавају у току времена. Уношења појма времена у класификацију појава омогућава нову теорију — кинематику.

Да појаве стоје у вези са величином, простором и временом, само су основне особине у класификацији тих појава. Даља важна особина састоји се у материјалности појава. На исти начин као што са просторним облицима упоређујемо бројеве за дужину, површину, запремину итд., са интервалом времена опет неки број — исто тако је и са сваким материјалним предметом могуће упоредити број, који одговара материјалном својству тог предмета. За ово упоређивање бира се пре свега неки нарочити предмет чија материјалност одговара јединици. Са сваким предметом се тада веже величина, која омогућава постављање бројне везе између материјалности тог предмета и предмета изабраног за јединицу. Таква величина зове се *маса*.

Геометрија даје поступно правила како се мери дужина, површина, запремина итд. У кинематици, која стоји у вези са астрономијом, наводе се правила за мерење времена. Исто тако динамика даје правила за мерење масе. Та правила се објашњавају у току излагања саме динамике, но то не искључује могућност да се говори о маси као о величини и пре изношења правила о мерењу те величине.

За јединицу масе у науци се узима *грам*, грам-маса, који је хиљадити део масе нарочитог предмета, који се налази у Севру код Париза. Тај предмет се зове *еталон-килограм*. Његова маса је врло блиска маси воде кубног дециметра на $4^0\,C$.

Систем мера са основним јединицама — центиметром (cm), грам-масом (gr) и секундом средњег времена (sec) — зове се *апсолутни* или *физички систем* и кратко се означује са CGS.

§ 4·2. Сила. Њутнови закони

Класична рационална механика има за циљ да упореди кретања и мировања материјалних тела једних с другима, да класификује та кретања и да постави између њих везу тако, да човек буде у стању да одреди та кретања у будућности или прошлости према подацима садашњости.

Овај циљ се постиже увођењем појма силе, која служи за постављање везе између кретања једних и других маса. Пошто смо увели, као основне појмове, величину, простор, време и масу, појам силе не претставља више основни појам већ подлеже дефиницији. Ова дефиниција у историском развитку механике није била формулисана на обичан начин према којем се врши дефиниција, рецимо, реченицом познате логичке структуре. Дефиниција силе прво је била изведена помоћу Њутнових тако званих закона или аксиома (axiomata sive leges motus).

Први Њутнов закон гласи:

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Свако тело остаје у стању мира или равномерног и праволиниског кретања док под дејством сила не буде принуђено да то своје стање промени.

Овај закон можемо сматрати као први део дефиниције силе. У њему се наводи ова особина силе: сила постоји кад тело мења

своје стање кретања или, за материјалну тачку, кад она има убрзање.

Други Њутнов закон гласи:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Промена кретања пропорционална је сили која дејствује на тело и врши се у правцу силе.

Под променом кретања Њутн је разумео производ масе и убрзања.

Овај закон одређује величину силе, према данашњој терминологији, у облику вектора $m\vec{w}$, где је m маса тачке и $\vec{w}$ убрзање.

Њутнова примедба уз овај закон о томе да се силе сабирају по правилу паралелограма у садашњем излагању значи да силу треба сматрати као вектор.

Најзад трећи Њутнов закон гласи:

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Акцији увек одговара једнака и супротна реакција или дејства двају тела једног на друго увек су једнака и супротно наперена.

Тај закон поставља важан допунски услов за то, да сила, чије се постојање показало као могуће према првом закону, стварно постоји. Наиме према том закону за сваку силу што дејствује на једно тело треба да покажемо друго тело, извор силе, на које дејствује сила истог правца и истог интензитета, но супротна смера. Ако из кинематичких прилика видимо да тело масе m има убрзање $\vec{w}$, то још није довољно да тврдимо да на њега дејствује сила $\vec{F} = m\vec{w}$. Неопходно је још наћи у правцу те силе друго тело на које дејствује сила $-\vec{F}$. Ако тог тела, извора силе $\vec{F}$, нема, треба раставити силу $\vec{F}$ на две или више компонената и тражити изворе за сваку од тих компонената. Ако и то не даје тражени резултат, можемо закључити да таква сила не подлежи проучавању рационалне механике.

Кратко можемо казати да први Њутнов закон одређује један од услова постојања силе, други закон одређује величину силе као вектора и трећи тражи извор силе без којег не може да постоји сила.

Сила $\vec{F}$ се уводи једначином

$$\vec{F} = m\vec{w}\,.$$

Из ове једначине следује да је димензија силе

$$[\vec{F}] = MLT^{-2}\,.$$

У CGS систему за јединицу силе узима се сила која маси од једног грама даје јединично убрзање — једног центиметра у секунди на квадрат. Ова јединица силе зове се *дин* са ознаком dyn. Сила од 10^6 dyn зове се *мегадин*. Сила теже једног грама износи 981 dyn.

Сем апсолутног CGS система употребљује се, нарочито за мерење силе и величина везаних са силом, и други, такозвани *технички* или *терестрични систем*. У овом систему узима се за јединицу дужине метар (m). Јединица времена остаје иста — секунда средњег времена (sec). Место основног појма масе узима се за основни појам сила и као јединица служи сила теже једног килограма, килограм-сила. Масу у том систему можемо сматрати као изведени појам.

§ 4·3. Диференцијална једначина кретања тачке у векторском облику

Нека је положај тачке M, заступника транслаторно покретног тела масе m, одређен вектором $\vec{r}$. Брзину те тачке, као и раније, означујемо са $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, а убрзање са $\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

Према другом Њутновом закону имамо

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \tag{1}$$

где је F сила што дејствује на материјалну тачку.

У случају да је сила $\vec{F}$, чији се извор налази у другим масама, позната као функција положаја тачке M, њене брзине и времена, тј

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r},\ \vec{v}, t)\,,$$

једначину (1) можемо сматрати као *диференцијалну једначину кретање тачке у векторском облику*. Она служи као полазна једначина за све скаларне једначине.

§ 4·31. Диференцијалне једначине кретање тачке за Декартове координате

Ако координате тачке M у односу на Декартов координатни систем означимо са x, y, z, убрзање тачке има за пројекције на те осе друге изводе x'', y'', z'' и према томе из векторске једначине (1) § 4·3 за Декартове координате имамо

$$(1)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X(x', y', z';\ x, y, z; t)\,,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y(x', y', z';\ x, y, z; t)\,,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z(x', y', z';\ x, y, z; t)\,, \end{aligned}$$

где су X, Y, Z координате силе $\vec{F}$. Ове координате у општем случају могу зависити од координата брзине x', y', z', од координата тачке x, y, z и од времена t.

Једначине (1) претстављају систем диференцијалних једначина кретања материјалне тачке у Декартовим координатама.

§ 4·32. Диференцијалне једначине кретања тачке за генералисане координате

Ако чланове основне векторске једначине

$$m\vec{w} = \vec{F}$$

пројицирамо на осе криволиниских координата q_1, q_2, q_3 са ортовима $\vec{D}_1, \vec{D}_2, \vec{D}_3$, онда, узимајући у обзир изразе за пројекције убрзања на осе криволиниских координата (§ 3·4), можемо написати

$$\frac{m}{A_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_i'} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i}\right) = F\cos(\vec{F}\,\vec{D}_i)\,, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ако сад уведемо величину

$$T = mT^* = \frac{1}{2} mv^2,$$

која се зове *жива сила материјалне тачке*, онда из горњих једначина имамо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\,, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

где су

$$Q_i = A_i F \cos(\vec{F}\,\vec{D}_i)\,.$$

Једначине (1) зову се *диференцијалне једначине кретања тачке у генералисаним координатама* или *Лагранжеве једначине друге врсте за тачку.*

Величине Q_1, Q_2, Q_3 зову се *генералисане силе*. Генералисана сила има димензију силе само у том случају кад је одговарајућа величина A_i апстрактни број; у сваком другом случају димензија генералисане силе зависи од карактера одговарајуће координате q_i.

$$Q_i\, dq_i = A_i F \cos(\vec{F}\,\vec{D}_i)\, dq_i \tag{2}$$

увек има димензију производа силе и дужине, тј.

$$[Q_i\, dq_i] = ML^2\, T^{-2}\,.$$

Према тој особини можемо увек одредити димензију генералисане силе кад је позната димензија одговарајуће генералисане координате. О механичком тумачењу производа (2) говорићемо доцније (§ 6·3).

Напоменимо да лева страна Лагранжевих једначина зависи само од израза живе силе, а то значи од метричке форме. Пошто је делимични извод $\dfrac{\partial T}{\partial q_i'}$ линеаран у погледу на генералисане брзине, лева страна Лагранжевих једначина је линеарна у односу на генералисана убрзања q_1'', q_2'', q_3''. Лако је видети да је та лева страна квадратна функција у односу на генералисане брзине q_1', q_2', q_3'. Генералисане силе Q_1, Q_2, Q_3 у општем случају могу да зависе од генералисаних брзина, генералисаних координата и времена.

§ 4·321. Лагранжеве једначине у решеном облику

Како смо навели у претходном параграфу, Лагранжеве једначине друге врсте за тачку су диференцијалне једначине другога реда у односу на непознате генералисане координате q_1, q_2, q_3 и при томе су линеарне у односу на генералисана убрзања. Можемо поставити питање како се решавају једначине по тим убрзањима. За непосредно добијање резултата искористимо изразе за контраваријантне координате убрзања.

Из векторске једначине кретања

$$m\vec{w} = \vec{F}$$

можемо доћи до скаларних диференцијалних једначина кретања тачке у облику

$$mw^i = F^i\,, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

где су w^i компоненте убрзања, а F^i компоненте силе у односу на осе криволиниских координата.

Поделимо сваку од једначина (1) са mA_i, па ћемо добити једначине

$$\frac{1}{A_i}\, w^i = \frac{1}{mA_i}\, F^i$$

Лева страна ове једначине на основу, на пр., (9) § 3·41 има вредност $\overline{w}^i$ генералисане контраваријантне координате убрзања. Десну страну означимо са Q^i; она претставља генералисану контраваријантну силу. После тога претходне једначине можемо написати

$$\overline{w}^i = Q^i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ако сад искористимо вредности (8) § 3·41 за контраваријантна убрзања, добићемо из претходних једначина тражене резултате

$$q_i'' = -\sum_s \sum_m \begin{Bmatrix} s\,m \\ i \end{Bmatrix} q_s'\, q_m' + Q^i\,,$$

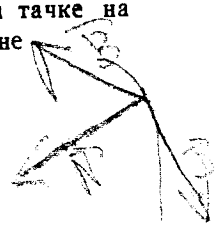
који не претстављају ништа друго већ решења Лагранжевих једначина по генералисаним убрзањима q_1'', q_2'', q_3''.

Генералисане контраваријантне силе Q^i имају димензије односних генералисаних убрзања. Ове силе могу бити одређене или непосредним одређивањем компонената F_i силе $\vec{F}$, па дељењем са mA_i, или израчунавањем из раније одређених израза за генералисане пројекције Q_i, сматраних као коваријантне координате силе, а на основу познатих правила (§ 1·111) о прелазу од коваријантних координата на контраваријантне.

§ 4·33. Природне диференцијалне једначине кретања тачке (Euler'ове једначине)

За сваку тачку на кривој линији путање можемо конструисати три осе: тангенту $(\vec{D})$, главну нормалу $(\vec{N})$ и бинормалу $(\vec{B})$, које, као што смо видели (§ 3·3), претстављају природни триједар.

Узимајући у обзир величине пројекција убрзања тачке на осе тог триједра (§ 3·3), из основне векторске једначине



$$m\vec{w} = \vec{F}$$

имамо

$$(1) \qquad \begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F\cos(\vec{F}\,\vec{D}) = F_D\,, \\ m\frac{v^2}{R} &= F\cos(\vec{F}\,\vec{N}) = F_N\,, \\ 0 &= F\cos(\vec{F}\,\vec{B}) = F_B\,. \end{aligned}$$

Написане диференцијалне једначине су *природне диференцијалне једначине кретања тачке* или *Euler'ове једначине.*

На тај начин знамо да напишемо три врсте скаларних једначина: у Декартовим координатама, уопште у генералисаним координатама и природне једначине. У вези са природом кретања тачке под утицајем дате силе сваки систем тих једначина има своје погодности и своје недостатке.

§ 4·4. Основни проблем динамике тачке. Тумачење интеграла диференцијалних једначина кретања

Основни проблем динамике тачке састоји се у овом. Дат је положај тачке M за почетни тренутак t_0, који зовемо *почетни положај*. Вектор тог положаја означимо са $\vec{r}_0$. Дата је брзина за

тај исти положај — *почетна брзина* $\vec{v}_0$. Почетни положај и почетна брзина заједно одређују *почетно кинематичко стање тачке.*

Дата је маса m тачке.

Дата је сила која дејствује на тачку, за свако њено кинематичко стање и за сваки тренутак.

На основу тих података треба одредити положај тачке за сваки тренутак у току интервала за који проучавамо кретање тачке.

Аналитички то значи: дати су $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, треба одредити $\vec{r} = \vec{r}(t)$, тј. написати коначну једначину кретања тачке.

До решења тог основног проблема долази се на овај начин. Напишимо диференцијалну векторску једначину кретања тачке

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F},$$

и у случају тешкоће непосредног оперисања са том векторском једначином, напишимо неки од система скаларних једначина (1) (§§ 4·31, 4·32, 4·33). Зауставимо се на тим једначинама у Декартовим координатама

$$(1) \qquad \begin{aligned} mx'' &= X(x', y', z';\ x, y, z;\ t), \\ my'' &= Y(x', y', z';\ x, y, z;\ t), \\ mz'' &= Z(x', y', z';\ x, y, z;\ t). \end{aligned}$$

Ако смо у стању да систем једначина (1) после одређених трансформација напишемо у облику

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\varphi_1(x', y', z';\ x, y, z;\ t) &= 0\,, \\ \frac{d}{dt}\,\varphi_2(x', y', z';\ x, y, z;\ t) &= 0\,, \\ \frac{d}{dt}\,\varphi_3(x', y', z';\ x, y, z;\ t) &= 0, \end{aligned}$$

из тих једначина следују једначине

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varphi_1(x', y', z';\ x, y, z;\ t) &= C_1, \\ \varphi_2(x', y', z';\ x, y, z;\ t) &= C_2, \\ \varphi_3(x', y', z';\ x, y, z;\ t) &= C_3, \end{aligned}$$

где су C_1, C_2, C_3 произвољне константе. Свака од ових једначина зове се *први интеграл* диференцијалних једначина кретања тачке.

Произвољне константе C_1, C_2, C_3 можемо одредити из (2) кад применимо те једначине на почетни тренутак кретања

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1^0 = \varphi_1(x_0', y_0', z_0'; x_0, y_0, z_0; t_0) = C_1,\\
(3)\qquad &\varphi_2^0 = \varphi_2(x_0', y_0', z_0'; x_0, y_0, z_0; t_0) = C_2,\\
&\varphi_3^0 = \varphi_3(x_0', y_0', z_0'; x_0, y_0, z_0; t_0) = C_3.
\end{aligned}
$$

Тај поступак зове се одређивање произвољних констаната интеграције из почетних услова кретања.

Ако се једначине (2) могу поново трансформисати на облик

$$
\frac{d}{dt} F_1(x, y, z; C_1, C_2, C_3; t) = 0,
$$

$$
\frac{d}{dt} F_2(x, y, z; C_1, C_2, C_3; t) = 0,
$$

$$
\frac{d}{dt} F_3(x, y, z; C_1, C_2, C_3; t) = 0,
$$

из њих долазимо до закључака

$$
\begin{aligned}
&F_1(x, y, z; C_1, C_2, C_3; t) = C_4,\\
(4)\qquad &F_2(x, y, z; C_1, C_2, C_3; t) = C_5,\\
&F_3(x, y, z; C_1, C_2, C_3; t) = C_6,
\end{aligned}
$$

где су C_4, C_5, C_6 три нове произвољне константе. Свака од тих једначина зове се *други интеграл* диференцијалних једначина кретања.

Ако искористимо једначине (3) и поново напишемо једначине (4) за почетни тренутак, добићемо једначине

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_0, y_0, z_0; \varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0; t_0) = C_4,\\
(5)\qquad &F_2(x_0, y_0, z_0; \varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0; t_0) = C_5,\\
&F_3(x_0, y_0, z_0; \varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0; t_0) = C_6,
\end{aligned}
$$

које служе за одређивање произвољних констаната C_4, C_5, C_6 из почетних услова.

Ако решимо једначине (4) по координатама, имамо једначине

$$
\begin{aligned}
x &= \psi_1(t; C_1, C_2, \ldots, C_6),\\
y &= \psi_2(t; C_1, C_2, \ldots, C_6),\\
z &= \psi_3(t; C_1, C_2, \ldots, C_6),
\end{aligned}
$$

које, после смене произвољних констаната њиховим вредностима из (3) и (5), постају

$$
\begin{aligned}
x &= f_1(t, t_0; x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0'),\\
y &= f_2(t, t_0; x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0'),\\
z &= f_3(t, t_0; x_0, y_0, z_0; x_0', y_0', z_0').
\end{aligned}
$$

Написане једначине одређују кретање тачке, јер су то коначне једначине кретања.

Из горе наведеног видимо да је главна тешкоћа у решавању проблема одређивања кретања тачке помоћу диференцијалних једначина кретања математичког карактера. Решење захтева интеграцију система диференцијалних једначина од три једначине, све другог реда у односу на непознате функције.

Слично претходном тумачењу, изведеном на једначинама за Декартове координате, може бити изведено и тумачење решења проблема помоћу једначина у генералисаним координатама или Euler'ових једначина.

§ 4·5. Проблем одређивања силе која производи дато кретање

Ако је кретање тачке дато коначном векторском једначином

$$
\vec{r} = \vec{r}(t),
$$

за одређивање силе која може да произведе то кретање треба одредити убрзање $\vec{w} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$ и тада имамо за силу

$$
(1)\qquad \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}(t).
$$

Овај резултат омогућује да се одреди сила за сваки тренутак у датом конкретном кретању.

Пошто између времена t, вектора положаја $\vec{r}$ и брзине $\vec{v}$ увек имамо везе

$$\vec{r}=\vec{r}(t), \qquad \vec{v}=\dot{\vec{r}}(t),$$

можемо десну страну једначине (1) изразити не само као функцију времена, већ, у општем случају, као функцију вектора положаја, брзине и времена, тј.

$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Јасно је да се такво изражавања може извршити на више начина. Који облик треба задржати, зависи од тога да ли можемо показати извор за пронађену силу.

Тако, на пр., за хармониско кретање са једначином

$$x=R\cos\omega t \tag{2}$$

имамо

$$x'=-R\omega\sin\omega t, \qquad x''=-R\omega^2\cos\omega t$$

и према томе за силу добивамо

$$F=-mR\omega^2\cos\omega t,$$

где је m маса тачке. Тај израз одређује силу за сваки тренутак. Исту силу помоћу x и x' можемо претставити и овако

$$\begin{aligned} &F=-m\omega^2 x, \\ &F=-m\omega\sqrt{R^2\omega^2-x'^2} \end{aligned} \tag{3}$$

или, најзад, рецимо, овако

$$F=-m\omega\,(\alpha\,\omega x+\beta\sqrt{R^2\omega^2-x'^2}+\gamma R\omega\cos\omega t),$$

где су α, β, γ произвољни константни бројеви, који задовољавају услов

$$\alpha+\beta+\gamma=1.$$

Сваки од наведених израза силе даје решење диференцијалне једначине

$$mx''=F$$

у облику (2) и према томе одговара датом кретању.

За прави израз треба пронаћи извор силе. Тако, на пр., ако можемо показати масу у центру или који други механизам који даје силу (3), силу привлачења пропорционалну првом степену отстојања, тада од свих израза бирамо овај израз и тиме постављамо динамичку слику појаве.

Кад је Њутн проучио убрзање планета и показао извор силе, под чијим се утицајем свака планета креће по Кеплеровим законима, он је тиме поставио динамичку слику нашег Сунчевог система.

ГЛАВА ПЕТА

Елементарни проблеми кретања материјалне тачке

§ 5·1. Праволиниско кретање материјалне тачке

Као што смо видели (§ 1·61), коначну једначину кретања сваког праволиниског кретања можемо написати у векторском облику

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{D}\, s(t);$$

брзина тог кретања је

$$\vec{v} = \vec{D}\, s',$$

са почетном вредношћу

$$\vec{v}_0 = \vec{D}\, s_0', \tag{1}$$

а убрзање

$$\vec{w} = \vec{D}\, s''.$$

Према томе сила $\vec{F}$ мора имати вредиост

$$\vec{F} = m\, s''\, \vec{D}.$$

Из посматрања тог израза за силу и упоређивања са изразом (1) за почетну брзину закључујемо да за праволиниско кретање сила мора имати сталан правац и то правац почетне брзине, ако је та брзина различита од нуле.

Показаћемо да је тај услов не само неопходан већ и довољан. Докажимо да се тачка под утицајем силе

$$\vec{F} = mk\vec{D},$$

где је $\vec{D}$ сталан орт (истог правца са почетном брзином $\vec{v}_0$, ако је $v_0 \neq 0$), а k — уопште промењљив скалар, креће праволиниски.

Напишимо диференцијалне једначине кретања за Декартове координате узимајући координатни триједар овако: почетак O сместимо у почетни положај тачке ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), а Ox осу наперимо у сталном правцу силе, а то значи и у правцу почетне брзине ($y_0' = z_0' = 0$). Тада су диференцијалне једначине кретања

$$mx'' = X = mk\,,$$

$$my'' = Y = 0\,,$$

$$mz'' = Z = 0\,.$$

Последње две једначине дају интеграле

$$y' = C_1 = y_0' = 0, \qquad z' = C_2 = z_0' = 0,$$

одакле ћемо после поновне интеграције добити

$$y = C_3 = y_0 = 0, \qquad z = C_4 = z_0 = 0.$$

Једначине $y = 0$, $z = 0$ доказују став да је кретање праволиниско.

На тај начин је за одређивање сваког праволиниског кретања потребно решити само једну диференцијалну једначину

$$mx'' = X$$

или

$$x'' = f(x, x', t), \tag{2}$$

јер у општем случају сила може да зависи од положаја тачке на правој, од брзине и од времена.

§ 5·11. Сила зависи само од времена или је константна

Ако сила, у случају праволиниског кретања, зависи само од времена, за одређивање кретања тачке треба према (2) § 5·1 решити једначину

$$x'' = f(t)\,.$$

Интеграција ове једначине своди се на две квадратуре. Кад је напишемо у облику

$$dx' = f(t)\, dt\,,$$

имамо прву квадратуру

$$x' = \int f(t)\, dt + C_1\,,$$

која после одређивања произвољне константе из почетног услова

$$x_0' = \left(\int f(t)\, dt \right)_{t_0} + C_1 ,$$

даје за први интеграл

$$(1) \qquad x' = x_0' + \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt .$$

Ова једначина одређује брзину тачке за сваки тренутак кретања.

Ако претходну једначину напишемо

$$dx = \left(x_0' + \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt \right) dt ,$$

она доводи до нове квадратуре

$$x = \int \left(x_0' + \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt \right) dt + C_2 ,$$

која, после одређивања произвољне константе, даје

$$(2) \qquad x = x_0 + x_0' (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt^2 .$$

Пошто се изврше назначене интеграције, ова једначина служи као коначна једначина праволиниског кретања тачке.

У специјалном случају, кад је $f(t) = \text{const.} = g$, а сила сталног правца са величином mg, где је g стално убрзање у том правцу, претходни интеграли (1) и (2) дају

$$x' = x_0' + g (t - t_0) ,$$

$$x = x_0 + x_0' (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 .$$

То су једначине које одређују брзину и положај тачке која се креће праволиниски под утицајем силе сталног правца и ин-

тензитета. Као пример таквог кретања служи кретање тешке тачке, чија је почетна брзина или вертикална (вертикални хитац) или једнака нули (слободан пад).

Ако имамо посла само са кретањем једне тачке, можемо време рачунати од почетног тренутка кретања ($t_0 = 0$) и за претходне једначине добивамо

$$x' = x_0' + gt ,$$

$$x = x_0 + x_0' t + \frac{1}{2} gt^2 .$$

Најзад, ако почетак координате x сместимо у почетни положај тачке ($x_0 = 0$), једначине изгледају још простије

$$x' = x_0' + gt ,$$

$$x = x_0' t + \frac{1}{2} gt^2 .$$

Ако је тачка почела да се креће без почетне брзине ($x_0' = 0$) из претходних једначина имамо

$$(3) \qquad x' = gt ,$$

$$(4) \qquad x = \frac{1}{2} gt^2 .$$

То су једначине слободног пада.

Из ових једначина непосредно изводимо везу између растојања $x = h$ тачке од почетног положаја и брзине $x' = v$ на том растојању

$$(5) \qquad v^2 = 2\, gh .$$

Иста веза постоји и између висине h до које се тачка попне, ако је бачена у вис са почетном брзином v.

§ 5·12 Сила зависи само од растојања

Ако сила, која дејствује на тачку, зависи само од растојања x покретне тачке од сталне тачке у простору, проблем се своди на интеграцију једначине облика

$$(1) \qquad x'' = f(x) .$$

Интеграција ове једначине може овако да се изврши. Помножимо једначину идентитетом

$$x'\,dt = dx\,,$$

па ћемо добити

$$x''\,x'\,dt = x'\,dx' = f(x)\,dx\,.$$

После интеграције ова једначина даје

$$\frac{1}{2}x'^2 = \int f(x)\,dx + C_1\,.$$

Кад напишемо услов да тај интеграл важи и за почетни тренутак у положају x_0 са брзином x_0', тј. кад ставимо

$$\frac{1}{2}x_0'^2 = \left(\int f(x)\,dx\right)_{x_0} + C_1\,,$$

и помоћу тог услова елиминишемо константу C_1, онда наш први интеграл можемо написати

$$x'^2 = \Phi(x)\,, \tag{2}$$

где је

$$\Phi(x) = x_0'^2 + 2\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,.$$

Из интеграла (2) имамо

$$x' = \pm\sqrt{\Phi(x)}\,. \tag{3}$$

Знак код корена треба изабрати према знаку почетне брзине. Тај знак важи до положаја тачке за који је

$$\Phi(x) = 0\,.$$

После овог положаја питање знака се решава непосредно из једначине (1). Ако је $f(x) > 0$, онда је $x'' > 0$ и значи x' расте од вредности нуле — према томе треба да узмемо знак $+$. Ако је $f(x) < 0$, слична расуђивања доводе до негативног знака. Најзад, ако је $f(x) = 0$, и $x'' = 0$. У овом случају на тачку не дејствује никаква сила и, кад се тачка налази у почетку у миру ($x_0' = 0$), она ће остати у трајном миру.

Једначину (3), после раздвајања променљивих, можемо написати

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\Phi(x)}} = dt\,,$$

после чега долазимо до квадратуре

$$t + C_2 = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{\Phi(x)}}\,,$$

која после одређивања произвољне константе даје

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\Phi(x)}} = \varphi(x)\,,$$

где смо са $\varphi(x)$ означили резултат интеграције.

Ако сматрамо горњу границу x написаног интеграла као функцију вредности $t - t_0$ самог интеграла (инверзија интеграла), претходна једначина даје

$$x = \psi(t - t_0)\,,$$

тј. доводи до коначне једначине кретања тачке.

§ 5·121. Привлачење тачке ка непокретном центру пропорционално растојању. Случај праволиниског кретања

Као први пример силе која зависи само од растојања узмимо силу привлачења ка непокретном центру пропорционално растојању. Ако координатни почетак сместимо у непокретни центар, вредност координате силе можемо написати

$$X = -k^2 m\,x\,, \tag{1}$$

где је m маса тачке, а k^2 коефицијент пропорционалности. Знак минус одговара сили привлачења, јер је за $x > 0$ величина $X < 0$, а за $x < 0$ је величина $X > 0$, а то значи да је сила увек наперена према почетку координате x.

За силу (1) диференцијална једначина кретања је

$$x'' = -k^2\,x\,. \tag{2}$$

После множења са $x'\,dt = dx$ и интеграције добићемо

$$x'^2 = -k^2x^2 + C_1\,,$$

или

$$x'^2 = k^2(n^2 - x^2)\,, \tag{3}$$

где је n^2 нова константа увек позитивна, јер је према услову

$$k^2 n^2 = C_1 = x_0'^2 + k^2 x_0^2\,.$$

Из (3) за $k>0$ имамо

$$x' = \pm k\sqrt{n^2 - x^2}.$$

Ако се зауставимо на случају $x_0' > 0$, треба да узмемо знак $+$ и тада из претходног резултата изводимо једначину

$$\frac{dx}{\sqrt{n^2 - x^2}} = k\,dt\,,$$

која важи до положаја са $x = n$ $(n>0)$ и $x' = 0$ и доводи до интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{n^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{n} = kt + \alpha\,,$$

где је α нова константа. Инверзија претходне везе између t и x даје

$$x = n\sin(kt + \alpha)\,. \tag{4}$$

Није тешко доказати да ова коначна једначина кретања важи и после тренутка заустављања ($x' = 0$) тачке. Она показује да тачка врши хармониску осцилацију. Произвољна константа α одређује се из услова

$$x_0 = n\sin(kt_0 + \alpha)\,.$$

Зауставимо се на специјалним почетним условима. Претпоставимо да се у почетном тренутку кретања, од кога рачунамо време ($t_0 = 0$), тачка налазила у почетку координате x ($x_0 = 0$) и имала брзину x_0'. Тада су

$$\alpha = 0\,, \qquad n = \frac{x_0'}{k}$$

и једначина осцилације добија једноставан облик

$$x = n\sin kt = \frac{x_0'}{k}\sin kt\,.$$

Једначину (2), која се може написати и

$$x'' + k^2 x = 0\,, \tag{5}$$

можемо интегралити и на основу познатих правила за интеграцију линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима. Ако се примене та правила, општи интеграл наше једначине може се написати

$$x = A_1\cos kt + A_2\sin kt\,, \tag{6}$$

где су A_1 и A_2 произвољне константе интеграције. Ако одредимо те константе према почетној координати x_0 и почетној брзини x_0' за $t_0 = 0$, интеграл добија облик

$$x = x_0\cos kt + \frac{x_0'}{k}\sin kt\,. \tag{7}$$

Увођењем величина n и α помоћу једначина

$$x_0 = n\sin\alpha,$$

$$\frac{x_0'}{k} = n\cos\alpha$$

може се једначина (7) свести на једначину (4).

§ 5·1211. Одбијање тачке од непокретног центра пропорционално растојању. Случај праволиниског кретања

За силу одбијања пропорционалну растојању, место (1) претходног параграфа, имаћемо једначину

$$X = k^2 m x$$

и према томе се једначина (5) замењује једначином

$$x'' - k^2 x = 0\,,$$

чији је општи интеграл

$$x = B_1 e^{kt} + B_2 e^{-kt}\,,$$

где су B_1 и B_2 произвољне константе интеграције. Ако време поново рачунамо од почетка кретања ($t_0=0$) и почетну координату и почетну брзину означимо са x_0 и x_0', претходни интеграл после одређивања произвољних констаната можемо написати

$$x = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \frac{x_0'}{k}\right)e^{kt} + \left(x_0 - \frac{x_0'}{k}\right)e^{-kt}\right] \tag{1}$$

или, помоћу хиперболичких функција,

$$x = x_0\cosh kt + \frac{x_0'}{k}\sinh kt\,.$$

Извршимо анализу овога кретања за различите почетне услове.
Координата x_0 или је једнака нули ($x_0=0$) или је позитивна ($x_0>0$), јер у случају $x_0<0$ увек можемо променити смер Ox осовини.

1. Ако је $x_0 = 0$ и $x_0' = 0$, тачка остаје у трајном миру, јер је и $x'' = 0$. Ако је $x_0 = 0$, а $x_0' \mp 0$, тачка се креће према једначини

$$x = \frac{1}{2}\frac{x_0'}{k}(e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{x_0'}{k}\sinh kt\,.$$

Са све већом брзином тачка се удаљује од центра одбијања и одлази у бескрајност.

2. Ако је $x_0 > 0$, треба посматрати три случаја: α. $x_0' = 0$, β. $x_0' > 0$, γ. $x_0' < 0$.

α. $x_0' = 0$. У овом случају тачка се удаљује од центра према једначини:

$$x = \frac{1}{2}x_0(e^{kt} + e^{-kt}) = x_0\cosh kt\,.$$

β. $x_0' > 0$. И у овом случају тачка се удаљује од центра али x се мења по једначини (1).

γ. $x_0' < 0$. Тачка се приближује центру и, према једначини

$$x' = \frac{1}{2}[(kx_0 + x_0')e^{kt} - (kx_0 - x_0')e^{-kt}],$$

смањује апсолутну вредност своје брзине до нуле за

$$t_1 = \frac{1}{2k}\log\frac{kx_0 - x_0'}{kx_0 + x_0'}, \tag{2}$$

кад се налази у положају са координатом

$$x_1 = \sqrt{x_0^2 - \frac{x_0'^2}{k^2}}\,. \tag{3}$$

Ови обрасци показују да у случају $x_0'<0$ треба да разликујемо ова три потслучаја:

a. $x_0^2 > \frac{x_0'^2}{k^2}$, тј. $|x_0'| < kx_0$. У овом случају је $x_1 < x_0$. Тачка се у положају x_1 зауставља, па се из тог положаја удаљује у бескрајност.

b. $|x_0'| = kx_0$, тада је $x_1 = 0$. Из почетног положаја x_0 тачка долази у центар одбијања и ту се зауставља.

c. $|x_0'| > kx_0$. Обрасци (2) и (3) губе свој смисао. Тачка се не зауставља. Она се приближује центру, долази у центар у тренутку

$$t_2 = \frac{1}{2k}\log\left(-\frac{kx_0 - x_0'}{kx_0 + x_0'}\right)$$

и ту има брзину

$$x_2' = -\sqrt{x_0'^2 - k^2x_0^2}\,.$$

Са том брзином она пролази центар и удаљује се у бескрајност у негативном смеру Ox осе.

§ 5·122. Привлачење тачке ка непокретном центру по Њутнову закону. Случај праволиниског кретања

Решимо сад проблем праволиниског кретања тачке под утицајем Њутнове силе, тј. привлачне силе обрнуто пропорционалне квадрату растојања. Ако се покретна тачка налази на позитивној страни Ox осовине, вредност силе можемо изразити

$$X = -\frac{1}{2}mk^2\cdot\frac{1}{x^2},$$

где је $\frac{1}{2}k^2$ коефицијент пропорционалности. За случај положаја тачке на негативној страни, израз за силу постаје

$$X = \frac{1}{2}mk^2\cdot\frac{1}{x^2}\,.$$

Зауставићемо се да проучимо кретање тачке на позитивној страни Ox осе. Диференцијална једначина кретања је

$$x'' = -\frac{1}{2}k^2\cdot\frac{1}{x^2}\,.$$

Први интеграл ове једначине је

$$x'^2 = \frac{k^2}{x} + h, \tag{1}$$

где је h произвољна константа, која, одређена из почетних вредности x_0 и x_0', износи

$$h = x_0'^2 - \frac{k^2}{x_0}\,.$$

Из једначине (1) имамо

$$x' = \pm\sqrt{\frac{k^2}{x} + h},$$

при чему знак плус узимамо за $x_0' > 0$, а знак минус за $x_0' < 0$ и $x_0' = 0$, јер у последњем случају $x'' < 0$.

Ако се зауставимо, ради краћег писања, на знаку плус, из претходне једначине имамо

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k^2}{x} + h}}\,. \tag{2}$$

Увођењем нове променљиве

$$u = \sqrt{\frac{k^2}{x} + h}\,,$$

кад је

$$x = \frac{k^2}{u^2 - h}\,, \qquad dx = -\frac{2uk^2\,du}{(u^2-h)^2}\,,$$

доводимо претходну једначину до облика

$$dt = -\frac{2k^2}{(u^2-h)^2}\,du\,. \tag{3}$$

Како интеграл

$$J = \int \frac{du}{(u^2-h)^2}$$

можемо трансформисати у

$$J = -\frac{1}{2h}\left(\frac{u}{u^2-h} + \int \frac{du}{u^2-h}\right),$$

из једначине (3) изводимо интеграл

$$t + \alpha = \frac{k^2}{h}\left(\frac{u}{u^2-h} + \int \frac{du}{u^2-h}\right),$$

где је α константа интеграције.

За изражавање интеграла

$$\int \frac{du}{u^2-h}$$

и израчунавање дефинитивног резултата треба разликовати три случаја:

1. $h > 0$.

Како је у овом случају

$$\int \frac{du}{u^2-h} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \log \frac{\sqrt{h}-u}{\sqrt{h}+u},$$

имамо решење у облику

$$t + \alpha = \frac{k^2}{h}\left(\frac{u}{u^2-h} + \frac{1}{2\sqrt{h}} \log \frac{\sqrt{h}-u}{\sqrt{h}+u}\right),$$

2. $h < 0$.

Интеграл има вредност

$$\int \frac{du}{u^2-h} = -\frac{1}{\sqrt{-h}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{-h}}\,,$$

а решење је

$$t + \alpha = \frac{k^2}{h}\left(\frac{u}{u^2-h} - \frac{1}{\sqrt{-h}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{-h}}\right).$$

3. $h = 0$.

У овом случају непосредно из (2) имамо једначину

$$dt = \frac{1}{k}\sqrt{x}\,dx\,,$$

која доводи до интеграла

$$t + \alpha = \frac{2}{3k}\,x^{3/2}\,.$$

Анализу кретања могуће је извршити или помоћу ових интеграла или, у некој мери, непосредним проучавањем једначине (1).

§ 5·13. Сила зависи само од брзине

Ако сила, која дејствује на тачку, зависи само од брзине тачке, диференцијална једначина таквог праволиниског кретања доводи до једначине

$$x'' = f(x')\,.$$

Интеграција ове једначине може се извести овим начинима

I. Напишимо претходну једначину у облику

$$\frac{dx'}{f(x')} = dt,$$

тада ћемо добити квадратуру

$$t + C_1 = \int \frac{dx'}{f(x')} = \varphi(x')\,.$$

Ако ову једначину решимо по x'

$$x' = \psi(t + C_1)\,,$$

она даје другу квадратуру

$$x = \int \psi(t + C_1)\, dt + C_2,$$

која после одређивања произвољних констаната решава проблем о кретању тачке. Видимо да у овом начину решавања треба извршити две квадратуре и једну инверзију.

II. Помножимо једначину

$$x'' = f(x')$$

са

$$x' dt = dx,$$

и добићемо

$$x' dx' = f(x')\, dx,$$

или, после раздвајања променљивих,

$$\frac{x' dx'}{f(x')} = dx.$$

Према томе прва квадратура овде има облик

$$x + C_1 = \int \frac{x' dx'}{f(x')} = \lambda(x').$$

После инверзије имамо

$$x' = \mu(x + C_1),$$

одакле долазимо до квадратуре

$$t + C_2 = \int \frac{dx}{\mu(x + C_1)} = \nu(x + C_1).$$

За одређивање x, као функције времена, треба извршити још једну инверзију

$$x + C_1 = \Phi(t + C_2).$$

Видимо да су у овој методи потребне две квадратуре и две инверзије. Али, пошто су оне различите од сличних операција у претходној методи, може понекад последњи начин решавања бити лакши.

§ 5·131. Кретање тачке по инерцији у отпорној средини

Замислимо да на тачку масе m не дејствује никаква сила сем силе отпора средине; то је случај кретања тачке по инерцији у отпорној средини. Претпоставимо да сила отпора има правац брзине тачке, смер супротан смеру брзине и интензитет пропорционалан n'том степену интензитета брзине. Анализујмо два случаја: $n = 1$ и $n = 2$.

1. Диференцијална једначина кретања тачке у првом случају има облик

$$mx'' = -mk^2 x'$$

и то независно од смера брзине, јер је сила $-k^2 mx'$, где је $k^2 m$ позитивни коефицијент пропорционалности, увек супротног смера у односу према брзини x'.

Из једначине

$$x'' = -k^2 x',$$

после раздвајања променљивих

$$\frac{dx'}{x'} = -k^2\, dt,$$

добијамо интеграл

$$\log x' = -k^2 t + C_1, \tag{1}$$

где интеграциону константу можемо одредити из услова

$$\log v_0 = C_1,$$

при чему је v_0 почетна брзина за почетни тренутак $t_0 = 0$. Интеграл (1) постаје

$$x' = v_0 e^{-k^2 t} \tag{2}$$

и доводи, после интеграције, до другог интеграла

$$x = -\frac{v_0}{k^2} e^{-k^2 t} + C_2,$$

из којег, претпостављајући да је, за $t = 0$, и $x_0 = 0$, добијамо

$$x = \frac{v_0}{k^2}\left(1 - e^{-k^2 t}\right). \tag{3}$$

Из интеграла (2) добијамо да брзина тачке опада и тежи нули, кад $t \to \infty$. Тачка тежи свом највећем удаљењу од почетног положаја величине

$$a = \frac{v_0}{k^2}. \tag{4}$$

Ако знамо почетну брзину v_0 тачке и удаљење a положаја, где се тачка зауставља, што наступа, приближно, после извесног

Обрасце изведене за прво кретање можемо применити на друго кретање кад у њима извршимо замену k са ki, где је $i = \sqrt{-1}$.

Како из једначине (4) изводимо једначину

$$\frac{dx'}{g - k^2 x'^2} = dt$$

која се идентички трансформише у једначину

$$\frac{d(\sqrt{g} + kx')}{\sqrt{g} + kx'} - \frac{d(\sqrt{g} - kx')}{\sqrt{g} - kx'} - 2k\sqrt{g}\, dt = 0\,,$$

имамо за први интеграл

$$\log(\sqrt{g} + kx') - \log(\sqrt{g} - kx') - 2k\sqrt{g}\, t = \log C\,.$$

Ако константу интеграције одредимо из услова да за $t = 0$ почетна брзина има вредност x_0', интеграл се изражава

$$\frac{\sqrt{g} + kx'}{\sqrt{g} - kx'}\, e^{-2k\sqrt{g}\,t} = \frac{\sqrt{g} + kx_0'}{\sqrt{g} - kx_0'}\,. \tag{6}$$

Претставимо тај интеграл у облику

$$\frac{\sqrt{g} + kx_0'}{\sqrt{g} - kx_0'}\, p = \frac{\sqrt{g} + kx'}{\sqrt{g} - kx'}\, q\,,$$

где смо ради краткоће ставили

$$p = e^{k\sqrt{g}\,t}\,, \qquad q = e^{-k\sqrt{g}\,t}\,,$$

и решимо га по x'

$$x' = \frac{\sqrt{g}}{k} \cdot \frac{(\sqrt{g} + kx_0')\,p - (\sqrt{g} - kx_0')\,q}{(\sqrt{g} + kx_0')\,p + (\sqrt{g} - kx_0')\,q}\,. \tag{7}$$

Из ове једначине непосредно добијамо

$$dx = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{(\sqrt{g} + kx_0')\,dp + (\sqrt{g} - kx_0')\,dq}{(\sqrt{g} + kx_0')\;p\; + (\sqrt{g} - kx_0')\,q}\,,$$

при чему смо искористили једначине

$$dp = k\sqrt{g}\,p\,dt\,, \qquad dq = -k\sqrt{g}\,q\,dt\,.$$

Како је бројилац десне стране претходне једначине диференцијал имениоца, после интеграције имамо

$$x = \frac{1}{k^2} \log\left[(\sqrt{g} + k x_0')\,p + (\sqrt{g} - k x_0')\,q\right] + C.$$

После одређивања константе интеграције из услова да за $t = 0$ имамо $x = 0$ долазимо дефинитивно до интеграла

$$x = \frac{1}{k^2} \log\left\{\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[(\sqrt{g} + k x_0')\,e^{k\sqrt{g}\,t} + (\sqrt{g} - k x_0')\,e^{-k\sqrt{g}\,t}\right]\right\}. \tag{8}$$

Из једначине (7) следи да се у току времена брзина асимптотски приближава сталној вредности

$$v = \frac{\sqrt{g}}{k}\,.$$

Са том се брзином тачка, како то показује једначина (8), удаљује у бесконачност.

За случај кретања тачке у вис за добијање решења треба у претходна решења ставити место k имагинарни израз ki. Тада за брзину имамо

$$x' = \frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{\sqrt{g}\sin k\sqrt{g}\,t + k x_0' \cos k\sqrt{g}\,t}{\sqrt{g}\cos k\sqrt{g}\,t - k x_0' \sin k\sqrt{g}\,t}\,, \tag{9}$$

а за координату x

$$x = \frac{1}{k^2}\log\left(\cos k\sqrt{g}\,t - \frac{kx_0'}{\sqrt{g}}\sin k\sqrt{g}\,t\right). \tag{10}$$

У овом случају тачка са почетном брзином x_0', која је негативна, креће се навише и, једног тренутка, који ћемо означити са t_1, она се зауставља ($x' = 0$). Како је тада из (9)

$$\sqrt{g}\sin k\sqrt{g}\,t_1 + k x_0' \cos k\sqrt{g}\,t_1 = 0,$$

време t_1 има вредност

$$t_1 = \frac{1}{k\sqrt{g}}\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{k x_0'}{\sqrt{g}}\right).$$

Како то следи из једначине (10), тачка при томе стиже до висине

$$h_1 = \frac{1}{2k^2}\log\left(1 + \frac{k^2}{g}\,x_0'^2\right).$$

Ако је коефицијент k^2 мали и у разлагању логаритма у ред задржимо само два члана, тј. ставимо

$$\log\left(1+\frac{k^2}{g}x_0'^2\right)=\frac{k^2x_0'^2}{g}-\frac{k^4x_0'^4}{2g^2},$$

претходна једначина даје

$$h_1=\frac{x_0'^2}{2g}-\frac{k^2x_0'^2}{4g^2}.$$

Први члан десне стране претставља ону висину h, до које би се тачка попела са почетном брзином x_0 у безотпорном простору. Други члан претставља приближну вредност снижења те висине због отпора средине, рецимо ваздуха.

За проучавање кретања тачке после тренутка t, поново се треба вратити на једначине (7) и (8), а под условом да је $x_0'=0$.

§ 5·2. Криволиниско кретање

Као што смо видели (§ 4·31), диференцијалне једначине кретања тачке можемо у општем случају за Декартове координате написати

$$x''=f_1(x,y,z;\ x',y',z';t),$$
$$y''=f_2(x,y,z;\ x',y',z';t),$$
$$z''=f_3(x,y,z;\ x',y',z';t).$$

Може се догодити да десна страна сваке од наведених једначина зависи само од оне координате и оне брзине, које одговарају убрзању, на пр.

$$x''=f_1(x,x',t),$$
$$y''=f_2(y,y',t),$$
$$z''=f_3(z,z',t).$$

У овом случају се интеграција целокупног система једначина раставља на посебну интеграцију сваке од три једначине. После те интеграције имамо интеграле

$$x=F_1(t,C_1,C_2),$$
$$y=F_2(t,C_3,C_4),$$
$$z=F_3(t,C_5,C_6),$$

који, после одређивања произвољних констаната из почетних услова, дају коначне једначине кретања тачке.

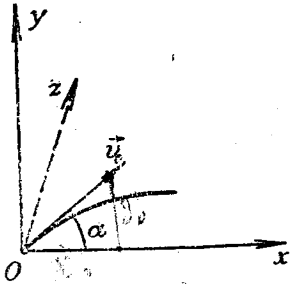
Као пример таквог случаја решићемо проблем косог хитца.

§ 5·21. Проблем косог хитца

Проблем косог хитца је проблем кретања тешке тачке у безваздушном простору кад почетна брзина има ма који правац према хоризонту.

Да решење проблема буде што једноставније узећемо положај координатног триједра овако: почетак O сместимо у почетни положај M_0 покретне тачке, Oy осу наперимо вертикално увис, а Ox осу узмимо хоризонтално у оној вертикалној равни којој припада почетна брзина $\vec{v}_0$ (сл. 44). За такве осе почетни услови су

$$x_0=y_0=z_0=0,$$
$$x_0'=v_0\cos\alpha,\quad y_0'=v_0\sin\alpha,\quad z_0'=0,$$



Слика 44

где је α угао који брзина гради са хоризонтом.

Пошто на тачку масе m дејствује само сила теже, са пројекцијом $-mg$ на осу Oy, где је g стално убрзање теже, диференцијалне једначине кретања су

$$mx''=0,$$
$$my''=-mg,$$
$$mz''=0,$$

а њихови интеграли

$$x=x_0+x_0'(t-t_0),$$
$$y=y_0+y_0'(t-t_0)-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2,$$
$$z=z_0+z_0'(t-t_0).$$

Ако време рачунамо од почетка кретања ($t_0=0$) и искористимо почетне услове, ти интеграли постају

(1) $$x = v_0 t \cos\alpha,$$

(2) $$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

(3) $$z = 0.$$

Трећа једначина показује да се кретање врши у сталној вертикалној равни којој припада почетна брзина.

Једначина (1) показује да се пројекција тачке на хоризонталну раван креће равномерно.

Најзад другој једначини одговара: прво, једнако успорено кретање до тренутка $t_1 = \frac{v_0}{g}\sin\alpha$, а затим једнако убрзано.

За одређивање облика трајекторије елиминишимо време из једначина (1) и (2). Пошто из (1) имамо

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha},$$

једначина (2) даје

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} =$$

(4) $$= x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{4h} \frac{x^2}{\cos^2\alpha},$$

где је $h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$ висина до које стиже тачка вертикалног хитца бачена у вис са почетном брзином v_0.

Ова једначина претставља параболу са осом симетрије паралелном Oy оси и са теменом S у тачки са координатама

$$x_s = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = h \sin 2\alpha,$$

$$y_s = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \sin^2\alpha = \frac{1}{2} h (1 - \cos 2\alpha).$$

Из ових једначина следује да као геометриско место тачке S служи *елипса темена* чија је једначина

$$\left(\frac{x_s}{h}\right)^2 + \left(\frac{y_s - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 = 1.$$

Решимо сад питање: под којим углом α треба уперити почетну брзину $\vec{v}_0$ сталног интензитета v_0 да трајекторија тачке прође кроз унапред одређену тачку P са координатама ξ, η.

Тражену вредност угла α даје једначина (4), ако x и y сменимо са ξ и η

$$\eta = \xi \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{\xi^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = \xi \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{4h}\frac{\xi^2}{\cos^2\alpha}.$$

Ту једначину можемо сматрати као квадратну по $\operatorname{tg}\alpha$

(5) $$\operatorname{tg}^2\alpha - 2p \operatorname{tg}\alpha + q = 0,$$

где смо означили са

$$p = \frac{v_0^2}{g\xi} = \frac{2h}{\xi}, \quad q = 1 + 2\frac{v_0^2 \eta}{g \xi^2} = 1 + \frac{4h\eta}{\xi^2}.$$

Једначина (5) има два корена

(6) $$\operatorname{tg}\alpha = p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

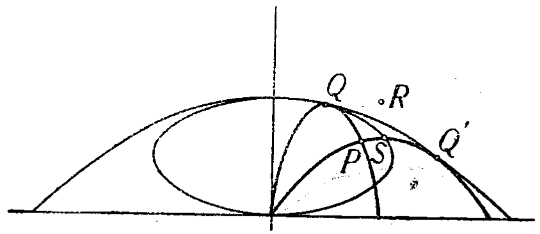
Област стварних корена од области имагинарних корена одваја услов једнаких корена

$$p^2 - q = 0,$$

који после смене доводи до једначине

$$\xi^2 = 2\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{v_0^2}{2g} - \eta\right) = 4h(h - \eta),$$

Ако сматрамо ξ и η као променљиве, ова једначина одређује једну криву — границу између области тачака кроз које може да прође трајекторија хитца и области тачака кроз које не може да прође ниједна трајекторија, ако почетна брзина има



Слика 45

дати интензитет. Из тог разлога се ова крива, која претставља параболу, зове *параболa сигурности* (сл. 45). Кроз сваку тачку F испод те параболе пролазе две могуће трајекторије хитца са угловима одређеним стварним коренима једначине (6). При томе, ако се тачка P налази у унутрашности елипсе темена, у њој се секу две параболе и то: једна на делу пењања и друга на делу спуштања. Ако се тачка налази ван ове елипсе а испод параболе сигурности, обе трајекторије секу се на деловима спуштања. Кроз сваку тачку Q на параболи сигурности може да прође само једна трајекторија; парабола сигурности је анвелопа свих таквих могућих трајекторија. Најзад ма за коју тачку R изнад параболе сигурности не постоји ниједна путања, која би кроз њу пролазила, ако интензитет брзине, не прелази вредност v_0.

§ 5·211. Кос хитац у отпорној средини

Посматрајмо сад проблем кретања тешке тачке кад на ову дејствује сем силе теже још и отпорна сила, рецимо отпор ваздуха[1]). Нека та отпорна сила има правац брзине тачке, смер супротан смеру брзине и интензитет

$$m c f(v),$$

где су: m — маса тачке, c сталан коефицијент и $f(v)$ функција брзине.

Према овим подацима можемо диференцијалну једначину кретања тачке у векторском облику написати

$$m\dot{\vec v} = m\vec g - m c f(v)\frac{\vec v}{v}. \tag{1}$$

Ако координатни триједар $Oxyz$ поставимо на исти начин као и у случају косог хитца у безваздушном простору (§ 5·21), и угао који чини брзина $\vec v$ са Ox осом означимо са θ, из векторске једначине изводимо скаларне једначине

$$x'' = -c f(v)\cos\theta, \tag{2}$$

$$y'' = -c f(v)\sin\theta - g, \tag{3}$$

$$z'' = 0. \tag{4}$$

1) Опширно тај проблем се анализира у специјалној грани механике, у балистици. В., на пр., C. Cranz. Lehrbuch der Ballistik. I. B. Äussere Ballistik. 5 Auflage. Berlin, 1925.

Тим једначинама треба додати почетне услове

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

$$x'_0 = v_0\cos\alpha,\ y_0' = v_0\sin\alpha,\ z_0' = 0,$$

где је α угао који чини почетна брзина $\vec v_0$ са Ox осом.

Сем система једначина (2) — (4) за Декартове координате наведимо и природне једначине кретања тачке. За тангенту на путању, која гради угао $\frac{\pi}{2}+\theta$ са правцем убрзања $\vec g$ имамо једначину

$$\frac{dv}{dt} = -c f(v) - g\sin\theta, \tag{5}$$

а за нормалу

$$\frac{v^2}{\rho} = -g\cos\theta, \tag{6}$$

где је ρ полупречник кривине трајекторије.

Како на основу једначине (4) и почетних услова закључујемо да се кретање тачке врши у равни Oxy, из познате геометриске и кинематичке једначине

$$ds = \rho\, d\theta = v\, dt,$$

где је ds елемент дужине лука трајекторије, можемо одредити

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v}\frac{d\theta}{dt}.$$

На основу тог израза из једначине (6) изводимо

$$-g\cos\theta = v\frac{d\theta}{dt}, \tag{7}$$

а одатле

$$dt = -\frac{v}{g\cos\theta}\,d\theta. \tag{8}$$

Ако једначину (2) напишемо

$$d(v\cos\theta) = -c f(v)\cos\theta\, dt \tag{9}$$

и помоћу (8) елиминишемо диференцијал dt, добићемо диференцијалну једначину

(I) $$g\,d\,(v\cos\theta) = c\,v\,f\,(v)\;d\,\theta$$

првога реда са две промениљиве v и θ. Ова једначина зове се *главна балистичка једначина.* После интеграције те једначине можемо сматрати интензитет брзине v као познату функцију угла θ, тј.

(I′) $$v = v\,(\theta)\,.$$

После тога из једначине (8) можемо време увести квадратуром

(II) $$g\,dt = -\,v\sec\theta\,.\,d\,\theta\,.$$

Координата x из (7), после множења са v и искоришћавања једначине $v\cos\theta = dx : dt$, такође се одређује квадратуром

(III) $$g\,dx = -\,v^2\cdot d\,\theta\,.$$

Из ове једначине, узимајући у обзир да је

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta\,,$$

имамо нову квадратуру за одређивање y у функцији θ

(IV) $$g\,dy = -\,v^2\operatorname{tg}\theta\cdot d\,\theta\,.$$

Најзад из (II) изводимо једначину

(V) $$g\cdot ds = -\,v^2\sec\theta\cdot d\,\theta$$

која квадратуром одређује дужину пута s тачке у функцији угла θ.

Према томе потпуно решење проблема кретања тешке тачке у отпорној средини своди се на интеграцију главне балистичке једначине и на низ квадратура.

Но може се и пре анализе неких случајева могуће интеграције главне балистичке једначине и до израчунавања наведених квадратура извести читав низ особина трајекторије тачке и то без обзира на облик функције $f(v)$. Наведимо те особине без доказа; докази могу послужити за вежбања.

1. Хоризонтална компонента брзине, $v\cos\theta$, за време кретања опада. То непосредно следи, на пр., из једначине (9).

2. Оштар угао α тангенте на трајекторију са Ox осом у почетку кретања, у тачки O, мањи је од оштрог угла β на крају кретања, у тачки K (сл. 46).

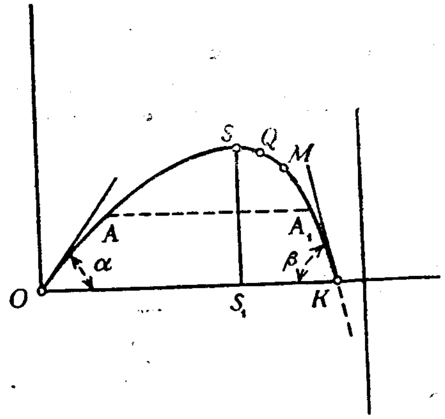
3. Висина y_s темена S трајекторије налази се у границама

$$\frac{1}{4}\,a\operatorname{tg}\alpha < y_s < \frac{1}{4}\,a\operatorname{tg}\beta\,,$$

где је $a = OK$.

4. Ако су A и A_1 два положаја покретне тачке на истој висини над хоризонтом, али један на делу OS, а други на делу SK, брзина тачке на првом делу већа је од брзине на другом делу.

5. $OS_1 > S_1K$, где је тачка S_1 пројекција темена S на хоризонт.



Слика 46

6. Продужење дела SK трајекторије има вертикалну асимптоту. У приближавању тој асимптоти брзина тачке тежи граничној ...ости v_1, која задовољава једначину

...ежи тачка M са најмањом ...нину

... $\sin\theta$.

... тачка Q где кривина трајек... ...зина v и угао θ у тој тачки

... $\sin\theta$.

...зине расте почев од тачке S. ... апсолутна вредност те компо... У тачкама A и A_1 ... ненте у тачки A је већа од апсолутне вредности те компоненте у тачки A_1.

10. Време кретања од O до S мање је од времена кретања од S до K.

11. Дужина пута од O до S већа је од дужине пута од S до K.

Вратимо се сада проучавању главне балистичке једначине

(I) $$gd(v\cos\theta) = c\,v\,f\,(v)\,d\theta.$$

Интеграција ове диференцијалне једначине у општем случају, за произвољну функцију $f(v)$, помоћу савремених средстава математичке анализе у коначном облику немогућа је. Али постоји читав низ специјалних облика функције $f(v)$ за које се таква интеграција може извести. Извршимо, примера ради, интеграцију те једначине за случај

(10) $$f(v) = v^2.$$

То је специјалан случај Даламберова случаја са отпорном силом у облику

$$a + cv^n,$$

где су a, c, n — три константе.

У случају (10) једначина (I) добија облик

(11) $$gd(v\cos\theta) = cv^3\, d\theta.$$

Ако поделимо ову једначину са v^3 и уведемо нову променљиву

$$u = v^{-2},$$

претходна једначина се своди на линеарну једначину

$$\frac{du}{d\theta} + 2\,\mathrm{tg}\,\theta \cdot u + 2\frac{c}{g}\sec\theta = 0.$$

После интеграције ове једначине и враћања на полазну променљиву v за интеграл добивамо

(12) $$\frac{1}{(v\cos\theta)^2} = -\frac{2c}{g}\cdot p(\theta) + \frac{2c}{g}D,$$

где је

$$p(\theta) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \log\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

и D произвољна константа интеграције. Ако ову константу одредимо из услова да је за $\theta = \alpha$ брзина v_0, она добија вредност

$$D = \frac{g}{2c(v_0\cos\alpha)^2} + p(\alpha).$$

Из интеграла (12) тада следи једначина

$$v^2 = \frac{g}{2c}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta\,(D - p(\theta))},$$

коју скраћено можемо написати

(13) $$v^2 = \frac{g}{2c}\Phi(\theta),$$

где је

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta\,(D - p(\theta))}.$$

Константа D је врло једноставно везана са брзином v_S тачке у темену S; наиме, како је за теме $\theta = 0$, имамо $p(\theta) = 0$ и из (12)

$$D = \frac{g}{2c\, v_S^2}.$$

Помоћу интеграла (13) можемо једначине (II)—(V) формулисати на овај начин:

из (II) $$\sqrt{2gc}\,dt = -\frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\Phi(\theta)}\,d\theta,$$

из (III) $$2\,cdx = -\Phi(\theta)\,d\theta,$$

из (IV) $$2\,cdy = -\Phi(\theta)\,.\,\mathrm{tg}\,\theta\,.\,d\theta,$$

из (V) $$2\,cds = -\Phi(\theta)\,.\,\sec\theta\,.\,d\theta.$$

Последњу квадратуру можемо израчунати у коначном облику. Заиста, како из (12) на основу (11) следи да је

$$dp = \frac{d\theta}{\cos^3\theta},$$

ту једначину претстављамо овако

$$2cds = -\frac{dp}{D-p} = \frac{d(D-p)}{D-p}.$$

Одавде изводимо интеграл

$$2\,cs = \log(D-p) + G$$

где је G константа интеграције.

Ако ту константу одредимо из услова да за $s=0$ буде $p = p(\alpha)$, претходни интеграл даје

$$s = \frac{1}{2c}\log\frac{D - p(\theta)}{D - p(\alpha)}.$$

Остале квадратуре не могу бити израчунате у коначном облику. Примена метода за приближну интеграцију омогућује да се проблем доведе до краја и резултат израчуна са приближном тачношћу.

§ 5·22. Привлачење тачке ка непокретном центру пропорционално растојању. Случај криволиниског кретања

Као други пример криволиниског кретања решимо проблем о кретању материјалне тачке под утицајем привлачне силе ка непокретном центру, која је пропорционална растојању тачке од центра.

Ако вектор положаја покретне тачке M у односу на центар привлачења, тачку O, означимо са $\vec{r}$, силу $\vec{F}$, што дејствује на тачку, можемо претставити

$$\vec{F} = -mk^2\vec{r},$$

где је k^2 коефицијент пропорционалности.

Из векторске диференцијалне једначине кретања

$$m\ddot{\vec{r}} = -mk^2\vec{r}$$

добијамо три скаларне једначине

$$x'' = -k^2 x,$$
$$y'' = -k^2 y,$$
$$z'' = -k^2 z.$$

Према (6) § 5·121 интеграли ових једначина су

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos kt + A_2 \sin kt, \\ y &= A_3 \cos kt + A_4 \sin kt, \qquad (1) \\ z &= A_5 \cos kt + A_6 \sin kt. \end{aligned}$$

Ако време рачунамо од почетка кретања ($t_0 = 0$) и Ox осу изаберемо тако да она пролази кроз почетни положај тачке, онда имамо услове

$$y_0 = z_0 = 0. \qquad (2)$$

Сем тога претпоставимо да почетни вектор положаја $\overrightarrow{OM_0}$ и почетна брзин $\vec{v}_0$ леже у равни Oxy (сл. 47). У том случају

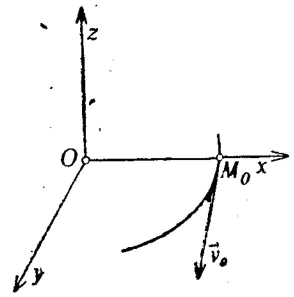
$$z_0' = v_0 \cos(\vec{v}_0, \vec{k}) = 0. \qquad (3)$$

Кад узмемо у обзир почетне услове (2) и (3) и одредимо произвољне константе у једначинама (1), оне дају

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt,$$

$$y = \frac{y_0'}{k} \sin kt,$$

$$z = 0.$$



Слика 47

Ове једначине показују да је трајекторија елипса у равни Oxy са једначином

$$\frac{1}{x_0^2}\left(x - y\frac{x_0'}{y_0'}\right)^2 + \left(\frac{k}{y_0'}\right)^2 y^2 = 1.$$

ГЛАВА ШЕСТА

Опште теореме о кретању материјалне тачке

§ 6·1. Закон количине кретања

Производ масе m тачке и брзине $\vec{v}$, тј. вектор

$$m\vec{v} = \vec{K},$$

зове се *количина кретања* или *импулс покретне тачке.*

Пошто је извод тог вектора по времену

$$\dot{\vec{K}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{w},$$

а како је

$$m\vec{w} = \vec{F},$$

имамо векторску једначину

$$\dot{\vec{K}} = \vec{F}, \tag{1}$$

која изражава *теорему* или *закон количине кретања.* Он гласи: *Извод количине кретања по времену једнак је сили која дејствује на тачку.*

Из једначине (1) може се написати у диференцијалима једначина

$$d\vec{K} = \vec{F}\,dt. \tag{2}$$

Са леве стране имамо диференцијал количине кретања, са десне — производ силе и диференцијала времена, у току којег ова сила дејствује. Тај производ можемо сматрати као диференцијал вектора $\vec{J}$, тј. ставити

$$\vec{F}\,dt = d\vec{J}.$$

За коначан интервал времена тај вектор одређује се једначином

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt$$

и према томе има за Декартове координате

$$J_x = \int_{t_0}^{t} X\,dt, \quad J_y = \int_{t_0}^{t} Y\,dt, \quad J_z = \int_{t_0}^{t} Z\,dt.$$

Вектор $\vec{J}$ зове се *импулс силе* за дати интервал времена.

Једначину (2) можемо према томе написати

$$d\vec{K} = d\vec{J}.$$

У том облику она гласи: *диференцијал количине кретања једнак је диференцијалу импулса силе.*

Ако претходну једначину интегралимо у коначном интервалу времена од t_0 до t, добићемо

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt = \vec{J}. \tag{3}$$

То је *теорема о коначном прираштају количине кретања.* Она гласи: *Прираштај количине кретања за коначан интервал времена једнак је импулсу силе, која дејствује на тачку за исти интервал времена.*

Уведене величине, количина кретања и импулс силе, имају исте димензије:

$$[\vec{K}] = MLT^{-1}, \qquad [\vec{J}] = MLT^{-2}\,T = MLT^{-1}.$$

§ 6·11. Интеграли количине кретања

Ако сила $\vec{F}$, што дејствује на тачку, има особину да је њена пројекција на један сталан правац једнака нули, тј.

$$F\cos(\vec{F}\,\vec{a}_1) = 0,$$

где је $\vec{a}_1$ орт сталног правца, онда из једначине

$$\dot{\vec{K}} = \vec{F},$$

после скаларног множења са $\vec{a}_1$, имамо

$$(\dot{\vec{K}}\vec{a}_1) = (\vec{F}\vec{a}_1) = 0,$$

одакле следи интеграл

$$(\vec{K}\vec{a}_1) = K\cos(\vec{K}\vec{a}_1) = C_1,$$

где је C_1 произвољна константа. Тај интеграл се зове *интеграл количине кретања за дати правац*.

Ако постоји још и други неки правац са ортом $\vec{a}_2$, но неколинеаран са првим, можемо написати још и други интеграл

$$K\cos(\vec{K}\vec{a}_2) = C_2.$$

Најзад за три различита некомпланарна правца са трећим ортом $\vec{a}_3$ имамо још и трећи интеграл количине кретања

$$K\cos(\vec{K}\vec{a}_3) = C_3.$$

У специјалном случају, кад се правци $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, поклапају са осама Декартова триједра $Oxyz$, интеграли количине кретања постају

$$mx' = C_1, \quad my' = C_2, \quad mz' = C_3.$$

Јасно је да у случају кад постоје сва три скаларна интеграла количине кретања важи и векторски интеграл

$$\vec{K} = \vec{C},$$

где је $\vec{C}$ сталан вектор. У том случају брзина тачке има сталну векторску вредност $\vec{v} = \vec{v}_0$. Кретање је праволиниско и равномерно, јер из једначине

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0$$

следи

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t.$$

Као пример кретања кад постоје два интеграла количине кретања служи кретање косог хитца, јер сила теже, која једина

дејствује на тачку, нема пројекцију на хоризонталну раван, па према томе ни ма на која два правца у хоризонталној равни.

Најзад само један интеграл количине кретања постоји, на пр., у случају кад правац силе увек остаје паралелан некој сталној равни, јер у том случају сила нема пројекцију на правац нормале на ту раван.

§ 6·2. Закон момента количине кретања

Узмимо сталну тачку O и конструишимо момент $\vec{l}$ количине кретања вектора $\vec{K}$, са нападном тачком у покретној тачки M у односу на тачку O. Ако са $\vec{r}$ означимо вектор положаја $\overrightarrow{OM}$, моменат $\vec{l}$ има вредност

$$\vec{l} = [\vec{r}\vec{K}].$$

Диференцирајмо тај вектор по времену

$$\dot{\vec{l}} = [\dot{\vec{r}}\vec{K}] + [\vec{r}\dot{\vec{K}}]$$

и узмимо у обзир једначине

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \qquad \dot{\vec{K}} = \vec{F};$$

тада због колинеарности вектора $\vec{v}$ и $\vec{K} = m\vec{v}$, можемо написати

(1) $$\dot{\vec{l}} = [\vec{r}\vec{F}] = \vec{L},$$

где је $\vec{L}$ момент силе, што дејствује на покретну тачку M, исто тако у односу на тачку O.

Једначина (1) изражава *теорему* или *закон момента количине кретања за непокретни пол*. Тај закон гласи: *Извод момента количине кретања у односу на непокретни пол по времену једнак је моменту силе, која дејствује на тачку, у односу на исти пол.*

Ако изаберемо ма који покретни пол, тачку A, и конструишемо момент количине кретања у односу на тај пол

$$\vec{l}_A = [\vec{\varrho}\vec{K}],$$

где је $\vec{\varrho} = \overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_A$, онда за извод имамо

$$\dot{\vec{l}}_A = [\dot{\vec{\varrho}}\vec{K}] + [\vec{\varrho}\dot{\vec{K}}],$$

одатле, пошто је

$$\dot{\varrho} = \dot{r} - \dot{r}_A = \vec{v} - \vec{v}_A$$

и $\vec{K}$ колинеарно са $\vec{v}$, изводимо једначину

(2) $$\dot{\vec{l}}_A + [\vec{v}_A \vec{K}] = \vec{L}_A\,,$$

где је $\vec{L}_A$ момент силе у односу на тачку A. Кад брзину тачке A, вектор $\vec{v}_A$, вежемо са тачком A, крај те брзине одређује тачку, која се зове *изводни пол*.

Једначина (2) изражава закон момента количине кретања за покретни пол. Тај закон гласи: Ако моменте узимамо у односу на исти покретни пол, извод момента количине кретања више момент количине кретања са нападном тачком у изводном полу једнак је моменту силе, која дејствује на тачку.

Ако чланове једначине (1) пројицирамо ма на који сталан правац са ортом $\vec{a}$, имамо

$$(\dot{\vec{l}}\,\vec{a}) = (\vec{L}\,\vec{a})$$

или

(3) $$\frac{d}{dt}(\vec{l}\,\vec{a}) = (\vec{L}\,\vec{a})\,.$$

Пошто је пројекција момента око тачке на осу која пролази кроз ту тачку једнака моменту око те осе, написану скаларну једначину можемо протумачити овако:

Извод по времену момента количине кретања у односу на сталну осу једнак је моменту силе у односу на исту осу.

У случају променљива правца са ортом $\vec{u}$ имамо

$$(\dot{\vec{l}}\,\vec{u}) = \frac{d}{dt}(\vec{l}\,\vec{u}) - (\vec{l}\,\dot{\vec{u}})\,,$$

где је $\dot{u}$ *брзина скретања правца*. Према томе за променљив правац скаларна једначина момента количине кретања даје

$$\frac{d}{dt}(\vec{l}\,\vec{u}) - (\vec{l}\,\dot{\vec{u}}) = (\vec{L}\,\vec{u})\,.$$

Ако су променљиви оса и пол, у односу на који конструишемо моменте, из (2) имамо

$$\frac{d}{dt}(\vec{l}_A\,\vec{u}) - (\vec{l}_A\,\dot{\vec{u}}) + (\vec{u}\,[\vec{v}_A \vec{K}]) = (\vec{L}_A\,\vec{u})\,.$$

За осе Декартова триједра векторској једначини (1) одговарају три скаларне једначине од којих ћемо написати прву

$$\frac{d}{dt}\,l_x = \frac{d}{dt}\,m\,(yz' - zy') = L_x = yZ - zY\,.$$

Закону момента количине кретања можемо да дамо и други облик.

Ако упоредимо момент количине кретања

$$\vec{l} = [\vec{r}\,\vec{K}] = m\,[\vec{r}\,\vec{v}]$$

са изразом за секторску брзину $\vec{S}$ (§ 2·6), видимо да вектор $\vec{l}$ можемо изразити

$$\vec{l} = 2m\,\vec{S}\,.$$

Закон момента количине кретања (1) може се тада написати

(4) $$2m\,\dot{\vec{S}} = \vec{L}\,,$$

где је $\dot{S}$ секторско убрзање. Једначина (4) гласи речима: Секторско убрзање помножено двоструком масом једнако је моменту силе у односу на исту непокретну тачку, за коју узимамо секторску брзину. У том облику се закон момента зове *закон секторске површине.*

§ 6·21. Интеграли момента или површине

Ако сила $\vec{F}$, која дејствује на тачку, задовољава услов

(1) $$(\vec{L}\,\vec{a}_1) = 0\,,$$

да је њен момент у односу на сталну осу са ортом a_1 једнак нули, онда из једначине (3) претходног параграфа следује

$$\frac{d}{dt}(\vec{l}\,\vec{a}_1) = 0\,,$$

а овај резултат доводи до интеграла

$$(\vec{l}\,\vec{a}_1) = l\cos(\vec{l}\,\vec{a}_1) = \text{const.} = \Gamma_1\,.$$

Тај интеграл се зове *интеграл момента количине кретања за дату осу.*

Пошто се тај интеграл може написати

$$S\cos(\vec{S}\,\vec{a}_1) = \frac{1}{2m}\Gamma_1 = \text{const.},$$

он може бити протумачен и овако: Ако је момент силе у односу на сталан правац, што пролази кроз тачку O једнак нули, површина коју описује пројекција вектора положаја покретне тачке на раван управну на том правцу пропорционална је времену. Из тог разлога тај интеграл се зове *интеграл површине.*

Услов (1) који треба да задовољава сила може се написати

$$(\vec{L}\,\vec{a}_1) = ([\vec{r}\,\vec{F}]\,\vec{a}_1) = (\vec{F}[\vec{a}_1\,\vec{r}]) = 0,$$

а у таквом облику он показује да се сила $\vec{F}$ увек налази у равни што пролази кроз осу $\vec{a}_1$ и покретну тачку M.

Ако се оса $\vec{a}_1$ поклапа са Декартовом осом Ox, услов за силу изражава се

$$yZ - zY = 0,$$

а интеграл момента

$$l_x = m(yz' - zy') = \text{const.} = \Gamma_x.$$

О броју интеграла момента количине кретања доказаћемо теорему: Интеграла момента количине кретања може бити: или 1° — ниједан, или 2° — један или 3° — три. Дакле, не може бити само два интеграла. Заиста, ако имамо два интеграла за два стална правца $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, што пролазе кроз исту тачку O, сила што дејствује на тачку M мора да се налази с једне стране у равни M и $\vec{a}_1$, са друге у равни M и $\vec{a}_2$, а то значи мора да се налази у пресеку равни, у правој OM. Моменти силе у односу ма на коју праву што пролази кроз тачку O биће једнаки нули, према томе увек можемо изабрати трећи правац $\vec{a}_3$, некомпланаран са $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, у односу на који ће момент силе бити нула, па значи и за њега постоји интеграл момента. За осе Декартових координата то се види отуда, што, рецимо, из услова

$$yZ - zY = 0, \qquad zX - xZ = 0,$$

следује услов

$$xY - yX = 0.$$

То значи, ако имамо два интеграла

$$m(yz' - zy') = \Gamma_x, \qquad m(zx' - xz') = \Gamma_y,$$

треба да важи и трећи

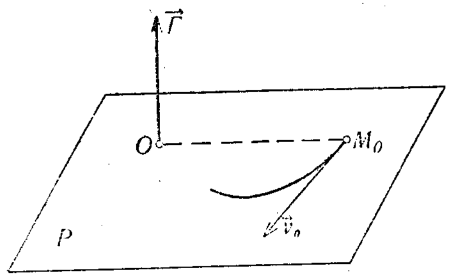
$$m(xy' - yx') = \Gamma_z,$$

где су Γ_x, Γ_y, Γ_z — три константе.

Ако су пројекције вектора $\vec{L}$ на три некомпланарна правца једнаке нули, сам је вектор $\vec{L}$ једнак нули и из једначине $\dot{\vec{l}} = \vec{L} = 0$ имамо векторски интеграл

$$\vec{l} = \vec{\Gamma}$$

који показује сталност момента количине кретања.



Слика 48

Вектор $\vec{\Gamma}$ одређује сталну раван управну на том вектору. Ова раван не претставља ништа друго до раван путање, која у овом случају мора бити равна крива. Заиста, ако повучемо кроз тачку M_0 (сл. 48) раван P управну на вектору $\vec{\Gamma}$, почетна брзина $\vec{v}_0$ мора да лежи у тој равни, јер би у противном случају имали момент количине кретања чији правац не стоји управно на равни P. У даљем кретању тачка никад не може да добије компоненту брзине управну на равни P и према томе ће тачка остати увек у тој равни.

На тај начин, у случају кад постоје три скаларна интеграла момента количине кретања, постоји стална, *непроменљива* раван у којој се креће тачка.

§ 6·3. Закон живе силе

Узмимо диференцијалну једначину кретања материјалне тачке у векторском облику

$$m\vec{w} = \vec{F}$$

и помножимо чланове те једначине скаларно векторима

$$\vec{v}\,dt = d\vec{s},$$

где је $d\vec{s}$ елементарно померање тачке. Добићемо

$$(1) \qquad (m\dot{\vec{v}}, \vec{v}\, dt) = (\vec{F}, d\vec{s}).$$

Први израз може се овако трансформисати

$$(m\dot{\vec{v}}, \vec{v}\, dt) = (m\vec{v}, \dot{\vec{v}}\, dt) = (m\vec{v}, d\vec{v}) = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right),$$

јер је

$$dv^2 = d(\vec{v}\,\vec{v}) = 2(\vec{v}\, d\vec{v}),$$

и на тај начин из једначине (1) имамо

$$d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = (\vec{F}\, d\vec{s})$$

или

$$(2) \qquad dT = (\vec{F}\, d\vec{s}),$$

где је T жива сила тачке (§ 4·32).

С десне стране у једначини (2) имамо

$$(3) \qquad (\vec{F}\, d\vec{s}) = F . ds . \cos(\vec{F}, d\vec{s}).$$

Скаларни производ силе $\vec{F}$ и маког померања $\vec{S}$ нападне тачке те силе, тј.

$$(\vec{F}\, \vec{S}) = F . S . \cos(\vec{F}, \vec{S})$$

зове се *рад дате силе на датом померању.* Он се може протумачити и као производ силе и пројекције померања на правац силе, а такође и као производ померања и пројекције силе на правац померања. Рад може да буде позитиван и негативан према косинусу угла између праваца силе и померања, а такође и једнак нули, кад сила стоји управно на померању, и то независно од тога што ни сила ни померање нису једнаки нули.

Израз (3) даје рад силе $\vec{F}$ на елементарном померању $d\vec{s}$ или, такозвани, *елементаран рад.* Означимо тај рад са dA, тј. ставимо

$$(\vec{F}\, d\vec{s}) = dA .$$

У Декартовим координатама елементаран рад се изражава

$$dA = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz,$$

где су, као и увек, X, Y, Z — координате силе, а dx, dy, dz — координате померања $d\vec{s}$.

Ако је положај тачке одређен генералисаним координатама q_1, q_2, q_3, померање $d\vec{s}$ можемо према (3) § 2·3 изразити

$$d\vec{s} = A_1\, dq_1\, \vec{D}_1 + A_2\, dq_2\, \vec{D}_2 + A_3\, dq_3\, \vec{D}_3$$

и за рад силе имамо тада

$$dA = (\vec{F}\, d\vec{s}) = (\vec{F}, \sum_{i=1}^{3} A_i\, dq_i\, \vec{D}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} A_i\, dq_i\, (\vec{F}\, \vec{D}_i) .$$

Али на основу (2) § 4·32

$$A_i\, dq_i\, (\vec{F}\, \vec{D}_i) = Q_i\, dq_i ,$$

и на тај начин за рад дефинитивно налазимо

$$dA = \sum_{i=1}^{3} Q_i\, dq_i = Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2 + Q_3\, dq_3 .$$

Тај израз за елементаран рад даје механичко тумачење производа $Q_i\, dq_i$, о коме смо говорили у § 4·32. Видимо да је тај производ једнак раду силе на оном елементарном померању тачке, на коме се мења само једна координата q_i. Према том резултату за израчунавање генералисаних сила Q_1, Q_2, Q_3 довољно је израчунати рад на произвољном елементарном померању и у добивеном изразу узети коефицијенте код dq_1, dq_2, dq_3.

Жива сила и рад имају исту димензију

$$[T] = [A] = ML^2T^{-2} .$$

За јединицу рада у систему *CGS* узима се рад силе од једног дина по центиметру у правцу силе. Та јединица зове се *ерг* (erg). Рад од 10^7 ерга зове се *џаул* (joule). Рад силе теже од 1 кг по метру, који се зове *килограм-метар* (kgm), једнак је 981.10^5 ерга $=$ $= 9{,}81$ џаула.

Помоћу уведених величина — живе силе и рада — једначина (2) може да се напише

$$(4) \qquad dT = dA .$$

Ова једначина изражава *теорему* или *закон живе силе за материјалну тачку у диференцијалном облику*. Тај закон гласи: *Диференцијал живе силе материјалне тачке једнак је елементарном раду силе на одговарајућем померању.*

Помоћу Декартових координата закон живе силе (4) изражава се

$$d\,\frac{1}{2}\,m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,,$$

а помоћу генералисаних

$$d\,\frac{1}{2}\,m\,(A_1^2\,q_1'^2 + \ldots + 2\,B_1\,q_2'\,q_3' + \ldots) = Q_1\,dq_1 + Q_2\,dq_2 + Q_3\,dq_3\,.$$

Узмимо сад у обзир коначно кретање тачке, кад је она из положаја M_1 у тренутку t_1 прешла по својој путањи у положај M_2 у тренутку t_2. Ако живу силу тачке у положају M_1 означимо са T_1, а у положају M_2 — са T_2, разлика

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} dT$$

је прираштај живе силе на том путу.

Пошто за свако одређено кретање све његове елементе (координате тачке, брзину, убрзање, силу што дејствује на тачку, итд.) можемо сматрати као функције времена, израз за елементаран рад

$$dA = (\vec{F}\,\vec{ds}) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

увек се може претставити у облику $f(t)\,dt$ и, према томе, можемо га интегралити у границама од t_1 до t_2, што одговара прелазу тачке из положја M_1 у положај M_2. Не бележећи експлицитно независно промениљиву, ту интеграцију можемо означити

$$\int_{M_1}^{M_2} dA = \int_{M_1}^{M_2} (\vec{F}\,\vec{ds}) = \int_{M_1}^{M_2} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\,.$$

Ако сад обе стране једначине (4) интегралимо у границама од t_1 до t_2, имамо

$$T_2 - T_1 = \int_{M_1}^{M_2} dA = A_{12}\,, \tag{5}$$

где смо са A_{12} означили *тоталан рад силе* F на путу тачке из положаја M_1 у положиј M_2.

Једначина (5) изражава *закон живе силе за материјалну тачку у интегралном облику*. Он гласи: *Прираштај живе силе материјалне тачке на одређеном путу једнак је тоталном раду силе на том путу.*

Закон живе силе у диференцијалном и интегралном облику не претставља ништа друго до један закључак из диференцијалних једначина кретања тачке и важи за свако кретање те тачке независно од карактера кретања и силе која дејствује на тачку.

§ 6·31. Ефект рада. Теорема о промени живе силе

Извод рада по времену, тј.

$$\frac{dA}{dt} = E$$

зове се *ефект рада*.

Пошто је $dA = (\vec{F}, \vec{ds})$, за ефект имамо

$$E = \frac{dA}{dt} = \left(\vec{F}, \frac{\vec{ds}}{dt}\right) = (\vec{F}, \vec{v})\,,$$

према томе је ефект рада силе једнак скаларном производу силе и брзине нападне тачке те силе.

Из закона живе силе у диференцијалном облику

$$dT = dA$$

имамо једначину

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt} = E\,,$$

која изражава теорему о промени живе силе: *Извод живе силе по времену једнак је ефекту рада силе.*

Димензија ефекта износи

$$[E] = ML^2\,T^{-3}\,.$$

У систему *CGS* за јединицу ефекта се узима ефект рада од једног ерга у секунди, тј. $\frac{\text{erg}}{\text{sec}}$. Пошто је сувише мали и у пракси се не употребљава, нема специјалног назива. Ефект рада једног џаула у секунди, који износи $10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$, зове се *ват* (watt). Ефект рада једног килограм-метра у секунди $\left(\frac{\text{kgm}}{\text{sec}}\right)$ износи 9,81 watt. У пракси се још за ефект употребљује такозвана *коњска снага* са ознаком *HP* (од енглеских речи horse power), која износи 75 $\frac{\text{kgm}}{\text{sec}}$ или 735,75 watt $\approx$ 0,736 kW (киловат).

§ 6·311. Теорема о коначном прираштају живе силе

У § 6·1 имали смо теорему о коначном прираштају количине кретања

$$(1) \qquad \vec{K} - \vec{K}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{J},$$

где је $\vec{J}$ импулс силе, тј. $\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt$.

Ако помножимо једначину (1) скаларно прво са $\vec{v}$, а затим са $\vec{v}_0$ и резултате

$$mv^2 - m(\vec{v}\,\vec{v}_0) = (\vec{J}\,\vec{v}),$$

$$m(\vec{v}\,\vec{v}_0) - mv_0^2 = (\vec{J}\,\vec{v}_0)$$

саберемо, добићемо

$$(2) \qquad T - T_0 = \frac{1}{2}[(\vec{J}\,\vec{v}_0) + (\vec{J}\,\vec{v})] = \left(\vec{J}, \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}\right),$$

која гласи: прираштај живе силе једнак је скаларном производу импулса силе за време кретања и полузбира почетне и крајње брзине тачке.

§ 6·32. Функција силе. Потенцијал. Интеграл живе силе или закон одржавања енергије

У општем случају сила $\vec{F}$, што дејствује на тачку, може да зависи од положаја тачке, њене брзине и времена. Зауставимо се на случају, кад сила зависи само од положаја, тј.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}),$$

где је $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ вектор положаја тачке. У таквом случају свакој тачки простора одговара одређени вектор — сила и на тај начин цео простор или онај његов део, који узимамо у посматрање, сматрамо као *векторско поље*, у датом случају *поље силе*. Векторска линија у том пољу је *линија силе*. Диференцијалну једначину те линије у векторском облику можемо написати

$$[\vec{F}\,\vec{D}] = 0,$$

где је $\vec{D}$ орт тангенте. Тој векторској једначини одговарају скаларне једначине

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Може се догодити да је сила $\vec{F}$ градијент скалара U, који зависи од положаја тачке, тј.

$$(1) \qquad \vec{F} = \text{grad}\, U.$$

Координате силе $\vec{F}$ су тада делимични изводи скалара U по координатама тачке

$$(2) \qquad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Функција U, чији је градијент сила, зове се *функција силе*. За силу $\vec{F}$ тада се каже да има функцију силе.

Функција Π супротног знака од U, тј. функција

$$\Pi = -U,$$

зове се *потенцијална функција* или *потенцијал* или најзад, *потенцијална енергија*.

Ако сила $\vec{F}$, што дејствује на материјалну тачку, има функцију силе U, која зависи само од положаја тачке, закон живе силе у интегралном облику даје

$$T - T_0 = \int_{M_0}^{M} \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = \int_{M_0}^{M} dU,$$

одакле, после интеграције, имамо

$$T - T_0 = U - U_0 \tag{3}$$

или

$$T = U + h, \tag{4}$$

где $h = T_0 - U_0$ константа интеграције.

Интеграл (3) или (4) зове се *интеграл живе силе*.

Ако функцију силе сменимо потенцијалном функцијом из (3) имамо

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0. \tag{5}$$

Жива сила тачке зове се и *кинетичка енергија* тачке. Према претходној једначини за време кретања тачке под утицајем силе, која има функцију силе, збир кинетичке и потенцијалне енергије остаје сталан.

Збир кинетичке и потенцијалне енергије зове се *тотална енергија* тачке. Ако ту енергију означимо са H, једначину (5) можемо заменити овом

$$H = H_0 = h, \tag{6}$$

где је H_0 константна тотална енергија тачке у почетку кретања.

Једначина (6) изражава теорему или закон одржавања енергије у примени на тачку.

Кретање тачке под условом да за време кретања тотална енергија задржава сталну вредност зове се *конзервативно*. Сила која производи такво кретање зове се *конзервативна сила*.

§ 6·321. Услови конзервативности силе

Конзервативна сила има функцију силе, тј. за конзервативну силу $\vec{F}$ имамо

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U$$

или

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Како је опет, као што је познато из теорије векторског поља,

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0,$$

услов за силу $\vec{F}$ можемо написати и

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0, \tag{1}$$

или помоћу Декартових координата

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Видимо да је за конзервативну силу услов (1) или (2) неопходан. Покажимо сад да је услов (1) или, што је исто, да су три услова (2) довољни да сила која зависи само од положаја буде конзервативна, тј. да је тада увек могуће наћи такву функцију U чији градијент даје силу $\vec{F}$.

За одређивање функције U пођимо од једначине

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X,$$

одакле после интеграције имамо

$$U = \int X\,dx = \Phi(x, y, z) + C(y, z), \tag{3}$$

где је C произвољна функција аргумената y и z. За одређивање функције C диференцирајмо (3) по y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial y}. \tag{4}$$

Прво узмимо у обзир да разлика

$$Y - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

не зависи од промењиве x. Заиста, после диференцирања по x имамо

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

Из (4) после интеграције имамо

$$C = \int\left(Y - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)dy = F(y, z) + C_1(z),$$

где је $C_1(z)$ произвољна функција промењиве z.

Ако добивену вредност C уврстимо у једначину (3), можемо ставити

$$U = \Phi(x, y, z) + F(y, z) + C_1(z).$$

За одређивање функције $C_1(z)$ диференцирајмо претходну једначину по z

$$\frac{\partial U}{\partial z} = Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{dC_1}{dz}.$$

Лако је показати да на основу услова (2) функција

$$Z - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}$$

зависи само од z и према томе за одређивнње C_1 имамо

$$C_1 = \int \left(Z - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{dz} \right) dz + C_2,$$

где је C_2 права константа.

Као резултат имамо

$$U = \int X\,dx + \int \left(Y - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy + \int \left(Z - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \right) dz + C_2.$$

Одређивањем функције U стварно смо доказали да је услов (1) довољан да сила буде конзервативна.

§ 6·322. Рад конзервативне силе

За конзервативну силу што дејствује на тачку постоји једначина

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U = -\operatorname{grad} \Pi$$

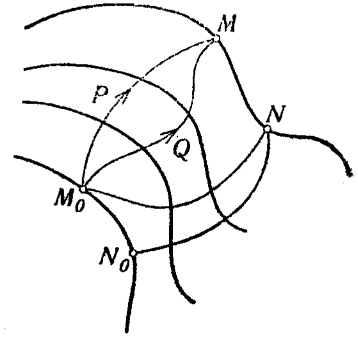
и према томе она стоји у вези са скаларним пољем функције силе U или потенцијала $\Pi = -U$. Претпостављамо да је ова функција једнозначна у целом пољу. У том пољу можемо замислити еквипотенцијалне површине, чије су једначине

$$U(x, y, z) = \text{const.}$$

Сила стоји нормално на тој површини, наперена је на ону страну куда функција силе расте или потенцијал опада и њен је интензитет

$$\lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta n},$$

где је ΔU прираштај функције силе што одговара померању Δn дуж нормале на еквипотенцијалну површину. Ако нацртамо низ таквих површина са $\Delta U = \text{const.}$, величина силе је у приближном посматрању обрнуто пропорционална растојању Δn између две суседне површине. Што су површине ближе једна другој, тиме је сила већа.



Слика 49

Ако израчунамо рад A конзервативне силе дуж путање која спаја тачке, рецимо, M_0 и M (сл. 49), имамо

$$A = \int_{M_0}^{M} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) =$$

$$= \int_{M_0}^{M} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) =$$

$$= \int_{M_0}^{M} dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0).$$

Резултат показује да у пољу конзервативне силе тоталан рад силе не зависи од облика путање, што спаја две тачке простора, већ зависи само од положаја крајњих тачака: рад на путу M_0PM је исти са радом на путу M_0QM. Тај рад се не мења, кад свака од крајњих тачака узима произвољан положај на својој еквипотенцијалној површини: радови на путевима — M_0PM, M_0N, N_0N исти су. Тај је рад једнак нули кад крајње тачке припадају истој еквипотенцијалној површини, на пр., на путу M_0NN_0, или се поклапају и путања је затворена линија, на пр., M_0PMQM_0.

Особина конзервативних сила да њихов рад не зависи од облика пута већ само од положаја крајњих тачака толико је карактеристична за конзервативне силе да се може ставити као дефиниција тих сила, па да се све остале особине могу извести као последице.

Искоришћавање особине конзервативних сила да њихов рад не зависи од облика пута може понекад у знатној мери олакшати израчунавање функције U, као функције координата, ако су дати делимични изводи те функције

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

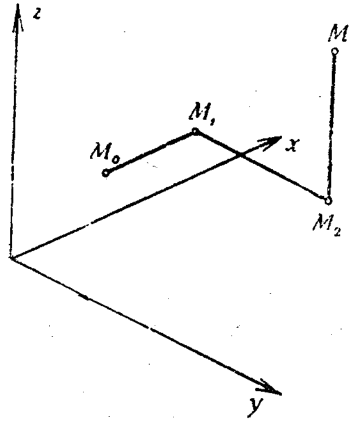
Како је

$$dU = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = (\vec{F}, \vec{ds})$$

и

$$U = \int_{M_0}^{M} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{M_0}^{M} (\vec{F}\,\vec{ds}) = U(a, b, c;\ x, y, z),$$

где су тачке $M_0\,(a, b, c)$ и $M\,(x, y, z)$ почетна и крајња тачка пута интеграције, пут интеграције можемо изабрати тако да интеграција буде што једноставнија. На пр., пут интеграције можемо изабрати тако, како показује слика 50. Како је на путу $M_0\,M_1$



Слика 50

$$(\vec{F}\,\vec{ds}) = X(x, b, c)\;dx,$$

на другом путу $M_1\,M_2$

$$(\vec{F}\,\vec{ds}) = Y(x, y, c)\;dy$$

и најзад на путу $M_2\,M$ имамо

$$(\vec{F}\,\vec{ds}) = Z(x, y, z)\;dz$$

можемо написати

$$U = \int_a^x X(x, b, c)\,dx + \int_b^y Y(x, y, c)\,dy + \int_c^z Z(x, y, z)\,dz.$$

§ 6·4. Циклична координата и њен интеграл

Диференцијалне једначине кретање тачке за генералисане координате изгледају

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

где је T — жива сила и Q_i — генералисана сила.

Ако ма која координата, на пр. q_1, има особине: 1. да жива сила не зависи од те координате, тј.

$$(1) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

и 2. да је генералисана сила, која одговара тој координати, једнака нули

$$(2) \qquad Q_1 = 0,$$

она се зове *циклична координата.*

За сваку цикличну координату важи ова теорема:

Свакој цикличној координати одговара интеграл линеаран у односу на генералисане брзине. Заиста, из једначине

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_1'} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$$

под условима (1) и (2), следује

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_1'} = 0,$$

одакле долазимо до интеграла

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = \text{const.}$$

Пошто је T квадратна функција у односу на генералисане брзине q_1', q_2', q_3', лева страна ове једначине је линеарна у односу на те брзине.

ГЛАВА СЕДМА

Централне силе

§ 7·1. Појам централне силе

Ако сила која дејствује на материјалну тачку ма у ком њеном положају увек пролази кроз одређену тачку простора, она се зове *централна сила*. Ова одређена тачка је *центар силе*. Кад се у том центру налази маса, на коју дејствује супротна сила, центар је *извор силе*. Материјалну тачку масе m, на коју дејствује централна сила са центром у тачки C, означимо са M, вектор положаја $\overrightarrow{CM}$ са $\vec{\rho}$. Ако централна сила има увек исти смер са смером вектора положаја $\vec{\rho}$, она се зове *сила одбијања* или *репулзивна*. У противном случају она је *сила привлачења* или *атрактивна*. Од свих централних сила најважнију улогу играју оне, чији интензитет зависи само од растојања ρ дате тачке M од центра C. За такву силу имамо

$$F = f(\rho)$$

и према томе се њена векторска вредност изражава

$$\vec{F} = \pm f(\rho) \operatorname{ort} \vec{\rho} = \pm f(\rho) \frac{\vec{\rho}}{\rho},$$

при чему знак $+$ одговара сили одбијања, а знак $-$ сили привлачења. Ако са $\psi(\rho)$ означимо алгебарску вредност централне силе у правцу вектора $\vec{\rho}$, тј. ставимо

$$\psi(\rho) = \pm f(\rho)$$

онда сваку централну силу која зависи само од растојања можемо изразити

$$\vec{F} = \psi(\rho) \operatorname{ort} \vec{\rho}.$$

Функција $\psi(\rho)$ изражава *закон дејства централне силе.*

Кад је положај тачака M и C одређен векторима положаја $\vec{r}$ и $\vec{r}_c$ у односу на тачку O, имамо

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_c \quad \text{и} \quad \rho = |\vec{r} - \vec{r}_c|$$

и према томе је вредност силе

$$\vec{F} = \psi(\rho) \operatorname{ort} (\vec{r} - \vec{r}_c) = \frac{\psi(\rho)}{\rho} (\vec{r} - \vec{r}_c).$$

Ако са x, y, z означимо координате тачке M, а са a, b, c — координате тачке C, координата силе, рецимо, у односу на Ox осу, изражава се

$$F_x = X = \frac{\psi(\rho)}{\rho} (x - a),$$

где је

$$\rho = + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Кад на тачку M дејствује више централних сила са центрима у тачкама $C_1, C_2, \ldots, C_n$ по законима $\psi_1(\rho_1), \psi_2(\rho_2), \ldots, \psi_n(\rho_n)$, њихова резултанта је

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\rho_i) \operatorname{ort} \vec{\rho}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_i(\rho_i)}{\rho_i} (\vec{r} - \vec{r}_i), \tag{1}$$

где је $\vec{r}_i$ вектор положаја тачке C_i у односу на тачку O.

Закон Њутнове силе универзалне гравитације, као силе привлачења масе m од друге масе m_i на растојању ρ_i, изражава се

$$\psi_i(\rho_i) = -k^2 \frac{m m_i}{\rho_i^2}, \tag{2}$$

тј. она је пропорционална производу маса тачке и извора и обрнуто пропорционална квадрату растојања између њих. Коефицијент пропорционалности k^2 у CGS систему има бројну вредност

$$k^2 = 6{,}67.10^{-8},$$

а то је бројна вредност силе привлачења између две масе од 1 *gr* на растојању 1 *cm*, изражена у динима.

За Њутнову силу привлачења са више центара имамо

$$\vec{F} = -k^2 m \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\rho_i^2} \operatorname{ort} \vec{\rho}_i = -k^2 m \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\rho_i^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) .$$

Најзад за силу привлачења од маса непрекидно распоређених у запремини V имамо израз

$$\vec{F} = -k^2 m \underset{V}{\iiint} (\vec{r} - \vec{r}_V) \frac{dm}{\rho_V^3} ,$$

где су $\vec{r}_V = \overrightarrow{OC}$, $\vec{\rho}_V = \overrightarrow{CM}$, при чему је C променљива тачка запремине V, на коју је проширен троструки интеграл. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ је исти за све елементе интеграла. Елемент масе dm тела V везан је за тачку C.

Докажимо сад да централне силе које зависе само од растојања спадају у конзервативне силе, другим речима да имају функцију силе U. За израчунавање те функције израчунајмо елементаран рад dA по обрасцу

$$dA = (\vec{F}\ d\vec{s}) .$$

Пошто је због непромењљивости $\vec{r}_i$

$$d\vec{s} = d\vec{r} = d(\vec{r}_i + \vec{\rho}_i) = d\vec{\rho}_i ,$$

за силу (1) имамо

$$dA = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_i(\rho_i)}{\rho_i} (\vec{\rho}_i\, d\vec{\rho}_i)$$

тако, да на основу једначине

$$(\vec{\rho}_i\, d\vec{\rho}_i) = \rho_i\, d\rho_i$$

долазимо до овог израза елементарног рада

$$dA = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\rho_i)\, d\rho_i .$$

То је тотални диференцијал функције

$$U = \sum_{i=1}^{n} \int \psi_i(\rho_i)\, d\rho_i .$$

За Њутнову силу функција силе после интеграције има облик

$$U = -k^2 m \sum_{i=1}^{n} \int \frac{m_i}{\rho_i^2}\, d\rho_i$$

или

$$U = k^2 m \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\rho_i} .$$

Изоставили смо произвољну константу интеграције, јер се функција силе или појављује у интегралу живе силе, где и без тога имамо адитивну произвољну константу, или су потребни само њени делимични изводи.

У случају кад се тачка налази под утицајем само једне Њутнове силе, њена функција силе изгледа

$$U = k^2 \frac{m m_1}{\rho_1} .$$

§ 7·2. Кретање материјалне тачке под утицајем централне силе која зависи само од растојања

Нека на покретну тачку дејствује само једна централна сила

$$\vec{F} = \psi(\rho) \operatorname{ort} \vec{\rho} = \frac{\psi(\rho)}{\rho} \vec{\rho} .$$

Пошто је момент такве силе у односу на непокретну тачку, центар C, нула, јер је

$$\vec{L} = [\vec{\rho}\,\vec{F}] = \frac{\psi(\rho)}{\rho} [\vec{\rho}\,\vec{\rho}] = 0 ,$$

на основу § 6·21 имамо векторски интеграл

$$\vec{I} = \vec{\Gamma} ,$$

који одређује сталну раван путање. Њен положај је одређен почетним кинематичким стањем тачке, јер је

$$\vec{\Gamma} = [\vec{\rho}_0 ,\, m\,\vec{v}_0] .$$

Ако је тај вектор једнак нули, почетна брзина $\vec{v}_0$ има правац вектора $\vec{\rho}_0$ и кретање има праволиниски карактер. Пошто смо праволиниско кретање проучили у петој глави, овај случај можемо изоставити.

За одређивање кретања тачке у равни њене трајекторије уводимо поларне координате ρ и θ са полом у центру C.

Пошто се тачка креће са сталном секторском брзином, а у поларним координатама је секторска брзина (§ 2·6) дата изразом $\frac{1}{2}\rho^2\theta'$, интеграл површине можемо написати

$$\rho^2\theta' = A = \rho_0^2\,\theta_0'. \tag{1}$$

Једначина (1) може се сматрати као прва једначина за одређивање координата ρ и θ у функцији времена.

За другу једначину узмимо интеграл живе силе, који мора постојати јер је централна сила конзервативна.

Пошто је квадрат брзине у поларним координатама

$$v^2 = \rho'^2 + \rho^2\,\theta'^2,$$

интеграл живе силе биће

$$m(\rho'^2 + \rho^2\,\theta'^2) = 2U + 2h, \tag{2}$$

где је

$$U = \int \psi(\rho)\,d\rho = U(\rho)$$

и h је произвољна константа.

За решавање проблема о кретању тачке на основу (1) и (2) елиминишимо из једначине (2) време помоћу једначине (1). Пошто је из (1)

$$\theta' = \frac{A}{\rho^2}$$

и, према томе,

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{A}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta},$$

једначину (2) можемо претставити

$$m\frac{A^2}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + m\rho^2\frac{A^2}{\rho^4} = 2U(\rho) + 2h,$$

одакле је

$$mA^2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = (2U + 2h)\,\rho^4 - mA^2\,\rho^2 = \Phi(\rho).$$

Последња једначина даје квадратуру

$$\frac{1}{A\sqrt{m}}(\theta + \alpha) = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}},$$

где је α произвољна константа. Она одређује угао θ у функцији потега ρ, тј., $\theta = \text{fonct}\,(\rho)$. Инверзија те једначине даје потег у функцији угла

$$\rho = \rho(\theta). \tag{3}$$

И једну и другу везу можемо сматрати као једначину путање тачке.

За увођење времена поново можемо искористити једначину (1)

$$A\,dt = \rho^2\,d\theta.$$

Ако сменимо овде ρ^2 из (3) имамо једначину

$$A\,dt = \rho^2(\theta)\,d\theta,$$

која доводи до квадратуре

$$A(t + \beta) = \int \rho^2(\theta)\,d\theta, \tag{4}$$

где је β нова произвољна константа. Једначине (3) и (4) после одређивања произвољних констаната из почетних услова решавају проблем о кретању тачке.

§ 7·3. Бинеов образац

У теорији кретања тачке под утицајем централне силе важну улогу игра један образац (Binet) који се може сматрати као диференцијална једначина криве линије путање тачке.

За извођење тог обрасца напишимо диференцијалне једначине кретања тачке за координате ρ и θ. Према § 4·32 Лагранжеве једначине друге врсте за тачку, које одговарају нашем циљу дају

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \rho'} - \frac{\partial T}{\partial \rho} = Q_\rho, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\Theta,$$

где је

$$2T = m(\rho'^2 + \rho^2\,\theta'^2),$$

а из израза за рад

$$dA = dU = \psi(\rho)\,d\rho$$

следује да су генералисане силе

$$Q_\rho = \psi(\rho), \qquad Q_\Theta = 0.$$

Пошто је $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ и $Q_\Theta = 0$, координата θ се јавља у проблему као циклична координата (§ 6·4). Тој координати одговара интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = m\rho^2 \theta' = \text{const.}$$

или

$$\rho^2 \theta' = A, \tag{2}$$

који не претставља ништа друго до интеграл површине.

Пошто једначина (1) даје

$$m\rho'' - m\rho\,\theta'^2 = \psi(\rho), \tag{3}$$

а из (2) је

$$\theta' = \frac{A}{\rho^2},$$

и према томе је

$$\rho' = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \cdot \theta' = \frac{A}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta} = -A\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\rho'' = -A\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \theta' = -\frac{A^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

можемо место (3) написати

$$m\left[-\frac{A^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] - m\rho\frac{A^2}{\rho^4} = \psi(\rho).$$

Ова једначина, написана у облику

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{\rho^2\psi(\rho)}{mA^2}, \tag{4}$$

претставља *Бинеов образац.*

Ако је дат закон дејства силе, тј. функција $\psi(\rho)$, једначину (4) можемо сматрати као диференцијалну једначину криве линије путање тачке. Обратно, ако је крива линија путање позната, Бинеов образац пружа могућност да се одреди закон силе, тј. функција $\psi(\rho)$.

§ 7·4. Кретање тачке под утицајем Њутнове силе

Претпоставимо да је сила, која дејствује на тачку, Њутнова сила, тада је према (2) § 7·1

$$\psi(\rho) = -k^2\frac{mm_1}{\rho^2}.$$

За Њутнову силу Бинеов образац даје

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{\rho^2}{mA^2} \cdot -k^2\frac{mm_1}{\rho^2} = \frac{k^2 m_1}{A^2}$$

или

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}, \tag{1}$$

ако ставимо

$$p = \frac{A^2}{k^2 m_1}.$$

Диференцијална једначина (1) је линеарна у односу на променљиву $\frac{1}{\rho}$. Њено решење можемо написати у облику збира партикуларног решења једначине (1) и општег интеграла једначине без десне стране. Пошто је партикуларно решење једначине (1) $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}$, а хомогена једначина

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = 0,$$

према § 5·121 има опште решење

$$\frac{1}{\rho} = n\cos(\theta + \alpha),$$

где су n и α произвољне константе, решење једначине (1) може се написати

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} + n\cos(\theta + \alpha). \tag{2}$$

За одређивање произвољних констаната n и α ставимо у једначину (2) и у резултат диференцирања те једначине по времену

(3) $$-\frac{1}{\rho^2}\,\rho' = -n \sin(\theta + \alpha)\cdot\theta'$$

почетне вредности ρ_0, θ_0, ρ_0', θ_0', које су везане са константама интеграла површине и живе силе једначинама

$$\rho_0^2\,\theta_0' = A = k\sqrt{pm_1}\,,$$

(4) $$m v_0^2 = m(\rho_0'^2 + \rho_0^2\,\theta_0'^2) = \frac{2k^2\,mm_1}{\rho_0} + 2h\,.$$

Тада ћемо имати

$$\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{p} = n\cos(\theta_0 + \alpha)\,,$$

(5)

$$\frac{\rho_0'}{A} = n\sin(\theta_0 + \alpha)\,.$$

Из тих једначина за n^2 имамо

$$n^2 = \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{p}\right)^2 + \frac{\rho_0'^2}{A^2}\,,$$

која после трансформација на основу (4) даје

(6) $$n^2 = \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{2h\,A^2}{k^4\,mm_1^2}\right).$$

Ако ставимо

(7) $$n = \frac{e}{p}$$

и узимамо n увек позитивно, а то је увек могуће, јер је додавањем угла π аргументу α увек могуће променити знак код синуса и косинуса у једначинама (5), из (6) добијамо за e вредност

(8) $$e = \sqrt{1 + \frac{2hA^2}{k^4 mm_1^2}}\,.$$

Константа α се одређује из

$$\operatorname{tg}(\theta_0 + \alpha) = \frac{p\,\rho_0\,\rho_0'}{A\,(p - \rho_0)} = \frac{A\,\rho_0\,\rho_0'}{A^2 - k^2 m_1\,\rho_0}\,.$$

Ако искористимо једначину (7) и уведемо нову променљиву

$$v = \theta + \alpha\,,$$

једначину (2) можемо најзад написати

(9) $$\rho = \frac{p}{1 + e\cos v}\,.$$

Ово је једначина конусног пресека при чему је ρ — фокусни потег, v — угао између фокусне осе симетрије, наперене од фокуса према најближој тачки, и тог потега, p — параметар, тј. дужина потега нормалног на фокусној оси симетрије, e — ексцентрицитет.

Према томе можемо казати:

Под утицајем Њутнове силе тачка описује конусни пресек са жижом у центру привлачења. Из (8) према вредности e можемо закључити, да врста конусног пресека зависи од знака константе

$$2h = m\left(v_0^2 - \frac{2k^2\,m_1}{\rho_0}\right).$$

За $h < 0$ имамо елипсу ($e < 1$) за $h = 0$ — параболу ($e = 1$) и за $h > 0$ хиперболу ($e > 1$). Пошто је константа h једнака сталној тоталној енергији тачке, видимо да облик трајекторије зависи само од те енергије, а не зависи од положаја почетне брзине $\vec{v}_0$ према почетном потегу $\vec{\rho}_0$.

Уочимо специјалан случај кад елиптична путања дегенерише у круг.

Пошто је тада $e = 0$, а значи и $n = 0$, из (5) имамо $\rho_0' = 0$, тј. тачка не сме имати почетну радијалну брзину. Али тај услов није довољан. Пошто и за почетни тренутак центрипетално убрзање са вредношћу $\frac{v_0^2}{\rho_0}$ мора бити једнако убрзању од Њутнове силе $\frac{k^2\,mm_1}{\rho_0^2}$, можемо написати

$$\frac{v_0^2}{\rho_0} = \rho_0\,\theta_0'^2 = \frac{k^2\,m_1}{\rho_0^2}$$

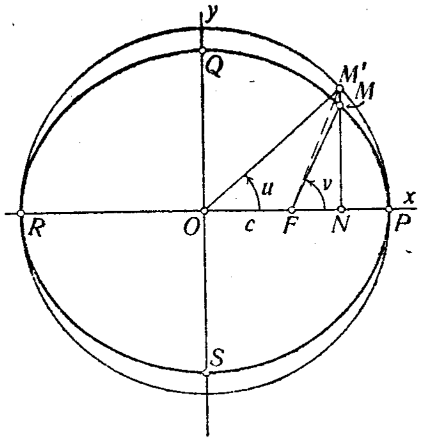
или

$$\theta_0'^2 = \frac{k^2\,m_1}{\rho_0^3}\,.$$

Почетни услови $\rho_0' = 0$, $\theta_0' = \pm\sqrt{\frac{k^2 m_1}{\rho_0^3}}$ потпуно одређују кружно кретање по кругу полупречника ρ_0. Није тешко проверити да је у том случају заиста $e = 0$.

§ 7·41. Одређивање положаја тачке на путањи у току времена. Случај елиптичког кретања. Кеплерова једначина

Зауставимо се прво на случају елиптичког кретања тачке под утицајем Њутнове силе и поставимо везу између времена и положаја тачке. Тај случај има велики практички значај у астрономији, јер стоји у вези са одређивањем положаја планете на њеној елиптичкој путањи.



Слика 51

Уочимо покретну тачку M на елипси $PQRS$ (сл. 51). Угао ν је угао између правца FPx (према *перихелу* P) и потега FM. У астрономији тај угао се зове *права аномалија*.

Место угла ν се уводи други угао u на овај начин. Конструишимо кружну линију полупречника a, где је a велика полуоса елипсе. Нека нормала MN из покретне тачке на велику осу сече ту кружну линију у тачки M'. За угао u узимамо угао $M'OP$ потега OM' помоћне тачке M' са великом осом. Угао u се зове *ексцентрична аномалија*.

Поставимо везу између праве и ексцентричне аномалије. Ако са x означимо апсцису тачака M и M', можемо за фокусни потег $FM = \rho$ тачке M на елипси написати познати образац

$$\rho = a - ex,$$

где је e, као и раније, ексцентрицитет елипсе.

Узимајући у обзир једначине

$$\cos u = \frac{x}{a}, \qquad \cos\nu = \frac{x-c}{\rho},$$

где је $c = OF = ea$, налазимо

$$\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2} = \frac{1-\cos\nu}{1+\cos\nu} = \frac{\rho - x + c}{\rho + x - c} = \frac{a - ex - x + c}{a - ex + x - c} =$$

$$= \frac{1 + e - (1+e)\cos u}{1 - e + (1-e)\cos u} = \frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-\cos u}{1+\cos u} = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}$$

или дефинитивно

$$\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \gamma \operatorname{tg}\frac{u}{2}, \tag{1}$$

где је

$$\gamma = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

Једначина (1) омогућава да се логаритмовањем одреди вредност угла u за сваку вредност угла ν и обрнуто.

Сад пређимо на одређивање везе између ексцентричне аномалије u и времена t. Претпоставимо да је наша тачка прошла кроз перихел у тренутку τ и према томе је дошла из положаја P у положај M за време $t - \tau$. Због константности секторске брзине, која износи $\frac{1}{2}A$, површина елиптичког сектора пропорционална је времену и према томе је

$$\text{површ. } FPM = \frac{1}{2}A\,(t - \tau). \tag{2}$$

Наша елипса може се сматрати као пројекција кружне линије полупречника a на раван елипсе, при чему косинус угла δ између равни круга и елипсе износи $\frac{b}{a}$, где је b мала полуоса елипсе. Тада је површина елиптичког сектора FPM једнака пројекцији површине дела FPM' круга на раван елипсе. На тај начин можемо написати

$$\text{површ. } FPM = \text{површ. } FPM'.\cos\delta = \frac{b}{a}\cdot\text{површ. } FPM'. \tag{3}$$

Површина FPM', као разлика између површине кружног сектора $OPM' = \frac{1}{2}a^2 u$ и површине троугла $OFM' = \frac{1}{2}ac\sin u$, једнака је

(4) $\qquad$ површ. $FPM' = \frac{1}{2} a^2 (u - e \sin u)$.

Упоређивањем (2), (3) и (4) добијамо једначину

(5) $\qquad u - e \sin u = n(t - \tau)$,

где је
$$n = \frac{A}{ab} \cdot$$

Ако уведемо време T потпуног обиласка тачке по елипси, можемо за секторску брзину написати израз
$$\frac{1}{2} A = \frac{\pi ab}{T},$$
где је πab површина елипсе. Тада за n имамо
$$n = \frac{2\pi}{T} \cdot$$

Пошто је 2π мера пуног угла, количник n једнак је *средњој угаоној* брзини покретне тачке за време целог обртања. Производ

(6) $\qquad n(t - \tau) = w$

зове се *средња аномалија* тачке. Помоћу те аномалије једначина (5) постаје

(7) $\qquad \boxed{u - e \sin u = w.}$

Ова једначина зове се *Кеплерова једначина.*

На тај начин за одређивање положаја покретне тачке у датом тренутку t треба:

1. Одредити средњу аномалију w из (6); $n(t-\tau)=w$
2. Одредити ексцентричну аномалију решавањем Кеплерове једначине (7);
3. Одредити праву аномалију из (1).

Прва и трећа радња не чине тешкоће. Што се тиче решавања трансцендентне Кеплерове једначине, за њено приближно решавање има више начина. Навешћемо један од њих — Пикаров метод узастопних апроксимација.

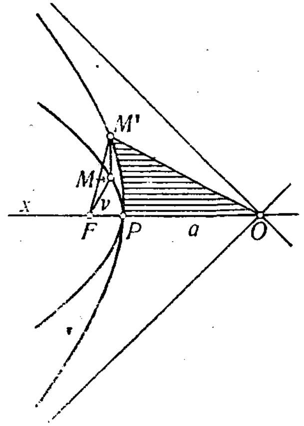
За прву приближну вредност u узмимо w, тј. стављамо
$$u_1 = w,$$
па затим имамо
$$u_2 = w + e \sin u_1, \qquad u_3 = w + e \sin u_2, \ldots, \qquad u_n = w + e \sin u_{n-1}.$$

Тај процес ($e < 1$) је конвергентан. У доказ конвергенције нећемо улазити.

§ 7·42. Случај хиперболичног кретања

Претпоставимо сад да се тачка креће по хиперболи ($e > 1$) чија је једначина
$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos v} \cdot$$

Помоћу Декартових координата можемо једначину хиперболе написати у параметарском облику
$$x = a \cosh u,$$
$$y = b \sinh u,$$
где су a и b полуосе хиперболе, везане са p и e једначинама
$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}},$$
а u променљив параметар, који има познато геометриско тумачење — он претставља двоструку површину омеђену равностраном хиперболом ($a = 1$), централним потегом и стварном осом. Са $\sinh u$ и $\cosh u$ смо означили, као и раније (§ 5·1211), хиперболичке функције
$$\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}),$$
$$\cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}).$$



Слика 52

Између угла v — праве аномалије тачке M (сл. 52) на хиперболи и параметра u можемо поставити везу која одговара вези (1) § 7·41.

Пошто за хиперболу имамо
$$\rho = ex - a, \quad \cos v = \frac{c - x}{\rho}, \quad c = ea,$$
биће

$$\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}=\frac{1-\cos\nu}{1+\cos\nu}=\frac{\rho-c+x}{\rho+c-x}=\frac{ex-a-ea+x}{ex-a+ea-x}=$$

$$=\frac{e+1}{e-1}\cdot\frac{x-a}{x+a}=\frac{e+1}{e-1}\cdot\frac{\cosh u-1}{\cosh u+1}=\frac{e+1}{e-1}\operatorname{tgh}^2\frac{u}{2},$$

одакле дефинитивно добијамо

(1) $$\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}=\gamma_1\operatorname{tgh}\frac{u}{2},$$

где је

$$\gamma_1=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}.$$

За постављање везе између величине u и времена t вратимо се поново површини сектора FPM, која је пропорционална времену

(2) $$\text{површ. } FPM=\frac{1}{2}A(t-\tau).$$

Слично као код елипсе, можемо хиперболу сматрати као пројекцију равностране хиперболе, према томе је

(3) $$\text{површ. } FPM=\frac{b}{a}\text{ површ. } FPM'.$$

Последња површина једнака је разлици површине троугла FOM' и површине POM', која се мери величином $\frac{1}{2}a^2u$ према тумачењу параметра u. На тај начин имамо

(4) $$\text{површ. } FPM'=\frac{1}{2}ca\sinh u-\frac{1}{2}a^2u.$$

Узимајући у обзир једначине (2), (3), (4), добијамо

$$e\sinh u-u=\frac{A}{ab}(t-\tau)=\mu(t-\tau),$$

која после увођења променљиве

(5) $$w=\mu(t-\tau)$$

добија облик

(6) $$e\sinh u-u=w$$

и одговара Кеплеровој једначини.

Узастопном употребом једначина (5), (6), (1) можемо за свако t одредити положај покретне тачке израчунавањем праве аномалије ν.

§ 7·43. Случај параболичног кретања

У случају параболичне путање, за коју је $e=1$, и

$$\rho=\frac{p}{1+\cos\nu}=\frac{p}{2\cos^2\frac{\nu}{2}},$$

време можемо увести непосредно помоћу интеграла површине

$$\rho^2\theta'=\rho^2\nu'=A.$$

Одатле имамо квадратуру

$$\int\frac{d\,\frac{\nu}{2}}{\cos^4\frac{\nu}{2}}=\frac{2A}{p^2}(t-\tau)$$

или

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\nu}{2}+\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}=\frac{2A}{p^2}(t-\tau),$$

где смо са τ поново означили време пролаза тачке кроз перихел. Претходна једначина поставља везу између праве аномалије и времена у случају параболичног кретања.

§ 7·5. Одређивање централне силе у случају кретања тачке по конусном пресеку

Покажимо сад да у случају кретања тачке по конусном пресеку под утицајем централне силе, која зависи само од растојања, а њен се центар налази у жижи, та сила може бити само Њутнова сила.

Заиста, ако једначину конусног пресека напишемо у облику

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{p}(1+e\cos\nu),$$

имамо

$$\frac{d^2}{d\nu^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{e}{p}\cos\nu = \frac{1}{p} - \frac{1}{\rho}.$$

Према томе из Бинеова обрасца (§ 7·3), који за наш случај изгледа

$$\frac{d^2}{d\nu^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{\rho^2\psi(\rho)}{mA^2},$$

имамо

$$\frac{1}{p} = -\frac{\rho^2\psi(\rho)}{mA^2}.$$

Из овог услова одређујемо функцију $\psi(\rho)$

$$\psi(\rho) = -\frac{mA^2}{p}\cdot\frac{1}{\rho^2},$$

а затим према § 7·2 и силу

$$\vec{F} = \psi(\rho)\,\mathrm{ort}\,\vec{\rho} = -\frac{mA^2}{p}\cdot\frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{ort}\,\vec{\rho}.$$

Тај израз показује да је сила $\vec{F}$ Њутиова сила.

J. Bertrand је поставио проблем о одређивању централне силе, која даје кретање за све почетне услове по конусном пресеку, претпостављајући у општем случају, 1. да центар силе може да се налази у произвољној тачки равни путање и 2. да интензитет силе може да зависи не само од растојања ϱ тачке од центра, већ и од оријентације правца силе, тј. од поларног угла Θ. G. Darboux и G. Halphen решили су проблем независно један од другог и дошли до резултата да постоје две врсте сила које задовољавају постављене услове. Ако силу ограничимо условом да може зависити само од растојања, добићемо такође две силе: једну пропорционалну првом степену растојања и другу обрнуто пропорционалну квадрату растојања. За прву центар се налази у центру конусног пресека (§ 5·22), за другу, Њутнову, у жижи.

ГЛАВА ОСМА

Општа теорија кретање неслободне тачке

§ 8·1. Појам неслободне материјалне тачке

Ако материјална тачка M може имати произвољан положај и произвољну брзину у одређеној области V простора, за њу се каже да је *слободна* у тој области. У противном случају она је *неслободна*.

Тако је, на пр., тачка M, која је приморана да се налази на једној сферној површини, рецимо, везана са сталиом тачком O простора штапом сталне дужине OM, неслободна, јер не може да има положаје ван те површине.

Различита ограничења у кретању тачке могу бити подељена у две категорије: 1. Тачка не може имати произвољан положај у области V, те према томе не може да има у сваком положају ни произвољну брзину. 2. Тачка може имати произвољан положај, али у тим положајима не може да има произвољну брзину. У динамици тачке зауставићемо се само на проучавању ограничења прве природе. Проучавање ограничења друге, такозване, *нехолономне* природе остављамо за динамику система материјалних тачака.

§ 8·2. Појам везе

Претпоставимо да је тачка M неслободна у области V; тада, према услову, она не може имати све могуће положаје у тој области. У овом случају V можемо поделити на два дела; на област V_1, чије су тачке приступачне за тачку M и област V_2

састављену од неприступачних тачака. Између те две области мора да постоји граница у облику површине, рецимо S, која може да се састоји и из више посебних делова.

Једначина површине S, која може да мења свој облик и положај у току времена, може се написати

$$(1) \qquad f(x, y, z;\ t) = 0,$$

где су x, y, z Декартове координате тачке, а t — време.

Знак функције f те једначине увек можемо изабрати тако да за област V_1 приступачних тачака имамо

$$(2) \qquad f(x, y, z;\ t) \geqslant 0.$$

На пр., ако је област V_2 простор ван сфере полупречника R са центром у почетку координата, координате приступачних тачака задовољавају услов

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geqslant 0.$$

Обрнуто, ако приступачне тачке сачињавају унутрашњост наведене сфере, треба услов за њихове координате написати

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0.$$

Једначина (1) или неједнакост (2) везују координате тачке и према томе ограничавају њено кретање. Зато се оне зову *везе*. Ако имамо само знак једнакости, веза одговара случају кад се тачка задржава на површини и зове се *задржавајућа веза*. У другом случају она је *незадржавајућа*.

Ако имамо незадржавајућу везу (2), а координате тачке у одређеном положају задовољавају неједнакост

$$f(x, y, z;\ t) > 0,$$

онда је тачка у том положају слободна, а за везу се каже да *не дејствује*. Она почиње да дејствује тек кад тачка доспе на површину S, и њене координате задовољавају једначину (1).

Претпоставимо сад да имамо задржавајућу везу

$$(3) \qquad f_1(x, y, z;\ t) = 0.$$

То значи да је тачка приморана да се налази на површини, рецимо S_1. Али има случајева кад она не може имати произвољан положај ни на тој површини, пошто је на тој површини ограничена област приступачних положаја. Она је ограничена линијом на тој површини, која је пресек површине (3) са новом површином S_2

$$(4) \qquad f_2(x, y, z;\ t) = 0.$$

И овде треба да разликујемо два случаја — случај задржавајуће везе у облику (4) и случај незадржавајуће везе

$$f_2(x, y, z;\ t) \geqslant 0.$$

Јасно је, да је у случају две задржавајуће везе (3) и (4) тачка приморана да се увек налази на једној линији — пресеку тих површина.

У случају три задржавајуће везе

$$f_1(x, y, z;\ t) = 0, \qquad f_2(x, y, z;\ t) = 0, \qquad f_3(x, y, z;\ t) = 0,$$

од којих ниједна није закључак из осталих, могу се одредити координате x, y, z тачке као функције времена

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t),$$

другим речима написати коначне једначине кретања, које потпуно одређују то кретање.

Свака веза, која поставља ма какво ограничење у кретању тачке, може бити стварно изведена само помоћу материјалних тела. За кретање тачке, рецимо по сферној површини, то може да буде или тело са сферном површином, или штап сталне дужине који везује покретну тачку са сталном тачком, или какав други склоп материјалних тела, који врши исти задатак. Материјална тела, која остварују везе, зову се *механизам везе*.

Ако положај материјалне тачке задовољава услове које поставља тај механизам, он се зове *могући положај*. У противном случају, он је немогућ за дати механизам.

§ 8·3. Услов за брзину неслободне тачке

Претпоставимо да је за време кретања тачка приморана да се налази на површини једначине

$$(1) \qquad f(x, y, z;\ t) = 0.$$

Ако коначне једначине кретања напишемо у облику

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

и уврстимо ове функције у (1), једначина (1) треба да се претвори у идентичност, јер треба да важи не само за поједине вредности t, већ за све вредности у току кретања. Напишимо ту идентичност овако

(2) $$f(x(t),\ y(t),\ z(t),\ t) \equiv F(t) \equiv 0.$$

Пошто она важи и за $t+\Delta t$, тј.

$$F(t+\Delta t) \equiv 0,$$

имамо такође идентичност

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} \equiv 0,$$

која после прелаза на граничну вредност, кад $\Delta t \to 0$, даје

(3) $$\frac{dF}{dt} \equiv 0.$$

После сличних расуђивања можемо добити низ наредних идентичности

$$\frac{d^2F}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^3F}{dt^3}=0, \ldots$$

Ако се од идентичности (2) поново вратимо на једначину (1), идентичност (3) треба да сменимо једначином

(4) $$\frac{df}{dt}=0,$$

при чему x, y, z треба сматрати као функције времена.

У развијеном облику једначину (4) можемо написати

(5) $$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'+\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Узимајући у обзир да су прва три члана претходне једначине једнака скаларном производу вектора

$$\operatorname{grad} f\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\vec{v}\,(x',\ y',\ z'),$$

услов (5) за брзину кратко можемо изразити

(6) $$(\vec{v}\operatorname{grad} f)+\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Тај услов показује да ограничењу подлежи само пројекција брзине на правац градијента везе или нормале $\vec{n}$ на површину:

(7) $$v\cos(\vec{v}\operatorname{grad} f)=-\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

У случају непроменљиве везе

$$f(x,y,z)=0$$

услов (6) добија облик

$$(\vec{v}\operatorname{grad} f)=0,$$

одакле имамо

$$v\cos(\vec{v}\,\vec{n})=0,$$

другим речима, брзина тачке која се креће по непокретној површини мора се увек налазити у додирној равни.

За случај незадржавајуће везе

$$f(x,y,z;t)\geqslant 0,$$

док веза не дејствује, тачка се креће као слободна и њена брзина не подлежи никаквом ограничењу. Ограничење се појављује само тада кад веза почне да дејствује, тј. кад је

$$f(t)=0.$$

Пошто за наредни тренутак $t+\Delta t$ у општем случају може бити

$$f(t+\Delta t)\geqslant 0,$$

добијамо

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\geqslant 0$$

или, после прелаза на граничну вредност,

$$\frac{df}{dt}\geqslant 0.$$

Тај услов у развијеном облику даје

$$(\vec{v}\operatorname{grad} f)+\frac{\partial f}{\partial t}\geqslant 0$$

или

$$v\cos(\vec{v}\operatorname{grad} f)\geqslant-\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

За непромењиву незадржавајућу везу

$$f(x, y, z) \geqslant 0$$

за тачку на површини ($f=0$) имамо

$$v \cos(\vec{v}\,\vec{n}) \geqslant 0 .$$

Овај услов показује да брзина може или да лежи у тангентној равни или да буде наперена у ону област простора V_1, којој припадају приступачне тачке и за које функција f расте од површине $f=0$.

Ако координате материјалне тачке морају да задовољавају две задржавајуће везе

$$f_1(x, y, z;\ t) = 0,$$
$$f_2(x, y, z;\ t) = 0,$$

свака од њих доводи до услова за брзину

$$(\vec{v} \operatorname{grad} f_1) + \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0,$$

$$(\vec{v} \operatorname{grad} f_2) + \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0,$$

које можемо написати и

$$v \cos(\vec{v}\,\vec{n}_1) = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f_1|}\frac{\partial f_1}{\partial t},$$

$$v \cos(\vec{v}\,\vec{n}_2) = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f_2|}\frac{\partial f_2}{\partial t},$$

где су $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ ортови нормала на површине.

Ако се тачка креће по непромењивој кривој линији, која је пресек површина

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0,$$

услови за брзину дају

$$v \cos(\vec{v}\,\vec{n}_1) = v \cos(\vec{v}\,\vec{n}_2) = 0 .$$

Из ових једначина закључујемо да брзина мора имати правац тангенте на нашу линију, јер је то једини правац који стоји управо на $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$.

Забележимо да се брзина која задовољава услове за брзину — било један, било два — зове *могућа брзина* материјалне тачке за дате везе.

§ 8·4. Услов за убрзање неслободне тачке

У претходном параграфу видели смо да за задржавајућу везу

$$f(x, y, z;\ t) = 0$$

можемо, сем услова $\dfrac{df}{dt} = 0$, написати и услов

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0 .$$

У развијеном облику тај услов из (5) § 8·3 можемо написати

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + D_2 f = 0, \tag{1}$$

где смо са $D_2 f$ означили збир

$$\begin{aligned} D_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x'^2 &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} x' y' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} x' z' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t} x' + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} y' z' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial t} y' + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} z'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial t} z' + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} . \end{aligned}$$

Једначину (1) скраћено овако пишемо

$$(\vec{w} \operatorname{grad} f) + D_2 f = 0, \tag{2}$$

где је $\vec{w}$ убрзање тачке са координатама: x'', y'', z''.

Из једначине (2) следује

$$w \cos(\vec{w} \operatorname{grad} f) = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f|} D_2 f ,$$

која показује да у случају кретања тачке по површини ограничењу подлежи само пројекција убрзања на правац градијента, тј. на правац нормале на дату површину.

Забележимо да у случају непромењиве везе кад је $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$, израз $D_2 f$ није једнак нули већ има вредност

$$D_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} z'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} y' z' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} z' x' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} x' y' ,$$

тј. претставља квадратну форму у односу на x', y', z'.

У случају незадржавајуће везе

$$f(x, y, z; t) \geqslant 0,$$

ако она не дејствује ($f > 0$), не подлежи ограничењу ни брзина, ни убрзање. Кад дејствује ($f = 0$), а $\dfrac{df}{dt} > 0$, брзина $\vec{v}$ је наперена у област V_1, тачка напушта површину и креће се као слободна, па према томе убрзање не подлежи ограничењу. Ако је у исто време $f = 0$ и $\dfrac{df}{dt} = 0$, имамо услов $\dfrac{d^2f}{dt^2} \geqslant 0$ и према томе се добија за убрзање ограничење

$$w \cos(\vec{w}, \operatorname{grad} f) \geqslant -\frac{1}{|\operatorname{grad} f|} D_2 f.$$

Ако имамо две задржавајуће везе, услови за убрзање су

$$w \cos(\vec{w}, \operatorname{grad} f_1) = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f_1|} D_2 f_1,$$

$$w \cos(\vec{w}, \operatorname{grad} f_2) = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f_2|} D_2 f_2.$$

И овде је потребно навести да се убрзање, које задовољава услове за убрзање, зове *могуће убрзање* материјалне тачке.

§ 8·5. Кретање неслободне материјалне тачке са једном задржавајућом везом

Нека је материјална тачка са масом m приморана да се налази на површини

$$(1) \qquad f(x, y, z; t) = 0.$$

Јасно је да координате полазног положаја $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за t_0 морају задовољавати претходну једначину, тј.

$$f(x_0, y_0, z_0; t_0) = 0.$$

Исто тако почетна брзина $\vec{v}_0$ мора задовољавати услов за брзину

$$v_0 \cos(v_0 \{\operatorname{grad} f\}_0) = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f|_0}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0,$$

где смо са нулом означили вредност за почетни тренутак.

Нека на тачку дејствује сила $\vec{F}(X, Y, Z)$.

Ако напишемо диференцијалну једначину кретања тачке као слободне према § 4·3 у облику

$$(2) \qquad m\vec{w} = \vec{F},$$

тада може да се деси да убрзање одређено из те једначине идентично задовољава услов за убрзање

$$(3) \qquad (\vec{w} \operatorname{grad} f) + D_2 f = 0.$$

Зато је потребно да сила $\vec{F}$ задовољава услов

$$(4) \qquad (\vec{F} \operatorname{grad} f) + mD_2 f \equiv 0.$$

Ако сад претпоставимо да сила задовољава тај услов, онда према једначинама (2) можемо тврдити да убрзање $\vec{w}$ задовољава услов (3), који можемо написати и

$$(5) \qquad \frac{d^2f}{dt^2} = 0.$$

Према томе за такву силу из једначине (2) следује једначина (5), која доводи до интеграла

$$f = \alpha t + \beta,$$

где су α и β интеграционе константе. Видимо да у том случају једначина (1) не претставља ништа друго до партикуларни интеграл једначине (2), наиме, са вредностима констаната

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.$$

Нашу тачку треба да сматрамо као слободну. Њено кретање одређује се интеграцијом једначине (2) за коју је унапред дато једно партикуларно решење.

Остављајући тај случај на страну, претпоставимо да сила из једначине (2) не задовољава услов (4) и према томе убрзање $\vec{w}$ из исте једначине (2) не спада у низ могућих убрзање за везу (1).

Како можемо написати диференцијалну једначину кретања за овај случај?

Навели смо раније (§ 8·2) да свако ограничење у кретању тачке може бити остварено само помоћу механизма који је састављен од маса. Те масе спречавају слободно кретање тачке; оне постају извори нових сила, које дејствују на тачку, и њена убрзања немогућа за дате везе претварају у убрзања могућа за исте везе.

Према томе за принудно кретање тачке у сагласности са везом (1) треба да уведемо нову силу, која дејствује на нашу тачку. Означимо ту силу са $\vec R$ и назовимо је *сила реакције* (1). Сила реакције дејствује на покретну тачку, а има извор у масама механизма везе. Њој супротна сила — акција — има извор у покретној тачки, а дејствује на масе механизма везе.

У поређењу са силом реакције $\vec R$ силу $\vec F$, што дејствује на тачку, зовемо *активна сила*. Ако се, на пр., тешка тачка креће по сферној површини, онда је сила којом та површина дејствује на тачку сила реакције, и сила теже је активна сила.

Диференцијалну једначину кретања тачке на коју дејствује активна сила $\vec F$ и сила реакције $\vec R$ треба написати у векторском облику

$$m\vec w = \vec F + \vec R. \tag{6}$$

Тој једначини одговарају скаларне једначине

$$\begin{aligned} mx'' &= X + R_x, \\ my'' &= Y + R_y, \\ mz'' &= Z + R_z, \end{aligned} \tag{7}$$

где су ознаке очигледне.

За одређивање вектора $\vec R$ имамо само један скаларни услов, који се добија кад у услов за убрзање

$$(\vec w \operatorname{grad} f) + D_2 f = 0$$

ставимо вредност убрзања из (6); тада имамо

$$(\vec R \operatorname{grad} f) = -\{(\vec F \operatorname{grad} f) + mD_2 f\}$$

или

$$R \cos (\vec R \operatorname{grad} f) = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\{(\vec F \operatorname{grad} f) + mD_2 f\}.$$

Из претходног закључујемо да веза (1) омогућује да се одреди само једна компонента реакције — компонента у правцу

градијента везе. Што се тиче друге компоненте — у равни управној на градијенту — она се може узети потпуно произвољно. За одређивање те компоненте треба увести нарочити услов, тј. навести правило по коме треба да конструишемо њену вредност у равни управној на градијенту.

Све везе према вредности компоненте реакције у равни управној на градијенту можемо поделити у две категорије.

У прву категорију спадају везе за које се целокупна реакција своди само на компоненту у правцу градијента. Везе такве природе зову се *идеалне везе*.

Другој категорији припадају везе, које имају и компоненту реакције, управну на градијенту. Такве су везе *неидеалне*.

Зауставимо се прво на идеалним везама.

§ 8·6. Диференцијалне једначине кретања неслободне материјалне тачке у случају идеалне везе

За идеалну везу реакција је наперена само у правцу градијента везе и зато можемо ставити

$$\vec R = \lambda \operatorname{grad} f.$$

Скаларни множитељ λ зове се *множитељ везе*.

Према томе диференцијалну једначину кретања тачке у случају идеалне везе пишемо

$$m\vec w = \vec F + \lambda \operatorname{grad} f. \tag{1}$$

Њој одговарају три скаларне једначине

$$\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ my'' &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ mz'' &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Векторска једначина или систем скаларних једначина (2) садржи четири непознате величине: три координате тачке, рецимо, x, y, z и множитељ везе λ. За њихово одређивање служе, рецимо, три скаларне једначине (2) и једначина везе

$$f(x, y, z; t) = 0. \tag{3}$$

До решења питања о кретању такве неслободне тачке помоћу једначина (2) и (3) можемо овако доћи. Написаћемо из (3) услов за убрзање

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \vec{w}\,(\operatorname{grad} f) + D_2 f = 0\,. \tag{4}$$

Ако ставимо вредност убрзања из (1), добићемо

$$(\vec{F}\operatorname{grad} f) + \lambda\,(\operatorname{grad} f)^2 + m\,D_2 f = 0,$$

одакле долазимо до вредности множитеља λ

$$\lambda = -\frac{1}{(\operatorname{grad} f)^2}\left\{(\vec{F}\operatorname{grad} f) + m D_2 f\right\}. \tag{5}$$

Кад ставимо ту вредност у једначину (2), добићемо систем од три једначине са три непознате x, y, z. Интеграција тог система доводи до интеграла

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, C_1, C_2, \cdots, C_6),\\ y &= \varphi_2(t, C_1, C_2, \cdots, C_6),\\ z &= \varphi_3(t, C_1, C_2, \cdots, C_6), \end{aligned} \tag{6}$$

где су $C_1, C_2, \cdots, C_6$ шест интеграционих констаната.

Пошто смо за одређивање множитеља λ искористили не саму једначину (3) већ и једначину (4), која садржи само други извод по времену функције f, интеграли (6) дају решење не само проблема са везом $f = 0$, већ и проблема са везом

$$f(x, y, z; t) = \alpha t + \beta\,, \tag{7}$$

где су α и β произвољне унапред дате константе.

Пошто функције (6) треба да задовољавају идентично једначину (7), лева страна ове мора да се сведе на линеарну функцију времена са коефицијентима који су само функције констаната $C_1, C_2, \ldots, C_6$. На тај начин долазимо до једначина

$$\alpha = \psi_1(C_1, C_2, \ldots, C_6)\,,$$
$$\beta = \psi_2(C_1, C_2, \ldots, C_6)\,,$$

које треба да задовољавају интеграционе константе $C_1, C_2, \ldots, C_6$ за сваки пар датих вредности α и β. У случају везе (3), кад је $\alpha = \beta = 0$, интеграционе константе треба да задовољавају услове

$$\psi_1(C_1, C_2, \ldots, C_6) = 0, \qquad \psi_2(C_1, C_2, \ldots, C_6) = 0.$$

Према томе остају само четири независне интеграционе константе. Тај закључак је потпуно природан, јер у случају кретања тачке по површини имамо само четири независна почетна податка и то: две координате тачке на површини (трећа је одређена једначином површине за $t = t_0$) и две компоненте почетне брзине (трећа се одређује из услова за брзину који даје дата веза).

Досад смо имали случај задржавајуће везе. Ако је веза незадржавајућа

$$f(x, y, z; t) \geqslant 0\,,$$

само под условима

$$f = 0\,, \qquad \frac{df}{dt} = 0$$

могуће је говорити о ограничењу кретања тачке, при чему тада убрзање треба да задовољава услов

$$\frac{d^2f}{dt^2} \geqslant 0\,.$$

Кад убрзање $\vec{w}$, одређено једначином

$$m\vec{w} = \vec{F},$$

задовољава горњи услов, тј.

$$(\vec{F}\operatorname{grad} f) + m D_2 f \geqslant 0\,,$$

тачка се креће као слободна. Ако тај услов није задовољен, тј.

$$(F\operatorname{grad} f) + m D_2 f < 0\,, \tag{8}$$

веза дејствује на покретну тачку и њене масе се јављају као извор једне силе, реакције незадржавајуће везе. За потпуно одређивање те реакције треба учинити две претпоставке: прву о идеалности везе или о правилу по коме се конструише компонента реакције управна на градијенту и другу о карактеру промене неједнакости (8). Претпоставићемо да је веза идеална и да се неједнакост (8) претвара у једнакост. У том случају се диференцијална једначина кретања може овако написати

$$m\vec{w} = \vec{F} + \lambda\operatorname{grad} f\,. \tag{9}$$

За множитељ λ из услова $\dfrac{d^2f}{dt^2} = 0$ имамо једначину

$$(\vec{F} \operatorname{grad} f) + \lambda (\operatorname{grad} f)^2 + mD_2 f = 0,$$

одакле поново као и код задржавајуће везе имамо (5)

$$\lambda = -\frac{1}{(\operatorname{grad} f)^2}\{(\vec{F} \operatorname{grad} f) + mD_2 f\}.$$

Члан са λ у једначини (9) треба да се задржи само онда, кад важи услов (8), а то значи само за позитивне вредности множитеља λ.

§ 8·7. Диференцијалне једначине кретања неслободне материјалне тачке у случају две идеалне везе

У случају две идеалне задржавајуће везе са једначинама

(1) $$f_1(x, y, z; t) = 0, \qquad f_2(x, y, z; t) = 0$$

на основу расуђивања сличних претходнима, за случај једне везе, имаћемо диференцијалну векторску једначину кретања са множитељима веза

(2) $$m\vec{w} = \vec{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2.$$

Њој одговарају три скаларне једначине

$$\left\{\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ my'' &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ mz'' &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

За интеграцију тог система диференцијалних једначина са непознатим величинама: x, y, z; λ_1, λ_2 потребно је написати још једначине за одређивање множитеља λ_1 и λ_2. Из услова

(3) $$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 f_2}{dt^2} = 0,$$

који се могу написати

$$(w \operatorname{grad} f_1) + D_2 f_1 = 0, \qquad (\vec{w} \operatorname{grad} f_2) + D_2 f_2 = 0,$$

после смене $\vec{w}$ из (2), добијамо две једначине за λ_1 и λ_2

(4) $$\begin{aligned} f_{11}\lambda_1 + f_{12}\lambda_2 + \varphi_1 &= 0, \\ f_{21}\lambda_1 + f_{22}\lambda_2 + \varphi_2 &= 0, \end{aligned}$$

где су

$$f_{ij} = (\operatorname{grad} f_i, \operatorname{grad} f_j), \qquad \varphi_i = (\vec{F} \operatorname{grad} f_i) + mD_2 f_i, \qquad i, j = 1, 2.$$

Извршимо пре свега анализу главне детерминанте

$$\Delta = f_{11} f_{22} - f_{12}^2$$

линеарних једначина (4). Пошто ова детерминанта има вредност

$$\begin{aligned} \Delta &= (\operatorname{grad} f_1)^2 (\operatorname{grad} f_2)^2 - (\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2)^2 = \\ &= [\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2]^2, \end{aligned}$$

она може бити једнака нули само у случају кад су све координате означеног векторског производа једнаке нули, тј. под условима:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Из теорије функционалних детерминаната следује да у том случају између функција f_1, f_2 и времена t, које тада игра улогу параметра, постоји веза

$$F(f_1, f_2, t) = 0.$$

Из ове једначине следује или да је за $f_2 = 0$ и $f_1 = 0$, и тада су везе зависне једна од друге, или за $f_1 = 0$, $f_2 = f_2(t)$, и тада су везе $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ неостварљиве у исто време.

Остављајући те изузетне случајеве на страну, узимамо да је $\Delta \neq 0$ и тада једначине (4) дају увек потпуно одређена решења за λ_1 и λ_2.

После интеграције једначине (2) или одговарајућег система скаларних једначина имамо решење у облику

(5) $$\vec{r} = \vec{r}(t, C_1, C_2, \ldots, C_6),$$

где су $C_1, C_2, \ldots, C_6$ интеграционе константе. Од тих констаната само су две независне. Заиста, пошто смо за време расуђивања искористили само једначине (3), добијено решење треба да задовољава једначине

$$(6) \quad f_1(x, y, z;\, t) = \alpha_1 t + \beta_1, \quad f_2(x, y, z;\, t) = \alpha_2 t + \beta_2,$$

где величине α_1, β_1, α_2, β_2 могу бити изабране потпуно произвољно. На основу (5) једначине (6) треба да се претварају у идентичности и према томе имамо четири услова

$$\alpha_1(C_1, C_2, \ldots, C_6) = \alpha_1, \quad \beta_1(C_1, C_2, \ldots, C_6) = \beta_1,$$

$$\alpha_2(C_1, C_2, \ldots, C_6) = \alpha_2, \quad \beta_2(C_1, C_2, \ldots, C_6) = \beta_2,$$

које треба интеграционе константе да задовољавају. Кад ставимо $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$, ови услови ће одговарати једначинама (1).

Што у датом проблему остају само две независне интеграционе константе, то стоји у природној вези с тим што за одређивање положаја тачке на кривој треба да знамо једну величину и за одређивање брзине тачке на тој кривој још једну.

Анализа случајева кад се од две везе једна или обе јављају као незадржавајуће везе слична је анализи само једне незадржавајуће везе. У детаље те анализе нећемо да улазимо.

ГЛАВА ДЕВЕТА

Кретање тачке по површини

§ 9·1. Диференцијалне једначине са множитељем везе

У општој теорији неслободног кретања тачке, која се креће по површини чија је једначина

$$(1) \qquad f(x, y, z;\, t) = 0,$$

имали смо векторску једначину кретања

$$(2) \qquad m\vec{w} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f$$

и три одговарајуће скаларне једначине за Декартове осе

$$(3) \qquad mx'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad my'' = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$mz'' = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Множитељ везе λ одређује се на основу услова $\dfrac{d^2 f}{dt^2} = 0$ помоћу обрасца

$$(4) \qquad \lambda = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f|^2}\left\{(F \operatorname{grad} f) + m D_2 f\right\}.$$

Ако уврстимо ову вредност множитеља λ у једначине (3), добијамо систем од три једначине другог реда у односу на променљиве x, y, z. Интеграција тог система шестог реда уводи шест произвољних константната, али, како смо видели, од тих константната само четири су независне. Повећање броја константната дошло је услед тога што, место решавања нашег проблема са везом (1) $f=0$, решавамо задатак са везом $f=\alpha t+\beta$ општијег карактера, пошто су α и β произвољне величине. Пошто број произвољних констаната стоји у вези са редом система диференцијалних једначина, природно је потражити такав систем, чије ће решење имати само четири произвољне константе, па ће према томе и сам систем бити систем четвртог реда, на пр., систем од две једначине другог реда са две непознате величине.

§ 9·2. Лагранжеве диференцијалне једначине кретања тачке по површини

Нека је дата једначина површине, по којој се креће тачка, поново у облику

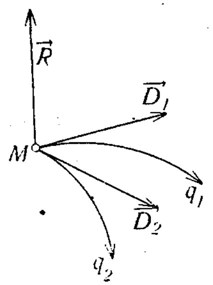
(1) $$f(x,\, y,\, z;\; t)=0\,.$$

Уведимо место Декартових координата x, y, z, везаних једначином (1), независне генералисане координате q_1 и q_2 помоћу образаца

(2) $$x=f_1(q_1,\, q_2;\; t),\qquad y=f_2(q_1,\, q_2;\; t),\qquad z=f_3(q_1,\, q_2;\; t)\,,$$

и то тако да једначина (1) постаје идентичност кад у њој Декартове координате сменимо изразима (2). Пошто та идентичност не сме да зависи ни од q_1, ни од q_2, можемо написати, као закључак, ове две идентичности

(3) $$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial q_1}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}=\left(\operatorname{grad} f\,\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\right)=0\,,\\ \frac{\partial f}{\partial q_2}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_2}=\left(\operatorname{grad} f\,\frac{\partial \vec r}{\partial q_2}\right)=0\,.\end{aligned}$$



Слика 53

Генералисане координате q_1 и q_2 играју улогу Гаусових параметара тачке на површини. Кроз сваки положај тачке M (сл. 53) на површини можемо повући две осе са ортовима $\vec D_1$ и $\vec D_2$, тангентне на координатне линије. Једна оса има правац вектора $\dfrac{\partial \vec r}{\partial q_1}$, а друга $\dfrac{\partial \vec r}{\partial q_2}$.

Узмимо сад векторску једначину кретања тачке по површини у облику (2) § 9·1

$$m\dot{\vec v}=\vec F+\lambda\operatorname{grad} f\,,$$

па је помножимо скаларно са $\dfrac{\partial \vec r}{\partial q_1}$.

Тада добијамо

(4) $$m\left(\dot{\vec v}\,\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\right)=\left(\vec F\,\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\right)+\lambda\left(\operatorname{grad} f\,\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\right).$$

Примећујемо, прво, да је на основу (3) коефицијент уз λ једнак нули.

Затим трансформишимо леву страну овако

(5) $$m\left(\dot{\vec v}\,\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\right)=\frac{d}{dt}m\left(\vec v\,\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\right)-m\left(\vec v\,\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\right).$$

Али из једначине

$$\vec v=\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\,q_1'+\frac{\partial \vec r}{\partial q_2}\,q_2'+\frac{\partial \vec r}{\partial t}$$

лако је, сходно § 3·4, извести векторске једначине

$$\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}=\frac{\partial \vec v}{\partial q_1'}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}=\frac{\partial \vec v}{\partial q_1}\,.$$

Помоћу тих једначина може се из (5) написати

$$m\left(\dot{\vec v}\,\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_1'}-\frac{\partial T}{\partial q_1}\,,$$

где је T жива сила тачке, тј.

$$2T=mv^2.$$

Најзад ставимо

$$\left(\vec F\,\frac{\partial \vec r}{\partial q_1}\right)=Q_1\,.$$

Лако је видети да је то генералисана сила која одговара координати q_1. Заиста, производ $Q_1\,\delta q_1$ даје одговарајући елементаран рад

$$Q_1\,\delta q_1 = \left(\vec{F}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\,\delta q_1\right) = (\vec{F}\,\delta\vec{s}_1),$$

где је $\delta\vec{s}_1 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\,\delta q_1$ елементарно померање тачке кад се промени само координата q_1 за δq_1.

Према томе из једначине (4) и из сличне једначине за координату q_2 имамо дефинитивно

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_1'} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1,\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_2'} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2.\end{aligned}$$

У општем случају, кад једначина површине (1) садржи време, живу силу тачке одређује израз

$$2T = mv^2 = m\,(A_1^2\,q_1'^2 + A_2^2\,q_2'^2 + 2B\,q_1'\,q_2' + 2C_1\,q_1' + 2C_2\,q_2' + D),$$

где су

$$A_1^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2,$$

$$A_2^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2,$$

$$B = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2},$$

$$C_1 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$C_2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$D = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2.$$

Ако је површина непокретна, живу силу одређује хомогени израз

$$2T = mv^2 = m\,(A_1^2\,q_1'^2 + A_2^2\,q_2'^2 + 2B\,q_1'\,q_2').$$

Генералисане силе Q_1 и Q_2 добијамо из израза за елементаран рад силе $\vec{F}$ на произвољном померању $\delta\vec{s}$

$$(\vec{F}\,\delta\vec{s}) = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2.$$

Једначине (6) зову се *Лагранжеве једначине* кретања тачке по површини. Да би смо их написали треба знати живу силу тачке и израз за рад на произвољном померању.

Пошто је у општем случају жива сила T квадратна функција генералисаних брзина q_1' и q_2', изводи $\dfrac{\partial T}{\partial q_1'}$ и $\dfrac{\partial T}{\partial q_2'}$ су линеарне функције тих брзина, а њихови изводи по времену $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q_1'}$ и $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q_2'}$ су линеарне функције генералисаних убрзања q_1'' и q_2''. Према томе је систем (6) линеаран по q_1'' и q_2'' и ти линеарни чланови изгледају

$$\begin{aligned} &A_1^2\,q_1'' + B\,q_2'',\\ &B\,q_1'' + A_2^2\,q_2'',\end{aligned}$$

при чему смо изоставили множитељ m. Пошто детерминанта тих чланова

$$\Delta = A_1^2\,A_2^2 - B^2 = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right]^2 = A_1^2\,A_2^2\,[\vec{D}_1\,\vec{D}_2]^2$$

може бити једнака нули само у случају кад су вектори $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$ колинеарни, а то није случај, наш линеарни систем можемо увек решити по q_1'' и q_2'' и написати

$$\text{(7)}\qquad \begin{aligned} q_1'' &= \varphi_1\,(q_1',\,q_2',\,q_1,\,q_2,\,t),\\ q_2'' &= \varphi_2\,(q_1',\,q_2',\,q_1,\,q_2,\,t).\end{aligned}$$

После интеграције једначина (6) или (7) добићемо интеграле кретања

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1\,(t,\,C_1,\,C_2,\,C_3,\,C_4),\\ q_2 &= q_2\,(t,\,C_1,\,C_2,\,C_3,\,C_4).\end{aligned}$$

Интеграционе константе одређују се из почетних услова, кад за $t = t_0$ ставимо почетне вредности координата q_1^0, q_2^0 и почетне вредности генералисаних ~~брзина~~ $q_1'^0$, $q_2'^0$. Дефинитивно решење у облику коначних једначина кретања је

$$q_1 = q_1 (t,\ t_0,\ q_1^0,\ q_2^0,\ q_1'^0,\ q_2'^0),$$
$$q_2 = q_2 (t,\ t_0,\ q_1^0,\ q_2^0,\ q_1'^0,\ q_2'^0).$$

Та решења омогућавају да се на основу једначина (2) одреде Декартове координате тачке на површини као функције времена; на пр. за координату x добићемо

$$x = x (t,\ t_0,\ q_1^0,\ q_2^0,\ q_1'^0,\ q_2'^0).$$

У случају кретања неслободне тачке сем проблема одређивања кретања тачке може се поставити поблем одређивања силе реакције, која дејствује на тачку за време кретање по површини. Кад се проблем о кретању тачке по површини решава помоћу једначина (3) § 9·1 са множитељем везе λ, реакција $\vec{R}$ одређује се тим множитељем, јер је

$$\vec{R} = \lambda \operatorname{grad} f. \tag{8}$$

Лагранжеве једначине не садрже ни реакцију, ни множитељ везе, према томе за њихово одређивање треба да искористимо ма какву другу једначину која садржи множитељ λ. За његово одређивање може да послужи, напр., једначина

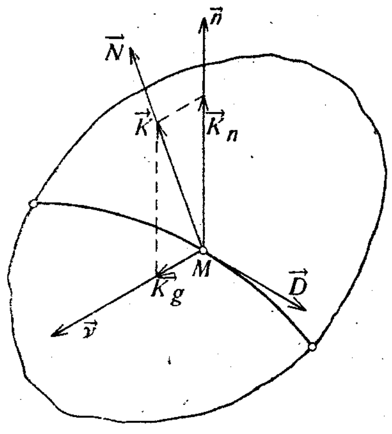
$$mx'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$

пошто све величине у тој једначини, сем множитеља λ, можемо сматрати као познате, ако је кретање било претходно одређено, рецимо, интеграцијом Лагранжевих једначина. После одређивања λ реакција $\vec{R}$ се одређује као вектор изразом (8).

§ 9·3. Природне једначине кретања тачке по површини

Замислимо тачку која се креће по непокретној површини S (сл. 54). За сваки обичан положај M тачке на њеној путањи могуће је повући три осе: 1. тангенту на путању са ортом $\vec{D}$,

2. нормалу $\vec{n}$ на површину са смером $\operatorname{grad} f$ и 3. нормалу $\vec{\nu}$ на правац тангенте $\vec{D}$ у тангентиој равни. Смер вектора $\vec{\nu}$ увек можемо изабрати тако да триједар $M\,\vec{D}\,\vec{\nu}\,\vec{n}$ буде леви (сл. 54). Тај тријeдар зове се *природни тријeдар* за тачку која се креће по површини.



Слика 54

Пројицирајмо сад чланове основне векторске једначине

$$m\vec{w} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f \tag{1}$$

на осе тог природног тријeдра.

У § 3·3 видели смо да убрзање тачке увек можемо раставити у две компоненте — у тангенцијално убрзање $\frac{dv}{dt}\vec{D}$ и у нормално $\frac{v^2}{\rho}\vec{N}$, где смо сад са ρ означили полупречник кривине, а са $\vec{N}$ орт главне нормале, која се у општем случају не поклапа са нормалом $\vec{n}$ на површину.

Вектор $\frac{1}{\rho}\vec{N} = \vec{K}$, кривину путање у тачки M, можемо раставити у две компоненте: дуж нормале $\vec{n}$ на површину и дуж правца $\vec{\nu}$ у тангентној равни. Прва компонента, чију ћемо вредност означити са $\vec{K}_n = \frac{1}{\rho_n}\vec{n}$, даје такозвану *нормалну кривину* или *кривину нормалног пресека*. Друга компонента $\vec{K}_g = \frac{1}{\rho_g}\vec{\nu}$ даје *геодезиску кривину*. При томе је ρ_n полупречник кривине нормалног пресека, а ρ_g је полупречник геодезиске кривине.

Узимајући у обзир добијене вредности компонената убрзања, из једначине (1) можемо написати ове три скаларне једначине

$$
(2) \qquad \begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F\cos(\vec{F}\,\vec{D}), \quad = \text{"}F_D\text{"} \\[2mm] m\dfrac{v^2}{\rho_g} = F\cos(\vec{F}\,\vec{v}), \quad = \text{"}F_g\text{"} \\[2mm] m\dfrac{v^2}{\rho_n} = F\cos(\vec{F}\,\vec{n}) + R. \quad = \text{"}F_N + R\text{"} \end{cases}
$$

где је R алгебарска вредност реакције према смеру вектора grad f,

Написане једначине (2) зову се *природне диференцијалне једначине кретања тачке по површини*. Оне садрже, ако се рачунање врши помоћу Декартових координата, четири непознате функције: x, y, z и R. Прве две једначине заједно са једначином површине омогућавају одређивање координата x, y, z. После тога трећа једначина служи за одређивање реакције R.

§ 9·31. Кретање тачке на површини по инерцији

Претпоставимо да на тачку, која се креће по непокретној површини не дејствује активна сила $\vec{F}$. За такво кретање се каже да се врши *по инерцији*. Природне једначине таквог кретања су

$$
m\frac{dv}{dt} = 0, \qquad m\frac{v^2}{\rho_g} = 0, \qquad m\frac{v^2}{\rho_n} = R.
$$

Из ових једначина следује: 1. $v = \text{const.}$, тј. тачка се креће по површини равномерно. 2. $\dfrac{1}{\rho_g} = 0$, тј. крива линија путање тачке има геодезиску кривину једнаку нули, а то је такозвана *геодезиска линија* на површини. Трећа од написаних једначина омогућава одређивање реакције везе.

§ 9·4. Интеграл површине за кретање тачке по површини

Претпоставимо да се тачка креће по непокретној површини чија је једначина

$$
(1) \qquad f(x, y, z) = 0.
$$

Проучимо услове под којима за то кретање важи интеграл момента количине кретања (или интеграл површине) око одређене осе, за коју узмимо, рецимо, z осу.

Закон момента количине кретања за тачку која се креће по површини према једначини

$$
m\vec{w} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f,
$$

изражава се

$$
(2) \qquad \frac{d}{dt}[\vec{r}\; m\vec{v}] = [\vec{r}\,\vec{F}] + \lambda[\vec{r}\operatorname{grad} f],
$$

где је $\vec{r}$ вектор положаја покретне тачке у односу на координатни почетак O. Ако за осу Oz важи интеграл момента количине кретања, пројекција збира вектора с десне стране у једначини (2) на ту осу треба да буде једнака нули. На тај начин, ако посебно поставимо услове за силу и површину, имамо два услова

$$
(3) \qquad xY - yX = 0,
$$

$$
(4) \qquad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0.
$$

Први услов тражи да се активна сила $\vec{F}$ увек налази у равни што пролази кроз Oz осу: њена пројекција на Oxy раван је колинеарна са пројекцијом вектора $\vec{r}$ на ту исту раван.

Други услов (4) може се сматрати као диференцијална једначина са делимичним изводима коју треба да задовољава функција f једначине површине (1). За интеграцију једначине (4) напишимо, како то траже правила интеграције парцијалних диференцијалних једначина, једначину са обичним диференцијалима која одговара једначини (4). Та једначина изгледа

$$
\frac{dy}{x} = \frac{dx}{-y}
$$

или овако

$$
x\,dx + y\,dy = 0,
$$

и даје интеграл

$$
x^2 + y^2 = \text{const.}
$$

Пошто наша полазна једначина (4) не садржи ни z, ни $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, ту константу можемо сматрати као произвољну функцију z и једначина

$$x^2 + y^2 = \Phi(z), \tag{5}$$

где је Φ произвољна функција, доводи до једначине површине

$$f(x^2 + y^2, z) = 0, \tag{6}$$

чија функција f задовољава услов (4). Једначина (6) или (5) показује да наша површина треба да буде обртна површина око осе Oz: за сваку одређену вредност z растојање r свих тачака површине од те осе треба да буде исто, јер је $r^2 = x^2 + y^2$.

Ако су услови (3) и (4) задовољени, из једначине (2) добијамо интеграл момента количине кретања

$$m\,(xy' - yx') = \Gamma,$$

где је Γ интеграциона константа. Тај интеграл можемо написати

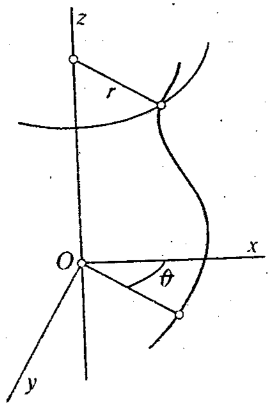
$$2m\,S_z = \Gamma,$$

где је S_z секторска брзина пројекције покретне тачке на Oxy раван у односу на тачку O.

На овај начин можемо формулисати теорему: Ако се тачка креће по обртној површини и ако се сила што дејствује на тачку увек налази у равни меридијана, за то кретање важи интеграл површине у равни управној на осу обртања.

Наведени резултат може се извести и на други начин. Ако се положај тачке одреди помоћу поларно-цилиндричних координата r, θ, z (§ 1·12), једначина обртне површине (сл. 55) биће

$$z = z(r).$$



Слика 55

Метричку форму ds^2, која за ове координате има облик (§ 2·3)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2,$$

за нашу површину можемо написати

$$ds^2 = A^2\,dr^2 + r^2\,d\theta^2,$$

где је

$$A^2 = 1 + z'^2(r).$$

Жива сила тачке је тада

$$2T = m\,(A^2 r'^2 + r^2\,\theta'^2).$$

Координате r и θ могу се сматрати као Гаусови параметри тачке на

нашој површини. Напишимо Лагранжеву једначину за координату θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\Theta,$$

где је Q_Θ генералисана сила за ту координату. Пошто се сила $\vec{F}$ увек налази у равни меридијана, а елементарно померање, кад се мења само координата θ, стоји управно на тој равни, генералисана сила Q_Θ једнака је нули.

Видимо да жива сила T не зависи од координате θ и $Q_\Theta = 0$. Према томе је координата θ циклична (§ 6·4). Тој цикличној координати одговара интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \Gamma$$

линеаран у односу на θ', јер га можемо у развијеном облику написати

$$mr^2\,\theta' = \Gamma.$$

Пошто је $r^2\theta'$ двострука вредност секторске брзине у равни Oxy, написани интеграл не претставља ништа друго до интеграл површине у равни управној на осу обртања.

§ 9·5. Интеграл живе силе за кретање тачке по површини

Закон живе силе за материјалну тачку у диференцијалном облику гласи:

Диференцијал живе силе покретне тачке једнак је раду силе што дејствује на ту тачку на одговарајућем диференцијалном померању.

Пошто у случају кретања тачке по идеалној површини на ту тачку дејствују две силе, активна сила $\vec{F}$ и реакција $\vec{R}$, закон живе силе треба да изразимо овако

$$dT = (\vec{F}\,\vec{ds}) + (\vec{R}\,\vec{ds}),$$

где је $\vec{ds}$ елементарно померање тачке.

Пошто је

$$\vec{R} = \lambda \operatorname{grad} f,$$

а за површину

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = (\operatorname{grad} f, \vec{ds}) + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0,$$

можемо закон живе силе изразити

$$dT = (\vec{F}\,\vec{ds}) - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Десна страна претходне једначине биће тотални диференцијал, ако су задовољена два услова: 1. $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, а то значи да је наша површина непокретна и 2. Кад је $(\vec{F}\,\vec{ds})$ тотални диференцијал. Пошто је

$$(\vec{F}\,\vec{ds}) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

а између промењљиних x, y, z постоји веза, коју за непокретну површину можемо написати

$$z = z(x, y),$$

израз за елементаран рад биће

$$(\vec{F}\,\vec{ds}) = \left(X + Z\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(Y + Z\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy.$$

Под условом

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(X + Z\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(Y + Z\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

који још можемо написати и

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

елементаран рад претставља тотални диференцијал једне функције коју означимо са U.

Под тим условима закон живе силе доводи до интеграла живе силе

$$T = U + h,$$

где је h произвољна константа, и кретање тачке има конзервативан карактер.

Ако се решавање проблема о кретању тачке по површинв врши помоћу Лагранжевих једначина

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q_1'} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q_2'} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \end{cases}$$

за извођење закона живе силе можемо поступити овако. Помножимо написане једначине — прву са dq_1, другу са dq_2 и резултате саберимо и добићемо

$$d\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)\cdot q_1' + d\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right)\cdot q_2' - \frac{\partial T}{\partial q_1}dq_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}dq_2 = Q_1\,dq_1 + Q_2\,dq_2. \tag{1}$$

Ако је површина по којој се креће тачка непокретна, жива сила T је хомогена квадратна функција q_1 и q_2 и према томе за њу важи Euler'ова теорема за хомогене функције

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q_1'}\cdot q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'}\cdot q_2'.$$

Диференцирањем те једначине добијамо

$$2dT = d\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)\cdot q_1' + d\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right)\cdot q_2' + \frac{\partial T}{\partial q_1'}\cdot dq_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'}\cdot dq_2';$$

с друге стране непосредно диференцирање живе силе даје

$$dT = \frac{\partial T}{\partial q_1'}\cdot dq_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'}\cdot dq_2' + \frac{\partial T}{\partial q_1}\cdot dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\cdot dq_2.$$

Одузимањем чланова последње једначине од претходне добијамо

$$dT = d\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)\cdot q_1' + d\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right)\cdot q_2' - \frac{\partial T}{\partial q_1}\cdot dq_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}\cdot dq_2.$$

Пошто десна страна ове једначине не претставља ништа друго до леву страну једначине (1), ова даје

$$dT = Q_1\,dq_1 + Q_2\,dq_2. \tag{2}$$

Ова једначина изражава закон живе силе за тачку која се креће по непомичној површини.

Ако генералисане силе Q_1 и Q_2 задовољавају услов

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}, \tag{3}$$

десна страна једначине (2) претставља тотални диференцијал од U. Стављајући

$$Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2 = dU,$$

добијамо из (2)

$$dT = dU,$$

што поново доводи до интеграла живе силе

$$T = U + h.$$

Према томе и овде видимо да је кретање тачке по површини конзервативно, ако је површина непокретна и генералисане силе задовољавају услов (3), тј. имају функцију силе.

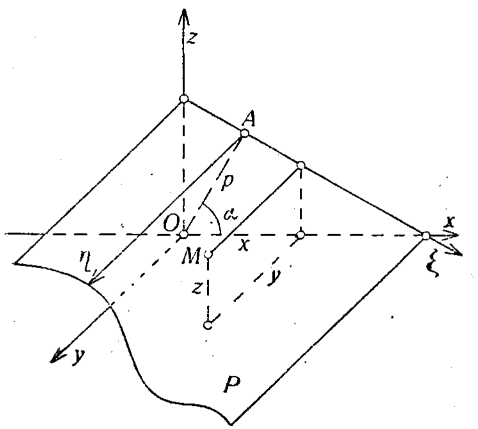
§ 9·6. Примери

§ 9·61. Кретање тешке тачке по транслаторно покретној равни

Нека се тачка M креће у равни P која се креће транслаторно. Једначину такве равни можемо написати

$$x \cos\alpha + z \sin\alpha - p = 0, \tag{1}$$

где су x и z координате тачке M у односу на систем оса $Oxyz$ (сл. 56), од којих оса Oz стоји вертикално навише, а Oy оса је паралелна равни P. Величину p растојања равни од почетка координатног система сматрамо као дату функцију времена: $p = p(t)$; α је сталан угао што гради то растојање са Ox осом.



Слика 56

За независне координате тачке M у равни P можемо узети координате ξ и η у односу на систем оса $A\xi\eta$ са тачком A у

подножју нормале p, са осом $A\eta$ паралелном оси Oy и са $A\xi$ осом напереном наниже. Помоћу тих координата координате x, y, z изражавају се

$$x = \xi \sin\alpha + p\cos\alpha, \quad y = \eta, \quad z = -\xi\cos\alpha + p\sin\alpha;$$

и оне идентично задовољавају једначину (1).

За једначине кретања са множитељем везе имамо

$$mx'' = \lambda\cos\alpha, \quad my'' = 0, \quad mz'' = -mg + \lambda\sin\alpha, \tag{2}$$

где је m маса тачке и g убрзање силе теже.

Ако двапут диференцирамо једначину (1), добићемо

$$x''\cos\alpha + z''\sin\alpha - p'' = 0,$$

одакле после замене x'' и z'' из (2) одређујемо вредност λ

$$\lambda = mg\sin\alpha + mp'',$$

а у исто време и реакцију, јер је у овом случају $R = \lambda$, а правац вектора $\vec{R}$ стоји управно на равни P.

За одређивање кретања тачке M у равни P напишимо једначине за независне координате ξ и η. Пошто је

$$2T = mv^2 = m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = m(\xi'^2 + \eta'^2 + p'^2).$$

а генералисане силе за координате ξ и η, као што следује из израза за рад на померању $\delta\vec{s}$, кад се време не мења,

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = Z\,\delta z = mg\cos\alpha\cdot\delta\xi,$$

имају вредности

$$Q_\xi = mg\cos\alpha, \qquad Q_\eta = 0,$$

Лагранжеве једначине постају

$$\xi'' = g\cos\alpha, \qquad \eta'' = 0.$$

Ако претпоставимо да се тачка у почетку кретања налазила у тачки A, а ова последња је била у тачки O, после интеграције и одређивања произвољних констаната лако ћемо добити решење

$$\xi = v_0 t\cos\beta + \frac{1}{2} g t^2\cos\alpha, \qquad \eta = v_0 t\sin\beta,$$

где је v_0 интензитет почетне брзине и β угао што она гради са $A\xi$ осом.

Добијени резултат показује да се тачка креће по параболи

$$\xi = \eta \operatorname{cotg} \beta + \frac{g \cos \alpha}{2 v_0^2 \sin^2 \beta} \eta^2 ,$$

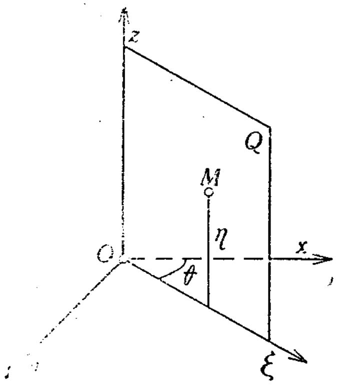
чији облик и положај не зависи од растојања p. Према томе можемо закључити да транслаторно кретање равни не утиче на кретање тачке у тој равни.

§ 9·62. Кретање тешке тачке у вертикалној равни која се обрће око сталне осе

Сад решимо задатак о кретању тешке тачке M у вертикалној равни Q (сл. 57), која се равномерно обрће око сталне праве Oz тако да је угао θ између те равни и равни xOz

$$\theta = \omega t ,$$

где је ω сталан коефицијент пропорционалности — угаона брзина обртања.



Слика 57

Једначину везе пишемо, као једначину равни,

$$(1) \qquad x \sin \theta - y \cos \theta = 0 .$$

Ако за одређивање положаја тачке M у покретној равни Q уведемо независне координате ξ и η, како је то показано на слици, добијамо за вредности координата x, y, z

$$(2) \qquad x = \xi \cos \theta , \quad y = \xi \sin \theta , \quad z = \eta .$$

Диференцијалне једначине кретања са множитељем везе изгледају

$$(3) \qquad mx'' = \lambda \sin \theta , \quad my'' = - \lambda \cos \theta , \quad mz'' = - mg,$$

где је m маса тачке и g убрзање теже.

Ако двапут диференцирамо једначину (1), добићемо

$$x'' \sin \theta - y'' \cos \theta + 2 (x' \cos \theta + y' \sin \theta) \omega -$$
$$- (x \sin \theta - y \cos \theta) \omega^2 = 0 .$$

Одакле на основу (1), (2), (3) добијамо ову вредност λ

$$\lambda = - 2m\omega (x' \cos \theta + y' \sin \theta) = - 2m\omega \xi' .$$

Пошто живу силу тачке можемо израчунати овако

$$2 T = mv^2 = m (x'^2 + y'^2 + z'^2) = m (\xi'^2 + \eta'^2 + \xi^2 \omega^2),$$

а елементаран рад има вредност $- mg \, \delta\eta$, Лагранжеве једначине дају

$$\xi'' - \omega^2 \xi = 0 , \qquad \eta'' = - g .$$

После интеграције ових једначина имамо

$$(4) \qquad \xi = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} , \qquad \eta = - \frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4 ,$$

где су $C_1 , \ldots , C_4$ произвољне константе интеграције.

Одредимо те константе, рецимо, за случај кад је тачка у почетку кретања ($t_0 = 0$) била у координатном почетку (ξ_0', $\eta_0' = 0$).

Тада ћемо из (4) лако добити коначне једначине кретања

$$(5) \qquad \xi = \frac{1}{2} \frac{\xi_0'}{\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) , \qquad \eta = - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Елиминисање времена даје за једначину путање

$$2 \omega \xi = \xi_0' \left(e^{\omega \sqrt{- \frac{2\eta}{g}}} - e^{- \omega \sqrt{- \frac{2\eta}{g}}} \right) .$$

Ако у прву од једначина (5) ставимо $\omega t = \Theta$, добићемо једначину

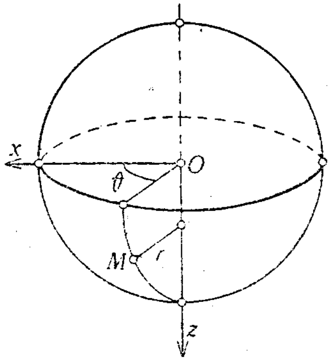
$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\xi_0'}{\omega} (e^{\Theta} - e^{-\Theta}) ,$$

која даје путању пројекције тачке M на раван Oxy у поларним координатама ξ, θ.

§ 9·63. Сферно клатно

Проблем сферног клатна је проблем о кретању тешке тачке по непокретној сферној површини. У случају задржавајуће везе тачка може да буде везана штапом са центром сфере, у случају незадржавајуће везе она може бити остварена концем сталне дужине који веже тачку за центар.

Положај тачке M (сл. 58) одређиваћемо цилиндричним координатама: z — растојање тачке од хоризонталне равни што пролази кроз центар сфере са смером наниже, r — растојање тачке од осе Oz, θ — угао између вертикалне равни OzM и равни Oxz, која пролази кроз сталну хоризонталну праву Ox.



Слика 58

Једначину сферне површине пишемо овако

$$(1) \qquad r^2 + z^2 - l^2 = 0\,,$$

где је l полупречник сфере.

Сила теже mg има функцију силе

$$U = mgz\,.$$

Пошто је површина непокретна и сила има функцију силе, постоји интеграл живе силе

$$mv^2 = 2mgz + mh\,,$$

где је h произвољна константа. У нашем случају тај интеграл даје

$$(2) \qquad z'^2 + r'^2 + r^2\theta'^2 = 2gz + h\,.$$

Пошто је наша површина обртна и сила теже нема момента око осе Oz, постоји интеграл површине, који можемо написати

$$(3) \qquad r^2\theta' = C\,,$$

где је C константа.

Према томе имамо три једначине

$$(1) \qquad r^2 + z^2 - l^2 = 0\,,$$

$$(2) \qquad z'^2 + r'^2 + r^2\theta'^2 = 2gz + h\,,$$

$$(3) \qquad r^2\theta' = C$$

за одређивање променљивих z, r, θ.

Пре интеграције извешћемо неке закључке о кретању тачке само на основу интеграла површине и живе силе.

Из једначине (3), пошто је C константа, а r^2 увек позитивно, закључујемо да се угао θ мења увек у истом смислу.

Ако диференцирамо једначину (1) и из добијене једначине

$$rr' + zz' = 0$$

одредимо r'

$$r' = -\frac{z}{r}z'\,,$$

а из једначине (3) узмемо

$$\theta' = \frac{C}{r^2}\,,$$

и те вредности ставимо у једначину (2), интеграл живе силе можемо, с обзиром на (1), написати у облику

$$(4) \qquad l^2 z'^2 = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2 = f(z)\,.$$

Функција $f(z)$ има три стварна корена (α, β, γ) као што се види из ове таблице знакова те функције

z	$-\infty$	$-l$	z_0	$+l$
$f(z)$	$+\infty$	$-C^2$	$f(z_0)$ +	$-C^2$
		γ	β	α

где је z_0 почетна вредност координате z. Пошто $f(z)$ према (4) мора увек бити позитивно, променљива z не може да изађе из области $\beta \leqslant z \leqslant \alpha$, која претставља један сферни појас.

Видимо да се тачка налази у једном појасу и увек се креће у истом смислу у том појасу.

Пређимо сад на интеграцију. Место $f(z)$ можемо ставити

$$f(z) = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) = 2g(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma)$$

и тада из (4) следује квадратура

$$l\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{f(z)}\,.$$

Знак треба да бирамо према знаку почетне вредности $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$.

Ако време рачунамо од тренутка кад је тачка била на нивоу

$z=\alpha$, код претходне квадратуре треба да узмемо минус јер је $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 < 0$, после чега квадратура даје

$$\frac{\sqrt{2g}}{l}t = -\int_{\alpha}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma)}}. \tag{5}$$

Ако извршимо смену

$$\alpha - z = (\alpha-\beta)u^2,$$

видимо да се u мења у границама од 0 до 1.

Пошто је

$$z = \alpha - (\alpha-\beta)u^2, \qquad dz = -2(\alpha-\beta)u\,du,$$

квадратуру (5) можемо довести до облика

$$\lambda t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

где смо увели ознаке

$$k^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{2g(\alpha-\gamma)}}{2l}.$$

Написани интеграл је *нормалан елиптички интеграл*. Његова горња граница сматрана као функција самог интеграла даје познату елиптичку функцију *sn*. Према томе можемо написати

$$u = \mathrm{sn}\,\lambda t.$$

Вредност те функције за сваку вредност аргумента можемо израчунати или помоћу редова које даје теорија елиптичких функција, или помоћу нарочитих таблица израђених за те функције. Према томе функцију u, а то значи и променљиву z, можемо сматрати као познате функције времена.

После одређивања z угао θ можемо наћи квадратуром из једначине

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{l^2-z^2},$$

која непосредно следује из (3).

Најзад за одређивање r имамо једначину

$$r = \sqrt{l^2-z^2}.$$

Тим путем одређене координате z, θ, r као функције времена дају положај тачке за сваки тренутак.

За одређивање реакције R, која дејствује на нашу покретну тачку M, искористимо једну од природних једначина (2) (§ 9·3), наиме ону, која одговара нормали на површину

$$m\frac{v^2}{\rho_n} = F\cos(\vec{F}\,\vec{n}) + R.$$

Ако правац нормале $\vec{n}$ наперимо ка центру лопте, ова једначина добија облик

$$\frac{m}{l}v^2 = -\frac{m}{l}gz + R. \tag{6}$$

Из интеграла живе силе (2) можемо одредити квадрат брзине

$$v^2 = 2gz + h,$$

после чега из једначине (6) лако добијамо за вредност реакције

$$R = \frac{m}{l}(3gz+h).$$

§ 9·631. Конусно клатно

Као што смо видели у претходном параграфу материјална тачка сферног клатна креће се увек између две паралелне равни чији положај зависи од почетних услова кретања. Ако су почетни услови такви да се те две равни поклапају, тачка ће описивати кружну путању, а њен сферни полупречник површину кружног конуса. Тада се каже да тачка врши кретање *конусног клатна*.

Пре свега одредимо почетне услове за могућност таквог кретања. Полином $f(x)$ у једначини (4) § 9·63

$$l^2z'^2 = (2gz+h)(l^2-z^2) - C^2 = f(z)$$

треба да има два једнака корена $\alpha=\beta$. Такав корен је и корен извода $f'(z)$, одакле добијамо једначину

$$(2gz+h)z = g(l^2-z^2).$$

Ако за ту једначину искористимо интеграл живе силе

$$v^2 = 2gz + h\,,$$

видимо да је

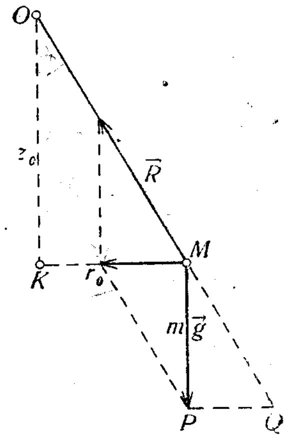
$$v^2 z = g\,(l^2 - z^2)\,.$$

Пошто ова једначина треба да важи и за почетне вредности, имамо услов

$$(1) \qquad v_0^2 = \frac{g}{z_0}\,(l^2 - z_0^2)\,.$$

Тај услов показује да за сваку хоризонталну раван (z_0) имамо одређену почетну брзину $\vec{v}_0$ наперену хоризонтално. Са таквом брзином тачка у свом наредном кретању неће да напусти ту хоризонталну раван и врши према томе кретање конусног клатна.

Услов (1) можемо добити и на други, непосредни начин без проучавања сферног клатна. Ако се тачка креће по малом хоризонталном кругу, на њу треба да дејствује хоризонтална сила која одговара центрипеталном убрзању са вредношћу $\frac{v^2}{r}$, где је r полупречник круга. Ту силу треба да сматрамо као компоненту силу теже $m\vec{g}$ (сл. 59), чија друга компонента стоји у равнотежи са реакцијом $\vec{R}$ у правцу полупречника сфере. Из сличности троуглова KOM и PMQ имамо



Слика 59

$$PQ : MP = KM : KO$$

или

$$m\,\frac{v_0^2}{r_0} : mg = r_0 : z_0\,,$$

одакле долазимо до услова

$$v_0^2 = \frac{g}{z_0}\,r_0^2\,,$$

који одговара (1), јер је $r_0^2 = l^2 - z_0^2$.

Пошто тачка треба да се креће по кругу са константном секторском брзином, она се креће по том кругу равномерно и угао θ је пропорционалан времену. То следује и из интеграла (3) § 9·63, одакле имамо

$$\theta = \frac{C}{r_0^2}\,t = \theta_0'\,t = \frac{v_0}{r_0}\,t\,,$$

при чему смо претпоставили да је за $t_0 = 0$ и $\theta_0 = 0$.

ГЛАВА ДЕСЕТА

Кретање тачке по кривој линији

§ 10·1. Диференцијалне једначине са множитељима веза

У § 8·7 видели смо да, ако је крива линија дата једначинама

$$(1)\qquad f_1(x, y, z; t) = 0, \quad f_2(x, y, z; t) = 0,$$

диференцијалне једначине кретања тачке по тој линији можемо написати, у векторском облику,

$$(2)\qquad m\vec{w} = \vec{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2$$

а у скаларном

$$(3)\qquad \begin{aligned} mx'' &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ my'' &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ mz'' &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}$$

Множитеље веза λ_1 и λ_2 треба да одредимо из услова

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 f_2}{dt^2} = 0.$$

За решење проблема о кретању тачке обично се не употребљавају једначине са множитељима веза, јер помоћу њих решавамо, као што смо видели, проблем општијег карактера, а то повећава тешкоће интеграције. Али за одређивање реакција веза

те једначине могу бити од користи. Тако, на пр., из израза за реакцију

$$(4)\qquad \vec{R} = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2$$

непосредно следује да се реакција увек налази у нормалној равни на криву, јер сваки од градијената лежи у тој равни.

§ 10·2. Лагранжева једначина кретања тачке по кривој

Претпоставимо да је крива по којој се креће тачка дата једначинама

$$(1)\qquad f_1(x, y, z; t) = 0, \qquad f_2(x, y, z; t) = 0.$$

Уведимо за одређивање положаја тачке у простору криволиниске координате $q_1 = q$, q_2, q_3 али тако да координатна линија дуж које се мења координата q буде линија (1). Тада се једначине те криве могу написати у параметарском облику

$$(2)\qquad x = \varphi_1(q, t), \qquad y = \varphi_2(q, t), \qquad z = \varphi_3(q, t),$$

где улогу параметра игра координата q.

Ако унесемо вредности (2) ма у коју од једначина (1), она се мора претворити у идентичност и то за сваку вредност t. Другим речима, резултат смене не сме да зависи од q. Према томе можемо написати две идентичности

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial q} &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q} = \left(\operatorname{grad} f_1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right) \equiv 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} &= \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q} = \left(\operatorname{grad} f_2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right) \equiv 0, \end{aligned}$$

где је $\vec{r}$, као увек, вектор положаја тачке.

Помножимо сад векторску једначину (2) § 10·1 скаларно вектором $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q}$. На основу (3) чланови са λ_1 и λ_2 отпадају и добијамо

$$(4)\qquad m\left(\vec{w}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right) = \left(\vec{F}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right).$$

Леву страну ове једначине трансформисаћемо овако

$$m\left(\vec{w}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right)=m\,\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right)-m\left(\vec{v}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right)=$$

$$=m\,\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial q'}\right)-m\left(\vec{v}\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}\right)=\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q'}-\frac{\partial T}{\partial q},$$

где је T жива сила тачке. И овде смо искористили векторске једначине

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial q'},\qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial q}=\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q},$$

које следују из једначине

$$\vec{v}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\,q'+\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\,. \tag{5}$$

Десну страну једначине (4) поново означимо са Q

$$\left(\vec{F}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right)=Q\,.$$

Лако је показати да је Q генералисана сила. Означимо са $\vec{\delta s}$ оно померање тачке, које она може да изврши у датом тренутку, кад се промени само координата q за δq, тада је

$$\vec{\delta s}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\,\delta q\,.$$

Ако сад израчунамо производ

$$Q\,\delta q=\left(\vec{F}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\,\delta q\right)=(\vec{F}\,\vec{\delta s})\,,$$

видимо да он заиста претставља рад, а то и потврђује значење величине Q као генералисане силе што одговара координати q.

На тај начин једначину (4) пишемо

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q'}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q\,. \tag{6}$$

Једначина (6) зове се *Лагранжева једначина* кретања тачке по кривој.

У општем случају покретне криве линије жива сила T одређује се из једначине

$$2T=mv^2=m\,(A^2\,q'^2+2Cq'+D)\,,$$

где је према (5)

$$A^2=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2,$$

$$C=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right)=\frac{\partial x}{\partial q}\,\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial q}\,\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial q}\,\frac{\partial z}{\partial t}\,,$$

$$D=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\,.$$

Ако је крива линија непокретна, жива сила се своди на само један члан

$$2T=mv^2=m\,A^2\,q'^2\,.$$

Лагранжева једначина (6) је другог реда у односу на непознату функцију q. Интеграција те једначине омогућава одређивање координате q у функцији времена и произвољних констаната C_1 и C_2

$$q=q\,(t;\ C_1\,,\ C_2)\,.$$

Вредност тих констаната одређује се из почетних услова

$$q_0=q\,(t_0\,;\ C_1\,,\ C_2),\qquad q_0'=q'\,(t_0;\ C_1\,,\ C_2)\,.$$

После тог одређивања добијамо

$$q=q\,(t;\ q_0\,,\ q_0')\,.$$

Једначине (2) дају после тога Декартове координате у функцији времена.

§ 10·3. Природне једначине кретања тачке по кривој

За сваку тачку криве (1) § 10·2 можемо конструисати триједар оса од тангенте са ортом $\vec{D}$, главне нормале $\vec{N}$ и бинормале $\vec{B}$.

Из векторске једначине

$$m\vec{w}=\vec{F}+\vec{R}$$

на основу § 3·3 можемо написати ове три скаларне једначине

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= m\frac{d^2s}{dt^2} = F\cos(\vec F\vec D),\\
m\frac{v^2}{\rho} &= F\cos(\vec F\vec N) + R\cos(\vec R\vec N),\\
0 &= F\cos(\vec F\vec B) + R\cos(\vec R\vec B),
\end{aligned}
$$

где је: v — интензитет брзине, s — дужина лука криве, ρ — полупречник кривине. Написане једначине зову се *природне једначине* кретања тачке по кривој.

Прва од једначина (1) може се сматрати као диференцијална једначина другог реда за одређивање променљиве s — дужине лука дате линије, јер десна страна у општем случају претставља одређену функцију променљивих s, $s' = \frac{ds}{dt}$, t. Дакле имамо

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \text{fonct}\,(s,\ s',\ t).$$

Интеграцијом те једначине добијамо

$$s = \psi\,(t;\ C_1,\ C_2),$$

при чему за одређивање C_1 и C_2 имамо две једначине

$$s_0' = \psi'\,(t_0;\ C_1,\ C_2),$$
$$s_0 = \psi\,(t_0;\ C_1,\ C_2).$$

Из две остале једначине (1) одређују се компоненте реакције у правцима главне нормале и бинормале.

§ 10·4. Интеграл живе силе

Закон живе силе за тачку на коју дејствује активна сила $\vec F$ и сила реакције $\vec R$ изражава се овако

$$dT = (\vec F,\ \vec{ds}) + (\vec R,\ \vec{ds}),$$

где је $\vec{ds}$ елементарно померање. Ако унесемо вредност реакције из (4) § 10·1, претходна једначина може се написати

$$(1)\qquad dT = (\vec F,\ \vec{ds}) + \lambda_1\,(\text{grad}\,f_1,\ \vec{ds}) + \lambda_2\,(\text{grad}\,f_2,\ \vec{ds}).$$

Из једначина веза

$$f_1\,(x,\ y,\ z;\ t) = 0,\qquad f_2\,(x,\ y,\ z;\ t) = 0$$

диференцирањем добијамо

$$(2)\qquad (\text{grad}\,f_1,\ \vec{ds}) = -\frac{\partial f_1}{\partial t}\,dt,\qquad (\text{grad}\,f_2,\ \vec{ds}) = -\frac{\partial f_2}{\partial t}\,dt,$$

јер, на пр., диференцирање прве једначине даје

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz + \frac{\partial f_1}{\partial t}dt = 0,$$

а прва три члана те једначине не претстављају друго до скаларни производ grad f_1, чије су кординате $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ и вектора $\vec{ds}$ са координатама dx, dy, dz.

На основу (2) једначину (1) пишемо

$$(3)\qquad dT = Xdx + Ydy + Zdz - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t}dt - \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t}dt,$$

где смо са X, Y, Z означили координате активне силе.

Јасно је да за сталну криву, тј. под условима

$$(4)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0,$$

кад израз

$$(5)\qquad Xdx + Ydy + Zdz$$

претставља тотални диференцијал функције U, једначина (3) доводи до интеграла живе силе

$$T = U + h$$

и кретање има конзервативан карактер.

Пошто под условима (4) једначине криве не зависе од времена те имају облик

$$f_1\,(x,\ y,\ z) = 0,\qquad f_2\,(x,\ y,\ z) = 0,$$

можемо y и z сматрати као функције од x

$$y = y\,(x),\qquad z = z\,(x).$$

У том случају, ако сила $\vec F\,(X,\ Y,\ Z)$ не зависи од брзине и времена, већ само од положаја тачке, израз (5) увек се може написати у облику $\Phi(x)\,dx$ и на тај начин за функцију U добијамо израз

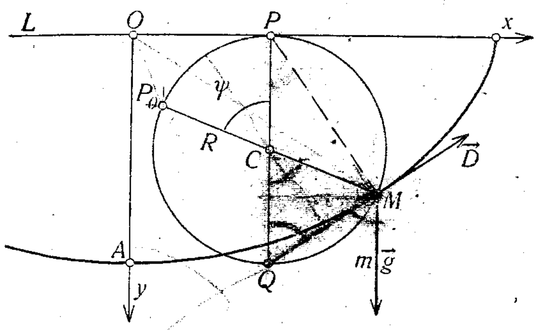
$$U = \int \left[X(x) + Y(x)\frac{dy}{dx} + Z(x)\frac{dz}{dx} \right] dx = \int \Phi(x)\,dx\,.$$

Добијени резултати показују да кретање по кривој има конзервативан карактер, ако је крива непокретна и сила зависи само од положаја тачке на кривој.

§ 10·5. Примери

§ 10·51. Циклоидно клатно

Нека се круг (генератор) са центром C (сл. 60) и полупречником R котрља без клизања по правој L. За време таква



Слика 60

кретања додирна тачка P праве и круга пролази путеве исте дужине по правој и по кругу. Свака тачка кружне линије за време таква котрљања описује криву линију која се зове *циклоида*. Права L је њена *основа*.

Тешка тачка која се креће по вертикалној циклоиди са хоризонталном основом зове се *циклоидно клатно*.

За сваки положај покретне тачке M на циклоиди можемо конструисати пречник MP_0 круга генератора. Пошто тачка M има сталан положај на кругу, положај тачке P_0 је исто тако сталан. На правој L назначимо тачку O где је била тачка P_0 круга генератора за време котрљања. Ако са ψ означимо угао P_0CP, тај угао потпуно одређује положај круга генератора и тачке M на циклоиди. Одредимо вектор положаја $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ тачке M у односу

на тачку O, коју узимамо за почетак координатних оса Oxy; осу Ox узимамо у правцу L, а осу Oy наперимо вертикално наниже. Пошто је

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM}\,,$$

а

$$\overrightarrow{OP} = R\psi \cdot \vec{i}\,, \quad \overrightarrow{PC} = R\vec{j}\,, \quad \overrightarrow{CM} = R\sin\psi \cdot \vec{i} + R\cos\psi \cdot \vec{j}\,,$$

имамо

$$(1) \qquad \vec{r} = R(\psi + \sin\psi)\vec{i} + R(1+\cos\psi)\vec{j}\,.$$

Поставимо помоћу те једначине везу између угла ψ и дужине s лука циклоиде. Почетак тог лука узимамо у тачки A, најнижем положају тачке M.

Ако диференцирамо (1), тј. напишемо

$$(2) \qquad d\vec{r} = R\,[(1+\cos\psi)\cdot\vec{i} - \sin\psi\cdot\vec{j}]\,d\psi =$$
$$= 2R\cos\frac{\psi}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2}\cdot\vec{i} - \sin\frac{\psi}{2}\cdot\vec{j}\right)d\psi$$

и резултат подигнемо на квадрат, добићемо

$$(d\vec{r})^2 = ds^2 = 4R^2\cos^2\frac{\psi}{2}\,d\psi^2\,.$$

Одатле имамо

$$ds = 2R\cos\frac{\psi}{2}\cdot d\psi\,,$$

што после интеграције и одређивања произвољне константе из услова $\psi = 0$, $s = 0$ даје дефинитивно

$$(3) \qquad \boxed{s = 4R\sin\frac{\psi}{2}}\,.$$

Геометриски ова једначина показује да је лук AM циклоиде једнак двострукој вредности тетиве QM.

Поставимо сад диференцијалну једначину кретања тачке M.

За тај циљ искористимо природну једначину

$$(4) \qquad m\frac{d^2s}{dt^2} = F\cos(\vec{F}, \vec{D})\,.$$

Пошто је у нашем случају сила $\vec{F}=m\vec{g}$, њена пројекција на правац тангенте, која стоји управно[1]) на правој PM, даје

$$F\cos(\vec{F}\,\vec{D}) = mg\cos(y,\,\vec{QM}) = -mg\sin\frac{\psi}{2}.$$

Ако ставимо ту вредност у једначину (4), тј. напишемо

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\frac{\psi}{2},$$

а затим искористимо једначину (3), онда ћемо за одређивање променљиве s добити једначину

$$s'' + k^2 s = 0, \tag{5}$$

где је

$$k^2 = \frac{g}{4R}.$$

Пошто интеграл једначине (5) можемо одмах написати у облику (упореди, на пр., § 5·121)

$$s = C_1\cos kt + C_2\sin kt$$

или овако

$$s = a\sin(kt+\alpha) \tag{6}$$

где су a и α нове константе са претходним везане једначинама

$$a\sin\alpha = C_1, \qquad a\cos\alpha = C_2,$$

онда видимо да се променљива s мења по закону хармониске осцилације. Период T те осцилације има вредност

$$T = \frac{2\pi}{k} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{7}$$

[1]) Заиста, из (2) видимо да орт $\vec{D}$ тангенте има за координате $\cos\frac{\psi}{2}$, $-\sin\frac{\psi}{2}$, а координате орта $\vec{N}$ правца $\vec{MP}$ имају вредности $-\sin\frac{\psi}{2}$ и $-\cos\frac{\psi}{2}$, онда ортогоналност следује непосредно из једначине

$$(\vec{D},\vec{N}) = \cos\frac{\psi}{2}\left(-\sin\frac{\psi}{2}\right) + \left(-\sin\frac{\psi}{2}\right)\left(-\cos\frac{\psi}{2}\right) = 0.$$

Константа a даје вредност амплитуде осцилације. Ако са v_0 означимо интензитет оне брзине којом тачка пролази кроз најнижи положај A, а то се дешава, на пр., у тренутку t_1, који задовољава услов $kt_1+\alpha=0$, онда за тај тренутак из једначине

$$s' = ak\cos(kt_1+\alpha)$$

имамо

$$v_0 = ak$$

и према томе амплитуда има вредност

$$a = \frac{v_0}{k} = 2v_0\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Кретање циклоидног клатна има ове особине:

I. *Изохроност*

Ова особина састоји се у томе што период T, како то показује израз (7), не зависи од почетних услова кретања. Период циклоидног клатна зависи само од полупречника R круга генератора и од интензитета силе теже у датом месту.

II. *Таутохроност*

Ставимо тешке тачке у различите положаје M_1, M_2, M_3, ... на циклоиди. Пустимо их да се без почетне брзине крећу према најнижем положају A. *Таутохроност* је у томе што све ове тачке стижу у тај најнижи положај за исто време.

За доказ искористимо почетне услове кретања ма које од тих тачака. Претпоставимо да се у почетку кретања ($t_0=0$) тачка M_1 налазила у положају s_1 и имала брзину $s'_1=0$. Тада из (6) за почетни тренутак имамо

$$s_1 = a\sin\alpha, \qquad s_1' = 0 = ak\cos\alpha.$$

Из тих једначина закључујемо да је

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad a = s_1.$$

После тога једначину кретања (6) пишемо овако

$$s = s_1\cos kt.$$

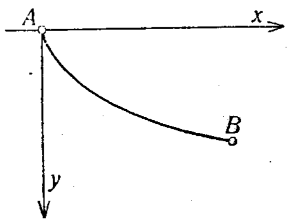
Из ове једначине следује да време τ за које тачка дође у најнижи положај са $s=0$ има вредност

$$\tau = \frac{\pi}{2k} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Пошто оно не зависи од s_1, видимо да ће оно остати исто за све положаје M_2, M_3, . . . , а то и потврђује таутохроност циклоидног клатна.

III. *Брахистохроност*

Нека су дате у простору две тачке A и B (сл. 61) у различитим хоризонталним равнима. Положимо кроз њих вертикалну раван и спојимо линијом у тој вертикалној равни. Ставимо сад тешку тачку у горњи положај A и нека се она без почетне брзине креће по тој линији у доњи положај B. За тај прелаз под утицајем силе теже она ће употребити извесно време. Крива линија која има ту особину да то време прелаза буде најмање зове се *брахистохрона*. Јасно је да облик брахистохроне зависи од поља силе за које тражимо брахистохрону. Показаћемо да је брахистохрона за силу теже циклоида.



Слика 61

Ако се почетак координатних оса поклапа са тачком A и Ax оса је наперена хоризонтално, интеграл живе силе даје

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = 2gy, \tag{8}$$

јер је рад силе теже при спуштању тачке масе m по ма којој линији једнак mgy.

Узимајући у обзир да је

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1+y'^2)\,dx^2,$$

где црта означава извод по x, имамо из (8)

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx,$$

одакле за време τ прелаза из тачке A у тачку B са апсцисом b добијамо

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b f\cdot dx.$$

Одређивање брахистохроне своди се на одређивање непознате функције $y = y(x)$ из услова да време τ буде најмање.

Одређивање непознате функције из услова да неки одређени интеграл има extremum спада у проблеме такозваног варијационог рачуна. На основу правила тог рачуна непозната функција y треба да задовољава овакву диференцијалну једначину

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

где је f подинтегрална функција нашег интеграла.

Пошто у нашем случају функција f не зависи непосредно од независно променљиве x, горња диференцијална једначина има први интеграл облика

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = C,$$

где је C интеграциона константа.

За наш случај тај интеграл се изражава

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C,$$

одакле имамо једначину

$$y\,(1+y'^2) = 2R, \tag{9}$$

где је R нова константа везана са претходном константом једначином

$$2R\cdot C^2 = 1.$$

Из једначине (9) имамо

$$y' = \sqrt{\frac{2R-y}{y}},$$

што доводи до квадратуре

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2R-y}}\,dy.$$

За израчунавање те квадратуре уводимо нову променљиву φ помоћу обрасца

$$y = R\,(1-\cos\varphi),$$

који даје

$$dx = 2R\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = R\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi,$$

одакле после интеграције добијамо

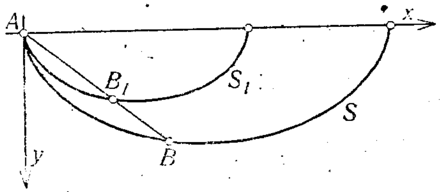
$$x = R\,(\varphi - \sin\varphi) + C_1,$$

где је C_1 нова интеграциона константа. Ако ставимо за тачку A вредност $\varphi = 0$ имамо $C_1 = 0$ и према томе имамо две једначине

$$(10) \qquad \begin{cases} x = R(\varphi - \sin\varphi),\\ y = R(1-\cos\varphi),\end{cases}$$

које одређују циклоиду за сваку произвољну вредност R. Ако ставимо $\varphi = \psi + \pi$ и пренесемо почетак координатних оса у тачку на x осовини са апсцисом $R\pi$, претходне једначине одговараће векторској једначини (1).

Полупречник R круга генератора одређује се из услова да циклоида пролази и кроз тачку B са координатама x_B, y_B. Једначине (10) показују да су све циклоиде, са различитим вредностима R, не само сличне већ и у сличном положају са центром сличности у тачки A. Према томе нацртајмо произвољну циклоиду S_1 (сл. 62), са полупречником R_1 круга генератора и спојимо тачку B са A. Права AB сече циклоиду S_1 у тачки B_1. Онда за одређивање полупречника R круга генератора циклоиде, која пролази кроз тачку B, служи пропорција



Слокл 62

$$R : R_1 = AB : AB_1.$$

На овај начин показали смо да кретање циклоидног клатна има три особине: изохроност, таутохроност и брахистохроност.

За одређивање реакције можемо искористити другу природну једначину, која у случају равне криве садржи целокупну реакцију. Она, према (1) § 10·3, даје

$$m\frac{v^2}{\rho} = F\cos(\vec{F}\,\vec{N}) + R,$$

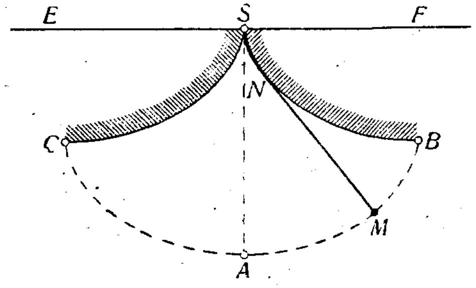
одакле имамо

$$(11) \qquad R = m\frac{v^2}{\rho} + mg\cos\frac{\psi}{2}.$$

Ако узмемо у обзир да је полупречник кривине ρ за циклоиду једнак двострукој вредности дужине $MP = 2R\cos\frac{\psi}{2}$, лако

можемо изразити чланове десне стране једначине (11) у функцији времена.

Наведимо још примедбу о могућности практичног извођења циклоидног клатна. Као што је познато, циклоида има ту особину да је њена еволвента исто тако циклоида. Према томе, ако узмемо два лука вертикалне циклоиде SB и SC (сл. 63) са хоризонталном основом ESF и у тачки S причврстимо један крај конца дужине $SA = 4R$, онда крај M тог конца описује циклоиду $BMAC$ кад се конац намотава било на лук SB било на лук SC. Ако се на том крају налази тешка тачка M, она ће вршити кретање циклоидног клатна.

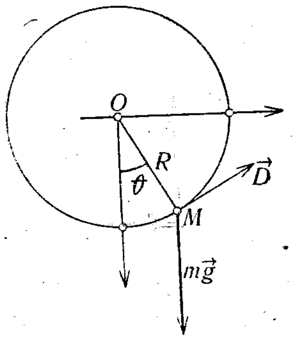


Слика 63

§ 10·52. Математичко клатно

Тешка тачка која је приморана да се креће по вертикалној кружној линији претставља математичко клатно а проблем одређивања кретања те тачке је проблем математичког клатна.

Положај покретне тачке на кружној линији одређиваћемо углом θ између покретног полупречника $OM = R$ и вертикалног правца напереног наниже (сл. 64).



Слика 64

Природна диференцијална једначина кретања за тангенту

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F\cos(\vec{F}\,\vec{D}),$$

даје у нашем случају

$$(1) \qquad R\theta'' = -g\sin\theta,$$

јер је $s = R\theta$, а сила теже $m\vec{g}$ чини угао $\theta + \frac{\pi}{2}$ са правцем тангенте $\vec{D}$.

Једначина (1) има интеграл $(\cos\theta + p)$

(2) $$R\theta'^2 = 2g(\cos\theta + p),$$

који се добија множењем (1) са $d\theta$ и интеграцијом; p је интеграциона константа. Тај интеграл је интеграл живе силе; можемо га написати и овако

(3) $$v^2 = R^2\theta'^2 = 2Rg(\cos\theta + p).$$

Из те једначине видимо да константа p има вредност

$$p = \frac{v_0^2}{2Rg} - \cos\theta_0 .$$

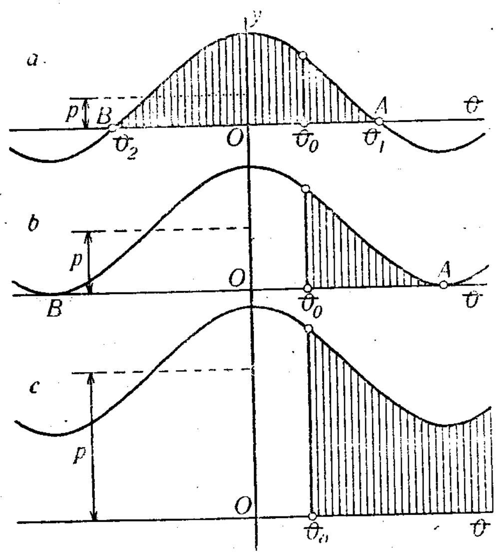
Пошто десна страна једначине (2) не може бити негативна, константа p треба да задовољава услов

$$p \geqslant -\cos\theta \geqslant -1 .$$

Ако ставимо

(4) $$y = p + \cos\theta$$

и нацртамо ту криву, видимо да оса θ може имати један од ових положаја:



Слика 65

I. Под условом

(5) $$1 > p > -1$$

крива (4) има према θ осовини положај показан на слици 65, a[1]). Ова слика одређује и карактер кретања. Почетна вредност θ_0 угла θ може да одговара само оним тачкама криве које су над θ осом. Према знаку брзине θ_0' угао θ може да расте или да опада. Претпоставимо да расте; тада се y смањује и тачка долази до положаја θ_1, који одговара тачки A пресека косинусоиде са θ осом. У том положају тачка се зауставља ($\theta' = 0$), па пошто је $\sin\theta_1 > 0$ из (1) следује да је $\theta'' < 0$ и тачка почиње да се креће са негативном брзином; угао θ се смањује до вредности θ_2, што одговара другој тачки пресека B. Ту се она поново зауставља, а пошто је $\theta'' > 0$, угао θ почиње да расте до вредности θ_0, после чега се понавља исто кретање. Према томе у овом случају кретање има *осцилаторни* карактер.

1) Случај $p = -1$, кад θ за све време кретања може да има само вредност 0, искључујемо, јер то одговара мировању тачке у најнижем положају.

II. Ако је

(6) $$p = 1,$$

крива линија (4) додирује θ осу (сл. 65, b) у двема тачкама A и B. Ако поново претпоставимо да се тачка креће из положаја θ_0 са позитивном брзином, она се приближује положају $\theta = \pi$, што одговара тачки A. У том положају је $\sin\theta = 0$, а према (1) и $\theta'' = 0$. Тачка тежи стању мировања. Као што ћемо доцније видети она се приближује том положају асимптотски и према томе се тај случај кретања математичког клатна зове *асимптотско* кретање.

III. Најзад, ако је

(7) $$p > 1,$$

крива (4) не сече θ осу (сл. 65, c). Из положаја θ_0, рецимо позитивном брзином тачка се креће тако да угао θ увек расте. Кретање има *прогресиван* карактер.

На тај начин имамо три врсте кретања математичког клатна — осцилаторно, асимптотско и прогресивно. Приметимо да смо ту поделу извршили само на основу интеграла живе силе и без потпуне интеграције диференцијалне једначине кретања (1). Проучимо сад свако од тих кретања посебно и покажимо како се интеграција диференцијалне једначине кретања изводи до краја.

§ 10·521. Осцилаторно кретање математичког клатна

Под условом (5) претходног параграфа можемо ставити

$$p = -\cos\gamma$$

и тада интеграл (2) истог параграфа добија облик

$$R\theta'^2 = 2g(\cos\theta - \cos\gamma).$$

После смене

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

претходни интеграл постаје

$$R\theta'^2 = 4g\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Одатле долазимо до квадратуре

$$\text{(1)} \qquad \sqrt{\frac{g}{R}}\cdot t = \int_0^{\theta} \frac{d\,\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

при чему време рачунамо од тренутка кад је тачка била у најнижем положају, а знак плус код корена одговара случају кад је тачка пролазила кроз тај положај са позитивном брзином.

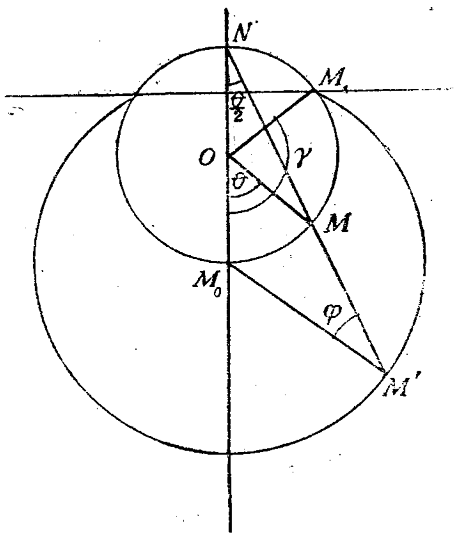
За упрошћавање интеграла једначине (1) уведимо нову променљиву u помоћу обрасца

$$\sin\frac{\theta}{2} = u\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ако нову променљиву u претставимо као синус угла φ, тј. ставимо

$$u = \sin\varphi,$$

између углова θ и φ можемо поставити везу помоћу једноставне геометриске конструкције.



Слика 66

Из најнижег положаја покретне тачке, тачке M_0 (сл. 66), као центра, опишимо кружну линију полупречника $M_0 M_1$, где је M_1 тачка која одговара углу γ. Тај полупречник има вредност

$$M_0 M_1 = 2R\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Спојимо сад покретну тачку ма у ком положају M са тачком N, горњим пресеком вертикалног пречника са кругом трајекторије тачке, и продужимо до тачке M' на кругу центра M_0. Како

из троугла $M_0 M' N$ на основу синусне теореме имамо

$$\frac{\sin\varphi}{2R} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2R\sin\frac{\gamma}{2}},$$

одавде долазимо до једначине

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\varphi\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = u\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Постављена геометриска конструкције заиста одговара вези између променљивих θ и φ.

Тада наш интеграл добија облик

$$\text{(2)} \qquad \sqrt{\frac{g}{R}}\cdot t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

где је

$$k^2 = \sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Интеграл оваква облика имали смо у § 9·63. То је нормални елиптички интеграл. Ако опет сматрамо његову горњу границу u као функцију вредности самог интеграла, добићемо елиптичку функцију sn. У нашем случају имамо

$$u = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)$$

и према томе је

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right).$$

Теорија елиптичких функција показује да функција sn има стваран и имагинаран период. Величина T стварног периода одређује се из једначине

$$\sqrt{\frac{g}{R}}\,T = 4\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

и према томе је

$$T=4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\,.$$

Одређени интеграл

$$K=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

можемо израчунати овако.

Извршимо смену

$$u=\sin\varphi,$$

где је φ нова променљива. Та смена доводи до интеграла

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Развијмо подинтегралну функцију у ред по степенима k^2

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4\varphi+\cdots+$$
$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}k^{2n}\sin^{2n}\varphi+\cdots$$

Тај ред је конвергентан за сваку вредност φ и за $k^2<1$, што одговара нашем услову $k^2=\sin^2\frac{\Upsilon}{2}$, јер сваки члан нашег реда је мањи од одговарајућег члана геометриске прогресије

$$1+k^2\sin^2\varphi+k^4\sin^4\varphi+\cdots$$

Ако извршимо интеграцију сваког члана нашег реда, добићемо

$$K=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi,$$

а пошто је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

имамо

$$K=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\ldots\right].$$

Према томе период осцилације износи

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\ldots\right].$$

Тај израз показује да кретање математичког клатна није изохроно, јер вредност периода зависи од $k^2=\sin^2\frac{\Upsilon}{2}$, а то значи стоји у вези са почетним условима кретања.

Само у приближном посматрању малих осцилација кад је

(3) $$\Upsilon=0,$$

имамо

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Тражимо ли период са већом тачношћу ставићемо

$$\sin\frac{\Upsilon}{2}=\frac{\Upsilon}{2}$$

и тада за период добијамо

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{\Upsilon^2}{16}\right).$$

Забележимо да у првом приближном посматрању под условом (3) елиптичка квадратура (2) дегенерише у тригонометриску, а функција sn у функцију sin. Заиста, за $\Upsilon=0$, а то значи за $k^2=0$, та квадратура има облик

$$\sqrt{\frac{g}{R}}\cdot t=\int_0^u\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

и даје

$$\sqrt{\frac{g}{R}}\cdot t=\arcsin u,$$

одакле после инверзије имамо

$$u = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)$$

или за променљиву θ овакву једначину

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right),$$

што доводи до наредног дефинитивног приближног резултата[1]):

$$\theta = \gamma\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right). \tag{4}$$

Једначина (4) одговара хармониском кретању. Према томе можемо казати да у првом приближном посматрању кретање математичког клатна у случају малих осцилација има *хармониски* карактер.

§ 10·522. Асимптотско кретање математичког клатна

Пошто је у том случају, према (6) § 10·52, $p=1$, интеграл (2) истог параграфа даје

$$R\,\theta'^2 = 2g\,(1+\cos\theta) = 4g\cos^2\frac{\theta}{2},$$

одакле имамо овакву квадратуру за одређивање угла θ у функцији времена

$$\frac{d\,\frac{1}{2}\,\theta}{\cos\frac{1}{2}\,\theta} = \sqrt{\frac{g}{R}}\,dt,$$

ако се поново зауставимо на случају да угао θ расте од почетне вредности θ_0.

[1]) Што смо раније ставили $\gamma = 0$, а сад задржавамо први степен те величине, то није у противречности једно с другим, јер уклањање чланова са γ у израчунавању квадратуре (2) повлачи за собом у дефинитивном резултату (4) само чланове који садрже величину γ у већем степену од првог.

$$\log\left[\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\pi-\theta):\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\pi-\theta_0)\right] = -\sqrt{\frac{g}{R}}\,(t-t_0)$$

који можемо написати овако

$$\operatorname{tg}\frac{\pi-\theta}{4} = \operatorname{tg}\frac{\pi-\theta_0}{4}\,e^{-\sqrt{\frac{g}{R}}(t-t_0)}$$

где смо са t_0 означили време почетка кретања.

Ако време t расте, десна страна претходне једначине стално опада и кад t тежи бесконачности, десна страна тежи нули.

Према томе угао θ стално расте и тежи π, а то одговара највишем положају тачке на кругу. Пошто у тај положај тачка може доспети само после бескрајно великог времена, кретање математичког клатна у овом случају има заиста асимптотски карактер.

§ 10·523. Прогресивно кретање математичког клатна

Као што смо видели, у овом случају је, према (7) § 10·52, $p>1$ и интеграл (2) истог параграфа можемо написати

$$R\theta'^2 = 2g\,(\cos\theta + p) = 2g\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} + p\right) = \tag{1}$$

$$= 4g\,\frac{1}{k_1^2}\left(1 - 2\,k_1^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

где је

$$k_1^2 = \frac{2}{1+p},$$

при чему је $k_1^2 < 1$.

Из (1) поново имамо квадратуру

$$\frac{1}{k_1}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = \int_0^{\Theta}\frac{d\,\frac{1}{2}\,\theta}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\frac{1}{2}\,\theta}}, \tag{2}$$

ако време рачунамо од тренутка кад тачка пролази кроз најнижи положај $(\theta = 0)$.

Сменом

$$\sin\frac{1}{2}\theta = u$$

интеграл (2) доводимо до облика

$$\frac{1}{k_1}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = \int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k_1^2 u^2)}}\,.$$

Инверзија тог елиптичког кретања даје

$$u = \operatorname{sn}\left(\frac{1}{k_1}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right).$$

Кретање је периодично са периодом

$$T = 2\pi k_1\sqrt{\frac{R}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4\cdot\cdot\cdot\right].$$

§ 10·53. Одређивање реакције у кретању математичког клатна

За одређивање реакције која дејствује на тачку математичког клатна искористимо другу природну диференцијалну једначину за правац главне нормале — у нашем случају за правац полупречника круга напереног ка центру. Ако пројекцију реакције на тај правац означимо са N, природну једначину можемо написати

$$m\frac{v^2}{R} = F\cos(\vec{F}\,\vec{R}) + N.$$

Пошто је

$$F\cos(\vec{F}\,\vec{R}) = -mg\cos\theta\,,$$

добијамо за вредност реакције

$$N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta\,.$$

Ако уврстимо v^2 из једначине (3) § 10·52, добићемо за реакцију дефинитивно

$$N = mg\,(3\cos\theta + 2p)\,.$$

Овај образац потпуно одређује реакцију и омогућава да се изврши анализа за све могуће случајеве кретања тачке било по задржавајућој било по незадржавајућој вези.

ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА

Кретање тачке са трењем

§ 11·1. Закон трења

Досад смо проучавали кретање неслободне материјалне тачке са претпоставком да су везе идеалне. Анализирали смо кретање тачке по идеалној површини, која даје реакцију само у правцу свог градијента, и по идеалној линији са реакцијом само у нормалној равни. Кретање тачке са идеалним везама треба сматрати као врло важан али специјалан случај кретања неслободне тачке. Ако желимо да проучимо општи случај, треба увести и неидеалне везе, које дају реакцију не само у правцу градијента већ и у равни управној на градијент.

Пошто из услова за убрзање, као што смо видели (§ 8·5), можемо одредити само компоненту реакције у правцу градијента, то за одређивање друге компоненте треба да уведемо нарочита правила. У рационалној механици та правила могу бити потпуно произвољна и разнолика. Али практични живот се више интересује само за један одређени низ проблема кретања са неидеалним везама. То су проблеми кретања са трењем. Правило по коме рационална механика уводи за таква кретања другу компоненту реакције зове се *закон трења.*

Означимо са $\vec{R}$ целокупну реакцију непокретне неидеалне површине чија је једначина

$$f\,(x,\,y,\,z) = 0\,.$$

Ту реакцију раставимо у две компоненте — једну $\vec{R}_1$ у правцу градијента, тако да је $\vec{R}_1 = \lambda \operatorname{grad} f$, где је λ множитељ везе, и другу $\vec{R}_2$, која се дефинише законом трења.

Тај закон тврди да је 1. правац силе $\vec{R}_2$ правац брзине $\vec{v}$ покретне тачке, 2. смер вектора $\vec{R}_2$ је супротан смеру те брзине и 3. интензитет тог вектора је пропорционалан интензитету нормалне компонентне реакције. Према томе сила $\vec{R}_2$, која се зове *сила трења,* има ову вредност

$$\vec{R}_2 = -kR_1 \operatorname{ort} \vec{v} = -kR_1 \frac{\vec{v}}{v},$$

где је k коефицијент пропорционалности, који се зове *коефицијент трења.* Тај коефицијент изражава се апстрактним бројем.

Према томе за целокупну реакцију ове неидеалне, *рапаве* површине можемо написати израз

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \lambda \operatorname{grad} f - kR_1 \operatorname{ort} \vec{v} =$$

$$= \lambda \operatorname{grad} f - k\,|\lambda \operatorname{grad} f|\,\frac{\vec{v}}{v},$$

где смо са $|\lambda \operatorname{grad} f|$ означили интензитет одговарајућег вектора.

О коефицијенту трења k треба да наведемо ову примедбу. Само у првом приближном посматрању конкретних кретања коефицијент k има сталну вредност. Стварно он се мења са променом интензитета брзине. Нарочито је велика разлика између коефицијента трења за време кретања и тог коефицијента за случај кад тачка из стања мировања треба да се крене у одређеном правцу. Ако са $\vec{F}$ означимо активну силу у тангентној равни, која треба да изведе тачку из мировања, сила трења има смер супротан тој сили; она је пропорционална нормалној реакцији и не може бити већа од $k_0 R_1$, другим речима највећа сила трења има векторску вредност

$$-k_0 R_1 \operatorname{ort} \vec{F},$$

где је k_0 нов коефицијент трења који се зове *статички* коефицијент трења. У поређењу са њим претходни коефицијент зове се *кинетички.* Обично се узима да је статички коефицијент трења већи од кинетичког, тј. $k_0 \geqslant k$.

§ 11·2. Диференцијалне једначине кретања тачке по рапавој површини

Ако за случај кретања тачке по рапавој површини узмемо у обзир силу трења, на материјалну тачку у општем случају дејствују три силе: 1. активна сила $\vec{F}(X, Y, Z)$, 2. сила нормалне реакције $\vec{R}_1$ и 3. сила трења $\vec{R}_2$. Диференцијална једначина кретања такве тачке изгледа овако

$$m\vec{w} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f - k\,|\lambda \operatorname{grad} f|\,\frac{\vec{v}}{v}$$

или најзад овако

$$m\vec{w} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f - k\mu\vec{v}, \tag{1}$$

где смо ставили

$$\mu = \left|\frac{1}{v}\lambda \operatorname{grad} f\right|.$$

Векторској једначини (1) одговарају ове скаларне једначине: за непокретне осе —

$$\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} - k\mu x', \\ my'' &= Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} - k\mu y', \\ mz'' &= Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} - k\mu z'; \end{aligned} \tag{2}$$

за осе природног триједра од тангенте D на трајекторију, нормале $\vec{\nu}$ на тангенту у тангентној равни и нормале $\vec{n}$ на површину —

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F\cos(\vec{F}\,\vec{D}) \mp k\,|R_1|, \\ m\frac{v^2}{\rho_g} &= F\cos(\vec{F}\,\vec{\nu}), \\ m\frac{v^2}{\rho_n} &= F\cos(\vec{F}\,\vec{n}) + R_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Овде смо са ρ_g и ρ_n означили полупречнике кривина — геодезиске и нормалног пресека (упореди § 9·3), са R_1 алгебарску вредност нормалне реакције у односу на нормалу $\vec{n}$ и са $|R_1|$ апсолутну вредност те исте реакције. Питање двоструког знака у првој једначини решава се према томе да ли се правац $\vec{D}$ поклапа са брзином $\vec{v}$ (знак минус) или му је супротан (знак плус).

§ 11·21. Кретање тачке по рапавој површини по инерцији

Пошто је у случају кретања по инерцији активна сила $\vec{F}$ једнака нули, природне једначине кретања (3) § 11·2 за овај случај изгледају

$$m\frac{dv}{dt} = -k|R_1|, \qquad m\frac{v^2}{\rho_g} = 0, \qquad m\frac{v^2}{\rho_n} = R_1.$$

Из друге једначине следује да је $\frac{1}{\rho_g} = 0$, а то значи да је трајекторија, као и у случају кретања без трења (§ 9·31), геодезиска линија. За одређивање закона кретања по тој линији можемо овако поступити. Ако из треће једначине ставимо R_1 у прву једначину, добијамо

$$m\frac{dv}{dt} = -km\frac{v^2}{\rho_n}.$$

Сматрајући ρ_n као функцију дужине лука s геодезиске линије, елиминишимо време из наше једначине помоћу израза $ds = v\,dt$. Раздвајањем променљивих у нашој једначини имамо

$$\frac{dv}{v} = -k\frac{ds}{\rho_n}.$$

После интеграције

$$\log v = -k\int\frac{ds}{\rho_n} + \log C,$$

где је C произвољна константа, и одређивања константе из услова да за $s = s_0$ брзина има вредност v_0, добијамо дефинитивно

$$v = v_0\, e^{-k\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\rho_n}} = \varphi(s), \tag{1}$$

где смо са $\varphi(s)$ означили резултат рачуна. Из те једначине следује

$$dt = \frac{ds}{\varphi(s)},$$

одакле после интеграције долазимо до интеграла

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}. \tag{2}$$

Инверзија тог интеграла даје закон пута

$$s = s(t).$$

Као пример узмимо кретање тачке по инерцији на рапавој сфери полупречника $\rho_n = \text{const.} = r$. Путања је велики круг, јер тај круг је геодезиска линија на сфери. За брзину имамо из (1)

$$v = v_0\, e^{-\frac{k}{r}s},$$

при чему смо претпоставити да се лук s рачуна од почетног положаја тачке. Интеграл (2) може се тада написати

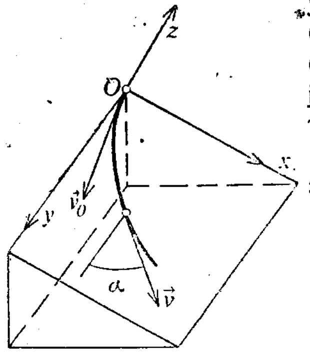
$$t = \frac{1}{v_0}\int_0^s e^{\frac{k}{r}s}\,ds = \frac{r}{kv_0}\left(e^{\frac{k}{r}s} - 1\right),$$

при чему време рачунамо од почетка кретања. Инверзија претходне једначине даје закон пута

$$s = \frac{r}{k}\log\left(\frac{kv_0}{r}t + 1\right).$$

§ 11·22. Кретање тешке тачке по стрмој рапавој равни

Решимо проблем кретања тешке тачке по стрмој рапавој равни (сл. 67). Угао те равни са хоризонталном равни означимо са f. Координатни триједар $Oxyz$ узмимо овако. Тачку O сместимо



Слика 67

у почетни положај покретне тачке. Осу Ox узмимо у стрмој равни наниже, осу Oy у тој истој равни хоризонтално. Тада је једначина равни, по којој се креће тачка, $z = 0$.

Диференцијалне једначине кретања за триједар $Oxyz$ могу се написати

$$mx'' = mg \sin f - k \mid \lambda \mid \frac{x'}{v},$$

$$my'' = - k \mid \lambda \mid \frac{y'}{v},$$

$$mz'' = - mg \cos f + \lambda .$$

Пошто је $z = 0$ и $z'' = 0$, последња једначина даје

$$\lambda = mg \cos f$$

и према томе је λ увек позитивно. Ако уврстимо ту вредност λ у прве две једначине, имамо за одређивање координата x и y две једначине

$$\text{(1)} \qquad x'' = b\left(1 - a\frac{x'}{v}\right), \qquad y'' = - ab\frac{y'}{v},$$

где су

$$a = k \operatorname{cotg} f, \qquad b = g \sin f .$$

За интеграцију система једначина (1) уведимо помоћну променљиву — угао α који гради брзина $\vec{v}$ са осом Oy. Пошто за ту променљиву можемо написати

$$\text{(2)} \qquad x' = v \sin\alpha , \qquad y' = v \cos\alpha ,$$

из система (1) после трансформације добијамо систем

$$\sin\alpha \frac{dv}{dt} + v\cos\alpha \frac{d\alpha}{dt} = b\,(1 - a\sin\alpha),$$

$$\cos\alpha \frac{dv}{dt} - v\sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} = - ab\cos\alpha .$$

Овај систем даје за изводе овакве вредности

$$\text{(3)} \qquad \frac{dv}{dt} = b\,(\sin\alpha - a), \qquad v\frac{d\alpha}{dt} = b\cos\alpha .$$

Одатле изводимо једначину

$$\frac{dv}{v} = \frac{\sin\alpha - a}{\cos\alpha}\, d\alpha ,$$

коју можемо овако интегралити

$$\text{(4)} \qquad \log v = \int \frac{\sin\alpha - a}{\cos\alpha}\, d\alpha .$$

За израчунавање интеграла десне стране и даља расуђивања згодно је увести променљиву

$$u = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

за коју је

$$\sin\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad d\alpha = -\frac{2du}{1+u^2}.$$

Из (4) брзина v изражава се помоћу променљиве u овако

$$\text{(5)} \qquad v = C\,(u^{a-1} + u^{a+1}),$$

где је C произвољна константа интеграције.

Ако сад узмемо другу једначину (3), па је напишемо у облику

$$dt = \frac{v d\alpha}{b\cos\alpha} = -\frac{C}{b}\,(u^{a-2} + u^{a})\, du ,$$

добијамо после интеграције

$$\text{(6)} \qquad t + C_1 = -\frac{C}{b}\left(\frac{u^{a-1}}{a-1} + \frac{u^{a+1}}{a+1}\right),$$

где је C_1 нова произвољна константа.

Координате x и y одређујемо у функцији параметра u после интеграције диференцијала

$$dx = v\sin\alpha \cdot dt = -\mu\,(u^{2a-3} - u^{2a+1})\, du ,$$

$$dy = v\cos\alpha \cdot dt = -2\mu\,(u^{2a-2} + u^{2a})\, du ,$$

где смо ставили $\mu = C^2 : b$. Та интеграција даје

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
x &= -\mu\left(\frac{u^{2a-2}}{2a-2} - \frac{u^{2a+2}}{2a+2}\right) + A\,,\\
y &= -2\mu\left(\frac{u^{2a-1}}{2a-1} + \frac{u^{2a+1}}{2a+1}\right) + B\,,
\end{aligned}
$$

где су A и B интеграционе константе.

Да видимо у какве једначине дегенеришу једначине (7) кад је наша раван глатка. Пошто је за $k=0$ и $a=0$, из (7) добијамо

$$
x = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{1}{u^2} + u^2\right) + A\,,
$$

$$
y = 2\mu\left(\frac{1}{u} - u\right) + B\,.
$$

Из ових једначина после елиминисања параметра u долазимо до једначине

$$
(y-B)^2 = 8\mu\,(x - A - \mu)\,,
$$

која одређује параболичну путању по глаткој стрмој равни.

У случају рапаве равни једначине (7) су параметарске једначине путање тачке. У проучавању тог кретања основну улогу игра број a, коме можемо дати овакав израз

$$
a = k \operatorname{cotg} f = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg} f}\,,
$$

где смо ставили $k = \operatorname{tg}\varepsilon$. Угао ε, чији је тангенс једнак коефицијенту трења зове се *угао трења*.

I. Претпоставимо прво да је

$$
a > 1\,, \quad \text{тј.} \quad \varepsilon > f\,.
$$

Пошто су у обрасцу (5) оба изложиоца код u позитивни бројеви, за $u=0$ је $v=0$. Видимо из (6) да се за $t=-C_1$ тачка зауставља у положају $x=A$, $y=B$.

Пошто је у сваком положају тачке на тој равни сила која креће тачку наниже $\vec{F} = mg \sin f \cdot \vec{i}$, а сила трења је $-k\lambda\vec{i} = -k\,mg\cos f \cdot \vec{i} = -mg \operatorname{tg}\varepsilon \cos f \cdot \vec{i}$ и према томе је у нашем случају већа од силе $\vec{F}$, наша тачка после доласка у положај $x=A$, $y=B$ остаје тамо у миру.

II. Ако је

$$
1 > a > \frac{1}{2}\,,
$$

из (6) закључујемо да кад $u \to 0$, време t тежи бесконачности; према (5) брзина исто тако тежи бесконачности, али y према (7) тежи B, а x — бесконачности. Путања тачке има асимптоту $y=B$.

III. Најзад за случај

$$
a < \frac{1}{2}
$$

све величине: v, t, x, y теже бесконачности кад $u \to 0$. Трајекторија је одозго испупчена линија, правац тангенте тежи правцу Ox осе, али крива нема асимптоте.

§ 11·3. Диференцијалне једначине кретања тачке по рапавој кривој линији

Ако задржимо за силу трења исти закон који смо имали за површину, диференцијалне једначине кретања тачке са трењем по кривој чије су једначине

$$
f_1(x,y,z) = 0\,, \qquad f_2(x,y,z) = 0\,,
$$

можемо написати у векторском облику

$$
m\vec{w} = \vec{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 - k\,|\vec{R}_1|\,\frac{\vec{v}}{v}\,,
$$

где смо са $|\vec{R}_1|$ означили интензитет вектора

$$
\vec{R}_1 = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2\,.
$$

У скаларном облику, рецимо, за прву Декартову координату имамо једначину

$$
mx'' = X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - k\,|R_1|\,\frac{x'}{v}\,.
$$

За природни тријedар ове једначине пишемо овако

$$
\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= F\cos(\vec{F}\,\vec{D}) \mp k\,|\vec{R}_1|\,,\\
m\frac{v^2}{\rho} &= F\cos(\vec{F}\,\vec{N}) + R_1\cos(\vec{R}_1\,\vec{N})\,,\\
0 &= F\cos(\vec{F}\,\vec{B}) + R_1\cos(\vec{R}_1\,\vec{B})\,.
\end{aligned}
$$

§ 11·31. Кретање математичког клатна са трењем

Претпоставимо да на тешку тачку, која се креће по вертикалној кружној линији, дејствује још и сила трења. Ако задржимо углавном ознаке из § 10·52, две природне једначине кретања можемо написати

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta \mp k\,|R_1|,$$

$$m\frac{v^2}{R} = -mg\cos\theta + R_1 .$$

Ако из друге једначине ставимо R_1 у прву једначину и зауставимо се на оном кретању тачке кад угао θ расте $(\theta' > 0)$, онда ћемо добити једначину

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\theta - k\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right)$$

или

$$\frac{d\theta'}{dt} + k\theta'^2 + \frac{g}{R}(\sin\theta + k\cos\theta) = 0 .$$

Пошто је

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \theta'\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\theta'^2}{d\theta},$$

нашу једначину можемо написати

$$\frac{dz}{d\theta} + 2kz + \frac{2g}{R}(\sin\theta + k\cos\theta) = 0,$$

где је $z = \theta'^2$ нова непозната функција. Написана једначина је линеарна у односу на z. Њено решење (збир партикуларног решења целе једначине и општег решења хомогене једначине) изгледа

$$z = \theta'^2 = M\sin\theta + N\cos\theta + Ce^{-2k\Theta} = \varphi(\theta), \tag{1}$$

где је: C — интеграциона константа, а

$$M = -\frac{3k}{1+4k^2}\cdot\frac{2g}{R}. \qquad N = \frac{1-2k^2}{1+4k^2}\cdot\frac{2g}{R}.$$

Ако једначину (1) напишемо овако

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\varphi(\theta)} = \psi(\theta),$$

раздвојимо променљиве

$$dt = \frac{d\theta}{\psi(\theta)},$$

интегралимо

$$t = \int\frac{d\theta}{\psi(\theta)} + C_1,$$

где је C_1 нова интеграциона константа, на крају извршимо инверзију, добићемо коначну једначину кретања

$$\theta = \theta(t).$$

Пошто квадратура коју треба да извршимо може да буде израчуната само помоћу реда, нећемо се на томе заустављати

ГЛАВА ДВАНАЕСТА

Удар тачке о површину

§ 12·1. Тренутне силе коначног импулса

Као што знамо, импулс $\vec{J}$ силе $\vec{F}$ за интервал времена од t_0 до t је вектор-интеграл

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt.$$

Ако је сила $\vec{F}$ коначна, тај импулс тежи нули кад $t \to 0$. Но не желећи да се ограничавамо само на коначне силе, можемо увести у рационалну механику и такве силе, које за интервал $\Delta t = t - t_0$ дају коначан импулс иако $\Delta t \to 0$, при чему не оперишемо непосредно са таквим бескрајно великим силама, већ само са коначним импулсима сила. Наведене силе зову се *тренутне силе коначног импулса*.

Из закона количине кретања (§ 6·1) у облику

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{J} \tag{1}$$

следује да од дејства тренутних сила коначног импулса количина кретања, а то значи и брзина, добија коначан прираштај.

Из закона живе силе у интегралном облику (§ 6·3) и теореме о коначном прираштају живе силе (§ 6·311)

$$T - T_0 = \int_{t_0}^{t} (\vec{F}\,d\vec{s}) = \frac{1}{2}\,[\,(\vec{J}\,\vec{v}_0) + (\vec{J}\,\vec{v})\,] \tag{2}$$

следује да прираштај живе силе и рад тренутних сила има коначну величину за бескрајно мали интервал времена.

Померање тачке за тај интервал бескрајно је мало и тежи, према томе, нули. Заиста, ако интегралимо (1) можемо написати

$$m\,(\vec{r} - \vec{r}_0) - m\vec{v}_0\,(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{J}\,dt = \vec{J}_m\,(t - t_0)\,, \tag{3}$$

где је $\vec{J}_m$ одређена средња вредност импулса у интервалу $(t - t_0)$. Из једначине (3), кад $t \to t_0$, имамо

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = 0\,,$$

и то потврђује непокретност тачке за време дејства тренутних сила.

Ако на тачку, сем тренутних сила, дејствују још и коначне силе, оне не утичу на промену брзине тачке, јер је њихов импулс једнак нули. Заиста, претпоставимо да је сила $\vec{F}$ коначна у интервалу Δt, импулс такве силе можемо претставити овако

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt = \vec{F}_m\,(t - t_0)\,,$$

где је $\vec{F}_m$ одређена средња вредност силе $\vec{F}$. Пошто је та средња вредност коначна, кад $t \to t_0$, импулс $\vec{J}$ тежи нули.

§ 12·2. Момент удара. Долазна брзина

Претпоставимо да се тачка креће, према коначним једначинама кретања

$$x = f_1(t)\,, \quad y = f_2(t)\,, \quad z = f_3(t)\,, \tag{1}$$

у простору где се налази једна површина, коју треба сматрати као незадржавајућу везу за ту тачку. Напишимо ту везу овако

$$\Phi(x, y, z; t) \geqslant 0\,. \tag{2}$$

За решавање питања да ли ће наша тачка доћи на површину (2) потребно је уврстити вредности (1) у функцију Φ и написати једначину

$$\Phi\,[f_1(t),\, f_2(t),\, f_3(t);\, t] = 0\,. \tag{3}$$

Ако једначина (3) има позитивних корена, означимо најмањи од њих са t_0. То је *моменат удара* наше тачке о површину. Означимо брзину тачке у том тренутку са $\vec{v}_0$; она се зове *долазна брзина* тачке на површину и одређује из (1) координатама

$$x_0' = f_1'(t_0)\,, \quad y_0' = f_2'(t_0) \quad z_0' = f_3'(t_0)\,.$$

Пошто је за t_0 испуњен услов $\Phi = 0$, брзина $\vec{v}_0$ мора задовољавати услов (§ 8·3)

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 \geqslant 0\,,$$

где смо са нулом означили резултат за $t = t_0$. У развијеном облику исти услов можемо написати

$$(\vec{v}_0 \operatorname{grad} \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \geqslant 0\,, \tag{4}$$

где смо код градијента и делимичног извода $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ изоставили због упрошћења ознаке нуле.

Ако брзина $\vec{v}_0$ задовољава услов (4), тачка кад ступи на површину или остаје на њој или, додирнувши је, поново напушта површину и креће се као слободна.

§ 12·3. Тренутна реакција. Одлазна брзина. Коефицијент успостављања

Ако брзина $\vec{v}$ не задовољава услов (4) претходног параграфа, масе које остварују површину (2) и, тако рећи, не допуштају тачки да иде својим правцем, јесу извор *тренутне реакције*, која својим коначним импулсом мења немогућу долазну брзину $\vec{v}_0$ у другу, могућу брзину, која задовољава услов (4).

Пошто је сад у тренутку t_0

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 < 0\,,$$

а дејство тренутне реакције доводи до могуће брзине, која треба да задовољава у општем случају услов

$$\frac{d\Phi}{dt} > 0\,,$$

онда је због непрекидности промене потребно у општем случају уочити три момента: t_0 са условом

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 < 0 \text{ или } (\vec{v}_0 \operatorname{grad} \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0\,, \tag{1}$$

t_1 са условом

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_1 = 0 \text{ или } (\vec{v}_1 \operatorname{grad} \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0\,, \tag{2}$$

и t_2 са условом

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 > 0 \text{ или } (\vec{v}_2 \operatorname{grad} \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0\,. \tag{3}$$

У свим тим условима $\operatorname{grad} \Phi$ и извод $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ имају исте вредности, јер претпостављамо да за време $t_2 - t_0$ сви геометриски елементи, везани са површином, остају непокретни.

Целокупна појава промене долазне брзине под утицајем тренутне реакције маса површине зове се *удар тачке о површину*. Време $t_1 - t_0$ се зове *први чин* удара, а време $t_2 - t_1$ — *други чин*. Брзина $\vec{v}_2$ на крају удара зове се *одлазна брзина*, са том брзином тачка напушта површину. Удар се зове *идеалан*, ако за све време удара тренутна реакција, а то значи и њен коначан импулс, имају правац градијента површине.

Ако са $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$ и $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ означимо коначне импулсе за први чин удара, за други и за све време удара, онда можемо написати три векторске једначине

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \vec{J}_1 = J_1 \operatorname{ort} \operatorname{grad} \Phi\,, \tag{4}$$

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{J}_2 = J_2 \operatorname{ort} \operatorname{grad} \Phi\,, \tag{5}$$

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_0 = \vec{J} = J \operatorname{ort} \operatorname{grad} \Phi\,. \tag{6}$$

Ако сваку од ових једначина помножимо скаларно са grad Φ и узмемо у обзир изразе за изводе $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_1$, $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2$, можемо написати једначине

$$(7)\qquad -m\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 = J_1\,|\operatorname{grad}\Phi|\,,$$

$$(8)\qquad m\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 = J_2\,|\operatorname{grad}\Phi|\,,$$

$$(9)\qquad m\left[\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0\right] = J\,|\operatorname{grad}\Phi|\,.$$

Пошто је $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0$ познато, а такође је познат и интензитет градијента $|\operatorname{grad}\Phi|$, из једначине (7) можемо одредити интензитет J_1 првог импулса

$$(10)\qquad J_1 = -\frac{m}{|\operatorname{grad}\Phi|}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0,$$

а затим из једначине (4) брзину $\vec{v}_1$ на крају првог чина удара.

Што се тиче одређивања импулса J_2 за други чин удара или целокупног импулса J и брзине $\vec{v}_2$ одласка, за то могу послужити једначине (5) и (8) или (6) и (9). Али у те једначине улази још једна непозната величина $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2$. Према томе написане једначине нису довољне за решење проблема кретања тачке после удара. Потребно је располагати још једном скаларном једначином као допуиским условом. За тај услов узимамо претпоставку да однос

$$J_2 : J_1 = \varepsilon$$

има сталну вредност за сваку вредност импулса J_1 и зависи само од материјала од кога је израђено тело, чији је заступник наша материјална тачка, и површина о коју удара та тачка. Коефицијент ε зове се *коефицијент успостављања*. Покажимо његово кинематичко тумачење. Због једноставности претпоставимо да је површина непокретна, тј. $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$. Пошто је тада

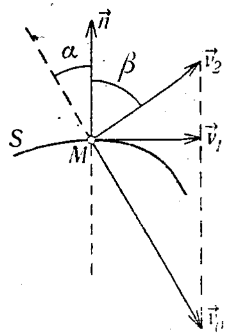
$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 = (\vec{v}_0\operatorname{grad}\Phi), \qquad \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 = (\vec{v}_2\operatorname{grad}\Phi)$$

из (7) и (8) имамо

$$(11)\qquad \frac{J_2}{J_1} = \varepsilon = -\frac{v_2\cos(\vec{v}_2\,\vec{n})}{v_0\cos(\vec{v}_0\,\vec{n})},$$

где је $\vec{n}$ орт нормале на површини у смеру grad Φ.

Ако са α и β означимо углове што граде правци долазне и одлазне брзине са нормалом на површини, како је то показано на слици 68, онда можемо написати



Слика 68

$$(12)\qquad \cos(\vec{v}_0\,\vec{n}) = -\cos\alpha, \qquad \cos(\vec{v}_2\,\vec{n}) = \cos\beta.$$

Осим тога имамо

$$(13)\qquad v_1 = v_0\sin\alpha, \qquad v_1 = v_2\sin\beta,$$

јер брзина $\vec{v}_1$ стоји управно на правцу градијента, као што то за непокретну површину показује услов (2), и крајеви брзина $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ леже на истој правој што следује из једначина (4) и (5).

Ако искористимо (12) и (13), из (11) добијамо

$$(14)\qquad \frac{J_2}{J_1} = \varepsilon = \frac{\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha}.$$

Једначина (14) даје тумачење коефицијента успостављања ε и омогућује одређивање тог коефицијента из посматрања конкретног кретања тачке. Таква посматрања довела су до резултата да се за различит материјал тај коефицијент мења у границама

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1.$$

Ако је $\varepsilon = 0$, површина не одбија тачку уопште; завршна брзина је брзина $\vec{v}_1$. Површина је нееластична и удар се зове *нееластичан*. Обратно, ако је $\varepsilon = 1$, угао $\alpha = \beta$ и завршна брзина $\vec{v}_2$ има исти интензитет као и брзина $\vec{v}_0$. Површина је потпуно еластична и удар је *потпуно еластичан*. У свима другим случајевима је коефицијент ε прави разломак.

Кад је коефицијент ε познат, из једначине (14) се одређује импулс $J_2 = \varepsilon J_1$, а затим једначина (5) одређује одлазну брзину $\vec{v}_2$. Са том брзином тачка напушта површину и креће се као слободна док поново не доспе на површину, ако нова путања има заједничку тачку са површином.

§ 12·4. Промена живе силе за време удара

Означимо са T_0, T_1, T_2 живу силу тачке у почетку удара, на крају првог чина и на завршетку удара. Према теореми § 6·311 о промени живе силе изражене помоћу импулса имамо за наш случај

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2}\,[(\vec{J}_1\vec{v}_0) + (\vec{J}_1\vec{v}_1)] = \frac{1}{2}\,J_1\,[(\vec{v}_0\vec{n}) + (\vec{v}_1\vec{n})]\,,$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}\,[(\vec{J}_2\vec{v}_1) + (\vec{J}_2\vec{v}_2)] = \frac{1}{2}\,J_2\,[(\vec{v}_1\vec{n}) + (\vec{v}_2\vec{n})]\,,$$

јер сваки од импулса $\vec{J}_1$ и $\vec{J}_2$ има правац нормале $\vec{n}$ на површини.

Ако сад из једначина

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 = (\vec{v}_0 \operatorname{grad} \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,,$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_1 = (\vec{v}_1 \operatorname{grad} \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0\,,$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 = (\vec{v}_2 \operatorname{grad} \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,,$$

одредимо пројекције брзина на правац нормале $\vec{n}$, који се поклапа са правцем градијента, и уврстимо у претходне једначине, онда можемо написати овај резултат

$$(1)\qquad \begin{aligned} T_1 - T_0 &= \frac{1}{2}\,\frac{J_1}{|\operatorname{grad}\Phi|}\left[\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 - 2\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right], \\ T_2 - T_1 &= \frac{1}{2}\,\frac{J_2}{|\operatorname{grad}\Phi|}\left[\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 - 2\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]. \end{aligned}$$

Ако се зауставимо на непокретној површини за коју је

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0\,;$$

написане једначине на основу једначина (7) и (8) претходног параграфа дају

$$T_1 - T_0 = -\frac{1}{2m}J_1^2\,,$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2m}J_2^2\,.$$

Ове једначине показују да за први чин удара тачка смањује своју кинетичку енергију, а за други чин повећава. Целокупну промену те енергије даје образац

$$T_2 - T_0 = -\frac{1}{2m}J_1^2(1-\varepsilon^2)\,,$$

који показује да се за $\varepsilon < 1$ жива сила тачке смањује и само за потпуно еластични удар, кад је $\varepsilon = 1$, тачка после удара има исту кинетичку енергију као и у почетку удара.

Приметимо још једанпут да ова расуђивања важе само за случај непокретне површине. За покретну површину, кад је $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} \neq 0$, промена живе силе, као што показују обрасци (1), зависи и од израза $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$, па може наступити и такав случај да жива сила на завршетку удара буде не мања, него већа од живе силе у почетку удара.

ГЛАВА ТРИНАЕСТА

Општи принципи механике у примени на тачку. Каноничне једначине

§ 13·1. Могуће брзине, могућа померања и могуће варијације тачке

Уочимо тачку M, која може бити слободна или неслободна са једном или са две задржавајуће везе

$$f_i(x, y, z; t) = 0, \tag{1}$$

где индекс i има или само једну вредност $i=1$ или две $i=1, 2$.

Ако су једна или две везе незадржавајуће, претпостављамо да везе дејствују и на тај начин поново се враћамо на услов (1).

Брзина $\vec{v}$ тачке мора задовољавати услове (§ 8·3)

$$\frac{df_i}{dt} = (\vec{v} \operatorname{grad} f_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Свака брзина која задовољава те услове зове се *могућа брзина*. За слободну тачку свака брзина је могућа брзина. Пошто свакој брзнни $\vec{v}$ одговара елементарно померање $\vec{\Delta s} = \vec{v}\,\Delta t$, из (2) имамо за померање услове

$$(\vec{\Delta s} \operatorname{grad} f_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t} \Delta t = 0. \tag{3}$$

Свако померање које задовољава тај услов зове се *могуће померање* тачке.

Уочимо два могућа померања — векторе $\vec{\Delta s}$ и $\vec{\Delta' s}$ за исти интервал времена Δt, и узмимо њихову разлику

$$\vec{\Delta' s} - \vec{\Delta s} = \vec{\delta s}.$$

Пошто и друго могуће померање $\Delta' s$ задовољава услове

$$(\vec{\Delta' s} \operatorname{grad} f_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t} \Delta t = 0,$$

вектор $\vec{\delta s}$ мора задовољавати услове

$$(\vec{\delta s} \operatorname{grad} f_i) = 0. \tag{4}$$

Сваки вектор $\vec{\delta s}$ који задовољава услове (4) зове се *могућа варијација* тачке. Јасно је да сваку могућу варијацију можемо сматрати као могуће померање на површини или линији које су зауставиле своје кретање $\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0\right)$. Исто тако је јасно да је за непокретне везе свако могуће померање у исто време и могућа варијација.

За случај незадржавајуће везе, ако упоредимо померање $\vec{\Delta' s}$, за које је

$$(\vec{\Delta' s} \operatorname{grad} f_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t} \Delta t \geqslant 0,$$

са померањем $\vec{\Delta s}$ за које важи услов (3), добићемо за могућу варијацију услов

$$(\vec{\delta s} \operatorname{grad} f_i) \geqslant 0. \tag{5}$$

§ 13·2. Даламберов принцип

Замислимо материјалну тачку масе m која може бити слободна или неслободна са једном или две задржавајуће идеалне везе. Могуће варијације те тачке морају задовољавати услове (5) § 13·1

$$(\vec{\delta s} \operatorname{grad} f_i) \geqslant 0. \tag{1}$$

Диференцијална једначина кретања такве тачке је (§§ 4·3, 8·6, 8·7)

$$(2) \qquad m\vec{w} = \vec{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 ,$$

где је $\vec{w}$ убрзање тачке, $\vec{F}$ — активна сила, λ_1, λ_2 — множитељи веза. У случају кретања тачке само са једном везом отпада последњи члан десне стране, а у случају слободне тачке — отпадају оба последња члана.

Ако векторску једначину (2) напишемо

$$\vec{F} - m\vec{w} = -\lambda_1 \operatorname{grad} f_1 - \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 ,$$

па скаларно помножимо леву и десну страну могућом варијацијом $\delta\vec{s}$, добићемо скаларну једначину

$$(3) \qquad (\vec{F} - m\vec{w},\ \delta\vec{s}) = -\lambda_1 (\delta\vec{s} \operatorname{grad} f_1) - \lambda_2 (\delta\vec{s} \operatorname{grad} f_2) .$$

Кад су обе везе задржавајуће или је тачка слободна, претходна једначина даје

$$(\vec{F} - m\vec{w},\ \delta\vec{s}) = 0 .$$

Ако је ма једна веза незадржавајућа, сваки од скаларних производа са десне стране према (1) или је позитиван или нула. Сем тога знамо да је сваки од множитеља λ_1 и λ_2 (види крај § 8·6), ако веза дејствује, позитиван. На тај начин десна страна у једначини (3) може бити или негативна или нула, према томе имамо дефинитивно за сва могућа кретања материјалне тачке

$$(4) \qquad (\vec{F} - m\vec{w},\ \delta\vec{s}) \leqslant 0 .$$

У развијеном облику овај услов можемо написати

$$(4') \qquad (X - mx'')\,\delta x + (Y - my'')\,\delta y + (Z - mz'')\,\delta z \leqslant 0 ,$$

где су X, Y, Z координате активне силе, а δx, δy, δz координате могуће варијације или, како се каже, варијације Декартових координата.

Услов (4) или (4′) зове се *Даламберов принцип за тачку*. Тај принцип можемо овако формулисати: Рад разлике активне силе и производа масе и убрзања на свим могућим варијацијама тачке не може бити позитиван.

Вектор $-m\vec{w}$, који има димензију силе, зове се *фиктивна сила инерције;* она је фиктивна из разлога што се за њу не може показати извор.

Збир активне силе $\vec{F}$ и силе инерције $-m\vec{w}$ зове се *изгубљена сила*. Ако изгубљену силу означимо са $\vec{P}$ имамо

$$\vec{P} = \vec{F} - m\vec{w} .$$

Помоћу те силе Даламберов принцип можемо формулисати

$$(\vec{P}\ \delta\vec{s}) \leqslant 0 ,$$

тј. за време кретања тачке рад изгубљене силе на свакој могућој варијацији не може бити позитиван.

Извели смо Даламберов принцип (4 или 4′) из диференцијалне једначине кретања тачке (2), а за извођење ове послужили смо се Њутновим законима о увођењу силе и допунским условом о реакцији идеалне везе.

Покажимо сад да сам Даламберов принцип може послужити за извођење диференцијалне једначине кретања било слободне било неслободне тачке, тј. логички може да замени услов о реакцији идеалне везе. Та његова особина оправдава његов назив *општег принципа механике.*

1. Претпоставимо прво да је тачка слободна, тада је вектор $\delta\vec{s}$ потпуно произвољан. Даламберов принцип за овај случај даје

$$(5) \qquad (\vec{F} - m\vec{w},\ \delta\vec{s}) = 0 .$$

Овај скаларни производ може бити једнак нули за сваку вредност вектора $\delta\vec{s}$ само у случају, кад је први множитељ увек једнак нули. Према томе имамо

$$\vec{F} - m\vec{w} = 0 ,$$

тј. $m\vec{w} = \vec{F}$, а то је векторска диференцијална једначина кретања слободне тачке.

2. Претпоставимо сад, да је тачка неслободна са једном задржавајућом везом

$$f_1(x, y, z; t) = 0 .$$

Даламберов принцип поново пишемо у облику (5), а могућа варијација задовољава услов

$$(6) \qquad (\operatorname{grad} f_1 ,\ \delta\vec{s}) = 0 .$$

Свака могућа варијација, чија је вредност

$$\vec{\delta s} = [\operatorname{grad} f_1, \vec{\delta k}], \tag{7}$$

где је $\vec{\delta k}$ потпуно произвољан вектор, задовољава услов (6), јер је

$$(\operatorname{grad} f_1 [\operatorname{grad} f_1, \vec{\delta k}]) \equiv 0.$$

Ако ставимо вредност (7) у Даламберов принцип (5), добићемо

$$(\vec{F} - m\vec{w}, [\operatorname{grad} f_1, \vec{\delta k}]) = 0$$

или

$$(\vec{\delta k}[\vec{F} - m\vec{w}, \operatorname{grad} f_1]) = 0. \tag{8}$$

Пошто је сад вектор $\vec{\delta k}$ потпуно произвољан, услов (8) може бити задовољен само у случају, кад је

$$[\vec{F} - m\vec{w}, \operatorname{grad} f_1] = 0,$$

а то може бити, за векторе различите од нуле, само у случају кад су множитељи колинеарни, тј. кад је

$$\vec{F} - m\vec{w} = -\lambda_1 \operatorname{grad} f_1,$$

где смо са λ_1 означили неки скалар. Ако добијену једначину напишемо у облику

$$m\vec{w} = \vec{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1,$$

видимо да смо из Даламберова принципа извели познату векторску диференцијалну једначину кретања тачке са множитељем везе.

На сличан начин можемо извести из Даламберова принципа једначину кретања неслободне тачке и са две везе. Слична расуђивања се понављају и за случај незадржавајућих веза кад оне почну да дејствују.

§ 13·3. Лагранжев принцип могућих померања

Кад се тачка, било слободна било неслободна, једног момента налази у миру, а резултанта активне силе и реакције, што дејствују на тачку, једнака је нули, тачка остаје у трајном мировању. За такву тачку се каже да се налази у *положају равнотеже*, а за силе што дејствују на њу да су *уравнотежене*.

Пошто брзина тачке у трајном миру увек мора бити једнака нули, из услова за брзину

$$\frac{df}{dt} = (\vec{v} \operatorname{grad} f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

који поставља задржавајућа веза

$$f(x, y, z; t) = 0,$$

непосредно следује да је $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, а то значи да веза мора да буде непомична. За такву везу свако могуће померање у исто време је и могућа варијација и обратно, тј. $\vec{\Delta s} = \vec{\delta s}$.

Пошто за тачку у равнотежи убрзање $\vec{w}$ исто тако мора бити једнако нули, Даламберов принцип (4) § 13·2 за случај тачке у равнотежи даје

$$(\vec{F}, \vec{\delta s}) \leqslant 0 \tag{1}$$

или

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \leqslant 0, \tag{1'}$$

где су δx, δy, δz координате могућег померања, а у исто време и могуће варијације тачке.

Услов (1) или (1') изражава Лагранжев принцип могућих померања. Он гласи: *У случају равнотеже тачке рад резултанте свих активних сила, што дејствују на тачку, на свим могућим померањима не може бити позитиван. Он је једнак нули за случај задржавајућих веза.*

Из Лангранжева принципа, као што ћемо видети у идућој глави, можемо извести услове за равнотежу било слободне било неслободне тачке.

Помоћу Лагранжева принципа (1) можемо Даламберов принцип, како то показује услов

$$(\vec{P}\,\vec{\delta s}) \leqslant 0,$$

где је $\vec{P} = \vec{F} - m\vec{w}$ изгубљена сила, овако формулисати: За време кретања тачке изгубљена сила стоји у равнотежи са силом реакције,

§ 13·4. Хамилтонов принцип

Нека се материјална тачка, слободна или неслободна, креће под утицајем силе $\vec{F}$ из положаја M_0 са почетном брзином $\vec{v}_0$ у положај M_1. Тренутке почетка и краја кретања означимо са t_0 и t_1. Живу силу тачке, као увек, означимо са T.

Претпоставимо да сила $\vec{F}$ има функцију силе U, која може да зависи не само од координата већ и од времена.

Узмимо у разматрање интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt \tag{1}$$

који се зове *дејство у Хамилтонову смислу*. Његова подинтегрална функција може се сматрати и као разлика кинетичне и потенцијалне енергије тачке.

За стварни пут тачке, који ћемо звати и *директни пут тачке*, дејство у Хамилтонову смислу можемо израчуиати, кад знамо кретање тачке, јер је тада подиитегрална функција тог интеграла позната функција времена.

Упоредо са кретањем тачке по директном путу замислимо друго кретање тачке, које се врши:

1. За исто време од t_0 до t_1,
2. Између истих тачака M_0 и M_1,
3. Са задовољавањем веза, ако је тачка неслободна.

Пут који задовољава те услове, а не претставља директни пут тачке, зове се *заобилазни пут* тачке.

Нека дејство у Хамилтонову смислу на једном од заобилазних путева има вредност W_1. Разлика

$$W_1 - W = \Delta W$$

претставља прираштај дејства у Хамилтонову смислу, кад се пређе од директног пута на један од заобилазних.

Претпоставимо сад да су путеви тачке такви да се дејство у Хамилтонову смислу мења непрекидно кад се прелази од директног на бескрајно близак заобилазни пут. Тада исто као што прираштај функције можемо развити у ред, чији први члан претставља први диференцијал фуикције, тако исто прираштај ΔW можемо развити у ред. Први члан тог реда зове се *прва варијација датог интеграла*. У израчунавању прве варијације, слично првом диференцијалу, треба се зауставити само на бескрајно малим величинама првога реда.

Израчунајмо сад прву варијацију δW дејства у Хамилтонову смислу претпостављајући да прелазимо иа бескрајно близак заобилазни пут и да кретање по том путу задовољава три набројена услова.

Ако положај тачке одређујемо независним координатама q_i, где i има вредности од 1 до n, и то $n=3$ за слободну тачку, $n=2$ за тачку на површини и $n=1$ за тачку на линији, онда рачуиање са тим координатама обезбеђује задовољавање веза, јер, кад мењамо само те координате, тачка неће напуштати везе.

Пошто је време кретања по свим путевима исто, границе интеграла (1) не подлеже варијацији.

Најзад услов да сви путеви пролазе кроз исти почетни и завршни положај постижемо на тај начин што изједначујемо са нулом варијације координата за те положаје, тј.

$$(\delta q_i)_0 = 0, \quad (\delta q_i)_1 = 0, \quad i = 1, \dots n. \tag{2}$$

Узимајући све то у обзир, прву варијацију израчунавамо овако

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i'\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i\, dt.$$

За трансформисање сваког члана првог интеграла пре свега узмимо у обзир да је у датом случају

$$\delta q_i' = \frac{d}{dt} \delta q_i,$$

јер су операције варирања и диференцирања по времену независне једна од друге. После тога сваки члан после делимичне интеграције даје

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i'\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_i'}\, d\, \delta q_i = \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i \right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i \right)_0 -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i\, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \cdot \delta q_i\, dt,$$

при чему смо узели у обзир једначине (2). На основу извршене трансформације прва варијација добија облик

$$(3)\qquad \delta W = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i \, dt \,.$$

Ако сад узмемо у обзир Лагранжеве једначине кретања тачке

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad i = 1,2 \ldots n$$

видимо да је подинтегрална функција нашег интеграла једнака нули и према томе је

$$(5)\qquad \delta W = 0\,,$$

тј. прва варијација дејства у Хамилтонову смислу једнака је нули. Услов (5) можемо сматрати као неопходан услов за extremum дејства за директан пут. Дубља анализа показује да, сем изузетних случајева, дејство у Хамилтонову смислу, кад везе не зависе од времена, заиста има extremum и то minimum.

Став да је прва варијација дејства у Хамилтонову смислу за директан пут тачке једнака нули зове се *Хамилтонов принцип.*

Извели смо Хамилтонов принцип на основу Лагранжевих једначина кретања (4). Обратно, из Хамилтонова принципа (5) можемо извести Лагранжеве једначине. Заиста, првој варијацији δW можемо дати облик (3). Пошто интеграл у том обрасцу за произвољне вредности варијација независних координата δq_i може бити једнак нули само под условом да је сваки коефицијент код те варијације једнак нули, непосредно долазимо до једначина (4).

Могућност извођења диференцијалних једначина кретања из Хамилтонова принципа оправдава назив тог става као *општег принципа механике.* Напоменимо да тај принцип можемо применити само на она кретања тачке, кад силе имају функцију силе и везе немају нехолономан (§ 8·1) карактер.

§ 13·5. Каноничне једначине кретања тачке

Применимо Хамилтонов принцип за извођење нових једначина кретања тачке, тако званих *каноничних једначина.*

Узмимо Хамилтонов принцип

$$(1)\qquad \delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt = 0$$

и изразимо подинтегралну функцију, која зависи од q_i, q_i' $(i = 1, \ldots n)$ и времена, које се не варира, у функцији координата q_i и нових променљивих p_i, које су везане са старим променљивим q_i' једначинама

$$(2)\qquad p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}\,.$$

Променљива p_i зове се *генералисани импулс.* За Декартову координату, рецимо x, генералисани импулс је mx' и према томе једнак је одговарајућој координати количине кретања.

Пређимо на израчунавање варијације живе силе. С једне стране непосредно имамо

$$\delta T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i'}\, \delta q_i' \right)$$

или на основу (2)

$$\delta T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + p_i\, \delta q_i' \right).$$

Сваки производ $p_i\, \delta q_i'$ можемо написати

$$p_i\, \delta q_i' = \delta\,(p_i\, q_i') - q_i'\, \delta p_i\,,$$

после чега за δT имамо

$$(3)\qquad \delta T = \sum_{i=1}^{n} \left[\delta\,(p_i\, q_i') + \frac{\partial T}{\partial q_i}\, \delta q_i - q_i'\, \delta p_i \right].$$

Ако сад уведемо функцију K везану са T обрасцем

$$T = \sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i' - K\,,$$

из тог израза, сматрајући K као функцију променљивих p_i, q_i, t, можемо написати

$$(4)\qquad \delta T = \delta \sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i' - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial K}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial K}{\partial p_i}\, \delta p_i \right).$$

Упоредимо ли десне стране израза (3) и (4) долазимо до образаца

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \tag{5}$$

$$q_i' = \frac{\partial K}{\partial p_i}. \tag{6}$$

Ако ставимо израз за варијацију (4) у (1) и узмемо у обзир да је

$$\delta(p_i\, q_i') = q_i'\, \delta p_i + p_i\, \delta q_i' = q_i'\, \delta p_i + p_i \frac{d}{dt}\, \delta q_i\,,$$

добијамо

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ q_i'\, \delta p_i + p_i \frac{d}{dt} \delta q_i - \frac{\partial K}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial K}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \right\} dt,$$

Ако сад узмемо у обзир да је на основу делимичне интеграције и једначина (2) § 13·4

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i \frac{d}{dt} \delta q_i \cdot dt = (p_i\, \delta q_i)_1 - (p_i\, \delta q_i)_0 - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_i \frac{dp_i}{dt}\, dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \delta q_i \frac{dp_i}{dt}\, dt,$$

онда првој варијацији можемо дати дефинитиван облик

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(q_i' - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right\} dt, \tag{7}$$

где смо ставили

$$H = K - U = \sum_{i=1}^{n} q_i'\, p_i - T - U \tag{8}$$

и искористили особину

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = 0.$$

Пошто у изразу (7) све варијације δp_i и δq_i могу бити потпуно произвољне, коефицијенти уз њих морају бити једнаки нули и према томе имамо две серије једначина

$$q_i' - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

које се обично пишу

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{9}$$

Ове једначине зависе само од једне функције H, која се дефинише једначином (8) и зависе само од променљивих p_i, q_i, t. Функција H је *Хамилтонова функција*.

Једначине (9) зову се *каноничне једначине* кретања материјалне тачке под утицијем силе која има функцију силе. Врло важна особина тих једначина је у томе што оне садрже само прве изводе непознатих величина и при томе су решене по тим изводима.

Обрасци (5) и (6), добивени при извођењу каноничних једначина, омогућују да се каноничне једначине добију непосредно из Лагранжевих једначина. Заиста, ако уведемо функцију H једначином (8), једначине (6) дају

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

а Лагранжеве једначине

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

на основу (2) и (5) можемо написати

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Према томе добили смо једну и другу серију каноничних једначина (9).

§ 13·51 Каноничне једначине за конзервативно кретање тачке

Ако је кретање конзервативно, везе не садрже време и сила има функцију силе која такође не зависи од времена. Жива сила T је тада хомогена квадратна функција (квадратна форма) генералисаних брзина q_i' и према томе за њу важи Ојлерова теорема која даје

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i'} q'_i = \sum_{i=1}^{n} p_i q'_i ,$$

Хамилтонова функција за тај случај добија овај једноставни облик

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - T - U = 2T - T - U = T - U.$$

Каноничне једначине за овај случај

(1) $$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

имају интеграл живе силе у облику

$$H = h .$$

где је h интеграциона константа.

Пошто у једначине (1) време улази у случају конзервативног кретања само у облику диференцијала dt, можемо га елиминисати из система (1) узимајући за нову независно променљиву, рецимо, ма коју координату, па пр. q_1. Она само не сме бити константна.

§ 13·511 Каноничне једначине планетског кретања

Напишимо каноничне једначине кретања планете у њеној равни.

Положај тачке одређиваћемо поларним координатама $q_1 = r$ и $q_2 = \theta$. Масу планете узимамо за јединицу. Као што је познато (§ 2·3), тада је жива сила

$$2T = r'^2 + r^2 \theta'^2$$

и према томе је

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = r', \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = r^2 \theta'.$$

Пошто је жива сила за нове променљиве

$$2T = p_1^2 + \frac{1}{r^2} p_2^2 ,$$

а функција силе за Њутнову силу (§ 7·1)

$$U = \frac{k^2 m_1}{r},$$

где је k^2 коефицијент пропорционалности, а m_1 централна маса која привлачи, онда за Хамилтонову функцију добијамо

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{1}{r^2} p_2^2\right) - \frac{k^2 m_1}{r} .$$

Каноничне једначине добијају облик

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 , \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{r^2},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_2^2}{r^3} - \frac{k^2 m_1}{r^2}, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 .$$

То су четири једначине првог реда за одређивање четири променљиве p_1, q_1, p_2, q_2 у функцији времена.

Из последње једначине имамо интеграл

$$p_2 = C .$$

Он одговара сталности секторске брзине, јер је $p_2 = r^2 \theta'$. Једначина $\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_2}{r^2}$ омогућава одређивање угла θ у функцији времена, кад знамо r у функцији времена. За одређивање p_1 и r служе једначине

$$\frac{dr}{dt} = p_1 , \quad \frac{dp_1}{dt} = \frac{p_2^2}{r^3} - \frac{k^2 m_1}{r^2} .$$

Не улазећи непосредно у интеграцију тог система, приметимо да он има интеграл живе силе

$$\frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{1}{r^2} p_2^2\right) - \frac{k^2 m_1}{r} = h ,$$

где је h константа. Ако из тог интеграла одредимо p_1 и ставимо у прву једначину, добићемо квадратуру за одређивање r у функцији времена.

ГЛАВА ЧЕТРНАЕСТА

Статика тачке

§ 14·1. Равнотежа тачке

Ако се материјална тачка, без обзира на то што на њу дејствују силе, налази у трајном миру, за њу се каже, да се налази у *положају равнотеже*, а за силе да су *уравнотежене* или да *стоје у равнотежи.* Онај део динамике тачке који се бави мирујућом материјалном тачком зове се *статика тачке.*

Раније је статика била релативно опширна дисциплина и то из два разлога. Прво, кад теорија вектора није била издвојена у самосталну геометриску дисциплину, расуђивања, понекад врло опширна, из те теорије улазила су у статику. Друго, често пута, нарочито под утицајем практичних и школских потреба, излагање статике је претходило излагању кинетике и зато су многи основни појмови механике добијали своје прво тумачење и развијање у статици, а то је знатно повећавало материјал статике. Ми се придржавамо оног излагања статике, које, с једне стране, претпоставља знање теорије вектора, а с друге следује после излагања динамике уопште. Под таквим условима статика се своди само на релативно кратак одељак динамике.

Основни проблем статике тачке састоји се у проучавању услова под којима тачка може остати у равнотежи. У вези са тим проблемом стоји одређивање свих могућих положаја равнотеже материјалне тачке, било слободне било неслободне, под датим условима, на пр. у датом пољу сила. Најзад, у проблем статике спада и проучавање карактера положаја равнотеже, тј. понашања тачке кад она мало отступи од свог мировања.

§ 14·2. Услови равнотеже слободне тачке

Као што у проучавању кретања тачке из датог положаја под утицајем датих сила треба да знамо почетну брзину, тако и овде, у проучавању услова трајног мировања, треба пре свега навести да у положају равнотеже тачка не сме имати почетну брзину, тј. да је $\vec{v}_0=0$. Тај услов је толико очигледан да га више нећемо наводити.

Како за све време мировања убрзање $\vec{w}$ тачке мора бити једнако нули, из векторске диференцијалне једначине кретања слободне тачке (§ 4·3)

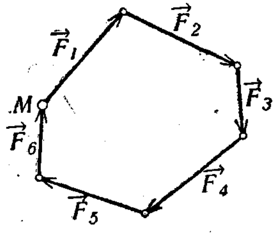
$$m\vec{w}=\vec{F},$$

где је m маса тачке и $\vec{F}$ резултанта свих активних сила $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ што дејствују на тачку, непосредно следује неопходан и довољан услов за равнотежу слободне материјалне тачке

$$(1) \qquad \vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n=0.$$

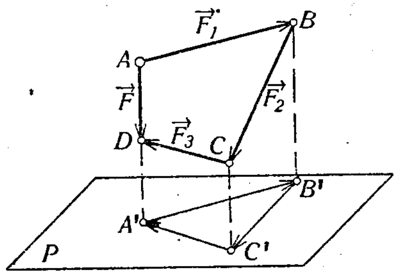
Тај услов звaћемо *векторски услов равнотеже слободне тачке.* Он тражи да резултанта свих активних сила, што дејствују на тачку, буде једнака нули.

Из векторског услова (1) непосредно следује *геометриски услов:* полигон сила конструисан од свих активних сила мора бити затворен (сл. 69), јер ће само у том случају резултанта тих сила бити једнака нули.



Слика 69

Ако су све силе у истој равни, полигон сила можемо нацртати у једној равни и *графичким путем (графичка статика)* проверити услов равнотеже.



Слика 70

У случају просторног полигона сила чињеница да је пројекција тог полигона на раван затворена није довољан доказ за то да је и сам полигон сила затворен. Тако, на пр., пројекције сила $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (сл. 70) дају у равни P затворен полигон $A'B'C'A'$, но те силе не стоје у равнотежи, јер је њихова резултанта, сила $\vec{F} = \overrightarrow{AD}$, различита од нуле. Сила $\vec{F}$ стоји управно на равни P и њена пројекција на ту раван пада у тачку A'.

Према томе за постављање услова равнотеже сила у простору графичким путем треба нацртати пројекције сила на две, рецимо управне, равни и само ако су обе тако добијене пројекције затворени полигони, имамо равнотежу сила које дејствују на исту тачку.

Ако Декартове координате силе $\vec{F}_i$ означимо са X_i, Y_i, Z_i, из векторског услова равнотеже можемо написати три оваква скаларна или, како се каже, *аналитичка услова* равнотеже слободне тачке

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0.$$

Ако је случај такав да је згодније проучавати, место сила $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots \vec{F}_n$, њихове моменте у односу на тачку или у односу на праву, онда и услове равнотеже можемо поставити помоћу момената.

Означимо са $\vec{L}_i$ момент силе $\vec{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ са нападном тачком у материјалној тачки M у односу на тачку O. Ако са $\vec{r}$ означимо вектор положаја $\overrightarrow{OM}$, за момент имамо

$$\vec{L}_i = [\vec{r}\,\vec{F}_i].$$

Кад са $\vec{L}$ означимо резултантни момент, тј. ставимо

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdot \cdot \cdot + \vec{L}_n,$$

имамо

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}\,\vec{F}_i] = \left[\vec{r} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\right] = [\vec{r}\,\vec{F}].$$

Пошто је према (1) $\vec{F} = 0$, добијамо услов

$$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{F}] = 0. \tag{2}$$

Тај услов је за равнотежу неопходан но није довољан. Заиста, производ $[\vec{r}\,\vec{F}]$ може бити једнак нули ако и није $\vec{F} = 0$, наиме кад су вектори $\vec{r}$ и $\vec{F}$ колинеарни. За допуну услова (2) потребно је узети још другу тачку O', која не припада правој што спаја тачке O и M. Ако је резултантни момент $\vec{L}'$ и у односу на тачку O' једнак нули, тј. ако имамо још и услов

$$\vec{L}' = 0, \tag{2'}$$

можемо тврдити да је $\vec{F} = 0$ и тачка M се налази у равнотежи. Напоменимо да од два векторска услова (2) и (2′) можемо добити само три независна скаларна услова.

Има и таквих специјалних случајева кад је проверавање услова (2′) сувишно. Тако, на пр., кад све силе припадају истој равни, односно истој правој, а тачку O узмемо ван те равни, односно праве, услов (2) не само да је неопходан већ и довољан.

На сличан начин можемо проучити услове равнотеже изражене помоћу момената око оса. За то је довољно написати скаларне једначине што одговарају векторској једначини (2) односно (2′).

Најзад, услове за равнотежу слободне тачке можемо добити из принципа могућих померања (§ 13·3). Према том принципу за слободну тачку имамо услов

$$(\vec{F}, \delta\vec{s}) = 0, \tag{3}$$

где је $\delta\vec{s}$ могуће померање тачке. Пошто је за слободну тачку вектор $\delta\vec{s}$ потпуно произвољан из једначине (3) следује услов равнотеже $\vec{F} = 0$. Ако напишемо (3) у развијеном облику

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0,$$

због произвољности δx, δy, δz долазимо до услова

$$X = Y = Z = 0.$$

Из претходног видимо да се условима равнотеже слободне тачке могу дати различите форме, али као резултат свих расуђивања добијамо *три* независна скаларна услова.

§ 14·3. Услови равнотеже тачке на површини

У § 13·3 видели смо да за могућност равнотеже тачке на површини мора површина бити непокретна. Једначину такве површине написаћемо

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Зауставимо се прво на случају идеалне површине. Пошто векторска диференцијална једначина кретања тачке по таквој површини има облик (§ 8·5)

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f,$$

за равнотежу тачке из услова $\vec{w} = 0$ имамо једначину

$$\vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f = 0\,. \tag{2}$$

Раставимо силу $\vec{F}$ у две компоненте: једну $\vec{F}_n$ у правцу градијента и другу $\vec{F}_d$ у додирној равни површине. После тога векторску једначину (2) можемо рашчланити у две једначине

$$\vec{F}_n + \lambda \operatorname{grad} f = 0, \tag{3}$$

$$\vec{F}_d = 0. \tag{4}$$

Прва једначина не поставља никакав услов за силу $\vec{F}_n$. Она служи само за одређивање реакције, наиме множитеља λ.

Да сила $\vec{F}_n$ може бити потпуно произвољна следује и из овог разлога. Сила $\vec{F}_n$ дејствује у правцу нормале на површину, али у том правцу тачка не може да се креће, пошто не сме да напусти површину. Масе површине, које спречавају кретање тачке, извор су нове силе, силе реакције $\vec{R}$. Ова сила стоји у равнотежи са силом $\vec{F}_n$: она је истог правца и интензитета, но супротног смера са силом $\vec{F}_n$.

Према томе, у случају равнотеже тачке на идеалној површини, активна сила $\vec{F}$ треба да задовољава само услов (4), који тражи да компонента те силе у тангентној равни буде једнака нули. То значи сила $\vec{F}$ може имати само правац $\operatorname{grad} f$, другим речима два вектора $\vec{F}$ и $\operatorname{grad} f$ морају бити колинеарни. Колинеарност два вектора, као што је познато, можемо изразити помоћу векторског производа

$$[\vec{F} \operatorname{grad} f] = 0\,. \tag{5}$$

Услов (5) можемо сматрати као *векторски услов* равнотеже тачке на површини. Он је еквивалентан услову (4).

Ако на тачку дејствује више активних сила $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_k$, резултанта тих сила $\vec{F}$ мора имати правац градијента, то значи нормале на површину. Из тога следује да полигон од сила $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_k$ са почетком у тачки на површини мора имати своју завршну тачку негде на нормали на површини у тој тачки. Та особина служи као основ за *графичку методу* проверавања услова равнотеже тачке на површини. Пројекције полигона сила на две равни могу бити отворени полигони, али њихове крајње тачке морају припадати одговарајућим пројекцијама нормале на површини у тачки равнотеже.

Ако са X, Y, Z поново означимо Декартове координате силе $\vec{F}$, из (5) имамо два *аналитичка* услова равнотеже

$$X : \frac{\partial f}{\partial x} = Y : \frac{\partial f}{\partial y} = Z : \frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

За изражавање услова равнотеже тачке M на површини помоћу момента треба узети момент силе $\vec{F}$ у односу на тачку, рецимо A, која се налази на нормали. Тај момент $\vec{L}^{(A)}$ мора бити једнак нули и услов

$$\vec{L}^{(A)} = [\overrightarrow{AM}, \vec{F}] = 0 \tag{6}$$

еквивалентан је услову (5). Заиста, вектор $\overrightarrow{AM}$, као вектор колинеаран вектору $\operatorname{grad} f$, можемо претставити

$$\overrightarrow{AM} = h \operatorname{grad} f,$$

где је h одређен скалар. Ако уврстимо добијену вредност вектора $\overrightarrow{AM}$ у (6), имамо

$$h\,[\operatorname{grad} f, \vec{F}] = 0$$

а тиме је показана наведена еквивалентност.

Најзад, услове равнотеже можемо добити и из принципа могућих померања

$$(\vec{F}\,\delta\vec{s}) = 0. \tag{7}$$

У овом случају померање $\delta\vec{s}$ више није потпуно произвољно, јер оно стоји управно на $\operatorname{grad} f$. Сва таква померања можемо претставити изразом

$$\delta\vec{s} = [\,\mathrm{grad} f\ \delta\vec{l}\,], \tag{8}$$

где је $\delta\vec{l}$ потпуно произвољно померање. Кад ставимо вредност (8) у (7), можемо написати

$$(\vec{F}[\mathrm{grad}\, f\ \delta\vec{l}]) = \delta\vec{l}\,[\vec{F}\,\mathrm{grad} f]) = 0\,,$$

одакле због произвољности $\delta\vec{l}$ добијамо услов (5)

$$[\vec{F}\,\mathrm{grad} f] = 0\,.$$

Ако је положај тачке M на површини (1) одређен генералисаним координатама q_1 и q_2, рад силе $\vec{F}$ на датом могућем померању изражава се

$$(\vec{F}\ \delta\vec{s}) = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2\,,$$

где су Q_1 и Q_2 генералисане силе, а δq_1 и δq_2 су произвољне величине. Из услова да тај рад мора бити једнак нули долазимо до једначина

$$Q_1 = 0\,,\quad Q_2 = 0\,,$$

које претстављају услове равнотеже тачке за генералисане координате.

Ако је веза незадржавајућа

$$f(x, y, z) \geqslant 0\,,$$

услов за равнотежу (5) и њему еквивалентни остају на снази, али, сем тога, из услова да за такву везу множитељ λ не може бити негативан следује из (3) да компонента $\vec{F}_n$ не може имати смер вектора $\mathrm{grad} f$; другим речима сила $\vec{F}_n$ не сме одвлачити тачку са површине већ је мора притискивати ка површини.

§ 14·4. Услови равнотеже тачке на кривој

Као што смо у § 13·3 дошли до закључка да је за равнотежу тачке на површини неопходно да површина буде непокретна, није тешко видети из услова за брзину да је за равнотежу тачке на кривој неопходно да крива исто тако буде непомична.

Претпоставимо да су једначине криве

$$f_1(x, y, z) = 0\,,\qquad f_2(x, y, z) = 0\,.$$

Пошто векторска диференцијална једначина кретања тачке по тој кривој има облик (§ 8·7)

$$m\vec{w} = \vec{F} + \lambda_1\,\mathrm{grad} f_1 + \lambda_2\,\mathrm{grad} f_2\,,$$

из услова $\vec{w} = 0$ имамо једначину

$$\vec{F} + \lambda_1\,\mathrm{grad} f_1 + \lambda_2\,\mathrm{grad} f_2 = 0 \tag{1}$$

неопходну за равнотежу тачке на кривој.

Ако помножимо чланове једначине (1) скаларно ортом тангенте $\vec{D}$, онда ћемо због ортогоналности тангенте и градијента добити једначину

$$(\vec{F}\,\vec{D}) = F\cos(\vec{F}\,\vec{D}) = 0 \tag{2}$$

као услов равнотеже тачке на кривој. Кад активна сила $\vec{F}$ задовољава тај услов и према томе лежи у равни нормалној на криву, равнотежа тачке неће бити поремећена без обзира на интензитет и правац те силе, јер увек можемо одредити такву реакцију која стоји у равнотежи са том активном силом. За одређивање те реакције служе две компоненте од којих је свака одређена одговарајућим множитељем везе.

Као што смо у претходном параграфу изводили услове равнотеже у различитим облицима, тако се и овде услов равнотеже (2) може протумачити графички, аналитички, помоћу момената и најзад из принципа могућих померања. Тако, на пр., графичка метода се оснива на томе да у датом случају полазна и завршна тачка полигона сила морају да се налазе у равни нормалној на криву у тачки равнотеже. Аналитички услов равнотеже можемо формулисати у облику

$$X dx + Y dy + Z dz = 0\,,$$

где су dx, dy, dz пропорционални координатама орта $\vec{D}$ тангенте на криву. Извођење и формулисање осталих облика услова равнотеже тачке на кривој остављамо читаоцима као вежбу.

§ 14·5. Услови равнотеже тачке са трењем

У § 11·1 поставили смо закон трења не само за покретну тачку већ и за тачку која мирује на површини. Ако се тачка налази на површини у миру и на њу дејствује нормална реакција $\vec{R}_1$ и активна сила $\vec{F}$ у тангентној равни, која може да изведе тачку из стања мира, онда на тачку дејствује сила трења супротна сили $\vec{F}$ чија је највећа вредност

$$\vec{R}_2 = -k_0 R_1 \operatorname{ort} \vec{F}, \tag{1}$$

где је k_0 *коефицијент статичког трења.*

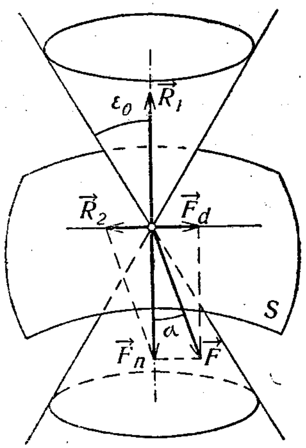
Према томе, ако на тачку на површини дејствује активна сила $\vec{F}$ са компонентама $\vec{F}_n$ и $\vec{F}_d$ у правцу нормале и у тангентној равни, па нормалну реакцију $\vec{R}_1$ одредимо из једначине $\vec{F}_n + \vec{R}_1 = 0$, онда као услов за равнотежу имамо

$$F_d \leqslant k_0 R_1, \tag{2}$$

тј. интензитет тангентне компоненте активне силе не сме бити већи од производа коефицијента статичког трења и интензитета реакције или њему једнаког интензитета нормалног притиска.

Услову (2) можемо дати и други облик. Уведимо угао α (сл. 71) који гради сила $\vec{F}$ са нормалом на површини S, тада је $\operatorname{tg}\alpha = F_d : F_n = F_d : R_1$. Из (2) после тога имамо

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant k_0. \tag{3}$$



Слика 71

Ако уведемо још угао трења ε_0, што одговара статичком коефицијенту трења (§ 11·22), тј. ставимо

$$k_0 = \operatorname{tg}\varepsilon_0,$$

из (3) добијамо услов $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varepsilon_0$ или

$$\alpha \leqslant \varepsilon_0. \tag{4}$$

Ако конструишемо геометриско место праваца за које је $\alpha = \varepsilon_0$, оно ће претстављати неку конусну површину.

Та површина зове се *конус трења за тачку на површини.* Оса му је нормална на површини, а угао између осе и произвођење једнак је углу трења.

Услов (4) показује да ће на некој равној површини тачка остати у равнотежи, ако активна сила лежи *у унутрашњости и на* конусу трења за површину. Кад је веза задржавајућа, сила може да лежи унутра и у једној и у другој грани конуса. Ако је веза једнострана, тачка ће остати у равнотежи само у случају, кад се сила налази у граии конуса трења, која припада неприступачној области простора.

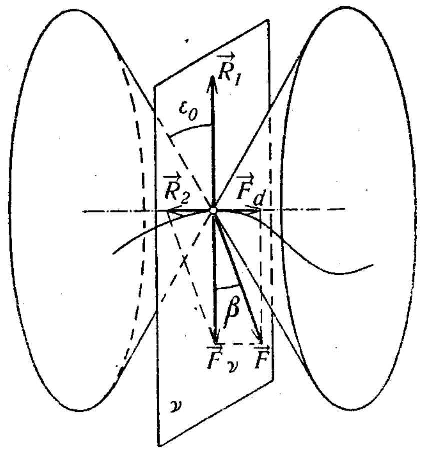
У испитивању услова равнотеже тачке на рапавој кривој закон трења остаје исти и сила трења се изражава поново једначином (1), где је сад R_1 интензитет целокупне реакције у нормалној равни, а $\vec{F}$ је активна сила у правцу тангенте на криву.

Ако произвољну активну силу $\vec{F}$ (сл. 72), што дејствује на тачку, раставимо у две компоненте — једну $\vec{F}_d$ у правцу тангенте и другу $\vec{F}_\nu$ у нормалној равни, поново имамо једначину

$$\vec{F}_\nu + \vec{R}_1 = 0$$

за одређивање реакције $\vec{R}_1$ и затим услов равнотеже

$$F_d \leqslant k_0 R_1. \tag{5}$$



Слика 72

Увођење угла β између силе и нормалне равни, за који је

$$\operatorname{tg}\beta = F_d : R_1,$$

омогућава да се услов (5) овако изрази

$$\beta \leqslant \varepsilon_0 .$$

Узмимо сад у обзир геометриско место правих које граде угао трења ε_0 са нормалном равни ν на криву. Такво геометриско место је опет конус; оса му је тангента, а угао између осе и производиље једнак је $\frac{\pi}{2}-\varepsilon_0$. Тај конус се зове *конус трења за криву линију*. Помоћу тог конуса услов равнотеже тачке на рапавој кривој можемо формулисати овако: Ако се активна сила налази *ван конуса или на* конусу трења за криву, тачка ће остати у равнотежи.

§ 14·6. Одређивање положаја равнотеже тачке у датом пољу силе

Претпоставимо да имамо поље силе. У сваком положају материјалне тачке M у том пољу на њу дејствује сила поља $\vec{F}$, коју треба сматрати као функцију вектора положаја $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, тј. $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$.

Ако је тачка M слободна, она може остати у равнотежи само у оним положајима поља за које је

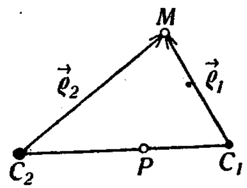
$$\vec{F}(\vec{r})=0 \tag{1}$$

или

$$X(x,y,z)=0, \quad Y(x,y,z)=0, \quad Z(x,y,z)=0, \tag{2}$$

где X, Y, Z означавају Декартове координате силе. Векторску једначину (1) или скаларне једначине (2) треба сматрати као једначине за одређивање свих могућих положаја равнотеже слободне тачке у датом пољу силе.

Узмимо, на пр., случај привлачења тачке M од стране два центра C_1 и C_2 (сл. 73) пропорционално њиховим масама m_1 и m_2 и првим степенима растојања тачке M од центара. Ако са $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$ означимо векторе положаја тачке M у односу на C_1 и C_2, резултанта $\vec{F}$ двеју сила привлачења је



Слика 73

$$\vec{F}=-k^2(m_1\vec{\rho}_1+m_2\vec{\rho}_2),$$

где је k^2 коефицијент пропорционалности. За равнотежу из услова $\vec{F}=0$ имамо

$$m_1\vec{\rho}_1+m_2\vec{\rho}_2=0. \tag{3}$$

Пошто је $\vec{\rho}_2=\overrightarrow{C_2C_1}+\vec{\rho}_1$, из (3) добијамо

$$\vec{\rho}_1=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{C_2C_1} \qquad \vec{\rho}_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{C_2C_1}.$$

Видимо да постоји само једна тачка поља, тачка P, где тачка M може остати у равнотежи. Тачка P дели дуж C_2C_1 у сразмери: $PC_1 : PC_2 = m_2 : m_1$. Видећемо у геометрији маса, да је тачка P *центар инерције* датих маса.

Ако сила $\vec{F}$ има функцију силе U, тј.

$$\vec{F}=\operatorname{grad} U,$$

равнотежа је могућа само у положајима где је

$$\operatorname{grad} U=0$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial z}=0. \tag{4}$$

Услове (4) можемо сматрати као неопходне услове за extremum функције U. На тај начин може се казати да у пољу конзервативне силе тачка може бити у равнотежи само на оним местима где функција силе задовољава услове extremum'а.

Ако је у пољу силе $\vec{F}(X, Y, Z)$ тачка приморана да се налази на површини

$$f(x,y,z)=0, \tag{5}$$

онда у случају равнотеже сила треба да задовољава услов (§ 14·3)

$$[\vec{F}\ \mathrm{grad}\, f\,] = 0, \tag{6}$$

или у скаларном облику

$$X : \frac{\partial f}{\partial x} = Y : \frac{\partial f}{\partial y} = Z : \frac{\partial f}{\partial f}\ . \tag{7}$$

Заједничка решења три једначине (5) и (7) одређују могуће положаје равнотеже.

Кад сила $\vec{F}$ има функцију силе U, услов (6) постаје

$$[\,\mathrm{grad}\, U,\ \mathrm{grad}\, f\,] = 0\,.$$

Две површине — површина (5) и еквискаларна површина $U = \mathrm{const.}$ за положај равнотеже треба да имају заједничку тангентну раван. Специјално, ако је површина (5) еквипотенцијална површина, тачка може бити у равнотежи у сваком положају на тој површини.

Најзад, ако се тачка налази на кривој са једначинама, рецимо, у облику

$$y = y\,(x), \quad z = z\,(x), \tag{8}$$

за равнотежу, према § 14·4, сила треба да задовољава услов

$$(\vec{F}\,\vec{ds}) = Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

или

$$X + Yy' + Zz' = 0, \tag{9}$$

где су изводи y' и z' одређени из једначина (8).

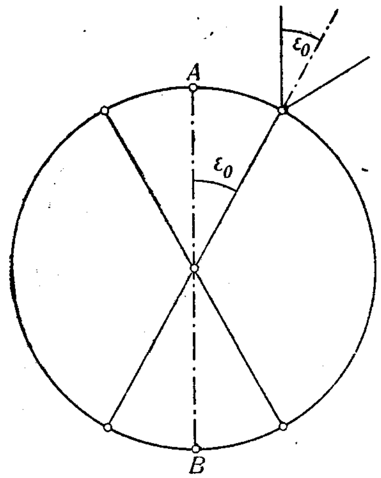
Заједничка решења три једначине (8) и (9) одређују могуће положаје равнотеже.

Кад сила $\vec{F}$ има функцију силе, једначина (9) претвара се у једначину

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\, y' + \frac{\partial U}{\partial z}\, z' = 0\,.$$

За тачке равнотеже крива (8) додирује површину $U = \mathrm{const.}$. Ако крива припада тој површини, тачка је у равнотежа на сваком месту криве.

Ако је површина или крива рапава, област могућих положаја равнотеже знатно се проширује у поређењу са случајем исте те идеалне површине односно криве. Покажимо то на примеру. Кад је тешка тачка приморана да се налази на једној идеалној сферној површини, она може остати у равнотежи само у тачкама A и B (сл. 74), крајевима вертикалног пречника. Ако је сфера рапава, област равнотеже око сваке од тих тачака проширује се у површину сферне калоте. Сферни полупречник сваке тачке границе тих калота гради угао трења ε_0 са вертикалним пречником. То је лако показати посматрањем положаја конуса трења за тачке унутра и на граници назначених калота.



Слика 74

Забележимо да се на рапавим везама могу појавити и нове области равнотеже сем оних које се добијају у близини тачака равнотеже на идеалним везама. Тако, на пр., на идеалној стрмој равни у пољу гравитације нема ниједног положаја равнотеже, а на тој истој само рапавој равни са нагибним углом према хоризонту који је мањи од угла трења тешка тачка ће бити у сваком положају у равнотежи.

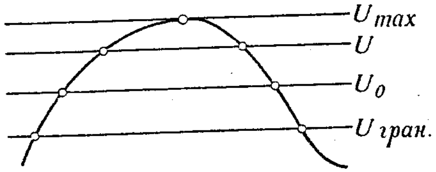
§ 14·7. Стабилност и лабилност положаја равнотеже. Лежен-Дирихлеова теорема

Карактер положаја равнотеже тачке можемо испитати на овај начин. Ставимо материјалну тачку у положај бескрајно близак положају равнотеже и дајмо јој бескрајно малу брзину. Тачка почиње да се креће и у току тог кретања може или 1. да остане увек бескрајно блиска положају равнотеже или 2. да се удаљи од тог положаја. У првом случају положај равнотеже је *стабилан* у другом *лабилан*[1]).

Лагранж је навео, а Лежен-Диришле доказао затим веома важну теорему о стабилности равнотеже, која гласи:

Ако у положају равнотеже функција силе има maximum, равнотежа је стабилна. Доказаћемо ову теорему за тачку.

Уведимо следеће вредности функције силе: $U_{\max}$ — максимална вредност U_0 — почетна, $U_{\text{гран.}}$ — она која одговара граници области maximum'а и коју постављамо за испитивање стабилности, U — за произвољан положај тачке за време њеног кретања. На слици 75 те вредности су показане схематски.



Слика 75

Ако са T и T_0 означимо живу силу тачке за произвољан одн. почетни положај, из интеграла живе силе $T - U = T_0 - U_0$ имамо

$$U > U_0 - T_0 , \tag{1}$$

јер је T увек позитивно. Живу силу T_0 увек можемо изабрати тако да буде мања од разлике $U_0 - U_{\text{гран.}}$, тј.

$$U_0 - U_{\text{гран.}} > T_0 . \tag{2}$$

Ако саберемо неједнакости (1) и (2), добијамо неједнакост

$$U - U_{\text{гран.}} > 0 ,$$

која потврђује теорему. Заиста, U не може бити једнако или мање од $U_{\text{гран.}}$, па значи да тачка не може да напусти област коју смо утврдили вредношћу $U_{\text{гран.}}$. Другим речима, ма колико близу вредности $U_{\max}$ ми изабрали вредност $U_{\text{гран.}}$, увек можемо изабрати такав почетни положај тачке са U_0 и такву почетну брзину са T_0 да тачка за све време кретања неће изаћи из области са $U_{\text{гран.}}$, а тиме је услов стабилности равнотеже задовољен.

[1]) Услов стабилности тачније можемо формулисати овако. Нека је положај тачке одређен генералисаним координатама q_i ($i = 1, .., n$), где број n може имати вредности 1, 2, 3 према томе да ли се тачка налази на кривој линији, површини или је слободна. Рачунајмо те координате тако да је за положај равнотеже $q_i = 0$ ($i = 1, \dots n$). Положај равнотеже је стабилан, ако за сваку унапред дату величину ε можемо одредити такву величину η ($\eta \leqslant \varepsilon$) да почетни услови $|q_i^0| < \eta$, $|q_i'^0| < \eta$ одређују кретање тачке тако, да је $|q_i| < \varepsilon$ за време кретања. Црте | | означују, као увек, апсолутне вредности, а q_i^0 и $q_i'^0$ су почетне вредности координата и брзина.

ГЛАВА ПЕТНАЕСТА

Мале осцилације тачке

§ 15·1 Мале осцилације тачке на кривој око положаја равнотеже

Нека је материјална тачка M са масом m везана за непокретну линију L и може да се налази, под утицајем дате активне силе, у равнотежи на тој линији у положају O. Положај тачке на кривој одређиваћемо дужином лука s од тачке O. Природну диференцијалну једначину кретања у односу на тангенту можемо написати (§ 4·33)

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_D , \tag{1}$$

где је F_D пројекција активне силе на правац тангенте са ортом $\vec{D}$.

Претпоставимо прво да сила зависи само од положаја тачке, тј. $F_D = f(s)$ и да функцију $f(s)$ можемо развити у области тачке O у конвергентан ред

$$f(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$$

Пре свега закључујемо да је $a_0 = 0$, јер у положају равнотеже ($s = 0$) на тачку не сме да дејствује тангентна сила. Према томе, ако се зауставимо на малим осцилацијама и стога занемаримо чланове вишег степена по s, имамо за силу овај израз: $F_D = a_1 s$.

Ако даље претпоставимо да у положају O функција силе $U(s)$, која има облик $U(s) = \frac{1}{2} a_1 s^2$, има maximum, онда из услова за maximum

$$\left(\frac{dU}{ds}\right)_0 = 0\,, \qquad \left(\frac{d^2U}{ds^2}\right)_0 < 0$$

следује да је $a_1 < 0$. Ставимо $a_1 = -mk^2$ и тада диференцијална једначина (1) доводи до једначине

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2 s = 0,$$

којој, као што знамо (§ 5·121), одговара *хармониска осцилација.* Решење има облик

$$s = A \sin kt + B \cos kt\,,$$

где су A и B произвољне константе интеграције. Истом решењу може се дати и облик

$$s = n \sin (kt + \alpha)\,,$$

где је n *амплитуда*, а α је *почетна фаза* осцилације (за $t = 0$). Особине тог кретања навели смо у § 1·621. Наведимо да амплитуда, почетна фаза и учестаност k (или период $T = \frac{2\pi}{k}$, или најзад број осцилација у секунди $\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$) потпуно одређују хармониску осцилацију. Амплитуду и почетну фазу одређују почетни услови кретања, а учестаност k — коефицијент код активне силе пропорционалне дужини s. Ако се зауставимо на конкретном случају да је у тренутку $t = 0$ тачка била у тачки O и имала почетну брзину v_0, онда је $\alpha = 0$ и $n = \frac{v_0}{k}$. Кретање је одређено једначином

$$s = \frac{v_0}{k} \sin kt\,.$$

График таквог конкретног кретања показан је на слици 75, *a.*

§ 15·11. Амортизоване мале осцилације

У претходном параграфу анализирали смо мале осцилације тачке под условом да активна сила зависи само од положаја. Претпоставимо сад да сила зависи и од брзине. Ако величину такве силе поново развијемо у ред и зауставимо се на члановима првог степена, сматрајући брзину за малу величину истог реда као и померање s, диференцијалну једначину кретања можемо написати

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + 2l\frac{ds}{dt} + k^2 s = 0\,.$$

Уведена сила

$$-2\,ml\frac{ds}{dt}$$

зове се *отпорна сила пропорционална брзини.* Сматрамо да је коефицијент пропорционалности l позитиван, другим речима, отпорна сила увек има смер супротан смеру кретања тачке. Осцилација са отпорном силом зове се *амортизована осцилација.*

Интеграција једначине (1) своди се сменом $s = e^{zt}$ на решавање карактеристичне једначине

$$z^2 + 2lz + k^2 = 0\,,$$

која има корене $z_{1,2} = -l \pm \sqrt{l^2 - k^2}$. Према вредности поткорене величине можемо разликовати три случаја.

I. $l^2 - k^2 < 0$. *Квази-периодично кретање.*

Ставимо $l^2 - k^2 = -k_1^2$. Корени имају вредност $z_{1,2} = -l \pm ik_1$, а интеграл диференцијалне једначине изгледа

$$\text{(2)} \qquad s = e^{-lt}(A \sin k_1 t + B \cos k_1 t) = ne^{-lt} \sin (k_1 t + \alpha)\,,$$

где су A и B, односно n и α, интеграционе константе.

Ово решење показује да кретање има карактер опадајуће хармониске осцилације (§ 1·6211). Пошто је $k_1^2 = k^2 - l^2$ и према томе $k_1 < k$, видимо да је учестаност осцилације са отпорном силом мања од учестаности односне осцилације без отпора, а период је већи. Ако се l^2 може занемарити у поређењу са k^2, учестаност (и период) у приближном посматрању остаје иста за слободну осцилацију и осцилацију са отпорном силом.

Логаритамски декремент осцилације износи

$$\frac{l\pi}{k_1} = \frac{1}{2} l T_1 ,$$

где је T_1 период осцилације са отпорном силом.

Ако се поново зауставимо на почетним условима сличним условима претходног параграфа, тј. за $t=0$ узмемо да је $s=0$, $s'=v_0$, из (2) добијамо

$$s = \frac{v_0}{k_1} e^{-lt} \sin k_1 t .$$

График ове једначине показан је на слици 76, *b*.

II. $l^2 - k^2 > 0$. *Апериодично кретање.*

У овом случају јаке отпорне силе ($l > k$) вредности корена карактеристичне једначине могу се написати

$$z_1 = -l + p , \qquad z_2 = -l - p ,$$

где је $p = + \sqrt{l^2 - k^2}$ и зато је $p < l$. Интеграл једначине (1) добија облик

$$s = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} , \tag{3}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе. Пошто су оба корена z_1 и z_2 негативна, s никад не може постати бескрајно велико. Обратно, под условом $t \to \infty$, $s \to 0$ за све вредности C_1 и C_2. Кретање има *апериодичан* карактер. Према почетним условима тачка се или непосредно приближује положају равнотеже, а не пролази кроз тај положај, или пролази али само једанпут и, пошто се удаљи до одређеног растојања зауставља се, па се враћа и тежи положају равнотеже.

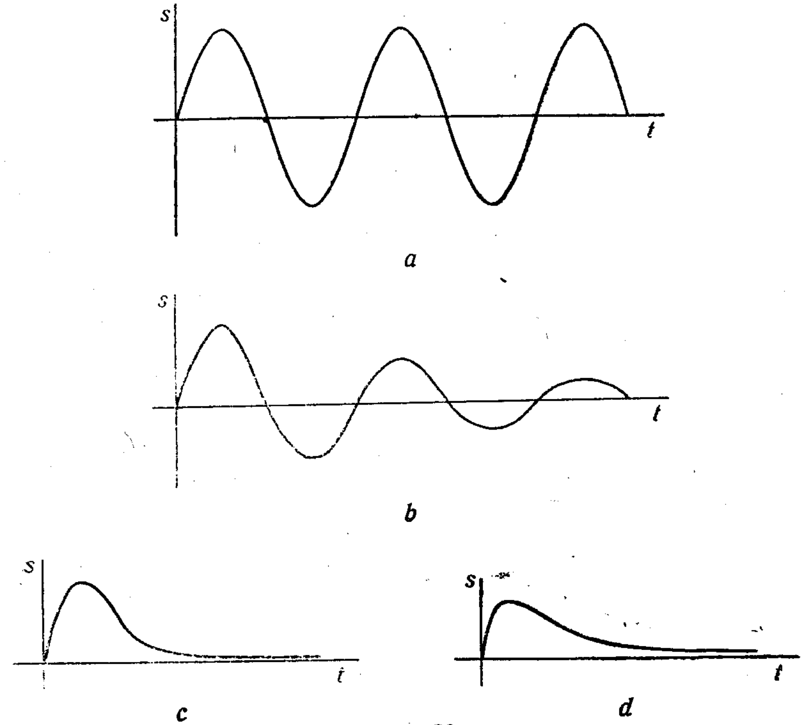
Узмимо случај почетних услова сличних претходним: нека је за $t=0$, $s=0$ и $s'=v_0$. Тада из (3) имамо

$$s = \frac{v_0}{2p} (e^{z_1 t} - e^{z_2 t}) ,$$

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{v_0}{2p} (z_1 e^{z_1 t} - z_2 e^{z_2 t}) .$$

Из услова $v=0$ одређујемо $t_1 = \frac{1}{2p} \log \frac{z_2}{z_1}$ кад се тачка зауставља и има највеће удаљење

$$s_{\max} = - \frac{v_0}{z_1} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{\frac{z_2}{2p}} ,$$



Слика 76

па се после приближује тачки *O*. График тог кретања је показан на сл. 76, *c*.

III. $l^2 - k^2 = 0$. *Гранични случај апериодичног кретања.*

У том случају корени карактеристичне једначине једнаки су

$$z_1 = z_2 = -l$$

и интеграл једначине (1) добија облик

$$s = (C_1 + C_2 t) e^{-lt} .$$

Кретање тачке је слично претходном кретању. Оно има апериодичан карактер. Под истим почетним условима као раније имамо

$$s = v_0 t\, e^{-lt},$$
$$v = v_0 (1 - l t)\, e^{-lt}.$$

У тренутку $t_1 = \frac{1}{l}$ тачка се зауставља на растојању

$$s_{\max} = \frac{v_0}{le},$$

враћа се натраг и тежи тачки O. График је на слици 76, d.

§ 15·2. Принудне осцилације. Случај осцилација без отпорне силе

Претпоставимо сад да на тачку сем силе, која зависи само од растојања и од које смо задржали само члан $-mk^2 s$, дејствује још и сила која зависи од времена. Ако ову силу означимо са $mf(t)$, диференцијална једначина кретања тачке може се написати

$$(1) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} + k^2 s = f(t).$$

Кретање тачке под утицајем такве силе зове се *принудно кретање*, а сила $mf(t)$ је *принудна сила.*

Интеграција једначине (1) оснива се на двема особинама таквих једначина:

1. Ако је $g(t)$ опште решење једначине без десне стране, тј. једначине $s'' + k^2 s = 0$, а $p(t)$ је партикуларно решење једначине са десном страном, збир

$$G(t) = p(t) + g(t)$$

даје опште решење једначине (1).

2. Ако $f(t)$ сматрамо као збир две функције, тј. ставимо

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t),$$

а $p_1(t)$ и $p_2(t)$ су партикуларна решења одговарајућих једначина само са $f_1(t)$ односно $f_2(t)$ са десне стране, онда је збир

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t)$$

партикуларно решење једначине са десном страном $f(t)$.

Претпоставимо да је функција $f(t)$ периодична са периодом T и да је можемо развити у конвергентан Фуријеов ред

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\omega t + b_\nu \sin \nu\omega t),$$

где је ω учестаност што одговара периоду T, тј.

$$\omega T = 2\pi.$$

Пошто знамо општи интеграл једначине $s'' + k^2 s = 0$, за одређивање општег решења једначине (1) треба наћи партикуларна решења једначина облика

$$(2) \qquad x_0'' + k^2 x_0 = \frac{1}{2} a_0,$$

$$(3) \qquad x_\nu'' + k^2 x_\nu = a_\nu \cos \nu\omega t,$$

$$(4) \qquad y_\nu'' + k^2 y_\nu = b_\nu \sin \nu\omega t.$$

Као партикуларно решење једначине (2) можемо узети константу

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{a_0}{k^2}.$$

За једначину (3) ставимо

$$x_\nu = A_\nu \cos \nu\omega t,$$

где је A_ν константа чију вредност одређујемо на овај начин. Ако двапут диференцирамо x_ν и ставимо у (3), после скраћивања са $\cos \nu\omega t$ добијамо

$$-A_\nu (\nu\omega)^2 + k^2 A_\nu = a_\nu,$$

одакле имамо

$$A_\nu = \frac{a_\nu}{k^2 - \nu^2 \omega^2}.$$

На сличан начин за партикуларно решење једначине (4) у облику

$$y_\nu = B_\nu \sin \nu\omega t$$

добијамо

$$B_\nu = \frac{b_\nu}{k^2 - \nu^2 \omega^2}.$$

На основу добивених резултата опште решење једначине (1) можемо написати овако

$$(5)\qquad s = \frac{1}{2}\frac{a_0}{k^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\nu^2\omega^2}\left[a_\nu\cos\nu\omega t + b_\nu\sin\nu\omega t\right] + C_1\cos kt + C_2\sin kt,$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе. Написани образац показује да се кретање тачке врши као резултат сабирања (*интерференције)* више хармониских осцилација. Осцилација која одговара решењу једначине без десне стране зове се *слободна* или *сопствена осцилација* тачке, а остале су *принудне*. Амплитуда сваке принудне осцилације зависи само од *једног* одговарајућег члана принудне силе. Додавање сваке нове осцилације не мења ефект који показује у кретању свака претходна осцилација. Према тој особини *(суперпозиција осцилација)* довољно је проучити утицај само једне принудне осцилације на кретање тачке.

§ 15·21. Проста принудна осцилација

Ако принудна сила зависи само од једног члана облика

$$a_\nu\cos\nu\omega t \quad \text{или} \quad b_\nu\sin\nu\omega t\,.$$

осцилација се зове *проста принудна осцилација*. Не ограничавајући општост расуђивања можемо диференциалну једначину просте принудне осцилације написати у облику

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2 s = a\cos\omega t,$$

јер учестаност $\nu\omega$ можемо сматрати као коефицијент.

Решење те једначине према (5) § 15·2 је

$$(1)\qquad s = \frac{a}{k^2-\omega^2}\cos\omega t + C_1\cos kt + C_2\sin kt.$$

Прва осцилација има исту учестаност и фазу као и принудна сила, њена амплитуда

$$N = \frac{a}{k^2-\omega^2}$$

не зависи од произвољних констаната C_1 и C_2, тј. од почетних услова кретања тачке.

Пошто сопствену осцилацију увек можемо претставити у облику

$$C_1\cos kt + C_2\sin kt = n\cos(kt+\alpha),$$

где су n и α нове константе, уместо (1) се може написати

$$s = N\cos\omega t + n\cos(kt+\alpha).$$

Ако ставимо

$$\omega = k + \delta,$$

добијамо

$$s = (N\cos\delta t + n\cos\alpha)\cos kt - (N\sin\delta t + n\sin\alpha)\sin kt,$$

одакле после увођења величина R и φ помоћу образаца

$$N\cos\delta t + n\cos\alpha = R\sin\varphi,$$
$$N\sin\delta t + n\sin\alpha = -R\cos\varphi,$$

долазимо до резултата

$$(2)\qquad s = R\sin(kt+\varphi).$$

Једначина (2) показује да резултат две осцилације можемо сматрати као једну осцилацију али амплитуда R и фаза φ те осцилације су функције времена, наиме

$$(3)\qquad R^2 = N^2 + n^2 + 2Nn\cos(\delta t - \alpha),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{N\cos\delta t + n\cos\alpha}{N\sin\delta t + n\sin\alpha}.$$

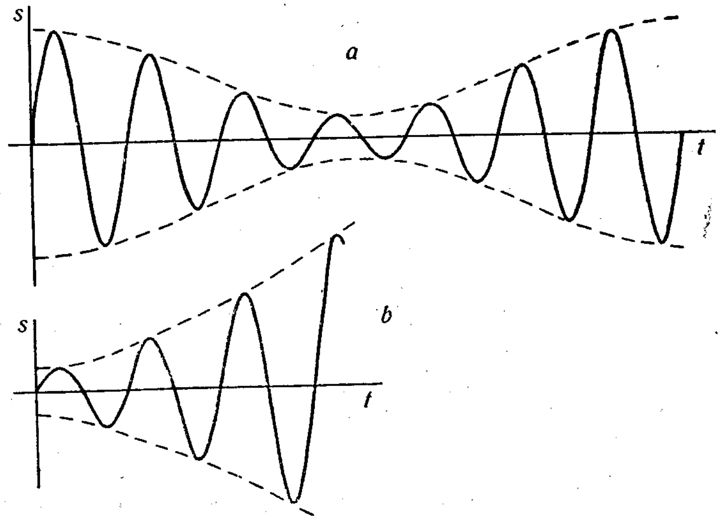
Из обрасца (3) за R^2 видимо да се R мења између две границе: $|N+n|$ и $|N-n|$. Према томе амплитуда има своју највећу и најмању вредност и период те промене је период функције $\cos(\delta t-\alpha)$. Означимо тај перид са T_d. Он износи

$$T_d = \frac{2\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{\omega-k} = \frac{T_s\,T_p}{T_s-T_p},$$

где смо са T_s означили период сопствене осцилације тачке, а са T_p — период принудне осцилације.

Појава јачања и слабљења неке осцилације зове се *подрхтавање* или *бијење*, Период T_d је *период подрхтавања*. Слика 77,*а* показује график таквог кретања.

Од претходног решења треба одвојити специјалан случај кад је учестаност ω принудне силе иста са учестаношћу k сопствене осцилације тачке.



Слика 77

Диференцијална једначина овог случаја

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2 s = a \cos kt \tag{4}$$

нема више партикуларно решење у облику $N \cos kt$. У овом случају партикуларно решење треба тражити у облику

$$s = At \sin kt\,,$$

где је A константа коју одређујемо на овај начин. Ако уврстимо написани израз за s у једначину (4), лако ћемо добити да је вредност $A = \dfrac{a}{2k}$ и после тога је решење једначине

$$s = \frac{a}{2k}\, t \sin kt + n \cos (kt + \alpha)\,.$$

И ово решење можемо претставити у облику

$$s = Q \sin (kt + \psi)\,, \tag{5}$$

где је

$$Q^2 = n^2 \cos^2 \alpha + \left(n \sin \alpha - \frac{a}{2k}\, t\right)^2, \tag{6}$$

$$\operatorname{cotg} \psi = \frac{at}{2nk} \sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha\,.$$

Израз (6) за амплитуду осцилације (5) показује да она расте са временом и може да постане већа ма од које унапред дате величине.

Појава кад два периодична фактора имају периоде исте вредности и због тога један појачава други зове се *резонанција*. У нашем случају принудна сила и сопствена осцилација тачке са истим учестаностима стварају појаву резонанције та два периодична фактора.

Слика 77, *b* показује график кретања тачке у случају резонанције.

Случај резонанције може се сматрати као гранични случај подрхтавања кад период подрхтавања T_d тежи бесконачности.

§ 15·211. Проста принудна осцилација са отпорном силом

Диференцијалну једначину просте принудне осцилације са отпорном силом (§§ 15·11 и 15·21) треба написати

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2l \frac{ds}{dt} + k^2 s = a \cos \omega t\,. \tag{1}$$

Партикуларно решење те једначине потражимо у облику

$$s = A \cos \omega t + B \sin \omega t\,, \tag{2}$$

где су A и B константе које се одређују на овај начин.

Ако уврстимо вредност (2) у једначину (1) и средимо чланове, добићемо

$$[A (k^2 - \omega^2) + 2Bl\,\omega - a] \cos \omega t + [B (k^2 - \omega^2) - 2Al\,\omega] \sin \omega t = 0\,.$$

Пошто ова једначина мора да важи за сваку вредност t, биће

$$A (k^2 - \omega^2) + 2Bl\,\omega = a,$$

$$2Al\,\omega - B (k^2 - \omega^2) = 0\,.$$

После решења ових једначина добијамо

$$A = Ma\,(k^2 - \omega^2)\,, \qquad B = 2Mal\omega\,,$$

где смо са M означили

$$M = [(k^2 - \omega^2)^2 + 4l^2\omega^2]^{-1}\,.$$

На тај начин решење једначине (1) је

$$(3) \qquad s = Ma[(k^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2l\omega\sin\omega t] + C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}\,,$$

где су

$$z_{1,2} = -l \pm \sqrt{l^2 - k^2}\,,$$

а C_1 и C_2 произвољне константе.

Ако ставимо

$$Ma\,(k^2 - \omega^2) = N_1\cos\beta\,, \qquad 2Mal\omega = N_1\sin\beta\,,$$

решење (3) можемо написати

$$(4) \qquad s = N_1\cos(\omega t - \beta) + C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}\,,$$

где су

$$N_1 = a\sqrt{M} = \frac{a}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4l^2\omega^2}}\,, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{2la}{k^2 - \omega^2}\,.$$

У § 15·11 видели смо да функцији

$$f(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$$

одговара или опадајућа хармониска осцилација или једно апериодично кретање које такође има, или непосредно од почетка кретања или после извесног времена, опадајући карактер. Другим речима

$$[f(t)]_{t\to\infty} \to 0\,.$$

Међутим амплитуда N_1 принудне осцилације има сталну вредност. Из тог следује да после извесног времена у кретању тачке надвлада принудна осцилација и кретање ће имати карактер хармониске осцилације са периодом принудне силе. Само између фаза осцилације силе и тачке постоји разлика β.

У случају резонанције, кад је $\omega = k$, $\operatorname{tg}\beta = \infty$ и према томе је $\beta = \frac{\pi}{2}$. Амплитуда принудне осцилације има вредност

$N_1 = \frac{a}{2l\omega}$ и кретање се после довољно великог времена одређује једначином

$$s = \frac{a}{2l\omega}\sin\omega t\,.$$

Ако упоредимо ову једначину са законом принудне силе $a\cos\omega t$, закључујемо да сила има највећу вредност кад тачка пролази кроз положај равнотеже ($s = 0$).

§ 15·3. Нелинеарне осцилације

Досад смо анализирали оне осцилације тачке око положаја равнотеже у којима је сила зависила само од чланова првог степена растојања s тачке од положаја равнотеже и брзине s'. Такве осцилације се зову *линеарне*, било слободне, било принудне, кад на тачку дејствује још и сила која зависи од времена. У случају кад се осцилације врше под утицајем силе, која се не јавља више као линеарна функција променљивих s и s', осцилација се зове *нелинеарна*.

У довољно општем случају диференцијална једначина нелинеарне осцилације је

$$(1) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + 2l\frac{ds}{dt} + k^2 s - \varepsilon f(s, s') = F(t)\,,$$

где су l — коефицијент линеарне отпорне силе, k^2 — коефицијент линеарне силе, $\varepsilon\, mf(s, s')$ израз допунске нелинеарне силе, при чему је m маса тачке, а ε коефицијент пропорционалности, који можемо сматрати као мали, ако сила мало отступа од линеарног закона. $mF(t)$ је принудна сила.

Интеграција и проучавање једначине (1) сад се развило у нарочиту грану рационалне механике и математике. Већина метода тог проучавања оснива се на приближној интеграцији једначина сличних (1). Показаћемо на конкретном примеру како се може приближно проучити релативно једноставна нелинеарна једначина.

Узмимо малу осцилацију математичког клатна. Диференцијална једначина (тачна) кретања тог клатна, као што смо видели (§ 10·52), је

$$R\frac{d^2\theta}{dt^2}+g\sin\theta=0$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2}+k^2R\sin\theta=0, \tag{2}$$

кад ставимо

$$R\theta=s,\qquad k^2=\frac{g}{R}.$$

Једначина (2) решава се *тачно* помоћу елиптичне функције. У првом приближном посматрању за мале углове $\sin\theta$ можемо сменити углом и тада имамо једначину

$$\frac{d^2s}{dt^2}+k^2s=0,$$

којој одговара хармониска осцилација.

У другом приближном посматрању $\sin\theta$ треба сменити са $\theta-\frac{1}{6}\theta^3$ и тада из (2) добијамо једначину

$$\frac{d^2s}{dt^2}+k^2s-\varepsilon s^3=0, \tag{3}$$

где је $\varepsilon=\dfrac{k^2}{6R^2}=\dfrac{g}{6R^3}$.

Ставимо себи задатак да решимо једначину (3) сматрајући ε као мали број. Узмимо ове почетне услове: за $t_0=0$, $s_0=0$, $s_0'=v_0$.

Пошто решење претставља неку осцилацију, а периодичну функцију можемо изразити Фуријеовим редом, потражимо решење једначине (3) у облику реда

$$s=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos npt+b_n\sin npt),$$

где су p, a_0, a_n, b_n константе.

Из услова да се у близини равнотеже са променом знака код t мења и знак померања s, закључујемо да функција мора бити непарна, према томе у претходном обрасцу треба да отпадну сви косинуси и слободан члан. Ако се, сем тога, зауставимо само на приближном обрасцу, можемо узети, рецимо, три члана и тада тражено решење треба да има облик

$$s=b_1\sin pt+b_2\sin 2pt+b_3\sin 3pt. \tag{4}$$

Према томе треба одредити четири величине: три коефицијента b_1, b_2, b_3 и учестаност p прве осцилације.

Пре свега видимо да је први почетни услов задовољен, јер је $s(0)=0$.

Ако диференцирамо (4) по времену, добијамо

$$s'=(b_1\cos pt+2b_2\cos 2pt+3b_3\cos 3pt)\,p, \tag{5}$$

одакле имамо за $t=0$ прву једначину за одређивање констаната

$$v_0=(b_1+2b_2+3b_3)\,p. \tag{6}$$

Диференцирајмо (5) још један пут — имаћемо

$$s''=-(b_1\sin pt+4b_2\sin 2pt+9b_3\sin 3pt)\,p^2. \tag{7}$$

Најзад израчунајмо s^3 под претпоставком да су коефицијенти b_2 и b_3 мали у поређењу са b_1. Тада можемо написати

$$s_1^3=\frac{3}{4}b_1^3\sin pt+\frac{3}{2}b_1^2b_2\sin 2pt-\frac{1}{4}b_1^3\sin 3pt, \tag{8}$$

при чему смо искористили тригонометриске обрасце

$$\sin^3 pt=\frac{3}{4}\sin pt-\frac{1}{4}\sin 3pt,\qquad \sin^2 pt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2pt,$$

и изоставили чланове са аргументима већим од $3pt$.

Ако ставимо изразе (4), (7) и (8) у једначину (3) и коефицијенте уз $\sin pt$, $\sin 2pt$ и $\sin 3pt$ изједначимо са нулом, добићемо ове три једначине

$$b_1\left(k^2-p^2-\frac{3}{4}b_1^2\varepsilon\right)=0, \tag{9}$$

$$b_2\left(k^2-4p^2-\frac{3}{2}b_1^2\varepsilon\right)=0, \tag{10}$$

$$b_3(k^2-9p^2)+\frac{1}{4}b_1^3\varepsilon=0. \tag{11}$$

Пре свега из (10) следује да је $b_2=0$. Кад даље ставимо

$$p=k\,(1-x),\qquad b_1=\frac{v_0}{k}(1+y),\qquad b_3=\frac{v_0}{k}z$$

и сматрамо x, y, z као мале величине, онда из једначина (9), (11) и (6) добијамо једначине

$$2k^2 x = \frac{3}{4} b_1^2 \varepsilon = \frac{3}{4} \frac{v_0^2 \varepsilon}{k^2},$$

$$8k^2 z = \frac{1}{4} \frac{v_0^2 \varepsilon}{k^2},$$

$$y + 3z = x.$$

Тај систем даје дефинитивно ово решење

$$x = 12h, \quad y = 9h, \quad z = h,$$

где је

$$h = \frac{1}{32} \frac{a^2 \varepsilon}{k^2}, \quad a = \frac{v_0}{k}.$$

После тога имамо

$$p = k(1-12h), \quad b_1 = a(1+9h), \quad b_3 = ah.$$

Једначина кретања тачке је

$$s = \frac{v_0}{k} [(1+9h) \sin k(1-12h)t + h \sin 3k(1-12h)t].$$

Период T те осцилације има ову приближну вредност

$$T = \frac{2\pi}{k(1-12h)} = \frac{2\pi}{k}(1+12h) = \frac{2\pi}{k}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{a^2 \varepsilon}{k^2}\right)$$

или дефинитивно

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right),$$

где је $\alpha = \frac{a}{R}$ угао највећег скретања клатна од вертикалног правца. Изведена вредност периода поклапа се са приближном вредношћу коју смо имали у § 10·521.

§ 15·4. Мале осцилације тачке на површини

Нека је положај тачке на површини S одређен генералисаним координатама q_1 и q_2 тако да је површина дата једначинама

$$x = f_1(q_1, q_2), \quad y = f_2(q_1, q_2), \quad z = f_3(q_1, q_2).$$

Претпоставимо да на тачку дејствује сила са функцијом силе $U(q_1, q_2)$, коју можемо да развијемо у ред. Нека функција

U има maximum. Тада том положају одговара стабилан положај равнотеже. Из услова за extremum

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0$$

одређујемо вредности координата q_1 и q_2 за тај положај. После тога можемо променити рачунање координата q_1 и q_2 тако да за положај равнотеже имамо $q_1 = 0$, $q_2 = 0$.

Ако у реду

$$U = U_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\partial U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right] + \dots$$

изоставимо константу U_0, јер, као што знамо, она код функције силе не игра улогу, и зауставимо се само на члановима другог степена, за U можемо написати образац

$$U = -(aq_1^2 + 2bq_1 q_2 + cq_2^2),$$

где смо означили

$$2a = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0, \quad 2b = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0, \quad 2c = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0.$$

Квадратна форма

$$aq_1^2 + 2bq_1q_2 + cq_2^2$$

за случај maximum'а мора бити одређена, тј. увек истог знака, а при томе позитивна ($a > 0$, $b^2 - ac < 0$).

Жива сила тачке је

$$2T = Aq_1'^2 + 2B q_1' q_2' + Cq_2'^2,$$

при чему коефицијенте A, B, C у близини положаја равнотеже за мале осцилације можемо сматрати као сталне.

За одређивање кретања тачке узимамо Лагранжеве једначине за независне координате

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_1'} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} &= Aq_1'' + Bq_2'' + aq_1 + bq_2 = 0, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_2'} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - \frac{\partial U}{\partial q_2} &= Bq_1'' + Cq_2'' + bq_1 + cq^2 = 0. \end{aligned}$$

Добили смо систем од две линеарне једначине са константним коефицијентима. Пре интеграције извршимо трансформацију тих једначина. Уведимо нове променљиве s_1 и s_2 као линеарне функције претходних

$$s_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2, \qquad s_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 \tag{2}$$

под условом да се систем (1) трансформише у једначине облика

$$s_1'' + \lambda_1 s_1 = 0, \qquad s_2'' + \lambda_2 s_2 = 0, \tag{3}$$

где су λ_1 и λ_2 константне величине.

За одређивање константних величина $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \lambda_1, \lambda_2$ можемо поступити овако.

Ставимо у (3) вредности (2)

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} q_1'' + \alpha_{12} q_2'' + \lambda_1 (\alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2) = 0, \\ &\alpha_{21} q_1'' + \alpha_{22} q_2'' + \lambda_2 (\alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Добијени систем (4) мора бити еквивалентан систему (1). То значи увек постоје таква два броја, прво m_1 и m_2, а затим n_1 и n_2, да ако њима помножимо једначине (1) па их саберемо, треба да добијемо прво, рецимо, прву једначину од (4), а затим другу. Према томе можемо између коефицијената написати ове везе

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= Am_1 + Bm_2, & \alpha_{12} &= Bm_1 + Cm_2; \\ \lambda_1 \alpha_{11} &= am_1 + bm_2, & \lambda_1 \alpha_{12} &= bm_1 + cm_2 \end{aligned} \tag{5}$$

и сличне за n_1 и n_2 са множитељем λ_2 и α_{21} и α_{22}.

Ако из једначина (5) елиминишемо α_{11} и α_{12}, добићемо две линеарне једначине

$$(A\lambda_1 - a)\, m_1 + (B\lambda_1 - b)\, m_2 = 0,$$
$$(B\lambda_1 - b)\, m_1 + (C\lambda_1 - c)\, m_2 = 0$$

и сличне за n_1 и n_2 са множитељем λ_2. Да би те једначине имале решење, сваки од множитеља, било λ_1, било λ_2, мора бити корен једначине

$$\begin{vmatrix} A\lambda - a, & B\lambda - b \\ B\lambda - b, & C\lambda - c \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Ову једначину можемо још написати

$$\varphi(\lambda) = (A\lambda - a)(C\lambda - c) - (B\lambda - b)^2 =$$
$$= (AC - B^2)\lambda^2 - (Ac - 2Bb + Ca)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Ако са d означимо мањи, а са D већи од количника

$$\frac{a}{A}, \qquad \frac{c}{C},$$

онда можемо саставити ову таблицу за промену знака полинома $\varphi(\lambda)$

λ	0	d	D	$+\infty$
$\varphi(\lambda)$	$+$	$-$	$-$	$+$

при чему смо искористили неједнакости $AC - B^2 > 0$, $ac - b^2 > 0$.

Из наведене таблице следује да наша једначина има два стварна и то позитивна корена — један, означимо га са λ_1, мањи од d, и други, λ_2, већи од D. Ако ставимо

$$\lambda_1 = k_1^2, \qquad \lambda_2 = k_2^2$$

једначине (3) добијају облик

$$s_1'' + k_1^2 s_1 = 0, \qquad s_2'' + k_2^2 s_2 = 0 \tag{7}$$

и одређују две независне хармониске осцилације.

Координате s_1 и s_2, које доводе једначине (1) на облик (3), зову се *главне координате* тачке на површини. Хармониске осцилације, одређене једначинама (7), зову се *главне осцилације* тачке.

Учинили смо у почетку овог параграфа претпоставку да функција U има maximum и да је према томе положај равнотеже стабилан. Ако тај услов није постављен, горња расуђивања остају на снази, само се ништа не може казати за величине a, b, c осим да су стварне. Тада за корене једначине (6) можемо тврдити само да су стварни, јер полиному $\varphi(\lambda)$ одговара схема знакова

λ	$-\infty$	d или D	$+\infty$
$\varphi(\lambda)$	$+$	$-$	$+$

Карактер тих стварних корена одређује карактер равнотеже. Ако су оба корена позитивна, равнотежа је стабилна.

§ 15·41. Мале осцилације тешке тачке на површини

Нека је површина дата једначином

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

при чему је оса z вертикална и наперена навише. Функција силе теже изгледа

$$U = -mgz,$$

где је m маса тачке и g убрзање силе теже.

Услов равнотеже $dU = 0$ даје $dz = 0$ или

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Решавањем једначина (1) и (2) одређујемо положаје могућих равнотежа. Ако почетак координата сместимо у једну од таквих тачака ($x = y = z = 0$) и x, односно y, осу наперимо у правцу линије кривине на површини, за једначину површине у близини такве тачке имамо

$$z = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right]$$

или

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right),$$

где су R_1 и R_2 полупречници кривине, са одговарајућим знацима, за главне нормалне пресеке. Сваки од њих је позитиван кад се центар кривине налази над хоризонтом тачке равнотеже.

Пошто жива сила тачке за такве координате има израз

$$2T = m(x'^2 + y'^2),$$

диференцијалне једначине кретања могу се написати

$$x'' + \frac{g}{R_1}x = 0, \qquad y'' + \frac{g}{R_2}y = 0.$$

Видимо да су изабране координате x и y главне координате за нашу тачку.

Ако су R_1 и R_2 оба позитивни, положај равнотеже је стабилан, свака главна осцилација је хармониска са периодом $2\pi\sqrt{\frac{R_1}{g}}$, односно $2\pi\sqrt{\frac{R_2}{g}}$.

§ 15·5. Мале осцилације слободне тачке

Претпоставимо да је положај тачке одређен криволиниским координатама q_1, q_2, q_3, да је у положају равнотеже $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ и да су жива сила T и функција силе U

$$2T = A_1 q_1'^2 + A_2 q_2'^2 + A_3 q_3'^2 + 2B_{23} q_2' q_3' + \\ + 2B_{31} q_3' q_1' + 2B_{12} q_1' q_2',$$

$$U = -(a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_3^2 + 2b_{23} q_2 q_3 + 2b_{31} q_3 q_1 + 2b_{12} q_1 q_2),$$

где су сви коефицијенти било живе силе, било функције силе константне величине.

Уведимо слично § 15·4 главне координате тачке помоћу образаца

$$s_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \alpha_{13} q_3,$$
$$s_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \alpha_{23} q_3,$$
$$s_3 = \alpha_{31} q_1 + \alpha_{32} q_2 + \alpha_{33} q_3,$$

да би једначине кретања добиле овај облик

$$s_1'' + \lambda_1 s_1 = 0, \qquad s_2'' + \lambda_2 s_2 = 0, \qquad s_3'' + \lambda_3 s_3 = 0.$$

Тада ћемо, као у претходном параграфу, добити за одређивање $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ кубну једначину

$$\begin{vmatrix} A_1\lambda - a_1, & B_{12}\lambda - b_{12}, & B_{13}\lambda - b_{13} \\ B_{21}\lambda - b_{21}, & A_2\lambda - a_2, & B_{23}\lambda - b_{23} \\ B_{31}\lambda - b_{31}, & B_{32}\lambda - b_{32}, & A_3\lambda - a_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

где је: $B_{12} = B_{21}$, $B_{23} = B_{32}$, $B_{13} = B_{31}$, а исте једначине важе и за мала слова.

За случај кад U има maximum ова једначина има три стварна и то позитивна корена и њима одговарају три главне хармониске осцилације. У детаље доказа тог става нећемо улазити, јер су они слични § 15·4.

Ако функција U нема maximum'a, природа корена једначине (1) одређује карактер равнотеже.

§ 15·51 Мале осцилације тачке на коју дејствују централне силе пропорционалне растојању

Нека на тачку масе m дејствују силе привлачења пропорционалне растојању од сталних центара са масама m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, чији је положај одређен векторима $\vec{r}_i$. Вредност резултанте свих тих сила је

$$\vec{F} = -k^2 m \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r} - \vec{r}_i),$$

где је $\vec{r}$ вектор положаја тачке m.

Ако уведемо тачку C, *средиште маса*, чији је вектор положаја $\vec{r}_c$ одређен једначином

$$M\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i,$$

где је M маса свих центара, израз за силу можемо претставити

$$\vec{F} = -k^2 m M (\vec{r} - \vec{r}_c).$$

Најзад, ако ставимо

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_c,$$

тј. уведемо вектор положаја према тачки C, онда је сила дефинитивно

$$\vec{F} = -k^2 m M \vec{\rho}.$$

Њена функција силе добија вредност

$$U = -\frac{1}{2} k^2 m M \rho^2,$$

јер је

$$dU = (\vec{F} d\vec{\rho}) = -k^2 m M (\vec{\rho}\, d\vec{\rho}) = -\frac{1}{2} k^2 m M d\rho^2.$$

Тачка се налази у равнотежи једино у положају за који је $\vec{\rho} = 0$, јер само за тај положај је $\vec{F} = 0$. Тај положај је тачка C — средиште маса m_i.

Ако положај тачке одређујемо координатама ξ, η, ζ према триједру оса са почетком у C, онда се жива сила одређује једначином

$$2T = m(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2),$$

а функције силе

$$2U = -k^2 M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Пошто једначина кретања, рецимо за координату ξ, изгледа

$$\xi'' + k^2 M \xi = 0, \tag{1}$$

закључујемо да су координате ξ, η, ζ главне координате наше слободне тачке у пољу датих сила. Пошто једначина (1) и сличне једначине за две остале координате одређују хармониске осцилације, тачка C је положај стабилне равнотеже. Око тог средишта тачка m врши кретање — резултат три хармониске осцилације (§ 5·22).

У случају, кад имамо силе одбијања пропорционалне растојању, место k^2 треба ставити $-k^2$ и диференцијалну једначину кретања за исту координату ξ треба написати

$$\xi'' - k^2 M \xi = 0.$$

Ова једначина више не одређује осцилацију већ кретање чија је једначина

$$\xi = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{-k_1 t}, \tag{2}$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе, а $k_1 = k\sqrt{M}$.

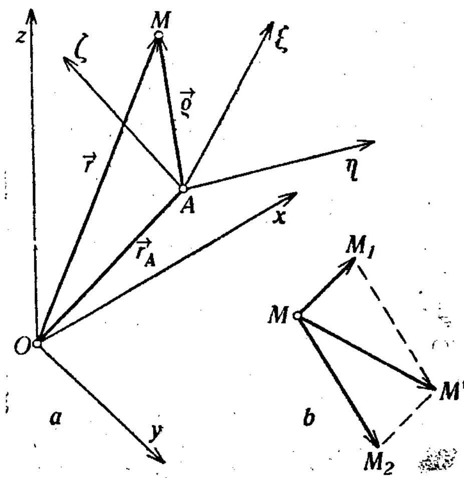
Једначина (2) показује да за време кретања тачке увек постоји један такав тренутак после којега се тачка све више удаљује од положаја равнотеже. Према томе, тачка C је за силе одбијања положај лабилне равнотеже.

ГЛАВА ШЕСНАЕСТА

Релативно кретање тачке[1])

§ 16·1. Релативно кретање тачке

Замислимо средину или простор који сматрамо као непокретан. Вежимо са тим простором триједар оса $Oxyz$ (сл. 78, a), који ћемо звати *непокретни* или *апсолутни триједар*.



Слика 78

Нека се у том простору креће друга непромењива средина, рецимо средина неког чврстог тела. Са том другом средином вежимо триједар оса $A\xi\eta\zeta$, то је *покретни* или *релативни триједар*.

Најзад замислимо тачку M, која може мењати свој положај према првом и другом триједру. Код те тачке можемо разликовати ова три кретања:

1. Кретање тачке M према непокретном триједру $Oxyz$. Ово кретање се зове *апсолутно кретање* тачке. Апсолутност тог кретања има условни карактер у вези са тим коју смо средину изабрали за непокретну.

[1]) Читање ове главе претпоставља знање кинематике чврстог тела.

2. Кретање тачке M према покретном триједру $A\xi\eta\zeta$. Оно се зове *релативно кретање* тачке.

3. Најзад можемо замислити и треће кретање. То је кретање оне тачке средине покретног триједра $A\xi\eta\zeta$, која се у датом тренутку поклапа са тачком M. Такво кретање тачке M, као тачке покретне средине или чврстог тела, зове се *преносно кретање*.

§ 16·2. Брзина тачке у релативном кретању

Нека се у тренутку t покретна тачка налазила у положају M (сл. 77, b) и нека је после интервала времена Δt прешла у положај M' у апсолутној средини. Вектор $\overrightarrow{MM'}$ даје *апсолутно померање* тачке.

За то време Δt тачка се кретала и у средини тела $A\xi\eta\zeta$, тј. према посматрачу који је чврсто везан за тај триједар, и извршила је померање $\overrightarrow{MM_1}$. То је *релативно померање* тачке.

Најзад она тачка средине $A\xi\eta\zeta$, која се у моменту t поклапала са тачком M, за време Δt прешла је у положај M_2 и на тај начин вектор $\overrightarrow{MM_2}$ одговара *преносном померању* тачке.

Јасно је, да је завршни положај M' тачке резултат двају померања — релативног и преносног. Према томе имамо векторску једначину

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2}.$$

Ако чланове те једначине поделимо са Δt и пређемо на граничне вредности, добијамо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_2}}{\Delta t}. \tag{1}$$

Први израз са апсолутним померањем $\overrightarrow{MM'}$ даје *апсолутну брзину* тачке коју ћемо означити са $\vec{v}_{\text{апс.}}$; израз са релативним померањем $\overrightarrow{MM_1}$ претставља *релативну брзину* коју ћемо означити са $\vec{v}_{\text{рел.}}$; најзад израз са преносним померањем даје *преносну брзину*, коју ћемо означити са $\vec{v}_{\text{прен.}}$. На тај начин ставимо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \vec{v}_{\text{апс.}}, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \vec{v}_{\text{рел.}}, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_2}}{\Delta t} = \vec{v}_{\text{прен.}}.$$

Из једначине (1) тада закључујемо

(2) $$\vec{v}_{\text{апс.}} = \vec{v}_{\text{рел.}} + \vec{v}_{\text{прен.}}\,.$$

Апсолутна брзина $\vec{v}_{\text{апс.}}$ је векторски извод вектора положаја $\vec{r}$ тачке M у односу на тачку O, тј.

$$\vec{v}_{\text{апс.}} = \dot{\vec{r}}\,.$$

Она има за координате x', y', z', ако апсолутне координате тачке M означимо са x, y, z.

Релативна брзина $\vec{v}_{\text{рел.}}$ је векторски извод вектора положаја $\vec{\rho}$ тачке M у односу на тачку A *у колико се тај вектор мења у средини* $A\xi\eta\zeta$. Ако тај извод означимо са $\overset{|\cdot|}{\rho}$, имамо

$$\vec{v}_{\text{рел.}} = \overset{|\cdot|}{\rho}\,.$$

Ако координате тачке M у односу на триједар $A\xi\eta\zeta$ означимо са ξ, η, ζ, релативна брзина у односу на исте осе има за координате ξ', η', ζ'.

Што се тиче преносне брзине, из кинематике чврстог тела знамо да се она изражава

$$\vec{v}_{\text{прен.}} = \vec{v}_A + [\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,],$$

где је $\vec{v}_A$ брзина тачке A, тј. транслаторна брзина тела и $\vec{\Omega}$ угаона брзина тела са координатама P, Q, R у односу на осе $Oxyz$ и координатама p, q, r у односу на осе $A\xi\eta\zeta$.

Према овим резултатима једначину (2) можемо још написати

(3) $$\dot{\vec{r}} = \overset{|\cdot|}{\rho} + \dot{\vec{r}}_A + [\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]\,.$$

Овој векторској једначини одговарају две серије скаларних једначина: за осе триједра $Oxyz$ прва једначина имаће облик

$$x' = \xi'\lambda_x + \eta'\mu_x + \zeta'\nu_x + x_A' + Q\,(z - z_A) - R\,(y - y_A)\,,$$

где су λ_x, μ_x, ν_x косинуси углова осе Ox са осама триједра $A\xi\eta\zeta$. За осе триједра $A\xi\eta\zeta$ прва једначина изгледа

$$x'\lambda_x + y'\lambda_y + z'\lambda_z = \xi' + x_A'\lambda_x + y_A'\lambda_y + z_A'\lambda_z + q\zeta - r\eta\,.$$

У вези са једначином (3) поменимо једно у теорији релативног кретања врло важно правило о начину векторског диференцирања вектора одређеног у покретној средини.

За сваки тренутак времена имамо

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}\,,$$

а та једначина после диференцирања даје

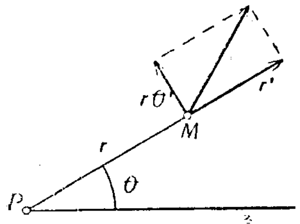
(4) $$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\rho}}\,.$$

Ако упоредимо (4) са (3), долазимо до ове векторске једначине

(5) $$\dot{\vec{\rho}} = \overset{|\cdot|}{\rho} + [\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]\,.$$

Вектор $\dot{\rho}$ сматрамо као *тотални извод* вектора положаја тачке M у односу на тачку A, вектор $\overset{|\cdot|}{\rho}$ је *релативни извод* тог вектора, а $[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]$ је *преносни део извода* који долази због ротације чврстог тела.

Одређивање брзине апсолутног кретања, као збира релативне и преносне брзине, често може да послужи за извођење и јасније тумачење брзине тачке. Тако, на пр., у случају одређивања положаја тачке у равни помоћу поларних координата r и θ (сл. 79), произвољно кретање тачке у равни увек се може сматрати као апсолутно кретање које је резултат релативног кретања (дуж потега) и преносног (заједно са потегом). Пошто брзина првог кретања има вредност $\frac{dr}{dt}\,ort\,\vec{r}$, а преносног $r\,\theta'\,\vec{n}$,



Слика 79

где је $\vec{n}$ орт нормале на $\vec{r}$, онда за брзину тачке добијамо

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,ort\,\vec{r} + r\,\theta'\,\vec{n}\,.$$

§ 16·3. Убрзање тачке у релативном кретању

Ако чланове једначине (3) § 16·2, која одређује апсолутну брзину, диференцирамо још једанпут по времену, према правилу диференцирања (5) § 16·2, као резултат добијамо

$$\ddot{\vec{r}} = \overset{|\cdot\cdot|}{\rho} + [\vec{\Omega}\,\overset{|\cdot|}{\rho}\,] + \ddot{\vec{r}}_A + [\dot{\vec{\Omega}}\,\vec{\rho}\,] + [\vec{\Omega}, \overset{|\cdot|}{\rho} + [\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]]\,.$$

Тај резултат можемо још претставити

$$(1)\qquad \ddot{\vec r}=\overset{|\cdot\cdot|}{\vec\rho}+\ddot{\vec r}_A+[\dot{\vec\Omega}\,\vec\rho]+[\vec\Omega\,[\vec\Omega\,\vec\rho]]+2\,[\vec\Omega\,\overset{|\cdot|}{\vec\rho}\,].$$

Протумачимо чланове те једначине.

Вектор $\ddot{\vec r}=\vec w_{\text{апс.}}$ даје *апсолутно убрзање* тачке.

Вектор $\overset{|\cdot\cdot|}{\vec\rho}=\vec w_{\text{рел.}}$ је *релативно убрзање* тачке.

Збир

$$\ddot{\vec r}_A+[\,\dot{\vec\Omega}\,\vec\rho]+[\vec\Omega\,[\vec\Omega\,\vec\rho]]=\vec w_{\text{прен.}},$$

као што се то изводи у кинематици чврстог тела, даје убрзање тачке чврстог тела и према томе је *преносно убрзање*.

Вектор $2\,[\vec\Omega\,\overset{|\cdot|}{\vec\rho}]=2\,[\vec\Omega\,\vec v_{\text{рел.}}]$ појављује се као допунски члан. Он даје нову компоненту, која се *са супротним знаком* зове *Кориолисово убрзање*.

Ако ово убрзање означимо са $\vec w_{\text{Кор.}}$, тј. ставимо

$$(2)\qquad \vec w_{\text{Кор.}}=-\,2\,[\vec\Omega\,\vec v_{\text{рел.}}\,],$$

једначина (1) даје везу између убрзања

$$(3)\qquad \vec w_{\text{апс.}}=\vec w_{\text{рел.}}+\vec w_{\text{прен.}}-\vec w_{\text{Кор.}}$$

Ова једначина изражава *Кориолисову теорему* о убрзању тачке у релативном кретању.

Из (2) се види да Кориолисовог убрзања нема у овим специјалним случајевима:

1. $\vec\Omega=0$. Кретање тела $A\xi\eta\zeta$ има транслаторни карактер.
2. $\vec v_{\text{рел.}}=0$. Тачка нема релативног кретања.
3. Вектори $\vec\Omega$ и $\vec v_{\text{рел.}}$ имају исти правац.

Напишимо координате појединих чланова једначине (3) за оне осе, за које су те координате једноставније, јер увек можемо са једног триједра прећи на други.

Вектор $\vec w_{\text{апс.}}$ за осе $Oxyz$ има координате x'', y'', z''. Релативно убрзање $\vec w_{\text{рел.}}$ има за осе $A\xi\eta\zeta$ координате ξ'', η'', ζ''.

За преносно убрзање напишимо, као пример, само једну координату, рецимо за $A\xi$ осу

$$x_A''\lambda_x+y_A''\lambda_y+z_A''\lambda_z+q'\zeta-r'\eta+p\,(p\xi+q\eta+r\zeta)-(p^2+q^2+r^2)\,\xi\,.$$

Најзад Кориолисово убрзање има за координате у односу на триједар $A\xi\eta\zeta$ изразе

$$-2\,(q\zeta'-r\eta'),\qquad -2\,(r\xi'-p\zeta'),\qquad -2\,(p\eta'-q\xi')\,.$$

§ 16·4. Диференцијалне једначине релативног кретања тачке

Основни проблем динамике релативног кретања материјалне тачке састоји се у овом.

Дато је:

1. Почетни положај тачке и почетна релативна брзина, на пр. у односу на Земљу.
2. Кретање покретне средине (тела) према апсолутној средини, на пр. кретање Земље у звезданом простору.
3. Силе што дејствују на тачку, на пр. сила привлачења Земље и других тела.

А тражи се одређивање *релативног кретања* тачке. У нашем примеру тражи се одређивање кретања тешке тачке у односу на Земљу.

За одређивање тог кретања постављају се нарочите диференцијалне једначине и то на основу ових расуђивања.

Пошто се основна векторска диференцијална једначина кретања тачке односи на непокретне осе, тј. на апсолутно кретање, једначину треба написати

$$(1)\qquad m\vec w_{\text{апс.}}=\vec F,$$

где је m маса тачке и $\vec F$ резултанта активних сила и сила реакција, ако је тачка неслободна. За сваку од сила које чине ту резултанту треба да покажемо извор, како то тражи трећи Њутнов закон и према томе ту силу можемо сматрати као *стварну силу*. Нагласимо то и ознаком $\vec F_{\text{ств.}}$.

Ако место апсолутног убрзања $\vec w_{\text{апс.}}$ ставимо у (1) његову вредност из (3) § 16·3, добићемо једначину

$$(2)\qquad m\vec w_{\text{рел.}}=\vec F_{\text{ств.}}-m\vec w_{\text{прен.}}+m\vec w_{\text{Кор.}}$$

Производи $-m\vec{w}_{\text{прен.}}$ и $m\vec{w}_{\text{Кор.}}$ имају димензију силе, но пошто за такве силе не можемо показати изворе, њих треба сматрати као *фиктивне силе*.

Прву фиктивну силу, чија је вредност $-m\vec{w}_{\text{прен.}}$, зваћемо *водећа сила;* означимо је са $\vec{F}_{\text{вод.}}$, тј. ставимо

$$-m\vec{w}_{\text{прен.}}=\vec{F}_{\text{вод.}}$$

Друга фиктивна сила има вредност $m\vec{w}_{\text{Кор.}}$ и према томе зове се *Кориолисова сила;* ако ту силу означимо са $\vec{F}_{\text{Кор.}}$ имамо

$$m\vec{w}_{\text{Кор.}}=\vec{F}_{\text{Кор.}}$$

Према томе ће једначина (2) добити облик

$$m\vec{w}_{\text{рел.}}=\vec{F}_{\text{ств.}}+\vec{F}_{\text{вод.}}+\vec{F}_{\text{Кор.}}=\vec{F}_{\text{ств.}}+\vec{F}_{\text{фикт.}}, \tag{3}$$

где смо са $\vec{F}_{\text{фикт.}}$ означили збир две фиктивне силе — водеће силе и Кориолисове.

Једначина (3) даје правило по коме се пише диференцијална једначина релативног кретања тачке. Из њега се види да је поново потребно изједначити производ масе и убрзање са силом, али са том разликом што се стварној сили додају две фиктивне силе — водећа сила и Кориолисова сила.

Пошто је водећа сила $-m\vec{w}_{\text{прен.}}$, она се може изразити

$$\vec{F}_{\text{вод.}}=-m\vec{w}_{A}-m\,[\dot{\vec{\Omega}}\,\vec{\rho}]-m\,[\vec{\Omega}\,[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}]]\,.$$

Први члан је супротан транслаторном убрзању тела. Други члан је супротан убрзању које настаје од угаоног убрзања. Ако се тело креће са константном транслаторном брзином ($\vec{w}_A=0$) и константном угаоном брзином ($\dot{\Omega}=0$) или како се каже *стационарно,* оба та члана отпадају. Остаје само трећи члан. Из кинематике чврстог тела знамо да убрзање $[\vec{\Omega}\,[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}]]$ има *центрипетални (аксипетални)* карактер, тј. да је наперено према оси обртања $\vec{\Omega}$ и да има вредност $\Omega^2 d$, где је d растојање тачке од осе обртања. Фиктивна сила $-m\,[\vec{\Omega}\,[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}]]$ има супротан смер и

из тог разлога се зове *центрифугална (аксифугална) сила.* Центрифугална сила не постоји једино за тачке осе обртања или код транслаторног кретања тела.

Што се тиче Кориолисове силе, она је

$$\vec{F}_{\text{Кор.}}=-2m\,[\vec{\Omega}\,\vec{v}_{\text{рел.}}]$$

и не показује свој утицај само у специјалним случајевима, кад је Кориолисово убрзање једнако нули (§ 16·3).

Векторској једначини (3) одговарају три скаларне једначине, од којих ћемо написати само једну која одговара $A\xi$ оси

$$m\xi''=F_{\xi}-mw_{A\,\xi}-m\,(q'\zeta-r'\eta)-p\,(p\xi+q\eta+r\zeta)+$$
$$+(p^2+q^2+r^2)\,\xi-2m\,(q\zeta'-r\eta')\,.$$

Са F_{ξ} означили смо пројекцију стварне силе на ту осу. За слободну тачку се та сила своди на активну силу, на пр. силу теже, за неслободну она садржи и силе реакције. Ако је тачка приморана да се налази на површини одређеној једначином $f_1(\xi,\eta,\zeta,t)=0$, сила реакције има пројекције: $\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial\xi}$, $\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial\eta}$, $\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial\zeta}$, при чему се множитељ реакције λ_1 одређује из услова да убрзање тачке $\vec{w}_{\text{рел.}}$ задовољава једначину

$$(\operatorname{grad} f_1,\,\vec{w}_{\text{рел.}})+D_2 f_1=0,$$

која се добија кад се једначина површине двапут диференцира. На сличан начин уводи се и друга реакција, ако се тачка налази и на другој површини, тј. на некој линији.

§ 16·41. Релативно кретање тачке са стационарним преносним кретањем

Ако је преносно кретање стационарно, имамо

$$\vec{w}_A=0,\qquad \dot{\Omega}=0$$

и тада према (3) § 16·4 диференцијалну једначину кретања можемо написати у облику

$$m\vec{w}_{\text{рел.}}=\vec{F}_{\text{ств.}}-m\,[\vec{\Omega}\,[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}]]-2m\,[\vec{\Omega}\,\vec{v}_{\text{рел.}}]\,. \tag{1}$$

Помножимо скаларно чланове ове векторске једначине релативним померањем $\vec{d\sigma} = \vec{v}_{\text{рел.}}\, dt$, па ћемо добити

$$(2) \qquad d\,\frac{mv^2_{\text{рел.}}}{2} = (\vec{F}_{\text{стб.}}\, \vec{d\sigma}) - m\,(\vec{v}_{\text{рел.}}\, [\vec{\Omega}[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]])\, dt,$$

јер је

$$-2m\,(\vec{v}_{\text{рел.}}\, [\,\vec{\Omega}\,\vec{v}_{\text{рел.}}]) = 0\,.$$

Други члан десне стране једначине (2) трансформише се овако

$$-m\,(\vec{v}_{\text{рел.}}\, [\vec{\Omega}[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]])\, dt = -m\,([\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]\,[\vec{v}_{\text{рел.}}\,\vec{\Omega}\,])\, dt =$$
$$= m\,([\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]\, d\,[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]) = d\,\frac{m}{2}\,[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]^2,$$

па према томе из једначине (2) имамо

$$(3) \qquad d\,\frac{m}{2}\,(v^2_{\text{рел.}} - [\,\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]^2) = (\vec{F}_{\text{стб.}}\, \vec{d\sigma}).$$

Написану једначину можемо сматрати као *закон живе силе за релативно* кретање тачке са стационарним преносним кретањем.

Ако је у случају неслободне тачке површина (или линија), по којој се креће тачка, идеална и непокретна, рад реакције на померању $\vec{d\sigma}$ једнак је нули.

Ако, сем тога, активна сила има функцију силе $U(\xi, \eta, \zeta)$, из једначине (3) добијамо интеграл

$$\frac{m}{2}\,(v^2_{\text{рел.}} - [\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]^2) = U + h\,,$$

где је h интеграциона константа. То је *интеграл живе силе за релативно кретање* у случају стационарног преносног кретања.

§ 16·411. Релативно кретање тешке тачке у односу на Земљу

Земљу сматрамо као лопту која се обрће сталном угаоном брзином око своје осе, коју претпостављамо непокретном. Њено транслаторно кретање, које за кратко време сматрамо као равномерно и праволиниско, не утиче на релативно кретање тачке.

Тачку A триједра $A\xi\eta\zeta$ сместимо у тачку Земљине површине у чијој близини посматрамо кретање тешке тачке масе m.

Пошто је $\Omega = 0$, векторску једначину кретања (3) § 16·4 можемо написати у облику

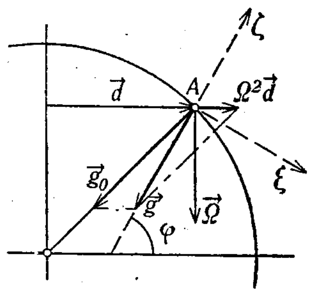
$$(1) \qquad m\vec{w}_{\text{рел.}} = \vec{F}_{\text{стб.}} - m\vec{w}_{\text{A}} - m\,[\vec{\Omega}[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]] - 2m\,[\vec{\Omega}\,\vec{v}_{\text{рел.}}]\,.$$

Пре свега приметимо да интензитет угаоне брзине Ω има вредност

$$\Omega = 0{,}0000729\ \frac{1}{\text{сек. сред. врем.}}$$

и пошто је то мала величина, можемо изоставити чланове са Ω^2, али под условом да се тај квадрат не множи величином реда Земљина полупречника. Из овог разлога у једначини (1) можемо изоставити члан $-m\,[\vec{\Omega}\,[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}\,]]$.

Пошто смо тачку A изабрали на Земљиној површини, убрзање $\vec{w}_{\text{A}}$ има вредност $-\Omega^2\,\vec{d}$, где је $\vec{d}$ растојање од Земљине осе до тачке A (сл. 80). Означимо убрзање силе привлачења $\vec{F}_{\text{стб.}}$ са $\vec{g}_0$, тј.



Слика 80

$$\vec{F}_{\text{стб.}} = m\vec{g}_0.$$

То убрзање, сабрано са центрифугалним убрзањем, даје убрзање

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \Omega^2\,\vec{d},$$

које се опажа на Земљиној површини као убрзање силе теже. Правац вектора $\vec{g}$ одређује правац *вертикале* датог места.

На основу добијених резултата једначина (1) даје диференцијалну једначину

$$(2) \qquad \ddot{\vec{\rho}} = \vec{g} - 2\,[\vec{\Omega}\,\dot{\vec{\rho}}\,],$$

где смо тачком горе означили извод по времену уколико се вектор $\vec{\rho}$ мења у односу на Земљу.

Пошто су вектори $\vec{g}$ и $\vec{\Omega}$ константни, резултат прве интеграције једначине (2) даје

$$(3) \qquad \dot{\rho} = \vec{g}t - 2[\vec{\Omega}\vec{\rho}] + \vec{c}_1,$$

где је $\vec{c}_1$ произвољни константни вектор. Ако тачку A сместимо у почетни положај покретне тачке ($\vec{\rho}_0 = 0$) и време рачунамо од почетка кретања ($t_0 = 0$), за $\vec{c}_1$ добијамо вредност $\dot{\rho}_0$, почетну релативну брзину. Према томе место (3) имамо

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 + \vec{g}t - 2[\vec{\Omega}\vec{\rho}].$$

Ако ту вредност ставимо у (2) и занемаримо чланове, који зависе од Ω^2, једначина (2) даје

$$\ddot{\rho} = \vec{g} - 2[\vec{\Omega}\dot{\rho}_0] - 2t[\vec{\Omega}\vec{g}].$$

Прва интеграција те једначине даје

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 + \vec{g}t - 2t[\vec{\Omega}\dot{\rho}_0] - t^2[\vec{\Omega}\vec{g}].$$

После друге интеграције имамо коначну векторску једначину кретања тачке у облику

$$(4) \qquad \vec{\rho} = \dot{\rho}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - t^2[\Omega\rho_0] - \frac{1}{3}t^3[\vec{\Omega}\vec{g}].$$

Ако осе триједра $A\xi\eta\zeta$ наперимо овако: осу $A\zeta$ у правцу вертикале места A навише, $A\xi$ осу у хоризонталној равни према југу и осу $A\eta$ у истој равни према западу, онда координате вектора $\vec{g}$ имају вредности $0, 0, -g$, а вектора $\vec{\Omega}$: $\Omega\cos\varphi, 0, -\Omega\sin\varphi$, где је φ — географска ширина датог места. Координате вектора $\dot{\rho}_0$ означимо са $\xi_0', \eta_0', \zeta_0'$.

Са таквим ознакама из векторске једначине (4) можемо написати ове три скаларне једначине

$$\xi = \xi_0' t - \eta_0' t^2\, \Omega\sin\varphi,$$

$$(5) \qquad \eta = \eta_0' t + (\xi_0'\, \Omega\sin\varphi + \zeta_0'\, \Omega\cos\varphi)\, t^2 - \frac{1}{3}gt^3\,\Omega\cos\varphi,$$

$$\zeta = \zeta_0' t - \frac{1}{2}gt^2 - \eta_0' t^2\,\Omega\cos\varphi.$$

Изведимо из написаних једначина неколико закључака.

1. *Слободан пад тешке тачке*

Ако тачка пада слободно, онда је $\xi_0' = \eta_0' = \zeta_0' = 0$ и према томе једначине (5) дају

$$\xi = 0, \qquad \eta = -\frac{1}{3}gt^3\,\Omega\cos\varphi, \qquad \zeta = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Из ових једначина следује да се тачка не креће по вертикали већ описује криву трећег степена у равни управној на равни меридијана са једначином

$$\zeta^3 + k^2\eta^2 = 0, \qquad k^2 = \frac{9}{8}\frac{g}{\Omega^2\cos^2\varphi}.$$

Пошто је $\eta < 0$, за време пада тачка отступа од вертикале *према истоку.*

2. *Вертикални хитац*

Претпоставимо сад да је $\xi_0' = \eta_0' = 0$, а $\zeta_0' = v_0 > 0$.

У овом случају једначине (5) дају

$$\xi = 0, \qquad \eta = \left(v_0 - \frac{1}{3}gt\right)t^2\,\Omega\cos\varphi, \qquad \zeta = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Из услова

$$\zeta' = v_0 - gt = 0$$

одређујемо $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$ кад се тачка зауставља на висини $\zeta_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{g}$.

У том положају је $\eta_1 = \dfrac{2}{3}\dfrac{v_0^3}{g^2}\,\Omega\cos\varphi$. Пошто је $\eta_1 > 0$, тачка је отступила од вертикале *према западу.* Затим она стиже у хоризонталну раван ($\zeta = 0$) у $t_2 = 2\dfrac{v_0}{g} = 2t_1$ са отступањем $\eta_2 = \dfrac{4}{3}\dfrac{v_0^3}{g^2}\,\Omega\cos\varphi = 2\eta_1$ исто тако према западу.

3. *Кос хитац*

Узмимо сад случај кад се почетна брзина налази у равни управној на равни меридијана и чини угао α са позитивним правцем $A\eta$ осе. Тада су

$$\xi_0' = 0, \quad \eta_0' = v_0\cos\alpha, \quad \zeta_0' = v_0\sin\alpha.$$

Из једначина (5) добијамо

$$\xi = -v_0 t^2 \Omega \sin\varphi \cos\alpha\,,$$

$$(6) \qquad \eta = v_0 t \cos\alpha + v_0 t^2 \Omega \cos\varphi \sin\alpha - \frac{1}{3} g t^3 \Omega \cos\varphi\,,$$

$$\zeta = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t^2 \Omega \cos\varphi \cos\alpha\,.$$

Из услова $\zeta = 0$ можемо одредити време t_1 целокупног лета тачке од почетка ($t_0 = 0$) до тренутка кад тачка поново стигне на хоризонт ($\zeta = 0$). За то време имамо

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g + 2v_0 \Omega \cos\varphi \cos\alpha}$$

или приближно

$$(7) \qquad t_1 = T_1\left(1 - \frac{2v_0 \Omega}{g} \cos\varphi \cos\alpha\right),$$

где је $T_1 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Време T_1 одговара лету тачке кад не узимамо у обзир Земљино кретање ($\Omega = 0$).

Израчунајмо сад приближну вредност η_1 растојања η за t_1. Ако ставимо вредност (7), из (6) добијамо

$$\eta_1 = v_0 T_1 \cos\alpha \left(1 - \frac{2v_0 \Omega}{g} \cos\varphi \cos\alpha\right) +$$

$$+ v_0 T_1^2 \Omega \cos\varphi \sin\alpha - \frac{1}{3} g T_1^3 \Omega \cos\varphi\,.$$

Ако са Y_1 означимо исто растојање за случај непокретне Земље, добићемо

$$Y_1 = v_0 T_1 \cos\alpha\,.$$

Кад разлику $Y_1 - \eta_1$ означимо са $\Delta\eta$, после израчунавања добијамо ову вредност за $\Delta\eta$

$$\Delta\eta = \frac{4}{3} \frac{v_0^3}{g^2} (4\cos^2\alpha - 1) \sin\alpha \cdot \Omega \cos\varphi\,.$$

Овај образац показује како се мења даљина, до које стиже коси хитац на хоризонту, услед обртања Земље кад му почетна брзина стоји у равни управној на раван меридијана.

§ 16·4111. Фукоово клатно

Најзад проучимо један пример релативног кретања неслободне тешке тачке у односу на Земљу.

Наиме проучимо, узимајући у обзир ротацију Земље, мале осцилације тешке тачке на сфери везаној за Земљу. Ако почетак координата, тачку A, сместимо у центар сфере, једначину сфере можемо написати

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - l^2 = 0\,,$$

где је l полупречник сфере. Пошто је тачка неслободна, у диференцијалну једначину (2) § 16·411 за релативно кретање тешке тачке треба ставити још реакцију, која је пропорционална grad f, у нашем случају вектору $2\vec{\rho}$. Према томе уместо те једначине добијамо

$$(1) \qquad \ddot{\vec{\rho}} = \vec{g} - 2[\vec{\Omega}\,\dot{\vec{\rho}}] + \lambda\vec{\rho}\,,$$

где је λ фактор пропорционалности.

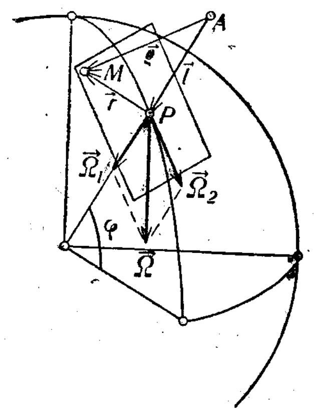
У случају малих осцилација вектор $\vec{\rho}$ можемо у првом приближном посматрању претставити збиром

$$(2) \qquad \vec{\rho} = \vec{l} + \vec{r}\,,$$

где је $\vec{l}$ вертикалан полупречник наниже (сл. 81), а $\vec{r}$ хоризонталан вектор положаја покретне тачке према тачки P, најнижем положају тачке на сфери.

Ако ставимо вредност (2) у (1), имамо

$$(3) \qquad \ddot{\vec{r}} = \vec{g} + \lambda\vec{l} - 2[\vec{\Omega}\,\dot{\vec{r}}] + \lambda\vec{r}\,.$$



Слика 81

Раставимо $\vec{\Omega}$ у две компоненте — једну $\vec{\Omega}_1$ у правцу вертикале (сл. 81) и другу $\vec{\Omega}_2$ у хоризонталној равни. Њихови интензитети су: $\Omega_1 = \Omega \sin\varphi$, $\Omega_2 = \Omega \cos\varphi$, где је φ географска ширина места.

Векторски производ $[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}]$ можемо тада раставити у две компоненте

$$[\vec{\Omega}_1 \dot{\vec{r}}] \quad \text{и} \quad [\vec{\Omega}_2 \dot{\vec{r}}]\,.$$

Прва је хоризонтална, друга вертикална. Ако Ω и $\dot{r}$ сматрамо као мале величине првог реда према величини g, свака од тих компонената је мала величина другог реда.

Рашчланимо сад векторску једначина (3) у скаларну једначину за вертикалан правац и на векторску једначину у хоризонталној равни.

Скаларна једначина, ако се зауставимо само на члановима реда g, даје

$$g + \lambda l = 0.$$

Из те једначине добијамо $\lambda = -\frac{g}{l}$.

Са том вредношћу λ векторску једначину за хоризонталну раван можемо написати

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{g}{l}\vec{r} - 2[\vec{\Omega}_1\,\dot{\vec{r}}]. \tag{4}$$

За одређивање кретања тачке по тој једначини проучимо кретање тачке према хоризонталној равни која *нема* ротације $\vec{\Omega}_1$ око вертикале. Вектор положаја тачке у тој равни означимо са $\vec{R}$; сам он има исту вредност са вектором $\vec{r}$, али су њихови изводи, први и други, различити. Извод $\ddot{\vec{R}}$ даје апсолутно убрзање тачке. Ово апсолутно убрзање $\vec{w}_{\text{апс.}}$, према (3) § 16·3, за наш случај изражава се

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{w}_{\text{апс.}} = \vec{w}_{\text{рел.}} - \Omega_1^2\,\vec{R} + 2[\vec{\Omega}_1\,\dot{\vec{r}}]. \tag{5}$$

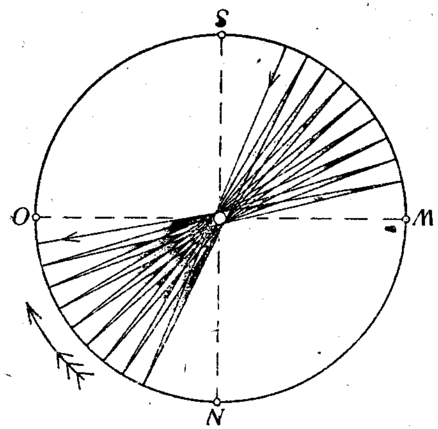
Пошто је $\vec{w}_{\text{рел.}} = \ddot{\vec{r}}$ из (5) на основу (4) имамо

$$\ddot{\vec{R}} + k^2\,\vec{R} = 0, \tag{6}$$

где је

$$k^2 = \frac{g}{l} + \Omega_1^2 = \frac{g}{l} + \Omega^2 \sin^2\varphi.$$

Једначина (6) одговара кретању тачке под утицајем привлачне силе пропорционалне растојању. Као што знамо (§ 5·22), она одређује два хармониска кретања, која у резултату дају кретање по једној елипси.



Слика 82

Кретање посматрано на покретној хоризонталној равни јесте резултат тог елиптичког кретања и обртања оса елипсе у равни хоризонта у смислу кретања казаљке на часовнику за угао $\Omega t \sin\varphi$ (сл. 82). Отступање оса елипсе у равни хоризонта према томе је доказ Земљина обртања. Тај је експеримент први извео научник Фуко у згради Париског Пантеона 1851 г. са клатном које је имало дужину од 67 m и тежину од 30 kg.

ERRATA

Први број означава страну, други врсту са знаком плусом одозго, са знаком минус одоздо

		стоји	треба
15	+ 11	y^3	y^2.
17	+ 2	(3)	(3*)
„	— 6	(3)	(3*)
27	+ 0	хармонично	хармониско
56	+ 12	интензитета	интензитете
60	+ 11	$\rho\, \psi \cos \varphi$,	$\rho\, \psi' \cos \varphi$.
61	+ 2	$\overline{v}$	$\overline{v}^1$
130	+ 12	$\dfrac{x^2}{v_0 \cos^2 \alpha}$	$\dfrac{x}{v_0 \cos \alpha}$
162	— 9	$(\vec{r}_i + \vec{\rho}_i)$	$d(\vec{r}_i + \vec{\rho}_i)$
168	+ 1	$-\sin(\Theta + \alpha)$	$-n \sin(\Theta + \alpha)$

На странама 50, 59. 84, 129, 131, 146, 147, 211, 212, 263, 279 неисправно је горе оштампана ознака параграфа.

РЕГИСТАР

Бројеви означавају страну

$dt = -$
$dx =$
$2x\,dx = 2u\,du$