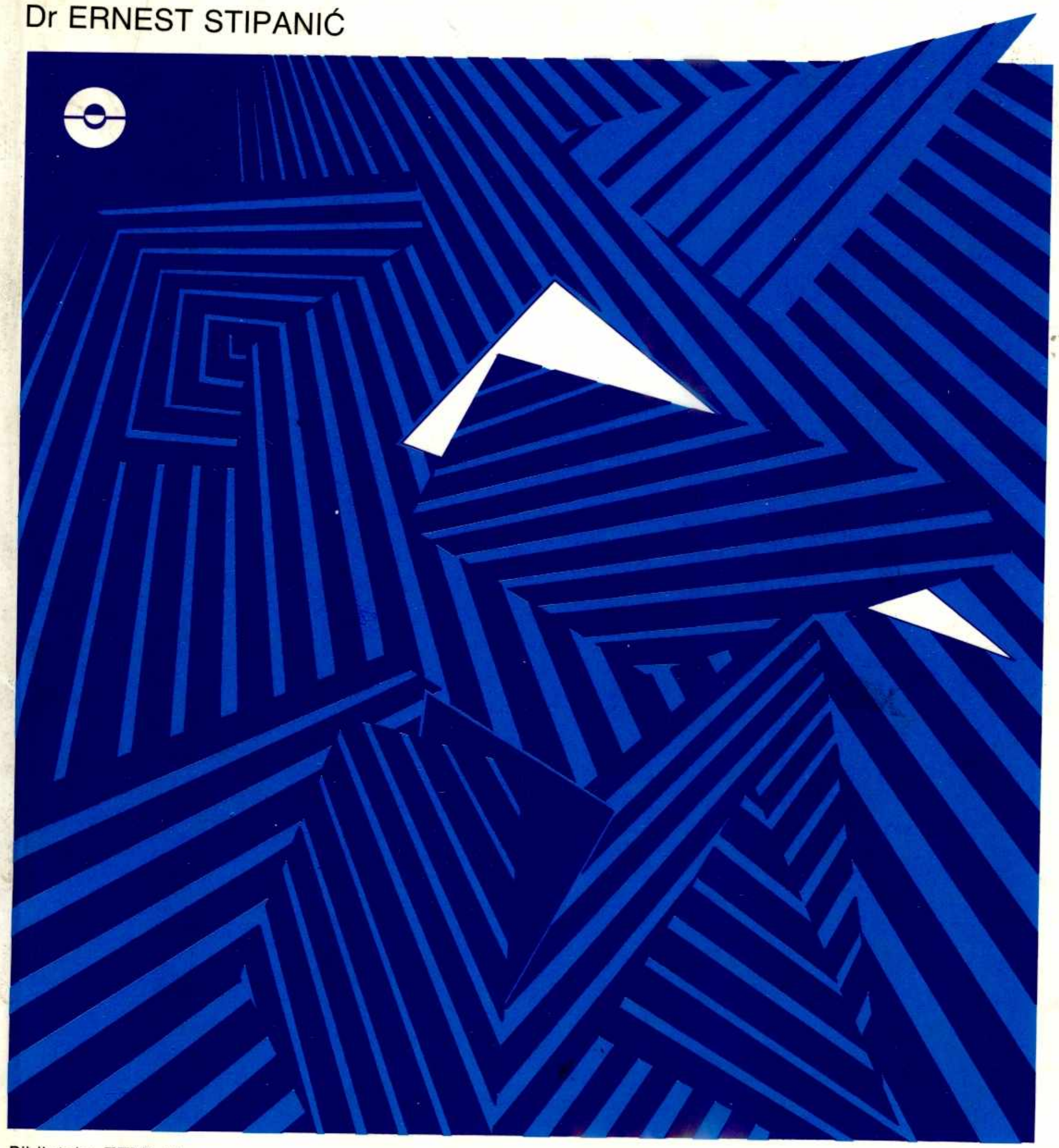
putevima razvitka MATEMATIKE

Dr ERNEST STIPANIĆ



Biblioteka ZEMLJA

»VUK KARADŽIĆ«

BIBLIOTEKA „ZEMLJA“

Urednici Zorica Konstantinović i Gordana Petrović

PUTEVIMA RAZVITKA MATEMATIKE

Izbor, prevod i novi tekstovi

dr Ernest Stipanić

„VUK KARADŽIĆ“
Beograd

Putevima razvitka matematike

Urednik
Gordana Petrović

Likovno-grafička oprema
Gordana Virovkić

ISBN 86-307-0009-2

Sadržaj

MATEMATIČKE DISCIPLINE

PREDGOVOR

Predgovor

1. Proučavanje nastanka i razvitka pojmova i teorija u matematici i shodno njima načina dokazivanja i formulisanja odgovarajućih teorema pomaže nam da uđemo u suštinu matematike, kao ljudskog sredstva u otkrivanju tajni i zakona prirodne stvarnosti.

U matematici, kao i u svakoj drugoj nauci, od bitnog je značaja razmatrati „sadašnje" u vezi sa „prošlim", jer se „sadašnje" razvilo iz „prošlog", a isto tako „buduće" će se razviti iz „sadašnjeg". Proučavanje „prošlog" pretvara se u sredstvo kojim se pojmi „sadašnje" i predviđa „buduće". Tako se osmišljava razvitak svakog matematičkog modela (pojma, algoritma, teorije) kao naučni i istorijski proces u spoznaji stvarnosti. Otkrivanje kontinuiteta evolucije skokovitim, *dijalektičkim*, prelazima „prošlog" u „sadašnje" i ovog u „buduće" je put naučne spoznaje svakog razvitka i osnova za odgovor na pitanja šta je i kako se menjalo u određenim etapama razvitka ono čiji razvitak razmatramo.

Tim se putevima razotkriva *dijalektička* i *materijalistička* suština vrlo *apstraktnih* pojmova i teorija u matematici. Na taj način poznavanje nastanka i razvitka matematičkih pojmova i teorija bitno utiče, s jedne strane, na njihovo svesno i stvaralačko usvajanje kao moćnog sredstva u tumačenju prirodnih fenomena, i s druge strane, na njihov doprinos u formiranju progresivnog naučno-filozofskog pogleda na svet.

Cilj nam je da knjiga *Putevima razvitka matematike* svojim sadržajem doprinese da se i duboko apstraktni pojmovi i teorije u matematici, bar u naučnom i filozofskom popularnom vidu, dožive kao konkretna sredstva u tumačenju prirodnih fenomena i da se oseti intelektualna snaga i lepota matematičkih teorija kao i njihova progresivna uloga u formiranju čovekovog pogleda na svet.

2. Ova knjiga ima šest poglavlja u kojima su sa istorijskog, a donekle i sa filozofskog i metodološkog stanovišta posmatrani odnosni matematički sadržaji.

Deo prvog poglavlja (algebra i algebristi, analiza i analitičari, aritmetika i aritmetičari, geometrija i geometričari, matematička logika i logičari, matematika, trigonometrija i trigonometričari) preuzet je iz dela fundamentalnih nauka Velike enciklopedije Larousse*, sa izvesnim stručnim i jezičkim redakcijama i dopunama, dok smo drugi deo istog poglavlja (računska

*) La grande encyclopédie, I – XX, Libraire Larousse, Paris, 1971.

matematika i računske mašine, teorija skupova i funkcionalna analiza, topologija, verovatnoća i statistika) napisali na osnovu poznate odgovarajuće literature.

Drugo poglavlje (Kuda ide savremena matematika?), zatim četvrto (Zlatni trolist u razvitku matematike: Arhimed, Njutn, Gaus), peto (Jugoslovenski matematičari) napisali smo na osnovu naših naučnih i istorijskih istraživanja, dok je treće poglavlje (Strani matematičari) napisano na osnovu Velike enciklopedije Larousse. U trećem poglavlju napisali smo članke o Monžu, Lagranžu, Laplasu, Lobačevskom, Čebiševu, Raselu i o Kolmogorovu.

Šesto, poslednje, poglavlje daje tabelarni istorijski pregled razvitka matematike. On sadrži neke značajne događaje iz istorije naše matematike, a naime: Marin Getaldić (*O matematičkoj analizi i sintezi*, 1630), Ruđer Bošković (*Teorija prirodne filozofije svedena na jedan jedini zakon sila što postoje u prirodi*, 1758), Mijo Šilobod Bolšić (*Aritmetika Horvatszka*, 1766), Mato Zorčić (*Aritmetika u slavni jezik ilirički sastavljena*, 1766), Juraj Vega (*Potpuna zbirka logaritama*, 1794), Vladimir Varićak (*Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskog*, 1903), Josip Plemelj (*Potencijalno teoretska istraživanja. Rešenje Rimanovog problema*, 1911), Mihailo Petrović (*Elementi matematičke fenomenologije*, 1911). Milutin Milanković (*Kanon zemljinog zračenja i njegova primena na problem ledenog doba*, 1941), Đuro Kurepa (*Teorija skupova*, 1950).

Izlaganja su zasnovana na podacima koja pruža Velika enciklopedija Larousse, sa svim očiglednim nedostacima u pogledu matematičkog sadržaja i obima, kao i izvesne jednostranosti kad je reč o matematičarima koji nisu Francuzi. Mi smo pokušali da te nedostatke ublažimo, ali ne i da ih potpuno otklonimo. No, uprkos svega toga, smatramo da će svojim matematičkim sadržajem knjiga dobro poslužiti u označavanju izvesnih puteva u razvitku matematike. Kao takva, ona će pomoći svima koji se bave prenošenjem matematičkog znanja na one koji stiču opštu kulturu i kojima je matematika neophodna u obavljanju profesionalne dužnosti. Ona će biti korisna svima koji poseduju opšte obrazovanje i doprineće im da shvate opšti hod matematizacije u poslovima sadašnjeg društva.

Skromnom obradom jugoslovenskih matematičara koji više nisu među živima a koji su se istakli naučnim stvaralaštvom i pedagoškim radom u matematici, nastojali smo da u izvesnom obliku povežemo matematička zbivanja kod nas sa matematičkim zbivanjima u svetu uopšte. Možda smo ovde nekog od naših značajnijih umrlih matematičara izostavili. To se moglo desiti zbog nedovoljnih podataka do kojih smo dolazili da bismo stekli uvid u spomenute jugoslovenske matematičare. Na primer, nismo kao matematičare pomenuli dva naša istaknuta revolucionara Ognjena Pricu (1899 – 1941) i Božidara Maslarića (1895 – 1963), koji su svoje živote posvetili našem revolucionarnom komunističkom pokretu, kao i niz istaknutih profesora matematike srednje škole, čija se matematička delatnost ispoljila u pisanju matematičkih udžbenika. Ovi nedostaci kao i njima slični moći će se otkloniti u

eventualnom ponovnom izdanju knjige i da tako knjiga postane u matematičkom i opšte kulturnom pogledu vrednija.

3. Matematika u današnjem razvitku, svojim ogromnim uticajem na razvitak savremene opšte društvene prakse, otvorila je svom oštrinom nove i ozbiljne probleme obrazovanja kadrova u oblasti nauka, tehnike i prakse uopšte. To implicira ozbiljne probleme u oblasti osnovnog, srednjeg, višeg i visokog obrazovanja. Sve se više traže matematičari koji će biti u stanju da shvate matematičke ideje i da ih prate do njihovih ostvarenja u konkretnim situacijama raznih nauka i prakse, uživljujući se u isto vreme u probleme tih nauka i prakse. Oni će najuspešnije ostvarivati vezu matematike sa drugim naukama i praksom i stalno će otkrivati nove oblasti nauke i prakse za primenu metoda i ideja matematike. U tom pogledu očigledan je uticaj koji razvitak matematike vrši na opštu društvenu praksu, kao što je očigledan i uticaj koji praksa, primenama matematike podignuta na viši nivo, vrši na razvitak matematike.

U savremenom društvu naglo je poraslo i u stalnom je porastu interesovanje za matematiku. Ona nije više predmet zanimanja jedne uske akademske elite, već je, snagom svog uticaja na opštu društvenu praksu, postala neobično popularna kao prvorazredna proizvodna sila društva. Ona je danas predmet istinskog interesovanja vrlo širokih društvenih krugova. To se vrlo jasno očituje, na primer, u sve većem zanimanju omladine za matematiku. U porastu je broj studenata matematike, broj profesionalnih matematičara i njihovih društava, broj naučnih i pedagoških skupova matematičara posvećenih matematici u celini i pojedinim njenim disciplinama, broj časopisa i uopšte literature, strogo naučne i popularne koja se odnosi na matematiku. U vezi s tim, u porastu su materijalni izdaci koje društvo obezbeđuje za unapređenje nastave i naučno-istraživačkog rada u oblasti matematičkih nauka. Rečeno je da je „lakše naučiti matematiku, nego bez nje raditi", a to upravo potvrđuje njena uloga u savremenom društvu, koje je zbog toga zainteresovano da razvija i unapređuje razne vidove matematičkih aktivnosti.

U stalnoj interakciji sa stvarnošću, čovek opštom društvenom praksom menja tu stvarnost i u isto vreme se i sam menja. On je *humanizuje*, prilagođava je sebi, ali ujedno i sebe prilagođava njoj. U toj interakciji međuodnos *matematika-stvarnost* otkriva teorijsko-spoznajnu i vrednosno-humanističku bit matematike. Matematika postaje, tako reći, „savest" spoznaje stvarnosti, a ne samo „instrument" te spoznaje, ali bi bilo iluzorno i pomisliti da se specifične metode pojedinih nauka, s obzirom na savremeno „matematičko osvajanje" opšte društvene prakse, mogu zameniti matematičkim metodama, jer se takve idejne i metodološke devijacije javljaju, na primer, u vezi sa primenama elektronskih računara i drugih automata, što bi bio idealizam svoje vrste — *matematizam*, izražen stanovištem o nekoj „svemoći" matematike kao instrumenta kojim se služimo u proučavanju raznih fenomena, jer matematika danas zaista može mnogo, ali daleko je od toga da može sve. Tako se matematički pojmovi i teorije ugrađuju u dijalektiku kao opštu teoriju menjanja sveta. Oni je potvrđuju u širem smislu i kao nauku o mišljenju, pomoću koje se shvata taj svet, njegovi zakoni i njegovi oblici, da bismo zatim, shvativši ga, aktivno se odnosili prema njemu i menjali ga *opštom društvenom praksom.* To odgovara stalnoj čovekovoj težnji da što više osmisli svoje mesto i svoju ulogu u prirodi i da neprekidno unapređuje materijalne i duhovne uslove svoje egzistencije. Za postizanje tih ciljeva matematika pruža velike teorijsko-spoznajne i praktično-humanističke mogućnosti, pa se tako, uopšte uzev, ona ugrađuje kao nezamenjiv element u obrazovanju i vaspitanju čoveka. Sve to potvrđuju geneza i razvitak matematičkih pojmova i teorija. Knjiga *Putevima razvitka matematike* jedan je prilog toj spoznaji i podsticaj da se u svetlu te spoznaje priđe i zavoli matematika.

Jun, 1987. *Ernest Stipanić*

Napomena. U poglavlje »Jugoslovenski matematičari«, pošto je ova knjiga već bila predata u štampu, nisu ušli matematičari koji su umrli u toku 1987, kao i jedan koji je umro 1983. godine: Danilo Blanuša (1903–1987), Vilko Niče (1902–1987), Zlatko Janković (1916–1987), Rajko Jamnik (1924–1983), Alojz Vandnal (1899–1987), Anton Vakselj (1910–1987), Časlav Đaja (1922–1987) i Blažo Okiljević (1903–1987). Među njima ima istaknutih jugoslovenskih matematičara. Ako dođe do drugog izdanja knjige, pomenuti matematičari, na određen način, naći će svoje mesto u navedenom poglavlju.

MATEMATIČKE DISCIPLINE

Algebra
Analiza
Aritmetika
Geometrija
Matematička logika
Matematika
Teorija skupova.
Funkcionalna analiza
Topologija
Trigonometrija
Računska matematika
i računske mašine
Verovatnoća i statistika

Algebra

Algebra se bavi proučavanjem skupova koji imaju zakon kompozicije, konačne operacije ili konačne relacije.

Oslanjajući se jednostavno na logiku i na teoriju skupova, moderna algebra čini veću oblast matematike koja je prvobitno bila samo deo praktične aritmetike ili logistike. Pre no što je nastao izraz *algebra*, razvila se tehnika rešavanja problema koja najpre obuhvata stereotipne recepte, a zatim teoriju jednačina. Ova veština razvijala se malo-pomalo u sistem brzo napisanih oznaka koji će krajem XVI v. dati specifičnu logistiku ili slovni račun. U isto vreme, skupovi na kojima je radio algebrist proširivali su se u smislu uprošćavanja operatornih postupaka, polazeći od skupa celih prirodnih brojeva N na skup pozitivnih racionalnih brojeva Q^+, a zatim na kvadratična proširenja ovog skupa i u istoj epohi (XVI v.), na nešto što je predstavljalo skup R realnih brojeva i malo zatim na skup C kompleksnih brojeva, itd. Današnji suviše precizan rečnik malo je izneverio ovu evoluciju, što je inače bilo neizbežno: istorijski tok matematike polazi od instinkta i nejasnoća uvek ka sve većoj preciznosti i jasnosti.

Afini problemi

U *Rajndovom papirusu* (oko 1800. pre n. e.) i u vavilonskim tablicama iste epohe nalaze se problemi koji se za nas svode na jednačinu $ax=b$, gde su a i b racionalni pozitivni brojevi, a x je nepoznata koju treba odrediti. Za Egipćane koji nisu raspolagali našim računom razlomaka, ovo su vrlo teška pitanja, kao npr.:

kad napišete 10, *onda je to*

$i\ \frac{2}{3}\ i\ \frac{1}{10}$ *od čega?*

Ovo pitanje prevedeno na jednačinu dovodi do $\frac{2}{3}x+\frac{1}{10}x=10$.

Postupak starog matematičara mogao je da pođe od „lažnog položaja": ako se uzme 30, $\frac{2}{3}$ čine 20, deseti deo 3 i ukupno 23. Ali, ako se hoće 10, čime treba pomnožiti 23 da bi se dobilo 10? To je prvi postupak analize koji je jasno predočen u kineskom delu *Devet poglavlja o veštini računanja*. U navedenom egipatskom problemu sama teškoća stavljanja u jednačinu sastojala se u određivanju a i b koji su bili dati rečima. Malo složeniji problemi, gde ni a ni b nisu očigledno dati, zahtevaju ne više *jednostavni lažni položaj*, već sigurno dvostruko lažni položaj.

U pomenutom delu *Devet poglavlja o veštini računanja* ovi problemi su jasno izloženi. Daju se x-u dve proizvoljne vrednosti; veličina $ax-b$ uzima tada dve različite vrednosti, *greške* i pravi se linearna interpolacija da bi se našlo rešenje. Tehniku lažnih položaja rasprostranili su Arapi i ona će ustrajati na Zapadu pod arapskim nazivom *al-Khatayn* („kineska"). Uvek će se koristiti kad se pravi linearna interpolacija, npr. u numeričkoj tablici. Ali kinesko delo donosi mnogo više. U *„kineskom problemu rešenom na šahovskoj tabli"* pojavljuje se brižljiva tehnika rešavanja linearnih jednačina sa više nepoznatih. Brojevi su označeni obojenim štapićima od kosti: negativni su predstavljeni crnim štapićima. Metoda rešavanja neobično je bliska računu sa determinantama. Kineski algebristi koristili su opšte razlomke i negativne brojeve i računali su na celom telu Q racionalnih brojeva. Zapadu će biti potrebno dugo vremena da dostigne ovaj stadijum. Izgleda da nema nikakvog kineskog uticaja na evoluciju koja počinje s Diofantom iz Aleksandrije (III v.). Afini problemi igrali su stvarno samo manju ulogu u njegovoj *Aritmetici*, delu posvećenom algebri tela Q^+ racionalnih pozitivnih brojeva, a naročito neodređenoj ili Diofantovoj analizi. Diofant tretira probleme s više nepoznatih, među kojima razlikuje jednu, broj, za koju raspolaže simbolom ξ. Za oduzimanje upotrebljava simbol $\uparrow$. Ovim skraćenim simbolima vrlo vešto transformiše svoje jednačine. Njegovo delo će osim toga odigrati kod nas značajnu ulogu krajem XVI stoleća.

Italijan Luka Pačoli (Luca Paciolli, 1445–1514) 1494, i Francuz Nikola Šike* 1484. rešili su brojne sisteme afinih jednačina. Kao i Diofant, Pačoli upotrebljava privilegovanu nepoznatu, *stvar* kojoj dodeljuje ponekad drugu – *količinu*. Šike postupa na isti način. On ne daje imena dvema nepoznatim, već ih označava sa 1^1 i 1^2. S druge strane, on vešto koristi nulu i negativne brojeve, spajajući tako kineske i indijske matematičare. U XIII v. ovim problemom će se pozabaviti sa izvesnim uspehom i Leonardo iz Pize (oko 1175–1240).

U domenu afinih problema XVI stoleće donosi znatan napredak sa izvesnim uzmakom u upotrebi negativnih brojeva. Štifel (Michael Stifel, 1487–1567) koristi privilegovanu nepoznatu, označenu sa ꝛe ali joj prema potrebi dodeljuje druge nepoznate koje označava velikim slovima A, B itd. Raspolaže i znacima + i – za sabiranje i oduzimanje, za koje je zaslužan Vidman iz Egera (Johann Widmann, XV v.) a koja potiču iz 1489. Francuzi i Italijani koriste za njih p i m. Znaci jednakosti pojavljuju se 1557. kod Engleza Rekorda (Robert Recorde, 1510–1558) koji piše znak

jednakosti = i 1559. kod Francuza Bitea (Johannes Buteo, 1492–1572) koji ga predstavlja simbolom [, i najzad 1637. kod Dekarta*[1] koji usvaja znak $\mathscr{S}$. Rekordov simbol je prevladao.

Sa Štifelom, Manom (Jacques Peletier du Mans, 1517–1582) i Biteom, tehnika rešavanja sistema afinih jednačina najzad približno dostiže kineski nivo. Na primer, kod Bitea, sistem

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=34\\ x+3y+z&=51\\ x+y+4z&=68 \end{aligned}$$

piše se:

2A.1B.1C[34
1A.3B.1C[51
1A.1B.4C[68

U XVII v. teoriji afinih jednačina doprinosi Vijet* i Dekartov slovni račun. U međuvremenu Lajbnic* nagoveštava matrični račun. Kramer* 1752. daje prvu dublju studiju sistema jednačina. U XIX v. pojavljuje se račun determinanata i zatim matrični račun. Vektorski prostori i cela linearna algebra potiču iz ovog perioda.

Drugi stepen

Jednačine drugog stepena potiču od Vavilonaca čija je tehnika rešavanja identična sa ovom koju i danas koristimo. Jedine razlike su u tome što se nisu koristili negativni brojevi i što su se računi izvodili na prstenu brojeva izraženih na konačan način sa osnovom 60. Jednačina

$$ax^2+bx+c=0$$

je moguća dakle samo ako su računi

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}\pm b}{2a}$$

izvedeni na tom prstenu. Ne postoji nikakva algebarska notacija a sve se predstavlja u obliku problema. Grci su i geometriju zasnovali rešavanjem kvadratnih jednačina. Tada su vavilonski računi zamenjeni konstrukcijama pomoću lenjira i šestara a to umnogom podrazumeva slučajeve mogućnosti. Grčki algebristi, kao Diofant, koji operišu samo na skupu Q^+ pozitivnih racionalnih brojeva, uži su od geometričara. Cela neodređena Diofantova analiza ima svoj izvor u ovim teškoćama: ona koristi neodređene jednačine gde izvesni izrazi moraju biti potpuni kvadrati na telu Q. U zadacima nečuvene teškoće, na osnovu kojih se predaje Diofant, naći će u renesansi inspiraciju Bombeli (Raffaele Bombelli, umro posle 1572), Vijet* i Steven*.

Polazeći od jedne dužine uzete za jedinicu, geometričari konstruišu i proučavaju druge izvedene dužine, binome, mere

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

(a i b su racionalni brojevi) ili apoteme, mere

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

[1]) Ova oznaka * uz ime ili pojam upućuje na njihovo posebno abecedno mesto u knjizi.

Cela deseta knjiga Euklidovih *Elemenata* (III v. pre n. e.) posvećena je proučavanju koje će docnije dovesti algebriste do iracionalnih kvadratnih veličina, ili do *neizrazivih brojeva*. Tako se u tom smislu koriste reči *binom*, *trinom*, *polinom*. Euklidovi *Elementi*, dobro poznati na Zapadu počev od XII v., skrivali su pod prividom geometrije rešenje jednačina. U numeričkom vidu ovo rešenje otkrili su latinski prevodi arapskih matematičara, naročito delo *Knjiga Muhameda sina Muse Alhoarizmija o algebri i skraćivanju jednakih članova sa obe strane jednačina* Gerarda iz Kremone (Gherardo da Cremona, oko 1114–1187), na latinskom: *Liber Maumeti filii Moysi Alchoarismi de algebra et almuchabala*.

Iz potpunog imena arapskog autora: Muhamed ibn Musa al-Harezmi (početak IX v.) nastala je reč *algoritam*, koja je najpre bila rezervisana za pismeni račun sa arapskim ciframa za razliku od računanja na abakusu a zatim dobila širi smisao „sistematskog računskog postupka". Što se tiče izraza *al-džabr*, otkud potiče reč *algebra*, on predstavlja transpoziciju negativnog člana s jedne strane jednačine na drugu dok izraz al-mukabala označava svođenje sličnih članova.

Treći i četvrti stepen

Premda se kod Vavilonaca nalaze neke kubne jednačine, iako Arhimed* (III v. pre n. e.) topološkim postupcima raspravlja u drugoj knjizi *Sfera i cilindar* probleme trećeg stepena, tek italijanska škola XVI v. donosi rešenje jednačine trećeg i četvrtog stepena. Pronalazači za treći stepen su Fero (Scipione dal Ferro, 1465–1526), Tartalja (Nicollo Tartaglia, 1499–1557) i Kardan (Jérome Cardan, 1501–1576) a za četvrti stepen Ferari (Ludovico Ferrari, 1522–1565). Postupak rešavanja rezimira se na sledeći način: jednačina se svodi na oblik

$$x^3+px+q=0.$$

Nepoznata se zamenjuje sa druge dve:

$$x=u+v.$$

Stavlja se

$$u^3+v^3=-q, \qquad uv=-\frac{1}{3}p,$$

odakle sledi

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$$

veličine u i v izračunavaju se pomoću jednačine drugog stepena i dobijaju se tada vrednosti članova u, v i x. Ferari zatim pokazuje da se jednačine četvrtog stepena svode na jednačine trećeg stepena.

Italijanski matematičari su imali teškoća zbog nedostatka oznaka, zatim zbog arapskog nasleđa da na svakoj strani jednačine imaju samo pozitivne članove, i najzad, suštinski razlog: nesvodljiv slučaj koji je otkrio Kardan: zahvaljujući Arhimedu zna se da jednačina ima više

rešenja, dakle, ako se prethodna metoda oslanja na jednačinu drugog stepena sa negativnom diskriminantom, znači nemoguća je. Ovaj paradoks usmeriće 1572. Bombelija da uvede fiktivne ili imaginarne brojeve. Ti brojevi su linearne kombinacije na telu R realnih brojeva jedinice 1 i druge jedinice *više nego manje* (*piu di meno*), naše i. Oni su dakle oblika $a+bi$. Tako se stidljivo pojavilo telo C kompleksnih brojeva.

Progres označavanja, slovni račun

U međuvremenu, jezik algebre se malo-pomalo precizira. Štifel je znao da koristi slova za predstavljanje nepoznatih. Što se tiče stepena od x, Diofant i Arapi bili su u tim oznakama dosta neujednačeni, preuzevši ih od različitih algebrista a 1484. Šike u tom pogledu donosi originalnu oznaku (tabela dole):

U nekim varijantama, Šikeovo označavanje preuzeli su Bombeli, Steven i Dekart. Naročito je Vijet napravio odlučan korak uzimajući da sa A, B, C itd. predstavlja sve veličine koje dolaze u računima, bilo da su poznate ili nepoznate; da za date veličine rezerviše suglasnike, a za nepoznate samoglasnike; da sumu označi sa A+B, razliku sa A−B, proizvod A *in* B i količnik sa $\frac{A}{B}$, a kvadrat sa A^2 itd., na način da uvek ostavi trag izvršenim računima; najzad da predstavi slovima ne samo brojeve već i geometrijske veličine. On tako pravi sintezu algebre modernih i stare geometrije, kakvu je našao u zbirci Papusa Aleksandrijskog, koji je verovatno živeo za vlade Dioklecijanove (poč. IV v.). Kod Vijeta, jednačina drugog stepena glasi: *postavlja se da je zbir proizvoda od* B *i kvadrata* A *i proizvoda od* D *i* A *jednak stalnom broju* Z,

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
Diofant		S	Δ^Y	K^Y	$\Delta^Y\Delta$	ΔK^Y	K^YK	......	......
Diofantova tradicija (Baše, 1624)		N	Q	C	QQ	......	......	......	......
Arapska tradicija, Štifel, Italijani, itd., ovde Klavije	N	ℵ	ʒ	ɾe	ʒʒ	β	ʒɾe	Bβ	ʒʒʒ
Šike	1^0	1^1	1^2	1^3	1^4	1^5	1^6	1^7	1^8

što znači u modernom pisanju (duguje se Dekartu) rešiti jednačinu $bx^2+dx=c$.

Teorija jednačina

Nadalje algebra uzima dvostruki oblik. Najpre se vidi razvitak novog toka: *specijalna logistika* Vijetova i njegovih učenika, ili slovni račun. Govoreći o novoj algebri, D'Alamber* piše: *razlika između algebre i analize u matematici je ta što je algebra nauka o veličini računa uopšte dok je analiza način da se algebra upotrebi u rešavanju problema.* Na ovaj način približava se aktuelnom smislu izraza. Što se tiče reči *analiza*, Vijet je preuzima od grčkih geometara kao zamenu za algebru, za koju nalazi da je varvarska. Vijet ne uspeva u ovom pokušaju i novi izraz analiza uzima novo značenje.

Tradicionalni smisao reči algebra u XVI v., Vijetova analiza, razvijaće se u teoriji algebarskih jednačina. S Vijetom su postale očigledne relacije između koeficijenata polinoma $P(x)$ i korena jednačine $P(x)=0$. Proučavanje simetričnih funkcija korena produbljuje se u XVII v. sa Arioom (Thomas Harriot, 1560–1621), Žirarom (Albert Girard, 1595–1632), Njutnom*; u XVIII v. sa Varingom (Edward Waring, 1734–1798), i u XIX v. sa Košijem* itd. Ovi odnosi u početku su bili ustanovljeni samo kad su koreni pozitivni, pa zatim kad su realni. Dakle, izvesne jednačine nemaju rešenja od drugog stepena, ali kako? Piter Rot (Peter Rothe von Nüremberg, umro 1617) 1608, Žirar 1629. i Dekart 1637. određuju: *ako je n stepen polinoma* $P(x)$, *jednačina* $P(x)=0$ *ima tačno n korena.* Kad se koreni ne mogu naznačiti, nazivaju se *imaginarni*; prihvata se da se može računati s njima kao s realnim brojevima ali za to se ne daje nikakav dokaz. Međutim, imaginarni koreni jednačine: $x^2+1=0$ izražavaju se sa $\pm\sqrt{-1}$, i konstatuje se da su koreni polinoma drugog stepena oblika $a+b\sqrt{-1}$ i da tako svi pripadaju tipu koji je utvrdio Bombeli*. Malo-pomalo shvata se da je ovaj tip dovoljan za rešenje svih jednačina. Prihvatajući uvek princip postojanja n korena, D'Alamber daje 1746. dokaz činjenice da su oni uvek oblika $a+b\sqrt{-1}$, što su njegove kolege ocenile zadovoljavajućim. Ovaj dokaz će usavršiti Fonsene (François Daviet de Foncenex, 1734–1799), Lagranž* i Laplas*. Gaus* međutim vidi *circulus viciosus* u ovom postupku i, odbacujući princip, strogo dokazuje postojanje kompleksnih korena za svaki polinom. To je *osnovna teorema algebre* ili *D'Alamberova teorema* koja ima osobitost da se poziva na kontinuiranost, na analizu ili na topologiju i da prema tome prevaziđe domen čiste algebre.

U samoj čistoj algebri, ponašanje algebrista XVIII v. nije apsurdno. Ako je jedan polinom $P(x)$ konstruisan na komutativnom telu

K, nerazdeljiv ili prost, može se uvek, dodeljivanjem telu K neodređene veličine konstruisati telo s prekidom, gde će dati polinom imati bar jedan koren. Tada se osnovna teorema svodi na sledeću: *ako je telo K uključeno u telo R realnih brojeva, tada je telo prekida uključeno u telo C kompleksnih brojeva.*

Algebarsko rešenje jednačina

Ovaj izraz (inače zastareo) dugo je označavao rešenje jednačina *konačnim kombinacijama kvadratnih ili kubnih korena* itd. Tražilo se proširenje postupaka uspelih za jednačine prva četiri stepena a najznačajnija su proučavanja u ovom pravcu Čirnhausa (Ehrenfried Walter von Tschirnhaus, 1651–1708) koji je nastojao da smenom promenljive svede svaku jednačinu na oblik binoma (1689). Docnije su na isti način radili Ojler i drugi, a rasprava Vandermonda (Alexandre Théophile Vandermonde, 1735–1796), objavljena 1770, najavljuje novu epohu i uzlet algebre ka savremenim tokovima (prema Kronekeru).

Vandermond je prvi osnivač teorije supstitucija, razlikujući pre Gausa i Abela cikličke funkcije korena i rastavljajući simetrične funkcije u ciklične funkcije. Pojavljuje se tako pojam supstitucije na konačnom skupu, pojam koji će docniji algebristi produbiti i čije će proučavanje sa Galoaom* završiti sa novim pojmom konačne grupe. Vandermondove ideje naći će se, na nezavisan način, u Lagranžovoj raspravi pročitanoj 1771, *Razmišljanja o algebarskom rešenju jednačina.* U svojim *Aritmetičkim istraživanjima* (1801), Gaus iznosi Vandermondova zapažanja o binomnim jednačinama i dobija značajan rezultat: pomoću lenjira i šestara moguće je upisati pravilni poligon od 17 stranica u kružnici. Opštije, da bi se jedan poligon od n stranica (gde je n jedan prim broj) mogao konstruisati pomoću lenjira i šestara, potrebno je i dovoljno da n bude Fermaov broj.

Proučavanje supstitucija dovodi Rufinija (Paolo Ruffini, 1765–1822) da 1813. približno pokaže nemogućnosti algebarskog rešenja opšte jednačine petog stepena. Abel daje 1824. i 1826. najzad uverljive argumente. Galoa drugim putem čvrsto utvrđuje ovu nemogućnost stvarajući reč i pojam *grupe* i dajući, između ostalog, sledeću preciznost: *da bi jedna jednačina prostog stepena bila rešljiva u radikalima, potrebno je i dovoljno da se uz dva ma koja data korena, svi drugi koreni racionalno izvode iz datih korena.*

Na elementarnijem ali istorijski značajnom nivou, Vancel (Pierre Laurent Wantzel, 1814–1848) pokazuje 1837. da geometrijski problem koji je sveden na jednačinu trećeg stepena, nesvodljivu na telo svojih koeficijenata, nije rešljiv pomoću lenjira i šestara. Takva su dva antička pitanja trisekcije ugla i udvostručenja kocke.

Prsten polinoma

Pojam celog polinoma jedne ili više promenljivih duguje se upravo rešenju jednačina a pre svega Diofantovoj *Aritmetici*. Prema Dekartu, npr., kao geometrijske krive posmatraće se samo one čija je jednačina oblika P$(x, y)=0$, gde su x i y Dekartove koordinate i P polinom. To su naše algebarske krive, i y, posmatran kao implicitna funkcija od x, jeste *algebarska funkcija*. Skup polinoma P(x), konstruisanih na telu Q racionalnih brojeva ili na telu R realnih brojeva, javlja se dosta brzo, a postoje i začeci onoga što mi danas nazivamo struktura celog prstena, euklidskog: taj skup neobično liči na skup Z celih relativnih brojeva. Na njemu se može izvoditi sabiranje, oduzimanje, i množenje za koje se izložioci sabiraju. Izvesni polinomi, nerastavivi na proizvod faktora, igraju istu ulogu kao i apsolutni prim-brojevi u prstenu Z celih relativnih brojeva. Može se koristiti algoritam sličan Euklidovom algoritmu da bi se našao najveći zajednički delilac i najmanji zajednički množilac dva polinoma, itd. Steven* je 1585. ovu ideju jasno izložio. Tako se javio novi model apstraktnog matematičkog bića.

Kompleksni brojevi. Kvaternioni

Osnovna teorema algebre pokazala je da je skup kompleksnih brojeva zatvoreno algebarsko telo, tj., da su nad ovim telom samo prim-polinomi prvog stepena. Međutim, krajem XVIII v. većina matematičara osećala se zbunjeno pred *imaginarnim* brojevima koji su izgledali loše definisani. Neki matematičari, kao Norvežanin Vesel (Caspar Wessel, 1745–1818) 1797, Ženevljanin Argan (Jean Robert Argand, 1768–1822) 1806, Englez Varen (John Warren, 1796–1852) 1828. nalaze geometrijsku predstavu imaginarnih brojeva pomoću tačaka u ravni u Dekartovom koordinatnom sistemu. Ako sa apstraktnog gledišta ovo predstavljanje ne donosi ništa, barem umiruje duhove, zadovoljavajući intuiciju. Gaus je 1831. nove brojeve nazvao *kompleksnim* i svi su ih prihvatili. Stručnjaci su ipak tražili veću generalizaciju. Neki, kao Argan, nastoje da nađu *brojeve* koji odgovaraju tačkama prostora od tri dimenzije, što na modernom jeziku znači stvoriti vektorski prostor dimenzije veće od dva na telu R realnih brojeva, asocijativnim i distributivnim množenjem s obzirom na sabiranje. Počev od 1828. Hamilton (William Rowan Hamilton, 1805–1865) iz Dablina nastoji da udovolji ovom pitanju. On je već dao zadovoljavajuću definiciju kompleksnih brojeva zahvaljujući teoriji parova. Iznenadnim rasvetljavanjem 16. oktobra 1843. nalazi da ne može postojati sistem brojeva na prostoru od tri dimenzije, ali da može postojati na prostoru od četiri dimenzije koji je nazvao *kvaternioni*. U ovom sistemu pojavljuju se

obična jedinica 1 i tri druge jedinice i, j, k takve da je $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$. Međutim, iako je množenje kvaterniona asocijativno i distributivno s obzirom na sabiranje, ono nije komutativno. Bila je to prva pojava nekomutativne algebre.

Tela algebarskih brojeva

Zahvaljujući pre svega velikoj Fermaovoj teoremi, teorija brojeva je doprinela novim shvatanjima u algebri. Telo C kompleksnih brojeva i telo kvaterniona su proširenja tela R realnih brojeva. Naprotiv, tela *algebarskih brojeva* koji su nastali iz Kumerovih* istraživanja Fermaove teoreme, predstavljaju podskupove tela C kompleksnih brojeva. Dobijaju se pridruživanjem telu Q racionalnih brojeva jednog korena jednačine P$(x)=0$, gde je P(x) prim-polinom na telu Q racionalnih brojeva. Teorija tela algebarskih brojeva je u stvari proširenje teorije brojeva. Ona je najpre dovela do preciziranja pojma tela, a sama reč skovana je pod uticajem Dedekinda*. Trebalo je takođe precizirati šta je *ceo* jednog tela. Otuda pojam *prstena*, reč koja se duguje Hilbertu*. Dolazi se malo-pomalo do savremenog rečnika gde struktuiranje ide od skupova ka *monoidima*, skupova predviđenih za jednu operaciju, ka *grupama* gde je operacija asocijativna (ovaj termin dugujemo Hamiltonu, 1843) sa egzistencijom neutralnog i inverznog elementa, *prstenima*, komutativnim grupama u odnosu na jedno „sabiranje", ali koje sadrži „množenje", asocijativno i distributivno s obzirom na sabiranje i *telima*, prstenima koji su grupe u odnosu na množenje. Tela algebarskih brojeva, podtela tela C kompleksnih brojeva očigledno su komutativna; kvaternioni nisu komutativni. Izraze *distributivnost* i *komutativnost* stvorio je 1815. Francuz Servoa (François-Joseph Servois, 1767–1847) a reči *asocijativan* i *asocijativnost* Hamilton 1843.

Proširenje pojma grupe

Reč *grupa* iz 1830, koju dugujemo Galoau, primenjuje se najpre na konačne skupove, kao na skup permutacija između korena algebarske jednačine. U tom pogledu grupa već ima značaja u Žordanovom* delu *Rasprava o supstitucijama i algebarske jednačine* (1870). Žordanove pristalice proširile su primenu pojma grupe. Klajn (Félix Klein, 1849–1925) pokazuje da se veliki deo elementarne geometrije – onaj koji nije čisto topološki – svodi na strukturu grupe (grupe transformacija) što izlaže u *Erlangenskom programu* 1872. Sofus Li (1842–1899) pomoću istog pojma pravi jednu od osnova teorija parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Determinante i matrice

Koncept vektorskog prostora vezuje se delom za geometriju, što se tiče porekla; izraz *vektor* dugujemo Hamiltonu i on se odnosi na geometrijsko predstavljanje kvaterniona. Baricentrični račun Mebijusa (August Ferdinand Möbius, 1790–1868) iz 1827. i naročito Grasmanovi* hiperkompleksni sistemi zamišljeni 1844. imaju slično poreklo.

Iako su determinante u stvari poznate od XVIII v., npr. sa Kramerovim radovima o sistemima afinih jednačina, njihovo proučavanje se razvija naročito u XIX v. Termin je 1815. preuzeo Koši* od Gausa i upotrebljavao ga u drugom smislu, ali reč je u tekućoj upotrebi tek od Jakobijeve* rasprave objavljene 1841.

Engleski algebristi Silvester (James Joseph Sylvester, 1814–1897) i Keli* razvijaju teoriju invarijanata a Keli 1858. zasniva matrični račun.

Algebra logike

Najoriginalniji doprinos engleske škole odnosi se na formalnu logiku čija istorija potiče od Aristotela (384–322. pre n. e.), ali, od Grka i posle pojave sholastičke logike ona nije pokazivala nikakav progres sve do Morgana* i pre svega Bula* koji je zasnovao modernu matematičku logiku. Osnovna Bulova dela, *Matematička analiza logike* (1847) i *Zakoni mišljenja* (1854) po Raselu* označuju pojavu čiste matematike. Pirs* je nastavio Bulovo delo.

Apstraktna algebra

Svi domeni matematike, geometrija, mehanika, teorija funkcija obuhvatali su algebarske postupke i svaki domen doneo je zatim nove pojmove i probleme. Osećala se potreba za sintetičkim delom. Ova unifikacija, koju su započeli Dedekind i Hilbert krajem poslednjeg stoleća, vodila je ka aksiomatizaciji algebre i nju su nastavili drugi (Ernst Steinz, Emil Artin, Emmy Noether*), sa kojima se javlja savremena apstraktna algebra.

Videti: Matematička logika (algebra logike); Kuda ide savremena matematika?, str. 146.

Jedan kineski problem rešen na šahovskoj tabli

Računi na šahovskoj tabli se izvode sa obojenim štapićima od kosti; crni štapići su rezervisani za tzv. *prevarne* brojeve, ili negativne.

Konvencije dozvoljavaju da se predstave svi celi brojevi, čak i dovoljno veliki. Deset prvih brojeva predstavljeni su sledećim znacima

$$\text{I} \quad \text{II} \quad \text{III} \quad \text{IIII} \quad \text{X} \quad \overline{\text{I}} \quad \overline{\text{II}} \quad \overline{\text{III}} \quad \overline{\text{IIII}} \quad —$$

Iskaz. Bile su tri žetve. Dva snopa dobre žetve daju otprilike dve litre zrna, više od količine zrna proizvedene osrednjom žetvom. Tri takve žetve daju otprilike dve litre, više od količine zrna proizvedene jednom lošom žetvom. Najzad četiri ovakve žetve daju otprilike dve litre, više od količine zrna proizvedene jednom dobrom žetvom. Koju količinu zrna proizvede snop svake žetve?

Ako sa x označimo količinu koju daje snop dobre žetve, sa y količinu koju daje osrednja žetva i sa z količinu koja se odnosi na lošu žetvu, dolazimo do sistema jednačina

$$2x-y=1; \quad 3y-z=1; \quad 4z-x=1.$$

Isti je sistem za kineskog račundžiju. Ali on raspolaže svakom od jednačina vertikalno odozgo naniže, zdesna nalevo:

3	2	1	jednačine
I		II	prva žetva
	III	I	druga žetva
IIII	I		treća žetva
I	I	I	vrednost u litrama

Pošto je udvostručio kolonu sleva i njoj dodao onu zdesna, dobija se, u arapskim ciframa:

3.	2.	1.	jednačine
		2	prva žetva
−1	3	−1	druga žetva
8	−1		treća žetva
3	1	1	vrednost u litrama

Pošto je novu kolonu sleva utrostručio i njoj dodao onu iz sredine, dobija se:

3.	2.	1.	jednačine
		2	prva žetva
	3	−1	druga žetva
23	−1		treća žetva
10	1	1	vrednost u litrama

Odakle sledi $z=\frac{10}{23}$.

NEKA VELIKA IMENA U OBLASTI ALGEBRE

FIBONAČI, Leonardo (Leonardo Fibonacci, 1175 – 1240), zvani Leonardo iz Pize, italijanski matematičar. Putovao je po svim sredozemnim zemljama gde je bio pod uticajem vizantijskog i arapskog matematičkog nasleđa. U svom glavnom delu *Liber Abaci* (1202) proučavao je aritmetiku i algebru. Koristio je arapsku pozicionu numeraciju dokazujući se kao vešt algebrist.

GRASMAN, Herman (Hermann Grasmann, 1809 – 1877), nemački matematičar i lingvist, profesor matematike u srednjoj školi i poznati proučavalac sanskrta. Pored Mebijusa i Hamiltona, jedan je od osnivača multilinearnih algebri. Njegovo delo *Linearna učenja proširenja* (1844), iako malo shvaćeno od savremenika, imalo je značajan uticaj na kasniji razvitak algebre.

HAMILTON, Vilijam Roven (William Rowan Hamilton, 1805 – 1865), irski matematičar i astronom, profesor katedre astronomije Univerziteta u Dablinu a potom kraljevski astronom Irske. Njegova formalizacija rezultata dobijenih u optici bila je prihvatljiva za dvostruku interpretaciju, talasnu i korpuskularnu. Njegove koncepcije u dinamici prevazilaze klasičan domen i približuju se jednim delom aktuelnoj kvantnoj mehanici. U algebri je 1843. otkrio kvaternione, prvi primer nekomutativnog tela.

KELI, Artur (Arthur Cayley, 1821 – 1895), britanski matematičar. Karijeru je počeo kao advokat ali od 1863. bavi se matematikom u Kembridžu. Njegovi radovi se odnose na teoriju algebarskih invarijanata, matrični račun koji je ustanovio 1858, i na geometriju od n dimenzija. Oslanjajući se na koncepcije koje je razvio 1859, posebno će pokazati da se elementarne geometrije od tri dimenzije svode na projektivnu geometriju uvođenjem kvadrike apsolutnog.

KRAMER, Gabrijel (Gabriel Krammer, 1704 – 1752), švajcarski matematičar, Bernulijev* učenik, poznat naročito po *Uvodu u analizu algebarskih krivih* (1750), pravoj enciklopediji po svojoj temi. Njegovo ime ostaje vezano za sisteme jednačina prvog stepena, nazvane „Kramerove" (sistemi koji imaju toliko nepoznatih koliko i jednačina i determinantu različitu od nule).

MORGAN, August de (Augustus De Morgan, 1806 – 1871), britanski matematičar, profesor Univerziteta u Londonu. Napisao je brojne tekstove iz istorije i filozofije matematike, delimično sakupljene u *Zbirci paradoksa* (1872). Sa Bulom* je jedan od osnivača matematičke logike a zakoni dualiteta nose njegovo ime. Glavno delo u ovom domenu je *Formalna logika* (1847).

NETER, Emi (Emmy Noether, 1882 – 1935), nemačka matematičarka, kći matematičara Maksa Netera (Max Noether, 1844 – 1921). Počev od 1920. predavala je u Getingenu a zatim je preuzela kurs iz algebre, budući da se kao žena nije mogla penjati lestvicama univerzitetske hijerarhije. Od 1933, kad je emigrirala u SAD, predavala je

na Bryn-Maur-College-u. Smatra se jednim od glavnih osnivača apstraktne algebre. Za njeno ime vezuje se pojam, tzv. *neterinski prstenovi*, jedan od osnova algebarske geometrije.

SERE, Alfred (Alfred Serret, 1819 – 1885), francuski matematičar. Pored Frenea (F. J. Frenet, 1816 – 1900), za njegovo ime se vezuje pojam vektorske formule koja povezuje luk, krivinu i torziju prostornih krivih. U delu *Kurs više algebre* prikazao je otkrića Abela* i Galoaa*, dopunjujući ih naučnim objašnjenjima, za šta pronalazač nije imao vremena. Njegova dela, *Kurs diferencijalnog računa* i *Udžbenik iz trigonometrije* dugo su ostali na glasu.

ŠIKE, Nikola (Nicolas Chuquet, 1445 – 1500), francuski matematičar. Poznat je po delu *Trodelno u nauci o brojevima* (1484), najstarijoj francuskoj raspravi iz algebre. Koristi negativne brojeve i nulu. Za stepene upotrebljava eksponencijalno obeležavanje blisko današnjem, sa eksponentima kako pozitivnim, tako i negativnim. U govornoj numeraciji njemu dugujemo izraze bilion, trilion, kvadrilion itd.

Analiza

Proučavajući tela R realnih brojeva i C kompleksnih brojeva, analiza grupiše *sve što je iznad konačnih računa, sve što zahteva ponovljene pozive na pojam beskonačnog, na prelaz na graničnu vrednost, na upotrebu beskonačnog niza operacija, itd. Računi koji se izvode imaju numeričko značenje, ali samo kao računi aproksimacije* (Lebeg*). Drugim rečima, analiza se s jedne strane poziva na algebru, a s druge strane na topologiju tela R i C. Reč *analiza* uzeta je iz grčkog jezika a u jezik moderne matematike uveo ju je Vijet*, želeći da njome zameni reč *algebra*; malo-pomalo ona je dobila današnje značenje.

Približni vavilonski i grčki računi

Analiza se u veoma skromnim oblicima javlja sa pojavom neograničenih računa. Bez mogućnosti da se sigurno potvrdi da se takvi algoritmi nalaze u vavilonskoj matematici, mora se navesti približna vrednost $\sqrt{2}$, koja figuriše u tablici: 1, 24, 51, 10 (seksagezimalna poziciona numeracija). Postupak Herona Aleksandrijskog (I v.) za nalaženje kvadratnog korena, shvaćen je kao neograničen. Neka je A broj čiji se koren računa; polazi se od proizvoljne aproksimacije a_0 i izračunava se

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{A}{a_0}\right).$$

Ponovo se polazi od a_1 i nastavlja se koliko se želi. Takvi, ili drugi slični postupci ponovo se nalaze kod svih kalkulatora srednjeg veka i renesanse. Potrebno je svaki put naznačiti *pravilo srednjih brojeva* koje je 1484. formulisao Šike*: *za rešenje svake jednačine* $f(x)=0$ (aktuelne oznake), *uzimaju se dva razlomka* $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ *takva da je*

$$f\left(\frac{a}{b}\right)\cdot f\left(\frac{c}{d}\right)<0$$

i formira se veličina

$$f\left(\frac{a+c}{b+d}\right).$$

Ponovo se beskrajno počinju računi, uzimajući za nove granice jednu od prethodnih granica i jedan nov umetnuti razlomak.

Iracionalne veličine

Da bi neograničeni algoritmi bili korišćeni, trebalo bi uzeti u obzir nedovoljnost tela Q racionalnih brojeva za rešenje bitnih problema

geometrije. U početku se ne može izbeći da se geometrija, „nauka o kontinuumu" suprotstavlja aritmetici, „nauci o direktnoj veličini". Aristotel (384 – 322. pre n. e.) daje prvi dokaz koji dugujemo pitagorovcima o postojanju iracionalnih veličina. Ako se pretpostavi da je veličina $\sqrt{2}$ racionalna, onda se može pisati $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, gde su celi brojevi p i q relativno prosti. Dobija se relacija $p^2=2q^2$ i p je paran broj jednak $2r$. Tako je $4r^2=2q^2$ ili $q^2=2r^2$ i q je paran broj, što je apsurdno. Jednom potvrđena egzistencija iracionalnih veličina postavila je teško pitanje: šta je odnos dveju veličina? Odgovor je dat na maestralan način u petoj knjizi Euklidovih *Elemenata* (III v. pre n. e.) koju umnogom, bez ubedljivih dokaza treba pripisati Eudoksu (406 – 355. pre n. e.). Svakom paru veličina iste vrste od tada se pridružuje „odnos", odn. realan broj. Ovaj odnos je definisan „presekom" na skupu Q pozitivnih racionalnih brojeva, prema terminologiji Dedekinda* (*Neprekidnost i iracionalni brojevi*, 1872) koji je samo analizovao petu knjigu, ne izneveravajući je. Međutim, recipročan problem – „svakom preseku na skupu Q da li se može asocirati odnos dveju veličina?" – nikad nisu rešili ni Grci ni njihovi poslenici. Afirmativan odgovor koji daje Dedekind predstavlja jednu od prvih pojava *aritmetizacije analize*. Taj postulat definiše telo R realnih brojeva počev logički od skupa Q racionalnih brojeva koji čini da na taj način iščezne antinomija između aritmetike i geometrije. Konstrukcija tela R realnih brojeva izvodi se danas na mnogo načina, ali 1872. ostaje značajan datum.

Tangente kod Grka

Za Grke, kriva razdvaja ravan na dva različita domena: spoljni i unutrašnji ili je *oblikuje*. Spoljna oblast može obuhvatiti neograničene prave u dva smera, što uopšte nije slučaj sa figurom. Prava koja prolazi iz jednog regiona u drugi je *sekanta (sečica)*. Prava koja ima jednu zajedničku tačku sa krivom ili ne prolazi kroz figuru zove se *tangenta (dirka)*. Tri velika geometričara Euklid, Arhimed i Apolonije iz Perge (262 – 180. pre n. e.) ustanovljuju s velikom strogošću osobine tangenata. Oblast između tangente i krive zove se *ugao kontingencije* (*dodira*) koji je manji od svakog pravolinijskog ugla (u isto vreme ne može biti jednak nuli); njegovo postojanje protivreči petoj knjizi *Elemenata* i u srednjem veku i renesansi dovodi do značajnih rasprava.

Diorizmi

Diorizmi ili ograničenja geometrijskih problema su usko povezani s problemom tangente. Najjednostavniji slučaj se nalazi u šestoj knjizi *Elemenata* i odnosi se na diskusije *parabole u elipsi*, tj. na jednačinu drugog stepena. Svaka jednačina drugog stepena naravno nema dva korena, budući da je granični slučaj onaj kad je diskriminanta jednaka nuli. Sam Arhimed takođe proučava granične slučajeve problema geometrijskih tela (ovde trećeg stepena) u drugoj knjizi dela *Na sferi i cilindru*. Proučavajući broj normala povučenih na konusni presek, Apolonije nalazi evolute ovih krivih. Njutn* i Hajgens (Christiaan Huygens, 1629–1695) u ovom domenu su njihovi neposredni naslednici. Uopšteno govoreći, kad se problemi geometrijskih tela (trećeg i četvrtog stepena) rešavaju presekom dva konusna preseka, onda su granični slučajevi oni kad se dve krive dodiruju (jedna prema drugoj su tangente).

Geometrija mere. Kvadratura kruga

Proučavanje tangenata, ugla kontingencije i diorizama predstavlja poreklo diferencijalnog računa. Integralni račun nalazi, naprotiv, svoj izvor u meri površina i zapremina. Najstariji problem je problem kvadrature kruga. Rajndov papirus (XVIII v. pre n. e.) pokazuje da kod Egipćana dijametar kruga ekvivalentan kvadratu premašuje njegovu stranicu za $\frac{1}{8}$, što je izvrsna aproksimacija za kalkulatore koji koriste samo cele brojeve i njihove delove. Iako Vavilonci uopšte prihvataju za broj π celobrojnu vrednost 3, oni takođe koriste bolju aproksimaciju uzimajući za $\frac{1}{\pi}$ vrednost 57, 36 (seksagezimalna numeracija) što dovodi do vrednosti $\pi=3\frac{1}{8}$. Ova aproksimacija se ponovo nalazi u indijskom delu *Sulvasutra* (između 400. i 200. pre n. e.) i upotrebljava se ponekad na Zapadu u XV i XVI v. Problem kvadrature kruga naučno postavljaju Eudoks i naročito Arhimed koji *ustanovljuju dvostruku nejednakost*

$$3\cdot\frac{10}{71}<\pi<3\cdot\frac{1}{7}.$$

Arhimedova metoda omogućila je Cojlenu (Ludolf Van Ceulen, 1540–1610) da izračuna π sa 33 tačna decimala, kao i 1573. Otu (Valentin Otho, oko 1550 – oko 1605) i 1586. Antonicu (Adriaan Anthonisz, 1527–1607) da daju izvrsnu aproksimaciju sa ekscesom $\frac{355}{113}$. Kineski matematičar Ču Čang Če (430–501) izveo je ovu aproksimaciju sa uokvirenjem

$$3{,}1415926<\pi<3{,}1415927.$$

Vijet* 1593. pruža prvi neograničeni algoritam izračunavanja broja π: *odnos površine kvadrata upisanog prema površini kruga dobija se neograničenim nizom koji se dobija ako je*

$$a_1=\sqrt{\frac{1}{2}},\ sa\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{a_n}{2}}.$$

Valis (John Wallis, 1616–1703) daje 1656. sledeći rezultat:

$$\boxed{\frac{4}{\pi}=\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14\times14}\dots}$$

Brunker (William Brouncker, 1620–1684) daje za isti broj neograničeni neprekidni razlomak. Kaufman (Nicolaus Kaufmann, zvan Mercator, 1620–1687), Gregori (James Gregory, 1638–1675), Njutn i Lajbnic* nalaze izraze pomoću redova, među kojima je najčuveniji

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots$$

Zapremina piramida, konusa i sfere

Arhimed saopštava da dvanaesta knjiga Euklidovih *Elemenata* pripada Eudoksu koji je u ovom slučaju imao za preteču Demokrita (460–370. pre n. e.). Eudoks pokazuje da se krugovi odnose kao kvadrati – sfere kao kubovi – njihovih prečnika. S velikom tačnošću je utvrdio da jedna piramida ili jedan konus iznose trećinu prizme ili cilindra iste osnove i iste veličine. Da bi se ovo dokazalo, bilo je potrebno koristiti neograničene postupke aproksimacije, za ovaj slučaj geometrijske redove sa odnosom $\frac{1}{4}$. Dugo se raspravljalo o tome da li su konačni postupci dovoljni, a Brikar (Raoul Bricard, 1870–1944) je ustanovio 1896. da su samo infinitezimalne metode efikasne. Ove će metode dobiti na značaju sa Arhimedom, ali i na kvalitetu: određen je odnos između zapremine sfere i zapremine opisanog cilindra $\left(\frac{2}{3}\right)$, odnos između površine sfere i površine velikog kruga (4), zapremina konveksnih obrtnih kvadrika, površina parabole i površina elipse. On definiše težište ravne površi i težište konveksne zapremine. Nalazi sedišta segmenata parabole i segmenata njenih kvadrika; definiše spiralu, određuje njenu tangentu i nalazi površinu.

Nedeljivi delovi (indivizibilije)

U XIV v. sholastičari doprinose nekim idejama. U delu *De latitudine formarum* (*O širini oblika*), Nikola iz Orezma (Nicole d'Oresme, 1325–1382) daje grafičko predstavljanje funkcije (reč još nije pronađena) u Dekartovom koordinatnom sistemu. Njega zanimaju redovi pa dokazuje da je harmonijski red

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

divergentan. Međutim, tek u XVII v. Evropa će istinski prihvatiti Arhimeda, da bi ga potom prevazišla.

Kepler (Johannes Kepler, 1571 – 1630) sa izvesnom ležernošću od 1615. koristi infinitezimalne postupke kubature. Delo *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (*Geometrija neprekidnih nedeljivih novim odnosom pobuđena*) iz 1635. Kavalijerija (Bonaventura Cavalieri, 1598 – 1647), posrednog Galilejevog učenika, obeležava novu epohu. Ako se strogo posmatra, njegova metoda nedeljivih ne ostaje manje sporna. U isto vreme u Francuskoj, Dekart*, Ferma* i Roberval* dobijaju značajne rezultate. U Italiji Toričeli (Evangelista Torricelli, 1608 – 1647) usavršava Kavalijerijeve metode i sredinom stoleća postignuti su značajni rezultati: izraženo savremenim jezikom znalo se integrisati x^a za svaku racionalnu vrednost a različitu od -1, i za -1 vidi se veza sa logaritmima poznatim od 1614. Zahvaljujući pre svega Robervalu i Toričeliju, i njihovim proučavanjima cikloide, znaju se primitivne funkcije od $x^m \cos^n x$ za prve vrednosti eksponenata m i n. Sve ovo se izražava čisto geometrijskim jezikom.

Direktni i inverzni problemi tangentama

Osnove analitičke geometrije u Francuskoj počinju 1637. sa Dekartovom *Geometrijom*. Tri francuska analista, Dekart, Ferma i Roberval dali su postupke konstrukcije tangenata na krivama. Najtipičniji postupak je Fermaov. Kriva jednačine $P(x, y) = 0$, gde je P polinom, deli ravan na dva regiona: spoljni, gde je $P(x, y)$ pozitivan i unutrašnji, gde je negativan. Da bi se izrazilo da prava $y = ax + b$ bude tangenta na krivoj u tački x_0, y_0 $[P(x_0, y_0) = 0]$, biće dovoljno da se izrazi da u x_0 polinom $P(x, ax+b)$ prolazi kroz minimum nula, što dozvoljava da se nađe a i b. Što se tiče problema na koji se svodi problem tangenata, Ferma daje sledeće rešenje: *ako jedna racionalna funkcija* $R(x)$ *prolazi kroz ekstremum u tački* x_0, *i ako je* a *blisko* x_0 *ali različito, jednačina* $R(x) = R(a)$ *dopušta dva korena* a *i* a+e *tako da je* x_0 *između njih. Stavimo dakle* $R(a+e) = R(a)$ *i uredimo u odnosu na* e. *Promenljiva* e *se stavlja kao faktor. Skratimo sa* e. *Dobija se jednačina oblika* $T(a, e) = 0$. *Stavimo najzad* $e = 0$, *koreni jednačine* $T(a, 0) = 0$ *daju tražene ekstremume.* Osnove diferencijalnog računa su postavljene. Roberval 1645. nalazi kvadratrise koje uspostavljaju vezu između problema tangenata i problema kvadrature ili izračunavanja površina. Što se tiče problema inverznog tangentama, on se sastoji u nalaženju krive za koju se daje tangencijalna osobina. Problem se Kepleru postavio već 1604. u njegovim optičkim istraživanjima, kao što se postavio Dekartu, uvek u optici, u otkriću ovala koji nosi njegovo ime. Neperova* definicija logaritama postavljala je isto pitanje.

Celi redovi

U drugoj polovini XVII v. cveta engleska škola, najpre sa Valisom (John Wallis) koji svojim delom *Arithmetica infinitorum* (*Aritmetika beskonačnih*, 1656) oslobađa metodu nedeljivih od čiste geometrije, koristeći je samo u svojim dokazima kao nedovoljnu *nepotpunu indukciju*. Gregori (James Gregory) stvara 1667. termin *konvergentni redovi* u svom značajnom delu *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (*Prava površina kruga i hiperbole*) gde pokušava da ustanovi transcendentnost broja π. U delu *Logarithmotechnia* (*Tehnika logaritmovanja*, 1668), Merkator (Gerhard Kremer Mercator, 1512 – 1594) izračunava površinu hiperbole razvijajući $\frac{1}{1+x}$ u ceo red. Počev od svojih radova iz mladosti, Njutn stalno upotrebljava ove redove, posebno za razvijanje $(1+x)^\alpha$ za svaku racionalnu vrednost α (Njutnov binom, 1665). Pre 1670. našao je razvijanja za Arc tg x, Arc sin x, sin x, cos x itd. i slične redove da bi izrazio luk elipse, a isto tako segmente i lukove Dinostratove kvadratrise (IV v. pre n. e.), transcendentne krive koje su Grci izumeli za kvadraturu kruga.

Njutnove fluente i fluksije

Njutnov profesor u Kembridžu, Barou (Isaac Barrow, 1630 – 1677) sakupio je u svom delu *Lectiones opticae et geometriae* (*Predavanja iz optike i geometrije*) objavljenom 1674, izlaganom prethodne godine, suštinu metoda i znanja prethodnih generacija iz infinitezimalnog računa. Usavršio je Fermaovu tehniku. Ako se u jednačini $P(x, y) = 0$, da x-u priraštaj a, y-u priraštaj e, može se pisati $P(x+a, y+e) = 0$, odakle sledi odnos $\frac{e}{a}$ dva priraštaja kad su oni beskonačno mali. Ovo mu dozvoljava da povuče, npr. tangentu na krivoj $P(x, y) = 0$. Njutn je sarađivao u ovom radu svog učitelja, ali od 1670. njegove koncepcije postaju šire. On posmatra promenljive veličine kao da su vezane za vreme, za nezavisno promenljivu, tokom koje one teku: to su *fluente* a brzine toka su *fluksije*. Ako fluenta x ima fluksiju m, ona postaje posle beskrajno malog časka 0, $x + m0$.

U svom delu *De methodis serierum et fluxionum* (*O metodama redova i fluksija*) napisanom 1670. i 1671, ali objavljenom mnogo docnije, zahvaljujući svojoj tehnici Njutn razvija skup istraživanja o maksimumima i minimumima, o povlačenju tangenata, o krivini linija u ravni, o površinama, o dužini krivih, o težištima, o približnom rešenju algebarskih jednačina itd.

Lajbnicov diferencijalni i integralni račun

Kao i Njutn, i Lajbnic je bio pod uticajem Dekartove algebre kad je u Parizu Hajgens (Huygens) postao njegov učitelj, u času kad je objavio

Horologium oscillatorium (*Časovnik oscilovanja*, 1673). U ovom delu Hajgens posebno raspravlja o evoluti i evolventi krivih. U časopisu *Acta eruditorum* (*Dela obrazovanih*) koji je sam uređivao, Lajbnic je 1684. objavio svoje postupke i oznake. Označavajući sa dx beskonačno mali priraštaj promenljive x, priraštaj koji naziva razlikom od x (docnije *diferencijal*), on daje elementarna pravila diferenciranja zbira, proizvoda i količnika promenljivih. Uvodi i znak integracije $\int$ i dobija rezultate slične Njutnovim. Njegovi učenici su i oba brata Bernuli*.

Pojam funkcije

Iako je zamisao funkcije već jasna, između ostalih kod Gregorija i Njutna (fluenta), sama reč pojavila se sa Lajbnicom 1694, sa čisto geometrijskim smislom: apscisa, ordinata, poluprečnik krivine... funkcije su jedne tačke krive. Avgusta 1698. Žan Bernuli predložio je da se sa X ili ξ označi funkcija od x, a Lajbnic u odgovoru na pismo gde je učinjen ovaj predlog sugeriše oznake $\overline{x}\lfloor 1 \rfloor$, $\overline{x}\lfloor 2 \rfloor$ za dve različite funkcije, *formirane od x*. Ako su one formirane od dve promenljive označiće se sa $\overline{x;\, y}\lfloor 1 \rfloor$, racionalna funkcija sa $\overline{x}\lfloor r{:}1 \rfloor$, jedna racionalna cela sa $\overline{x{:}y}\lfloor ri{:}1 \rfloor$, itd. Žan Bernuli daje 1718. definiciju oslobođenu od svakog geometrijskog posmatranja: *funkcijom jedne promenljive veličine naziva se veličina na neki način složena od ove promenljive veličine i od konstanti*. On predstavlja sa X i sa Φx funkciju od x. Oznaka fx potiče od Ojlera* koju koristi prvi put 1734. U *Introductio in analysis infinitorum* (*Uvod u analizu beskonačnih*, 1748) deli funkcije na algebarske i transcendentne, „bogate u integralnom računu".

Lakroa (Sylvester-François Lacroix, 1765–1843) precizira 1810. definiciju Žana Bernulija: *svaka veličina čija vrednost zavisi od jedne ili više drugih veličina zove se funkcija tih veličina, bilo da se zna ili ne zna pomoću kojih operacija se od ovih dolazi do prve*. Otuda su „neprekidne funkcije" *one čije su vrednosti vezane jednim istim zakonom, ili zavise od iste jednačine*. Ova vrsta kontinuiteta nazvana je ojlerovski kontinuitet, da bi se razlikovao od pojma koji danas nosi isto ime.

Rasprave o problemu treperećih žica koje su započeli Tejlor (Brook Taylor, 1685–1731), zatim D. Bernuli*, D'Alamber*, Ojler i Lagranž* dovele su do proširenja pojma funkcije; Ojler je 1759. napisao: *Svako sada mora priznati upotrebu neregularnih i diskontinuiranih funkcija*... Kontinuirane funkcije bile su najmanje za razvijanje u Tejlorove redove, i u to davno vreme Lagranž ih je nazvao *analitičkim*. U međuvremenu, Monž* često upotrebljava diskontinuirane funkcije koje Furije (Joseph Fourier, 1768–1830) u svojim radovima o prostiranju toplote razvija u trigonometrijske redove ili *Furijeove redove*. Dirihle* proučava uslove koji bi zadovoljili funkcije realne promenljive da bi se razvile u takve redove, daje 1827. modernu definiciju uniformnih funkcija: svakoj vrednosti x iz domena definicije odgovara vrednost y koja se zna ili ne zna efektivno da izračuna. Isti se smisao i danas pridružuje reči funkcija, bez kvalifikativa. Dirihleov rad su docnije precizirali i upotpunili Riman* i Kantor* pa je on postao jedan od izvora teorije skupova. Sa Košijem* pojam kontinuiteta gubi ojlerovski smisao i poprima aktuelni: *jedna funkcija jedne promenljive je kontinuirana između datih granica kad između ovih granica svaka vrednost promenljive proizvede jedinu i konačnu vrednost funkcije i kad ova varira neosetljivim stepenima sa samom promenljivom* (1821).

Riman je 1861. upozoravao da kontinuirana funkcija u Košijevom smislu nije uvek izvodljiva a 1872. Vajerštras* daje primer kontinuirane funkcije koja nije izvodljiva ni u jednoj tački. Za funkcije kompleksne promenljive, Koši prisiljava svoje „monogene funkcije" da imaju dobro definisan izvod u svakoj nesingularnoj tački (1846). Njegova proučavanja o „određenim integralima uzetim između imaginarnih granica" (1825) dozvoljavaju mu da razvije u ceo red svaku holomorfnu funkciju (1831). Značaj ovih teorijskih radova osetio se jače zahvaljujući uvođenju novih, *eliptičnih funkcija*. U osnivanju infinitezimalnog računa bile su poznate (pre samog pronalaska reči) samo algebarske funkcije, gde su promenljiva x i funkcija y vezane „algebarskom" jednačinom $P(x, y) = 0$ (P je polinom), trigonometrijske direktne i inverzne funkcije, logaritamska i eksponencijalna funkcija. Nova tehnika dovela je do pojave drugih funkcija. Nastale iz radova Žaka Bernulija, Toskija (Giulio Cesare Fagnano dei Toschi, 1682–1766), Ojlera, Lagranža, itd., o rektifikaciji lukova konusnih preseka ili lemniskata, eliptičke funkcije je proučavao od 1797. Gaus* ali se ništa nije znalo o njegovim radovima. Le Žandr je obrađivao četrdeset godina ovu granu analize a radove je objavio između 1825. i 1832. U ovo vreme, odlučno zauzimajući mesto u kompleksnom domenu, Abel* i Jakobi* otkrivaju inverziju eliptičkih integrala i dvostruku periodičnost inverznih funkcija, onih koje se od tada nazivaju eliptičke funkcije. Njihova proučavanja nastavili su Liuvij (Joseph Liouville, 1809–1882), Keli (Arthur Cayley, 1821–1895), Vajerštras i Ermit* a zatim su usledili Poenkare* i Klajn (Félix Klein, 1849–1925) sa modelom Fuksovih ili automorfnih funkcija. Pored eliptičnih funkcija tu su i Abelove i algebarske funkcije u kompleksnom domenu, koje su proučavali naročito Puize (Victor Puiseux, 1820–1883) i Riman. Opšta teorija analitičkih funkcija kompleksne promenljive dobila je u Vajerštrasu svog velikog teoretičara. Što se tiče funkcija realne promenljive, njihova je osnova u Kantorovoj teoriji skupova i predmet su proučavanja francuske škole (Žordan*, Ber – Baire, Borel*, Lebeg). Imajući u vidu Volteru* može se reći da je XIX stoleće – „stoleće teorije funkcija".

Određeni integrali

Ako geometričari prve pol. XVII v. koriste u metodi nedeljivih sumaciju beskonačno malih elemenata, Njutn i Lajbnic izbegavaju ove metode dajući prevashodstvo diferencijalnom računu i od integralnog računa čineći inverziju diferencijalnom računu. Današnjim rečima, oni traže primitivnu funkciju jedne funkcije ili neodređeni integral, dve reči koje imaju isti smisao. Od 1823. sa Košijem se vraćamo na stare koncepcije. On definiše

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

kao graničnu vrednost izraza

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+\ldots$$

$$\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

gde je $f(x)$ kontinuirana funkcija – u sadašnjem smislu – između x_0 i X,

$$x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<X,$$

i razlike x_1-x_0 itd. teže nuli. Ova definicija integrala, koja se u osnovi vezuje za proučavanje Arhimeda, od posebnog je značaja. Najpre Koši a zatim i Riman ih proširuju 1854. na izvesne slučajeve diskontinuiteta; Darbu* je 1875. procenio teoriju „Rimanovog integrala". Stiltes 1894 (Thomas – Jan Stieltjes, 1856 – 1894) i Lebeg 1902. daju dva proširenja pojma određenog integrala. Lebegov integral se oslanja na meru skupova tačaka – teoriju koju dugujemo Kantoru, Žordanu, Borelu i samom Lebegu.

Redovi

Matematičari XVIII v. uveliko upotrebljavaju redove, naročito cele, i u svojoj *Teoriji analitičkih funkcija* (1797), Lagranž od njih pravi osnovu čitave analze. Potpuno se oslanja na moć algoritma, ne zadržavajući se dovoljno na uslovima konvergencije, što ne ide bez poteškoća: *„Divergentni redovi su đavolski i sramota je usuditi se graditi na njima dokaz"* – piše Abel 1826. Reakcija počinje od 1812. sa Gausom a zatim sa Košijem koji precizno definiše konvergenciju redova i ustanovljuje opšte kriterijume tako da su uži kriterijumi nazvani „D'Alamberovi" (D'Alamber ih je koristio 1768. u posebnom slučaju) i „Košijevim" (1821). „Košijevi nizovi" će biti od opšteg značaja za docniji razvitak matematike. Za redove sa članovima ma kojeg znaka ili kompleksnim, Koši pokazuje da ako red modula konvergira, onda dati red takođe konvergira: to je apsolutna konvergencija. Dirihle ustanovljuje 1837. da suma jednog apsolutno konvergentnog reda ne zavisi od poretka članova, dok Riman 1866. dokazuje da ako jedan

red s realnim članovima konvergira, a da nije apsolutno konvergentan, može samom modifikacijom poretka članova za njegovu sumu uzeti proizvoljno izabranu vrednost. Košijeva istraživanja o opštim redovima predstavljaju metodičku pripremu za proučavanje celih redova. U ovom domenu u njegovim izlaganjima od 1821. prisutne su neke slabosti. U cilju prevazilaženja tih slabosti Stoks (Georg Gabriel Stokes, 1819 – 1903), Sejdel (Ludwig Philipp von Seidel, 1821 – 1896) i Dirihle stvaraju 1840. pojam uniformne konvergencije.

Čitavo XIX stoleće daće od celih konvergentnih redova jednu od osnova analize i posebno u kompleksnom domenu, Vajerštras (kao i Mere – Charles Méray u Francuskoj) definiše funkciju razvijanjem u ceo red u blizini jedne regularne tačke, određujući je najzad, njenim *analitičkim produženjem.* U međuvremenu, krajem stoleća neki analisti rade na divergentnim redovima koje je Abel hteo da odstrani iz matematike i postižu izvestan uspeh.

Račun varijacija

Izraz račun varijacija skovao je Ojler 1766, podrazumevajući pod njim proučavanje ekstremuma izvesnih integrala. Može se smatrati da ovaj račun potiče iz dokaza zakona refrakcije svetlosti koji je dao Ferma pred kraj života i da se zasniva na principu najmanjeg puta. Lajbnic i braća Bernuli rešili su više sličnih problema a Ojler 1744. sistematiše tehniku rešenja. *Principi minimuma rada* ili *minimuma akcije* uzimaju sve veći značaj u fizici i mehanici s Lajbnicom i Mopertijusom (Pierre – Louis Moreau de Maupertius, 1698 – 1759). Lagranž zasniva 1756. nov račun na čisto analitičkoj osnovi. Njegova metoda ne dozvoljava da se razlikuju maksimumi od minimuma, a Le Žandr iskazuje 1788. kriterijum čiji je strogi dokaz dao Jakobi 1836. U XIX v. ovoj grani analize posvećeno je mnogo radova; danas ona čini deo funkcionalne analize (po rečima Adamara*).

Obične i parcijalne diferencijalne jednačine

Diferencijalne jednačine, po rečima Lajbnica iz 1677, pojavljuju se odmah otkrićem novog računa. Postupci integracije se usavršavaju tokom XVIII v., ali tek sledeće stoleće ustanovljuje teoreme postojanja integrala (ili rešenja) jednačine.

Parcijalne diferencijalne jednačine izveo je eksplicitno Ojler tek 1734, a sistematski ih proučava tek D'Alamber od 1747, povodom problema treperećih žica. Jednačine prvog reda rešio je Lagranž a Monž ih je geometrijski interpretirao. Proučavanje krivine površi daje analognu interpretaciju jednačinama drugog reda. Ova vrsta jednačina biće tokom XIX i XX v. predmet brojnih radova. Jedan od rezultata je i *teorija distribucije* (Laurent Schwartz, 1945).

Transcendentni brojevi

Izvesni brojevi, kao π, nisu izračunati ni pomoću geometrije lenjira i šestara, niti pomoću algebarskih postupaka. Nazivajući *algebarskim* svaki broj koji je koren jednačine $P(x)=0$, gde je P ceo polinom na Q telu racionalnih brojeva, a *transcendentnim* svaki drugi broj, postavlja se pitanje: ima li transcendentnih brojeva? Liuvij 1844. efektivno konstruiše brojeve te vrste. Radovi Kantora o skupovima dokazali su docnije njihovu egzistenciju, ali bez uspeha da se do njih dođe. Ermit* je precizno utvrdio 1872. transcendentnost broja e, a radeći na istom pitanju, Lindeman (Ferdinand von Lindemann, 1852–1939) pokazuje 1882. da je broj π transcendentan. San kvadratora iščezao je zauvek.

Gelfond (Aleksandar Osipovič, 1906–1968) dokazuje 1934. da je broj a^b transcendentan, gde je a algebarski broj različit od 0 i 1, a b algebarski iracionalan broj.

NEKA VELIKA IMENA U ANALIZI

APEL, Pol (Paul Appell, 1855–1930), francuski matematičar, profesor racionalne mehanike na Sorboni. Suština njegovog dela je u analizi gde proučava algebarske i Abelove funkcije. Njegovo delo *Rasprava o racionalnoj mehanici* (I–V) dugo je ostalo klasično.

BOLCANO, Bernard (Bernhard Bolzano, 1781–1848), češki matematičar, filozof i teolog nemačkog izraza. Njegovi matematički radovi ostali su dugo većim delom u rukopisu. On je, u stvari, preteča Vajerštrasa*, Merea, Kantora* i Dedekinda* u definiciji skupa realnih brojeva. Mnogo pre Vajerštrasa daje primer neprekidne nediferencijabilne funkcije. Može se smatrati pretečom Kantora u teoriji skupova a Klajn ga naziva jednim od začetnika aritmetizacije analize.

DARBU, Gaston (Gaston Darboux, 1842–1917), francuski matematičar, profesor više geometrije na Sorboni. Posebno se bavio teorijom funkcija, određenim integralima, parcijalnim diferencijalnim jednačinama ali naročito infinitezimalnom geometrijom. Osnovao je 1870. „Bilten matematičkih nauka".

DINOSTRAT (IV v. pre n. e.), grčki matematičar, Eudoksov učenik; koristio je transcendentnu krivu da bi našao dužinu kružnice u funkciji poluprečnika. Ova kvadratrisa je mesto preseka dveju pravih koje se ravnomerno kreću, jedna translacijom a druga rotacijom. Ovu krivu zamislio je sofist Hipija Elejski (V v. pre n. e.) za deljenje svakog ugla na jednake delove.

KAVALIJERI, Bonaventura (Bonaventura Cavalieri, 1598–1647), italijanski matematičar, član reda sv. Jeronima, odn. jezuita. Predavao je matematiku na Univerzitetu u Bolonji. U sfernoj geometriji prvi je dao ispravan dokaz proporcionalnosti površine trougla njegovom sfernom višku. Posebno je čuven po delu *Geometrija neprekidnih nedeljivih* (1635) u kome je predstavljena prva sistematizacija Arhimedovih postupaka kubature i kvadrature ili *metoda nedeljivih.*

LIUVIJ, Žozef (Joseph Liouville, 1809–1882), francuski matematičar, profesor Politehničke škole, Sorbone i Kolež-de-Fransa, osnivač *Sveske čiste i primenjene matematike* (1836). Objavio 1846. Galoaova dela a 1844. dao prve primere transcendentnih brojeva. Sa Ermitom* stvara oko 1850. apstraktnu teoriju eliptičnih funkcija, proučava konformne transformacije realnog prostora itd. Posredstvom svog časopisa i svoje nastave izvršio je znatan uticaj na svoje doba.

Videti: Abel, Adamar, Arhimed, Bernuli, Borel, D'Alamber, Dedekind, Dekart, Euklid, Ermit, Ferma, Hajgens, Gaus, Jakobi, Kantor, Koši, Lagranž, Lajbnic, Lebeg, Monž, Neper, Njutn, Ojler, Poenkare, Riman, Vajerštras, Vijet.

Aritmetika

Aritmetika proučava skup N celih prirodnih brojeva; skup Z celih relativnih brojeva, kao i telo Q celih racionalnih brojeva (u svojim najvišim nivoima, nosi naziv *teorija brojeva*).

U toku istorijskog razvitka, njene granice sa algebromm i analizom bile su promenljive i često neprecizne. Dosta prirodno ona može da se deli na praktičnu i teorijsku aritmetiku. Prva obuhvata govornu i pisanu numeraciju, predstavljanje razlomaka i operativne tehnike koje se odnose na četiri osnovne računske radnje: sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje. Govorne numeracije prisutne su kod svih naroda iz najdavnijih epoha, i teško je o tome pisati istoriju. Aristotel je već primetio da je većina naroda računala sa dvanaesticama. Međutim, u više jezika, u grčkom npr., nalaze se ostaci osnove 5 i u drugim, naročito u francuskom, tragovi osnove 20.

Sistemi pisane numeracije i operativne tehnike koje ih prate

Egipat

Pisana egipatska numeracija je zasnovana na bazi 10. Kad je reč o onome što se može nazvati *urezanom numeracijom, hijeroglifima*, onda svaki stepen od 10 poseduje svoj znak: jedinica I, desetica ∩, stotica , hiljada (cvet lotosa), deset hiljada (jedan veliki prst ili jedna velika jedinica), sto hiljada (punoglavac, simbol neprebrojivosti), milion (bog beskonačnosti). Za predstavljanje jednog broja, npr. 2617, urezaće se

Poredak znakova može se inače izmeniti. Ovo pisanje je često uprošćeno, i 400 000 npr., biće predstavljeno ovako: . Inače, *hijeratsko pisanje* na papirusu donosi druge modifikacije naznačene na tablici, koja prati alfabetske numeracije grčke, jevrejske ili arapske. Egipćani ne poznaju naše opšte razlomke, već samo kvante (razlomke sa brojiocem 1), ili recipročne vrednosti celih brojeva, kao $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, itd., i razlomak $\frac{2}{3}$. Kvanti se označavaju homonimnim celim brojem prekrivenim simbolom :

$$\frac{1}{10} \text{ ili } $$

Množenje celih brojeva se izvodilo posredovanjem duplikacije, podvostručenja, što implicitno pretpostavlja postojanje osnove 2, podređene osnovnoj bazi 10. Na primer, u proizvodu 15 sa 13, pisaće se jedan ispod drugog, u jednoj koloni, brojevi 1, 2, 4, itd., i, u drugoj pored ove, 15, dva puta 15, četiri puta 15, itd.:

1	15	kako je $13 = 1 + 4 + 8$,
2	30	vidi se da je 15×13
4	60	$= 15 + 60 + 120$,
8	120	$= 195$.

Analogni postupci postojali su dugo, npr. u ruskom seljaštvu. Egipatski postupak dopušta, inače, neke varijante: tako je množenje sa 10 neposredno. Deljenje se vrši počev od iste metode. Shvatilo se da korišćenje samih kvanta u računu sa razlomcima stvara velike teškoće. Posebno, množenje zahteva postojanje tablica duplikacija. Nalaze se u *Rajndovom papirusu* (Rhind), gde predstavljaju dvostruke vrednosti recipročnih vrednosti sukcesivnih neparnih brojeva od 3 do 101:

$$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}; \quad \frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155};$$

$$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}; \text{ itd.}$$

Uprkos velikim komplikacijama koje povlači ekskluzivna upotreba kvanta, njih će prihvatiti grčki praktičari i biće zastupljeni u našoj eri u Vizantiji i na Zapadu.

Mesopotamija

Naučna vavilonska numeracija, skoro istovremena sa egipatskom numeracijom (javila se oko 1800. pre n. e.), jedna je od najznačajnijih. Njen uticaj se još oseća u našim merama ugla, luka i vremena. Ona s jedne strane koristi osnovu 10, ali samo za cele brojeve manje od 60. Tada postupa kao i u slučaju egipatskih hijeroglifa i upotrebljava znak ∇ za jedinice i znak ≺ za desetice. Oba ova simbola nastajala su ubodom bodeža u glinenu tablicu, dozvoljavajući relativno brzo pisanje: tako se 34 piše ≺ ≺ ≺ ∇ ∇ ∇ ∇

i 57 ≺ ≺ ≺ ≺ ≺ ∇ ∇ ∇ ∇ ∇ ∇ ∇

Iznad 59 pisanje postaje poziciono sa osnovom 60. Tako se 60 piše ∇, tačno kao 1; 61 se piše ∇∇, i 365

∇∇∇ ∇∇∇ ∇∇∇ ∇∇

U starijoj eposi nije postojao nikakav znak za nulu: 61 = ∇ ∇ i 3601 = ∇ ∇ razlikuju se samo većim međuprostorom znakova za drugi od ovih brojeva. Jedna oznaka za nulu postoji kod vavilonskih astronoma, skoro savremenika grčkih klasika Apolonija iz Perge* (kraj III i početak II v. pre n. e.) i Hiparha (II v. pre n. e.). Druga posebnost sistema: dobro služi u predstavljanju celih brojeva kao i u predstavljanju razlomaka koji za imenitelj imaju stepen od 60. Može se npr. pročitati na jednoj tablici

gde je 1, 24, 51, 10 što se može predstaviti

$$60^3+24\times 60^2+51\times 60+10,$$

kao i

$$60^2+24\times 60+51+\frac{10}{60},$$

što ovde stvarno predstavlja

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3},$$

izvesnu aproksimaciju $\sqrt{2}$. Naučna vavilonska numeracija je dakle poziciona numeracija, s nesigurnim zarezom koju su delimično prihvatili grčki astronomi. Pišući cele brojeve na vavilonski način, Grci koriste seksagezimalnu notaciju za razlomački deo. Tako Klaudije Ptolemej (II v.) označava $2596+\frac{14}{60}+\frac{24}{60^2}$ na sledeći način:

$$,\beta\varphi\varsigma\bar{\varsigma}\iota\delta'\kappa\delta''.$$

Arapski astronomi podražavaju Grke koristeći svoj alfabet; zapadni astronomi čine isto ali koristeći arapske cifre. Isti broj kao gore postaje 2596°14′24. Neki astronomi, naročito u XVI v., koriste isto seksagezimalno pisanje u dva smisla: u uzlaznom i u silaznom. Citirani broj se tada predstavlja ovako: 43′16°14′24. Egzistencija ovih *fizičkih brojeva*, veoma praktičnih, a naročito postojanje numeričkih tablica izračunatih u ovom sistemu znatno će usporiti pojavu decimalnih brojeva.

Postupak egipatskog množenja sukcesivnim podvostručivanjima (duplikacijama) izbegava – za cele brojeve – svaki napor pamćenja. Seksagezimalna numeracija, zbog veličine osnove, zahteva naprotiv mnogo: otuda brojne vavilonske numeričke tablice. Posebno, kako mogu biti samo predstavljeni, izraženi, brojevi oblika $\frac{a}{60^n}$, gde su a i n celi brojevi, od značaja je saznati cele brojeve koji dopuštaju inverziju ove vrste i izraditi tablice ovih inverzija. Mnoge tablice sadrže takve priručnike.

Grčka i helenistička epoha

Grčka je u načelu koristila dva sistema numeracije, oba zasnovana na alfabetskom pismu. Atička numeracija postupa kao hijeroglifsko pismo i kasnije kao rimsko:

I	Γ	Δ	ΓΔ	H	ΓH
1	5	10	50	100	500

X	ΓX	M	ΓM
1 000	5 000	10 000	50 000

Naučno pisanje koje su koristili svi veliki matematičari, vizantijske računovođe i astronomi, približava se egipatskom hijeratičkom pismu. Ono koristi 27 slova za pisanje svih celih do 10 000, mirijade, isključivo:

jedinice

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α′	β′	γ′	δ′	ε′	ς′	ζ′	η′	θ′

desetice

10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι′	χ′	λ′	μ′	ν′	ξ′	ο′	π′	ϟ′

stotice

100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ′	σ′	τ′	ϑ′	φ′	χ′	ψ′	ω′	λ′

hiljade

1000	2000	3000	4000	5000	6000
,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ς

7000	8000	9000
,ζ	,η	,θ

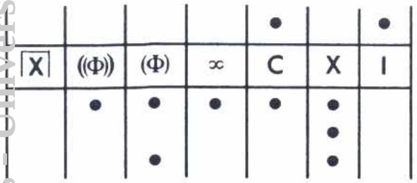
Iznad 10 000 razlaže se na mirijade 10^4, druge mirijade 10^8, treće mirijade 10^{12} itd. Mirijade su označene bilo slovom M, bilo pomoću tačaka. Arhimed* i Apolonije* su dali postupke označavanja veoma velikih brojeva. Ovaj sistem preuzet je od različitih naroda sa alfabetskim pismom, između ostalih od Jevreja i Arapa.

Grci su za razlomke koristili egipatske kvante, ali od klasične epohe (300. pre n. e.) i opšte razlomke. Na drugom kraju sveta u istoj epohi Kinezi rade isto. Razlomak $\frac{121}{16}$ Grci označavaju sa $\frac{\iota\varsigma}{\rho\chi\alpha}$ imenilac je napisan iznad brojioca.

Grčko označavanje izbegava upotrebu nule. U međuvremenu astronomi je koriste, prihvatajući od II v. pre n. e. seksagezimalni sistem. U papirusu ptolemejske epohe nula ima različite oblike:

Pomoćna računska sredstva

Naučna grčka numeracija izvodi račune skoro istom lakoćom kao i savremena numeracija, što nije slučaj sa atičkom i rimskom numeracijom. Svi narodi, međutim, imaju pomoćne postupke u računu, kao numeričke tablice, čije poreklo potiče od Vavilonaca i koje postoje i danas, od skromnih učeničkih *pitagorejskih tablica* do velikih trigonometrijskih, logaritamskih i drugih tablica. Treba spomenuti mentalni račun, račun na prstima koji je u antici i srednjem veku bio veoma rasprostranjen, kao i različite uređaje, među kojima su računala sa kuglicama. Tu su i tehnički uređaji: rimski ručni abakus, kineski suanpan, japanski soroban i ruski čoti koji su svi još u upotrebi. Sama reč *račun* (latinski *calculus* = kamenčić) asocira na abakuse sa kolonama ili linijama, korišćene u Grčkoj, Rimu i na Zapadu do XVII v. Sve kuglice mogu imati istu vrednost, što je najčešće slučaj kod abakusa korišćenih u računima u maloj trgovini i u kućanstvu:



broj 121635 označen na rimskom abakusu.

Značajna varijanta računa na abakusu sastoji se u korišćenju označenih kuglica. Ove oznake ili vrhovi su do broja 9 i zauzimaju mesto naših cifara; na primer, oznaka ekvivalentna broju 8 vredi 8 kugličnih jedinica. Ovaj sistem javlja se na Zapadu oko 1000. godine.

Decimalna poziciona numeracija

Sadašnja numeracija pojavila se u Italiji oko VI v. Poziciono pisanje najpre je postojalo u seksagezimalnom označavanju, sa upotrebom nule kod persijskih, seleukidskih ili aleksandrijskih astronoma. Arapi su brzo raširili indijsko otkriće sa dva različita oblika cifara, od kojih je jedan prevladao na istoku i drugi se preneo u Evropu, počev od XII v. U Vizantiji je korišćena nula sa devet prvih oznaka grčkog alfabeta. Međutim, širenje decimalnog označavanja po pravoj i korišćenje sistemskih decimalnih razlomaka trebalo je sačekati. Iako su decimalne brojke otkrili i koristili neki nadareni ali usamljeni matematičari, kao 1350. Bonfis de Taraskon (Emmanuel Bonfils de Tarascon) ili Džamhid al-Kahi (umro 1436) u Samarkandu, tek će se krajem XVI v. sa Vijetom* i naročito sa Stevenom* decimalni razlomci nametnuti i u naučnim računima zameniti seksagezimalne razlomke. Kad ih je prihvatila Konvencija metričkog decimalnog sistema, najzad je bila osigurana njihova pobeda u svim sredinama. Zahvaljujući svim ovim usavršavanjima, pisani račun, *račun u pero* postao je mnogo praktičniji.

Nova pomoćna računska sredstva

Numeričke tablice se razvijaju; astronomi XVI v. postavljaju danas zaboravljenu metodu – *prostaferezu* – koja polazeći od formule, kao npr.:

$$2\cos a\cdot\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b),$$

dopušta da se zamene množenje i deljenje, teški za velike brojeve, sabiranjem ili oduzimanjem. U istu vrstu otkrića spada i Neperovo* otkriće logaritama 1614. U želji da uprosti operativnu tehniku, Neper je izumeo *štapiće* koji omogućuju da se konstruiše tablica množenja devet prvih brojeva proizvoljnim celim multiplikatorom. Njegov *priručnik* predstavlja poboljšanje upotrebe ove tablice a *Lokalna aritmetika* je šahovska tabla na kojoj se mogu ručno izvoditi množenja egipatskim postupkom duplikacije. Drugi astronom, Šikard (Wilhelm Schickard, 1592 – 1635) izumeo je 1623. *sat za račun* zasnovan na Neperovim štapićima. On je konstruisao samo jedan model ovog sata koji je uništen u nekom požaru

1624. Paskalova (Blaise Pascal, 1623 – 1662) aritmetička mašina je najčuvenija: to je uređaj za sabiranje u više primeraka. Konstruisana je počev od 1642. i puštena u prodaju. Trideset godina posle Paskala, Lajbnic je izumeo i postavio mašinu za množenje (1673). Tek u XIX v. napredak tehnologije dozvoljava upotrebu praktičnih mašina koje se sve više i više šire. Sa elektronikom se stiže do najvećeg uspona: današnji veliki elektronski uređaji, pored osnovnih računskih operacija savlađuju najkompleksnije matematičke programe, zatim logičke programe, upravljačke itd. Njihovo proučavanje pripada drugom domenu matematike, *kibernetici*.

Teorijska aritmetika

Usled nedostatka podataka skoro je nemoguće proučavati helenističku epohu. Od učenja pitagorejaca treba pomenuti njihova razmatranja o *parnom* i *neparnom*, o čemu ima tragova u Euklidovim *Elementima* (IIIv. pre n. e.) a što je doprinelo dokazivanju iracionalnosti $\sqrt{2}$. I pojam figurativnog broja igrao je izvesnu ulogu u elaboraciji somabilnih postupaka. Figurativni broj u ravni je broj čije predstavljanje pomoću pločica može biti geometrijska figura. *Trouglasti broj* se potpuno predstavlja linijama od 1, 2, 3, 4 itd. pločice (žetona). Figurativni brojevi koje je dao Nikomah iz Gerase u svom delu *Aritmetički uvod* (II v.) nalaze se kod Boecija (480 – 524) u njegovoj *Aritmetičkoj nauci* i praktično u svim aritmetikama zaključno do renesanse. Ova duga tradicija prenela je, nesrećom, lošu grčku nomenklaturu odnosa: npr. odnos 5 prema 4 označavan je kao *razmera ispod četvorostrukog – surquadrupartientes quintes*, što nije vodilo ka napretku a stvaralo je nepotrebne teškoće.

Euklidove aritmetičke knjige

Euklidove VII, VIII i IX knjiga *Elemenata* sadrže stručno izlaganje aritmetike. Sedma knjiga razvija teoriju racionalnih odnosa i u njoj su prisutne neznatne slabosti u pogledu strogog naučnog izlaganja. Broj se posmatra kao veličina i intuitivne osobine sabiranja prećutno su dopuštene (postojanje zbira dva ili više broja, komutativnost, asocijativnost). Diskretan karakter skupa N celih prirodnih brojeva izražava se sa dve implicitne principijelne aksiome: jedinica je mera svakog broja i svaki skup celih prirodnih brojeva ima najmanji element. Ova činjenica dozvoljava da se nađe najveća zajednička mera dva broja pomoću Euklidovog algoritma. Ovaj algoritam, osnovni instrument teorijske aritmetike, inače je vezan za približno uprošćavanje odnosa kakav su praktikovali Arhimed* i Aristarh sa Samosa (oko 310 – oko 230. pre n. e.). On je polazna tačka teorije neprekidnih razlomaka koja će Ojleru*, Lagranžu* i njihovim poslenicima biti od izuzetnog značaja. U VII knjizi nalazi se još jedna teorija međusobno prostih brojeva i nezavisnih prostih brojeva koja je uvek prisutna u elementarnoj nastavi, skoro posve jednako; i na kraju, kratko proučavanje najmanjeg zajedničkog množioca. Skoro cela osma knjiga posvećena je celim brojevima u geometrijskoj progresiji, ili, drugim rečima, celim stepenima razlomaka. Njen cilj je u poslednjoj analizi da ustanovi na opšti način slučaj racionalnosti n-tih korena jednog celog broja ili jednog razlomka. U tom pogledu pojam racionalnog broja nikad nije jasno izrečen, razlomci se pojavljuju samo kao odnosi ili *razmere* između celih brojeva. Ako upotrebimo savremen izraz, skup Q^+ pozitivnih racionalnih brojeva, sa isključenjem nule, eksplicitno je proučavan samo pod vidom multiplikativne grupe. Deveta knjiga obuhvata staru partiju o parnom i neparnom ali i veoma suptilne teoreme od kojih jedna ustanovljuje postojanje beskonačno mnogo prostih brojeva, a druga strukturu savršenih parnih brojeva ili *euklidskih*.

Diofantova »Aritmetika«

Epoha u kojoj je živeo Diofant Aleksandrijski ostaje nepoznata i samo se sa delimičnom sigurnošću smešta između 150. pre nove ere i 350. godine nove ere (najverovatniji datum je sredina III v. n. e.). *Aritmetika* obuhvata trinaest knjiga, od kojih je samo šest sačuvano, ali je ovo delo više naklonjeno logistici nego teorijskoj aritmetici. Međutim, kako tretirani problemi obuhvataju samo date veličine i rešenja u racionalnim brojevima, delo se često oslanja na specifične osobine celih brojeva. Diofantova *Aritmetika* je u XVII v. inspirisala aritmetička istraživanja pre svega Fermaa* i drugih.

XVII stoleće. Baše i Ferma

Baše (Bachet) je objavio i komentarisao Diofanta 1621; proverio je za proste cele brojeve tačnost činjenice da je svaki od njih zbir od najviše četiri kvadrata. S druge strane, u svojim *Zabavnim i prijatnim problemima* (*Problèmes plaisans et délectables*, 1624) pokazao je: ako su a i b relativno prosti, postoje takvi x i y da je $ax+by=1$. Ustanovio je ovu značajnu relaciju zahvaljujući Euklidovom algoritmu. Čitajući Diofanta u Bašeovom izdanju, Ferma će otići mnogo dalje. Među njegovim značajnim otkrićima nalaze se:

- TEOREMA: *za svaki prost broj* p *i za svaki ceo broj* a, a^p-a *je deljivo sa* p;
- JEDNAČINA: *jednakost* $x^2=Ay^2+1$ *ima, za svaki pozitivan ceo broj* A *beskonačno mnogo rešenja u skupu* Z *relativnih celih brojeva*;
- BROJEVI: $2^{2^n}+1$, *za koje je verovao da su svi apsolutno prosti*;
- VELIKA TEOREMA (još nije potpuno dokazana): *za svaki ceo broj* n veći od 2, jednakost $x^n+y^n=z^n$ *je nemoguća u skupu* Z *celih relativnih brojeva*;
- PROUČAVANJA O najjednostavnijim kvadratnim oblicima;
- METODA DOKAZA pomoću *beskonačnog silaženja*.

Ova raznovrsna otkrića nalazila su se u Fermaovim pismima ili beleškama o Diofantu i delimično ih je objavio njegov sin 1670. i 1679.

Ojler i Lagranž

Stoleće okrenuto velikim otkrićima u algebri i analizi nije bilo povoljno za teoriju brojeva. U ovom domenu Fermaovi radovi imali su veoma mali odjek, pa pre Ojlera nije imao ni jednog značajnijeg naslednika. Tako je Ojler 1736. dokazao a 1760. uopštio Fermaovu teoremu, uvodeći čuvenu aritmetičku funkciju nazvanu *indikator* $\varphi(n)$. To je broj celih manjih od n i prostih sa njim. Ojler pobija Fermaova tvrđenja da su svi njegovi brojevi $2^{2^n}+1$ prosti, ispitujući slučaj $n=5$. Veoma se približava dokazu Bašeove teoreme, što će završiti Lagranž 1770. Ojler će preuzeti ovaj Lagranžov dokaz i usavršiti 1773. S druge strane, uvodi proučavanje kvadratnih formi $ax^2+bxy+cy^2$ na skupu Z celih relativnih i priprema proučavanje kongruencija. Napadajući veliku Fermaovu teoremu, dokazuje je za eksponente 3 i 4 i iz toga spoznaje ogromnu teškoću. Ojler se može smatrati osnivačem analitičke teorije brojeva. U svom *Uvodu u analizu beskonačnog* (*Introductio in analysis infinitorum*, 1748) pojavljuju se funkcija ζ (koja će imati najveći značaj u sledećem stoleću u istraživanjima o rasporedu prostih brojeva) i sama asimptotska jednakost

$$\sum_{1}^{x}\frac{1}{p}=\log\cdot\log x$$

(p je apsolutno prost).

Lagranž razvija proučavanje kvadratnih oblika; od algoritma neprekidnih razlomaka pravi moćno oruđe aritmetike i dokazuje Fermaova tvrđenja koja se odnose na jednačinu $x^2=Ay^2+1$; 1771. dokazuje teoremu Vilsona (John Wilson, 1741–1793): *za prost broj* p, *broj* $(p-1)!+1$ *je deljiv sa* p. Teorija ostataka kvadratika takođe izaziva Ojlerova i Lagranžova istraživanja a sledeća generacija će ih produbiti.

XIX stoleće

Le Žandrovo delo *Teorija brojeva* iz 1830, postavljeno na teoriji neprekidnih razlomaka, još uvek je značajno za konsultovanje. Od novih rezultata do kojih je došao Le Žandr treba navesti zakon recipročnosti kvadratičnih ostataka (1785). Osnovno Gausovo* delo *Disquisitiones arithmeticae* (*Aritmetička istraživanja*, 1801) suprotstavlja se Le Žandrovom: na strog naučan način aritmetika je prikazana kao kraljica matematike, pretežno se bavi čistom algebrom i rađanjem apstraktne matematike XX v. U njemu se prvi put potpuno proučavaju kongruencije. Proširenje pojma jednakosti je pvri primer klasa ekvivalencije, danas od prvorazrednog značaja u svim delovima matematike. Ako je zakon recipročnosti kvadratičnih ostataka zabeležio Le Žandr, onda je Gaus o tome dao šest strogih dokaza od kojih je prvi iz 1796. Što se tiče teorije kvadratičnih oblika, koju je započeo Ojler, Lagranž je u odnosu na teoriju dao vrlo plodnu udarnu metodu koju će koristiti Le Žandr i sistematizovati Gaus. Ova teorija imaće prevlast nad celokupnom teorijom brojeva tokom stoleća.

Velika Fermaova teorema zanimala je aritmetičare počev od Ojlera. Klasične metode, naročito *beskonačno silaženje*, dozvoljavale su da se dokaže slučaj $n=5$ koji su 1825. rešili Le Žandr i Dirihle, kao i slučaj $n=7$ koji su 1840. rešili Lame (Gabriel Lamé, 1795–1870) i Lebeg*. Ali ove metode sve su se više pokazivale neefikasnim. U nekim svojim istraživanjima već su Ojler i Lagranž koristili kvadratična proširenja prstena Z celih relativnih brojeva. Gaus je proučavao prsten brojeva $a+bi$, gde su a i b celi brojevi. Tada se preduzima dokazivanje *velike teoreme* korišćenjem različitih prstena *kompleksnih brojeva*. Ovi prsteni se dobijaju dodavanjem n-tog korena jedinice prstenu Z celih relativnih brojeva. Ali, pojavila se velika teškoća: nazivajući *prostim* svaki element prstena koji bi bio deljiv samo samim sobom ili jedinicom, razlaganje jednog elementa na njegove proste faktore nije bilo jedinstveno. Tako prvi dokazi Kumera*, Lamea, Vancela (Pierre Laurent Wantzel, 1814–1848) i Košija*, koji su pretpostavljali ovu jedinstvenost, pokazali su se lažnim. Dirihle je privukao Kumerovu pažnju na tu činjenicu, a ovaj je obrnuo teškoću uvođenjem *idealnih brojeva* (1884). Tako je 1849. utvrdio da Fermaova teorema važi za značajnu klasu brojeva. Među eksponentima prve stotine, dokazu su izbegli samo 37, 39 i 67. Ali uprkos naporima teoretičara broja, opšti dokaz teoreme do danas nije nađen: nema čak ni elementarnih dokaza a mnogi amateri gube uzalud vreme i trud.

Kumerovi radovi otvorili su nov domen istraživanja, domen algebarskih tela. Njegova teorija idealnih brojeva, koju je 1871. transformisao Dedekind* u *teoriju ideala*, pokazala se u tom obliku kao moćno oruđe u svim matematičkim domenima.

Asimptotska raspodela prostih brojeva

Ako je Fermaova teorema usmerila teoriju brojeva ka proširenjima pojma celog broja i obogatila teorijsku algebru, drugi problemi će je skrenuti ka teoriji funkcija, uglavnom analitičkim funkcijama. Takav je slučaj problema raspodele brojeva koji je pokrenuo Ojler: ovaj slučaj se može opravdati upotrebom celih brojeva ali naročito asimptotskom raspodelom prostih brojeva.

Le Žandr je mislio da je ustanovio da se u svakoj aritmetičkoj progresiji $ax+b$, gde su a i b međusobno prosti brojevi (relativno prosti) nalazi beskonačno mnogo prostih brojeva. Dirihle će to dokazati koristeći analitičke metode (1837). Danas postoje dokazi nazvani *elementarni*, nezavisni od teorije funkcija (Atle Selberg, Paul Erdös). Za potrebe teorije supstitucija Bertran (Joseph Bertrand, 1822–1900) je iskazao 1845. da *za svaki ceo broj* n *veći od* 6, *postoji bar jedan prost broj između* $\frac{n}{2}$ *i* $n-2$. Čebišev* je dokazao ovaj postulat 1854. Od tada se dokazalo (R. Breusch 1931) da postoji prost broj između x i $\frac{9}{8}x$ čim x pređe 48 ili između x^3 i $(x+1)^3$ za dovoljno veliko x (Albert Edward Ingham 1932).

Ovo su ideje vodilje koje je 1859. dao Riman i koje su omogućile Adamaru* i Vale-Pusenu (Charles de la Vallée-Poussin, 1866–1962) da ustanove 1896. da je broj prostih brojeva najviše jednak x asimptotski (jednak) $x:\mathrm{Log}\,x$. Selberg i Erdeš mogli su dati 1948. direktan dokaz ovog stava samo korišćenjem aritmetičkih nejednakosti.

Dva čuvena problema teorije brojeva

1. Ojlerov prijatelj Goldbah (Christian Goldbach, 1690–1764) postavio mu je 1742. sledeće pitanje: *da li je svaki paran broj zbir dva prosta broja?* Uzimajući da je istinita hipoteza o funkciji ζ, Hardi (Godfrey Harold Hardy, 1877–1947) i Litlvud (John Lettelwood, 1885–1957) mogli su da 1923. pokažu da je osobina istinita za *skoro sve* parne brojeve. Ivan Matvejevič Vinogradov* dokazao je 1937. teoremu za sve parne brojeve *dovoljno velike*, nezavisno od svake hipoteze.

2. Varing (Eduard Waring, 1734–1798) izjavio je 1770. da je *svaki ceo broj zbir od najviše devet kubova, od 19 četvrtih stepena*, itd. Problem koji nosi njegovo ime zahteva, dakle, minimalni broj p, za dato k, u razlaganju broja u sumu od p stepena k pozitivnih.

Godine 1908. E. Landau (Edmund Landau, 1877–1938) ustanovljuje *da je broj celih brojeva manjih od* x, *sume dvaju kvadrata asimptotski* (jednak) $Cx:\sqrt{\mathrm{Log}\,x}$, gde je C konstanta.

Godine 1859. Liuvij* je pokazao da je *svaki ceo broj suma najviše od 53 četvorostruka stepena* a 1909. A. Viferih (A. Wieferich) oborio je na 37 ovu gornju granicu. D. Hilbert (David Hilbert, 1862–1943) ustanovio je ovaj granični broj za sve cele eksponente. U tu svrhu upotrebio je višestruki određeni integral. Od tada ovaj stav ustanovljava se čisto elementarnim postupcima.

Šta je ceo broj?

Poznatih osobina celih brojeva ima sve više i sve su bolje dokazive; metode istraživanja su sve efikasnije, pozivajući se na algebru, analizu i na druge direktne postupke. Mogu se naglasiti i veze teorije brojeva i računa verovatnoće.

Šta je jedan ceo broj? Dugo je intuitivno prihvatano da on postoji. Zahtevi moderne aksiomatike doveli su do strožih koncepcija. Među predloženim definicijama stoje aksiome koje je 1899. dao Peano*:

- 1 je ceo broj;
- svaki ceo broj ima sledeći definisani, kome je on prethodni;
- 1 nema prethodnog;
- ako dva broja imaju isti sledeći, oni su jednaki;
- svaki skup celih brojeva koji sadrže 1 i sledeći svakog od svojih elemenata, sadrži sve cele brojeve.

Ovih pet aksioma potpuno karakterišu skup N celih prirodnih brojeva.

NEKA VELIKA IMENA U ARITMETICI I TEORIJI BROJEVA

DIOFANT, grčki matematičar, pripadnik aleksandrijske škole koji je verovatno živeo oko 250. godine. Poznat je po delu *Aritmetika* u trinaest knjiga, od kojih je samo prvih šest stiglo do nas. Ovo delo uglavnom raspravlja o neodređenim jednačinama na skupu racionalnih pozitivnih brojeva i izvršilo znatan uticaj na algebriste na Zapadu.

DIRIHLE, Ležen (Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805 – 1859), nemački matematičar, profesor matematike na Univerzitetu u Berlinu, zatim u Getingenu, gde je nasledio Gausa*. On je pre svega teoretičar brojeva: dokazao je da u svakoj aritmetičkoj progresiji čija su dva prva člana međusobno prosta (relativno prosti) postoji beskonačno mnogo apsolutno prostih brojeva. U analizi strogo proučava konvergenciju trigonometrijskih redova. Poznat je i po svojim radovima iz mehanike i matematičke fizike.

KRONEKER, Leopold (Leopold Kronecker, 1823 – 1891), nemački matematičar. Od 1841. studirao na Univerzitetu u Berlinu gde je pratio predavanja Dirihlea*, Jakobija* i Štajnera (Jacob Steiner, 1796 – 1863). Njegova teza *Složene jedinice* (1845) odnosi se na proučavanje algebarskih brojeva, domen njegovih istraživanja koji će ga zaokupljati celog života. Posle odbrane teze posvećuje se poslovima i oko 1853. u Parizu sreće Ermita* i upoznaje radove Galoaa*. Konačno se nastanjuje u Berlinu, gde je profesor

na Univerzitetu a 1861. i član Akademije nauka. Njegovo delo prevashodno je posvećeno teoriji brojeva: želeo je da celokupnu matematiku zasnuje na pojmu celog broja, pa se njemu pripisivala izreka: „Bog je stvorio celi broj, ostalo je ljudsko delo". Inače, imao je veoma neprijateljski stav prema Kantorovoj* teoriji skupova.

KUMER, Ernst Eduard (Ernst Eduard Kummer, 1810 – 1893), nemački matematičar. Pohađao univerzitet teologije u Haleu i 1831. postao doktor filozofije. Kao profesor gimnazije u Lignicu, za učenika ima Kronekera, zatim je profesor na univerzitetu u Breslau 1842. i 1855. u Berlinu, kad ulazi u Akademiju nauka. Naročito se bavio algebarskom geometrijom i teorijom brojeva. Hamiltonova* istraživanja sistema optičkih zraka inspirisala su Kumera na proučavanje kongruencije pravih. Slučaj algebarskih kongruencija naveo ga je 1866. na fokalne površi kongruencija reda 2, kao i na kvartiku za koju ostaje vezano njegovo ime. Ali njegova najveća zasluga je otkriće „idealnih kompleksnih brojeva" iz 1844, posredstvom istraživanja koja se odnose na veliku Fermaovu teoremu: *jednačina* $x^m + y^m = z^m$ *je nemoguća u prstenu celih pozitivnih brojeva, čim je broj m veći od* 2. Iz Kumerovih idealnih brojeva nastali su 1871. Dedekindovi* ideali koji su ubrzo osvojili modernu matematiku.

LE ŽANDR, Adrijen Mari (Adrien Marie Le Gendre, 1752 – 1833), francuski matematičar. Njegovi radovi se odnose na analizu, teoriju brojeva, geometriju i mehaniku. Pored mnogobrojnih rasprava, napisao je *Zadatke* iz integralnog računa o raznim vrstama transcendenata i o kvadraturama (1811 – 1819) i *Raspravu o eliptičkim i Ojlerovim integralima* (1825 – 1832). Ovo veliko delo pripremilo je put Abelovim * i Jakobijevim* otkrićima o eliptičkim funkcijama. Pored Gausovih* *Aritmetičkih istraživanja*, njegova *Teorija brojeva* iz 1830. predstavlja osnovno delo za sve radove XIX v. iz više aritmetike. Doprineo je računu varijacija i geodeziji a njegovi *Elementi geometrije* (1794) služili su kao srednjoškolski udžbenik tokom celog XIX v. U prvim izdanjima više pokušava da dokaže Euklidov postulat.

STEVEN, Simon (Simon Stevin, Simon de Bruges, 1548 – 1620), flamanski matematičar i fizičar. U statici je proučavao polugu i nagnutu ravan u arhimedovskom duhu. Proučavanje nagnute ravni zasnovao je na posmatranjima simetrije i na mogućnostima večitog kretanja. U hidrostatici je precizirao relacije između pritiska i dubine. U matematici je usvojio eksponencijalno obeležavanje analogno obeležavanju Šikeovom*. Dao je maksimalno proširenje pojma realnog broja. U delu *Thiende* (1585) prvi put izlaže račun s decimalnim brojevima. Predlagao je uvođenje metričkog decimalnog sistema.

VINOGRADOV, Ivan Matvejevič (rođen 1891), sovjetski matematičar, profesor univerziteta u Permu 1918, zatim u Lenjingradu 1920; od 1932. upravlja Matematičkim institutom Steklov. Član je Akademije nauka SSSR-a. Svetsku slavu stekao je kao teoretičar brojeva. Oko 1923. otpočeo je radove o Varingovoj (Edward Waring, 1734 – 1798) hipotezi koja se odnosila na broj reprezentacija jednog broja kao sume stepena n, gde je n pozitivno. Označavajući sa $G(n)$ jedan takav broj da celi brojevi koji su rastavljivi samo na najviše na $G(n)$ stepena n obrazuju konačan skup, ustanovio je $G(n) < n\ (3 \log n + 11)$. Goldbahovu (Christian Goldbach, 1690 – 1764) hipotezu, iskazanu 1742, dokazao je 1937. Vinogradovljeva teorema ustanovljuje da je svaki neparan broj dovoljno veliki suma od najviše tri apsolutno prosta broja.

Geometrija

Geometrija je matematička disciplina koja strogo proučava prostor i oblike (figure i tela) koji se mogu zamisliti.

U etimološkom smislu, reč geometrija znači „merenje Zemlje" ali je veoma rano primila mnogo šire značenje pa je kod grčkih klasičara predstavljala skoro celinu teorijske matematike. Mnogo kasnije Paskal (Blaise Pascal, 1623 – 1662) je rekao da je „predmet čiste geometrije prostor", podrazumevajući pod tim, kao i ostali matematičari do XIX v., intuitivan i fizički prostor, gde se mogu smestiti sve vidljive pojave. Danas se više ne govori o prostoru već o prostorima te bi približna definicija geometrije bila: „Geometrija se bavi proučavanjem skupa nazvanog prostor čiji su elementi nazvani tačke; ovo proučavanje je naročito posvećeno endomorfizmima ovog skupa."

Porekla geometrije su različita i nejasna. U sadašnjem stanju istorijskih saznanja, ne postoji ništa precizno niti sigurno o postojanju prave geometrije pre pojave velikih civilizacija u dolini Nila ili u Mesopotamiji.

Egipat

Naša saznanja o egipatskoj geometriji dolaze uglavnom iz Rajndovog (Rhind) papirusa, napisanog oko 1700. pre n. e., koji je, u stvari, kopija jednog starijeg teksta, kao i iz Moskovskog papirusa, koji je nastao u isto vreme kad i Rajndov. Ova geometrija je prevashodno nauka o merama, zatim o premeravanju zemljišta i stereometrija. Horizontalna rastojanja su merena špagatima za merenje a postupci alineacije i orijentacije dosta su precizni, tako da je odstupanje glavnih piramida u odnosu na pravi sever ispod stepena. Pored špagata za merenje korišćeni su merničke kocke, visak, libela i nišan s prorezima. Račun površina i zapremina koristi tačne i približne postupke koji će se ponovo naći veoma dugo u tradiciji zapadnih geometara. Pojam ugla nije još potpuno jasan, ali pisari znaju da izračunaju površinu ili visinu, stranu jedne piramide, bez obzira da li je inverzna njenom padu (nagibu). Međutim, ono što se zna o egipatskoj geometriji, elementarnog je i pragmatičnog karaktera.

Mesopotamija

Kod Vavilonaca se nailazi na dosta analogna saznanja, spekulativnijeg karaktera u više domena.

Teorema nazvana „Pitagorina" već je dobro poznata oko 1800. pre n. e. u numeričkom pogledu. Jedna tablica daje petnaest pravouglih trouglova čije su stranice merene racionalnim brojevima. Ovaj tip trouglova imaće kasnije glavnu ulogu u *Aritmetici* Diofanta Aleksandrijskog* (III v.). Znali su da tačno izračunaju površine najprostijih poligona, pravougaonika, trougla, trapeza. Iako relacija sličnosti nije jasno iskazana, bilo je poznato da dva slična trougla imaju površine srazmerne kvadratima homolognih stranica. Tako je geometrija u ravni Vavilonaca izgleda bila na visokom nivou. Imajući veoma razvijenu aritmetiku i algebru, ona se okrenula proučavanju jednostavnih figura, poligona i kruga, delimično se bavila problemima zemljomerstva ili geodezije (u grčkom smislu reči), tj. deobom površina. Vavilonska stereometrija je postigla manje značajne rezultate nego egipatska.

Indija

Indijska geometrija, mnogo mlađa od prethodnih, potiče iz V v. pre n. e.; ona ne donosi istinski nove elemente. To je još jedna nauka o premeravanju zemljišta koja poznaje i Pitagorinu teoremu i prve pokušaje dokaza.

Grčka

Tradicija tvrdi da je grčka nauka nastala oko VI v. pre n. e. u jonskim kolonijama, gde se pročuo Tales iz Mileta (VII – VI v. pre n. e.). U sledećoj generaciji čuveni su Pitagora (VI v. pre n. e.), zatim škola pitagorovaca Velike Grčke.

Sigurno je da su saznanja praktične geometrije dobijena od stručnjaka iz dolina Nila, Tigra i Eufrata bila poznata grčkim tehničarima i da su ih oni prihvatili. Na ovim tradicionalnim, čvrstim osnovama, koje će posebno preneti Heron Aleksandrijski (I v.), izgradiće se jedna prava apstraktna nauka kakva je geometrija, koju će nam predati Grci. Ona pre svega smatra potrebnim da definiše izraze koje upotrebljava, što nije bio slučaj kod Egipćana ili Vavilonaca.

Najznačajniji apstraktni pojmovi se otkrivaju, npr. *tačka*, *površ*, *prava*, kao i pojam *ugla*, koji bi se mogao pripisati Talesu.

Napor za sistematizacijom i apstrakcijom, koji treba približiti stvaranju formalne logike kod Aristotela, upotpunjuje se iskazom aksioma i postulata. Pravi dokazi se zasnivaju na ovim osnovnim stavovima.

Logički aparat grčke geometrije služio je kao model matematičarima do druge polovine XIX v. Ova geometrija, međutim, nije bila bez ozbiljnih nedostataka. Sve što se ticalo topologije, nalazilo se u stanju čiste intuicije, bez logičke kritike, slično kao kod Vavilonaca i Egipćana, u celini nauke.

Dokumenti za istoriju grčke geometrije od VI do III v. pre n. e. retki su i često nesigurni, pa bi i njihova rekonstrukcija bila uzaludna.

Euklid

Trinaest knjiga *Elemenata* Euklida iz Aleksandrije (IV – III v. pre n. e.), čija redakcija može poticati oko 340, predstavlja početak istorije geometrije. Dve hiljade godina *Elementi* će ostati model posebne lepote i matematičke strogosti. U njima se ne raspravlja o geometriji sfere; međutim, od kada je dopuštena sferičnost nebeskog svoda i ustanovljena sferičnost Zemlje, ova površ je bila veoma poznata naučnicima.

Eudoks iz Knida (oko 406 – oko 355) ustanovio je astronomsku teoriju homocentričnih sfera a Aristotel ju je prihvatio. Krajem IV v. pre n. e. Autolikos Pitanski piše dve rasprave, *O sferi u pokretu* i *Izlasci i zalasci zvezda*. Sam Euklid tretira u *Fenomenima* ravnomernu rotaciju sfere oko jedne od njenih osa, što pokazuje postojanje u IV v. teorije sferne geometrije, prvi primer neeuklidske geometrije. Jedno od retkih poznatih dela o ovom pitanju, *Sphericae* Teodosija iz Bitnije nastalo je oko 200. pre n. e. Ova elementarna rasprava podržava Euklidov stil.

Značajnija istoimena rasprava koju je napisao Menelaj Aleksandrijski krajem I v., pravo je sistematsko proučavanje sferne geometrije koja je Evropi poznata tek od XVII v. preko arapskih prevoda. Ptolemej (90 – oko 168) će iz ovog dela izvući osnovne stavove sferne trigonometrije.

Arhimed

Arhimedovi geometrijski radovi odnose se naročito na geometriju merenja. Oni sadrže brojne stavove o konusnim presecima, bilo da su samo spomenuti, bilo da su dokazani. U III v. pre n. e. krive su već bile dobro poznate geometrima. Euklid o njima piše jednu raspravu a Konon sa Samosa (III v. pre n. e.), astronom i Arhimedov prijatelj posvećuje krivama deo svojih radova.

Apolonije

Konusni preseci Apolonija iz Perge (262 – 180. pre n. e.) dovode svojim velikim uspehom do iščeznuća didaktičkih dela prethodnih matematičara.

Krive i površi. Grci su poznavali i proučavali izvestan broj krivih ili površi. Osim konusa i cilindra, sfere i konoida i Arhimedovih sferoida (obrtni paraboloid, obrtni hiperboloid sa dve grane, obrtni elipsoid) poznat je i torus. Različiti torusi – otvoren, zatvoren, povratni – nose naziv *spirička površ*. Preostaju samo aluzije na istraživanja za koja su oni dali povoda. Isto tako naš heli-koid u ravni vodilja pojavljuje se pod nazivom *plektoidna površ* (štapičasta površ) ili *pletača* kod Papusa Aleksandrijskog (IV v.) u korelaciji sa Arhimedovim i Apolonijevim radovima.

Među krivama drukčijim od konusnih preseka, Arhimedova spirala ($\rho = a\omega$) navodi na brojna proučavanja. Apolonije izučava cilindričnu elisu, drugi geometri konusnu elisu i naročito sferičke elise, opisane tačkom koja se ravnomerno kreće duž meridijana koji se i sam uniformno (ravnomerno) okreće.

Kvadratrisa nazvana „Dinostratova" (IV v. pre n. e.) ili „Hipijasova elisa" (druga pol. V. v. pre n. e.) je transcendentna kriva u ravni analogna prethodnim. Pored ovih linija, dobijenim kombinacijama ravnomernih kretanja, pravolinijskih ili kružnih, postoje „spirike", ravni preseci torusa, Nikomedova konhoida (II v. pre n. e.) i Dioklova kriva (kraj II v. – poč. I v.), docnije nazvana cisoida, obe korišćene u problemu udvostručenja kocke, prva je takođe služila naročito u trisekciji ugla.

Arapi

Iako nikad nisu dostigli nivo velikih grčkih klasičara, u očuvanju i prepisivanju naučnih dostignuća, Arapi igraju prvorazrednu ulogu.

Zapad

Na Zapadu obnavljanje geometrijskog duha počinje u XII v. u dodiru sa arapskim ili jevrejskim naučnicima iz Španije ili sa Sicilije; trebalo je, međutim, sačekati XVI v. do stvarnog uzleta. U Italiji cveta prava literatura o konstrukcijama pomoću lenjira i šestara, problemima koje su Grci prilično zanemarili i naročito se razvija tehnika perspektive koje će u sledećim stolećima izmeniti geometrijske stavove.

Dekartova geometrija

U XVII v. dolazi do dvostruke revolucije. Inspirišući se stavovima Vijeta*, Dekarta*, Fermaa* i u manjem stepenu Robervala* stvara se oko 1630. *analitička geometrija* sa primenom algebarske tehnike u geometriji. Ova nova disciplina, ako se i zasnivala na euklidskoj geometriji, znatno je proširila njene mogućnosti i pripremila sjedinjenje matematičkih nauka.

Projektivna geometrija

Uvođenjem elemenata u beskonačnost, Dezarg* stvara projektivnu geometriju. Dve paralelne prave imaju zajedničku tačku „na beskonačnoj daljini", dve paralelne ravni se susreću na pravoj „na beskonačnoj daljini sa svih strana". Dezargov prostor obuhvata euklidski prostor ali sa takvim proširenjem što će tek docnije otkriti prave mogućnosti.

XVIII stoleće

Dezargove ideje bile su zaboravljene u toku celog jednog stoleća, ali najveći matematičari ubrzo su prihvatili Dekartove ideje, posebno Njutn* koji je dao klasifikaciju krivih trećeg stepena. Klero (Alexis Clairaut, 1713–1765) proučavao je krive u prostoru već 1729; Kramer* je 1750. napisao *Uvod u analizu algebarskih krivih linija*, a Ojler* u svom *Uvodu u infinitezimalnu analizu* 1748. prvi put raspravlja o jednačini sa tri promenljive koja dozvoljava proučavanje i klasifikaciju površi drugog reda ili kvadrika.

Monž

Sa Kleroom i Ojlerom javljaju se i prva istraživanja infinitezimalne geometrije površi. Krajem XVIII v. značajne doprinose geometriji donosi Monž*. Sistematišući i zasnivajući metode arhitektonskog crtanja, on stvara novu disciplinu, *nacrtnu geometriju* (*deskriptivnu*) koja svojim razvojem oživljava veru u proučavanje čiste geometrije, skoro ugašenom pred uspehom kartezijanske geometrije i infinitezimalne analize. Sjajan razvitak geometrije, posebno projektivne u toku XIX v. proizašao je iz tog razvoja. S druge strane, kartezijanska geometrija po shvatanju Ojlera, skoro potpuno isključuje prave i ravni. Sagledavši potrebu da ovim elementima vrati bitnu ulogu koja je morala biti njihova, Monž sa svojim učenikom Lakroaom (Sylvestre François Lacroix, 1765–1843) postavlja osnove moderne analitičke geometrije.

Sa Monžom se brzo razvija infinitezimalna geometrija prostora a proučavanje krivih i površi obogatiće radovi Monža i njegovih učenika.

Sintetička geometrija

Ponsele* se može smatrati tvorcem nove projektivne geometrije koja se naslućivala još od Dezarga u XVII v. Uveo je tačke u beskonačnosti koje pripadaju istoj ravni, *beskonačnoj ravni*: „Sve tačke u beskonačnosti prostora mogu biti smatrane da pripadaju samo jednoj istoj ravni, neophodno neodređenoj položajem". Dok Brijanšon (Charles Julien Brianchon, 1783–1864) koristi teoriju polova i recipročnih polara u odnosu na konusni presek, da bi prešao sa Paskalove teoreme o šestougaonicima upisanim u opisanim šestougaonicima. Ponsele u istoj teoriji ima osnovnu ulogu. S druge strane, njegov *princip kontinuiteta*, iako počiva samo na jakoj indukciji ističe se kao moćno heurističko oruđe.

Šasl* više od Ponselea sistematiše projektivnu geometriju ali i jedan i drugi je zasnivaju na Euklidovoj metričkoj geometriji. To se odnosi i na Štajnera (Jacob Steiner, 1796–1863). Nijedan od ovih istraživača ne smatra se učenikom drugog ali svi pripadaju istoj školi i njihovi radovi sadrže brojne analogije.

Nova analitička geometrija

Nemačka škola se brzo oslobodila francuske škole sa Štajnerom, Mebijusom (Augustus Ferdinand Möbius, 1790–1868) i Plikerom (Julius Plücker, 1801–1868). Pliker je omogućio da analitička geometrija ponovo zauzme mesto koje su Monžovi učenici bili ustupili novoj sintetičkoj geometriji, geometriji Ponselea i Šasla.

Pojava aksiomatizacije

Za sve ove naučnike projektivna geometrija ostaje podanik euklidske geometrije, odn. samo njeno proširenje. Ali, Štaut (Karl G. C. von Staudt, 1798–1867) pokušava naprotiv da je osamostali. U *Geometriji položaja* (1847), on zasniva celu projektivnu geometriju na samim aksiomama preseka, bez ikakve pomoći merenja. Njegova osnovna figura je potpun četvorougao s dijagonalama koji mu dozvoljava da definiše harmonijsku podelu i da otuda pokaže projektivnost. On nastoji da na opšti način definiše projektivne osobine figura. Između 1870. i 1874. Klajn (Félix Klein, 1849–1925) pokazuje da pokušaj može samo uspeti posle uvođenja postulata kontinuiteta. On je ustanovio kako nezavisnost projektivne geometrije u odnosu na postulat paralela, tako i nedokazivost aksioma nazvanih „Dezargove" (homološki trougli) i „Papusove" (Paskalov šestougaonik upisan u degenerativni konusni presek na dve prave). Ove aksiome su osnova projektivne geometrije. Godine 1856, 1857. i 1860. Štaut piše dopunu svom prvom radu. Premda je Ponsele svojim *principom kontinuiteta* u geometriju implicitno uveo imaginarne elemente, Štaut to čini na strog i veoma usiljen način.

Neeuklidske geometrije

Euklidova geometrija bila je napadana u samim principima mnogo ranije, odn. postulat o paralelama u metričkom obliku koji može izgledati čudan ali koji se pokazao koristan prema razmišljanjima koja je tokom vekova nametnuo geometrima: *ako dve prave presečene sečicom obrazuju unutrašnje uglove s jedne iste strane čiji je zbir manji od dva prava ugla, te se prave seku.* Iz ovog postulata neposredno se izvlači postulat na koji ukazuje Plejfer (John Playfair, 1748–1819) koji se danas naziva *aksioma paralela*: *kroz jednu tačku ravni može se povući samo jedna paralela datoj pravoj.*

Naučnici su još od antike nastojali da dokažu euklidski postulat, oslanjajući se na stavove više intuitivne, očigledne ili prirodne. Koristi se činjenica da mesto tačaka podjednako udaljenih od prave jeste prava ili da postoje pravougaonici, ili slične figure itd. Le Žandr* pokušava da ovo dokaže delom *Elementi geometrije* (1794) koje sadrži do 12. izdanja 1823. različite pokušaje dokaza, sakupljene još 1832. u jednoj raspravi pročitanoj u akademiji nauka. U ovo vreme antieuklidska revolucija se odigrala u Mađarskoj i Rusiji. U naporima da dokaže postulat 1733, Sakeri (Giovanni Gerolamo Saccheri, 1667–1733) posmatra četvorougao koji ima dve jednake upravne stranice, obe na istoj osnovici. Ostali međusobno jednaki uglovi su oštri, pravi i tupi. Sakeri posebno pokazuje da, ako je jedna od tri hipoteze istinita za jedan četvorougao, ona je istinita za sve četvorouglove. Ali, mada je otišao daleko u svojim zaključcima, konačno nije uspeo, zadržan kao Le Žandr kasnije, euklidskom predrasudom. Istraživanja Lamberta (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777) objavljena su posle njegove smrti: *Teorija paralelnih linija*, 1786. Analogna Sakerijevim stavovima, ali iz pera naučnika svetskog glasa, dovela su do značajnog rezultata: hipoteza oštrog ugla je istinita na sferi imaginarnog poluprečnika. Od 1732. Gaus* preduzima istraživanja istog reda o kojima ostaje samo trag u njegovoj korespondenciji. Švajkart (Ferdinand Karl Schweikart, 1780–1857) šalje 1819. Gausu ogled iz nezavisne geometrije o postulatu paralela koji će on odobriti. Švajkartov rođak Taurinus (Franz Adolf Taurinus, 1794–1874) objaviće 1825. prilično slab rad u odnosu na rad Švajkarta. Za pojavu neeuklidske geoemtrije, međutim, najviše se duguje Lobačevskom* čije se prvo proučavanje ovog pitanja javlja 1826, kao i Janošu Boljajiju (János Bolyai, 1802–1860) čija su prva istraživanja objavljena 1832 (stvarno datirana 1823).

Uspeh nove geometrije koju je F. Klajn nazvao *hiperbolička geometrija* ostvaren je tek oko 1860. među avangardnim matematičarima.

Prevlast projektivne geometrije

U šestoj od svojih *Rasprava o kvanticima* (1859), Keli (Arthur Cayley, 1821–1895) daje metričkim relacijama projektivno značenje uvođenjem u realnu projektivnu ravan posebnog konusnog preseka koji je nazvao *apsolutnim* kao i korišćenjem dvoodnosa. Klajn 1871. pokazuje da geometrija Lobačevskog odgovara slučaju kad je apsolutno jedan realan konusni presek nedegenerisan (jedna realna kvadrika neregularna u prostoru). Neznatno proučavana do tada, eliptička geometrija odgovarala je, naprotiv, slučaju imaginarnog konusnog preseka (jedna imaginarna kvadrika nedegenerisana u prostoru): *ravan u beskonačnosti Euklidovog prostora ima jednu eliptičku metriku.* Euklidska ravan odgovara slučaju gde apsolutno degeneriše u dve imaginarne tačke konjugovane u beskonačnosti (cikličke tačke). Lager (Edmond Laguerre, 1834–1886) sveo je 1853. merenje euklidskog ugla na dvoodnos njegovih dveju stranica i na dve izotropne prave. Za euklidski prostor, apsolutno degeneriše u jedan konusni presek u beskonačnosti, u *pupčastu krivu*.

Tako se krug opet zatvara. Projektivna geometrija koju su uveli

Dezarg i Ponsele u euklidsko zdanje, oslobođena i osamostaljena naporima Štauta, dominira odsad ne samo euklidskom geometrijom, već i drugim metričkim geometrijama. Ova pojava ulazi u veliku evoluciju matematike ka linearizaciji problema; bliska je vektorskim prostorima i „skalarnim proizvodima" važnim u novoj euklidskoj geometriji na štetu pojma ugla.

Grupe

Algebra je, međutim, doprinela stvaranju teorije grupa koja će se pokazati značajna; oktobra 1872. Klajn obelodanjuje program iz Erlangena, *Uporedna posmatranja o novim geometetrijskim istraživanjima* gde naglašava prevashodnu ulogu grupa transformacija u geometriji. Od tada se geometrija bavi proučavanjem figura koje se menjaju transformacijama koje pripadaju nekoj grupi.

Osnovna grupa projektivne geometrije je grupa o kolineacijama po kojoj prave odgovaraju pravama i ravni ravnima. Grupa afine geometrije je podgrupa prethodne grupe koja dopušta invarijantnost izvesne ravni, „ravni u beskonačnosti". Grupe eliptičke i hiperboličke geometrije obrazovane su kolineacijama koje dopuštaju invarijantnosti njihovih „apsolutnih".

Grupa konformne geometrije dopušta invarijantnost skupa ravni ravni-sfera euklidskog prostora. Konformni prostor je euklidski prostor upotpunjen ne sa jednom ravni, kao projektivni prostor, nego sa jednom tačkom.

Nearhimedovske geometrije

Sve dotad proučavane geometrije svodile su se sa svojim analitičkim izrazima na afine ili projektivne prostore konstruisane na telu R realnih brojeva ili na telu C kompleksnih brojeva. Veroneze (Giuseppe Veronese, 1854–1917) ide sa problemom dalje, ističući ulogu Arhimedove aksiome u osnovama geometrije. Njegove *Osnove geometrije* (1891) pokazuju da se u osnovi različitih geometrija nalazi pojam uređenog tela brojeva ali da telo nema nikakvu potrebu da bude arhimedovsko: *neka su dati a i b pozitivni elementi tela, $a<b$, može se učiniti da za prirodan broj n bude $n \cdot a$ manje od b.* Tada se dobijaju prilično poremećeni prostori za intuiciju, ali čije je logično postojanje neosporno.

Hilbert i aksiomatika

Da bi se znalo šta se može dopustiti a šta treba dokazati, inspirišući se inače svojim prethodnicima, Hilbert* piše 1899. *Osnove geometrije.* U ovom delu on ne razvija novu aksiomatiku euklidskog prostora već analizuje Euklidovu, koju osvetljava, tumači, dopunjuje i daje apstraktan karakter. Pošto je utvrdio postojanje apstraktnih bića nazvanih *tačke, prave, ravni*, daje sedam aksioma asocijacije kojima pokazuje nezavisnost, pet aksioma poretka, aksiomu paralelnih, šest metričkih aksioma ili kongruencije, gde pojam ugla igra bitnu ulogu, Arhimedovu aksiomu i u docnijim izdanjima, poslednju aksiomu nazvanu „aksioma celine". Tako sa Hilbertom euklidska geometrija gubi potpuno intuitivan karakter i svrstava se kao i svi delovi čiste matematike pod zakone aksiomatike.

Aksiomatička igra znatno doprinosi rasuđivanju. Čuvajući samo neke aksiome, modifikujući ovu ili onu aksiomu, dobijaju se različite geometrije čiju unutarnju neprotivrečnost treba pokazati, što često ostaje najosetljivije.

Infinitezimalna geometrija

Proučavanje krivih i površi euklidskog prostora imalo je glavnu ulogu u XIX v. i u prvoj polovini XX v. Ono počinje monumentalnim Monžovim delom *Primena analize na geometriju* (1795) i nastavlja posle magistralnog dela *Razvoji geometrije* (1813) Dipena (Charles Dupin, 1784–1873). Kratak ali veoma brižljiv Gausov rad *Disquisitiones generales circa supeficies curvas* (*Opšta istraživanja o krivama na površima*, 1827) glavni je rad za istoriju pojma prostora. Pisac obrazlaže infinitezimalni element dužine jednog luka krive povučene na površi pomoću dve nezavisne promenljive i njihovih diferencijala

$$ds^2 = \mathrm{E}dp^2 + 2\,\mathrm{F}dp\,dq + \mathrm{G}dq^2.$$

Pošto je uveo pojam krivine površi pokazuje da za traženje mere krivine nije potrebno poznavati koordinate u funkciji neodređenih p i q, već je dovoljno imati opšti izraz veličine ds. „Posmatranja koja smo upravo izložili povezuju se na poseban način da pažljivo uočimo površ koja nam izgleda dostojna pažnje. Zaista, ako se posmatra jedna površ, ne kao granica čvrstog tela, već kao fleksibilno i nerastegljivo telo čija jedna dimenzija iščezava, osobine površi biće delimično apsolutne i invarijabilne, ma koji bio njen oblik. Ovoj vrsti osobina, čije proučavanje otvara geometriji novo, veoma široko polje, odgovara mera krivine" — rekao je Gaus.

Rimanovi prostori

Riman* 1854. uopštava ove pojmove na prostore ma koje dimenzije. Sam Gaus mu je savetovao ovaj predmet za njegovu tezu habilitacije. Delo *O hipotezama koje leže u osnovama geometrije* (1854), objavljeno je 1867. Rimanovi prostori sa promenljivom krivinom obuhvataju kao posebne slučajeve euklidske prostore ma kakve dimenzije, ali krivine nula, hiperboličke prostore Lobačevskog, krivine negativne i konstantne i eliptičke prostore krivine pozitivne i konstantne. Tako Riman označava rečju egzistencija ono što se ponekad naziva *Rimanova geometrija* u eliptičkoj elementarnoj geometriji.

Relativnost

Naročito od pojave oko 1916. opšte teorije relativnosti Ajnštajna (Albert Einstein, 1879–1955), Rimanovi prostori sa promenljivom krivinom privukli su pažnju filozofskih, fizičkih i matematičkih krugova.

Četvorodimenzionalan prostor uže relativnosti (1905) ili prostor Minkovskog (Hermann Minkowski, 1864–1919) samo je proširenje euklidskog prostora. Jedina razlika jeste da je njegova metrika, umesto da zavisi od kvadratičnog oblika definisanog $x^2+y^2+z^2$ zavisi od oblika $x^2+y^2+z^2-t^2$.

Opšta relativnost ima, naprotiv, potrebu prostor-vremena s promenljivom krivinom, koju su srećom već delimično proučili Rimanovi naslednici. Novi prostori izlaze iz okvira koji je program iz Erlangena nametnuo geometriji. Prostori Vejla* ili Edingtona (Arthur Stanley Eddington, 1882–1944) izbegavaju takođe ovaj okvir.

Prostori E. Kartana (Elie Cartan, 1869–1951) otuda su uopštenje koje se nije moglo dostići posredstvom ideja vodilja tri autora. Njegovo shvatanje struktura neprekidnih grupa vodilo ga je i dozvolilo mu da igra u pojmu grupe osnovnu ulogu u proučavanju iz koga je izgleda bila isključena.

Dijalektika istorije

Rođeno iz neposrednih tehničkih potreba, prošlo mnogim apstarktnim fazama i ponekad veoma udaljenim od stvarnosti, proučavanje prostora ponovo je postalo fizička nauka, obogaćeno brojnim doprinosima matematičke misli koja je neprestano nudila višestrane ozbiljne predmete proučavanja.

NEKA VELIKA IMENA U GEOMETRIJI

APOLONIJE IZ PERGE (oko 262 – oko 180. pre n. e.), grčki matematičar i astronom. Živeo je u Aleksandriji i Pergi. U astronomiji je dao teoriju epicikala i ekscentrika koja će se održati do XVII v. do Keplera. Njegovo glavno delo je u geometriji, *Rasprava o konusnim presecima* u osam knjiga, čije su četiri prve sačuvane na grčkom jeziku a tri sledeće u arapskom prevodu. Osma je izgubljena. Po njemu, konusni preseci su ravni preseci jednog pravog ili kosog konusa sa kružnom osnovom. Dao je i danas aktuelne nazive elipsa, hiperbola i parabola. Najznačajnija su njegova proučavanja normala na konusne preseke (peta knjiga). „Veliki geometar" je objavio i druga dela, naročito poznata po analizama Papusa Aleksandrijskog (III v.). Elementarnija od *Rasprave o konusnim presecima*, ova dela su, kao i njihov pisac, imala veliki uticaj na zapadne matematičare tokom XVI i XVII v.

BELAVITIS, Đusto (Giusto Bellavitis, 1803 – 1880), italijanski matematičar. Počev od 1832. osniva teoriju ekvipolencija o kojoj 1854. daje detaljnu ekspoziciju. Primenom algoritma kompleksnih brojeva, metoda ekvipolencija daje najprostije i najelegantnije rešenje određene vrste problema geometrije u ravni. Danas je postala klasična u nastavi. Njemu pripada zasluga za geometrijsko značenje reči ekvipolentan, ekvipolencija. Njemu se pripisuje otkriće transformacije inverzijom (1836) koju je Štajner (dalje u ovom tekstu) delimično bio proučio 1824.

BELTRAMI, Euđenio (Eugenio Beltrami, 1835 – 1900), italijanski matematičar. Držao nastavu iz matematike i matematičke fizike na mnogim italijanskim univerzitetima. Njegovi teorijski radovi odnose se na primenu analize u geometriji, ali njegovo ime ostaje vezano za model geometrije u ravni Lobačevskog, pseudosferu, obrtnu površ čija je generatrisa (izvodnica) jedna traktrisa.

BOLJAJ, Janoš (János Bolyai, 1802 – 1860), mađarski matematičar i oficir autrougarske vojske, sin Farkaša Boljaja (Farkas Bolyai, 1775 – 1856), Gausovog* druga sa studija. U jednom očevom delu dao je 1832. skroman dodatak („Naučni dodatak o prostoru apsolutno verno izložen" – *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*) od svega nekoliko stranica u kome verno izlaže apsolutnu nauku o prostoru. Njegova istraživanja u ovoj nezahvalnoj oblasti odobrio je Gaus 1832, izjavljujući da je davno imao analogne ideje ali se nije usudio da ih objavi. U „apsolutnoj geometriji" Boljaja, prvi stavovi Euklidovih elemenata ostaju valjani, dok se u ravni može povući kroz datu tačku beskonačno mnogo pravih koje neće seći datu pravu.

DEZARG, Žirar (Girard Desargues, 1593 – 1662), francuski arhitekt i matematičar. Tvorac je projektivne geometrije koja će se tako nazvati znatno kasnije. Budući da se profesionalno bavio arhitekturom, razmišljao je o različitim tehnikama svoje umetnosti (crtež u različitim oblicima, naročito u perspektivi, klesanje kamena, konstrukcija sunčanih časovnika) i uspeo je da ih izdigne na osnovne apstraktne pojmove. Svoje glavno delo *Nacrt projekta napada u slučajevima susreta konusa sa ravni* napisao je 1639. Njegov jezik je bogat neologizmima, uvodi tačke i prave u beskonačnosti i ustanovljuje više teorema (npr. „Dezargova teorema" o homologičkim trouglima). Među njegove malobrojne poslenike ubrajaju se Paskal (Blaise Pascal, 1623 – 1662), De la Ir (Philippe de la Hire) i Bos (Abraham Bosse).

DIOKL (II v. – poč. I v. pre n. e.), grčki matematičar kome se bez nekih dokaza pripisuje izum „Dioklova cisoida", kubna linija u ravni čija je jednačina $y^2(2a-x)=x^3$, koju su koristili Grci u problemu udvostručenja kocke.

DIONISODOROS (prva pol. II v. pre n. e.), grčki matematičar, poznat po rešenju Arhimedovog problema (druga knjiga, *O sferi i cilindru*). Misli se da je on našao zapreminu torusa metodom bliskom metodi nedeljivih.

DIPEN, Šarl (Charles Dupin, 1784 – 1873), francuski matematičar i inženjer. Otkrio je razvojne površi sfera koje dodiruju tri date sfere, od tada nazvane *Dipenove ciklide*. Pored inženjerske karijere, koju završava kao inspektor brodogradnje (upravljao je radovima u krfskoj luci 1807), nastavlja matematička istraživanja usmerena ka diferencijalnom proučavanju površi, odakle potiču *Dipenova indikatrisa*, *teorema Mali-Dipena* (Malus-Dupin) o snopovima svetlosnih zraka, trostruki ortogonalni sistem površi, asimptotska linija površi itd. Od 1827. posvetio se politici.

KASTELNUOVO, Gvido (Guido Castelnuovo, 1865 – 1952), italijanski matematičar. Njegovi najznačajniji radovi se odnose na primenu analize u geometriji, na račun verovatnoće i na algebarsku geometriju.

KLIFORD, Vilijam (William Clifford, 1845 – 1879), britanski matematičar. Njegova sasvim osobena naučna aktivnost obuhvata veoma različite domene. U čistoj matematici zanimao se za nekomutativnu algebru i krive hiperprostora. Njegovo ime ostalo je u neeuklidskoj geometriji od tri dimenzije a vezuje se i za osobine ekvidistantnih nekomplanarnih prava u eliptičkom prostoru (*Klifordov paralelizam*). Njegovi tekstovi o krivini prostora i materiji, objavljeni 1876, nagoveštavaju neke aspekte opšte relativnosti.

KREMONA, Luiđi (Luigi Cremona, 1830 – 1903), italijanski matematičar. Držao je nastavu iz više geometrije u Bolonji, Milanu i Rimu. Veliki deo svojih radova posvetio je geometriji. Njegova rasprava *Geometrijske transformacije ravnih figura* (1863 – 1864) koja proučava biracionalne ili *Kremonine transformacije* osnova su moderne algebarske geometrije.

PLIKER, Julijus (Julius Plücker, 1801 – 1868), nemački matematičar i fizičar. Posle studija u Bonu, Hajdelbergu i Berlinu boravi u Parizu 1823 – 1824. Držao je nastavu u Bonu i Berlinu, potom je imenovan za profesora Univerziteta u Haleu 1834. gde je od 1836. zadužen za katedru matematike i fizike. Njegovi radovi, do tada posvećeni geometriji, od 1846. isključivo su posvećeni fizici da bi se vratio matematici pred kraj života. Imao je bliske veze sa francuskom školom Monžovih* učenika. Naročito je razvio analitičku geometriju, dajući joj više gipkosti uvođenjem skraćenih oznaka. Ove oznake su bile analogne Bobilijeovim (Etienne Bobillier, 1798 – 1840) oznakama, izumu trouglastih i tetraedarskih koordinata, korišćenju dualnosti i „Plikerovim koordinatama" za prostorne prave. U proučavanju algebarskih krivih u ravni, „Plikerove formule" povezuju međusobno red krive, njenu klasu i brojeve njihovih različitih singulariteta.

PONSELE, Žan Viktor (Jean Victor Poncelet, 1788 – 1867), francuski matematičar i general. Studije započeo u Politehničkoj školi. Kao mlad, nadaren oficir ranjen je 1812. i zarobljen pri prelazu Dnjepra. Interniran je u Saratov gde razmišlja o svojim studijama za vreme prinudne dokolice koja će trajati do 1814. Bez pristupačnih dokumenata, postavio je nove geometrijske koncepcije koje će izložiti u *Raspravi o projektivnim figurama* (1822). Kao istraživački instrument koristi centralnu projekciju, transformaciju recipročnim polarama i svoj *princip kontinuiteta* koji se sastoji u razmišljanju na eksplicitan način o projektivnom prostoru konstruisanom ne samo na realnim brojevima R, nego na telu kompleksnih brojeva C. U geometriji uvodi reč *homologija* i prvi je koji homologiju proučava u trodimenzionalnom prostoru. On uveliko upotrebljava elemente u beskonačnosti. Tako je geometriju, nazvanu „sintetička" obogatio deduktivnim oruđem koje mu daje ozbiljne prednosti nad analitičkom geometrijom, tada veoma neodnegovanom, posebno u proučavanju familija konusnih preseka ili kvadrika.

ROBERVAL, Personije de ili **Person Žij** (Personier de Roberval ili Gilles Personne, 1602 – 1675), francuski matematičar, poznat naročito po vagi koju je pronašao. Izvršio je brojne oglede o praznini i elastičnosti vazduha; u geometriji je otkrio i koristio na brojnim primerima kinematički metod određivanja tangenata na krivama, koji je

Toričeli (Evangelista Torricelli, 1608–1647) nezavisno otkrio. Kao i Dekart* i Ferma*, Roberval je ustanovio jedan manje obrađen metod analitičke geometrije. Njegove kvadratrise vešto povezuju kvadraturu krivih sa konstrukcijama tangenata na krivama. Prvi je proučio *ruletu* ili *cikloidu*, krivu koja je igrala veliku ulogu tokom XVII v. Naziv *ruleta* preveo je kao „trohoida"; naziv „cikloida" pripada Mersenu (o. Marin Mersenne). Roberval je dao konstrukciju krive, odredbu tangenata i izračunao površinu luka (1637), kao i zapremine koje kriva proizvodi rotacijom bilo oko osnove, bilo oko ose simetrije.

ŠASL, Mišel (Michel Chasles, 1793–1880), francuski matematičar, šef katedre geodezije na Politehničkoj školi 1841. i katedre više geometrije na Sorboni od 1846. Napisao je više rasprava a 1829. šalje na konkurs akademije u Briselu rad o dualitetu i homografiji, koji predstavlja u neku ruku početak njegovog dela *Istorijski pogled na poreklo i razvitak metoda u geometriji* (Brisel 1837). Šasl je proširio pojam dualnosti imajući u vidu radove Žergona (Joseph Diez Gergonne, 1771–1859) i Ponselea (videti prethodan tekst). Šasl ustanovljuje izraze homotetija i homografija i daje homografiji bitnu ulogu u geometriji. Uvodi anharmonijski odnos (danas dvoodnos) četiri alinearne tačke ili četiri prave jednog jedinog snopa. Za njega je ostala vezana tzv. *Šaslova relacija*.

ŠTAJNER, Jakob (Jacob Steiner, 1796–1863), švajcarski matematičar, poreklom iz seoske porodice (sam je naučio da čita i piše u četrnaestoj godini). Intelektualno se formirao u Iverdonu, u školi kojom je upravljao veliki pedagog Pestaloci (Pestalozzi), zatim je studirao na Univerzitetu u Hajdelbergu i postigao sjajnu profesorsku karijeru na Univerzitetu u Berlinu. Smatra se jednim od osnivača geometrije XIX v., sa Monžovim* učenicima u Francuskoj i sa svojim nemačkim kolegama Mebijusom (August Möbius) i Plikerom (vidi prethodan tekst). Postigao je značajne rezultate iz elementarne geometrije: dao je konstrukciju konusnih preseka pomoću preseka snopova u homografiji; proučavao je algebarske krive i površi, naročito sa Švajcarcem Šleflijem (Ludwig Schläfli, 1814–1895), površi trećeg reda. Najčuvenija je Štajnerova „rimska površ" (1844), površ četvrtog reda i treće klase po brojnim radovima koje je izazvala.

VEJL, Herman (Hermann Weyl, 1885–1955), nemački matematičar, profesor Politehničke škole u Cirihu (1913–1930), na Univerzitetu u Getingenu (1930–1933) a od 1933. držao je nastavu na institutu u Prinstonu, SAD. Mogao bi da se uporedi sa Hilbertom* i Poenkareom*. Njegovi brojni radovi odnose se na skoro sve grane matematike: diferencijalne jednačine, teoriju funkcija, teoriju grupa, topologiju, relativnost, kvantnu mehaniku i filozofiju matematike. Njegova istraživanja o uopštenju pojma prostora, neophodnog za opštu teoriju relativnosti, bliska su Kartanovim (Elie Cartan, 1869–1951). Glavno didaktičko delo: *Prostor, vreme, materija* (1918).

Videti Kuda ide savremena matematika, strana 154.

Matematička logika

Uvod

Pod logikom treba razumeti skup načela razmišljanja koji ima za cilj da obrazuje jedan naučni sistem.

Danas se još smatra da se istorija logike deli na dva odvojena dela, staru i novu logiku. Ovaj presek datira iz 1850, otprilike kad se logika kao naučna disciplina udaljava od filozofije i teži da postane matematička nauka. Ovakvo razdvajanje istorije logike ne ide bez teškoća, naročito kad je reč o Lajbnicu* i njegovom doprinosu logici i kad se takvom podelom zanemari izvesna aktuelnost aristotelovske i stoičke logike, kao i nekih odgovarajućih doprinosa sholastičke logike.

Istorija logike se može deliti i na novatorske periode i periode zastoja. Stvarni stvaralački periodi logike su u IV i u III v. pre n. e., zatim XIII i XIV v. i u novom veku, od sredine XIX v. do naših dana. Podela istorije zapadne logike sledi pet velikih perioda, tj. dva perioda stagnacije između tri perioda stvaranja. Na ovom mestu ne može se govoriti o jednoj značajnoj logici, kao što je indijska logika.

U *antici* je Aristotel (384–322. pre n. e.) prvi ukazao na potrebu da se objasni i sistematski izloži izvestan broj logičkih načela i postupaka koji su se do tada upotrebljavali ali se nisu pominjali. Teofrast (oko 372–287. pre n. e.) ima najveće zasluge za modalnu logiku. Njegova istraživanja koja se odnose na analogne (hipotetičke) silogizme anticipiraju donekle stoički račun proporcija. Najoriginalniji i najplodniji logičar stoičke škole bio je nesumnjivo Krisip (281–205. pre n. e.). Stoička logika propozicija predstavljena je u obliku deduktivne teorije kao i aristotelovska silogistika. Stoičari su izgleda svoj sistem smatrali potpunim, tj. da je svako izvođenje vredno logike propozicija kad se može svesti na lanac izvođenja koji ima pet primitivnih tipova. Nastupa period pada u razvitku logike, period priručnika i komentatora kad nema imena poput Aristotela i Krisipa. Ovde treba pomenuti Boecija (Anicius Manlius Boethius, 480–524), rimskog filozofa koji je odigrao veliku ulogu u prenošenju antičkog nasledstva srednjovekovnim autorima, pa i nasledstva u pogledu logike.

Dugo je smatrano da je logika srednjeg veka nezanimljiva i posmatrana u celini ona još i danas ostaje relativno loše poznata. U glavnim crtama ona se odlikuje zavisnošću od antičke tradicije, korišćenjem latinskog jezika, smatranog, izgleda u potpunosti racionalnim, kao i ulogom kontroverzi teološke i metafizičke prirode u njenoj produkciji i evoluciji. Čista *sholastička logika* počela se razvijati u XII v. da bi dosegla zrelost u XIV i XV v. i svoj pad od XVI do XVIII v.

Postoji period „stare logike" (*ars vetus*) u kome se ističe Abelar (Pierre Abélard, 1079 – 1142) sa svojom dijalektikom i period „nove logike" (*ars nova*) u kome su najpoznatiji logičari: Širsvud (William of Shyreswood, umro 1349), Le Gran (Albert le Grand, 1200 – 1280), Hispanus (Petrus Hispanus, 1210 – 1277), Duns Skot (John Duns Scotus ili Johanes, 1266 – 1308) i Lil (Raymond Lulle, 1235 – 1315). Sinteza stare i nove logike ostvarena je sredinom XIII v. u izvesnom broju didaktičkih dela (*compendia-summulae*), koja služe za obuku logike i zacelo daju najbolju ideju o nastavi iz ove discipline za vreme sholastičkog perioda.

Stari logičari gledaju na logiku kao na instrument u službi metafizike i teologije, dok „moderni logičari" (*logica modernorum*) posmatraju logiku kao autonomnu disciplinu. Najistaknutiji *moderni* logičari XIV v. su: Okamski (William Occam, 1300 – 1349), Berli (Walter Burley, 1275 – 1345), Buridan (Jean Buridan, 1300 – 1385) i Albert Saksonski (1316 – 1390). Klasičan period sholastičke logike počinje oko 1300. Pojam *posledice* korišćen je u srednjem veku, čas da označi propoziciju oblika „ako ... tada", a čas da označi izvođenje. Najznačajnija je razlika između *formalnih* i *materijalnih* posledica. Obrazovanjem teorije posledica priznato je ono što bismo mi nazvali prvenstvom u vremenu računa propozicija računu predikata. Krajem XIV v. počinje pad sholastičke logike: ona uopšte nije doprinela nečem novom i temeljnom te je bila prevaziđena tokom XVI i XVII v.

U klasičnom periodu razvitka logike najslavnije je delo *Dijalektika* iz 1555. humaniste Petrusa Ramusa (1515 – 1572), jedno od prvih dela iz logike koje je zasluživalo da bude napisano na prostom narodnom jeziku, antiaristotelovskog nadahnuća, koje je stvarno doprinelo razvitku logike. *Logika Por-Roajala* je rasprava koja se pojavila anonimno 1662. pod naslovom *Logika ili veština mišljenja* (*Logique ou Art de penser*) autora Arnoa (Antoine Arnauld) i Nikola (Pierre Nicole). Delo je dugo i široko korišćeno a pokušavalo je da kombinuje aristotelovsko-sholastičko nasleđe sa doprinosima modernih. U ovom periodu značajan je uticaj Paskala (Blaise Pascal, 1623 – 1662), s obzirom na njegove stavove o prirodi definicija i osnovnih stavova u matematici.

Smatralo se da se istorija logike deli na dve različite oblasti: jedna od tih oblasti obuhvata sve ono što

nije nadahnuto Lajbnicovom idejom logistike a druga odgovara čisto modernom obliku formalne logike, obuhvatajući sve ono što je bilo savesno ili nesavesno nadahnuto idejom Lajbnicove logistike. Treba imati u vidu da je Lajbnic aristotelovsko-sholastičku logiku držao za jednu od najznačajnijih produkcija ljudskog duha, nastojeći da je usavrši na različite načine dok se matematička logika izgradila nezavisno od Lajbnica i u nepoznavanju njegovih logičkih spisa.

U jednom spisu iz mladosti, *Rasprava o kombinatornoj veštini* (*Dissertatio de arte combinatoria*, 1666) Lajbnic planira sistem označavanja, univerzalno zasnovan na sledećim načelima: sačiniti iscrpan popis sasvim jednostavnih ideja koje predstavljaju osnovni izvor ljudskih saznanja a zatim ih označiti simbolima algebarskog tipa, tako da se dobije neka vrsta „abecede misli". Složene ideje moći će da se predstave prihvaćenim kombinacijama elementarnih simbola, odgovarajućim prostim idejama iz njihovog sastava. Ovaj pokušaj konstrukcije *univerzalnog karakterističnog jezika* (*lingua characteristica universalis*) zanimao je čitavog života Lajbnica čiji je entuzijazam bio suprotan Dekartovom skepticizmu. Kasnije je dodao ideju *razumskog računa* (*calculus ratiocinator*), odn. matematizovane metode rezonovanja koja prethodi našoj savremenoj koncepciji logičkog računa.

Posle Lajbnica, Lambert (Johann Heinrich Lambert, 1728 – 1777) pokušava da ustanovi logički račun i daje neke elemente logike relacija. Ojler* je tvorac metode figurativne reprezentacije silogističkih dedukcija (za koju se inspirisao Lajbnicom), poznate kao *metoda Ojlerovih dijagrama*, dok Sakeri (Giovanni Gerolami Sacheri, 1667 – 1733) delom *Demonstrativna logika* (*Logica demonstrativa*) nastoji da na logiku primeni striktno „geometrijsku" metodu. Kant (Immanuel Kant, 1724 – 1804) je poznat po razlici između analitičkih i sintetičkih stavova, a Hegel (Georg Wilhelm Friedrich Hegel, 1770 – 1831) kao odlučan protivnik formalnog tretiranja logike. Mil (John Stuart Mill, 1806 – 1873) je tvorac dela *O logičkom sistemu, racionalnom i induktivnom* (*A System of Logic, Ratiocinative and Inductive*, 1843) i poznat po svojim doprinosima induktivnoj logici. Njegova logika je antiformalističkog i empirističkog nadahnuća.

Bolcano (Bernhard Bolzano, 1781 – 1848) je značajan pisac monumentalnih dela *Učenje o nauci* (*Wissenschaftslehre*, 1837) i *Paradoksi beskonačnog* (*Paradoxien des Unendlichen*, 1851). Prvo delo sadrži izvesne originalne i veoma moderne doprinose logici. Bolcanu pripada velika zasluga u postavljanju razlike između analitičkih i sintetičkih propozicija, kao i definicije pojma *izvodljivosti* (*Ableitbarkeit*), dosta bliske semantičkom pojmu logičke posledice.

Algebra logike

Algebra logike se javila sa dva dela: Bulova* *Matematička analiza logike, suština eseja o računu deduktivnog razmišljanja* (*The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*) i Morganova (Augustus Morgan, 1806–1871) *Formalna logika* (*Formal Logic*) koja su se pojavila 1847. u isto vreme. Algebra logike ima dva glavna dela: algebru klasa i algebru relacija. Uvođenjem algebarskog tretiranja logike ostvaruje se stvarna matematizacija ove discipline koju je Lajbnic već bio predvideo i u opštim crtama opisao.

Iako Morgan donosi nove ideje, najčešće njegovo polazište je u stvari tradicionalna logika, tj. teorija silogizama, kojoj je posvetio četiri značajne rasprave, objavljene između 1850. i 1863. u *Kembridžskim filozofskim raspravama* (*Cambridge Philosophical Transactions*). S tim u vezi imao je prepirku o prioritetu s Hamiltonom (William Hamilton, 1788–1856) čija se pretežna inovacija sastojala u uvođenju 1833. kvantifikacije predikata više od kvantifikacije subjekta. Morganu nije bilo teško da dokaže da je njegova teorija potpuno nezavisna i u osnovi različita od Hamiltonove. On je zaslužan za uvođenje pojma „univerzum govora" koji označava oblast koja više ili manje obuhvata predmete na koje se poziva, najčešće implicitno, kad se uvodi par suprotnih pojmova (npr. skup životinja za par „kičmenjaci-beskičmenjaci"). *Formalna logika* sadrži elemente algebre klasa. Tu su posebno formulisani zakoni dualnosti između zbira i proizvoda:

$$(FG)' = F' + G', \quad (F+G)' = F'G'.$$

Oni se mogu transponovati na propozicionalni račun gde vrede za konjunkciju i disjunkciju. Kasnije su nazvani *Morganovi zakoni*.

Morgan je dao odlučan podstrek algebri relacija pa se on, u izvesnom smislu, može smatrati njenim istinskim tvorcem. Aktuelizacijom opšte ideje relacija silogistika gubi svoj privilegovan položaj i javlja se kao značajan ali znatno smanjen deo jedne mnogo šire logike. Najvećim usponima logike relacija doprineli su, posle Morgana, Pirs (Charles Sanders Peirce, 1839–1914), Šreder (Ernst Schröder, 1841–1902) i B. Rasel*.

Metoda koju je koristio Bul od 1847–1854. u delu *O istraživanju zakona mišljenja s kojima se zasniva matematička teorija logike i verovatnoće* (*An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilites*) nije tačno ono što se može nazvati algebrom klasa, već više primena obične numeričke algebre na logiku klasa. Daje se jedna algebra čije promenljive x, y, z itd. dopuštaju kao vrednosti samo brojeve 0 i 1 i čije se aksiome, operacije i zakoni pokazuju u prihvaćenoj interpolaciji, kao u algebri klasa. U interpretaciji o kojoj je reč slovni simboli interpretiranih pojmova u širini (tj. klasa) odgovaraju „nuli" prazna klasa i „jedinici" univerzalna klasa. $1 \cdot x$ ili x je klasa dobijena birajući u 1 sve objekte koji su od X; $1 \cdot x \cdot y$ ili xy je klasa čiji su elementi u isto vreme od X i od Y; $x+y$ je klasa čiji su elementi bilo od X, bilo od Y, bilo od oba; $x-y$ je klasa čiji elementi su od X, ali nisu od Y; $1-x$ je klasa čiji elementi nisu od X. Zakon koji razlikuje binarnu algebru od obične numeričke algebre jeste „$x^2=x$", što danas nazivamo zakonom idempotencije i što Bul naziva *indeks zakon* (*index law*). Zakon „$x(1-x)=0$" izražava, u logičkoj interpretaciji, zakon kontradikcije, ili kako ga Bul naziva, *zakon dualiteta*; „$x+(1-x)=1$" je zakon isključenja trećeg, itd.

Činjenica da Bul zahteva da u $x+y$, x i y budu dve disjunktne klase (što ima prednost da svede sabiranje i oduzimanje da budu striktno inverzni) uskraćuje mu da sazna dva značajna zakona algebre klasičnih klasa:

(1) $x+y=x$ i (2) $x=x+xy$.

Poboljšanje logičkog Bulovog računa, čemu je doprineo Dževons (William Stanley Jevons, 1835–1882) sastojao se u interpretaciji simbola „+", spajanjem dveju klasa, tj. u zameni ekskluzivne interpretacije logičke sume inkluzivnom interpretacijom. Ven (John Venn, 1834–1923) je bliži Bulu nego Dževons, danas poznat po uvođenju dijagrama koji nose njegovo ime i koji su savršeniji u odnosu na Ojlerove. Tri Ojlerova kruga (koji služe da predstave silogističko izvođenje) tako su povučeni da se svi seku dva sa dva, deleći pravougaonik čiju površinu predstavlja univerzum govora posmatran u osam sekcija. Da bi se predstavile premise, zasecaju se izvesne sekcije koje simbolizuju prazne klase i ispisuje se krst u druge koje odgovaraju zauzetim klasama. Ako izvođenje koje se proučava čini da interveniše n članova ($n>3$), moći će da se koriste elipse ili druge složenije figure koje svojim međusobnim presecima dele pravougaonik na dve sekcije i moći će da se postupi na isti način.

Vrhunski uzlet algebra logike postiže u Šrederovoj sintezi objavljenoj na kraju stoleća: *Predavanja iz algebre logike* (*Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 1890–1905), u tri toma i u *Raspravi o opštoj algebri* (*Treatise on Universal Algebra*, 1898) Vajtheda (Alfred North Whitehead, 1861–1947). Prvo delo je značajno kao tehničko izlaganje u celini; drugo je mnogo više filozofsko, zanimljivo pre svega baveći se osnovama algebarskog računa uopšte. Algebru logike aksiomatiziraće prvi put na zadovoljavajući način Hantington (E. V. Huntington), 1904. Na ovom mestu treba izdvojiti ruskog logičara i matematičara Platona Sergejeviča Poreckog (1846–1907) čije su originalne i savršene metode izložene u delu *Algebra logike* francuskog autora Kutiraa (Louis Couturat, 1868–1914).

Ova algebra obuhvata treći deo ili treći aspekt: račun propozicija koji je opisan u Šrederovim *predavanjima* u kombinaciji s računom klasa. Bul je već uočio mogućnost interpretacije promenljivih svoje algebre kao promenljive propozicije, radije nego kao promenljive klase. Ali prvi račun propozicija stvarno se pojavljuje u Kolovim raspravama objavljenim počev od 1877. Kolu (Hugh Mac Coll) se duguje ponovno otkriće Morganovih zakona propozicionalnog računa, poznatih kod sholastika (naročito kod Viljema Okamskog).

Pirs

Američki filozof i naučnik Pirs (Charles Sanders Peirce, 1839–1914), vanredni profesor univerziteta u Harvardu (1903) i Lovel instituta (1903/1904) objavio je i znatno proširio Hopkinsovu *Linearnu asocijativnu algebru logike*, 1889. Njegova rasprava *Kako učiniti naše ideje jasnim* (1878) predstavlja početak pragmatizma. Autor je i monumentalnog dela posvećenog različitim predmetima. U samom domenu logike njegovi doprinosi su izvanredno brojni i različiti; tvorac je i niza usavršenja i pronalazaka u opštoj teoriji relacija poretka; zatim jedne anticipacije Šeferovog otkrića (M. H. Sheffer) koja se odnosi na mogućnost izražavanja svih propozicionalnih veza pomoću jedne među njima (1880), i korišćenja jednog postupka evaluacije za izraze propozicionalnog računa, koji je već jedna od tablica istine (1885); potom klasične logičke definicije identiteta na liniji Lajbnica (1885); definicije konačnog skupa kao skupa koji ne može biti stavljen u biunivoku korespondenciju s jednim od vlastitih podskupova (1881). I kod njega se nalaze elementi koji dopuštaju da se on posmatra, u odnosu na problem osnova aritmetike, kao neposredan Dedekindov* i Peanov prethodnik. Pirs je sa Venom (1880, 1881) prvi eksplicitno uveo konvenciju (i danas na snazi) o problemu „postojećeg uvođenja", tj. konvenciju koja se sastoji u posmatranju da postojeće propozicije, a ne univerzalne propozicije kategoričkog silogizma impliciraju postojanje svog subjekta. Može se naznačiti da je sasvim nezavisno od algebre klasa, za koju se ova klasična modifikacija naročito uspostavlja, Brentano (Franz Brentano, 1838–1917) primenio u svojoj *Psihologiji o empiričkom stanovištu* (*Psychologie vom empirischen Standpunkt*, 1874) analognu poziciju s posledicama koje ona implicira, tj. odbacivanje izvesnih formi tradicionalnih izvođenja, kao npr. silogizam *darapti* (uslovno nazivanje prvog modusa treće figure prostog kategoričkog silogizma).

Frege

Nemački logičar i matematičar, profesor u Jeni od 1879, Frege (Gottlob Frege, 1848–1925), pokazao je osnovne odnose u logici i matematici. Prvi je potpuno obradio račun sa stavovima (operatori i kvantifikatori) razlikujući smisao iskazne funkcije od onoga što ona izražava. Napisao je *Spis o pojmu, Jedna aritmetički obrađena forma jezika čistog mišljenja* (1879) i dr. Fregeove radove savremenici nisu adekvatno ocenili ali se ovaj naučnik danas uglavnom posmatra kao najveći logičar svoje epohe. S njim algebra logike prelazi na *logistiku* (ovaj izraz predložili su na Internacionalnom kongresu filozofije u Ženevi 1904 – Itelsohn, Lalande i Couturat; danas je on pomalo izašao iz mode). Algebra logike prvenstveno je nastojala na matematizovanoj logici, tj. na posebnoj matematičkoj teoriji dok je logistika pokušavala da bude logika matematike, tj. da logiku, odn. logiciranje dovede na matematičku raspravu.

Frege je izvršio preokret u logici uglavnom za matematičke potrebe. Ako se hoće postići, primećuje Frege, ideal savršeno naučne metode u matematici, potrebno je ne samo da početne propozicije koje se ne dokazuju budu svedene na minimalan broj i izrazito iskazane, već i da korišćene metode izvođenja budu unapred pojedinačno naznačene. Da bi se izbeglo obraćanje intuiciji u logičkim redosledima, koje predstavlja istovremeno i karakterističan nedostatak strogosti i izvor greške, neophodno je predvideti za samo matematičko *razmišljanje* tako precizan jezik kao što je matematički, s takvim ideografskim pisanjem koje dopušta da se adekvatno predstavi i da se lako i sigurno ispitaju sukcesivne etape deduktivnog puta. U delu *Spis o pojmu* (*Begriffsschrift*, 1879) Frege predlaže sistem savršenog logičkog pisma koji dozvoljava da se pokaže na mnogo jasniji način logička struktura propozicija i dokaza; međutim, Peanov sistem će biti u prednosti, verovatno zbog izvesne lakoće. *Spis o pojmu* prvi sistematski predstavlja račun propozicija i račun predikata sa istovetnošću. Obrađena je značajna upotreba kvantifikatora (ideju je na nezavisan način sugerisao O. H. Mitchell, koju je Pirs naznačio u tekstu iz 1885).

Redukciju matematike na logiku koja predstavlja veliku ambiciju *logicizma*, opisao je i branio Frege u *Osnovama aritmetike* (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884) i realizovao sistematski u *Osnovnim zakonima aritmetike* (*Grundgesetze der Arithmetik*, 1893–1903) u dva toma. Za razliku od Dedekinda koji kao polaznu tačku koristi pojmove skupa i pripadanja jednog elementa skupu, što dovodi do postavljanja teorije skupova, Frege koji ne posmatra ova dva osnovna pojma kao čisto logičke pojmove, izražava se u terminima pojmova i relacija. U *Osnovama aritmetike* pokazuje da se jedan kardinalan broj (*Anzahl*) mora posmatrati ne samo kao osobina objekata, već i kao osobina pojmova. On uvodi izraz jednakobrojan (*gleichzahlig*) da označi relaciju koja postoji između dva pojma kad klase koje oni određuju respektivno mogu biti stavljene u biunivoku korespondenciju; tada definiše broj koji pripada pojmu F kao proširenje pojma „jednakobrojnog pojmu F“, drugim rečima kao klasu pojmova koji su jednakobrojni pojmu F. Najzad izvodi definiciju „O“ i relacije „naslednik“ na sledeći način:

„O je kardinalan broj koji pripada pojmu ‚*ne* identičnom samom sebi‘“;

„*n* sledi neposredno *m* u prirodnom nizu brojeva“ znači: postoji pojam F i jedan objekt *x* koji pada pod ovaj pojam, tako da kardinalni broj koji pripada ovom pojmu je *n* i da kardinalni broj koji pripada pojmu 'koji pada pod F' ali nije 'identičan *x*-u' je *m*.“

Delikatnije je dobiti definiciju opšteg pojma induktivnog (konačnog) kardinalnog broja. U jeziku malo različitom od onog u *Matematičkim principima* (*Principia mathematica*), svodi se na iskaz da je x konačan kardinalni broj (jedan ceo prirodan broj) ako pripada svim naslednim klasama kojima pripada O (jedna klasa kardinalnih brojeva je nasledna ako, svaki put kad sadrži jedan broj, sadrži i njegovog naslednika). Kardinalni broj pojma „konačni kardinalni broj“ je prvi beskonačni kardinalni koji odgovara neprebrojivoj moći Kantora*. U *Osnovnim zakonima* (*Grundgesetze*) date su formalne definicije a tretiranje aritmetike kardinalnih brojeva dopunjeno je teorijom realnih brojeva. Završivši redakciju drugog toma ovog dela, Frege je od Rasela primio pismo 1902. u kome Rasel izlaže antinomiju skupa svih skupova koji nisu elementi samih sebe, poznatu od tada pod imenom Raselova antinomija. Otkriće ove antinomije izgleda da je tumačio kao sasvim poražavajuće za sistem koji je marljivo konstruisao. Uprkos činjenici što sam predlaže kao mogući lek, koji bi se sastojao u modifikovanju jedne od najvećih aksioma, tako da se onemogući dobijanje kontradikcije, dužnost da se pritekne sredstvu ove vrste nije mogla da ne izazove sumnju u apsolutnu vrednost logičkih osnova koje je predložio za aritmetiku.

Frege koristi u *Osnovnim zakonima* osnovnu razliku koju je obradio u *Smislu i značenju* (*Sinn und Bedeutung*, 1892) između smisla (Sinn) i oznake (Bedeutung) jednog iskaza. Dva iskaza „zvezda jutra“ i „zvezda večeri“ imaju dva različita smisla, ali imaju istu oznaku, tj. označavaju isti objekt: planetu Veneru. Ova razlika, sasvim prirodna što se tiče imena, proširena je pomalo veštački na propozicije. Smisao jedne propozicije je „misao“ (Gedanke) koju ona izaziva (reč je o sadržaju objektivnog značenja a ne o mentalnoj subjektivnoj reprezentaciji). Njena oznaka jeste njena vrednost istine. Propozicije su po-

smatrane u stvari kao imena izvesne vrste, svaka istinita propozicija je ime jedne istine i svaka pogrešna propozicija je ime jedne pogreške. Semantičke teorije Čerča (Alonzo Church, rođen 1903) i Karnapa* inspirišu se neposredno Fregeom, izvesnim brojem osnovnih tačaka.

Što se tiče čiste logike, Fregeovi radovi se odlikuju zahtevom za strogošću, sasvim neobičnim u metalogičkom govoru, npr. u odnosu na glavnu razliku između *upotrebe* i *ocene* nekog simbola ili izraza koja je bila izrazito priznata u srednjovekovnim teorijama *supozicije*, ali je bila i često još ostala zanemarena.

Peano

Peano (Guiseppe Peano, 1858–1932) je ostvario značajan uticaj na Rasela i doprineo ustanovljenju sistema logičkog označavanja, korisnijeg od prethodnih, naročito od Fregeovog. Od ovog sistema koji je primenio Rasel i sada je ostalo mnogo stvari u upotrebi, u logičkoj oznaci. Peanova zanimanja poklapaju se sa Fregeovim u jednoj bitnoj tački: naći simboličko pismo („pasigrafija“) kojim bi mogla biti izražena sveukupnost propozicija i matematičkih dedukcija. Osnovni principi Peanove ideografije bili su izloženi u *Oznakama matematičke logike* (*Notazioni di logica matematica*, 1894) i pojaviće se u pet izdanja i u uzastopnim tomovima u delu *Matematički formular* (*Formulario matematico*, 1895–1908). U ovom veličanstvenom poduhvatu prenosa ne odgovaraju kod Peana i njegovih saradnika nijedna čisto filozofska intencija niti nešto slično već samo jedan projekt redukcije matematike na logiku. Peano uvodi simbol $\in$ da bi označio pripadanje neke jedinke klasi i pravi jasnu razliku između ove relacije i relacije uključivanja jedne klase u drugu. On svodi celu aritmetiku na tri primitivna pojma: „broj“, „nula“ i „naslednik“ i na pet aksioma, poznatih od tada pod imenom *Peanove aksiome* koje se popularno mogu izraziti na sledeći način: (1) 0 je broj; (2) naslednik ma kojeg broja je broj; (3) ako jedna klasa sadrži nulu i, svaki put kad sadrži jedan broj sadrži takođe svog naslednika, tada ona sadrži sve brojeve; (4) dva različita broja ne mogu imati istog naslednika; (5) 0 nije naslednik nijednog broja. Ali ove propozicije uzete su u stvari iz Dedekindovog eseja *Šta su i šta treba da budu brojevi* (*Was sind und was sollen die Zahlen*? 1888) gde one, međutim, nisu korišćene kao aksiome.

Među redaktorima *Formulara*, Burali-Forti (Cesare Burali-Forti, 1861–1931) zaslužuje posebnu napomenu, pošto je otkrio (ili tačnije stavio na dnevni red, jer je ona od Kantora već bila poznata) antinomiju koja nosi njegovo ime (1897). Reč je o antinomiji koja tretira ordinalni (redni) broj skupa svih ordinalnih brojeva.

Rasel

Rasel (Bertrand Russell, 1872–1970) je dosta rano primenio Fregeovu tezu prema kojoj je matematika grana logike i u tom pogledu svi pojmovi aritmetike mogu biti potpuno definisani pomoću logičkih pojmova i sve teoreme aritmetike mogu se dokazati polazeći samo od logičkih aksioma. U početku *Matematičkih principa* (*Princeples of Mathematics*, 1903) daje sledeću definiciju: „Čista matematika je obrazovana od klase svih propozicija oblika '*p* implicira *q*' u kojima su *p i q* propozicije koje sadrže jednu ili više promenljivih, iste u dvema propozicijama; ni *p* ni *q* ne sadrže ma koje konstante ako ove nisu logičke konstante. A logičke konstante su svi pojmovi koji mogu biti definisani sledećim izrazima: implikacija, relacija jednog terma u jednoj klasi čiji je on element, pojam *takav da* pojam relacije i izvesni drugi pojmovi koji mogu biti implicirani u opštem pojmu propozicija gornjeg oblika. Pored toga matematika koristi pojam koji nije konstituant propozicija koje posmatra, naime pojam istine."

Delo *Principi* nastoji da opravda ovu definiciju ispitujući detaljno glavne grane čiste matematike, svodeći njene pojmove na čisto logičke pojmove. U ovom delu, u kome se javlja kao matematičar, logičar i filozof, Rasel još ne koristi simboličku oznaku, ali da bi dobio strog matematički tretman dela *Principija mathematica* (1910–1913) primeniće veoma precizan i izrađen logički jezik, inspirisan Peanovim jezikom. U ovom poslednjem delu, koje je Rasel napisao u saradnji sa Vajthedom (Alfred North Whitehead, 1861–1947), dva autora ne postavljaju samo zadatak simboličnog ponovnog pisanja i aksiomatizacije matematike koja je bila Peanova, već takođe i reinterpretacije primitivnih pojmova i primitivnih propozicija logičkim pojmovima. *Principia mathematica* obrazuju, prema tome, potpuno ostvarenje Fregeovog programa. Protivrečnost koju ima Fregeov sistem je izbegnuta uvođenjem teorije tipova, koju je Rasel izložio u jednoj raspravi 1908, i koja isključuje kao lišene smisla izraze one vrste koji rađaju protivrečnost o kojoj je reč.

Teorija tipova prosto operiše jednostavno stratifikacijom formalnih izraza u izrazima prvog nivoa (koji označavaju individue), u izrazima drugog nivoa (koji označavaju klase koje za elemente imaju individue), u izrazima trećeg nivoa (koji označavaju klase koje za elemente imaju klase individua), itd. i ustanovljuje da u jednom izrazu oblika $A \in B$, B može biti ma kakvog nivoa većeg od prvog, ali A mora biti tada nivoa $n-1$. *Principia mathematica* koriste, u stvari, razgranatu teoriju tipova koja dozvoljava da se izbegnu ne samo antinomije nazvane „logičkim", kao Raselova antinomija, već i antinomije nazvane „semantičkim", kao što su one Grelinga (Kurt Grelling) i Rišara (Jules Richard). Ova teorija je složenija od teorije jednostavnih tipova i obavezuje Vajtheda i Rasela da uvedu manje pouzdano sredstvo: aksiomu reduktibilnosti koja je izazvala različite prigovore. Hvistek je (Leon Chwistek, 1884–1944) 1921. napustio razgranatu teoriju u korist jednostavne, na podstrek Ramsija (Frank Plumpton Ramsey, 1903–1930), koji je 1926. pokazao da je jednostavna teorija bila dovoljna za eliminaciju logičkih protivrečnosti i da se matematika nije posredno odnosila na problem semantičkih protivrečnosti. Jednostavna teorija je uglavnom korišćena pošto je Karnap dao njenu standardnu formulaciju u *Nacrtu logistike* (*Abriss der Logistik*, 1929) koju je prihvatio i Gedel (Kurt Gödel) 1931.

Raselov drugi glavni doprinos je „teorija definisanih opisa", tj. logička analiza izraza oblika „takav i takav" (npr. „drugi predsednik francuske republike". Rasel pokazuje da izrazi ovog tipa mogu uvek po potrebi biti eliminisani kontekstualno, tj. da svaka propozicija ovog smisla u kojoj oni figurišu može biti parafrazirana u ekvivalentnu propoziciju u kojoj oni više ne figurišu; npr. propozicija „Autor iz Vaverlija (Waverley) je Škot" postaje u Raselovoj transkripciji: „Ima jedna individua i samo jedna koja se piše Vaverli, i svaka individua napisana Vaverli je Škot". Raselov postupak eliminacije definisanih opisa preuzeo je i poboljšao sa tehničkog stanovišta 1940. Kvin (Willard Van Orman Quine, rođen 1908).

Cermelo

Cermelo (Ernst Zermelo, 1871–1953) je 1904. iskazao aksiomu izbora, do tada korišćenu kao prećutnu pretpostavku. Predložio je u raspravi 1908. aksiomatizaciju skupova koja obuhvata sedam aksioma i dozvoljava da se izbegnu protivrečnosti, kako logičke tako i semantičke. Kantorov princip, na osnovu koga svaka osobina može biti shvaćena, čini da postoji neka vrsta odgovarajućeg skupa, zamenjenog kod Cermela aksiomom separacije (Aussonderungsaxiom), koji prosto ustanovljuje da svaka osobina definisana na svojstven način „selekcioniše" odgovarajući podskup u skupu već datom (tj. može biti konstruisan pomoću aksioma). Ali, ova aksioma povlači za sobom jedan problematičan pojam, pojam „osobine dobro određene" (definite Eigenschaft) koji je ostao neprecizan. Kasnije je pokušano da se ovaj nedostatak otkloni, naročito 1921/22. Frenkel (Adolf Abraham Fraenkel, 1891–1965), zatim 1922/33. Skolem (Thoralf Skolem) i 1929. sam Cermelo. Frenkel i Skolem su pokazali (1922) neophodnost uvođenja, da bi se garantovalo postojanje dovoljno „velikih" skupova jedne dopunske aksiome, aksiome zamene. Cermelove aksiome koje su ispravili Frenkel i Skolem, obrazuju danas standardnu aksiomatiku, nazvanu „Cermelo – Frenkel“ (ZF) za teoriju skupova. Da bi se isključilo postojanje *kontradiktornih* skupova, tj. skupova koji daju mesta svakom beskonačnom lancu relacija pripadnosti, Nojman (Neumann) je predložio 1929. uvođenje „aksiome zakonitosti“ (Fundierungsaxiom), čiju je drugu verziju dao Cermelo, 1930.

David Hilbert*, matematičar po prevashodstvu, doveo je matematiku do značajnih uspona. Njegova filozofija matematike, nazvana „formalizam“, sledila je nadahnuće sasvim različito od Raselovog. Hilbert je izložio svoje ideje u završnoj formi, u dva toma dela *Osnova matematike* (*Grundlagen der Mathematik*, 1934. i 1939), koji su napisani u saradnji s Bernajsom (Paul Bernays, rođen 1888).

U osnovi Hilbertove koncepcije stoji uverenje da simboli i operacije na ovim simbolima obrazuju centralno nesvodljivo jezgro matematike. Ostvarljivost jednog aksiomatskog sistema ne može biti izložena u svim slučajevima metodom koja se sastoji u iznošenju realizacije. Otuda je neophodno pribeći dokazu stalnosti (konzistentnosti), tj. dokazu činjenice da ni jedna protivrečnost ne može biti izvedena iz aksiome. Ovaj problem kod Hilberta će postati centralni i s njim će se u neku ruku poistovetiti tzv. problem „osnova matematike“: dati za svaku granu matematike dokaz činjenice da dokazni postupci koji se daju neće nikad u isto vreme proizvesti kao teoreme jednu propoziciju i njenu negaciju. Da bi ostvario ovaj program, Hilbert obrazuje „teoriju dokaza“ čiji je princip sledeći: svaka matematička teorija može danas biti stavljena u oblik strogo formalizovanog sistema, tj. skupa formula koje se razlikuju od običnih matematičkih formula samo činjenicom da uz obične simbole obuhvataju izvesne logičke simbole. Jedan dokaz je niz simboličkih formula od kojih je svaka ili više njih jedna aksioma, ili je dobijena počev od prethodnih formula pomoću prethodno naznačenih zakona izvođenja. Otuda i mogućnost da se od samih dokaza stvori predmet matematičke studije: u običnoj, tako formalizovanoj matematici biće dodata metamatematika u kojoj će matematički postupci biti posmatrani jedinstveno, tako da predstavljaju operacije na pisanim oblicima. Potrebno je posebno naznačiti da za razliku od formalne matematike, kod koje se moraju ispitati i opravdati dokazi, matematika mora koristiti za svoj deo samo metode dokaza koje imaju intuitivan i strogo konačan karakter.

Za izvesne elementarne sisteme, dokaz konzistencije mogao bi biti dobijen bez velike teškoće. Ali za sve sisteme izvesne moći, kao npr. za aritmetiku celih prirodnih brojeva, dokaz konzistencije je moguć samo ako se odbije upotreba strogo konačnih sredstava. Tako je, npr.

Gencen (G. Gentzen) mogao dati 1936. dokaz neprotivrečnosti za aritmetiku, koristeći metodu „transfinitne indukcije“.

Ako se izuzmu Kvin (W. V. Quine, *Mathematical Logic*, 1940) i donekle Roser (J. Bardey Rosser), logički poduhvat *Principia mathematica* nije imao većih neposrednih poslenika; formalizam je postao, u vidu implicitnog ili eksplicitnog oblika, dominantna težnja u matematici i u filozofiji matematike. U Burbakijevim* *Elementima matematike*, koji u izvesnom smislu označavaju i kraj i kulminaciju ove težnje, problem osnova matematike shvaćen je kao da mora biti rešen svojstvenom kombinacijom simboličke logike i teorije aksiomatiziranih skupova.

Intuicionizam

Intuicionističku školu zasnovao je Brauer (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881 – 1966), ali se kao njegovi neposredni prethodnici mogu pomenuti matematičari Poenkare* i Kroneker*. U problemu osnova matematike intuicionisti podržavaju izvestan broj teza koje su neposredno suprotstavljene idejama formalista. Za njih je, pre svega, matematika intelektualni stvaralački čin zasnovan na intuiciji, posebno na izvornoj intuiciji prirodnih celih brojeva. Kao takva, protivno onome što tvrdi formalizam, ona je u osnovi nezavisna od svakog jezika; prirodan ili simboličan jezik koji može poslužiti samo u cilju izveštaja kao pomoć ili kao sredstvo komunikacije. Postojanje matematike ne poklapa se sa prostim logičkim neprotivrečjem: jedan matematički objekt može se smatrati da postoji samo onda ako imamo sredstvo da ga stvarno *konstruišemo*, specifično matematičkim postupkom. Intuicionisti su odlučno protiv svakog korišćenja aktuelno beskonačnog u matematici i ne daju smisao izrazima kao, npr., „skup svih realnih brojeva između 0 i 1“. Matematika koja ne proizlazi iz iskustva ni prema njima nije zavisna od logike: naprotiv, logika obrazuje specifikaciju matematike i mora biti posmatrana u izvesnom smislu kao primenjena matematika. Klasična logika, koja se sigurno može tako dugo koristiti dok se kreće u konačnom, prestaje da bude u celosti valjana kad se posmatra u beskonačnom svetu. Tako je npr. princip isključenja trećeg vredan u slučaju konačnog skupa: ako je E konačan skup prirodnih brojeva može se odlučiti konačnim brojem etapa intuitivno očiglednim, da li sadrži ili ne prost broj. Ali, ako E sadrži beskonačan broj prirodnih brojeva, tvrđenje činjenice da E sadrži prost broj, ili da ga ne sadrži, ne može biti smatrano kao istinito, ako se može ili izbeći (ili dati sredstvo konstrukcije) prost broj koji je element od E, ili izvesti nemogućnost hipoteze da u njemu postoji jedan. Hajting (Arend Heyting, rođen 1898) je dao 1930. aksiomatizaciju intuicionističke logike koja se razlikuje od „klasične“ logike činjenicom da izvesni zakoni, kao onaj isključenja trećeg ($p \vee \neg p$), i onaj dvostruke negacije ($\neg\neg p \supset p$) nisu prihvaćeni kao univerzalno valjani.

Luis

„Paradoksi" materijalne implikacije naveli su Luisa (Clarens Irving Lewis; 1883 – 1964) da potraži koncepciju implikacije koja se odnosi najviše na formulu A koja „implicira" formulu B. Luisova *striktna implikacija* (označena simbolom $\prec$) odgovara relaciji logičke izvodljivosti u smislu da, ako su A i B dobro formirani izrazi, $A \prec B$ biće istinit ako i samo ako je B logička posledica od A. Prva zadovoljavajuća formulacija propozicionalnog računa sa striktnom implikacijom data je 1920. U saradnji sa Langfordom (C. H. Langford) Luis je napisao *Simboličku logiku* (1932) koja detaljno raspravlja ova pitanja i postaje osnovno delo za modalnu logiku i polazište za većinu docnijih radova.

Levenhajm

Levenhajm (Leopold Löwenheim, 1878 – 1940) je 1915. dokazao čuvenu teoremu koja nosi njegovo ime. Dugujemo mu i izvestan broj drugih rezultata koji se odnose na metateoriju računa predikata prvog reda, kao npr. dokaz činjenice da postoji postupak efektivne odluke za račun predikata prve vrste s jednim mestom argumenta (1915).

Skolem

Skolem (Thoralf Skolem, 1887 – – 1963) umnogom je doprineo konstituciji moderne aksiomatske teorije skupova. Osim toga, njemu dugujemo nov dokaz i generalizaciju Levenhajmove teoreme, kao i izvestan broj rezultata koji se odnose na problem odluke u računu predikata prvog reda. Skolem je dokazao da se može učiniti da svakom dobro formiranom izrazu ovog računa odgovara jedan standardan oblik, *normalni Skolemov oblik* koji igra odlučnu ulogu u dokazu potpunosti, koji je dao Gedel 1930. za račun o kome je reč. U osnovnom tekstu koji se pojavio 1923, dao je temelje rekurzivne aritmetike, discipline koja će se proslaviti značajnim rezultatima. Izložio je (1933, 1934) nemogućnost potpune karakterizacije niza prirodnih brojeva pomoću konačnog broja, ili čak jedne prebrojive beskonačnosti ispisanih aksioma u oznaci računa predikata prvog reda sa jednakošću, tj. egzistenciju „nestandardnih" modela za aritmetiku prvog reda.

Post

Post (Emil L. Post, rođen 1897) je dao 1921. prvu metateorijsku studiju razmere o bivalentnom propozicionalnom računu koji je predstavljen u obliku formalnog sistema, naročito s dokazima konzistencije i potpunosti. Njemu dugujemo i prvu formulaciju viševalentnog propozicionalnog računa s čisto apstraktnog gledišta, tj. bez reference na posebnu interpretaciju. Tako je Post umnogom doprineo izvesnom broju pitanja koja se odnose na definisanje i rasvetljavanje pojma efektivnosti.

Lukašijevič

Jan Lukašijevič (Jan Lukasiewicz, 1878 – 1956), poljski logičar i filozof, profesor u Lembergu 1911, neko vreme ministar kulture u kabinetu Paderevskog (1919). Držao je nastavu u Varšavi (1926 – 1944), zatim u Dablinu od 1946. Napisao je više osnovnih članaka iz istorije logike, među kojima *Filozofske primedbe viševrednim sistemima računa iskaza* (1930), *Logika i osnovni problem* (1941), *O sistemu modalne logike* (1953). On je 1920. predložio trovalentni propozicionalni račun u odnosu na aristotelovsku teoriju budućih udela (kontingenata). Treća vrednost istine odgovara aproksimativno u ovom računu, mogućem ili udelu (kontingentu). Prema tome, nezavisno od Posta, Lukašijevič je izvršio generalizaciju ma kojih viševalentnih računa (Lukašijevič 1929. i 1930; Lukašijevič i Tarski 1930). Njemu takođe dugujemo značajne radove o klasičnom bivalentnom propozicionalnom računu i o istoriji logike (naročito Aristotelove silogistike).

Tarski

Tarski (Alfred Tarski, rođen 1902) je doprineo velikim brojem publikacija razvitku istraživanja o bivalentnom i viševalentnom propozicionalnom računu. Ali njegovi najznačajniji radovi su doprineli, počev od 1930, metateoriji formalnih sistema uopšte. U ovom domenu Tarski se može smatrati tvorcem nove grane, logičke semantike koja tretira pojmove kao pojmove značenja i istine u odnosu na formalne sisteme. U klasičnom tekstu, objavljenom 1936, *Pojam istine u formalizovanim jezicima* (*Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*), rešio je problem koji se sastoji u nalaženju za jedan formalni sistem S izvesnog tipa definicije „istinito u S" u svojstvenom metasistemu. Ali delo Tarskog pokazuje da se u izvesnom smislu semantika može svesti na sintaksu, pošto ona dozvoljava da se, za dati formalizovani jezik, nađe čisto sintaksičko svojstvo dobro formiranih izraza koje se poklapa u proširenju sa semantičkim svojstvom da bude istinita propozicija (ili sintaksička relacija koja se poklapa u proširenju sa semantičkom relacijom koja se sastoji u činjenici da zadovolji jedan propozicionalni oblik).

Zreliji radovi Tarskog doprineli su naročito u teoriji modela, u nekim graničnim domenima između logike i matematike i u primeni metoda i rezultata moderne logike na neke posebne grane matematike. Njemu se naročito duguje izvestan broj rezultata koji se tiču problema odluke (rešenja) u slučaju aritmetike, elementarne teorije grupa, elementarne algebre i geometrije.

Karnap

Karnap (Rudolf Carnap, 1891–1970), nemački filozof i logičar. Predavao je filozofiju u Pragu (1931) i Čikagu (1936). Poznat prevashodno kao logičar, pripadao je neopozitivističkoj školi, tzv. Bečkom krugu. Autor je analiza o vrednosti i funkcijama jezika (teorija protokolarnih iskaza).

Radovi Karnapa više su doprineli filozofiji logike i primeni metoda moderne logike na epistemologiju i na filozofiju nauka nego na čistu logiku. Njegovo delo prevazilazi čak i ona dela koja su doprinela razvitku posebne filozofske tendencije (logički neopozitivizam). U *Logičkoj izgradnji sveta* (*Der logische Aufbau der Welt*, 1928), delu koje se neposredno inspirisalo Raselom i njegovim *Principia mathematica*, Karnap je nastojao da dā racionalnu rekonstrukciju sveta, počev od izvesnih osnovnih datosti neposrednog iskustva, koristeći tehnike simboličke logike. Njegovi radovi o metateoriji formalnih sistema počinju *Logičkom sintaksom jezika* (*Logische Syntax der Sprache*, 1934), čiji je proširen engleski prevod objavljen 1937. Karnap proučava mogućnost primene na bilo koji jezik sasvim formalne sintaksičke metode koju je uveo Hilbert u slučaju matematičkog jezika. U jednom članku, objavljenom 1935, posle poljskog originala (1933) ali pre nemačke revizije (proširene značajnim dodatkom) *Pojma istine* (*Wahrheitsbegriff*) Tarskog, Karnap postavlja i rešava (za formalizovan jezik, u stvari, jači od onih koje je posmatrao Tarski), problem koji se sastoji u nalaženju sintaksičkih ekvivalenata za pojmove istine jedne propozicije i ostvarljivosti jednog propozicionalnog oblika. Sistematsko izlaganje semantike Karnap je dao u *Uvodu u semantiku* (*Introduction to Semantics*, 1942). U delu *Smisao i potreba* (*Meaning and Necessity*, 1947) i u nekim drugim radovima, Karnap je prišao problemu rasvetljavanja osnovnih pojmova semantike i modalne logike. Značajni su i njegovi radovi o induktivnoj logici i teoriji verovatnoće, naročito *Logičke osnove verovatnoće* (*Logical Foundations of Probability*, 1951).

Ostala Karnapova dela: *Prostor*, 1922; *Nacrt logistike*, 1929; *Problem logike nauke*, 1935; *Formalizacija logike*, 1943; *Kontinuum i induktivna metoda*, 1952; *Uvod u simboličku logiku i njene primene*, 1958; *Induktivna logika i verovatnoća* (u saradnji sa Stegmüller-om), 1959.

Erbran

Erbran (Jacques Herbrand, 1908–1931), iako veoma mlad, pošlo mu je za rukom da značajno doprinese razvitku matematičke logike u vezi sa Hilbertovom teorijom dokaza i metateorijom računa predikata prvog reda. Erbran je otkrio 1929. teoremu za koju je Bernajs (Bernays) pisao da je „centralna teorema logike predikata" i da obuhvata brojne aplikacije, naročito na problemu odluke, redukcije i konzistencije. Erbranova metoda, čiji se zameci mogu naći u izvesnom broju rasprava Levenhajma i Skolema, sastoji se u izlaganju izvesne relacije između problema valjanosti jedne formule u računu predikata i problema valjanosti (u smislu propozicionalnog računa) jedne formule bez kvantifikatora, koja može biti konstruisana počev od formule prema određenim pravilima. Kod Erbrana se prvi put pojavljuje *teorema dedukcije* (Tarski je, međutim, izjavio da je bila poznata i korišćena od 1921). Erbran je sugerisao Gedelu interpretaciju koju je on predložio 1934. za pojam rekurziviteta (pojam *opšte rekurzivne funkcije* često se označava kao pojam Erbran – Gödel – Kleen).

Gencen

Poznat po zanimanju za teoriju dokaza, Gencen (Gerhard Karl Erich Gentzen, 1909–1945) je u raspravi iz 1934. izložio jedan oštriji glavni stav, tzv. *verschärfter Hauptsatz* (principijelna pooštrena teorema) koji je u tesnoj vezi sa Erbranovom teoremom. Krivo uveren da se Erbranova teorema primenjuje samo na posebne formule, Gencen je posmatra kao poseban prost slučaj svoje teoreme. Bolje poznavanje Erbranovog dela danas nas uverava da je Gencenov *pooštreni glavni stav* u stvari poseban slučaj Erbranove osnovne teoreme. Gencenova istraživanja u domenu logičke dedukcije počivala su na konstrukciji „formalizma koji odražava najtačnije moguće logička razmišljanja stvarno korišćena u matematičkim dokazima". Metode „naturalne dedukcije" koje daje Gencen fundamentalno se razlikuju od onih korišćenih u logikama koje se mogu nazvati aksiomatskim po tome što koriste kao centralni pojam, pojam dedukcije pod hipotezama i povezuju, ne neposredno propozicije, već više razmišljanja ili logička izvođenja predstavljena u obliku „iskaza posledice" (*Sequenzen*).

Posredstvom metode „semantičkih tablica" Beta (E. W. Beth), Gencenova prirodna logika doprinela je 1955. stvaranju brižljive i efikasne metode, danas poznate i umnogom korišćene pod nazivom metode analitičkih tablica ili metode stabala (R. M. Smullyan, *First-Order Logic*, 1968).

Gedel

Američki logičar austrijskog porekla, Gedel (Kurt Gödel, rođen 1906) došao je u SAD 1938, gde je postao profesor matematike. Autor je dela *O formalno nerešivim stavovima „Matematičkih principa" i srodnih sistema* (1931), kao i dveju teorema prema kojima se ne bi mogla obrazovati nekontradiktorna aritmetika kao potpun sistem, jer se ona neophodno ponaša kao nerešljiva formula (ona ne može da sadrži formalni dokaz vlastite neprotivrečnosti).

Gedel je 1930. dokazao potpunost računa predikata prvog reda i izazvao 1931. pravu revoluciju u svetu logike tvrdeći da postoji neophodna nepotpunost svakog formalnog, dovoljno jakog sistema da se izrazi elementarna aritmetika i nemogućnost da se izloži neprotivrečnost jednog takvog sistema a da se ne pribegne moćnijim sredstvima od onih kojim raspolaže sam sistem. Ovo značajno otkriće izazvalo je ozbiljan zastoj poduhvata formalističkog tipa i srušilo sve nade u ostvarenje Hilbertovog programa u njegovom prvobitnom obliku. Gedel je 1940. dokazao da, ako je izvesna aksiomatizacija teorije skupova bez aksioma izbora konzistentna, ona to ostaje kad se aksiomama dodaju aksioma izbora ili generalisana hipoteza kontunuuma ili obe.

Ovaj rezultat u izvesnom smislu dopunjen je dokazom nezavisnosti hipoteze kontinuuma koji je 1963. dao Koen (Paul J. Cohen).

Porecki

Platon Sergejevič Porecki (1846–1907) uopštio je i razvio Bulova, Dževonsova i Šrederova dostignuća u oblasti algebre logike. Zaslužan je u razradi teorije logičkih jednakosti. Jedan od centralnih problema njegove teorije u logici jeste rešenje pitanja o izvođenju posledica iz datog sistema pretpostavki i problema nalaženja tih pretpostavki, iz kojih data logička jednakost može biti dobijena kao posledica. U logičkim računima Poreckog uzimaju se dva stalna termina 1 (univerzalna klasa) i 0 (prazna klasa).

Značajna dela: *O postupcima rešenja logičkih jednakosti i o obratnom postupku matematičke logike* (*O sposobah rešenija logičeskih ravenstv i ob obratnom sposobe matematičeskoi logiki*, 1884); *Rešenje opštih zadataka teorije verovatnoće pomoću matematičke logike* (*Rešenie obščei zadači teorii verojatnostei pri pošči matematičeskoi logiki*, 1887); *Objedinjena teorija logičkih jednakosti i nejednakosti* (*Objedinenaja teorija logičeskih ravenstv i neravenstv*, 1908) i drugi.

Novikov

Petar Sergejevič Novikov (rođen 1901) ispitivao je probleme matematičke logike i osnova matematike. Poznati su njegovi radovi u oblasti dokazivanja neprotivrečnosti nekih stavova deskriptivne teorije skupova: redukcija (svodljivosti) nekih klasičnih matematičkih teorija na intuicionističke: dokaz ω – neprotivrečnosti intuicionističke aritmetike dobijen sredstvima *minimalne logike* pomoću specijalnog oblika indukcije neformalizovanog u aritmetici. On je prvi autor na ruskom jeziku sistematskog kursa matematičke logike *Elementi matematičke logike* (*Elementi matematičeskoi logiki*, 1959).

Markov

Andrej Andrejevič Markov (rođen 1903) veoma je poznat po svojoj teoriji algoritama. Njegov pojam normalnog algoritma predstavlja veliki rezultat u matematičkoj logici. Njemu dugujemo za jasno definisanje pojma *apstrakcija identifikacije* i *apstrakcija potencijalne ostvarljivosti*. Jedan je od osnivača konstruktivnog pravca u matematici i matematičkoj logici.

Značajna dela: *Teorija algoritama* (*Teoria algorifmov*, 1951); *O jednom principu konstruktivne matematičke logike* (*Ob odnom principe konstruktivnoi matematičeskoi logiki*, 1956); *Matematička logika i računska matematika* (*Matematičeskaja logika i vičislitelnaja matematika*, 1957); *O konstruktivnoj matematici* (*Ob konstruktivnoi matematike*, 1962).

Nekoliko primedbi o novijim razvicima

Prvi dokaz nerešljivosti za račun predikata prvog reda dao je 1936. Čerč (Alonzo Church, rođen 1903). Međutim, problem rešljivosti bio je rešen za čitav niz specijalnih slučajeva od kojih su neki od značaja. U ovoj oblasti doprineli su i Beman (H. Behmann 1922), Bernajs i Šenfinkel (Bernays i Schönfinkel 1928), Akerman (Ackermann 1928, 1933), Erbran (1931), Gedel (1932, 1933), L. Kalmar (1933), K. Šite (K. Schütte 1934), Kvin (1944, 1945). Za ukupni izveštaj treba videti: Akerman, *Rešljivi slučajevi problema rešljivosti* (*Solvable Cases of the Decision Problem*, 1954). Značajni rezultati dobijeni su poslednjih decenija o problemima rešljivosti i redukcije u najrazličitijim domenima: Tarski, A. Mostovski i R. M. Robinson, *Nerešljive teorije* (*Undecidable Theories*, 1953);L. Kalmar, J. Suranyi, L. McKinsey, Post, Markov, M. Hall, Novikov, M. O. Rabin itd.

Jednostavnu zamisao definicije takve rekurzivne funkcije koja se izvorno nalazi kod Dedekinda, Peana i Skolema, progresivno su generalisali i precizirali tako da bi mogao da se obrazuje pravi ekvivalent za pojam relativno sumnjive „efektivnosti" ili „konstruktivnosti" u matematici. Odlučujući bitni radovi po ovom pitanju dati su u periodu 1930–1940. i dugujemo ih Gedelu, Klinu, Čerču, Tjuringu (A. M. Turing, 1912–1954) i Postu. Markov je 1951. dao s teorijom algoritama novo rešenje ekvivalentno problemu. Čerč je 1936. predložio da identifikuje intuitivan pojam „funkcije efektivno izračunljive" sa onom „opštom rekurzivnom funkcijom" u smislu koji je definisao Klin u delu *Opšta rekurzivna funkcija prirodnih brojeva* (*General Recursive Functions of Natural Numbers*, 1936). Moglo bi se dokazati da je izvestan broj drugih predloženih formalnih supstitucija za pojam kalkulabilnosti (kao npr. λ-definisabilnost Čerča) bio ekvivalentan pojmu opšte rekurzivnosti. Čerčova sugestija (poznata pod imenom *Čerčova teza*) u izvesnoj meri se dokazala da bi je kasnije, 1957, napao Kalmar te su je neki posmatrali kao malo verovatnu.

Stav matematičara i logičara u pogledu problema neprotivrečnosti prirodno se znatno izmenio posle Gedela. Danas je mnogo manje zanimanje za pitanje apsolutne konzistencije nego za pitanje relativne konzistencije: umesto da se utvrdi da jedan formalni dati sistem S nije kontradiktoran, apsolutno govoreći, nastoji se radije da se pokaže da *ako* jedan sistem S nije kontradiktoran, tada je to i jedno proširenje S′ od S. Dokaz relativne konzistencije za određenu aksiomu od ZF je dokaz činjenice da, ako je sistem aksioma od ZF bez aksioma u pitanju konzistentan, tada je ZF sam konzistentan. Nojman (J. von Neumann) je npr. pokazao da je aksioma regularnosti relativno konzistentna u odnosu na druge aksiome od ZF. Ali najkarakterističniji rezultat i najodlučniji koji je dobijen u ovom domenu jeste sigurno Gedelov (1940). Izvestan broj značajnih teorema o relativnoj konzistentnosti mogao je biti dokazan povodom različitih formulacija teorije skupova. Utvrđeno je npr. da su aksiomatizacije tipa Nojman – Bernajs, koje obezbeđuju isto tako postojanje klasa, kao skupova u striktnom smislu, bile relativno konzistentne u odnosu na teoriju skupova Cermelo – Frenkel (Ilse Novak, 1950; Rosser i Wang, 1950; J. R. Shoenfield, 1954).

Metoda modela odigrala je odlučujuću ulogu u dobijanju dokaza relativne konzistentnosti za teoriju skupova. Teorija modela, pogotovo „nestandardnih" modela mora bez diskusije biti posmatrana kao jedna od najznačajnijih i najplodnijih grana savremene logike. Videti, npr., Addison, Henkin, Tarski, *Teorija modela* (*The Theory of Models*, 1965). Ovde je nemoguće citirati sva značajna imena (Henkin, Tarski, Mostovski, Kemeny, Rosser, Hao Vang, Shepherdson, Specker, A. Robinson i dr.).

Druga, posebno značajna grana, predstavljena je teorijom rekurzivnih funkcija i rekurzivnom aritmetikom i rekurzivnom analizom (Kleeny, Rosza Peter, Skolem, Julia Robinson, R. L. Goodstein, Hermes, P. Axt, D. Lacombe itd.).

Osvetljavanje pojmova konstruktivnosti i konstruktivizma zauzima centralno mesto u savremenim istraživanjima osnova matematike. Konstruktivističko ponašanje izražava se naročito jasno u logici „operativnog" Lorencena (P. Lorenzen), koji predlaže slobodnu verziju intuicionizma, saglasnu sa zahtevima klasične analize. Krajsel (G. Kreisel) se pobliže zanimao i za intuicionizam i za pojam konstruktivnosti uopšte (1951/52, 1958).

Kombinatorna logika koju je stvorio Šenfinkel (M. Schönfinkel, 1924) a razvio Kari (H. B. Curry; uporedi Curry i R. Feys, *Combinatory Logic*, 1958), doživela je poslednjih godina nov procvat u razvoju novih lingvističkih teorija. S teorijskog gledišta kombinatorna logika je naročito zanimljiva zbog nove svetlosti koju baca na ulogu promenljivih i pojam supstitucije u simbolizmu matematičke logike.

Sa istorijskog gledišta, ovde se pobliže mogao posmatrati razvitak modalne logike (uporedi npr. G. E.

Hughes, M. J. Cresswell, *Uvod u modalnu logiku – An Introduction to Modal Logic*, 1968), viševalentne logike (posebno uporedi J. B. Rosser, A. R. Turquette, *Viševalentna logika – Many-Valued Logics*, 1952), induktivne logike (uporedi P. J. Cohen, *Implikacija indukcije – The Implications of Induction*, 1970), deontološke logike (G. H. Wright), teorije automata i formalnih jezika, mehanizacije logičko-matematičkih postupaka (uporedi npr. Hao Wang) i u opštim crtama razvitak onih grana u kojima se prepliću matematička logika i teorija informacija.

Videti Algebra; Matematika; Kuda ide savremena matematika?, str. 148.

Matematika

Matematika je nauka koja proučava odnose između izvesnih apstraktnih predmeta definisanih samo pod uslovima da njihove definicije ne povlače kontradikciju i da se mogu koristiti i u drugim naukama.

Dugo se matematika definisala kao nauka o kvantitetima, deleći se na više grana, prema prirodi veličina koje su bile potčinjene računu. Razlikovale su se aritmetika, geometrija, mehanika, matematička fizika, račun verovatnoće. Ove različite grane imale su zajedničku vezu, algebru koja bi se mogla definisati kao *račun sa operatorima*. Dovoljno je reći koliko su stručni nazivi neprecizni i naročito podložni promenama tokom vremena. Tradicionalna definicija koju je 1691. dao Ozanam (Jacques Ozanam, 1640 – 1718) o matematici („nauka koja uči o svemu onom što se može meriti ili brojati") posmatra središnje jezgro matematičkih nauka sa stanovišta aritmetike i geometrije. Njegova definicija nastoji da ove nauke imaju svoje korene u Euklidovim *Elementima* (III v. pre n. e.) u kojima se raspravlja o ovim dvema osnovnim disciplinama.

Do XVIII v. matematika se deli na *čistu matematiku*, koja poziva samo na razmišljanja, i na mešovitu matematiku koja, prema Ozanamu, „ispituje osobine kvantiteta povezanog za senzibilne predmete" i koja više poziva na vršenje ogleda. Prema većini mišljenja, ova mešovita matematika povezivala bi fizičko-matematičke nauke. Prisutna je i podela na teorijsku i *praktičnu matematiku* kao veštinu računanja ili merenja.

Pojava novih ideja

Oko 1800. više se upotrebljavao izraz mešovita matematika nego primenjena matematika, razlikujući tako u izvesnim naukama eksperimentalni deo od čisto apstraktnog, koji sam proizlazi iz matematičkih pravila.

Razlika između čiste i primenjene matematike je inače dosta neprecizna. Tako se geometrija, kao nauka o fizičkom prostoru, koja je prvobitno bila bit čiste matematike, sada radije posmatra kao primena. Obrnuto, račun verovatnoće bio je dugo svrstan u primenjenu matematiku. Danas, naročito od aksiomatizacije Kolmogorova* iz 1933, račun verovatnoće pripada čistoj matematici a statistika ostaje u domenu primenjene.

U XIX v. tradicionalna definicija matematike je oborena mnogo pre no što je iščezla. Bul* je 1854. pisao da njena suština nije u bavljenju idejama broja i kvantiteta i možda doprineo da logika uđe u domen matematike, nauka koja je danas opšte prihvaćena.

Jedan od imperativa matematičke metode jasno je precizirao 1874. Darbu*: „Potrebno je podvrći se dvostrukom zakonu: podrobno definisati hipoteze na koje se oslanjamo, dati samo one koje su nužne za tačnost teoreme koja se ustanovljuje." Njegov kolega Uel (Jules Hoüel, 1823 – 1886) piše 1878. na početku svog tečaja infinitezimalnog računa: „Apstraktna nauka mora najpre da utvrdi da li su hipoteze uzajamno snošljive i da li su svodljive na manji broj. Nauka zasnovana na hipotezama koje zadovoljavaju ove uslove je apsolutno istinita sa stanovišta racionalnog i apstraktnog, pa i onda kad ne bi bila suglasna s realnim činjenicama za koje je bila opredeljena da ih predstavi (...). Ovaj logički deo egzaktnih nauka čini *matematiku u pravom smislu reči* (...). Matematika se ne ograničava na kombinaciju zakona koji sadrže opservacije stvarnog sveta; ona često prethodi opservaciji, i povučena analogijom i potrebom uopštavanja, uzima za predmet proučavanja hipoteze kojima stvarnost još nije ponudila primenu."

Velike matematičke strukture

U ovoj eposi neeuklidska geometrija je bila stara oko četrdeset godina, kad su je dopunili francuski naučnici, zahvaljujući naporima Uela; teorija grupa, koju je pre četrdesetak godina ustanovio Galoa* za proučavanje algebarskih jednačina počinje da se koristi u geometriji, a aritmetizacija celokupne matematike ostaje delo ljudi kao što su Mere (Charles Méray, 1835 – 1911) ili Vajerštras*.

Teorija skupova

S Kantorom* koji uspostavlja osnove teorije skupova, matematika ulazi u novu fazu koju odlikuju aksiomatska metoda i uvođenje vrednosti pojma strukture. Ideje o skupovima imale su mnoge teškoće dok nisu bile prihvaćene, ali njihovo plodno tlo biće primena u proučavanju funkcija realne promenljive. Tako Francuz Ber (René Baire, 1874 – 1932), piše 1909: „Reč *skup*, zbog svoje jednostavnosti i opštosti, ne čini se prihvatljivom za opštu definiciju. Možda bi se mogla zameniti sinonimima, kao što su zbirka, spoj konačnog i beskonačnog broja objekata, ukoliko su ovi objekti uopšte matematički predmeti iste prirode, kao brojevi, tačke u prostoru, funkcije (...).

Iz istih razloga čini se da nema mesta tražiti da se unapred razgraniči domen koji se mora shvatiti pod opštim nazivom *teorije skupova*. To bi bilo utoliko teže ukoliko se naziv sve više širi u primeni na veoma različita pitanja; i, možda je manje reč o telu usamljene doktrine nego o opštoj metodi čiji uticaj prodire u različite delove matematike."

Teorija skupova zatim doživljava značajan razvitak; da bi se pristupilo njenim suštinskim pitanjima, bila je potrebna ozbiljna priprema. Njena aksiomatizacija je veoma delikatna i vezuje se sa najapstraktnijim delovima logike i matematike.

Rečnik skupova postao je zajednički svim matematičarima i njegovo uvođenje čak i u najelementarniju nastavu pokazalo se korisnim.

Dva skupa imaju istu moć ako se mogu povezati jednom bijektivnom relacijom. Za konačne skupove ili konačne zbirke pojam moći je isti kao i pojam broja elemenata. Za beskonačne skupove ideja broja iščezava, a pojam moći ostaje. Veoma ozbiljan, on predstavlja najveće teškoće za ustanovljenje aksiomatike.

Uopšte uzev, skup je a priori nesavršen predmet koji postaje stabilan kad je jednom struktuiran. Dva skupa iste moći, kao skup celih pozitivnih brojeva i skup racionalnih pozitivnih brojeva, razlikuju se svojim karakterističnim osobinama ili svojim *strukturama*.

Strukture se dele na tri kategorije: *algebarske strukture*, *strukture poretka* i *topološke strukture*.

Algebarska struktura i struktura poretka

Algebarske strukture su komutativne ili nekomutativne strukture grupe, prstena, ideala prstena, tela, vektorskog prostora itd. Relacije poretka izlaze, s jedne strane, iz opšteg pojma *veći* ili *manji* koji se upotrebljavao u antici za pojam veličine, s druge strane iz pojma *prethodni* i *pozniji*, vezanog za osećanje vremena. One se dele na relacije potpunog poretka i na relacije delimičnog poretka koje su dale *strukturu mreže*. *Mreža* je takav skup da svakom paru elemenata odgovaraju dva nova elementa, najveći od njihovih minoranata i najmanji od njihovih mažoranata. Skup celih prirodnih brojeva je mreža u odnosu na teoriju deljivosti: svakom paru celih brojeva odgovara njihov najveći zajednički delilac i njihov najmanji zajednički množilac. Teorija mreža bila je očigledno ustanovljena za proučavanje ozbiljnijih pitanja.

Među različitim relacijama potpunog poretka, Kantor razlikuje dobro uređene skupove. Jedan skup je dobro uređen ako svaki od njegovih podskupova poseduje prvi element u odnosu na posmatrani poredak. Skup celih prirodnih brojeva dobro je uređen u odnosu na prirodni poredak. Skup relativnih celih brojeva i skup racionalnih pozitivnih nisu dobro uređeni skupovi, ako se posmatra ovaj isti prirodni ili običan poredak. Aksiomu teorije skupova, koja je bila povod mnogim raspravama među matematičarima početkom stoleća, dao je Cermelo* 1904, da bi opravdao Kantorovu tvrdnju: *svaki skup može biti dobro uređen*.

Topološke strukture

Topologija koristi pojmove bliske relaciji poretka i obuhvata ideje otvorenog i zatvorenog podskupa, blizine, svezanog podskupa, tačke nagomilavanja, granice itd. Ona je proizašla naročito iz matematičke analize, a posebno iz proučavanja funkcija realne i kompleksne promenljive, razvijene tokom XIX v. *Opšta topologija* se razvila između 1920. i 1940. radovima Frešea (Maurice Fréchet, 1878–1973) i Hausdorfa (Félix Hausdorff, 1868–1942); njena je uloga da skuje „geometrijski" jezik, što praktičniji i gipkiji za izražavanje rezultata i problema funkcionalne analize i diferencijalne geometrije.

Poseban slučaj topoloških prostora je metrički prostor koji se istorijski prvi pojavio. Predstavljajući neke analogije sa euklidskim prostorom koji je njihov prototip, metrički prostori su takvi da je svakom paru elemenata asocirana jedna „distanca", tj. realan pozitivan broj koji zadovoljava *trouglastu nejednakost*: neka se posmatraju tri elementa, distanca dva od tih elemenata je najviše jednaka zbiru distanci trećeg svakog od njih. Funkcionalna analiza početkom stoleća uvela je metričke prostore: Banahovi prostori, Hilbertovi prostori itd.

Matematičko istraživanje

Permanentna evolucija matematike proizlazi iz napretka istraživanja. Neprestano produbljivana i proučavana, kako različitih klasičnih grana tako i novih domena, postavljaju se uvek neočekivani problemi čije se rešenje ponekad dobija korišćenjem raspoloživog, već popisanog oruđa. Ma koliko zanimljivi, ovi problemi nisu bili bitni za progres nauke, pošto su već praktično bili rešeni.

Međutim, neki problemi koje postavljaju, bilo sama matematika, bilo druge nauke, zahtevaju nove metode i sredstva. Pokušaji rešenja su dosta neizvesni; ako padnu, problem ostaje otvoren, što je čest slučaj. Faktor matematičke intuicije ponekad doprinosi stvaranju „nove strukture" sa čvrstom logičkom konzistencijom. Nov matematički predmet može postati koristan za rešenje postavljenog problema (optimalna situacija) ili pak za one nepredviđene koji će se pokazati značajni, kao idealni brojevi (oko 1840) Kumera* koje je usavršio Dedekind* u obliku ideala prstena. Kumer je stvorio te brojeve da bi rešio veliku Fermaovu* teoremu, koja još i danas ostaje problem. Ideali su doneli parcijalno rešenje ove teoreme, ali se naročito nova struktura pokazala plodna u različitim granama matematike.

U najnepovoljnijem slučaju, nova struktura, mada logički sposobna za opstanak, ponekad se ne može primeniti ni u jednom domenu nauke. Ona se tada jednostavno napušta, ostaje da kasnije bude ponovo otkrivena i bolje iskorišćena i da pokaže plodove.

Sadašnja matematika je podeljena na različite domene istraživanja, više ili manje aktivne, kojima se može naći istorijsko poreklo: tako je iz grčke geometrije krivih, zahvaljujući Dekartu* (XVII v.) i njegovom vezivanju za algebru jednačina, izrasla *analitička geometrija*, metod istraživanja koji je imao svoje uspone ali se danas koristi samo u nastavi. Ipak, savremena *algebarska geometrija*, čiji su koreni u analitičkoj geometriji, predstavlja domen visoke matematike, danas u punom zamahu.

Pored ovih tradicionalnih podela, u matematici se koriste različite strukture, prisutne i u veoma različitim istraživanjima, doprinoseći tako njenom čvrstom jedinstvu i bogatstvu.

Videti: Algebra, Analiza; Aritmetika; Geometrija; Matematička logika; Računska matematika i računske mašine; Teorija skupova; Verovatnoća i statistika.

Računska matematika i računske mašine

Osvrnućemo se sasvim fragmentarno na neke momente u razvitku računske matematike i računskih mašina.

Računska matematika

Računska matematika je razdeo matematike koji u sebi uključuje pitanja povezana korišćenjem elektronskih računara. Sadržaj njen nije stalan. On se stalno menja u vezi s brzo rastućim primenama elektronskih računara. Često se termin računska matematika pominje kao teorija računskih metoda i algoritama u rešavanju tipičnih matematičkih zadataka, gde vidnog izraza imaju metode približnog računanja.

Razvitak računske matematike, kao oblasti matematike koja se bavi, uprošćeno rečeno, raznim metodama približnog računanja, može se pratiti od nastanka računskih operacija s brojevima, u veoma dalekoj čovekovoj prošlosti, pa do savremenih, vrlo opštih metoda približnog računanja s vrednostima različitih funkcija. Razne numeričke tablice i postupci računanja s brojevima koje nam otkriva matematika starih Egipćana, Vavilonaca, Kineza, Indusa, Arapa i ostalih starih kulturnih naroda, govore o ranoj pojavi računske matematike, koja se postepeno rađala i razvijala pod uticajem praktičnih primena matematike (premeravanje zemljišta, problemi građevinarstva, merenje duži, površi, tela, vremena, težina, posmatranje nebeskih tela u vezi sa astronomijom i astrologijom, itd.). U tom pogledu vrlo su instruktivni primeri raznih numeričkih tablica i računskih postupaka, zasnovanih na šezdesetičnom sistemu numeracije u vavilonskoj matematici, kao i astronomsko-trigonometrijske tablice u matematici starih Indusa i Arapa, sa raznim približnim formulama i postupcima računanja. U starogrčkoj matematici, u vezi s potrebama astronomije, bio je razvijen čitav sistem približnog računa s tetivama kružnice, kao neka vrsta približnog računa s trigonometrijskim funkcijama sinusom i kosinusom. Za matematiku navedenih kulturnih naroda Starog istoka može se reći da su karakteristične računske operacije s racionalnim brojevima, kao s približnim vrednostima iracionalnih brojeva, gde su greške aproksimacija bile često zadovoljavajuće u pogledu tačnosti rezultata. Računanje s približnim vrednostima razvilo se naročito tamo gde se pojavio i afirmisao pozicioni sistem numeracije (vavikinska, indijska i arapska matematika).

U evropskoj matematici srednjeg veka nastale su i razvile se, počev od XII v. određene metode računanja s približnim brojevima, pošto je bio usvojen, preko arapskih matematičara, desetni sistem numeracije, odnosno pošto su usvojene indijsko-arapske cifre kao oznake brojeva. Te metode su se razvijale uporedo s razvitkom simboličnih oznaka u aritmetici i algebri, kao i iz sve veće potrebe za praktične primene matematike, koje su nastajale i rasle s razvitkom proizvodnje, trgovine, moreplovstva i u vezi sa ovim astronomije. Epoha renesanse, ukupnim razvitkom društva, otvorila je nove puteve usponu evropske matematike, koja se tada napajala na izvorima matematike antičkih naroda, posebno na izvorima starogrčke matematike (u pogledu približnih metoda računanja korišćene su infinitezimalne metode Arhimeda i drugih antičkih matematičara, za koje se dobrim delom može reći da su bile aproksimativne metode računanja u današnjem smislu tih reči).

Pošto je konstituisan diferencijalni i integralni račun, nastaje sistematski razvitak metoda približnog računanja s raznim funkcijama. Pojava tablica prirodnih logaritama (1614) Nepera* i dekadnih logaritama (1617) Brigsa (H. Briggs, 1561 – 1630) predstavlja veoma značajan momenat u razvitku tih metoda. Njutn i drugi istaknuti matematičari XVII, a zatim XVIII v. stvaraju teorijske osnove za metode aproksimativnog računa s funkcijama, za kojima se sve više oseća potreba usled sve većih primena matematike u prirodnim naukama, prvenstveno u mehanici, astronomiji i fizici. Rađaju se i razvijaju približne metode izračunavanja određenih integrala, npr. Simpsonovo pravilo (T. Simpson, 1710 – 1761), kao i približne metode rešavanja algebarskih i transcendentnih jednačina, a isto tako i diferencijalnih jednačina. Razvija se teorija interpolacije, npr. Njutnova i Lagranžova interpolacija, a zatim teorija računa sa konačnim razlikama, odn. diferencni račun.

U XIX uporedo s razvitkom „teorijske" matematike razvijaju se razne metode „primenjene" matematike za potrebe fizike, tehnike i drugih nauka. Nastaju mnogobrojne metode približnog rešavanja diferencijalnih i drugih jednačina. Sistematski se razvija teorija grešaka u vezi sa obradom eksperimentalnih podataka s kojima se operiše u prirodnim naukama. U tom pogledu veoma je značajna teorija slučajnih grešaka, koju je na osnovu pojma verovatnoće razvio Gaus.

Svaki novi progres u razvitku „teorijske" matematike imao je odgovarajući uticaj na razvitak „primenjene" matematike, i obratno, odn. na razvitak različitih metoda aproksimativnog računa ili raznih teorija aproksimacije u raznim oblastima matematike i njenih primena. Naročito kvalitativni skok doživljavaju aproksimativne metode računanja

nastankom i razvitkom nekih novih oblasti matematike, npr. nastankom linearne algebre, funkcionalne analize, matematičke statistike, teorije optimizacije, teorije upravljanja sistemima i drugim teorijama, kao i pojavom moćnih tehničkih sredstava (kao što su elektronski računari) da se takve metode konkretno realizuju. Sve to karakteriše razvitak matematike i njenih primena tokom XX v. Povezanost „teorijske" i „primenjene" matematike, proizašla iz razvitka matematike u celini, tolika je da je danas iluzorno razdvajati „teorijsku" od „primenjene" matematike a takvo razdvajanje je prevaziđeno i samo tradicijom zadržano; uslovno se mogu upotrebljavati termini „teorijska matematika" i „primenjena matematika" kao neka vrsta „tehničkih" termina, za bližu odredbu matematičke sadržine na koju se u odgovajućem trenutku misli.

Uopšte uzev, u računskoj matematici važno mesto zauzimaju brojevne metode rešenja postavljenih matematičkih zadataka, u prvom redu *tipičnih* matematičkih zadataka.

Tipični matematički zadaci koji se često javljaju u primenama, jesu npr. zadaci iz algebre: numeričke metode rešenja sistema linearnih algebarskih jednačina, specijalno većeg sistema; inverzija matrice i nalaženje sopstvenih vrednosti matrice. Zatim zadaci iz diferencijalnog i integralnog računa, posebno brojevne metode rešenja diferencijalnih i integralnih jednačina, a tako isto proučavanje i uporedna analiza različitih metoda. Veoma značajno mesto zauzimaju brojevne metode rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina (hiperboličkog, paraboličkog i eliptičkog tipa). Ovde je značajan pravac „ekonomske metode", tj. metode koja dovodi do rezultata pri relativno malom broju operacija.

U računskoj matematici se vrlo brzo razvijaju brojevne metode optimizacije, čiji se zadaci sastoje u proučavanju ekstremnih vrednosti, najvećih i najmanjih, funkcionala na skupovima veoma složene strukture. Posebno treba spomenuti zadatke matematičkog programiranja na koje se svode mnogi zadaci ekonomije. U zadatke optimizacije spadaju i zadaci kao i odgovarajuće metode koji se javljaju pri rešenju zadataka u istraživanjima operacija. Stabilnost računskog algoritma i računskog procesa obuhvata jedan od glavnih pravaca u teoriji brojevnih metoda, naime, istraživanje stabilnosti metoda i algoritama pri greškama različite vrste.

Inverzni zadaci, npr., zadatak određivanja elementa x iz jednačine $Ax=b$ pri izvesnoj informaciji o operatoru A i elementu b često se javlja nestabilnim (nekorektno postavljenim) zadatkom (mala greška u polaznim podacima može izazvati veliku grešku u x). Još više, obratni zadaci često imaju rešenje ne za sve b, pa, dajući približnu vrednost za b, sledi da treba uzeti u obzir da formalno rešenje tog zadatka može da ne postoji. Za nestabilne zadatke potrebna je specijalna definicija pojma približnog rešenja kao i razvitka odgovarajućih metoda za njihovo rešenje. U nestabilne zadatke spada široka klasa zadataka koji su povezani s problemima automatizacije obrade rezultata eksperimenata.

U velikom delu računske matematike važno mesto zauzimaju pitanja koja se odnose na *optimizaciju metoda* rešavanja zadataka. To je naročito bitno za zadatke većeg obima, npr. za zadatke u kojima figuriše veći broj promenljivih.

Primena elektronskih računara neprekidno proširuje krug korisnika. Zato nastaje težnja takvog stepena automatizacije gde se ustanovljuje manje bitnim poznavanje brojevnih metoda, što zahteva potrebu za algoritmima i njihove primene na standardne programe tipičnih zadataka.

Osnovni problem programiranja proizlazi iz odnosa čoveka prema mašini, naročito kad je reč o brzini između ishodne informacije i dobijene završne informacije, odnosno rezultata do kojeg treba doći (standardni programi rešenja tipičnih zadataka, algoritmički jezici radi prevoda sa algoritmičkog jezika na unutrašnji jezik mašine, problemski orijentisani jezici, sistemsko programiranje). Uopšte uzev, zadatak razvitka računskih sistema, posebno informacionih sistema i automatizovanih sistema upravljanja, jeste jedan od najaktuelnijih naučnih problema u savremenoj računskoj matematici.

Računske mašine

Čovek je pronalazio, od kada je počeo da računa, razna sredstva da bi lakše i brže izvodio računske operacije. U tome je postizao sve veći i veći uspeh, što najbolje svedoče savremena računska tehnička sredstva. Može se kazati da ruka s prstima predstavlja prvu i najprostiju „mašinu" za brojanje i računanje. Pokretljivost i uočljivost prstiju na ruci umnogom su doprineli da ruka kod svih naroda postane osnovni instrument za brojanje i računanje. U predstavljanju brojeva pomoću prstiju na ruci stari narodi su pokazali naročitu veštinu, koju su Rimljani nazvali „indigitatio" (latinski: *digitus* = prst na ruci, odn. nozi). U XV i XVI v. bili su čuveni trgovci iz Firence po veštini računanja pomoću prstiju na rukama. Nazivi „digiti" i „articuli" (prsti i udovi) upotrebljavali su se u Italiji kao oznake za jedinice i desetice sve do XVII v., dok su, npr., reči „in digitos mitere" (na prste svesti) značile isto što i reč izračunati (od *digitus* potiče termin digitalne ili cifarske mašine; *digit* na engleskom znači cifra ili brojevna oznaka). Može se kazati, bar metaforično, da ručno računanje predstavlja prvi korak u modeliranju misaonog procesa i matematičko-logičkih operacija (koje u savremenoj matematici trijumfuju posredstvom matematičke logike i apstraktne algebre u raznim automatima). Veoma davno čovek se poslužio raznim numeričkim tablicama da bi olakšao i ubrzao

izvođenje računskih operacija. Motivisani time, matematičari su sastavili tablice numeričkih vrednosti raznih funkcija (stepena, logaritamske, trigonometrijske i mnogih drugih). One umnogom olakšavaju i ubrzavaju izvođenje složenih računskih operacija.

Čovek je stalno, uporedo s razvitkom društva, nauke i tehnike, stvarao i usavršavao razna tehnička sredstva, da bi što lakše i brže izvodio računske operacije. Taj se proces može pratiti, takoreći, počev od pojave običnih računaljki, kakav je bio abakus u Kini, Indiji i Japanu, a i danas se koriste slične računaljke u Sovjetskom Savezu. Karakteristično je kod abakusa da se prenošenje jedinica višeg reda vrši direktno, odn. ručno.

Mehaničke ručne računske mašine stvorene su tokom XVII v., a konstruktori ovih mašina bili su poznati matematičari toga vremena. Tako je npr. francuski filozof i matematičar Paskal, 1641. konstruisao mehaničku mašinu za sabiranje, dok je nemački filozof i matematičar Lajbnic* konstruisao 1673/74. računsku mašinu koja je izvodila četiri aritmetičke operacije. Istaknuti ruski matematičar Pafnutij Ljvovič Čebišev (1821 – 1894) bavio se, takođe, konstrukcijom računske mašine. Njegova mašina je sabirala, množila i delila.

U razvitku konstruisanja računskih mašina mogu se uočiti dva osnovna činioca, a naime: automatizacija računskih postupaka i usavršavanje tehnologije računskih mašina. To je omogućilo nastanak savremenih elektronskih računara koji imaju neslućenu brzinu rada.

Glavne osobine elektronskih računara sastoje se u automatskom upravljanju rešavanja zadataka i u brzini tog rešavanja.

Profesor matematike na univerzitetu u Kembridžu, Bebidž (Charles Babbage, 1791 – 1871), pre više od sto pedeset godina, dao je 1833. nacrt za „analitičku mašinu" koja će *automatski* izračunavati vrednosti funkcija aproksimiranih polinomima. Zanimljivo je pomenuti da je on tu ideju o automatizaciji pojedinih računskih ciklusa dobio od Žakara (J. M. Jacquard, 1785 – 1834) koji je oko 1804. konstruisao prve automatske razboje. Bebidž nije uspeo da ostvari svoj projekat jer nije imao materijalnih sredstava. S obzirom na razvitak tehnike toga vremena i njegova mašina je zamišljena s mehaničkim elementima.

Krajem XIX v. još na jednom području dolazi do stvarnog automatizovanja izvesnog broja operacija. Reč je o statističkoj obradi podataka. U SAD je obavljen popis stanovnika 1880. i materijal nije bio odmah obrađen, pa je nešto docnije rukovodilac Nacionalnog biroa za popise uveo bušene kartice za prenos podataka koristeći električne impulse.

Revolucionaran korak u razvitku automatskih računskih mašina učinio je 1937. engleski matematičar Tjuring (A. M. Turing, 1912 –

–1954), prišavši s matematičko-logičkog stanovišta problemu stvaranja „misleće mašine". Pokazao je da se može konstruisati „univerzalna mašina" koja će izvoditi ma koje zamišljene računske operacije samo ako je snabdevena određenim programom u vezi s tim operacijama, a taj program mora da stvara još uvek čovek-matematičar svojim mozgom kao „mislećom mašinom", pa otuda je teorija algoritama, kao ljudska intelektualna tvorevina, bitan i neophodan uslov za „stvaralaštvo" elektronskog računara kao „misleće mašine". Na taj način osiguran je ovaj kvalitativni skok u konstrukciji računskih mašina, tj. automatizacija rešavanja zadataka ili programsko upravljanje rešavanjem zadataka. Američki matematičar Nojman (J. Von Neumann, 1903 – 1957) pokazao je da se može konstruisati mašina iz pojedinih prostijih elemenata (samoostvarajuća mašina), koja će, ako se smesti u sredinu snabdevenu dovoljnim brojem spomenutih elemenata, proizvesti mašinu (automat) sličnu prvobitnoj, prema procesu koji je dosta sličan biološkom procesu samoobnavljanja.

Pomenuli smo da su prve računske mašine dejstvovale na mehaničkim principima. Sledeći korak u njihovom razvitku bio je korišćenje elektromotora. Tek korišćenje elektronske tehnologije u konstrukciji računskih mašina dovodi do naglog povećanja brzine dolaženja do rezultata na osnovu ishodnih informacija. Upotreba elektronskih elemenata, koje zbog male inercije zovu „bezinercioni", u tehnici računskih mašina nastupa nova era savremenih moćnih računara. Elektronska tehnologija u konstrukciji računara ima sledeće stepene razvitka: elektronske cevi, tranzistore, integrisana kola i integrisane funkcionalne blokove.

Prvi elektronski računar konstruisan je u SAD 1946. Do serijske proizvodnje računara dolazi se oko 1958. Oni se danas proizvode u SAD, SSSR-u, Engleskoj i u drugim zemljama.

Danas su računari našli svoju primenu u: nauci, tehnici, proizvodnji, trgovini, bankama, bibliotekama i raznim drugim ustanovama. Činjenica je da se računari „osposobljavaju" za prevođenje stručnih tekstova s jednog jezika na drugi, da igraju šah s čovekom ili drugim računarom, da već postoji teorijska osnova za računar koji će rešavati zadatke iz elementarne geometrije. Matematički logičar Alfred Tarski* dao je teorijsku shemu za takav računar. U vezi s tim, može se postaviti pitanje koje oblike intelektualnog rada mogu vršiti računske mašine. Ove probleme strogo zasniva i rešava jedna grana matematike koja se zove *teorija algoritama*.

Mašina u matematici je apstraktni uređaj (aparat) koji ostvaruje preradu *informacija*. Upotrebljavaju se i termini *„apstraktna mašina"* ili *„automat"*. Apstraktna mašina jeste osobiti slučaj *upravljajućih sistema*, čiji je nastanak pove-

zan sa analizom pojma *algoritma*, koji se pojavio 30-ih godina XX v. s razvitkom elektronskih računara i s konstrukcijom matematičkih modela bioloških sistema. Najviše su rasprostranjene mašine koje prerađuju diskretnu informaciju, a tipični predstavnici ovih mašina su *konačni automat* i *Tjuringova mašina*. Proučavanje mašina izvodi se u okvirima *teorije algoritama* i *matematičke kibernetike*. Postoji plodotvorna veza između apstraktnih mašina i realno postojećih elektronskih računara. Ideja konstrukcije elektronskih računara i programiranja na njima u znatnoj meri se zasniva na odgovarajuće ideje u teoriji algoritama i matematičkoj kibernetici. Na svoj način radna praksa sa elektronskim računarima stavlja nove zadatke i navodi na modele mašina najpodobnijih za njihova rešenja.

S obzirom na način rada, računske mašine se dele u dve grupe: *analogne* računske mašine, ili mašine s *neprekidnim* dejstvom i *cifarske* računske mašine, ili mašine s *diskretnim* dejstvom. Takve se mašine u razvitku tehnike računanja uočavaju na svim stepenima tehnologije računskih mašina.

Analogne mašine ne izvode nikakve računske operacije, već samo „modeliraju" (proizvode) proces koji se opisuje matematičkom formulom, funkcijom, jednačinom, itd. Poznato je da u matematici jedna formula, jedna jednačina, sistem jednačina ili diferencijalna jednačina, ili neka druga jednačina, opisuje vrlo često više međusobno različitih fizičkih pojava. Na primer, prvi izvod funkcije f(x) može da označava „brzinu" kojom se menja put u toku vremena, ili „brzinu" hlađenja, ili „brzinu" radioaktivnog raspadanja, ili „brzinu" organskog rašćenja, itd. Uopšte uzev, takve matematičke formule su *matematički modeli* odgovarajućih fizičkih procesa.

Analogne mašine se zasnivaju na modeliranju procesa (pojava) koji se opisuje datom matematičkom formulom (npr., jednačinom ili sistemom jednačina).

Zadatak konstrukcije analognih mašina sastoji se u sledećem: izabrati jedan od fizičkih procesa čiji je matematički model dati matematički zadatak. Među mogućim fizičkim pojavama bira se ona koja se najlakše može ostvariti i kod koje se najlakše vrše potrebna merenja, a to su obično pojave u oblasti elektriciteta.

Analogne mašine poseduju ograničenu tačnost u računanju kao i ograničenost u rešavanju jednog tipa zadataka. Ograničena tačnost u radu ovih mašina sledi iz toga što fizički model može da bude manje ili više precizno urađen. Svako dalje povećanje tačnosti je tehnički problem odgovarajućih mehaničkih, elektromehaničkih ili elektronskih uređaja. Te mašine rešavaju onu vrstu matematičkog zadatka koji dati uređaj modelira. Svako dalje proširenje oblasti problema koje jedna mašina može da rešava znači dodavanje novih čvorova mašini uz obezbeđenje elastičnih uređaja koji će omogućiti brzi prelaz sa rešavanja jednog zadatka na drugi. Priprema zadatka za rešavanje na analognoj mašini je vrlo jednostavna, što znači da nije potrebno nikakvo posebno programiranje zadatka. To je veoma dobro svojstvo analogne mašine.

Među analognim mašinama veoma su poznati: logaritmar, integraf, elektrointegrator, hidrointegrator, itd. Tu uređaji mogu biti mehanički, elektromehanički, elektronski. Danas su već poznati i „hibridi“, odnosno spojevi analognih i cifarskih računskih mašina.

Cifarske mašine rade s brojevima i izvode računske operacije s njima. One imaju određene elemente za predstavljanje brojeva. Jedan element služi za predstavljanje jedne cifre. Za predstavljanje višecifrenog broja postoji u svakoj cifarskoj mašini određeni broj takvih elemenata. Svaki elemenat u pojedinom diskretnom vremenskom razmaku predstavlja jednu određenu cifru. Zbog toga on mora imati osobinu da se može nalaziti u više međusobno strogo različitih stabilnih stanja. Cifre koje označavaju brojeve od 0 do 9 zapisuju se svaka na određeni način, tj. međusobno su različite. Na primer, kod abakusa je taj zadatak rešen različitim mogućim položajima kuglica u vertikalnim i horizontalnim redovima. Kod običnih, ručnih, računskih mašina (aritmometri) cifre se postavljaju pomoću poluga na određena mesta.

Istaknimo neke osobine cifarskih mašina. One izvode računske operacije s brojevima, pa su zato *univerzalne*, jer nisu ograničene na rešavanje jednog tipa zadataka. Bez tehnoloških teškoća, broj cifara se može povećavati, povećavanjem broja elemenata koji služe za njihovo predstavljanje. Tačnost rezultata kod ovih mašina ne zavisi od konstrukcije mašine i njenih delova. Za rešavanje zadataka na cifarskim mašinama potrebna je, međutim, određena priprema zadatka. Na primer, ako se zadatak rešava na običnoj električnoj cifarskoj mašini, tada je za njegovo potpuno rešavanje potrebno ustanoviti redosled računskih operacija sa odgovarajućim brojevima. Drugim rečima, moramo imati „plan“ rešavanja zadatka, od početka do kraja. Ako se zadatak rešava na cifarskoj mašini sa automatskim upravljanjem rešavanja zadatka, onda je jasno, da je potrebna priprema potpunog *programa*.

Moderni elektronski računar je cifarska računska mašina koja na osnovu *programa* za rešavanje zadatka koji je sačinio čovek, rešava taj zadatak od početka do kraja, bez ikakvog daljeg učešća čoveka. To znači, najkraće rečeno, da računar „preuzima“sve podatke potrebne za potpuno rešavanje zadatka, a naime: brojčane podatke, tj. početne podatke; tačna uputstva o tome kojim redom i sa kojim

brojevima treba izvršiti određene računske operacije, tj. program za rešavanje zadatka; naš zahtev da nam izda potrebne međurezultate i krajnje rezultate.

On se sastoji iz određenog broja jedinica (organa, uređaja), koje zajedno ostvaruju automatsko rešavanje zadatka. Zadržimo se na svakoj od jedinica računara i opišimo kratko njen zadatak.

Ulazna jedinica prima program za rešavanje zadatka i početne podatke. *Memorija* računara ima zadatak da „pamti“ ili čuva program zadatka, početne podatke, međurezultate i rezultate predviđene programom. *Aritmetička jedinica* izvodi aritmetičke i još neke druge operacije (npr., logičke, itd.). *Upravljačka jedinica* ima zadatak da upravlja radom svih jedinica računara, tj. da ostvaruje automatsko rešavanje zadatka. *Izlazna jedinica* izdaje, iz memorije, sve ono što je programom predviđeno, tj. međurezultate, rezultate, početne podatke, i slično.

Za čoveka koji hoće da zadatak reši na računaru postavljaju se sledeća pitanja: kako pripremiti program za rešavanje zadatka; u kom obliku dati program zadatka i početne podatke na ulaznoj jedinici računara; kako računar smešta brojeve i program zadatka, kako izvodi računske i druge operacije, odn. kakav je „jezik“ računara.

Odgovor na ova i još na niz drugih pitanja u vezi s primenom računara daje jedna naučno-stručna oblast koja se zove *računarstvo*. Ona zadire u veći broj matematičkih i tehničkih disciplina, jer se radi kako o korišćenju, tako i o projektovanju i konstruisanju računara.

Računar mora imati potpun program prema kome će rešiti jedan zadatak, odn. čovek treba da mu da određeni niz obaveštenja o tome kojim redom i koje operacije s kojim brojevima treba da izvrši. Mora se prethodno razmisliti o redosledu onoga šta treba učiniti da bismo došli do određenih rezultata. Ako želimo da nam rešavanje zadatka izvrši neko drugi, prema našem programu, tada taj program moramo izložiti u vidu konačnog broja pravila koja jasno i jednoznačno određuju izvršavanje svih postupaka potrebnih za rešavanje zadatka od početka do kraja. Tu dolazimo do pojma *algoritma*, tj. tačno propisanog redosleda određenih operacija za rešavanje svih zadataka istog tipa. Algoritam se sastoji od konačnog broja pravila, a svako takvo pravilo zovemo *algoritamski korak*. Sadržina svakog algoritamskog koraka je ili određena *operacija* (aritmetička, logička ili neka druga) ili uputstvo da se pređe na neki drugi algoritamski korak, što znači *upravljanje* algoritmom.

Obrazovanje algoritma za rešavanje zadatka na računaru je *stvaralački* rad. Uspešno sastavljen algoritam dovodi do tačnog rešenja ne jednog zadatka, nego cele klase zadataka istog tipa, a od algoritma zavisi i racionalno korišćenje ogromnih mogućnosti računara.

Zadatak za koji se može sastaviti algoritam zove se algoritamski rešivi zadatak. Za takve zadatke može se sastaviti više algoritama. Mogu se međusobno razlikovati po tome da li obuhvataju širu ili užu klasu zadataka istog tipa, prema tome da li imaju manji ili veći broj algoritamskih koraka, da li štede memorijski prostor, vreme izračunavanja, itd. Možemo uočiti neke određene osobine svakog algoritma. Mi ćemo ih kratko izložiti.

Konačnost algoritma sastoji se u tome da on sadrži *konačan* broj operacija (aritmetičkih, logičkih i postupaka upravljanja algoritmom) kojima se ostvaruje rešavanje opisanog zadatka. Algoritam mora biti sastavljen tako da se može saopštiti drugom licu u obliku sa konačno mnogo uputstava o tome kako treba dejstvovati na svakom posebnom algoritamskom koraku, a to znači, da je svaki algoritamski korak određen jednoznačno: ulazne veličine jednoznačno određuju izlazne veličine. U tome se sastoji *determinisanost* algoritma. Algoritam služi za rešavanje svih zadataka istog tipa. On daje jedinstveni računski postupak koji može poći od različitih podataka i u svim slučajevima vodi odgovarajućem rezultatu. Jedno od merila vrednosti algoritma je stepen njegove apstraktnosti, tj. prema tome da li se može primeniti na što širu klasu zadataka istog tipa. U tome se sastoji *opštost* ili *apstraktnost* algoritma. Algoritam se izvršava u diskretnim vremenskim razmacima. Svakom algoritamskom koraku odgovara jedan vremenski razmak potreban za njegovo izvršenje. To sačinjava osobinu *diskretnosti* algoritma. Operacije koje se izvode u jednom algoritamskom koraku moraju biti jednostavne i jasne za onaj krug ljudi kojima je namenjen algoritam, pa se u tome sastoji *elementarnost* algoritma. Da bi se rešio zadatak moraju algoritmom biti određene operacije koje se izvode sa početnim ili ulaznim podacima. Za svaki skup početnih podataka koji se operacijama transformiše, potrebno je tačno znati šta se smatra rezultatom, tj. izlaznim veličinama. U tome se sastoji *usmerenost* ili *rezultativnost* algoritma.

Savremene i veoma apstraktne matematičke discipline, matematička logika i apstraktna algebra danas su pouzdan posrednik između čoveka i raznih složenih automata, odn. elektronskih računara. Na jeziku tih disciplina precizno se postavljaju programi za elektronske računare. Tu je od prvenstvenog značaja teorija algoritama. Primenom matematičke logike i apstraktne algebre u teoriji elektronskih računara i automata uopšte pokazalo se da se može postići materijalizacija najapstraktnijih analitičkih relacija i da problemi konkretnih konstrukcija vrlo složenih automata imaju za posledicu najapstraktnija matematička i logička istraživanja.

Tako se bez matematičke logike, donedavno smatrane disciplinom sasvim apstraktnog karaktera, bez nekog značaja za praktične primene, danas ne mogu zamisliti rešenja vrlo praktičnih i aktuelnih problema konstrukcije elektronskih računara i niza drugih problema automatizacije.

Elektronski računari pružaju numeričkoj analizi ogromne mogućnosti u rešavanju konkretnih problema raznih nauka, društvenih i prirodnih, tehnike i prakse uopšte, naročito kad su u pitanju problemi za čije rešavanje treba uzeti mnoštvo faktora u obzir, čija bi numerička obrada vremenski bila nemoguća bez usluga elektronskih računara. Svojim mnogobrojnim primenama u opštoj društvenoj praksi, elektronski računari se javljaju kao faktori od primarnog značaja kad je reč o menjanju načina mišljenja i tradicionalnih navika u opštoj društvenoj praksi, kao ukupnoj praktičnoj i teorijskoj ljudskoj delatnosti. Oni bitno utiču i sve će više uticati na metodologiju naučnog istraživanja i prakse uopšte, kao što jasno pokazuju mogućnosti i pravci njihovog tehničkog razvitka i shodno tome mogućnosti i pravci daljeg razvitka matematičkih disciplina koje su im opšta teorijska osnova. Međutim, iluzorno bi bilo i pomisliti da se specifične metode pojedinih nauka, s obzirom na savremeno „matematičko osvajanje" opšte društvene prakse, mogu zameniti matematičkim metodama (takve se idejne i metodološke devijacije javljaju upravo u vezi s primenama elektronskih računara i drugih automata), što bi bio idealizam svoje vrste – *matematizam*, izražen stanovištem o svemogućnosti matematike kao instrumenta kojim se služimo u proučavanju raznih fenomena, jer matematika zaista može *mnogo*, ali daleko je od toga da može *sve*. Drugim rečima, ona ne može potpuno zahvatiti stvarnost, koja je neiscrpna i nikad konačno saznatljiva svojom složenošću i tajnama koje krije u sebi. Ali bez obzira na to, mislimo da je osnovano kazati da je nastupila epoha *matematizacije opšte društvene prakse* i da je zato mnogo lakše ovladati potrebnim znanjima iz matematike nego se bez njih snalaziti.

Spomenimo na kraju, da iz naše matematičke prošlosti u razvitku numeričke analize i računskih mašina zauzimaju značajno mesto i dva jugoslovenska matematičara: Juraj Vega* (1754 – 1802), rođen u Zagorici, blizu Ljubljane, istaknuti vojni inženjer svoga vremena, pisac niza naučnih rasprava, knjiga i udžbenika iz više matematike i vojne tehnike i Mihailo Petrović* (1868 – – 1943), dugogodišnji profesor matematike na Beogradskom univerzitetu, autor mnoštva naučnih rasprava, monografija i udžbenika iz matematike, kao i nekih drugih knjiga, popularno poznat kao „Mika Alas". Vega je, pored mnogih numeričkih tablica i nekih radova iz numeričke analize, objavio na latinskom i nemačkom jeziku, u Lajpcigu 1794. svoje najznačajnije delo *Potpuna zbirka logaritama*, koje predstavlja tablice logaritama sa deset decimala. To delo je dobilo međunarodno naučno priznanje i do danas je doživelo veoma mnogo izdanja. Prevedeno je na osam evropskih jezika, među kojima na engleski, ruski, francuski i italijanski. Vegine logaritamske tablice se i danas koriste u teorijske i praktične svrhe. Petrović je veoma poznat po nekim svojim radovima iz numeričke analize (teorija numeričkih spektara, računanje s brojnim razmacima, integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova), ali je on poznat i kao jedan od začetnika analognih računskih mašina. On je sa dva svoja rada, *O jednom postupku grafičke integracije diferencijalnih jednačina* i *O hidrauličkoj integraciji diferencijalnih jednačina* 1897. i 1898. objavljena na francuskom jeziku, prvi u Francuskoj akademiji u Parizu i drugi u Američkom matematičkom žurnalu u Baltimoru, postao pronalazač *hidrointegratora*, kao analogne računske mašine, zasnovane na hidrauličkim principima. U tom smislu Petrović je dobio međunarodna naučna priznanja u radovima i monografijama u kojima se tretiraju pitanja razvitka tehničkih sredstava numeričke analize.

Literatura: Ernest Stipanić, Miroslava Stojanović: *Matematika* za IV razred usmerenog obrazovanja, Beograd, 1983; *Matematičeskaja enciklopedija*, Tom 3, Moskva, 1983.

Teorija skupova. Funkcionalna analiza

Sasvim kratko osvrnućemo se na razvitak teorije skupova i funkcionalne analize, kao dve veoma značajne grane matematike u savremenom razvitku.

Teorija skupova

Na paradokse beskonačnosti već su matematičari i filozofi antike upozoravali. To je učinio Proklus (ili Proklo, 410 – 485) u svojim komentarima Euklidove geometrije. Aristotel (384 – 322. pre n. e.) je osporavao svaku mogućnost *aktuelne beskonačnosti*. Tvrdio je da beskonačnost postoji samo u mogućnosti, kao *potencijalna beskonačnost*, van svojstvene aktuelnosti, kao nedovršena stvar, ostvarljiva jedino u smislu postojanja, tako da je uvek neka druga stvar. Galilej (Galileo Galilei, 1564 – 1642) je u svojim *Matematičkim razgovorima i dokazima dveju novih nauka pojavljenih u mehanici* (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno due nuove scienze attenenti alla mecanica*, 1638) posmatrao kvadrate brojeva prema svojim korenima, tako da je deo skupa ekvivalentan svojoj celini. Slična se razmatranja nalaze i kod Lajbnica. Kod niza matematičara i filozofa srednjeg veka nalazimo rasprave o beskonačnosti i o raznim paradoksima u vezi s tim. Zasnivanje diferencijalnog i integralnog računa u XVII v., njegov razvitak u XVIII v. i njegovo strogo postavljanje u XIX v. pokazuju, s jedne strane, bitnu razliku između aktuelne i potencijalne beskonačnosti, i s druge, između diskretnog karaktera broja i neprekidne prirode geometrijskih veličina. Mnogi znameniti filozofi i matematičari, npr. Ruđer Bošković*, Gaus* i Kroneker* bili su protiv upotrebe pojma *aktuelne beskonačnosti*. Tako je to trajalo u matematici i njenoj filozofiji sve do pojave teorije skupova.

Matematička teorija skupova bila je zasnovana radovima matematičara XIX v. koji su imali za cilj da razrade osnovu matematičke analize. Češki filozof i matematičar Bolcano (Bernard Bolzano, 1781 – 1848), svojim dobro poznatim delom *Paradoksi beskonačnog* (*Paradoxien des Unendlichen*, 1851), u kojem definiše beskonačan skup kao ekvivalentan svom pravom delu, prethodi otkrićima u teoriji skupova Kantora* (1845 – 1918). David Gistav (Du Bois-Reymond Paul David Gustave, 1831 – 1889), profesor univerziteta u Berlinu, Hajdelbergu i Tibingenu, u svom delu *O Furijeovim redovima* (*Über die Fourierschen Reihen*, 1873), kao i Dedekind* (1831–1916) u više svojih dela, kao što su *Neprekidnost i iracionalni brojevi* (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872), *Šta su i šta treba da budu brojevi* (*Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1888) i u drugim, u kojima se razmatraju brojevni skupovi ili skupovi funkcija, postavljaju pitanje o kvantitativnim upoređenjima beskonačnih skupova. Da li beskonačnost skupa ima svojstvo koje ne dopušta razlučivanje, ili pak postoje različiti stepeni matematičke beskonačnosti, odn. beskonačni skupovi različite kvantitativne moći? Prema danas istaknutom matematičaru, koji stoji na čelu burbakista, Žanu Dijedoneu (Jean Dieudonné), zasluga za stvaranje teorije skupova pripada Dedekindu i Kantoru. Njihova je jednaka zasluga, podvlači Diedone, u zasnivanju „skupovne“ osnove današnje matematike. Zato burbakisti naglašavaju: „Danas mi znamo, govoreći logički, da je moguće izvesti skoro svu savremenu matematiku iz jedinog izvora – teorije skupova“.

Ipak se može podvući da je problem matematičke beskonačnosti kao i pojmova u vezi s tim bio široko i neposredno postavljen u najopštijem obliku u teoriji skupova, koju je zasnovao i obradio u poslednjoj četvrti XIX v. Georg Kantor*.

Skup spada u osnovne matematičke pojmove. Nama su, npr., poznati razni *brojevni skupovi* (prirodnih, celih, racionalnih, iracionalnih, realnih, kompleksnih, algebarskih, transcendentnih i drugih). Možemo govoriti o skupu stanovnika jednog grada, stabala u šumi, tačaka jedne duži, korena jedne jednačine, itd. Ideja objedinjavanja elemenata skupa pa kakvom bilo opštom oznakom je od osnovne važnosti za skup, pa je u tom smislu Kantor pisao: „Mi zovemo *skupom* svaku uniju M objekata m našeg poimanja, određenih i različitih, i koje imenujemo *elementima* od M.“ Skup je *beskonačan* ako ima beskonačno mnogo elemenata, npr., skup prirodnih brojeva, a on je *konačan*, ako ima konačno mnogo elemenata, npr., skup učenika u jednom razredu. Skup je *prazan* ako ne sadrži nijedan element, npr., skup realnih korena jednačine $x^2+1=0$. Ako element x pripada skupu X, pišemo $x\in X$, ukoliko ne pripada, pisaćemo $x\notin X$. Ako je svaki element skupa X istovremeno i element skupa Y, onda je X *podskup* skupa Y i to se zapisuje u obliku $X\subset Y$. Ukoliko važe obe skupovne relacije $X\subset Y$ i $Y\subset X$, kaže se da su skupovi X i Y jednaki, tj. $X=Y$. *Unija* $X\cup Y$ skupova X i Y je skup koji se sastoji iz svih elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova X i Y. *Presek* $X\cap Y$ skupova X i Y je skup koji se sastoji iz svih elemenata koji pripadaju i skupu X i skupu Y. Operacije unije i preseka su komutativne, asocijativne i uzajamno distributivne. Često se posmatraju skupovi koji su

sadržani u nekom datom skupu X. Neka je A podskup skupa X i P neka osobina, koja karakteriše elemente iz A, onda pišemo $A=\{x\in X:P(x)\}$. Na primer, neka je X skup realnih brojeva i neka je A skup pozitivnih brojeva, tada je $A=\{x\in X:x>0\}$. Ako $A\subset X$, onda se skup $X\setminus A=\{x\in X:x\notin A\}$ zove *dopuna* skupa A. Razdeo teorije skupova koji se bavi istraživanjem operacija nad skupovima zove se *algebra skupova*.

Apstrahujući prirodu i poredak elemenata, tada se dva konačna skupa mogu međusobno razlikovati samo *količinom* svojih elemenata. Za njihovo upoređenje dovoljno je postaviti njihove elemente u *međusobno jednoznačno korespondiranje*. Ako je to u potpunosti moguće, onda je količina elemenata u oba skupa ista, u protivnom slučaju jedan skup ima više elemenata nego drugi, odnosno manje elemenata nego drugi. Taj princip utvrđivanja uzajamno jednoznačnog korespondiranja među elementima dvaju skupova položio je Kantor 70-ih godina prošlog veka u načela osnove upoređivanja i istraživanja beskonačnih skupova. Prema tome, mogućnost kvantitativne ocene skupova zasniva se na pojmu uzajamno jednoznačnog korespondiranja, ili bijekcije, između dva skupa. Neka svakom elementu skupa X na osnovu bilo kakvog pravila ili zakona odgovara neki određeni element skupa Y, i ako pri tom svakom elementu skupa Y odgovara samo jedan određeni element skupa X, kaže se da su skupovi X i Y u *uzajamno jednoznačnom korespondiranju*, ili u *bijektivnom odražavanju*, ili u *bijekciji*. Ako se među elementima dvaju ma kojih skupova može postaviti uzajamno jednoznačno korespondiranje, onda se kaže da ta dva skupa imaju istu *moć*, ili da su oni *ravnomoćni*, ili *ekvivalentni*. Ravnomoćnost ima osobinu refleksivnosti, tj. $X\sim X$, simetrije, tj. $X\sim Y\Rightarrow Y\sim X$ i tranzitivnosti, tj. $X\sim Y$ i $Y\sim Z\Rightarrow X\sim Z$. „U slučaju konačnih skupova“, isticao je Kantor, „moć se poklapa sa *količinom elemenata*.“ Zato se moć skupa naziva *kardinalnim brojem*. Tako je Kantor *količinsku ekvivalentnost* ili *ravnomoćnost* dvaju skupova opredelio kao mogućnost utvrđivanja među njima uzajamno jednoznačnog korespondiranja. Ako je skup X ravnomoćan skupu Y, onda skupovi X i Y imaju jedan isti kardinalni broj.

Uzajamno jednoznačno korespondiranje dovelo je Kantora do značajnih otkrića, često protivrečnih našoj običnoj intuiciji. Na primer, za razliku od konačnih skupova, za koje važi aksioma „celo je veće od dela“, beskonačni skupovi se ne pokoravaju toj aksiomi. Lako je ustanoviti ravnomoćnost skupa prirodnih brojeva s njegovim podskupom parnih, putem uzajamno jednoznačnog korespondiranja:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3\ldots & n\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6\ldots & 2n\ldots \end{array}$$

Ta karakterna crta bilo kojeg beskonačnog skupa može se uzeti za osnovu njegove definicije: *skup se naziva beskonačnim, ako je ravnomoćan sa jednim od svojih podskupova.* Konačan skup nije ekvivalentan nijednom svom podskupu. Svaki beskonačni skup koji je ekvivalentan skupu prirodnih brojeva naziva se *prebrojivi skup*. Njegovi se elementi mogu numerisati: a_1, $a_2 \ldots$, $a_n \ldots$. Beskonačni skup koji nije ekvivalentan skupu prirodnih brojeva naziva se *neprebrojivi skup*.

Veoma je značajno Kantorovo otkriće 1873, da su skupovi prirodnih, racionalnih i algebarskih brojeva ravnomoćni, što znači da su skupovi racionalnih i algebarskih brojeva prebrojivi skupovi. To je moglo navesti na misao da su svi beskonačni skupovi ravnomoćni, pa zbog toga ne bi imalo smisla uvoditi pojam moći. Ali iste godine Kantor je ustanovio postojanje neravnomoćnih beskonačnih skupova, tako što je dokazao da je *skup realnih brojeva neprebrojiv*, odnosno skup tačaka prave, tj. da nije ekvivalentan skupu prirodnih brojeva.

Kantor je, dakle, otkrio razne stepene beskonačnosti. Na osnovu prethodnog izlaganja možemo zaključiti da postoje iracionalni brojevi. Zaista, kako je moć realnih brojeva veća od prebrojivog skupa racionalnih brojeva, onda moraju postojati iracionalni brojevi. Skup iracionalnih brojeva ima istu moć kao i skup realnih brojeva, što znači da ih ima više nego racionalnih brojeva. Slično zaključujemo da moraju postojati nealgebarski brojevi, tj. transcendentni brojevi i to više nego algebarski. Zaista, skup transcendentnih brojeva je neprebrojiv, jer kad bi on bio prebrojiv poput skupa algebarskih brojeva, tada bi morala biti prebrojiva i suma njihova, tj. skup realnih brojeva, što nije tačno. Za skup realnih brojeva kaže se da ima *moć kontinuuma*.

Pošto je dokazao da među različitim moćima beskonačnih skupova postoji najmanja moć, a to je moć skupa prirodnih brojeva, Kantor je tu moć označio sa $\aleph_0$ (alef nula). Na taj način $\aleph_0$ je najmanji beskonačni, ili *transfinitni*, kardinalni broj, koji karakteriše svaki beskonačni prebrojivi skup. Moć skupa realnih brojeva, tj. moć kontinuuma, označena je sa C. Tako je $\aleph_0 < C$. Ne postoji li među njima beskonačni skup čija bi moć bila veća od $\aleph_0$ i manja od C? Taj problem nazvan je „problem kontinuuma".

Može se reći da je to u prostijem obliku *Kantorova hipoteza o kontinuumu* koja se sastoji, jednostavno formulisana, u pretpostavci da je skup svih tačaka prave ekvivalentan ma kojem neprebrojivom skupu tačaka prave, tj. ma kojem beskonačnom skupu tačaka prave koji nije ekvivalentan skupu prirodnih brojeva. U vezi s njom David Hilbert* postavio je prvi problem među svoja dvadeset tri problema koja je formulisao u svom predavanju na Međunarodnom kongresu matema-

tičara u Parizu 1900. i koja su odigrala značajnu ulogu u razvitku matematike ovog stoleća. Taj problem, odnosno hipoteza kontinuuma, dovodili su u sumnju aksiome teorije skupova, tj. osnove na kojima počiva teorija, a u vezi sa njom i mnoge oblasti moderne matematike koje se na nju oslanjaju. Zato su se rešavanjem tog problema bavili mnogi istaknuti matematičari našeg vremena. Kurt Gedel je 1938. opštu Kantorovu hipotezu

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

izveo kao logičku posledicu iz izvesnog sistema aksioma dokazavši da bi nas već taj sistem sam doveo do kontradikcije ukoliko bi nas on doveo do kontradikcije kad mu se doda Kantorova hipoteza. Godine 1963. uspelo je mladom američkom matematičaru P. Koenu (P. Cohen) da problem reši tako što je koristeći metode matematičke logike dokazao da je hipoteza kontinuuma nezavisna od aksioma na kojima se zasniva teorija skupova i da prema tome ne dovodi u sumnju logičku i matematičku vrednost osnova teorije skupova. Ovaj svoj izvanredan rezultat, za koji je na Kongresu dobio zlatnu medalju, Koen je izložio u polučasovnom predavanju. To je jedan od najznačajnijih rezultata postignutih u razvitku matematike za poslednje vreme.

Osim pak spomenutih dveju moći, prebrojivih skupova i kontinuuma, postoje još veće moći, npr. moć skupa svih realnih funkcija realne promenljive i druge moći. Tako je Kantor dokazao da je moć skupa svih različitih delova svakog nepraznog skupa veća od moći datog skupa, tj. da važi

$$P(A) = 2^{k(A)} > k(A)$$

gde je P (A) partitivni skup, odnosno skup svih različitih delova skupa A, a k (A) je kardinalni broj datog skupa A.

Zanimljivo je ovde napomenuti sledeću činjenicu. Pre Kantorove teorije skupova, smatralo se da ravan ili prostor ima više tačaka nego jedinična duž. Međutim, na osnovu te teorije pokazano je da je moć tačaka jedinične duži ekvivalentna moći tačaka ravni ili moći skupa tačaka prostora od 3, 4, ..., n, ... dimenzija. Prema tome, moć skupa tačaka prostora od beskonačno prebrojivog skupa dimenzija je jednaka moći jednodimenzionog kontinuuma.

Kantor je, pored teorije transfinitnih kardinalnih brojeva, razvio teoriju *transfinitnih rednih brojeva*. U tom pogledu naš istaknuti matematičar Đuro Kurepa, u svojoj *Teoriji skupova* (1951) veli: „Polazeći od osnovnog svojstva skupa prirodnih brojeva, da mu svaki dio ima prvi element – ukoliko uopće posjeduje koji element – definiraju se *dobro uređeni skupovi* (Cantor) kao baš oni ma kakvi uređeni skupovi koji imaju gornje svojstvo minimuma. Svaki takav skup je nosilac izvjesnog broja pa tako dolazimo do *rednih* (*ordinalnih*) *bro-*

jeva, jedne od najljepših i najsmjelih tekovina Kantorove teorije skupova. Specijalno, skup prebrojivih rednih brojeva nadovezuje se na sve konačne redne (tzv. prirodne brojeve), a njegovo pojimanje je isto toliko prirodno koliko je pojimanje skupa C svih realnih brojeva.

Dobro uređeni skupovi su specijalan slučaj *razvrstanih* skupova ili rodoslovlja, te *razvrstano uređenih* skupova; zadnji skupovi su shematizirana teorija neprestanog komadanja i atomiziranja. Razvrstani skupovi predstavljaju opću teoriju rodoslovlja, odnosno procesa kod kojih se niže jedna etapa procesa na drugu etapu procesa, odnosno, na generaciju nastavlja generacija. Kako ti skupovi vuku lozu od tako prirodnih pojava, jasno je, da će oni ulaziti u različita osnovna matematička razmatranja. I zbilja, obje vrste skupova povezane su sa izučavanjem samog kontinuuma: razvrstani skupovi sa Kantorovim problemom o kontinuumu, a razvrstano uređeni sa Suslinovim problemom o kontinuumu.

Daje se veza rodoslovljâ s općim djelimično uređenim skupovima. Već *mrežasti skupovi* sa svojom dualnom građom pokazuju koliko je raširen i važan pojam djelimično uređenih skupova".

Kantor je razmatrao operacije na *kardinalnim* i *ordinalnim* brojevima, stvorivši, može se reći, *transfinitnu* aritmetiku.

Georg Kantor, osnivač moderne teorije skupova, koju je sistematski obradio i izložio u svom delu *Osnovi jedne opšte nauke o mnogostrukosti* (*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 1883) i u drugim svojim delima, uveo je tom teorijom u matematiku nove, važne pojmove. Ona se razvila u svestranu matematičku disciplinu i otvorila je put do potpuno novih saznanja i rezultata.

Veoma važan prilog teoriji skupova dao je Feliks Hausdorf (Felix Hausdorf, 1868 – 1942), razradivši teoriju linearno uređenih skupova i svojim primenama u topologiji. On je položio osnove teoriji *topoloških prostora*. Istraživanjima Borelovih skupova zasnovana je *deskriptivna teorija skupova*. Iz zadataka kombinatorne matematike i teorije grafova nastala je kombinatorna teorija skupova. Gedelovim i Koenovim otkrićima u aksiomatskoj teoriji skupova bitno se uticalo na metode u teoriji skupova. Teorija funkcija i skupova bila je zasnovana u Moskvi 1911. na čelu sa znamenitim matematičarem N. N. Luzinom (1883 – 1950). Tu su značajne rezultate dali mnogi njegovi učenici, istaknuti sovjetski matematičari.

Kantorovoj teoriji skupova suprotstavili su se mnogi matematičari. Jedan od najupornijih protivnika bio je Leopold Kroneker. No, ona je 90-ih godina prošlog stoleća dobila opšte priznanje i počela se široko primenjivati u matematici. Pojavljuju se *paradoksi* ili *antinomije* u teoriji skupova. Kaže se da jedna teorija sadrži antinomiju ako se u

njoj mogu dokazati dve protivrečne, jedna drugoj, teoreme. U vezi s tim karakterističan je paradoks Rasela* (1870 – 1968), kojeg je objavio 1902. Odnosi se na skup R svih skupova S koji ne sadrže sebe kao element (normalnih skupova).

Naime, ako je $R = \{S/S \notin S\}$, tada važi $S \in R \Leftrightarrow S \notin S$, pa otuda, kada S zamenimo sa R, dobijamo

(1) $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$

Na osnovu zakona isključenja trećeg sledi

(2) $R \in R \veebar R \notin R$.

Dakle, na osnovu (1), ako je $R \in R$, onda $R \notin R$, i obratno, ako $R \notin R$, onda $R \in R$, tj. u oba slučaja $R \notin R \vee R$, što je protivrečno zbog (2).

Intuicionista Brauer (L. J. Brouwer, 1881 – 1966) našao je „rešenje" paradoksa u neusvajanju zakona isključenja trećeg, dok je Rasel tražio „rešenje" na drugi način. Ovaj paradoks je, uopšte uzev, više logički no matematički paradoks.

Pojavom antinomija u teoriji skupova nastala je duboka kriza u osnovama matematike. Mnogi su matematičari smatrali da treba odbaciti teoriju skupova, ali pošto je njena primena u mnogim granama matematike dovela do vrlo značajnih rezultata, većina matematičara se složila s Hilbertovom izjavom: „Niko nas ne može proterati iz raja koji nam je zasnovao Kantor". Teorija skupova imala je i još uvek ima veliki uticaj na dalje razviće matematike tokom XX v. U vezi s njom nastale su i razvile se nove matematičke discipline, kao što su: teorija funkcija realne promenljive, teorijsko-skupovna topologija, funkcionalna analiza i druge oblasti.

Za dublje i svestranije upoznavanje teorije skupova, čitalac može koristiti dela našeg poznatog matematičara Đure Kurepe: *Teorija skupova* (Zagreb, 1951) i *Skupovi, što su i kakva im je uloga* (Zagreb, 1967).

Funkcionalna analiza

Pojam funkcije se precizirao i proširio tokom XIX v. Krajem ovog stoleća, polje analize se modificiralo, zahvaljujući proširenjima polja promenljive, koja više nije neophodno jedan skalar ili jedan konačan niz skalara, već može da bude element jednog prostora nizova ili funkcija. Nastale i razvijene odgovarajuće metode su poznate pod imenom *funkcionalne analize*.

Može se reći, uopšte uzev, da dva uzroka uslovljavaju postanak i razvitak funkcionalne analize u toku XX stoleća.

S jedne strane, pojavila se potreba da se s jednog stanovišta osmisli bogati faktografski materijal, nakupljen u različitim, često malo međusobno povezanim oblastima matematike u toku XIX v. Osnovni pojmovi funkcionalne analize nastali su i kristalizirali se pri tom sa raznih strana i raznim povodima. Oni su nastali u procesu razvitka varijacionog računa, u razrešavanju problema oscilacija, u teoriji diferencijalnih i integarlnih jednačina, naročito kad se uzmu u obzir konturni problemi i problemi sopstvenih vrednosti, u razvitku teorije realnih funkcija i operacionog računa i u teoriji aproksimacija funkcija. Ona je dozvolila da se s jednog stanovišta pojme mnogi rezultati iz tih oblasti i omogućila je da se dođe do novih. Tako steknuti pojmovi i matematički aparat bili su iskorišćeni u poslednjim decenijama u kvantnoj mehanici.

S druge strane proučavanje matematičkih problema, vezanih sa kvantnom mehanikom, javilo se kao prelomni moment u daljem razvitku funkcionalne analize i formirao se i sve se više danas formira kao osnovni pravac njenog razvitka.

Funkcionalna analiza je daleko od svog završetka. Za njen dalji razvitak potrebe i zahtevi savremene fizike imaće takav značaj kao što je klasična mehanika imala za nastanak i razvitak u XVIII v. diferencijalnog i integralnog računa.

Mogli bismo kazati da je moderna funkcionalna analiza nastala i razvila se oko onoga što čini bitni objekt istraživanja analista XIX v., a to je rešavanje jednačina čije su nepoznate *funkcije*. Običnim i parcijalnim diferencijalnim jednačinama pridružile su se u XIX v. integralne i integro-diferencijalne jednačine i brojni drugi tipovi funkcionalnih jednačina.

Najznačajnije ideje koje su se istakle u toku duge evolucije, i koje su u osnovi modernih koncepcija, prema Žanu Dijedoneu, jesu sledeće:

1. Odmah početkom XIX v., pod uticajem primena u fizici, u istraživanju „opšteg rešenja" jedne funkcionalne jednačine, nastupa proučavanje rešenja koja su podvrgnuta dopunskim uslovima, tzv. „početnim uslovima" ili „uslovima na granicama".

2. Počev od Košijevih radova, pravi se čista razlika između *lokalnih* i *globalnih* osobina jednačina i njihovih rešenja.

3. Pojam jednačine, kao osnovni pojam, postepeno daje mesto pojmu *operatora* ili *funkcionala*, paralelno analognoj evoluciji u linearnoj algebri, koja pojmu matrice daje pretežnu ulogu i ne bez recipročnih uticaja između dveju teorija.

4. Progresivna navika na ideju da treba rukovati sa funkcijama kao sa matematičkim objektima u izvesnom smislu „primitivnom" kao sa tačkama prostora, kojima je oduzeta ideja progresivnog toka vezana za jednu „varijaciju" i kad se „skupovni" jezik širi i počinju se sistematski posmatrati skupovi čiji su elementi funkcije.

5. „Dinamički" karakter analize (nasuprot „statičkom" razmatranju formi, nasleđenom od antike), koji se već porodio infinitezimalnim računom, naglašava se i menja se u

svim pravcima, naročito pod uticajem dvaju matematičara, koji bi se mogli nazvati apostoli *kontinuirane varijacije*, Rimana i Poenkarea. Ono što sad varira, to nisu više samo brojevi, nego takođe i funkcije, posmatrane kao „tačke" jednog „funkcionalnog prostora". I krajem XIX v. nametnuće se razlika različitih vrsta „konvergencije" jednog niza funkcija ka jednoj graničnoj funkciji, što će dovesti do opšte ideje *topologije* na jednom skupu funkcija, a daljim proširenjem rodiće se opšta topologija.

Ista pitanja mehanike i astronomije položaja kao u osamnaestom stoleću nastavljaju da snabdevaju brojne probleme diferencijalnih jednačina. Treba ovde dodati sve probleme koji proizlaze iz razvitka teorijske fizike: teorije toplote, elastičnosti, hidrodinamike, optike i elektromagnetizma i počev od 1915. opšte relativnosti i kvantne mehanike.

Teoreme o *lokalnoj* egzistenciji koje se odnose na diferencijalne jednačine, npr. Košijeva teorema koja se odnosi na egzistenciju jedinstvenosti rešenja u blizini jedne tačke x_0, ili *lokalna* teorija Pfafovog sistema (Johann Friedrich Pfaff, 1765–1825) parcijalnih diferencijalnih jednačina, kao i Košijeva teorema o *lokalnoj* egzistenciji implicitnih funkcija, zatim diferencijalne jednačine u realnom i kompleksnom domenu i opšte proučavanje stabilnosti predstavljaju probleme koji su vodili ka stvaranju funkcionalne analize. Jednačine problema triju tela su partikularni slučajevi *Hamiltonovog sistema* jednačina, parcijalne linearne diferencijalne jednačine i spektralna teorija, odnosno stvaranje *Linearne globalne analize* (npr., tri tipa osnovnih jednačina matematičke fizike: Laplasova jednačina, talasna jednačina i jednačina toplote) sa teorijama rešavanja navedenih jednačina utirali su puteve u stvaranju metoda funkcionalne analize.

Problemi *harmonijske analize* podsticali su genezu i razvitak funkcionalne analize. Više od dva stoleća harmonijska analiza je neprestano igrala ulogu katalizatora razvitka skoro svih grana matematike. Posle dobro poznatih naučnih raspra, tokom XVIII v. oko trigonometrijskih redova, harmonijska analiza dovela je početkom XIX v. do preciznog pojma funkcije realnog argumenta, čiju je formulaciju dao Dirihle (Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859), osnivalac harmonijske analize u modernom smislu reči. Pošto je zaoštrila probleme konvergencije, ona je znatno doprinela tokom XIX i XX stoleća rađanju topologije i postepenom razvitku pojmova integrala i mere, što se naročito očitovalo u radovima veoma istaknutih matematičara. Isto tako, ona je svojim vezama sa spektralnom teorijom operatora i idejom ortogonalnosti, koja je stvarala navike da se „geometrijski misli" u analizi, bila jedan od vrlo značajnih izvora sa kojeg su potekli tokovi razvitka funkcionalne analize. U trećoj deceniji ovog stoleća jasno se manifestovala bliska srodnost problema harmonijske analize sa algebarskim problemima, naročito sa ispitivanjima u teoriji grupa i blagodareći radovima vrlo poznatih matematičara postala je neka vrsta zbornog mesta, gde se danas stapaju algebra i analiza.

Razvitak klasične analize u beskonačno mernim prostorima i razvitak simboličnog računa su važni izvori geneze i razvitka funkcionalne analize. Uvođenjem nove forme funkcionalne zavisnosti definisane diferencijalnom jednačinom, i uvođenjem kvalitativne integracije diferencijalnih jednačina, teorija tih jednačina doprinela je usvajanju i afirmisanju pojma funkcionala. Odredba ma kojeg funkcionalnog prostora pretpostavlja da je zadan odgovarajući skup funkcija i da su zadane operacije graničnog prelaza na tom skupu. Takvim apstrakcijama prethodilo je proučavanje konkretnih klasa funkcija i konkretnih operacija graničnih prelaza, a to je bilo vezano s teoremama egzistencije rešenja diferencijalnih jednačina i sa proučavanjem njihovih funkcionalnih osobina. Simboličke metode u teoriji linearnih diferencijalnih i diferencnih jednačina su važni izvori savremene teorije linearnih operatora, što je važno za funkcionalnu analizu. Analogije između linearnih problema analize i linearne algebre, kao i analogije između analize i geometrije, značajni su faktori za nastanak i razvitak funkcionalne analize. Ideja uvođenja apstraktnih prostora u analizu potpuno pripada XX v. U tom smislu prvi rad je napisao Freše (Maurice Frechet, 1878–1973) 1909, kada je u analizu uveo apstraktni metrički prostor. Istovremeno je Hilbert razrađivao teoriju integralnih jednačina i teoriju apstraktnih funkcionalnih prostora. Jedan od prvih većih koraka u stvaranju „apstraktne" analize, posle radova Hilberta, bili su apstraktni prostori koje je otkrio Banah (Stéphan Banach, 1892–1945) i koji su po njemu dobili ime. Još veći impuls dobio je razvitak „apstraktne" analize 1929. kad je Nojman (John Von Neumann, 1903–1957) objavio tri rada o operatorima, definisanim u Hilbertovom prostoru, u kojima je pokazao da se metodama „apstraktne" analize ne postižu samo novi, jasni i određeni rezultati, nego se i klasične konkretne metode neobično i sasvim neočekivano unapređuju. Sve je ovo značajno uticalo na razvitak ideja i metoda funkcionalne analize.

Sinteza algebre i analize u razvitku teorije integralnih jednačina igrala je važnu ulogu u procesu formiranja funkcionalne analize. U osnovama formiranja te teorije ležala je ideja graničnog prelaza od izvesnih algebarskih fakata ka faktima analize i ona je ostvarila određenu sintezu analize, algebre i geometrije. Polazeći od problema matematičke fizike i odgovarajućih parcijalnih diferencijalnih jednačina, Voltera (Vito Volterra, 1860–

1940), Poenkare*, Fredgholm (Erik Fredgholm, 1866–1927), Hilbert i drugi zasnovali su i razvili teoriju integralnih jednačina, tako da su, s jedne strane, matematička fizika, a s druge, teorija diferencijalnih jednačina bili osnovni izvori iz kojih je potekla teorija integralnih jednačina. Voltera je rešio opštu jednačinu oblika

$$(1) \qquad \varphi(s)=\int_0^s \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt+\mathrm{f}(s)$$

tako što je interval integracije podelio na n jednakih delova, zamenivši neprekidnu promenljivu konačnim skupom njenih vrednosti i dobivši sistem linearnih jednačina sa n promenljivih

$$(2) \qquad \varphi_p=\sum_{q=1}^{p-1} \mathrm{K}_{pq}\varphi_q+\mathrm{f}_p,$$

$$p=1,2,\ldots,n$$

gde je $\mathrm{f}_p=\mathrm{f}(x_p)$, $\varphi_p=\varphi(x_p)$ i $\mathrm{K}_{pq}=\frac{1}{n}\mathrm{K}(x_p, x_q)$. Činjenica da je sistem (2) uvek rešiv, jer je odgovarajuća determinanta sistema uvek različita od nule, navela je Volteru na misao da je jednačina (1) rešiva. „Problem rešenja linearnih integralnih jednačina odgovara rešenju sistema algebarskih jednačina prvog stepena. Za mene je u stvari polazna tačka gledanja bila ta što integralna jednačina predstavlja granični slučaj sistema jednačina prvog stepena", pisao je Voltera. Vodeći računa da je matrica sistema (2) regularna, odnosno matrica linearne transformacije

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi_n\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\mathrm{f}_1\\ \mathrm{f}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathrm{f}_n\end{bmatrix}$$

drugim rečima da postoji uvek njoj inverzna transformacija, on je uspeo da rešenje $\varphi(s)$ jednačine (1) izrazi u eksplicitnom obliku. Analogija sa algebrom pomogla je, dakle, Volteri da dođe do važnih rezultata u teoriji integralnih jednačina. Tako je tom teorijom ustanovljena veza između analize i algebre i u svom daljem razvitku ona je postala plodotvoran instrument prenošenja algebarskih metoda u oblast analize.

U isto vreme počele su se proučavati integralne jednačine oblika

$$(3) \quad \varphi(s)+\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt=\mathrm{f}(s)$$

$$(0\le s\le 1)$$

za koje se pokazalo da im je analitički analogan sistem od n algebarskih linearnih jednačina sa n nepoznatih, ali koji, za razliku od sistema (2), nije uvek rešiv, s obzirom da odgovarajuća determinanta može biti različita ili jednaka nuli, pa u vezi s tim pitanje egzistencije rešenja jednačine (3) ostaje otvoreno. Uvodeći neke nove metode na bazi teorije funkcija i rukovodeći se algebarskim analogijama, Poenkare je postigao vrlo značajne rezultate u rešavanju jednačine (3). Koristeći teoriju beskonačnih determinanata, kao aparat linearne algebre, koja je u to doba nastala i razvila se, Fredgholm je dao opštu teoriju integralnih jednačina (3). Primena teorije beskonačnih determinanata na probleme analize dala je ubrzo značajne rezultate. Stvorene su mogućnosti širokog korišćenja ne samo *fakata* algebre, nego i njenih *metoda*, a to je upravo postigao Fredgholm, uvodeći beskonačnu determinantu

$$\Delta = 1 + \int_0^1 K(p, p)\, dp + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} K(p, p) & K(p, q) \\ K(q, p) & K(q, q) \end{vmatrix} dp dq + \dots$$

koja, po njegovim rečima, u rešavanju integralnih jednačina igra analognu ulogu, kakvu u sistemu linearnih algebarskih jednačina igra determinanta obrazovana od koeficijenata uz nepoznate. On je za jednačinu (3) dobio teoreme o egzistenciji i broju njenih rešenja kao i odgovarajuće formule, koje su analogne teoremama i formulama u teoriji sistema linearnih algebarskih jednačina. Na taj su način rezultati linearne algebre bili neposredno primenjeni u teoriji integralnih jednačina. Osnovnu ulogu u razvitku funkcionalne analize odigrali su radovi Hilberta iz teorije integralnih jednačina, u kojima se on oslanjao na radove svojih prethodnika. U svojim proučavanjima, razlikuje jednačine prve vrste

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

i jednačine druge vrste

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

a njegova istraživanja u teoriji ovih jednačina nastala su kao rezultat stremljenja da se jednim teorijskim prilazom obuhvati što je moguće veća oblast linearnih problema analize. Za taj prilaz karakteristično je nastojanje da se dobiju novi rezultati u analizi kao prirodna generalizacija izvesnih fakata algebre, a kao najpogodniji instrument za realizaciju takvog nastojanja pokazale su se Hilbertove integralne jednačine. Hilbert je smatrao da je njegov osnovni rezultat u teoriji integralnih jednačina rešenje problema razlaganja proizvoljne funkcije u beskonačni red po sopstvenim funkcijama, a da se razlaganje proizvoljne funkcije u beskonačni red, u stvari, ne može posmatrati odvojeno od teorije integralnih jednačina. On je u vezi s rešavanjem problema integralnih jednačina razvio teoriju kvadratnih formi s beskonačno mnogo promenljivih i one su, sa svojim odgovarajućim pojmovima, našle svoje mesto u osnovama funkcionalne analize. Razlaganje funkcija u beskonačne redove tipa Furijeovog reda, koje je postignuto u teoriji integralnih jednačina, za

Hilberta je bilo od principijelnog značaja. Oslanjajući se na taj rezultat, on je povezao algebru i analizu u jedinstvenu teoriju funkcija beskonačnog broja promenljivih. Neprekidnu funkciju, razloženu u Furijeov red, Hilbert posmatra kao beskonačni niz Furijeovih koeficijenata, ostvarivši tako prelaz funkcije, definisane na kontinuumu vrednosti, ka beskonačnom nizu (odnosno funkciji celobrojnog argumenta), tj. prelaz od neprekidnog ka diskretnom. Blagodareći takvom prilazu, uspeo je da diferencijalne i integralne odnose među funkcijama zameni beskonačnim sistemima linearnih algebarskih jednačina. Tako je razrađen aparat nizova za proučavanje funkcija. Značajne su Hilbertove ideje o jedinstvu matematike, sintezi njenih raznih oblasti i o važnosti iznalaženja veza među njima, ideje kojima se rukovodio u svojim istraživajnima u teoriji integralnih jednačina, jasno pokazavši kako je u toj oblasti ostvarena plodotvorna sinteza algebre i analize, što je bilo od veoma važnog značaja za razvitak funkcionalne analize.

Algebarske metode igraju sve veću ulogu u funkcionalnoj analizi, naročito preko teorije *operatora*, tj. matematičkog pojma koji označava korespondenciju među elementima dva skupa X i Y, tako da svakom elementu $x \in X$ odgovara neki element $y \in Y$. Ako su X i Y skupovi brojeva, onda se uzima termin „funkcija“. *Funkcional* je operator koji prostor funkcija preslikava na skup brojeva, odnosno prostor brojeva. Na primer, operator diferenciranja svakoj diferencijabilnoj funkciji $f(x)$ dodeljuje odgovarajuću funkciju $f'(x)$. Tu je reč o preslikavanju prostora funkcija na prostor funkcija. Ili, npr., uzmimo prostor funkcija $f(x)$ koje imaju Koši – Rimanov integral u razmaku $[a, b]$, tada se svakoj funkciji $f(x)$ dodeljuje broj $\int_a^b f(x)\, dx$, što znači da je reč o funkcionalu, jer se prostoru funkcija dodeljuje prostor realnih brojeva. Deo funkcionalne analize je *operatorni račun* koji proučava osobine operatora i njihove primene u raznim konkretnim problemima, npr. u problemima teorije diferencijalnih jednačina. Posebno su značajni *linearni operatori* i njihova teorija. Pojmovi algebarskih struktura (grupa, prsten, polje i druge) su od naročitog značaja u teoriji i primenama funkcionalne analize.

U metodama i idejama funkcionalne analize značajnu ulogu igra pojam *matematičkog prostora*. Pod *prostorom* se razume svaki uređen par od proizvoljnog skupa S i proizvoljnog postupka f koji svakom $X \subseteq S$ dodeljuje potpuno određen skup $f(x) \subseteq S$. Skup $f(x)$ zove se *adherencija* ili *sfera doticaja* skupa X. Sam prostor se označava sa (S, f).

Moris Freše je 1909. uveo *metričke prostore*. Naime, skup X elemenata proizvoljne prirode je *metrički prostor*, ako svakom paru $x, y \in X$ odgovara realan broj $d(x, y)$, odnosno *rastojanje* elemenata x i y, koje zadovoljava uslove : 1. $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, x)=0$ i ako je $d(x, y)=0$, onda je $x=y$; 2. $d(x, y)=d(y, x)$; 3. $d(x, z) \leqslant d(x, z)+d(z, y)$, što označava nejednakost trougla. To su aksiome metričkog prostora. Kad je skup X pretvoren u metrički prostor, kaže se da je u njega uvedena *metrika*, ili da je skup X *metrizovan*. Uređeni par (X, d) je, dakle, *metrički prostor*. Postoje i drugi prostori: *vektorski prostor*, *topološki prostor*, *Banahov prostor* i *Hilbertov prostor* kao specijalan slučaj onih Banahovih prostora u kojima je definisan skalarni proizvod, kao i niz drugih. Pojam prostora je jedan od najvažnijih pojmova funkcionalne analize. Za nju je karakteristično razmatranje beskonačnih prostora koji se sastoje od funkcija, nizova ili bilo kakvih drugih opštih objekata, kao i od operacija na tim objektima. Reč je o tzv. *funkcionalnim* prostorima.

Funkcionalna analiza, kao moderna matematička disciplina, oformila se na prelomu XIX i XX v. i danas je u punom razvitku. Formirala se kad se otkrila duboka analogija među pojmovima algebre, analize i geometrije. Ona objedinjuje i uopštava ideje različitih delova klasične analize (npr.: varijacionog računa, diferencijalnog i integralnog računa, diferencijalnih i integralnih jednačina), teorije skupova, linearne algebre i mnogomerne geometrije. Njene ideje i metode široko se primenjuju u matematici i u savremenoj fizici, naročito u kvantnoj fizici. Može se podvući da je teško i zamisliti rešenje nekog ozbiljnijeg problema iz matematičke fizike ili numeričke analize bez primena odgovarajućih ideja i metoda funkcionalne analize. Njen razvitak prate kako matematičari tako i oni koji se bave rešavanjem ozbiljnih problema matematičke fizike i tehnike.

Videti Kuda ide savremena matematika?, strana 156.

Literatura: *Matematičeskaja enciklopedija*, Tom 3, Moskva, 1983; Dr Đuro Kurepa, *Teorija skupova*, Zagreb, 1951; Jean Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques* 1700 – 1900. Tom 2, Paris, 1978; *Matematika, e sodržanije, metodi i značenije*, Tom 3, Moskva 1956; Ernest Stipanić, Matematičke teme na XIII Međunarodnom kongresu istorije nauka, Matematički Vesnik, knj. 8 (23), sv. 3, Beograd, 1971; G. J. Gleizer, *Istorija matematiki v srednje škole*, Moskva, 1971.

Topologija

Topologija (grčki *tòpos* = mesto i *lògos* = reč) je grana savremene matematike, drugim rečima to je matematička disciplina novijeg datuma. Ona proučava svojstva prostora najopštijeg karaktera, tzv. *topološke prostore* i *neprekidna preslikavanja*. Pod neprekidnim preslikavanjem razumemo transformacije koje preslikavaju jedan prostor P_1 u drugi P_2, ali tako da svakoj tački prvog prostora P_1 pridružuju jednu tačku drugog prostora P_2 i da se ne naruši odnos dodira tačaka i skupova tačaka u prostoru. Posebno su važna neprekidna preslikavanja u kojima se ne može dogoditi da dve različite tačke pređu u istu tačku. Ako je uz to i pripadno inverzno preslikavanje neprekidno, onda je reč o *topološkim preslikavanjima* ili *homeomorfizmima* (grčki hómoios = isti ili sličan i méros = deo ili čestica). Ova preslikavanja su deformacije bez kidanja i lepljenja, koje se mogu, npr., vršiti s objektima od elastične gume. Zato se o topologiji popularno govori kao o *geometriji gume*.

Ako se dva prostora P_1 i P_2 mogu jedan na drugi topološki preslikati, onda su oni sa stanovišta topologije ekvivalentni. Tako su, npr., kocka i lopta ekvivalentni, jer se navedenim transformacijama može preći iz kocke u loptu, i obrnuto, iz lopte u kocku. Posebno se u topologiji proučavaju one osobine koje se ne menjaju u topološkim preslikavanjima. One se nazivaju *topološkim invarijantama*. Topološka invarijanta jeste dimenzija; npr., kocka i kvadrat nisu topološki ekvivalentni, jer su različitih dimenzija; kocka je trodimenzionalna, a kvadrat je dvodimenzionalan. Isto tako lopta i torus („kolut za spasavanje") nisu topološki ekvivalentni, iako su iste dimenzije, jer jednostavna zatvorena kriva na loptinoj površi deli tu površ na dva dela, dok na torusnoj površi postoje jednostavne zatvorene krive koje tu površ ne komadaju. Svaki prosti poliedar, čiji je ma koji ravan presek Žordanova kriva, tj. takva kriva koja deli ravan na dva dela, homeomorfan je sa loptom. Ma koji konveksan poligon homeomorfan je sa krugom. Ako se euklidska ravan upotpuni beskonačno dalekim pravcem, dobija se projektivna ravan i ona je topološki tip zatvorene površi.

Transformacije, što smo već na određeni način napred istakli, koje su uzajamno jednoznačne i obostrano neprekidne jesu *topološke trans-*

formacije ili *homeomorfije*. Možemo reći da se geometrija koja ih proučava zove *topologija* ili *analiza položaja* (*analysis situs*). Ona je, dakle, matematička disciplina o najbitnijim kvalitativnim geometrijskim osobinama, koje se zasnivaju na pojmu neprekidnosti (naime, pri neprekidnom deformisanju neke figure F u figuru F′ dvema bliskim tačkama A i B na F odgovaraju dve bliske tačke A′ i B′ na F′ i obratno). Figure F i F′ su tada *homeomorfne*, odnosno *topološki ekvivalentne*.

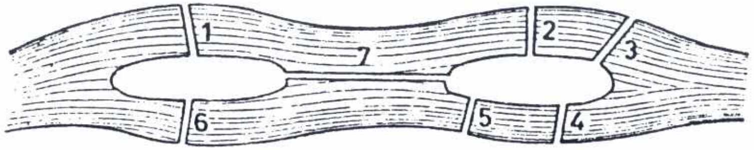
U topologiji geometrijska figura ima najširi smisao. Osnovni problem topologije sastoji se u tome da se, kad su date dve figure, ustanovi da li su one homeomorfne ili to nisu, i da se uz to, kad je to mogućno, navedu svi nehomeomorfni tipovi figura. Taj problem je rešen samo u nekim slučajevima, posebno u slučajevima elementarnih površi, što znači zatvorenih površi koje se mogu obrazovati slepljivanjem konačno mnogo delova ravni. To su, npr. lopta i torus, dvodimenzioni oblici euklidskog prostora. Isecimo iz lopte jedan njen deo i na tako nastali otvor prilepimo „ručicu", ili „dršku", a to je u stvari torus na kome je načinjen jedan otvor, onda se dobija lopta s jednom ručicom, koja je homeomorfna s torusom. Isto je tako lopta sa *n*-ručica, koja se zove normalna forma površi, homeomorfna sa *n*-to torusom sa *n* rupa. Broj ručica je topološka invarijanta i zove se rod ili genus površi.

Navedene zatvorene površi imaju još jednu zajedničku topološku osobinu. Naime, one su dvostrane, što znači da su orijentisane. Svakoj tački takve površi ako se dodeli kružić s naznačenim smerom obilaženja (*indikatrisa*), onda ma koje dve bliske tačke imaće istu indikatrisu. Protivno tome, postoje jednostrane površi na kojima ima bliskih tačaka čije su indikatrise različite. Mebijusova (August Ferdinand Möbius, 1790–1868) traka je takva otvorena površ. Model Mebijusove trake dobija se ako se sastave ivice AD i BC pravougaonog lista hartije ABCD tako da se temena A i C odnosno B i D poklope. Topološke osobine prostora su takođe jednostranost, odn. neorijentisanost. I kao što se za zatvorene orijentisane površi mogu izgraditi njihove normalne forme, npr. lopta sa n ručica, isto tako se i za zatvorene neorijentisane površi mogu na sličan način izgraditi normalne forme, npr., ako se na otvore lopte zalepe Mebijusove trake.

Topologija ima svoj istorijski razvitak. Već se kod Lajbnica* nalazi topološka ideja u vidu „analize položaja", koju pominju matematičari XVIII i prve polovine XIX v. U tom pogledu znamenit je „problem prelaza preko kenigsberških (kalinjingradskih) mostova". Naime, kroz Keningsberg (Kalinjingrad), u zapadnom delu Sovjetskog Saveza, prolazi reka Pregel. U tom delu reke nalaze se dva ostrva koja su sa obalom i međusobno povezana sa

sedam mostova, kao što pokazuje navedena slika 1.

Slika 1.

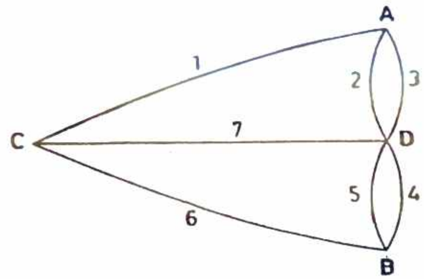


Neki Keningsberžanin (Kalinjingrađanin) je pre više od dvesta godina postavio svojim sugrađanima pitanje: da li se može u jednoj šetnji preći preko svakog mosta samo jedan put?

Svima se na prvi pogled učinilo da je mogućno i svaki je pomislio: potrebno je samo nekoliko puta strpljivo i pažljivo pokušati pa će se pronaći način. I mnogi su pokušali, ali uzalud. Problem prelaza preko keningsberških (kalinjingradskih) mostova ubrzo se nadaleko čuo.

Za njega se zainteresovao 1736. Ojler*. On je najpre pokazao da je to pitanje isto kao i ovo drugo: da li se može nacrtati figura kao na slici 2 jednim potezom olovke, ali da se olovka ne odvaja od hartije i da se nijedan deo linije ne pređe dva ili više puta, već samo jednom? Ojler je, dakle, najpre pokazao da se šetnja preko kenigsberških (kalinjingradskih) mostova može ostvariti ako se i nacrtana figura na navedeni način može preći olovkom.

Tačkama A i B obeležene su obale reke, a tačkama C i D ostrva u reci, dok linije predstavljaju mostove. Slika 2 prikazuje geometrijsku figuru, pa je Ojler i problem prelaza preko kenigsberških (kalinjingradskih) mostova uzeo da raspravi i reši kao geometrijski problem. Matematičkim rasuđivanjem dokazao je da se figura na slici 2 ne



Slika 2.

može nacrtati na pomenuti način, a samim tim, dakle, da nije mogućno ostvariti ni navedenu šetnju preko mostova.

Ono što je u prvi mah izgledalo mogućno dublja matematička rasuđivanja su pokazala da je stvarno nemogućno.

Problem prelaza preko kenigsberških (kalinjingradskih) mostova zabeležen je u istoriji matematike kao značajan problem. On je podstakao i doprineo da se razvije *topologija*, vrlo važna grana matematike, specijalno geometrije, koja danas igra veliku ulogu u raznim matematičkim teorijama i primenama.

Na slici 2 uočavamo tačke A, B, C i D i primećujemo da iz tačke A, B i C polaze na razne strane po tri linije, dok ih iz tačke D polazi pet. Te tačke se zovu čvorovi figure. Ako iz čvora polazi neparan broj linija, kaže se da je čvor neparan, a ako polazi paran broj linija, onda je čvor paran. Geometrijskim ispitivanjem raznih figura koje imaju čvorove došlo se do zaključka: figura se ne može preći jednim potezom olovke, a da se ne odvaja od hartije, i da se nijedna linija figura ne pređe više od jedanput, ako figura ima više od dva neparna čvora. Takvim osobinama figura, kao i drugim sličnim, bavi se topologija. Figura na slici 2 ima četiri neparna čvora, zato se ona ne može nacrtati jednim potezom olovke, pa je, prema tome, nemogućno ostvariti i pomenutu šetnju preko kenigsberških (kaliningradskih) mostova.

Teorema o četiri boje do koje je došao Keli (Arthur Cayley, 1821 – 1895) od značaja je za razvitak topologije. Naime, da bi se obojila ma koja politička karta država ili ma kakvih administrativnih oblasti dovoljne su svega četiri boje pa da države, odn. oblasti sa zajedničkom granicom budu različito obojene. Dokazano je da je za tu svrhu dovoljno pet boja i da tri boje nisu dovoljne. I Fridrih Gaus* je postigao niz rezultata u topologiji koje nije objavio. Otkrio je, npr., jednu topološku osobinu prostornih krivih, a naime, dvema prostornim Žordanovim krivim bez zajedničkih tačaka može se dodeliti jedan ceo broj, broj zapletenosti, koji je jednak nuli samo onda kad jedna od tih krivih ograničava neki deo orijentisane površi koji druga kriva ne seče.

Bitnu ulogu u razvitku topologije odigrala su razna uopštenja Ojlerove teoreme o poliedrima, prema kojoj broj temena N_0, broj ivica N_1 i broj strana N_2 konveksnog poliedra zadovoljava relaciju $N_0 - N_1 + N_2 \doteq 2$. Do iste teoreme došao je Dekart*, a zanimljivo je ovde istaći, da je Serafin Rafael Minić (1808 – 1883), profesor matematike u Padovi, čiji je otac, Stanislav Minić, rodom iz Boke Kotorske, takođe pokušao da dokaže navedenu teoremu. Niz drugih matematičara se bavilo istom teoremom, kao Luj Poanso (Louis Poinsot, 1777 – 1859), Koši* i Simon L'Uilije (Simon L'Huilier, 1750 – 1840).

Termin *topologija* prvi put se pojavio u delu *Prethodna ispitivanja u topologiji* (*Vorstudien zur Topologie*, 1847) Benedikta Listinga (Johann Benedict Listing, 1808 – 1882), Gausovog učenika i profesora matematike na univerzitetu u Getingenu. Tako je bio zamenjen Lajbnicov termin *geometrija položaja*. Listing je razmatrao zavezanost, spajanje i isprepletanje i druge oblike uzajamnog položaja linearnih kompleksa. Vidnu ulogu u razvitku topologije odigrao je svojim delima Mebijus.

S drugog stanovišta došao je do topološke klasifikacije površi Bernard Riman (Bernhard Riemann, 1826 – 1866) u svom delu *Teorija Abelovih funkcija* (*Theorie der Abelschen Funktionen*, 1857). On posmatra primere jednopovezane, dvopovezane i tropovezane površi. U navedenom delu dokazuje da rod p Rimanove površi, broj n njenih listova i broj w granjanja zadovoljava relaciju $w - 2n = 2p - 2$ i primećuje da je „taj odnos u suštini nemetričkog karaktera i da pripada oblasti analize položaja." Nađena topološka svojstva površi Riman je preneo na mnogomerne raznolikosti. Rimanove ideje o *svezanosti* mnogomernih raznolikosti izložio je Enriko Beti (Enrico Betti, 1823 – – 1892), profesor i direktor Više normalne škole u Pizi, u svom delu *O prostorima proizvoljnog broja dimenzija* (*Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni*, 1871). Ideja Rimana i Betija poslužile su kao osnova u zasnivanju, krajem XIX v., kombinatorne topologije Poenkarea*.

Bitnu ulogu u rešavanju raznih zadataka topologije odigrao je Žordan*. U svom delu *O deformaciji površi* (*Sur la déformation des surfaces*, 1866) proširio je neke Gausove zadatke i dokazao je neke teoreme. Značajno je njegovo delo *O konturama povučenim na površima* (*De contours tracés sur les surfaces*, 1866), kao i njegova znamenita teorema, prema kojoj zatvorena neprekidna kriva u ravni deli ravan na dve oblasti, unutrašnju i spoljašnju, pri čemu unutrašnja oblast uvek sadrži krug konačnog poluprečnika.

Razdeo *analiza položaja* nalazi se u *Erlangenskom programu* Klajna (Felix Klein, 1849 – 1925) koji je posvećen ulozi grupa u različitim geometrijskim transformacijama. Taj razdeo geometrije Klajn karakteriše kao razdeo gde se „pronalazi ono što ostaje neizmenjeno pri transformacijama sastavljenim iz beskonačno malih deformacija". U svom delu *Primedbe o svezanosti površi* (*Bemerkungen über Zusammenhang der Flächen*, 1874) dokazuje da je projektivna ravan homeomorfna sa Mebijusovom trakom slepljenom s krugom. Svoja topološka razmatranja izlaže u kursu predavanja *O teoriji Rimanovih algebarskih funkcija i njihovih integrala* (*Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, 1882). Značajnu ulogu u razvitku topologije odigrao je Klajnov učenik Valter fon Dik (Walther von Dyck, 1856 – 1934).

Poenkare i Kantor* proučavali su topološke osobine.

U tim proučavanjima Kantor, tvorac teorije skupova, služi se metodama te teorije, smatrajući da je geometrijska figura odn. prostorni oblik skup tačaka. Zato se ta topologija zove *skupovna topologija*. Ona nalazi mnoge primene u analizi, naročito u teoriji kompleksnih funkcija. Početkom XX v. Freše (Maurice Frechet, 1878 – 1973) otkriva apstraktne prostore koji su znatno uticali na razvitak skupovne topologije. Za taj prostor bitno je to da je za posmatrani skup tačaka uveden pojam okoline ili blizine tačaka i da se neprekidnim smatraju one transformacije koje bliske elemente prevode ponovo u bliske elemente. Ideja apstraktnog prostora dala je osnovu za stvaranje *apstraktne* ili *opšte topologije* i ona danas ulazi u mnoge druge oblasti geometrije i analize. Hausdorf (Felix Hausdorf, 1868 – 1942) je u svom delu *Osnovni tokovi teorije skupova* (*Grundzüge der Mengenlehre*, 1914) dao aksiomatičko zasnivanje skupovne topologije, što je izvanredno uticalo na njen razvitak.

Poenkare je zasnovao drugi pravac u topologiji, *kombinatornu* (*algebarsku*) *topologiju*. Ona se bavi istraživanjem kompleksa, tj. geometrijske figure sastavljene od konačno mnogo ili prebrojivo mnogo simlpeksa od 0, 1, 2, ..., n dimenzija, tako da svaka tačka kompleksa pripada konačnom broju simpleksa i da ma koja dva simpleksa nemaju nijednu zajedničku unutrašnju tačku ili imaju jednu zajedničku ivicu. Simpleks je sličan pojmu trougla i pojmu tetraedra. Kao što je trougao određen trima tačkama dvodimenzionog prostora koje ne leže na jednoj pravoj, a tetraedar četirma tačkama koje ne leže u jednoj ravni, tako je n-dimenzioni simpleks određen $n+1$ tačkom n-dimenzionog prostora pod uslovom da te tačke (temena) ne pripadaju prostoru od $n-1$ dimenzije. Strane n-dimenzionog simpleksa su simpleksi od $n-1$ dimenzije. Aparat algebre, preciznije teorije grupa, je vanredno pogodan za proučavanje kombinatornih shema, na šta se svodi ispitivanje kompleksa, pa se zato kombinatorna topologija služi aparatom algebre. Kompleksi se uopšte upotrebljavaju u cilju ustanovljenja topoloških invarijanata poliedara, zbog toga važnu oblast primene kombinatorne topologije čine poliedri, koji su zajednički domen istraživanja kombinatorne i skupovne topologije. Posle veoma značajnih radova Brauera (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881 – 1966), koji je izgradio topologiju poliedara davši svojim radovima veliki zamah novim istraživanjima i pokazavši plodotvornost kombinacije algebarskih i skupovnih metoda, ustanovljeno je da su u najopštijim geometrijskim figurama organski povezane međusobno kombinatorne i skupovne osobine. Brauer je izgradio osnove opšte geometrijske teorije zatvorenih skupova, primenjujući metode kombinatorne topologije na proizvoljne skupove tačaka.

Bitno novi pravac u razvitku teorijsko-skupovne topologije ostvaren je u radovima sovjetskih topologa, posebno u opštoj teoriji dimenzija P. S. Urisona (1898 – 1924), koja je postavila osnovu klasifikacije opštih tačkastih skupova na osnovu broja dimenzija. Ta se klasifikacija pokazala veoma plodotvornom i dala je nova gledišta u izučavanju veoma opštih geometrijskih

oblika. Pomenimo u vezi s tim značajne radove L. A. Ljusternika i L. G. Šnirelmana, u kojima su, uporedo s drugim rezultatima, rešeni neki znameniti problemi Poenkarea. Veoma su značajne algebarske metode kombinatorne topologije najvećeg sovjetskog topologa P. S. Aleksandrova u oblasti teorije skupova, što je dovelo do novih pravaca istraživanja u topologiji, kao i radovi L. S. Pontrjagina, V. G. Boltjanskog i A. N. Kolmogorova, čiji su radovi u vezi s ∇-homologijom u kombinatornoj topologiji.

Pomenimo još samo da su značajni topološki problemi diferencijalne geometrije i da su se o tim problemima pojavila neka važna dela u kojima se ne proučavaju topološka svojstva koja se odnose na geometrijsku figuru u celini, već se proučavaju tkiva, podesno izabrane proste geometrijske figure, koje imaju topološke invarijante već u malom.

Naglasimo najzad da su do formiranja topologije kao matematičke discipline doveli, s jedne strane, problemi matematičke analize, posebno teorije realnih funkcija, a s druge, geometrijski problemi i problemi teorije Rimanovih površi. Saglasno tim problemima istakla su se dva smera u topologiji, naime, *skupovna* i *kombinatorna topologija*. Kombinatorni karakter je u suštini algebarske prirode i saglasno tome naziv *kombinatorna topologija* postepeno je zamenjen nazivom *algebarska topologija*. Prostorima se u algebarskoj topologiji dodeljuju stanoviti objekti apstraktne algebre, kao npr., grupe, algebarski prstenovi itd., koji su topološke invarijante. Obe grane topologije, skupovna i kombinatorna, u današnjem razvitku vrlo su gusto isprepletene u jedinstvenu teoriju. U toj teoriji su neki od najvažnijih delova: *teorija homologije, teorija homotopije* i *teorija diferencijalnih mnogostrukosti*.

Topologija predstavlja osnovu za mnoge grane savremene matematike. Posebno nalazi primenu u teoriji funkcija, funkcionalnoj analizi, diferencijalnim jednačinama, kao i u diferencijalnoj i algebarskoj geometriji. No, mora se istaći, da i pored vanredno visokog stepena apstraktnosti, topologija je ponikla na očiglednim prostornim predstavama i u tome se vidi veza topoloških ispitivanja sa realnošću. Ta veza sve više dolazi do izraza u primenama topologije u raznim oblastima matematičkih nauka, u koje je ulila svoje sveže tokove.

Videti Kuda ide savremena matematika?, strana 155.

Literatura: P. S. Aleksandrov, *Topologija*, Matematika, e sodržanije, metodi i značenije, tom III, Moskva, ANSSSR; 1956, str. 181 – 212. Milica Ilić-Dajović, *O razvitku geometrije*, III Nastava matematike i fizike u srednjoj školi 3, Beograd, 1953, str. 57 – 63. A. N. Kolmogorov, A. P. Juškević, *Matematika XIX veka, Geometrija* (autori: B. L. Laptev i B. A. Rozenfeld), str. 96 – 105, Moskva, Izdateljstvo „Nauka", 1981.

Trigonometrija

Grana elementarne matematike koja izračunava elemente trougla definisanog numeričkim podacima. Deli se na *trigonometriju u ravni*, ako je trougao u ravni, i na *sfernu trigonometriju*, ako trougao obrazuju velike kružnice sfere. Ovaj izraz sve više označava proučavanje „trigonometrijskih odnosa": sinus, kosinus, tangens i kotangens jednog luka ili ugla. Kaže se i da su to *kružne funkcije*.

Nastala je i razvila se zajedno sa astronomijom, kao njen deo u vidu numeričkog aparata saglasnog praktičnim potrebama astronomije. Ove potrebe su proisticale iz problema merenja vremena, zatim iz problema orijentacije u prostorima, kao i iz astrologije koja se bavila proricanjem sudbina ljudi na temelju posmatranja nebeskih tela i pojava na nebu. Koliko je trigonometrija bila vezana za astronomiju veoma jasno svedoči činjenica da je vremenski pre nastala i razvila se sferna nego ravna trigonometrija. O svemu ovome svedoče mnogobrojni pisani spomenici astronomije i matematike drevnih kulturnih naroda.

Kod Grka, trigonometrija je skup tehnika usko povezanih za astronomiju. Ona se zanima samo za sferne figure, kao funkcije koristi samo tetive kružnih lukova, za ustanovljenje tablica oslanja se na upisan četvorougao i za korišćenje sfernih figura na Menelajevu teoremu. Računi se izvode pomoću vavilonskih seksagezimalnih razlomaka. Proučavanje evolucije trigonometrije, počev od ovog već razvijenog doba, odnosi se na sledeće: uvod u ravnu trigonometriju, zamenu sinusa sa tetivama, pojavu drugih trigonometrijskih linija, nove postupke za izračunavanje tablica, pojavu decimalnih razlomaka, zatim, od kraja XVI v. na primenu, najpre algebre na trigonometriju, i najzad infinitezimalne analize.

Antika

Starogrčki, antički astronomi Hiparh, Aristarh, Ptolemej, Menelaj i drugi stvorili su čitav trigonometrijski aparat za potrebe astronomije. Razvili su precizno račun sa tetivama kružnice, što praktično znači račun sa sinusom i kosinusom i na osnovu tog računa sastavili su prve numeričke tablice za sinus i kosinus.

Menelajeva rasprava *Sferike* (I v.) upoznala je Klaudija Ptolemeja Aleksandrijskog (90–168) sa osnovnim stavovima sferne trigonometrije, posebno sa slavnom „teoremom Menelajevom". Ako je jedan trougao ABC, u ravni ili na sferi, presečen pravom ili jednim velikim krugom u L, M, N, onda je u ravni

$$\frac{LA}{LB}=\frac{NA}{NC}\cdot\frac{MC}{MB},$$

a na sferi

$$\frac{\sin LA}{\sin LB}=\frac{\sin NA}{\sin NC}\cdot\frac{\sin MC}{\sin MB}.$$

Menelaj je sastavio i šest knjiga o tetivama kružnice, ali je ovaj rad izgubljen; ipak, možda je on sadržao modele koji potiču bar od Hiparha, astronoma iz II v. pre n. e. Ako je grčka terminologija bila pod uticajem tradicije, pažnja matematičara je privučena posle Menelaja „polutetivom dvostrukog luka", našim sinusom, koji od tog vremena igra osnovnu ulogu.

Najbolje sačuvani spomenik grčke trigonometrije je skup od IX i XI poglavlja prve knjige Ptolemejeve *Matematičke sintakse* ili *Almagesta*.

Deveto poglavlje „Procena upisanih pravih (duži) u kružnici", odnosi se na konstrukciju tablica tetiva. Ovom prilikom Ptolemej koristi rezultate četvrte knjige Euklidovih *Elemenata*, kojima dodaje jedan stav koji danas nosi njegovo ime: „U svakom četvorouglu upisanom u kružnici, proizvod dveju dijagonala jednak je zbiru proizvoda suprotnih stranica". Ovaj skup je dopunjen sa nekoliko značajnih nejednakosti koje dozvoljavaju interpolacije. Dijametar je podeljen na 120 jednakih delova, i kružnica na 360°. Tablice su izračunate od 30′ do 30′ luka. Tetive su date u delovima dijametra, minutima i sekundama.

Jedanaesto poglavlje „Prethodne stavke za sferične transformacije" ustanovljuje Menelajeve teoreme u ravni i na sferi i koristi ih sistematski u astronomskim računima.

Indusi i Arapi

U istom smislu razvijali su trigonometriju i staroinduski matematičari, koji su se istakli svojim numeričkim trigonometrijskim tablicama. Indusi su dali tehničko ime polutetivi dvostrukog ugla. Ovo ime postalo je naš sinus preko prevoda na arapski jezik, zatim sa arapskog na latinski jezik.

U periodu ranog i poznog srednjeg veka, arapski astronomi i matematičari, podstaknuti ne samo astronomskim, nego i posebno astrološkim razlozima, kao i potrebama graditeljstva, dalje su razvili trigonometriju usavršavanjem računa sa tetivama kružnice, tako da su se u tom računu, u geometrijskom vidu, javljale sve trigonometrijske funkcije i neke njihove osnovne međusobne relacije. I oni su bili poznati po svojim numeričkim trigonometrijskim tablicama. Arapskom trigonometrijom započeo je proces odvajanja trigonometrije od astronomije i njenog konstituisanja kao samostalne grane matematike.

Kod Arapa, tačne tablice sinusa su izračunate u seksagezimalnoj deobi, posebno kod Abu-al-Vafa al-Buzađanija (940–997. ili 998) za deobe na četvrt stepena, sa četiri seksagezimalne pozicije. Pored sinusa, ovaj matematičar uvodi pod drugim imenima i tangens i sekans.

Postoji sjajan primer korišćenja tablica u dve trigonometrije istočnih Arapa u *Raspravi o četvorouglu* Nasira al-Dina al Tusija (1201–1274). Četvorougao tu obrazuju jedan sferni trougao i jedan veliki krug i može da se koristi Menelajeva teorema. Rešenje trouglova u ravni izloženo je u početku dela i rešenje ma kojih sfernih trouglova je jasno dato kao da je cilj dela koje obrazuje petu knjigu. Proporcionalnost sinusa stranica onima suprotnih uglova, već poznata Al-Buzađaniju, ponovo je dokazana. Kad je trougao dat svojim trima uglovima, rešen je zahvaljujući suplementarnom trouglu. Ovaj poslednji stav kasnije će ponovo naći Vijet* (XVI v.).

Zapadna renesansa

U razdoblju od XII do XV v. u Evropi se intenzivno prevode na latinski jezik, uz komentare i različite prerade i dopune, matematička dela sa grčkog i arapskog, među njima i dela iz astronomije i trigonometrije. Na taj način su tada starogrčka i arapska trigonometrija snažno uticale na razvitak trigonometrije u okviru evropske astronomije i matematike. U to vreme već se široko primenjuje sinusna teorema i druge trigonometrijske relacije u vezi sa rešavanjem trougla. Postepeno se razvijaju i uvode trigonometrijske simboličke oznake.

Uvek tesno povezana sa astronomijom i astrologijom, trigonometriju na Zapadu naročito su proučavali u XIV v., najpre predstavnici oksfordske škole, posebno Modiut (John Mauduith, oko 1306–1340) i Valingford (Richard Wallingford, 1292–1335).

Najistaknutiji predstavnik te epohe u oblasti trigonometrije jeste Regiomontanus (1436–1476). On oko 1464. sastavlja svoje delo *De triangulis* (*O trouglovima*) koje je veoma blisko *Raspravi o četvorouglu* Al-Tusija, ali osobenost njegove redakcije i čvrsta konstrukcija čine ga originalnim delom koje zasniva zapadnu trigonometriju. To je prvo celovito delo iz trigonometrije, objavljeno posle njegove smrti 1533, i kao takvo bilo je od velikog uticaja na dalji razvitak trigonometrije u XVI i XVII v. Regiomontanusu se duguje i tablica tangensa, *Tabula secunda* (*Druga tablica*), gde je poluprečnik podeljen na 100 000 delova. Inače, teškoće izračunavanja umnožile su kod različitih autora vrste trigonometrijskih linija. Pod veoma različitim nazivima javljaju se kosinus, tangens, kotangens, sekans i kosekans kao i „arkus sinus“.

Prvi Vijetovi matematički radovi odnose se na trigonometriju. Njegov *Canon mathematicus* (*Matematički zakon*, 1579) je tablica šest trigonometrijskih linija, klasičnih za njegovu epohu, koje su izračunate od minuta do minuta za poluprečnik 100 000 (ponekad sa jednom ili dve decimale preko celog dela). To je prva potpuna tablica te vrste. Tu se nalaze formule za rešenje ravnih i sfernih trouglova, kao i Vijetova izjava: „U matematici šezdeseti delovi i šezdeset moraju biti retke ili nulte upotrebe. Naprotiv, hiljaditi delovi i hiljade, stoti delovi i stotine, deseti delovi i desetice i progresije iste vrste, uzlazne ili silazne, moraju biti česte i konstantne upotrebe“. Zahvaljujući svojim algebarskim oznakama, Vijet je mogao dati sasvim nove izraze linijama višestrukog datog luka u funkciji linija ovog luka. On pokazuje duboku analogiju između ovih formula i onih u razvitku stepena binoma. Od tada, trigonometrija, kao proučavanje kružnih linija, i algebra polinoma pružaju međusobni oslonac.

Teškoće računa sa velikim brojevima navele su najpre astronome XVI v. na korišćenje prostafereze, danas zastarele, koja je posredstvom kružnih linija proizvode velikih brojeva svodila na zbirove. Ali sa Neperom logaritmi obeležavaju znatan progres. Tada se, pored starih „prirodnih trigonometrijskih linija“, pojavljuju njihovi logaritmi ili „veštačke trigonometrijske linije“.

Ka novom vremenu

Do XVII v. trigonometrija se skoro isključivo bavila rešavanjem trougla u vezi sa raznim primenama u astronomiji, geografiji, moreplovstvu, geodeziji i arhitekturi, i razvijala se pretežno na osnovu geometrijskih metoda, a od tada počela se razvijati sve više na osnovu analitičkih, odn. aritmetičko-algebarskih metoda. U tom pravcu njen sadržaj se značajno produbio i proširio tokom XVII v., a uporedo se znatno razvio njen simbolički aparat. Sedamnaesto stoleće sa Njutnom donosi veoma moćno oruđe razvoja prirodnih i veštačkih kružnih funkcija, koliko direktnih, toliko i inverznih u cele redove.

Bitni progres ostvaruje se tokom XVIII v., naročito radovima Ojlera*, kako u pogledu sadržaja tako i u pogledu simboličkog aparata. On istinski zasniva modernu trigonometriju. Njemu se duguje sadašnja upotreba malih latinskih slova *a*, *b*, *c* za stranice trougla u ravni ili na sferi i odgovarajuća velika slova A, B, C za suprotne uglove. Njegovi doprinosi sfernoj trigonometriji sakupljeni su u dve osnovne rasprave. U prvoj (1753), Ojler polazi od činjenice da su na sferi geodezijske linije velike kružnice, i prema tome, koristi teoriju ekstremuma. Tako nalazi deset relacija koje postoje između elemenata jednog pravouglog trougla na sferi (Neperove analogije). Zatim proširuje te relacije na ma koje trouglove i otuda vešto izvlači upotrebu u rešavanju trouglova. Kasnije (1779) smatra delikatnim da poglavlje elementarne matematike zasnuje na transcedentnim razmatranjima. On tada pokazuje da se može stići do cilja koristeći asocirani triedar sfernom trouglu i uzimajući za vrh centar sfere. Iz tri osnovne relacije izvučene iz figure, ovaj rad prvi izvodi ceo aparat formula koji se danas nalazi u trigonometrijskim raspravama.

Međutim, osnovni doprinos Ojlera jeste njegovo proučavanje *kružnih funkcija*. Ako se poluprečnik uzme za jedinicu, te funkcije su stare „trigonometrijske linije", date ne više geometrijskim razmatranjima, već njihovim razvojima bilo u cele redove, bilo u beskonačne proizvode. Ove funkcije obrazuju sa eksponencijalnim funkcijama i njihovim inverznim logaritamskim funkcijama naše elementarne transcendentne funkcije. Analogije između kružnih funkcija i eksponencijalnih funkcija, Ojler je sa smelošću počeo da koristi a njegova darovita intuicija nikad nije demantovana u ovoj oblasti. Od tada, proučavanje trigonometrijskih funkcija nalazi svoje osnove u opštem proučavanju funkcija. On je trigonometrijske funkcije tretirao analitičkim putem, ne vezujući ih obavezno za trigonometrijsku kružnicu. Njihov argument shvata uopšteno kao realan broj, a ne isključivo kao ugao ili luk. Prvi je trigonometriju sistematski izložio analitički, oslobodivši je maksimalno, za to vreme, od intuitivno-geometrijskih elemenata i tako je trigonometriji dao savremeni oblik.

Istaći ćemo ovde da je za razvitak sferne trigonometrije zaslužan R. Bošković (1711 – 1787), savremenik Ojlerov. U istoriji matematike naglašava se da je on celu sfernu trigonometriju sveo na šest teorema i jednu konstrukciju, i da je pokazao kako se iz mnogobrojnih odnosa koji su mogući u sfernoj trigonometriji dobijaju četiri osnovne, pa da se time „zauvek upisao u anale sferne trigonometrije" i da je potrebno da se pomenute jednačine zovu Boškovićeve diferencijalne jednačine sferne trigonometrije. Boškovićevi radovi iz sferne trigonometrije nastali su iz njegovih praktičnih istraživanja u astronomiji i geodeziji.

Analitički zasnovana, trigonometrija nalazi tokom XIX v. široku primenu u mehanici, fizici i tehnici, naročito u proučavanjima oscilatornih kretanja i uopšte u proučavanjima pojava periodičkog karaktera (npr.: talasna kretanja u akustici, optici i elektromagnetici). Funkcije sinus i kosinus postale su osnovno sredstvo u matematičkim tumačenjima oscilatornih kretanja i pojava. Dokazano je da se svako periodsko kretanje može sa dovoljnom tačnošću predstaviti u vidu zbira prostih harmonijskih oscilacija, tj. oscilacija koje se matematički izražavaju formulom $y = a\sin(bx + c)$, a harmonijska oscilovanja nazvana su u fizici i tehnici sinusoidalnim

oscilovanjima. Razvila se harmonijska ili Furijeova analiza, zasnovana na sinusu i kosinusu, kao posebna grana matematičke analize, koja je veoma značajna za matematičke teorije i primene.

Trigonometrijske funkcije su danas predmet teorije funkcija kao posebne grane matematike, pa se trigonometrija više ne tretira kao posebna oblast matematike, a rešavanje trougla pomoću trigonometrijskih metoda obično se posmatra kao posebno poglavlje geometrije.

Dva jasno ocrtana toka u razvitku trigonometrije, geometrijski kao tok nižeg stepena apstrakcije (koji vremenski traje od rađanja trigonometrije pa gotovo do XVIII v. i koji je pretežno zasnovan na vizuelnoj intuiciji) i analitički i kao tok višeg stepena apstrakcije (pretežno zasnovan na analitičkoj apstrakciji, u velikoj meri oslobođenoj od intuitivno-geometrijskih elemenata, koji je vremenski stvarno započeo Ojlerovim analitičkim zasnivanjem trigonometrije), reljefno su konkretni primeri koji pokazuju da razvitak matematike teče od apstrakcije nižeg ka apstrakciji višeg stepena u okviru dijalektičkog puta saznanja objektivne realnosti.

DVA VELIKA IMENA U TRIGONOMETRIJI

MENELAJ ili **MENELAUS ALEKSANDRIJSKI** (I v.), grčki astronom i matematičar. Napisao je delo, koje nije pronađeno, o izračunavanju tetiva u kružnici, kao i raspravu u tri knjige, *Sferike*, koja je do nas stigla na arapskom jeziku. Prva knjiga tog dela zasniva sfernu geometriju dajući povlašćenu ulogu velikim kružnicama. Druga knjiga je čisto astronomska; treća stvara sfernu trigonometriju, zasnovanu na dve teoreme zvane „Menelajevim": jedna se odnosi na ravan, druga, koja otuda potiče, na sferu. Menelajeva teorema u ravni igrala je osnovnu ulogu u docnijoj teoriji transverzala, a sferni stav ostao je više stoleća osnova sferne trigonometrije.

REGIOMONTANUS, poznatiji kao Johanes Miler (Johannes Müller, 1436 – 1476), nemački astronom i matematičar. Učenik u Beču Pojerbaha (Georg von Peuerbach, 1423 – 1461), daje dobra izdanja rukopisa velikih grčkih astronoma, kao i dela svog učitelja. Njegovo glavno delo, *De triangulis omnimodis* (*O svakojakim trouglima*), napisano je oko 1464, objavljeno posle njegove smrti, u Nirnbergu 1533. Ovo delo mnogo duguje grčko-arapskoj tradiciji, ali je prema svom izlaganju duboko originalno i zasniva zapadnu trigonometriju.

Literatura: La Grande encyclopédie Larousse; Ernest Stipanić, *Matematika* za III razred usmerenog obrazovanja, Beograd, 1980.

Verovatnoća i statistika

Osvrnućemo se fragmentarno i sažeto na genezu i razvitak teorije verovatnoće i matematičke statistike.

Verovatnoća

Po načinu svog nastanka i celokupnim svojim razvitkom teorija verovatnoće jedinstvena je među matematičkim disciplinama. Iako se može reći da je njeno nastajanje ranijeg datuma, o čemu postoje dokazi, ipak se uzima da je stvarno nastala tokom XVII v. u vezi sa hazardnim igrama, kojim su se mnogo zanimali visoki krugovi tadašnjeg društva. Taj nastanak vezuje se za imena francuskih matematičara Fermaa* i Paskala*, kao i holandskog matematičara Hajgensa (Christiaan Huygens, 1629–1695), veoma istaknutih matematičara te epohe. Godine 1654. Paskalu je jedan prijatelj, koji se zanimao kockanjem, postavio sledeći problem: dva igrača A i B pogode se da čitav ulog pripadne onome koji prvi dobije tri igre. Pošto je A dobio dve igre, a B jednu igru, morali su, usled nepredviđenih okolnosti, prekinuti igru. Postavlja se pitanje kako je pravilno da igrači međusobno podele ulog? Odgovor Paskalov, na osnovu pojma verovatnoće, bio je, da u odnosu 3:1 igrači treba da međusobno podele čitav ulog. Taj primer se često uzima kao ilustrativan za nastajanje teorije verovatnoće iz problema hazardnih igara. Hajgens je 1657. objavio jednu raspravu o verovatnoći i tada je istakao „da će čitalac primetiti da je reč ne samo o hazardnim igrama, već više o osnovama jedne nove teorije, istovremeno duboke i zanimljive". To je prva rasprava iz teorije verovatnoće i u njoj Hajgens tretira pojmove matematičke nade, slučajne promenljive i neke druge. Uporedo sa teorijom verovatnoće i u vezi sa njom razvija se u to vreme i kombinatorika.

Prvi odlučan korak ka teoriji verovatnoće, kao matematičkoj disciplini, učinio je Žak Bernuli*. Njegovim delom *Veština nagađanja* (*Ars coniectandi*), koje je objavljeno posle njegove smrti 1718, započet je razvitak teorije verovatnoće kao matematičke discipline. U njemu je Bernuli generalisao i produbio Hajgensove pojmove o verovatnoći, podrobno je razvio kombinatoriku sa njenim primenama na hazardne igre i izložio je *Zakon velikih brojeva* (svoju „zlatnu teoremu"). Taj zakon kaže da za svako $\varepsilon > 0$, kad

$n \to \infty$, važi

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1,$$

gde je k broj realizacija jednog događaja A verovatnoće p i n ponovljenih, međusobno nezavisnih i identičnih opita.

Istaknuti francuski matematičar Abraham de Moavr (Abraham de Moivre, 1667–1754) razvio je i uopštio ideje Bernulija. U jednom svom delu definisao je i razradio pojmove nezavisne i uslovne verovatnoće; formulisao je i dokazao teoreme o sabiranju i množenju verovatnoća. Došao je do značajne, tzv. centralne granične teoreme, koja se izražava formulom

$$\mathrm{P}\left\{\frac{k - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$
$$n \to \infty,$$

gde je k broj realizacija jednog događaja A verovatnoće p u Bernulijevom ponovljenom opitu. Do iste teorem dolazi i Laplas (Pierre Laplace, 1749–1827), pa je teorema poznata kao Moavr-Laplasova teorema.

U drugoj deceniji XIX v. Laplasovo monumentalno delo *Analitička teorija verovatnoće* (*Théorie analytique des probabilités*, 1812) doživljava tri izdanja. U tom delu Laplas je sumirao sve svoje radove i svojih prethodnika iz teorije verovatnoće, produbljujući matematički i filozofski probleme vezane za pojmove verovatnoće. Veoma je važno i jedno njegovo delo pretežno filozofskog karaktera o verovatnoći i o događajima koji se odnose, odn. zasnivaju na verovatnoći. Obimom i sadržinom rezultata i ideja navedeno Laplasovo delo je tokom XIX v. veoma inspirativno podsticalo mnoge matematičare koji su se bavili teorijom verovatnoće.

Laplasova matematička istraživanja prirode zauzimaju vrlo istaknuto mesto u razvitku prirodnonaučnih pogleda na svet. On spada među najistaknutije stvaraoce u nebeskoj mehanici, u kojoj su postignuti ogromni uspesi primenom *determinističkih* matematičkih modela, kakvi su, npr., diferencijalne jednačine, zasnovane na pojmu stroge *funkcionalne* zavisnosti. Zanesen tim uspesima, Laplas je, u duhu strogog determinizma, 1816. pisao:

„Mi moramo smatrati sadašnje stanje univerzuma kao efekat njegovog prethodnog stanja, i kao uzrok onome stanju koje sledi. Um koji bi u datom trenutku poznavao sve sile koje animiraju prirodu, i respektivni položaj bića koja je sačinjavaju, i ako bi, osim toga, bio dovoljno mnogostran da te podatke podvrgne analizi, obuhvatio bi jednim istim obrascem kretanja najvećih tela univerzuma, kao i onih koja su lakša od atoma; ništa ne bi bilo neizvesno za njega, pred njegovim očima bila bi prisutna budućnost, kao i prošlost".

Smatrajući da nebeska mehanika pruža ideal naučnog saznanja, Laplas je zamišljao da će takav determinizam, odnosno odgovarajuće determinističke modele, moći primeniti u tumačenju svih pojava prirode, što je razvitak nauke i prirodne filozofije pokazao iluzornim. No, bez obzira na to, diferencijalne jednačine kao matematički modeli bili su i ostaju moćna sredstva istraživanja onih pojava prirode koje je opravdano tretirati u okvirima Laplasovog determinizma. Kao takve one će se stalno javljati u matematičkim modeliranjima stvarnosti.

Laplas je, može se reći, jedan od tvoraca teorije verovatnoće, tj. takvih matematičkih modela koji, nasuprot diferencijalnim jednačinama, ne odslikavaju strogi determinizam, već ono što shvatamo kao slučajnost, odnosno slučajne pojave. Njegovo naučno stvaranje, karakteristično za kraj osamnaestog i prve decenije devetnaestog stoleća, izraženo, s jedne strane, determinističkim i, s druge, probabilističkim matematičkim modelima, izvanredno potvrđuje da je priroda, raznolikošću svojih manifestacija, zaista neiscrpan izvor matematičkih inspiracija.

Kada pomislimo na verovatnoću P (D) slučajnog događaja D, onda imamo, dakle, u vidu: da se pod neizmenjenim uslovima, u načelu, može izvesti neograničeni broj međusobno nezavisnih opita i da se u svakom opitu može ostvariti ili ne ostvariti događaj D; da pri velikom broju opita relativna frekvencija događaja D neznatno odstupa od nekog, uopšte uzev, nepoznatog broja *p*-verovatnoće događaja D za čiju približnu vrednost se uzima relativna frekvencija. Tako se verovatnoćom, kao matematičkim modelom, sasvim praktične situacije transformišu u teorijske, a teorija verovatnoće, kao celovita teorija matematičkog modela, odražavajući aproksimativno realne situacije u vezi s konkretnim slučajnim događajima, javlja se kao moćan instrument istraživanja pojava u prirodi i društvu. U stvari, kao matematički model verovatnoća se javlja u vidu funkcije, koja je definisana na skupu slučajnih događaja i čije su vrednosti realni brojevi koji nisu manji od nule ni veći od jedinice. Ovim se jasno ocrtava visok stepen apstrahovanja praktičnih situacija u vezi s konkretnim slučajnim događajima.

Istaknimo ovde jedno načelno pitanje u vezi s determinizmom i slučajem, koje je značajno za svakog istraživača prirodnih pojava sa stanovišta teorijsko-spoznajnog i opšte metodološkog. Naime, strogi determinizam, u Laplasovom smislu, kazuje da bi iscrpno poznavanje parametara koji definišu stanje kosmosa i zakona koji vladaju kosmosom omogućilo tačno predviđanje rezultata svakog opita u jednom stohastičkom eksperimentu, tj. eksperimentu na osnovi verovatnoće. U datim uslovima jedan događaj mogao bi biti, dakle, samo ili siguran ili nemoguć.

U stvari, rezultat jednog opita je strogo determinisan. Međutim, kad

izvodimo opit, mi znamo samo vrednosti nekih od spomenutih parametara, odnosno poznajemo samo neke od spomenutih zakona. Sigurni događaji, koji konstituišu uslove opita, određuju skupinu opita kojoj taj opit pripada, ali nisu dovoljni da razluče sam opit. Za jedan dati događaj D mi ne znamo da li opit koji izvodimo pripada skupini opita povoljnih ili nepovoljnih za realizaciju događaja D. Upravo ova *nesigurnost*, koja proističe iz nepotpune obaveštenosti, a ne od nepostojanja determinizma, stvara od *sigurnog* ili *nemogućeg* događaja D događaj samo *verovatan*. Tako treba shvatiti smisao „slučajnih fenomena", koji su objektivno potpuno determinisani. *Slučajnost je, dakle, samo jedan pojavni oblik objektivne determinisanosti*. To je, kao svesno *dijalektičko* saznanje, od veoma važnog teorijsko-spoznajnog i metodološkog značaja za proučavanje fenomena prirode.

Veoma su značajno unapredili teoriju verovatnoće, naročito kada je reč o njenim primenama, znameniti francuski matematičar Poason (Siméon Poisson, 1781 – 1840) i genijalni nemački matematičar Gaus (1777 – 1855). Čuven je Poasonov zakon raspodele verovatnoća, kao i Gausov ili normalni raspored verovatnoća i Gausova kriva raspodele, naročito u raznovrsnim primenama. Ruski matematičari P. L. Čebišev (1821 – 1894), A. A. Markov 1856 – – 1922) i A. M. Ljapunov (1857 – – 1918) postigli su krupne rezultate u teoriji verovatnoće koji se odnose na *zakone velikih brojeva*. Dobro je poznat Čebiševljev zakon velikih brojeva, iz kojega kao specijalan slučaj sledi Bernulijev zakon velikih brojeva.

Tokom svog razvitka, od XVII v. pa nadalje, teorija verovatnoće koristila se ne samo u slučajnim igrama, nego i u raznim problemima društvenog i državnog karaktera (problemi osiguranja, računi anuiteta, analize tablica smrtnosti, problemi ekonomskog razvitka), u statističkim predviđanjima, u teoriji grešaka eksperimentalnih posmatranja (npr. u astronomiji, geodeziji, fizici i drugim prirodnim naukama), kao i u mnogim drugim delatnostima. Na taj način ona se dugo razvijala pod uticajem vrlo praktičnih problema, na bazi empirijsko-intuitivnih motivacija. Tako je tekao njen razvitak skoro do XX veka. Tek je tokom XX stoleća teorija verovatnoće postala matematička disciplina sa svojim jasno definisanim metodama i jasno definisanim predmetom, pa se njen razvitak odvija ne samo po logici njenih konkretnih primera i empirijsko-intuitivnih motivacija, nego i po logici njenih unutrašnjih potreba kao matematičke discipline. U vezi s tim, jedan od najznačajnijih momenata u tom periodu njenog razvitka je njena aksiomatizacija, koju je 1933. izvršio veliki sovjetski matematičar A. N. Kolmogorov*, u svom veoma poznatom delu *Osnovni poj-*

movi računa verovatnoće (*Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*), kad je uveo *prostor verovatnoće* (Ω, F, P), formiran od *sigurnog događaja* Ω (kao skupa elementarnih događaja), od *klase* F *složenih događaja* (koji su delovi skupa Ω) i od *verovatnoće* P, kao pozitivne mere na klasi F, takve da je $P(\Omega)=1$.

Savremeni razvitak teorije verovatnoće karakteriše razvitak *slučajnih procesa*, kao njene posebne oblasti. Reč je o *slučajnim funkcijama* $X(t)$ u kojima figurišu slučajne promenljive i neslučajna promenljiva t (koja se većinom interpretira kao vreme). Na primer,

$$X(t)=a\sin(\lambda t+\varphi)$$

je slučajni proces (slučajna funkcija), gde su amplituda a, frekvencija λ i faza φ slučajne promenljive, a t (vreme) je neslučajna promenljiva. Taj proces predstavlja slučajnu harmonijsku oscilaciju.

Za savremeni razvitak teorije verovatnoće posebno su značajni radovi francuskog matematičara Borela*, sovjetskih matematičara Sergeja Bernštajna (1880–1968), A. J. Hinčina (1894–1959), B. V. Gnedenka (rođenog 1912) i A. Kolmogorova i američkog matematičara, jugoslovenskog porekla, V. Felera (W. Feller, 1906–1970), kao i niza drugih matematičara. Veoma je poznato Felerovo dvotomno delo *Uvod u teoriju verovatnoće i njene primene* (*An introduction to probability theory and its applications*, 1957, 1966), koje je napisano na visokom naučnom i metodološkom nivou i sadrži veliki broj primera iz primene teorije verovatnoće u fizici, biologiji i ekonomiji. Zanimljivo je ovde pomenuti da je V. Feler diplomirao matematiku na Sveučilištu u Zagrebu.

Statistika

Na teoriji verovatnoće zasnovana je savremena statistika, matematička i primenjena. Statistika se najpre bavila proučavanjem masovnih pojava u društvu, usko vezanih za stanovništvo, koje su od značaja za upravne, ekonomske i uopšte socijalno-političke poslove društva (na primer: rađanje, smrtnost, naseljenost, imovno stanje, zanimanje stanovnika, itd.). Otuda i njen naziv. On potiče od latinske reči status, što znači stanje, položaj (misli se na stanje, položaj države). Prvobitna uloga statistike bila je, dakle, da utvrdi, u neku ruku, brojevnu predstavu državnog stanja s raznih stanovišta: upravnog, ekonomskog i uopšte socijalno-političkog karaktera. No, ubrzo se pokazalo da su statističke metode istraživanja prikladne za sva proučavanja koja se zasnivaju na velikom broju posmatranja, eksperimentisanja i merenja, bilo da je iz tih proučavanja potrebno izvući teorijske, bilo praktične zaključke. Na taj način došlo je do širokih primena i afirmisanja statističkih metoda istraživanja u ekonomskim i socijalnim naukama, u meteorologiji, biologiji (naročito u genetici, koja se bavi problemima nasleđa), fizici, hemiji, astronomiji, filozofiji, psihologiji, medicini, poljoprivredi, tehnici, itd. Slobodno možemo reći da skoro nema ljudske delatnosti u kojoj ne bi mogla doći u obzir primena statistike, kadgod je reč o skupu činilaca koje ne možemo (ili bar vrlo teško možemo) potpuno uočiti i koji su od značaja za pojave koje želimo proučiti, a koje zbog takvih činilaca imaju karakter slučajnih događaja.

Može se kazati da je *statistika* skup metoda koje imaju za cilj prikupljanje, analizu i interpretaciju numeričkih podataka koji se odnose na skup jedinica iste prirode, bilo kakve da su ove jedinice: živa bića, stvari ili veoma različite pojave. Skup za koji se zanimamo najopštije nazivamo *populacija* ili *osnovni skup*, koji može biti konačan ili beskonačan.

Izraz *statistika* označava takođe i predstavljanje numeričkih informacija, koje se odnose na jednu populaciju, u obliku tabela. On je pogodan, štaviše, da označi svaku funkciju opservacija, izvedenih na jednom uzorku, i tako određenu da ukratko da informaciju dobijenu o populaciji.

Potreba za posedovanjem brojčanih podataka o populaciji i njenim materijalnim dobrima zapažena je još kad su zasnovana organizovana ljudska društva. Tragove o njima nalazimo u antičkom vremenu, u Kini, Egiptu, Grčkoj, zatim se pojavljuju popisi stanovništva koje su uveli Rimljani (na primer: Servije Tulije u VI v. pre n. e. i Avgust u prvoj godini nove ere), spiskovi sačinjeni po naređenju Karla Velikog, knjiga Strašnog suda koju je uveo Viljem Osvajač (1086), posle osvajanja Engleske i najzad brojne evidencije ili spiskovi izvršenja prema naredbama kraljeva pod uticajem Sule, Kolbera i Vobana.

U XVII v. jasno se ocrtavaju koncepti koji se odnose na osnove statistike i na sredstva statističkih proučavanja. Obrazuju se dve škole, uglavnom poznate pod imenom „deskriptivna nemačka škola“ i „škola političke aritmetike“. Nemačku školu, kojoj izgleda dugujemo reč *statistika*, formirao je Herman Konring (Hermann Conring, 1606–1681), čije je radove nastavio Gotfrid Ašenval (Gottfried Achenwall, 1719–1772), koji objavljuje 1749. *Elemente statistike evropskih država* (*Eléments de la statistique des Etats d'Europe*). Džon Graunt (John Graunt, 1620–1674) i Viljam Peti (William Petty, 1623–1687) mogu se smatrati osnivačima škole političke aritmetike, a naziv ove škole došao je od naslova jednog Petijevog rada *Političke aritmetike* (*Political Arithmetic*). Ova škola ide dalje od deskripcije. Ona ističe izvesne statističke konstante, npr. one koje postoje u odnosu brojeva rađanja muške i ženske dece (Graunt, 1662). Nešto kasnije, počev od evidentiranja rođenih i umrlih u gradu Vroclavu, Halej (Edmund Halley, 1656–1742) daje tabelu smrtnosti koju možemo smatrati kao osnovu savremenih demografskih radova, zatim Sismilh (Johann Peter Süssmilch, 1707–1767) objavljuje značajne radove o visini novorođene muške dece i njihovom razvoju do dvadesete godine.

Početkom XIX v. statistika ulazi u novu fazu svog razvitka. Laplas se nalazi u prvim redovima onih koji su se bavili računom verovatnoće kao osnovnim sredstvom statističke analize. U svojoj *Analitičkoj teoriji verovatnoće* on ističe prednosti koje možemo izvući iz proučavanja prirodnih pojava čiji su uzroci veoma složeni da bi se mogli u potpunosti upoznati i ponaosob analizovati. Statistika se dugo razvijala van pravog oslonca na teoriju verovatnoće. To je tzv. *opisna statistika*. Tek je na osnovu teorije verovatnoće postala matematička nauka u pravom smislu reči, tj. *matematička statistika*.

Inspirišući se radovima Laplasa, Ketle (Adolphe Quételet, 1796–1874) širi polje primene metode na proučavanje fizičkih, intelektualnih i moralnih kvaliteta ljudi, izgradivši tako neku vrstu društvene fizike prema kojoj bi se ovi različiti kvaliteti, posmatrani u masi, raspoređivali oko jedne fiktivne osobe, a naime, „srednjeg čoveka“. Na njegovu inicijativu održan je u Briselu 1853. Prvi internacionalni kongres statistike, preteča današnjeg Internacionalnog instituta statistike osnovanog u Londonu 1885. Počev od kraja XIX v. metode statističke analize su se proširile na sve oblasti naučnog istraživanja. Novi problemi tako proučavani doveli su do brzog i značajnog razvitka teorije statistike.

Na osnovu radova Ketlea i Galtona (Francis Galton, 1822–1911), Pirson (Karl Pearson, 1857–1936) je zasnovao novu granu statistike kao što je *biostatistika* ili *biometrika*, čiji se razvitak sada nastavlja u oblasti eksperimentalne terapeutike. Štaviše, veza između statističke opservacije i ekonomije dovela je do nove naučne discipline *ekonometrije*, za koju su vezana imena preteča: Kurno (Antoine Augustine Cournot, 1801–1877), Pareto (Vilfredo Pareto, 1848–1923), Valras (Léon Walras, 1834–1910), kao i Divizija (François Divisia, 1889–1963) i Friš (Ragnar Frisch, rođen 1895), dobitnik Nobelove nagrade za političku ekonomiju 1969, obojica osnivači Internacionalnog društva ekonometrije.

Radovi Maksvela (James Clerk Maxwell, 1831–1879), koji dosežu do kinetičke teorije gasova, bili su polazna tačka mehaničke statistike i nuklearne fizike. U oblasti tehnike, radovi Fišera (Ronald Aylmer Fisher, 1890–1962) o eksperimentisanju u agronomiji bili su osnova opšte teorije planiranja eksperimenata, kao što su radovi Ševarta (Walter Shewhart, 1891–1967) bili veoma prošireni na metode iskorišćene u industriji za statističku kontrolu kvaliteta i pouzdanosti.

U oblasti humanističkih nauka, studije engleskog psihologa Spirmena (Charles Edward Spearman, 1863–1945) o ponašanju ličnosti, razvijene kasnije u primenjenu psihologiju ljudi i životinja, dovele su do metoda faktorske analize kao logičan nastavak proučavanja korelacije.

Statistička metoda se tako pokazala kao neophodna pomoć u rukovođenju preduzeća, u proučavanju tržišta, finansijskoj kontroli i u upravljanju zalihama. Proširena teorijom igara i teorijom odlučivanja, snažno oslonjena na savremena matematička sredstva, dovela je do stvaranja metoda operacionih istraživanja.

U svim ovim oblastima kao i u mnogim drugim, radovi poslednjih decenija, Pirsona (Egon Sharpe Pearson, rođen 1895), i Nejmana (Jerzy Neyman, rođen 1894) o teoriji testiranja i ocenjivanja, koji su ponikli na osnovu praktičnih istraživanja u primeni metode probnih ispitivanja, stvorili su od statističke metode snažno sredstvo naučnog i tehničkog istraživanja čije polje primene ne prestaje da se širi.

Čim želimo objasniti stanje jednog makroskopskog sistema pomoću naših aparata merenja, počev od veoma brojnih mikroskopskih konstituanata na atomskoj lestvici, u fizici se usvaja statističko stanovište. Sa razvitkom kinetičke teorije gasova, istorijski, sredinom XIX v. uvedeno je statističko gledište. Sila pritiska jednog gasa izvršena na zid objašnjava se udarcima koje ovaj zid prima od molekula gasa. Međutim, molekuli sadržani u jednom litru, npr., tako su mnogobrojni da se ne može individualno izračunati udarac svakog od njih. Dolazi se do izračunavanja udaraca u funkciji brzine molekula, zatim do proučavanja statističke raspodele različitih vrednosti brzine među molekulima gasa.

Ova statistička raspodela može se teorijski izračunati samo kad se učine jednostavne svojstvene hipoteze o slučajnim fenomenima i primenom zakona računa verovatnoće. Za to su potrebna suptilna razmišljanja i delikatni računi statističke termodinamike da bi se izvukle odluke iz ovih jednostavnih hipoteza. Njihova direktna ideja je sledeća: mogu se modifikovati datosti koje karakterišu svaku atomsku konstituantu jednog sistema (položaj, brzina, orijentacija, itd. svakog atoma), a da se ne modifikuje toliko globalno makroskopsko stanje sistema. Vidi se lako da veoma veliki broj različitih *mikroskopskih* stanja odgovaraju istom *makroskopskom* stanju, i da učinjene hipoteze dozvoljavaju da se izračuna broj svih ovih mikroskopskih stanja. Prihvata se još uravnoteženo *makroskopsko* stanje jednog sistema kao njegovo najverovatnije stanje, tj. kao ono koje odgovara maksimalnom broju *mikroskopskih* mogućih stanja.

Ovakva statistička stanovišta u fizici dovela su do *zakona klasične* *statistike Bolcmana* (Ludwig Boltzmann, 1844 – 1906), *kvantne statistike Boze-Ajnštajna* (Jagadis Chunder Bose, 1858 – 1937; Albert Einstein, 1879 – 1955) i *kvantne statistike Fermi – Diraka* (Enrico Fermi, 1901 – 1954; Paul Adrien Maurice Dirac, rođen 1902). Kvantne statistike dopuštaju da se objasne brojni fenomeni neobjašnjivi u klasičnoj statistici, ali je lako pokazati da one ponovo daju iste rezultate kao i Bolcmanova statistika čim se promene određeni uslovi.

U savremenoj matematičkoj statistici, strogo zasnovanoj na teoriji verovatnoće, ističu se njene posebne oblasti: teorija estimacije, teorija testiranja statističkih hipoteza i teorija planiranja eksperimenata, koja je vrlo značajna za eksperimentalna istraživanja u prirodnim naukama i tehnici. Radovi niza američkih i sovjetskih matematičkih statističara od fundamentalnog su značaja za savremenu matematičku statistiku i njene primene.

Metode teorije verovatnoće i matematičke statistike, kao matematičkih disciplina, danas se široko primenjuju u raznim oblastima prirodnih nauka i tehnike: u teoriji pouzdanosti i masovnog opsluživanja, u teorijskoj fizici (statistička fizika), u teoriji gađanja, u geodeziji, astronomiji, u teoriji grešaka osmatranja, u teoriji automatskog upravljanja, u opštoj teoriji sistema, u planiranju i organizaciji proizvodnje, u analizama tehnoloških procesa, u kontrolli kvaliteta proizvodnje i u drugim oblastima. Na osnovu teorije verovatnoće razvila se u toku drugog svetskog rata i posle njega teorija informacija, nauka od velikog praktičnog značaja za savremeno društvo i njegovu organizaciju. Teorija verovatnoće i matematička statistika dobile su poseban značaj svojim primenama u savremenoj fizici, zauzevši središnje mesto u racionalnom tumačenju mikro i ultramikro sveta. One su svojim metodama razmišljanja i zaključivanja izazvale mnoge načelne diskusije u oblasti filozofskih nauka, npr. u logici i teoriji saznanja. Sve je to imalo velikog i određenog odjeka u filozofskom tumačenju sveta, tako da su za teoriju verovatnoće i matematičku statistiku zainteresovani filozofi isto toliko koliko i naučnici, istraživači prirodnih pojava. Mnogi filozofi nauka smatraju da teorija verovatnoće i matematička statistika nisu samo matematičke discipline, nego i filozofske discipline modernog vremena, koje obuhvataju u filozofskom smislu „učenje onoga što postoji i učenje načina kojim se otkriva ono što postoji", želeći time naglasiti njihov značaj za ontološke i gnoseološke probleme.

Teorija verovatoće i matematička statistika možda najreljefnije pokazuju, čitavim svojim razvitkom (genezom i evolucijom), od svih matematičkih disciplina, kako se jednom saznati zakoni i oblici menjanja objektivne stvarnosti (društva i prirode) transformišu u principe i oblike teorijske misli, koja se zatim svesno i stvaralački (po izgledu samo apriorno) koristi u daljem i dubljem istraživanju same te stvarnosti, potvrđujući nezamenljivu ulogu apstrakcije u otkrivanju prave istine o toj stvarnosti. Zasnovane na pojmu nefunkcionalne zavisnosti, one su osnova za matematičko *stohastičko* modeliranje stvarnosti, kao što je infinitezimalna analiza, zasnovana na pojmu funkcionalne zavisnosti u vidu diferencijalnog i integralnog računa, osnova za *determinističko* modeliranje, pri čemu oba tipa modeliranja treba shvatiti u njihovom *dijalektičkom* jedinstvu kao dva različita apstraktna pristupa otkrivanju objektivno postojeće i nikad do kraja spoznate uzročnosti i povezanosti realnih pojava makro i mikro sveta.

Kuda ide savremena matematika?

Uvod

Za vreme održavanja svetskih kongresa matematičara organizuju se veoma impresivne, sistematske i svestrane izložbe knjiga, monografija, posebnih studija, udžbenika kao i matematičkih časopisa najpoznatijih svetskih izdavačkih kuća koje se bave izdavanjem naučne i stručne matematičke literature, a isto tako i niza naučnih ustanova, akademija nauka i univerziteta. Te izložbe na poseban način daju uvid u savremene tokove razvitka matematike. Letimičnim prelistavanjem izložene literature upućeni matematičar može, da kažemo slikovito, praktično dobiti odgovor, bar orijentaciono, na pitanje: *Kuda ide današnja matematika?* Naša izlaganja u odgovoru na postavljeno pitanje biće podešena širokom razumevanju onih koji nisu „upućeni" matematičari, ali su ipak svojom opštom kulturom i obrazovanjem u stanju da shvate „popularno naučni" odgovor na danas izvanredno značajno pitanje za opšte i stručno obrazovanje.

Mi ovde uzimamo u obzir genezu i razvitak matematike u *opštoj društvenoj praksi*. Naime, u delatnoj praksi kada čovek obavlja svakodnevne poslove, u praksi nauke, tehnike, umetnosti i filozofije, tj. u ukupnoj praktičnoj i misaonoj odnosno teorijskoj delatnosti čoveka. Jer, *opšta društvena praksa* bogatstvom svojih pojavnih i suštinskih odnosa utiče na razvitak matematike, i obratno, matematika na razvitak opšte društvene prakse u rešavanju problema koje čovek nalazi u stalnom sudaranju sa stvarnošću.

Ako je, s jedne strane, „istorija sigurno životno svetlo" – kako ističe istaknuti francuski mislilac Gasendi (P. Gassendi) – „jer nudi duhu sredstvo da shvati, polazeći od prošlih stvari, ono što se očekuje da od tih stvari dođe", i „da nijedno područje ne gubi više nego li matematika pokuša li se na bilo koji način odvojiti od svoje istorije" – kako naglašava Glajsher (J. W. Glaisher), a s druge strane, da geneza i razvitak matematičkih ideja i metoda pokazuju da postoji matematika „današnja koja nastavlja jučerašnju bez dubljih prekida, i prvenstveno nastoji rešiti velike probleme koje su nam ostavili prethodni matematičari" – kako je to jednom prilikom podvukao Dijedone (J. Dieudonné), jedan od najdoslednijih i najistaknutijih savremenih apstraktnih matematičara i glavni predstavnik burbakista, onda je *neophodno* objašnjenje geneze i razvitka matematičkih ideja, pojmova, teorija, metoda i algoritama u sklopu društvene uslovljenosti, gde je jedna od bitnih komponenata *opšta društvena praksa*, čiji smo smisao napred istakli.

Savremeni tokovi razvitka

Savremeni tokovi razvitka matematike određeni su njenim prethodnim tokovima, sa neprekidnom pojavom novih ideja i metoda. Neograničena je, u načelu, oblast primena matematike, jer se gotovo svi oblici kretanja materije mogu proučavati matematički. No, ipak su različiti uloga i značaj matematičkih ideja i metoda u tim proučavanjima, imajući uvek u vidu da matematička shema ne iscrpljuje sve konkretnosti realnih pojava na koje se primenjuje. Proces spoznaje konkretnog u pojavama odvija se neprekidno u borbi dveju osnovnih tendencija. Naime, u isticanju formi izučavanih pojava i u matematičko-logičkoj analizi tih formi, kao i u otkrivanju momenata koji se ne uklapaju u već ustanovljene forme, zatim u prelaženju na razmatranje novih formi, koje su matematičko-logički gipkije i koje bolje obuhvataju proučavane pojave.

Hod današnje matematike, u teorijama i primenama, odvija se u neprekidnoj borbi navedenih tendencija. Mi se možemo zapitati: na osnovu kojih je kriterijuma vršena periodizacija istorijskog razvitka matematike? Rukovođeni kriterijumima zasnovanim, uglavnom, na hronološkim načelima, razni istoričari matematike i sami matematičari, izvršili su različite periodizacije u razvitku matematike. Jedan od najvećih savremenih matematičara, počasni član Internacionalne akademije istorije nauka u Parizu, sovjetski matematičar A. N. Kolmogorov, izvršio je periodizaciju razvitka matematike, skoro pre pedeset godina, davši jedan opšti sintetički pogled na razvitak matematike i odredivši njegove osnovne etape. On se u svojoj periodizaciji razvitka matematike rukovodio metodološkim principom koji u genezi i razvitku matematičkih ideja i metoda kao najbitniji fakt uzima prelaz od apstrakcije *nižeg* ka apstrakciji *višeg* stepena. Taj princip za gnoseološku podlogu ima *dijalektičko* shvatanje razvitka kao prelaz od prostijeg ka složenijem, od nižeg ka višem, pa se Kolmogorovljeva periodizacija razvitka matematike može nazvati *dijalektičkom* periodizacijom. Ovde se jasno vidi kako se matematička misao u svom razvoju kreće spiralnim putem saznanja od konkretnog i pojedinačnog ka apstraktnom i opštem, i obratno, pri čemu se posebno uočava *dijalektička* relativnost pojmova „konkretno" i „apstraktno", „pojedinačno" i „opšte".

Da bismo bili jasniji u ovoj periodizaciji razvitka matematike, tačnije o prelazu od apstrakcije *nižeg* ka apstrakciji *višeg* stepena, poslužićemo se jednim primerom iz okvira srednjoškolskog nastavnog programa matematike.

Naime, neka je R skup realnih brojeva, V skup vektora kao orijentisanih duži, K skup kompleksnih brojeva i H skup rešenja homogenog sistema linearnih jednačina. Poznato je da za sva četiri skupa važe osam polaznih stavova ili aksioma. Operacija sabiranja kao zakon spajanja dva ma koja elementa iz odnosnog skupa i operacija množenja kao zakon spajanja ma kojeg realnog broja sa ma kojim elementom iz odnosnog skupa su *linearne operacije* nad elementima odnosnih skupova, a sami skupovi R, V, K i H su konkretni *linearni prostori.*

Zamislimo sada skup L proizvoljnih elemenata, tj. elemenata čiju prirodu apstrahujemo, zatim neki zakon spajanja ma koja dva elementa skupa L i neki zakon spajanja ma kojeg realnog broja sa ma kojim elementom iz skupa L, po kojem se takođe dobija element koji pripada skupu L, i da, pored toga, u odnosu na te zakone važe osam polaznih stavova analognih stavovima koji važe za skupove R, K, V i H. Kaže se tada da su pomenuti zakoni *linearne operacije* i da je skup L *linearni prostor* u kojem su nad njegovim elementima definisane date operacije, a pomenuti polazni stavovi da su *aksiomi* linearnog prostora.

Vidimo, dakle, da sva četiri pojma, realan broj, kompleksan broj, vektor i rešenje homogenog sistema linearnih jednačina, iako međusobno *različita*, sjedinjuje pojam *linearnog prostora*, kao apstrakcija višeg stepena nego što su svaki od datih pojmova. On u njihovoj *različitosti* ističe, odnosno fiksira, njihovu *identičnost*. U tome se, upravo, sastoji smisao iskaza da su navedeni pojmovi *dijalektički* generalisani i sjedinjeni u pojmu linearnog prostora.

Na primer, jasno nam je iz *elementarne algebre* da su sabiranje i množenje realnih brojeva komutativne i asocijativne operacije. Međutim, savremena *apstraktna algebra*, kao jedan od osnovnih grana *današnje matematike*, ne proučava komutativnost i asocijativnost operacija sa realnim brojevima, ili sa nekim drugim matematičkim objektima, što u izvesnom smislu spada u okvir *nižeg* stepena apstrakcije, nego kao predmet proučavanja uzima same operacije nad skupovima elemenata proizvoljne prirode i tu dolazi do određenih napred navedenih generalizacija, kao *višeg* stepena apstrakcije. Ovaj momenat, koji u razvitak matematike unosi *apstraktna algebra*, vanredno ilustruje prelaz sa *nižeg* stepena ka *višem* stepenu apstrakcije. On je bitno značajan u hodu današnje matematike.

Analognim putevima razvijaju se, generališu i sintetizuju i drugi pojmovi matematike, pa i čitave matematičke teorije u današnjoj matematici. Zato se shodno tome govori da su generalizacije pojmova u matematici tipični primeri *dijalektičkih* generalizacija. Otkrivati to u procesima razvitka i generalizacija matematičkih pojmova i zatim ih svesno u tom smislu usvajati, znači spoznati njihovu *dijalektičku* sadržinu i *dijalektički* ovladati njima kao sredstvima spoznaje i menjanja stvarnosti. To je jedan od sasvim prirodnih puteva kojim se *današnja matematika* ugrađuje kao jedan od osnovnih konstitutivnih elemenata naučnog i filozofskog pogleda na svet, kao i njegovog stvarnog saznanja.

Prethodno smo istakli jedan od osnovnih metodoloških principa na osnovu kojeg posmatramo tok razvitka matematike, pa u tom smislu i tok razvitka *današnje matematike*, koji nas vodi ka principijelnom odgovoru na pitanje: kuda ide današnja matematika?

Razvitak današnje matematike pokreće se misaonim i metodološkim zahvatima velikih matematičara, matematičkih škola i centara. Oni matematičkim teorijama i primenama utiču na *opštu društvenu praksu*, menjajući je revolucionarno, a ova obratno utiče na sam tok razvitka današnje matematike.

Pomenuti misaoni i metodološki zahvati očituju se u današnjoj matematici kao celini, tako i u pojedinim njenim oblastima: u algebri, logici, geometriji, topologiji, teoriji funkcija, teoriji brojeva, funkcionalnoj analizi, diferencijalnim jednačinama, teoriji verovatnoće, matematičkoj statistici i računskoj matematici. U svim ovim oblastima stiče se jasan uvid u *hod današnje matematike*.

Pojavljuju se i razvijaju nove oblasti, gde se pomeraju osnovne sile matematičara, kao što su: teorija algoritama, teorija informacije, teorija igara, operaciono istraživanje, a pogotovo kibernetika. Nastaje i razvija se *diskretna* ili *konačna matematika* u vezi sa osnovnim zadacima teorije upravljačkih sistema. Tu je veoma važna uloga kombinatorne analize, teorije grafova i teorije kodiranja.

Sa problemima najboljeg upravljanja fizičkih ili mehaničkih sistema, zasnivaju se matematičke teorije optimalnog upravljanja, koje su bliske pitanjima upravljanja objektima u konfliktnim situacijama. Nastaje i razvija se teorija diferencijalnih igara. Istraživanja u problemima upravljanja i u oblastima matematike koje su povezane sa njima zajedno sa računskom tehnikom daju osnovu za automatizaciju novih sfera ljudske delatnosti.

Naveli smo neposredno niz matematičkih oblasti, veoma značajnih za puteve razvitka *današnje matematike*. U ovome što dalje sledi pokušaćemo da kroz te oblasti, odnosno kroz njihove tokove savremenog razvitka, naučno za širi krug zainteresovanih osvetlimo staze kojima se kreće *današnja matematika*.

Algebra

Jedna od najvećih oblasti matematike je algebra, uporedo sa aritmetikom i geometrijom. Današnja algebra smatra se kao nauka o operacijama nad ma kojim matematičkim objektima. Ona je razdeo matematike koji formira opšte pojmove i metode za svu matematiku i u tom stilu deluje na čitav *hod današnje matematike*. Za nju je karakteristično da se u centru njenog zanimanja nalaze svojstva operacija, kao što su, na primer, asocijativnost, komutativnost, distributivnost i druga svojstva operacija.

Ta svojstva nad matematičkim objektima u raznim situacijama nekada su potpuno različita, a nekada jednaka, bez obzira na različite objekte. Kad apstrahujemo prirodu objekata i utvrdimo određena svojstva operacija nad objektima, dolazimo do pojma *skupa*, kome je nametnuta *algebarska struktura*, tj. dolazimo do *algebarskog sistema*. Potrebe razvitka današnje matematike kao nauke dale su niz algebarskih sistema, kao što su *grupa*, *prsten*, *polje*, *linearni prostor* i drugi algebarski sistemi. Tako, na primer, skup celih brojeva

ima strukturu komutativne grupe u odnosu na sabiranje kao operaciju, ili strukturu komutativnog prstena u odnosu na sabiranje i množenje, dok je skup racionalnih brojeva komutativno polje u odnosu na sabiranje i množenje.

Nikola Burbaki* u svom članku *Arhitektura matematike*, objašnjavajući pojam strukture, podvlači da se u matematičko-logičkoj izgradnji polazi od osnovnih stavova ili *aksioma* i da se na bazi toga izvodi teorija strukture, odnosno teoreme koje se odnose na strukturu. Na taj se način izgrađuje *aksiomatska teorija* strukture. Neka je u jednom skupu definisana izvesna operacija, kojom se iz dva ma koja elementa skupa dobija treći element iz istog skupa. Ako se utvrde osnovni stavovi, a naime, da je operacija *asocijativna*, da postoji element takav da za ma koji element skupa operacija sa tim elementima dovodi do tog elementa, tj. da postoji *neutralni element*, da za ma koji element iz skupa postoji element takav da operacija sa ta dva elementa dovodi do neutralnog elementa, tj. da postoji *inverzni element* svakom datom elementu, onda se skup sa definisanom operacijom, koja zadovoljava navedena tri uslova, zove *grupa*, a sami uslovi su *aksiomi grupe*. Na primer, skup celih brojeva je grupa u odnosu na operaciju *sabiranja*, jer je ova operacija *asocijativna*, nula je *neutralni element* operacije, dok je suprotno označeni element datom elementu *inverzni element* operacije. U svom članku Nikola Burbaki govori i o drugim strukturama, podvlačeći *hijerarhiju struktura*. Na taj način baca suštinske poglede na *formalistički* karakter staza *hoda današnje matematike*.

Istraživanje složenih algebarskih sistema, njihovih svojstava na osnovu *opštih* pojmova, jedan je od osnovnih predmeta savremene algebre. Osim toga, ona izučava primenu algebarskih metoda na druge razdele matematike, tako, na primer, na topologiju, funkcionalnu analizu, teoriju brojeva, algebarsku geometriju, računsku matematiku, teorijsku fiziku, kristalografiju i na druge razdele ili pojedinačne delove.

Razdeo matematičke logike koji izučava iskaze jeste *algebra logike*. Njeno zasnivanje predstavlja pokušaj rešavanja tradicionalnih logičkih zadataka algebarskim metodama. Razvitak teorije skupova i matematičke logike značajno je izmenio predmet *algebre logike*. On se suštinski sastoji u izučavanju iskaza, a istinitost ili lažnost dobijenih složenih iskaza zavisi od istinitosti i lažnosti polaznih iskaza i odgovarajućeg tretiranja veza kao operacija nad iskazima. Tako se savremena algebra našla i u sferi rešavanja problema mišljenja, ispreplela se sa logikom i u tom smislu karakteristična je za tokove *današnje matematike*.

Razdeo matematike koji izučava algebarske mnogostrukosti je *algebarska geometrija*. Ove mnogostrukosti su skupovi tačaka n-mernog prostora, čije su koordinate rešenja polinomskog sistema jednačina. Svaka algebarska mnogostrukost ima određenu dimenziju koja se izražava brojem nezavisnih parametara koji određuju tačku na mnogostrukosti. Algebarska mnogostrukost dimenzije jedan zove se algebarska kriva, a dimenzije dva algebarska površ. Na primer, konusni preseci su algebarske krive. U početku algebarska geometrija se bavila izučavanjem specijalnih klasa krivih i površi, a zatim je prešla na postavljanje i izučavanje opštih problema koji se odnose na mnogostrukosti. Ona se danas javlja kao jedna od najintenzivnijih razvijajućih razdela matematike. Njene metode ogromno utiču na razdele današnje matematike, susedne sa algebarskom geometrijom, kao na teoriju funkcija mnogih kompleksnih promenljivih i na teoriju brojeva, a isto tako na razdele matematike, daleke od algebarske geometrije, kao na parcijalne diferencijalne jednačine, algebarsku topologiju, teoriju grupa i druge.

Savremena *apstraktna algebra* u tesnoj je vezi sa matematičkom logikom. U pitanjima koja se odnose na probleme u teoriji algoritama postignuti su mnogi značajni rezultati koji upravo stoje na granici apstraktne algebre i matematičke logike. Zato i na taj način *današnji* tokovi razvitka algebre doprinose trasiranju savremenog *hoda* celokupne matematike.

Matematička logika

Logika koja se razvija matematičkim metodama jeste *matematička logika*. Ona je bitno karakteristična za današnju matematiku. Za nju je osobito značajno korišćenje formalnih jezika sa veoma tačnom sintaksom i jasnom semantikom, kao i jednoznačno definisanim poimanjem formula. U vezi sa neobičnom razradom osnova matematike istakla se potreba za takvom logikom, naročito nastajanjem teorije skupova sa otkrivenim antinomijama u toj teoriji, zatim potrebom preciziranja pojma algoritma, kao i drugim dubokim i principijelnim pitanjima matematike kao nauke. No treba naglasiti, da se značaj matematičke logike za nauku u celini ne iscrpljuje u njenim matematičkim primenama, ona dolazi do izražaja u svim naukama. Zato se matematička logika može s pravom okarakterisati kao logika ne samo savremene matematike, nego i nauke uopšte.

Tri osnovna aspekta vezuju logiku, a naime: *ontologički* ili „logika stvari", tj. neophodna veza pojava objektivnog sveta; *gnoseološki* ili „logika znanja", tj. neophodna veza pojmova pomoću koje se poznaje suština i istina; *dokazni*, odnosno „logika dokaza i pobijanja", tj. neophodna veza između iskaza u rasuđivanjima koji proizlaze samo iz forme te veze bez odnosa na to izražavaju li ta suđenja suštinu i istinu ili ne. Prva dva aspekta odnose se na filozofiju i dijalektičku logiku, a poslednji aspekt obrazuje savremenu logiku. Uzimajući u obzir metodološke postupke, govori se o *deduktivnoj* logici, koja ide od opštih ka pojedinačnim stavovima i *induktivnoj* logici, koja ide od pojedinačnih ka opštim stavovima. Svaka od njih igra određenu ulogu u savremenoj logici.

Za rešenje problema u savremenoj logici primenjuje se metoda *formalizacije* dokaza. Tu dolazi do punog izražaja sistem formalizovanih aksioma i formalnih pravila izvođenja. Ta pravila odražavaju obične osobine rasuđivanja, na primer, prelaz od opšteg ka pojedinačnom i izvođenje posledica iz

dokazanih premisa. Svugde dolaze do punog izraza dobro poznati zakoni, kao što su zakon isključenja trećeg, zakon konjunkcije i disjunkcije, zakon implikacije i drugi zakoni. Sve se to posmatra kao samostalna celina. Upotrebljavaju se logičke promenljive koje označavaju proizvoljne iskaze, logički simboli za „i", „ili", „ako ... to", „ne" i zatim zagrade za očitovanje konstrukcije formula u razmatranim računima. I uvek ostaje, kao osnovni zadatak matematičke logike, problem neprotivrečivosti, što znači da se ne može doći do zaključka da jedan stav važi i istovremeno da ne važi.

U okviru matematičke logike imamo: *logiku iskaza*, a to znači njen razdeo posvećen izučavanju logičkih formi složenih iskaza, obrazovanih iz elementarnih iskaza; *logiku klasa*, tj. razdeo matematičke logike kome je osnovni predmet razmatranja u kojima se služimo klasama predmeta, koje su karakteristične zajedničkim svojstvima svih predmeta koji ulaze u klase; *logiku odnosa*, kao razdeo matematičke logike koji je posvećen proučavanju odnosa među objektima različite prirode; *logiku predikata*, razdeo matematičke logike koji izučava logičke zakone, zajedničke za bilo koju oblast objekata istraživanja sa zadanim predikatima nad tim objektima, tj. sa zadanim svojstvima i odnosima. Pomenimo samo da se, na primer, *formalna aritmetika* izgrađuje na osnovu logike predikata. Uopšte uzev, ona se javlja kao osnova za konstrukciju logičkih računa što dolazi do izražaja u izračunavanjima modalne, verovatne i induktivne logike i na drugim mestima. Sve ovo ostavlja određen uticaj na staze kojima se kreće tok razvitka savremene matematike.

Matematička logika je posebno uticala na način rasuđivanja u mnogim današnjim naukama. Njen je bitan doprinos razvitku *logike nauke*, kojoj ćemo ovde posvetiti posebnu pažnju. I to je jedna od karakteristika današnje matematike, koju je dobila pretežno od matematičke logike.

Logika nauke

Za *logiku nauke* može se kazati da je u posebnom smislu disciplina koja primenjuje pojmove i tehnički aparat savremene logike u analizi sistema naučnih znanja. Ona se često upotrebljava kao oznaka razvitka nauke, tj. kao logika naučnog razvitka, zatim kao oznaka pravila i procesa naučnog istraživanja, drugim rečima kao logika istraživanja i kao učenje o psihološkim i metodološkim pretpostavkama naučnih otkrića, odnosno kao logika naučnih otkrića.

Kao specijalna disciplina *logika nauke* počela se razvijati u drugoj polovini XIX v. a konačno se oformila u prvoj četvrti XX v. Na njeno oformljenje bitno su uticale ideje G. Fregea*, B. Rasela* i Vitgenštajna (L. Wittgenstein), kao i članova Bečkog kruga pod rukovodstvom Šlika (M. Schlick) i Berlinskog kruga pod rukovodstvom Rajhenbaha (H. Reichenbach), kao i niza drugih savremenih naučnika i filozofa. U velikoj većini stajali su na pozicijama neopozitivizma, pa je bilo široko rasprostranjeno mišljenje da je *logika nauke* specifični pozitivistički pristup filozofiji i metodološkoj analizi naučne spoznaje. No, to je samo predstavljalo specijalnu varijantu njenog filozofskog istraživanja. U razradi savremene *logike nauke* aktivno učestvuju filozofi i logičari koji stoje na pozicijama dijalektičkog materijalizma, pored predstavnika neopozitivizma, pragmatizma, filozofa lingvističke analize i drugih.

Osnovni krug problema *logike nauke* obuhvata: izučavanje logičke strukture naučnih teorija; izučavanje formalizovanih jezika nauke; istraživanje različitih oblika deduktivnih ili induktivnih izvođenja, koji se primenjuju u prirodnim, tehničkim i socijalnim naukama; analiza formalnih struktura fundamentalnih i proizvodnih naučnih pojmova i odredaba; razmatranje i usavršavanje logičkih procedura i operacija, kao i razrada logičkih kriterijuma i njihove pronalazačke efektivnosti; istraživanje logičko-gnoseološkog i logičko-metodološkog sadržaja redukcije naučnih teorija, procesa apstrakcije, objašnjenja, predviđanja, ekstrapolacije i tome slično, u svim sferama naučne delatnosti. U logičkoj analizi sistema naučnih spoznaja kao veoma važno sredstvo javlja se primena metoda *formalizacije*. Njihovo preimućstvo sastoji se u tome, što dopušta pojavu logičkih veza i odnosa i što tačno utvrđuje pravila koja obezbeđuju najbolje dobijanje dosta vernih spoznaja iz polaznih pretpostavki date teorije kao aksioma razmatranog formalizma. Imamo posla sa deduktivnim i induktivnim teorijama. Prve se javljaju u matematici, teorijskoj fizici, teorijskoj biologiji i u drugim disciplinama koje su bliske tim naukama, dok su druge karakteristične za većinu empirijskih nauka, gde iz različitih uzroka izniču situacije neodređenosti, vezane sa nepotpunom informacijom o svojstvima i odnosima objekata koji se istražuju. Kod prvih je reč o pravilima neophodnog sledovanja, dok je kod drugih reč o formama verovatnog sledovanja. Zasnivanje formalizovanih sistema dopušta da se istražuje red važnijih logičkih svojstava sadržanih u teoriji u datom formalizmu. To se pre svega odnosi na probleme neprotivrečivosti, potpunosti i nezavisnosti polaznih stavova ili aksioma date teorije.

Otkrivanje opštosti logičkih struktura naučnih teorija, koje su različite u sadržajnom smislu, pruža veće mogućnosti da se prenose ideje i metode jedne teorije u oblast druge, da se zasniva mogućnost svođenja jedne teorije na drugu, kao i mogućnost isticanja njihovih opštih pojmovnih i metodoloških pretpostavki. Ovo je veoma važno za sjedinjavanje i uprošćenje sistema naučne spoznaje, pogotovo kad je reč o brzom iznicanju i razvitku novih naučnih disciplina. Posebno mesto u *logici nauke* zauzimaju problemi koji su vezani sa empirijskim zasnivanjem i proverom prirodnonaučnih i socijalnih teorija i hipoteza. Teškoće koje su nastale u neopozitivističkoj *logici nauke* privukle su pažnju mnogih logičara i filozofa problemu veze i uzajamnog dejstva logičkih struktura sa strukturama predmetno-eksperimentalnih praktičnih delatnosti. To je uslovilo čitav viz novih pristupa *logici nauke*. Iz toga izvire zanimanje među logičarima za teoriju poznavanja dijalektičkog materijalizma.

Posebna je pažnja posvećena logičkoj semantici, kao izučavanju smisla i značenja teorijskih i empirijskih termina u jezicima različitih nauka. Vrlo su značajni problemi logičkih analiza reči različitih nauka, zatim pravila prevoda jezika teorija na jezik posmatranja, kao i istraživanja prirodnonaučnih odnosa i međudejstava. U vezi s tim posebnu važnost imaju radovi u izučavanju semantike opšte naučnih termina, kao što su: „sistem“, „struktura“, „veovatnoća“, „model“, „premeravanje“, „fakt“, „teorija“ i drugi. U vezi sa brzim razvitkom kibernetike, strukturalne lingvistike, teorije sistema i drugih oblasti, a shodno logičko-metodološkim analizama, višeznačnost i različiti načini upotrebe navedenih termina otkrivaju pretpostavke da se izvrši efektivna otkrivačka korisnost sličnih pojmova.

U poslednje vreme *logika nauke* doživljava prelomni razvitak, naročito ako se uzme u obzir rasprostranjenost ideja i metoda logičkih analiza u oblastima socijalnih nauka. Zato je za dalji razvitak *logike nauke* neophodno pojačano istraživanje u oblasti simboličke logike i njene primene u oblasti istraživanja i rešavanja problema kojima se bavi *logika nauke*. Tako se današnja matematika jasno uklapa u razvitak *logike nauke*.

Savremeni pravci u razvitku osnova matematike

Potrebno je ukazati na tri savremena pravca koji karakterišu tokove proučavanja osnova matematike i tako reći vladaju njenom filozofijom, a naime, na: *logicizam*, *formalizam* i *intuicionizam*.

Pravac čija se osnovna teza javlja u tvrđenju o svodljivosti matematike na *logiku* jeste *logicizam*. Glavni predstavnici tog pravca su G. Frege i B. Rasel. Zastupa mogućnost ili neophodnost odredbe svih polaznih matematičkih pojmova terminima čiste logike, a dokaze svih matematičkih tvrđenja logičkim sredstvima. Razvijajući tezu o matematici kao grani logike, posle silnog razmaha kritičkog preispitivanja osnova matematike i njenog konstruktivnog pravca, pristalice logicizma oštro su kritikovali Kantovu filozofiju matematike i njegovo gledište o ulozi intuicije u matematici. Apsolutnom isključivošću suprotstavili su logičku spoznaju intuitivnoj.

U težnji da se oslobode očiglednosti i intuicije u izgradnji matematike, jednostavno rečeno, tvrdili su: da se osnovni pojmovi aritmetike mogu pomoću definicija svesti na logičke pojmove kao što su „ne“, „i“, „ili“, „je“, „svaki“, „izvestan“, „ako ... tada“; da se aksiome aritmetike mogu izvesti iz logičkih stavova koji se grade pomoću navedenih pojmova. Stvorena je posebna simbolika, kojom je postignuta maksimalna formalizacija matematičkih stavova i njihovih dokaza, tako da je svaki stav postao jedna konfiguracija određenog sistema simbola. Ako se stav koji treba dokazati shvati kao početna konfiguracija određenog sistema simbola, onda se dokaz stava sastoji u tome da se, primenom ustanovljenih pravila, ova početna konfiguracija dovede u nama već poznatu, konačnu konfiguraciju sistema simbola.

Ovde se možemo odmah zapitati: ko će odlučiti o tome da li smo ustanovljena pravila tačno primenili u operacijama sa simbolima? Da li je konačna konfiguracija sistema simbola baš ona na koju smo želeli da svedemo početnu konfiguraciju? Odgovor na ova pitanja ne može se zamisliti bez određene uloge očiglednosti i intuicije, ukoliko ih shvatimo kao oblike našeg *neposrednog* kontakta sa sistemom matematičko-logičkih simbola. Tako se kroz mala vrata, kako je duhovito na jednom mestu primetio matematičar i filozof Gonset (F. Gonseth), *očiglednost* i *intuicija* pojavljuju upravo onda kad smo mislili da smo se njih oslobodili. Zato „kriza očiglednosti i intuicije", koju su proglasili logicisti i drugi razni formalisti, nije kriza koja dovodi u sumnju principijelnu vrednost očiglednosti i intuicije u procesu otkrivanja istine u matematici, već je to kriza njihove *jednostrane* primene u navedenom procesu, uslovljene, u krajnjoj liniji, stanjem razvitka matematike. Dakle, ni maksimalno formalizovan sistem aritmetičkih, odnosno matematičkih istina ne može se osloboditi od pozivanja na očiglednost i intuiciju.

Formalizam je takođe jedan od osnovnih pravaca u proučavanju osnova matematike. Kao glavni zadatak u tom proučavanju smatra da je dokaz *neprotivrečivosti* matematičkih teorija, a u krajnjem cilju i matematike u celini. Taj zadatak postao je aktuelan posle otkrića antinomija teorije skupova, koja je u osnovi velikog dela današnje matematike. Formalistički program škole Davida Hilberta istakao je ideju *formalizacije* logičko-matematičkih teorija, a to znači njihovo predstavljanje u obliku *neinterpretirajućih računa*, odnosno formalnih sistema. Njihova neprotivrečnost mora biti zatim ustanovljena sredstvima neke sadržajne teorije, koju je Hilbert nazvao *metamatematikom* odnosno teorijom dokaza.

Dalja apsolutizacija ideje formalizacije dovela je do formalističke koncepcije, koja je stalno podvrgnuta gnoseološkim kritikama. Ona se sastoji u tome, što smatra da predložena teorija ništa ne označava sama po sebi, da nema nikakvog smisla i da je svaka naučna teorija samo „igra sa znacima", a njena valjanost da se obezbeđuje formalnim dokazom neprotivrečivosti. Odnos između stvarnih i idealnih postavki u svim školama koje izučavaju osnove matematike pravi razliku među njima, naročito kada je u pitanju uloga idealnih postavki. To ne postoji kod većine konkretnih matematičara, koji stupnjevima apstrakcije i idealizacije dolaze do određenih rezultata u proučavanjima pojava i objekata.

Hilbertov formalizam polazi od hipoteze mogućnosti pune i neprotivrečive formalizacije celokupne klasične matematike. Međutim, teorema Gedela (K. Gödel) o nepotpunosti aksiomatske aritmetike često se tretira kao opovrgavanje formalizma, odnosno navedene Hilbertove hipoteze. Mnogi znameniti matematičari težili su za iznalaženjem konstruktivnih sredstava, koja bi dopustila metateoretske dokaze raznih delova formalne matematike i koja revidiraju formalizam, ne u celini, već Hilbertovu koncepciju koja se odnosi na metateoretska istraživanja metoda dokaza.

Hilbertov formalizam razmatra neinterpretirana izračunavanja sama po sebi, tj. nezavisno od pitanja njihove interpretacije ili mogućnosti da se

interpretiraju. U saznanju mogućnosti formalnog razmatranja logike i logičko-matematičkih izračunavanja, Hilbertova škola postigla je veoma značajne rezultate koji se odnose na spoznaju tehnike našeg mišljenja. Razvila je aparat koji je čvrsto ušao u arsenal matematičke logike i široko se primenjuje od svih matematičara i logičara.

Teorija o matematičkoj intuiciji dobila je svoj pun izraz u *intuicionizmu* kao matematičkom pravcu koji u intuiciji vidi osnovu matematike i formalne logike. Nastao je u vezi sa poznatim antinomijama teorije skupova i kao reakcija na pravce *formalizma* i *logicizma*. Najistaknutiji predstavnici intuicionizma su matematičari Brauer (L. J. Brouwer), Hejting (A. Heyting) i Vejl (H. Weyl).

Po Braueru, matematika kao nauka slobodna je od logičkih pretpostavki, a jedini joj izvor može biti *intuicija*, iz koje s neposrednom jasnošću proizlaze pojmovi i zaključci u matematici. Matematička ili teorijska intuicija nesvodljiva je, prema intuicionistima, na čulne pojave; ona je imanentna razumu koji je u stvari organ intuitivnog sagledavanja.

„Matematika", veli Vejl, „uopšte se ne sastoji u tome da razvija logičke zaključke iz datih pretpostavki, već se njeni problemi tiču intuicije, živog naučnog duha, a ti se problemi ne mogu rešiti po utvrđenoj shemi podobno aritmetičkim školskim zadacima. Deduktivni put, koji vodi njihovim rešenjima, nije predodređen, treba ga otkriti, a kao pomoć pri tom služi obraćanje trenutno uočenim mnogoobraznim vezama intuicije".

Dosledni svom shvatanju intuicije i njene uloge u zasnivanju i izgradnji matematike, intuicionisti zaključuju da se u matematici mogu smatrati dokazanim oni stavovi pomoću kojih se dolazi do rezultata ostvarenjem konstrukcije ili koji ukazuju bar na principijelnu mogućnost konstrukcije. Dokazati, po njima, grubo rečeno, znači isto što i konstruisati. U intuicionističkoj matematici priznaje se egzistencija jednog matematičkog objekta samo tada kad se ukaže i na put kojim se taj objekt konstruiše. Hejting, npr. kaže da „postojati" znači isto što i „biti konstruisan". Tvrdi se, dalje, da je princip potpune matematičke indukcije osnovni i najspecifičniji princip za matematiku, logički neizvodljiv, i da se otkriva samo posrednim intelektualnim sagledavanjem, odnosno intelektualnom intuicijom. Kritikujući Kantorova shvatanja aktuelno beskonačnog i usvajajući samo potencijalno beskonačno, a držeći se čvrsto svog shvatanja intuicije kao metode neposrednog intelektualnog sagledavanja u matematici, intuicionisti su došli do svoje *konstruktivne logike*, u kojoj ne važi zakon isključenja trećeg, u smislu da se ne može primeniti na beskonačne skupove kao što se primenjuje na konačne. Niz prirodnih brojeva i neposredno sagledana mogućnost dodavanja jedinice kao konstitutivnog elementa prirodnog broja, *intuicija iteracije*, po Vejlu, čini osnovu matematičkog mišljenja. Ona je samo jedan izraz *intuitivnog* prihvatanja prirodnog broja kao matematičkog pojma.

Postoje i drugi pravci u današnjoj matematici u vezi sa osnovama matematike i njene filozofije. Među njima istaći ćemo *konstruktivizam* ili *konstruktivnu matematiku*. Ona se može kratko okarakterisati sa sledećim osnovnim crtama: njen predmet izučavanja su konstruktivni procesi i u vezi s tim ostvarenje *konstruktivnih objekata*; ona izvodi razmatranje konstruktivnih procesa i objekata u granicama *apstrakcije potencijalne ostvarljivosti* sa punim isključenjem aktuelne beskonačnosti; intuitivan pojam efektivnosti vezuje sa tačnim pojmom algoritma; imajući u vidu specifičnost konstruktivnih procesa i objekata, koristi specijalnu *konstruktivnu logiku*. Jedan od najznačajnijih predstavnika u konstruktivnoj matematici je sovjetski matematičar i logičar A. A. Markov, kao i odgovarajuća sovjetska matematičko-logička škola.

Pomenimo još i pravce *realizam*, *nominalizam* i *konvencionalizam*, koji manje ili više utiču na filozofiju matematike i na poglede koji se odnose na osnove matematike.

Matematika je danas u punom rascvatu. Zato se sasvim prirodno postavljaju zahtevi da se ispitaju njene osnove, da se one što preciznije utvrde i da na taj način deduktivno zaključivanje iz polaznih pojmova i stavova bude što sigurnije i ubedljivije. Tako se teorije koje se odnose na osnove matematike javljaju kao veoma važan faktor u naučnim istraživanjima i ispitivanjima. U tome je njihova primarna važnost. Dokazi neprotivrečivosti, potpunosti i nezavisnosti polaznih stavova su veoma teški, pa se u vezi s tim u savremenom razvitku matematike razvila *metamatematika* kao nauka koja se bavi teorijom dokaza u matematici, a koja osnove matematike posmatra sa dubljeg logičkog i filozofskog gledišta uopšte. Ona veoma apstrahuje matematiku time što matematičke teorije zamenjuje formalnim sistemima, a dokaze nizovima veoma poznatih formula. Tako *metamatematika* bitno karakteriše *hod današnje matematike* u naučnim i filozofskim pogledima.

Geometrija

Geometrija, kao veoma obimna oblast matematike u teorijama i primenama, doživljava u tokovima današnje matematike razvitak koji je nužno vezan s njenim prethodnim razvitkom. Veoma značajno mesto u današnjim tokovima geometrije zauzima pojam *prostora*. On se definiše kao svaki uređeni par sastavljen od proizvoljna skupa S i proizvoljna postupka P koji svakom podskupu X skupa S pridružuje jedan jedini podskup skupa S koji se zove *prostor* skupa X. Tako je u savremenoj matematici usvojeno formalno-matematičko određenje prostora, kao i figure, na osnovu teorije skupova. *Prostor* se, dakle, opredeljuje kao skup elemenata, odnosno tačaka, sa uslovom, da su u tom skupu ustanovljeni odnosi koji su slični s običnim prostornim odnosima. To znači da se skupovi poimaju kao *prostori* ako se u njih konstruišu odgovarajući odnosi, npr., rastojanje između tačaka. Tako možemo posmatrati skup funkcija na određenom segmentu. Svaka funkcija je tačka tog skupa. Poznati su u današnjoj matematici *Hilbertovi prostori*, čije su tačke funkcije i čije su dimenzije beskonačne, kao i njihova široka primena u matematičkim izučavanjima realnog sveta. Rastojanje između dve funkcije, kao dve tačke prostora, može biti određeno kao maksimum apsolutne veličine

tih funkcija, ili na druge slične načine, samo da zadovoljavaju polazne stavove rastojanja. Upravo, na evoluciji pojma rastojanja, od Frešeovog (Frechet) stvaranja metričkih prostora, može se jasno i konkretno uvideti u razvitku matematike prelaz sa *nižeg* stepena apstrakcije na *viši* stepen apstrakcije. Postoje neki osnovni tipovi odnosa, kojima se u raznim kombinacijama dolazi do raznoobraznih prostora u *savremenoj* geometriji.

Tu spadaju opšti odnosi pripadanja i uključivanja, koji sami po sebi ne određuju nikakvu „geometriju", ali ako se istaknu neke specijalne figure, onda se „geometrija" prostora može odrediti zakonima veza tačaka tih figura. U značajnoj meri specijalni predmet geometrije je istraživanje *topoloških* prostora i figura u njima. Uvođenje koordinata pruža mogućnost istraživanja u raznim prostorima. Uopštenje pojma kretanja, kao transformacije jedne figure u drugu, dovodi do opšteg principa opredeljenja raznih prostora. Zadavanje dužine beskonačno malim koracima tj. diferencijala dužine luka krive kao funkcije koordinata tačaka krive i njenih diferencijala, igra veoma važnu ulogu u funkcionalnoj analizi. Sjedinjavanjem ideja Rimana u odredbi „geometrije" u beskonačno malim oblastima višestrukosti, sa odredbom „geometrije" pomoću grupnih transformacija, dovelo je do pojma prostora u kojem se transformacije zadaju u beskonačno malim oblastima. Govori se o prostorima sa „svezanošću" ovog ili onog tipa. Tako su prostori sa „Euklidovom svezanošću" Rimanovi prostori. Aksiomatska metoda u čistom pogledu služi bilo za oformljenje gotovih teorija, bilo za odredbe opštih tipova prostora uz isticanje specijalnih skupova, a sve to ima tesne veze sa osnovama matematike. Značaj geometrijskih teorija i stepen njihovog značaja određuje se sadržajem njihovih zadataka i dobijenim rezultatima, kao i njihovim međusobnim vezama, zatim vezama s drugim matematičkim oblastima, sa prirodnim naukama i tehnikom. Na to danas ukazuju svojim teorijama i raznovrsnim primenama euklidska i neeuklidska geometrija, diferencijalna, analitička i mnogomerna geometrija, koja svojim generalizacijama zauzima istaknuto mesto u *hodu današnje matematike*.

Topologija

Kao deo geometrije smatra se *topologija*. Ona je posvećena izučavanju fenomena neprekidnosti i u današnjoj matematici je u punom razvitku. Raznoobraznost pojava neprekidnosti, kao i široki spektar različitih pristupa njenog izučavanja, doveli su do razdvajanja jedinstvene topologije u red odeljenih topologija, a naime do *opšte topologije*, do *algebarske topologije* i do *topologije višestrukosti*. One se jedna od druge razlikuju po predmetu i metodi izučavanja.

Opšta topologija aksiomatski izučava neprekidnost i uporedo sa algebrom sastavlja osnovu savremene teorijsko-skupovne metode u matematici. U opšte prihvaćenoj aksiomatici bitnu ulogu igra pojam otkritog skupa. Definiše se topološka struktura, ili topologija, na skupu, pa se takav skup zove *topološki prostor*. U njemu se mogu odrediti svi pojmovi elementarne analize, koji su vezani s neprekidnošću. *Kompaktni* topološki prostori su krupno dostignuće opšte topologije, sa izrazito opštim matematičkim značajem. Deo opšte topologije, koji je najviše geometrijski orijentisan, jeste *opšta teorija dimenzije*. U njenim granicama uspeva se, npr., dati jasno opšte određenje intuitivnog pojma geometrijske figure i posebno pojma linije i površi. Pomenimo npr., da je *homeomorfizam* kao bijekcija jednog topološkog prostora na drugi topološki prostor vrlo značajan pojam u opštoj topologiji. *Algebarska topologija* bavi se otkrivanjem topoloških prostora dajući neophodne uslove da bi topološki prostori bili homeomorfni. Tesna veza teorije mnogostrukosti sa algebarskom topologijom dozvolila je, s jedne strane, da se reše mnogi značajni geometrijski problemi, a s druge, stimulisala je razvitak algebarske topologije. U vezi s tim stoji u neposrednoj povezanosti *topologija višestrukosti*, posebno s obzirom na geometrijske probleme.

Razvitak topologije se produžava danas u svim pravcima, a sfera njene primene se neprekidno širi. Ističe se moskovska topološka škola, kao i krupni centri topologije u Americi i Velikoj Britaniji i na drugim mestima. Zasniva se opšta teorija dimenzija, konstruiše se teorija kompaktnih prostora i dokazuje se teorema njihovih proizvoda, daju se po prvi put neophodni i dovoljni uslovi merljivosti prostora, uvodi se pojam lokalnog konačnog otkrića i uvode se potpuno regularni prostori. Osniva se opšta teorija *homologije* i razvija se teorija *homotopije*, kao i drugi delovi moderne topologije, karakteristični za teoriju i primene današnje matematike.

Funkcionalna analiza

Funkcionalna analiza je deo savremene matematike u kojoj se kao glavni zadatak javlja proučavanje beskonačnomernih prostora i njihovih transformacija. Nastala je na prelomu XIX i XX v. Kantorova teorija skupova odigrala je veliku ulogu u formiranju opštih pojmova funkcionalne analize. Među apstraktnim prostorima, za matematičku i funkcionalnu analizu pokazali su se vrlo važnim funkcionalni prostori, odnosno prostori čiji su elementi funkcije, pa otuda i potiče sam naziv *funkcionalna analiza*. U Hilbertovim proučavanjima integralnih jednačina nastali su prostori l_p i L_p, dok je Banah (S. Banach) uveo potpuno linearne normirane prostore. Malo zatim u radovima niza američkih matematičara konstruisana je apstraktna teorija samokonjugovanih operatora u Hilbertovom prostoru. Isto tako neki savremeni sovjetski matematičari doprineli su razvitku funkcionalne analize.

Za funkcionalnu analizu karakteristično je spajanje metoda klasične analize, topologije i algebre. Apstrahujući se od konkretnih situacija, ona ističe aksiome na osnovu kojih konstruiše teoriju, uključujući u sebi klasične zadatke, kao posebne slučajeve, dajući mogućnost da se rešavaju novi zadaci. U rezultatima funkcionalne analize dublje se ulazi u suštinu matematičkih pojmova i otkrivaju se novi putevi istraživanja. Njen razvitak je tekao paralelno s razvitkom savremene teorijske fizike. Pokazalo se da jezik funkcionalne analize najadekvatnije odražava zakonomernost kvantne mehanike, kvantne teorije polja i drugih teorija savremene fizike, koje su pokazale bitni uticaj na problematiku i metode funkcionalne analize. Hilbert je smatrao da je njegov osnovni rezultat u teoriji integralnih jednačina rešenje problema razlaganja proizvoljne funkcije u beskonačni red po sopstvenim funkcijama, a da se razlaganje proizvoljne funkcije u beskonačni red, u stvari, ne može posmatrati odvojeno od teorije integralnih jednačina. On je u vezi s rešavanjem problema integralnih jednačina razvio teoriju kvadratnih formi s beskonačno mnogo promenljivih i one su, sa odgovarajućim pojmovima, našle svoje u osnovama funkcionalne analize. Razlaganje funkcija u beskonačne redove tipa Furijeovog reda, koje je postignuto u teoriji integralnih jednačina, za Hilberta je bilo od principijelnog značaja. Oslanjajući se na taj rezultalt on je povezao algebru i analizu u jedinstvenu teoriju funkcija beskonačnog broja promenljivih. Neprekidnu funkciju, razloženu u Furijeov red, Hilbert posmatra kao beskonačni niz Furijeovih koeficijenata, ostvarivši tako prelaz od funkcije, definisane na kontinuumu vrednosti, ka beskonačnom nizu, tj. prelaz od neprekidnog ka diskretnom. Blagodareći takvom prilazu, uspeo je da diferencijalne i integralne odnose među funkcijama zameni beskonačnim sistemima linearnih algebarskih jednačina. Tako je razrađen aparat nizova za proučavanje funkcija. Jednu od osnovnih uloga u razvitku funkcionalne analize odigrali su radovi Hilberta iz teorije integralnih jednačina. Od posebne su važnosti Hilbertove ideje o jedinstvu matematike, sintezi njenih raznih oblasti i o značaju iznalaženja veza među njima, ideje kojima se rukovodio u svojim istraživanjima u teoriji integralnih jednačina, jasno pokazavši kako je u toj oblasti ostvarena plodotvorna sinteza algebre i analize.

Za današnju etapu razvitka funkcionalne analize, neobično važnu za razvitak matematike danas, karakteristična je velika veza sa teorijskom fizikom, a tako isto sa različitim delovima klasične analize i algebre, npr., s teorijom funkcija mnogih kompleksnih promenljivih i teorijom parcijalnih diferencijalnih jednačina. U njoj su značajni pojmovi prostora, operatora, funkcionala, zatim spektralna teorija i nelinearna funkcionalna analiza i niz drugih pojmova i teorija.

Korišćenjem teorije skupova danas je u punom razvitku teorija funkcije realne promenljive, zatim teorija funkcije kompleksne promenljive, kao i njihove raznovrsne primene. Ovde naročito treba podvući savremene tokove razvitka teorije *običnih* i *parcijalnih diferencijalnih jednačina*, zatim teorije *integralnih* i *integro-diferencijalnih jednačina*. Uzimajući u obzir njihove raznovrsne primene mora se posebno podvući teorija *graničnih uslova*. Sve to karakteriše *hod današnje matematike*.

Teorija verovatnoće i matematička statistika

Teorija verovatnoće razvijala se pod uticajem vrlo praktičnih problema, na bazi empirijsko-intuitivnih motivacija. Tako je tekao njen razvitak skoro do XX v. Tek je tokom XX v. *teorija verovatnoće* postala matematička disciplina sa svojim jasno definisanim metodama i jasno definisanim predmetom, pa se njen razvitak odvija ne samo po logici njenih konkretnih primena i empirijsko-intuitivnih motivacija, nego i po logici njenih unutrašnjih potreba kao matematičke discipline. U vezi s tim, jedan od najznačajnijih momenata u tom periodu njenog razvitka je njena aksiomatizacija, koju je 1933. izvršio A. N. Kolmogorov, kad je uveo *prostor verovatnoće*, formiran od *sigurnog događaja*, kao skupa elementarnih događaja, od *klase složenih događaja*, koji su delovi sigurnog događaja i od *verovatnoće*, kao pozitivne mere na klasi složenih događaja, takve da je verovatnoća sigurnog događaja jednaka jedinici. U današnjoj teoriji verovatnoće od bitnog su značaja *granične teoreme*, među kojima su *zakoni velikih brojeva*, sa svojim raznovrsnim primenama u prirodnim, tehničkim i socijalnim naukama.

Savremeni tok razvitka teorije varovatnoće karakteriše razvitak teorije *slučajnih procesa*, kao njene posebne oblasti. Reč je o *slučajnim funkcijama* u kojima figurišu slučajne promenljive i neslučajna promenljiva, koja se većinom interpretira kao vreme.

Za njen savremeni razvitak od posebnog su značaja radovi niza francuskih, sovjetskih i američkih matematičara. Svi su ti radovi oformili i razvili teoriju verovatnoće kao pravu matematičku disciplinu.

Na teoriji verovatnoće zasnovana je savremena matematička i primenjena statistika. Prvobitna uloga statistike bila je da utvrdi, u neku ruku, brojevnu predstavu državnog stanja sa raznih stanovišta: upravnog, ekonomskog i uopšte socijalno-političkog karaktera. No, ubrzo se pokazalo da su statističke metode istraživanja prikladne za sva proučavanja koja se zasnivaju na velikom broju posmatranja, eksperimentisanja i merenja, bilo da je iz tih proučavanja potrebno izvući teorijske, bilo praktične zaključke. Na taj način došlo je danas do širokih primena i afirmisanja statističkih metoda istraživanja u ekonomskim i socijalnim naukama, u meteorologiji, biologiji, naročito u genetici, koja se bavi problemima nasleđa, fizici, hemiji, astronomiji, filologiji, psihologiji, medicini, poljoprivredi, tehnici i drugim oblastima. Slobodno možemo reći da skoro nema ljudske delatnosti u kojoj ne bi mogla doći u obzir primena statistike, kadgod je reč o skupu činilaca koje ne možemo, ili bar vrlo teško možemo, potpuno uočiti i koji su od značaja za pojave što želimo proučiti, a koje zbog takvih činilaca imaju karakter slučajnih događaja.

U savremenoj matematičkoj statistici, strogo zasnovanoj na teoriji verovatnoće, ističu se njene posebne oblasti: teorija estimacije, teorija testiranja statističkih hipoteza i teorija planiranja eksperimenata, koja je vrlo značajna za eksperimentalna istraživanja u prirodnim naukama i tehnici. Radovi niza sovjetskih i američkih matematičkih statističara od fundamentalnog su značaja za savremenu matematičku statistiku i njene primene.

Na osnovu teorije verovatnoće i matematičke statistike razvila se u toku drugog svetskog rata i posle njega *teorija informacije*, matematička disciplina koja čuva proces održanja, preobražaja i predaje informacije i koja je od

velikog praktičnog značaja za savremeno društvo i njegovu organizaciju. U njenoj osnovi leži sposobnost merenja količine informacije, koja je sadržana u jednom slučajnom objektu u odnosu na drugi slučajni objekt. Ta sposobnost omogućava da se količina informacije izrazi brojem. Posebno ističemo *informatiku*, disciplinu koja izučava strukturu i opšta svojstva naučne informacije, a tako isto i zakonomernost njenog zasnivanja, preobražaja, predaje i iskorišćavanja u raznim sferama ljudske delatnosti.

Pojam informacije zauzima veoma važno mesto u *kibernetici*, gde se kao osnovni objekt javljaju sistemi, a sama *kibernetika* je nauka o upravljanju, vezama i preradama informacija u živoj i mrtvoj prirodi. Visoki stepen apstrakcije dozvoljava *kibernetici* da nalazi opšte metode prilaza izučavanju sistema kvalitativno različite prirode, npr., tehničkih, bioloških i socijalnih. Kao primeri kibernetskih sistema mogu poslužiti razne vrste automatskih regulatora u tehnici, elektronske računske mašine, ljudski mozak, biološka populacija i ljudsko društvo. Sastav elemenata kibernetskog sistema može biti potpuno okarakterisan značenjima nekog skupa parametara, neprekidnih ili prekidnih. Postoje neprekidni, prekidni i hibridni sistemi. Možemo reći da je matematski aparat za neprekidne sisteme obično teorija sistema običnih diferencijalnih jednačina, dok je za diskretne sisteme teorija algoritama i teorija automata, a teorija informacija se koristi u slučaju oba sistema. Matematičko-analitičke i eksperimentalne metode koristi kibernetika gde se naročito ističe metoda matematičkog modeliranja. Osnovna tehnička sredstva za rešavanje svih zadataka u kibernetici su elektronski računari, pa je za savremenu kibernetiku tesno povezan progres elektronske računske tehnike. U širem smislu kibernetika se sastoji iz većeg broja razdela koji predstavljaju samostalne naučne pravce. Tako postoji: *biološka kibernetika* kao naučni pravac koji otkriva ideje, metode i tehnička sredstva kibernetike u biologiji; *medicinska kibernetika*, naučni pravac povezan sa pronalaženjem ideja, metoda i tehničkih sredstava kibernetike u medicini; *tehnička kibernetika* koja se bavi proučavanjem ideja i metoda tehničkih sistema upravljanja; *ekonomska kibernetika* bavi se primenom ideja i metoda kibernetike u ekonomskim sistemima. U svim tim kibernetikama probabilističke i statističke metode imaju određene uticaje.

Neke oblasti u savremenom razvitku matematike

Teorija brojeva kao nauka o celim brojevima zauzima veoma važno mesto u današnjoj matematici. To je vrlo stara oblast matematike, koja je, primenom modernih metoda i ideja, našla mnoge veze s drugim oblastima matematike. Ovde treba naročito pomisliti na kvadratne forme i različite probleme povezane s nekim klasičnim problemima u teoriji brojeva, kao i na raznovrsne sume, npr. trigonometrijske sume u toj teoriji. U okvirima klasične i moderne aritmetike tretiraju se razni problemi značajni za teoriju brojeva.

Potreba razvitka same matematike, odnosno *današnja matematizacija* različitih oblasti nauke, zatim prodor matematičkih metoda u mnoge sfere praktične delatnosti i progres računske tehnike dovodi do premeštanja osnovnih sila matematičara unutar složenih razdela matematike i pojave celog reda novih matematičkih disciplina.

Jedna od takvih disciplina je *teorija algoritama* gde se može *algoritam* posmatrati kao definisani postupak kojim se, korak po korak, dolazi do rešenja zadatka iz klase zadataka ili problema datog tipa. Vrednost jednog algoritma sastoji se u tome što on dovodi do rešenja problema na koji se odnosi. Danas problem tačnog matematičkog definisanja algoritma spada među centralne probleme matematike. *Teorija algoritama* našla je veoma značajne i praktične primene kod elektronskih računara i drugih automata i mnogo je doprinela da su se veoma raširile primene matematičkih metoda i da se sve više šire. Svaki algoritam mora imati određene pogodne matematičke osobine i nalazi svoj spoljašnji izraz u sistemu pisanih simbola. Može li se za jednu datu matematičku teoriju stvoriti univerzalni algoritam, tj. može li se stvoriti takav sistem formalno-logičkih pravila putem kojih bismo mogli dobiti odgovor na bilo koje pitanje date teorije? Na primer, struktura prirodnih brojeva potpuno je određena formulisanim sistemom aksioma. Zato tu imamo posla sa strogo potpuno određenom matematičkom teorijom. Međutim, ni do danas nam nije uspelo da pomoću formalno-logičkih i računskih metoda rešimo dobro poznati Fermaov problem. Zato, uopšte uzev, jedinstvena matematička teorija ne stvara jedinstven algoritam. Struktura proučavanog sistema objekata može da bude potpuno određena, a izučavanje tog sistema može zahtevati neograničeno obrazovanje algoritama.

Pitanja o najboljem upravljanju fizičkih ili mehaničkih sistema doveli su do zasnivanja matematičke teorije *optimalnog upravljanja* koja je bliska pitanjima upravljanja objektima u konfliktnim situacijama. Tu treba uzeti u obzir *teoriju diferencijalnih igara*, odnosno *teoriju igara* koja izučava formalne modele prihvatanja optimalnih rešenja u uslovima konflikta. Istraživanja u oblasti opštih problema upravljanja i s njima vezanih oblasti matematike, sjedinjenih s progresom računske tehnike daju osnove za *automatizaciju* novih sfera ljudske delatnosti. *Operacioni račun* je jedna od savremenih metoda matematičke analize koja dozvoljava da se u nizu slučajeva pomoću prostih pravila rešavaju složeni matematički zadaci. On ima osobiti značaj u mehanici, elektrotehnici, automatici i u drugim primenama. U osnovi njegove metode leži ideja zamene izučavanih funkcija, ili originala, drugim izmišljenim funkcijama, koje su dobijene iz prvih po određenim pravilima. Metoda matematičkog *modeliranja* koja svodi istraživanja spoljnjeg sveta na matematičke probleme, razrađena u *teoriji modela*, zauzima istaknuto mesto među metodama istraživanja, naročito pojavom i primenama elektronskih računara. Matematička logika svojim modelima može pravniku pružiti izvanrednu priliku da se uči potpunoj, čvrstoj i objektivnoj argumentaciji, toliko potrebnoj njegovoj praksi. Stvaranjem matematičkih modela, adekvatnih, npr., za proučavanje problema lingvistike, gde se već razvija *matematička lingvistika* i *univerzalna gramatika*, zatim za proučavanje problema kojima se bavi psihologija, sociologija i druge nauke o društvu, može se sa sigurnošću očekivati da će se matematika sve više i više primenjivati u naukama o društvu, u naukama o jeziku i u naukama koje se bave mišljenjem. Simetrija, toliko značajna kao umetnička kategorija, našla je svoju racionalnu, duboku i suptilnu razradu u teoriji simetrije H. Vejla, zasnovanoj na apstraktnoj teoriji grupa kao matematičkom modelu. Ili, uzmimo za primer *matematičku poetiku*, disciplinu čije je konstituisanje u toku. U njoj se pitanjima pesničkog jezika i njegovih figura prilazi putem logičkog modelovanja na osnovu teorije skupova, apstraktne algebre i topologije. Metode i ideje matematike koje su zasnovane primarno na pojmovima konačnih skupova, tj. metode i ideje *konačne* ili *diskretne* matematike, gde se elektronske cifarske mašine pojavljuju kao snažno oruđe matematizacije onih situacija u nauci, tehnici i praksi uopšte, pred kojima su stajale nemoćne metode i ideje matematike, zasnovane isključivo na pojmovima beskonačnog skupa, granične vrednosti i neprekidnosti. Na metodologiju naučnog istraživanja i prakse uopšte bitno utiče sve veća uloga metoda i ideja *konačne* ili *diskretne* matematike, a u vezi s tim i stalno rastuća uloga računskih mašina. Matematika beskonačnog i matematika konačnog, odnosno matematika neprekidnog i matematika diskretnog, dijalektički polarizovane u *hodu današnje matematike*, svojim metodama i idejama pružaju neophodna i moćna oruđa egzaktnog istraživanja prirode, društva i mišljenja.

Računska matematika

Računska matematika, koja za osnovu ima numeričku analizu, predstavlja danas razdeo matematike koji u sebi uključuje krug pitanja povezanih s korišćenjem elektronskih računskih mašina. Često se termin *računska matematika* shvata kao teorija brojevnih metoda i algoritama rešavanja tipičnih matematičkih zadataka. Međutim, sadržina tog termina ne smatra se ustanovljenom jer se odnosna oblast intenzivno razvija u vezi s brzo rastućim primenama elektronskih računskih mašina. Povezanost između teorijske i primenjene matematike, proizašla iz razvitka matematike danas u celini, tolika je da je iluzorno razdvajati teorijsku od primenjene matematike i da je takvo razdvajanje prevaziđeno i samo tradicijom zadržano. Savremene i veoma apstraktne matematičke discipline, matematička logika i apstraktna algebra danas su pouzdan posrednik između čoveka i raznih složenih automata, odnosno elektronskih računara. Primenama matematičke logike i apstraktne algebre u teoriji elektronskih računara i automata uopšte pokazalo se da se može postići materijalizacija najapstraktnijih analitičkih relacija i da problemi konkretnih konstrukcija vrlo složenih automata imaju za posledicu najapstraktnija matematička i logička istraživanja. Tako se bez matematičke logike, donedavno smatrane disciplinom sasvim apstraktnog karaktera, bez značaja za praktične primene, danas ne mogu zamisliti rešenja vrlo praktičnih i aktuelnih problema konstrukcije elektronskih računara i niza drugih problema automatizacije.

U *računskoj matematici* mogu se uočiti sledeća tri veća razdela: prvi je vezan s primenom elektronskih računskih mašina u raznim oblastima naučne i praktične delatnosti. Može se okarakterisati kao analiza matematičkih modela. Drugi se povezuje s razradom metoda i algoritama rešavanja tipičnih matematičkih zadataka koji proizlaze pri istraživanju matematičkih modela, dok se treći odnosi na pitanje uprošćenja uzajamnog odnosa čoveka i elektronske računske mašine. Tu se uključuje teorija i praksa programiranja. Kao primer tipičnih matematičkih zadataka koji se često javljaju u primenama, mogu se imenovati zadaci algebre, gde se javljaju metode rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina, invertovanje matrica i nalaženje njihovih sopstvenih vrednosti, zatim brojevne metode rešavanja običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tu dolazi do izraza *ekonomičnost* metode, tj. dobijanja rezultata pri relativno malom broju operacija. Brz pravac razvitka *računske matematike* karakterišu brojevne *metode optimizacije*, kojima se izračunavaju ekstremna značenja funkcionala na skupovima veoma složene strukture. Važno mesto ovde imaju pitanja *optimizacije* metoda rešavanja zadataka, u kojima učestvuje veliki broj promenljivih. Zadaci *matematičkog programiranja*, linearnog i dinamičkog, koji nastaju pri rešavanju tih zadataka istraživanja operacija i teorije igara, od primarnog su značaja u *računskoj matematici*. Jedan od osnovnih zadataka teorije *programiranja* smatra se odnos čoveka i mašine. U redu pokolenja računskih mašina došle su do izraza brzina programiranja, teorija algoritama, univerzalni algoritamski jezici i sistematsko programiranje.

Tako *računska matematika*, koristeći sva teorijska dostignuća današnje matematike i savremena tehnička sredstva, pokazuje konkretno puteve kojima *hoda današnja matematika* u menjanju i unapređenju *opšte društvene prakse*, kao ukupne praktične i teorijske delatnosti čoveka.

***

Svojim gotovo neograničenim mogućnostima primene, odnosno svojim ogromnim uticajem na razvitak savremene opšte društvene prakse, današnja matematika je otvorila svom oštrinom nove i ozbiljne probleme obrazovanja naučnih, stručnih i pedagoških kadrova u oblasti nauka, umetnosti, tehnike i prakse uopšte što implicira ozbiljne probleme u oblasti osnovnog, srednjeg, višeg i visokog obrazovanja.

Zbog skoro neograničenih mogućnosti primena matematike, sve se više i više traže matematičari koji će biti u stanju da shvate matematičke ideje i da ih prate do njihovih ostvarenja u konkretnim situacijama raznih nauka i

prakse, uživljujući se istovremeno u probleme tih nauka i prakse. Oni će najuspešnije ostvariti vezu matematike s drugim naukama i praksom i stalno će otkrivati nove oblasti nauke i prakse za primenu metoda i ideja matematike, odnosno matematičkih modela. I u tom pogledu očigledan je uticaj koji vrši razvitak matematike na opštu društvenu praksu, kao što je, obratno, očigledan uticaj ove prakse, podignute na viši nivo primenama matematike, koji ona vrši na razvitak matematike.

Današnja matematika, svojim teorijama i primenama, ne implicira samo probleme međuodnosa racionalne i empirijske istine, tj. matematičkog racionalizma i empirijskog realizma, nego i duboke i suptilne filozofske, tačnije gnoseološke i ontološke probleme. Matematičar, npr., ne može biti ravnodušan kad se postavi pitanje *bića* matematike, koje nije samo matematičko pitanje, već i *filozofsko*, preciznije ontološko. Odgovor na to pitanje ima *praktičnih* posledica u matematici, na primer: u matematičkoj aktivnosti svakog matematičara ponaosob; u istraživačkoj delatnosti u matematici; u njenim primenama i njenim raznovrsnim prezentiranjima, pogotovo u nastavi.

Matematika kao jedan *aspekt poimanja stvarnosti* odražava stvarnost. Zato se u njoj ogleda jedinstvo i mnogostranost pojava stvarnosti, a to dovodi do obrazovanja specijalnih oblasti. Danas se može konstatovati da nema manje od 60 oblasti, da svaka od ovih oblasti ima prosečno 6 delimičnih oblasti, a svaka od delimičnih oblasti 6 podoblasti, što znači ukupno 2160 podoblasti. Moderne discipline u današnjoj matematici burno se razvijaju, tako reći osvajaju idejno i metodološki razne grane matematike, s jasnim nagoveštajima da će biti vrlo značajne za konkretne primene matematike, uprkos tome što su visoko apstraktne i što na prvi pogled izgledaju kao discipline u kojima se isključivo ostvaruje princip „matematika radi matematike", a ne „matematika radi primena", odnosno u kojima se matematika manifestuje samo kao neka vrsta najapstraktnije intelektualne igre. U hodu današnje matematike oštro se ispoljava tendencija ka *diferenciranju* i tendencija ka *integraciji*. Mnogostruki su putevi kojima se ide ka objedinjavanju, npr., putem *apstrakcije* preko generalnih pojmova, putem *aksiomatske metode*, putem *hijerarhije struktura*, putem *sjedinjavanja* elemenata različitih teorija, itd. Intuicija i razum velikih matematičara naslućuju mnogostruko jedinstvo realnosti, dajući pravac razvitku *integracionih* ideja, pa se navedeni putevi *objedinjavanja* mogu pojmiti kao ogledanje mnogostrukog jedinstva realnosti u matematici, isto onako kao što sve dublje poniranje u pojedinačnu pojavu olakšava da se mogu pojmiti putevi *diferenciranja*.

Današnja matematika potencira stare i otvara nove naučne i filozofske, tačnije gnoseološke i ontološke dileme i probleme međuodnosa matematike i stvarnosti, koji je danas, u eri matematizacije opšte društvene prakse, kao ukupne teorijske i praktične delatnosti čoveka, veoma bitan za naučnu i filozofsku spoznaju međuodnosa čoveka i stvarnosti. Razvitak matematike neprekidno progresivno i dijalektički teče uzlaznom linijom od apstrakcije nižeg ka apstrakciji sve višeg stepena, što se snažno ispoljava u hodu današnje matematike.

Literatura: *Velika sovjetska enciklopedija*, Moskva, 1974; *Matematika e soderžanie, metodi i značenie*, Akademija nauk SSSR, Moskva, 1956. Jean Kunztmann, *Où vont les mathématiques?*, Science publique, Hermann, Paris, 1967. Michael Otte, *Mathematiker über die Mathematik*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1974. *Mathematics in the modern world*, Scientific american, New York, 1964. E. Stipanić, *Matematika i njeni tokovi razvoja u opštoj društvenoj praksi*, Treći program, Br. 1, Beograd, 1976; *Matematika i stvarnost*, Rad, Beograd, 1976; *Matematičko obrazovanje kao elemenat opšte kulture*, Neki problemi savremenog matematičkog obrazovanja, Institut za pedagoška istraživanja, Beograd, 1979.

ZLATNI TROLIST U RAZVITKU MATEMATIKE:

Arhimed, Njutn i Gaus

Zlatni trolist u razvitku matematike

U razvitku matematike, njene teorije i njenih primena, posebno mesto zauzimaju svojim delima Arhimed, Njutn i Gaus. Oni su svojim idejama, metodama i rezultatima, svojom stvaralačkom matematičkom intuicijom i logikom, obezbedili vrhunska mesta u matematici. Duh njihovih ideja i metoda neprekidno je prisutan u razvitku matematike i neprekidno pokazuje kako su genijalna intuicija i genijalni osećaj za logička rasuđivanja stvarali epohe u razvitku matematike, kao i u njenim primenama u izučavanju i menjanju stvarnosti. Po svemu što su dali u matematici i po onome kako su prisutni u razvitku matematike, oni obrazuju zlatni trolist matematike. Uzimajući savremene tokove razvitka matematike, pokušaćemo da u popularnom obliku prikažemo delatnost svakog od njih i da istaknemo ono što im je zajedničko i što ih svrstava u vrhunska mesta matematike.

ARHIMED (287 – 212. PRE N. E.)

Najveći matematičar antičkog sveta i jedan od najvećih matematičara uopšte je Arhimed. Ne raspolaže se sa mnogo verodostojnih podataka o njegovom poreklu i životu. Rođen je u Sirakuzi, na Siciliji. Jedan podatak iz njegovog dela *Peščanik* navodi na zaključak da je njegov otac bio astronom Fidija, poznat po pokušaju da izračuna veličinu Sunca i Meseca. Putovao je u Egipat i obalama Sredozemlja. U Aleksandriji je učio matematičke nauke kod Euklidovih naslednika i sklopio je poznanstva i prijateljstva sa mnogim naučnicima toga doba, sa kojima je vodio intenzivnu prepisku o mnogim matematičkim problemima. U tom pogledu veoma su značajne njegove prepiske sa Eratostenom, astronomom i bibliotekarom aleksandrijskog muzeja, kao i sa Kononom, astronomom i matematičarem sa ostrva Samosa. Mnogi znameniti antički pisci donose u svojim delima fragmentarne podatke o životu i radu Arhimeda, kao inžinjera, astronoma i matematičara.

Arhimed je živeo u Sirakuzi, gde se potpuno predao teorijskim istraživanjima u oblasti matematike i fizike, kao i njihovim praktičnim primenama. Pročuo se kao konstruktor raznih naprava. Među njima se pominje beskrajni zavrtanj. Smatra se da ga je konstruisao dok je boravio u Egiptu i primenio ga u navodnjavanju peščanih obala Nila. Predanje kaže da je konstruisao mašinu pomoću koje se mogla izvući na obalu galija puna naoružanih vojnika. Istakao se u drugom punskom ratu u odbrani rodnog grada Sirakuze. Konstruisao je mašine pomoću kojih su Sirakužani izbacivali teško kamenje na rimsku vojsku, koja je opsedala Sirakuzu pod komandom rimskog vojskovođe Klaudija Marsela. Tom prilikom, kako saopštava Plutarh, pošto je rimska vojska prodrla u grad i zauzela ga, poginuo je Arhimed. Ubio ga je jedan rimski vojnik u času kad je bio zanesen razmatranjem jednog geometrijskog crteža u vezi sa nekim problemom. Predanje, koje su preneli latinski autori, veli da se Arhimed pred samu pogibiju obratio rimskom vojniku rečima: „Ne diraj krugove moje."

Baveći se astronomijom, Arhimed je konstruisao planetarijum, pomoću kojeg je bilo moguće ilustrovati Mesečeve faze, kretanje planeta i pomračenje Sunca i Meseca. Klaudije Marsel ga je odneo u Rim, gde se dugo čuvao u krugu Marselove porodice. Video ga je i opisao Ciceron.

Arhimed se bavio, kako saopštavaju neki latinski autori, i optikom, a u vezi sa tim i konstrukcijom konkavnih i konveksnih ogledala. Prema predanju, uspevao je, pomoću svojih ogledala, sunčevim zracima da zapali lađe koje su plovile morem u blizini Sirakuze. I to se dovodi u vezu sa napadom rimske vojske na Sirakuzu.

Legenda da je Arhimed palio lađe pomoću svojih ogledala bila je popularna tokom poznijeg srednjeg veka, a naročito u doba renesanse, kad se veoma probudilo zanimanje za Arhimeda. Po uzoru na spomenutu legendu nastala je dobro poznata legenda o „Betinoj špilji", koja se nalazi u Dubrovniku, na Pločama, na nekadašnjem imanju Marina Getaldića* (1568 – 1626), dubrovačkog matematičara, fizičara i astronoma. To je Getaldićeva pećina na obali mora, prema Lokrumu, u kojoj je on, navodno, kao čarobnjak „Bete", izvodio eksperimente sa ogledalima i sočivima i uspevao da sa tim „paklenim mašinama" kroz otvor pećine pali lađe koje su plovile ispred Dubrovnika u blizini Lokruma.

Kad je Ciceron bio postavljen za rimskog prokonzula na Siciliji, nastojao je da u Sirakuzi pronađe Arhimedov grob. Evo šta kaže, između ostalog o tome Ciceron na jednom mestu: „Za vreme svog boravka na Siciliji sa radoznalošću sam se raspitivao o Arhimedovom grobu u Sirakuzi... Uspeo sam da pronađem, zahvaljujući nekim stihovima za koje sam znao da moraju biti urezani na tom spomeniku, kao i zahvaljujući figuri lopte upisane u valjak koja se morala nalaziti iznad tih stihova. Izišavši iz sirakuške kapije, našao sam se u pustari pokrivenoj mnogobrojnim grobovima; pažljivo sam gledao na sve strane i odjednom sam spazio mali stub čiji se vrh izdigao iz kopriva; na njemu je bila figura lopte upisane u valjak, koju sam tražio. Odmah sam rekao predstavnicima Sirakuze, koji su me pratili, da je pred nama bez sumnje Arhimedov nadgrobni

spomenik. I zaista, čim su pozvali ljude da iseku korov i da nam prokrče put, i čim smo se približili ovom stubu, videli smo u njegovom podnožju natpis." Veruje se da je sam Arhimed izrazio želju da spomenuta figura bude urezana na njegovom nadgrobnom spomeniku, jer je ona trebala da simbolizuje njegova istraživanja u geometriji, čijim je rezultatima on pridavao najveću vrednost.

Osvrnućemo se na Arhimedov rad u fizici, tačnije u mehanici, a posebno u matematici.

Napisao je dve knjige pod naslovom *O ravnoteži ravnih figura ili o težištima ravnih figura*, koje predstavljaju osnovu geometrijske statike kao nauke, rigorozno matematički obrađene.

U tim knjigama bavi se određivanjem težišta trougla, paralelograma, trapeza i paraboličnog segmenta. Formulisao je i dokazao „zakon poluge", naime, da je poluga u ravnoteži kad su jačine sila obrnuto proporcionalne rastojanjima sila od tačke oslonca poluge. To praktično znači, kao što je dobro poznato, da se manjom silom može pokrenuti veći teret. U vezi sa tim latinski autori pripisuju Arhimedu veoma poznatu izreku: „Daj mi oslonac i Zemlju ću pokrenuti." Koristeći zakon poluge i shvatajući u duhu Demokritovog matematičkog atomizma da se površi ravnih figura sastoje od međusobno paralelnih duži, izračunavao je površine tih figura. To je predstavljalo neku vrstu mehaničke metode u izračunavanju spomenutih površina, odnosno neku vrstu njihove „mehaničke kvadrature", zasnovane na geometrijsko-mehaničkoj intuiciji. Tako je došao do rezultata, matematički vrlo značajnog, da je površina paraboličnog segmenta jednaka četiri trećine površine trougla, čija je osnovica jednaka osnovici paraboličnog segmenta, a naspramno teme mu je tačka dodira tangente koja je povučena na luk parabole paralelno sa osnovicom segmenta. Međutim, Arhimed je, u duhu Platonovog puritanizma, smatrao da dokaz spomenutog rezultata nije pravi matematički dokaz, čim se u njemu koriste mehanički postupci. Zato ga je čisto matematički, metodom ekshaustije ili iscrpljivanja, ponovo dokazao, pod nazivom *kvadratura parabole*.

U druge dve knjige mehaničkog sadržaja, koje su do nas doprle na latinskom jeziku, *O plivajućim telima* i *O onim koji se po tečnosti kreću*, Arhimed je matematički strogo izložio osnove hidrostatike. Tu se nalazi: njegov poznati zakon („Arhimedov zakon"), prema kojem „svako telo potopljeno u nekoj tečnosti prividno gubi od svoje težine koliko je teška njime istisnuta tečnost"; problem Hijeronove krune, zatim problem ravnoteže segmenta obrtnih tela i drugi. Za ova Arhimedova dela iz hidrostatike vladalo je veliko zanimanje kod raznih matematičara i fizičara XVI i XVII v. i oni su ih intenzivno proučavali iz teorijskih i praktičnih razloga. Tim se delima inspirisao Marin Getaldić u svom radu u fizici, objavivši na latinskom jeziku 1603. delo *Unapređeni Arhimed ili o različitim vrstama tela upoređenih po težini i veličini.*

Zanimljivo je ovde pomenuti spomenutu legendu o problemu Hijeronove krune. Naime, predanje veli da je Hijeron, kralj Sirakuze, kome je Arhimed bio neka vrsta savetnika, dao nalog jednom sirakuškom zlataru da mu napravi kraljevsku krunu od čistog zlata. Kad je kruna bila gotova, Hijeron je posumnjao da ga je zlatar prevario, zamenivši jedan deo zlata srebrom. Zato se obratio Arhimedu s molbom da odredi, ne kvareći krunu, koliko ona sadrži zlata, a koliko srebra. Legenda kaže da Arhimed nije mogao odmah naći rešenje problema i da je dugo razmišljao kako će ga rešiti. Ali, kad se jednog dana, po običaju, kupao u svom kupatilu i razmišljao o navedenom problemu, ukazao mu se pred očima put njegovog rešenja, pa je, prema legendi, radostan istrčao iz kupatila na ulicu, vičući: „Našao sam! Našao sam!". U stvari, on je, kako kaže predanje, krunu potapao u vodu i primetio je da je lakša u vodi nego u vazduhu. U nastojanju da tu „čudnovatu" činjenicu objasni, došao je do spomenutog zakona i njegovom primenom rešio je problem koji mu je postavio Hijeron.

Rezultati koje je Arhimed postigao u statici čvrstih tela i tečnosti obezbedili su mu neizbrisiv spomen u razvitku mehanike. U svojim hidrostatičkim razmatranjima inicirao je neka pitanja kojima će se baviti glasoviti matematičari Simon Stevin (1548 – 1620), Ojler* i Lagranž*. Ali, on je daleko dublje i življe bio zainteresovan istraživanjima u matematici i tu je postigao rezultate koji mu određuju vrhunsko mesto u razvitku matematičke misli.

U jednoj biblioteci u Carigradu otkrivena je Arhimedova rasprava *O metodi*, posvećena njegovom prijatelju Eratostenu. U njoj Arhimed veli Eratostenu: „Često sam otkrivao teoreme pomoću mehanike, koje sam zatim dokazao pomoću geometrije". Iz ovoga proizlazi da je Arhimed dolazio do novih rezultata u matematici, koristeći sredstva koja nisu bila čisto matematička, pa zato nisu ni imala pravu dokaznu vrednost, da bi mogla nesumnjivo garantovati istinitost postignutih rezultata. Ti rezultati, prema Arhimedovom uverenju, morali su biti dokazani racionalno, sredstvima geometrije. Takve dokaze pružala je *metoda ekshaustije* ili *iscrpljivanja* i njome se služio u dokazima rezultata do kojih je dolazio, ili ih je naslućivao, putevima geometrijske i mehaničke intuicije, u svojim matematičkim istraživanjima. Mehaničku metodu koristio je u izračunavanju zapremine lopte, dok je metodu ekshaustije koristio u izračunavanju površine i zapremine ravnih i prostornih figura i u izračunavanju dužine kružnice. Ovde je od posebne važnosti primena metode ekshaustije u izračunavanju površine paraboličnog segmenta.

Primetićemo i istaći da Arhimedovo korišćenje zakona poluge-mehaničkog principa, na osnovu kojeg poluga deluje

kao prosta mašina u rešavanju matematičkih problema metodološki deluje, da se metaforično izrazimo, kao praizvor veoma brojnim situacijama u razvoju matematike modernog vremena, kad su stavovi mehanike i fizike nadahnuto delovali u otkrivanju novih matematičkih istina i rešavanju već postavljenih matematičkih problema, posebno to važi za matematiku u savremenom razvoju, kad je reč o ulozi elektronskih računara u tom razvoju. Osim toga, njegovo intuitivno poimanje kontinuuma kao sume nedeljivih delova, saglasno matematičkom atomizmu, inspirisaće brojne renesansne matematičare da uspešno reše mnoge probleme kvadrature i kubature.

Arhimed je, npr., probleme kubature lopte i kvadrature parabole rešio pomoću zakona poluge i pomoću principa matematičkog atomizma, po kome je geometrijsko telo „suma" elementarnih listova, neke vrste atom-listova, tj. nedeljivih delova trodimenzionog kontinuuma, a dvodimenziona geometrijska figura „suma" elementarnih linija, neke vrste atom-linija, tj. nedeljivih delova dvodimenzionog kontinuuma. On je putem *mehaničke intuicije* pomoću zakona poluge i putem *geometrijski intuitivnog* poimanja kontinuuma sagledao i rešio spomenute matematičke probleme, ali potpuno svestan da takva rešenja problema ne odgovaraju idealu *matematičke strogosti* i *preciznosti* kakav je postavila i kome je težila antička matematika, nadahnuta Platonovom čistotom ideja, Aristotelovom i Euklidovom logikom dokazivanja. Zato će Arhimed te probleme i mnoge druge rešiti *metodom ekshaustije*, kao metodom saglasnom spomenutom idealu matematičke strogosti i preciznosti.

Pre primene metode ekshaustije u izračunavanju dužine kružne linije i površine kružnice, paraboličnog segmenta, lopte, konusa, valjka, sferoida, konoida i drugih tela ograničenih krivim površima, Arhimed u duhu matematičke strogosti, poput savremenih matematičara, najpre definiše izvesne pojmove, npr., konkavnu i konveksnu liniju u ravni, konkavnu i konveksnu površ u prostoru, sferni sektor i sferni segment i ističe pet postulata. Od tih postulata je veoma zanimljiv peti, a naime: „Neka su date dve nejednake duži, ili dve nejednake površine, ili dva nejednaka tela; ako se višak jedne od ovih veličina nad drugom sabere samim sobom izvestan broj puta, onda će taj zbir premašiti jednu, ili drugu od veličina, koje se međusobno upoređuju". Ovaj postulat kao Arhimedov aksiom zauzima važno mesto u savremenoj matematici, kad je reč o zasnivanju geometrije i teorije realnih brojeva. On, npr., u savremenoj Hilbertovoj aksiomatizaciji geometrije i teorije realnih brojeva figuriše kao jedan od aksioma neprekidnosti.

Od posebnog je interesa podvući da je izračunavanju obima kružnice i površine kruga Arhimed posvetio posebnu raspravu *Merenje kruga*. Tu je za približnu vrednost razmere između obima kružnice i njenog dijametra, tj. za približnu vrednost broja π postigao dovoljno zadovoljavajuću vrednost.

U delu *O sferi i cilindru*, u dvema knjigama, izračunava strogo matematički, površine i zapremine više cilindričnih, konusnih i sfernih figura. Naročito matematički značajan i jedan od najtežih problema, kojim se Arhimed bavio, sastoji se u određivanju ravni koja datu loptu deli na dva dela, čije zapremine stoje u datoj razmeri. Taj problem se svodi na ispitivanje jednačine trećeg stepena, preciznije na iznalaženje njenog realnog pozitivnog korena.

U čemu se sastoji Arhimedova ekshaustija kao matematička metoda i kako je ona primenjena u problemima kojima se Arhimed bavio? Neka je Ω zadana geometrijska figura. Postavlja se problem: odrediti merni broj m (Ω) zadane geometrijske figure Ω (dužina, površina, zapremina). Po Arhimedu postojanje mernog broja m (Ω) je nesumnjivo (npr., nesumnjivo postoji „dužina" kružnice; „površina" kruga; „zapremina" lopte, itd.). Za njega se ne postavlja pitanje kako treba shvatiti merni broj m (Ω), odnosno šta treba podrazumevati pod mernim brojem m (Ω), tačnije kako ga treba definisati. To je, npr., polazno pitanje kojim se bavi u rešavanju postavljenog problema moderni matematičar (pitanje mere zadanog skupa), odnoseći se kritički, sa svom logičkom i matematičkom oštrinom, prema očiglednosti koju sugestivno pruža geometrijska intuicija.

Arhimed neposredno pristupa određivanju praktičnog geometrijskog algoritma iscrpljivanja veličine m (Ω). Tu je za njega težište postavljenog problema. Genijalno spretnim primenama geometrijskog aparata, Arhimed odabire izvanredno praktične puteve koji ga sigurno vode rešenju postavljenog problema – utvrđivanju mernog broja $m(\Omega)$. On najpre, besprekornom tačnošću, određuje geometrijski postupak pomoću kojega formira monotono rastući niz veličina $c_\nu < c_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ koje su sve manje od veličine $m(\Omega)$ i monotono opadajući niz veličina $d_\nu > d_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ koje su sve veće od veličine $m(\Omega)$. Pošto je tako definisao proces iscrpljivanja veličine $m(\Omega)$, Arhimed dokazuje da se definisanim postupkom veličina $m(\Omega)$ može iscrpsti do veličine koja je manja od svake unapred date veličine. On nadalje tvrdi, u svakom pojedinom slučaju, da korespondentna veličina σ zadovoljava uslov $c_n < \sigma < d_n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ i dokazuje svođenjem na protivurečnost da nije moguća niti jedna od relacija $\sigma > m(\Omega)$, $\sigma < m(\Omega)$, tj. da mora biti $\sigma = m(\Omega)$.

To bi bio kratak odgovor na pitanje koje smo napred postavili.

Bitni momenti, sažeto izloženo, u Arhimedovoj ekshaustiji su sledeći.

Prvo. Implicitna pretpostavka da merni broj $m(\Omega)$ geometrijske figure (npr., površina kruga, zapremina lopte, konusa i valjka) Ω *nesumnjivo* postoji. To, strogo uzev, sa stanovišta savremenog tretiranja problema mere proizvoljnog

skupa S predstavlja izvestan nedostatak u pogledu logičke i matematičke preciznosti, zakonit i nužan za Arhimedovo doba, iako je reč o geometrijskoj figuri Ω, za koju je korespondentna mera $m(\Omega)$ *intuitivno* sasvim shvatljiva i nesumnjiva, pa kao takva, možda, kod Arhimeda nije „izazvala potrebu" da je posebno definiše.

No, i pored toga, u Arhimedovom pristupu, odnosno u njegovom algoritmu izračunavanja veličine $m(\Omega)$, da u datu geometrijsku figuru upisuje i oko nje opisuje jednostavnije geometrijske figure (npr., upisivanje i opisivanje poligona u kružnici odnosno oko kružnice), krije se, tako da kažemo, *praizvor* savremene ideje o unutrašnjoj meri $m_i(S)$ i spoljašnjoj meri $m_e(S)$ proizvoljnog skupa S. Kod Arhimeda je, u svim slučajevima, $m_i(S) = m_e(S) = m(\Omega)$, gde je $\Omega = S$. U tom smislu smatramo da je svakako morala na savremenog matematičara, kad je sa maksimalnom logičkom i matematičkom strogošću prilazio problemu mere proizvoljnog skupa S, nadahnuto delovati Arhimedova *intuitivna* ideja upisivanja u figuru Ω i oko nje istovremenog opisivanja jednostavnijih geometrijskih figura, čije su mere *intuitivno* spoznate.

Drugo. Arhimedove veličine c_n i d_n zadovoljavaju uslove koji se danas mogu izraziti ovako:

$$c_n < \sigma < d_n,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in N : \forall_n \in N,\ n > n_0 \Rightarrow (d_n - c_n) < \varepsilon$$

Veličine c_n i d_n, kreirane na bazi *intuitivne* ideje, deluju anticipativno u metodološkom i idejnom smislu kad je reč o beskonačnom nizu i beskonačnom redu kao modernim i *strogo* definisanim infinitezimalnim algoritmima. Zato se, u vezi sa tim, treba samo podsetiti na veoma važnu ulogu beskonačnih monotono rastućih i opadajućih nizova u modernoj i *strogo* zasnovanoj matematičkoj analizi, npr., u *strogom* aritmetičkom zasnivanju modernog pojma realnog broja, ili u *strogim* postupcima raznih aproksimacija u modernoj numeričkoj matematici. Takve i slične matematičke situacije živo nam asociraju *intuitivno* kreirane veličine c_n i d_n u Arhimedovoj ekshaustiji kao *praizvor* modernom strogo zasnovanom pojmu beskonačnih monotonih nizova sa njihovom teorijskom i praktičnom ulogom.

Ako je reč o Arhimedovoj ekshaustiji kao svojevrsnom praizvoru integralnog računa, onda veličine c_n i d_n treba istaći kao određene sume elementarnih geometrijskih figura iz kojih su sastavljene geometrijske figure upisane u figuru Ω, kao i oko nje opisane. Arhimedove *intuitivno* uočene sume c_n *i* d_n deluju kao neka vrsta *praizvornih* analogona donjim, odnosno gornjim integralnim sumama u savremenom pojmu integrala.

Treće. U svojim geometrijskim istraživanjima Arhimed je različitim putevima svoje genijalne *intuicije* naslućivao konačan rezultat $\sigma = m(\Omega)$, da bi ga zatim u svakom pojedinačnom slučaju – što bitno karakteriše njegova zaključna rasuđivanja u ekshaustiji – metodom svođenja na protivurečnost podvrgao logički i matematički *strogom* dokazu. Naime, dokazu koji se, jednostavno rečeno, zasniva na principu: ako iz neke pretpostavke (u Arhimedovoj ekshaustiji iz pretpostavke $m(\Omega) \neq \sigma$) sledi protivurečnost, pretpostavka je lažna, a istinita je njoj suprotna (u Arhimedovoj ekshaustiji pretpostavka $m(\Omega) = \sigma$) na osnovu zakona isključenja trećeg.

Svaki rezultat, koji je intuitivno naslutio, Arhimed je na taj način strogo logički proverio i matematički dokazao. Njegov „integralni račun", koji se ogleda u njegovim sumama c_n i d_n deluje kao praizvor savremenog integralnog računa. Svojevrsno dijalektičko jedinstvo intuitivnog i logičkog osnovna je odlika Arhimedovog matematičkog istraživanja i stvaranja. Svi veliki tokovi razvoja matematike odlikuju se dijalektičkim jedinstvom *intuitivnog* i *logičkog* u otkrivanju matematičke istine i njene primene. Zato je i u tom smislu duh Arhimeda u tim tokovima stalno prisutan i na nov način uvek savremen. Arhimed, *prvi zlatan list matematike*, uticao je na formiranje Isaka Njutna, *drugog zlatnog lista matematike*.

ISAK NJUTN
(Isaac Newton, 1642—1727)

Njutn je nizom svojih dela postigao genijalna ostvarenja u matematici, mehanici, astronomiji i optici, koja predstavljaju revolucionarni preokret u razvitku sveukupne nauke i filozofije, kako u idejnom tako i u metodološkom pogledu. Ona se, posmatrana u kontinuitetu evolucije naučne spoznaje fenomena prirode, oslanjaju na dostignuća velikih stvaralaca pre Njutna. To je i sam Njutn istakao, napisavši: „Ako sam video dalje od drugih to je zato što sam stajao na plećima giganata". Među tim gigantima posebno mesto zauzima Arhimed svojim *intuitivnim* i *logičkim* otkrivanjem matematičkih istina i njihovih primena.

U Vestminsteru, panteonu velikih ljudi Engleske, na nadgrobnom Njutnovom spomeniku, piše: „Radujte se, smrtnici, što je postojao takav i toliki ponos ljudskog roda". Oblikom koncizne metafore, ove reči ukazuju na jedinstven primer nenadmašne veličine ljudskog intelekta, sposobnog da prodre, kakav je bio Njutnov, u lavirinte svemira i otkrije zakone pojava sa kojima se svemir manifestuje pred ljudskim čulima i ljudskim umom uopšte. One izražavaju optimističku pouzdanost u moć čovekovog spoznavanja sveta, a upravo je Njutnovo delo, sa svim njegovim posledicama, jedan od najblistavijih primera te moći u sveukupnom razvitku nauke i filozofije.

Njutn je rođen 1642. u selu Volstorpu, grofovije Linkoln, u porodici skromnog farmera. Rano je ispoljio izvanrednu darovitost za prirodne i matematičke nauke. Istakao se na studijama u Triniti koledžu u Kembridžu, prostudiravši temeljito dela antičkih matematičara, posebno Euklida i Arhimeda, zatim Dekarta i niza matematičara XVII v. Uporedo se posvetio astronomskim posmatranjima, fizičkim i hemijskim eksperimentima, u čemu su došle do izraza njegove genijalne sposobnosti kao eksperimentatora i teoretičara.

Pošto je postigao veoma velike uspehe u matematičkim i fizičkim naukama, preuzeo je katedru matematike na Univerzitetu u Kembridžu, gde je nasledio svog profesora Isaka Baroua. Postao je član Kraljevskog naučnog društva u Londonu, a zatim njegov višegodišnji predsednik, kao i član više evropskih akademija nauka. Bio je veoma angažovan u društveno-političkim i ekonomskim zbivanjima Engleske, kao poslanik Kembridžskog univerziteta u engleskom parlamentu i kao direktor kovnice novca u Londonu, učestvujući vrlo aktivno u tadašnjoj monetarnoj reformi. Genijalno plodotvoran u nauci, a društveno energično angažovan, umro je, u osamdeset petoj godini života, 31. marta 1727.

Glavno delo Isaka Njutna je *Matematički principi prirodne filozofije* (*Principia mathematica philosophiae naturalis*). Objavljeno je prvi put na latinskom jeziku 1687. U njemu je, u tri knjige, izložio rezultate svojih mehaničko-astronomskih istraživanja.

U prvoj knjizi definiše niz veoma važnih pojmova mehanike, pa zatim izlaže mehaniku kao nauku o kretanju, strogo deduktivno, polazeći od tri dobro poznata osnovna stava ili aksiome kretanja. Prema prvoj aksiomi svako telo nastoji da zadrži stanje mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja, dok ga neka sila ne prinudi da to stanje promeni; prema drugoj, promena kretanja proporcionalna je sili i vrši se u smeru u kojem sila deluje, a prema trećoj, sila akcije jednaka je sili reakcije i suprotnog su smera.

Posebno je istakao pojmove prostora i vremena, razlikujući apsolutno vreme od relativnog, apsolutni prostor od relativnog, kao i apsolutno kretanje od relativnog kretanja. Ti pojmovi u tesnoj povezanosti sa spomenutim aksiomama kretanja suštinski odlikuju Njutnovu konstrukciju mehanike, što će se naročito manifestovati pojavom relativističke i kvantne mehanike. Ruđer Bošković je u duhu relativizma zauzimao kritički stav prema Njutnovim koncepcijama apsolutnog vremena, prostora i kretanja, i na taj način bio je blizak savremenim relativističkim koncepcijama prema tim pojmovima.

Njutn se zatim bavi analizom, u duhu potpune matematičke strogosti, kretanjima materijalnih tačaka, na koje deluju središne sile. Tu je najvažniji slučaj tzv. *Njutnove gravitacije*, tj. kada se dve materijalne tačke uzajamno privlače silom koja je direktno proporcionalna proizvodu njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovog rastojanja. U tom je slučaju konusni presek (npr., elipsa, parabola), dokazuje Njutn, putanja koju opiše tačka manje mase, privučena ka onoj veće mase.

Mehaniku fluida izložio je u drugoj knjizi. U njoj proučava kretanja tela kojima se opire sredina u kojoj se tela kreću. Najvažniji rezultat, sa gledišta naučnog i opštefilozofskog, s obzirom da su se tada u svim naučnim i filozofskim sredinama Evrope vodile oštre rasprave o Dekartovoj prirodnoj filozofiji, dokaz je da Dekartova hipoteza vrtloga, zasnovana na filozofskim spekulacijama, ne može objasniti kretanje planeta.

U trećoj knjizi, koja je pretežno astronomskog karaktera, Njutn dokazuje da se kretanja planeta u Sunčevom sistemu potpuno uklapaju u tip kretanja, koja je ispitao u prvoj knjizi, kad se tela uzajamno privlače silom direktno proporcionalnom proizvodu njihovih masa, a obrnuto proporcionalnom kvadratu njihovih rastojanja. Tako je došao do epohalnih zaključaka da se kretanja nebeskih tela i tela koja, na primer, slobodno

padaju na Zemlju, vrše na osnovu *jedinstvenog* zakona, takozvanog *zakona opšte gravitacije*.

Njutn je, da se metaforično izrazimo, otkrio čudesnu lepotu i jednostavnost reda u vasioni, došao je do otkrića koja će večno blistati kao pobeda ljudskog uma i kao dokaz racionalnosti prirode. Njegova mehanika, zasnovana na zakonu opšte gravitacije, otkrila je jedinstvo „nebeskih" i „zemaljskih" fenomena i time je odlučno uticala na razvitak ne samo nauke nego i filozofije uopšte.

„Astronomski prostori", istakao je veliki sovjetski fizičar Vavilov, „bili su gigantski Njutnov laboratorij, a matematičke metode njegov genijalni instrument".

Zakonom opšte gravitacije objašnjeni su, između ostalog, i veoma složeni fenomeni plime i oseke, a ubrzo zatim i mnogi drugi fenomeni, koje prouzrokuju kretanja nebeskih tela, što je pokazao razvitak nebeske mehanike i teorijske astronomije posle Njutna. Rezultati nebeske mehanike zablistaće tokom XIX v., naročito 1846. otkrićem osme planete Neptun, pošto su joj Leverije (Leverieur) i Adams prethodno matematički tačno odredili putanju i položaj, na osnovu opaženih smetnji u kretanju sedme planete Urana. Na sličan način, putem matematičkog modeliranja, otkrivena je 1929. i deveta planeta Pluton.

Njutnova istraživanja u matematici bila su u osnovi motivisana primenama matematike u istraživanjima fenomena prirode, posebno fenomena kretanja nebeskih i zemaljskih tela. No treba odmah podvući da se on bavio i nizom važnih problema čisto teorijske matematike, tako da je bio daleko od toga da zanemari „čistu" matematiku i da je shvata kao neku vrstu „sluškinje" prakse i primene, bez sopstvenih ciljeva, metoda i ideja. Opovrgavajući Dekartovu teoriju vrtloga kao kvalitativnu shemu, zasnovanu samo na filozofskim spekulacijama, Njutn je „primenjenoj" matematici u tom opovrgavanju dodelio visoku ulogu baš sa teorijskog stanovišta.

U nizu svojih dela, objavljenih na latinskom jeziku, u već spomenutom glavnom delu, u *O analizi jednačina beskonačnih brojem članova*, u *Metodi fluksija i beskonačnih redova*, u *Raspravi o kvadraturi krivih*, u *Univerzalnoj aritmetici* i u drugim, Njutn je razvio matematički aparat kojim se poslužio u svojim proučavanjima fenomena prirode. On na jednom mestu veli: „Ne posmatram matematičke veličine kao da su obrazovane od delova, ma kako da su mali ti delovi, nego kao da su opisane neprekidnim kretanjem. Linije su opisane i nastale, ne stavljanjem delova jednog pored drugog, već neprekidnim kretanjem tačke; površi neprekidnim kretanjem linije; tela neprekidnim kretanjem površi; uglovi rotacijom krakova; vreme neprekidnim tokom. Smatrajući, dakle, da su veličine koje rastu u jednakim vremenima veće ili manje, prema tome da li rastu većom ili manjom brzinom, tražio sam metodu da odredim veličine prema brzinama kretanja ili rašćenja koje ih proizvode, nazivajući *fluksijama* brzine ovih kretanja ili rašćenja, dok nastale veličine *fluentama*. Tako sam naišao na *metodu fluksija*, koju sam upotrebio u kvadraturi krivih." Njutn je geometriju, a zatim infinitezimalnu (beskonačnu) analizu, u suštini smatrao delovima opšte mehanike, uzimajući kretanje u njegovoj najapstraktnijoj formi. Zato pojmove geometrije i analize formuliše terminima mehanike, čvrsto se oslanjajući na *intuiciju prostora i vremena*.

Terminima mehanike on formuliše dva osnovna problema na koja se mogu svesti svi zadaci analize, a naime: 1. „Ako je dat opisani put u prostoru, naći brzinu kretanja"; 2. „Ako je data brzina kretanja, naći opisani put u prostoru". Ovom redukcijom sve se matematičke veličine razmatraju slično putu, da nastaju u procesu neprekidnog rasta ili opadanja. One su *fluente* (latinski fluere = teći), tj. tekuće veličine, a njihov univerzalni argument je vreme, koje se ovde ne razume kao takvo u bukvalnom smislu reči, već kao ma koja veličina, čiji *ravnomerni* tok izražava i meri dano vreme. *Fluente* ne figurišu prosto kao funkcije vremena, već u svojim uzajamnim odnosima sa *fluksijama*, kao brzinama svog menjanja. Pri tom su jasno istaknuta ova dva glavna problema analize u terminima metode fluksija, koji glase: 1. „Prema datoj relaciji među fluentama, odrediti relaciju među fluksijama". To je zadatak diferenciranja funkcija nekoliko promenljivih, koje zavise od vremena. 2. „Prema datoj jednačini koja sadrži fluksije, naći relaciju među fluentama". To je zadatak integriranja difercijalne jednačine.

Da bi što strožije i preciznije zasnovao infinitezimalne procese i njihove primene, Njutn je razradio opštu teoriju graničnih prelaza, kao teoriju *prvih* i *poslednjih razmera*. Uveo je termin „granica" (limes), koju shvata kao „poslednju razmeru veličina koje iščezavaju", ili kao „prvu razmeru veličina koje nastaju". Na toj ideji granice zasniva se Njutnova *fluksija*. U Njutnovoj infinitezimalnoj analizi važan je pojam *momenta*, kao trenutne promene fluente, i to *dekrement*, kao negativan moment i *inkrement*, kao pozitivan moment. Pojam diferencijala najbolje odgovara Njutnovom pojmu momenta. Veoma su značajna njegova razlaganja funkcija u stepene redove, kao i njegovo iniciranje teorije diferencijalnih jednačina.

Diferencijalni i integralni račun Njutn je najpotpunije izložio u svom delu *Metoda fluksija i beskonačnih redova*. On je tu veoma jasno iskazao glavna pravila diferenciranja i integriranja; dao je pojmove prvog, drugog, trećeg i višeg reda izvoda; video je tačnu vezu koja postoji između diferenciranja i integriranja, tj. izvoda i integrala; shvatio je da, dok je fluksija potpuno određena kad je data fluenta, dotle je fluenta iz fluksije određena do proizvoljne konstante; uočio je važnost diferencijalnih jednačina, ukazujući na način rešavanja nekih

tipova i dao je brojne primere za to iz geometrije i mehanike; uočio je važnost razlaganja funkcija u stepene redove.

Njegovo delo *Univerzalna aritmetika* sadrži istraživanja o brojevima i jednačinama. Jasno se pravi razlika između negativnih i pozitivnih brojeva; dato je pravilo o znacima; pravi se razlika između celog, racionalnog i iracionalnog broja; raspravlja se pitanje rešenja jednačine; govori se o imaginarnim rešenjima kao „nemogućim"; delo sadrži mnoge stavove koji se odnose na teoriju algebarskih jednačina.

Na temelju postignutih ostvarenja u infinitezimalnom računu, svojih velikih, daljih i bližih, prethodnika, kao i Dekartove koordinatne metode, Njutn je vlastitim putem, u isto vreme kad i Lajbnic, ali nezavisno od njega, svojim genijalnim ostvarenjima u infinitezimalnoj analizi, svojim diferencijalnim i integralnim računom, odn. računom fluksija i fluenata, zaključio dugovekovni proces razvitka infinitezimalnog računa i revolucionarno otvorio novu etapu u njegovom razvitku, kako u pogledu njegove teorije, tako još više u pogledu njegovih primena u istraživanjima prirode, koje su neobično potekle u periodu XVIII i XIX v. Za potvrdu veličine i besmrtnosti Njutnova genija dovoljna su njegova ostvarenja u matematici, koja ubedljivo pokazuju da je proučavanje prirode nepresušan izvor matematičkih nadahnuća.

Svoja optička istraživanja, eksperimentalno i teorijski jednako genijalno zasnovana, Njutn je objavio u svom drugom velikom delu *Optika*, koje je prvi put izišlo 1704. Vavilov, vrsni poznavalac Njutnove optike, ocenio je npr. Njutnovu teoriju svetlosti i boja rečima: „Prvi put je svetu pokazano to što eksperimentalna fizika može izvršiti i kakva ona mora biti. Njutn je prisilio eksperiment da govori, da odgovara na pitanja i da daje odgovore iz kojih sledi teorija".

Njutnova proučavanja pojava loma i refrakcije svetlosti, prevashodno eksperimentalna, tesno su povezana sa njegovim astronomskim istraživanjima, kad je reč o izradi astronomskih optičkih instrumenata. Jedan od fundamentalnih rezultata u njegovom proučavanju svetlosnih fenomena bilo je saznanje proisteklo iz egzaktne analize Sunčeve svetlosti, da je bela Sunčeva svetlost složena, odn. tačno objašnjenje spektra boja Sunčeve svetlosti i u vezi sa tim tačno objašnjenje niza prirodnih fenomena, npr. duge, koji su vekovima mučili glave mnogih mislilaca i istraživača.

Zanimljivo je ovde pomenuti da Njutn u svojoj *Optici* navodi jedno optičko delo našeg fizičara, Dalmatinca i nadbiskupa splitskog, Marka Antuna Dedominisa (1560–1624), pozivajući se na Dedominisovo tumačenje duge, kao svetlosne pojave. Njutn, povodom duge, tu kaže: „To je među novijima potpunije rasvetlio i obimnije objasnio glasoviti Marko Antun Dedominis, nadbiskup splitski, u svojoj knjizi *O gledanju i svetlosnim zracima*, koja je napisana više od dvadeset godina pre no što ju je objavio 1611. u Veneciji, njegov prijatelj Bartol. U toj knjizi objašnjava slavni čovek kako se unutarnji luk stvara dvostrukim prelamanjima i jednostrukim odbijanjima, koja se pojavljuju među tim prelamanjima u okruglim kapljicama, a spoljašnji luk nastaje usled dvostrukih prelamanja i među njima ubačenih tako isto dvostrukih odbijanja u sličnim kapljicama vode. Isti je način tumačenja dao i Dekart* u svojim *Meteorima*".

Da bi protumačio mnoge svetlosne fenomene, Njutn je veoma oštroumno zasnovao korpuskularnu teoriju svetlosti na hipotetičkoj egzistenciji svetlosnih čestica (korpuskula) i na eksperimentalnim ispitivanjima svetlosnih fenomena, što je čitavoj teoriji, u metodološkom pogledu, dalo oblik savršene hipotetičko-induktivne postavke, koja je dosta dobro u nizu slučajeva tumačila rezultate eksperimentalnih istraživanja svetlosnih pojava. Saglasno korpuskularnoj teoriji, Njutn je zamislio egzistenciju jedne specifične materije, nazvane etar, koja ispunjava ceo prostor i posredstvom koje se određenim brzinama prenose korpuskule. Ta teorija imala je uvek protivnika među fizičarima, koji su radije prihvatili Hajgensovu talasnu teoriju, da bi prvom polovinom XIX v. u vezi sa tumačenjem difrakcije i interferencije svetlosti, potpuno ustupila mesto talasnoj teoriji, a zatim se ovog stoleća, otkrićem nekih novih svetlosnih fenomena, moderno koncipirana, ponovo aktualizovala.

U Njutnovoj *Optici* od posebnog je značaja poglavlje *Pitanja*, u kojem se nizom od 31 pitanja razmatraju neki fundamentalni problemi, npr. u vezi sa sastavom materije i uzajamnim delovanjem privlačnih i odbojnih sila, kao i u vezi sa ulogom hipoteza i eksperimenta u procesu spoznaje fenomena prirode. Na taj način samo delo *Optika* nije veoma važno samo za optiku, kao granu fizike, nego i za Njutnovu prirodnu filozofiju u celini.

Istaći ćemo ovde da se na tim pitanjima, dobrim delom, inspirisao Ruđer Bošković u izgradnji svoje teorije prirodne filozofije. Oduševljen onim što je Njutn stvorio, Bošković je pisao: „Njutne, ti velika diko engleska i slavo ljudskog roda, bićeš mi veliko božanstvo". Na drugom mestu ističe „divnu i gorostasnu" Njutnovu nebesku mehaniku i Njutna kao „čoveka koji se daleko najviše uzdigao nad običnom vrevom filozofa" i „da do danas nije ništa zamišljao što bi bilo umnije, ništa više u skladu sa geometrijom i opažanjima nego li celokupna zgrada i sastav Njutnovog sistema". Boškovića su osvajali jednostavnost i jedinstvo Njutnovih prirodnonaučnih pogleda, kao i strogost Njutnovih zaključaka, poteklih sa jedinstvenog izvora. Nastojaće uvek da te poglede i zaključke prihvati kritički i kao podsticaj za stvaralački rad. „Bude li izgledalo da sam uistinu postigao napredak u istraživanju prirode, izjavljujem da to glavno dugujem Njutnu, čije sam tragove sledio u najvećoj meri, a skrenuo sam nešto od tog njegovog puta da bih mogao dalje napredovati", ističe Bošković.

Svoj metodološki i gnoseološki kredo, da se tako izrazimo, kada je reč o odnosu teorije i eksperimenta, Njutn je iskazao svojim veoma dobro poznatim stavovima „Hipoteze ne izmišljam" i „Hipoteze u nauci koje zaobilaze eksperiment ničemu ne služe". Prvi stav je formulisao u svom glavnom delu, a drugi u *Optici*.

Prvim stavom dao je principijelan odgovor na prigovore koje su mu upućivali naučnici i filozofi njegova vremena, među njima Lajbnic i Hajgens, a naime, da nije objasnio poreklo gravitacione sile i da joj je time pripisao metafizički karakter. Za Njutna je, međutim, bilo važno i osnovno da se tačno odredi matematički obrazac za gravitacionu silu i da se iz njega izvuku matematičke posledice koje se mogu eksperimentalno proveriti, a ne hipotetičko tumačenje njenog porekla, koje se ne može eksperimentalno proveriti. Drugim stavom se opštije i još jasnije to potvrđuje, kad se posmatra u okviru odnosa eksperimenta i teorije uopšte. U tom svetlu treba, dakle, shvatiti metodološki i gnoseološki smisao spomenutih Njutnovih stavova, nasuprot pozitivističkom tumačenju istih, koje ide, u krajnjem slučaju, za tim da negira uopšte ulogu hipoteze i teorije u procesu spoznavanja fenomena prirode, zasnivajući taj proces isključivo na eksperimentu. Da nije bila Njutnova namera ona, koju mu pozitivisti pripisuju, pokazao je on, možda najubedljivije, primerom teorijske izgradnje svoje mehanike i njenom primenom na astronomski eksperimentalno osmatrana kretanja nebeskih tela Sunčevog sistema. On je vrlo konkretno shvatio ulogu matematičke idealizacije u procesu spoznavanja fenomena prirode, kao teorijske sheme na osnovu koje se može doći do rezultata podložnih iskustvenoj verifikaciji, kao načinu utvrđivanja njihove istinitosti u fizičkom smislu.

Njutn nije robovao ni mitu hipoteze ni mitu eksperimenta, već je živo i genijalno osećao, prirodom stvari, *dijalektičku* spregu hipoteze i eksperimenta u procesu spoznavanja stvarnosti, što je odlika svih pravih i velikih istraživača prirode. Energično i strastveno se zalagao za izgradnju takvog tipa filozofije koja će svoje misaone konstrukcije zasnivati na čvrstim temeljima nauke, mada je i sam zapao u metafiziku i teologiju, kada je iz svojih naučnih rezultata izveo zaključak o egzistenciji vrhovnog tvorca i čuvara poretka u vasioni. No, bez obzira na to, njegovo delo kao istraživača prirode odigralo je i neprekidno igra progresivnu ulogu u razvitku naučne i filozofske misli.

Neslućeno grandiozni uspeh Njutnove mehanike u matematičkim istraživanjima prirode, tokom XVIII i XIX v. i snažni gnoseološki odjeci tog uspeha u filozofiji, u obliku mehanicističkog determinizma, razvili su i pothranjivali iluzije da se čitava fizika, pa čak i filozofija, može zasnovati na

Njutnovoj mehanici. Proučavanje pojava elektromagnetizma i njima sličnih, drugom polovinom XIX v. razbilo je te iluzije i iniciralo je početkom XX v. principijelno kritičko preispitivanje osnova Njutnove mehanike.

Sve je to dovelo do kreiranja Ajnštajnove relativističke i kvantne mehanike, do pojma fizičkog polja i njegove teorije, nasuprot klasičnoj koncepciji delovanja sile na daljinu, do saznanja da dalekosežnim konkretno-naučnim i filozofsko-gnoseološkim posledicama za savremenu fiziku i prirodnu nauku uopšte, a naime, da Njutnov model mehanike na veoma zadovoljavajući način tumači mehaničke procese u *makrosvetu*, u kojima se ostvaruju brzine relativno male u odnosu na brzinu svetlosti, i da je on specijalan slučaj modela relativističke mehanike, koji je prikladniji za tumačenje mehaničkih procesa u *mikrosvetu*, u kojima se ostvaruju ogromne brzine, približne brzini svetlosti.

Bez obzira na spomenutu ograničenost, Njutnova mehanika bila je i ostaje nezamenjiva osnova za čitav niz naučnih istraživanja u oblasti fizike makrosveta i njenih mnogobrojnih primena u zemaljskoj i kosmičkoj tehnici i astronomiji, posebno u današnjoj kosmonautici, kojoj je jedan od teorijskih temelja Njutnov zakon opšte gravitacije. Na taj način večito će i stvaralački aktivno da živi Njutnovo delo i neće prestati da se čovek raduje „što je postojao takav i toliki ponos ljudskog roda".

KARL FRIDRIH GAUS
(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)

Povodom Gausove smrti, 1855, kralj Hanovera Džordž V naložio je da se iskuje novac posvećen Gausu kao *Kralju matematičara*. On je za svoje savremenike bio *suveren* matematičara, odnosno *princeps mathematicorum*. I s punim pravom su ga mogli tako smatrati i ceniti, jer skoro nema oblasti u teorijskoj i primenjenoj matematici njegova vremena, od teorije brojeva, algebre i analize, do primenjene matematike, astronomije i fizike, u kojoj njegov genije nije ostavio dubokog traga. Napisao je preko osamdeset obimnih naučnih rasprava. Svaka od njih, dubinom problema koje tretira i novinom metoda sa kojima se ti problemi rešavaju, predstavlja odlučan datum u razvitku odgovarajuće teorijske, odn. primenjene matematike.

Istaknuti nemački matematičar Leopold Kroneker* i jedan od velikih nastavljača Gausove matematike podvlači da je skoro sve što je matematika XIX v. postigla u svojim naučnim idejama vezano za Gausa. A Ernst Kumer*, drugi veliki učenik Gausa, u svom govoru održanom, u svojstvu rektora univerziteta, 1869. u Berlinu, veli da „Među Gausovim delima, većim i manjim, nema nijednog kojim nije učinjen bitan napredak u odgovarajućoj oblasti" i da su to „majstorska dela, koja u sebi nose onaj karakter klasičnosti, koji jamči, da će se ona za sva vremena održati, ne samo kao spomenici razvoja nauke, nego takođe da će ih buduće generacije matematičara svih nacija koristiti i sa marljivošću proučavati, kao osnovu svakog dubokog studija i kao bogati rudokop plodnih ideja". Veliki sovjetski matematičar I. M. Vinogradov* piše: „Sve opšte matematičke ideje pojavljivale su se kod Gausa u vezi sa rešavanjem konkretnih problema, a ti problemi su se najvećim delom odnosili na važna čvorna pitanja matematike njegovog vremena. Kasnije, u rukama nastavljača Gausovih dela, Gausove ideje su dovele do stvaranja novih oblasti matematike."

Gaus je rođen u Braunšvajgu 30. aprila 1777, u skromnoj porodici običnog zidara, koji nije imao razumevanja za puteve u život svoga sina, čiji se izuzetni matematički talent ispoljio u njegovom najranijem detinjstvu. Nasuprot ocu, majka je imala razumevanja za njegove težnje, želje i sposobnosti. Već kao dete posedovao je čudesnu moć računanja. Često je za sebe govorio da je naučio pre da računa, nego da izgovara reči. Kao petnaestogodišnji srednjoškolac lako je čitao Njutna, Ojlera i Lagranža. Na studijama, na univerzitetu u Getingenu, pročuo se svojim radovima kao matematičar neobično velikog talenta, kad započinje da piše jedno od najslavnijih dela u istoriji matematike. U dvadeset i trećoj godini postao je član Petrogradske akademije nauka, a zatim ubrzo i mnogih drugih evropskih akademija nauka, dok je u dvadeset petoj godini iznenadio svet tačnom odredbom putanje planetoida Ceres. „Jedini čovek koji Berlinskoj akademiji nauka može dati novi sjaj zove se Karl Fridrih Gaus", pisao je, 1805. nemačkom vladaru Fridrihu Vilhelmu III, znameniti nemački fizičar i astronom Aleksandar Humbolt.

Plodna naučna aktivnost u teorijskoj i primenjenoj matematici dovela je mladog Gausa brzo na položaj profesora matematike i astronomije na univerzitetu u Getingenu, kao i na položaj direktora Getingenške astronomske opservatorije, gde je ostao sve do smrti, 23. februara 1855.

Voleo je miran porodični život. Bio je neobično nežan prema majci, koja je slepa doživela duboku starost, a zatim i kao suprug i otac petoro dece iz dva braka. Aristokratske i donekle konzervativne prirode, ali ne reakcionarne, Gaus nije aktivno učestvovao u burnim političkim i društvenim zbivanjima svoga vremena, izazvanim francuskom revolucijom i njenim posledicama. On je ta zbivanja pratio pasivno, saopštavajući često sarkastičnim žaokama svoje misli o njima u pismima svojim prijateljima. Aludirajući na tešku evropsku situaciju stvorenu Napoleonovim ratnim pohodima, 1808. pisao je Sofiji Žermen, istaknutoj francuskoj matematičarki, koju je visoko cenio, da ga aritmetičke preokupacije čine srećnim u vremenu kad oko sebe vidi samo bedu i očaj, naglasivši da mu samo nauka, porodica i dopisivanje sa dragim prijateljima ublažavaju opšti bol.

Imao je veliku naklonost prema filologiji. Bio je izvanredan poznavalac latinskog i grčkog jezika, kao i niza modernih evropskih jezika, među njima i ruskog. Veoma mnogo je čitao svetsku beletristiku i filozofsku literaturu, tako da je bio izvanredno upućen u književnost i filozofiju. Imao je vrlo kritičke stavove prema nekim filozofima svog vremena, koji su se bavili filozofijom matematike.

Preterano kritičan prema sebi, Gaus mnoge od svojih radova nije objavio, smatrajući da nisu bili zreli za objavljivanje. Zato se i moglo desiti da su ga mnogi matematičari preduhitrili u objavljivanju izvesnih krupnih rezultata. Pokazalo se, npr., da je pre Lobačevskog i Boljaija došao do neeuklidske geometrije, da je preko dvadeset godina pre norveškog matematičara Abela* i nemačkog matematičara Jakobija* zasnovao teoriju eliptičnih funkcija, da je pre Hamiltona otkrio hiperkompleksne brojeve i da je pre Ležandra* našao metodu najmanjih kvadrata. Često je isticao da sporo i koncizno piše zato što voli da svojim radovima da takvo savršenstvo da im se ne može ništa dodati ni oduzeti i da na što manjem prostoru što više kaže, pa da mu sve to oduzima mnogo više vremena,

nego kad bi drukčije pisao. Takav odnos prema svojim radovima Gaus je izrazio devizom *Pauca sed matura* (Malo, ali zrelo), koju je ugravirao na svom ličnom pečatu. U vezi sa tim, njegov prijatelj Šumaher, pisao mu je: „Opet mi se vraća stara želja, da pišete opširnije i brže. Tada bih se usudio da vam odmah predam pečat sa devizom *Multa nec immatura*" (Mnogo i ne nezrelo).

Gausova virtuoznost preciznog i konciznog matematičara najvernije je izražena u njegovim istraživanjima u teorijskoj matematici, koja su veoma obimna i genijalno duboka.

Valtershauzen Sartorijus, Gausov učenik i njegov veran prijatelj, u svojim sećanjima na Gausa piše da je Gaus matematiku smatrao „kraljicom nauka, a aritmetiku, odn. teoriju brojeva, kraljicom matematike". To jasno potvrđuje Gausovo fundamentalno delo *Aritmetička istraživanja* (*Disquisitiones arithmeticae*), objavljeno 1801. koje je završio u dvadeset prvoj godini života, a u jeseni svog života, ponosno i samouvereno izjavio je, da je „ušlo u istoriju" i da u novom izdanju ne bi imao ništa da izmeni u delu „osim štamparskih grešaka". Ono ga je svrstalo u matematičare najvišeg ranga. „Vaše delo *Aritmetička istraživanja* stavilo vas je odmah u rang prvih matematičara", pisao je Gausu, veliki francuski matematičar Luj Lagranž, naglasivši da poslednje poglavlje *O jednačinama pomoću kojih se definišu podela kruga* sadrži najlepše analitičko otkriće koje odavno nije postignuto. Tu je Gaus odredio pravilno poligone koji se mogu upisati u kružnici upotrebom lenjira i šestara i tako je konačno rešio jedan problem koji je postavila matematika antike.

Aritmetička istraživanja posvećena su teorijskoj aritmetici, tačnije teoriji brojeva. Ona sadrže Gausovu originalnu, duboku i suptilnu teoriju kongruencije, u kojoj najistaknutije mesto, svojom matematičkom dubinom i lepotom, zauzima „*zlatna teorema*", kako ju je sam Gaus nazvao. Njome se izražava tzv. „zakon kvadratnog reciprociteta" i smatra se „dragim kamenom" teorijske aritmetike, odnosno teorije brojeva. Ako je, prema Gausu, teorija brojeva kraljica matematike, onda su *Aritmetička istraživanja*, kako je to matematički opravdano primetio veoma istaknuti istoričar matematike Kantor, *Magna charta* (Velika karta) teorije brojeva. Ona su, među svim Gausovim delima, najverniji izraz Gausove konciznosti, preciznosti i strogosti u matematičkim rasuđivanjima, pa je to često smetalo mnogim matematičarima da ovladaju tim delom, kako u pojedinostima, tako i u celini. Dirihle (Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 – 1859), jedan od najdarovitijih Gausovih učenika i vrlo istaknuti matematičar, posebno u teoriji brojeva, uspeo je da prouči, stvaralački usvoji i dalje unapredi duboke ideje koje sadrži Gausovo delo *Aritmetička istraživanja*, pa ga zato nikad nije stavljao na policu za knjige, već ga je stalno držao na svom radnom stolu. On je bio prvi, koji je to delo ne samo potpuno razumeo, nego ga je i drugima otkrio. Na izvoru tog dela, kojim je Gaus čvrsto trasirao dalje tokove razvitka teorije brojeva, nadahnuli su se mnogi veoma krupni matematičari XIX v., učestvujući stvaralački u tim tokovima, među njima Kroneker, Dirihle, Jakobi i Čebišev. Ono i danas nadahnuto deluje u kreativnim naporima koji se ulažu u rešavanju problema teorije brojeva.

Period proučavanja teorije algebarskih jednačina, započet još u XVI v., krunisan je 1799. Gausovom doktorskom disertacijom *Nov dokaz teoreme da se svaka cela racionalna algebarska funkcija jedne promenljive može rastaviti na realne faktore prvog i drugog stepena*, objavljenom na latinskom jeziku. U njoj je sadržan strogi dokaz da svaka algebarska jednačina ima onoliko rešenja koliko njen stepen sadrži jedinica. To je reprezentativan primer Gausove genijalne sposobnosti da rešenju matematičkog problema, ma koliko bio težak, da najjednostavniji i najelegantniji oblik, a uz to besprekorno korektan u pogledu matematičke strogosti i preciznosti. On predstavlja osnovni rezultat u klasičnoj algebri, sa velikim posledicama u praktičnim postupcima rešavanja jednačina.

Godine 1827. objavio je svoje veliko delo na latinskom *Opšta istraživanja krivih površi*, kojim je konačno zasnovao diferencijalnu geometriju, kao posebnu disciplinu teorijske matematike. Tu je dao nove metode i nove ideje, koje su mu omogućile da priđe dubokim proučavanjima lokalnih, odn. unutrašnjih osobina površi i da dođe do fundamentalnih rezultata teorijske i praktične prirode. Među tim rezultatima, svojom dubinom i svojim teorijskim i praktičnim posledicama, najjače blista „*slavna teorema*", kako ju je Gaus nazvao. Prema toj teoremi, pri ma kakvoj deformaciji površi, koja nastaje bez raskidanja i rastezanja, u bilo kojoj tački površi ne menja se vrednost potpune krivine površi. Gausove metode i ideje u diferencijalnoj geometriji determinisale su tokove njenog razvitka u XIX stoleću, što se manifestovalo u radovima niza istaknutih evropskih matematičara.

Svoj kritički stav prema osnovnim pitanjima geometrije izražavao je veoma eksplicitno u raznim prilikama. On je 1813. pisao da se „u teoriji paralelnih linija nije napredovalo dalje od Euklida" i da je to „nečasni deo matematike koji ranije ili kasnije mora dobiti jedan sasvim drugi oblik". Godine 1816. ističe da je „malo predmeta u oblasti matematike o kojima se tako mnogo pisalo kao o zasnivanju teorije paralelnih linija" i da „retko prođe godina bez pojave nekog novog pokušaja njenog zasnivanja, a za koji ipak ne bismo mogli reći, ako hoćemo časno i otvoreno govoriti, da u osnovi nismo nešto dalje otišli, nego što je Euklid bio pre 2000 godina" i da bi „jedno takvo iskreno i nezavijeno priznanje izgledalo dostojnije nauke, nego da se praznina, koja se ne može ispuniti, sakrije labavim tkivom prividnih dokaza".

Proučavanjem sveukupnih objavljenih i neobjavljenih Gausovih spisa, a naročito njegovog naučnog dnevnika, nepobitno je utvrđeno da je imao jasnu sliku o mogućnosti da se izgradi geometrija logički neprotivrečna i nezavisna od petog Euklidovog postulata. On je već 1799. izjavio da poseduje principe jedne nove, neeuklidske geometrije, ali nije imao dovoljno hrabrosti da ih objavi, bojeći se prijema na koji će oni naići među tadašnjim matematičarima, odn. „vike tupavaca", kako se sam izrazio. Zato je Lobačevskom pripala slava tvorca prve neeuklidske geometrije, jer je smelo objavio svoja istraživanja u vezi sa petim Euklidovim postulatom 1826, koja su bila nezavisna od Gausovih istraživanja. Do istih rezultata, nezavisno od Lobačevskog* i Gausa, došao je Janoš Boljaj, sin Farkaša Boljaja, Gausovog prijatelja, koje je objavio 1832. Istraživanja Lobačevskog i Boljaja, zajedno sa istraživanjima najdarovitijeg Gausovog učenika Bernarda Rimana* u vezi sa hipotezama koje leže u osnovama geometrije, revolucionarno su trasirala kritičke tokove razvitka ne samo geometrije, nego i svih oblasti matematike od sredine XIX v. do danas. Tako je u tim kritičkim tokovima razvitka matematike, kao i u njenom strogom zasnivanju u vezi sa tim tokovima, bila prisutna Gausova misao, iako nije bila objavljena, da bi kao takva mogla neposredno da utiče na te tokove.

Brojni su i krupni Gausovi doprinosi stvaranju i razvitku drugih grana teorijske matematike. Umnogom je doprineo da se zasnuje teorija funkcije kompleksne promenljive i u vezi sa tim teorija eliptičnih funkcija. Gausova rasprava o hipergeometrijskim redovima je od velikog značaja za razvitak teorije beskonačnih redova. Smatra se da je Gaus jedan od začetnika stroge teorije beskonačnih redova. U teoriji verovatnoće i njenim primenama poznat je Gausov zakon raspodele verovatnoća, do kojeg je došao u svojoj teoriji grešaka, podstaknut teorijskim i praktičnim problemima kojima se bavio u geodeziji i astronomiji. Bez primene tog zakona ne mogu se zamisliti mnoga savremena istraživanja u disparatnim naukama, koja se zasnivaju na teoriji verovatnoće i matematičkoj statistici. Veoma je poznat Gausov algoritam u linearnoj algebri, kao teorijsko i praktično sredstvo rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina, a Gausova metoda najmanjih kvadrata teorijska je podloga u mnogim praktičnim primenama matematike.

U shvatanju beskonačnog Gaus je principijelno stajao na Aristotelovim, odn. Boškovićevim* pozicijama. Negirao je pojam aktuelno-beskonačnog, kao stvarno postojećeg, u sebi određenog i u tom smislu dopustivog u matematici, a priznavao samo pojam potencijalno-beskonačnog, u matematici dopustivog u smislu granice, kao nešto nedovršeno, ostvarljivo samo kao nastajanje tako da je uvek nešto drugo. „Protestujem protiv upotrebe beskonačne veličine kao završene, koja je u matematici nedopustiva", pisao je Gaus 1831. svom prijatelju Šumaheru, i zaključio: „Beskonačno je samo način izražavanja, jer je zapravo reč o granici, kojoj se izvesni odnosi po volji približavaju dok drugi bez ograničenja rastu i u tom smislu je beskonačna veličina dopustiva." Ubrzo zatim, na poznati način, Kantorova teorija skupova pokazala je da genijalni Gaus svojim stavom prema aktuelno-beskonačnom nije bio u pravu. Ovde možemo, u smislu dobro poznate latinske maksime, kazati samo toliko: što je dozvoljeno Gausu nije dozvoljeno drugom matematičaru.

Gaus je postigao epohalne rezultate u primenama matematike u nebeskoj mehanici, astronomiji i geodeziji.

Iz neophodnih i veoma skromnih astronomskih podataka uspeo je matematičkim putem, na osnovu zakona gravitacije, da odredi putanju planetoida Ceres, koji se bio izgubio iz vida astronomima posmatračima. Na osnovu Gausovih računa, astronomi Cah i Olbers su ponovo durbinom ugledali Ceres. To je bila sjajna potvrda Gausovih matematičkih rasuđivanja. Ceo taj događaj dao je povoda Gausu da matematički fundira i obradi metode određivanja putanja planeta i kometa. Sve je to objavio na latinskom jeziku 1809. u posebnom delu *Teorija kretanja nebeskih tela*, koje ga je stavilo u rang najslavnijih matematičara-astronoma i bilo je od presudnog značaja za razvitak astronomije i nebeske mehanike. On je tim delom dao novu naučnu podlogu teorijskoj astronomiji.

Gausovoj teorijskoj matematici i astronomiji geodezija je pružila široko i plodno polje praktičnih primena. Zanimali su ga problemi kartografije, gde bitnu ulogu igra konformno preslikavanje površi Zemlje na kartu, tj. problemi da se u ravni nacrta slika čiji će dovoljno mali delovi biti slični odgovarajućim delovima površi Zemlje (problemi geografske karte). U vezi sa obimnim radovima triangulacije i premeravanja meridijanskog luka, Gaus je morao, kao naučni savetnik vlade Danske i Hanovera, da se dublje pozabavi računom grešaka, prema kome je pokazao velike sposobnosti kad je, kao osamnaestogodišnji student, pronašao metodu najmanjih kvadrata. Ova metoda, kao i njegov zakon raspodele grešaka, našli su široku primenu u astronomiji i geodeziji. Gaus je odbacio elipsoid, odn. sferoid kao mogući oblik površi Zemlje, i uzimajući neravnine na Zemlji i njen realni sastav, na osnovu astronomskih i gravimetrijskih metoda, konačno je usvojio geoid kao oblik površi Zemlje. To je bilo od fundamentalnog značaja za modernu geodeziju. Nekoliko rasprava iz više geodezije, koje je objavio od 1843. do 1846. učinile su Gausovo ime neizbrisivim u geodeziji i odredili su dalje puteve njenog razvitka.

On je intenzivno proučavao Zemljin magnetizam i o tome je objavio nekoliko rasprava. Podigao je u Gentingenu magnetsku opservatoriju, a 1833. konstruisao je prvi magnetski telegraf, kojim je bila uspostavljena veza između magnetske i astronomske opservatorije u Gentingenu. U teoriji magnetizma

Gausovo ime ostalo je trajno obeleženo time što je jedinica za merenje magnetne indukcije nazvana imenom Gausa. I u drugim granama fizike postigao je značajne rezultate, posebno u optici.

U periodu Gausovog stvaranja, pod uticajem uporednog progresa matematičke analize i raznih grana matematičke fizike, sve dublje intervenišu matematičke metode u svim oblastima fizike. Razvija se jedna neobično plodotvorna interakcija između matematike i fizike, kojoj je poseban pečat dala Gausova teorijska i primenjena matematika. Gausova diferencijalna geometrija i Gausov zakon raspodele verovatnoća su tipični primeri interakcije između Gausove matematičke teorije i prakse.

Gausovo genijalno stvaralaštvo bitno je uticalo na tokove razvitka matematike za njegova života i posle njega. Njegova matematička istraživanja, kako aritmetička, tako i geometrijska, odlikuju se dubokom Arhimedovom i Njutnovom spregom intuicije i logike. Kao matematičar genijalne intuicije sa nenadmašnim osećajem i smislom za logičku strogost i preciznost u matematičkim rasuđivanjima, kao i veštinom da tu strogost i preciznost do savršenstva ostvari, on je svoj život posvetio istraživanjima zakona prirode, kako je to sam isticao: „Prirodo, ti si moje božanstvo. Istaživanjima tvojih zakona život je moj posvećen". Živeo je skromno i nečujno, životom običnog čoveka u krugu svoje porodice i svojih prijatelja, matematičara, astronoma i fizičara, ne napuštajući univerzitet, kao ni astronomsku, odnosno geomagnetsku opservatoriju u Getingenu. „Kakav je bio u mladosti, takav je ostao do starosti i do poslednjih dana, nepromenjen i jednostavan. Mala radna soba, mali radni sto sa zelenim čaršavom, tabla obojena belo, uski divan i posle njegovih sedamdeset godina, naslonjača, zasenjena svetiljka, neugrejani krevet, skromno jelo, kućni kaput i baršunasta kapica, to su bile tako uobičajene sve njegove potrebe", zapisao je u svojim sećanjima na Gausa njegov prijatelj Sartorijus Valtershauzen.

U istraživanjima prirode sledio je put jedinstva indukcije i dedukcije. Zato je raspravljajući o problemu Zemljinog magnetizma, pisao: „Pod objašnjenjem istraživač prirode ne razume ništa drugo, nego svođenje na što manji broj što jednostavnijih osnovnih zakona, preko kojih dalje ne može, već ih jednostavno mora zahtevati, a zatim iz njih potpuno iscrpno, kao nužno, izvodi pojave." Isto tako, raspravljajući pitanja u vezi sa osnovama mehanike, pisao je: „Poznato je da princip virtuelnih brzina čitavu statiku preobraća u jedan matematički problem i da D'Alamberov* princip dinamiku svodi opet na statiku. Sasvim je u redu, da pri postepenoj izgradnji nauke i pri obuci pojedinca lakše prethodi težem, jednostavnije složenijem, pojedinačno opštem, ali duh ipak zahteva, kad je jednom dospeo na više stanovište, obrnuti put, pri čemu se čitava statika javlja samo kao specijalan slučaj mehanike."

Genijalno vešt da kao posmatrač fenomena prirode podatke posmatranja pretvori u matematička sredstva, stvarao je matematičke metode i teorije da bi pomoću njih otkrivao zakone prirode, ali u isto vreme matematici nije prilazio kao sluškinji prakse i neposredne primene. Njenu osnovnu snagu video je u njenoj slobodi, u apstraktnosti i generalnosti njenih pojmova i teorija, čvrsto uveren da se suština pojmova otkriva putevima sve dubljih apstrakcija, u njihovoj stalnoj interakciji sa tim pojavama, i da matematika pruža takve puteve. Taj duh Gausove matematike uticao je i stalno utiče na tokove razvitka matematike i njenih primena.

STRANI MATEMATIČARI

ABEL NILS HENRIH (Niels Henrik Abel)

Norveški matematičar (1802 – 1829).
Sin i unuk sveštenika, Abel je drugo dete brojne porodice u kojoj su sva deca obrazovanje primila od oca; međutim, 1815. Nils i njegov stariji brat odlaze na školovanje u Kristijaniju (danas Oslo). Njihov profesor matematike (B. M. Holomboe, 1795 – 1850) ubrzo otkriva Nilsov talenat, postaje njegov prijatelj i kasnije i prvi izdavač Abelovih celokupnih dela (1839). Posle očeve smrti Abel je prepušten sebi, budući da ga majka nije mogla pomoći. Od 1820. živi od stipendija, privatnih časova matematike i pozajmice. Na univerzitet u Kristijaniji stupa 1821. a 1822. stiče diplomu iz filozofije. Njegova prva izdanja potiču iz 1823, a 1824. štampa na francuskom kratko delo *Rasprava o algebarskim jednačinama u kojoj se dokazuje nemogućnost opšteg rešenja jednačine petog stepena.* Zahvaljujući dvogodišnjoj stipendiji, Abel počinje da putuje i, mada boravi u Getingenu, ne posećuje Gausa*; u Berlinu upoznaje Krela (A. L. Crelle, 1780 – 1855), pokretača glasovitog „Časopisa za čistu i primenjenu matematiku" u kome počinje da sarađuje. Zatim putuje u Prag, Beč, Italiju i Pariz, u kome ostaje deset meseci i gde je, u Akademiji nauka, prikazana njegova velika rasprava o integralima 1826 (objavljena 1841). Po povratku u Norvešku Abel postaje docent ali ne prekida naučni rad, sve do kraja života, iako teško oboleo od tuberkuloze.

Najznačajniji Abelov rad je u algebri i teoriji funkcija. Njegova rasprava iz 1824, štampana u Krelovom „Časopisu", izlaže nemogućnost rešenja u radikalima opšte jednačine petog stepena. Istražujući odlike jednačina podesnih za takvo rešenje, Abel 1828. otkriva tzv. *Abelove jednačine* čija je grupa komutativna ili *Abelova.* Proučavao je i konvergentne redove i došao do binomne formule sa iracionalnim eksponentom. Inspirisan radovima Le Žandra (Adrien Marie Le Gendre, 1752 – 1833), o eliptičkim integralima, dolazi do dva otkrića: u prvom koristi domen kompleksnih brojeva i zanima se inverznim funkcijama integrala (današnjim eliptičkim funkcijama) kojim utvrđuje dvostruku periodičnost. U raspravi izloženoj u Parizu, proučava integrale nazvane „Abelovim" za koje utvrđuje značajnu teoremu sabiranja. Inverzne funkcije ovim integralima Jakobi* će docnije nazvati *Abelovim funkcijama.*

ADAMAR ŽAK (Jacques Hadamard)

Francuski matematičar (1865 – 1963).
Obrazovanje je stekao u Politehničkoj i Višoj školi, profesor matematike postao je 1887. Doktorsku disertaciju *Ogled o proučavanju funkcija datih njihovim razvojem u Tejlorov red* odbranio je 1892. Započeta u tezi, njegova proučavanja celih transcendentnih funkcija dovode do produbljivanja istraživanja Rimana* o podeli prostih brojeva (1859). Reč je o čuvenom pitanju koje je pokrenuo Ojler* a Ležandr (Le Gendre) 1808. gotovo empirički rešio: sledeći svog učitelja Dirihlea (Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805 – 1859), Riman je koristio radove analogne Ojlerovim, ali odatle je izveo funkciju kompleksne promenljive, funkciju ξ čije je različite osobine proučavao. U težnji da svoja istraživanja postavi naučno, Adamar 1896. daje korektan dokaz teoreme prostih brojeva: „Broj prostih brojeva najviše jednak x asimptotičan je sa x:log x". Iste godine Pusen (Charles de La Vallée Poussin, 1866 – 1962) nezavisno dobija isti rezultat.

Adamar ponovo dolazi na Sorbonu 1897. i drži nastavu iz analitičke i nebeske mehanike u Kolež-de-Fransu. Sa Borelom* proučava cele transcendentne funkcije nastavljajući na taj način Poenkareov* rad a potom i delo Kantora* za koje govori da je jedno od osnova savremene nauke. Adamar, Borel, Lebeg* i Ber (René Baire, 1874 – 1932) rade i sami na Kantorovim idejama i u periodu od 1904. do 1914. vode čuvenu raspravu o Cermelovim (Zermelo) aksiomama. Jedino je Adamar bez ograničenja prihvatio ovu aksiomu a budućnost će pokazati da je bio u pravu. Bio je šef katedre na Politehničkoj školi od 1912 – 1936.

Parcijalne i diferencijalne jednačine su ga zanimale do kraja života. Posle Voltere* igrao je značajnu ulogu u funkcionalnoj analizi kao i u teoriji skupova. Adamar je zaslužan za uvođenje matematičkog seminara u Kolež-de-Fransu koji će znatno uticati na razvoj naučnih istraživanja. Kao vešt pedagog napisao je 1898. i 1901. *Geometriju u ravni* i *Geometriju u prostoru* koje su doživele više izdanja.

U prvom svetskom ratu izgubio je dva sina, u drugom svetskom ratu morao je da emigrira u SAD gde je objavio *Ogled o psihologiji izuma u domenu matematike*, bogat živim zapažanjima.

APEL, v. Analiza

APOLONIJE IZ PERGE, v. Geometrija

ARHIMED, v. Zlatni trolist u razvitku matematike

BELAVITIS, v. Geometrija

BELTRAMI, v. Geometrija

BERNULI, braća DANIJEL, ŽAK i ŽAN (Bernoulli, Daniel, Jacques, Jean)

DANIJEL BERNULI, švajcarski erudita (1700 – 1782).

Započeo je da studira medicinu ali već 1732, kao član akademije nauka Sant-Petersburga, dobio je nagradu akademije za proučavanje problema dva tela, što predstavlja prvo analitičko tumačenje Njutnove teorije. Počev od 1733. u Bazelu drži nastavu iz astronomije, botanike, fizike i filozofije. Nasuprot stricu i ocu, Žaku i Žanu Bernuliju, ubeđeni je njutnovac. Njegovo delo *Hidrodinamika* (1738) obuhvata hidrostatiku i hidrauliku, zasnovanu na principu održanja kinetičke energije. U ovom delu su počeci kinetičke teorije gasova koja će u idućem stoleću odigrati značajnu ulogu, kao i tzv. Bernulijeva teorema koja se odnosi na očuvanje mehaničke energije u toku savršeno nestišljivog fluida. U proučavanje vibrirajućih žica, koje je izazvalo mnoge rasprave između D'Alambera*, Ojlera* i Lagranža*, Bernuli uvodi kružne funkcije. Njegovi stavovi dovode do trigonometrijskih ili Furijeovih redova koji su doveli do napretka u analizi a Kantora* do teorije skupova. U anatomiji duguje mu se proučavanje respiratorne mehanike i princip tačnog proračuna srčanog rada a zabeleženi su i njegovi elektrostatički eksperimenti.

ŽAK BERNULI, švajcarski matematičar (1665 – 1705).

Kao student teologije zanima se za matematiku i uči je sam. Posle šest godina putovanja po Francuskoj, Holandiji, Engleskoj, dobija 1687. katedru matematike na univerzitetu u Bazelu. Upoznavši nove matematičke tokove čitajući Dekarta*, otkriva infinitezimalne metode u delima Valisa (John Wallis, 1616 – 1703) i Baroua (Isaac Barow, 1630 – 1677). Kad je Lajbnic* 1684. u časopisu „Acta Eruditorum" („Dela obrazovanih") objavio svoju prvu raspravu o infinitezimalnom računu, Bernuli je odmah shvatio značaj ovih oznaka, prihvatio Lajbnicova gledišta i postao njegov odani pristalica.

Za ime Žaka Bernulija vezuje se izraz integral, zatim jedna kriva, *Bernulijeva lemniskata*; njegovi radovi o ovoj krivoj izvor su proučavanja eliptičkih funkcija koje će u XIX v. odigrati značajnu ulogu. Bernulija zanima i druga kriva, logaritamska spirala (zahtevao je da mu se ona ukleše na nadgrobni spomenik). Njemu pripada zasnivanje računa varijacija koji će kasnije sistematizovati Ojler i Lagranž. U diferencijalnom računu ostale su *Bernulijeve jednačine* a u proučavanju brojeva *Bernulijevi brojevi*.

U računu verovatnoće otkrio je 1689. *zakon velikih brojeva* ili *Bernulijevu teoremu*. Delo *Ars coniectandi* (*Veština nagadanja*) objavljeno 1713, osam godina posle njegove smrti, rezimira njegova proučavanja u ovoj oblasti.

ŽAN BERNULI, švajcarski matematičar (1667 – 1748), autor je priručnika *Analiza beskonačno malih* (1696). L'Opital (Guillaume de L'Hospital, 1661 – 1704) i Hajgens (Christian Huygens, 1629 – 1695) pomagali su ga i omogućili mu da postane profesor univerziteta u Groningenu 1695, a zatim i u Bazelu. Bio je Ojlerov profesor. Njegove naučne rasprave, koje se odnose na veći broj matematičkih problema, ostaju u istoriji nauke. Kao i njegov brat Žak, ni Žan Bernuli nije prihvatio Njutnove ideje, ostavši veran filozofiji i kartezijanstvu; ipak, istoriji nauke doprineo je pre svega kao najčuveniji mehaničar XVIII v. koji je primetio opštost i značaj principa virtuelnih brzina.

BOLCANO, v. Analiza, Matematička logika

BOLJAJ, V. Geometrija

BOREL EMIL (Emile Borel)

Francuski matematičar (1871 – 1956).
Najpre student Visoke škole, predavač matematike postao 1892, profesor fakulteta u Lilu 1893. a 1894. odbranio je disertaciju „O nekim pitanjima teorije funkcija". U Pariz ponovo dolazi 1897. za profesora Visoke škole a od 1909. na Sorboni drži katedru teorije funkcija. Za vreme prvog svetskog rata radi u Službi pronalazaka koju je ustanovio Penleve* i u kojoj je osnovao sekciju snalaženja pomoću zvuka (jednom takvom sekcijom sa uspehom je komandovao na frontu). Na Sorbonu se vraća 1919. i posvećuje katedri računa verovatnoće

i matematičke fizike. Aktivan je u političkom životu: poslanik je Averona 1924 – 1936. a 1925. Penleve mu je u svom kabinetu poverio ministarstvo mornarice.

Borel je u analizi otvorio nove puteve u teoriji divergentnih redova, u ispitivanju pojmova monogenosti, analitičnosti, kvazianalitičnosti, teoriji rastenja itd. Ustanovio je veze između teorije skupova i teorije funkcija gde je precizirao pojam mere skupa tačaka uključenog u segment prave. Da bi podstakao ovaj tip proučavanja dao je *Zbirku monografija o teoriji funkcija* koja, pored više njegovih dela sadrži napise mnogih uglednih matematičara. Ovaj krajnje apstraktan pojam, koji igra značajnu ulogu ne samo u analizi već i u računu verovatnoće, različit je od pojma moći. On ima osobine mere veličina. Nastao iz Kantorovih* shvatanja o skupu, podatke o njemu dao je Žordan* a zatim i Lebeg*. Ovaj pojam Borel je sveo na svoju definiciju mere proučavanjem izvesnih skupova *mere nula* ili *nulte mere* koji imaju moć kontinuuma. S druge strane to je mera skupova na kojoj se zasniva *Lebegov integral*, bitan argument moderne analize. U nauci poznata *Borel – Lebegova teorema* čuva uspomenu na ova dva matematičara koji su sa Berom (René Baire, 1874 – 1932) obnovili proučavanje funkcija realne promenljive. Čuvene su i polemike o transfinitnom koje su početkom XX v. pokrenuli Borel, Adamar*, Ber i Lebeg (Borel ih je sakupio u drugom izdanju *Lekcija o teoriji funkcija*).

U teoriji verovatnoće proširio je proučavanja verovatnoće od slučaja konačnog broja do prebrojive beskonačnosti ogleda. Borel je pionir *teorije strategijskih igara* koju će kasnije dalje razviti Nojman (Johann von Neumann, 1903 – 1957). Njegova istraživanja u ovom domenu sakupljena su u knjizi *Rasprava o računu verovatnoće i njegovim primenama* (četiri toma, objavljena u saradnji) kao i u zbirci monografija.

BUL DŽORDŽ (George Boole)

Britanski logičar i matematičar (1815 – 1864).
Rođen je u skromnoj zanatlijskoj porodici koja mu je mogla pružiti samo osnovno obrazovanje; latinski je učio zahvaljujući susretljivosti jednog knjižara pa je u dvanaestoj godini preveo u stihovima jednu Horacijevu odu. Docnije uči grčki, francuski, nemački i italijanski. Matematiku predaje u školi i sa priručnika prelazi na proučavanje velikih rasprava Laplasa* i Lagranža*. Njegovi prvi radovi odnose se na račun varijacija a objavljuje ih 1841. Gregori (D. F. Gregory, 1813 – 1844), mladi direktor „Kembridžskih matematičkih novina" pod naslovom „O nekim teoremama računa varijacija".

Sprijateljivši se sa Morganom (Augustus De Morgan, 1806–1871), Bul se živo zainteresovao za polemiku o logici koju su vodili Morgan i škotski fizičar Hamilton (William Hamilton, 1788–1856) te je i sam počeo sa istraživanjima u logici. Dugi niz godina držao je nastavu na Kraljičinom koledžu u Korku, Irska. Svi njegovi radovi odaju veliku nezavisnost misli a Bulova originalnost je, kako u njegovim verskim shvatanjima tako i u njegovom ponašanju u društvu, dajući mu glas neobičnog čoveka.

Bulov prvi rad u logici, *Matematička analiza logike* (1847) izlazi u isto vreme sa Morganovim delom *Formalna logika ili račun zaključaka, neophodno i verovatno.* Bul će se ovom predmetu vratiti 1854. radom *Istraživanja o zakonima mišljenja na kojima se zasniva matematička teorija logike i verovatnoće.* U prvim radovima Bul je koristio matematičku analizu za produbljivanje saznanja u domenima logike i verovatnoće, usvojivši apstraktnu koncepciju algebre apsolutno nezavisnu od pojmova broja ili veličine. Sa 1 označava *univerzum shvatljivih objekata* a operacija koja se sastoji u odabiranju u tom svetu svih objekata izvesnog tipa predstavljena je sa $1 \cdot x$ ili sa x. Proizvod xy označava izbor među tim objektima onih drugog tipa y. To je naš skupovni presek. Bul označava jednakosti $xy = yx$ i $x^2 = x$. Suma $x + y$ je aktuelna unija skupova, ali on je posmatra samo ako x i y nemaju zajedničkih elemenata i $x + x$ nema smisla. Komplement od x predstavljen je sa $1 - x$. Ove osnove mu dozvoljavaju da osvetli značajna pravila računa, kao što je distributivnost množenja u odnosu na sabiranje.

Matematičko Bulovo delo, koje se može smatrati pokretačem savremene matematičke logike, obuhvata dva klasična dela, često preštampavana: *Rasprava o diferencijalnim jednačinama* (1859) i *Rasprava o računu konačnih diferencija* (1860). Njegova prva algebra opterećena je nekorisnim složenim i nepotpunim problemima. Dževons (William Stanley Jevons, 1835–1882) će ih rešiti 1864. u svojim *Elementarnim časovima iz logike* (1870): kod njega sabiranje postaje naša skupovna unija i postoji čak ako x i y imaju zajednički deo; ona je tada komutativna, $x + x = x$ i obe operacije imaju apsolutno simetričnu ulogu. Moderne oznake Bulove algebre proističu iz škole Peana (Giuseppe Peano, 1858–1932). Između Bulovog i Peanovog doba došlo je do promena tokova: dok osnivalac teorije primenjuje matematiku na logiku, Peano, Vajthed (Alfred North Whitehead, 1861–1947), Hilbert* i Rasel* učiniće logiku samom osnovom matematike. Pomenimo na ovom mestu da se Kantor* dosta čudno i neprijateljski odnosio prema Bulovim stavovima.

Videti: Algebra; Matematička logika.

BURBAKI NIKOLA (Nicolas Bourbaki)

Zajednički pseudonim jedne grupe mladih, većinom francuskih matematičara.

Nastala pre drugog svetskog rata, ova grupa naročito je poznata po delu *Elementi matematike* (1939) u tridesetak svezaka (svaka od po 100–300 strana), objavljenom u ediciji „Naučne i industrijske aktuelnosti" („Actualités scientifiques et industrielles", izdavač Hermann). *Elementima matematike* bi više odgovarao naslov „osnove" jer oni nikako ne predstavljaju elementarno delo, već predmet revizije i neprekidnog aktualizovanja.

Grupa Burbaki nema stalnu strukturu, ona se neprestano obnavlja a njeni se članovi povlače kad dosegnu određene godine: ta granica je u početku bila pedeset godina a vodi se računa i o nacionalnom ključu. Anonimnost se strogo čuva, mada je ponekad i otkrivena. Grupa je objavljivala članke u časopisima, čak se bila kandidovala za Američko matematičko društvo, ali nije podržana kad je njena struktura bolje shvaćena. Renome grupe počiva na delu *Elementi*. Odlikuje se strogo aksiomatskim pristupom u matematici i upotrebom osobene terminologije, međutim ove odlike gube od svoje originalnosti jer sve više prodiru u stručni jezik. Terminologija i burbakističke oznake sve više su opšte prihvaćene, kako u Francuskoj tako i u inostranstvu. Što se tiče aksiomatske koncepcije, ona teži da uđe u nastavu, čak i elementarnu, što grupa nije predviđala u početku. Vodeći računa da ne preduzima originalna istraživanja ili avangardna ispitivanja, Burbaki ima za cilj razjašnjavanje i sistematizovanje. Burbakistička aksiomatika je iskazana na apstraktan način i maksimalan matematički skup koji zadovoljava izvestan broj naziva se *struktura*. Tako se pojavljuju strukture grupe, prstena, tela itd. Bilo bi pogrešno verovati da ove strukture nisu bile poznate pre Burbakija. Više poglavlja *Elemenata* sadrži veoma bogate i precizne istorijske komentare, objavljene u *Elementima istorije matematike* (1960. i 1969).

Videti: Matematika; Teorija skupova. Funkcionalna analiza.

CERMELO, v. Matematička logika

ČEBIŠEV PAFNUTIJ LJVOVIČ

(Чебышев Пафнутий Львович)

Ruski matematičar. Rođen je 1821. u Okatovu, Kalužanska oblast, umro je u Petrogradu 1894.

Imao je mogućnosti da do stupanja na univerzitet vaspitanje dobije u roditeljskoj kući. Na matematičko odeljenje Univerziteta u Moskvi stupio je 1837. Tu je slušao predavanja iz teorijske i primenjene matematike i astronomije, kao i iz fizike. Kao student istakao se radom o izučavanju korena jednačine, za koji je dobio srebrnu medalju. Univerzitetske studije završio je kao odličan kandidat 1841. Magistarsku disertaciju *Pokušaj elementarne analize teorije verovatnoće* (*Opit elementarnogo analiza teorii verojatnostei*) odbranio je 1845, a pravo predavanja na Univerzitetu u Petrogradu dobio je 1847, na osnovu disertacije *O integraciji pomoću logaritama* (*Ob integrirovanii pomoću logarifmov*). Tu su ga naročito prihvatili profesori Viktor Jakovljevič Bunjakovski (1804–1889) i Josif Ivanovič Somov (1815–1876). Stepen doktora matematike i astronomije postigao je 1849. pošto je odbranio disertaciju *Teorija izravnavanja* (*Teoria sravnenii*). Bio je profesor Univerziteta u Petrogradu i član Akademije nauka u Petrogradu, počasni član skoro svih univerziteta u Rusiji, niza ruskih i inostranih naučnih društava, a zatim član akademija nauka u Berlinu, Parizu, Londonskog kraljevskog društva, Italijanske kraljevske akademije i Švedske akademije nauka. Slavni francuski matematičar Ermit* pisao je Čebiševu, povodom njegovog izbora za člana Francuske akademije nauka da je „ponos nauke u Rusiji i jedan od prvih geometara Evrope, kao i jedan od najvećih geometara svih vremena" i da je njegov izbor potpuno zaslužen „za njegova prekrasna otkrića u aritmetici i za njegove važne radove u teoriji interpolacije". Naučna slava Čebiševa se širila njegovim mnogobrojnim radovima, kao i sve većim krugom njegovih učenika koji su produžavali i razvijali njegovu delatnost i dalje uzdizali matematičku školu Univerziteta u Petrogradu.

Čebišev je na Univerzitetu u Petrogradu predavao integralni račun, diferencijalne jednačine, višu algebru, teoriju brojeva, teoriju verovatnoće, teoriju eliptičkih funkcija, analitičku geometriju, sfernu trigonometriju, praktičnu mehaniku i druge razdele matematike. Njegovi kursevi nisu obimom bili veliki, ali su bili dostupni po pojmovima i bogati sadržajem. Bio je izvanredni predavač u naučnom i pedagoškom smislu. Predavačku aktivnost spojio je s naučnim istraživanjem i sa organizacijskim radom. Veliki je njegov značaj za razvitak ruske nauke i tehnike, obrazovanja i prosvete. Odigrao je veoma veliku ulogu u uspostavljanju i razvitku Moskovskog matematičkog društva. Aktivno je učestvovao u radu ruskih prirodnjaka, na čijim je sastancima pokazivao mehanizme koje je otkrio, kao i računsku mašinu sa neprekidnim kretanjem. Stalno je upoznavao inostrane naučne krugove sa dostignućima ruske mehanike i matematike. Čebišev i njegovi učenici razvili su interesovanje za konkretne naučne zadatke, koji imaju važan praktičan značaj, i koje treba rešiti putem konstrukcije algoritama. Zahvaljujući naučnom radu Čebiševa i njegovih učenika, obraćanje praksi kao izvoru teorijskih istraživanja, karakteristična je crta matematičke škole u Petrogradu. Tesna povezanost teorije i prakse u stvaralaštvu Čebiševa ogleda se u razradi teorije najboljeg približnog izračunavanja funkcija, teorije verovatnoće, teorije interpolacije, kao i u njegovim istraživanjima praktičnog karaktera. Sabrana dela Čebiševa izdala je Akademija nauka u Petrogradu, u vremenu od 1899. do 1907, dok je Akademija nauka Sovjetskog Saveza objavila njegova dela u pet tomova: *Teorija brojeva* (prvi tom); *Analiza* (drugi i treći tom); *Teorija mehanizama* (četvrti tom); *Drugi radovi i materijali istorijskog i biografskog karaktera* (peti tom).

Teorija brojeva predstavlja značajan pravac naučnih istraživanja Čebiševa i važan je činilac u stvaranju njegove matematičke škole. Profesor Bunjakovski ukazao je Čebiševu na Ojlerove radove koji se odnose na teoriju brojeva. S obzirom na tu teoriju vrlo je važno Čebiševljevo delo *Teorija izravnavanja*, kao i njegova rasprava *O određivanju broja prostih brojeva koji ne prelaze datu veličinu* (*Ob opredelnii čisla prostih čisel, ne prevoshodajših danoi veličini*, 1848) koja mu je donela svetsku slavu. Mnogi istaknuti matematičari bavili su se pitanjem broja prostih brojeva koji ne prelaze dati broj, ali je tek Čebiševu pošlo za rukom da dobije bitne rezultate u tom pogledu. U spomenutoj raspravi dokazao je pet teorema, bitnih za pitanja kojima se bavi u raspravi. Dao je još neke rasprave značajne za teoriju brojeva i teoriju redova. Probleme koje tretira povezani su sa radovima Euklida, Ojlera*, Ležandra*, Liuvija*, Dirihlea*, Rimana*, Dedekinda*, Bertrana, Ermita* i Minkovskog. Čebiševljeva istraživanja u teoriji brojeva dopunjena su radovima njegovih učenika. Ona ga prikazuju kao velikog i suptilnog matematičara.

U analizi su značajni njegovi naučni radovi koji se tiču integracije funkcija, teorije interpolacije i njene veze sa drugim pitanjima, kao i istraživanja u teoriji najboljeg približnog izračunavanja funkcija. U tim oblastima dao je niz veoma značajnih radova, objavljenih u Rusiji i van Rusije, na koje se pozivaju istaknuti matematičari. Istraživanja algebarskih funkcija u konačnom obliku i graničnih vrednosti integrala zauzimaju posebno mesto u radovima Čebiševa posvećenih integraciji funkcija. Njegovi radovi o graničnim veličinama integrala zasnovali su novu metodu istraživanja u matematici, metodu momenata, značajnu za teoriju verovatnoće. U teoriji najboljeg približnog izračunavanja funkcija postavio je osnovne zadatke i dao je metode njihovog rešenja. Tim metodama rešio je mnoge konkretne zadatke iz te oblasti. Pokazao je razne primene ove teorije kako u samoj matematici, tako i u praktičnim zadacima. Njegove ideje, metode i dobijeni rezultati odigrali su važnu ulogu u daljem razvitku teorije najboljeg približnog izračunavanja funkcija. Iz te oblasti, pored brojnih drugih radova, podvlačimo njegov rad *Teorija mehanizama, poznatih pod nazivom paralelograma* (*Teoria mehanizmov, izvesstnih pod nazvaniem paralelogramov*, 1853). Čebiševljevi radovi iz teorije interpolacije predstavljaju važan doprinos toj oblasti, vezan sa primenama. Oni su od većeg teorijskog značaja, jer su u njima položene osnove opšte teorije specijalnih polinoma. Mnogi Čebiševljevi rezultati iz teorije interpolacije našli su praktične primene u balistici i u drugim oblastima praktičnih znanja, naročito u matematičkoj statistici, što se ogleda u radovima međunarodne matematike. Brojni su radovi Čebiševa iz teorije interpolacije. Oni ilustruju Čebiševljevu stalnu težnju da matematička istraživanja budu usmerena ka primenama.

U teoriji verovatnoće Čebišev je postigao vrlo velike rezultate. U svojoj spomenutoj magistarskoj disertaciji osvetlio je osnovni teorijski položaj teorije verovatnoće i označio njene važne primene. Njegova znamenita rasprava *O srednjim veličinama* (*O srednih veličinah*, 1866) sadrži njegovu klasičnu formulaciju zakona velikih brojeva. Iz tog se zakona kao specijalni slučajevi javljaju zakoni velikih brojeva Bernulija* i Poasona (Poisson). Jedna njegova teorema istakla je posebnu ulogu normalnog zakona verovatnoća u teoriji grešaka i u drugim praktičnim pitanjima teorije verovatnoće, vezanim sa primenama u artiljeriji, tehnici i prirodnim naukama. Imala je važan značaj kako u teorijskim tako i u praktičnim odnosima. Uopšte uzev, kako ukazuje Kolmogorov*, Čebišev je doveo teoriju verovatnoće u Rusiji na prvo mesto u svetu, jer je prvi sa potpunom upornošću istakao potrebu apsolutne strogosti dokaza graničnih teorema i što je svuda težio dobiti tačne ocene odstupanja od graničnih zakonomernosti. Prvi je jasno ocenio i koristio pojam slučajne veličine i njene matematičke nade, potčinivši ih pogodnom i gipkom algoritmu. Značajna je njegova metoda momenata, a sveukupni njegovi rezultati u teoriji verovatnoće predstavljaju viši stepen u njenom razvitku.

U naučnom i stručnom radu Čebiševa je pored teorijskih pitanja praktičnog karaktera, veoma zanimala teorija mehanizama i mašina. Tu je dao brojne radove, veoma poznate u Rusiji i van nje. U konstrukciji mehanizama i mašina koristio je svoje matematičke radove koji su bili okrenuti praktičnim pitanjima. Zadaci teorije mehanizama, koje je postavljao i rešavao Čebišev, karakterišu ga kao krupnog naučnika u oblasti praktične mehanike. Čebiševljeva istraživanja u teoriji mehanizama sadrže velike rezultate koji se odnose na opšta pitanja konstrukcije mehanizama u ravni, kao i na njihovu

strukturu i kinematiku. Treba posebno istaći da je njegov poznati aritmometar kao računska mašina. Čebiševljevo stvaralaštvo u oblasti teorije mehanizama je originalno, vrlo poznato u svetskoj nauci. Ono je zasnovalo nauku o mehanizmima u SSSR-u. Posebno treba podvući da se bavio primenama matematike u astronomiji i da je o tome objavio radove.

Istraživanja Čebiševa u teoriji brojeva, analizi, teoriji verovatnoće i u teoriji mehanizama odigrala su veliku ulogu u razvitku savremene matematike. Sačuvala su životno značenje i danas i prikazuju ga kao blistavog predstavnika jedinstva teorije i prakse u matematici, čije ideje još nisu potpuno iskorišćene.

D'ALAMBER ŽAN LE RON (Jean Le Rond D'Alembert)

Francuski matematičar, fizičar i filozof (1717–1783). Vanbračno dete Gospođe de Tansen (Tencin) i artiljerijskog narednika Detuša (Destouches), D'Alambera je odgajila žena nekog siromašnog staklara, koju je on do kraja života smatrao majkom i starao se o njoj, mada ga je Gospođa de Tansen, kad je postao slavan, dobrovoljno priznala za sina. U dvanaestoj godini stupio je u kolež, začudivši svoje profesore posebnim darom za matematiku, filozofiju i stare jezike. Godine 1735. piše komentar Poslanice svetog Pavla Rimljanima koji je oduševio jansenisté ali odbija da studira teologiju i posvećuje se pravima. Advokat postaje 1738, pokušava da studira medicinu ali ubrzo otkriva svoje prave sklonosti ka matematici i već 1739. upućuje Akademiji nauka primedbe na *Dokazanu analizu* Renoa (Ch. Reyneau), a sledeće godine raspravu o lomu čvrstih tela. Zbog izuzetnog talenta za matematiku, za člana Akademije nauka izabran je u svojoj 23. godini, u sekciji za astronomiju. Svoja glavna proučavanja posvetio je mehanici. Njegova *Rasprava o dinamici* (1743) zasniva se na teoremi poznatoj pod nazivom „D'Alamberovi principi" gde se dinamika svodi na statiku: „Ako se posmatra sistem materijalnih tačaka međusobno povezanih tako da njihove mase dobiju određeno ubrzanje različito od njihovog slobodno udruženog kretanja, ukupno kretanje ostvareno ili izgubljeno u sistemu ostaje jednako." U delu *Istraživanja precesije ekvinocija* (1749) daje prvo uopšteno rešenje koje dovodi do definicije rotacionog kretanja tela bilo kog oblika kao i raznovrsne naučne rasprave. Opšte jednačine kretanja fluida ustanovio je 1752, a njegova istraživanja iz mehanike, akustike i astronomije dovešće do usavršavanja analitičkog aparata. Pokazao je da telo *C* kompleksnih brojeva zadovoljava sve potrebe analize i daje prvi dokaz osnovne teoreme algebre (1746). Prvi koristi Tejlorovo (Taylor) razvijanje u redove sa eksplicitnim ostatkom u vidu integrala (1754), nalazi opšte rešenje jedne parcijalne diferencijalne jednačine (*Istraživanje treperećih žica*, 1747) i daje metodu rešavanja sistema diferencijalnih jednačina. U posebnom slučaju koristio je 1768. kriterijum konvergencije redova koji nose njegovo ime.

Kao filozof, bio je skeptik koji sumnja u vrednost skepticizma i misli „da nema nauke koja nema svoju metafiziku" a u metafizici „*ne* ne izgleda pametnije od jednog *da*". Tragajući za zasnivanjem, kako morala tako i logike jednostavnih načela, on ostavlja mesto za intuiciju u matematici i veruje „da je sve ono što mi vidimo samo pojava koja postoji jedino u okviru onoga što mi zamišljamo". Neki misle da se hrabrije zalagao za istinu u svojoj prepisci nego u svojim zvaničnim tekstovima. Ipak, njegovo pismo Katarini Velikoj predstavlja apologiju hrišćanstva, on žali Lukrecijev (94.–54. pre n. e.) ateizam u njegovom predgovoru *Eklogama* (1779). Volter ga je nazivao Protagorom. Njegovo preziranje dogmatizma bilo je odmereno, a njegova najznačajnija uloga bila je u širenju novih ideja koje je nenametljivo izlagao, što će doći posebno do izražaja u njegovom radu na *Enciklopediji*.

Osnovna načela svoje filozofije D'Alamber je izložio kao jedan od glavnih saradnika i pokretača *Enciklopedije* u *Uvodnoj raspravi* (1751) gde je, inspirišući se Bekonom, dao klasifikaciju nauka prema istorijskom nastanku i izgledima u budućnosti, sa pozicija prosvetiteljstva. Kao enciklopedista bio je više no redaktor i pisac novih tekstova i uvodnih rasprava: borio se protiv objavljivanja sličnih, konkurentskih izdanja, protiv nepovoljnih kritika suviše borbenih protivničkih filozofskih duhova. Njegov polet se smanjivao u raznim svađama kao što su bili protesti jezuita i pariskog biskupa, lični napadi, skandal sa odrednicom *Ženeva* i polemika sa Rusoom, intelektualno i policijsko proganjanje zbog odobravanja Helvecijusovog (Helvétius) teksta (1758), itd. – sve to uticalo je da odustane od ovog posla i raskine sa Didroom, ali ne i sa enciklopedistima. Otada se okrenuo proučavanju umetnosti i književnosti.

Član Francuske akademije postao je 1754, a njen sekretar 1772, kad je napisao biografije onih članova akademije koji su umrli između 1700–1770. Svoje filozofske tekstove sabrao je pod naslovom *Mešavina filozofije, istorije i književnosti*.

D'Alamber je tipičan predstavnik svog „filozofskog veka", prosvetitelj i naučnik, filozof i veoma raznovrstan duh čije je ime podjednako poznato, kako u matematici tako i u filozofiji.

DARBU, v. Analiza

DEDEKIND RIHARD (Richard Dedekind)

Nemački matematičar (1831–1916), jedan od glavnih osnivača moderne algebre.

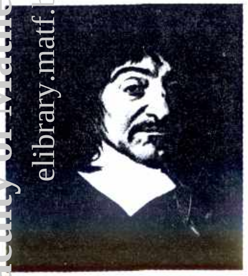
Stekavši solidno matematičko obrazovanje na Tehničkoj visokoj školi u Braunšvajgu (Carolo-Wilhelmina, osnovana 1745), primljen je 1850. na univerzitet u Getingenu gde su mu učitelji Štern (Moritz Abraham Stern, 1807–1894), teoretičar brojeva, zatim Gaus* i fizičar Veber (Wilhelm Eduard Weber, 1804–1891). Dedekind će se docnije žaliti da je svoju matematičku kulturu u Getingenu nedovoljno koristio u praktičnom smislu što ga je obavezivalo da se sam uputi u teoriju eliptičkih funkcija, modernu geometriju, višu algebru i matematičku fiziku. Svoju doktorsku disertaciju o Ojlerovim* integralima branio je 1852. pred Gausom*, a 1854. imenovan je za docenta univerziteta. Četiri godine obavlja sporedne funkcije; od 1855–1857. prati predavanja Dirihlea (Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805–1859) koji je nasledio Gausa 1855. Kasnije objavljuje *Raspravu o teoriji brojeva* svog učitelja u čijem XI dodatku (1871) izlaže ideje o algebarskim brojevima. Imenovan 1857. za profesora Politehnikuma u Cirihu, Dedekind postaje 1862. profesor Tehničke visoke škole u Braunšvajgu, gde ostaje do smrti.

Inspirisan petom knjigom Euklidovih *Elemenata* objavljuje 1872. kratku brošuru *Neprekidnost i iracionalni brojevi* u kojoj najpre definiše preseke na skupu Q racionalnih brojeva. Presek je podela skupa Q na dva disjunktna podskupa, svaki broj drugog podskupa je veći od svakog broja prvog podskupa. Svaki element od Q definiše jedan presek, tj. dva podskupa od kojih je s jedne strane onaj od brojeva najviše jednak elementu, a s druge strane onaj od brojeva koji su veći od elementa. Recipročno nije istinito. Izvesni preseci nisu definisani elementom iz Q. Dedekind takve preseke naziva *iracionalnim brojevima*. On pokazuje kako se može računati s takvim celinama, brišući na taj način antinomiju između aritmetike i geometrije. U drugoj brošuri *Šta su i šta treba da budu brojevi*? (1888), čije koncepcije potiču iz 1872–1878, svodi pojam celog prirodnog broja na pojam konačnog skupa. Za njega je skup konačan ako ne može biti injektovan ni u jedan sopstveni deo.

Vezan prijateljstvom za Kantora* posredstvom značajne naučne korespondencije, pomaže mu da konstruiše teoriju skupova koju koristi u klasičnoj matematici. Tako u proučavanju algebarskih brojeva zamenjuje kod Kumerovih (Ernst Eduard Kummer, 1810–1893) idealnih brojeva pojam ideala aditivnom podgrupom prstena, stabilnom za množenje. Ovo otkriće pokazaće se plodnim u svim matematičkim oblastima.

Zato sam daje dokaz 1882, primenjujući ga sa svojim učenikom Veberom (Heinrich Weber, 1842–1913) u teoriji algebarskih krivih u ravni. Ova teorija koja se do tada javljala u geometriji i u analizi, postaje tako poglavlje čiste algebre.

DEKART RENE (René Descartes)



Francuski matematičar i filozof (1596–1650).
Treće dete u porodici i bolešljiv od rođenja, u desetoj godini ulazi u kraljevski kolež, gde nastavu drže jezuiti. Iako je cenio darovitost i blagonaklonost svojih profesora, Dekart će strogo suditi o programu studija, o moralu proučavanom u književnosti i vrlini propovedanoj bez pružanja primera, o filozofiji svesno okrenutoj ka teologiji i njoj potpuno potčinjenoj. Jedino za matematiku ima „milosti", mada je i ona usmerena ka praktičnim primenama i služi vojnim veštinama, veoma značajnim plemićkim sinovima. Tako se Dekart žalio, da „ništa uzvišeno nije izgrađeno". Po izlasku iz koleža, upotpunjuje svoje obrazovanje učeći igre, jahanje, mačevanje. U mladom plemiću boriće se neko vreme filozofija i radost življenja, budući da je po tradiciji bio predodređen za službu kralju. U Parizu se okreće intelektualnoj sredini i upoznaje Midorža (Claude Midorge, 1585–1647), prvog matematičara Francuske. Oko 1615–1616. oslobađa se starih prijatelja da bi studirao matematiku. Po naređenju kneza Morisa od Nasaua, 1617. angažuje se u Holandiji. Lutajući ulicama Brede, primetio je gomilu ljudi okupljenu ispred jednog oglasa, napisanog na holandskom jeziku: bio je to matematički problem, iznet pred javnost. Dekartu ga prevodi njegov budući prijatelj Bekman (Isaac Beeckman, 1588–1639), upravitelj koleža iz Dordrehta i on ga sa uspehom rešava.

Dekart putuje u Dansku, Nemačku; u Bavarskoj se angažuje u trupama Maksimilijana Bavarskog; u toku zime 1619. kratko boravi u Ulmu, gde upoznaje matematičara Folhabera (Jean Faulhaber, 1580–1635). Odlučuje da ostavi vojnu službu 1621, ali već 1628. učestvuje u opsadi tvrđave La Rošel, u službi kardinala Rišeljea. Marta 1629. Dekart želi „da se zauvek povuče... i obezbedi sebi savršenu samoću u zemlji umerene klime u kojoj nije poznat": tako odlazi u Holandiju, gde će ostati više od dvadeset godina, čuvajući ljubomorno svoju samoću, često menjajući prebivalište, vodeći život plemića.

Najpre se bavi fizikom i radi na *Metafizičkim razmišljanjima*. U leto 1633. završio je delo *Svet* ili *Rasprava o svetlosti*; međutim, saznavši da su inkvizitori Svetog oficija osudili Galileja zbog njegovog učenja o kretanju Zemlje, a kako je ovu tezu i sam uveo u svoju fiziku, Dekart je odustao da je objavi.

Da bi objasnio svoju doktrinu, ali i ispitao reakciju vlasti, objavljuje 1637. *Raspravu o metodu* (*za dobro rasuđivanje i traženje istine putem nauka*) i tri male rasprave: *Dioptrika*, *Meteori* i *Geometrija*. Ipak, rektor univerziteta u Utrehtu, dotadašnjeg žarišta kartezijanske misli, Vecijus (Gisbertus Voetius, 1589–1676) optužiće 1642. Dekarta za ateizam.

Dekart beži iz Amersforta, izbegavajući Utreht i ponovo se nastanjuje u Lajdenu. Godine 1641. objavljuje deset godina pripreman rukopis, *Razmišljanja o prvoj filozofiji*, gde izlaže potpun sistem kartezijanske matafizike. Na intervenciju Princa Oranskog, francuskog ambasadora i njegovog prijatelja Hajgensa (Constantijn Huygens, 1596–1687) zaustavlja se proces suda u Utrehtu. Dekarta napada veoma uticajan jezuita Francuske Burden (o. Pierre Bourdin, 1595–1653) te on tako upoznaje i neumoljivu crkvenu opoziciju. Zamisao da oko svoje, kartezijanske filozofije sakupi čitav naučni svet i svoju fiziku, kao univerzalnu materiju ustanovi kao nastavu u školama, nije mogao da ostvari.

Posle dužeg oklevanja, Dekart je rešio da prihvati poziv švedske kraljice Kristine: u Stokholm je stigao oktobra 1649. Stroga i autoritarna, kraljica određuje Dekartu takvo radno vreme koje remeti sve njegove navike: svakog jutra morao je da bude u pet sati na dvoru. U toj hladnoj zemlji, dobio je pneumoniju i, odbijajući pomoć švedskih lekara, posle devet dana umro.

Dekartov poluironičan, delimično pejorativan stav u odnosu na filozofe i duboko poštovanje u odnosu na crkvene dostojanstvenike i teologe, dovoljno je objasniti njegovom prevashodnom brigom za što je moguće većim sopstvenim mirom. Ovakvo dvostruko držanje nesumnjivo je u vezi sa kartezijanskom koncepcijom filozofije, ili pre misijom filozofa. Kao što je već rečeno, želeo je da kartezijanska filozofija, budući istinita, postane osnova obrazovanja pri čemu vera ne sme biti izostavljena. Zalagao se za pojednostavljenu veru koja bi se sastojala iz skupa samo onih potrebnih i dovoljnih verskih istina da bi se obezbedio spas. Dopušta i kartezijansku sholastičku teologiju smatrajući potrebnim obrazovanje i u istinskoj teologiji i u istinskoj filozofiji.

U delu *Pravila za upravljanje duhom* pokušava da otkrije metod za zasnivanje univerzalne nauke: „Ono što podrazumevam pod metodom, to su izvesna i laka pravila koja nam, ako ih ispravno promatramo, pružaju sigurnost da grešku nikad nećemo uzeti kao istinu, ne trošeći pri tom beskorisno snagu svoga duha a uvećavajući svoje znanje stalnim napredovanjem ka dosezanju za spoznajom svega onog za šta smo kadri" (*pravilo IV*). U etimološkom smislu, metod je put što dozvoljava da se dostigne cilj, a da se ne poistoveti s njim. Na intelektualnom, umstvenom nivou, metod se razlikuje od cilja (spoznaje) i instrumenata (saznajne sposobnosti i njihove operacije). Definicija *četvrtog pravila* je, dakle, u saglasnosti sa razlikom između ova dva instrumenta saznanja, kao što su intuicija i dedukcija.

Dekart poistovećuje intuiciju sa prirodnim prosvećenjem koje je prisutno u svakom od nas, dok je dedukcija „sve ono što se neophodno i izvesno zaključuje o nekim drugim poznatim stvarima. Dedukcija se razlikuje od intelektualne intuicije u tome što zahteva neku „vrstu kretanja ili poretka".

Za spoznaju stvari nude nam se dva puta, iskustvo i dedukcija. Iskustvo na koje se Dekart poziva je u konkretnom i globalnom smislu. Kad sam u toku saznavanja, ono što se odražava u mojoj svesti proizlazi u isto vreme iz spoljašnje stvarnosti i iz mog gledanja na to. Iskustva su često varljiva zbog svoje strukture. Pred objektivnim i subjektivnim komponentama ne mogu da odlučim šta pripada spoljnoj stvarnosti a šta potiče iz moje akcije.

Prosto izvođenje zaključaka iz opštih razmišljanja – dedukcija nikad ne vara. Valjanost dedukcije jamči njena jednostavnost. Pošto greške nikad ne mogu da proizađu iz dedukcija (ako je prihvatam, dedukcija je neizostavno dobra; ako ne znam za nju, tada i nema praktične vrednosti) već samo iz loše shvaćenog iskustva ili iz prebrzih sudova, upravo se aritmetika i geometrija nameću kao oblik naučnosti. S jedne strane, njihov predmet je čist i jednostavan, s druge, tu se samo izvode posledice prema racionalnoj dedukciji. Ako se ne radi samo o aritmetičkom i geometrijskom proučavanju, „oni koji traže pravi put istine" treba da se zanimaju predmetima gde mogu dostići izvesnost jednaku onoj u aritmetici i geometriji.

Dekart nastoji da izdvoji uslove aritmetičkih i geometrijskih mogućnosti i izlaže „univerzalnu matematiku", nauku poretka i mere. Ova nauka sadrži „prve rudimente ljudskog razuma" i čini da „izviru istine iz bilo kojeg problema". Ona je izvor svih drugih spoznaja.

Kartezijanski red zamenjuje klasifikaciju pojmova ili stvari u okviru Aristotelovih kategorija kojima se služila sholastika. Matematička inspiracija, zasnovana je na zavisnosti ideja u toku dedukcije.

Ideje su raspoređene prema linearnim nizovima. Uzmimo iz bilo kog niza dve ideje: od dve ideje, ona što prethodi drugoj nazvana je apsolutnom ili jednostavnom, druga je označena kao relativna ili složena. Otud je pojam apsolutnog i sam relativan. Od apsolutno prostog postoje samo *proste prirode*, tj. ideje koje ne zavise ni od koje druge, premda sve druge proizlaze iz njih. Pojam apsolutnog ovde ne sadrži nikakvu metafizičku aluziju ali treba da se shvati u perspektivi neke vrste „genealogije saznanja" gde saznanje-majka postoji pored saznanja-ćerke.

Kartezijanska kritika još uvek se razvija samo na naučnom nivou: jedinstvo nauka je zasnovano na identitetu ljud-

skog duha. Univerzalna matematika nije podređena redukciji materije na puki homogen kvantitet i ne zasniva se na monističkoj ontologiji. Valjanost nauke postvalja neraskidive veze između života i misli.

Cogito ergo sum (Mislim, dakle postojim) se javlja kao vrhunski stav čovekovog poimanja samog sebe i svog postojanja: ova izvesnost se ograničava na samu sebe, ali u toj izvesnosti o sopstvenom ja je i ideja o postojanju savršenog bića ili Boga. Dekartovsku teologiju ne treba posmatrati kao cilj po sebi, Bog je uveden samo zato da bi se proširila izvesnost misli i postojanja spoljašnjeg sveta. Bog je Dobro i mi možemo biti sigurni da se ne varamo kad nešto tvrdimo na osnovu jasnog i sigurnog uvida. Tako matematičar može biti siguran u zaključke koje je doneo samo ako je vodio računa da mu predstava o svakom beočugu misli bude jasna. Jedina razgovetna predstava o spoljašnjem svetu jeste predstava o *protegnutosti* ili *prostornosti*, predstava koja je predmet geometrije. Dekartov stav da su *prostornost i materija identični* predstavlja osnovu njegove fizike.

Dekartovi savremenici iz kartezijanstva su prihvatili učenje po kome su strasti, naročito ljubav, loše samo onda kad izmaknu kontroli razuma, na čemu se temelji uverenje o čovekovoj slobodi u odnosu na strasti. Kartezijanska logika je još dublje obeležila francusku misao, ističući potrebu za jasnoćom i jedinstvom, strogošću i merom.

Dekart kao matematičar

Dekart je osnivač analitičke geometrije: u svom, veoma originalnom delu *Geometrija* daje najpre geometrijsko značenje za četiri elementarne aritmetičke operacije i vađenje kvadratnog korena. Ustanovljuje da je euklidska geometrija zasnovana na aritmetičkoj strukturi, na strukturi realnih brojeva. Njegov jezik zaista nema one preciznosti koju mi danas koristimo, ali je on, malo-pomalo doprineo stvaranju oblasti koja će se oko godine 1800. nazvati *analitičkom geometrijom.*

Pomoću svojih novih metoda mogao je da razmotri jedan problem Papusa Aleksandrijsiog (III v.) koji mu je predložio matematičar i orijentalista Golijus (Jacobus Golius ili Gool, 1596 – 1667): „Neka su date dve grupe po n pravih, naći mesto takvih tačaka u ravni da je proizvod njihovih rastojanja od pravih prve grupe u datom odnosu sa proizvodom njihovih rastojanja od pravih druge grupe". Ako ima ukupno četiri prave, mesto je konusni presek. Za više od četiri prave stare metode bile su nemoćne. Dekart rešava problem algebarskim slovnim računom, gde usvaja najbolje oznake svog vremena, usavršava ih i sistematizuje. Ovaj način pisanja Dekart je uspeo da nametne naučnom svetu i on se u suštini i danas koristi.

S druge strane, Dekart pozajmljuje od Apolonija iz Perge* (kraj III i početak II v. pre n. e.) reper referencije koji obrazuju početna tačka, osa apscisa koja izlazi iz ove tačke i jedan stalni pravac za ordinate. Dve koordinatne ose, nazvane „kartezijanske", potiču iz ovog postupka. Papusov problem dovodi tako da se traženo mesto izrazi algebarskom relacijom između koordinata svake tačke, $P(x, y)=0$, gde je P polinom.

Dekart je odlučio da nazove geometrijskom krivom (sada algebarska kriva) svaku krivu koja u odnosu na kartezijanski reper daje mesto jednačini ovakvog tipa. On inače izjednačava „geometrijske" krive sa onima što se mogu povući pomoću „šestara" sastavljenog od dva vezana štapića. Tačnost ove hipoteze ustanovio je tek 1876. engleski matematičar Kemp (Alfred Bray Kempe, 1849 – 1922).

Samo „geometrijske" krive Dekart je primio u svoju geometriju. Ostale krive nazvane su mehaničke, a od Lajbnica transcendentne. U ovu vrstu Dekart svrstava Arhimedovu (287 – 212. pre n. e.) *spiralu*, Dinostratovu (IV v. pre n. e.) *kvadratrisu*, *logaritamsku krivu* koju je, kao jedan od prvih shvatio oko 1618, *logaritamsku spiralu* i *cikloidu* Robervala (Gilles Personier de Roberval, 1602 – 1675).

On postavlja tangente na geometrijske krive dosta naučnom metodom za koju se inspirisao optičkim problemima ali koju je uskoro zamenio Dekartov takmac Ferma*. U svojoj prepisci Dekart daje konstrukciju tangentne na cikloidi korišćenjem trenutnog centra rotacije, što je jedno od njegovih otkrića.

Dekartova *Geometrija* sadrži jednu valjanu teoriju rešenja algebarskih jednačina, gde postavlja sledeći princip: „Broj korena jednak je stepenu jednačine". Neki od ovih korena mogu biti „imaginarni". Među realnim, neki su lažni (negativni). Broj pozitivnih korena jednak je broju varijacija znakova koeficijenata. Knjiga se završava grafičkom konstrukcijom korena nekih jednačina pomoću preseka krivih. Ovo je jedino Dekartovo delo posvećeno čistoj matematici. Drugi pirlozi u ovom domenu nalaze se u njegovoj prepisci. U teoriji brojeva inferioran je u odnosu na Fermau ali daje dokaze velike umešnosti. U analizi zna koliko i njegovi napredni savremenici, da integriše monome i nalazi kvadraturu raspona cikloide, nezavisno od Robervala i Ferma. Dao je rešenje problema (koji je postavio njegov prijatelj): „Naći krivu kad se zna izvesna osobina tangenata". Ovaj problem spada u integralni račun i vodi ka logaritamskoj krivoj.

Dokazi Dekartovog predznanja sadržani su i u sledećoj njegovoj tvrdnji: „Izvesne veličine su obuhvaćene u jednačinama i izražavaju se nekim znacima; jednačina koja ih sadrži jedan je način da ih izrazi. Ali, ima beskonačno mnogo drugih koje ne mogu biti obuhvaćene u jednačinama i ima ih koje ne mogu biti izražene (radikalima) izvan jednačine". On razlikuje

i algebarske brojeve od transcendentnih i uviđa nemogućnost rešenja radikalima većeg dela algebarskih jednačina.

Kao matematičar, Dekart je za života uticao samo na holandske matematičare ali je njegov uticaj kasnije bio osetan kod Lajbnica* i Njutna*.

DEZARG, v. Geometrija

DINOSTRAT, v. Analiza

DIOFANT, v. Aritmetika

DIOKL, v. Geometrija

DIONISODOROS, v. Geometrija

DIPEN, v. Geomtrija

DIRIHLE, v. Aritmetika

ERBRAN, v. Matematička logika

ERMIT ŠARL (Charles Hermite)

Francuski matematičar (1822 – 1901).
Još za vreme školovanja, odlučio je da piše Jakobiju*, tada velikom stručnjaku za eliptične funkcije. U svom prvom pismu, Ermit proširuje na Abelove funkcije teoreme o podeli argumenata eliptičkih funkcija koje su ustanovili Abel* i Jakobi. Odlazak sa Politehničke škole omeo je njegova teorijska istraživanja. U drugom pismu Jakobiju (1844), on svu teoriju eliptičkih funkcija pripisuje samo jednoj transcendenti, koju inače dugujemo samom Jakobiju. Njihova korespondencija tri godine kasnije proširila se na kvadratične oblike teorije brojeva. Godine 1848. Ermit se vraća u školu kao predavač analize; 1853. uvodi neprekidnu promenljivu u teoriji brojeva i za potrebe te teorije otkriva tzv. *ermitske oblike* koji će se posle 1925. pokazati neophodnim za razvoj kvantne mehanike; sa Englezima Kelijem (Arthur Cayley, 1821 – 1895) i Silvesterom

(James Joseph Sylvester, 1814 – 1897) ustanovljuje algebarsku teoriju invarijanata.

Od 1848. do 1850. privremeno drži nastavu u Kolež-de-Fransu kad *in abstracto* definiše eliptičke funkcije kao meromorfne funkcije sa dvostrukim periodom, koristeći za njihovo proučavanje Košijev* integral. Od 1862. do 1867. vanredni je profesor na Visokoj školi, od 1869. predaje analizu na Politehničkoj školi i višu algebru na Sorboni. Njegova predavanja koja je skoro trideset godina držao na Sorboni bila su čuvena i u Francuskoj i u inostranstvu.

Njegovi radovi se odnose na najapstraktnije delove matematike: teoriju brojeva, posebno na proučavanje kvadratičnih funkcija, na eliptičke funkcije (za koje pokazuje uske veze sa višom aritmetikom), modularne funkcije, Abelove i algebarske funkcije. Modularne funkcije su prvi primer automorfnih funkcija kojima će se pročuti Poenkare*. Ermitov dokaz transcendentnosti broja *e*, osnove Neperovih logaritama, najviše je iznenadio matematičku javnost.

EUKLID

Antički grčki matematičar iz III stoleća pre n. e.

Prema tradiciji, Euklid je predavao u Aleksandriji za vlade Ptolemeja I, ali ništa pouzdano o njegovom životu nije poznato. Moglo bi se postaviti pitanje da li se iza njegovog imena ne krije određena matematička škola. Njegovo glavno delo predstavlja kodeks grčke matematike koji će najpre koristiti Apolonije iz Perge (oko 262. pre n. e. – oko 180. pre n. e.) i Arhimed*. *Elementi* su podeljeni u trinaest knjiga; četiri prve posvećene su geometriji u ravni i bave se proučavanjem poligonalnih ili kružnih figura. Tu je najpre *definicija* tačke, „ono što nema delova"; zatim linije – „dužina bez širine"; površi – „ima samo dužinu i širinu"; prava linija je „jednako postavljena između svojih tačaka" i ravan je „jednako postavljena između svojih pravih".

Posle ovih definicija koje danas deluju kao nepotpune, tu su i pitanja ili *postulati* od kojih je najčuveniji *Euklidov postulat*: *ako jedna prava koja seče druge dve gradi unutrašnje uglove sa iste strane manje nego dva prava, ove prave, produžene u beskonačnost, susrešće se na onoj strani gde su uglovi manji od ugla dvaju pravih.* Posle postulata slede *zajednički pojmovi* i aksiome, takvi kao što je: *veličine jednake jednoj istoj veličini međusobno su jednake* i *celina je veća od dela.*

Prva knjiga, u kojoj su nejednakosti između elemenata jednog trougla, tri slučaja jednakosti, površina paralelograma i

trougla, završava se tzv. *Pitagorinom teoremom* i njenom recipročnom teoremom. Prvi stav koji sadrži odnosi se na konstrukciju ravnostranog trougla.

Druga knjiga proučava površinu pravougaonika i ustanovljuje da: *kvadrat strane jednog trougla predstavlja zbir kvadrata druge dve uvećan ili umanjen dvostrukim pravougaonikom konstruisanim nad jednom stranom i ortogonalnom projekcijom druge nad ovom stranom.*

Treća knjiga proučava krug i moć jedne tačke u odnosu na krug; četvrta knjiga je posvećena pravilnim poligonima: ravnostranom trouglu, kvadratu, petougaoniku, šestougaoniku, osmougaoniku i desetougaoniku; peta knjiga *Elemenata* sadrži sve prve pojmove analize; šesta knjiga raspravlja o sličnosti figura i daje rešenje jednačina drugog stepena na geometrijski način; sedma, osma i deveta knjiga proučavaju teoriju brojeva a deseta knjiga „iracionalne veličine". Sledeće knjige se odnose na geometriju u prostoru. Dvanaesta knjiga (koju je sastavio Eudoks, 406 – 355. pre n. e.) bavi se zapreminom piramide, konusa, cilindra, sfere. Poslednja trinaesta knjiga proučava pet pravilnih konveksnih poliedara.

Ovim knjigama kasnije se često dodaju četrnaesta knjiga (njen pisac je Hipsikle, II v. pre n. e.) i petnaesta, vizantijska knjiga i obe se odnose na pravilne poliedre.

Euklidovo delo obuhvata i raspravu geometrije u ravni pod nazivom *Data*, izloženu više analitički no što je to učinjeno u *Elementima*. Ostala je i jedna arapska verzija o *Podeli figura* a Papus Aleksandrijski (III v.) daje analizu *Porizama*, dela gde se nalazi više složenih zadataka iz projektivne geometrije. Papus naznačuje takođe i *Mesta na površima* i četiri knjige o konusnim presecima.

Pored dela koja se odnose na apstraktnu matematiku, sačuvano je astronomsko delo *Fenomeni*, zatim *Optika* i jedna rasprava o muzici, *Deoba kanona*. Pod Euklidovim imenom do nas su stigli apokrifi, tzv. *Katoptrika*.

Videti: Algebra; Analiza; Aritmetika.

FERMA PJER (Pierre de Fermat)

Francuski matematičar (1601 – 1665).

U mladosti je stekao značajno jezičko i književno obrazovanje, znao je latinski, grčki, italijanski, španski. Oko 1629. posećuje naučne krugove u Bordou, ali matematičku nadarenost, pre svega u domenu infinitezimalnog računa i teorije brojeva pokazuje permanentno. Za života ipak nije objavio ni jedno delo:

svoja shvatanja i otkrića izložio je u korespondenciji sa Karkavijem (Pierre de Carcavi, oko 1603–1684) i Mersenom (o. Marin Mersenne, 1588–1648). Nikad nije dolazio u Pariz a njegovi odnosi sa naučnim krugovima održavali su se putem pisama, njegovi rukopisi kružili su od ruke do ruke. Posle očeve smrti, stariji sin Samijel (Samuel de Fermat, 1634–1697) objavio je 1670. delo *Diofant*, obogaćeno čuvenim beleškama o otkrićima u teoriji brojeva a 1679. celokupno delo Pjera Ferma, *Varia Opera*.

Vijetov* učenik, Ferma je uvek koristio algebarske oznake svog učitelja i nikad nije prihvatio moderno pisanje koje je uveo 1637. Dekart* u svojoj *Geometriji*. Godinu dana pre objavljivanja Dekartovog dela, dakle 1636, Pjer Ferma je napisao studiju o „mestima u ravni i prostoru" (prava, kružnica, konusni preseci) koja takođe daje osnove analitičke geometrije, mada prevashodstvo ostaje Dekartu. Polemišući oko 1600. s kartezijancima o zakonima prelamanja svetlosti, prvi upotrebljava račun varijacija po kome će se proslaviti Ojler* i Lagranž*. U prepisci s Paskalom i zajedno s njim stvara postepeno izvesne delove računa verovatnoće. Njihovi postupci su različiti, ali, koristeći kombinatornu analizu i načelo složenih verovatnoća, Ferma je superiorniji od mladog Paskala. Najzad, važio je za arbitra teorije kojom se bavio oko 1640: radi se o teoriji magičnih kvadrata ili kvadratnih ploča čija svaka pregrada sadrži različit broj, tako da je zbir brojeva jedne kolone svake od dijagonala međusobno jednak. Moda magičnih kvadrata došla je u matematičke krugove iz astrologije, naročito posredstvom dela *Prijatni i zabavni problemi* (*Problèmes plaisants et délectables*, 1612. i 1624) Bašea (Claude Gaspard Bachet de Méziriac, 1581⇒1638), *izdavača Diofanta*.

Videti: Analiza; Aritmetika; Geometrija.

FIBONAČI, v. Algebra

FREGE, v. Matematička logika

GALOA EVARIST (Evariste Galois)

Francuski matematičar (1811–1832).
Njegova matematička nadarenost otkriva se još u srednjoj školi kad je 1823, stupio u kraljevski kolež „Lui-le-Gran", u kome će ostati do 1829. Proučavao je Le Žandrovu (Adrien Marie Le Gendre, 1752–1833) *Geometriju* kao i Lagranžovo* delo. Na opštem konkursu 1827. odnosi prvu nagradu za

matematiku i upisuje se u drugu godinu matematičkog pripremnog stepena (1827–1828); prijavio se za Politehničku školu, ali nije bio primljen.

Uz podršku Košija* krajem 1829. Galoa šalje Akademiji nauka svoje prve radove o algebarskim jednačinama prvog stepena. U julu 1829. doživljava tragediju: njegov otac je izvršio samoubistvo a kratko vreme zatim Galoa po drugi put nije bio primljen na konkursu za upis u Politehničku školu. Oktobra 1829. polazi u pripremnu školu (tako se za vlade Šarla X Burbonskog, brata Luja XVIII zvala Visoka normalna škola). Kao maturant, februara 1830. šalje Akademiji nauka značajan rad o uslovima rešljivosti jednačine pomoću radikala, kojim je računao na veliku matematičku nagradu. Ovaj rad je pregledao Furije (Joseph Fourier, 1768–1830) i ubrzo potom umro, a sam rad je bio izgubljen: nagrada je pripala Jakobiju* i posthumno Abelu*. Kad je u julu 1830. izbila revolucija, Koši, jedan od retkih članova akademije koji su bili u stanju da shvate Galoaa, napustio je Francusku. Sam Galoa se pridružio studentima-republikancima i stupio u artiljerijske jedinice nacionalne garde. Budući u političkoj opoziciji sa direktorom, iz Visoke normalne škole isključen je januara 1831. U knjižari Kajo (Caillot), u blizini Sorbone otvorio je tečaj iz matematike i u isto vreme dostavio Institutu akademije rad *O uslovima rešljivosti jednačina pomoću radikala*. Međutim, s obzirom na stručno mišljenje Poasona (Denis Poisson), akademija nije ni ovaj rad prihvatila. U međuvremenu, 10. maja je dospeo u zatvor pošto je na jednom prijemu sa pištoljem nazdravio Luju-Filipu. Iz zatvora je izašao 15. juna ali je 14. jula ponovo uhapšen kao vođa jedne manje grupe studenata republikanaca, i osuđen na šest meseci zatvora. Od januara 1832, godine kad je kolera harala Parizom, nalazio se u pritvoru u jednoj bolnici, gde je ponovo počeo da radi.

Maja 1832. Galoa je oslobođen ali se utom rastaje od svoje ljubavi i prima izazov na dvoboj. Rešava i piše 23. maja svoj matematički testament *Pismo Ogistu Ševaljeu* (*Lettre à Auguste Chevalier*). Oko šest sati uveče 30. maja Galoa je pronađen smrtno ranjen i napušten od svojih sekundanata. Sledećeg dana umro je u bolnici.

Septembra 1832. *Pismo Ogistu Ševaljeu* štampano je u „Enciklopedijskoj reviji". Na sednici od 4. jula 1843. Ž. Liuvij (Joseph Liouville, 1809–1882) izjavio je u Akademiji nauka: „U rukopisima Evarista Galoaa našao sam koliko tačno toliko i duboko rešenje jednog pravog problema: ako je data jedna nesvodljiva jednačina prvog stepena, odrediti da li je ona rešljiva ili nije rešljiva pomoću radikala."

GAUS, v. Zlatni trolist u razvitku matematike

GEDEL, v. Matematička logika

GENCEN, v. Matematička logika

GRASMAN, v. Algebra

HAMILTON, v. Algebra

HILBERT DAVID (David Hilbert)

Nemački matematičar i logičar (1862 – 1943).
Najveći deo školovanja proveo je u rodnom Kenigsbergu, zatim u Hajdelbergu, Lajpcigu i Parizu. Za vreme školovanja sklopio je čvrsto prijateljstvo sa Minkovskim (Hermann Minkowski, 1864 – 1909), Ajnštajnovim (Albert Einstein, 1879 – 1955) profesorom matematike. Pošto je 1885. odbranio uvodnu disertaciju, imenovan je za docenta u Kenigsbergu (1886 – 1892) a zatim i za profesora (1893 – 1895). Svojim radom o teoriji invarijanata skrenuo je pažnju naučnog sveta 1888. Obimna literatura posvećena ovoj temi odlikuje se mnoštvom računa sa nekim opštim idejama, dok je opšte teoreme napisao na nekoliko stranica, skoro bez cifara. Pretrpevši kritiku Gordana (Paul Gordan, 1837 – 1912), „kralja invarijanata" koji je rekao: „To više nije matematika, to je teologija", Hilbert skoro potpuno izbacuje ovu teoriju. Međutim, u isto vreme on postavlja osnove jedne nove grane algebre, *teoriju ideala polinoma* koja će početkom XX v. obnoviti staru algebarsku geometriju i postati jedan od stubova moderne algebre koju su ustanovili Neter (Emmi Noether, 1882 – 1935) i Arten (Emil Artin, 1898 – 1962). Pozvan 1895. na univerzitet u Getingenu, Hilbert će tu ostati do kraja svoje karijere, učinivši ovaj univerzitet ponovo jednim od svetskih matematičkih središta. Odmah započinje svoja glavna istraživanja u teoriji tela algebarskih brojeva, čiji je osnivač bio Gaus*. Na osnovu prikupljenih svih stečenih rezultata, Hilbert formuliše opšte zakone čija se tačnost, međutim, može proveravati samo na posebnim slučajevima. Samo četvrt stoleća kasnije, zakoni koje je bio najavio utvrđeni su u potpunosti. U analitičkoj teoriji brojeva dao je 1909. opšte rešenje Varingovog (Waring) problema: *odrediti broj predstavljanja jednog broja kao zbir od p stepena k pozitivnih brojeva*. Pošto se ogledao kao veliki algebrista i aritmetičar, Hilbert se početkom XX v. okreće analizi zanimajući se za račun varijacija i otvara sasvim novi put, nazvan tada *direktnom metodom*. Primenjujući ovu metodu na čuven Dirihleov* problem (*naći harmonijsku funkciju u domenu polazeći od njenih vrednosti na granici*), prvi uspeva da strogo naučno postavi metodu koju je opisao Riman*. U svoja istraživanja teorije integralnih jednačina, gde sledi Volteru*, Poenkarea* i Fredholma (Ivan Fredholm, 1866 – 1927) prvi uvodi prostor od beskonačno mnogo dimenzija koji je precizno nazvan *Hilbertov prostor*.

Veliki ugled u svetu, naročito među pedagozima, Hilbertu je donelo delo *Osnovi geometrije* (1899). Proizašlo iz celovitog pravca aksiomatizacije geometrije, koju sažima i objašnjava ovo delo, prvi put izlaže staru euklidsku geometriju na potpuno apstraktan aksiomatizovan način. Nezavisnost različitih aksioma čvrsto je postavljena a njihova neprotivrečnost svedena na neprotivrečnost aritmetičkih aksioma. U ovom delu Hilbert se otkriva kao vođa aksiomatske škole kojoj se u filozofiji matematike suprotstavljaju „intuitivci" i „intuicionisti". Na kongresu u Parizu 1900. postavlja ili podseća na dvadeset tri osnovna problema, među kojima je i problem o neprotivrečnosti aksioma aritmetike, tako da skoro polovina ostaje još otvorena. Hilbert je, inače, dosledno branio Kantorove* teorije.

Videti: Algebra; Aritmetika; Geometrija; Matematička logika.

JAKOBI KARL GUSTAV JAKOV (Jacobi Carl Gustav Jakob)

Nemački matematičar (1804 – 1851).
Nepokoran da bi se priklonio tradicionalnoj nastavi, on neposredno proučava dela velikih matematičara, posebno Ojlera* i Lagranža*. Počev od 1821. posvećuje se matematici na univerzitetu u Berlinu gde 1825. podržava jedan stav koji se odnosi na neke Lagranžove formule. Nadahnut čitanjem Le Žandrovog (Le Gendre Adrien-Marie, 1752 – 1833) dela, *Vežbe iz integralnog računa* (1816/1817) piše dva pisma o svojim otkrićima koja se odnose na eliptičke funkcije astronomu Šumaheru (Heinrich Christian Schumacher, 1780 – 1850), koja je on objavio u svom dnevniku „Astronomske vesti" (*Astronomische Nachrichten*). U isto vreme Jakobi započinje naučnu prepisku sa Ležandrom koja se odnosi pre svega na eliptičke funkcije i koja će trajati do Ležandrove smrti. Kao profesor univerziteta u Kenigsbergu, Jakobi je u vezi sa astronomom Beselom (Friedrich Bessel, 1784 – 1846). Objavljivanje Abelovog* dela *Istraživanja eliptičnih funkcija* podstaklo je Jakobija da ubrza rad pa je 1829. objavio posebnu raspravu *Fundamenta nova*

theoriae functionum ellipticarum (*Nove osnove teorije eliptičkih funkcija*) koja daje njegove nazive i oznake novih funkcija. Ovo delo sadrži samo elementarni deo njegovih istraživanja o eliptičkim funkcijama i više rasprava. Nadahnut velikom Abelovom teoremom, čiji je pravi značaj prvi uvideo, Jakobi uvodi funkcije više promenljivih koje će se od tada zvati *Abelovim*. Veći deo njegovih radova posvećen je transformaciji integrala, teoriji običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Pored ovih istraživanja, poznat je njegov doprinos računu varijacija, dinamici čvrstih tela, nebeskoj mehanici: problem tri tela, perturbacija planeta.

U algebri su mu poznati radovi o kvadratičnim oblicima kao i jedno izlaganje-uvod u raspravu o funkcionalnim ili *Jakobijevim* determinantama, koje je dugo ostalo klasično. Značajni su i radovi o krivama, algebarskim površima, infinitezimalnoj geometriji i teoriji brojeva.

KANTOR GEORG (Georg Cantor)

Nemački matematičar, ruskog porekla (1845–1918).

Od 1856. nastanjen u Nemačkoj, Kantor pohađa različite škole u Visbadenu, Frankfurtu na Majni, Darmštatu. Posle kraće inženjerske karijere u Cirihu, okreće se nauci i odlazi 1863. na univerzitet u Berlin gde 1867. brani doktorsku disertaciju, posvećenu neodređenim jednačinama drugog stepena što ne daje nikakav nagoveštaj docnijeg pravca njegovih radova. Posle teze o transformacijama trostrukih kvadratičnih formi 1869. postao je docent u Haleu a 1872. profesor. U ovo vreme počinje da proučava trigonometrijske redove, putuje u Švajcarsku gde upoznaje Dedekinda*, s kojim sklapa prijateljstvo i održava značajnu naučnu korespondenciju u kojoj izlaže osnovne ideje iz teorije skupova. Originalna dela iz ove oblasti počinje da štampa 1873, zatim 1878–1883. i 1895–1897. Otkriće transfinitnih brojeva objavio je 1879. Narednih godina dolazi do neočekivanih otkrića koja su ponekad iznenadila i samog autora: pojam moći apstraktnih skupova, razlika između moći prebrojivog skupa i moći kontinuuma, početak topologije, aritmetika transfinitnih brojeva, itd. Dok će Hilbert* izražavati puno priznanje Kantoru, Kantorovi profesori Vajerštras* i Kroneker* biće veoma neprijateljski raspoloženi prema njemu pa će Kantor imati teškoća sa objavljivanjem svojih dela, osim u glasilu Mitag-Leflera (Magnus Gösta Mittag-Leffler, 1846–1927) *Acta mathematica* 1882.

Kantor je priznanja dobijao posrednim putem i nadasve polako i postepeno: u dvema raspravama Mitag-Lefler koristi prvi put Kantorove pojmove u pozitivnim istraživanjima; na kongresu matematičara u Cirihu 1897, Adamar*, Hurvic (Adolf Hurvicz, 1859–1919) i Hilbert odaju duboko poštovanje velikom novatoru. Najzad, Borelovo* *Učenje o teoriji funkcija* (1898) predstavlja delimično izlaganje njegovih ideja koje će od tada ostati u klasičnoj upotrebi.

KARNAP, v. Matematička logika

KASTELNUOVO, v. Geometrija

KAVALIJERI, v. Analiza

KELI, v. Algebra

KLIFORD, v. Geometrija

KOLMOGOROV ANDREJ NIKOLAJEVIČ

Sovjetski matematičar (rođen 1903).
Matematičke studije je završio 1925. na moskovskom univerzitetu, gde su na njega umnogom uticali V. V. Stepanov, P. S. Aleksandrov, N. N. Luzin i A. J. Hinčin. Od 1933–1939. bio je direktor Instituta matematike i mehanike, doktorirao je iz fizičko-matematičkih nauka 1935, a član Akademije nauka SSSR-a postao 1939, član je i više inostranih akademija i naučnih društava. Bio je dugogodišnji rukovodilac katedre teorije verovatnoće i laboratorije statističkih metoda, a neko vreme i katedre matematičke logike. Objavio je više od dvesta knjiga, tekstova i beležaka, učestvovao je u pitanjima matematičkog srednjeg i višeg obrazovanja. Zasnovao je veliku školu u teoriji funkcija i teoriji verovatnoće, veliki broj njegovih učenika danas su istaknuti sovjetski matematičari.

Kolmogorov je intenzivno radio u raznim oblastima matematike. Njegove prve publikacije bile su posvećene problemima deskriptivne i metričke teorije funkcija. U teoriji funkcija realne promenljive poznati su njegovi radovi koji se odnose na konvergenciju trigonometrijskih redova, teoriju mere, uopštenje pojma integrala i opštu teoriju operacija na skupovima. U tom pogledu ističe se njegovo delo *Uvod u teoriju funkcija realne promenljive* (*Vvedenie v teoriu funkcii deistvitelnogo peremenogo*, 1938). Poznati su njegovi radovi koji se tiču teorije približnih vrednosti funkcija, kao i radovi relevantni za funkcionalnu analizu, izloženi u delu *Elementi teorije funkcija i funkcionalne analize* (*Elementi teorii funkcij i funkcionalnogo analiz*, 1972). Značajan je njegov rad u topologiji, gde je zasnovao teoriju tzv. „gornjih homologija", ili „∇-homologija", a od važnosti su i njegovi radovi u teoriji diferencijalnih jednačina.

Osnovno značenje imaju radovi Kolmogorova u oblasti teorije verovatnoće, u kojima je sa A. J. Hinčinom, počeo da primenjuje metode teorije funkcija realne promenljive (1925) što mu je omogućilo da reši niz teških problema i da konstruiše aksiomatsko zasnivanje teorije verovatnoće. U tom smislu posebno je važno njegovo delo *Osnovni pojmovi računa verovatnoće* (*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1933), gde polazi od prostora Ω kao skupa elementarnih događaja. U tom prostoru uočava sistem F podskupova skupa Ω; elementi sistema F, tj. podskupovi skupa Ω su slučajni događaji (skupovi elementarnih događaja). Ovome slede pet aksioma: 1. Sistem F je skupovno telo, tj. ako $A \in F$ i $B \in F$, onda takođe $A \cup B \in F$, $A \cap B \in F$ i $\overline{A} \in F$, $\overline{B} \in F$; 2. Sistem F sadrži prostor Ω, tj. $\Omega \subseteq F$; 3. Svakom slučajnom događaju $A \in F$ pridružen je nenegativan broj $P(A)$ koji se zove verovatnoća događaja A; 4. $P(\Omega)=1$; 5. Ako $A_i \in F$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ i $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j;\ i, j=1, 2, 3, \ldots, n)$, onda važi $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. U primerima i teoriji posmatraju se situacije kad se javlja beskonačno mnogo slučajnih događaja A_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, *ad inf.*), pa se uz navedene aksiome formuliše kao neophodna za teoriju verovatnoće i šesta aksioma (generalisana aksioma sabiranja verovatnoća): 6. Ako $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j;\ i, j=1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, *ad inf*), onda je $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Prostor Ω elementarnih događaja, skup F slučajnih događaja i funkcija P, definisana na skupu F, obrazuju prostor verovatnoće $\{\Omega, F, P\}$. To su Kolmogorovljeve aksiome verovatnoće.

Početkom tridesetih godina ovog stoleća u njegovim radovima, koji se odnose na teoriju verovatnoće, preovladavaju kao bitne analitičke metode. Posebno to važi u zasnivanju markovskih procesa sa neprekidnim vremenom. U kasnijim radovima razvio je teoriju stacionarnih slučajnih procesa, a to je dovelo do niza radova iskorišćenih za automatsku regulaciju, kao i za zasnivanje, sa učenicima, teorije „granatih" slučajnih procesa. Dao je važan prilog teoriji informacije, a pripadaju mu istraživanja u teoriji streljanja, u statističkim metodama kontrole masovne produkcije i u primenama statističkih metoda u biologiji i matematičkoj lingvistici. Važni su mu radovi u statističkoj teoriji turbulencije, tako da je on i matematički stvaralac u

oblasti mehanike. Podvlačimo njegov rad *Granične raspodele za sume nezavisnih slučajnih veličina* (*Predelnie raspredelenie dlja sum nezavisnih slučajnih veličin*, 1949). Poznati su, npr. Kolmogorovljevi zakoni velikih brojeva i Kolmogorovljev test za statističke hipoteze.

Bavio se intenzivno osnovama matematičke analize kao i istraživanjima matematičke logike. Učestvovao je u diskusijama dve osnovno suprotne metodološke škole: one formalno-logičke Hilberta* i intuicionističke Luizena Brauera (1881 – 1966) i Hermana Vejla* (1885 – 1955). Tu je postigao veoma značajan rezultat dokazavši 1925. da svi poznati stavovi klasične formalne logike pri određenoj interpretaciji prelaze u stavove intuicionističke logike. Svoju sklonost ka pitanjima filozofije matematike, Kolmogorov je kao matematičar stalno sačuvao.

Kolmagorov ima oko 20 istorijsko-matematičkih radova čije je idejno, odnosno filozofsko značenje veoma veliko, pa je počasni član Internacionalne Akademije za istoriju nauka u Parizu. Najznačajnija osobenost pomenutih radova ispoljava se u jedinstvu istorijskog i metodološkog, sa namerom da se uoče i podvuku glavne tendencije razvitka matematike poslednjih stoleća, kao i sadržaj savremene matematike.

Značajna su mu dela: *Savremena matematika* (*Sovremenaja matematika*, 1936) i *Matematika* (1954, 1974), u kojima se razmatra prelaz osnovnih pojmova matematike sa nižeg stepena opštosti i apstrakcije na viši stepen opštosti i apstrakcije. Upravo taj prelaz ostvaruje novu etapu u razvitku matematike čime se i rukovodi Kolmogorov, smatrajući da „apstraktna" matematika dozvoljava da se realnost bolje obuhvati, sa manje stepena shematizacije od „klasične" matematike.

Rad *Matematika* deli se u tri glave: odredba predmeta matematike, u vezi sa drugim naukama i tehnikom; istorija matematike do XIX stoleća; savremena matematika. Autor određuje matematiku kao nauku o kvantitativnim odnosima i prostornim formama realnog sveta, uzimajući kao bitno da se oni neprekidno šire zajedno sa pitanjima tehnike, prirodnih i drugih nauka koje se služe matematikom kao instrumentom istraživanja. Ukratko, Kolmogorov sagledava sve veću i veću ulogu matematike u naučnoj spoznaji sveta.

U drugoj glavi posmatra tri perioda razvitka matematike. Prvi period obuhvata rađanje matematike, odnosno aritmetičkih i geometrijskih znanja, kao i početaka algebre i trigonometrije; drugi period obuhvata razvitak matematike od VI i V v. pre n. e. do XVII v. gde se proučava razvitak matematike u antičkoj Grčkoj i prilike koje su omogućile visok stepen tog razvitka. Simbioza nauke i filozofije je odlika misaone odn. teorijske delatnosti grčkog naučnika i filozofa i kao takva bila je bitna komponenta opšte društvene prakse antičke Grčke. U klimi takve opšte društvene prakse, kojoj je na relaciji matematika – stvarnost osnovni ton davala simbioza filozofije i matematike, moguće je shvatiti onaj blistavi evolutivni put starogrčke matematike koji se kretao stazama veoma visoke apstrakcije, dostignute u mnogim pojedinačnim idejama i celokupnim delima starogrčkih matematičara i filozofa. Treći period obuhvata razvitak matematike tokom XVII i XVIII v., kao period zasnivanja matematike promenljivih veličina. Podvlače se tipične veze francuske matematičke škole sa velikim filozofskim kretanjima francuskih prosvetitelja i materijalista filozofa XVIII v.

Poslednji razdeo članka *Matematika* posvećen je periodu savremene matematike XIX i XX v. Raspravlja se pitanje širenja predmeta matematike, pa se u vezi s tim razmatraju složene veze matematike sa tehnikom i prirodnim naukama. Konstatuje se porast uloge i obima fundamentalnih istraživanja, nastalih unutrašnjim potrebama matematike, npr. teorije funkcija kompleksne promenljive, neeuklidske geometrije, teorije grupa i drugih oblasti. Ta istraživanja imaju plodotvorne primene i blagodareći tome dobijaju se novi podsticaji za razvitak. Uporedo sa tim mnoge discipline, kao npr., vektorska i tenzorska analiza, formiraju se u direktnoj zavisnosti od mehanike i fizike. Pod uticajem uzajamnih ideja, nastalih u različitim oblastima, npr. u mnogomernoj geometriji, savremenoj algebri, teoriji funkcija, rađa se funkcionalna analiza koja objedinjuje niz disciplina, ranije različitih po predmetu i metodi. Ističe se misao o spoznajnom i aktivnom proširenju kruga kvantitativnih odnosa i prostornih formi i o prestrojavanju čitavog matematičkog mišljenja, gde se posebno podvlači veliki značaj otkrića neeuklidske geometrije Lobačevskog. Pitanja zasnivanja matematike i uloge teorije skupova i matematičke logike u tom zasnivanju zauzimaju vrlo važno mesto u ovom razdelu. Izlaganja zahvataju razvitak matematike do sredine XX v. sa dostignućima ruskih i sovjetskih matematičara, npr. Čebiševa, Ljapunova, Markova, Bernštajna i drugih.

Kolmogorov je napisao i niz drugih vrlo značajnih članaka istorijsko-metodološkog, pa i filozofskog karaktera: *Lobačevski i matematičko mišljenje devetnaestog stoleća* (*Lobačevskí i matematičeskoe misljenije devjatnadcatogo veka*, 1943); *Njutn i savremeno matematičko mišljenje* (*Njuton i sovremenoe matematičeskoe misljenije*, 1946); *Matematički znaci* (*Znaki matematičeskie*, 1952); *O radovima S. N. Bernštajna u teoriji verovatnoće* (*O rabotah S. N. Bernštejna po teorii verojatnosti*, 1960); *O radovima N. V. Smirnova u matematičkoj statistici* (*O rabotah N. V. Smirnova po matematičeskoi statistike*, 1960). Redaktor je niza dela iz istorije matematike, među kojima i onih koja se odnose na Čebiševa (1948) i Lobačevskog (1951). Veliko je njegovo učešće u redigovanju izdanja Instituta istorije prirodnih nauka i tehnike. Jedan je od redaktora dveju knjiga *Matematika XIX stoleća* (*Matematika XIX stoleća*, 1978, 1981), kao i niza članaka koji se odnose na matematiku u

Velikoj sovjetskoj enciklopediji (npr. tekst o Davidu Hilbertu). Saradnik je časopisa „*Pitanja istorije prirodnih nauka i tehnike*" ("Voprosi istorii estestvoznania i tehniki").

Jedan od najvećih savremenih matematičara, značajan stvaralac u mnogim oblastima matematike, Kolmogorov je dao značajan prilog istoriji matematike. On je kao izrazito veliki matematičar duboko shvatio da je spoznaja geneze i razvitka matematičkih pojmova i teorija, od opštosti i apstrakcije nižeg stepena ka opštosti i apstrakciji višeg stepena, veoma važna za naučnu i nastavnu delatnost u oblasti matematičkih nauka. Njegov primer može najbolje poslužiti kako se matematičar stvaralac i pedagog mora odnositi prema istoriji, metodologiji i filozofiji matematike.

Videti: Verovatnoća.

KOŠI OGISTEN LUJ (Augustin Louis Cauchy)

Francuski matematičar (1789 – 1857).
Pošto je završio Politehničku školu, počev od 1811. ističe se radovima iz matematike, drži nastavu na Politehničkoj školi od 1815. i 1816. dobija veliku nagradu za matematiku. Do 1830. drži nastavu u Kolež-de-Fransu (na katedri matematičke fizike), zatim je profesor i na Fakultetu nauka. Odbijajući zakletvu novoj vladi, 1830. se dobrovoljno udaljuje u Italiju i Švajcarsku gde u Friburgu uzalud pokušava da osnuje novu akademiju i nov kolež. Sardinijski kralj obnavlja 1832. za Košija u Torinu katedru više fizike, koju je proslavio Avogadro (Amedeo Avogadro, 1776 – 1856). U Francusku se konačno vratio 1838, a 1848. preuzima katedru na Sorboni.

Kao matematičar Koši je bio izvanredno plodan, a njegovo delo, pored Gausovog, dominira polovinom XIX v. Još u mladosti naučno dokazuje stavove u geometriji koji se odnose na poliedarska tela. U teoriji brojeva, u isto vreme utvrđuje Fermaov stav o poligonskim brojevima. S druge strane, smatra se jednim od osnivača teorije konačnih grupa. Međutim, najznačajniji je njegov rad na infinitezimalnoj analizi. Formalna razmišljanja velikih autora XVIII v. Koši zamenjuje naučnim. On funkcije posmatra kao preslikavanja tela realnih brojeva ili tela kompleksnih na samog sebe. Pokazuje značaj pojmova kontinuiteta jedne funkcije ili konvergencije jednog reda, dajući *kriterijume konvergencije nazvane „D'Alamberovim i Košijevim kriterijumima"* i naročito *Košijevim nizovima*. Precizirao je pojam određenog integrala i zasnovao teoriju funkcija kompleksne promenljive pomoću *Košijevog integrala*.

KRAMER, v. Algebra

KREMONA, v. Geometrija

KRONEKER, v. Aritmetika

KUMER, v. Aritmetika

LAGRANŽ ŽOZEF LUJ (Joseph Louis Lagrange)

Francuski matematičar, mehaničar i astronom (1736–1813). U devetnaestoj godini je profesor vojne škole u Torinu, jedan je od osnivalaca torinske akademije, gde je 1759. objavio svoje prve radove: iz teorije rekurentnih nizova; iz teorije verovatnoće; iz teorije vibrirajuće žice; iz metoda računa varijacija i primena ove metode na razne probleme dinamike. Ojler* je visoko cenio Lagranžovu metodu varijacija i bitno je učinio da bude izabran za člana berlinske akademije nauka. I D'Alamber* se oduševio Lagranžovim računom varijacija. Tako je već u dvadesetpetoj godini Lagranž postao slavan zahvaljujući računu varijacija.

Ubrzo sledi Lagranžov uspeh u rešavanju problema libracije Meseca, a potom prilozi u tretiranju problema tri tela, koji je tada bio vrlo aktuelan u nebeskoj mehanici, kao i drugi prilozi u rešavanju problema nebeske mehanike. Oko 1766, tretirajući Fermaove teoreme, otkrio je princip potpunog rešenja jednačine drugog stepena sa dve nepoznate.

Dolazeći u Pariz, sretao je D'Alambera, Kleroa (Clairaut) i Kondorsea (Condorcet). Pošto je Ojler napustio dvor pruskog kralja i otišao ponovo u Petrograd, ostalo je prazno mesto predsednika Berlinske akademije, pa je na predlog D'Alambera i Ojlera, izabran Lagranž 1766, gde je ostao do 1787.

U to vreme objavio je niz rasprava u berlinskoj akademiji, u kojima se tretiraju: problemi integriranja parcijalnih diferencijalnih jednačina; problemi numeričkog rešavanja jednačina; metode diferencijalnog i integralnog računa; problemi rotacije ma kojeg tela, tj. ma kojeg oblika; problemi iz teorije brojeva i računa verovatnoće; razni problemi praktične astronomije i teorijske mehanike. Naročito su značajni njegovi prilozi koji se odnose na izračunavanja sukcesivnih promena koje se ostvaruju u dimenzijama i položajima planetarnih orbita.

U Berlinu je napisao svoje glavno delo, *Analitičku mehaniku* (*Mécanique analytique*, 1788), a želeo je da se objavi u Parizu. Posle smrti kralja Fridriha, Lagranž nije više hteo da ostane u Berlinu, Luj XVI odobrio je da Lagranž dođe u Pariz. Za vreme revolucije bio je imenovan za predsednika Komisije za nov sistem mera. Njegov položaj revolucijom nije bio ugrožen. Stvaranje Normalne i Politehničke škole pružilo je Lagranžu vrlo povoljne uslove za njegov naučni i nastavnički rad. Bio je profesor Politehničke škole, za vreme Napoleona bio je senator. Nosilac je mnogih odlikovanja. Sahranjen je u Panteonu. Nadgrobno slovo držao mu je Laplas. Ženio se dva puta, ali nije imao dece. Njegove poslednje reči bile su: „Završio sam tok svog života; postigao sam neku slavu u matematici. Nikoga nisam mrzeo, nikakvo zlo nisam napravio i potrebno je život dobro završiti".

Lagranž je ostavio brazde u gotovo svim granama matematike. Njegova dela obuhvataju dvanaest tomova, a svaki sadrži oko 700 strana.

Prvi tom sadrži: probleme maksimuma i minimuma funkcije više promenljivih; problem integracije jedne diferencijalne jednačine sa konačnim priraštajima; istraživanja o prirodi i prostiranju zvuka; metodu za određivanje maksimuma i minimuma integrala; primenu metode varijacionog računa u raznim problemima dinamike; različite probleme integralnog računa, kao i rešenje jednog aritmetičkog problema. Drugi tom sadrži dvadeset dve rasprave koje se odnose na integraciju nekih diferencijalnih jednačina, na metodu varijacija, na istraživanja o kretanju jednog tela privlačenog iz dva centra, na tautohrone krive, na prolaz Venere ispred Sunca, na rešavanje problema drugog stepena i na neke druge pojedinačne probleme, kao i na rešavanje numeričkih jednačina. Petnaest rasprava sadrži dvadeset dve rasprave koje se odnose na integraciju bleme mehanike i astronomije, kao i probleme iz aritmetike i teorije brojeva. Četvrti tom obuhvata šesnaest rasprava, čiji je problem istraživanja u nebeskoj mehanici i teorijskoj astronomiji, u teoriji brojeva, u teoriji diferencijalnih jednačina i u integralnom računu. Osamnaest rasprava u petom tomu posvećeno je nebeskoj mehanici i teorijskoj astronomiji, a zatim metodi interpolacije i problemima integrisanja diferencijalnih jednačina. Šesti tom sadrži dvanaest rasprava koje su većinom posvećene nebeskoj mehanici i teorijskoj astronomiji. Tu je obrađen i problem varijacije konstanata sa primenama u dinamici.

Neodređena Diofantova analiza, teorija brojeva, predavanja u Normalnoj školi, razna pitanja iz nebeske mehanike i teorijske astronomije, pitanja interpolacije, principijelna pitanja infinitezimalnog računa, metodološko-filozofskog karaktera, čine sadržaj dvadeset tri rasprave sedmog toma, dok osmi tom sadrži tretiranje rešenja numeričkih jednačina svih stepena, sa veoma značajnim primedbama iz teorije algebarskih jednačina.

Bio je nezadovoljan načinom definisanja osnovnih pojmova infinitezimalnog računa pa ih je pokušao izgraditi bez pomoći pojma beskonačno malih veličina. Polazio je od pretpostavke mogućnosti razvijanja date funkcije u red potencija, pa je pomoću koeficijenata tog razvitka definisao izvode različitog reda. To je ostvario u delima *Teorija analitičkih funkcija* (*Théorie des fonctions analytiques*, 1797) i *Predavanja iz računa sa funkcijama* (*Leçons sur le calcul des fonctions*, 1806). U sprovođenju zamišljenih ideja pokatkad je nedostajala naučna strogost, ali su se one ipak kasnije pokazale vrlo plodnima, posebno u teoriji funkcija jedne i više kompleksnih promenljivih u toku XIX i XX v. Povodom navedenih ideja, Lagranž veli: „Predmet ovog dela je da dâ teoriju funkcija, posmatranih kao primitivne i izvode, da reši ovom teorijom glavne probleme analize, geometrije i mehanike koji zavise od diferencijalnog računa i da tako njihovom rešenju da svu strogost dokaza starih". Deveti i deseti tom obuhvataju ove Lagranžove ideje.

Njegovo je fundamentalno delo *analitička mehanika*, koja je sadržana u jedanaestom i dvanaestom tomu. Za program toga dela, Lagranž kaže: „Svesti teoriju mehanike i veštinu rešavanja njenih problema na opšte formule, čije prosto razvijanje daje sve jednačine neophodne za rešenje svakog problema. Ujediniti i prezentirati pod isto stanovište različite principe dosad nađene, da bi se olakšalo rešenje pitanja mehanike, pokazati međusobnu zavisnost i omogućiti da se prosuđuje o njihovoj ispravnosti i širini."

Poznate su Lagranžove jednačine kretanja, obrazovane od niza diferencijalnih jednačina drugog reda, koje opisuju kretanje sistema materijalnih čestica u zavisnosti od kinetičke energije sistema i spoljašnjih sila. Ovde značajnu ulogu igraju Lagranžove generalisane koordinate.

Lagranžova ogromna korespondencija o naučnim problemima, kojima se bavio, obuhvata, tako reći, trinaesti tom celokupnih dela. Ona predstavlja pravi izvor za naučna istraživanja o Lagranžu i njegovoj ulozi u razvitku matematičkih nauka.

Analitička mehanika znači za opštu mehaniku isto što je Njutnov zakon o opštem kretanju značio za nebesku mehaniku. Ona spada u centralna dela klasične mehanike i bila je stalni inspirator u razvitku teorija i raznih primena mehanike.

Njegova istraživanja o verižnim razlomcima i njihovoj primeni u rešavanju diofantskih jednačina prvog i drugog stepena, ispitivanja problema rešivosti algebarskih jednačina, gde se služio ispitivanjem ponašanja izvesnih racionalnih funkcija korena promatrane jednačine, kad se koreni međusobno permutuju, čime je utirao puteve koji će kasnije dovesti do otkrića Galoaove* teorije grupa, mnogobrojni uspesi u nebeskoj mehanici, posebno u problemu tri tela, analitička mehanika uzev uopšte, račun varijacija i brojni drugi rezultati obezbedili su mu prva mesta među matematičarima, mehaničarima i astronomima.

Lagranž je sjajno spojio tehniku računanja sa široko uopštavajućim koncepcijama, tipičnim za francusku školu druge polovine XVIII stoleća, tesno vezane za kretanje filozofske škole francuskih materijalista i prosvetitelja.

LAJBNIC GOTFRID VILHELM (Gottfried Wilhelm Leibniz)

Nemački filozof i matematičar (1646 – 1716).
Rođen je u protestantskoj porodici u Lajpcigu, gde je njegov otac bio profesor Univerziteta. Još kao dečak, Lajbnic potpuno sam stiče ogromno znanje služeći se veoma bogatom očevom bibliotekom. Na univerzitet stupa 1661. gde je student Tomazijusov (Jacob Thomasius), koji mu predaje sholastiku i Bekona. Lajbnic zatim počinje da studira prava, što će mu omogućiti 1664. da stekne titulu doktora filozofije radom u kome predlaže uvođenje matematičke strogosti u pravne nauke, posebno posredstvom računa verovatnoće. Ovu će ideju uopšteno formalizovati i dati neku vrstu abecede misli u delu *De arte combinatoria*, iz koga je trebalo da potekne univerzalno pismo, ili univerzalne „karakteristike". Od 1667. prelazi u Nirnberg; 1670. postao je savetnik za pravna pitanja na dvoru izbornog kneza u Majncu. Slede njegove političke, diplomatske, pravne, verske, naučne, tehničke, filozofske i ostale aktivnosti kojima će se zalagati za pravu patriotsku obnovu Nemačkog Carstva, do tada iscepkanog na veliki broj manjih država, i njegovo jedinstvo na nekoj vrsti federalnog principa. Radiće isto tako svestrano i na ujedinjenju protestanata i katolika. Od 1672 – 1676. provodi u Parizu u diplomatskoj misiji; tu, na podsticaj Hajgensa (Huygens) postavlja infinitezimalni račun što predstavlja osnovu čuvene svađe sa Njutnom* koji će ga optužiti za krađu ovog otkrića. Već 1676. pozvan je u Hanover za bibliotekara i savetnika vojvode od Hanovera i u ovom gradu ostaće sve do smrti. U svom rodnom Lajpcigu osnovao je naučne novine *Acta eruditorum*. Veliki broj aktivnosti doneće Lajbnicu glas poslednjeg pravog enciklopediste.

Za vlade Fridriha Pruskog, Lajbnicovom zaslugom osnovana je 1700. Berlinska akademija nauka (Berliner Akademie der Wissenschaften) čiji je bio prvi predsednik a njegov uticaj na Petra Velikog doprineo je osnivanju Petersburške akademije (1712. imenovan je za privatnog savetnika Petra Velikog). Londonsko kraljevsko društvo primilo ga je za člana 1673, kad je već imao za sobom razna otkrića i radove u oblasti fizike, matematike i logike (pronašao je novi tip mašine za računanje).

Celovit pregled Lajbnicovog filozofskog učenja daju *Rasprava o metafizici* (1686) i *Monadologija* (1714). Njegova metafizika se prevashodno bavi logikom beskonačnog i prelazi u teologiju; budući da je veliki poklonik Aristotelove logike, proučava matematiku kombinacija i traga za opštom i sveobuhvatnom naukom, pomoću koje bi se definisale sve istine do kojih je ljudski um u stanju da dođe.

U svakom stvorenju deluju Bogom stvorene pojedinačne supstancije, onako kako je to predodređeno pojmom o pojedinačnoj supstanciji. Ta supstancija je slična matematičkoj funkciji, ona ostaje ista mada poprima beskonačno mnogo vrednosti koje sve zavise od njene prirode. U stvari, ništa drugo i ne postoji do ta pojedinačna supstancija ili *monada*, obdarena sposobnošću predstavljanja, kojom stiče predstavu o univerzumu, i sposobnošću teženja kojom stremi ka novim predstavama. Postoje različite monade: monade minerala i biljaka koje imaju samo nejasne i nesvesne predstave (male percepcije), zatim životinjske monade koje, iako bez uma, znaju da mahinalno koriste iskustvo; potom ljudske ili razumske monade koje imaju svest i apercepciju o svetu, i najzad monada koja je sam Bog sa njegovim sveobuhvatnim predstavama o svetu koje čine božanski um. Opisujući te stepene iskustva, od životinjskog do ljudskog, Lajbnic je prvi psihološki analizovao ulogu podsvesnog.

U isto vreme kad i monade, stvorena je predodređena harmonija, kao predodređen odnos između svih tih monada, jer je njih beskonačno mnogo, pa bi celina sveta bila nemoguća kad ne bi bile predodređene već date harmonije. Prostor nije, kako je to tvrdio Dekart*, nikakva supstancija nego samo odnos između monada, jedinih supstancija; prostor je red koegzistencije monada; svet koji nam se pojavljuje u prostoru samo je fenomen, oblik u kome se ispoljava supstancija, monada. U tom fenomenskom, pojavnom svetu sve se može objasniti onako kako to objašnjava Dekart*, naime kao mehanizam, ali načelo tog mehanizma nije pojam prostornosti (kako je hteo Dekart) nego *sila*, jedno metafizičko načelo koje treba dodati pojmu prostornosti tela; ova sila može biti matematički izražena kao proizvod mase i kvadrata brzine, a ostaje isto u toku svih promena, ako uzmemo u obzir njen pravac (Dekart je, međutim, imao u vidu jedino stalnost ili očuvanje kretanja).

Matematičko Lajbnicovo delo u isto vreme je komplementarno i suprotno Njutnovom. Uklapajući se u tok misli koji je poticao iz antičke Grčke, a koji su analisti XVI i XVII veka obnovili, oba naučnika zasnivaju u isto vreme i nezavisno modernu infinitezimalnu analizu, pronalaskom diferencijalnog i integralnog računa: Lajbnic proučavajući geometrijske probleme, Njutn proučavajući probleme iz mehanike. Ali Njutn, fizičar, mehaničar, genijalni stvaralac racionalne mehanike želi jednu neposredno efikasnu matematiku, gubeći pomalo na taj način veoma bogatu simboliku. Ovo najveće dostignuće u

istoriji matematike podjednako pripada obojici naučnika. Našavši se kasnije u avangardnoj matematici, prevashodno pod uticajem Hajgensa, koga je uz Arnoa (Arnauld) i Malbranša (Malebranche) upoznao u Parizu, Lajbnicovo intelektualno formiranje i naročito temperament, mnogo su više filozofski. Iako se i Lajbnic i Hajgens inspirišu kartezijanskom matematikom, kojoj se ponekad suprotstavljaju želeći da je prevaziđu, Lajbnic je najviše mislio na otkriće novih algoritama, na univerzalnu i efikasnu simboliku, na produženje algebre novim duhovnim mehanizmima, istinskim mašinama za razmišljanje, sposobnim da udesetostruče moć ljudskog duha. Za života ostvariće samo delimično svoje želje. Njegova računska mašina, savršenija od Paskalove iz 1645, obezbedila mu je mesto među pretečama kibernetike. Njegove oznake diferencijala i integrala brzo su se nametnule; Lajbnic je prodro u račun determinanata kao i u *Analysis situs* (*Analiza položaja*), 1679, današnju topologiju. Njegovim radovima, koji su ostali prisutni i u nekim oblastima savremene matematike, inspirisaće se braća Bernuli*, Ojler*, a pre svega Lagranž*. Ostala Lajbnicova dela iz matematike: *Nova Methodus pro maximis et minimis*, 1684; iz fizike: *Hypothesis physica nova*, 1671; *Brevis Demonstratio erroris memorabilis Cartesii*, 1686. Ovim delima treba dodati značajnu prepisku sa Spinozom (Spinoza), Hobsom (Hobbes), Arnoom, Bosijeom (Bossuet), Malbranšom, Bernulijem, Belom (Bayle), Klarkom (Clarke) itd.

Videti: Matematička logika.

LAPLAS PJER SIMON (Laplace Pierre Simon)

Francuski matematičar, mehaničar, astronom i filozof (1749 – 1827).

Učio je vojnu školu. Učestvovao je u organizovanju Politehničke i Normalne škole u Parizu. Bio je profesor matematičkih nauka; član Akademije nauka, a veoma je intenzivno delovao u političkom životu Francuske za vreme Napoleona.

Autor je velikog broja matematičkih, mehaničkih, astronomskih i filozofskih dela. Njegova glavna dela: *Teorija kretanja i eliptičke figure planeta* (*Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes*, 1784); *Teorija sferičnih privlačenja i figure planeta* (*Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes*, 1785); *Izlaganje o sistemu sveta* (*Exposition du système du monde*) u pet izdanja od 1796. do 1824; *Nebeska mehanika* (*Traité de mécanique céleste*) u pet svezaka od 1799. do 1825; *Analitička teorija verovatnoća* (*Théorie analy-*

tique des probabilités) u razdoblju od 1812. do 1820; *Filozofski pokušaj o verovatnoći* (*Essai philosophique sur les probabilités*, 1814).

U razvitku prirodno-naučnih pogleda na svet vrlo istaknuto mesto zauzimaju Laplasova matematička istraživanja prirode. On je veliki stvaralac matematičkih modela koji se zasnivaju na pojmu funkcionalne zavisnosti, kakve su, npr. diferencijalne jednačine, i koji kao takvi odražavaju determinističku zakonitost prirodnih pojava, što je slučaj sa pojavama kretanja u makrokosmosu. Tim matematičkim modelima postignuti su ogromni uspesi u nebeskoj mehanici, među čije najistaknutije stvaraoce spada i Laplas.

Čuveni su njegovi radovi na području nebeske mehanike. Otkrio je 1773. zakon o nepromenljivosti srednjih kretanja planeta oko Sunca, a nešto kasnije i zavisnost sekularnih promena u ekscentricitetu Zemljine putanje od gravitacije Meseca. Svoju poznatu kosmogonijsku hipotezu o nastanku Sunčeva sistema, koja je poznata u nauci kao Kant – Laplasova teorija, objavio je 1796. Prema toj hipotezi planetski sistem nastao je iz primarne rotirajuće užarene plinovite mase, koja se zbog hlađenja postepeno kontrahovala, pri čemu su se izdvajali pojedini periferni kolutovi. Od tih kolutova kasnije su daljnjim stezanjem nastale planete, dok je Sunce nastalo od centralnog dela rotirajuće mase. Svoju kosmogonijsku teoriju o postanku Sunčevog sistema, izložio je u delu *Izlaganja o sistemu sveta*.

U *Nebeskoj mehanici* govori o radovima svojih prethodnika Kleroa, Ojlera*, D'Alambera* i Lagranža*, zatim o precesiji ekvinocija, o libraciji Meseca, o kretanju planeta i kometa, naročito o pitanjima perturbacija i stabilnosti planetskog sistema. Izračunao je takođe staze za prva tri Jupiterova satelita i proučavao je probleme plime i oseke. Veliki deo njegovih rasprava se odnosi na mnoga pitanja matematičke fizike: problem kapilarnosti, zvuka i prostiranja toplote, kao i problemi iz teorije elektriciteta.

Poznati su njegovi radovi iz integralnog računa, naročito radovi iz diferencijalnih jednačina. Čuven je Laplasov operator, koji se često upotrebljava u matematici i igra posebnu ulogu u matematičkoj fizici, jer se mnogi fizički procesi mogu opisati parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Poznata je Laplasova diferencijalna jednačina i funkcije koje zadovoljavaju tu jednačinu zovu se Laplasove, odn. harmonijske ili potencijalne funkcije. Laplasova jednačina u nauci o toploti daje zavisnost brzine zvuka u nekom gasu od njegove gustine, pritiska i odnosa specifičnih toplota. Isto tako dobro je poznat Laplasov zakon koji daje veličinu magnetskog polja prouzrokovanog električnom strujom u bilo kojoj tački prostora.

On je ispitao i poremećaje u kretanjima nebeskih tela Sunčeva sistema koji nastaju zbog međusobnih delovanja tih tela. Matematičkim modeliranjem stvarnih situacija u Sunčevom sistemu, prouzrokovanih spomenutim poremećajima, do-

kazao je da je Sunčev sistem stabilan, odnosno da ti poremećaji ne mogu dovesti do takvih situacija u kojima bi bio nemoguć dalji život na Zemlji, i odbacio je svaku pomisao da bi bila potrebna intervencija tvorca sveta u nekom sređivanju tih poremećaja, čime se zanosio Njutn u svoje vreme. To je retko sjajan primer matematičkog modeliranja stvarnosti u svemiru, kad se radi o saznanju istine o toj stvarnosti. Na njega će iz vekova u vekove čoveka podsećati svojim stalnim i pravilnim kretanjima nebeska tela Sunčeva sistema.

Zanesen uspesima nebeske mehanike, Laplas je, u duhu strogog determinizma, u svom delu *Filozofski pokušaj o verovatnoći*, pisao 1816: „Mi moramo smatrati sadašnje stanje univerzuma kao efekat njegovog prethodnog stanja, i kao uzrok onom stanju koje sledi. Um koji bi u datom trenutku poznavao sve sile koje animiraju prirodu, i respektivni položaj bića koja je sačinjavaju, i ako bi, osim toga, bio dovoljno mnogostran da te podatke podvrgne analizi, obuhvatio bi jednim istim obrascem kretanja najvećih tela univerzuma, kao i onih koja su lakša od atoma; ništa ne bi bilo neizvesno za njega, pred njegovim očima bila bi prisutna budućnost, kao i prošlost."

Ovako mehanicistički koncipiran determinizam, koji je odgovarajućim matematičkim modelima postigao veliki uspeh u mehanici, posebno u nebeskoj mehanici i smatrajući da nebeska mehanika pruža ideal naučnog saznanja, Laplas je zamišljao da će se taj determinizam moći primeniti u tumačenju svih pojava prirode, što je docniji razvitak nauke pokazao iluzornim. No, bez obzira na to, diferencijalne jednačine kao matematički modeli bili su i ostaju kao moćna sredstva istraživanja onih pojava prirode koje je opravdano tretirati u okvirima determinističke zakonitosti. Kao takve, one će se stalno javljati u matematičkom modeliranju stvarnosti.

Spomenimo da je Laplas i jedan od tvoraca teorije verovatnoće, tj. takvih matematičkih modela koji, nasuprot diferencijalnim jednačinama, ne odražavaju strogi determinizam (strogo zakonitu povezanost), već ono što shvatamo kao slučajnost, odn. kao slučajne pojave. Laplasovo naučno stvaranje, izraženo, s jedne strane, determinističkim i, s druge, probabilnim (verovatnim) matematičkim modelima, izvanredno potvrđuje da je priroda, raznolikošću svojih manifestacija, zaista nepresušni izvor matematičkih nadahnuća. Zato nije slučajno što su Laplasovi teorijsko-spoznajni stavovi bliski materijalističkim stavovima. To ilustruje i njegov, kako se kaže, poznati odgovor na pitanje koje mu je jednom prilikom postavio Napoleon u vezi sa njegovom teorijom o postanku Sunčeva sistema. Naime, Napoleon je zapitao Laplasa zašto u svojoj nebeskoj mehanici nije dao odgovarajuće mesto Bogu, a Laplas mu je odgovorio da mu nije bila potrebna hipoteza o postojanju Boga za teoriju o postanku Sunčeva sistema. Razloge za tu teoriju Laplas je nalazio u samoj prirodi i zasnovao ju je na temeljima prirodnih zakona koji su bili poznati u njegovo doba.

Zanimljivo je ovde naučno i istorijski podvući da je Laplas bio u oštroj polemici sa našim slavnim matematičarem, fizičarem, astronomom i filozofom, Dubrovčaninom, Ruđerom Boškovićem* po pitanjima određivanja staze kometa, što se sve odvijalo u okvirima Akademije nauka u Parizu. Baveći se određivanjem pravog oblika Zemlje, na osnovu podataka stečenih sopstvenim merenjima meridijanskog luka, Bošković je prvi u istoriji matematike formulisao i primenio *princip minimuma sume apsolutnih vrednosti grešaka merenja*, da bi tako došao do najpovoljnijih mogućih rezultata u određivanju pravog oblika Zemlje.

Tom Boškovićevom metodom bavio se Laplas u svojoj raspravi *O nekim tačkama sistema sveta* (*Sur quelques points du système du monde*), dve godine posle Boškovićeve smrti, i naziva je oštroumnom, jer kaže: „Gospodin Bošković dao je za ovaj predmet oštroumnu metodu."

LEBEG ANRI (Henri Lebesgue)

Francuski matematičar (1875 – 1941).
Veoma skromnog porekla, Lebeg je bio jedan od najuglednijih predstavnika velike epohe francuske matematike. Normalnu školu u Parizu završio je 1897, bio je nastavnik matematike do 1902, kad ga je njegova doktorska disertacija, revolucionarna po koncepcijama „integral-dužina-površina" dovela među avangardne matematičare stoleća, izlažući po prvi put novu teoriju integracije funkcija realne promenljive. Ovaj novi integral ubrzo obara život Rimanovog integrala, proširujući polje integrabilnih funkcija. Za njegovu obradu Lebeg uvodi oznaku mere skupa tačaka realne prave. O ovoj meri daje deskriptivnu definiciju a 1894. Borel* daje konstruktivnu definiciju, nešto manje spretnu. Između ova dva znamenita matematičara rasplamsala se žestoka polemika u kojoj su jedan drugom negirali pravu vrednost otkrića; danas se, međutim, mera skupova priznaje Borelu a novi integral Lebegu.

U Rimanovom integralu, da bi se izračunao $\int_a^b f(x)\,dx$, deli se interval $[a, b]$ na disjunktne intervale $[x_i, x_{i+1}]$, u kojima se svakom uzima vrednost x promenljive. Ako je $f(x)$ asocirana vrednost funkcije, totalizuju se proizvodi $f(x)\cdot(x_{i+1}-x_i)$ i prelazi se na granicu.

U Lebegovom integralu, ako su A i B ekstremne vrednosti od $f(x)$ u $[a, b]$, deli se interval $[A, B]$ na disjunktne intervale

$[y_i, y_{i+1}]$, $y_i<y_{i+1}$. Ako je m mera skupa vrednosti x za koje je $y_i<f(x)<y_{i+1}$, i ako je y jedan broj između y_i i y_{i+1}, totalizuju se proizvodi $y\cdot m$ i prelazi se na granicu. Lebeg će primeniti svoj integral u proučavanju geometrijskih redova, domenu gde će on biti veoma jak. Međutim, izvesne kategorije funkcija, integrabilne u smislu Lebega, nisu to u klasičnom smislu. Njegova velika rasprava iz 1905, o funkcijama koje se analitički predstavljaju, bila je polazna tačka značajnih radova o analitičkim skupovima, razvijenim posebno u ruskoj i poljskoj matematičkoj školi.

Budući da je dugi niz godina Lebeg proveo na Normalnoj školi, Kolež-de-Fransu i Sorboni, obrazovao je generacije profesora. Njegova istraživanja iz elementarne matematike o merama veličina, o geometrijskim konstrukcijama i o konusnim presecima koja je stavio u službu nastave drugog stepena imala su znatnog uticaja na evoluciju matematičke misli.

LE ŽANDR, v. Aritmetika

LIUVIJ, v. Analiza

LEVENHAJM, v. Matematička logika

LOBAČEVSKI NIKOLAJ IVANOVIČ

Ruski matematičar, osnivač neeuklidske geometrije (1792–1856).
Skoro celi život proveo je u Kazanju, gde je učio gimnaziju i studirao na Kazanjskom univerzitetu. Po završetku studija ostao je na univerzitetu: od 1881 – 1846. prošao je sva univerzitetska zvanja, od asistenta do redovnog profesora. Bio je dekan Fizičko-matematičkog fakulteta i rektor univerziteta. Poslednjih godina života bio je pomoćnik okružnog načelnika kazanjskog školskog okruga. Njegovom zaslugom Kazanjski univerzitet stekao je renome i slavu, unapređen je njegov naučni i pedagoški rad. Lobačevski je bio inicijator i redaktor *Naučnih zapisa Kazanjskog univerziteta*; rekonstruisane su ili osnovane mnoge ustanove univerziteta (biblioteka, kabineti, klinike, opservatorije i drugo). Lobačevski je doživeo da iz političkih razloga bude udaljen sa univerziteta poslednjih deset godina svoga života, što je osamljen veoma teško podnosio.

Svoju neprolaznu slavu Lobačevski je stekao zasnivanjem nove, tzv. neeuklidske geometrije koja je predstavljala revolucionarnu tačku u razvitku matematičkog mišljenja XIX v. Mnogi istaknuti matematičari pokušavali su pre Lobačevskog da dokažu peti Euklidov postulat o paralelama: da se kroz jednu tačku izvan neke prave, u ravni određenoj tom tačkom i tom pravom, može povući samo jedna prava koja neće seći datu pravu. To isto pokušavao je da dokaže i Lobačevski, što se vidi iz njegovih predavanja koja je držao 1816–1817. Za štampu je bio pripremio još 1823. samostalan kurs geometrije koji zbog nerazumevanja recenzenata nije objavljen. U njemu su začeci novih ideja Lobačevskog u odnosu na principe geometrije.

Ukazivao je na važan problem u teoriji paralelnih pravih koji se sastoji u tome da se osnovno tvrđenje teorije paralelnih primalo bez analize neophodnosti. Naime, pri preseku trećom pravom dveju pravih u ravni, obrazuje se osam uslova, ako je pri tom zbir unutrašnjih uglova s jedne strane jednak dvama pravim uglovima, onda su dve prave paralelne. Da li važi obratno tvrđenje? Može li se tvrditi da svaki put kad su dve prave paralelne, da je presekom treće prave tih pravih zbir unutrašnjih uglova s jedne strane jednak dvama pravim uglovima? Euklidova geometrija tvrdi da to važi i to čini sadržinu petog Euklidovog postulata.

Lobačevski je uviđao uzaludnost pokušaja da se dokaže peti Euklidov postulat, pa na zasedanju Fizičko-matematičkog odeljenja 1826. izlaže svoj rad *Sažeto izlaganje osnova geometrije sa strogim dokazom teorema o paralelalama* koji obeležava datum rođenja neeuklidske geometrije. Zahtevao je da se rad objavi u *Naučnim zapisima* Kazanjskog univerziteta, ali, ne shvativši sadržinu rada, komisija sastavljena od tri profesora nije prihvatila njegovo objavljivanje.

Lobačevski je nastavio sa svojim radom iako njegova pionirska istraživanja nisu bila prihvaćena. U časopisu „Kazanjski vesnik" objavio je 1829–1830. rad *O principima geometrije*. Obrađivao je najpre onaj deo geometrije koji se može izvesti bez korišćenja petog Euklidovog postulata: tako je definisao *apsolutnu geometriju*. Dokazao je da se pretpostavka – da se u ravni kroz jednu tačku izvan date prave može povući više pravih koje neće seći datu pravu – ne može dovesti u protivrečnost. Polazeći od toga pokazao je da se može matematički i logički razviti jedna cela geometrija, različita od Euklidove geometrije. Tako je nastala *Imaginarna geometrija*, 1835, zatim, *Primena imaginarne geometrije na neke integrale*, 1836; *Novi principi geometrije sa punom teorijom paralelnih*, 1835–1838, kao i dva dela objavljena izvan Rusije: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, 1840 (odnosi se na geometrijska istraživanja u teoriji paralelnih linija) i *Pangéometrie*, 1855 (odnosi se na imaginarnu geometriju).

Geometrija Lobačevskog se zasniva na osnovnim stavovima kao i Euklidova, samo što se peti postulat zamenjuje postulatom da se kroz jednu tačku izvan neke prave mogu povući najmanje dve prave koje leže sa datom pravom u istoj ravni i ne seku je. Svoju geometriju je konstruisao polazeći od osnovnih geometrijskih pojmova i svojih aksioma i dokazivao je teoreme geometrijskim metodama, slično Euklidovoj geometriji. Kao osnova služila mu je teorija paralelnih pravih i to razlikuje geometriju Lobačevskog od Euklidove. Geometrija Lobačevskog otkriva novi svet geometrijskih objekata, npr.: prave paralelne u smislu Lobačevskog sve više se približuju jedna drugoj u jednom smeru a u suprotnom smeru njihovo rastojanje se neograničeno uvećava; dve prave u istoj ravni koje imaju zajedničku normalu, na obe strane od te normale beskonačno se razilaze; zbir uglova u trouglu manji je od 180°, što znači da u geometriji Lobačevskog četvorougao može imati najviše tri prava ugla a četvrti je oštar; sve tačke koje se nalaze na jednakom odstojanju od date prave leže na krivoj liniji a ne na pravoj, kao u Euklidovoj geometriji. Ravan i prostor Lobačevskog su skupovi tačaka u kojima su određene prave, kretanje figura, rastojanja, uglovi i drugi elementi. Izgradio je odgovarajuću trigonometriju, kao i principe analitičke i diferencijalne geometrije.

Kao neeuklidska geometrija, geometrija Lobačevskog imala je protivnike među matematičarima koji nisu shvatili njenu sadržinu sve dok veliki italijanski matematičar Beltrami (Eugenio Beltrami, 1835–1900) nije 1868. pokazao da geometrija Lobačevskog vredi na jednoj posebnoj površi nazvanoj pseudosfera. Ona je postala predmet ispitivanja velikih matematičara. U tom pogledu značajni su radovi Nemaca Klajna (Felix Klein, 1849–1925) i Rimana* i Francuza Poenkarea* koji su veoma doprineli u smislu afirmacije geometrije Lobačevskog i njene primene. Ona je našla široku primenu u raznim granama matematike, posebno u modernim tokovima teorijske fizike.

U isto vreme ali nezavisno od Lobačevskog, došao je do istog rezultata mađarski matematičar Boljaj (János Bolyai, 1802–1860), koji se posle objavljivanja svog rada o paralelama više nije bavio neeuklidskom geometrijom. Na osnovu Gausove* korespondencije saznaje se da je do neeuklidske geometrije došao sam Gaus pre Lobačevskog i Boljaja. Međutim, nije mogao da se odluči da objavi svoje otkriće, strepeći da neće biti shvaćen. U jednom pismu Gaus pohvalno piše o radovima Lobačevskog koji se odnose na neeuklidsku geometriju.

Kao matematički stvaralac Lobačevski se ispoljio i u drugim granama matematike: u algebri, matematičkoj analizi, posebno u teoriji beskonačnih redova, kao i u približnom rešavanju algebarskih jednačina.

Materijalističkog pogleda na svet, Lobačevski je smatrao da su polazne matematičke apstrakcije, a isto i osnovni pojmovi geometrije odrazi samo opštih i prostih realnih odnosa i osobina realnog sveta. U prirodi saznajemo kretanje bez koga su nemoguća naša osećanja, pa su skoro svi pojmovi, npr. geometrijski, proizvedeni našim umom putem iskustva, stečenog iz osobina kretanja. Na taj način, prema Lobačevskom, naše prve datosti su bez sumnje uvek pojmovi koje dobijamo iz prirode putem naših čula. U tome je materijalistička suština njegovog senzualizma. Isticao je da se matematičke apstrakcije kod nas rađaju ne proizvoljno ljudskom misli, nego u rezultatu našeg uzajamnog odnosa sa materijalnim svetom. Površi i linije ne postoje u prirodi, podvlači naučnik, već samo u mašti; one tako predstavljaju osobine tela čijom spoznajom se nužno rađaju pojmovi površi i linija. Njegovi pogledi na teoriju i praksu potpuno su materijalistički. Praksu smatra kriterijumom istine. Podvlači da se naučna spoznaja ne sastoji u razvijanju pojmova otrgnutih od života, već u izučavanju materijalnog sveta. Priznaje ogromnu ulogu hipoteza u naučnoj spoznaji: one moraju odražavati odnose uočene u stvarnosti i prema tome nalaziti se u tesnoj vezi sa praktičnim primenama. Podvlačio je da „nema grane matematike, ma kako da je apstraktna, koja se jednog dana ne bi mogla primeniti na pojave stvarnog sveta".

Otkriće neeuklidske geometrije spada u red najvećih otkrića u matematici. Ovim otkrićem, kao i svojim celokupnim stavom matematičara i filozofa matematike, Lobačevski je otvorio nove puteve u razvitku matematike koji su usledili aksiomatskim zasnivanjima svih grana matematike i uvrstio se u red genijalnih stvaralaca. Povodom stogodišnjice njegovog rođenja utemeljena je *Nagrada Lobačevskog* za dela iz neeuklidske geometrije.

LUIS, v. Matematička logika

LUKAŠIJEVIČ, v. Matematička logika

MARKOV, v. Matematička logika

MENELAJ ALEKSANDRIJSKI, v. Trigonometrija

MONŽ GASPAR (Gaspard Monge)

Francuski matematičar (1746 – 1818).
Potekao je iz siromašne porodice. Sposobnošću i vrednoćom istakao se u srednjoj školi gde je pored njegovog imena uvek pisalo „zlatan dečak". Njegov talenat se ispoljio u četrnaestoj godini pri konstrukciji vatrogasnog motora, gde je pokazao neobičnu sposobnost za uočavanje složenih prostornih odnosa. Kad mu je bilo šesnaest godina samostalno je izradio kartu rodnog mesta i odgovarajuće merne instrumente, što je bio veliki uspeh. Iste godine postao je profesor gimnazije i škole za vojne inženjere. Tu se detaljno upoznao sa teorijom utvrđivanja, čiji je problem bio izrada plana a da nijedan deo utvrđenja ne bude izložen neprijateljskoj vatri. Monž je dao svoje rešenje tog problema što je predstavljalo početak nacrtne geometrije, a Monžova metoda dugo se čuvala kao vojna tajna. Tek je 1794. bilo odobreno da se o njoj javno govori. Dopisivao se sa D'Alamberom i Kondorseom (Condorcet) koji su radili na osnivanju instituta za hidrauliku. Pozvali su i Monža da učestvuje u tom radu i da se oslobodi dužnosti profesora matematike u vojnoj školi. Imenovan je za ispitivača za službu u mornarici, gde se zadržao do izbijanja revolucije 1789, čiji je oduševljeni pristalica bio. Posle revolucije povereno mu je mesto ministra mornarice. Sarađivao je na osnivanju Politehničke škole. Kao rođeni revolucionar, borio se protiv korupcije starog društva i kao stručnjak značajno je doprineo naoružanju Francuske u to doba. Bio je u tesnim vezama sa Napoleonom i među njima se razvilo veliko prijateljstvo. Napoleon mu je poverio svoj plan za invaziju Egipta. Često je bio njegov savetnik.

Potrebe tehničkih nauka, posebno vojne inžinjerije podstakle su ga u radu na nacrtnoj geometriji pa je objavio delo *Nacrtna geometrija* (*Géometrie descriptive*, 1765. kao skripta i 1795. kao knjiga) u kome definiše nacrtnu geometriju. „Ima dva glavna cilja: prvo, da na crtežu koji ima samo dve dimenzije tačno predstavi trodimenzionalne objekte koji se mogu tačno zadati, i drugo, da iz tačne geometrijske predstave tela izvede sve što neophodno proizlazi iz njihovog oblika i uzajamnog položaja". Monžovo stvaranje nacrtne geometrije bilo je revolucionarno delo za tehničke nauke, jednostavno po metodama i idejama i neophodno za napredak tih nauka i njihovih primena.

Niz geometrijskih problema koji su se do tada rešavali analitičkim putem Monž je pomoću nacrtne geometrije sveo na geometrijsku konstrukciju, ali njegovo je ime ostalo istaknuto u teoriji površi gde je vešto primenio infinitezimalne metode. U svom delu *Primena analize u geometriji* (*Application de l'analyse à la géometrie*, 1795), napisano jasnim i živim stilom, bez stare sheme, pretpostavka-tvrđenje-dokaz obrađuje analitičku geometriju u prostoru. Ovde nalazimo probleme u vezi sa diferencijalnim odnosima kod obrtnih, zavojnih, pravolinijskih i razvojnih površi. Monž je stvorio svoju geometrijsku školu za koju je karakteristično potpuno prožimanje geometrijske konstrukcije i analitičke formule. Svojom diferencijalnom geometrijom pripremio je put Gausu* koji će inspirisati Rimana* u razvijanju geometrije, neophodne za teoriju relativnosti. Monž je poznat u teoriji diferencijalnih jednačina koje su usko povezane sa problemima koje je radio u geometriji. Objavio je brojne radove na području nacrtne i diferencijalne geometrije, teorije diferencijalnih jednačina i drugih oblasti u tada najistaknutijim naučnim časopisima Pariza.

MORGAN, v. Algebra, Matematička logika

NEPER DŽON (John Napier ili Neper)

Škotski, odn. britanski matematičar (1550–1617).
U trinaestoj godini života stupio je na univerzitet svetog Andrije, jedan od najboljih u Škotskoj, gde je stekao dobro obrazovanje iz latinskog i teologije. Čitavog života ostao je ubeđeni protestant a slavu u protestantskoj Evropi stekao je delom *A Plain Discovery of the Whole Revelation of Saint John* (1593), koje je imalo brojna izdanja i prevode.

Njegovo osnovno matematičko delo je otkriće logaritama koje mu je odnelo oko dvadeset godina neprekidnog rada. Svoje otkriće objavio je u Edinburgu 1614. u delu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Opis vanrednog zakona logaritama*); na engleski jezik preveo ga je Rajt (Edward Wright, 1560–1615) i objavio u Londonu 1616. Ponovno posthumno izdanje latinskog teksta iz 1619. sadrži i *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (*Konstrukcija vanrednog zakona logaritama*), koja daje postupke konstrukcije tablica prvog izdanja. Još iste godine oba dela bila su ponovo objavljena u Lionu. Kao i Rajt, i Brigs (Henry Briggs, 1561–1631) se zanimao za Neperovo otkriće te su, uspostavivši vezu s Neperom pristupili modifikaciji sistema iz čega su nastale tablice decimalnih logaritama koje su i danas u upotrebi. Retko se događalo da se jedno otkriće raširi tolikom brzinom: od 1614. do 1631. štampano je više od dvadeset dela o ovom pitanju.

Nezavisno od Nepera, logaritme je otkrio Birgi (Jost Bürgi, 1552–1632), švajcarski časovničar i astronom čije su tablice objavljene tek 1620.

Godine 1624. Ginter (Edmund Günter, 1581–1626) je urezao na bakru logaritamsko pravilo, preteču naših računskih pravila koji su svoj skoro definitivan oblik dobili 1654, zahvaljujući Pertridžu (Seth Partridge).

Pored logaritama Neper je u delu *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo* (*Dve knjige rabdologije ili računanja sa štapićima*, 1617), dao postupak poluautomatskog množenja: štapići ili mala Neperova ravnala. Logaritam broja on definiše na kinematički način, veoma blizak sadašnjoj definiciji, gde je logaritam primitivna funkcija od $1/x$; ali, pošto hoće da primeni svoju teoriju u trigonometriji, uzima kružnicu poluprečnika $R=10^7$: *Ako je* x *sinus, pozitivan broj manji od* R, *onda je njegov logaritam* $R \cdot \mathrm{Log}\,(R/x)$, gde operator Log označava hiperbolički ili prirodan Neperov logaritam:

$$\mathrm{Log}\, u = \int_1^u \frac{dt}{t}.$$

NETER, v. Algebra

NJUTN, v. Zlatni trolist u razvitku matematike

OJLER LEONARD (Leonhard Euler)

Švajcarski matematičar (1707–1783).
Poreklom iz svešteničke porodice, u trinaestoj godini stupa na fakultet filozofije u Bazelu i 1724. postaje nastavnik. Iako mu je porodica namenila svešteničko zvanje, on ni trenutka ne okleva da se isključivo posveti nauci. Bio je učenik Žana Bernulija* i prijatelj njegovih sinova, Nikole i Danijela, s kojima će na poziv carice Katarine Prve 1727. otići u Petersburg gde će na akademiji nauka 1730. dobiti katedru fizike, a 1733, po povratku Danijela Bernulija u Bazel, katedru matematike. Iste godine oženio se svojom zemljakinjom čija je porodica bila nastanjena u Rusiji; iz ovog braka rodiće se trinaestoro dece.

Ne kidajući veze sa petrogradskom (petersburškom) akademijom, od 1744. postaje upravitelj matematičkog odeljenja

Berlinske akademije (koju je Fridrih Drugi upravo bio reorganizovao), sve do 1766, kad se vratio u Rusiju. Pred kraj života (1771) potpuno je oslepeo i nastavio da radi uz pomoć svog starijeg sina, dugogodišnjeg sekretara petersburške akademije i svojih vernih prijatelja.

Izdavanje njegovih celokupnih dela, započeto 1911, obuhvata 30 tomova matematike, 32 toma mehanike i astronomije i 12 tomova fizike i ostalih istraživanja, kao i didaktičkih dela. Glavna dela: *Rasprava iz mehanike*, 1734–1736; *Uvod u aritmetiku*, 1738; *Teorija muzike*, 1739; *Teorija kretanja planeta i kometa*, 1744; *Novi principi artiljerije*, 1745, gde zasniva unutrašnju balistiku i *Priručnik pomorske konstrukcije*, 1749; oko 1756. napisao je teoriju mašina koje pokreće voda a 1762. delo o konstrukciji ahromatskih objektiva; dioptrici je posvetio tri toma između 1769–1771.

U njegovoj *Mehanici* prvi put se ova nauka proučava analitički sa materijalnog stanovišta, kao racionalna nauka. Teoriju kretanja čvrstih tela Ojler izlaže 1760, definišući prvi put središte, momente i glavne ose inercije. Rasprava o krivim linijama iz 1744, koje imaju osobine maksimuma i minimuma, zasniva račun varijacija kome će Lagranž* kasnije dodati apstraktan algoritam; 1755. Ojler uopštava hidrostatički pritisak Kleroa (Alexis Clairaut, 1713–1765) i iste godine ustanovljuje opšte jednačine hidrodinamike.

U astronomiji proučava 1748. i 1752. uzajamne perturbacije Jupitera i Saturna. U radu iz 1749, o precesiji ravnodnevica, polazeći od jednačina prostijih od D'Alamberovih*, dobija bolje rezultate. U *Teoriji kretanja Meseca* (1753–1772) nastoji da ustanovi mnoge nejednakosti.

U optici je gotovo jedini od savremenika koji prihvata talasnu teoriju svetlosti. Njegove ideje, uz druge fizičke ili filozofske teorije, izložene su u *Pismima nemačkoj princezi o različitim predmetima fizike i filozofije* (1768–1772), jednom od njegovih retkih spisa na francuskom jeziku, budući da je većinom pisao na latinskom. *Uvod u infinitezimalnu analizu* (1748) uglavnom proučava funkcije, posebno eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske, razvijanje u redove i beskonačne proizvode. Prvi put su postale očigledne bliske veze eksponencijalnih i kružnih funkcija, zahvaljujući uvođenju jedne imaginarne promenljive. Drugi tom ovog dela bavi se analitičkom geometrijom, kako u ravni tako i u prostoru. Ojler je tu dao sadašnju klasifikaciju konusnih preseka i kvadrika, kao i klasifikaciju algebarskih krivih trećeg i četvrtog reda.

U *Osnovama diferencijalnog računa* iz 1755. i *Osnovama integralnog računa* I–III, 1768–1770, sakuplja sve rezultate dobijene prethodno u ovim domenima, bilo svoje bilo svojih savremenika.

U infinitezimalnoj geometriji istraživao je geodezijske linije, razvojne i minimalne površi, kao i prvo lokalno proučavanje krivine jedne površi (glavni poluprečnici krivine i glavni preseci). Ako njegovi napori da dokaže postojanje korena algebarske jednačine nisu doveli do neoborivog dokaza, oni otvaraju put njegovim nastavljačima, posebno Lagranžu, inače njegovom učeniku po mnogim pitanjima. Iako su razmenili bogatu prepisku, Ojler i Lagranž se, međutim, nikad nisu sreli.

Od velikog je značaja Ojlerova elementarna *Algebra* I–II (na ruskom 1768, na nemačkom 1770, na francuskom 1773–1774), sa Lagranžovim beleškama o teoriji brojeva i o Diofantovoj (oko 325 – oko 410) ili neodređenoj analizi. Radovi iz više aritmetike Lagranža i Ojlera usko su povezani i, uopšte, Ojler je otvarao put a Lagranž je pojednostavljivao ili uopštavao. Obojica preuzimaju Fermaove* radove, koriste novo oruđe, tj. neprekidne razlomke i zasnivaju teoriju kvadratičnih oblika i pripremaju put matematičarima XIX stoleća.

U celini uzev, Ojlerovo delo je od suštinskog značaja u matematici; pa, iako mu se danas zamera izvesno odsustvo naučne strogosti, naučnici mu priznaju izuzetnu aktivnost, pronalazački i matematički talenat.

Videti: Matematička logika.

PEANO, v. Matematička logika

PENLEVE POL (Paul Painlevé)

Francuski matematičar i političar (1863–1933).
Profesor fakulteta nauka u Lilu (1886), doktor matematičkih nauka (1887), predavač na Sorboni (1891), profesor na vanrednoj katedri matematike u Stokholmu (1895) i Politehničke škole (1905). Posebno se zanimao za diferencijalne jednačine, odnosno za diferencijalne jednačine sa analitičkim koeficijentima, kao i za Abelove funkcije. Pisac je čuvenih radova o trenju i veliki teoretičar u oblasti avijacije. Bio je prvi saputnik pionira vazduhoplovstva V. Rajta (Wilbur Wright, 1867–1912) 1908; 1909. uveo je predavanja iz aviomehanike u aeronautičkoj školi; 1910. dobija od parlamenta prvi kredit za avijaciju i postaje poslanik. Bio je ministar za obrazovanje, zadužen za izume važne za narodnu odbranu (1915–1916); kao ministar rata (mart–septembar 1917) imenovao je komandante frontova Nivela (Nivelle), Petena (Pétain) i Foša. Pod pritiskom antiratnog mnenja povlači se do 1924, kad postaje jedan od osnivača Kartela levih, zatim i predsednik parlamenta, ministar finansija, ministar avijacije (1930–1933).

Njegovo prvo delo, *Predavanja o analitičkoj teoriji diferencijalnih jednačina* (1897) donelo mu je znatan renome. U svojim predavanjima na Politehničkoj školi izvrgao je strogoj i sjajnoj kritici aksiome klasične i relativističke mehanike. Posvetivši se čistoj analizi, posebno je proučavao diferencijalne jednačine. Tako je došao na istraživanje singulariteta uniformnih funkcija kompleksne promenljive, ne strahujući da tom prilikom koristi, tada već osporavane radove Kantora* o skupovima tačaka. Pronašao je nove transcendente nesvodljive na već poznate transcendente u toku svojih istraživanja. Posle 1900, Penleve se posvetio skoro isključivo mehanici, osobito mehanici fluida, nastaloj iz potreba novorođene aeronautike.

Politička i naučna karijera Penlevea išla je uporedo. Pre nego što će se stanje njegovog zdravlja pogoršati, Penleve je predsedavao u Međunarodnom institutu za intelektualnu saradnju (Institut international de coopération intellectuelle). Sahranjen je u Panteonu.

PIRS, v. Matematička logika

PLIKER, v. Geometrija

POENKARE ANRI (Henri Poincaré)

Francuski matematičar (1854–1912).

Pošto je dobio izuzetno obrazovanje u srednjoj i višoj školi, 1879. stupa na fakultet u funkciji nastavnika, kad je i odbranio tezu *O osobinama funkcija definisanih parcijalnim diferencijalnim jednačinama*. Predavao je analizu na fakultetu u Kaenu 1879–1881. i Parizu 1881–1885, a zatim fizičku i eksperimentalnu mehaniku na istom fakultetu 1885–1886; zatim je profesor matematičke fizike i računa verovatnoće 1886–1896, i najzad, profesor matematičke astronomije i nebeske mehanike od 1896. do kraja života. Na Višoj školi pošta i telegrafa držao je nastavu iz teorijskog elektriciteta 1902–1912. Njegova celokupna dela, objavljivana počev od 1916, obuhvataju 400 značajnih radova i oko hiljadu kraćih beležaka.

U analizi njegovo najznačajnije delo počiva na otkriću funkcija koje je on nazvao *Fuksovim*, prema Fuksu (Lazarus Fuchs, 1833–1902) a koje su uopštene eliptičke funkcije. Danas nazvane *automorfnim funkcijama*, one su invarijantne za izvesne grupe primene u ravni kompleksne promenljive na samu sebe, grupe koje igraju vrlo značajnu ulogu u neeuklidskoj geometriji. Automorfne funkcije dozvoljavaju da se izraze rešenja svake linearne diferencijalne jednačine sa algebarskim

koeficijentima i rešavaju u isto vreme problem uniformizacije algebarskih funkcija.

Uvek okrenut primenama matematike na mehaniku i fizičke nauke, do svog velikog otkrića došao je proučavanjem diferencijalnih jednačina, čestih u primenama. Njegovi radovi iz matematike primenjene na fiziku odnose se posebno na parcijalne diferencijalne jednačine. U ovom domenu uveo je nove metode koje još nisu dale sve rezultate i tako ostale i sada aktuelne.

U fizici u užem smislu bavio se polarizacijom svetlosti, difrakcijom, Hercovim talasima i Lorencovom teorijom, gde predstavlja neke aspekte sužene relativnosti. Sve ove elemente Poenkare je imao 1904, uoči odlučujućih Ajnštajnovih (Albert Einstein, 1879–1955) radova. Temeljno proučava probleme u elektrodinamici tela u kretanju, odstupanja lokalnog vremena Lorenca (Hendrik Anton Lorentz, 1853–1928) i kontrakciju Ficdžeralda (George Francis Fitzgerald, 1851–1901) da bi uvažio negativne rezultate eksperimenta Majklsona (Albert Michelson, 1852–1931). Potpuno prihvata princip relativnosti kao opšti zakon prirode, ali, ako se i približio Ajnštajnovim shvatanjima, nije imao neophodne smelosti da ide dalje i negira, npr., apsolutnu simultanost fenomena na rastojanju.

U mehanici fluida objavljuje 1885. rezultat svojih istraživanja o oblicima relativne ravnoteže koje može imati masa homogenog fluida čiji se svi molekuli privlače saglasno Njutnovom zakonu i koja je pokrenuta uniformnom rotacijom oko jedne ose. Zanima se još problemom plime i oseke i naročito čuvenim teškim problemom tri tela: *proučiti kretanja tri partikularne mase podvrgnute sopstvenim međusobnim privlačenjima prema Njutnovom zakonu*. Kad je 1889. švedski kralj ustanovio internacionalni konkurs, na kome je predložen problem *n* tela, Poenkareov uticaj će dugo ometati prodiranje aksiomatike i *jednačine dinamike*. Ova rasprava je dobila nagradu i predstavlja jedan od najviših dometa matematičke misli.

Poenkare je izučavao teoriju brojeva, račun verovatnoće i naročito topologiju; njegovi filozofski tekstovi, objavljivani u časopisima, sakupljeni su u više knjiga, kao: *Nauka i hipoteza*, 1902; *Vrednost nauke*, 1905; *Nauka i metode*, 1909; *Poslednje misli*, 1913; ova dela imala su znatnog uticaja u široj kulturnoj javnosti, kao i u nastavničkim krugovima. Stanovito koristan, Poenkareov uticaj će dugo ometati prodiranje aksiomatike i sličnih ideja u francusku nastavu, sve dok grupa Burbaki* nije uspela da se nametne počev od 1930.

PONSELE, v. Geometrija

PORECKI, v. Matematička logika

POST, v. Matematička logika

RASEL BERTRAND (Bertrand Russell)

Istaknuti britanski matematičar, logičar i filozof (1872 – 1970). Bilo mu je dve godine kad mu je umrla majka i četiri kad mu je umro otac. U jedanaestoj godini života otkriva ljubav za matematiku. Podvlači da ga je autobiografija Stjuarta Mila (Stuart Mill) podstakla da misli da nema odgovora na pitanje „Ko je stvorio Boga?" i da je „tako postao ateista". U Triniti koledž u Kembridžu primljen je 1890, otkad je i utrven njegov intelektualni put: stalno će se kretati između morala i logike. U Kembridžu stiče prisne prijatelje, posebno svog učitelja Vajtheda (Alfred North Whitehead, 1861 – 1947). Tu se prvi put oženio, a četiri puta je stupao u brak. Svoj život je opisao u delu *Autobiografija Bertranda Rasela* (*The Autobiography of Bertrand Russell*, 1967 – 1968), u čijem se uvodu nalazi i sledeći tekst:

„Tri jednostavne ali neodoljive strasti upravljale su mojim životom: potreba da volim, žeđ za saznanjem i gotovo bezgranično osećanje prema patnjama ljudskog roda ..."

„Tražio sam ljubav pre svega zato što je ona ushićenje ..."

„Ne manje strasno težio sam za saznanjem ... Pokušao sam da uhvatim pitagorejsku vrlinu koja je prirodu stvari i bića sagledavala u moći brojeva ..."

„Onoliko koliko su mi bili dostupni, ljubav i znanje su me uzdizali; ali, to me je uvek navodilo i na sažaljenje. Uzvici bola odjekivali su u mojoj duši. Izgladnela deca, žrtve tlačitelja i mučitelja – sav taj svet bola, bede i usamljenosti podsmevao se životu, takvom kakav je."

Ispite u Kembridžu Rasel je završio 1894: tada putuje u Pariz, Firencu, Berlin i upoznaje se sa socijalistima. Rediguje svoje beleške *Nemačka socijalna demokratija* (*German Social Democracy*, 1896). Odlučuje da se posveti matematici i piše nastavničku raspravu *Esej o osnovama geometrije* (*An Essay of the Foundations of Geometry*, 1897), objavljuje *Kritičko izlaganje Lajbnicove filozofije* (*A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, 1900). Sve je tešnja njegova saradnja sa Vajthedom, s kojim se susreće u Parizu 1900, kao i s Peanom (Giuseppe Peano, 1858 – 1932). Rediguje i objavljuje *Principe matematike* (*The Principles of Mathematics*, 1903), a zatim *Filozofske eseje* (*Philosophical Essays*, 1910); prvi i drugi tom dela *Principia Mathematica* pojavljuje se 1910, redigovani u zajednici sa Vajthedom dok treći tom izlazi 1913.

Rasel je bio veliki pacifist. Uporno se boreći protiv prvog svetskog rata, objavio je *Principe socijalne rekonstrukcije* (*Principles of Social Reconstruction*, 1916) te je 1918. osuđen na šest meseci zatvora; 1919. objavljuje *Uvod u matematičku filozofiju* (*Introduction to Mathematical Philosophy*). Učestvuje u političkom životu priklanjajući se socijalizmu: u SSSR-u je 1920, u Kini 1921. Svoje poglede na logiku daje u delu *Analiza mišljenja* (*The Analysis of Mind*, 1921). Osniva 1927. jednu školu koju je pohađalo dvadesetoro dece i koja se zasnivala na vaspitanju bez suza i na moralu bez straha, ali je zatvara 1935. iz finansijskih razloga. Putuje u Čikago 1938. na predavanja poznatih logičara Karnapa (Rudolf Carnap, 1891 – 1971) i Morisa (Charles Morris, rođen 1901). Bio je pozvan u Njujork, u koledž koji je bio pod gradskom upravom, o kome će Rasel bez okolišenja reći da je „satelit Vatikana". Nije mogao slobodno da radi, izgubio je službu i morao se vratiti u Veliku Britaniju 1944.

Po povratku drži nastavu u Triniti koledžu, objavljuje *Istoriju zapadne filozofije* (*A History of Western Philosophy*, 1945), koja je prevedena i na naš jezik. Posle bacanja atomske bombe na Hirošimu, postaje radikalni pacifist i posvećuje se borbi za mir u svetu. Ceo njegov život odvijaće se u ritmu marševa posvećenih miru, mirovnim konferencijama i govorima. Osuđuje rasnu segregaciju u Australiji i hladni rat; 1950. prima u Stokholmu Nobelovu nagradu za književnost. Za skup „Čovek u opasnosti" rediguje manifest upućen svim naučnicima sveta. Sa nekim naučnicima osniva „konferenciju Pagvaš" (Pugwach) koja se održavala povremeno i čiji je uticaj bio veliki. Angažuje se u borbi protiv nuklearnog naoružanja i postaje njen lider. Zanimaju ga svi pokreti za oslobođenje i 1966. obrazuje Međunarodni sud protiv ratnih zločina u Vijetnamu, čiji je predsednik. Kritički se odnosio prema kulturi i društvenom životu savremenog građanskog društva. Smatrao je da su privatno vlasništvo i država u savremenom svetu postali opasnost za društvo. Država, crkva i obrazovanje zakazali su u rešavanju ključnih socijalnih problema, uključujući i besmislenost rata. Kao uvereni ateist i pacifist, Rasel piše u obliku duhovitih paradoksa i smelih ironija bez predrasuda. On optimistički i racionalno upravlja svoju misao na praktičnu borbu za humaniji način života. Kao naučnik bio je popularan zbog svojih smelih i naprednih teza o različitim naučnim, filozofskim, socijalnim, i političkim pitanjima. Kao matematičar, logičar i filozof gostovao je i predavao na mnogim univerzitetima u svetu. Pored matematičkih i logičkih dela, napisao je više dela filozofskog i socijalno-političkog karaktera, vezanih za zbivanja njegovog vremena.

Godine 1901. objavio je raspravu koja se odnosila na teoriju relacija. Uvodi nove principe i nove simbole. U *Matematičkim principima* želeo je da „dokaže da se čitava matematika može tretirati u vidu pojmova definibilnih pomoću malog broja logičkih pojmova, dok su njeni stavovi izvodljivi iz malog broja osnovnih logičkih principa" i da „objasni da su fundamentalni pojmovi koje matematika usvaja neindefinibilni". U delu *Principia Mathematica*, napisanom sa Vajthedom, kombinuje studije analista i geometričara o principima matematike i Kantorove* studije o skupovima sa logičkim simbolima Peana i teorije relacija. On je jedan od osnivača *logicizma* u matematici zajedno sa Vajthedom, odn. pravca koji zasniva matematiku svođenjem na logiku, odredbe svih „neopredeljenih" ishodnih pojmova svodi na termine logike, a formulacije uopšte svih njenih stavova na „jezik" *matematičke logike*, dok dokaze izvodi putem iste logike.

Među najznamenitije paradokse Kantorove teorije skupova spada Raselov paradoks *normalnih* skupova, tj. skupa svih skupova koji ne sadrže sebe kao element. Ovaj paradoks Rasel je saopštio Gotlobu Fregeu (1848–1925) u času kad je Frege objavljivao drugi tom svog dela *Osnovni zakoni Aritmetike* (*Grundgesetze der Arithmetik*, 1895), i tako je saznao da njegov sistem ima nerešivo protivrečje.

Raselov paradoks sastoji se u sledećem. Neka je R skup svih skupova S koji ne sadrže sebe kao element. Ako je, dakle, $R=\{S/S\notin S\}$, tada važi $S\in R\Leftrightarrow S\notin S$, pa otuda, kada S zamenimo sa R, dobijamo

(1) $R\in R\Leftrightarrow R\notin R$

Na osnovu zakona isključenja trećeg sledi

(2) $R\in R \veebar R\notin R$

Dakle, na osnovu (1), ako $R\in R$, onda $R\notin R$, i obratno, ako $R\notin R$, onda $R\in R$, tj. u oba slučaja $R\in R\vee R\notin R$, što je protivrečno zbog (2).

Intuicionisti nalaze „rešenje" paradoksa u neusvajanju zakona isključenja trećeg (2), dok je Rasel tražio „rešenje" na drugi način.

Da bi rešio ovaj paradoks, Rasel izgrađuje *teoriju tipova*, po kojoj jedan pojam ne može nikad u jednom stavu uzimati ulogu predikata, kad je subjekt tog stava jednakog ili većeg tipa od samog pojma. Tipovi mogu biti posmatrani kao kolekcije objekata. Najniži tip izgrađen je od individua; dolazi tip klasa čiji su elementi individue, zatim tip klasa čiji su elementi klase, itd. Da bi izbegao kontradikciju, Rasel kaže da su relacije $X\in X$ i $X\notin X$ rđavo oblikovane, jer izraz koji figuriše nalevo od znaka $\in$ mora biti neposredno nižeg tipa od onog u izrazu koji se pojavljuje nadesno. Naime, nikad ne može biti $C_\alpha\in C_\alpha$ za jedan tip α. Ovaj zaključak je posledica *principa vicioznog kruga* u sledećem obliku: „Sve što pretpostalvja celinu jedne kolekcije ne može biti element ove kolekcije". I tako kroz teoriju tipova dolazi do „rešenja" navedenog paradoksa. Razvijena je *jednostavna* i *razgranata* teorija tipova.

Teorijom tipova mogli su se izbeći samo *logički paradoksi*, tj. oni koji su svojstveni pojmovima i oni se javljaju u matematici. No, postoji i druga vrsta paradoksa, a to su *sintaktički* koji se odnose na verbalne izraze samih pojmova, čija „rešenja" Rasel nalazi na sličan način.

Rasel i Vitgenštajn (Ludwig Wittgenstein, 1889–1951) analizuju logičku stranu govornog jezika i dolaze do zaključka da njegova gramatička struktura zatamnjuje i prikriva logičke veze koje postoje među izrazima, a to dovodi do zbrke i pojave besmislenih izraza. Zato predlažu program izgradnje „logički savršenog jezika" u kome bi bila postavljena logička struktura ljudskog jezika uopšte. Koristeći kao model tako „logički savršenog jezika" ukazuju na najbolje razvijeniji jezik toga vremena, a naime, na logički jezik sadržan u delu *Principia mathematica*. Podvlače da su stavovi „logički savršenog jezika" sledeći: svi stavovi se svode ili na *elementarne*, koji tvrde da određeni objekt ima određeno svojstvo, ili da se neki objekt nalazi u određenom odnosu prema drugom objektu, ili na *složene* („molekularne"), koji se dobijaju posredstvom sjedinjavanja nekoliko logički svezanih stavova, ili putem uvođenja *kvantora* opštosti i postojanja; istinitost bilo kojeg složenog stava je funkcija istinitosti elementarnih stavova koji ih obrazuju; elementarni stavovi su logički nezavisni; misao se izražava samo u osmišljenom stavu; elementarni stavovi javljaju se prostim, dalje nerazloživim u smislu odnosa, ili kao „atomi" jezika.

Za jedan izraz iz koga se izvlači jedan stav zamenom promenljive x svojstvenim terminom, kaže se da je *propozicionalna funkcija*. Rasel tretira propozicionalnu funkciju kao otvoren iskaz, kao logičku funkciju i kao apstrakt ili atribut. Po istom planu ne mogu se tretirati stavovi koji se izvlače iz propozicionalnih funkcija raznog stepena. To ilustruje poznatim paradoksom „lažljivca". Kombinacijom pojma propozicionalne funkcije sa pojmom implikacije definiše formalnu implikaciju. Ako su φ i ψ dve propozicionalne funkcije, onda je $\varphi(x)\supset_x\psi(x)$ jedna formalna implikacija, karakterisana rekurencijom, u antecendensu i u konsekventu istim slovom vezana kvatorom koji se odnosi na ceo izraz.

Raselovi radovi, posebno *Matematički principi* i *Principia mathematica*, koji se odnose na matematičku logiku i logiku odnosa, predstavljaju veoma krupan prilog matematičkoj logici i problemima zasnivanja matematike. On je mnogo uradio u oblasti jezika savremene logičke simbolike. Sistematski je izložio *račun iskaza*, *teoriju klasa*, *račun predikata*, kao i *teoriju tipova* u smislu logičkih rešenja paradoksa. Smatrao je da se matematika mora zasnivati na teoriji skupova, u kojoj je dao značajne priloge, pa je u matematičkoj literaturi naglašeno da je logika *Principia Mathematica* „prikrivena teorija skupova". Svojim naučnim, posebno matematičko-logičkim, filozofskim i političko-socijalnim radovima i stanovištima, Rasel je jedan od najmarkantnijih mislilaca, naučnika i filozofa, našeg vremena.

Videti: Matematička logika.

REGIOMONTANUS, v. Trigonometrija

RIMAN BERNARD (Bernhard Riemann)

Nemački matematičar (1826 – 1866).
Poreklom iz svešteničke porodice, srednju školu završio je u Hanoveru i Limburgu a 1846. upisao se na univerzitet u Getingenu gde je slušao predavanja Gausa*. U Berlinu je bio učenik Jakobija* i Dirihlea (Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805 – 1859), između 1847. i 1849. zanimaju ga Furijeovi redovi i parcijalne diferencijalne jednačine. U Getingenu brani tezu 1851, a od 1857. predaje na Gausovoj katedri.

Jedno od najznačajnijih dela u domenu analize je njegova disertacija *Osnovni principi za opštu teoriju funkcija jedne kompleksne promenljive veličine*. Autor se inspirisao matematičkom fizikom; teoriju funkcija kompleksne promenljive sveo je na teoriju potencijala. Najčuveniji problem ove teorije je Dirihleov: odrediti potencijal počev od njegovih vrednosti na zatvorenoj konturi. Da bi ga rešio, Riman posmatra funkciju koja daje minimalni dvostruki integral kvadrata modula gradijenta i pokazuje da je ova funkcija potencijal. Vajerštras* podstiče veliku diskusiju 1869. pitajući se da li se ovaj minimum može postići. Ova rasprava je bila tema mnogih radova a 1904. Hilbert* pokazuje da Rimanov dokaz može naučno da se iskaže.

Rasprava *O mogućnosti da se jedna funkcija predstavi trigonometrijskim redom* (1854), značajna više po naslovu, sadrži pre svega definiciju Rimanovih integrala. Rasprava *O broju prostih brojeva manjih od date veličine* (1859) zasniva istraživanje asimptotske raspodele prostih brojeva na osobinama analitičke funkcije zeta, put istraživanja koji se docnije pokazao plodnim. S druge strane, teza *O hipotezama koje služe kao osnova geometrije* (1854) proučava opšte prostore sa više dimenzija davanjem kvadrata njihovog linearnog elementa. Inspirisano Gausovim proučavanjima površi, ovo shvatanje se pokazalo bitnim u opštoj relativnosti.

Topološki karakter Rimanovih metoda otkriva se u njegovoj *Teoriji Abelovih funkcija* 1857. Ovde se pojavljuju Rimanove površi, obrazovane superpozicijom ravnih listova, čiji je broj jednak stepenu algebarske jednačine i koji su povezani linijama prelaza što među njima sjedinjuju kritičke tačke. Ova metoda zasniva teoriju algebarskih funkcija čije su bitne crte dotad izmakle istraživanjima. Ona pre svega obeležava nastanak topologije*, nauke koja je danas u uzletu.

Videti: Analiza, Aritmetika, Geometrija, Topologija.

ROBERVAL, v. Geometrija

SERE, v. Algebra

SKOLEM, v. Matematička logika

STEVEN, v. Aritmetika

ŠASL, v. Geometrija

ŠIKE, v. Algebra

ŠTAJNER, v. Geometrija

TANERI ŽIL (Jules Tannery)

Francuski matematičar (1848 – 1910).
Još za vreme školovanja u Kaenu, prateći predavanja iz elementarne matematike, dobija na opštem konkursu prvu nagradu za matematiku i filozofiju. Dalje školovanje nastavlja na Visokoj školi a profesor postaje 1869 (najpre u Renu, zatim u Kaenu). Tezu je odbranio 1874. i zatim predaje na katedri specijalne matematike, fizičke i eksperimentalne mehanike na Sorboni (1875 – 1880). Od 1884. je upravnik naučnih proučavanja na Visokoj normalnoj školi i na toj funkciji će ostati do smrti.

Načela matematike i način njihovog izražavanja najviše su ga zaokupljali: posebno je radio na osnovama analize čije je principe produbio. Okrećući napore ka nastavi, koordinaciji i otkrivanju dobijenih dostignuća, manje je dolazio do novih istina. Njegov pedagoški rad bio je značajan i osećao se na svim stupnjevima. Neki savremenici su mu zamerali naglašeno zanimanje za apstrakciju; ipak, veoma je mnogo radio na reformi matematičke nastave, težeći da je približi stvarnosti, kako se inače nastojalo početkom XX v. Prema Taneriju, profesori moraju da poznaju logičke osnove nauke koju predaju i, ako ne govore mnogo, to ne treba da bude iz neznanja već iz jasnog stava o sopstvenom zadatku u pogledu poimanja načina obrazovanja.

TARSKI, v. Matematička logika

VAJERŠTRAS KARL (Karl Weierstrass)

Nemački matematičar (1815–1897).
Školovao se u Minsteru i Bonu a njegov profesor matematike bio je Guderman (Christoph Gudermann, 1798–1852), stručnjak za eliptičke funkcije čija je osnova proučavanja bilo razvijanje u cele redove. Vajerštras će docnije izvući najbolji deo profesorovih proučavanja. Kao profesor u srednjoj školi, svoje matematičke radove pripremao je u potpunoj usamljenosti: kad je 1854. štampana njegova rasprava u časopisu *Journal de Crelle* o Abelovim funkcijama, odmah je stekao naučni renome. Univerzitet u Kenigsbergu mu poverava počasni doktorat (*honoris causa*); od vlade dobija slobodnu godinu da nastavi svoja istraživanja; 1856. dobija katedru u institutu u Berlinu i u akademiji nauka; profesor univerziteta u Berlinu postao je 1864.

Objavljivao je malo. Njegov uticaj se naročito osećao kroz nastavu pa je ponekad teško u docnijim radovima njegovih brojnih učenika razdvojiti njihova lična otkrića od profesorovih ideja. Tokom nastave, naročito 1865–1866, zatim 1874, Vajerštras je razvio teoriju iracionalnih brojeva, nezavisnu od svakog geometrijskog posmatranja, koja je danas sa teorijama Mereja (Charles Méray, 1835–1911), Kantora* i Dedekinda* potpuno nerazdvojiva od opštih matematičkih koncepcija. U svom predavanju Riman* je 1861. naznačio da za realnu promenljivu kontinuiranost jedne funkcije ne implicira njenu diferencijabilnost. Vajerštras 1872. daje prvi primer kontinuirane funkcije koja nigde nije diferencijabilna. U domenu kompleksne promenljive definiše funkciju, kao i Mere skoro u isto vreme, razvijanjem u ceo red, postepeno proširenim *analitičkim produženjem.* Ova koncepcija proizlazi iz Gudermanovog stava o eliptičkim funkcijama. Ako polazni red konverguje u čitavoj ravni, onda predstavlja *celu trenscendentnu funkciju.* Vajerštras pokazuje da se tada može izraziti u obliku proizvoda beskonačnog broja faktora, *prosti Vajerštrasovi faktori.* U isto vreme kao i Kazorati (Felice Casorati, 1835–1890), otkriva 1876. da se u blizini singularne esencijalne tačke uniformna funkcija može približiti, koliko se hoće, svakoj datoj vrednosti. Ovaj stav je 1879. precizirao Pikar (Emile Picard, 1856–1941). Vajerštras je konstruisao novu teoriju eliptičkih funkcija koja je imala prednost nad Jakobijevom*, budući da ima samo jednu osnovnu funkciju umesto tri. Objavljivanjem 1885. Švarcovog formulara (Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921) naučni svet je upoznao ovu teoriju, od tada opšte usvojenu. U tom momentu proučavanje eliptičkih funkcija dostiglo je najvišu tačku.

VEJL, v. Geometrija

VIJET FRANSOA (François Viète)

Francuski matematičar (1540–1603).
Studirao je pravo u Poatjeu a 1560. upisao se u advokatsku komoru u Fonteneu. U pariskom parlamentu radi 1571, u burgundijskom 1573. Kralj Francuske Anri III uzima ga u službu 1576. Kad je 1589. kralj poginuo (ubio ga je neki verski fanatik u trenutku kad se spremao da se zajedno s protestantima obračuna s katoličkom ligom), Vijet je morao da napusti dužnost.

Naučnu delatnost počeo je radovima iz astronomije i trigonometrije, pišući *Harmonicon coeleste* (*Nebeski zakon*) između 1564–1568, delo koje nikad nije štampano. O njemu postoje kopije u Parizu i Firenci. U isto vreme Vijet piše *Canon mathematicus* (*Matematički zakon*) koji će se štampati od 1571. do 1579. U ovom delu, gde su izračunate numeričke vrednosti kružnih funkcija, pojavljuje se prva sistematska upotreba decimalnih brojeva koju će malo zatim proširiti Steven (Simon Stevin, 1548–1620), ali nezavisno od Vijeta.

Između 1584. i 1589. Vijet radi na delu *Isagoge in artem analyticam* (1591). Upućen u antičku geometriju i algebru XVI veka, trudi se da nađe istraživačku metodu, analizu stranih geometričara. Tako 1600. rekonstruiše raspravu o dodirima Apolonija iz Perge (262–180. pre n. e.), čiji je najznačajniji problem istraživanje kruga koji dodiruje tri data kruga.

Otkriće Diofantovih (III v.) radova je polazna tačka Vijetovih stavova. On uspeva da učini očiglednim osnovni izomorfizam između numeričke algebre Diofanta, Kardana (Jérôme Cardan, 1501–1576), Tartalje (Niccolo Tartaglia, 1499–

1557), Bombelija (Raffaele Bombelli, umro 1572) ili Štifela (Michael Stifel, 1487 – 1567), s jedne strane i s druge strane, domena geometrijske analize koja se uočava u sintetičkim izlaganjima Euklida*, Arhimeda* i naročito Apolonija iz Perge, o kojima spisi Papusa Aleksandrijskog (IIIv.) daju potpuniju ideju.

Da bi objasnio izomorfizam, Vijet iznalazi specijalnu logistiku ili veštinu računa sa simbolima koji predstavljaju kako geometrijske tako i numeričke veličine. On deli analizu na tri dela: *cetetika* se sastoji u usvajanju simbolizma koji dozvoljava da se označe kako nepoznate tako i poznate veličine, da se izraze veze što ih sjedinjuju i da se istakne jednačina koja u apstraktnom obliku rezimira postavljeni problem; *poristička analiza* proučava, transformiše, raspravlja o jednačini; *egzegetika* ili *retička analiza*, dolazeći na konkretan problem, rešava jednačinu bilo konstrukcijom ako je reč o geometriji, bilo računima ako je reč o aritmetici.

Različite Vijetove spise, objavljene od 1579. do 1615 (od kojih su neka dela posmrtna), sakupio je 1646. Van Šoten (Frans Van Schooten, 1615 – 1660). Sa pojavom Dekartove *Geometrije* 1637, Vijetova dela gube aktuelnost ali ostaju od značaja u istoriji matematičkih nauka.

VINOGRADOV, v. Aritmetika

VOLTERA VITO (Vito Volterra)

Italijanski matematičar (1860 – 1940).
Jedan od najpoznatijih italijanskih matematičara, redovni profesor 1900 – 1931. na katedri matematičke fizike univerziteta u Rimu, senator od 1905, Voltera je od početka bio odlučan protivnik fašističkog režima, glasajući sistematski, svakom prilikom, protiv zakona koje je predlagao duče. Za vreme uvođenja rasnih zakona u Italiji, proteran je sa univerziteta i iz Nacionalne akademije ali ga je papa Pije XI tada upisao za člana Pontifikalne akademije nauka.

Volterino naučno delo obuhvata najrazličitije domene: posvetio se optici dvostruko prelomnih sredina, proučavajući kretanja čvrstih tela koja sadrže slobodne tečnosti (ovo proučavanje našlo je primenu u problemu pomeranja Zemljinih polova), zatim integraciji parcijalnih diferencijalnih jednačina, značajnih u mehanici neprekidnih sredina sa dve i tri dimenzije.

Njemu pripada otkriće karakterističnih konusa za jednačine hiperboličkog tipa koje predstavljaju talasne pojave i uvod metode slika koja dozvoljava shematizaciju efekata odbijanja na krutim zaklonima ovih talasnih pojava. Njegovi najznačajniji radovi su u funkcionalnoj analizi (jedan je od stvaralaca ove oblasti), koja nalazi plodne primene u mnogim oblastima biologije i fizike. U ovoj disciplini Voltera prvi put primenjuje sredstva analize na izvesne probleme kao što je borba za život i evolucija populacija. Zamišljajući prisutne dve biološke vrste koje se bore za istu hranu, odredio je njihovo povećanje ili njihovo smanjivanje pomoću računa verovatnoće, došavši za fluktuaciju broja jedinki do kvantitativnih zakona adekvatnih statističkim podacima dobijenim laboratorijskim istraživanjima na insektima i protozoama. Tada postavlja principe demografske dinamike koja predstavlja analogiju sa dinamikom materijalnih sistema. U istoj oblasti proučava rastenje organizama i Mendelove zakone o osobinama nasleđa u kojima se dotad nije primenjivala matematika, zatim analizu faktora smrtnosti. Zanimali su ga i brojni problemi analize i matematičke fizike, gde je otvorio široke puteve u domenu integralnih i integro-diferencijalnih jednačina, analognim integralnim jednačinama, ali koje, osim toga sadrže izvesne nepoznate funkcije. Preduzeo je sistematsko proučavanje funkcija, čiji je argument bilo kriva, bilo obična funkcija; prve je nazvao *funkcije linija*, a Adamar* je druge označio kao *funkcionalne*. Opšte proučavanje ovih prvih funkcija bilo je prvi predmet funkcionalne analize.

Voltera je objavio i biografske beleške o značajnim italijanskim matematičarima: Beltramiju (Eugenio Beltrami, 1835 – 1900), Betiju (Enrico Betti, 1823 – 1892), Brioskiju (Francesco Brioschi, 1824 – 1897), Kazoratiju (Felice Casorati, 1835 – 1890).

ŽORDAN KAMIJ (Camille Jordan)

Francuski matematičar (1838 – 1922).
Prvo obrazovanje stekao je u Lionu. U Pariz odlazi 1867, a 1873. stupa u Politehničku školu. Na katedri analize nasleđuje Ermita* 1876; u Kolež-de-Fransu je 1875 – 1883. Direktor „Matematičkog lista“ postao je 1885.

Jedna od njegovih prvih rasprava odnosi se na simetrije poliedara (1865), a *Rasprava o grupama kretanja* (1867) neposredno se nadovezuje na kristalografska proučavanja Bravea (Auguste Bravais, 1881 – 1863). Ovi prvi radovi koje između ostalih 1865. i 1869. dopunjuju dva *Komentara o raspravi Galoa* pokazuju pravac njegovih istraživanja. On će pisati:

„To je revnosno čitanje tečaja više algebre Serea (Alfred Serret) koji me uputio u algebru i podstakao da doprinesem njenom napretku“.

Godine 1870. štampa se *Rasprava o supstitucijama i algebarskim jednačinama* koja će imati veliku ulogu u razvoju teorije grupa. Oslanjajući se na pojam grupe u celokupnom svom algebarskom delu, dopunjuje dela Abela* i Galoa*, razvija teoriju oblika na kojoj se pre svega zasnivao njegov renome. S druge strane, on otvara sasvim nove puteve. Sledeći primer Galoa skoro je isključivo koristio sintetička rezonovanja, umnogom smanjujući računanje. Usuđivao se da priđe mnogim problemima koji su dotad bili odbačeni u matematici. Pita se šta je površina, zapremina, integral, dužina luka krive, šta je kriva ili domen (otuda *Žordanove krive*). To su bikontinulane aplikacije segmenta [0, 1] u afinoj ravni. Žordanova kriva je zatvorena ako 0 i 1 imaju istu sliku. Precizirajući „očigledne“ intuicije, Žordan dokazuje da ako je jedna takva kriva bez dvojne tačke, ona deli ravan na dve oblasti.

Za proučavanje integrala ispituje pojam mere skupova tačaka. Ova mera biće potom brzo zamenjena Borelovom merom. Iz ovih istraživanja nastaće nova teorija realne promenljive, s kojom će se proslaviti njegov učenik i biograf Lebeg*.

JUGOSLOVENSKI MATEMATIČARI

BAJRAKTAREVIĆ MAHMUT

Bosansko-hercegovački, odn. jugoslovenski matematičar (1909 – 1985). Rođen je u Sarajevu, umro je u Bugojnu.

Osnovnu školu i gimnaziju završio je u Sarajevu, gde je maturirao 1929. Diplomirao je matematiku na Filozofskom fakultetu u Beogradu 1933. Od 1934. do kraja drugog svetskog rata bio je nastavnik gimnazije u Sarajevu. Posle rata bio je profesor gimnazije i Više pedagoške škole u Sarajevu. Doktorat matematičkih nauka stekao je 1953. na Sorboni sa disertacijom: *Sur certaines suites itérées* (*O izvesnim iteriranim nizovima*). Bio je predavač, zatim docent i vanredni profesor Filozofskog fakulteta u Sarajevu i potom vanredni i redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu, član Naučnog društva i ANUBiH-a. Recenzirao je znatan broj naučnih radova objavljenih u ediciji „Radovi Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine", koju je niz godina uspešno uređivao i koja je postala jedna od najvrednijih i najredovnijih akademijskih edicija, vrlo značajna za razvitak i afirmaciju bosansko-hercegovačkih matematičara. Koristan je bio njegov rad u Odjeljenju prirodnih i matematičkih nauka, čiji je sekretar bio u jednom periodu. Kao dugogodišnji predsednik Komisije za naučni rad na Odsjeku za matematiku, značajno je doprineo organizovanijem pristupu naučnom radu kod nas. Veliku je aktivnost pokazao u Društvu matematičara, fizičara i astronoma BiH, kao i u Savezu društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Poznati su i njegovi radovi pedagoško-didaktičkog karaktera. Napisao je veliki broj recenzija za udžbenike, priručnike i zbirke zadataka namenjene osnovnim i srednjim školama, odn. fakultetima, sarađujući intenzivno na izradi planova i programa za nastavu matematike i fizike u osnovnim i srednjim školama. Stalno i intenzivno bio je uključen u razne vidove matematičkog života u našoj zemlji. Odigrao je presudnu ulogu u celokupnom razvitku matematike u BiH.

Naučno interesovanje Bajraktarevića i odgovarajući uspešni naučni rezultati ostvareni su, u prvom redu, u oblasti funkcionalnih jednačina, osobito onih koje stoje u vezi sa određenim sredinama, a zatim u oblasti iterativnih nizova i teorije sumabilnosti. Objavio je pedesetak naučnih radova koji su pobudili zapaženo interesovanje domaćih i stranih matematičara. Veliki deo njih, pored povoljne ocene u međunarodnim referativnim časopisima, dobili su istaknuto mesto u nekoliko svetskih monografija, npr., u *Itogi nauki i tehniki, Matematičeskij analiz*, Tom 12 (1974), u monografijama Janosa Aczela, Mareka Kuzme, D. S. Mitrinovića i drugih. Njegovi radovi o uopštenim sredinama dali su podsticaj za dalja istraživanja u kojima su učestvovali naši i inostrani matematičari.

Rezultate svojih istraživanja izlagao je na više domaćih i stranih matematičkih skupova. Držao je predavanja u Matematičkom institutu u Beogradu, u Matematičkom institutu Akademije nauka Sovjetskog Saveza u Moskvi i na Univerzitetu u Debrecinu.

Nekoliko radova Bajraktarevića odnosi se na nizove dobijene iteracijom. Oni se nastavljaju jedan na drugi. Ispituje se konvergencija određenih iterativnih nizova i granične funkcije tih nizova dovode se u vezu sa rešenjima raznih funkcionalnih jednačina, odn. sistema funkcionalnih jednačina. Bajraktarevićevi rezultati dobijeni na taj način predstavljaju modifikacije, odn. poboljšanja rezultata nekih drugih autora, Morgana, Varde (Warda), Fulera (Fuller), Korkina i Beneta (Bennet). Radi primera, navodimo samo neke radove: *O konvergenciji niza* (x_n) *čiji su članovi definisani jednačinom* $x_{n+1}=f(x_n)$ („Glasnik matematički, fizički i astronomski" 6, Zagreb, 1951); *Sur une généralisation de certaines suites itérées* (*O jednoj generalizaciji izvesnih iterativnih nizova*, Publications Inst. math. XI, Beograd, 1957). U njegovoj doktorskoj disertaciji izneseni su sistematski i u najopštijoj formi rezultati dobijeni u nekim prethodnim radovima.

Veliki broj njegovih radova odnosi se neposredno na funkcionalne jednačine, ili su sa njima povezani na ovaj ili onaj način. Šest radova se odnose na integro-funkcionalne jednačine. On se oslanja na opšte teoreme o fiksnim tačkama i promatra integro-funkcionalnu jednačinu vrlo opšteg tipa i dokazuje postojanje jedne klase neprekidnih rešenja, a pod strožim uslovima i postojanje jedinstvenosti neprekidnog rešenja. Ispituje neke integro-funkcionalne jednačine nekih stranih matematičara, gde postiže izvesna uopštenja. Na ovu problematiku odnose se, između ostalih, radovi: *Sur une équation intégro-fonctionnelle sans limitation* (*O jednoj integro-funkcionalnoj jednačini bez ograničenja*", Glasnik mat. fiz. i astr." 14, Zagreb, 1959); *Sur les solutions de certaines équations fonctionnelles et intégrales* (Publications Inst. math. 4 (18), Beograd, 1964); *O rešenijah nekatoryh funkcional'nyh uravnenij* (*O rešenjima nekih funkcionalnih jednačina*, „Matematičeskij sbornik" 66 (108), Moskva, 1965).

Posvećena je velika pažnja funkcionalnim jednačinama raznih tipova u velikom broju Bajraktarevićevih radova. Raspravljaju se potrebni i dovoljni uslovi za određeno rešenje jednačine. Ti radovi stoje u tesnoj vezi sa odgovarajućim radovima niza stranih i domaćih autora, kao npr.: *Sur certaines équations fonctionnelles* (*O izvesnim funkcionalnim jednačinama*, „Vesnik Društva mat. i fiz. NRS 14, Beograd, 1962); *Sur les solutions convexes d'une équation fonctionnelle* (*O konveksnim rešenjima jedne funkcionalne jednačine*,

ANUBiH, Radovi LXI, 17, Sarajevo, 1978): *Sur une solution de l'équation fonctionnelle* $\varphi fx-\varphi x=hx$ *déterminée par une solution de l'équation d'Abel et par une série (divergente)* (*O rešenju jedne funkcionalne jednačine* $\varphi fx-\varphi x=hx$ *određene rešenjem pomoću Abelove jednačine i reda (divergentnog)*, ANUBiH, Radovi LVIII, 6, Sarajevo, 1979).

Najznačajniji radovi se odnose na razne vrste sredina. Obrađuju se osnovni problemi jednakosti, homogenosti i karakterizacije sredina. I ovi su radovi povezani sa nizom radova stranih autora, kao: *Quelques remarques sur ma note „Sur une généralisation des moyennes quasilinéaires"* (*Neke primedbe na moju belešku „O jednoj generalizaciji kvazilinearnih sredina"*, Publications Inst. math. 5 (19), Beograd, 1965); *Über die Vergleichbarkeit der mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte* (*O uporedivosti srednjih vrednosti koje su obrazovane sa funkcijama težine*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 4, Budapest, 1969).

Bajraktarević se bavio raznim pitanjima vezanim za teoriju sumabilnosti, gde je postigao važne rezultate.

Kao istaknuti naučni i nastavni radnik, kao jedan od matematičara koji je celokupnom svojom aktivnošću delovao u okviru jugoslovenske matematike i bitno doprineo njenom razvoju, dobio je razna društvena priznanja i značajne nagrade.

Lit. Radovi, knjiga LXVI, Odjeljenje prirodnih i matematičkih nauka, knjiga 19, ANUBiH, povodom 70-godišnjice života Bajraktarevića.

BAKOVIĆ VLADO

Crnogorski, odn. jugoslovenski matematičar (1941–1982). Rođen je u Sadicima-Pavino Polje, umro je u Nikšiću.

Osnovnu školu završio je u Tomaševu, a gimnaziju u Bijelom Polju 1959. Diplomirao je teorijsku matematiku na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu 1963. Bio je profesor srednje škole u Nikšiću, a 1967. magistrirao je s radom *Metrizacija topoloških prostora*. Bio je na specijalizaciji na državnom Univerzitetu u Moskvi. Na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu 1976. odbranio je doktorsku disertaciju *Lokalno-konačni i njima bliski beskonačno-dimenzionalni prostor*. Školske godine 1980/81. proveo je na Univerzitetu u Varšavi. Bio je profesor Pedagoške akademije u Nikšiću, gde je predavao analizu I i analizu II na Odsjeku za matematiku, a zatim docent na Nastavničkom fakultetu u Nikšiću, gde je predavao matematiku I i matematiku II. U zvanju docenta na Institutu za matematiku i fiziku Univerziteta „Veljko Vlahović" u Titogradu predavao je diferencijalnu geometriju i topologiju i teoriju funkcija kompleksne promenljive i matematiku na Odsjeku za fiziku. Bio je aktivan u društveno-političkom radu, kao i u samoupravnim organima na Nastavničkom fakultetu u Nikšiću.

Sa svojim saopštenjima učestvovao je na nekim međunarodnim skupovima. Objavio je nekoliko stručnih i naučnih radova. Od stručnih radova pominjemo: *O aksiomima dimenzije metričkih prostora* (1972) i *Granica i neprekidnost* (1978). Od naučnih radova navodimo neke: *Beskonačno merni prostori i aksiomatika PS Aleksandrova, Topologija i njene primene* (1973); *Jedna klasifikacija beskonačno mernih prostora* (1979): *O nekim svojstvima lokalno-konačno mernih prostora* (1980).

BANDIĆ IVAN

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1903 – 1973). Rođen je u Kikindi, umro u Beogradu.

U Kikindi je završio osnovnu i srednju školu. Studirao je matematiku na Filozofskom fakultetu u Beogradu, gde je diplomirao 1928. Bio je više godina profesor matematike u srednjoj školi, a zatim i profesor Više pedagoške škole u Beogradu. Doktorsku disertaciju *Metode rešavanja neodređenih diferencijalnih jednačina koje se javljaju u teoriji elastičnosti, hidrodinamici i elektronici* odbranio je 1958. Bio je profesor Farmaceutskog fakulteta Univerziteta u Beogradu. Veoma je aktivno učestvovao u radu Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije. Posebno se isticao u radu svih komisija za izradu nastavnih programa matematike u školama raznih profila. Bio je predstavnik SFRJ u Međunarodnoj uniji za matematičku nastavu, sarađujući u izradi zajedničkih referata na međunarodnim kongresima u Briselu, Edinburgu i Stokholmu. Neko vreme bio je odgovorni urednik časopisa *Nastava matematike i fizike*. Svojim radom isticao se u Prosvetnom savetu SR Srbije, u Zavodu za osnovno obrazovanje i za obrazovanje nastavnika SR Srbije, kao i u Jugoslovenskom zavodu za proučavanje školskih i prosvetnih pitanja.

Napisao je i objavio preko sedamdeset stručnih i metodičko-pedagoških članaka i knjiga (udžbenika), posvećenih problemima nastave matematike na svim nivoima i raznim oblicima rada u vezi s tim. Objavio je udžbenik iz više matematike *Matematika za studente Farmaceutskog fakulteta* (1960), kao i raspravu *Ostvarivanje uloge i značaja matematike u nastavnom programu na višim školama* (1961).

U domaćim i inostranim naučnim časopisima Akademija nauka i naučnih društava objavio je preko četrdeset naučnih

matematičkih radova. Ti radovi pripadaju teoriji diferencijalnih jednačina. Ima među njima i radova koji se odnose i na druga pitanja (geometrijska interpretacija jednog Ojlerovog stava, geometrijska interpretacija jednog stava algebre, geometrijska interpretacija nekih trigonometrijskih proizvoda i druga).

Bandić se bavio kriterijumima integrabilnosti diferencijalnih jednačina, posebno onih jednačina koje se sreću u tehnici i fizici. Tu dolazi, npr., Lijenardova diferencijalna jednačina, zatim jednačina koja sadrži kao poseban slučaj Emdenovu diferencijalnu jednačinu, kao i druge slične jednačine. U tim radovima široko je koristio relativan izvod Mihaila Petrovića, gde je taj operator od posebnog značaja za diferencijalne jednačine oblika $u(x, y, y', y'') = v(x, y, y', y'')$, gde su u i v homogene funkcije argumenata y, y', y'', koje nisu obavezno istog stepena homogenosti. Evo nekoliko Bandićevih radova koji se odnose na kriterijume integrabilnosti diferencijalnih jednačina: *Sur intégration d'une équation différentielle non-linéaire du deuxième ordre* (*O integraciji jedne diferencijalne nelinearne jednačine drugog reda*, 1957); *Sur l'équation différentielle d'un problème de technique etudiée par M. R. Gran-Olssen* (*O diferencijalnoj jednačini tehničkog problema studiranoj od M. R. Granolsena*, 1960); *Sur le critère d'intégrabilité de l'équation différentielle généralisée de Lienard* (*O kriterijumu integrabilnosti generalisane diferencijalne jednačine Lijenarda*, 1961); *Sur la résolution d'une classe d'équations différentielles à deux fonctions inconnues, avec application à la théorie de l'elasticité* (*O rešavanju jedne klase diferencijalnih jednačina sa dve nepoznate funkcije, sa primenom na teoriju elastičnosti*, 1961); *Sur des cas d'intégrabilité d'une équation différentielle non-linéaire du deuxième ordre que l'on rencontre en Physique théorique* (*O slučajevima integrabilnosti jedne nelinearne diferencijabilne jednačine drugog reda koja se sreće u teorijskoj fizici*, 1968) i mnogi drugi.

Mnogi Bandićevi radovi iz teorije diferencijalnih jednačina odnose se na neodređene diferencijalne jednačine u kojima se javlja više nepoznatih funkcija, a koje su česte u teorijskoj fizici i tehnici. Ovim jednačinama posvećena je i Bandićeva doktorska disertacija. Postigao je originalne rezultate u proučavanju nekih jednačina koje se sreću u problemima elektrotehnike, izotermičke gasne kugle i teorijske fizike uopšte. U tom pogledu evo nekih njegovih radova: *Sur une classe d'équations différentielles indéterminées du deuxième ordre* (*O jednoj klasi neodređenih diferencijalnih jednačina drugog reda*, 1958): *Sur une classe d'équations différentielles indéfinies du deuxième ordre qui apparait dans la théorie de l'élasticité, dans l'électronique et dans la technique* (*O jednoj klasi neodređenih diferencijalnih jednačina drugog reda koja se javlja u teoriji elastičnosti, u elektronici i u tehnici*, 1962); *Sur une équation différentielle indéterminée du deuxième ordre qu'on rencontre en Physique* *théorique* (*O jednoj neodređenoj diferencijalnoj jednačini drugog reda koja se sreće u teorijskoj fizici*, 1967) i mnogi drugi.

Bandić se svojim naučnim i metodičko-pedagoškim radom istakao među jugoslovenskim matematičarima.

BERIĆ MLADEN

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1885–1935). Rođen je u Badovincima kod Šapca, umro u Beogradu.

Pošto je završio srednju školu, Berić je bio student kod Mihaila Petrovića. Kao odlično diplomiranog studenta Petrović ga je izabrao za asistenta teorijske matematike 1910. Bio je suplent prve beogradske gimnazije i istovremeno je radio kao asistent dnevničar. Na predlog Mihaila Petrovića i Milutina Milankovića izabran je 1912. za docenta matematike, dok je 1919. izabran za vanrednog profesora. Sticajem životnih okolnosti Berić je morao da napusti univerzitet. Posle prvog svetskog rata, M. Petrović je sa M. Berićem održao skraćene kurseve za studente matematike koji su bili ometeni ratom i za te kurseve postoje studentska litografisana skripta. Bio je rukovodilac Opšte državne statistike.

Inspirisan poligonalnom metodom M. Petrovića, odbranio je 1912. doktorsku disertaciju pod nazivom *Figurativni poligoni diferencijalnih jednačina prvog reda i njihova veza sa osobinama integrala*. Ona sadrži: definiciju figurativnih tačaka i figurativnog poligona, kao i drugih izraza vezanih za poligon; definiciju asimptota pojedinih grana funkcije koja je definisana datom diferencijalnom jednačinom u blizini date tačke; pokazuje kako se dobijaju asimptote drugog, trećeg, itd. reda i kako se iz njih dobija red, koji predstavlja traženo rešenje, odnosno granu tog rešenja koju smo izabrali za razvijanje u red; primenu na nekoliko problema analitičke teorije diferencijalnih jednačina prvog reda. Posle toga posmatra se varijacija integracione konstante, pa se dobijaju razne teoreme o pokretnosti i nepokretnosti singulariteta. On je prvi doktor matematičkih nauka na Univerzitetu u Beogradu.

Direktno nadahnut Milankovićevim geometrijskim tumačenjem beskonačnog geometrijskog reda, Berić je napisao rad *Razmatranje o konvergenciji i divergenciji redova* i objavio ga u „Glasu" SANU 1921, posle Petrovićevog i Milankovićevog prikaza rada na skupu Akademije prirodnih nauka i njihovog predloga da se rad objavi u „Glasu". Taj rad spada u grupu radova koji su reafirmisali, proširili i produbili geometrijske metode u proučavanju beskonačnih redova i time potvrdili da se uporedo sa analitičkim metodama mogu uspešno koristiti i geometrijske metode u tom proučavanju. Objavio je još neke radove iz oblasti svoje struke.

BERTIĆ VATROSLAV

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar. O njegovoj se biografiji za sada ne zna ništa. Delovao je kao matematičar sredinom XIX stoleća. Iz Budima je slao svoje članke „Danici Ilirskoj" i u Budimu je objavio jednu svoju knjigu.

V. Bertić je 1846. u „*Danici Ilirskoj*" objavio članak *Nješto o matematici*. U tom članku piše o raznim pitanjima povezanim sa ulogom matematike u naporima za narodni preporod. Ističe važnost i predmet matematike i podvlači da se bavi sa dve oblasti, od kojih je prva *umovna* i odnosi se na razmatranje veličina, dok je druga *delovna* i odnosi se na fizičku prirodu veličina. Matematika je, po njemu, postala temelj tehničkih nauka, a po ovima se meri blagostanje. Razmatra matematiku kao jedan temelj kulturnog obrazovanja i smatra da je potrebno što pre objaviti na našem jeziku pristupačnu matematičku knjigu. Nedostatak škola u Hrvatskoj je uzrok lošeg stanja u matematičkim naukama. Ona se predaje samo u vojnim školama i to na nemačkom jeziku, dok se u gimnazijama, osim u Karlovcu, ne predaje.

U drugom članku *Književna vijest*, objavljenom iste godine, Bertić nastavlja svoja izlaganja i podvlači šta treba učiniti i kako treba postupiti sa matematičkim obrazovanjem u situaciji buđenja nacionalne svesti. Zalaže se za matematičke udžbenike pisane na našem jeziku. Odlučno je protiv prevođenja udžbenika i za stvaranje udžbenika na našem jeziku. Neznanje matematike, ne samo prostog puka već i inteligencije, velika je opasnost za narodnu stvar i podvlači da nema narodnog blagostanja bez matematike koja je temelj i prirodnim naukama i tehničkom napretku. Podvrgava kritici metodičke postupke u udžbenicima i ne slaže se sa odvajanjem algebre od aritmetike. Oba Bertićeva članka su zanimljiva i u terminološkom pogledu.

Bertić je 1847. objavio u Pešti knjigu *Samouka pokus prvi*. On traži promenu ne samo metodsku, već i metodološku. U tom pogledu na njega mnogo utiče Lajbnic. Njemu nije dovoljno sjedinjenje aritmetike i algebre, već želi da u simbolima vidi pojmove, da u relacijama algebarskih simbola vidi relacije pojmova i misli. Pojmove treba najpre predočiti formalističkim matematičkim simbolima, pa će se matematičkim transformacijama doći do znakova koje će obrnuto biti moguće pridružiti pojmovima. Tako ćemo doći do novih misli i rezultata. Tu nam matematički formalizam pomaže u izvođenju logičkih operacija s pojmovima i pridružuje na određeni način pojmove simbolima. U čitavom svom izlalaganju nesumnjivo ima neke elemente matematičke logike, iako nije išao za tim da postavi bilo kakvu teoriju matematičke logike. Mada je pod uticajem Lajbnica, ipak je bliži Bulu koji je svojim delima započeo eru matematičke logike. Bertić u svojim izlaganjima ima implicite mnoge elemente matematičke logike koje je formulisao Bul. On nije svesno stvarao sistem matematičke logike, ali bez obzira na to Bertićeva korelacija pojmova i simbola predstavlja bitni preduslov takve teorije. Bertićeva nastojanja moraju se smatrati jednim od onih napora koji su doveli do te teorije.

U našoj istoriji matematike Bertić ostaje kao prvi u nastojanjima da se ostvare neki rezultati u oblasti matematičke logike.

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (II).

BERTOLINO MILORAD

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1929 – 1981). Rodio se u Pančevu, umro je na Ozrenu.

Gimnaziju je završio u Loznici. Matematiku je diplomirao 1953. na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Doktorsku disertaciju *Egzistencija asimptotskih rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina* odbranio je 1961. na istom fakultetu, gde je bio i profesor matematike od 1969. Predavao je mnoge oblasti iz teorijske i primenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu, na Građevinskom fakultetu, kao i u drugim visokoškolskim i naučnim ustanovama. U Matematičkom institutu u Beogradu bio je rukovodilac seminara koji se odnosio na kvalitativnu analizu diferencijalnih jednačina. Učestvovao je sa referatima na domaćim i inostranim kongresima i simpozijumima matematičara. Bio je više godina član i sekretar redakcionog odbora časopisa „Matematički vesnik", a zatim član redakcionog odbora i glavni urednik časopisa „Dijalektika". Bio je dekan Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu i više puta sekretar Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije, kao i veoma aktivni član mnogih komisija čiji je rad bio posvećen problemima nastave i nauke u oblasti matematike. Učestvovao je vrlo aktivno u društvenom i političkom radu kao član i sekretar Univerzitetskog komiteta Saveza komunista u Beogradu, kao član Gradske konferencije, Centralnog komiteta i Predsedništva Centralnog komiteta Saveza komunista Srbije, a zatim kao predsednik Skupštine univerziteta u Beogradu i član Saveta univerziteta i mnogih drugih društveno-političkih organizacija. Bio je član domaćih i inostranih naučnih društava.

M. Bertolino dao je niz naučnih i stručnih radova iz teorije diferencijalnih jednačina, istorije i filozofije matematike, kao i niz radova koji se odnose na oblast filozofije prirodnih nauka i

matematike, na reformu školstva, na organizaciju naučnog rada, na prikazivanje matematičkih knjiga, na razne veze s matematikom, a zatim na društveno-političku aktivnost.

U oblasti diferencijalnih jednačina dao je 35 naučnih radova. U nekim radovima posmatra se i koristi Čapliginova metoda približne integracije, npr., u radovima: *Procédés de l'encadrement des solutions des équations différentielles* (*Postupci uokvirenja rešenja diferencijalnih jednačina*, Beograd, 1957) i *Théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles* (*Teoreme o asimptotskom ponašanju rešenja izvesnih diferencijalnih jednačina*, Beograd, 1961). I u drugim radovima se koristi Čapliginova metoda, često se tretiraju asimptotska rešenja, uzimaju se u razmatranje radovi iz diferencijalnih jednačina M. Petrovića, T. Pejovića i D. S. Mitrinovića, kao i drugih veoma poznatih stranih matematičara (Abel, Veber, Besel i drugi). U svojim radovima M. Bertolino je došao do značajnih i originalnih rezultata, kao i do novih metoda. Sve ga to potvrđuje kao originalnog stvaraoca u teoriji diferencijalnih jednačina. To pokazuju, npr., radovi: *„Tuyaux" curvilignes des solutions d'une équation différentielle* („Cevi" krivolinijske rešenja jedne diferencijalne jednačine, Beograd, 1964), *Solutions asymptotiques d'une équation différentielle au deuxième membre rationnel* (*Asimptotska rešenja jedne diferencijalne jednačine sa drugim racionalnim članom*, Beograd, 1966), *Priorité de Michel Petrovitch relative au théorème de Tchapligine sur les inégalités differentielles du premier ordre* (*Prioritet Mihaila Petrovića koji se odnosi na teoremu Čapligina o diferencijalnim nejednakostima prvog reda*, Beograd, 1967), *Structure de l'intégrale générale des équations différentielles* (*Struktura opšteg integrala diferencijalnih jednačina*, Beograd, 1979) i drugi. Značajna je njegova rasprava istorijsko-metodološkog karaktera *Diferencijalne i integralne jednačine u Jugoslaviji* (Beograd, 1979), u kojoj je prikazao razvitak teorije diferencijanih jednačina u Jugoslaviji.

Među stručnim radovima ističu se udžbenici: *Matematika II* (1965 – 1981), *Metode primenjene analize* (1970), *Numerička analiza* (1977) i *Diferencijalne jednačine* (1980).

M. Bertolino se bavio istorijom, metodologijom i filozofijom matematike, nastojeći uvek da problemima teorije saznanja u matematici pristupa marksistički. U vezi s tim napisao je veliki broj članaka, kao i knjige *Matematika i dijalektika* (1974) i *Matematika, prirodne nauke i marksističko obrazovanje* (1980), što je značajno uticalo na idejno obrazovanje nastavnika matematike srednjih škola, kao i drugih matematičara uopšte. Treba istaći da je veliki deo svog rada posvetio unapređenju nastave matematike u srednjoj školi. Mnogi njegovi zanimljivi napisi imaju literarno-istorijski karakter i nisu stvarno vezani za matematiku, ali su interesantno štivo koje se lako čita.

Kao afirmisani matematičar i marksist, Bertolino pripada, celim svojim naučnim, nastavnim i društveno-političkim radom, redu istaknutih jugoslovenskih matematičara.

BILIMOVIĆ ANTON

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1879–1970), ruske nacionalnosti. Rođen je u Žitomiru, u SSSR-u, umro je u Beogradu.

Završio je 1896. Kijevski kadetski korpus. Studije je započeo u Nikolajevskom inženjerskom učilištu u Petrogradu i nastavio ih je na Fizičko-matematičkom fakultetu Kijevskog univerziteta, na kojem je diplomirao 1903. Iste godine postavljen je za asistenta mehanike pri katedri mehanike Kijevskog univerziteta. Godine 1907. postao je privat-docent, a 1915. izabran je za redovnog profesora Novorosijskog univerziteta u Odesi. U Jugoslaviju je prešao 1920. Od 1926. je redovni profesor racionalne mehanike na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Predavao je matematiku na Šumarskom odseku Poljoprivrednog fakulteta. Bio je redovni član Srpske akademije nauka i umetnosti, sekretar njenog odelenja prirodno-matematičkih nauka i više godina upravnik Matematičkog zavoda Filozofskog fakulteta Univerziteta u Beogradu. Aktivno je učestvovao u radu Društva matematičara, fizičara i astronoma Srbije.

Bilimović je napisao preko 210 većih i manjih naučnih i stručnih radova i knjiga iz oblasti mehanike, matemtičkih i prirodnih nauka. Napisani su na ruskom, srpskohrvatskom, francuskom, nemačkom i engleskom jeziku. Objavljeni su u domaćim i stranim naučnim časopisima akademija nauka i naučnih društava. Koristeći referat o A. Bilimoviću njegovog najistaknutijeg učenika i saradnika, akademika Tatomira Anđelića, izložićemo veoma kratko sumarni pogled na Bilimovićevo naučno i stručno stvaralaštvo.

Za Bilimovićevo naučno i stručno stvaralaštvo je karakteristično da nije usko vezano za jednu ograničenu naučnu oblast, iako „svi problemi koje je obrađivao su iz *mehanike* (racionalne i kontinuuma) ili iz oblasti *matematike i njenih primena* i to pretežno iz geometrije“. Vrlo se rano odlučio za *teoriju vektora*, dosledno je primenjujući u racionalnoj mehanici. Veoma osetljiv za savremene matematičke metode, objavio je *Geometrijske osnove računa sa dijadama*. Tu su prvi put kod nas date osnove teorije afinora, gde je A. Bilimović „prikazao svoju originalnu geometrijsku interpretaciju afinora“. Objavio je veliki broj radova u oblasti mehanike neholonomnih sistema. Njegovi rezultati iz te oblasti su često citirani i korišćeni. Njegov rad *Die Bewegungsgleichungen konservativer Systeme mit linearen Bewegungsintegraden* (*Jednačine kretanja konservativnih sistema sa linearnim stepenima kretanja*, Math. Ann., 1910) „morao je predstavljati vrhunski rezultat svoga doba“. Bilimovićev primer neholonomnog problema ističe se u nemačkoj i sovjetskoj naučnoj literaturi. Bilimović je posvetio neke svoje radove i „problemu više tela nebeske mehanike“. Tu se ističe doprinos A. Bilimovića i „daje se čak i kratak sadržaj njegovog rada“ *Einige partikuläre Lösungen des Problems der n-Körper* (*Nekoliko partikularnih rešenja problema n-tela*, Astr. Nachrichten, 1911). U oblasti mehanike krutih tela posvetio je posebnu pažnju raznim oblicima jednačina. Vodeći računa o Milankovićevoj teoriji pomeranja Zemljinih polova, Bilimović je „neke svoje radove posvetio i problemima *geofizike* (obrtanje Zemlje oko ose i kretanje Zemljinog pola) polazeći uvek od naročitih modela Zemlje koji malo odstupaju od prave Zemlje“. Ti radovi su povoljno primljeni i citirani, npr., R. Šuman „citira Bilimovićevo mišljenje o Zemljinoj osi objavljeno u njegovom radu *Über den Begriff der Erdachse* (*O pojmu zemljine ose*, Beitr. Geophys. Bd. 33, 1931). Niz svojih radova posvetio je i oblasti principa mehanike, gde je „razvio *primenu Pfafove* (*Pfaff*) *metode u dinamici* i formulisao Pfafov i fenomenološki princip“, što se vidi iz njegove monografije *O jednom opštem fenomenološkom diferencijalnom principu* (SANU, 1958), koja je takođe objavljena na engleskom jeziku. Dobili su posebno priznanje njegovi radovi koji se odnose na hidromehaniku i uopšte na oblast mehanike kontinuuma. Autori C. Truesdel (Truesdell) i R. Tupen (Toupin) pominju „Bilimovićevu geometrijsku konstrukciju prostorne prosečne vrednosti tenzora (gradijenta vrtložnosti)“, dok prvi autor citira Pompej-Bilimovićevu teoremu, „u kojoj Bilimović uopštava ranije objavljeni rezultat D. Pompeja koji se odnosio na tzv. izohrona kretanja“.

Treba istaći, da se pored navedenih i drugih problema racionalne mehanike i mehanike kontinuuma, „A. Bilimović uvek bavio i *problemima matematike*, posebno iz *teorije krivih i površi*. Poslednjih godina se bio posvetio problemu *teorije neanalitičkih funkcija* i to naročito sa stanovišta njihove geometrijske interpretacije i primene u teoriji strujanja. Poslednjih dana života završio je rad koji se odnosi na izvesne karakteristične *osobine periodičnih decimalnih razlomaka*.

Posebno treba istaći da je Bilimović preveo sa starogrčkog na srpskohrvatski jezik *Euklidove elemente* i da ih je obogatio svojim naučnim i istorijskim komentarima. Osim toga, objavio je nekoliko članaka iz istorije matematike, kao i nekoliko popularno-naučnih članaka, imajući u vidu negovanje i podizanje matematičke kulture kod nas. U svojim neprekidnim nastojanjima „za stvaranje naučnog ambijenta, on je podstakao osnivanje časopisa *Publications mathématiques de l'Université* *de Belgrade* (*Matematičke publikacije Univerziteta u Beogradu*)".

Veliki deo svog radnog vremena posvetio je nastavi matematike i mehanike. Bio je odličan nastavnik. Njegova predavanja su bila jasna i „stalno se borio da se studije mehanike na Beogradskom univerzitetu usavrše i prošire. Njegova je zamisao prvenstveno i osnivanje posebne studijske grupe za mehaniku na Prirodno-matematičkom fakultetu godine 1951." Napisao je udžbenik *Racionalna mehanika* u četiri dela, „koji je od trajne vrednosti i služiće godinama kao pomoćni udžbenik za studije mehanike." Isto tako napisao je udžbenike iz više matematike *Viša matematika za fizičare, hemičare, biologe i statističare* i *Elementi više matematike* u četiri knjige, kao i neke druge knjige iz više matematike, a sve za one koji matematiku uče kao pomoćni predmet u svojim studijama. Veoma se zanimao za nastavu matematike u srednjoj školi, pa se u tom pogledu istakao kao pisac udžbenika geometrije za srednje škole. Organizovao je i vodio seminare iz nastave matematike za nastavnike srednjih škola i bio je član komisije za polaganje profesorskih ispita. Učestvovao je u pripremama rečnika matematičkih termina na pet jezika i doprineo je da se on i objavi.

A. Bilimović je stvaralac škole mehanike u Beogradu. On je neposredno posle prvog svetskog rata preneo u našu sredinu „visoki nivo mehanike koji je negovala znamenita ruska škola mehanike". Pod njegovim rukovodstvom i u naslonu na njegove radove niz naučnih radnika izradili su svoje doktorske disertacije, od kojih su većina bili profesori Univerziteta u Beogradu, a neki su još i sada.

Po ugledu na značajne stvaraoce u mehanici, A. Bilimović je u osnovi matematičar, koji je uvek gledao na jedinstvo matematike počev od njenih elemenata do visokih rezultata. To se ogledalo u njegovim radovima iz mehanike i u njegovoj nastavi iz mehanike i matematike. Imao je osećaj za genetički uvid i razvitak pojmova i teorija u mehanici i matematici, pa otuda njegova sklonost ka istoriji i metodologiji matematike i mehanike, kako u nastavnom tako i u naučnom radu. Celim svojim naučnim, nastavnim i organizacionim radom mnogo je učinio na stvaranju i podizanju naučnog i nastavnog rada iz mehanike i matematike kod nas. Njegov rad iz mehanike sa njegovim učenicima zapažen je i cenjen u međunarodnim razmerama.

BOGDANIĆ MIRKO DANIEL

Hrvatski, odn. jugoslovenski astronom i matematičar (1762 – 1802). Rođen je u Virovitici, umro je u Budimu.

Matematiku je studirao na univerzitetu u Pešti. Njegova disertacija imala je matematičko-astronomski sadržaj i bila je nagrađena od univerziteta. Bio je nastavnik više matematike na kraljevskoj akademiji u Velikom Varadinu. Boravio je u Beču i postao je asistent za astronomiju na zvezdarnici u Budimu. Tu je promatrao pomrčine Jupiterovih satelita i podatke objavljivao u ediciji *Ephemerides astronomicae*. Ta opažanja pomrčine Jupiterovih satelita imala su verovatno vezu sa određivanjem geografskih koordinata, pa je daljni Bogdanićev astronomski rad bio upravo u tom području.

Učestvovao je u tačnoj izradi geografske karte Mađarske i Hrvatske. Proputovao je čitavu Hrvatsku i vratio se bolestan u Budim. S putovanja je obaveštavao o svojim opažanjima astronoma Ludviga Šedijusa koji je o tome izveštavao u časopisu *Monatliche Correspondenz* (*Mesečna korespondencija*). Uprkos raznim teškoćama odredio je Bogdanić na svom putu više od 150 tačnih geografskih širina, dok mu je određivanje geografske dužine uspelo samo u nekim slučajevima. U Budimu je, uprkos svoje bolesti, nastavio sa svojim opažanjima na zvezdarnici i objavljivanjem tih opažanja. Sa astronomom Lipscikim razrađivao je podatke koje je dobio na putovanju. Ponovo je pokušao da putuje Mađarskom i Hrvatskom, ali nije mogao zbog bolesti. Tada je čuveni astronom Cah predložio da mu se nabavi Hadlejev sekstant i tačan engleski hronometar, što je i učinjeno, ali bez koristi jer je Bogdanić uskoro umro. Bogdanićeva smrt bila je velik gubitak za astronomiju, jer je Bogdanić u sebi vrlo sretno sjedinio tri važna svojstva: teorijski talent, praktičnu veštinu i živu revnost. Na temelju Bogdanićeva rada, posle Bogdanićeve smrti, izrađena je geografska karta u Pešti. Bogdanić je napisao više dela iz astronomije, npr., *O stazama kometa* (*De orbitis cometarum*) i *Nebeska mehanika* (*Mechanica coelestis*). Ta dela pokazuju da je Bogdanić imao veliko interesovanje i za teorijske probleme astronomije.

Pokazao je naročito zanimanje za matematičke probleme. Poznata je njegova matematička rasprava *Formule za pravocrtne likove, odnosno sve što se u vezi s tim može rešiti ako su likovi podeljeni usporednicima* (*Formulae pro spatiis rectilineis, aut quae in haec resolvi possunt, per lineas parallelas dividendis*, 1786).

Zanimljivo je pomenuti da se bavio istorijom, pa je u delu *Događaji svijeta* (1792), objavljenom na našem jeziku, prikazao istoriju starog veka u azijskim zemljama. To delo je zanimljivo i sa astronomskog stanovišta. Tu se javljaju i nazivi na našem jeziku za pojedine astronomske pojmove, što je osobito dragoceno ako se žele istražiti koreni naučnim nazivima na našem jeziku.

Bogdanić je dao vredan doprinos našoj naučnoj baštini i zato je potrebno njegov rad i delovanje potpunije istražiti.

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (I).

BOHNIČEK STJEPAN

Hrvatski, odn., jugoslovenski matematičar (1872 – 1956). Rođen je u Vinkovcima, umro je u Zagrebu.

Osnovnu školu i klasičnu gimnaziju završio je u Vinkovcima, gde je maturirao 1890. Matematiku i fiziku studirao je u Beču kod Eschericha i Weyra. U Beču je 1894. doktorirao sa disertacijom *Beziehungen zwischen zahlentheoretischen Funktionen, die bei einer besonderen Art von Produktentwicklungen der Exponentialfunktion auftreten* (*Odnosi između brojevno teorijskih funkcija, gde se pri naročitoj vrsti razvijanja u proizvod pojavljuje eksponencijalna funkcija*). U Beču je položio i stručni profesorski ispit. Bio je nastavnik u gimnaziji u Vinkovcima i u realci u Zagrebu. Godine 1904. habilitirao je za privatnog docenta algebre i teorije brojeva u Zagrebu, zatim je bio učitelj algebarske analize na Sveučilištu u Zagrebu, a od 1909. profesor Sveučilišta. Bio je redovni profesor Gospodarsko-šumarskog fakulteta i na Filozofskom fakultetu predavao je algebru i teoriju brojeva. Bio je vanredno dobar predavač, strog u dokazima i vrlo pedantan.

Objavio je u domaćim i inostranim časopisima šesnaest naučnih radova. Specijalno se zanimao teorijom brojeva i algebrom. Skoro svi njegovi radovi pripadaju oblasti teorije brojeva i u njima su izlaganja veoma doterana u pogledu matematičke strogosti i načina izlaganja. Naročito se bavio zakonima recipročnosti, diofantskim jednačinama i kvadratnim formama. Dao je značajne priloge teoriji kružnih tela. Na čisto aritmetički način dokazao je da idealskih razreda u telu k_n (brojevno telo proizvedeno rešenjima jednačine $x^{2^n}=1$) ima neparno mnogo. Pre njega taj se rezultat znao dokazati jedino primenom analitičkih metoda. Od njegovih radova istaknimo sledeće: *O zakonu recipročnosti za bikvadratne ostatke potencija u tijelu imaginarnih brojeva* (1903); *K teoriji relativno bikvadratnoga brojnoga tijela* (1905); *Zur Theorie des relativbiquadratischen Zahlkörpers* (*Teoriji relativnobikvadratnih brojevnih tela*, 1906): *Teorija ostataka potencija u algebarskim brojnim tjelesima* (1909); *Kvadratne forme u algebarskim brojnim tjelesima* (1910); *Zur Theorie der achten Einheitswurzeln* (*Teoriji osmog reda jediničnih korena*, 1911); *Kriteriji za rješivost diofantske jednadžbe* $t^2 - Du^2 = -1$ (1920); *K teoriji brojnoga tijela* 2^h*-tih korijena jedinice* (1928); *Prilog geometriji brojeva* (1930).

Lit. Đuro Kurepa u „Glasniku matematičko-fizičkom i astronomskom" o Stjepanu Bohničeku.

BOŠKOVIĆ RUĐER

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar, astronom, fizičar i filozof (1711 – 1787).

Rođen je u Dubrovniku 18. maja 1711, kao osmo dete Pavice i Nikole Boškovića, Hercegovca iz sela Orahova, kraj Popova polja. U isusovačkoj srednjoj školi u Dubrovniku dobio je vrlo solidno osnovno obrazovanje iz matematike i latinskog jezika. U petnaestoj godini života postao je učenik isusovačkog kolegijuma u Rimu i kandidat isusovačkog reda. Na Rimskom kolegijumu Bošković se naročito istakao u studijama matematike, fizike, astronomije i filozofije. U dvadeset devetoj godini života postaje stalni profesor kolegijuma.

Godine 1758. objavljuje svoje glavno delo *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium* (*Teorija prirodne filozofije svedena na jedinstven zakon sila koje postoje u prirodi*). Kraljevsko naučno društvo u Londonu ga prima za svog člana. Profesor je matematičkih nauka na univerzitetu u Paviji, a zatim profesor optike i astronomije na Visokoj školi u Milanu. Podiže modernu astronomsku opservatoriju na Breri, kraj Milana. Bio je direktor optike za pomorstvo u Parizu, gde je nastavio svoj rad u nauci, vodeći žive naučne polemike sa D'Alamberom i Laplasom. Godine 1783. vratio se iz Francuske u Italiju, gde je umro u Milanu, 13. februara 1787. i skromno sahranjen u jednoj milanskoj crkvi.

Profesor na Rimskom kolegijumu, na univerzitetu u Paviji, na Visokoj školi u Milanu, graditelj i direktor astronomske opservatorije u Breri, direktor optike za pomorstvo u Parizu, pozivan da predaje matematičko-fizičke nauke i na drugim visokim školama i univerzitetima, kao na univerzitetu u Padovi i Pizi, univerzalan stvaralac, kao astronom, matematičar, filozof, geodeta, inženjer, arheolog i pesnik, Bošković je bio u naučnim vezama skoro sa svim najistaknutijim naučnicima svoga vremena i kao takav bio je poznat širom Evrope, naročito u Rimu, Milanu, Veneciji, Beču, Parizu, Londonu, Varšavi, Petrogradu i Carigradu. Plodna i blistava naučna aktivnost donela je Boškoviću članstvo u Kraljevskom društvu u Londonu, u Akademiji nauka u Petrogradu, gde je bio izabran za člana u prisustvu Lomonosova, kao i u nizu drugih akademija nauka, rimske, bolonjske, holandske i drugih naučnih društava.

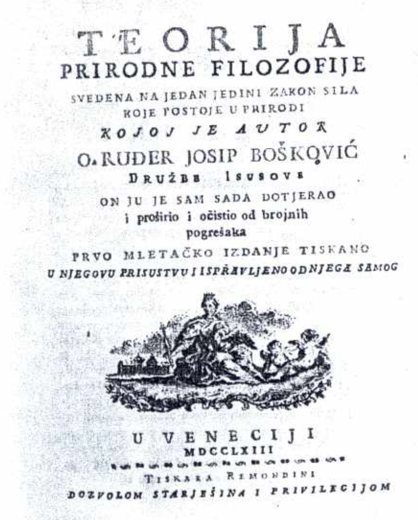
Svoje naučne rasprave i književne sastave Bošković je pisao na latinskom, francuskom i italijanskom jeziku, ali nijednog momenta nije zaboravio na jezik svog rodnog Dubrovnika, koji je često u svojim pismima sestri Anici, zatim braći i prijateljima u Dubrovniku, kao i u drugim zgodama, zvao „slovinskim" ili „naškim" jezikom. Dubrovnik Boškoviću nije bio samo kolevka, nego i njegova domovina koju je on voleo i branio punim žarom svog „slovinskog" rodoljublja, ističući da se u Dubrovniku gaje svim žarom egzaktne nauke, a još više lepa knjiga „bilo na latinskom, bilo na jeziku slovenskom kojim se kod nas govori" i uzdiže Marina Getaldića „slavnog geometra još u ono doba, kada se malo ko davao na nauku tako poštovanja vrijednu".

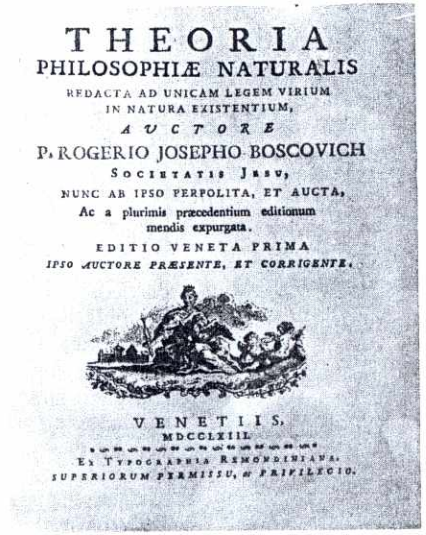
Boškovićevi naučni i filozofski pogledi često su bili u sukobu sa zvaničnom ideologijom crkve, posebno sa ideologijom isusovačkog reda, ali isto tako i njegova intimna raspoloženja, kao čoveka, vrlo često bila su potpuna negacija onoga što je u njegovom ličnom životu, bar po formi, trebalo da simbolizuje isusovačka mantija koju je oblačio i nosio.

Bošković je rano počeo pratiti najpoznatije naučne časopise svoga vremena, ulazio je stvaralački u probleme matematike i njenih primena, u probleme mehanike, astronomije i optike. Veoma su značajni njegovi radovi iz geodezije i praktične astronomije, čime se ističe delo *De litteraria expeditione per pontificam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam* (*O naučnom putovanju po papinoj državi da se odrede dva meridijanska stepena i da se popravi geografska karta*, 1755). Iz praktičnih istraživanja u astronomiji nastao je niz Boškovićevih dela o sfernoj trigonometriji, a u tesnoj vezi s tim istraživanjima stoji njegov rad u optici. On je sjajan teoretičar, konstruktor i eksperimentator kad je reč o optičkim instrumentima i njihovoj primeni u fizici i astronomiji. Kao matematičar, pretežno je bio okrenut ka primenama matematike, ali njegov matematički talenat blista i u teorijskoj matematici, posebno u geometriji. To pokazuje njegovo delo *Elementorum Matheseos ad usum studisae juventutis* (*Elementi opšte matematike za upotrebu omladini koja studira*, 1752), u kojem je majstorski izložio teoriju konusnih preseka. Doticao se osnova matematike u vezi s problemima beskonačnog i neprekidnog i u vezi s problemom paralela u geometriji, podvlačeći hipotetičko-deduktivni karakter geometrije. Svojim shvatanjima neprekidnosti, on je u mnogo čemu anticipirao istaknutog nemačkog matematičara Dedekinda i veoma poznatog francuskog matematičara Ponselea. Iako se Boškovićev veliki matematički talenat ispoljavao u njegovim geometrijskim metodama i istraživanjima, on nije dovoljno koristio

tokove diferencijalnog i integralnog računa, jer „to ti je trudan poso i valja rano počet" isticao je Bošković. Nastojao je da reformiše matematičku nastavu na Rimskom kolegijumu, da je osveži novim tokovima razvitka matematike, ali ga je to dovelo u otvoren sukob s konzervativnom isusovačkom sredinom. Od 1736, kad je u Rimu objavio svoju prvu naučnu raspravu *De maculis solaribus* (*O sunčevim pegama*), pa do 1785, kad je u Basanu objavio u pet tomova niz rasprava iz optike, astronomije i trigonometrije pod naslovom *Opera pertinentia ad opticam et astronomiam* (*Dela koja se odnose na optiku i astronomiju*), nije prošla nijedna godina a da Bošković nije objavio jednu ili više rasprava, odn. knjiga iz matematike, astronomije, fizike, geodezije, meteorologije, građevinske tehnike, arheologije i filozofije.

Bošković je na *originalan* način kreirao svoj sistem prirodne filozofije i izložio ga celovito u svom glavnom delu *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, čije je dvojezično izdanje, prvi put s prevodom na srpskohrvatski jezik, izišlo u Zagrebu 1974. U konstrukciji ove teorije, sigurni su mu putokazi: jednostavnost i sličnost u prirodi i zakon neprekidnosti. Posmatrajući atraktivno-repulzivnu silu u zavisnosti od rastojanja, Bošković je svoj zakon sila grafički predočio u Dekartovom koordinatnom sistemu specijalnom krivom, u nauci poznatom kao *Boškovićeva kriva*. Došao je do zaključka da fizičko telo nije *kontinuum* nego *diskretum*, da je materija *dinamička konfiguracija* konačnog


TEORIJA
PRIRODNE FILOZOFIJE
SVEDENA NA JEDAN JEDINI ZAKON SILA
KOJE POSTOJE U PRIRODI
KOJOJ JE AUTOR
O. RUĐER JOSIP BOŠKOVIĆ
DRUŽBE ISUSOVE
ON JU JE SAM SADA DOTJERAO
i proširio i očistio od brojnih
pogrešaka
PRVO MLETAČKO IZDANJE TISKANO
U NJEGOVU PRISUSTVU I ISPRAVLJENO OD NJEGA SAMOG
U VENECIJI
MDCCLXIII
TISKARA REMONDINI
DOZVOLOM STARJEŠINA I PRIVILEGIJOM


THEORIA
PHILOSOPHIÆ NATURALIS
REDACTA AD UNICAM LEGEM VIRIUM
IN NATURA EXISTENTIUM,
AUCTORE
P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH
SOCIETATIS JESU,
NUNC AB IPSO PERPOLITA, ET AUCTA,
Ac a plurimis præcedentium editionum
mendis expurgata.
EDITIO VENETA PRIMA
IPSO AUCTORE PRÆSENTE, ET CORRIGENTE.
VENETIIS,
MDCCLXIII.
EX TYPOGRAPHIA REMONDINIANA.
SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIO.

Naslovne strane Boškovićevog dela »*Teorija prirodne filozofije*«.

broja izvora međusobnih uticaja, da nijedan argument ne dokazuje da je protezanje materije neprekidno i da se sastoji od nedeljivih tačaka. Boškovićeva zamisao o primarnim elementima materije ušla je u savremenu fiziku, prilagođena, doduše, novim saznanjima o strukturi materije i dalje unapređena. Njegova teorija delovanja atraktivnih i repulzivnih sila uticala je na genezu i evoluciju vrlo značajnog pojma savremene fizike, na *pojam polja sila*. U vezi sa uticajem i ulogom Boškovićeve teorije prirodne filozofije u razvojnim tokovima savremene fizike, dosta određene sudove dali su dva vodeća fizičara našeg vremena, nobelovci Verner Hajzenberg (Werner Heisenberg), i Nils Bor (Niels Bohr), na Međunarodnom simpozijumu u Dubrovniku 1958, posvećenom dvestogodišnjici Boškovićevog glavnog dela.

U svojim raspravama *De Spatio ac Tempore* (*O prostoru i vremenu*), *De Spatio et Tempore, ut a nobis cognoscuntur* (*O prostoru i vremenu kako ih mi saznajemo*), *De motu absoluto, an possit a relativo distingui* (*O apsolutnom kretanju, da li se može od relativnog razlikovati*) i *De vi inertiae* (*O sili inercije*), Bošković izlaže svoje relativističke poglede na prostor, vreme i kretanje, koji su dosta bliski Ajnštajnovim relativističkim pogledima, tako da se ocrtava jedno zajedničko jezgro u njihovim relativističkim vizijama prostora i vremena. Ideja fizičkog polja i ideja četvorodimenzionalnog prostor-vremena, dve velike i fundamentalne ideje u Ajnštajnovoj teoriji relativnosti mogu se genetički povezivati sa odgovarajućim idejama u Boškovićevoj teoriji prirodne filozofije. Boškovićeva i Ajnštajnova uverenost u *harmoniju* svemira, u sveopštu povezanost pojava u prirodi i u objektivnu zakonitost te povezanosti, imala je karakter opštenaučnog ili epistemološkog principa, i kao takva se na određeni način odrazila u njihovim traganjima za opštim zakonima prirode i u njihovim konstrukcijama odnosnih teorija. Bošković je isticao da je svoju teoriju o strukturi materije, za koju Niče kaže da, pored Kopernikove teorije heliocentričnog sistema, predstavlja „najveći trijumf nad čulima, koji je do sada na zemlji postignut", izgradio razmišljanjem, upozoravajući istovremeno da je nije izmislio „po volji kao kakvu hipotezu". Zato odbija svaku pomisao da je ona neka „proizvoljna hipoteza", jer da je potvrđena pozitivnim dokazima i da sledi „nužnim i spontanim spletom zaključaka" iz najjednostavnijih principa prirode, proverenim primerima iz iskustva.

Bošković je dubinom i vidovitošću genija osetio sve one teške i prave dileme spoznajno-teorijskog karaktera koje se porađaju kad se čine pokušaji da se razmrse putevi u lavirintu mikrosveta, kao što ih osećaju današnji veliki istraživači kad nastoje da izgrade, na osnovu ogromnog mnoštva eksperimentalno otkrivenih činjenica, celovitu teoriju o mikrosvetu. Ali te dileme, ma kako da su mu momentano izgledale nerešive, Boškovića nisu odvodile na stranputice skepticizma i agnosticizma. Zato će u pretposlednjem paragrafu svog glavnog dela,

naslućujući mogućnost velikih otkrića u mikrosvetu, jasno zaključiti: „Smatram da će i dalje biti vrlo teško saznati unutarnji splet pojedinih tela, ali se ne bih usudio tvrditi da je to posve nemoguće". Na putu koji je vodio od Njutnove *dinamičke* sinteze univerzuma do Ajnštajnove teorije relativnosti i njegovih pokušaja *dinamičke* sinteze mikrosveta teorijom jedinstvenog fizičkog polja, Bošković je svojom teorijom prirodne filozofije veoma progresivno delovao na tom putu u procesima spoznaje fizičkih fenomena, koji su vodili ka savremenim spoznajama tih fenomena.

Matematički institut u Beogradu objavio je u ediciji klasičnih naučnih spisa prevod na srpskohrvatski jezik dela Ruđera Boškovića *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa erumque vires* (*O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile*, 1754) sa odgovarajućim istorijskim i naučnim komentarima. To je delo u najužoj vezi sa Boškovićevom teorijom prirodne filozofije.

CESAREC RUDOLF

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1889 – 1972). Rođen je i umro u Zagrebu. Brat je Augusta Cesareca, istaknutog književnika i revolucionara.

Osnovnu školu i realnu gimnaziju završio je u Zagrebu. Na Mudroslovni fakultet Sveučilišta u Zagrebu upisao se 1909, gde je studirao matematiku, koju je diplomirao 1916. Bio je profesor matematike u gimnazijama u Krapini, Zagrebu i Koprivnici, gde je ostao do 1928. U tom razdoblju intenzivno je radio na svom usavršavanju i doktorskoj disertaciji *Teorija Euklidovih, Rimanovih, Vejlovih i Edingtonovih prostora*. Na osnovu ovog rada (1927) i položenog rigoroznog ispita iz matematike, fizike i filozofije, stekao je titulu doktora filozofskih nauka. Iste godine dobio je dopust radi usavršavanja u geometriji. R. Cesarec najpre boravi u Berlinu kod profesora G. Šefersa, istaknutog poznavaoca klasične diferencijalne geometrije i nacrtne geometrije, a zatim u Parizu kod profesora E. Kartana, što mu omogućava da se upozna sa posve novim metodama i idejama moderne diferencijalne geometrije. Boravak u Berlinu i Parizu bio je od veoma velikog značaja za razvitak R. Cesareca kao matematičara i univerzitetskog nastavnika. Po povratku sa specijalizacije izabran je za profesora Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, gde je delovao do svog umirovljenja 1946, a zatim kao honorarni nastavnik na Prirodno-

-matematičkom fakultetu do 1965. Bio je predstojnik Geometrijskog seminara i dekan Filozofskog fakulteta. Predavao je Višu matematiku na Poljoprivredno-šumarskom fakultetu u Zagrebu. Bio je saradnik Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti i član Instituta za matematiku Sveučilišta u Zagrebu, kao i član Društva matematičara i fizičara SR Hrvatske, a neko vreme i član Francuskog matematičkog društva.

Svojim dugogodišnjim nastavnim radom R. Cesarec je naročito zadužio Univerzitet u Zagrebu. Na Filozofskom, kasnije Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, predavao je niz geometrijskih predmeta: analitičku geometriju, neeuklidsku geometriju, projektivnu geometriju, teoriju krivulja i ploha drugog stupnja, diferencijalnu geometriju, deskriptivnu geometriju i drugo. Držao je i specijalne kurseve: elementarnu geometriju sa stajališta teorije grupa, grafičku geometriju, aksonometriju i zavojite plohe. Veoma se angažovao i na kompletiranju zbirke geometrijskih modela. Bio je odličan predavač, kome su se predavanja odlikovala jasnoćom, rigoroznošću i sistematičnošću. Bio je nastavnik od kojeg su studenti mnogo naučili, u stručnom, metodičkom i naučnom pogledu. Napisao je dva udžbenika: *Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja* i *Projektivna geometrija*.

U njegovom naučnom radu razlikuju se dve faze, od kojih jedna pripada neeuklidskoj geometriji, a druga teoriji algebarskih krivih. Napisao je i objavio oko dvadeset naučnih, stručnih radova i knjiga.

U opsežnom radu *O neeuklidskoj geometriji, osnovanoj na apsolutnom jednoplošnom hiperboloidu* (1931) uvodi i istražuje, prema Keli – Klajnovoj metodi, neeuklidsku geometriju osnovanu na jednopovršnom hiperboloidu kao apsolutumu. Ta „treća" neeuklidska geometrija razlikuje se bitno od hiperboličke i eliptičke geometrije zbog postojanja različitih tipova pravaca u odnosu na apsolutnom. Upotrebom izvesnog preslikavanja na dve Poenkareove poluravnine omogućilo mu je da dođe do zanimljivih rezultata o pravčastom delu nove geometrije. Značajan je i njegov rad *Über die Berechnung von Orthogonen der hyperbolischen Ebene* (*O izračunavanju ortogona hiperboličke ravni*, 1932), u kojem je uveo i istraživao u hiperboličkoj ravni mnogouglove, kojima su svi uglovi pravi, tj. potpune ortogone, odn. mnogouglove kojima su gotovo svi uglovi pravi, tj. delimične ortogone. Tu su opisani postupci kao što su ortogonalizacija, polarizacija i antiortogonalizacija i date su analitičke formule za izračunavanje pojedinih elemenata ortogona. U radu *Konstrukcija pravilnih ortogona* (1933) rešio je pitanje elementarne konstrukcije ortogona u Keli – Klajnovom modelu. Za teoriju algebarskih krivih ističu se radovi *O cirkularnim racionalnim krivuljama 4. reda, izvednim iz izvjesnih konoida* (1949), *Određivanje asimptota u projektivnim koordinatama* (1949) i *Dvodeljne krivulje 3. reda kao proizvod involucije s obzirom na potpuni četverovrh* (1953). U tim radovima, u okvirima projektivne geometrije, analitičkom metodom istražuje navedene krive, kao i asimptote krivih u ravni. Više svojih stručnih radova, napisanih na zavidnom naučnom nivou, posvetio je širenju novih saznanja i pristupa geometriji, čime je znatno doprineo razvitku i metodici geometrije u nas.

Celokupnim svojim radom, nastavnim, stručnim i naučnim R. Cesarec se ističe kao jugoslovenski matematičar.

Lit. Sibe Mardešić i Krešo Horvatić („Glasnik matematički, fizički i astronomski", No 2, 1973), o Cesarecu.

ČUČIĆ ŠIMUN

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1784 – 1828). Rođen je i umro u Pećnom u Žumberku.

Bio je profesor matematike i filozofije na Zagrebačkoj akademiji. Od Franje Klohammera preuzeo je algebru i geometriju. Objavio je 1816. u Beču, knjigu *Matematika* (*Mathesis*) u kojoj napominje da se u njoj nalazi algebra i da će u drugoj knjizi obraditi geometriju. Međutim, nije poznato da li je druga knjiga izašla i da li je negde sačuvan njen rukopis.

Na prvim stranicama svoje knjige definiše oblast čiste matematike. Po njemu matematika izučava diskretne i neprekidne veličine. Čista matematika ima dve oblasti, od kojih jedna izučava diskretne veličine i zove se algebra, a druga izučava neprekidne veličine i zove se geometrija. Ti stavovi imaju svoj koren u Aristotelovoj podeli matematike na diskretne i neprekidne veličine. Cučić misli da se između diskretnih brojeva može umetnuti treći broj, a u pogledu neprekidnih geometrijskih veličina stoji na Aristotelovim pozicijama. Algebru definiše kao račun sa slovima. Sva razmatranja započinje sa opštim algebarskim izrazima, pa onda primeni pravila na posebne brojeve. Izlaže definicije koeficijenata, eksponenata, monoma, binoma, homogenog i heterogenog, sabiranje, odbijanje, množenje i deljenje algebarskih izraza, zatim potenciranje i korenovanje, linearne i kvadratne jednačine. Svoja izlaganja završava sa aritmetičkim i geometrijskim nizovima, zatim s beskonačnim nizovima i logaritmima.

Ova knjiga predstavlja temelj teza koje je 1816. Čučić zadao na Zagrebačkoj akademiji, pored teza iz praktične geometrije, koje su u stvari geodetski zadaci.

Lit. Žarko Dadić *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata (II)*.

ČURČIĆ DRAGOSLAV

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1929–1975). Rođen je u selu Kaznoviće, pokraj Raške, a umro je u Beogradu.

Potiče od siromašne seljačke porodice. Gimnaziju je učio u Raškoj a završio je u Kraljevu 1951. Iste godine upisao se na Prirodno-matematički fakultet u Beogradu na grupu za teorijsku matematiku. Diplomirao je 1957. Radio je u osnovnoj školi u Raškoj, a zatim u osnovnoj školi u Beogradu. Živeo je u teškim materijalnim uslovima, ali ga to nije omelo da uz velika naprezanja uđe u naučni rad. Izabran je 1961. za asistenta matematike na Saobraćajnom fakultetu u Beogradu.

Uspešno je pratio poslediplomske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Bio je na naučnoj specijalizaciji u Sovjetskom Savezu gde je pod rukovodstvom profesora M. A. Krasnoseljskog i uz pomoć V. Ja. Stecenka došao do novih rezultata o operatorima matričnog tipa u Banahovim prostorima. Iz tog vremena potiče njegov zajednički rad sa Stecenkom *Nekotorie priznaki nerazložimosti operatorov* (Litovskij matematičeskij Sbornik VII, No 4, 1967).

Pošto se vratio iz Sovjetskog Saveza, odbranio je 1967. na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu magistarski rad *Stavovi jedinstvenosti rešenja jednačina sa pozitivnim operatorima u Banahovim prostorima.* Godine 1969. odbranio je na istom fakultetu doktorsku disertaciju *Neke klase operatora poluuređenih Banahovih prostora.*

Do novih rezultata, do kojih je došao posle odbrane doktorske disertacije, objavio ih je u radovima *Osobine konusa direktne sume nekog skupa Banahovih prostora* („Matematički vesnik“ 6 [21], sv. 3, 1969) i *Neke osobine nerazloživih operatora* („Matematički vesnik“ 7 [22], 1970).

Za docenta matematike na Saobraćajnom fakultetu izabran je 1971. Objavio je udžbenik *Viša matematika I deo.*

Stalno se bavio problemima vezanim za operatore u Banahovim prostorima. Posvetio je veliku pažnju nastavnim problemima, gde je mnogo pomagao studentima. Bio je vrlo aktivan u društveno-političkom radu na fakultetu i u Udruženju univerzitetskih nastavnika. Prerana smrt prekinula je čoveka, koji je uprkos lošim životnim prilikama, svojim celokupnim radom pokazao da se može naučno i stručno razvijati i stvarati.

Lit. „Zbornik radova Saobraćajnog fakulteta“, br. 1, 1976, povodom smrti D. Čurčića.

DANIĆ DIMITRIJE

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1862–1932). Rođen je i umro u Beogradu.

Studije je završio u Berlinu. Doktorirao je u Jeni s tezom *Konformno preslikavanje eliptičkog paraboloida na ravan* (*Conforme Abbildung der eliptischen Paraboloids auf die Ebene*, 1885). On je prvi doktor matematičkih nauka u Srba. Konkurisao je za profesora niže matematičke analize na Velikoj školi u Beogradu, ali u tome nije uspeo. On se kao matematičar razvijao van Velike škole i Beogradskog univerziteta. Bio je profesor matematike na Vojnoj akademiji u Beogradu i važio je kao vrlo strog i korektan profesor.

Objavio je niz manjih članaka iz elementarne matematike u nemačkim časopisima. Na našem jeziku objavio je više udžbenika i priručnika za visoke škole koji su dosta korisno služili studentima Velike škole i Filozofskog fakulteta. Njegovi priručnici i udžbenici su sledeći: *Obrasci i teoreme iz trigonometrije* (1888); *Analitička geometrija u ravni* (1893); *Analitička geometrija u prostoru* (1893); *Predavanja iz trigonometrije za pitomce Vojne akademije* (1899); *Osnovi infinitezimalnog računa* (1920–1923); *Osnovi kombinatorike i načela nauke o verovatnoći* (1921) i *Obrasci i teoreme iz matematike* (1927).

ĐELČIĆ EUGEN

Hrvatski, odn. jugoslovenski nautičar, astronom i matematičar (1854–1915). Rođen je u Kotoru, umro je u Beču.

Radio je na zvezdarnici u Puli. Bio je profesor matematike i nautike u Kotoru i u Malom Lošinju. Vodio je nautički odsek na Akademiji za trgovinu i pomorstvo u Trstu i bio je inspektor za trgovačke i pomorske škole. Sve svoje rasprave i knjige pisao je na nemačkom i italijanskom jeziku. Objavljivao ih je u Austriji, Italiji i Nemačkoj. Na to ga je sigurno terala njegova služba, kao i opšte političko-istorijsko stanje u Dalmaciji njegovog vremena. On je imao posredne veze sa onima što su vodili borbu za narodni preporod u Dalmaciji protiv njene italijanizacije. Njegov brat Josip sarađivao je sa zagrebačkim krugovima i sudelovao je u ispisima Boškovićevih pisama i bio je dopisni član Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti.

E. Đelčić je proučavao Marina Getaldića* i ta proučavanja objavio je u posebnoj raspravi *Jedna studija o otkriću* *analitičke geometrije s obzirom na delo Marina Getaldića, dubrovačkog plemića, iz 1630. godine* (*Eine Studie über die Entdeckung der analitischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi Patrizier Ragusaer aus den Jahre 1630*, 1882). Ta je rasprava mnogo doprinela da se upozna matematičko delo Marina Getaldića i citira se u inostranoj i domaćoj matematičkoj literaturi.

Njegovo stručno i naučno interesovanje bilo je stalno vezano za probleme nautike i naučna područja koja su povezana s njom. Njegovi se radovi mogu podeliti na one koji su direktno povezani sa nautikom i na one koji su astronomski, naročito u vezi s problemom astronomskog određivanja položaja broda, kao i na radove o meteorološkim problemima, pomorskoj kartografiji, pomorskim spravama i magnetizmu. Napisao je knjigu o fizikalnoj geografiji mora (1881), knjigu studija o istoriji putovanja brodom (1882), kartografiju (1894) i optiku (1894). Napisao je udžbenik iz nautičke astronomije *Tečaj nautičke astronomije* (*Corso di astronomia nautica*, 1880). To je jedan temeljit udžbenik koji učenicima pruža temeljna znanja iz nautičke astronomije. Tu je obrađena teorija problema, ali se težište stavlja na praktično iskorišćavanje znanja u pomorskoj praksi.

Naučno-stručna produkcija E. Đelčića bila je vanredno opsežna. Smatra se da je jedan od najvažnijih pisaca o problemima navigacije i uz nju povezanih problema astronomije, meteorologije, kartografije i magnetizma krajem XIX v. u nas. Svojim delima veoma je poznat u inostranstvu među stručnim krugovima odgovarajućih oblasti o kojima je pisao. Objavio je i niz rasprava iz istorije navigacije i astronomije.

Njegovo ime zauzima značajno mesto u istoriji matematičko-astronomskih nauka kod nas.

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (II).

DRAŠČIĆ RAJKO

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1923–1972). Rođen je u Buzetu u Istri, umro je u Zagrebu.

Zbog fašističkih progona porodica Draščić prelazi 1927. u Jugoslaviju i naseljava se u Kastvu. Draščić je završio gimnaziju u Sušaku. Učestvuje u narodnooslobodilačkoj borbi i u borbama na Korčuli Nemci su ga zarobili i otpremili u zarobljeništvo u Nemačku, gde je ostao do 1945. Diplomirao je na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, gde je slušao

grupu koja je obuhvatala teorijsku matematiku, racionalnu mehaniku i teorijsku i eksperimentalnu fiziku. Bio je asistent u Geometrijskom institutu Prirodnoslovno-matematičkog fakulteta. Doktorsku disertaciju *O nekim specijalnim mrežama krivulja na plohi* odbranio je 1965. Za docenta je izabran 1966. koju će funkciju imati do kraja života. Vrlo intenzivno je delovao u Institutu za matematiku Sveučilišta u Zagrebu, posebno u Odjelu za geometriju. Bio je i predsednik upravnog odbora Instituta. Posebnu aktivnost ispoljavao je u Društvu matematičara, fizičara i astronoma SR Hrvatske, gde je neko vreme bio sekretar društva. Sudelovao je na kongresima matematičara u zemlji i na nekim inostranim. Bio je recenzent referativnih časopisa „Zentralblatt für Mathematik" i „Mathematical Reviews", a sarađivao je i u domaćim matematičkim časopisima. Bio je vrstan nastavnik, čija su predavanja bila uvek pripremljena sa najvećom pažnjom i besprekorno jasna i rigorozna. Veliki je njegov udeo bio u poslediplomskim studijama, gde se svim žarom angažovao na realizaciji ambiciozno koncipiranih predavanja s najsavremenijom diferencijalno-geometrijskom tematikom. Tu su bili poznati njegovi kursevi *Diferencijalna geometrija mnogostrukosti* i *Raslojene mnogostrukosti i koneksija*.

Na naučni profil Draščića posebno je uticalo vreme provedeno na specijalizaciji na Moskovskom državnom univerzitetu na katedri za geometriju, pod vodstvom prof. P. K. Raševskog, poznatog stručnjaka za Rimanovu geometriju. U svojim radovima Draščić se bavio problemima klasične diferencijalne geometrije, koristeći pri tom veoma uspešno najsavremenije tehnike i metode. Osnovni objekti koje je sistematski istraživao su tzv. F-mreže. Reč je o specijalnim krivama na površi koje su definisane zahtevom da im je normalna zakrivljenost u svakoj tački jednaka vrednosti propisanog skalarnog polja u toj tački. Skup svih takvih krivih obrazuje određenu mrežu na površi koja se naziva F-mrežom. Posebno poglavlje predstavljaju ispitivanja Draščića o ponašanju F-mreže kod regularnih preslikavanja. U svojim istraživanjima bavio se uslovima uz koje je neka F-mreža čebiševska, odnosno geodetska. Radovima R. Draščića, može se reći, da je teorija F-mreža svestrano i iscrpno istražena i zaokružena u jednu harmoničnu celinu, gde je ostalo još problema o kojima je Draščić razmišljao, i koji treba da budu rešeni. Značajni su njegovi radovi *Sur quelques reseaux spéciaux tracés sur une surface I* (*O nekim specijalnim mrežama povučenim na površi I*, 1966) i *Sur quelques réseaux spéciaux tracés sur une surface II* (*O nekim specijalnim mrežama povučenim na površi II*, 1971).

Draščić je bio matematičar širokog interesovanja i svestranog znanja. Svoje znanje je neprekidno proširivao i produbljivao i to se sve odražavalo u njegovoj nastavnoj delatnosti. Na redovnim studijama dugo je predavao osnove geometrije i analitičku geometriju s linearnom algebrom koju je koncipirao na savremenim idejama, dajući veliki doprinos modernizaciji nastave na Matematičkom odjelu.

Lit. Stanko Bilinski i Sibe Mardešić u „Glasniku matematičkom, fizičkom i astronomskom" No I, 1973, povodom smrti R. Draščića.

ĐERASIMOVIĆ BOŽIDAR

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1907 – 1977). Rođen je i umro u Beogradu.

Gimnaziju je učio u Titovom Užicu i završio je u Beogradu. Matematiku je studirao na Filozofskom fakultetu u Beogradu, gde je diplomirao 1931. Bio je profesor u gimnaziji u Sarajevu i Kragujevcu, kao i u Zrenjaninu, a zatim profesor vojnih škola u Jugoslovenskoj narodnoj armiji. Godine 1951. izabran je za asistenta matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu, gde je 1954. odbranio doktorsku disertaciju *Problem aproksimacije iracionalnih brojeva racionalnim razlomljenim brojevima*. Bio je docent Prirodno-matematičkog fakulteta, a zatim profesor Mašinskog fakulteta u Beogradu. Predavao je matematiku i na raznim odeljenjima Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, Kraljevu, Zrenjaninu, Trsteniku i Smederevskoj Palanci. Pisao je i objavio skripta iz više matematike za studente Mašinskog fakulteta i učestvovao je u pisanju udžbenika za iste studente. Veliku pažnju obraćao je problemima nastave matematike u srednjoj školi, pa je u vezi s tim napisao i objavio nekoliko priručnika. Aktivno je učestvovao u radu Društva matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Sa svojim referatima učestvovao je na kongresima matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije.

Đerasimović je objavio u domaćim i inostranim časopisima preko dvadeset naučnih i stručnih članaka, a zatim jednu monografiju, udžbenike i priručnike.

Najveći deo naučnih istraživanja Đerasimovića odnosi se na teoriju pravilnih verižnih razlomaka. U radu *O periodičnim verižnim razlomcima* (1956) nalazi vezu između periodičnih verižnih razlomaka i rešenja Pelove jednačine iste diskriminante, dok u radu *O verižnom razvitku kvadratnog korena prirodnih brojeva* (1958) uopštava neke zaključke Ležandra o verižnom razvitku kvadratnog korena celog broja. U radu *O verižnim reprezentacijama realnih i nekih kompleksnih kvadratnih iracionalnih brojeva* (1964) uvodi pojam verižne reprezentacije i tako verižne razlomke dodeljuje i nekim kompleksnim brojevima. Rad *O periodičnosti verižnog razvitka kvadratnih iracionalnih brojeva* (1966) posvećen je novom dokazu osnovnog Lagranžovog stava o periodičnim verižnim razlomcima, a u radu *O jednom Fermaovom stavu* (1969) dokazuje jedan stari Fermaov* stav o zbiru kvadrata dva cela broja, upotrebljavajući samo konačne uređene komplekse. U monografiji *Pravilni verižni razlomci* (1969) koju je objavio Matematički institut u Beogradu, Đerasimović povezuje svoje rezultate iz teorije pravilnih verižnih razlomaka sa ranije poznatim rezultatima i tako svojom aparaturom izgrađuje čitavu teoriju pravilnih verižnih razlomaka i u tome uspeva. Tu je svojom aparaturom dokazao i mnoge ranije poznate stavove. Monografija *Verižni razlomci sa primenama na Diofantove jednačine i Diofantove aproksimacije* (1969) namenjena je širem krugu matematičara i sadrži osnovne pojmove o pravilnim verižnim razlomcima, Diofantovim jednačinama i Diofantovim aproksimacijama. U nizu drugih radova, bavi se diofantskim problemima u geometriji, a zatim i primenama diofantskih jednačina u geometriji, kao i diofantskim aproksimacijama iracionalnih brojeva. U tim radovima dolazi do originalnih rezultata. Ispituje kvalitete glavnih približnih vrednosti, kao i Peronovu modularnu funkciju iracionalnog broja i njene tačke nagomilavanja. U izlaganjima koristi klasičnu aparaturu i ilustruje je mnogim primerima.

Naučni radovi Đerasimovića predstavljaju značajan prilog teoriji brojeva kod nas.

FEMPL STANIMIR

Stanimir Fempl je srpski, odnosno jugoslovenski, matematičar. Rođen je u Zemunu 1903, umro je u Beogradu 1986.

Osnovnu školu i gimnaziju završio je u Zemunu. Studirao je matematiku na Filozofskom fakultetu u Beogradu, gde je diplomirao 1926. Bio je profesor gimnazije u Pančevu, u Zemunu i profesor Više pedagoške škole u Beogradu. Na univerzitetu u Sarajevu, 1956. položio je doktorski ispit iz matematike, sa tezom *O jednoj linearnoj kombinaciji normalnih eliptičkih integrala*. Iste godine izabran je za spoljnjeg naučnog saradnika pri Katedri za matematiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu a 1958. za stalnog naučnog saradnika. Od 1958. je vanredni profesor za matematiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, a od 1968. redovni profesor za isti predmet. Bio je član Matematičkog instituta u Beogradu, na čijim je sastancima održao niz naučnih saopštenja i referata.

Predavao je matematiku I i matematiku II na Elektrotehničkom fakultetu, a na Odseku za tehničku fiziku predavao je matematičke metode u fizici, odnosno račun verovatnoće i specijalne funkcije. Na posle diplomskim studijama držao je predavanja iz teorije polinoma, varijacionog računa i specijalnih funkcija. U nekim vojnim školama držao je predavanja iz matematike i inženjerima. Kao član komisije učestvovao je u oceni i odbrani većeg broja magistarskih i doktorskih radova.

Uporedo sa radom na nauci posvećivao je veliku pažnju pripremi i metodici nastave iz kurseva koje je održavao na fakultetu. Zato su njegova predavanja bila kvalitetna, naučno temeljna i pristupačna studentima. Kao profesor srednje škole i kao profesor univerziteta raspolagao je bogatim dugogodišnjim pedagoškim iskustvom, koje je došlo do punog izražaja u njegovim predavanjima i u pisanoj metodsko-pedagoškoj reči. Neprekidno se zalagao za podizanje nivoa nastave matematike u srednjoj školi i nivoa studija na fakultetu.

Učestvovao je u radu stručnih društvenih organizacija. U Društvu matematičara, fizičara i astronoma Srbije, referisao je niz svojih naučnih rezultata, a neke od njih je objavio u naučnom časopisu Društva. Učestvovao je na seminarima organizovanim za stručno uzdizanje nastavnika srednjih škola. Organizovao je predavanja iz matematike za darovite učenike beogradskih srednjih škola na kojima je i sam učestvovao kao predavač. Bio je predsednik Sekcije Udruženja univerzitetskih nastavnika Elektrotehničkog fakulteta.

Bavio se i popularisanjem matematike, posebno posvetivši pažnju odnosu matematike i astronomije.

Rezultate svog naučnog i stručnog rada, kao i svojih istraživanja objavljivao je u domaćim i inostranim naučnim i stručnim publikacijama.

U naučnim radovima tretirao je probleme iz teorije eliptičkih integrala i funkcija, iz teorije neanalitičkih funkcija, varijacionog računa, geometrije i astronomije. Ti su radovi prikazani u poznatim referativnim časopisima za matematiku. U nekima od njih sarađivao je kao referent sa svojim prikazima radova iz oblasti specijalnih funkcija.

U svojim radovima iz oblasti eliptičkih integrala i funkcija postavio je novi tip normalnog eliptičkog integrala koji se javlja u problemima geometrije i fizike i ima konkretno geometrijsko značenje, pokazavši njegovo prisustvo u komplanaciji kosog zarubljenog kružnog i eliptičnog konusa. Adicione, multiplikacione relacije, kao i relacije koje se odnose na uvedeni normalni tip eliptičkog integrala nisu ništa složenije od odgovarajućih relacija za Ležandrov* tip, već su u većini jednostavnijeg oblika. Pokazao je da ovaj normalni tip eliptičnog integrala predstavlja uopštenje leve strane klasične Ležandrove relacije i da se može prikazati linearnom kombinacijom normalnih eliptičkih integrala prve i druge vrste, što pruža mogućnost praktičnog izračunavanja vrednosti ove funkcije. Niz ovih funkcija čini Turanov niz, a to ne važi za normalne eliptičke integrale treće vrste Ležandrovog tipa.

Nastavljajući rad u oblasti teorije neanalitičkih funkcija i koristeći pojam odstupanja od analitičnosti, ispitao je klase

funkcija čije n-to odstupanje predstavlja analitičku funkciju. Definisao je inverzni operator onome kojim je definisao njegovo odstupanje od analitičnosti i dao njegovu primenu na rešavanje nekih sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina. Utvrdio je da postoji jedan paralelizam između običnih i sistema parcijalnih jednačina koje u kompleksnoj formi svodi na jednu parcijalnu jednačinu, gde se umesto izvoda pojavljuje odstupanje od analitičnosti, a umesto argumenta konjugovano kompleksna promenljiva. Fundamentalnom sistemu linearnih diferencijalnih jednačina odgovara klasa areolarnih eksponencijalnih funkcija, čije je neke osobine Fempl proučio u svojim radovima. Tako funkcije ove klase, umanjene za svoje odstupanje od analitičnosti, predstavljaju analitičke funkcije. Za dve neanalitičke funkcije dokazao je stav analogan osnovnom stavu integralnog računa.

Dopunjujući Milankovićeva* istraživanja u oblasti teorije ledenih doba, odredio je osunčavanje Zemlje u budućih 100 000 godina. Za ove rezultate pokazali su zanimanje sovjetski astronomi.

U oblasti varijacionog računa Fempl se bavio problemom brahistohrane pod uticajem centralne sile u potencijalnom polju i pri tome je došao do izvesnih zanimljivih rezultata.

Važni radovi: nekoliko njegovih radova odnosi se na izvesne probleme zarubljene kose kupe, npr: *Komplanacija zarubljene kose kružne kupe* („Glasnik matematičko-fizički i astronomski", No 4–5, Zagreb, 1950) i *Približna formula za omotač kose kružne kupe* (Zbornik radova Matematičkog instituta SANU, br. 1, Beograd, 1951). U nizu radova obradio je probleme koji se tiču eliptičnih integrala, kao: *O nekim redukcijama potpunog normalnog eliptičnog integrala treće vrste* (Zbornik radova Matematičkog instituta SANU, br. 3, Beograd, 1953), *O jednom uopštenju Legendre-ove relacije* (Zbornik radova Matematičkog instituta SANU, br. 4, Beograd, 1955), *O amplitudama normalnih eliptičkih integrala treće vrste za koje se uslovi integriranja redukuju na normalne eliptičke integrale prve i druge vrste* (Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Serija: Matematika i fizika, No 18, Beograd, 1958) i *Über einige Turanschen Folgen* (Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, T. XIV, Beograd, 1960). Značajni su npr. i sledeći njegovi radovi: *O insolaciji Zemljinih polarnih zona* (Glas SANU, Odeljenje prirodno-matematičkih nauka, knj. 13, Beograd, 1957), *Some properties of Herman's Function* (Journal of Mathematics and Physics, Vol. XXXVII No 2, 1958), *O neanalitičkim funkcijama čije je odstupanje od analitičnosti analitička funkcija* (Glas SANU, Odjeljenje prirodno-matematičkih nauka, No 24, Beograd, 1963) i *O neanalitičkim funkcijama čije je drugo odstupanje od analitičnosti analitička funkcija* (Vesnik Društva matematičara i fizičara SR Srbije, Vol. V, sv. 1–4, Beograd, 1963).

Obrazujući za neanalitičku funkciju njeno odstupanje od analitičnosti, u radu *Areolarni polinomi kao klasa neanalitičkih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije* (Matematički vesnik 1/16, Beograd, 1964) definisao je n-to odstupanje i dokazao je da neanalitičke funkcije čije je n-to odstupanje analitička funkcija, predstavlja areolarne polinome čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije. U radu je dokazao važan stav prema kome se dve analitičke funkcije sa jednakim odstupanjem od analitičnosti razlikuju za jednu proizvoljnu funkciju. U radu *Reguläre Lösungen eines Systems partieller Differenintegralgleichungen* (Publications de l'Institut mathématiques, T. 4, 18, Beograd, 1964), uveo je jedan integralni operator koji koristi za dobijanje regularnih rešenja jednog sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (koji predstavlja specijalan slučaj sistema čija je regularna rešenja odredio Vekoa), rešivši jedan sistem parcijalnih jednačina koji Vekoa nije obuhvatio. Prikazao je jednu klasu neanalitičkih funkcija sa osobinom da funkcija umanjena za svoje odstupanje od analitičnosti daje jednu analitičku funkciju, u članku *O jednoj klasi neanalitičkih funkcija* (Matematički vesnik 3/18, sv. 1, Beograd, 1966). Dao je definiciju areolarne eksponencijalne funkcije i dokaz da klase takvih funkcija predstavljaju opšte rešenje linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima u kompleksnom obliku u kojima umesto izvoda figurišu odstupanja nepoznate funkcije od analitičnosti. Ovo je predmet njegovog rada *Areolare Exponentialfunktion als Lösung einer Klasse Differntialgleichungen* (Publications de l'Institut mathématique, T. 8/22, Beograd, 1968).

Treba napomenuti da je Fempl učestvovao u postavljanju i rešavanju problema objavljenih u časopisu „The American Mathematical Monthly". Pored naučnih, objavio je i niz stručnih radova metodsko-pedagoškog karaktera, kao i skripta i udžbenike koji se odnose na teoriju diferencijalnih jednačina, varijacioni račun i na teoriju redova.

Lit.: neposredni uvid u Femplova dela i referati napisani povodom njegovog izbora za vanrednog i redovnog profesora Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

FILIPOVIĆ FILIP

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1878–1938). Rođen je u Čačku, a umro je u SSSR-u.

On je velika ličnost jugoslovenskog radničkog pokreta i jedan od glavnih osnivača Komunističke partije Jugoslavije. Studirao je matematiku u Rusiji u Petrogradu. Tu je radio kao

matematičar po raznim školama. Vrlo rano se istakao kao pisac u oblasti pedagogije matematike, objavivši veliki broj metodsko-didaktičkih radova. U zajednici sa V. Mročekom objavio je 1910. veoma značajno delo na ruskom jeziku *Pedagogija matematike*, koje je prevela na naš jezik 1957. profesor Olga Mitrinović, uz potrebne komentare. Bio je sekretar Prvog sveruskog kongresa matematičara 1912, čime je ukazano priznanje Filipovićevoj stručnosti u sredini ruskih matematičara. U Beograd se vratio 1912. i uz prisnu saradnju sa Dimitrijem Tucovićem posvećuje se radu Socijaldemokratske partije, gde je postao jedan od vodećih socijaldemokrata lenjinske orijentacije. Učestvovao je u revolucionarnim događajima u Mađarskoj i Austriji. Bio je komunistički poslanik u Ustavotvornoj skupštini, kao i sekretar Komunističke partije Jugoslavije. Izabran je za predsednika opštine Beograda, ali su ga tadašnje vlasti sprečile da preuzme tu dužnost. Čim je došla Obznana 1920, Filipović je proganjan, hapšen i osuđivan. Živeo je u ilegalnosti od 1924, pretežno boraveći u inostranstvu. Bio je i funkcioner Komunističke internacionale. Učestvovao je u Moskvi 1936. sa Josipom Brozom Titom na jednom savetovanju, značajnom za konačnu odluku da rukovodstvo partije pređe u zemlju. Nestao je u Staljinovim čistkama 1938. U periodu destaljinizacije posmrtno je rehabilitovan. Suprotstavljao se frakcijskim sukobima u partiji, uživajući veliki ugled kao principijelan i nedogmatski orijentisani komunista, a zatim kao organizator, predavač i novinar, koji je pisao ozbiljne rasprave sa naučnom vrednošću.

Filipović je bio plodan pedagoški pisac. Zalagao se za politehnizaciju nastave i za uklanjanje protivrečnosti između umnog i fizičkog rada. Ima priloga u andragogiji, naročito u osnivanju i teorijskom osmišljavanju radničkih klubova i univerziteta. Njegova knjiga *Pedagogija matematike* je i danas idejno sveža i aktuelna. Vidi se da su autori knjige u toku moderne nauke. Oni insistiraju na teoriji skupova, matematičkoj logici, neeuklidskoj geometriji i teoriji grupa. Ta knjiga predstavlja jednu svojevrsnu istoriju matematike, pedagogije i nauke uopšte. Svim se pitanjima pristupa marksistički, sa odgovarajućim nedostacima i jednostranostima, ali uvek tretiranja u njoj deluju inspirativno na razmišljanja u pokrenutim problemima. Knjiga je trebalo da izađe u dva dela. Drugi deo, koji bi bio posvećen analitičkoj geometriji, diferencijalnom i integralnom računu, teoriji verovatnoće, kritici osnova geometrije, logici i aksiomatici, osnovama sintetičke i nacrtne geometrije i približnom računu, nije izašao. U prvom delu obraćena je velika pažnja pojmu funkcije, obrađen je kurs geometrije, gde je istaknuta očiglednost i deduktivna metoda. Podvučen je politehnički karakter nastave, naročito u nastavi trigonometrije. Velika se pažnja obraća uvođenju negativnih brojeva i uvođenju determinanata kod rešavanja jednačina. Pažljivo se pristupa pojmu iracionalnog broja, ukazujući na „pravu teoriju" i njene tvorce Dedekinda, Kantora, Vajerštrasa, Kronekera i Mersa. U knjizi se naročito podvlači primena matematike. Tu potiče jedan od glavnih nedostataka knjige, a naime, zanemarivanje apstraktnog bića matematike. No bez obzira na to, ona može i savremenom pedagogu matematike vrlo korisno i stručno poslužiti u savladavanju nastavnih teškoća i kao inspiracija za novi pedagoški rad u nastavi matematike.

Značajno je Filipovićevo delo *Razvitak društva u ogledalu materijalizma*, koje neki smatraju kao prvi pokušaj celovite marksističke sociologije. Takođe su značajna njegova veća dela: *Balkan i međunarodni imperijalizam*; *Seljački pokret i nacionalno pitanje u Jugoslaviji* i *Mala Antanta*.

Svojim radom u oblasti pedagogije matematike, Filip Filipović zauzima određeno mesto u istoriji naše matematike, kada je reč o pedagogiji i didaktici matematike.

Lit: Milorad Bertolino, Pero Damjanović i Olga Mitrinović, i lični uvid u razne radove o F. Filipoviću.

GAVRILOVIĆ BOGDAN

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1864–1947). Rodio se i umro u Novom Sadu.

Osnovnu školu i gimnaziju, u kojoj je dobio vanredno obrazovanje iz humanističkih i egzaktnih nauka, završio je u Novom Sadu. Kao pitomac srpskog Tekelijanuma studirao je matematiku, fiziku i astronomiju na Filozofskom fakultetu u Budimpešti, gde je diplomirao 1885. Na istom fakultetu odbranio je doktorsku disertaciju, *O izrazima jednogranih analitičkih funkcija*, 1886. Boravio je radi naučnog usavršavanja u Nemačkoj i Švajcarskoj. Godine 1887. postao je nastavnik Velike škole u Beogradu, a 1892. redovni profesor iste škole. Na toj školi, na Tehničkom i Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, predavao je matematiku preko pedeset godina, i zajedno sa Mihailom Petrovićem, položio temelje našoj školi matematičara i razvio je. Bio je osnivalac biblioteke Matematičkog seminara, a kad se radilo na pretvaranju Velike škole u Univerzitet, Gavrilović je bio najaktivniji da se Univerzitet oblikuje kao ustanova slobodne nauke i nastave. Bio je tri puta rektor Univerziteta i stalno je učestvovao u njegovom izgrađivanju kao naučne i nastavne ustanove. Kao nastavnik isticao se svojim udžbenicima *Analitička geometrija* (1896) i *Teorija determinanata* (1909), delima koja su bila na zavidnoj naučnoj i metodičko-pedagoškoj visini.

Napisao je i objavio pedeset pet naučnih i kulturno-prosvetnih članaka i knjiga. Dvadeset naučnih rasprava iz

matematike objavio je u Budimpešti i u izdanjima SANU i JAZU. Bavio se algebrom i teorijom funkcija, ali je ipak bio geometar. On pripada klasičnom razvitku matematike a njegovi radovi iz matematičke analize odnose se na najaktuelnija pitanja teorije funkcija koja su se u njegovo doba stvarala i razvijala. Našoj matematici koja je tek nastajala, Gavrilovićevi radovi daju „pečat savremenosti i svežine i nivo evropski". Njegovi radovi iz geometrije „odnose se na ondašnja najmodernija pitanja i probleme analitičke geometrije, specijalno projektivne, sa upotrebom najmodernijeg naučnog aparata. Ta pitanja i te metode tada su bile novost u geometriji. Radovi iz algebre i teorije determinanata ne odstupaju ni u čemu od radova drugih matematičara koji su se time bavili. Svojim radom na kubnim determinantama Gavrilović se nalazio među dvojicom-trojicom matematičara koji su se tim problemom bavili". Pomenimo neke od njegovih naučnih radova: *O težinama algebarskih sklopova*, *O analitičkim izrazima nekih funkcija*, 1900; *O jednoj osobini prostornih determinanata*; *O analitičkom predstavljanju jednogranih funkcija u oblasti tačke u beskonačnosti*; *O jednoj simetričnoj funkciji nula polinoma trećeg stepena*, 1907; *Jedan prilog teoriji analitičkih funkcija*, 1922; *Problem prostora, hiperprostora i kontinuuma*; *O ostacima jednogranih funkcija* (Rad 139); *O redovima jednogranih funkcija* (Rad 143); *O precrtima spregnutih tačaka jednog specijalnog transfinitnog skupa projektivnih nizova tačaka*; *Über die Abbildung der Punktmengen in einer transfiniten Menge congruenter projektiver Punktreihen – O preslikavanju množina tačaka u jednu transfinitnu množinu kongruentnih projektivnih redova tačaka* (Glas CXCI, 1948).

Kao poznat i priznat naučni radnik bio je član SANU i dva puta njen predsednik, zatim dopisni član JAZU, član Češkog učenog društva u Pragu, član društva Circolo matematico di Palermo, počasni doktor Univerziteta u Atini, predsednik Instituta „Nikola Tesla" u Beogradu, itd.

Gavrilović je imao vidokrug koji se daleko rasprostirao preko granica matematičkih nauka. Izvanredno humanistički obrazovan, sa dobrim poznavanjem oba klasična jezika i svih važnijih modernih jezika, on je kao matematičar veoma široke matematičke, kao i opšte kulture mogao da upre pogled na nauku u celini i da kao takav široko praktički deluje. To svedoči niz njegovih radova u kojima dolazi do punog izraza njegova opšta kultura, „bilo da uvodi u čast akademika istoričara ili filologa, bilo da čini komemoraciju geologu ili matematičaru, bilo da govori studentima o kulturi i zadatku Univerziteta – svuda se oseća ta opšta kultura, to sintetično shvatanje svih pitanja u međusobnoj vezi, iz kojega izlazi jedno lično gledanje na sva zbivanja, jedno vezivanje u celinu svih manifestacija života, jedno harmonično gledanje na svet. On je imao živ interes za sve, bio je duboko socijalan, za svakoga je imao prijateljsko osećanje – ni za koga ni reči oporosti, a kamo li dela neprijateljstva". Posebni primeri za to su njegovi radovi: *Civilizacija i nauka* (1911), *Socijalni zadatak Univerziteta* (1912), *Kultura i harmonija* (1926), *O racionalizmu XVIII veka i uticaju njegovu na društvo toga vremena* (1937), *O živoj i mrtvoj materiji i o sukobu između vitalista i mehanista*, *O našoj umetnosti srednjeg veka*, *O istoriji kao nauci i smislu njezinom* i *O Mihailu Pupinu – naučniku i filozofu*. Uvidevši vrednost nauke kao celine, znao je da mu zadatak života nije ispunjen samo njegovim naučnim i nastavnim radom u matematici, nego da je mnogo širi. Imao je u vidu podizanje kulture i prosvete svoga naroda, kao i neophodno podizanje nauke i odgovarajućih naučnih kadrova. Tome je posvetio čitav svoj život u situacijama kad se narod borio da stekne slobodu i sagradi svoju državu. Tako je bio ne samo istaknuti matematičar, nego i istaknuti borac za kulturu i prosvetu svoga naroda.

Istaknuti jugoslovenski matematičar, široke matematičke i opšte kulture Gavrilović je bitno doprineo svojim naučnim i pedagoškim radom da se nastava matematičkih nauka na Univerzitetu u Beogradu podigne na nivo nastave evropskih univerziteta i da se u našoj sredini potvrdi i razvije evropsko shvatanje nauke, kulture i prosvete.

Lit. R. Kašanin (Glasnik matematičko-fizičko-astronomski, No 4–5, 1947).

GETALDIĆ MARIN

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar i fizičar (1568–1626). Rođen je i umro u Dubrovniku.

Potiče iz veoma stare vlasteoske porodice, od oca Mata Marina Getaldića i majke Anice Andrije Restića, koji su, pored Marina, imali još četiri sina i jednu kćer. Školovao se u Dubrovniku od 1575. do 1588. U to doba dubrovačka škola bila je na zavidnoj visini kvalitetom svojih nastavnika, programima nastave i organizacijom rada. U njoj je Getaldić stekao solidna znanja iz klasičnih jezika i literature i temeljito je savladao potrebna znanja iz matematike, fizike i astronomije za studije na visokoj školi.

Krajem XVI v. krenuo je na studijsko putovanje po zapadnoj Evropi. Na putu se zadržao šest godina, a bio je u Italiji, Francuskoj, Engleskoj, Belgiji, Holandiji i Nemačkoj, stupivši u kontakt sa nizom tada istaknutih učenih ljudi tih zemalja. U Rimu se upoznao i sprijateljio sa matematičarima, Klavijem, Grinbergerom i Valerijom Lukom: u Belgiji sa matematičarem Koanjeom i astronomom Saminijatijem: u Parizu sa

Vijetom, najvećim matematičarem XVI v.; u Padovi sa Galilejem, u čijem je krugu delovao kao dosledni protagonist Vijetove simboličke algebre, zanimajući se ujedno Galilejevom naukom. On je intenzivno i smišljeno koristio svoj put radi studija, i to mu je omogućilo, s jedne strane, da dublje ovlada geometrijom antičke epohe, a s druge, da uđe u tokove nove, Vijetove, algebre, kao i nove, Galilejeve, nauke uopšte, što je pokazao naučnom delatnošću po povratku s puta, kad je u vremenu od 1603. do 1626, uspeo da napiše sedam dela iz matematike i fizike i da se u isto vreme intenzivno bavi eksperimentalnim radom u astronomiji i fizici, a naročito u optici.

Poznanstvo i prijateljstvo s Vijetom* događaj je u Getaldićevom životu koji je bez sumnje najbitnije i odlučujuće uticao na njegovo formiranje kao matematičara. Vijet je upravo tada, u nizu svojih dela postavio temelje nove, simboličke algebre, trasirao i otvorio nove puteve razvitka matematike, naročito kad je reč o plodotvornoj sintezi algebre i geometrije, odlično ostvarenoj principom koordinatne metode u Dekartovoj analitičkoj geometriji. Getaldić je uočio te puteve pošto se upoznao s Vijetovim raspravama, pišući ushićeno iz Pariza 1600, Koanjeu: „Vijet mi nije samo pokazao mnoga svoja neobljavljena dela nego mi ih je i dao da ih nesmetano kod kuće pregledam. Tako sam doznao za neke rasprave iz njegove *Nove algebre* koje su mi otvorile oči, pa izgleda da vidim velike stvari, bez kojih sebe smatram skoro slepim ... U delu ćete videti ono što se nije moglo videti u minulim stolećima, iako su najizvrsniji ljudi više puta to pokušavali, ali uzalud. videćete savršenstvo algebre, kao i astronomije, ako on bude imao vremena da završi druga svoja dela ..."

Od 1603, po povratku s puta po Evropi, pa do svoje smrti, Getaldić je obavljao razne dužnosti u državnoj, posebno diplomatskoj, službi Dubrovačke Republike, neraskidivo vezan za svoj rodni Dubrovnik, koji je nazvao „domovinom, prvom hraniteljicom svoga tela i duha", razlikujući ga tako od „tuđih zemalja", u kojima je na svom putu boravio, kako je to sam na jednom mestu istakao. Bio je sudija, advokat, carinik, službenik Ureda za vino, Ureda za preradu vune i Ureda za trgovačko-sudske poslove, graditelj kule Pozvizd u Stonu, vojni zapovednik i čuvar Stona, više godina član Senata, kao i član Malog veća. Bio je poklisar harača, te je u tu svrhu boravio godinu dana na Porti u Carigradu. Do stupanja u brak živeo je u zajednici sa braćom Andrijom i Jakovom, u očevoj kući blizu crkve Sv. Vlaha, a kad se oženio, prešao je na svoje imanje na Pločama. Oženio se u pedeset i trećoj godini Marijom Vlaha Sorkočević, s kojom je u braku proživeo nepunih pet godina. Imali su tri kćeri, prema kojima je gajio osobitu roditeljsku ljubav.

Dubrovačka sredina nije mogla Getaldiću, učenom matematičaru, fizičaru i astronomu, posle njegovog studijskog puta po Evropi, da pruži ono što su mu pružale za rad u nauci sredine Rima, Pariza i Padove. Zato se iz Dubrovnika žalio Klaviju, Grinbergeru i Galileju da se oseća kao „zakopan u grobu", jer su do njega teško dopirale novosti iz nauke, zbog loših opštih i istorijsko-političkih okolnosti u kojima se tada Dubrovnik nalazio. Godine 1621, kada je Getaldić kao službenik živeo u Dubrovniku, naučni krugovi Rima predložili su ga za člana Akademije dei Linčei, kao „čoveka toliko veštog u algebri i geometriji da danas jedva može sebi naći ravna", kako je stajalo u predlogu koji je i Galilej podržao. Međutim, predlog se nije ostvario, jer akademija nije mogla doći u kontakt sa Getaldićem. No, uprkos takvim prilikama, Getaldić je uporno nastojao da se ne izoluje od naučnog sveta i da bude u toku razvitka nauka kojima se stvaralački bavio. To živo i neposredno dokazuju njegova pisma Galileju, Klaviju i Grinbergeru, koja im je napisao u periodu od 1602 – 1625, kao i njegova objavljena dela, koja su ga svrstala među zapažene matematičare u okviru evropske matematike prve tri decenije XVII v.

Svojim delima *Nonnullae propositiones de parabola* (*Neki stavovi o paraboli*) i *Archimedes promotus* (*Unapređeni Arhimed*), objavljenim u Rimu 1603, Getaldić je ušao u istoriju fizike, i to: prvim delom u istoriju optike, a drugim u istoriju hidrostatike. U prvom delu, nasuprot ustaljenom mišljenju, dokazao je da je parabola dobivena presekom ravni i ma kojeg pravog kružnog konusa identična s parabolom koja se dobiva presekom ravni i pravouglog pravog kružnog konusa i da je osobina žiže ista za sve parabole, pa da su, prema tome, oblici svih parabola prikladni za konstrukciju paraboličkih ogledala. To delo nedvosmisleno pokazuje da se Getaldić bavio praktičnom optikom i da je imao sve kvalitete teoretičara i praktičara da napravi odlučan korak od paraboličnog ogledala do teleskopa reflektora. Neophodno je ovde pomenuti da je poznati jugoslovenski istoričar nauka Žarko Dadić objavio rad *O paraboličkim zrcalima Marina Getaldića* (1979) iz kojeg se vidi da se Getaldićevo ogledalo nalazi u *National Maritime Museum-u*, u Grinviču i da pozadi nosi ime Getaldić.

U drugom delu, Getaldić je u okviru zapadnoevropske nauke, među prvima, samostalno, na osnovi Arhimedovog zakona, razradio i teorijski obrazložio metodu određivanja specifične težine čvrstih tela i tečnosti i opisao hidrostatičku vagu, odredivši sa zadovoljavajućom tačnošću specifične težine niza metala i tečnosti.

Getaldić je studirao dela Euklida, Arhimeda i Apolonija, ušavši znalački i kreativno u krug ideja i metoda Euklidove i Apolonijeve geometrije. To se vidi iz njegovih dela *Variorum problematum collectio* (*Zbornik različitih problema*), *Supplementum Apollonii Galli* (*Dodatak Galskom Apoloniju*), *Apollonius redivivus, liber primus et secundus* (*Oživeli Apolonije, knjiga prva i druga*), datiranim u Dubrovniku i objavljenim u Veneciji od

1606 – 1613. U poslednja dva dela bavi se restitucijom Apolonijeve rasprave *De tactionibus* (*O dodirima*) i rasprave *De inclinationibus* (*O nagibima*). Prema Getaldićevim pismima Galileju, čini se da ih je prvi ocenio Galilej. „Beskrajno vam zahvaljujem što ste izvoljeli pročitati mog Apolonija..." – pisao je Getaldić Galileju iz Dubrovnika 20. februara 1608, a zatim ponovo 15. marta 1614. iz Venecije: „Proteklih dana štampana je druga knjiga mog *Oživelog Apolonija* i šaljem vam jedan primerak knjige... možda ćete uspeti da bacite jedan pogled na knjigu, ako ni za što drugo, onda bar zato da je ocenite, jer ne poričem da mi nije potrebna kritika...". Tako je Getaldić doprineo da se otrgnu od zaborava Apolonijeva izgubljena dela. Jugoslovenski autori Žarko Dadić i Josip Balabanić u svom radu *Prva verzija Getaldićevih restauracija dvaju Apolonijevih problema dostavljena Galileju* (1982) utvrdili su da se Getaldićev tekst nalazi među Galilejevim rukopisima u Centralnoj nacionalnoj biblioteci u Firenci.

U tokovima razvitka matematike, Getaldić svojim glavnim delom *De resolutione et compositione mathematica* (*O matematičkoj analizi i sintezi*), datiranim u Dubrovniku i objavljenim posle njegove smrti u Rimu 1630, zauzima zapaženo mesto u prve tri decenije XVII v., kad je reč o afirmaciji Vijetove simboličke algebre, kao nove, analitičke, metode u obradi geometrije. On je shvatio svoje glavno delo s *metodološkog* gledišta, kao neku vrstu priručnika matematičke *analize* (*resolutio*) i *sinteze* (*compositio*), s *tendencijama njihove formalizacije* (*Conspectus resolutionis et compositionis*). Vijetovoj algebri dodelio je *primarnu* ulogu u okviru takve *metodološke* koncepcije, *suprotstavljajući* je antičkoj metodi kao *novu analitičku* metodu koja *pokazuje* puteve *sintezi* u tretiranju geometrijskih problema. To je glavno i tako treba posmatrati i ceniti mesto i *progresivnu* ulogu Getaldićevog glavnog dela u istoriji matematike XVII v. na putu koji, trasiran Vijetovom algebrom, vodi ka analitičkoj geometriji Dekarta.

U vremenu kad je Getaldić u Dubrovniku stvarao naučna dela, Dubrovačka Republika bila je izložena mnogim političkim i vojnim opasnostima i borila se s velikim nedaćama, pa je takva atmosfera morala ozbiljno ometati Getaldićev rad u nauci. Iz te atmosfere nije mogao pobeći u neki spokojan kutak, jer je prostorom i suviše mala bila Dubrovačka Republika da bi mu ga mogla obezbediti. Da je takav kutak za svoj rad u nauci Getaldić zaista tražio, svedoci su, možda, oni latinski stihovi, sačuvani do danas, na ulaznim vratima njegova imanja na Brgatu, na Pločama, koji u prevodu glase:

„Budite daleko, zavisti, svađe, taštino, brige!
Mir i spokoj krase pećine, perivoje, hridi."

Tu u svom perivoju, ili na obližnjoj hridi što se strmo spušta prema moru, ili u pećini pri samom morskom žalu, Getaldić se predavao matematičkim studijama, udubljujući se u dela starih grčkih matematičara i u dela Vijetova; s tih mesta upravljao je svoj durbin k nebu, da bi kao astronom otkrivao tajne i zakone neba, a kao astrolog, u duhu svog vremena, „čitao" na nebu sudbinu ljudi i uzroke zbivanjima na zemlji.

Povodom četirstogodišnjice Getaldićeva rođenja, Institut za povijest prirodnih, matematičkih i medicinskih nauka Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti objavio je celokupna Getaldićeva dela na latinskom originalu *Opera omnia* (*Celokupna dela*, 1968), kao i na našem jeziku prvi tom celokupnih Getaldićevih dela, u kome se nalaze sva Getaldićeva dela sem glavnog dela.

GRADIĆ STJEPAN

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar i mehaničar (1613–1683). Rođen je u Dubrovniku, umro je u Rimu.

U Rimu je studirao na isusovačkom Seminarijumu i Kolegijumu Klementinumu, a zatim na univerzitetu u Bolonji. Veći deo života proveo je u Rimu, gde je zastupao Dubrovačku Republiku kod Vatikana. Bio je kustos kao i upravitelj Vatikanske knjižnice. Ogromna je širina njegovih zanimanja, od pesništva i diplomatije do filozofije i prirodnih nauka, posebno matematike i mehanike. Ona ga je stavila u sferu istraživanja gotovo svih istoričara kulture. Donedavno bio je potpuno nepoznat njegov rad u oblasti egzaktnih nauka. Njegova dela iz ovog područja istražena su tek delimično. Međutim, njegov naučni stav i glavni doprinos nauci ipak su potpuno jasni.

Vrlo je verovatno da je najstarije Gradićevo delo *Zasade peripatetičke filozofije izložene u obliku rasprava* (*Peripateticae philosophiae pronunciata disputationibus proposita*). U okviru filozofskih izlaganja Gradić izlaže i peripatetičku fiziku i astronomiju i to na način kojim su se izlagala Aristotelova dela o prirodi. Da je ostao na tim pozicijama, onda njegova uloga u istoriji mehanike sigurno ne bi bila gotovo ni od kakve važnosti, jer je već u njegovo doba Aristotelova fizika bila potpuno poražena Galilejovom naukom.

Dolaskom švedske kraljice Kristine u Rim i formiranjem njenog naučnog kruga, on se vrlo živo počeo baviti pitanjima mehanike. Kao i mnogi drugi naučnici i Gradić je pristupio krugu kraljice Kristine i pape Aleksandra VII. Tu su raspravljali o mnogim naučnim problemima. U periodu od 1656. do 1660. nastale su najvažnije Gradićeve rasprave što se vidi iz njegove rukopisne ostavštine koja je sakupljena u opširnom

rukopisu pod naslovom *Neka geometrijska razmišljanja učinjena u raznim vremenima od mene Stjepana Gradića* (*Quaedem meditationes geometricae diversis temporibus a me Stephano Gradio factae*). Ona se čuva u Vatikanskoj knjižnici. Rukopis je vrlo heterogen, a naslov se odnosi samo na njegov deo. Sadrži ne samo rasprave o geometriji nego i mnoga pitanja iz fizike i astronomije, kao i deo Gradićeve korespondencije o naučnim problemima s raznim važnim naučnicima toga vremena, kao s Evanđelistom Toričelijem, Alfonsom Đovanijem Borelijem, Mikelanđelom Ričijem, Onoreom Fabrijem i Vinćencom Vivijanijem. Isto tako sadrži i koncept njegova dela koje je 1680. izašlo u Amsterdamu pod naslovom *Četiri fizičko-matematičke rasprave* (*Dissertationes physico-mathematicae quatuor*). Ova dela prikazuju Gradića u sasvim drugom svetlu od onog u delu o peripatetičkoj filozofiji. Tu se vidi da se razvio u potpunog galilejanca koji je sudelovao u svim naučnim zbivanjima svoga doba u Rimu. Spomenuti rukopis u Vatikanskoj knjižnici sadrži mnoštvo nesređenih Gradićevih beležaka o raznim problemima mehanike, pa se po njemu može izvrsno pratiti i Gradićev razvitak, kao i tok njegovih rešavanja pojedinih problema. Četiri objavljene rasprave koje su u nekoliko varijanata sadržane u Vatikanskom rukopisu raspravljaju o upravljanju broda kormilom, o ubrzanom gibanju, o jednom geometrijskom problemu koji dolazi u područje infinitezimalnog računa, kao i o stvarnom i prividnom položaju polarne zvezde.

Druga Gradićeva rasprava bavi se problemima kretanja. Iz nje se vidi koliko je njegov rad bio u toku onih napora koji su u razdoblju od Galileja do Njutna pripremali Njutnovo fundamentalno delo *Matematički principi prirodne filozofije* (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687), u kome se nalaze Gradićevi pogledi o gibanju, princip inercije, uzrok slobodnog pada, sastavljanje kretanja, jednoliko ubrzano kretanje, izvođenje zakona slobodnog pada i interpretacija u odnosu na Fabrijevu i njihova diskusija o problemima kretanja. Gradićeva zanimanja u području kretanja bila su koncentrisana u prvom redu na slobodno padanje, a u vezi s tim i na neka opšta pitanja kretanja, kao što su inercija tela u kretanju, uzrok slobodnog padanja i sastavljanje kretanja. U tome je bio na galilejevskim pozicijama. Učestvovao je i u odlučnim diskusijama prednjutnovskog i postgalilejevskog doba. On nije bio učesnik nekih sporednih zbivanja u mehanici, već upravo onih najvitalnijih za njen razvitak.

Čitav Gradićev rad još nije ispitan, ali je van svake sumnje da je on veoma istaknuta ličnost naše naučne prošlosti, kad se radi o fizičko-matematičkim naukama.

Lit. Referat je sastavljen na osnovu naučnih istraživanja o Stjepanu Gradiću koja je izvršio i objavio Žarko Dadić u odgovarajućim naučno-stručnim publikacijama.

GRIZOGONO FEDERIK

Hrvatski, odn. jugoslovenski, matematičar, astronom, filozof i medicinar (1472 – 1538). Rođen je i umro u Zadru.

Federik Grizogono, nazvan Bartolačić po pretku Barti, prema slovenskom, odnosno hrvatskom obliku imena Bartolac, sin je Antuna Grizogona Bartolačića i Katarine Đurđević. Pripadao je zadarskom plemstvu. Osnovno i srednje obrazovanje stekao je u Zadru, a negde između 1498. i 1507. našao se u Padovi, zanesen studijama matematičkih nauka, iako mu je prva želja bila da studira pravo, kako sam ističe na jednom mestu. Proputovao je celu Italiju i znatan deo Evrope, stekavši mnoga znanja iz medicine, astrologije, astronomije, matematike i filozofije. U Padovi je, krajem 1506. ili početkom 1507. stekao titulu doktora filozofije i medicine. Na arhiliceju u Padovi, školske 1507/8. i verovatno 1508/9, predavao je astrologiju i matematiku, a par godina pre držao je predavanja iz opšte filozofije. Pretežni deo svog života proveo je u Zadru, gde se bavio medicinom, astrologijom, astronomijom, matematikom, filozofijom i komunalnim problemima.

Grizogono je istaknuti polihistor svoga doba. Kao takav delovao je na prelomu XV i XVI v. u epohi renesanse, u doba probuđenog zanimanja za nauku i filozofiju antičkog sveta, posebno za filozofiju prirode, koja je, na sebi svojstven način, utirala staze primeni matematičkih metoda u prirodnim naukama. Kao astronom, u okviru geocentričnog sistema, na spekulativan način, je konstruisao teoriju, numerički i grafički ilustrovanu, koja je za njegovo vreme, na zadovoljavajući način tumačila konkretan fenomen plime i oseke mora, i koja se za potrebe prakse mogla dobro upotrebiti. Kao matematičar-filozof inspirisao se u svojim pogledima na izvorima antičke matematike i njene filozofije i pod njihovim uticajem formulisao je svoje teorijske stavove o pojedinim načelnim pitanjima matematike, koji su od značaja sa gledišta modernih tokova matematike i njene metodologije i filozofije.

Grizogonovi matematički pogledi su neka vrsta komentara izvesnih pojmova sadržanih u Euklidovim *Elementima*, i to uglavnom u prvoj knjizi *Elemenata*. Odnose se na pojmove mere, tačke, linije, površi i tela, zatim na pojmove paralela, geometrijske figure, kontingentnog ugla, diskretuma i kontinuuma, aktuelnog i potencijalnog beskonačnog i na pojam apstrakcije i njene uloge u matematici. Te poglede Grizogono je izložio u svom delu koje je izišlo na latinskom jeziku u Veneciji 1507, pod naslovom *Astronomsko ogledalo kojim se ljudski um uvodi u svako znanje* (*Speculum astronomicum terminans intellectum humanum in omni scientia*). Ovo delo je izvanredna bibliofilska retkost.

U Grizogonovo vreme intenzivno su se komentarisali Euklidovi *Elementi* prema izvornom grčkom tekstu i prema arapskim tekstovima i prevođeni su na latinski jezik. Grizogono veli da je pri ruci imao, „dosta neučeno i nespretno preveden" Euklidov uvod u *Elemente*. Reč je, naime, o prevodu, na latinski jezik, italijanskog komentatora Kampanusa iz 1482. I na drugom mestu u svom delu *Astronomsko ogledalo* Grizogono se kritički odnosi prema Kampanusovom prevodu, koji je u to vreme kritikovan u Italiji. Naglašava dalje da je taj isti uvod preveo na latinski jezik izvanredno dobro Boecije, rimski matematičar i filozof (kraj V i prva polovina VI v.), i da svoja izlaganja zasniva na Boecijevom prevodu.

Zanimljivo je napomenuti da je konfuzija koja se u Grizogonovo vreme pravila između Euklida, matematičara i autora *Elemenata*, i Euklida, filozofa iz Megare, osnivača filozofske Megarske škole, člana Sokratovog kruga, našla svoje mesto i kod Grizogona, jer je i on, valjda prema Kampanusu, identifikovao te dve ličnosti, kad veli u svom delu: „Euklid iz Megare je, dakle, tvorac ove nauke, odnosno knjige *Elemenata*..."

Grizogonovi matematički pogledi, iako ponekad zamagljeni njegovim maštanjima, zanimljivi su za istoriju i metodologiju matematike, kao i za gnoseologiju i uopšte filozofiju matematike, pa u izvesnom smislu i za metamatematiku. S obzirom na izvore koje je koristio u formiranju svojih matematičkih pogleda, neophodno je kritički uporediti koliko je u tim svojim pogledima bio stvarno originalan, da bi im se našlo pravo mesto u razvitku matematike i njene filozofije. To treba da bude predmet daljeg istraživanja, iako je očigledan uticaj Platona, Aristotela i Averoesa na njegove matematičke poglede.

Sa stanovišta istorije i metodologije geometrije najzanimljivije je poglavlje u Grizogonovom delu *Astronomsko ogledalo*, posvećeno paralelnim pravim linijama. Mi smo opširno razmatrali Grizogonove poglede na problem paralelnih pravih.

Grizogono je posvetio posebnu raspravu o plimi i oseci mora pod naslovom *Rasprava o skrovitu uzroku plime i oseke mora* (*Tractatus de occulta causa fluxus et refluxus maris*) koju je objavio 1528. Bavio se i astrološkom medicinom i o tome je pisao rasprave.

Sve karakteristike epohe, u kojoj je Grizogono živeo i delao, odrazile su se, jače ili slabije, u njegovoj delatnosti većnika gradskog veća Zadra, u ulozi lekara, astrologa, astronoma, matematičara i filozofa.

HOČEVAR FRANC

Slovenački, odn. jugoslovenski matematičar (1853 – 1919). Rođen je u Metliki, umro je u Gracu.

Završio je gimnaziju u Ljubljani. Studirao je matematiku i fiziku na Filozofskom fakultetu u Beču. Za doktora filozofije promovisan je 1875, na osnovu disertacije *Über die Ermittelung des Werthes einiger bestimmter Integrale* (*O pronalaženju vrednosti jednog određenog integrala*). Bio je asistent na tehnici u Beču i profesor gimnazije u Insbruku. Habilitovao je 1883. i postao je privatni docent za matematiku. Godine 1891. je vanredni, a 1894. redovni profesor na nemačkoj Visokoj tehničkoj školi u Brnu. Od 1895. pozvan je na Visoku tehničku školu u Gracu, gde je ostao do smrti.

Naučna delatnost Hočevara objavljena je u dvadeset rasprava od 1876. do 1913. u raznim naučnim časopisima i publikacijama, a najviše u Akademiji nauka u Beču. Bavio se specijalnim pitanjima iz diferencijalnog i integralnog računa, kao uopšteni integral, obične i parcijalne diferencijalne jednačine, zatim dolaze tri rasprave sa područja algebre i po jedna rasprava iz teorije brojeva, kombinatorike, determinanata, analitičke geometrije prostora, mehanike i elektriciteta. Izgleda da je dao prve naučne radove u oblasti diferencijalnih jednačina u jugoslovenskoj matematici. To su radovi: *Über eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung* (*O jednoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini prvog reda*, 1877), *Über die Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen* (*O integraciji jednog simultanog sistema diferencijalnih jednačina*, 1878) i *Integration der Jacobischen Differentialgleichung* $Ldx+Mdy+N(xdy-ydx)=0$ [*Integracija Jakobijeve diferencijalne jednačine* $Ldx+Mdy+N(xdy-ydx)$, 1882]. Prva rasprava razmatra parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda koje se mogu svesti na sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, dok se u drugoj raspravi razmatra sistem jednačina

$$\frac{dx_1}{X_1-x_1X}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n-xX}=\frac{dz}{X_{n+1}-zX}$$

a u trećoj raspravi su L, M i N linearne funkcije i problem se svodi na sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrica. Pomenimo još ove njegove radove: *Über die unvollständige Gammafunction* (*O nepotpunoj gama funkciji*, 1876), *Über die Lösung von dynamischen Problemen mittels der Hamilto'schen paertiellen Differentialgleichung* (*O rešenju dinamičkih problema pomoću Hamiltonove parcijalne diferencijalne jednačine*, 1879), *Zur Lehre von der Theilbarkeit der ganzen Zahlen* (*Ka učenju deljivosti celih brojeva*, 1881), *Über die Convergenz bestimmter Integrale mit unendlichen Grenzen* (*O konvergenciji određenog integrala sa beskonačnim granicama*, 1893), *Sur les formes décomposables en facteurs linéaires* (*O formama rastavljivim na linearne faktore*, 1904), *Über den Zusammenhang zwischen den irreduziblen Teilern einer Form und einen linearen System ihrer Nullstellen* (*O svezi između ireduzibilnih delitelja jedne forme i jednog linearnog sistema njenih nula*, 1913).

Hočevar je napisao podrobne i oštre ocene o različitim matematičkim knjigama. U njima ne daje samo sadržaje knjiga, nego i svoje kritičke sudove o njima. U tim ocenama dolaze do izraza sklonosti i ideje koje su vodile Hočevara u pisanju njegovih rasprava i udžbenika. On je posebno poznat kao izvanredan pisac udžbenika matematike za niže i više razrede gimnazija. Po tome je evropski čuven. Pisao je udžbenike iz algebre, aritmetike i geometrije od 1886. do 1902. Njegovi udžbenici su dominirali u Austro-Ugarskoj. Na temelju prerade tih udžbenika objavljeni su mnogobrojni udžbenici za gimnazije na srpskohrvatskom jeziku, ili su direktno prevođeni, jer ih je Hočevar pisao na nemačkom jeziku. Zbog antislovenske politike u Austro-Ugarskoj udžbenici nisu prevedeni na slovenački jezik. Prevođeni su na italijanski i engleski jezik. Odlikuju se matematičkom i logičkom jasnoćom i strogošću izlaganja, dostupnom uzrastu učenika, kao i pogodnim primerima i zadacima. Hočevar je svoju aktivnost mnogo posvetio nastavi matematike u srednjoj školi. U tom pogledu, pored udžbenika, poznat je njegov članak *Sind die Elemente der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen einzuführen oder nicht*? (*Da li uvesti elemente infinitezimalnog računa u srednje škole*?, 1906). On spada u najistaknutije jugoslovenske pisce udžbenika matematike za gimnazije.

HORVAT IVAN

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar i fizičar (1732–1799). Rođen je u Kisegu, umro je u Pešti.

On je najverovatnije Gradišćanski Hrvat. Rođen je u Kisegu, mesto u Gradišću. Martin Meršić, istoričar Gradišćanskih Hrvata, uvrstio ga je sa sigurnošću među glasovite Gradišćanske Hrvate. Nešto drukčije o Horvatovoj narodnosti piše jedan drugi autor. I. Horvat je stupio u isusovački red. U Trnavi je završio studije bogoslovije. Tu je u Isusovačkom konviktu bio prefekt. Posvetio se nastavničkoj službi i u Trnavi je dve godine predavao filozofiju. Kad je Trnavski univerzitet bio preseljen u Budim, nastavio je s nastavom na Univerzitetu u Budimu, gde je predavao fiziku i mehaniku.

U Trnavi je napisao matematički udžbenik pod naslovom *Elementi matematike* (*Elementa matheseos*), koji je u dve sveske izašao u Trnavi 1772. i 1773. Prva sveska sadrži aritmetiku i algebru, a druga geometriju i preseke kupe. Bavio se problemima mehanike i držao predavanja iz mehanike na Univerzitetu u Budimu. U tom pogledu istaknut je njegov udžbenik *Uvodne lekcije iz mehanike* (*Praelectiones mechanicarum*, 1782–1784), objavljen u tri sveske. Bavio se celokupnom mehanikom, posebno hidrostatikom, hidrodinamikom i aerostatikom, kao i primenjenom mehanikom u graditeljstvu.

Poznat je bio po svojim udžbenicima iz fizike: *Opšta fizika* (*Physica generalis*, 1767) i *Osnove posebne fizike* (*Institutiones physicae particularis*, 1770). Obradio je celokupnu fiziku u udžbeniku *Elementi fizike* (*Elementa physicae*, 1970). Njegovi udžbenici iz fizike pisani su u potpunom duhu Njutna, a delimično i na temelju Boškovićeve teorije. U njima je napušten svaki trag peripatetizma. Oni su imali veliki uticaj na školstvo u Austrijskoj Monarhiji, pa time i u Hrvatskoj. Upotrebljavao se i na zagrebačkoj akademiji, kao i u drugim filozofskim tečajevima u Hrvatskoj.

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (I).

JOSIMOVIĆ EMILIJAN

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar i arhitekt (1823–1897). Rođen je u Staroj Moldavi u Banatu, umro je u Sokobanji.

Pošto je završio srednju školu, studirao je filozofiju, prirodne nauke i tehniku na Univerzitetu i Politehnici u Beču. Kad je došao u Srbiju bio je profesor Liceja, Velike škole i Vojne akademije. Na tim školama predavao je matematiku, mehaniku i neke tehničke predmete. Spada u najznačajnije pregaoce na Velikoj školi. On je jedan od prvih pisaca udžbenika i stručnih radova u Srbiji iz matematike, mehanike, građevinske tehnike i arhitekture i urbanizma. Poznato je njegovo delo *Načela više matematike* (1858). To je neka vrsta uvoda u infinitezimalni račun i namenjeno je studentima viših škola. Isto tako poznato je njegovo delo *Osnovi nacrtne geometrije i perspektive*, takođe za studente viših škola, objavljeno 1874. Pisao je jednu vrstu udžbenika iz geometrije, gde je obraćao posebnu pažnju na praktične primene geometrije. Istakao se i kao geodeta u svojim radovima iz građevinske tehnike. Jedno od najznačajnijih njegovih dela je *Objašnjenje predloga za regulisanje onog dela varoši što leži u šancu* (1867). To je prvi stručno urađeni i dokumentovani regulacioni plan u Srbiji. Josimović je postavio pravougaonu mrežu širih ulica preko nepravilne mreže uskih ulica starog Beograda, predlažući stvaranje parkova i sistema javnog zelenila. U tom delu dao je prvi precizan geodetski premer starog dela Beograda koji je sam izvršio. Docnije je rekonstrukcija tog dela Beograda izvršena pretežno po njegovom planu.

Bio je član Srpskog učenog društva, istakao se kao pedagoški radnik u oblasti matematike i kao arhitekt Beograda.

JUSTINIJANOVIĆ JURAJ

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1895–1965). Rođen je u Starom Gradu na Hvaru, umro je u Zagrebu.

Osnovnu i srednju školu pohađao je u Splitu, gde je i maturirao 1912. Studirao je u Gracu i Zagrebu, a diplomirao je na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu i to grupu nacrtna geometrija i matematika. Doktorat tehničkih nauka stekao je 1924. na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu. Bio je asistent za nacrtnu geometriju na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu, profesor gimnazije u Splitu i profesor Pomorske vojne akademije u Dubrovniku, a zatim profesor Više pedagoške škole u Zagrebu. Godine 1952. izabran je za profesora nacrtne geometrije na Tehničkom fakultetu u Zagrebu. Objavio je više pedagoških članaka u vezi sa rešavanjem raznih problema u nastavi nacrtne geometrije. U tom pogledu poznat mu je članak *O nacrtnoj ili deskriptivnoj geometriji u našim gimnazijama i prirodoslovno-tehničkim fakultetima* (1954), zatim udžbenik *Nacrtna geometrija za Strojarsko-brodograđevni fakultet, Elektrotehnički fakultet i Rudarski odjel Tehnološkog fakulteta* (1960), kao i još neki udžbenici i skripta posvećena višoj matematici i nacrtnoj geometriji. Napisao je i nekoliko udžbenika iz nacrtne geometrije za srednje škole, kao i sferne trigonometrije.

Napisao je dvadeset naučnih (8) i stručnih radova (2) kao i knjiga (10) – udžbenika i skripata. Svoje zanimanje u nacrtnoj geometriji ispoljio je naročito u stereografskoj projekciji. Tu je u više radova rešio neke probleme krivih drugog stepena, kao i neke probleme u kristalografskoj geometriji u vezi sa oblicima kristala. Posebno treba podvući da je rešio dva zanimljiva metrička problema u ortogonalnoj aksonometriji. Radove je objavio u Srpskoj akademiji nauka u Beogradu (npr.: *Primjena stereografske metode projiciranja pri konstruiranju krivulja drugog stepena, ako se među odredbenim elementima nalazi par konjugiranih imaginarnih tačaka*, 1929; *Dodatak primjeni stereografske metode projiciranja pri konstruiranju krivulja drugog stepena*, 1935); u Jugoslavenskoj akademiji znanosti i umjetnosti u Zagrebu (npr.: *Konstrukcija krivulja drugoga stepena, kada se među odredbenim elementima nalazi par konjugiranih imaginarnih tangenata*, 1936), u Glasniku matem.-fiz.-astr. (npr.: *Konstrukcija stereografskih projekcija monoklinskih kristalnih formi*, 1954), kao i u drugom časopisu.

Lit. Vilko Niče povodom Justinijanovićeve smrti, „Glasnik matematičko-fizičko-astronomski" 1–2, 1965.

KARAMATA JOVAN

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1902 – 1967). Rodio se u Zagrebu, umro je u Ženevi.

Srednju školu završio je u Lozani. Počeo je da studira tehničke nauke u Beogradu, ali je 1922. prešao na Filozofski fakultet, gde je 1925. diplomirao teorijsku matematiku. Na istom fakultetu, marta 1926, odbranio je doktorsku disertaciju *O jednoj vrsti granica sličnih određenim integralima*. Boravio je u Parizu 1927 – 1928. kao stipendista, gde se naučno usavršavao. Za docenta Filozofskog fakulteta u Beogradu izabran je 1930, a za vanrednog profesora 1937. Redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu postao je 1950, a redovni profesor Univerziteta u Ženevi je od 1951. Od tada je stalno živeo u Ženevi i povremeno dolazio u Beograd. Bio je redovni član SANU, dopisni član JAZU i inostrani dopisnik Češke akademije nauka. Držao je niz predavanja po pozivu na inostranim univerzitetima, od kojih neka i u vidu višemesečnih kurseva, npr. u Hamburgu, Getingenu, Tibingenu, Cirihu, Briselu, Oslu, Budimpešti i dr. Predavanja je držao i na nizu univerziteta i instituta u SAD. Više od 15 godina bio je jedan od glavnih urednika internacionalne matematičke revije „*L'enseignement mathématique*" u Ženevi. Posle njegove smrti izišao je specijalan broj revije posvećen njegovoj uspomeni, sa prikazom njegovih radova i prilozima inostranih naučnika. Bio je i urednik „Vesnika Društva Matematičara i fizičara NR Srbije".

Karamata je objavio 131 naučni, odnosno stručni rad u domaćim i inostranim naučnim časopisima, akademija nauka, univerziteta i naučnih društava. Od toga je 20 radova napisao sa svojim saradnicima, a ostalo sam. Svojim naučnim radovima aktivno je učestvovao na mnogim domaćim i inostranim naučnim skupovima, kao i u mnogim domaćim i inostranim naučnim i visokoškolskim ustanovama. Posebno je bio aktivan u okviru Srpske akademije nauka i umetnosti.

Vrlo rano je ispoljio matematičku darovitost, što pokazuje i njegova doktorska disertacija.

Savršeno je poznavao klasičnu teoriju redova. Godine 1910, engleski matematičari Hardi i Litlvud dokazali su najopštiji stav Tauberove prirode. Dokaz tog stava iznosio je preko deset strana. J. Karamata je proučavao taj stav i posle iscrpnih studija dao je dokaz tog stava na dve strane. On je *svojom metodom* dao „nov dokaz jednog već poznatog stava", koji je „ušao u sve monografije i udžbenike iz teorije redova". Taj njegov rad „izazvao je iznenađenje kod najvećih stručnjaka: Hardija, Litlvuda, Knopa, Landaua, Vinera" i učinio je „njegovo ime poznatim u najširim matematičkim krugovima". U

njemu je pored metode došla „do izražaja Karamatina osobina da kristalno jasno iskaže i najveće stvari na jednostavan način". Prelaz sa šireg pojma, kao što je pojam zbirljivosti, na konvergenciju reda čija egzistencija nije očigledna je predmet naučnih preokupacija J. Karamate. Kao primere, navedimo nekoliko Karamatinih radova, koji se odnose na njegov rad o kome je bila reč: *Sur certains „Tauberian theorems" de MM Hardy et Littlewood* (*O izvesnim „Tauberovim teoremama" gospode Hardija i Litlvuda*, 1930), *Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian Sätze* (*Novi dokaz i uopštenje nekih Tauberovih stavova*, 1931), *Application de quelques théorèmes d'inversion à la sommabilité exponentielle* (*Primena nekih teorema inversije na eksponencijalnu somabilnost*, 1931), *O jednoj novoj inversiji Cesàro-ovog načina zbirljivosti* (1934), *Über allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren* (*O opštim obrnutim stavovima graničnog prelaza*, 1936), *Sur le théorème Tauberien de N. Wiener* (*O Tauberovoj teoremi N. Vinera*, 1950), *Sur la sommabilité de S. Bernstein et quelques sommabilités s'y rattachant* (*O somabilnosti S. Bernštajna i nekim somabilnostima koje se nadovezuju*, 1947), *Razvoj i značaj teorije divergentnih redova u matematičkoj analizi* (1949), *Suites de fonctionnelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier* (*Nizovi linearnih funkcionala i faktori konvergencije Furijeovih redova*, 1956) i mnogi drugi.

Jedan novi problem učinio je Karamatino ime još poznatijim, a naime, to je „njegova sporo-promenljiva funkcija". Tek se danas oseća „značaj njegovih radova iz te oblasti i njihova vrednost kao svakog velikog dela raste sa vremenom", jer „ta klasa funkcija sa svojim osobinama, ulazi u čitav niz novih značajnih oblasti, kao što je račun verovatnoće i statistika". On je tu klasu funkcija zamislio „sa ograničenim ciljem da proširi svoj inverzni stav, ne sluteći da je našao opšti oblik i sve osobine jedne velike klase funkcija sa različitim primenama". Želeći da u matematici „vidi jasno osnovu na kojoj počiva rezultat", on je „vrhunac takvog shvatanja i rada" postigao „u radovima o sporo-promenljivim funkcijama". U nizu Karamatinih radova ispoljava se ovo što smo neposredno podvlačili, npr. u radovima *Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux* (*O jednom načinu pravilnog rašćenja. Osnovne teoreme*, 1933), *Beziehungen zwischen den Oszillationsgrenzen einer Funktion und ihrer arithmetischen Mittel* (*Odnosi između granica oscilacija jedne funkcije i njene aritmetičke sredine*, 1937), *Pravilno promenljive funkcije i Frilanijev integral* (1956), *Introduction à une theorie de la croissance des fonctions réelles* (*Uvod u jednu teoriju rašćenja realnih funkcija*, 1956), *Prilog osnovama jedne opšte teorije rašćenja* (1961), *Some Theorems Concerning Slowly Varying Functions* (*Neke teoreme koje se odnose na sporo promenljive funkcije*, 1962), *On slowly varying functions and asymptotic relations* (*Sporo promenljive funkcije i asimptotske relacije*, 1963) i u drugim.

U izdanju SANU, kao posebno izdanje J. Karamata je objavio 1949. monografiju *Teorija i praksa Stiljtjesova integrala*, a u izdanju Univerziteta u Beogradu 1950, udžbenik *Kompleksan broj sa primenom na elementarnu geometriju*. Obe ove knjige imaju sve odlike njegova rada, od originalnosti do sadržajnosti.

J. Karamata je veoma značajno ime jugoslovenske matematike. On se u njoj „javio onda kada je ona krenula već izgrađenim putevima". Bio je učenik Mihaila Petrovića, ali je u svom razvitku otišao svojim putem i u tome je kao matematičar uspeo. Gonjen ambicijom da traži uvek nešto novo, odnosno rezultate od trajne vrednosti i veoma siguran „da odvoji površno od dubokog, lepo od konfuznog", stalno je pokazivao „istančano osećanje za pravi naučni rad". Kad matematičar ostavi više radova koji se cene i navode, „onda je to uspeh i to je znatan matematičar". Takav je bio J. Karamata. Ostavio je „nekoliko radova trajne vrednosti", koji su „danas poznatiji nego u doba svog postanka". On je bio „jedan od retkih matematičara čiji se neki prikazi u referativnim časopisima pre rata navode u monografijama". Bio je citirano ime naše matematike, tako su „čitave strane posvećene njegovim rezultatima i to u najnovijim monografijama, pa čak i u inostranim udžbenicima koji su izašli na više stranih jezika".

J. Karamata spada u najistaknutije jugoslovenske matematičare. Njegovi su radovi inspirisali nekoliko naših i stranih matematičara u njihovim naučnim istraživanjima. Pod njegovim uticajem razvilo se kod nas nekoliko matematičara koji su sa uspehom nastavili da rade na sličnim problemima na kojima je radio Karamata, doprinevši tako razvitku matematike kod nas.

Lit. Miodrag Tomić, referat o J. Karamati.

KISELJAK MARIJE

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1883 – 1947). Rodio se u Rijeci i umro je u Zagrebu.

U najmlađim danima M. Kiseljak je pokazao veliku ljubav prema prirodnim naukama i matematici. Kao srednjoškolac bavi se matematičkim problemima, koji mu izazivaju želju za studije matematike. Godine 1901. upisao se najpre na Tehničku visoku školu u Beču, a 1902. na filozofski fakultet u Beču, gde studira matematiku i sluša predavanja niza istaknutih matematičara. Studirao je i na Univerzitetu u Minhenu, slušajući predavanja Lindemana, Bauera i Rentgena. Diplomirao je u

Beču 1905. i iste godine odbranio je doktorsku disertaciju *Grundlagen einer Zahlentheorie eines speziellen Systems von komplexen Grössen mit drei Einheiten* (*Osnovi teorije brojeva jednog specijalnog sistema kompleksnih veličina sa tri jedinice*). Bio je profesor gimnazije na Sušaku i u Zagrebu. Pošto je habilitovao sa radom *Novija istraživanja o prim-brojevima* (1914), izabran je za privatnog docenta na Filozofskom fakultetu u Zagrebu za teoriju brojeva i algebru. Prethodno je boravio godinu dana na usavršavanju u Getingenu. Na Filozofskom fakultetu je predavao: teoriju brojeva, delenje kružnice, teoriju algebarskog brojnog tela, aritmetičku teoriju formi, algebarsku analizu, determinante, algebarske jednačine, beskonačne redove, aditivnu teoriju brojeva, verižne razlomke, rešavanje numeričkih jednačina, transcendentne brojeve, osnove aritmetike i račun verovatnoće. Bio je profesor Šumarske akademije iz matematike i nacrtne geometrije a 1919. profesor Tehničke visoke škole u Zagrebu i rektor te škole, gde je bio naročito aktivan. Osnovao je Zavod za primjenjenu matematiku sa ciljem da se uspostavi toliko potrebna veza između tehnike i matematike. Godine 1925. postaje profesor geometrije na Filozofskom fakultetu, ali sticajem raznih okolnosti tu se nije mogao održati, već se morao povući. „Sveučilište u Zagrebu odreklo se tada saradnje odličnog naučnog radnika u vrijeme, kada nismo – još manje nego danas – obilovali ni matematičarima ni matematičkim podmlatkom. Tada se sveučilište odreklo čovjeka, koji je bio svestran i koji je jednakim shvaćanjem, jednakim razumijevanjem i jednakim poznavanjem struke bio u stanju da predaje ne samo teoriju brojeva i algebru, već i višu analizu, diferencijalnu geometriju i ako je potrebno kartografiju. Nažalost posve nenaučni razlozi onemogućili su da se popravi učinjeno zlo"..., a „bio je veliki rodoljub i u svom stavu prema nauci, životu i društvu uvijek među najnaprednijima". Bio je odličan geodeta od koga su praktičari stekli duboku spoznaju prevlasti teorije nad praksom. Predavao je agrarne operacije na tehničkom fakultetu i izgledalo je posle oslobođenja da će mu biti ispunjena želja da se potpuno vrati Sveučilištu, ali usled bolesti to mu nije moglo biti ispunjeno. Bio je dopisni član JAZU.

Svoje radove objavio je u Jugoslovenskoj akademiji znanosti i umjetnosti u „Nastavnom vjesniku" i u inostranim naučnim časopisima. Evo nekih od tih radova: *Eine neue Auflösungs-methode der homogenen quadratischen Gleichungen zwischen zwei Unbekanten* (*Jedna nova metoda rešavanja homogene kvadratne jednačine sa dve nepoznate*, 1903), *Über einen geometrischen Satz von Dirichlet* (*O jednom geometrijskom stavu Dirihlea*, 1907), *O Euklidovom algoritmu* (1915), *Aritmetičko-algebarski problemi iz teorije izbrojivih vjerojatnosti* (1918), *Neke metričke relacije kod krivulja u ravnini* (1919). Ostavio je u rukopisu delo *Nauk o skupovima*, kao i izvesne udžbenike iz više matematike.

M. Kiseljak je bio vrstan matematičar. Nije bio suvoparan, već uvek povezan sa stvarnošću, čovek duboke kulture i svestranog znanja. Njegova predavanja bila su sjajno spremljena i odlikovala su se savršenim sistemom. Veoma vešto je povezivao teoriju i praksu i uvek je znao da kod slušaoca pobudi zanimanje za nauku. Glavni domen njegovog stvaranja bile su algebra i teorija brojeva i u tom domenu mogao je dati još više rezultata da su bile srećnije okolnosti njegova života.

Lit. Vladimir Vranić, referat, „Glasnik matematičko-fizičko-astronomski" 4–5, 1947.

KLERIĆ LJUBOMIR

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1844–1910). Rođen je u Subotici, umro je u Beogradu.

Gimnaziju je završio u Beogradu, kao i dve godine tehnike na Velikoj školi u Beogradu. Kao državni pitomac studirao je rudarstvo na Politehničkoj školi u Cirihu. Od 1875. je profesor mehanike na Velikoj školi u Beogradu. Bio je član Srpske akademije nauka. Obavljao je državničke poslove kao ministar prosvete i ministar narodne privrede. Napisao je, prema Vajsbahu (Weisbach), udžbenik *Teorijska mehanika*. Značajnu aktivnost pokazao je u radu Velike škole i Srpske akademije nauka, kao autor niza naučnih članaka, odnosno kao referent u mnogim naučnim i nastavnim pitanjima. Kao profesor mehanike na Velikoj školi, Klerić je pružio nove konstrukcije računskih mašina na principima kinematike. Tako je grupa kinematičara oko njega radila na vrlo zapaženim aparatima zasnovanim na sistemu kotura i poluge. Veliku aktivnost uložio je u organizaciju katedre mehanike, posebno kad je ovu katedru trebalo podeliti na dve, jednu za slušaoce Filozofskog fakulteta, a drugu za slušaoce Tehničkog fakulteta. Podvući ćemo da je bio profesor mehanike Mihailu Petroviću i da je svojom računskom tehnikom i svojim matematičkim instrumentima znatno uticao na Petrovićeva zanimanja i ostvarenja u toj oblasti matematike.

Klerić je objavio niz naučnih članaka, odn. rasprava u „Glasu" Srpske akademije nauka. Svi se njegovi radovi odnose na razne primene matematike i na razne odgovarajuće instrumente. Pomenimo samo neke od njih, npr.: *Primene grafostatike i rešavanje geometrijskih zadataka*; *Teorija i konstrukcija polarnog pantografa*; *Primena grafodinamike na geometriju*; *Kako se geometrijski postrojava „Lamezanova površina"*; *Teorija i praksa kompenzacije klatna*; *O jednačini hornografa kod opšte promenljivog kretanja*; *O uzdužnom profilu suda stalnog hidrauličnog pritiska*; *O kompenzaciji vertikalnog klatna* (pristupna akademska beseda); *Traktoriograf i konstruisanje Ludolfovog broja „π" i osnovice „e" prirodnog logaritma*; *Kinematičko merenje brojnih vrednosti eliptičnih integrala, instrument za merenje eliptičnih integrala prve vrste*; *O instrumentima za crtanje linija drugog stepena*; *Geometrijska konstrukcija mreže za Merkatovu cilindar-projekciju*.

Istaknimo da je Mihailo Petrović iz Beograda od profesora Klerića poneo dovoljno znanja o računskoj tehnici, kao i Svetosavsku nagradu iz primene planimetra. Ta svoja znanja dopunio je na svojim studijama u Parizu kod profesora Kenigsa (Königs). M. Petrović je dao dopunu Klerićevog traktoriografa uz predavanja Kenigsa. Pokazao je da se Klerićev traktoriograf može iskoristiti i za rešavanje određene klase diferencijalnih jednačina. U vezi sa tim je Petrovićev rad *O diferencijalnim jednačinama prvog reda koje se mogu grafički integraliti pomoću g. Klerićevog šestara*. Petrovićevo zanimanje za mehaničku integraciju direktna je posledica uticaja Klerića i Kenigsa. Godinu dana pre objavljivanja prvog Petrovićevog rada iz hidraulične integracije, Klerić je pisao: „Bilo bi od velike koristi da promišljamo o tome, da pronađemo instrument, kojim bismo mogli naći integral ma koje linearne diferencijalne jednačine. Na ovom pitanju radi sada profesor matematike na Velikoj školi g. Mihailo Petrović, i nadati se je da će ovo pitanje, koje je veoma teško, rešiti, jer put kojim je pošao korektan je, sasvim originalan i veoma duhovit." Svojim traktoriografom, Klerić je mehaničkim putem konstruisao iracionalne, transcendentne brojeve π i e. Taj njegov, može se reći, najvažniji rad spominje se u inostranoj matematičkoj literaturi. Uopšte uzev, Klerićevi radovi iz matematike odlikuju se izvesnim primenama matematike i stvaranju za to matematičkih instrumenata. To je i najvažnije u njegovom matematičkom radu.

On je bio rudarski inženjer i geolog, a po svom talentu matematičar, koji je izbegavao duboke matematičke apstrakcije. Na matematiku je uvek gledao kao na praktičnu nauku, što nije odlika pravog matematičara. Gubio je često vreme na rešavanju malih problema, pa zato njegov naučni rad stoji u izvesnoj disproporciji prema njegovom matematičkom talentu. No, bez obzira na to, Klerić je svojim radom u matematici dao značajan prilog našoj računskoj tehnici i instrumentalnoj matematici uopšte.

Lit. Dragan Trifunović, *Letopis života i rada Mihaila Petrovića*, i neposredni lični uvid u Klerićeva dela.

KLOHAMMER FRANJO

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1755–1831). Rođen je u Bazinu, umro je u Zagrebu.

Bio je profesor matematike na Zagrebačkoj akademiji. Neko vreme predavao je sve predmete koje je obuhvatala katedra matematike. Pored udžbenika o jednačinama prvog i drugog stepena pisao je nekrologe o svojim savremenicima. Značajno je delo o istoriji Zagreba koje su napisali njegovi studenti pod njegovim rukovodstvom. Klohammer je 1801. objavio u Zagrebu knjigu *Teorija jednačina prvog i drugog stepena sastavljena i mnogim primerima ilustrovana* (*Theoria aequationum primi et secundi gradus conscripta et pluribus exemplis illustrata*), namenjenu studentima matematike na zagrebačkoj akademiji.

Pri sastavljanju svoje knjige koristio je najpoznatije udžbenike svoga vremena, pominjući niz istaknutih autora. Podeljena je u dva dela. Prvi deo sadrži linearne jednačine, a drugi kvadratne. Oba dela počinju kraćim teorijskim uvodom. Tako se na početku prvog dela raspravlja o pojmu poznate i nepoznate veličine, o postavljanju problema i o njegovom rešenju. Objašnjava se šta je analiza problema, koji su uslovi problema i šta je jednačina. Pokazuje se kako se jednačina transformiše u cilju izolovanja nepoznate da bi se došlo do rešenja jednačine. Postavljeno je 20 problema koji se svode na linearne jednačine s jednom nepoznatom i 20 problema koji se svode na linearne jednačine sa dve nepoznate, kao i 6 problema koji se svode na linearne jednačine sa tri nepoznate. Zanimljiv je skup problema koji se svode na jednu jednačinu sa dve nepoznate, gde se provodi diskusija i traži funkcionalna veza između tih nepoznatih. Daju se parovi rešenja koji zadovoljavaju jednačinu, a takvih ima beskonačno mnogo. Među tim problemima ima i takvih koji se svode na jednu nelinearnu jednačinu sa dve nepoznate. U drugom delu nalazi se 12 problema koji se svode na kvadratne jednačine sa jednom nepoznatom, među njima je jedan problem koji se svodi na sistem dveju jednačina od kojih je jedna linearna a druga kvadratna i jedan problem koji se svodi na jednu kvadratnu jednačinu sa dve nepoznate. Ova Klohammerova knjiga daje uvid samo u algebru koja se predavala na zagrebačkoj akademiji.

Iz teza koje je Klohammer davao studentima može se steći uvid u ostala područja matematike koja su predavana na akademiji. U ta područja spadaju planimetrija i stereometrija, kupini preseci, odn. analitička geometrija, praktična geometrija i geodezija, mehanika i geometrijska optika.

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (II).

LOPANDIĆ DRAGOMIR

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1929–1981). Rođen je u Dvorovima kod Bijeljine, umro je u Beogradu.

Gimnaziju je završio u Bijeljini 1949. Iste godine upisao se na Prirodno-matematički fakultet u Beogradu, gde je diplomirao matematiku 1953. Za asistenta za geometriju na Prirodno-matematičkom fakultetu izabran je 1956. Doktorsku disertaciju *Generalizacija izvesnih teorema metričke i projektivne geometrije u prostoru E^n* odbranio je 1962. Bio je docent za geometriju pri Katedri za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta. Predavao je euklidsku geometriju, osnove geometrije, diferencijalnu geometriju i tenzorski račun. Osim toga, postdiplomcima nastavnog smera predavao je odabrana poglavlja iz osnova geometrije. Predavao je osnove geometrije i nacrtnu geometriju studentima matematike na Filozofskom fakultetu u Prištini i osnove geometrije studentima matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Kragujevcu. Napisao je zbirke zadataka i udžbenike iz osnova geometrije, tenzorskog računa i diferencijalne geometrije. Posebno treba istaći udžbenike *Osnovi i elementi geometrije* i *Diferencijalna geometrija.* Navedena zbirka i udžbenici, prema sadržaju, obradi i obliku, predstavljaju bogatu literaturu za izučavanje navedenih predmeta. Aktivno je učestovao svojim predavanjima na stručnim seminarima za profesore srednjih škola koje su organizovali Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije ili Zavod za osnovno obrazovanje nastavnika. Pisao je udžbenike iz geometrije i za srednju školu.

Lopandić se intenzivno bavio geometrijom, posebno problemima koje se odnose na kombinatornu geometriju n-dimenzionih politopa. Boravio je na specijalizaciji u Moskvi, gde je izučavao diferencijalnu geometriju glatkih mnogostrukosti i geometriju neregularnih površi. Pored udžbenika i zbirki zadataka, objavio je nekoliko naučnih i stručnih radova, u kojima tretira probleme geometrije koji ga zanimaju. Od značaja su njegovi radovi: *Sur quelques propriétés des hypersphères inscrites au simples n-dimensionnel* (O nekim osobinama hipersfera upisanih u simpleksu n-dimenzionom, zajedno sa B. Alimpić, 1962); *Uopštenje Monžove tačke na proizvoljne skupove tačaka jedne hipersfere prostora E.* U radu *Epiciklične transformacije hiperboličke ravni* (1975) daje se nov pristup u izoperimetrijske transformacije hiperboličke ravni. Taj pristup omogućuje da se, ne prilazeći hiperboličkoj geometriji sa projektivnog stanovišta, izvedu na jednoobrazan način sve izometrijske transformacije ravni Lobačevskog. Tu je izložena i klasifikacija izometrijskih transformacija hiperboličke ravni. U radu *Združeni pravougli trouglovi u hiperboličkoj geometriji* (1975) je izložen neposredniji način dobijanja tzv. lanaca združenih pravouglih trouglova u hiperboličkoj geometriji, do kojih se u literaturi dolazi u znatno složenijem obliku. U rešavanju raznovrsnih problema hiperboličke geometrije nalaze svoju primenu lanci združenih pravouglih trouglova, među tim problemima nalaze se i osnovne geometrijske konstrukcije u ravni Lobačevskog.

Stručni kao i naučni radovi Lopandića odlikuju se jasnim i strogim izlaganjima. To je ono što treba posebno podvući u njegovom naučnom i stručnom radu.

LUČIĆ LEONIDA

Bosansko-hercegovački, odn. jugoslovenski matematičar (1902 – 1973). Rođen je u Prahovu, a umro je u Sarajevu.

Gimnaziju je učio u Kragujevcu, zatim na Korzici a završava je u Skoplju 1918. Diplomirao je teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu u Beogradu 1925. Od 1927. do 1929. bio je na usavršavanju u Parizu, gde je studirao matematičku statistiku i primene matematike u finansijama i u privredi. Doktorirao je u Parizu na Sorboni sa disertacijom *Tok i mehanizam varijacija interesne stope u Francuskoj od 1800 – 1930*. Disertacija je objavljena u Parizu 1930. Pre rata radio je u Ministarstvu finansija. Bio je profesor statistike na Pravnom fakultetu u Sarajevu, a zatim profesor matematičke analize i statistike na ekonomskom fakultetu u Sarajevu. Predavao je statistiku, psihometriju i matematiku na pravnom, poljoprivrednom i prirodno-matematičkom fakultetu. Držao je predavanja i na postdiplomskim studijama. Bio je član Statističkog društva Francuske.

Objavio je šest rasprava o *kovarijacijama i korelacijama u statistici u vezi sa predviđanjima u privredi*. Bavio se primenom matematike i statistike u obradi principa izrade amortizacionih planova, rentabiliteta državnih obveznica i u anuitetskoj službi državnih dugova. Napisao je nekoliko članaka i rasprava iz teorijske statistike i objavio je univerzitetski udžbenik *Matematika za ekonomiste*.

Lit. Miloš Blažić, podaci.

MAJCEN JURAJ

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1875 – 1924). Rodio se i umro u Zagrebu.

U Zagrebu je završio realku, u Beču Visoku tehničku školu, odn. odsek te škole za srednjoškolske nastavnike iz matematike i nacrtne geometrije. Tu su na njega izvršili veliki uticaj istaknuti geometričari Gustav Peške i Ešerih. Godine 1899. doktorirao je na Zagrebačkom sveučilištu sa disertacijom *O nekojim projektivnim svojstvima paraboličnog cilindroida*. Godinu dana docnije habilitovao je na Mudroslovnom fakultetu u Zagrebu sa radom *Konfokalne krivulje 2. stupnja*. Majcen je svoju službu počeo na realnoj gimnaziji u Osijeku i nastavio na realnoj gimnaziji u Zagrebu do 1905. Pošto je dobio dozvolu predavanja na univerzitetu, držao je predavanja iz kolegija *Centralna projekcija i Projektivna geometrija* na Mudroslovnom fakultetu. Postao je vanredni profesor ovog fakulteta 1911, a redovni profesor 1913. Godine 1909. izabran je za redovnog člana Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.

U svom naučnom radu usmerio se na istraživanja geometrijskih problema u okviru projektivne metode i pokazivao je zanimanje prema svim područjima geometrije svoga doba. Svoje radove Majcen je klasifikovao u pet skupina: u prvu skupinu idu rasprave o površima; u drugu o krivama u prostoru; u treću o krivama u ravni; u četvrtu problemi prostorne geometrije i u petu problemi iz nacrtne geometrije. Trebalo bi navesti i šestu skupinu, koja sadrži rasprave u kojima je Majcen geometrijski rešavao pretežno sintetičkom metodom neke probleme iz statike. Iako je umro u naponu snage, uspeo je da napiše preko 100 radova.

Prve Majcenove rasprave posvećene su krivama drugog stepena, pa je zatim svoja istraživanja proširio i na krive viših stepena, ograničivši se na krive četvrtog stepena. Uporedo sa tim počeo se baviti i površima, naročito pravolinijskim površima, da bi zatim prešao na nepravolinijske površi. U nizu svojih radova mnogo se služio centralnom projekcijom, koju je koristio ne samo u rešavanju geometrijskih problema nego i u rešavanju problema statike, gde obrađuje pitanje ravnoteže ili ekvivalencije četiri prostorne mimosmerne sile. Tu je proširio istraživanja i obrađivao je slučaj ravnoteže n sila koje deluju na jednom hiperboličkom paraboloidu. Otkrio je konoid trećeg stepena i uspeo naći neke nove tada nepoznate komplekse. Majcenovi rezultati bili su uvek početak ili nastavak u lancu matematičko-geometrijskih istina koje vode na nova istraživanja. Sve te nove istine Majcen nije ni mogao sam naći, u njihovom otkrivanju učestvovali su njegovi učenici, koji pripadaju „Majcenovoj školi“ u Zagrebu. U tom pogledu vrlo je važan Majcenov rad *O novoj vrsti kvadratnih transformacija* (1902). Proučavao je cirkularnu kubnu elipsu, a zatim i kubnu hiperbolu i proširio je svoja istraživanja na krive u prostoru petog reda druge vrste. Dao je niz radova o površima u kojima je primenio analitičku metodu, gde je došao do mnogih novih rezultata i saznanja.

Majcen se bavio problemima četvorodimenzionalnih prostora i u tom pogledu su značajni njegovi radovi *Prilog centralnoj projekciji prostora sa četiri dimenzije* (JAZU, 1906) i *Upotreba prostora sa četiri dimenzije za rješenje jednog općeg metričkog problema u običnom prostoru* (SANU, 1910). Neeuklidska geometrija, kao i geometrija sa prostorom većim od tri dimenzije, izazvale su svojim filozofskim implikacijama mnoge diskusije početkom XX v. u Hrvatskoj. No, bez obzira na to, Vladimir Varićak je proučavao geometriju Lobačevskog, a Majcen geometriju sa prostorom koji ima dimenziju veću od tri. U svojoj opširnoj raspravi *Temelji hipoteza i matematičkih metoda za geometriju prostora sa četiri dimenzije i više njih* (JAZU, 1910), Majcen raspravlja o uvođenju, opravdanosti i važnosti pojma četvorodimenzionalnog prostora i pri tom ne zaobilazi ni filozofske implikacije. On prikazuje istorijski postanak i razvitak hipoteze o prostorima s više dimenzija, povezujući temelje matematičkih metoda u istraživanjima viših prostora i izlažući odnos prostora sa tri dimenzije i ostalih matematičkih prostora. Svoju raspravu završava razmatranjem o koristi geometrije sa *n* dimenzija za razvitak matematike. Vrlo je opširno raspravio o filozofskim implikacijama uvođenja prostora sa više od tri dimenzije i o prigovorima filozofa. „Kad matematika upotrebljava izraze kao *prostor* s više od tri dimenzije, *n* dimenzija nekog prostora i dr.", podvlači Majcen, „onda tim ne misli reći, da se radi o konkretnom bivstvu, nego to, da oni izrazi u apstraktnom posveopćenju znače matematički kombinirano sveze istim onim *načinom*, kako je utvrđeno za običnu geometriju prostora". Obrazlažući opravdanost nekih novih pojmova u matematici kao što su prostori s više od tri dimenzije, Majcen kaže: „Da se uništi egzaktno stvorena mogućnost određenja viših prostora, morala bi se pokazati nemogućnost nekih matematičkih kombinacija, a to bi značilo potresti cijelom matematikom kao mogućom i nužnom naukom. Tko bi pak na takovim razvalinama pokušao sagraditi nauku nanovo, uvidio bi skoro, da ne može izbjeći nijednoj onoj teškoći, koju se bio nadao ukloniti. Matematičku nauku ne možemo podijeliti na dijelove, koji vrijede, jer su mogući, i na takove, koji ne vrijede, pa zato nemaju pravo postojanja. Pojedini su dijelovi već sada svezani među sobom ili će do veze još doći u budućnosti. A upravo poradi toga nastojanja oko homogene cjeline svih dijelova nauke opravdana je i geometrija s više dimenzija, ma kako ona bila apstraktna i ma koliko se činila hipotetička sva ona vrijednost, koja iz nje izlazi". Tako je Majcen jedan od pokretača modernih pogleda u matematici u Hrvatskoj, iako se u tome ne može poricati uloga njegovih prethodnika. U svim ovim raspravama, kao i na drugim mestima, Majcen se ispoljio kao metodolog, filozof i istoričar matematike i to ga posebno odlikuje.

Od 1920. do 1923. Majcen se bavio istraživanjem Getaldićevih i Boškovićevih radova iz geometrije. Napisao je studiozan komentar o Getaldićevoj raspravi koja se odnosi na parabolu i objavio ga je 1920. zajedno sa Getaldićevom raspravom. Majcen dolazi do zaključaka, a naime: „Getaldić je, dakle, došao samostalno do onih problema i teorema..., tako isto, kao Apolonije u svojoj VI knjizi. Getaldić je te teoreme trebao kao podlogu za svoja izvođenja o paraboli, pa ih je sam postavio i dokazao... Getaldić je, dakle, u spisu o paraboli učinio više nego li se moglo za njegovo doba očekivati, to pak podaje i njegovu radu i njegovoj vrsnoći kao matematiku jače istaknutu vrijednost". Getaldić se u svojoj raspravi dotiče odnosa paralelizma. Majcen u svom komentaru ističe da je Getaldić odnos paralelizma sagledao više s geometrijskog, a Kepler više sa optičkog stanovišta i zaključuje u isto vreme: „Ako uzmemo, da se u historiji pripisuje Dezargu* uvođenje neizmjerno dalekih elemenata u geometriju... moramo opaziti, da je jedan od preteča Dezargovih u tom pitanju bio Kepler, a još stariji Getaldić godine 1602, premda se u spisu o paraboli ne izjašnjuje izravno o „paralelizmu" i „ekvidistantnosti". Isto tako, Majcen je Boškovićevu teoriju konusnih preseka predočio i komentarisao (*Matematički rad Boškovićev, II, Sectionum conicarum Elementa - Boškovićeva teorija krivulja 2. reda*, JAZU, Rad, knj. 225, 1921). Tu je od bitnog značaja pojam Boškovićeve generacione kružnice, koju je Majcen primenio i proširio u „Boškovićevu kuglu" u nacrtnoj geometriji. Posle iscrpne analize, Majcen zaključuje, u pogledu Boškovićeve teorije konusnih preseka, „da bi ona bila najsavršenija od svih neanalitičkih teorija krivulja 2. reda" i da je „nikakvo drugo djelo te vrste ne bi moglo natkriliti ni u budućnosti" i da je to delo „u svakom pogledu posve samostalno i tako dotjerano da još i danas ima osobito značenje u sistemu i metodi". Osim toga, Majcen ističe da je Bošković više nego jedno stoleće pre jasnog uvida u pitanje delenja ugla na tri jednaka dela, u svom delu o kome je reč, naslutio razloge koji ne dopuštaju tu podelu pomoću lenjira i šestara.

Majcen se bavio problemima nastave matematike u srednjoj školi i napisao je udžbenike za tu nastavu.

Lit. Žarko Dadić, podaci i lični uvid u njegova dela.

MARKOVIĆ DRAGOLJUB

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1903 – 1965). Rodio se u Smederevu, a umro je u Vrnjačkoj Banji.

U Smederevu je završio osnovnu školu i gimnaziju. Diplomirao je, 1926. na grupi za matematiku Filozofskog fakulteta u Beogradu. Bio je profesor gimnazije. Godine 1936. proveo je pet meseci na specijalnim studijama u Parizu, kao stipendist francuske vlade, pripremajući istovremeno doktorsku disertaciju. Na Filozofskom fakultetu u Beogradu odbranio je 1938. doktorsku disertaciju *Granice korena algebarskih jednačina*. Radio je u odelenju za bankarstvo i osiguranje Ministarstva trgovine i industrije, gde je osnovan centar za proučavanje aktuarske problematike i vrhovni stručni nadzor nad poslovima osiguranja u Jugoslaviji. Tu je proveo devet godina kao viši sekretar i matematički stručnjak, radeći na stručnoj organizaciji i u praktičnoj primeni računa verovatnoće na matematiku osiguranja. Postavio je temelje aktuarskoj struci i njenoj primeni, kao i primeni matematičke statistike na probleme osiguranja u Jugoslaviji. Posle drugog svetskog rata učestvovao je u organizaciji Državnog osiguravajućeg zavoda. Predavao je primenjenu matematiku na Komercijalnoj školi. Za docenta Tehničkog fakulteta izabran je 1947, a za vanrednog profesora Prirodno-matematičkog fakulteta 1950, dok je za redovnog profesora izabran 1954. Bio je član Matematičkog instituta, a vrlo aktivno je učestvovao u radu Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije i u Savezu društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Bio je glavni urednik „Matematičkog vesnika“. Učestvovao je vrlo aktivno na našim i stranim kongresima i simpozijumima sa zapaženim referatima.

Marković je imao izvanredne nastavničke sposobnosti. Umeo je da zainteresuje slušaoce i da ih uvede u naučni rad i time je mnogo doprineo stvaranju naučnog podmlatka. Imao je široku i solidnu matematičku kulturu, koja se ispoljila u svim oblastima koje je obrađivao. Celim svojim plodnim nastavnim i naučnim radom ostavio je vidnoga traga na Prirodno-matematičkom fakultetu, Matematičkom institutu, Društvu matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije i u Savezu društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Napisao je preko pedeset naučnih i stručnih radova. Oni obuhvataju algebru i teoriju verovatnoće sa matematičkom statistikom, a delimično i oblast diferencijalnih jednačina.

U algebri je dao više značajnih rezultata. Među njima treba posebno istaći rezultate iz teorije polinoma u vezi sa gornjim i donjim granicama modula nula polinoma. Ti rezulta-

ti su odmah zapaženi u stranoj matematičkoj literaturi i uneti u inostrane monografije. Proučavajući pojedine probleme iz oblasti algebre, Marković je dao svoju metodu koja mu je omogućila da dođe do novih rezultata u algebri. Ta se metoda odnosi na problem ograničenja modula nula jednog zbira vezanog za trigonometrijske polinome, ali se ona može primeniti i na druge probleme iz ove oblasti. Pored toga, dao je još čitav niz novih naučnih priloga, npr. onih koji se odnose na rešavanje algebarskih jednačina pomoću približnih metoda. Navedimo neke od Markovićevih radova iz algebre: *O razmacima realnih korena algebarskih jednačina* (SANU, Beograd, 1937), *Sur les limites des zéros réels des polynômes* (O granicama realnih nula polinoma, SANU, Beograd, 1938), *Granice korena algebarskih jednačina* (SANU, Beograd, 1939), *Domaines contenant le zéro du plus petit module des polynômes* (Domeni koji sadrže nulu najmanjeg modula polinoma, SANU, Beograd, 1950), *Sur les zéros réels des dérivées des quelques fonctions* (O realnim nulama izvoda nekih funkcija, „Matematički Vesnik“ IV [3 – 4], Beograd, 1953), *Sur un procédé de factorisation approximative des polynômes* (O jednom postupku aproksimativne faktorizacije polinoma, „Matematički Vesnik“ VI [1 – 2], Beograd, 1954), *Sur la limite inférieure des modules des zéros des polynômes de deux variables* (O donjoj granici modula nula polinoma od dve promenljive, Publications de l'Institut Math. T. I [15], Beograd, 1962) i brojni drugi radovi.

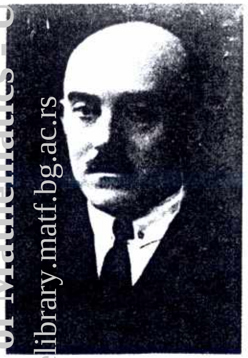
Marković je odigrao značajnu ulogu u razvitku algebre i teorije verovatnoće sa matematičkom statistikom na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Kao dugogodišnji saradnik Matematičkog instituta i kao šef odseka za Teoriju verovatnoće i matematičku statistiku stvorio je jezgro u Institutu za dalji naučni rad u ovoj oblasti.

Treba podvući i Markovićeve radove iz oblasti diferencijalnih jednačina, koji se odnose na uokviravanje rešenja diferencijalnih jednačina u određene granice. Tako se dobija oblast u kojoj se nalaze rešenja posmatranih jednačina, a to omogućava nalaženje približnih rešenja takvih jednačina.

Nekoliko njegovih radova odnose se na metodičko-pedagoške probleme nastave matematike, na ulogu matematičara u savremenom svetu, na probleme uvođenja mladih u naučni rad, kao i na neke opšte probleme u vezi sa nastavnim i naučnim radom u matematici.

Lit. Tadija Pejović, podaci.

MARKOVIĆ SIMA



Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1888 – 1937). Rođen je u Kragujevcu, umro u SSSR-u.

Osnovnu školu i gimnaziju završio je u Kragujevcu. Tu je postao socijalist. Studirao je teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Na istom fakultetu doktorirao je kod Mihaila Petrovića 1913, sa tezom *Opšta Rikatijeva jednačina prvog reda.* Bio je suplent i profesor gimnazije u Beogradu. Postao je asistent i docent za matematiku na Filozofskom fakultetu. Mihailo Petrović je osobito cenio njegove matematičke kvalitete. Baveći se naukom i filozofijom, odao se politici, gde se opredelio za komunističku delatnost. Bio je sekretar Komunističke partije Jugoslavije i komunistički narodni poslanik u Ustavotvornoj skupštini, kao i delegat KPJ na Trećem kongresu Komunističke internacionale. Postao je vođa desne frakcije u Komunističkoj partiji Jugoslavije, opterećen anarhosindikalizmom iz najranijeg razdoblja svog političkog rada. Imao je antimarksistička shvatanja nacionalnog pitanja, koja je izneo u više teoretskih rasprava, npr. u raspravama *Nacionalno pitanje u svetlosti marksizma* i *Ustavno pitanje i radnička klasa Jugoslavije.* Posredstvom Komunističke internacionale, Marković je između Trećeg i Četvrtog kongresa KPJ bio na čelu partije. Smenjen je kao jedan od nosilaca frakcionaške borbe, isključen iz članstva, da bi ponovo bio primljen i poslan je u Moskvu. U vreme staljinskih čistki osuđen je na 10 godina robije. Umro je u zatvoru.

U izradi svoje doktorske teze koristio je radove istaknutih matematičara Pikara (Picard), Apela*, Petrovića* i Jakobija*. Dao je kvalitativnu integraciju Rikatijeve jednačine. Posebno se ističe rezultat koji se odnosi na Šturmove granice broja nula i polova integrala. Tretira se mehanička integracija, što pokazuje da Marković nije stajao van instrumentalne matematike. U tezi je pokazao duboko zanimanje za matematičku fenomenologiju svog profesora Mihaila Petrovića, koju je osobito u svojim radovima cenio i uvažavao. Tezu je odbranio pred komisijom koju su sačinjavali Mihailo Petrović i Milutin Milanković. U JAZU je objavio rad koji se odnosi na kvalitativnu integraciju Rikatijeve jednačine $y' + y^2 = w(x)$, u kome je koristio metode iz svoje doktorske disertacije.

U predlogu da se Marković izabere za docenta Filozofskog fakulteta, profesori teorijske matematike Mihailo Petrović i Mladen Berić vele: „Znajući G. Markovića i kao studenta našeg Univerziteta i kao nastavnika gimnazije – za koju je on već izradio i publikuje odlične udžbenike, – i kao asistenta na Univerzitetu, uvereni smo da će Marković uspešno produžiti

rad na nauci, koji mu je bio otežan u ratnim prilikama i velikim brojem časova koje je imao kao profesor gimnazije.

G. Marković po našem mišljenju zadovoljava uslove za docenta i mi se nadamo da će biti od velike koristi kao nastavnik i zato predlažemo G. Dr Simu Markovića za docenta Teorijske matematike".

Zanimala su ga i nastavna pitanja matematike. Njima je posvećivao pažnju u svom nastavnom radu iz oblasti matematike. Bio je autor veoma dobrih udžbenika iz matematike za gimnazije.

Vrlo su poznati Markovićevi radovi iz epistemologije, tačnije iz filozofije matematike i prirodnih nauka, kao i iz opšte filozofije. To su radovi: *Teorija relativiteta* (1924); *Iz nauke i filozofije* (1925); *Ajnštajnova teorija relativiteta* (1925); *Kritički osvrti* (1934); *Princip kauzaliteta i moderna fizika* (1935); *Prilozi dijalektičko-materijalističkoj kritici Kantove filozofije* (1936). U svim ovim radovima Marković je razvio svoje kritičko-polemičke i sistematske naučno-filozofske poglede. Nastojao je da u okviru filozofije matematike i fizike pokaže dijalektički materijalizam kao teoriju spoznaje.

Svojom doktorskom tezom iz matematike i svojim radovima iz filozofije matematike i fizike, uprkos mnogim nedostacima u tim radovima, na koje je ukazala filozofska kritika kod nas, Marković se iskazao kao talentovan matematičar i kao zaslužan filozof matematike i fizike.

MARKOVIĆ ŽELJKO

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar i istoričar matematike (1889 – 1974). Rođen je u Slavonskoj Požegi, a umro je u Opatiji.

Matematiku i astronomiju studirao je na Filozofskom fakultetu u Zagrebu. Usavršavao se u tada najpoznatijem matematičkom središtu u Getingenu, kao i u Parizu. Bio je privatni docent za predmet mehanika neba na Filozofskom fakultetu u Zagrebu, vanredni i redovni profesor matematike na Tehničkoj visokoj školi, odnosno na Tehničkom fakultetu, kao i na Prirodnoslovnomatematičkom fakultetu u Zagrebu, gde je bio i predstojnik Zavoda za primenjenu matematiku. On nije bio običan predavač, sa uskim gledanjem na matematičke probleme. Širina njegovih pogleda omogućavala je da slušaoci dožive matematiku kao deo celovite kulture. Njegova predavanja bila su prožeta osećajem za sagledavanje celine i lepote matematike i njenih primena.

Učestvovao je u mnogim stručnim i društvenim poslovima. Bio je urednik „Almanaha Bošković", član uredničkih odbora više naučnih publikacija, zalagao se za izgradnju i opremu Opservatorija Instituta za fiziku atmosfere na Sljemenu, bio je inicijator Instituta za povijest znanosti Jugoslavenske akademije i aktivno je učestvovao u radu Saveza društava matematike i fizike Jugoslavije. Više puta je bio dekan na Tehničkom i Prirodoslovnomatematičkom fakultetu u Zagrebu, a bio je jednom i rektor Univerziteta. Bio je takođe redovni član JAZU, kao i dugogodišnji tajnik drugog razreda Akademije za matematičke, fizičke i tehničke nauke. Isto tako bio je dopisni član Međunarodne akademije za istoriju nauka u Parizu.

Naučni rad Željka Markovića obuhvata tri domena, i to: diferencijalne jednačine, starogrčku matematiku i Ruđera Boškovića. Tokom svog naučnog rada pokazivao je zanimanje za sva tri domena, ali može se istaći da je prvih dvadeset godina radio na diferencijalnim jednačinama, zatim na starogrčkoj matematici, te konačno sistematski na životu i delu Ruđera Boškovića.

Svojom doktorskom disertacijom (1915) započeo je rad na diferencijalnim jednačinama, potaknut u tome teorijom integralnih jednačina V. Voltere*. Marković nastoji da diferencijalne jednačine pretvori u linearne integralne jednačine i da ih tim putem reši. On tu primenjuje jednu formulu integralnog računa i tako dolazi do linearnih integralnih jednačina druge vrste Volterina tipa. Posebno se koncentrisao na teoriju linearnih diferencijalnih jednačina sa periodičnim koeficijentima koje imaju značajnu primenu u nebeskoj mehanici (*O periodičkim funkcijama druge vrste, koje su rješenja linearnih jednadžba diferencijalnih s periodičkim koeficijentima*, 1916). Potaknut dvostrukim zanimanjem za diferencijalne jednačine i nebesku mehaniku, promatra linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda, Gilden-Lindštetovu, odn. Matijeovu jednačinu (*O Mathieuovim funkcijama perioda* π, 1926). I tu primenjuje integralne jednačine na rešavanje diferencijalnih jednačina. Matijeove funkcije su u središtu Markovićevih istraživanja nekoliko godina (*Sur la non-existence simultanée de deux fonctions de Mathieu*, 1926) i (*Sur les solutions periodiques de l'équation différentielle linéaire du seconde ordre à coefficient périodique*, 1929). Svoja istraživanja proširuje (*O periodičkim rješenjima linearne diferencijalne jednadžbe 2n-toga reda s periodičkim koeficijentima*, 1933) i dolazi do novih značajnih rezultata.

Kao dugogodišnji profesor matematike na Tehničkom i Prirodoslovnomatematičkom fakultetu napisao je *Uvod u višu analizu* (1945–1952). To delo je po autorovoj zamisli trebalo da omogući svakome ko zna srednjoškolsku matematiku „da se upozna s pojmovima, načinom izvođenja i rezultatima više analize u obliku koji je primila u gotovo tri stoljeća pročišćavanja, ujednostavljanja i produbljivanja, a da ne izgubi vezu s

njenim primjenama". To je celovit udžbenik matematičke analize, koji je odigrao izvanrednu ulogu u matematičkom vaspitanju generacija matematičara. Nije suvoparan udžbenik, pisan je živim jezikom, ponegde pravim književnim stilom i autor je svugde težio da pokaže korene ideja i rešenja i da ukaže na primene.

Markovićeva istraživanja od 1939. tesno su vezana za istoriju matematike. Istraživao je matematička shvatanja Platona i Aristotela. Na to se odnose njegovi radovi *Matematika u Platona i Aristotela* (1939), *Platonova nauka o mjerenju* (1940) i *Beskonačni postupci u Aristotela* (1953), kao i tri rada u inostranim edicijama koji su se uglavnom temeljili na upravo spomenutim radovima. Ovim radovima Marković je veoma duboko prodro u Platonova i Aristotelova shvatanja o matematici, pokazavši od kakvog su uticaja bila ta shvatanja na kasniji razvitak matematike i kako ona doprinose razumevanju tog razvitka.

Mnogo godina u svom naučnom radu Marković je posvetio istraživanjima Boškovićeva života i rada, tako da je poslednje razdoblje njegova života skoro potpuno posvećeno Boškoviću. Od 1956. do 1962. izišlo je ukupno devet temeljnih Markovićevih studija o pojedinim problemima vezanim uz Boškovića. No, sve je to bio uvod u njegov glavni poduhvat u vezi sa Boškovićem, u veliki sintetički rad za koji je trebalo mnogo godina upornog istraživanja. To delo je *Ruđe Bošković* u dva toma (I, 1968, II, 1969), koje je objavila JAZU.

Vlastitim stvaralačkim proučavanjem izvornih dela Boškovićevih i njegove obimne korespondencije, zatim temeljitim i kritičkim proučavanjem vrlo obimne literature o Boškoviću, jugoslovenskih i stranih autora, sistematskim arhivskim istraživanjima, Marković je svestrano, duboko i stvaralački ušao u svet Boškovićevih ideja i u njegove naučne metode, osvetlivši ih često novim svetlom i novim tumačenjima. Svestrano i kritički je prikazao Boškovićev život i rad u Rimu, Parizu, Londonu, Paviji, Milanu, Beču, na zvezdarnici u Breri i u drugim sredinama, njegov kritički odnos prema isusovačkom redu, kome je kao svešteno lice pripadao, političke i diplomatske akcije, opštedruštveni život, putovanja širom Evrope, naučne polemike (u vezi sa D'Alamberom*, Laplasom*, Lagranžom*, Rošonom i drugim), njegovu obimnu i zanimljivu korespondenciju (sa braćom Barom i Božom i sestrom Anicom; sa prijateljima i saradnicima: Kleroom, Lalandom, Pučinelijem, La Kondaminom, Kontijem, Firmijanom i drugim) i njegove veze sa Dubrovnikom. Vrlo reljefno i kritički Marković je prikazao karakterne crte Boškovića kao mislioca i čoveka sa izuzetnim odlikama, ali i kao čoveka sa ljudskim manama koje su mu pričinjavale teškoće u komunikacijama sa ljudima i sredinama u kojima je delao.

Sistemom naučnih analiza i sinteza, iscrpnom argumentacijom i stvaralačkom kritičkom obradom Boškovićevih teorijskih i eksperimentalnih radova, svestranim i kritičkim prikazom njegove opšte i naučne biografije, svrsishodnim navođenjem i obradom njegove obimne korespondencije, kritičkim prikazom odjeka i uticaja njegovih dela, a zatim temeljito zasnovanim opservacijama, kojima je Marković propratio sva svoja izlaganja i koja često bacaju nova svetla na Boškovićev naučni i filozofski opus i na njegov život i upućuju na nove odgovarajuće poglede, *Ruđe Bošković* nije samo monumentalno delo o Boškoviću, nego je i vanredan prilog istoriji matematičko-fizičkih i astronomskih nauka i prirodne filozofije, posebno ako se radi o XVIII v., toliko značajnom upravo za razvitak spomenutih nauka i, na osnovu njih, za razvitak prirodne filozofije. Istoričari, metodolozi i filozofi nauka, posebno ako je reč o matematici, mehanici i astronomiji, inspirisaće se njime za nove poduhvate u konkretnim istraživanjima Boškovićevog naučnog i filozofskog opusa, a u vezi sa tim i u konkretnim istraživanjima razvitka nauke i filozofije XVIII i narednih stoleća.

MARTINOVIĆ IGNJAT

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar i fizičar (1755–1795). Rođen je i umro u Pešti.

U blizini Pešte otac mu je kao plemić dobio posed i tu se Ignjat rodio. Stupio je u franjevački red, učio je filozofiju u Iloku i Vukovaru, a započeo je bogosloviju u Osijeku. Studije je nastavio u Budimu, a 1779. poverena mu je katedra na visokoj filozofskoj školi u Budimu. Franjevački provincijal hteo je udaljiti Martinovića iz Budima, pa ga je premestio u Slavonski Brod s namerom da tamo predaje filozofiju. Martinović nije otišao u Slavonski Brod, pa je još sledeće godine predavao u Budimu. Napustio je franjevački red i pošao u Bukovinu za vojnog sveštenika. U periodu od 1783. do 1791. predavao je fiziku na Univerzitetu u Lavovu. Tu je napisao mnogo svojih prirodno-naučnih rasprava. Priklonio se jakobincima i nastojao je da organizuje mađarske i hrvatske jakobince. Zbog toga je u Beču osuđen na smrt i pogubljen u Pešti.

U vreme kad je predavao filozofiju u Budimu, napisao je teze za svoje studente koje su objavljene u Osijeku 1781, kao i delo o jednačinama koje je verovatno takođe bilo u vezi s njegovim predavanjima pod naslovom *Opšta teorija jednačina svih stepena* (*Theoria generalis aequationum omnium graduum*, 1780). Poznat je njegov udžbenik iz fizike *Uvodne lekcije iz fizike* (*Praelectiones physicae*, 1787). Taj udžbenik ima za temelj eksperimentalnu fiziku. U njemu on sledi *njutonizam* i Boškovićevu teoriju. Objavio je niz rasprava iz fizike i hemije.

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (I).

MARTIĆ BRANISLAV

Bosansko-hercegovački, odn. jugoslovenski matematičar (1923–1985). Rođen je u Valjevu, umro je u Sarajevu.

Živeo je u Sarajevu do maja 1941, kad se kao učenik sedmog razreda gimnazije preselio u Srbiju. Osmi razred gimnazije učio je u Valjevu, ali je aprila 1942. uhapšen i odveden na rad u Nemačku. U maju 1944. priključio se NOB-u. Posle oslobođenja završio je gimnaziju, a matematiku je diplomirao na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu 1950. Radio je kao nastavnik matematike u srednjim školama Banje Luke, Prijedora i Sarajeva, a zatim kao asistent za matematiku na Tehničkom fakultetu i Prirodno-matematičkom odsjeku Filozofskog fakulteta u Sarajevu i kao predavač matematike na Tehničkom fakultetu. Odbranio je doktorsku disertaciju *O jednom skupu dvoparametarskih postupaka zbirljivosti i njihovim primjenama* na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu 1961. Iste godine izabran je za vanrednog profesora na Elektrotehničkom fakultetu u Sarajevu, gde je ostao do avgusta 1962. Sledeće dve školske godine radio je kao profesor matematike na Višoj tehničkoj školi u Trsteniku. Od 1965. do 1973. vanredni je, odn. redovni profesor matematike na Tehničkom fakultetu u Banjaluci. Za redovnog profesora Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu izabran je 1975, gde je ostao do 1977, kad je prekinuo radni odnos po svojoj želji. Ponovo je izabran za redovnog profesora istog fakulteta 1979. Bio je dopisni, odn. vanredni član ANUBiH-a. Za svoj nastavni i naučni rad dobio je više nagrada.

Objavio je preko osamdeset naučnih i nekoliko stručnih radova, skripata i udžbenika. Naučni radovi se odnose na matematičku analizu, posebno na teoriju sumabilnosti, zatim na funkcionalne jednačine, algebru i matematičku logiku. Martićevi radovi izazvali su određeno interesovanje matematičara u našoj zemlji i inostranstvu koji se bave srodnom problematikom. Njegovi se radovi citiraju ili su upotrebljeni u radovima: D. S. Mitrinović, *Nejednakosti* (Beograd, 1965) i *Kompleksna analiza* (Beograd, 1967): M. Bajraktarević, *Radovi naučnog društva SR Bosne i Hercegovine* (Sarajevo, 1964); K. Zeller–W. Beekmann, *Theorie der Limitierungsverfahren* (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970); *Itogi nauki i tehniki*, Matematičeskij analiz, Tom 12 (Moskva, 1974).

U Martićevim radovima do 1973. ističu se problemi posvećeni teoriji sumabilnosti. Radi primera navodimo samo neke od tih radova. U radu *Veza između Rieszovog i Karamata-Stirlingovih postupaka zbirljivosti* („Matematički Vesnik“ 12, Beograd, 1960) dokazuje tri teoreme, gde koristi dobro poznatu teoremu Toeplitz-Schura, dok u radu *On some iterative methods of summability* (*Neke iterativne metode sumabilnosti*, „Matematički Vesnik", nova serija 2 (17), Beograd, 1965) dokazuje četiri teoreme relevantne za postupak sumacije KS(λ). *Neka istraživanja o jednom skupu asimptotskih redova* (ANUBiH, Rad. Knj. 29, Odjelj. prirodno-matematičkih nauka, Knj. 9, Sarajevo, 1966) sadrži teoremu koja se tiče postupka KS(λ), $\lambda > 0$, a u radu *Novi prilozi teoriji Karamata-Stirlingovih postupaka sumabilnosti* (ANUBiH, Rad. Knj. 33, Odjelj. prirodno-matematičkih nauka, Knj. 10, Sarajevo, 1969) dokazuje četiri teoreme. Tu se raspravljaju izvesni iterativni postupci sumabilnosti u kojima dolazi do izražaja postupak KS (λ). U radu *Neki novi rezultati o transformacijama* $[F, d_n]$ i $S^{\alpha, \beta}$ („Matematički vesnik" 6 (21), Beograd, 1969) dokazao je pet teorema, dok u radu *Neke relacije neuporedivosti i translativnosti za* $S^{\alpha, \beta}$ *postupke sumabilnosti* (ANUBiH, Rad. Knj. 45, Odjelj. prirodno-matematičkih nauka, Knj. 12, Sarajevo, 1973) istražuje postupke sumabilnosti i upoređuje ih sa dobro poznatim klasičnim postupcima (C, r), (A), (L, R) i (V, P).

Martić se u nizu svojih radova bavi nejednakostima, zatim neanalitičkim funkcijama i posebno funkcionalnim jednačinama. Tako u radu *Quelques équations fonctionnelles contenant plusieurs fonctions inconnues* (*Nekoliko funkcionalnih jednačina koje sadrže više nepoznatih funkcija*, ANUBiH, Rad. 61, Odjelj. prirodno-matematičkih nauka, Knj. 17, Sarajevo, 1978) promatra devet tipova funkcionalnih jednačina sa $n+1$ nepoznatih realnih funkcija jedne realne promenljive i za svaku od posmatranih jednačina nalazi opšte rešenje, dok u radu *On some functional equations* (*Neke funkcionalne jednačine*, ANUBiH, Rad. 61, Odjelj. prirodno-matematičkih nauka, Knj. 17, Sarajevo, 1978) posmatra tri funkcionalne jednačine. Predmet rada *On some systems of partial differential equation and on some classes of nonanalytic functions* (*Neki sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina i neke klase neanalitičkih funkcija*, ANUBiH, Rad 59, Odjelj. Prirodno-matematičkih nauka, Knj. 16, Sarajevo, 1976) jesu razne parcijalne diferencijalne jednačine i sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina koje su u tom ili u specijalnijem obliku ranije posmatrane. Svođenjem na jednu diferencijalnu jednačinu, napisanu u kompleksnom obliku, nalazi opšta odnosno opšta analitička rešenja, dok su u radu *On the modularity of some orderable cross-lattices* (*O modularnosti nekih opšte uređenih mreža*, Publications de l'Institut mathématique, Nouvelle série, T. 22 (36), Beograd, 1977), koji je napisao sa Veselinom Perićem, predmet posmatranja uredive uopštene mreže sa određenim uslovima distributivnosti i dokazom da iz svakog od tih uslova sledi modularnost. Radovi stranih kao i domaćih autora (D. S. Mitrinović, J. Karamata, M. Bajraktarević, S. Fempl, J. D. Kečkić) su često povod za raspravu u Martićevim radovima. Podvlačimo da su ovde samo navedeni, kao izvesna ilustracija njegovog naučnog rada, neki od njegovih mnogobrojnih radova, sa izvesnim ukazivanjem na njihov sadržaj.

Martić je napisao i niz stručnih radova namenjenim studentima, kojima je predavao matematiku, kao, *Matematika* (I, I, II, 3, 4), *Laplaceova transformacija, kombinatorika, matrice* i *Verovatnoća i statistika* (izdanja Univerziteta u Sarajevu).

Martić spada među vrlo plodne matematičare u našoj zemlji po svojim naučnim i stručnim radovima. Imao je široku matematičku kulturu. Dao je značajne priloge matematičkoj analizi, znatno je poboljšao rezultate nekih naših i stranih autora. Naučna problematika kojom se bavio važna je i aktuelna. Njome se bavi mnogo matematičara u svetu i zato treba ceniti rezultate koje je Martić postigao. Njegovi se radovi odlikuju originalnošću u pristupima problemima i njihovom rešavanju.

Lit. Referat za ponovni izbor Martića za redovnog profesora Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu.

MILANKOVIĆ MILUTIN

Srpski, odn. jugoslovenski mehaničar, astronom i matematičar (1879 – 1958). Rođen je u Dalju, blizu Osijeka, a umro je u Beogradu.

Osnovnu školu završio je privatno, a realku u Osijeku 1896. Studirao je građevinsku tehniku na Tehničkoj visokoj školi u Beču, gde je diplomirao 1902. Odbranio je doktorsku disertaciju iz tehničkih nauka 1904, pod naslovom *Theorie der Drucklinien* (*Teorija linije sila*). Od 1905. do 1909. radio je u jednom građevinskom preduzeću, gde nije obavljao samo rutinske tehničke poslove, već i naučne. Godine 1909. profesor je primenjene matematike na Univerzitetu u Beogradu, koja je tada obuhvatala racionalnu mehaniku, nebesku mehaniku i teorijsku fiziku. Tu su bili kursevi iz racionalne mehanike, vektorske analize, opšte teorije fizikalnih polja, nauke o sprovođenju toplote, hidrodinamike, osnova elektrostatike i magnetostatike, Maksvelove teorije elektriciteta i teorije elektrona i iz nebeske mehanike. U okviru teorijske fizike predavao je teoriju relativnosti. Posle prvog svetskog rata predavao je nebesku mehaniku. Njegova izlaganja nebeske mehanike odlikuju se vektorskim metodama i u njima je otišao daleko ispred svojih savremenika. Bio je odličan nastavnik. Izdao je udžbenike *Osnovi nebeske mehanike*, *Istorija astronomije* i *Astronomska teorija klimatskih promena i njena primena u geofizici*. Kao poznati stručnjak za savremeno primenjivanje konstrukcije od armiranog betona, Milanković je uticao na razvitak građevinske tehnike kod nas. On je vodio odelenje primenjenih tehničkih nauka za probleme zemaljske odbrane pri Glavnom generalštabu između prvog i drugog svetskog rata. Intenzivno je radio na izgradnji Astronomske opservatorije u Beogradu i bitno doprineo da se u okviru nje organizuje i razvije naučni rad iz astronomije. Dobro je poznat njegov predlog o reformi kalendara. Veoma je poznata njegova autobiografija *Uspomene, doživljaji i saznanja*, objavljena u tri dela, koja umnogom sadrži i izvestan presek organizacije i razvitka matematičkih i astronomskih nauka u našoj sredini. Bio je redovni član SANU, dopisni član JAZU i Nemačke akademije prirodnjaka u Haleu, kao i član mnogih naučnih društava i organizacija u zemlji i inostranstvu.

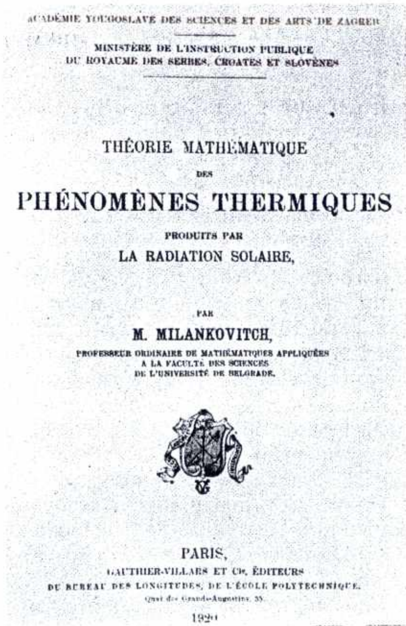
Milanković je napisao više od 100 naučnih i stručnih radova, kraćih spisa, monografija i većih dela, objavljenih u domaćim i inostranim naučnim časopisima i u izdanjima akademija nauka. U nauci je stvorio dela od trajne vrednosti koja su mu donela svetsko priznanje. Znao je da ostvari savršeno jedinstvo između svoje nastavne delatnosti i svog naučnog stvaralaštva. Uspevao je da zasnuje visoke naučne teorije prostim sredstvima, koja su mu pružale sferna astronomija, racionalna mehanika, teorijska fizika i matematička analiza. Ovde ćemo istaći Milankovićeve najznačajnije radove, kao što je to uradio akademik T. Anđelić u nekim svojim referatima, koji se odnose na niz ledenih doba i na pomeranja Zemljinih polova.

Vrlo rano ga je zanimao problem solarne klime planeta i temperatura koje vladaju na njima. Taj problem tretirao je trideset godina. Prvi rad o tom problemu jeste *Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire* (Matematička teorija termičkih fenomena proizvedenih sunčanom radijacijom), koji je objavljen 1920. u JAZU u okviru Gotje-Vilara (Gauthier-Villars) u Parizu. Ova njegova teorija naišla je na veliki odziv naučnog sveta i omogućavala je da se odredi srednja temperatura na površi Marsa, koja je znatno niža nego na Zemlji, što je i savremenim kosmičkim istraživanjima i potvrđeno. Tim svojim delom Milanković se pročuo i bio je pozvan na saradnju na priručnicima za klimatologiju i geofiziku koje su uređivali nemački naučnici Kepen i Vegener. Za prvi je napisao *Mathematische Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwankungen* (Matematička nauka o klimi i astronomska teorija varijacija klime, 1930), a za drugi priručnik je napisao: *Stellung und Bewegung der Erde im Weltall* (Položaj i kretanje Zemlje u vasioni, 1931), *Drehbewegungen der Erde* (Rotacija kretanja Zemlje, 1933), *Säkulare Polverlagerungen* (Sekularna pomeranja polova, 1933) i *Astronomische Mittel zur Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate* (Astronomska sredstva za izučavanje Zemljine klime u toku istorije, 1938). Ova dela sadrže čuvene Milankovićeve priloge, gde je, uzimajući u obzir ceo složeni mehanizam planetskog kretanja i posebno Zemlje, na veoma jasan i prost način, zasnovao dve svoje velike naučne teorije, a naime: teoriju pomeranja Zemljinih polova i teoriju glacijalnih perioda lede-

nog doba. Milankovićeva teorija ledenih doba bila je uglavnom prihvatana, ali je bila i napadana. Nedavno su, međutim, engleski i američki naučnici ispitivanjem tragova ledenih doba na dnu okeana najsavremenijim metodama utvrdili da je Milankovićeva periodizacija ledenih doba tačna. Danas se u naučnim raspravama, udžbenicima, popularno-naučnim časopisima opširno piše o Milankoviću i njegovoj teoriji. Isto tako, nedavno je objavljena u SAD knjiga koja se odnosi na ledena doba, gde je trećina knjige posvećena Milankoviću i njegovoj teoriji.

Sintezu svog višegodišnjeg rada na matematičkoj teoriji klime i posledicama izvedenim iz nje, Milanković je izložio u svom velikom delu *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem* (Kanon osunčavanja Zemlje i njegova primena na problem ledenih doba, SANU, 1941), koje je 1969. prevedeno na engleski jezik.

Znatan deo svog radnog vremena posvetio je istoriji nauke. Njegova knjiga *Kroz vasionu i vekove* je popularna istorija astronomije, dok je popularnu istoriju egzaktnih nauka dao u knjizi *Kroz carstvo nauke*. Prva knjiga doživela je četiri srpskohrvatska i dva nemačka izdanja. Razvitak tehnike od naj-

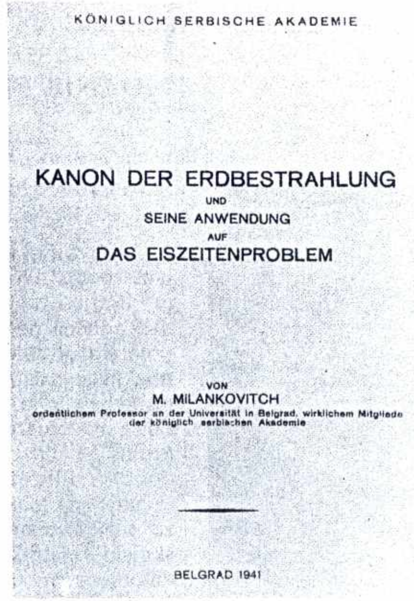

ACADÉMIE YOUGOSLAVE DES SCIENCES ET DES ARTS DE ZAGREB

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
DU ROYAUME DES SERBES, CROATES ET SLOVÈNES

THÉORIE MATHÉMATIQUE
DES
PHÉNOMÈNES THERMIQUES
PRODUITS PAR
LA RADIATION SOLAIRE,

PAR
M. MILANKOVITCH,
PROFESSEUR ORDINAIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.
1920


KÖNIGLICH SERBISCHE AKADEMIE

KANON DER ERDBESTRAHLUNG
UND
SEINE ANWENDUNG
AUF
DAS EISZEITENPROBLEM

VON
M. MILANKOVITCH
ordentlichem Professor an der Universität in Belgrad, wirklichem Mitgliede der königlich serbischen Akademie

BELGRAD 1941

Naslovne strane Milankovićevih dela *Matematička teorija termičkih fenomena proizvedenih sunčanom radijacijom* i *Kanon osunčavanja Zemlje i njegova primena na problem ledenih doba*.

starijeg doba do kraja srednjeg veka izložio je u knjizi *Tehnika u toku davnih vekova*. On je zauzimao veoma značajno stanovište kad je reč o istoriji nauke, smatrajući je vrlo važnom u naučnom i pedagoškom radu.

Milankovićevo zanimanje nije bilo usko. Kretalo se od pitanja nastave matematičkih nauka u srednjoj školi, građevinskih konstrukcija u armiranom betonu, pa do rešavanja organizacionih problema i stvaranja naučnih teorija koje su ga učinile svetski slavnim. Ne treba zaboraviti da je Milanković, stalno raspoložen da nauku gleda u njenom razvitku, celim svojim naučnim radom dao i svoj prilog koji se odnosi na gnoseološke i metodološke probleme nauke, odn. njene filozofije. To dolazi do izraza u njegovom direktnom i indirektnom posmatranju hipoteza, naučnih zakona i teorija, u posmatranju odnosa intuitivne i logičke spoznaje, što je sve od značaja za teoriju spoznaje i metodologiju u matematičkim naukama.

Milanković je danas u svetu poznati matematičar, astronom i geofizičar, koji je svojim naučnim stvaralaštvom učinio da se naša matematička istraživanja prirodnih fenomena u međunarodnim razmerama vrednuju, cene i duboko naučno priznaju. Njegovi rezultati postignuti u primenama matematike na teoriju periodizacije ledenih doba i teoriju pomeranja Zemljinih polova su od trajne i neprolazne vrednosti.

MOČNIK FRANC

Slovenački, odn. jugoslovenski matematičar (1814–1892). Rođen je u Cerknom, umro je u Gracu.

Poreklom iz seoske porodice, sin Andrije Močnika i Marijane rođene Sedej, osnovnu školu je završio u Idriji, a gimnaziju i licej u Ljubljani od 1825. do 1832. Na njega su jako uticala dva odlična pedagoga, filolog Matija Čop i matematičar Leopold Karol Šulc. Završio je bogosloviju, ali nije postao sveštenik, nego nastavnik u Gorici. Tu je službovao deset godina i upravljao je gradskim učilištem za rigorozne ispite iz elementarne matematike, fizike, primenjene matematike, teorijske i praktične filozofije i istorije. Godine 1840. promovisan je za doktora filozofije. Bio je profesor matematike i trgovačke računice na tehničkoj akademiji u Lavovu, a 1849, imenovan je za profesora univerziteta u Olomucu. Godine 1851. postao je školski savetnik i nadzornik škola u Ljubljani, gde je delovao deset godina. U istom zvanju bio je 1860. premešten u Grac, odakle je vodio nadzor nad osnovnim i srednjim školama Štajerske i Koruške. Tu je postao školski nadzornik za Štajersku do svog penzionisanja.

Dok je boravio u Gorici, Močnik je napisao naučnu raspravu *Theorie der numerischen Gleichungen mit einer Unbekanten. Mit besonderer Rücksicht auf die neueste von Cauchy erfundene allgemeine Auflosungsmethode* (Teorija numeričkih jednačina sa jednom nepoznatom. Sa naročitim osvrtom na najnoviju opštu metodu koju je Koši pronašao, 1839). Zanimljivo je pomenuti da se Močnik upoznao sa Košijem, koji je tada boravio u Gorici, pa je o problemu kojim se bavio u raspravi raspravljao sa Košijem.

Sam ili kao koautor napisao je i objavio na nemačkom jeziku u više izdanja preko 140 knjiga i priručnika iz oblasti matematike za osnovnu, srednju školu i gimnazije. Ta njegova dela su doživela veliki broj izdanja. Na osnovu njih izrađena su odgovarajuća dela ili su prevedena na slovenački, srpskohrvatski, bugarski, češki, rumunski, novogrčki i italijanski. U njima su njegova izlaganja matematički i logički veoma jasna, stroga i sasvim pristupačna učenicima kojima su namenjena. U tome je veoma izvanredan matematičar-psiholog, pedagog i metodičar. Ističu se dve njegove metodičke knjige *Lehre von den vier Rechungsarten* (*Učenje o četiri računske veštine*, 1840) i *Anleitung zur gesamten Rechenkunst* (*Uvod u celokupnu računsku veštinu*, 1843), objavljene u Ljubljani, u kojima traži metode za otklanjanje nedostataka u računskoj nastavi. Pored udžbenika za niže razrede gimnazija, poznati su njegovi udžbenici *Lehrbuch der Algebra* (*Udžbenik algebre*, 1850), koji je doživeo 37 izdanja i *Lehrbuch der Geometrie* (*Udžbenik geometrije*, 1850), koji je doživeo 34 izdanja. Kao školski savetnik i nadzornik neprekidno je čitavog života uticao vrlo bitno na razvitak matematičke nastave u osnovnim i srednjim školama Austro-Ugarske, a njegova dela su ga nadživela i dalje vršila veliki uticaj na razvitak te nastave.

Močnik je najistaknutiji jugoslovenski autor udžbenika i priručnika koji je posedovao izvanredne stručne i metodičko-pedagoške kvalitete. U tome je ne samo opšte jugoslovenski poznat, nego i evropski.

NAĐ ALBIN

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar i filozof (1866–1901). Rođen je u Trogiru, umro je u Tarantu.

Gimnaziju je završio u Zadru. Kao učenik pisao je filozofski esej na italijanskom jeziku. Studije matematike i filozofije u Beču završio je 1890. sa disertacijom. *O primeni matematike na logiku* (Über Anwendungen der Mathematik auf die Logik).

Taj rad je sledeće godine objavljen u Napulju pod naslovom *Temelji logičkog računa* (Fondamenti del calcolo logico). Radio je u liceju u italijanskom gradu Veletri. U Rimu je dobio docenturu za logiku i matematiku na univerzitetu. Zatim je prešao na licej u Tarantu, gde je vrlo mlad umro.

Zanimanje za naučni rad pokazao je kao učenik u zadarskoj gimnaziji. Naročito se interesovao za logiku i za vezu matematike i logike. Kao gimnazijalac napisao je rad u kojem je razvio i teoriju definisanja pojma na temelju matematičke logike. Ta istraživanja nastavio je u svojoj disertaciji, kao i za vreme docenture u Rimu. Njegovo glavno interesovanje u logici bila je interpretacija pojmova pomoću klasa i u tome je bio veoma sličan E. Šrederu kome nisu bila poznata Nađova istraživanja, ali je Nađu kasnije u privatnom pismu priznao da se radi o vrlo sličnim idejama. Italijanski matematičar i logičar Đ. Peano istraživao je slične probleme, pa je u jednom pismu Nađu priznao da su se našli na istom poslu, a naime, na interpretaciji pojmova pomoću klasa kao i na izvođenju logičkih operacija kao skupovnih operacija. Nađ je napisao više rasprava, objavljenih npr. u *Rivista italiana di filosofia*. Značajna su mu dela *Principi logike* (*Principi di logica*) i *Aktuelno stanje i napreci logike* (*Lo stato attuale ed i progressi della logica*). On ostaje u našoj istoriji matematike istaknuti stvaralac u matematičkoj logici i filozof matematike.

Lit. Žarko Dadić: *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (II). Za proučavanje rada A. Nađa veoma je korisna rasprava Hede Festini *Logistika Trogiranina Albina Nađa* („Prilozi za istraživanje hrvatske filozofske baštine", 1–2, Zagreb, 1975).

NEŠIĆ DIMITRIJE

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1836–1903). Rođen je i umro u Beogradu.

Osnovnu školu i gimnaziju završio je u Beogradu i dve godine Liceja. Boravio je kao državni pitomac na politehnici u Beču, a zatim u Karlsrueu do 1862. Iste godine se vratio u Srbiju, gde je postao suplent na Liceju. Redovni profesor na Velikoj školi od 1863, zatim i njen rektor. Tu je proveo više od 30 godina, sve do 1894. Imao je veliko školsko iskustvo i intenzivno je učestvovao u preobražavanju školstva. Bio je član Srpskog učenog društva, član i predsednik Srpske akademije nauka, kao i član JAZU. U državničkim poslovima istakao se kao ministar prosvete. Umnogom je doprineo izradi zakona o metarskim merama i u vezi sa tim napisao je delo *Metarske mere* (1874). Intenzivno je učestvovao u radu Velike škole i SAN-a.

Objavio je niz udžbenika koji su svojom preciznošću i metodikom izlaganja znatno unapredili nastavu matematike. Bio je odličan pedagog. Njegova predavanja su bila veoma jasna i živa. Nešićevi udžbenici su: *Trigonometrija* (1875); *Nauka o kombinacijama* (1883) i *Algebarska analiza* (1883).

Nešić je objavio i nekoliko naučnih rasprava, i to u „Glasniku Srpskog učenog društva" i u „Glasu Srpske akademije nauka". Od njegovih rasprava pominjemo sledeće: *Pogled na Lajbnicovu infinitezimalnu metodu* (1888); *Odgovor na nekoliko pitanja iz nauke o beskonačno malim količinama* (1890); *Prilog teoriji integraljenja pomoću beskonačnih redova* (1890). Ovde se još mogu pomenuti radovi kao: *O maksimalnim i minimalnim dijametrima*; *Pokušaj kvadrature kruga*; *Novi obrasci za broj kombinacija druge, treće i četvrte klase, pri neograničenom broju i ponavljanju osnovaka.*

U našoj istoriji matematike Nešić ostaje znameniti matematičar Srbije XIX v. On je svojim stručnim i pedagoškim radom u matematici značajno unapredio nastavu matematike, a naučnim raspravama započeo je razvitak matematike u Srbiji u naučnom pogledu. Bio je profesor Mihailu Petroviću i u Srpskoj akademiji nauka prikazao je neke Petrovićeve naučne rasprave. M. Petrović je mnogo cenio D. Nešića kao svoga profesora, pa je u nekrologu povodom Nešićeve smrti, objavljenom u JAZU, između ostalog napisao: „Najdublje i najdraže uspomene, koje je Nešić ostavio za sobom, i jesu baš one, što ih je kao profesor ostavio u dugome nizu generacija učenika Velike Škole, u čijim je očima on i po samoj svojoj pojavi i po predanosti svojoj nauci, po jasnoći u predavanjima i umetnosti da veže pažnju za predmet koji izlaže, uvek predstavljao ideal pravog profesora."

ORLOV KONSTANTIN

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1907–1985), nacionalnosti ruske. Rođen je u Ufi (SSSR), a umro je u Beogradu.

Gimnaziju je završio u Nišu 1927, diplomirao je na Filozofskom fakultetu u Beogradu, na grupi za teorijsku matematiku, 1931. Doktorirao je 1934. odbranivši doktorsku disertaciju *Aritmetičke i numeričke primene matematičkih spektara*, koju je izradio pod rukovodstvom profesora Mihaila Petrovića.

Od 1934. do 1942. bio je profesor u Petoj muškoj gimnaziji u Beogradu. Otpušten je iz državne službe 1942. i sve do oslobođenja izdržavao se od privatnih časova. Posle oslobođenja postavljen je za profesora Pete muške, a zatim Treće muške gimnazije u Beogradu. Na toj dužnosti ostao je do 1947, kad je izabran za asistenta Filozofskog fakulteta na katedri matematike. Iste godine osnovan je Prirodno-matematički fakultet, u koji je uključena matematička grupa. Za docenta tog fakulteta izabran je 1949, za vanrednog profesora 1957. i za redovnog profesora 1963. Školske 1958/59. bio je prodekan Prirodno-matematičkog fakulteta, a 1959 – 1960. proveo je u Bombaju na Tehnološkom institutu u svojstvu eksperta UNESKO-a za matematiku.

Aktivno je učestvovao kao prodekan, kao profesor Katedre za numeričku matematiku i programiranje, kao upravnik Instituta za numeričku matematiku, u radu Prirodno-matematičkog fakulteta. Njegovo posebno interesovanje bilo je za numeričku analizu i njene primene i za formiranje kadrova u toj oblasti matematike. Pod njegovim rukovodstvom je doktoriralo više naših matematičara iz numeričke analize. Učestvovao je u matematičkoj i numeričkoj obradi eksperimentalnih podataka za Institut za vodoprivredu. Delovao je u radu Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije. Bio je predsednik tog društva i predsednik podružnice društva u Beogradu, dugogodišnji član Redakcionog odbora „Matematičkog vesnika" i član raznih komisija društva. Osim toga, bio je i član ovih inostranih naučnih društava: francuskog matematičkog društva, francuskog numeričkog društva, francuskog društva za unapređenje nauke, indijskog matematičkog društva i indijskog društva za primenjenu matematiku.

Njegova naučna istraživanja vezana su za teoriju običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina, za teoriju spektara i numeričku analizu, kojom se intenzivno bavio. Iz tih oblasti dao je preko 60 naučnih radova, od kojih je mnoge saopštio na jugoslovenskim i svetskim kongresima matematičara, kao i na brojnim simpozijumima. Spomenimo i kratko se osvrnimo na neke od njegovih značajnijih naučnih radova.

Kao posebna izdanja objavljeni su njegovi radovi: *Doktorska disertacija* (1935), *Nalaženje opšteg integrala parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda, koje nisu Monž – Amperove* (1948), *The fundamentals of practical spectral arithemic and algebra* (*Osnovi praktične spektralne aritmetike i algebre*, 1955).

Orlov se intenzivno bavio teorijom spektara koju je zasnovao Mihailo Petrović. Među njegovim naučnim člancima značajno mesto zauzimaju radovi koji se odnose na tu teoriju i na njene razne primene. To su npr. članci: *Rekurzivno izračunavanje matematičkih spektara* (1933); *Matematički spektri* (1950); *Méthode spectrale pratique d'évaluation numérique des déterminants et de résolution du systeme d'équations linéaires* (*Spektralna praktična metoda numeričke procene determinanata i rešenja sistema linearnih jednačina*, 1953); *Application pratique de la théorie des spectres mathématiques de Michel Petrovich au calcul numérique* (*Praktična primena teorije matematičkih spektara Mihaila Petrovića na numerički račun*, 1953); *Spectre mathématique des racines d'une équation algébrique* (*Matematički spektar korena jedne algebarske jednačine*, 1954); *Simplification de la méthode de Graeffe au moyen des spectres mathématiques* (*Uprošćavanje Grefove metode pomoću matematičkih spektara*, 1956); *Application des spectres mathématiques et la résolution des équations differentielles ordinaires* (*Primena matematičkih spektara i rešenje običnih diferencijalnih jednačina*, 1957).

Teoriji diferencijalnih jednačina posvetio je veliki deo svog naučnog rada. Tu je postigao veoma vredne rezultate. Među takve radove, između ostalih, nabrajamo: *Jedna metoda aproksimiranja za integrale diferencijalnih jednačina* (1934); *O pojmu opšteg integrala parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda* (1939); *Sur la formation de l'integrale générale d'une équation aux derivées partielles du second ordre, au moyen d'une integrale complete* (*O formiranju opšteg integrala parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda pomoću potpunog integrala*, 1937 – 1938); *Recherche de l'integrale générale des équations differentielles partielles du second ordre, qui ne sont pas Monge – Amperiennes* (*Iznalaženje opšteg integrala parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda koje nisu Monž – Amperove*, 1952). U svom naučnom radu obratio je posebnu pažnju teoriji beskonačnih redova sa stanovišta geometrijskog prilaza izvesnim problemima te teorije, pokazavši da i takav prilaz dovodi do rezultata u teoriji beskonačnih redova. Od radova koji se odnose na taj njegov rad ističemo: *Geometrijska teorija redova M. Milankovića i nastava redova* (1952); *Une interprétation géométrique des séries alternées* (*Jedna geometrijska interpretacija alternativnih redova*, 1955); *The geometrical representation of series of positive numbers* (*Geometrijska interpretacija redova sa pozitivnim članovima*, 1959). Za naučno stvaralaštvo Orlova treba naročito istaći članke veoma uspešne i karakteristične za one oblasti matematike kojima se on bavio, a to su, npr.: *Nouvelle méthode spectrale de résolution des équations algébriques* (*Nova spektralna metoda rešavanja algebarskih jednačina*, 1966); *Primenenie matimatičeskih spektrov Mihaila Petrovića k rešeniu algebraičeskih uravnenii* (*Primena matematičkih spektara Mihaila Petrovića u rešavanju algebarskih jednačina*, 1966); *Common general method for solving ordinary and partial differential equations* (*Zajednička opšta metoda za rešavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina*, 1978); *The general method for solving the partial differential equation of any order with unknown function depending on any number of arguments and the system of such equations* (*Opšta metoda za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina ma kojeg reda kada nepoznata funkcija zavisi od ma kojeg broja argumenata i sistema odgovarajućih jednačina*, 1978); *Cases when the use of the analytic method for solving differential equations is better than the use of numerical ones* (*Slučajevi kada je upotreba analitičke metode za rešavanje diferencijalnih jednačina bolja od upotrebe numeričke metode*, 1980) i niz drugih članaka. Svoje naučne radove Orlov je objavljivao u publikacijama SANU, belgijske i francuske Akademije nauka, kao i u istaknutim matematičkim časopisima Jugoslavije i inostranstva.

Orlov je autor niza članaka posvećenih stručnom i pedagoškom uzdizanju nastavnika i nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi i na univerzitetu. To su npr.: *Proba u aritmetici i algebri u nižem tečaju* (1953); *Učila u srednjoškolskoj nastavi matematike* (1953); *Konkretizacija pojmova algebre u nastavi za odrasle* (1960); *Elementi praktične matematike u srednjoj školi* (1961). Konstruisao je i nastavno sredstvo – matematičku vagu, kojoj je dodeljen patent u nekoliko zemalja (Jugoslavija, Belgija, Engleska, Francuska, Italija, SAD i Indija).

Pisac je niza udžbenika i priručnika, veoma pogodnih za sticanje znanja iz matematike. Poznata su njegova autorizovana skripta *Numerička analiza*, namenjena studentima matematike, koja uvode u probleme numeričke analize i imaju karakter univerzitetskog udžbenika. Mnogo pažnje posvećivao je unapređenju nastave matematike u srednjoj školi. Dobro su poznati njegovi udžbenici iz algebre za gimnazije, koji su pisani pristupačno i u isto vreme matematički strogo. Isticao se svojim predavanjima na raznim seminarima, posvećenim profesorima i nastavnicima matematike osnovne i srednje škole.

Najzad podvucimo da je Orlov intenzivno učestvovao i na poslediplomskim studijama iz oblasti numeričke analize i teorije diferencijalnih jednačina. Njegovim predavanjima na poslediplomskim studijama generacije inženjera uvedene su u pomenute oblasti matematike, koje su od neobične važnosti za inženjersku teoriju i praksu.

Svojim naučnim stvaralaštvom i nastavnim radom, kao i angažovanjem u društvenim organizacijama matematičara, Orlov spada među istaknute matematičare Srbije i Jugoslavije.

Lit.: Podaci iz referata za izbor profesora univerziteta i ličnog uvida u njegova dela.

PASKVIĆ IVAN

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar i astronom (1753–1829). Rođen je verovatno u Virovitici, umro je u Beču.

Završio je teologiju i bio je kapelan u zagrebačkom okrugu. Nalazio se kao praktikant na univerzitetu u Gracu i kao „repetent s odličnim uspehom" na univerzitetu u Budimu, gde je položio višu matematiku, teorijsku i eksperimentalnu fiziku i mehaniku. Postavljen je za asistenta na katedri fizike. Položio je ispit za profesora više matematike i tada je izabran za profesora više matematike. Bio je izvrstan profesor i stalno se usavršavao, posećujući inostrane univerzitete i institucije, u Beču, Pragu, Lajpcigu, Haleu i Getingenu. Duže vreme proveo

je na zvezdarnici u Goti, kao i u Minhenu. Vodio je veliku prepisku sa K. F. Gausom. Zbog teških političkih uslova, posle francuske revolucije, na univerzitetu u Budimu, Paskvić se preselio u Beč gde je svoju pažnju usmerio na astronomiju i višu geodeziju. Postavljen je za drugog astronoma na zvezdarnici u Budimu, a uskoro i za upravitelja zvezdarnice.

Prvo razdoblje njegovog rada karakterišu radovi iz više matematike, mehanike i strojeva, a drugo, koje je mnogo plodnije u naučnom pogledu, radovi iz astronomije i više geodezije. Kao asistent za fiziku daje karakteristične studije iz matematičke fizike njegova vremena. U njima uvodi višu matematiku u praktičnu mehaniku i u strojarstvo. Takvi pogledi nalaze se i u Paskvićevom delu *Nastava matematičke analize i nauke o strojevima* (*Unterricht in der mathematischen Anlysis und Maschinenlehre*, 1790). Značajne su njegove rasprave u kojima su dodana načela analize. Bavio se problemom oblika Zemlje i astronomijom, zatim problemima planeta, koncentrišući svoja istraživanja na probleme oblika Zemlje i određivanja stepena meridijana i geografskih koordinata.

U svojim delima iz astronomije primenjuje višu matematiku i sfernu trigonometriju. U tom smislu objavio je nekoliko istaknutih dela, među kojima je *Počela celokupne teorijske matematike* (*Anfangsgründe der gesammten theoretischen Mathematik*, 1812–13) bilo namenjeno astronomima. U tom se delu Paskvić dotiče veoma važnih pitanja matematike, kao što su beskonačno male i beskonačno velike veličine. Velika je didaktička vrednost dela i pogodno je za širenje savremenih matematičkih ideja među širokim krugovima čitalaca.

Vodio je oštre diskusije na području astronomije, u kojima su učestvovali poznati astronomi kao Besel, Olbers, Gaus* i Šumaher, braneći Paskvićeve stavove. Paskvić je sarađivao sa Gausom i ta je prepiska sačuvana u Univerzitetskoj knjižnici u Getingenu. Gaus je sigurno cenio Paskvićev astronomski rad.

Paskvićev rad nije dovoljno istražen, ali je sigurno da je bio izuzetna ličnost naše naučne prošlosti.

Lit. Žarko Dadić: *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (I).

PEJOVIĆ TADIJA

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1892–1982). Rođen je u Drači blizu Kragujevca, a umro je u Beogradu.

Osnovnu školu završio je u Drači, a gimnaziju u Kragujevcu. Diplomski ispit iz matematike položio je na Filozofskom fakultetu u Beogradu 1921. Iste godine postavljen je za suplenta Druge gimnazije u Beogradu i u isto vreme je obavljao

dužnost asistenta na Filozofskom fakultetu. Za asistenta je izabran 1922. Doktorsku tezu *Novi slučajevi integrabiliteta jedne važne diferencijalne jednačine* odbranio je 1923. Izabran je za docenta 1925, a zatim je otišao na jednogodišnju specijalizaciju u Pariz, na Sorbonu. Vanredni profesor postao je 1933. a redovni 1950. Od 1945. pa sve do penzionisanja 1963, sa jednim prekidom, bio je šef Katedre matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Više godina predavao je matematiku na Mašinskom, Tehnološkom i Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Intenzivno je radio na organizaciji nastave matematike na novoosnovanim fakultetima u Novom Sadu, Kragujevcu i Prištini. Bio je dekan Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu i više godina direktor Matematičkog instituta u Beogradu. Posebnu pažnju posvećivao je uzdizanju kadrova srednjoškolskih nastavnika.

Bio je jedan od osnivača Jugoslovenskog matematičkog društva i njegov predsednik od 1933. do drugog svetskog rata. On je jedan od osnivača Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije i više godina bio je predsednik tog društva. Aktivno je učestvovao u radu ovog Društva, kao i u radu Saveza društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Bio je član francuskog, američkog i austrijskog matematičkog društva. Učestvovao je sa referatima na više naših i inostranih kongresa i simpozijuma, držao je predavanja i na stranim univerzitetima.

Kao đak u prvom svetskom ratu pripadao je četi 1300 kaplara. Nosilac je Albanske spomenice i mnogih ratnih odlikovanja. Za svoj dugogodišnji naučni i društveni rad dobitnik je mnogih priznanja, među kojima i Sedmojulske nagrade.

Pejović je objavio niz značajnih naučnih i stručnih radova iz teorijske matematike, a naročito iz teorije diferencijalnih jednačina kao uže specijalnosti. Napisao je četiri univerzitetska udžbenika iz matematike: *Diferencijalni i integralni račun sa primenama u geometriji* (1928–1946); *Diferencijalne jednačine I i II – obične diferencijalne jednačine* (1951); *Matematička analiza, I, II, III, IV, V* (1955–1957); *Diferencijalne jednačine – Egzistencija rešenja* (1958). Jedan od tih udžbenika doživeo je dvanaest izdanja a jedan šest. Napisao je niz zapaženih stručnih članaka.

U našim i inostranim časopisima i monografijama na srpskohrvatskom i francuskom jeziku objavio je niz naučnih radova, a mnogi od njegovih rezultata ušli su u značajnije radove svetske matematičke literature. Objavio je preko 700 naučnih i stručnih radova.

Njegovi naučni radovi pripadaju oblasti matematičke analize a većina je posvećena teoriji diferencijalnih jednačina posmatranoj sa raznih gledišta. U svojim prvim radovima ispitivao je diferencijalne jednačine sa gledišta kvadrature i teorije diferencijalnih invarijanata. Podesnim transformacijama proširio je oblast integracije nekih jednačina pomoću kvadratura.

Unapredio je teorijski i praktično teoriju diferencijalnih invarijanata, koju su proučavali veoma poznati matematičari Lager (Laguerre), Brioski (Brioschi), Halfen (Halphen). Apel (Appell) i drugi. Pomoću diferencijalnih invarijanata dao je potrebne i dovoljne uslove da jedna jednačina pripada klasi jednačina sa stalnim koeficijentima. Njegovi radovi o primeni diferencijalnih invarijanata na diferencijalne jednačine imali su odjeka među inostranim matematičarima (Rey Pastor, Joseph Payet i drugi). Payet je posvetio više članaka, kao i samu doktorsku tezu, radovima Pejovića. Pejovićeve rezultate, dobijene u radu *Sur les semi-invariants des équations linéaires* (O semi-invarijantama linearnih jednačina, 1925), potvrdio je drugim putem 1946. N. P. Erugin u svojoj tezi. Veliki broj radova Pejović je posvetio asimptotskim rešenjima diferencijalnih jednačina, kao i osobinama tih rešenja. Proučavanje asimptotskih rešenja je važna oblast kvalitativne integracije diferencijalnih jednačina i rezultate koje je tu postigao bili su zapaženi i iskorišćeni, tako da i danas služe kao podstrek za rad drugim matematičarima. Oni su direktno nadahnuli Vazevskog (T. Wazewsky) za proučavanja čiji je rezultat poznata metoda retrakcije, koja je široko primenljiva u kvalitativnoj integraciji, a primenjena je u nizu radova, osobito matematičara krakovske škole. U monografiji *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles* (*O asimptotskim rešenjima diferencijalnih jednačina*, 1952) sumirao je sve svoje dotadašnje rezultate o asimptotskim rešenjima, posle kojih su usledili i novi. U nizu radova pokazao je praktičnu primenu asimptotskih rešenja na ispitivanje populacija živih bića, primenjujući tako matematiku u biologiji.

U svojoj knjizi *Diferencijalne jednačine – egzistencija rešenja* (1958) izložio je savremene metode rešavanja diferencijalnih jednačina (egzistencija integrala, matrična, Laplasova, simbolična i razne približne metode rešavanja). Sve su te metode izložene pristupačno, iako su komplikovane. Pomenuta knjiga predstavlja značajan prilog modernim metodama rešavanja diferencijalnih jednačina i predstavlja originalan doprinos udžbeničkoj literaturi. Njome je dat vrlo pogodan prelaz sa klasičnih metoda na moderne. Istaknuta je pregledno njihova unutrašnja povezanost i tako je mlađim naučnim kadrovima znatno olakšao ulazak u samostalna istraživanja.

Posebno ističemo monografiju Pejovića *Existence et quelques propriétés asymptotiques des équations différentielles* (*Egzistencija i neke asimptotske osobine običnih diferencijalnih jednačina*, 1969) u kojoj proučava egzistenciju i rešenje jedne jednačine kao i sistema jednačina najopštijeg oblika. Početni uslovi Pejovića razlikuju se od Košijevih uslova. On je ispitao egzistenciju i rešenja datog sistema jednačina, koja za $t=\infty$ imaju konačne i određene vrednosti ili su ograničena. Zato je bio potreban specijalan način ispitivanja i njega je dao Pejović. Ta monografija sadrži niz novih rezultata i teorema koji su uneti u monografiju H. P. Erugina.

Rezultati koje je Pejović postigao u svojim radovima *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires* (*O asimptotskim rešenjima linearnih diferencijalnih jednačina*, 1932) i *Sur la valeur des intégrales à l'infini des équations différentielles linéaires* (*O vrednosti integrala u beskonačnosti linearnih diferencijalnih jednačina*, 1933) zabeležio je Tatarkijevič (K. Tatarkiewicz) u svom radu *Propriétés asymptotiques des systèmes d'équations différentielles ordinaires presques linéaires* (*Asimptotske osobine sistema skoro linearnih običnih diferencijalnih jednačina*, 1954). I niz drugih stranih i domaćih autora koriste i citiraju Pejovićeve radove iz diferencijalnih jednačina.

Dao je naučne priloge i u drugim oblastima matematike, npr. u teoriji determinanata. Tu treba posebno istaći njegov prilog Adamarovom problemu o maksimalnom modulu determinante, redukciju determinante na glavnu dijagonalu. Posebno treba istaći *Rečnik matematičkih termina* u izdanju Matematičkog instituta, u čijem je stvaranju najaktivnije učestvovao. U tom rečniku reči su date uporedo na pet jezika: srpskohrvatskom, ruskom, engleskom, francuskom i nemačkom.

Pejović je jedan od najistaknutijih predstavnika naše matematike. Za više od pola veka plodnog pedagoškog rada izveo je generacije matematičara, inženjera i drugih stručnjaka. Svojim naučnim i pedagoškim radom posredno i neposredno je uticao na unapređenje naučnog rada i na stvaranje naučnog podmlatka u Srbiji i Jugoslaviji. Pod njegovim rukovodstvom izrađen je niz doktorskih teza i stvoren je znatan broj doktora matematičkih nauka. Vrednost i važnost Pejovićevih rezultata u nauci mogu se proceniti i po tome što je Saksonska akademija nauka u Lajpcigu, preko Beogradskog univerziteta, zatražila 1976. bibliografiju njegovih radova radi unošenja u *Band VI b des wissenschaftlichen Handwörterbuches*.

Lit.: Podaci dobijeni od prof. dr Pavla Pejovića i iz ličnog uvida u njegova dela.

PETKOVIĆ ĐORĐE

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (kraj XIX – poč. XX v.).

Posle završene srednje škole, studirao je Veliku školu u Beogradu, gde se isticao kao student. Pošto je dobio državnu stipendiju, studirao je na Univerzitetu u Beču. Tu je 1893. doktorirao sa disertacijom *Abelova teorema dokazana algebarski i pomoću Riemannove funkcije*. Reč je o teoremi da zbir algebarskih integrala istog roda daje jednu algebarsku i jednu logaritamsku funkciju. Disertaciju je preveo na naš jezik i objavio u „Prosvetnom glasniku" u dva dela 1896.

Pošto se vratio iz Beča, Petković je postavljen za honorarnog profesora Velike škole, gde je predavao i ispitivao višu matematiku za studente Tehničkog fakulteta. Treba napomenuti da je pre polaska u Beč bio privatni pripravnik matematike kod profesora Dimitrija Nešića, pomažući mu tako u nastavi matematike. Kao honorarni profesor pružio je osetnu pomoć profesorima Dimitriju Nešiću i Bogdanu Gavriloviću. Održao je i pristupno predavanje na Velikoj školi *Abelova teorema i njen značaj u matematici*, koje je objavio u „Prosvetnom glasniku". To je predavanje značajno po istorijskom, metodološkom i filozofskom uvidu.

Na konkursu za profesora Velike škole nije uspeo, pa je bio razrešen dužnosti honorarnog profesora. Duže vreme bio je profesor gimnazije i radio je u Ministarstvu prosvete. Napisao je nekoliko manjih radova iz matematike, a bio je poznat i sa nekoliko uspelih srednjoškolskih udžbenika. Među tim udžbenicima ističe se njegov udžbenik *Trgovačka računica po J. K. Vrajbergu* (1902).

Lit. Dragan Trifunović: *Letopis života i rada Mihaila Petrovića*.

PETRIŠEVIĆ FRANJO

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar, astronom i filozof (1529 – 1597). Rođen je na Cresu, umro je u Rimu.

Školovao se u Veneciji i Bavarskoj. Studirao je u Padovi medicinu i filozofiju. Boravio je neko vreme na Cresu, a zatim po raznim gradovima Italije, i na ostrvu Kipru. Jedan deo života proveo je u Barseloni, pa konačno svoja lutanja završava 1577, kad je dobio katedru Platonove filozofije na Univerzitetu u Ferari. Potom preuzima katedru Platonove filozofije na Univerzitetu Sapijenca (Sapienza) u Rimu. Dok je bio profesor filozofije u Ferari i Rimu, napisao je svoje glavno delo *Nova sveopšta filozofija* (*Nova de universis philosophia*), koje je izašlo 1591. Petriševićevo učenje došlo je pod udar kritike i od njega je traženo da učini izmene u svom učenju. To je na njega vrlo teško delovalo, pa se obraća svojim zemljacima da ga prime u svoje redove. Izabran je 1596. za pravog člana Zbora sv. Jeronima u Rimu. Izbor je izvršen na osnovu dokaza o moralnom ponašanju i na osnovu rođenja u jednoj od četiri Ilirske pokrajine, odn. na osnovu poznavanja našeg jezika. Treba podvući da je njegovo navedeno delo bilo stavljeno na indeks zabranjenih knjiga, pa je zbog toga uništavano i spaljivano.

Iz filozofskih i prirodnofilozofskih ideja sadržanih u pomenutom Petriševićevom delu potpuno se vidi da je Petrišević raskinuo sa astronomskim pogledima kakve je imala većina njegovih savremenika i da je odbacio mnoga uverenja koja su bila smetnja daljem razvoju astronomske slike sveta. Svojim tvrdnjama i svhatanjima, Petrišević je stvarao podlogu za delo Đordana Bruna, Keplera i konačno Njutna. Njegovo delo je tako bilo jedna nužna karika u procesu razvitka astronomske misli. Raspravljao je o obliku Zemlje i o problemu plime i oseke mora.

Posebno je značajan Petriševićev rad na području matematike. O matematičkim pitanjima raspravljao je u svom delu *Četiri sveska peripatetičkih rasprava* (*Discussionum peripateticarum Tomi IV*) koje je objavljeno 1581, kao i u ranije pomenutom delu. Naročitu pažnju posvećuje pitanjima prostora, neprekidnosti i beskonačnosti, gde je od značaja njegovo delo *O novoj geometriji* (*Della nouva geometria*), objavljeno 1587. Petriševićeva shvatanja su u oštroj opreci s Aristotelovim. Veći deo teksta se odnosi na kritiku Aristotelovih stavova. Podrobno raspravlja problem kontinuuma. Po njemu postoji najmanji nedeljivi deo prostora i u njemu postoji neki minimum koji je različit od prostora i nije prostor, i to je, po Petriševiću, ono što se obično zove tačkom. Za njega tačka nije prostor, ni njegov deo, ona je samo u prostoru. Ona nema protežnosti i

Naslovna strana Petriševićevog dela *Della nuova geometria (O novoj geometriji)*

zato je upravo protivna prostoru koji je ima, ali ona nema delova, pa je nedeljiva. Đordano Bruno je imao vrlo sličnu teoriju nedeljivih linija, površina i tela kao i Petrišević, pa je prirodno da se postavi pitanje međusobnih uticaja i prioriteta.

Ideja nedeljivosti, koju je zastupao Petrišević, ipak je u određenom obliku rehabilitovana krajem XIX v. Ovde se misli na pojavu nearhimedovskih geometrija, na teoriju kontinuuma Veroneza u kojoj se opet javljaju aktuelno beskonačno mali segmenti, kao i na ideju Branimira Petronijevića o diskretnoj geometriji, koja se čak neposredno vezala na Bruno – Petriševićevu interpretaciju. U najnovije doba javio se nov pokušaj Abrahama Robinsona, koji je 1966. objavio svoju *Nestandardnu analizu* (*Non-Standard Analysis*) u kojoj na određeni način obnavlja Lajbnicovu ideju beskonačno malih. Tako su ideje koje je zastupao Petrišević imale veliku istorijsku važnost, naročito u pogledu početne izgradnje infinitezimalnog računa. Obnavljanje tih ideja, u modifikovanom obliku, pokazuje da pojedine ideje u matematici nisu nikad definitivno odbačene, već se oplođene novim saznanjima u određenom smislu ponovno vraćaju. Uzevši to u obzir Petriševićeva gledišta imaju veću vrednost nego što bi to na prvi pogled izgledalo.

Petriševićeve aksiome i definicije koje se nalaze na početku dela *O novoj geometriji*, razlikuju se od Euklidovih, iako u njima ima mnogo Euklidovih uticaja. Njegov sistem aksioma ne zadovoljava načela kojima mora udovoljavati sistem aksioma sa savremenog matematičkog stanovišta. Definicijama i formulacijama se takođe može izreći kritika. Petriševićev sistem aksioma je nedovoljan da bi se dokazali svi geometrijski poučci, a ni oni koje je izneo u svom delu.

Možemo podvući da su Petriševićeva geometrija i filozofija imale važnu ulogu u razvitku nauka. Zato je njegovo mesto daleko izvan nacionalnih granica razvitka nauka. Njegova dela su uticala na najveće naučnike, bez kojih se ne može zamisliti razvitak nauka, kad se on razmatra u stalnim uticajima jednih ideja i metoda na druge.

Postoje i druga Petriševićeva dela u kojima je on iznosio svoje filozofske i prirodno-filozofske ideje. U svim delima ističe se kao filozof nauke.

Lit. Žarko Dadić: *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (Knjiga I, 1982).

PETROVIĆ MIHAILO

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1868 – 1943). Rodio se i umro u Beogradu.

Osnovnu i srednju školu završio je u Beogradu a 1889. studije prirodnih i matematičkih nauka na Velikoj školi u Beogradu. Pošto je položio prijemni ispit, stupio je u Višu normalnu školu u Parizu 1890, gde je ostao do 1894. U tom intervalu na Sorboni je položio lisans iz matematičkih nauka 1892, lisans iz fizičkih nauka 1893, a 1894. odbranio je doktorsku tezu iz matematičkih nauka. Njegovi profesori bili su slavna imena ne samo francuske matematike, nego i svetske: Poenkare, Darbu, Pikar, Ermit, Penleve i Apel. Svoju doktorsku tezu *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques* (*O nulama i beskonačnostima integrala algebarskih diferencijalnih jednačina*) odbranio je pred komisijom koju su sačinjavali: Ermit*, Pikar (Picard) i Penleve*.

Mihailo Petrović bio je profesor matematike više od četrdeset godina (1894 – 1938) na Velikoj školi i na Univerzitetu u Beogradu. Bio je, osim toga, član niza akademija nauka (redovni član Srpske akademije nauka, dopisni član JAZU) i drugih naučnih društava, profesor više univerziteta i aktivni učesnik na mnogim internacionalnim naučnim skupovima matematičara. Njegova je velika zasluga za osnivanje Matematičkog instituta u Beogradu i on je jedan od osnivalaca naučnog časopisa *„Publications mathématiques de l'Université de Belgrade"* (*„Matematičke publikacije Univerziteta u Beogradu"*), koji je pokrenut 1932. i koji sad ima naslov *„Publications de l'Institut mathématique de Belgrade"* (*„Publikacije Matematičkog instituta u Beogradu"*). On je razvijao plodnu naučnu aktivnost ne samo na univerzitetu, već i u Srpskoj akademiji nauka, gde je bio inicijator i tvorac brojnih matematičkih publikacija. Počev od 1894, kad je u Parizu, u publikacijama akademije nauka, objavio naučnu raspravu *Sur les intégrales uniformes des équations différentielles du premier ordre et du genre zéro* (*O uniformnim integralima diferencijalnih jednačina prvog reda i vrste nula*), pa do svoje smrti, 8. juna 1943, Petrović se istakao vanredno plodno na polju naučne aktivnosti, u više od 250 objavljenih radova, veoma značajnog kvaliteta, suptilnog i kreativnog matematičara i originalnog filozofa prirode.

Godine 1931. i 1933. Petrović je učestvovao u naučnoj ekspediciji u arktičkoj polarnoj oblasti i 1935. u antarktičkoj polarnoj oblasti. O tome je napisao više zanimljivih knjiga i rasprava, kao: *Kroz polarnu oblast*, *U carstvu gusara*, *Sa okeanskim ribarima*, *Po zabačenim ostrvima* i druge. Bio je strastan ribar i mnogo vremena je provodio među ribarima na Dunavu. Otuda mu popularno ime „Mika Alas". Bio je veoma komunikativan i nije se držao samo kruga matematičara: održavao je veze sa književnicima svoga vremena, pa je pisao i književna dela (*Jedna nedovršena ili zagubljena pripovetka Stevana Sremca*, *Roman jegulje*, *Jedna engleska knjiga u našoj prevodnoj književnosti prošlog veka*, *Đerdapski ribolovi u prošlosti i u sadašnjosti* i druga). Bavio se kriptografijom i u tom pogledu obavljao je značajne dužnosti za vojsku i državu.

Matematičkim metodama, idejama i rezultatima koje one sadrže, njegovi brojni radovi su nadahnuli i uvek nadahnjuju stvaralački rad velikog broja matematičara u Jugoslaviji i izvan nje. U toku svoje dugogodišnje naučne i didaktičke aktivnosti, neposredno je uticao na razvitak matematičkih nauka i na razvitak nastave tih nauka u Jugoslaviji, naročito u Srbiji, pogotovo kad je reč o Univerzitetu u Beogradu. Na univerzitetu je stvorio matematički centar, iz koga su potekli, pod direktnim uticajem njegovog stvaralačkog rada, naučnog i pedagoškog, brojni matematičari koji su se afirmisali u nauci i nastavi, dajući veliki doprinos stvaranju naučnih kadrova i nastavnika u domenu matematičkih nauka.

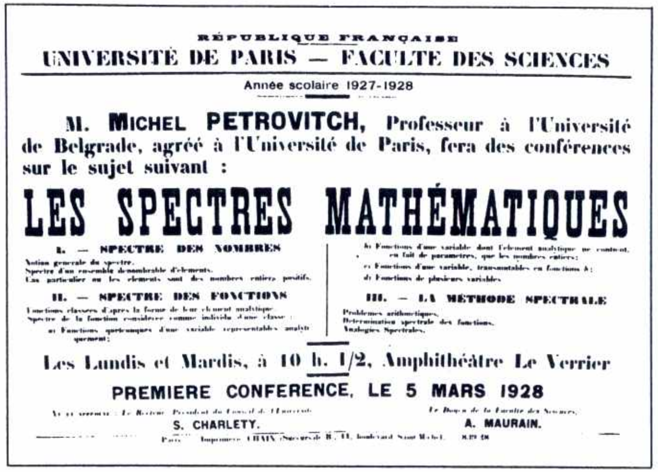
Dela Mihaila Petrovića obuhvataju različite oblasti matematike: teoriju diferencijalnih jednačina, klasičnu algebru, aritmetiku, diferencijalni i integralni račun, teoriju brojeva, matematičku i opštu fenomenologiju. Osim toga, zanimao se različitim problemima geometrije, mehanike, fizike i hemije.

Imao je naročitu sklonost za diferencijalne jednačine. Brojni su njegovi prilozi analitičkoj teoriji diferencijalnih jednačina. Naročito su značajni rezultati koji se odnose na teoriju uniformnih partikularnih integrala. Dobro je npr. poznat njegov stav koji se tiče diferencijalne jednačine: $y' = \mathrm{R}(x, y)$, gde je $\mathrm{R}(x, y)$ jedna racionalna funkcija po x i y. Ova jednačina ne može imati više od tri različita uniformna integrala (ako ima tri, onda je to Rikatijeva jednačina, ako ima dva, onda je Rikatijeva ili linearna, ako ima jedan, onda se svodi na jednu od prethodnih formi). Brojni radovi iz teorije diferencijalnih jednačina tretiraju probleme kojima su se bavili eminentni matematičari modernog vremena, kao Fuks, Poenkare, Pikar i Penleve. Svojim radovima iz domena kvalitativne integracije diferencijalnih jednačina zauzeo je značajno mesto među matematičarima koji su razvijali ovu teoriju dajući joj značajne rezultate. On se takođe zanimao mehaničkom integracijom diferencijalnih jednačina pomoću hidrauličkih aparata i koristio je hemijske fenomene za integraciju diferencijalnih jednačina specijalnog tipa, uključujući se tako među prethodnike modernih matematičkih instrumenata. On je pronalazač hidrointegratora, kao analogne računske mašine, zasnovane na hidrauličkim principima. U tom smislu je dobio međunarodna priznanja u radovima i monografijama u kojima se tretiraju pitanja razvitka tehničkih sredstava numeričke analize. Pored niza specijalnih radova, Petrović je teoriji diferencijalnih jednačina posvetio tri knjige: *Intégrales premières à restriction* (*Prvi integrali u restrikciji*, SANU, t. 72 i Gauthier – Villars, Paris, 1929), *Intégration qualitative des équations différentielles* (*Kvalitativna integracija diferencijalnih jednačina*, *Mémorial des sciences mathématiques*, Paris, 1931) i *Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova* (Beograd, 1938).

Druga prostrana oblast matematike u kojoj je dao značajne doprinose je teorija funkcija. Od posebnog su značaja, npr., Petrovićeve cele funkcije. One se primenjuju u aritmetici i zatim u analizi u integraciji određene klase diferencijalnih i funkcionalnih jednačina. Pomoću tih funkcija generalisana je dobro poznata Moavrova formula u teoriji kompleksnih brojeva.

U domenu klasične algebre su njegovi rezultati koji se odnose na probleme distribucije nula polinoma u ravni kompleksne ravni. Dobro je poznata sledeća teorema: Najopštija algebarska jednačina $\sum_{k=0}^{n} a_k x^r = 0$ ima bar jedan koren u kružnom prstenu C (ili na samoj granici ovog prstena) ograničenog sa dva koncentrična kruga C_1 i C_2, koji imaju zajednički centar u početku a za poluprečnike $R_1 = \frac{|a_0|}{\sqrt{L}}$, $R_2 = n\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$, i nema nijedan koren okružen ovim prstenom, gde je $L = min \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k}$ kad r raste preko realnih vrednosti od nule do beskonačnosti. Brojna njegova istraživanja tretiraju analogne probleme koji se odnose na funkcije određene celim redovima.

Značajni su njegovi radovi koji se odnose na probleme evaluacije određenih integrala i na teoreme o srednjoj vrednosti koje imaju veliki značaj za teoriju i primenu matematike.



Plakat Pariskog fakulteta kojim se obaveštavaju studenti da će Mihailo Petrović, u krugu svojih nekadašnjih profesora, održati tečaj iz matematičkih spektara, posle deset godina od pronalaska.

On je stvorio originalnu teoriju numeričkih spektara i spektralnu metodu računa, primenjujući je u rešavanju konkretnih problema algebre, aritmetike, integralnog računa i teorije funkcija. Ovim pitanjima, osim više rasprava, posvetio je dve knjige: *Les spectres numériques* (*Numerički spektri*, sa uvodom E. Borela, Paris, 1919) i *Leçons sur les spectres mathématiques, professées à la Sorbonne en* 1928 (*Predavanja o numeričkim spektrima, održanim na Sorboni*, Pariz, 1928).

Petrović je postavio osnove i trasirao put izgradnje matematičke i opšte fenomenologije u raspravama i delima: *Matematička teorija aktivnosti uzroka* (SANU, Beograd, 1899), *Les analogies mathématiques* (*Matematičke analogije*, Pariz, 1901), *Pokušaj jedne opšte mehanike uzroka* (SANU, Beograd, 1905), *La Mécanique des phénomènes fondée sur les analogies* (Pariz, 1905), *Elementi matematičke fenomenologije* (SANU, Beograd, 1911), *Le noyau d'analogie* (*Matematičko jezgro*, Pariz, 1919), *Mécanismes communs aux phénomènes disparates* (*Zajednički mehanizmi disparatnih fenomena*, Pariz, 1921) i *Fenomenološko preslikavanje* (SANU, Beograd, 1933).

Kad se analizuju disparatni fenomeni, sa izvesnog stanovišta S, primećuje se jedan skup F njihovih zajedničkih osobenosti. Ovaj skup sačinjava bazu sličnosti, tj. bazu analogija, između disparatnih fenomena. On je sa stanovišta S, prema Petroviću, *jezgro sličnosti* disparatnih fenomena koji sačinjavaju analošku grupu, analošku bazu jezgra sličnosti. Matematičke analogije „čije se jezgro sastoji u identitetu matematičkih relacija koje izražavaju fenomeni", od primarnog su značaja za matematičku fenomenologiju, podvlači Petrović. Jezgro analogije F u naukama „čini mogućim takozvane tipičke teorije koje su valjane za sve fenomene obuhvaćene jednim jezgrom, ma kako da su disparatni jedan prema drugom". Takve tipične teorije su dobro poznate, npr. u teorijskoj fizici.

Osnova naučnog tumačenja disparatnih fenomena jedne analoške grupe fenomena počiva u mogućnosti transfiguracije jednog fenomena u drugi zahvaljujući jezgru analogije grupe ispitivanih disparatnih fenomena koji su originali i čije jezgro analogije F je *slika*. Kad se ide transfiguracijom originala u sliku do gubljenja konkretnih značenja elemenata u originalima, tj. kad se svode na apstraktne elemente, čuvajući međutim pri tom mogućnost predviđanja novih osobenosti o originalima, onda se kaže za sliku F da izražava jedan *fenomenološki tip* fakata. Ova slika je *jedno fenomenološko biće* a ista transfiguracija originala u sliku F je *jedna fenomenološka transfiguracija*. A ako se transfiguriše slika F u svoje originale, onda je to *jedna inverzna fenomenološka transfiguracija*. Recipročna relacija između slike F i svakog od originala je data. U načinu na koji se elementi slike F, van ove recipročne relacije, manifestuju u realizaciji originala sastoji se njihova uloga u ovoj realizaciji. To je *fenomenološka uloga* i originali su *posledica* ili *efekat* slike.


СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ПОСЕБНА ИЗДАЊА

КЊИГА XCVII

ПРИРОДЊАЧКИ И МАТЕМАТИЧКИ СПИСИ

ФЕНОМЕНОЛОШКО ПРЕСЛИКАВАЊЕ

од

МИХ. ПЕТРОВИЋА

БЕОГРАД

ЦЕНА 40 ДИН.

Naslovna strana Petrovićevog dela *»Fenomenološko preslikavanje«*

Petrovićeva opšta fenomenologija zasnovana je na fenomenološkoj transfiguraciji i na matematičkoj fenomenologiji koja je samo jedan partikularni slučaj opšte fenomenologije. One pružaju bogatu anticipaciju ideja i metoda za savremene radove u matematičkim naukama i prirodnoj filozofiji.

Petrović je bio matematičar moćne intuicije. U njegovim matematičkim istraživanjima manifestovalo se jedinstvo pogleda, ideja i metoda. On je dolazio, relativno jednostavnim sredstvima klasične matematičke analize, do novih i značajnih rezultata u velikom broju disparatnih domena matematike, otkrivajući neočekivane veze između disparatnih matematičkih fakata. Kao analist, posedovao je kreativnu sposobnost i dubok smisao da obeleži značajne probleme koje implicira matematička analiza u različitim domenima matematike i da nađe njihovo rešenje originalnim metodama. Svojim matematičkim ostvarenjima i opštom i matematičkom fenomenologijom afirmisao se u međunarodnim razmerama kao matematičar i filozof matematike. On je jedan od najistaknutijih jugoslovenskih matematičara.

PLEMELJ JOSIP

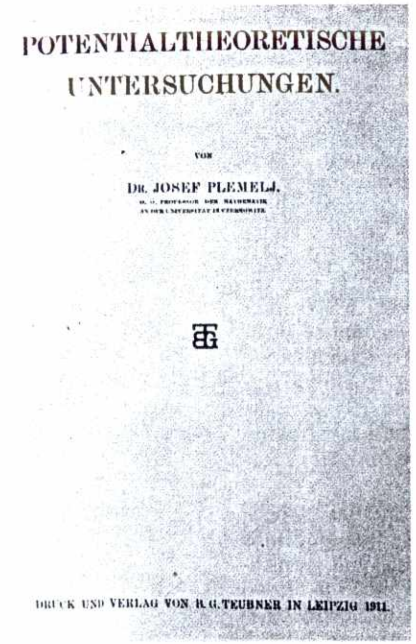
Slovenački, odn. jugoslovenski matematičar (1873–1967). Rodio se na Bledu, umro je u Ljubljani.

Bio je sin siromašnog seljaka stolara. Potiče iz trećeg braka, sa sestrom Ivanom i bratom Urbanom. Otac i deca iz

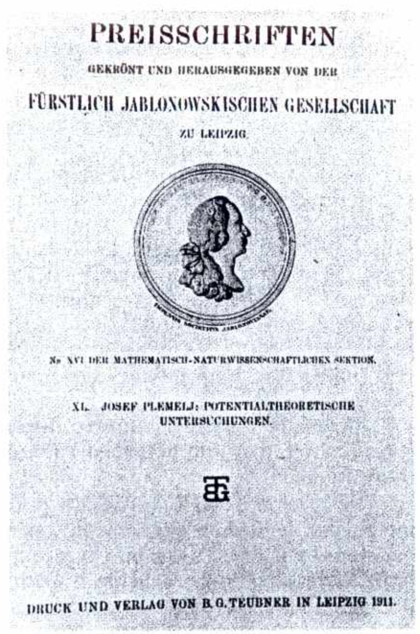
prvih brakova, kao i druga žena, umrli su od tuberkuloze. Kada je imao jednu godinu, otac mu je umro. Porodica je teško živela. Plemelj je završio gimnaziju u Ljubljani, gde je ispoljio matematički talenat. Izdržavao se podučavanjem. Naročito se zanimao konstrukcijama u geometriji. Dobro je savladao latinski jezik, pa je docnije lako čitao slavnu Gausovu knjigu *Disquisitiones Arithmeticae* (*Aritmetička istraživanja*). U gimnaziji se zainteresovao za višu matematiku i u tom smislu čitao je neke knjige. Uz matematiku zanimao se astronomijom i nebeskom mehanikom. Pošto je završio gimnaziju, stupio je 1894. na univerzitet u Beču, na fakultet matematike i fizike. Profesori su mu bili Ešerih, Gegenbauer i Bolcman. Osobito ga je zapazio Ešerih i omogućio mu je da dobije stipendiju univerziteta. Godine 1898. položio je sve ispite iz matematike i fizike i te godine odbranio je svoju doktorsku disertaciju *Über lineare homogene Differentialgleichungen mit eindeutigen periodischen Koeffizienten* (*O linearnim homogenim diferencijalnim jednačinama sa jednoznačnim periodičnim koeficijentima*). Od 1899. do 1900. naučno se usavršavao na univerzitetu u Berlinu kod profesora Fuksa i Frobenijusa, a od 1900. do 1901. na univerziteu u Getingenu kod profesora Klajna (F. Klein) i D. Hilberta. Godine 1902. postao je privatni docent na univerzitetu u Beču, a zatim asistent matematike na Visokoj tehničkoj školi. Godine 1907. izabran je za vanrednog i godinu dana docnije za redovnog profesora matematike na univerzitetu u Černovicama. Oženio se i imao je jednu ćerku. Godine 1919. bio je član univerzitetske komisije pri pokrajinskoj vladi u Ljubljani, i iste godine izabran je za redovnog profesora matematike filozofskog fakulteta Univerziteta u Ljubljani. Bio je prvi rektor Univerziteta u Ljubljani. Tu je predavao matematiku sve do 1957, a zatim je predavao honorarno. Za svoje radove dobio je niz nagrada: 1911. nagradu naučnog društva kneza Jablonovskoga u Lajpcigu; 1912. nagradu Riharda Libena u Beču; 1954. Prešernovu nagradu u Ljubljani. Bio je redovni član SAZU i SANU, kao i dopisni član JAZU i Bavarske akademije nauka. Na univerzitetu u Ljubljani veoma se odao pedagoškom radu. Vaspitao je niz generacija matematičara i vrlo značajno je doprineo razvitku matematike i drugih egzaktnih nauka u Sloveniji.

Plemelj se u osnovi zanimao diferencijalnim i integralnim jednačinama, teorijom potencijala (harmonijske funkcije) i teorijom funkcija.

Na prelomu XIX i XX v. počela se razvijati teorija integralnih jednačina primenjena kasnije na brojna područja matematike u fizici, a osobito u teoriji diferencijalnih jednačina. Za vreme svog boravljenja u Getingenu, Plemelj je slušao predavanja. E. Holmgrena o linearnim integralnim jednačinama prve i druge vrste. Getingenški matematičari na čelu sa Hilbertom proučavali su teoriju integralnih jednačina a Plemelj je bio jedan od prvih koji je postigao lepe rezultate. U tom pogledu ističe se njegova rasprava *Über die Anwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung in der Potentialtheorie* (*O primeni Fredholmove funkcionalne jednačine u teoriji potencijala*, Beč, 1903). U raspravama *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung* (*Teoriji Fredholmove funkcionalne jednačine*, Beč, 1904) *Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie* (*O linearnim graničnim zadacima teorije potencijala*, Beč, 1904), Plemelj je uspešno upotrebio integralne jednačine u teoriji potencijala. Najznačajniji rad u oblasti primena integralnih jednačina u teoriji potencijala je njegova knjiga *Potentialtheoretische Untersuchungen* (*Istraživanja u teoriji potencijala*, Lajpcig, 1911). Ta knjiga dobila je nagradu naučnog društva kneza Jablonovskog u Lajpcigu, koje je raspisalo konkurs za delo iz teorije potencijala. Knjiga ima četiri dela. U prvom delu su osnove teorije potencijala, drugi deo sadrži Fredholmovu teoriju integralnih jednačina sa pojednostavljenim dokazima, treći deo sadrži primene, a četvrti deo je u celini metodološki nov. Navedenim radovima Plemelj je postao poznat u matematičkom svetu. Znameniti francuski matematičar E. Pikar, koji se bavio teorijom potencijala, dve gore navedene rasprave nazvao je „odličnim raspravama".



Naslovna strana Plemeljovog dela *Istraživanje u teoriji potencijala*.



Naslovna strana Plemeljove knjige koja je dobila nagradu Naučnog društva kneza Jablonovskog.

Smatra se da je najveći uspeh Plemelja njegovo oštroumno i potpuno rešenje Rimanovog problema, koji su matematičari rešavali pedeset godina. Tu treba dokazati egzistenciju sistema od *n* regularnih funkcija u celoj ravni kompleksnih brojeva, izuzev u nekoliko singularnih tačaka. Takav sistem funkcija se dobija, npr. pri rešavanju Fuksovih diferencijalnih jednačina reda *n*. Hilbert je taj problem sveo na rešenje integralne jednačine, ali rešenje jednačine nije davalo potpuno rešenje Rimanovog problema. Hilbertova metoda bila je suviše komplikovana. Plemelj je našao ključ rešenja problema u teoremi o graničnim vrednostima analitičnih funkcija (Plemeljove formule). Pomoću tih formula bilo je moguće svesti problem na jednostavan sistem linearnih integralnih jednačina i tako doći do potpunog rešenja problema. O ovome videti Plemeljev rad *Über einen neuen Existenzbeweis des Riemannschen Funktionssystems mit gegebener Monodromiegruppe* (*O jednom novom dokazu egzistencije Rimanovog sistema funkcija sa datom monodromigrupom*, Beč, 1906). Na Plemeljovim metodama zasnovana je teorija singularnih integralnih jednačina koju je docnije razvila sovjetska škola u Tbilisiju na čelu sa N. I. Mushelišvilijem. Ta je teorija veoma važna u primenama u mehanici i teoriji otpornosti. Plemelj je u vezi sa rešavanjem Rimanovog problema vodio naučne diskusije sa matematičarem L. Šlezingerom i o tome objavio radove.

Značajna je uloga Plemelja u proučavanju teorije uniformizacije algebarskih jednačina i teorije jednolisnih funkcija. U teoriji jednolisnih funkcija prvi je kvantitativno formulisao stav o analitičkoj dilataciji slika kod konformnog preslikavanja. Značajni su njegovi radovi u oblasti teorije diferencijalnih jednačina. Tu se on, u osnovi, zanimao jednačinama klase Fuksa i teoremama Klajna. Među ostalim njegovim doprinosima važan je još jednostavan dokaz Fermaove tvrdnje za pete stepene i rekonstrukcija Galoaovog* dokaza o sniženju stepena modulske jednačine.

Osim opšteg kursa matematike, on je u trogodišnjem ciklusu držao predavanja na filozofskom fakultetu iz diferencijalnih jednačina, teorije analitičkih funkcija i algebre sa teorijom brojeva. U vezi sa tim izašla su tri toma pod naslovima *Teorija analitičnih funkcij* (*Teorija analitičkih funkcija*, 1953), *Diferencialne in integralne enačbe* (*Diferencijalne i integralne jednačine. Teorija i primena* 1960) i *Algebra in teorija števil* (*Algebra i teorija brojeva*, 1962). Iako su sve tri knjige udžbenici, one obrađuju prvenstveno oblasti na kojima je Plemelj sam najviše radio. Sadrže mnogo novih i pojednostavljenih dokaza i formulacija. U Njujorku je objavljena njegova knjiga *Problems in the sense of Riemann and Klein* (*Problemi u smislu Rimana i Klajna*, 1964), u kojoj se osvetljavaju pitanja na kojima je Plemelj najviše radio i u vezi sa kojima je sam dao najviši doprinos, kao i rasprava *Newtonian potential for an ellipsoid of rotation* (*Njutnov potencijal za elipsoid u rotaciji*).

Plemelj se bavio teškim matematičkim problemima. U njihovom rešavanju postigao je vrlo značajne rezultate. Njegovi radovi naišli su na širok odjek u veoma visokim krugovima inostranih matematičara. Pružili su snažan podsticaj za dalja naučna istraživanja. Broj njegovih radova nije tako impozantan, ali svaki njegov rad je naučno značajan i dubok. Bio je matematičar koji je zalazio u dubinu problema, težeći što brižljivijem rešenju. Kao takav on je jedan od najistaknutijih jugoslovenskih matematičara čija su matematička ostvarenja bitno doprinela da se jugoslovenska matematika afirmiše u međunarodnim razmerama.

Lit. dr. Ivan Vidav, *Josip Plemelj ob stoletnici rojstva.*

POPADIĆ MILAN

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1912–1983). Rođen je u Beogradu, umro je u Novigradu u Istri.

Osnovnu školu završio je 1922. u Obrenovcu, a gimnaziju 1930. u Beogradu. Diplomirao je teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu u Beogradu 1935. Bio je suplent u Muškoj gimnaziji u Subotici, a zatim u Prvoj muškoj gimnaziji u Beogradu, kad su ga kvislinške i okupatorske vlasti otpustile iz državne službe kao „nacionalno nepouzdanog" i kao takav je izvesno vreme proveo u zatvoru. Bio je profesor gimnazije za učenike ratom ometene, a zatim asistent i predavač na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Skoplju. Februara 1954. doktorirao je sa tezom „*O induktivnim sistemima*" na Prirodnoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Od aprila 1955. je na Građevinskom fakultetu u Beogradu, najpre u svojstvu docenta, zatim vanrednog i redovnog profesora.

Na Građevinskom fakultetu u Beogradu, Popadić je izvodio nastavu iz matematike na redovnim studijama, a zatim nastavu na poslediplomskim studijama iz parcijalnih diferencijalnih jednačina, specijalnih funkcija, Furijeove analize i integralnih jednačina sa uvodom u funkcionalnu analizu. Na Filozofskom fakultetu u Skoplju predavao je aksiomatiku geometrije i višu algebru sa teorijom brojeva. Predavao je matematiku na Saobraćajnom fakultetu u Beogradu, Tehničkom fakultetu u Nišu, Tehničkom fakultetu u Prištini, Centru Građevinskog fakulteta iz Beograda u Titogradu i Novom Sadu.

Bio je više puta član komisije za polaganje profesorskog ispita kao i član komisije za polaganje magistarskog i doktorskog ispita, zatim šef Katedre za matematiku i fiziku Građevinskog fakulteta. Aktivno je učestvovao na svim Kongresima matematičara Jugoslavije. Bio je stalni recenzent za radove iz oblasti teorije skupova, teorije brojeva i matematičke logike u referativnim časopisima „Zentralblatt für Mathematik" i „Mathematical Reviews". Za svoj rad i postignute uspehe dobio je mnoga javna priznanja.

Brojni su naučni i stručni radovi Milana Popadića, koje je objavio od 1950. u raznim naučnim i stručnim časopisima Jugoslavije. Oni pripadaju teoriji brojeva, teoriji konačnih množina i posebno teoriji matematičke indukcije. Zalaze u osnove i metodologiju matematike i graniče se sa njenom filozofijom. U svojim naučnim radovima, što je karakteristično za M. Popadića kao matematičara, tragao je uvek za određenim uopštenjima i u tome je postigao originalne i nove rezultate. To daje njegovim radovima istaknutu vrednost i značaj za oblast matematike na koju se odnose.

Poznat je njegov rad *Jedno karakteristično svojstvo konačnih množina* koji predstavlja originalan i značajan prilog teoriji konačnih skupova i kao takav je istaknut u naučnoj literaturi. Naime, među savremenim radovima koji doprinose karakterizaciji konačnih skupova, citira se među prvima ovaj rad u ruskom prevodu sa engleskog, veoma poznatog dela *Osnovi teorije skupova od Abrahama A. Frenkela i Jošua Bar-hilea*, u komentarima poglavlja „Aksiomatike osnove teorije skupova". U svom drugom radu *O uređenim množinama sa konačnim lancima* dokazao je novu teoremu koja generališe osnovni rezultat iz prethodnog rada.

U doktorskoj disertaciji *O induktivnim sistemima* generalisao je princip potpune matematičke indukcije. Formulisan je „opšti princip indukcije", i dat je nužan i dovoljan uslov da bi se „induktivnim sistemom" S (M) podskupova M mogao iscrpsti skup M. Navedeni su primeri induktivnih sistema uglavnom u okviru klase uređenih skupova. Dalje je definisan pojam karakterističnog sistema S (M) za M u okviru neke klase C, kao sistem koji je induktivan tada i samo tada ako M pripada klasi C. Navedeni su zatim primeri karakterističnih sistema i uopšteno je Lebeg–Hinčinovo svojstvo za uređene skupove. Pokazano je da je svaki sistem S (M) karakterističan za M u okviru klase konačnih skupova, pa je na osnovu toga data jedna nova definicija konačnog skupa. Popadićeva disertacija zauzima značajno mesto među radovima koji se odnose na matematičku indukciju, a čiji su autori bili istaknuti matematičari. Disertaciju je zapazio istaknuti sovjetski matematičar A. N. Hinčin, pa ju je prikazao u *Referativnom časopisu – Matematika.*

I svi ostali naučni radovi odlikuju se istim kvalitetima kao i radovi koje smo neposredno istakli. Tako je u radu *Jedna nova formulacija principa indukcije* data znatno opštija shema principa indukcije no što se nalazi u njegovoj doktorskoj disertaciji. Tu se uvodi pojam induktivne četvorke (M, S, S_1, φ), gde su M, S, S_1 skupovi, a φ je binarna relacija.

Naučni radovi Popadića prikazani su u referativnim časopisima: „Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete", „Mathematical Reviews" i „Referativni žurnal – Matematika". Među recenzentima bili su veoma istaknuti matematičari.

Stručne monografije Popadića *Matematička indukcija*, *Deljivost brojeva*, *Kongruencije* i *Iracionalni brojevi* predstavljaju značajne priloge na našem jeziku oblastima matematike na koje se odnose. Prva monografija je prvo delo te vrste na srpskohrvatskom jeziku. U trećoj monografiji obrađeni su osnovi teorije kongruencije, dok je u drugoj monografiji dat uvod u elementarnu teoriju brojeva. Njegova monografija *Neodređene jednačine* namenjena je mladim matematičarima, kao i gore pomenuta četvrta monografija. Autorizovana skripta *Parcijalne diferencijalne jednačine* i *Integralne i parcijalne diferencijalne jednačine sa uvodom u funkcionalnu analizu* sadrže predavanja koja je držao na poslediplomskim studijama na Građevinskom fakultetu.

Po njegovim opšteljudskim, zatim pedagoškim i naučnim kvalitetima ostaje u trajnoj uspomeni svojim učenicima, studentima i kolegama saradnicima. Svim tim osobinama vajao je fizionomije škola i fakulteta na kojima je delovao. Njegovi radovi iz teorije konačnih skupova i matematičke indukcije, zapaženi u međunarodnim razmerama, zauzeli su značajno mesto u jugoslovenskoj matematici.

POPOVIĆ VOJISLAV

Srpski, odn. jugoslovenski, matematičar (1915 – 1984). Rodio se i umro u Beogradu.

Srednju školu završio je u Beogradu, diplomirao je 1942. na Filozofskom fakultetu u Beogradu, na odseku za matematiku. Od 1943. do 1945. radio je kao profesor gimnazije u Gornjem Milanovcu, a od 1946. do 1949. u Učiteljskoj školi i u Aleksincu. Za profesora Srednje tehničke škole u Beogradu postavljen je 1949. Iste godine izabran je za asistenta matematike na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Na toj dužnosti ostao je do 1954. Od 1954. do 1960. godine radio je kao asistent matematike na Rudarsko-geološkom fakultetu u Beogradu, gde je za predavača matematike izabran 1960, a za višeg predavača 1970. godine.

U svom radu Popović se najviše posvetio nastavnom pozivu gde je postigao veliki uspeh. Njegova izlaganja bila

su precizna, jasna i zanimljiva. U toku predavanja ukazivao je na konkretne mogućnosti primene matematike u tehničkim naukama. Sve ovo donelo mu je priznanje kako brojnih generacija studenata tako i kolega na fakultetima.

Bio je poznat u radu u oblasti šaha. Jedan je od najistaknutijih članova predratnog Beogradskog šah-kluba, gde se kao član uprave istakao svojim izlaganjem za mlade igrače. Imao je uspeha na većem broju turnira. Šahovski majstor postao je na prvom šampionatu Jugoslavije u Novom Sadu, 1954. Bio je generalni sekretar Šahovskog saveza Jugoslavije od 1952. do 1956. Za njegovo ime vezani su i neki turnirski sistemi, a takođe i matematička metoda za ocenjivanje rezultata koja je FIDI uzeta kao polazna osnova prilikom dodeljivanja međunarodnih šahovskih titula.

Objavio je nekoliko radova iz matematike u domaćim i stranim časopisima. Popovićevi radovi *Jedan dokaz Cauchy-eve nejednačine* („Vesnik društva matematičara i fizičara NRS" I, Beograd, 1949), *The inequality between the arithmetic and geometric means* (*The Math. gazette* XXXV, No 314, London, 1951) i *O jednom stavu Obreškova* („Zbornik radova SANU", XVIII, Mat. inst., Beograd, 1955) pokazali su da on poznaje naučnu problematiku svoje struke i da vlada ne samo stručnim znanjem, već da može naučno da tretira probleme od interesa. Iako je problem nejednačina, a naročito Košijeve i Helderove nejednačine, rešen više puta, Popovićevi dokazi u prvom i drugom radu su jednostavni i originalni. U trećem radu daje uopštenje jednog stava poznatog bugarskog matematičara N. Obreškova i pokazuje da je taj stav jednostavna posledica poznatih stavova i klasične analize. Njegovi radovi *Jedan dokaz Ptolemejevog pravila* („Glasnik mat.-fiz. i astr.", II, t. 6, No 5, Zagreb, 1951), *Dokaz Heronovog obrasca* („Glasnik mat.-fiz. i astr.", II, t. 6, No 5, Zagreb, 1951) i *Jedan problem iz kombinatorike* („Glasnik mat-fiz. i astr.", No 7/9, Zagreb, 1952) su stručni prilozi iz elementarne geometrije.

Lit.: Referat o izboru za višeg predavača matematike.

RADOJČIĆ MILOŠ

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1903 – 1975). Rodio se u Zemunu, a umro je u Ženevi.

Osnovnu i srednju školu završio je u Zemunu. Započeo je studije tehnike, ali je završio matematičke nauke na Filozofskom fakultetu u Beogradu 1925, a 1928. odbranio je doktor-

sku disertaciju *Analitičke funkcije predstavljene konvergentnim nizovima algebarskih funkcija*. On pripada srednjoj generaciji učenika Mihaila Petrovića, ali je u nastavi i nauci išao svojim putem. Godine 1926. počinje da radi kao asistent na Katedri za teorijsku matematiku Filozofskog fakulteta. Za docenta je izabran 1938, za vanrednog profesora 1950. i redovnog 1954. Bio je dopisni član SANU, od 1959. do 1964. profesor je Univerziteta u Kartumu. Boravi u Francuskoj u mestu Tonon-le-Ben, od 1964, gde radi kao saradnik francuskog *Centre national des recherches scientifiques* (Nacionalni centar naučnih istraživanja), sa izvesnim kratkim prekidom, početkom 70-ih godina, kad je boravio u Kolombu na Cejlonu (Šri Lanka).

Najvećim delom naučna delatnost Radojčića posvećena je teoriji analitičkih kompleksnih funkcija i manjim delom teoriji relativnosti (25 radova odnose se na teoriju analitičkih funkcija, a 8 na teoriju relativnosti).

Predmet svih njegovih radova iz teorije analitičkih funkcija su multiformalne analitičke funkcije i njihove Rimanove (Riemann) površi. Tu se izdvajaju tri kruga po temama. Prvi krug je okarakterisao kao „razvijanje opštih multiformnih analitičkih funkcija, u ma kakvim oblastima njihove egzistencije, u konvergentne nizove analitičkih funkcija". Proširuju se i upotpunjavaju poznati stavovi Vajerštrasa i Mitag–Leflera o prikazivanju celih, odn. meromorfnih funkcija u kompleksnoj ravni konvergentnim proizvodima odn. redovima jednostavnih analitičkih elemenata i analognih rezultata Rungea koji se tiču proizvoljne oblasti ravni umesto cele ravni. Radojčić je u svojoj disertaciji dao uopštenje pomenutih stavova za slučaj analitičke funkcije na proizvoljnoj oblasti odgovarajuće Rimanove površi. Taj svoj rezultat je dopunio i usavršio u nizu kasnijih radova i smatra se da je pomenute stavove uopštio do krajnjih mogućih granica. Iz toga proizlazi osnovni značaj Radojčićevih rezultata, koji su u dužem periodu bili jedina značajna postignuća u oblasti kojoj pripadaju. Jedan od osnovnih problema geometrijske teorije funkcija u određenom periodu njenog razvitka, tj. problem deobe Rimanove površi na listove, odnosi se na drugi krug po temama kojim se bavi u teoriji funkcija kompleksne promenljive. U vezi sa ovim kompleksom problema dokazao je više centralnih stavova i dao je opšti postupak podele ma koje Rimanove površi na listove, za slučaj neograničenih Rimanovih površi. Radojčićevi radovi poslužili su docnije kao osnova za dalji rad na proučavanju opštih automorfnih funkcija. U ovim istraživanjima, jedan od glavnih rezultata jeste da je svaka meromorfna funkcija u izvesnom smislu automorfna. Jedna grupa radova posvećena je geometrijskim (topološkim) osobinama analitičkih funkcija u blizini esencijalnih singulariteta, naročito kad je u pitanju problem tipa Rimanove površi. On je tu dao dve varijante dovoljnih uslova da Rimanova površ bude paraboličnog, odn.

hiperboličnog tipa, što su mnogo važniji i zanimljiviji slučajevi od slučaja pripadanja eliptičnom tipu. Pomenimo neke od Radojčićevih radova iz teorije kompleksnih funkcija (koje je napisao na srpskohrvatskom, francuskom, nemačkom i engleskom): *O inverznim funkcijama meromorfnih funkcija* (1930), *Neki kriterijumi koji se odnose na tip Rimanove površi sa algebarskim tačkama granjanja* (1950), *O fundamentalnim domenima analitičkih funkcija u blizini esencijalnog singulariteta* (1935), *O ponašanju analitičkih funkcija u blizini esencijalnih singulariteta* (1936), *O jednom topološkom problemu teorije Rimanovih površi* (1948), *Jedan stav o esencijalnim singularitetima analitičkih funkcija* (1950), *O problemu tipa Rimanovih povši* (1953), *O nizovima algebarskih funkcija i egzistenciji analitičkih funkcija sa bilo kakvom oblašću egzistencije* (1954), *O Vajerštrasovom razvijanju u proizvode analitičkih funkcija na Rimanovim površima*, kao i niz drugih radova.

Duboko zainteresovan problemom prostora i vremena, dao je nekoliko značajnih radova iz teorije relativnosti, uvek sa filozofskim implikacijama tog problema. Među tim radovima ističe se *Jedna aksiomatska konstrukcija teorije prostor-vremena specijalne teorije relativiteta*, objavljen na francuskom u SANU 1973. Dao je još nekoliko radova koji se odnose na teoriju relativiteta.

Radojčić je predavao tri geometrijske discipline: nacrtnu, elementarnu i višu geometriju. Nacrtnu geometriju je predavao kao matematičku, pa tek onda kao u tehnici primenjenu disciplinu. Svoju koncepciju o nacrtnoj geometriji izložio je u svojoj knjizi *Nacrtna geometrija* (1955). Njegov kurs elementarne geometrije bio je prvi sistematski kurs sintetičke geometrije i prvi aksiomatski kurs koji se predavao studentima matematike na Beogradskom univerzitetu. Ta njegova predavanja imala su posrednog i neposrednog uticaja na nastavu matematike u celini, kad je reč o strogosti i sistematičnosti u izlaganjima. Njegova predavanja iz elementarne geometrije objavljena su u knjizi *Elementarna geometrija* (1961). Posebno je zaslužan za predavanja iz više geometrije. U svojim predavanjima rado se osvrtao na vezu koja postoji između geometrije Lobačevskog i euklidske geometrije, kao i na njenu primenu u drugim oblastima nauke, posebno u fizici (Ajnštajnovoj teoriji relativiteta).

Držao je opšti kurs matematike studentima filozofije, gde je pored ostalog materijala, izlagao istoriju, filozofiju i metodologiju matematike. U vezi s tim predavanjima objavio je skripta, posvećena antičkoj matematici.

Radojčić se bavio slikarstvom, gde je postigao određene uspehe, a takođe i u književnosti. Ti su njegovi radovi prožeti filozofijom, kao i izvestan deo njegovog rada u struci. Moglo bi se podvući da se racionalistička komponenta njegove matematičke i opšte kulture manifestuje u sistematičnosti i preglednosti izlaganja, u spletu razuma, intuicije i imaginacije. Sve to ostavlja upečatljivu sliku dosta kompleksne i originalne ličnosti.

Radovi iz teorije funkcija pripadaju geometrijskoj teoriji analitičkih funkcija pa se on može smatrati samostalnim začetnikom izvesnih modernih metodoloških koncepcija u teoriji analitičkih funkcija. U njima dolazi do izraza izvanredna razvijenost za prostorne intuicije i percepcije, za vizuelno sagledavanje prostornih odnosa i celina. Baveći se Rimanovim površima, tu je svoju sposobnost budio, razvijao i kultivisao, doprinevši i sam da se otkriju i potpunije upoznaju tajne relacije i struktura prostora. Celim svojim radom Radojčić je istaknuti jugoslovenski matematičar, koji je uz to proučavao filozofiju i istoriju matematike.

Lit. Korišćeni su radovi dr Dušana Adamovića i dr Dragomira Lopandića o životu i radu M. Radojčića, kao i lični uvid u njegov rad i njegova dela.

RALJEVIĆ ŠEFKIJA

Bosansko-hercegovački, odn. jugoslovenski matematičar (1909 – 1976). Rođen je u Mostaru i umro je u Sarajevu.

Osnovnu i srednju školu završio je u Mostaru, gde je i maturirao 1930. Matematiku je studirao na Filozofskom fakultetu u Beogradu, diplomirao 1934. Bio je nastavnik srednjih škola u Trebinju, Mostaru i Prijedoru. Godine 1950. izabran je za predavača geometrije na Filozofskom fakultetu u Sarajevu, a 1952. za docenta. Doktorsku disertaciju *O izvjesnim klasama polinoma i o rasporedu njihovih nula* odbranio je u SANU 1955. Bio je profesor za predmet geometrija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu. Nekoliko godina bio je prodekan i dekan fakulteta i vrlo je intenzivno učestvovao u samoupravnim organima fakulteta, kao i u mnogim matematičkim društvenim organizacijama i u tom pogledu odata su mu društvena priznanja.

Objavio je trinaest naučnih i stručnih radova. Među naučnim radovima ističu se *Međusobni raspored i konstrukcija nula polinoma trećeg stepena i nula njegovog izvodnog polinoma* (1952), *O jednoj generalizaciji Eulerova pravca i Eulerove dužine* (1953), *Primjedba na jedan Mardenov stav* (1957), kao i doktorska disertacija. Šest stručnih radova pedagoški i didaktički vešto obrađuju izvestan niz pitanja iz nastave matematike u srednjoj školi.

Lit. podaci dr Mahmuta Bajraktarevića.

SALTIKOV NIKOLA

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1866 – 1961), ruske nacionalnosti. Rođen je u Višnjem Voločoku u SSSR-u, a umro je u Beogradu.

Bio je učenik A. N. Ljapunova i V. A. Steklova. Diplomirao je na univerzitetu u Harkovu 1895, tri godine docnije je magistrirao, dok je doktorirao iz matematičkih nauka 1905. Studirao je u Francuskoj i Nemačkoj. Bio je profesor racionalne mehanike na Tehnološkom institutu u Tomsku i na Politehničkom institutu u Kijevu. Godine 1919. postao je profesor matematike na Gruzijskom univerzitetu i u ruskom Politehničkom institutu u Tiflisu. Napustio je Rusiju 1921, i došao je u Beograd, gde je izabran za redovnog profesora matematike Filozofskog fakulteta. Kao matematičar delovao je u našoj sredini četrdeset godina. Predavao je teoriju parcijalnih diferencijalnih jednačina, višu algebru, analitičku geometriju, teoriju eliminacija i projektivnu geometriju. Osim toga, držao je predavanja po dva meseca godišnje na univerzitetima Belgije. Sa svojim naučnim saopštenjima učestvovao je na mnogim jugoslovenskim i inostranim kongresima i skupovima. Bio je redovni član SANU i Francuskog matematičkog društva. Nosilac je medalje Univerziteta u Briselu i Sedmojulske nagrade SR Srbije za 1959. Pokazivao je veliko interesovanje za pitanja nastave matematike u srednjim školama i u tom pogledu aktivno je učestvovao u radu Društva matematičara i fizičara SR Srbije, kao i u Savezu društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Često je uz istraživanja dodavao i znatan broj istorijskih napomena, koje nisu bile poznate, pa je tako davao svoje priloge istoriji matematike. Njegov odnos prema studentima i mlađim naučnim radnicima bio je retko neposredan, pristupačan i human. Prihvatao je rado svaku inicijativu u kojoj je video želju za naukom, ne propuštajući da pruži korisna uputstva, da podstakne na rad i da pomogne. Generacije matematičara u našoj sredini zadržale su takav lik N. Saltikova, koji je na njih uticao svojom reči i svojim pisanim delima.

Njegova naučno-istraživačka delatnost obuhvata vremenski skoro sedamdeset godina. Bavio se pretežno parcijalnim diferencijalnim jednačinama, kao i nekim drugim oblastima (obične diferencijalne jednačine, geometrija i mehanika). Značajne su tri njegove monografije: *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue* (*O teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom*, Pariz, 1925), *Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*Klasične metode integracije parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda*, Pariz, 1931) i *Méthodes modernes* *d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*Moderne metode integracije parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda*, Pariz, 1934). Prva monografija sadrži radove Saltikova od 1909. do 1918. Tu je izložena veza između Lagranžovih i Liovih potpunih integrala. Druga monografija sadrži kratak pregled razvitka parcijalnih diferencijalnih jednačina tokom XVIII i XIX stoleća, sa iscrpnom bibliografijom, a u trećoj monografiji se razvijaju ideje iz druge monografije sa odgovarajućom bibliografijom. Najznačajnije delo *Metode integraljenja parcijalnih jednačina prvoga reda sa jednom nepoznatom funkcijom* (SANU, Beograd, 1947). Knjiga sadrži ogroman materijal, koji joj daje karakter enciklopedije. U njoj se nalaze značajni rezultati i ispravke koje je učinio. Napisao je i udžbenik iz analitičke geometrije (na ruskom i srpskohrvatskom jeziku), kao i dva kraća udžbenika iz parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog i drugog reda.

U svom naučnom radu imao je kao uzor veliki broj ruskih matematičara i istaknute francuske, nemačke i druge matematičare XIX v. kao što su Koši*, Bertran, Poason, Liuvij*, Jakobi*, Majer, Sofus Li. Saltikov je proučavao, tako reći sve koji su mu prethodili (Ojler, D'Alamber, Lagranž, Šarpi, Koši, Monž, Poason, Vejler, Jakobi, Majer, Liuvij, Sofus Li). Pronašao je niz novih činjenica koje nisu uočili njegovi prethodnici ni njegovi savremenici. To je omogućilo da se isprave neke istorijske netačnosti u vezi sa pronalascima pojedinih postupaka i metoda. Pronašao je Šarpijeov memoar u Francuskoj akademiji nauka u Parizu i tako ispravio nepravdu učinjenu Sarpiju u pogledu prioriteta rešenja linearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda. Uveo je pojam karakteristične funkcije. Uopštio je Jakobijeve teoreme o sistemima kanoničnih diferencijalnih jednačina i o njihovim integralima i dao je laki dokaz Jakobijevog postupka za linearne simultane jednačine. Diferencijalne invarijante predstavljaju polje u kome je Saltikov dao niz priloga o njihovim osobinama. Dao je i algoritam za integraljenje jednačina. Uveo je funkcionalne grupe integrala diferencijalnih jednačina karakteristika i sisteme linearnih jednačina koje nisu u involuciji, te se ovde ne može upotrebiti Jakobijeva metoda zasnovana na Poasonovoj teoremi. Saltikov je dao svoju teoremu – opštiju od Poasonove – čime je problem rešen.

U oblasti primene teorije kanoničkih jednačina, za integraljenje diferencijalnih jednačina dinamike Saltikov je ukazao na mnoge činjenice od koristi za praktično rešenje datih problema. Uočio je da se veliki broj jednačina mehanike integrale kvadraturama i to razdvajanjem promenljivih, čemu su uslovi koje su pronašli neki istaknuti matematičari samo specijalni slučajevi onih koje je našao Saltikov.

Saltikov je uvideo prednosti razmatranja V. P. Ermakova koja se odnose na transformaciju dodira, s obzirom na ono što

su drugi autori saopštavali o tim transformacijama. Integralio je veliki broj običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina pomoću transformacija dodira. Uprostio je teorijska izvođenja i uveo je pojam skraćenih transformacija dodira, čija je efikasnost u pojedinim slučajevima izvanredna.

Proučavao je u znatnoj meri radove Sofusa Lija. Našao je da se pojam funkcionalnih grupa, koji se smatra Liovim pronalaskom, nalazi već kod Jakobija. Pokazao je da su integrali Lija izvesna formalna generalizacija svih drugih integrala, i kad se postavi pitanje njihovog stvarnog postojanja da se dolazi do toga da oni postoje samo za vrlo specijalne oblike jednačina. Za parcijalne diferencijalne jednačine sa više od dve promenljive dao je opšti oblik jednačina koje dopuštaju Liove integrale.

Značajni su radovi Saltikova koji se odnose na parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, naročito rad koji se odnosi na elementarne metode integraljenja. Dao je i definicije vrsta integrala parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Pokazao je postojanje integrala sa jednom proizvoljnom funkcijom i dve proizvoljne konstante i takav integral je nazvao mešoviti opšti integral. Skrenuo je pažnju na invarijante Laplasove jednačine drugog reda, posebno na invarijante viših redova, kao i na njihovu ulogu. Kod Monž – Amperove jednačine dao je niz korisnih dopuna i primedbi.

Celokupnim matematičkim radom, kao naučnik i nastavnik, Saltikov je uticao na razvitak nastave i naučnog rada iz matematike kod nas. Mnogi njegovi učenici produžili su njegov rad u nauci i nastavi, a njegova matematička ostvarenja ne pripadaju samo jugoslovenskoj, već matematici uopšte.

Lit. Konstantin Orlov, Borivoje Rašajski, Đorđe Karapandžić, razni napisi o N. Saltikovu.

SEDMAK VIKTOR

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1920 – 1979). Rodio se u Karlovcu, umro je u Zagrebu.

Osnovnu školu završio je u Karlovcu, a gimnaziju sa odličnim uspehom u Zagrebu 1939. Studirao je teorijsku matematiku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, gde je 1947. diplomirao. Godine 1948. postavljen je za asistenta u Matematičkom institutu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Tu je 1953. doktorirao na osnovu disertacije *Neke primjene djelomično uređenih skupova*. Za univerzitetskog nastavnika habilitirao je 1956. na osnovu rada *Netopološka a nemetrička svojstva polijedarskog kompleksa*, dok je njegova tema habilitacionog predavanja bila *O polijedru*. Kao asistent vršio je vežbe iz raznih kolegija, a kad je bio izabran za docenta predavao je teoriju skupova, višu algebru i analizu I. U celokupnom tom radu kao i u seminarskom, pokazivao je visoku stručnu spremu i gotovost da pomogne rečju i delom i da raspravlja o naučnim, filozofskim i pedagoškim problemima, izražavajući jaku logičko-polemičku nekompromisnu crtu. Može se reći da je radio u relativno teškim okolnostima od kojih su neke posledica njegovih stradanja za vreme rata. U petnaestoj godini bio je povezan sa SKOJ-em i KP Jugoslavije. Bio je aktivni učesnik NOB-a, nosilac je „Partizanske spomenice 1941".

Sedmak je uspešno istupao sa svojim naučnim i stručnim predavanjima na kongresima i simpozijumima u našoj zemlji i u inostranstvu, na kongresu italijanskih matematičara u Paviji 1956, austrijskih matematičara u Insbruku 1962, jugoslovenskih matematičara u Zagrebu 1956, u Beogradu 1962. i Sarajevu 1965, zatim na Međunarodnom simpozijumu o uređenim skupovima u Brnu 1963, kad je držao predavanja u Pragu i Bratislavi. Bavio se filozofskim pitanjima matematike, pa je u tom pogledu značajno njegovo predavanje o matematici i dijalektici koje je održao 1965. u Opatiji, na simpozijumu „Marksizam i prirodne nauke".

Njegova naučna delatnost kreće se u teoriji skupova i to u onom delu koji se odnosi na kombinatorna razmatranja i uređenja. U vezi sa tim napisao je više radova, objavljenih kod nas i u inostranstvu. Na tom području došao je do zanimljivih i originalnih rezultata i problema, o kojima su iskazani veoma povoljni komentari. Napominjemo neke od njegovih radova: *Dimenzija djelomično uređenih skupova pridruženih poligonima i poliedrima* (1952), *Quelques applications des ensembles partiellement ordonnés* (1953, Neke primene parcijalno uređenih skupova), *O jednom sistemu skupovnih jednadžbi* (1955), *Quelques resultats de l'application des ensembles ordonnés aux complexes polyèdriques* (1956, Neki rezultati primene uređenih skupova na poliedarske komplekse), *Sur les réseaux de polyèdres n-dimensionels* (1959, O mrežama n-dimenzionalnih poliedara), *O rastavima skupova* (1957), *Sur quelques propriétés de groupes* (1966, O nekim osobinama grupa), kao i niz drugih. U svojoj knjizi *Uvod u algebru* (1961) na vlastiti način obrađuje odgovarajuće gradivo kao i dodatno gradivo unoseći vlastite dokaze i vlastita filozofska rasuđivanja. To se posebno može reći u vezi s problematikom praznog skupa i skupa prirodnih brojeva. Napisao je i niz stručnih i naučno-popularnih članaka u kojima pored ostalog na veoma zanimljiv način unosi svoja matematička i filozofska razmišljanja.

Viktor Sedmak po svom naučnom, stručnom i pedagoškom radu zauzima značajno mesto među matematičarima Hrvatske, posebno ako se uzme u obzir njegov život koji nije bio lak usled materijalnih i zdravstvenih prilika u kojima je živeo.

SEGEN DAVID

Hrvatski, odnosno jugoslovenski matematičar (1859 – 1927). Rođen je i umro je u Zagrebu.

Posle studija na Tehničkoj visokoj školi u Beču radio je kao profesor na zagrebačkoj realci; 1889, doktorirao je na Filozofskom fakultetu u Zagrebu s tezom iz područja teorije krivih u ravni. To je bila prva odbranjena disertacija iz matematičkih nauka na univerzitetu u Zagrebu. Bio je nastavnik na Filozofskom fakultetu u Zagrebu i profesor nacrtne geometrije na Šumarskoj akademiji, kao i dopisni član JAZU.

Ostavio je pet naučnih i četiri stručna dela. Zanimao se nastavom matematike, pa je objavio tri srednjoškolska udžbenika. U svom naučno-istraživačkom radu bavio se naročito pravolinijskim površima trećeg i četvrtog reda. O tome je objavio svoja istraživanja, uglavnom u „Radu JAZU". U radu *O vitoperim plohama četvrtog stupnja sa tri dvostruka pravca* (1891) proširuje istraživanja Kelija i Kremona o krivim površima. Nastavlja svoja istraživanja u radu *Obćenite vitopere plohe četvrtog stupnja* (1892) u kojem razmatra opšte krive površi četvrtog stepena, dok u radu *Jednoznačna projekcija vitopere plohe trećeg stupnja* (1894) razmatra jednoznačnu projekciju krive površi trećeg stepena. U svojoj raspravi *Prilog novijoj geometriji* (1899) bavi se krivama drugog reda. Tu određuje kad će dva projektivna pramena proizvesti jednu od tri kupina preseka, naime elipsu, parabolu i hiperbolu. Segen se u svojim istraživanjima orijentisao na istraživanja sintetičke geometrije, što je tada bilo sasvim novo područje istraživanja u Hrvatskoj.

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata (II)*.

SEVDIĆ MILENKO

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1904 – 1978). Rođen je u Sremskim Karlovcima, a umro je u Zagrebu.

Gimnaziju je završio u Vinkovcima. Diplomirao je matematiku na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Radio je kao profesor gimnazije u Bihaću. Ratno zarobljeništvo u trajanju od četiri godine prekinulo je njegov rad. Po oslobođenju veoma se angažovao svojim naučnim, pedagoškim i društvenim radom u obnovi i izgradnji. Bio je profesor pete gimnazije a zatim i partizanske gimnazije u Zagrebu, kao i profesor Više pedagoške škole. Bio je docent i profesor na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, gde je bio i dekan. Bolest ga je prerano udaljila iz aktivne službe. Svojim učenicima i studentima ostao je u sećanju kao izuzetan metodičar koji je osvajao zanimljivim i pristupačnim stilom.

Bio je jedan od osnivača lista „Matematičko-fizički list za učenike srednjih škola" i njegov prvi i glavni urednik. Napisao je oko 40 stručno-pedagoških članaka u raznim časopisima. Vrlo je poznat njegov rad *Pčelinje saće kao matematički problem*, kao i niz drugih članaka iz aritmetike i algebre, o Simpsonovoj formuli, o Diodoninom problemu, o šatorima i matematici i mnogi drugi.

Pored naučnog i nastavničkog rada potrebno je istaći niz njegovih udžbenika i priručnika (*Školski leksikon*) za škole raznih stupnjeva, recenzije, školske inspekcije, referate i predavanja na matematičkim kongresima i seminarima. Posebno se mora istaći da je bio vanredni popularizator matematike. U tom pogledu potrebno je spomenuti knjigu *Matematičar na izletu*, prevod Pereljmanove *Zanimljive matematike* i vrlo uspelu *Matematičku čitanku* koja je izašla u njegovoj redakciji. Napisao je nekoliko knjižica iz istorije matematike.

Celokupnim radom, organizacionim, stručno-pedagoškim i popularizatorskim u području matematike, Sevdić spada među najistaknutije predstavnike iz spomenutog rada. Kao takav ostavio je trajne tragove u istoriji jugoslovenske matematičke delatnosti.

Lit. Matematičko-fizički list za učenike srednjih škola br. 1, 1978/79, nekrolog povodom smrti Sevdića.

STAY (STOJKOVIĆ) BENEDIKT

Hrvatski, odn. jugoslovenski filozof matematike i prirodnih nauka (1714–1801). Rođen je u Dubrovniku, umro u Rimu.

On je čuveni pesnik na latinskom jeziku. Učio je u Dubrovniku i Rimu kod jezuita. Svršio je teologiju i zaredio se. U ranoj mladosti počeo se baviti matematikom i filozofijom a stihove je pisao na latinskom jeziku. Na visokoj papinskoj školi „Sapienza" („Sapijenca") u Rimu, postao je profesor retorike i istorije, kao i vršilac različitih službi u Vatikanu. Poznato je da su se u kući Marina Sorkočevića u Dubrovniku sastajali mnogi učeni ljudi koji su raspravljali o Dekartu (Descartes) i njegovoj prirodnoj filozofiji. Tu je Stay čitao svoje stihove o pojavi plime i oseke mora u okviru Dekartove prirodne filozofije, a slušaoci su ga podsticali da opeva celokupnu Dekartovu prirodnu filozofiju po uzoru na Lukrecija.

Uskoro je Stay u latinskim stihovima prikazao celokupnu Dekartovu prirodnu filozofiju pod naslovom *Šest knjiga filozofije iznesene u stihovima* (*Philosophiae versibus traditae libri sex*, 1744). Izgleda da je to bilo prvi put u istoriji Dubrovnika da se prišlo tumačenju i komentarisanju filozofije prirode različite od Aristotelove u samom Dubrovniku. Ovde se Dekartova prirodna filozofija uzima za objašnjenje pojava, zauzimajući mesto koje je do tada imala peripatetička prirodna filozofija. Heliocentrični sistem se ne uzima kao neka pretpostavka, već se organski uklapa u sklop prihvaćene prirodne filozofije. Tako je ovo Stayevo delo od važnog značaja za dubrovačku naučnu sredinu polovinom XVIII v. U tom se delu od fizičkih pojmova raspravlja o kretanju, gravitaciji, težini tela, plivanju, magnetskim i električnim silama, toploti, agregatnim stanjima, elastičnosti, atmosferskom pritisku, grmljavini, zvuku, jeci, optici, bojama, dugi i mnogim drugim. Tumače se pojave kretanja planeta, Kopernikov sistem, zvezde stajačice, za koje ističe da imaju svoje planete, objašnjava rotaciju i revoluciju Zemlje, pomrčine Sunca i Meseca, govori o obliku Zemlje i drugo. Raspravlja i o čisto filozofskim problemima.

Ruđer Bošković je posebno cenio Benedikta Staya i zalagao se da dođe u Rim. Podsticao ga je da ispeva još jednu poemu o Njutnovoj prirodnoj filozofiji. Tada u Dubrovniku nije bilo uticaja njutonizma. U zapadnim zemljama sredinom XVIII v. Dekartova prirodna filozofija gubila je pristaše i sve je više bilo njutonista. Bošković je Staya sigurno uverio o prednosti Njutnove prirodne filozofije pred Dekartovom, ali je Stay izbegavao da se prihvati posla opevanja Njutnove prirodne filozofije, jer mu je nedostajalo dosta znanja iz Njutnove fizike. Tu fiziku nije imao prilike da upozna u Dubrovniku. Zato je Bošković preuzeo na sebe da ga sistematski uputi u Njutnovu nauku. O tome je Bošković vrlo jasno pisao svom bratu Baru. Tako je Benedikt Stay dao delo u latinskim stihovima o Njutnovoj prirodnoj filozofiji pod naslovom *Deset knjiga novije filozofije iznese u stihovima* (*Philosophiae recentioris versibus traditae libri decem*). Prve tri knjige ovog dela, s dopunama i beleškama Ruđera Boškovića, izašle su u Rimu 1755, sledeće tri 1760. u Rimu i s Boškovićevim komentarima. Izdavanje preostale četiri knjige oteglo se zbog toga što Bošković nije stigao da napiše komentare. Kad se Bošković vratio u Italiju, posle duge odsutnosti, doneo je i preostale komentare, pa je ostatak dela objavljen 1792.

Boškovićevi komentari Stayevih stihova veoma su važni za upoznavanje Boškovićevih shvatanja o pojedinim naučnim i filozofskim pitanjima. To se naročito odnosi na pitanja vremena, prostora i kretanja. Tu se u potpunosti ogleda Boškovićevo relativističko gledanje na prostor, vreme i kretanje, koje je dosta u saglasnosti sa savremenim relativističkim gledanjem na te pojmove. U toku stvaranja poeme, Bošković je stalno svojim savetima i komentarima pomagao Staya, ali bez obzira na to velika je Stayeva zasluga što je dao vanredno delo o Njutnovoj prirodnoj filozofiji. „Ima on odličnu glavu za matematiku“, veli Bošković za Staya, „ali se nikada nije vežbao u iznalaženju i stvaranju novoga“. No, bez obzira na to Stayeva dela su odigrala važnu ulogu u afirmaciji savremenih naučnih i filozofskih shvatanja u dubrovačkoj sredini. On je svojim delima dao izvrsne latinske stihove i njima je utirao put novim shvatanjima u egzaktnim naukama. On ostaje u našoj istoriji matematike, odn. nauke, kao jedan od najistaknutijih filozofa matematike i fizike.

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (I).

STOJAKOVIĆ MIRKO

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar (1915 – 1985). Rođen je u Krepoljinu, srez homoljski, umro je u Beogradu.

Osnovnu školu završio je u Krepoljinu, gimnaziju u Beogradu. Teorijsku matematiku diplomirao je na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu 1938. Bio je profesor gimnazije u Subotici od 1939. do 1941. Okupaciju je proveo u Beogradu kao profesor Pete muške gimnazije. S jeseni 1944. stupio je u NOB, gde je neko vreme bio rukovodilac ekonomskog odseka Vojnog područja. Izvesno vreme bio je direktor i profesor gimnazije pri gardijskoj diviziji na Dedinju. Za asistenta matematike na Mašinskom fakultetu u Beogradu izabran je 1947, za docenta 1954, za vanrednog profesora Filozofskog fakulteta u Novom Sadu 1954. i za redovnog profesora 1959. Doktorirao je na Sveučilištu u Zagrebu 1954. sa tezom *Prilog teoriji matrica.*

Bio je šef katedre matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu i više godina dekan istog fakulteta. Učestvovao je u radu društava matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije i SAP Vojvodine, kao i u radu mnogih matematičkih komisija. Veoma je bio aktivan u radu mnogih naučno-popularnih i naučnih matematičkih časopisa. Bio je član SANU, društva matematičara Francuske, Američke matematičke asocijacije i Američkog društva matematičara, kao i referent međunarodnog referativnog žurnala „Mathematical Reviews“. Više godina bio je upravnik Matematičkog instituta u Beogradu. Za svoj društveni, nastavni i naučni rad dobio je mnoga javna priznanja. Rukovodio je nizom magistarskih i doktorskih disertacija.

Objavio je preko 160 naučnih, stručnih i naučno-popularnih radova, od toga preko 76 naučnih radova. Radovi su

objavljeni u našim i u inostranim časopisima i publikacijama. Istaći ćemo samo neke od njegovih radova.

U radu *Obraščenije matric kotoroe povladatsj pri primenenii metoda najmenših kvadratov* (1964) opisuje se postupak kojim se pomenute matrice mogu izračunati sistematski i uz manji utrošak mašinskog vremena. *A note on the general solution of the Riccati differential equation* (1964) se odnosi na jedno algebarsko pitanje opšteg rešenja Rikatijeve diferencijalne jednačine, dok se u radu *Osvrt na neke metodološke probleme algebre* (1964) raspravlja o upotrebi koordinata kao sredstava reprezentacije algebarskih struktura. U svom radu *Mihailo Petrović* (1868 – 1943) *serbian mathemathician creative originality and versatile personality* (1965) govori o ličnosti Mihaila Petrovića, a posebno o njegovoj matematičkoj fenomenologiji i radovima iz računara. Ovom radu slični su njegovi radovi *Naučni metod Mihaila Petrovića* (1968), *Petrovićeva modifikacija Grefeove metode za rešavanje algebarskih jednačina* (1968), kao i rad *Mihailo Petrović i njegovo delo* (1974).

Na formalan način obrađuje operator distanciranja i primenjuje rezultate na razvijanje diferentnog računa u svom radu *Sur l'algèbre distantielle* (1965), a u radu *On a symbolic formula for the derivative of composed functions* koristi metodu simboličnih operatora za izvođenje eksplicitne formule za izvode složene funkcije. Teorija koja objedinjuje stvarne i simbolične metode je teorija formalnih jezika u čemu je Stojaković u nas jedan od začetnika. U vezi sa tim značajan je njegov rad *O jednoj klasi formalnih jezika nad dvoslovnom azbukom* (1977). Matrični pristup poznatoj teoriji diferentnih jednačina jeste predmet rada *On a method of solution of finite difference equations* (1967), a u nizu svojih radova tretira metode linearne algebre u različitim problemima.

Rad *On the exponential property of the implication* (1972) bavi se osnovnom logičkom konektivnom implikacijom, gde je Stojaković prvi zapazio da implikacija ima osobine stepena i iz toga izveo nužne zaključke, dok je u radu *O jednoj metodi za optimizaciju Bulovih funkcija* (1973) pokazao kako se i za veliki broj promenljivih može lako odrediti minimalna disjunktivna forma za neku Bulovu funkciju. Od značaja je i njegov rad *O induktivnim sistemima* (1974) u kome govori o sistemima tipa Peana i nezavisnosti odgovarajućih aksioma.

Posebno treba istaći njegovu raspravu *Generalized inverse matrices* (1975) u kojoj se daje pregled razvitka jedne teorije koja počinje doktorskom disertacijom Stojakovića i nekim njegovim kasnijim radovima. Ova se teorija razvila u samostalnu matematičku oblast iz koje danas ima više monografija. Stojakovićeva teorija je citirana i dobro poznata među inostranim matematičarima.

Nizom svojih radova iz matrica, algebre i matematičke logike i kao rukovodilac Odseka za algebru, matematičku logiku i teoriju brojeva Matematičkog instituta u Beogradu, Stojaković je doprineo razvitku teorije matrica, algebre i matematičke logike. Zapaženi su i neki njegovi radovi posvećeni oblasti računarstva.

On je pisac više monografija od kojih se ističu *Elementi linearne algebre* (1961, 1970), *Teorija jednačina* (1966) i *Algoritmi i automati* (1972). Ove su monografije korisno poslužile za razvitak mlađih matematičara kod nas. U drugoj monografiji se prvi put u nas izlaže kompletna teorija Galoaa* koja predstavlja jedno od vrhunskih dostignuća u matematici uopšte. Napisao je takođe i nekoliko udžbenika i priručnika za nastavu matematike u srednjim školama i na univerzitetu, a to su na primer: *Analitička geometrija* (1948), *Trigonometrija* (1952), *Matematika* (1962), *Algebra I* (1956, 1970) i *Algebarske osnove teorije automata* (1970), kao i niz članaka metodsko-pedagoškog karaktera u raznim časopisima posvećenih problemima uspešnijeg izvođenja nastave matematike u našim školama.

Značajan je njegov rad u popularnom prikazivanju matematike putem različitih predavanja, kao i putem članaka u različitim časopisima. Ti su članci korisni za svakog koji želi da popularno spozna bit nekih tokova savremenog razvitka matematike.

Svojom aktivnošću u oblasti matematike, Stojaković je doprineo razvitku teorije matrica, zatim razvitku algebre, matematičke logike, ideja računarstva, automatike i popularnog prikazivanja matematike kod nas. Kao takav se potvrdio i istakao u jugoslovenskoj matematici.

Lit.: Referat za izbor akademika.

STOJANOVIĆ KOSTA

Srpski, odn. jugoslovenski matematičar i mehaničar (1867–1921). Rođen je u Aleksincu, umro je u Beogradu.

Završio je prirodno-matematički odsek na Velikoj školi u Beogradu 1889. Bio je profesor srednje škole u Nišu i Beogradu. Za profesorski ispit obradio je temu *Teorija anvelopa kod krivih linija i površina*. Boravi u Parizu 1893, gde je, po rečima Dragana Trifunovića, izuzetno mnogo zauzet osnovama matematike, filozofijom matematike i opštim željama da različite pojave i procese opiše matematičkim jezikom, posmatrajući ga kao prethodnika i savremenika matematičke fenomenologije Mihaila Petrovića (Dijalektika 3–4, Beograd, 1979). Za docenta Velike škole izabran je 1903. Održao je tada pristupno

predavanje *O matematičkoj fizici*. Kad je Velika škola pretvorena u Univerzitet, izabran je za vanrednog profesora. Predavao je mehaniku i delove matematičke fizike na Filozofskom fakultetu. Objavio je udžbenik *Mehanika* (1912), gde se prvi put kod nas izlaže teorija vektora. Značajan je njegov rad u rukopisu *O važnosti matematike u vaspitanju*, u kojem poglavlje o matematičkim sredstvima ima značenje analognih modela. Boravio je na studijama i u Lajpcigu da bi stekao što viši naučni stepen. Bio je državnik i političar. Izabran je za narodnog poslanika, a bio je i ministar narodne privrede. Posebno se bavio političko-ekonomskim problemima i živo je učestvovao u borbi Srbije za ekonomsku nezavisnost. Razvio je veliku delatnost na konferenciji mira u Parizu, gde je bio predsednik i glavni delegat ekonomsko-finansijske sekcije naše delegacije za mir. Umro je kao ministar finansija u jeku svog rada i svojih akcija za sređivanje naših finansija.

U „Glasu Srpske akademije nauka i umetnosti" objavio je radove iz primena matematike, tačnije iz matematičke fizike: *Potencijal otpora* (1903); *O uslovima integrabiliteta izvesne balističke jednačine* (1903); *O jednoj generalizaciji Bertranovog problema* (1905); *Obrtanje jednog tela oko utvrđene tačke u relativnom kretanju* (1906). Proučavao je nauku, filozofiju i druge radove Ruđera Boškovića. Ta svoja proučavanja objavio je u knjigama: *Atomistika – Jedan deo iz filozofije Ruđera Josifa Boškovića* (1891) i *Radovi Ruđera Josifa Boškovića na polju pesničkom, filozofskom i egzaktnim naukama* (1903). U izradi tih knjiga koristio je već objavljene radove o Boškoviću u Zagrebu, ali je značajno podvući da je on prvi prevodilac izvesnih delova iz glavnog Boškovićevog dela *Teorija prirodne filozofije*. On posmatra Boškovićevu nauku i filozofiju u svetlosti sveopšteg razvitka, pa se javlja kao istoričar nauke i filozofije i kao filozof nauke. Osvetljava Boškovića kao naučnika i filozofa, koji nam se svojim idejama predstavlja kao preteča pogleda što ih donose moderna nauka i filozofija. Stojanovićeva proučavanja Boškovića doprinose boljem i dubljem sagledavanju Boškovićevog položaja u razvitku nauke i filozofije.

Kao državnik, ekonomist i političar objavio je radove iz političke ekonomije. Tako rad *Osnovi teorije ekonomskih vrednosti* predstavlja krupan rezultat u njegovoj fenomenologiji. Bavio se proučavanjem uzajamnih odnosa naukâ, nastojeći da poveže ekonomske pojave sa fizičkim. U tom pogledu povezuje termodinamičke procese sa odnosima u ekonomskim pojavama. Zato je proučavao dela Marksa, kao i radove iz termodinamike Apela*, Poenkarea* i drugih. Koristeći se termodinamikom kao modelom nauke za objašnjenje ekonomskih pojava, rezultati do kojih je došao ušli su u sisteme fenomenologije koje je M. Petrović* utvrdio. Stojanović je bio u domenu kibernetičkog razmatranja pojava sa stanovišta fenomenologije i u tome se sastoji značaj njegovih analogija pojava ekonomskih, socijalnih, estetičkih, bioloških sa onima u termodinamici. U nizu časopisa Stojanović je objavio radove iz političke ekonomije u kojima je neprekidno prisutan duh matematičke fenomenologije.

Kao matematičar, mehaničar, filozof, državnik i ekonomist, Stojanović ostaje u ulozi značajne figure u istoriji naše nauke i našeg političkog i javnog života.

ŠKREBLIN STJEPAN

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1888–1982). Rođen je u Pregradi, u Hrvatskom zagorju, umro je u Zagrebu.

Završio je gimnaziju u Zagrebu. Diplomirao je matematiku 1913. na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Bio je godinu dana asistent Sveučilišta, a zatim profesor prve klasične gimnazije u Zagrebu. Od 1919. do 1945. radi u gimnazijama, kao i u Višoj pedagoškoj školi u Zagrebu: od 1945. do 1948. direktor je gimnazije, do 1950. profesor ženske gimnazije u Zagrebu, a zatim Više pedagoške škole u Zagrebu do penzije 1956. Od nastanka *Matematičko-fizičkog lista za učenike srednjih škola* 1950. pa do 1956. je njegov tehnički urednik, a zatim njegov glavni urednik.

Kao mladi profesor Škreblin ulazi u komisiju za reformu matematičke nastave. Zahtevalo se tada da se nastava matematike oslobodi neplodne sistematike i supremacije euklidske metode i da se u njoj naglasi važnost pojma funkcije i dovođenja učenika na prag infinitezimalnog računa. Povereno mu je tada da prevede Hočevarovu aritmetiku sa nemačkog jezika; on je, međutim, mislio da treba postupno pisati izvorne udžbenike. Tada je započeo njegov rad na udžbeničkoj lietraturi. Od 1925. do 1967. objavljeno je preko 150 izdanja njegovih srednjoškolskih udžbenika i priručnika. Posle oslobođenja sarađuje sa mlađim autorima. *Infinitezimalni račun* Škreblina je izvanredan i veoma uspeo pothvat u nas. Neki njegovi udžbenici izašli su na italijanskom i makedonskom jeziku. Glavne odlike njegovih udžbenika su funkcijsko prožimanje građe, grafičko predočavanje, tesno povezivanje pojedinih teorema i svestrano postupno-metodsko tretiranje zadataka, što je sve širilo matematičke vidokruge učenika i produbljivalo njihovu matematičku pismenost.

Objavio je niz članaka, prikaza i zadataka u raznim časopisima: „Nastavni vjesnik", „Glasnik matematičko-fizički i astronomski", „Nastava matematike i fizke" i „Matematičko--fizički list". Godine 1969, dodeljena mu je nagrada „Ivan Filipović", kao„... istaknutom profesoru srednjih i viših škola koji aktivno djeluje više od pola stoljeća kao nastavnik matematike, pisac udžbenika i urednik Matematičko-fizičkog lista za učenike srednjih škola, čime je zacrtao neizbrisivi trag u metodici matematike srednjih škola u nas". Godine 1971. primio je nagradu za životno delo „Davorin Trstenjak".

Škreblin je najplodniji pisac srednjoškolskih udžbenika u nas i jedan od najistaknutijih metodičara matematike za srednje škole. Uvek dobroćudan i skroman, ali izuzetno radan, znao je zanimljivo stupiti u kontakt sa svojim učenicima i studentima i pomoći im da shvate matematičku materiju i smisao matematičkog problema. Celom svojom navedenom aktivnošću ostavio je neizbrisive tragove u istoriji jugoslovenske matematike.

Lit. Matematičko-fizički list za učenike srednjih škola, br. 2, 1982/83, nekrolog povodom smrti Stjepana Škreblina.

ŠNAJDER VERA

Bosansko-hercegovački, odn. jugoslovenski matematičar (1904 – 1973). Rođena je i umrla u Sarajevu.

Osnovnu školu učila je u Sarajevu i klasičnu gimnaziju, koju je završila 1922. Diplomirala je teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu u Beogradu 1928. Školske 1929/30. bila je stipendista francuske vlade u Parizu, gde je učestvovala u radu seminara Poenkarea* (H. Poincaré). Od 1930. do 1932. bila je naučni saradnik Instituta za hidrodinamiku u Parizu. Više godina predavala je matematiku u srednjoj školi. Godine 1950. osnivalac je Katedre za matematiku na Filozofskom fakultetu u Sarajevu. Školske 1950/51. dekan je istog fakulteta. Naročitu aktivnost ispoljila je kao šef Katedre za matematiku, kao predsednik Društva matematičara, fizičara i astronoma Bosne i Hercegovine i kao jedan od organizatora IV kongresa matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, koji se održao u Sarajevu 1965. Na Filozofskom fakultetu u Sarajevu predavala je diferencijalnu geometriju, racionalnu mehaniku i povremeno linearnu algebru i višu algebru.

Važniji radovi: *Sur l'extension de la méthode de Hele Shaw aux mouvements cycliques* (O proširenju metoda Hele-a Shaw-a na cikličke pokrete, Comptes rendus, t. 192, p. 1703–1706, 1931); *Quelques remarques sur le principe de Hamilton dans la mécanique classique* (Neke primedbe na Hamiltonov princip u klasičnoj mehanici, SANU, 1960); *Predavanja iz racionalne mehanike s uvodom u tenzorski račun* (1963).

Lit. podaci Milica Šnajder – Huterer.

ULČAR JOŽE

Makedonski, odn. jugoslovenski matematičar, nacionalnosti slovenačke (1915 – 1967). Rođen je na Bledu, umro je u Skoplju.

Gimnaziju je završio u Kranju 1934, a diplomirao je matematiku sa odličnim uspehom na Filozofskom fakultetu u Ljubljani. Bio je profesor u gimnaziji u Murskoj Soboti, Strumici, Prizrenu, Bitolju i Skoplju. Godine 1946. izabran je za predavača na Filozofskom fakultetu u Skoplju, zatim za docenta i profesora na Prirodno-matematičkom fakultetu u Skoplju. Držao je predavanja iz analitičke geometrije, projektivne geometrije, nacrtne geometrije, osnova geometrije i diferencijalne geometrije. Pisao je udžbenike iz nacrtne i analitičke geometrije sa vektorskom algebrom. Bio je prorektor Univerziteta u Skoplju i jedan od intenzivnih pokretača društvenog rada matematičara na području Makedonije. Vrlo je aktivno učestvovao u radu Društva matematičara i fizičara Makedonije, kao i u Savezu društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Svoju stručnu i pedagošku aktivnost ispoljio je u ministarstvu prosvete SR Makedonije i u Republičkom zavodu za školstvo. Bio je više godina predsednik Komisije za polaganje profesorskih ispita iz matematike.

Objavio je niz naučnih i stručnih radova, pretežno iz geometrije, među kojima se ističu: *Edno geometrisko tolkuvanje na sredna krivina* (1949); *Geometriska konstrukcija na edna kvadratna korespondenca pomegu pravite od dve ramnini* (1951) i drugi. Objavio je i radove koji se nalaze između geometrije i topologije, kao: *O neincidentnim stranama nekih politopa* (1955); *O jednodimenzionalnim kompleksima* (1960). Poznati su njegovi ekspozitorni i nastavno-didaktički radovi: *Elementarno-geometriski preslikuvanja i grupen princip vo geometrijata* (1950); *Vektori* i *Velika imena u geometriji*, koje je objavio u knjizi *Uvođenje mladih u naučni rad*, u Beogradu. Treba naglasiti da su izlaganja Ulčara matematički strogo i pedagoški vešto izvedena. U tom pogledu su veoma pogodna za razvoj mladih matematičara.

Lit. Blagoj Popov, tekst o J. Ulčaru objavljen u „Biltenu na Društvoto na matematičarite i fizičarite na SRM“.

VARIĆAK VLADIMIR

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar, nacionalnosti srpske (1865 – 1942). Rođen je u Švici kraj Otočca, umro je u Zagrebu.

Nižu realku završio je u Petrinji, a višu u Zagrebu 1883. Nameravao je da studira tehniku. Međutim, upisao se na Filozofski fakultet u Zagrebu, gde je diplomirao matematiku i fiziku 1888. Od te godine, profesor je u realci u Zemunu, u nautičkoj školi u Bakru i u realkama u Osijeku i Zagrebu. U to vreme već se bavio matematičkim istraživanjima. Godine 1891. na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu odbranio je doktorsku disertaciju o nožišnim krivama, a 1895. dao je habilitacijski rad iz algebarske analize i sferne trigonometrije. Te godine dobio je odobrenje za predavanje na Sveučilištu. Godine 1898. postaje učitelj fizike i mehanike na novoj Šumarskoj akademiji u Zagrebu, a 1899. je najpre suplent matematike na Mudroslovnom fakultetu, odmah zatim vanredni profesor, a 1902. redovni profesor, gde je ostao do svoje penzije 1936, ali je na istom fakultetu predavao honorarno do smrti. Oženio se u Osijeku i imao je četiri sina: hemičara Svetozara, pravnika Vladimira, agronoma Milutina i biologa Bogdana. Objavio je preko 100 naučnih, stručnih i metodičko-pedagoških radova u domaćim i inostranim publikacijama i časopisima. Bio je dekan fakulteta, kao i rektor i prorektor Sveučilišta, redovni član JAZU i dopisni član SANU.

U toku života V. Varićaka dogodili su se u matematici značajni događaji, kao što su: izgradnja i procvat teorije skupova, topologije, teorije verovatnoće i statistike, matematičke logike, aksiomatike, teorije relativnosti, teorije tenzora, kvantne mehanike i drugih oblasti. Mnoge od ovih oblasti Varićak je predavao u svojim redovnim predavanjima, uz svoja uobičajena predavanja iz pojedinih oblasti matematičke analize (diferencijalni i integralni račun, teorija funkcija, diferencijalne jednačine, račun varijacija, eliptičke funkcije, algebarska analiza ili algebra). Tako je držao predavanja pod naslovom: teorija skupova; kompleksna multiplikacija; geometrija Lobačevskog i princip relativnosti; geometrija na kugli i na pseudosferi; račun verojatnosti; integralne jednačine; Lie-eva teorija integracije; račun tenzora. „Na malo kojem sveučilištu na svetu moglo se u to doba čuti o svim tim stvarima a pogotovo da bi ih sve predavala jedna ista osoba. Iz toga se vidi kako je naučni i pedagoški interes V. V. bio velik i kako je morao vrlo mnogo raditi, čitati i pisati da bi, osamljen, mogao biti u toku matematičkih zbivanja, prenositi ih na svoje slušače, naučno raditi itd.“, ističe prof. dr Đuro Kurepa, najistaknutiji učenik i saradnik V. Varićaka, u svom prikazu života i rada V. Varićaka, povodom stogodišnjice njegova rođenja.

Tri su naučne matematičke oblasti u kojim je Varićak aktivno učestvovao, a naime: *neeuklidska geometrija* (oko 12 radova); *teorija relativnosti* (oko 29 radova) i *istraživanja o Ruđeru Boškoviću* (oko 17 radova i knjiga). Iz različitih matematičkih područja objavio je oko 10 radova, a iz metodičko-pedagoških oblasti oko 36 radova.

Geometriju Lobačevskog izučavao je analitički, držeći se uglavnom euklidskih modela. U svom radu, *Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskog* (JAZU, 1903) izveo je relacije između Dekartovih koordinata u Euklidovom i u Lobačevskovom prostoru. Koristeći se ovim modelom rešavao je razna pitanja neeuklidske geometrije i objavio je više radova, u kojima je pretežno istraživao probleme prave u ravni i u prostoru. U opširnom radu *Prvi osnivači neeuklidske geometrije* (JAZU, 1907) izneo je svoja načelna gledišta o neeuklidskim geometrijama i osnovama geometrije uopšte koja su s tim u vezi. U radu apostrofira neka pitanja matematičke filozofije koja su nastala pojavom neeuklidske geometrije. Kant je držao da je Euklidova geometrija urođena ljudskom duhu, pa kao takva mora da bude jedino moguća. Varićak se protivi tome i piše: „Rekosmo, da kod postavljanja aksioma sudjeluje iskustvo, no geometrija se od drugih, recimo eksperimentalnih nauka razlikuje time, što se ona — kad su postavljeni aksiomi — pretvara odmah u čisto deduktivnu nauku. I ako joj osnove potječu iz iskustva, metoda je geometrije deduktivna. U tom će biti jedan razlog, što je mišljenje o apodiktičnoj sigurnosti geometrije tako učvršćeno i što se teško priviknuti na mišljenje, da je npr. Euklidov geometrijski sustav samo hipoteza, i to onakva kakve su hipoteze u fizici ili u mehanici, i da bi se za opisivanje realnih prostornih relacija tako isto mogao uzeti sustav Lobačevskoga ili koji drugi". Isto tako Varićak smatra da se uopšte ne može odlučiti je li naš dosadašnji iskustveni prostor euklidski ili neeuklidski, pa kaže: „Hipoteza je Lobačevskoga ne samo logički, već i empirički ravnopravna Euklidovoj. No Euklidova hipoteza, koja se u historijskom razvoju geometrije pojavila prva, ima u primjenama odlučnu prednost, jer je mnogo jednostavnija. Zadovoljava dakle zahtjev ekonomije mišljenja bolje nego li hipoteza Lobačevskoga. Zato ćemo se njom jedinom služiti u praktičnim primjenama geometrije. Ali principijelno njeno preimućstvo slomljeno je zauvijek." Izučavao je Lie-eove transformacije u ravni Lobačevskoga, kao i algebru vektora u prostoru Lobačevskoga.

Uočavao je mnoge analogije koje postoje između teorije relativnosti i geometrije Lobačevskoga, pa su u njemu sazrevale ideje o vezi negalilejevske mehanike sa neeuklidskim prostorom. To ga je potaklo na pomisao da se Ajnštajnove formule mogu transformisati i dati im geometrijsko, neeuklidsko tumačenje. Od 1910. objavio je više radova o tim pitanjima, naročito u časopisu „Physikalische Zeitschrift" („Fizički časopis"). Zaključio je da se svi izrazi u teoriji relativnosti mogu tumačiti

neeuklidskom geometrijom isto tako što se klasična fizika može tumačiti u okviru Euklidove geometrije. Sledeći takvo uverenje, Varićak je u nekoliko radova obradio sastavljanje brzina, aberaciju svetla, Doplerov princip, odbijanje svetla od pokretnog ogledala, vektorsku algebru, dinamiku materijalne tačke, Lorencovu transformaciju, transformaciju Tamakija i transformaciju elektromagnetskog polja. Sistematski pregled svih svojih istraživanja o teoriji relativnosti i neeuklidskoj geometriji, Varićak je dao u knjizi *Darstellung der Relativitätstheorie im dreidimensionalen Lobatschefskijschen Raume* (*Prikazivanje teorije relativiteta u trodimenzionalnom prostoru Lobačevskoga*, 1924). Dotičući se kosmološke slike sveta, on u toj knjizi ističe da se za opisivanje prirodnih pojava može koristiti bilo koji geometrijski sistem, ali se uvek biraju one geometrijske aksiome koje vode na jednostavne fizičke zakone, pa zato kaže: „Za geometrijski sistem, koji nam daje najjednostavnije prirodne zakone, možemo mi također reći, da ga zahtijeva priroda, da taj na razmatranom mjestu svijeta zbiljski stoji, ili da prostor na tom mjestu posjeduje tu strukturu". Po Varićaku, fizički prostor ima strukturu geometrije Lobačevskoga, ali su mišljenja o tome kakve je strukture fizički prostor bila vrlo različita u Varićakovo doba, pa su takva i danas, te se uopšte ne može govoriti o definitivnom rešenju toga problema. Njegove su zasluge u pogledu isticanja i korišćenja analogije između interpretacije teorije relativnosti geometrijom Lobačevskoga i interpretacije klasične fizike Euklidovom geometrijom dosta velike, jer je on bio skoro prvi koji ju je istakao. U svakom slučaju njegova je velika zasluga što je podstakao neka pitanja koja ni do danas nisu bespredmetna.

Varićak se natjecao, 1927. za nagradu Lobačevskoga koju je raspisao Univerzitet u Kazanu, pored niza drugih istaknutih matematičara toga doba. Referat o Varićakovim radovima dao je sovjetski matematičar A. P. Koteljnikov i predložio je da mu se dodeli nagrada. Međutim, nagradu je dobio H. Vejl (H. Weyl) na osnovu referata D. Hilberta*. Njegovi radovi iz neeuklidske geometrije i teorije relativnosti imali su velikog odjeka u međunarodnim naučnim krugovima.

Varićak se bavio vrlo intenzivno istraživanjima života i rada našeg velikog matematičara, astronoma i fizičara Ruđera Boškovića. Na to ga je podstakla dvestogodišnjica Boškovićevog rođenja 1911, kad je Varićak bio na vrhuncu svog stvaranja. U vezi s tim proučavao je istorijsku građu u Milanu, Rimu, Beču i na drugim mestima, pa je objavio dvadesetak radova. Analizi Boškovićevih matematičkih radova prilazi sa najvećom strogošću i bio je među prvima koji su razvijali istraživanja istorije matematike ispravnim metodološkim putem. Među tim radovima ističe se rad *O dvjestogodišnjici rođenja Ruđera J. Boškovića: Matematički rad Boškovićev. Dio I k tome dodano: Ulomak Boškovićeve korespondencije G. V. Schiaparelli o Boškoviću. Boškovićeve bilješke o apsolutnom i* *relativnom kretanju. Drugi ulomak Boškovićeve korespondencije* (Zagreb, 1910, 1911, 1912).

Mnogo i stvaralački bavio se metodičko-pedagoškim problemima matematike u srednjoj školi. U vezi sa tim napisao je niz radova, koje je objavio u *Nastavnom vjesniku* i na drugim mestima. Ti su radovi od velikog značaja za nastavu matematike u srednjoj školi.

Velika je uloga Varićaka za potvrdu naših naučnih istraživanja u svetu. On je tim istraživanjima u matematici postigao međunarodno priznanje. Posedovao je široku filozofsku i matematičku kulturu. Delovao je ne samo kao čisti matematičar, već i kao istoričar, metodolog i filozof matematike. On je postavio temelje nove matematičke škole koja je odigrala značajnu ulogu u razvitku matematičkih nauka u nas.

Lit. podaci iz tekstova o V. Varićaku Đura Kurepe i Žarka Dadića.

VEGA JURIJ

Slovenački, odn. jugoslovenski matematičar, artiljerijski ekspert i strategist (1754–1802). Rođen je u Zagorici kod Moravča, umro je u Nusdorfu kod Beča.

Sin slovenačkog seljaka Jerneja Vege i njegove druge žene Jelene, završio je jezuitsku gimnaziju u Ljubljani od 1767. do 1773. Posle dve godine, kao apsolvirani filozof, završio je licej u Ljubljani. Njegovo školovanje u Ljubljani, posle očeve smrti 1760, bilo je dosta teško. Uživao je tuđu potporu. Njegov profesor matematike Mafeij potpomagao ga je, uviđajući njegovu matematičku darovitost, što je Vega javno izrazio, kad mu je posvetio drugo izdanje svog glavnog matematičkog dela. „Moram svetu javno kazati, da sam utemeljio svoju obrazovanost na ljubljanskom liceju... Pristup na to učilište spada među najsrećnije događaje u mom životu", ističe Vega u jednoj svojoj matematičkoj knjizi. Posle završenih studija bio je navigacioni inženjer u Austriji, a 1780. stupio je u artiljerijski puk. Ubrzo je dobio čin potporučnika i bila mu je poverena služba učitelja matematike u artiljerijskoj školi. Tu službu obavljao je jedanaest godina, a 1786. postao je profesor matematike u bombarderskom odeljenju.

Uviđajući da učenici artiljerijskih škola nemaju odgovarajućih udžbenika iz matematike, Vega je napisao predavanja iz matematike u četiri sveske (*Vorlesungen über die Mathematik*, 1782, 1784, 1788, 1800). U ovom delu, na prikladan, stručno-naučni način izložio je osnove algebre, infinitezimalnog računa

i diferencijalnih jednačina, osnove mehanike za artiljerce, hidrostatike, aerostatike i hidraulike. Delo je imalo više izdanja. Veoma je dobro primljeno u međunarodnim razmerama. Smatrano je jednim od najboljih dela te vrste, namenjenih obrazovanju vojnih stručnjaka, o kome se poznati istoričar matematike M. Kantor pohvalno izrazio. Vega je objavio i nekoliko posebnih spisa iz svojih predavanja namenjenih matematici, kao i neke rasprave i spise, koji obuhvataju matematiku, fiziku, astronomiju i neka posebna pitanja. Nemački naučni časopisi dali su izvode iz nekih od tih rasprava i odgovarajuće ocene. Zanimljivo je istaći da je Vega u jednoj raspravi dao broj π na 140 decimala.

Vega trajno ostaje u istoriji matematike po svojim logaritamskim tablicama. Dugo ih je i umno pripremao, da bi ih, pored drugih numeričkih tablica i nekih radova iz numeričke analize, objavio na latinskom i nemačkom jeziku, u Lajpcigu 1794, kao svoje najznačajnije delo, *Potpuna zbirka logaritama* (*Thesaurus logarithmorum completus – Vollständige Sammlung grösserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln*), koje predstavlja tablice logaritama sa deset decimala. Pre ovog dela objavio je logaritamske tablice na sedam decimala, nastojeći uvek da postigne u računanju što veće olakšice. Delo o kome je reč dobilo je međunarodno priznanje u stručnim i naučnim krugovima. Do danas je doživelo mnogo izdanja. Prevedeno je na devet evropskih jezika: na engleski, češki, danski, francuski, holandski, italijanski, norveški, ruski i španski. Vegine logaritamske tablice se i danas koriste u teorijske i praktične svrhe i danas se još uvek prevode. Vrlo istaknuti francuski astronom Laland, intimni prijatelj Ruđera Boškovića, pisao je Vegi da su njegovi logaritmi najdragocenija zbirka tablica koju je ikad video, naglašavajući u istom pismu priznanje čitavog sveta i budućih pokolenja, koja će nužno ponavljati njegovo ime. Ruski istoričar matematike I. J. Depman podvlači „da se mnogo ruskih izdanja logaritamskih tablica u XIX i XX stoleću zasniva uglavnom na Veginim tablicama, pa je po tome jasan značaj dela tog slovenačkog matematičara za rusku školu". Matematičar i poznati istoričar matematike A. G. Kestner u svojoj recenziji o Veginim logaritamskim tablicama veli: „Pri ovom delu čovek pomisli na Arhimeda iz Sirakuze i zaželi, da matematičar i domovina dožive još bolju sudbinu", a G. S. Kligel u matematičkom rečniku piše: „Delo zaslužuje naslov: blago svih logaritama", dok Laland naglašava: „Delo je pravo blago, s kojim je Vega stvorio za nauku veliku uslugu". Veliki Gaus takođe pravi svoj osvrt na Vegine logaritamske tablice. I znameniti astronom Zah napisao je pohvalnu recenziju o Veginim logaritamskim tablicama, kojom se Vega ponosio kao dokazom svog stručnog i naučnog uspeha.

Vega je potpuno odobravao francuski metarski sistem. Bio je među prvima u Austriji koji je nastojao da se taj sistem usvoji. Laland mu je o tom sistemu pružio podatke, a Depman tvrdi da je Vega bio prvi propagandist metarskog sistema van Francuske i da je „Vegino propagiranje metarskog sistema u to doba dokaz njegovih naprednih pogleda na to pitanje".

Vega se istakao kao vojni stručnjak, odn. vojni inžinjer svoga vremena. Prilikom opsedanja Beograda 1788, pod generalom Laudonom, Vega je teškim topovima, koji su usavršeni prema njegovim nacrtima, uspešno bombardovao Kalemegdansku tvrđavu tako da su se Turci morali predati. I na drugim bojištima došla je do izražaja njegova vojna i tehnička stručnost.

Njegovom naučnom delu dato je priznanje raznim počastima, koje su mu iskazale razna naučna društva i ustanove. Bio je član Akademije korisnih nauka u Majncu, Fizičko-matematičkog društva u Erfurtu, Češkog društva nauka u Pragu i Pruske akademije nauka u Berlinu, kao i dopisni član Velikobritanskog društva nauka u Getingenu. Za svoje vojničke zasluge dobio je titulu barona. Jedan krater na Mesecu nazvan je njegovim imenom.

Lit. Jože Povšič, *Bibliografija Jurija Vege.*

Naslovna strana prvih Veginih logaritamskih tablica.

VERNIĆ RADOVAN

Hrvatski odn. jugoslovenski matematičar i astronom (1914–1958). Rođen je u Bihaću, umro je u Zagrebu.

Gimnaziju je završio u Zagrebu i diplomirao je na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu iz grupe koja je obuhvatala teorijsku matematiku, racionalnu i nebesku mehaniku i teorijsku astronomiju. Bio je profesor gimnazije u Zagrebu i Mostaru, asistent Matematičkog zavoda Filozofskog fakulteta i Geofizičkog zavoda u Zagrebu, kao i upravitelj ovog zavoda. Za doktora matematičkih nauka promovisan je 1952. na osnovu disertacije *Diskusija Sundmanova rješenja problema triju tijela*, „koju je kao vrlo važan prilog u povijesti tog starog problema izdala 1954. Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti u Zagrebu". Za docenta za mehaniku neba na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu izabran je 1953, a 1956. za profesora istog fakulteta. Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu osnovao je Kabinet za dinamičku astronomiju, jer mu je napredak astronomije uvek bio na umu. Intenzivno je radio na razvitku astrofizike i osnivanju opservatorija za sveučilišne svrhe, ali ga je u tome prerana smrt prekinula. Bio je član Nacionalnog komiteta za astronomiju pri Akademijskom savetu Jugoslavije, kao i član Komisije za mehaniku neba Internacionalne astronomske unije. Aktivno je učestvovao u radu Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Hrvatske i bio je jedan od začetnika Centra za numerička istraživanja u okviru drugog Odjela Akademije. Sudelovao je i kod izrade udžbenika za srednje škole. Bio je dopisni član JAZU.

„Bogat je bio naučni rad Radovana Vernića publiciran u onih deset godina, od 1947–1957. Odabirao je opsežne probleme, da ih proradi i teoretski i s obzirom na primjene. U Verniću su se sretno spojile oštrina i prodornost istraživačkog dara sa sklonosti i spretnosti za numeričko obrađivanje podataka, kombinacija vrlo rijetka. O tome svjedoči već prva velika radnja iz dinamičke meteorologije o *Termodinamičkim karakteristikama zračnih masa* u kojoj popraćuje termodinamičke izvode bogatom numeričkom i grafičkom diskusijom s ciljem, da izvede termodinamičke karakteristike velikih evropskih zračnih masa i protumači specifične neke pojave, kao tzv. evropski monsun." Željko Marković ističe da se „ista karakteristika Vernićeva razabira i u drugoj, najvažnijoj fazi njegova stvaranja, u radnjama iz mehanike neba posvećenim problemu triju i više tijela", gde je u tom smeru njegova doktorska disertacija osnovna radnja. Ističe se dalje da je Vernić izveo i numeričke račune u vezi sa svojim rešavanjem problema tri i više tela, najpre kombinovanom metodom rekursije i iteracije i da je kasnije uvideo da je dovoljna i sama rekursija. Sve njegove radnje sadrže mnoštvo drugih rezultata, podvlači Ž. Marković, kao i niz kritičkih važnih primedaba, ispravljanja netačnosti, opširne i potpune bibliografske podatke i da smo „prerano izgubili čovjeka osobitih i rijetkih sposobnosti".

Lit. Željko Marković, tekst povodom smrti R. Vernića u „Glasniku matematičko-fizičko-astronomskom", br. 4/1958.

VRANIĆ VLADIMIR

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1896 – 1976). Rodio se i umro u Zagrebu.

Osnovnu školu i gimnaziju završio je u Zagrebu. Na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu studirao je matematiku i fiziku, gde je i diplomirao. Na temelju strogih ispita i disertacije *Prilog novijim istraživanjima o singularitetima funkcija definiranih beskonačnim redovima*, stekao je 1920. stepen doktora filozofije. Na osnovu habilitacije postao je privatni docent 1924, na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu. Izučavao je aktuarsku matematiku u Beču i bio je ovlašćeni aktuar, i kao takav delovao je kao prokurist i predstojnik Odjela za osiguranje života u Jadranskom osiguravajućem društvu. Bio je profesor gimnazije, docent na Tehničkoj visokoj školi, a držao je predavanja na Tehničkom fakultetu i u Ekonomsko-komercijalnoj visokoj školi, gde je razrešen dužnosti 1941. Učesnik je NOB-a. Posle oslobođenja postavljen je za docenta na Ekonomsko-komercijalnoj školi, a u isto vreme predavao je na Tehničkom fakultetu trigonometriju, numeričko računanje i nomografiju. Za redovnog profesora Ekonomskog fakulteta izabran je 1953, a na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu predavao je teoriju verovatnoće i matematičku statistiku. Bio je profesor Tehničkog i kasnije Građevinskog fakulteta. Spomenimo da je bio dekan Ekonomskog i Arhitektonsko-građevinsko-geodetskog fakulteta, a sarađivao je i predsedavao u raznim ispitnim i drugim komisijama, konferencijama i društvima. Sudelovao je na mnogim domaćim i međunarodnim kongresima i simpozijumima sa svojim naučnim referatima. Održao je veliki broj javnih predavanja iz teorije verovatnoće i matematičke statistike i numeričke matematike. Vranić je kao matematičar i društveni radnik ispoljio posebnu aktivnost u Društvu matematičara, fizičara i astronoma Hrvatske i u Savezu društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Bio je dopisni član JAZU, zatim saradnik u Matematičkoj sekciji Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke i direktor Centra za numerička istraživanja iste Akademije. Bio je redovni član Internacionalnog statističkog instituta u Hagu, počasni član Građevinskog fakulteta u Zagrebu, a dobio je priznanje za doprinos unapređenju i razvitku statističke službe u Jugoslaviji, a zatim povelju Saveza društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije povodom 25. godišnjice Saveza, kao i mnoga druga priznanja.

Vranić je napisao i objavio preko 130 naučnih, stručnih i popularnih članaka i knjiga. Među udžbenicima ističu se *Osnovi financijske i aktuarske matematike* (1946), *Osnovi više matematike* (1949), *Privredna matematika* (1949), *Matematika za ekonomiste I i II* (1954, 1958, 1962 i 1967), *Vjerojatnost i statistika* (1958, 1965, 1971) i *Statističke metode* (sa dr Vladimirom Serdarom, 1960). Njegov naučni rad tekao je paralelno sa njegovim drugim delatnostima. Njegova se doktorska disertacija odnosila na teoriju redova. Došao je do zanimljivih i originalnih rezultata u sfernoj trigonometriji, koji se mogu videti u njegovim radovima *O izvođenju formula sferne trigonometrije s pomoću stereografske projekcije* (1927 – 1928) i *Über die Ableitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie* (*O izvođenju formula sferne trigonometrije*, 1928). Citiraju se njegovi nomogrami za rešavanje jednačina trećeg stepena, na šta se odnose njegovi radovi *Nomogram der allgemeinen Gleichung dritten Grades* (*Nomogram opšte jednačine trećeg stepena*, 1931) i *Nomogram der allgemeinen Gleichung dritten Grades II* (*Nomogram opšte jednačine trećeg stepena* II, 1931). Izučavao je primenu dualiteta i nomografskih metoda u teoriji linearne i nelinearne korelacije, objavivši nekoliko radova na tu temu. Bavio se takođe slogovnom strukturom našeg jezika. Na tu temu odnosi se njegov rad u zajednici sa V. Matkovićem *Contribution to a statistical theory of Croato-Serbian* (*Prilog statističkoj teoriji hrvatsko-srpskog jezika*, 1968).

Redovna nastavna delatnost Vranića odvijala se na Tehničkom, odn. Građevinskom fakultetu, a zatim na Ekonomskom i Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, ali je predavao i na poslediplomskim studijama na Građevinskom, na Prirodoslovno-matematičkom, na Elektrotehničkom fakultetu i u Institutu „Ruđer Bošković" u Zagrebu, kao i u Jugoslavenskom institutu za ekonomska istraživanja i na Građevinskom fakultetu u Beogradu. Bio je mentor za nekoliko doktorskih i magistarskih radova. Veliku pažnju je obraćao na numeričku matematiku i na teoriju verovatnoće i matematičke statistike i svojim naučnim i nastavnim radom dao je važan doprinos bržem razvitku tih oblasti.

Lit. D. Blanuša, referat povodom smrti V. Vranića („Glasnik matem.-fiz.-astr.", No 1, 1977).

VUČKIĆ MILENKO

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar i istoričar matematike (1911 – 1981). Rođen je u Osijeku, umro je u Zagrebu.

Gimnaziju je završio u Zagrebu 1929. Diplomirao je teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu 1933. Bio je deset godina profesor gimnazija u Peći, Kraljevu, Sisku, Krku i Osijeku. Godine 1947. izabran je za asistenta u Matematičkom zavodu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, gde je bio i nastavnik. Doktorsku disertaciju *Matematički rad Hermanna Schefflera* odbranio je 1966. U svom dugogodišnjem nastavnom radu odlikovao se lucidnom spremom iz metodike i didaktike. Bio je tihi radnik, blage i prijatne ćudi, ukazujući svakome pomoć, uprkos svom slabom zdravlju. Svoje slobodno vreme posvećivao je bilo radu sa svojim studentima bilo radu u knjižnici Matematičkog zavoda. Generacije studenata matematike pamtiće njegove ljudske osobine i njegove poruke koje rođeni vaspitači umeju usaditi u svoje učenike. Bio je istaknuti bibliofil, enciklopedista i erudita na tlu matematike. Područje njegovog naučnog i nastavnog rada bila je istorija matematike, čemu su posvećeni njegovi radovi.

Napisao je i objavio više naučnih i stručnih radova, kao i mnoštvo beležaka u raznim edicijama. Od naučno-stručnih radova ističu se *Spomenica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu* (1978). *Nastavni i znanstveni rad na području matematičkih znanosti na Mudroslovnom, Filozofskom i Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu u razdoblju 1876 – 1976* (1977) i *Nastavni i znanstveni rad na području matematičkih znanosti na Mudroslovnom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu u razdoblju 1876 – 1899* (1980). U tim radovima je iscrpno, sa mnoštvom podataka izložio kako se organizovala nastavna i naučna delatnost na Sveučilištu u Zagrebu. Tu je veoma koncizno prikazan rad autora koji su kao univerzitetski nastavnici i naučnici doprineli da se pomenuta delatnost razvije do sadašnjih razmera, da bude savremena i da je u toku razvitka savremene matematike. Ti radovi se neće moći zaobići kada se bude pisao razvitak matematike u Jugoslaviji. Pored doktorske disertacije i njegovi naučni radovi *Godfrey Harold Hardy* (1948) i *Poncelet i teorija najbolje aproksimacije* (1951) pokazuju da je imao široku matematičku kulturu. Bio je vrstan poznavalac istorijskih tokova razvitka matematike. On ih je naučno i sa puno pedagoško-metodičkog smisla izlagao studentima sa ciljem da bolje i dublje shvate matematiku i njenu ulogu u spoznaji sveta.

Lit. „Glasnik matematičko-fizičko-astronomski" br. 2/1981.

VUKIĆEVIĆ PETAR

Srpski, odnosno jugoslovenski, matematičar (1862 –).

Posle završetka srednje škole studirao je Veliku školu u Beogradu. Završio je Prirodno-matematički odsek Velike škole. U studijama se isticao kao student. Bio je pripravni asistent za teorijsku matematiku kod Dimitrija Nešića, a zatim asistent kod Bogdana Gavrilovića. Na konkursu za profesora Velike škole nije uspeo (na tom je konkursu izabran Mihailo Petrović). Bio je sekretar u Ministarstvu prosvete i profesor realke u Beogradu. Radio je posle prvog svetskog rata, kao inspektor za nastavu matematike u Ministarstvu prosvete. Učestvovao je vrlo intenzivno u rešavanju problema nastave u srednjim školama i u radu Profesorskog društva. Napisao je srednjoškolske udžbenike: *Geometrija za više razrede srednjih škola*, *Algebra i aritmetika za više razrede srednjih škola* i *Politička računica*, za koje je jedan od referenata bio Mihailo Petrović.

Boravio je na studijama u Berlinu gde je 1894. odbranio doktorsku disertaciju *Die Invarianten der linearen homogenen Differentialgleichungen n-ter Ordnung* (*Invarijante linearnih homogenih diferencijalnih jednačina n-tog reda*). Rezultati sadržani u ovoj disertaciji ušli su u poznatu monografiju L. Schlesingera, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* (Berlin – Leipzig, 1875 – 1897). Njegove matematičke sposobnosti na Berlinskom univerzitetu su visoko ocenjene. Ostali značajni radovi: *Smena promenljivih* (1898); *Tri principa sa primenom o izračunavanjima zapremina*; (1900); *Anvelope krivih linija i površina* (1905) i *Kalendarsko pitanje* (1932).

Vukićević je bio jedan od talentovanih matematičara na koga je neuspeh na izboru za profesora Velike škole znatno negativno uticao i udaljio ga od naučnog rada.

Lit. Dragan Trifunović, *Letopis života i rada Mihaila Petrovića*.

WOLFSTEIN JOSIP

Hrvatski, odn. jugoslovenski matematičar (1776 – 1859). Rođen je u Karlovcu, umro je verovatno u Pešti.

O njemu se za sada zna vrlo malo, pogotovo o njegovom naučnom radu. Studirao je u Italiji, na Univerzitetu u Paviji, gde je između ostalih slušao predavanja iz eksperimentalne fizike kod Aleksandra Volte. Bio je profesor u osječkoj gimnaziji, pa je najverovatnije došao u Košice. Tu je 1800. objavljena njegova knjiga o teoriji kretanja pod naslovom *Uvod u teoriju kretanja* (*Introductio in theoriam motus*, 1800). Tu je verovatno bio profesor u gimnaziji. Postao je profesor na Košičkoj akademiji 1810, a profesor više matematike na Univerzitetu u Pešti 1820. Na tom je univerzitetu bio još 1840, jer su te godine izašle njegove teze iz čiste i praktične geometrije.

Volfštajn se bavio pretežno matematikom. Objavio je sledeće priručnike: *Elementi čiste geometrije* (*Elementa geometriae purae*, 1811); *Elementi obiju trigonometrija* (*Elementa trigonometriae utriusque*, 1811); *Uvod u čistu matematiku* (*Introductio in mathesim puram*, 1830 – 1833).

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (I).

ZAHRADNIK KAREL

Hrvatski, odn. jugoslovenski i češki matematičar, češke nacionalnosti (1848 – 1916). Rođen je u Litomyšlu u Českoj, umro je u Brnu.

Osnovnu i srednju školu završio je u rodnom mestu. Studirao je na Visokoj tehničkoj školi i Univerzitetu u Pragu Postigao je doktorat filozofije 1874. Bio je asistent i predavač na Visokoj tehničkoj školi u Pragu od 1874. do 1876. Neko vreme bio je i profesor u srednjoj školi. Za redovnog profesora na Univerzitetu u Zagrebu postavljen je 1876. U Moravsku se vratio 1899. Tu je postavljen za jednog od prva četiri profesora novootvorene Visoke tehničke škole u Brnu. Bio je redovni član JAZU i dopisni član SANU.

Može se reći da dolazak Zahradnika u Zagreb 1876. označava početak nastave matematike na Univerzitetu u Zagrebu, kao i naučnog rada u matematici. U veoma odsudnom času, kad je tako reći započeo rad Univerziteta u Zagrebu, pružena je tom radu značajna i nesebična pomoć Univerziteta u Pragu. Tada stiže Zahradnik u Zagreb i otpočinje svoju matematičku aktivnost na Univerzitetu.

On je započeo naučnu aktivnost u Društvu čeških matematičara u Pragu. U početku bio je pod velikim uticajem matematičara F. J. Studničkog i E. Vejera. Radovi E. Vejera o algebarskim krivama na njega su toliko uticali da je gotovo celi svoj naučnoistraživački rad posvetio toj problematici. Svoj naučni rad iz analitičke geometrije i teorije kubnih krivih započeo je 1872, a pošto je došao u Zagreb bavio se uglavnom algebarskim krivama. U „Radu JAZU" objavio je

18 naučnih rasprava između 1877. i 1897. Ti radovi pretežno pripadaju problematici algebarskih krivih. Pomenimo neke od tih Zahradnikovih rasprava: *O skladu kriterija konvergentivnosti i divergentivnosti beskonačnih redova*; *O nekih krivuljah izvedenih iz sjeka čunja*; *Neke vlastitosti trojima tačaka oskulacije kod lemniskate*; *Vlastitosti nekih trojima tačaka na cisoidi*; *Vlastitosti trojima oskulacije kod strophoide*; *Teorija parabole na temelju racionalnog parametra*; *Prilog k teoriji kubične involucije na čunosjeku*; *Prilog k teoriji cisoide*; *Prilog k teoriji krivulja trećeg stupnja i trećeg razreda*; *Prilog teoriji čunjosječica*. Značaj rasprava o kojima je ovde reč, vidi se iz izveštaja koji je o njima podneo Vladimir Varićak u „Radu JAZU". Tu on, između ostalog, kaže: „Njegove u Radu objavljene rasprave su, uz male iznimke, geometrijskog sadržaja. Kao predmet svojih istraživanja uzima Zahradnik specijalne racionalne krivulje na osnovu zgodno odabranog parametra. Tako on iscrpno obrađuje teoriju parabole, istražuje mjesto konstantnih dodirnih trokuta kod čunjosječnica i pronalazi nova svojstva njihovih tangenata.... Od racionalnih krivulja četvrtog reda obrađena je u Radu lemniskata, napose svojstva oskulacijskih trojki na njoj. Sa Zahradnikovim imenom povezan je jedan način tvorbe cisoide... Istaći ćemo još na kraju da je u tri Zahradnikove rasprave o ravnim krivuljama učinjen vrlo uspjeli pokušaj da se diferencijalna geometrija ravnih krivulja obrađuje u tangencijalnim koordinatama." Zahradnik je napisao, uzev ukupno, 103 rada. On je autor i srednjoškolskih udžbenika.

Problematika kojom se bavio K. Zahradnik bila je aktuelna. Njegovim radovima posvetili su Đino Lorija 1902. i Gomes Teikseri (Teixerie) 1908. u svojim velikim monografijama o specijalnim algebarskim i transcendentnim krivama dosta pažnje. Zanimljivo je napomenuti da su Juraj Majcen i Vladimir Varićak neko vreme bili pod uticajem Zahradnikovih istraživanja.

Lit. Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* (II).

ŽIVKOVIĆ PETAR

Srpski, odn. jugoslovenski, matematičar (1847 – 1923). Rođen je u Zaječaru, umro je u Beogradu.

Gimnaziju je učio u Negotinu, Zaječaru i Kragujevcu. Završio tri godine tehnike na Velikoj školi u Beogradu. Studirao je na Politehnici u Cirihu. Prvu godinu učio je u mehaničko-tehničkoj školi i zatim tri godine za nastavnika matematike. Vratio se u Srbiju 1871. Postavljen je za suplenta učiteljske škole u Kragujevcu. Vrlo poletan za srednju nastavu, duže vremena bio je profesor matematike u realkama u Užicu, Valjevu i Beogradu. Jedno vreme bio je direktor realke u Beogradu. Veoma je bio aktivan u radu Prosvetnog saveta. Bio je član Srpskog učenog društva i pozvan da radi na Velikoj školi u Beogradu, ali nije hteo da napusti realku. Objavio je veći broj referata o udžbenicima u „Prosvetnom glasniku" i „Nastavniku". Izabran je za dopisnog člana SANU 1894. Da dođe za profesora matematike na Velikoj školi posebno se zalagao Ljubomir Klerić, profesor mehanike u istoj školi.

Živković je objavio sledeće rasprave u „Glasniku Srpskog učenog društva": *Grafičko predstavljanje vrednosti prostog odnosa tačke u nizu i zraka u pramenu*; *O involutorijskoj sistemi tačaka kod sfernih ogledala*; *Prilog algebarskim vlacima višeg stupnja* i *Drugi prilog algebarskim vlacima višeg stepena*. Isto tako objavio je u „Glasu SANU" šest rasprava, između kojih, sledeće: *Jedan metod za crtanje krivih linija u ravnini*; *Veza između Paskalovog šestougla, Brijansovog šestostranika i pola i polara* i *Konpolni i konpolarni konični preseci*. U svojim radovima tretirao je zanimljive geometrijske probleme, npr. tretirao je istovremeno kotrljanje i klizenje kruga po krugu i došao je do značajnih matematičkih zaključaka.

Lit. Dragan Trifunović, *Letopis života i rada Mihajla Petrovića*.

ISTORIJSKI PREGLED NEKIH GLAVNIH MATEMATIČKIH DOGAĐAJA

U ovoj hronološkoj tablici, koja se odnosi na istoriju matematike, dati su sasvim fragmentarno, pomeni važnijih događaja u razvitku matematike, radi opšte orijentacije o tom razvitku. To povlači mnogobrojne nedostatke, ali, uprkos tome, tablica će biti od koristi za *popularni* uvid u istorijski tok matematičkih događaja.

U sastavljanju tablice korišćene su: odgovarajuća tablica u knjizi *Istorija matematiki v srednjei školi* od G. I. Gleizera (Moskva, 1971), tablica *Glavni naučni događaji* u Velikoj enciklopediji „Larousse" (Paris, 1975), kao i neke istorije matematike.

Pre nove ere	MATEMATIČKI DOGAĐAJI
oko 5000. god.	U drevno kameno doba obrazuju se prvi stepeni poimanja brojeva i rasprostrtosti; rađanje jednostavnih pojmova prostornih oblika i kvantitativnih odnosa; prvi crteži u pećinama (Lasko, Altamira, La Madlen).
oko 5000—3000. god.	Razvitak palčevog i uzlastog računa. Zasnivanje petičnog, desetnog i dvadesetičnog sistema računanja. Pečenje i bojenje glinenih sudova; neolitski ornamenti, pojava jednakosti, simetrije i sličnih figura.
oko 3000—1700 god.	Pojava kalendara u Vavilonu i Egiptu. Vavilonska matematika: šezdesetični pozicioni sistem, sistem računanja, pisane tablice, tablice za deljenje i množenje, zadaci koji se svode na rešenje linearnih i kvadratnih jednačina i na sistem jednačina, pravila za odredbu površina i zapremina, primena „Pitagorine teoreme", zadaci iz trigonometrije. Egipatska matematika. Papirusi „Ahmesa" i „Moskovski". Površine i zapremine figura ($\pi = 3{,}16$).
1700—700. god.	Razvitak matematike drevnog istoka (Egipćana, Vavilonaca, Indusa i Kineza).
700—600. god.	Tales Miletski. Rađanje deduktivne geometrije. Dokaz prvih teorema. Pitagorejska škola. Rađanje teorije brojeva. Parni, neparni, savršeni i figurativni brojevi. Početak učenja o pravilnim poligonima. Otkriće nesrazmernih veličina. Početak geometrijske algebre. „Sulva-sutra" („Pravila konopca") u Indiji.

oko 500. god.	Zlatni vek helenske kulture. Dramaturzi Eshil, Sofokle i Euripid; istoričari Herodot i Tukidid; filozofi i matematičari Sokrat, Anaksagora i Antifon (kvadratura kruga), Demokrit iz Abdere (perspektiva, početak matematičkog atomizma, zapremina konusa i piramide), Zenon (paradoksi kretanja), Hipokrat sa Hiosa („mesečići", uvođenje strogih dokaza, prva sistematska rasprava o deduktivnoj geometriji), Teodor Kirenski (dokaz iracionalnosti kvadratnih korena nekvadratnih brojeva), Hipijas Elidski (primena kvadratise za trisekciju ugla). Razvitak deduktivne geometrije. Sistematsko zasnivanje skoro čitave geometrije u ravni. Razvitak stereometrije. Razvitak teorije brojeva, pitagorejsko zasnivanje teorije deljivosti i proporcionalnosti brojeva. Dokaz nesrazmernosti dijagonale kvadrata sa stranicom kvadrata. Geometrijska algebra.
oko 400. god.	Vek Platona i Aristotela. Arhit Tarentski predlaže stereometrijsko rešenje podvostručenja kocke, razrađuje aritmetičku teoriju neprekidnih proporcija, primenjuje matematiku u astronomiji, mehanici i muzici. Rešenje klasičnih zadataka antike pomoću algebarskih i transcendentnih krivih. Teetet klasifikuje iracionalnosti i razvija učenje o pet pravilnih mnogougaonika. Menehm otkriva konusne preseke. Eudoks Knidski daje prvu matematičku teoriju planeta, opštu teoriju odnosa i proporcija, metodu iscrpljivanja i aksiomu danas poznatu kao Eudoks – Arhimedova aksioma. Aristotel daje teoriju dedukcije kao osnovni sadržaj logike. Principi konstrukcije deduktivne nauke. Označavanje veličina slovima. Eudem Rodoski daje prvu istoriju matematike.
oko 300. god.	*Elementi* Euklidovi kao prvo delo koje sadrži sistematsko deduktivno izlaganje teorije i osnova antičke matematike. Arhimed daje infinitezimalne metode (nagoveštaje diferencijalnog i integralnog računa) za nalaženje površina i zapremina, postavljanje tangenata i odredbu maksimuma i minimuma; primenjuje geometriju u mehanici i tehnici, određuje dužinu i površinu kruga, površinu paraboličnog segmenta, bočne površine konusa i cilindra, površinu i zapreminu lopte, površine i zapremine konoida i sferoida. Apolonije iz Perge daje teoriju konusnih preseka; zasniva se ideja pravolinijskih koordinata, nagoveštaji analitičke i projektivne geometrije. Uvode se termini elipsa, parabola i hiperbola. Posmatraju se geometrijska mesta i u vezi s tim su pojmovi homotetije, sličnosti i inverzije. Eratostenovo rešeto. Merenje meridijana.
oko 200. god. do poč. nove ere	Hiparh začinje matematičku kartografiju. Geografske koordinate, širina i dužina. Prvi odnosi u sfernoj trigonometriji i tablice tetiva. Izoperimetrijski zadaci Zenodora. Prvi pokušaji dokaza petog postulata. Kineska rasprava *Matematika* u devet knjiga. Algoritmi rešenja sistema linearnih jednačina sa više nepoznatih. Naslućivanje pojma negativnog broja.

Nova era	MATEMATIČKI DOGAĐAJI
I – II vek	Heron Aleksandrijski i njegova primenjena matematika: približno izračunavanje korena, pravila određivanja površina nepravilnih površi i ravnih figura, merni instrumenti. Nikomahovi figurativni i savršeni brojevi. Menelaj Aleksandrijski i njegove *Sferike*. Prvo sistematsko izlaganje sferne geometrije. Pojava pojma sfernog trougla, dokaz teoreme da je zbir uglova sfernog trougla veći od 2d. Menelajeva teorema. Potpuni četvorougao. Klaudije Ptolemej i njegov *Almagest*. Teoreme sferne i pravolinijske trigonometrije, tablica tetiva. Ortogonalne projekcije na tri uzajamno upravne ravni, stereografska projekcija.
III vek	Papus Aleksandrijski i njegov *Matematički zbornik*: uopštenje Pitagorine teoreme, rešenje izoperimetrijskih zadataka, naslućivanje Guldinove teorije, složeni i harmonijski odnos četiri tačke i četiri prave, harmonijska svojstva punog četvorougla, Papusova konfiguracija, početak teorije polara. Obrisi iz istorije matematike. Diofant Aleksandrijski i njegova *Aritmetika*: početak simboličke algebre, rešenje zadataka do zaključno jednačine četvrtog stepena, u većini slučajeva neodređenih. Teorijsko-brojevni zadaci. O pojmu desetnog razlomka kod Kineza.
IV – V vek	Hipatija, prva žena matematičar. Proklus komentator Euklidovih *Elemenata*. Pokušaj dokaza petog postulata. Obrisi iz istorije matematike. Rascvat matematike u Indiji. Nastanak pozicionog sistema računanja. Arijabhata, uvođenje sinusa i kosinusa, rešavanje zadataka u vezi sa pravouglim trouglima. Sumiranje aritmetičkih redova. Rešavanje neodređenih jednačina prvog stepena.
VI – VIII vek	Obrada aritmetičkih pravila operacija sa celim i razlomljenim brojevima u Indiji. Trojno pravilo. Proveravanje pomoću devetke. Brahmagupta, uopštenje pravila rešavanja kvadratnih jednačina. Operacije sa iracionalnim i negativnim brojevima. Pokušaji zasnivanja algebarske simbolike. Neodređene jednačine prvog i drugog stepena. Učenje o paralelama u Vizantiji, pokušaji dokaza petog postulata. Početak rascvata matematike u Armeniji (Jermeniji). Računanje vremena. Osnivanje astronomsko-matematičke škole u Bagdadu.
IX vek	Početak rascvata matematike na Bliskom i Srednjem istoku. Aritmetika Al-Horizmija i rasprostiranje desetnog pozicionog sistema numeracije. Prva knjiga iz algebre na istoku. Klasifikacija kvadratnih jednačina. Uvođenje tangensa i kotangensa i njihova prva tablica. Prevod na arapski jezik grčkih autora i komentari njihovih dela. Razvitak brojevne algebre, praktične aritmetike, trigonometrije i konstruktivne geometrije. Ibn Kora Sabit i pokušaji dokaza petog postulata.

IX—X vek	Abu Kamil i njegove operacije sa složenim kvadratnim iracionalnostima. Al-Batani i usavršavanje *Almagesta*. Sumiranje aritmetičkih i geometrijskih redova u Indiji. Indijsko rukovanje operacijama. Približne formule za izračunavanje površina. Abul Vafa i njegova transformacija kvadrata. Sferna teorema sinusa. Teorema tangensa za pravougli sferni trougao. Komentari Diofantove aritmetike.
X—XI vek	Prvi znaci duhovnog buđenja u zapadnoj Evropi. Abacisti. Al Karadži i aritmetičke operacije na kvadratnim i kubnim iracionalnostima. Rešavanje jednačina višeg stepena koje se svode na kvadratne jednačine. Ibn al-Haisam i geometrijsko rešavanje jednačina trećeg i četvrtog stepena. Izračunavanje zapremine tela koje nastaje obrtanjem segmenta parabole oko tetive. Pokušaj dokaza petog postulata. Al-Biruni i razvitak ravne i sferne trigonometrije. Svođenje zadatka konstrukcije pravilnog devetougaonika na kubnu jednačinu $x^3+1=3x$ i njegovo približno rešenje. Uopštena teorija stereografske projekcije. Ibn Sina i matematička poglavlja enciklopedijskih rasprava.
XI—XII vek	Omar Haim i dalji razvitak algebre kao samostalne discipline. Nalaženje korena bilo kojeg stepena. Klasifikacija i geometrijsko rešenje kubnih jednačina pomoću konusnih preseka. Princip neprekidnosti i proširenje pojma broja. Razvitak teorije paralelnih linija. Prve teoreme neeuklidske geometrije. Prvo sistematsko izlaganje sferne i ravne trigonometrije nezavisno od astronomije. Bhaskara II i pravila množenja i deljenja negativnih brojeva. Dva znaka kvadratnog korena. Primena algebre u geometriji. Prevodi matematičkih dela sa arapskog i grčkog jezika na latinski jezik u zapadnoj Evropi. Prevod aritmetike i algebre Al-Horezmija. Početak rasprostiranja desetnog pozicionog sistema u Evropi. Borba između abacista i algoritmika.
XIII vek	Nasir ad Din at Tusi i astronomske tablice. Izlaganje Euklida. Uopštavanje pojma broja, formula Njutnovog binoma do $n=12$. Razvitak algebre u Kini. Rešavanje nelinearnih sistema jednačina sa četiri nepoznate. Sumiranje konačnih redova. Kvadratna i kubna interpolacija. Prvi napreci u razvitku matematike u zapadnoj Evropi. Leonardo Fibonači i prvo izlaganje aritmetike i algebre linearnih i kvadratnih jednačina u Evropi. Prva pojava termina „plus" i „minus", razlomačke crte, tablica prostih brojeva. Prvi dokaz teoreme o preseku težišnih linija trougla u jednoj tački. Istraživanja u teoriji brojeva. Jordan Nemorarijus i sistematska primena slovnih oznaka. Sakrobosko i običan algoritam. Ivan Kampanus i novi latinski prevod Euklidovih *Elemenata*, sa komentarima i dopunama. Ugao dodira i neprekidnost. Vitelo i njegova optika, učenje o perspektivi.

XIV vek	Narajana i sumiranje brojevnih redova u Indiji. Levi ben Heršon, učenje o sjedinjavanjima, prvo javno izražavanje principa matematičke indukcije. Komentari u uvod Euklidovih knjiga, prvi pokušaj u zapadnoj Evropi dokaza petog postulata. Sinusna teorema. Tomas Bradvardin i njegova teorijska geometrija, razvitak učenja o zvezdastim mnogougaonicima, izoperimetrijska svojstva figura. Problem popunjavanja prostora kongruentnim i pravilnim telima. Početak učenja o razlomljenim odnosima. Učenje o kontinuumu i kritika infinitno-atomističke koncepcije. Nikola Orem i njegov algoritam proporcija. Razvitak učenja o razlomljenim odnosima. Uopštenje stepenovanja na pozitivno razlomljeni eksponent. Njegova konfiguracija kvaliteta i formiranje funkcionalne zavisnosti i njeno grafičko predstavljanje. Emanuel Bonfis i prvi pokušaj sistematskog izlaganja učenja o desetnim razlomcima.
1427. god.	Ključ aritmetike Al-Kašija. Učenje o desetnim razlomcima.
1430. god.	Trigonometrija profesora Bečkog univerziteta Johana iz Gmundena.
1450. god.	Približne konstrukcije Nikole Kuzanskog. Problem prekidnog i neprekidnog.
1460. god.	Šezdesetični i desetni sistem računanja u trigonometriji Georga Pejrbaha.
1461. god.	Prva nemačka algebra, rukopis Friderikusa Gerharda.
1464. god.	Pet knjiga o trouglovima svih oblika Regiomontanusa, prvo u Evropi sistematsko izlaganje trigonometrije kao samostalne matematičke discipline (objavljeno 1533). Pojava znakova „+" i „−" u rukopisima. Tačne trigonometrijske tablice. Primena desetnog pozicionog sistema u trigonometrijskim tablicama.
1470. god.	Al-Kalasadi i pojava algebarske simbolike u islamskoj Španiji.
1482. god.	Prva pojava Euklidovih *Elemenata* u Italiji, latinski prevod Kampanusa sa arapskog jezika.
1484. god.	Nauka o brojevima u tri dela Nikole Šikea. Uvođenje nule i negativnog broja kao eksponenta stepena. Razvitak algebarske simbolike.
1489. god.	Prva pojava u štampi znakova „+" i „−" kod Jana Vidmana, u delu objavljenom u Lajpcigu.
1494. god.	Suma znanja iz aritmetike, geometrije, odnosa i proporcionalnosti Luke Pačolija. Uvođenje algebarskih znakova.

1502. god.	Naučni zbornik i drugi indijski rukopisi XV – XVI v. u kojima se nalaze pravila razlaganja u stepeni red trigonometrijskih funkcija.
1505. god.	Drugo izdanje Euklidovih *Elemenata*, latinski prevod sa grčkog jezika.
1509. god.	O zlatnom preseku Pačolija. Elementi perspektive.
1522. god.	*Aritmetika* Tonstalaja, matematička knjiga objavljena u Engleskoj.
1525. god.	*Algebra* Kristofa Rudolfa. Merenje pomoću lenjira i šestara Albrehta Direra. Razvitak učenja o perspektivi.
1543. god.	O kretanjima nebeskih tela Nikole Kopernika.
1544. god.	Univerzalna aritmetika Mihaela Štifela. Negativni brojevi kao brojevi manji od nule. Uvođenje okruglih zagrada i simbola za mnoge nepoznate. Ideja logaritma.
1545. god.	O velikoj veštini Kardana. Formula Fero – Tartalja – Kardano i formula Ferari, otkriće rešenja u radikalima jednačine trećeg i četvrtog stepena. Prvo istraživanje pitanja imaginarnih korena jednačine. Metode približnog rešenja jednačine ma kojeg stepena.
1551. god.	Tablice nauke o trouglima Retika.
1556. god.	Opšte istraživanje brojeva i mera Nikole Tartalje.
1557. god.	*Algebra* Roberta Rekorda. Uvođenje znaka jednakosti „=“.
1569. god.	Karta sveta Gerharda Merkatora. Razvitak učenja o stereografskoj projekciji. *Geometrija* Petra Ramusa. Prvo istupanje protiv Euklidovih *Elemenata* kao udžbenika.
1572. god.	*Algebra* Rafaela Bombelija. Početak učenja o imaginarnim brojevima. Neprekidni razlomci.
1574. god.	Euklidovi *Elementi* sa komentarima Kristifora Klavijusa.
1577. god.	Tiho Brahe počinje svoja astronomska merenja.
1579. god.	Matematičke tablice Fransoa Vijeta. Razvitak goniometrije i početak analitičke teorije trigonometrijskih funkcija. Prvi primer beskonačnog proizvoda za izražavanje broja π.
1580. god.	Ludolfovo izračunavanje broja π sa 35 decimala.
1582. god.	Ustanovljenje gregorijanskog kalendara.

1585. god.	O desetnim razlomcima Simona Stevena. Sastavljanje tablica složenih procenata, nagoveštaji logaritamskih tablica.
1591. god.	Uvod u analitičku veštinu Fransoa Vijeta. Zasnivanje algebarske simbolike i početak slovnog računa. Uvođenje kvadratnih i okruglih zagrada. Vijetova teorema.
1592. god.	Ispitivanje algebarskih jednačina i formule za trigonometrijske funkcije kod Fransoa Vijeta.
1593. god.	Uvođenje desetne tačke Kristifora Klavija.
1595. god.	Uvođenje termina „trigonometrija“ Bartolomeusa Pitiska.
1600. god.	Rad o perspektivi Ubalda del Montea. Uvođenje pojma tačke preseka u učenje o perspektivi.
1602. god.	Galilejev zakon slobodnog pada.
1603. god.	Osnivanje Akademije dei Linčei u Rimu.
1604. god.	Optički deo astronomije Johana Keplera. Razvitak učenja o perspektivi. Uvođenje pojma i termina „beskonačno udaljena tačka“. Prva primena termina „fokus“. Princip neprekidnosti Keplera. Uvođenje pojma radijusa krivine.
1609. god.	Nova astronomija Keplera. Prva dva zakona kretanja planeta.
1610. god.	Galilejev astronomski durbin, kojim se otkrivaju i posmatraju Jupiterovi sateliti, kao i pege na Suncu.
1611. god.	Keplerova teorija astronomskog durbina.
1612. god.	*Zanimljivi i prijatni zadaci* Bašea de Mezirijaka.
1614. god.	Pojava logaritamskih tablica Džona Nepera.
1615. god.	Nova stereometrija vinskih bačava Johana Keplera. Kubatura tela.
1617. god.	Pojava tablice desetnih logaritama Henrija Brigsa.
1619. god.	*Harmonija sveta* (*Harmonices mundi*) Johana Keplera. Treći zakon kretanja planeta.
1620. god.	Objavljena tablica aritmetičke i geometrijske progresije Bijorga.
1623. god.	Prva računska mašina Šikarda.

1624. god.	Brigsova logaritamska aritmetika. Razrađena tablica desetnih logaritama. Prvi logaritamski lenjir Edmunda Guntera.
1629. god.	Novo otkriće u algebri Alberta Žirara. Prvo geometrijsko istraživanje negativnih brojeva. Prvo formulisanje „osnovne teoreme algebre". Prva primena dvojnog znaka „±".
1630. god.	*O matematičkoj analizi i sintezi* (De resolutione et divisione mathematica) Marina Getaldića. Sistematska primena Vijetove algebre na geometrijske probleme. Pionirsko delo na putu koji vodi ka Dekartovoj analitičkoj geometriji.
1631. god.	Praktična veština analize Tomasa Harita i usavršavanje algebarske simbolike. Uvođenje znakova „>" i „<". Ključ matematike Vilijama Utreda. Uvođenje znaka „×".
1632. god.	Galilejevi *Dijalozi o dva najveća sistema sveta* koji brane kopernikansku tezu; osuda zbog toga 1633.
1633. god.	Džonson uvodi dve tačke kao znak deljenja.
1634. god.	*Geometrijski i drugi simboli* Pjera Erigona.
1635. god.	*Geometrija nedeljivih* (*Geometria indivisilibus continuorum nova quadam ratione promota*) Bonaventure Kavalerija. Kavalijerijev princip. Rešenje niza zadataka integralnog računa. Kvadratura stepene funkcije sa prirodnim eksponentom. Uvođenje učenja ravnih i telesnih mesta Pjera Fermaa. Prva radnja koja sadrži principe analitičke geometrije (objavljena 1679. godine).
1636. god.	Robervalova metoda za postavljanje tangenata.
1637. god.	Dekartova *Geometrija*. Osnovne metode pravolinijskih koordinata i počeci analitičke geometrije. Uvođenje pojma promenljive veličine i funkcije. Savremene algebarske oznake i savremeni zapisi formula. Pravilo znakova za odredbu broja pozitivnih i negativnih korena jednačine. Granice realnih korena. Metoda postavljanja tangenata i normala na ravnim linijama.
1638. god.	Galilejevi *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, tačno obrazloženje zakona padanja tela i paraboličkog kretanja projektila.
1639. god.	Osnovi projektivne geometrije i *Osnovna skica* Dezarga. Rasprava o konusnim presecima Bleza Paskala. Teoreme Dezarga i Paskala. Doprinos infinitezimalnom računu i računu verovatnoće.
1642. god.	Računska mašina Bleza Paskala.

1642—1644. god.	Metoda istraživanja maksimuma i minimuma Pjera Fermaa, gde je rešen niz zadataka diferencijalnog računa. Radovi Pjera Fermaa koji se odnose na teoriju brojeva. Geometrijski radovi Evanđeliste Toričelija. Integracione metode.
1647. god.	Geometrijski rad Gregorijusa Vinćence. Kubatura tela.
1654. god.	Radovi Bleza Paskala iz aritmetike, teorije brojeva, algebre i teorije verovatnoće (objavljeni 1665). Opšti kriterijum deljivosti bilo kojeg celog broja sa bilo kojim drugim celim brojem, kombinatorika i primena principa matematičke indukcije; razrada pitanja analize beskonačno malih, „karakteristični trougao", izračunavanje površina i zapremina.
1656. god.	*Aritmetika beskonačnih* Džona Valisa. Razvitak Kavalijerijevih ideja. Integracija algebarskih funkcija. Elementi teorije granica. Primena i uvođenje termina „interpolacija" funkcije. Uopštenje pojma eksponenta stepena na sve realne brojeve. Simbol beskonačnosti. Valisova formula $\frac{4}{\pi}=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot\ldots}$.
1657. god.	*Rasprava o izračunavanjima u hazardnim igrama* Kristijana Hajgensa.
1660. god.	Osnovano Londonsko kraljevsko društvo.
1663. god.	Valisov „dokaz" petog Euklidovog postulata.
1666. god.	Osnovana francuska Akademija nauka u Parizu.
1668. god.	Logaritamska tehnika Nikole Merkatora. Pojava prvog razlaganja logaritamske funkcije u stepeni red. Početak predstavljanja funkcija pomoću beskonačnih redova Vilijama Brounkera, Isaka Njutna i Džemsa Gregorija. Simpsonova formula za približno izračunavanje integrala.
1670. god.	Predavanja iz optike i geometrije Isaka Baroua. Ustanovljenje uzajamne veze diferenciranja i integriranja. Zadaci koji dovode do diferencijalnih jednačina.
1670—1671. god.	*Metoda fluksije i beskonačnih redova* Isaka Njutna (objavljena 1736). Zasnivanje diferencijalnog i integralnog računa.
1672. god.	Školsko izdanje Euklidovih *Elemenata* Kloda Dešala.
1673. god.	Časovi klatna Kristijana Hajgensa. Teorija evoluta i evolvenata.
1674. god.	Računska mašina Gotfrida Lajbnica.

1675. god.	Pojava znaka integrala ∫ i diferencijala d u Lajbnicovim rukopisima.
1676. god.	Mariotov zakon pritiska gasa.
1678. god.	*O pravama koje se uzajamno seku* Đovanija Čeve. Čevijeva teorema.
1680. god.	Prvo naučno izlaganje verižnih razlomaka Kristijana Hajgensa u vezi sa radom „planetne mašine".
1683. god.	Japanski matematičar Seki Kova otkriva determinante, rešavajući sistem linearnih jednačina.
1684. god.	*Nova metoda* Gotfrida Lajbnica, prva objavljena radnja iz diferencijalnog računa.
1685. god.	*Rasprava iz algebre* Džona Valisa, prvi pokušaj geometrijskog objašnjenja imaginarnih brojeva.
1686. god.	*O dubokoj geometriji* Gotfrida Lajbnica, prva objavljena radnja iz integralnog računa.
1687. god.	*Matematički principi prirodne filozofije* Isaka Njutna. Osnovni principi i pojmovi klasične mehanike. Metoda prvih i poslednjih razmera. Ispitivanje nekih oblika diferencijalnih jednačina i zadaci varijacionog računa.
1689. god.	*Aritmetika Kopijeviča*, prvi objavljen ruski rad iz matematike.
1693. god.	Rešenje diferencijalnih jednačina pomoću beskonačnih redova kod Lajbnica. Njegov opis mehanizma za približno grafičko integraljenje. Početak teorije determinanata u Evropi. Tablica smrtnosti Edmunda Galeja.
1696. god.	Rešenje zadatka o brahistrohonoj liniji Isaka Njutna, Gotfrida Lajbnica, Jakova Bernulija i L'Opitala. Rađanje varijacionog računa. Prvi udžbenik diferencijalnog računa L'Opitala.
1700. god.	Osnivanje Berlinske akademije nauka.
1703. god.	*Aritmetika* od Magnickog, prvi ruski objavljeni udžbenik iz matematike. Gregorijevo izdanje Euklidovih *Elemenata*.
1706. god.	Vilijam Džons uvodi grčko slovo „π" za oznaku odnosa između dužine kružnice i njenog poluprečnika.
1707. god.	Njutnova *Univerzalna aritmetika*. Završetak radova Vijeta, Dekarta i drugih u prelazu od retorične i geometrijske algebre na simboličnu i brojevnu algebru. Javno opredeljenje da je realni broj odnos dveju jednorodnih veličina. Moavrova formula.
1713. god.	*Veština povezivanja* Jakova Bernulija. Razvitak kombinatorike i teorije verovatnoće. Bernulijevi brojevi i Bernulijeva teorema (važan poseban slučaj zakona velikih brojeva).
1715. god.	Metoda priraštaja Bruka Tejlora. Tejlorov red. Izračunavanje konačnih razlika.
1716. god.	Učenje o slučaju Abrahama Moavra.
1724. god.	Osnivanje Petrogradske akademije nauka.
1728. god.	Ojlerovo uvođenje jednačine geodezijske linije na površi.
1729. god.	Ojlerovo uvođenje gama-funkcije.
1730. god.	Štirlingova formula.
1731. god.	*O krivima dvojake krivine* Kloda Kleroa, prvo izlaganje učenja o prostornim krivima.
1733. god.	Đirolamo Sakeri, *Euklid očišćen od svih zabluda*. Pokušaj dokaza protivno petom postulatu.
1736. god.	Ojler uvodi simbol „e".
1741. god.	*Elementi geometrije* Kloda Kleroa. Kritika Euklidovih *Elemenata* sa pedagoškog stanovišta. Početak genetičke metode u predavanju geometrije.
1742. god.	*Kurs integralnog računa* Bernulija. Razrada metoda rešavanja diferencijalnih jednačina, učenje o geodezijskim linijama. Rasprava o fluksijama Kolina Maklorena. Maklorenov red.
1743. god.	*Rasprava iz dinamike* D'Alambera. D'Alamberov princip. Opšta pravila sastavljanja diferencijalnih jednačina kretanja ma kojih sistema. Ojlerova publikacija metode rešavanja jednorodne linearne diferencijalne jednačine ma kojeg poretka sa stalnim koeficijentima. Kleroovo uvođenje pojma krivolinijskih integrala.
1746. god.	*Principi algebre* Kloda Kleroa.
1746—1779. god.	D'Alamber (1746), Ojler (1755) i Lagranž (1779) koriste funkcije kompleksne promenljive u rešavanjima zadataka hidrodinamike i konformnog preslikavanja. Uslovi analitičnosti funkcije kompleksne promenljive.

1746—1748. god.	D'Alamberovi radovi koji se odnose na teoriju kolebanja strune. Osnivanje teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina. D'Alamberov dokaz osnovne teoreme algebre.
1748. god.	Ojlerov *Uvod u analizu beskonačnih*. Razvitak učenja o beskonačnim redovima. Ojlerova formula. Algebarska teorija eliminacije. Analitička geometrija u prostoru. Analitička teorija trigonometrijskih funkcija. Simboli $\sin x$, $\cos x$ i drugi.
1750. god.	*Uvod u analizu algebarskih krivih* Gabrijela Kramera, prvo sistematsko izlaganje osnova teorije determinanata (nezavisno od Seki Kova). Kramerovo pravilo.
1752. god.	Ojlerova teorema za ispupčene mnogougaonike.
1755. god.	Rad o vibrirajućim žicama Danijela Bernulija. Prvi trigonometrijski redovi (Furijeovi redovi). Parcijalne diferencijalne jednačine. Ojlerov diferencijalni račun. Osnivanje Moskovskog univerziteta.
1755—1767. god.	D'Alamberovi matematički članci u francuskoj Enciklopediji. Novi pogledi na predavanje geometrije.
1756. god.	Školsko izdanje Euklidovih *Elemenata* Roberta Simsona.
1758. god.	*Teorija prirodne filozofije svedena na jedinstven zakon sila koje postoje u prirodi* (*Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*) Ruđera Boškovića. Prvi opširni rad iz istorije matematike Žana Etjena Montikle.
1760. god.	Lagranžovo analitičko varijaciono izračunavanje.
1762. god.	Analitičke studije Edvarda Varinga. Istraživanja simetričkih funkcija.
1766. god.	*Aritmetika Horvatszka* Mija Šiloboda Bolšića i *Aritmetika u slavni jezik ilirički sastavljena* Mata Zorčića.
1767. god.	*O rešenjima brojevnih jednačina* Lagranža. Približna rešenja pomoću neprekidnih razlomaka. *O krivini površi* Ojlera. Prva primena pojma krivine na površi.
1768. god.	Dokaz iracionalnosti broja π Johana Hajnriha Lamberta.
1766—1774. god.	*Integralni račun* I – III, Leonarda Ojlera (1794. objavljen je IV tom).
1769. god.	Ojlerov uvod u dvojne integrale.
1770. god.	Potpun uvod u algebru Leonarda Ojlera.

1771. god.	*Razmišljanja o rešavanju jednačina* Lagranža. Lagranžovo opšte rešenje neodređenih jednačina drugog stepena. Rasprava o razvijanjima Gaspara Monža. Uvođenje pojma dodirujućih sfera.
1772. god.	*Kurs matematike* E. Bezua.
1773. god.	Lagranžov uvod u trojne integrale.
1774—1779. god.	Lagranžova razrada opšte metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda.
1776. god.	Teorema Žana Menijea.
1777. god.	Ojlerovo uvođenje znaka „i" za $\sqrt{-1}$.
1779. god.	Opšta teorija algebarskih jednačina E. Bezua. Bezuova teorema.
1781. god.	Školsko izdanje Euklidovih *Elemenata* Lorenca.
1786. god.	Teorija paralelnih Johana Hajnriha Lamberta.
1788. god.	*Analitička mehanika* Lagranža.
1793. god.	Ležandrov razvitak teorije eliptičkih integrala.
1794. god.	*Elementi geometrije* Ležandra. Potpuna zbirka logaritama Jurja Vege.
1795. god.	Primena analize u geometriji Gaspara Monža (objavljena 1811), prvo sistematsko izlaganje teorije površi. Tumačenje parcijalnih diferencijalnih jednačina pomoću krivih i površi.
1796. god.	Gausovo rešenje zadatka „deljenja kruga". Konstrukcija pravilnog sedamnaestougaonika. Teorija binomnih jednačina. Euklidovi elementi geometrije od Kurganova. Laplasovo izlaganje sistema sveta. Lagranžov pokušaj političke aritmetike.
1797. god.	Lagranžova teorija analitičkih funkcija i njegova predavanja izračunavanja funkcija, pokušaj svođenja analize na algebru. Školsko izdanje Euklidovih *Elemenata* Džona Pleifera. Geometrija kruga Lorenca Maskeronija. Prvi Gausov dokaz osnovne teoreme algebre.
1798. god.	Ležandrova teorija brojeva. Usavršavanje elemenata geometrije Gurjeva. Pokušaj dokaza petog postulata.
1799. god.	Analitičko predstavljanje pravca Kaspara Vesela. Opšta teorija jednačina Paola Rufinija. Pokušaj dokaza nerešivosti u radikalima

	opšte algebarske jednačine petog stepena. *Nacrtna geometrija* Gaspara Monža.
1799—1825. god.	*Nebeska mehanika* (I – V) Pjera Laplasa. Laplasova jednačina.
1800—1801. god.	Pestalocijev pedagoški sistem. Početak „očigledne geometrije".
1800. god.	*Kurs matematike* Osipovskog.
1801. god.	Aritmetička istraživanja Fridriha Gausa, početak savremene teorije brojeva. Teorija kvadratnih formi, ostataka s upoređenjem drugog stepena. Zakon kvadratne uzajamnosti („zlatna teorema"). O korelaciji figura Lazara Karnoa.
1802. god.	*Rasprava o diferencijalnom i integralnom računu* Lakroaa. Ge-Lisakov zakon širenja gasa.
1803. god.	Geometrija položaja Lazara Karnoa. Elementi statike Luja Poansoa. Geometrijske metode u istraživanjima problema mehanike. Teorija parasila.
1805. god.	Ležandrovo otkriće i primena metode najmanjih kvadrata. Ge-Lisakov zakon kombinacije gasova u volumenu.
1806. god.	Arganov opit predstavljanja imaginarnih brojeva pomoću geometrijskih konstrukcija. Karnoov opit o transverzalama.
1807—1811. god.	Prvi radovi Furijea o teoriji rasprostiranja toplote. Zadatak oscilacija strune i uopštenje pojma funkcije.
1809. god.	Ispitivanje četiri oblika pravilnih zvezdastih poligona Luja Poansoa. Monžova *Aplikacija analize na geometriju.* Infinitezimalna geometrija.
1811. god.	*Rasprava iz mehanike* Simona Poasona. Razvitak matematičke fizike.
1811—1814. god.	Avogadrov i Amperov zakon o broju molekula u jednom istom gasnom volumenu.
1812. god.	Laplasova *Analitička teorija verovatnoće.* Dokazi prvih graničnih teorema teorije verovatnoće. Elementi geometrije Luja Bertrana.
1814—1816. god.	Izdanje Euklidovih *Elemenata* Pjerara.
1819. god.	Izdanje Euklidovih *Elemenata* Petruševskog.

1821. god.	*Kurs analize* Ogista Košija. Rezime predavanja o beskonačno malim (1823) i predavanja po primenama analize u geometriji (1826 – 1828). Jasne definicije pojma granice i neprekidnosti funkcije i njihovo sistematsko korišćenje u izlaganjima analize. Zasnivanje stroge teorije konvergencije redova. Razvitak osnove teorije funkcija kompleksne promenljive.
1822. god.	Rasprava o projektivnim osobinama figura Ponselea. *Analitička teorija toplote* Furijea. Razvitak matematičke fizike. Furijeovi redovi.
1823. god.	Udžbenik geometrije Lobačevskog. Ideja fuzionizma u predavanjima geometrije.
1824. god.	Strogi Abelov dokaz o nerazrešivosti u radikalima opšte jednačine petog stepena.
1825. god.	*Rasprava o određenim integralima* Košija. Integralna teorema Košija.
1825—1831. god.	Gausovi radovi o bikvadratnim ostacima u algebri i aritmetici kompleksnih brojeva.
1825—1838. god.	Ležandrova *Rasprava o eliptičkim funkcijama* i Ojlerovim integralima. Uvođenje sfernih funkcija („Ležandrovi polinomi"). Razlaganje eliptičnih integrala u redove i tablice njihovih vrednosti.
1826. god.	Sažeto izlaganje principa geometrije Lobačevskog. Prvo izdanje principa geometrije Lobačevskog.
1826—1829. god.	Abelov rad u oblasti analize i algebre. Radovi Abela (1827) i Jakobija (1829) zasnivaju teoriju eliptičkih funkcija.
1827. god.	Gausova opšta istraživanja koja se odnose na krive površi. Unutarnja geometrija površi. Gausova krivina. Mebijusovo baricentričko izračunavanje. Principi analitičke projektivne geometrije. Opšti pojam projektivne transformacije (kolineacija).
1828—1832. god.	Galoaovi radovi. Teorija grupa, teorija konačnih polja. Početak savremene algebre. Plikerovo analitičko-geometrijsko istraživanje. Razvitak analitičke projektivne geometrije.
1828. god.	Radovi Ostrogradskog. Formula transformacije trojnih integrala u dvojne.
1829. god.	*O principima geometrije* Lobačevskog. Prvi objavljeni rad iz neeuklidske geometrije. Šturmovo pravilo za odredbu broja korena algebarske jednačine koji leže u zadanom intervalu.

1830. god.	Bolcanovo učenje o funkcijama. Prvi primer neprekidne funkcije odnosno krive koja nema dirku ni u jednoj svojoj tački. Savremeni pojam konvergencije redova. Pikokova rasprava iz algebre. Princip permanencije. Aritmetička istraživanja Bunjakovskog.
1830—1840. god.	Mindingovi radovi o unutarnjoj geometriji površi.
1831. god.	Furijeova analiza određenih jednačina. Brojne metode rešavanja jednačina.
1832. god.	Sistematski razvitak međuzavisnosti geometrijskih oblika Jakoba Štajnera. Projektivna teorija krivih drugog i trećeg reda.
1833. god.	Boljaijev apendiks, otkriće neeuklidske geometrije nezavisno od Lobačevskog. O integraciji racionalnih razlomaka Ostrogradskog.
1834. god.	Algebra i izračunavanje konačnih Lobačevskog. Metoda približnog izračunavanja korena jednačine ma kojeg stepena. Nova, opšta definicija funkcije kao proizvoljnog preslikavanja. Poasonova nova teorija obrtanja tela. Uvođenje pojma „elipsoida inercije"
1834—1835. god.	*O momentima sila* Ostrogradskog i Opšta metoda dinamike Vilijama Hamiltona. Razvitak varijacionih metoda.
1835—1836. god.	*Imaginarna geometrija* i njena primena na neke integrale Lobačevskog. Razvitak ideja neeuklidske geometrije.
1835—1838. god.	*Novi principi geometrije sa punom teorijom paralenih* Lobačevskog.
1837. god.	Šalov istorijski pregled nastanka i razvitka geometrijskih metoda.
1838. god.	*O linearnim diferencijalnim jednačinama* Ostrogradskog.
1840. god.	*Geometrijska istraživanja o teoriji paralelnih linija* Lobačevskog.
1841. god.	*O konstrukciji i osobinama determinanata* Jakobija. Funkcionalne determinante.
1842. god.	Kumerovo uvođenje ideala. Savremena teorija algebarskih brojeva (razvijena u radovima Kronekera, Dedekinda, Zolotareva i Hilberta).
1843. god.	Hamiltonovo uvođenje pojma kvaterniona – početak razvitka vektorske algebre.
1844. god.	Grasmanovo učenje o linearnoj protežnosti. Prvo sistematsko učenje o mnogomernom Euklidovom prostoru. Razvitak vektorskog računa. Lijuvijovo otkriće transcendentnih brojeva.

1846. god.	*Osnovi matematičke teorije verovatnoće* Bunjakovskog.
1846—1848. god.	Osnovi teorije algebarskih invarijanata u radovima Artura Kelija.
1847. god.	*Geometrija položaja* Kristijana fon Štauta. Čisto geometrijsko zasnivanje projektivne geometrije. Disertacija Frederika Frenea. Freneove formule. Bulova matematička analiza logike. Početak zasnivanja matematičke logike (docnije razvijena u radovima Bula, Poreckog, Šredera, Fregea, Peanoa i Rasela).
1848. god.	Listingova istraživanja u topologiji. Uvođenje termina „topologija".
1849. god.	Školsko izdanje Euklidovih *Elemenata* A. de Morgana. Teorija upoređenja i odredbi broja prostih brojeva koji ne prelaze datu veličinu P. L. Čebiševa.
1851. god.	Paradoksi beskonačnog Bernarda Bolcana. Definicija beskonačnog skupa kao ekvivalentnog svom pravom delu. Osnovi opšte teorije funkcija kompleksne promenljive, Rimanova doktorska disertacija. Početak geometrijskog pravca u razvitku teorije analitičkih funkcija. Razvitak teorije konformnih preslikavanja.
1853. god.	O savijanju površi K. Petersona. Potpun sistem osnovnih jednačina teorije površi. Hamiltonova predavanja o kvaternionima. Pojava termina „vektor".
1853—1867. god.	Čebiševljevi radovi u analizi. Polinomi Čebiševa.
1854. god.	Rimanova rasprava o hipotezama koje leže u osnovama geometrije. Zasnivanje diferencijalne geometrije mnogomernog prostora, snabdevenog metrikom (Rimanova geometrija). Eliptička neeuklidska geometrija. Bulovi zakoni mišljenja. Algebra logike.
1855. god.	*Pangeometrija* Lobačevskog. Teorija kružnog srodstva u čisto geometrijskom izlaganju Augusta Mebijusa. Sintetička teorija kružnih transformacija.
1856. god.	Istraživanje funkcija imaginarne promenljive Brioa i Bukea. Prvo sistematsko izlaganje teorije analitičkih funkcija.
1857. god.	*Teorija Abelovih funkcija* od Rimana. Princip analitičkog produženja. Osnove topologije površi.
1857—1864. god.	Kurs predavanja iz teorije analitičkih funkcija Vajerštrasa.
1858. god.	Mebijusovo otkriće postojanja jednostranih površi („Mebijusov list"). Kelijeva teorija matrica.

1859. god.	Šest rasprava o formama Artura Kelija. Nejednakost Bunjakovskog. Radovi Čebiševa o interpolaciji.
1861. god.	O primeni principa najmanjeg dejstva u određivanju zapremine vode na kanalu za odvod N. Brašmana. Istraživanja nekih brojevnih funkcija Bunjakovskog.
1863. god.	Predavanja iz teorije brojeva Ležena Dirihlea. Dedekindova dopuna predavanja iz teorije brojeva Ležena Dirihlea. Teorija algebarskih brojeva. Opšta definicija ideala.
1864. god.	Elementarna geometrija A Davidova. Osnivanje Moskovskog matematičkog društva.
1866. god.	Čebiševljeve srednje veličine. Nejednakost Čebiševa. Zakon velikih brojeva. Predavanja iz dinamike Karla Jakobija. Odredba geodezijskih linija na elipsoidu. Početna algebra A. Davidova.
1867. god.	Teorija kompleksnih brojnih sistema od Hermana Hankela. Hankelov princip permanencije.
1868. god.	Beltramijev opit interpretacije neeuklidske geometrije. Početak priznavanja neeuklidske geometrije Lobačevskog. Nova geometrija prostora Julijusa Plikera. Uopštenje pojma koordinata. O faktima koji leže u osnovama geometrije Hermana Helmholca.
1870. god.	Rasprava o supstitucijama i o algebarskim jednačinama Kamija Žordana. Prvi sistematski kurs teorije grupa i teorije Galoa.
1871. god.	O tzv. neeuklidskoj geometriji Feliksa Klajna. O prostorima proizvoljnog broja dimenzija Enrika Betija.
1872. god.	Erlangenski program Feliksa Klajna. Geometrija kao učenje o transformacijama grupa. Neprekidnost i iracionalni brojevi Riharda Dedekinda. Strogo zasnivanje teorije realnih brojeva (u isto vreme, različitim putevima zasnivaju i Kantor i Vajerštras). Linearna asocijativna algebra Benjamina Pirsa.
1873. god.	Ermitovo utvrđivanje transcendentnosti broja „e". Prethodni ocrt bikvaterniona Vilijama Kliforda. Razvitak geometrije trodimenzionog eliptičkog prostora. Teorija neprekidnih grupa Sofusa Lija. Lijove grupe.
1874. god.	Kantorov dokaz neprebrojivosti skupa svih realnih brojeva, tj. postojanje neekvivalentnih beskonačnih skupova. O istoriji matematike u antici i u srednjem veku Hermana Hankela. Aritmometar V. Odnera. Teorija celih kompleksnih brojeva sa primenama u integralnom računu E. Zolotareva. Razvitak teorije algebarskih

	brojeva. O teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina od S. Kovaleske.
1878. god.	Kantorova formulacija opšteg pojma moći skupa. Prve publikacije o teoriji skupova. Princip upoređivanja skupova. Čebiševske mreže. Aritmometar Čebiševa. O integraciji diferencijalnih jednačina pomoću neprekidnih razlomaka A. Markova.
1879. god.	Početak istorijsko-matematičkih istraživanja V. Bobnina.
1879—1884. god.	Razvitak matematičke logike u radovima Gotloba Fregea i P. Poreckog.
1880. god.	*O binarnim kvadratnim formama pozitivne determinante.* A. Markova. Euklidovi *Elementi* sa objašnjenjima i tumačenjima M. Vaščenka – Zaharčenka.
1880—1908. god.	Predavanja iz istorije matematike Kantora (u četiri toma).
1881. god.	*Osnove aritmetičke teorije algebarskih veličina* Leopolda Kronekera.
1881—1882. god.	Klajnova i Poenkareova konstrukcija opšte teorije automorfnih funkcija.
1881—1885. god.	*O krivama određenim diferencijalnim jednačinama* Poenkarea. Konstrukcija kvalitativne teorije diferencijalnih jednačina. Topologija krivih linija.
1882. god.	Predavanja o novoj geometriji Morisa Paša. Aksiome poretka. Lindemanov dokaz transcendentnosti broja „π".
1882—1887. god.	*Kurs analize* Kamija Žordana.
1883. god.	Kantorovo opšte učenje o mnogorazlikostima. Zasnivanje aritmetike transfinitnih brojeva.
1884—1890. god.	Moris Dokanj polaže temelje nomografije.
1884. god.	Riči – Kurbastro zasniva apsolutni diferencijalni račun (tenzorsku analizu). Štiljtesov integral. Predavanja o ikosaedru Feliksa Klajna.
1884—1885. god.	O svođenju jedne klase Abelovih integrala trećeg reda na eliptičke integrale i o obliku prstena Saturna od S. Kovalevske.
1885. god.	Početak konstruktivne teorije funkcija u radovima Vajerštrasa i Čebiševa.

1887. god.	O osnovnim hipotezama geometrije Poenkarea. O dvema teorema-ma odnosnih verovatnoća P. Čebiševa.
1888. god.	*Zadatak obrtanja tvrdog tela oko nepokretne tačke* S. Kovalevske.
1888—1893. god.	Teorija grupa transformacija Sofusa Lija.
1888—1894. god.	Osnovi algebarske teorije prostih grupa Lija u radovima Vilhelma Kilinga i Elija Kartana.
1888—1896. god.	*Opšta teorija površi* Darbua. Osnove projektivno-diferencijalne i konformno-diferencijalne geometrije.
1889. god.	*O približnom izražavanju kvadratnog korena pomoću prostih razlomaka* P. Čebiševa. Logičko izlaganje osnova geometrije Đuzepa Peanoa.
1890. god.	Peanova konstrukcija krive koja prolazi kroz sve tačke kvadrata.
1890—1891. god.	Federova i Šenflisova klasifikacija kristalnih i prostornih rešetki metodom teorije grupa.
1890—1893. god.	Hilbertovo rešenje osnovnih problema teorije algebarskih invarijanata.
1891—1896. god.	Pikarova rasprava o analizi.
1892. god.	*O funkcijama koje najmanje odstupaju od nule u datom intervalu* A. Markova. *Opšti zadatak o stabilnosti kretanja* A. Ljapunova. Zasnivanje niza novih matematičkih metoda.
1893. god.	Poenkareove nove metode nebeske mehanike. Teorija asimptotskih razlaganja, teorija integralnih invarijanata. Osnove kvalitativne teorije diferencijalnih jednačina. *O kretanju tvrdog tela u tečnosti* V. Steklova.
1893—1898. god.	*Klasični radovi po teoriji oscilacija broda i vibracije sudova* A. Krilova.
1893—1912. god.	Hefisajdovo zasnivanje operacionog računa.
1895. god.	Poenkareova analiza položaja. Osnovi kombinatorne topologije.
1895—1903. god.	Kotelnikova i Študijeva konstrukcija spiralnog izračunavanja i neeuklidska mehanika.
1896. god.	Volterin početak istraživanja opšte teorije integralnih jednačina. Uvođenje opšteg pojma funkcionala. *Strogo zasnivanje asimptotskog zakona rasporeda prostih brojeva* Adamara i Vale-Pusena.

1897. god.	*O nekim mogućim primenama teorije skupova*, članak Žaka Adamara na prvom Međunarodnom kongresu matematičara u Parizu. *O jednom postupku grafičke integracije diferencijalnih jednačina* Mihaila Petrovića.
1898. god.	*O nekim pitanjima koja su povezana sa Dirihleovim zadatkom* A. Ljapunova. *O hidrauličkoj integraciji diferencijalnih jednačina* Mihaila Petrovića.
1898—1901. god.	Markovljev i Ljapunovljev dokaz granične teoreme teorije verovatnoće. Predavanja iz elementarne geometrije Adamara.
1899. god.	Hilbertove *Osnove geometrije*. Prvi potpun sistem aksioma euklidske geometrije. *Elementarna geometrija kao deduktivni sistem* Marija Pijerija.
1900. god.	Markovljevo izračunavanje verovatnoće. Hilbertova formulacija 23 osnovna problema matematike na drugom Međunarodnom kongresu matematičara.
1900—1903. god.	Fredgolmova konstrukcija opšte teorije integralnih jednačina.
1900—1910. god.	Hilbert razvija teoriju integralnih jednačina i postavlja osnove savremene teorije linearnih operatora.
Kraj XIX i početak XX stoleća	Đuzepe Peano i Emil Pikar razvijaju metodu sukcesivnih približnih vrednosti za dokaze teorema o postojanju rešenja diferencijalnih jednačina. Istraživanja francuskih matematičara Bera, Borela i Lebega u metričkoj i deskriptivnoj teoriji funkcija realne promenljive. Istraživanja funkcionalnih prostora Voltere, Pinkerlea, Hilberta i Risa. Geometrijske metode istraživanja u teoriji brojeva Minkovskog i Voronoga. Freše, Ris i Hausdorf razvijaju teorijsko-skupovnu topologiju.
Kraj XIX i oko 30-ih godina XX v.	Istorijsko-matematička istraživanja od B. Turajeva, V. Strueva, F. Tjoro. Danžena, O. Nejgebauera i drugih.
1901. god.	*O površima postojane Gausove krivine* Davida Hilberta. *Sistematsko izlaganje tenzorskog računa* Gregorija Riči – Kurbastroa i Tulija Levi – Čivite. *Opšte metode rešenja zadataka matematičke fizike* V. Steklova. *Linearni sistemi konusnih preseka* A. Vlasova.
1902. god.	Lebegov pojam mere skupa. Lebegov integral.
1902—1909. god.	Kartanova konstrukcija teorije predstavljanja grupe Lija. *Predavanja iz diferencijalne geometrije* Luiđija Bjankija.
1902—1905. god.	*Kurs matematičke analize* Eduarda Gurse.

1903—1912. god.	Radovi S. Bernštajna iz teorije diferencijalnih jednačina i teorije približnog predstavljanja funkcija polinomima. Zasnivanje konstruktivne teorije funkcija.
1903. god.	*Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskog* Vladimira Varićaka.
1904. god.	Hilbertova teorija formalnih matematičkih dokaza.
1904—1905. god.	*Istorijski osvrt na razvitak učenja o osnovama geometrije* V. Kagana.
1905. god.	Ajnštajnova specijalna teorija relativiteta.
1907. god.	*O približnim izračunavanjima* A. Krilova. *Prvi osnivači neeuklidske geometrije* Vladimira Varićaka.
1905—1907. god.	*Osnove geometrije* V. Kagana.
1908. god.	*Vreme i prostor* Hermana Minkovskog. *Teorija konačnih grupa* D. Gravea.
1909. god.	Moris Freše uvodi metričke prostore.
1910. god.	*Principi matematike* (II tom) B. Rasela i A. N. Vajtheda. *Kurs algebarske analize* D. Gravea. *O geometrijskim osnovama Lorencovih grupa* Feliksa Klajna. *Temelji hipoteza i matematičkih metoda za geometriju prostora sa četiri dimenzije i više njih* Jurja Majcena.
1911. god.	*Potencijalno teoretska istraživanja* od Josipa Plemelja. Plemeljevo rešenje Rimanovog problema. *Elementi matematičke fenomenologije* od Mihaila Petrovića.
1912. god.	Luzinovo otkriće C-osobine. Razvitak teorije izmerivih skupova i funkcija.
1913. god.	Kartanova konstrukcija teorije spinora. *O nekim diferencijalnim jednačinama matematičke fizike koje imaju primene u tehničkim pitanjima* A. Krilova. *O transformacijama mnogougaonika* V. Kagana.
1914. god.	*Osnovi teorije skupova* Feliksa Hausdorfa. Razvitak opšte topologije. Apstraktna teorija grupa O. Šmita. Formiranje apstraktne teorije grupa kao samostalne discipline.
1915. god.	Integral i trigonometrijski red od N. Luzina. Razvitak metričke i zasnivanje deskriptivne teorije funkcija.

1916. god.	Ajnštajnova opšta teorija relativnosti. *Razvitak teorije analitičkih skupova* N. Luzina.
1916—1918. god.	Nastanak teorije analitičkih skupova u radovima P. Aleksandrova i M. Suslina.
1917. god.	*Opit aksiomatskog zasnivanja teorije verovatnoće* S. Bernštajna. Prva aksiomatska konstrukcija teorije verovatnoće.
1920—1928. god.	Radovi Emi Neter. Osnove opšte („apstraktne") algebre.
1922—1924. god.	Radovi P. Urisona i P. Aleksandrova o topologiji. Konstrukcija teorije dimenzije topoloških prostora. Sinteza kombinatornog i teorijsko-skupovnog pravca u topologiji. Banahova teorija linearnih normiranih prostora.
1925—1926. god.	Borova konstrukcija teorije skoro periodičnih funkcija. Početak savremenog razvitka teorije topoloških neprekidnih transformacija od S. Lefšeca i H. Gopfa.
1927—1929. god.	Ljusternik i Šnirelman dokazuju teoremu o trima geodezijskim linijama i prenose varijacione metode na funkcionalne prostore.
1927. god.	Fermanova i Dirakova statistička interpretacija kvantne mehanike.
1928. god.	O transfinitnim brojevima Vaclava Sijerpinskog.
1929—1934. god.	Gelfondovo rešenje sedmog Hilbertovog problema.
1930. god.	Van der Vardenova savremena algebra. Šnilermanovo zasnivanje nove metode u teoriji brojeva.
1931. god.	Gedelov dokaz nepotpunosti aksiomatizacije aritmetike prirodnih brojeva.
1932. god.	Pontrjaginov opšti zakon dvojstvenosti. *O projektivnoj geometriji* A. Kolmogorova.
1933. god.	Kolmogorovljeva *Aksiomatika teorije verovatnoće*. Koteljnikovljev dokaz jedne od osnovnih teorema informacije.
1934. god.	Pontrjaginovo rešenje petog Hilbertovog problema za komutativne grupe i Nojmanovo rešenje za kompaktne grupe.
1936—1937. god.	Početak razvitka teorije algoritama u radovima. A. Čerča i A. Tjuringa.
1936—1950. god.	Pojava uopštenih funkcija u radovima. S. Soboljeva u teoriji diferencijalnih jednačina.

1937. god.	Vinogradovljevo rešenje Goldbahovog problema za dovoljno velike brojeve.
1938. god.	Pontrjaginove topološke grupe.
1939. god.	Početak objavljivanja *Elemenata matematike* Burbakija, značajnog dela savremene matematike. Početak objavljivanja predavanja I. Petrovskog iz teorije diferencijalnih jednačina.
1941. god.	Gelfandovi normirani prsteni. *Kanon osunčavanja Zemlje i njegova primena na problem ledenog doba* od Milutina Milankovića.
1943. god.	Konstrukcija prve elektronske računske mašine u SAD.
1947. god.	*Unitarno predstavljanje klasičnih grupa* I. Gelfanda i M. Naimarka.
1947—1955. god.	Dokaz nepostojanja algoritama za rešenje niza algebarskih problema koji su dali V. Post, A. Markov i P. Novikov.
1948—1949. god.	Vinerova kibernetika. Šenonova teorija informacija.
1949—1957. god.	Prevod i komentari Euklidovih *Elemenata* na srpskohrvatski jezik Antona Bilimovića.
1950—1960. god.	Razvitak uopštenih funkcija po Švarcu, Gelfandu i drugima. Keldišova istraživanja u teoriji nespojivih diferencijalnih jednačina. Primena Kantorovih metoda funkcionalne analize u pitanjima približnog računanja. *Zasnivanje novih metoda u algebarskoj topologiji* Ž. Lerea, A. Kartana i Ž. Serea.
1950. god.	*Teorija skupova* Đure Kurepe.
1952. god.	*Potpuno rešenje petog Hilbertovog problema* A. Glizona, D. Montgomerija i L. Cipina.
1956. god.	Razvitak teorije optimalnih procesa.
1963. god.	Koenovo rešenje hipoteze kontinuuma. To je bio prvi među dvadeset tri problema koje je Hilbert postavio na Međunarodnom kongresu matematičara u Parizu 1900.
1978. god.	*Pregled istorije matematike* 1700 – 1900 (u dva toma) u redakciji Žana Dijedonea.

MIHAILOVIĆ DOBRIVOJE

Srpski, odnosno jugoslovenski, matematičar (1909 – 1987). Rodio se u Kruševcu, a umro je u Beogradu.

Osnovnu školu završio je 1920, u Prištini, a gimanziju i viši tečajni ispit u Kruševcu 1928. Studirao je matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, gde je diplomirao 1932. Bio je profesor matematike u Drugoj muškoj gimnaziji u Beogradu. Posle oslobođenja je na različitim dužnostima u prosvetnoj struci: direktor Realke u Beogradu, profesor na tečaju za učenike ratom ometene, direktor Sindikalnog tečaja namenjenog učenicima koji su bili ratom ometeni, profesor na radu u Ministarstvu prosvete NR Srbije. Od 1947. do 1952. bio je predavač za matematiku na Tehničkom fakultetu, kao i na Tehnološkom fakultetu u Beogradu. Od 1952. do 1956. predavač je nebeske mehanike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. U tom periodu bio je i nastavnik matematike na Rudarsko-geološkom fakultetu i na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

U vremenu od oktobra 1954. do avgusta 1955. proveo je na naučnoj specijalizaciji na Univerzitetu u Minhenu. Na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu 1956. habilitovan je za poziv univerzitetskog nastavnika na osnovu habilitacionog rada *Prilozi proučavanju problema dvaju tela sa promenljivim zbirom masa*. Za naučnog saradnika Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu izabran je 1956. Doktorsku disertaciju pod naslovom *O kvantitativnim rešenjima sistema diferencijalnih jednačina u jednom specijalnom problemu triju tela* odbranio je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu 1956. Za vanrednog profesora Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu izabran je 1957, a za redovnog 1962. godine.

Na Elektrotehničkom fakultetu predavao je matematiku i teoriju verovatnoće redovnim studentima, i na poslediplomskim studijama teoriju verovatnoće. Isto tako, predavao je te predmete na Tehničkom fakultetu u Nišu i u Odeljenju za vanredno studiranje pri Centrali za distribuciju električne energije u Beogradu. Bio je prodekan Elektrotehničkog fakulteta, gde je vodio poslove nastave i naučnog rada. Starao se i o nastavi na Odeljenju fakulteta u Titogradu. Bio je član Matematičke komisije i Saveta Tehničkog fakulteta u Nišu.

D. Mihailović je veoma aktivno učestvovao u radu društvenih i naučno-stručnih organizacija matematičara. Bio je sekretar i višegodišnji član uprave Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije, kao i sekretar i član izvršnog odbora Saveza društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije.

U vreme svojih studija matematike bio je jedan od najboljih studenata na matematičkoj grupi, a zatim jedan od najuzornijih nastavnika gimnazije. Njegov je značajan doprinos podizanju kvaliteta nastave matematike u srednjim školama. Posle oslobođenja, kao nastavnik matematike na fakultetima, isticao se svojim predavanjima, koja su bila veoma sistematska i sređena i na zavidnoj naučno-stručnoj visini. Kao takav nastavnik uživao je veliki ugled i poštovanje kod nastavnika, učenika i studenata.

D. Mihailović je vladao dobro problemima svoje uže struke, a imao je i široku matematičku kulturu. Bio je studiozan i sistematičan, što je ispoljio u svome naučnom i stručnom radu. Objavio je 21 naučni rad, preko 10 stručnih radova, nekoliko referata o udžbenicima kao i redakcijskih referata.

U radu *Partikularni integrali u problemu sudara triju tela nebeske mehanike* (»Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. I, No. 1, Beograd, 1949) tretira se uvođenje pojma centra atrakcije i prikazuju se partikularna rešenja u Sundman-Blokovom problemu triju tela, čime su potvrđeni već poznati rezultati. Rad sadrži i neke nove rezultate. On uspostavlja vezu između Sundman-Blokovog problema triju tela i Milankovićevog problema rasprskavanja u svom radu *O pravcima trenutnih relativnih kretanja u problemu sudara triju tela nebeske mehanike* (»Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. I, No. 2, Beograd, 1949). Proširena je Milankovićeva teorema na problem sudara i pokazano je da se i u ovome problemu trenutni relativni pravci kretanja seku u jednoj tački ravni kretanja. Na osnovu jedne nove veze između nepoznatih funkcija, autor je u radu *Jedan način redukcije sistema diferencijalnih jednačina kretanja u jednom specijalnom problemu nebeske mehanike* (»Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. II, No. 1–2, Beograd, 1950) redukovao Blokov sistem od četiri na tri diferencijalne jednačine i dao rešenje Blokovog problema triju tela u prvoj aproksimaciji. Ovim je korigovan i jedan od ranijih Blokovih rezultata. U radu *Prilog ispitivanju jednog specijalnog problema n tela* (»Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. III, No. 1–2, Beograd, 1951) uopštava niz Blokovih i svojih rezultata u problemu sudara triju tela, među kojima i stav o polu gravitacije za slučaj n tela. Proučen je slučaj $n=4$ u kome su nepoznate funkcije u problemu vezane sa tri linearne relacije. Na osnovu ovih relacija redukovao je devet Blokovih diferencijalnih jednačina za varijaciju konstelacije egzaktnih rešenja na sistem od šest jednačina.

U vezi sa kvalitativnom analizom putanje problema Batirova, u svom radu *Prilog kvalitativnoj analizi oblika putanja u problemu dvaju tela sa promenljivim zbirom masa* (»Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. IV, No. 3–4, Beograd, 1952) u problemu dvaju tela sa promenljivim zbirom masa, dokazuje stav o preslikavanju sektorskih brzina u vezi sa svođenjem problema na klasični problem dvaju tela.

U radu *O jednom opštijem načinu za redukciju problema dvaju tela sa promenljivim masama na problem dvaju tela sa stalnim zbirom masa* (»Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. V, No. 1–2, Beograd, 1953) izvršeno je svođenje problema dva tela sa promenljivim masama na problem sa stalnim zbirom masa, uz koje je dato i uopštenje jednog rezultata Batirova. Dao je rešenje problema dva tela sa promenljivim masama uz korišćenje rezultata Batirova i vektorskih elemenata koje je uveo Milanković, što čini sadržaj rada *Primene vektorskih elemenata na rešenje problema dvaju tela sa promenljivim zbirom masa* (»Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. V, No. 3–4, Beograd, 1953). Uzeo je u razmatranje sva tri moguća oblika putanja. Dao je prikaz navedenog članka Batirova o kvalitativnoj analizi oblika putanja u problemu dvaju tela s promenljivim masama u svom radu *Referat na članak Batirova: O formama trajektorija u problemu dva tela s promenljivim masama* (Astr. žur. T. XXVI, v. 1, »Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. 1, No. 2, Beograd 1949).

Proučavao je Dubošinov problem sa drugog stanovišta i uz korišćenje vektorske metode u svom radu *Prilog ispitivanju jednog specijalnog slučaja kretanja u otpornoj sredini* (»Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. VI, No. 1–2, Beograd, 1954). Tu je postigao i jedan novi rezultat. Budući da funkcija poremećaja nije izražena niti proučen njen oblik preko vektorskih elemenata, na osnovu Milankovićevih jednačina teorije poremećaja sa vektorskim elementima, dao je geometrijsku interpretaciju parcijalnih gradijenata ove funkcije po vektorskim elementima, u radu *Geometrijska interpretacija parcijalnih gradijenata perturbirajuće funkcije po vektorskim elementima* (»Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije«, t. VII, No. 1–2, Beograd, 1955).

Rasprava *Prilozi proučavanju problema dvaju tela s promenljivim zbirom masa* (Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Serija: matematika i fizika, No. 3, 1956) je habilitacioni rad D. Mihailovića. U njoj je dat kratak pregled razvitka istraživanja na problemu dvaju tela sa promenljivim masama, a isto tako i sinteza rezultata do kojih je kandidat došao, a koji su ovde povezani u jednu celinu. Rasprava *O kvantitativnim rešenjima sistema diferencijalnih jednačina u jednom specijalnom problemu triju tela* predstavlja doktorsku disertaciju D. Mihailovića. Ona je s jedne strane prilog teoriji diferencijalnih jednačina čiji koeficijenti i rešenja sadrže singularitete, a s druge prilog istraživanju problema sudara triju tela u Sundman-Blokovoj interpretaciji. U problemu je izvršeno uopštavanje pojma centra atrakcije i njegova primena na ovaj problem, uopštenje jednog specijalnog problema triju tela koji je formulisao Milanković, veza ovog problema sa Sundman-Blokovim problemom, uprošćenje i rešenje Blokovog problema u prvoj aproksimaciji, kao i niz drugih rezultata.

U radu *Ispitivanje funkcija poremećaja pomoću vektorskih elemenata* (Naučno saopštenje na III Kongresu matematičara i fizičara Jugoslavije, septembra, 1960) dao je izraz za funkciju poremećaja, izražen vektorskim elementima. Dotadašnje tretiranje problema teorije poremećaja u radovima M. Milankovića i drugih autora koji su mesto klasičnih koristili vektorske elemente, odnosila se skoro isključivo na prikazivanju samo forme diferencijalnih jednačina, ne ulazeći pri tom u suštinu ovih problema preko neophodne analize funkcije poremećaja. Mihailović daje izraz za ovu funkciju i navodi izvestan broj opštih problema koji bi mogli biti uzeti u istraživanje na osnovu analize ove funkcije. U radu *Obvojnice u nekim problemima nebeske mehanike i dinamike zvezdanih sistema* (Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Serija: matematika i fizika), sa jedinstvenog stanovišta tretira se uloga obvojnica u problemu triju tela nebeske mehanike, kao i u problemu dinamike zvezdanih sistema.

U svojim naučnim radovima obrađivao je značajne probleme i došao do zanimljivih rezultata. Kritika u međunarodnim referativnim časopisima, »Referativni žurnal – Matematika« (Moskva), »Mathematical Reviews« (USA) i »Zentralblatt für Mathematik« (Nemačka), povoljno je ocenila njegove naučne radove.

Niz radova posvetio je metodsko-pedagoškim i nastavnim problemima. To su stručni radovi i odgovarajući udžbenici i referati: vektorska obrada nekih problema analitičke geometrije ravni i prave; elementi vektorske algebre i analitičke geometrije u prostoru; analitička geometrija; zadaci iz vektorske analize; primene vektorske metode u nekim problemima analitičke geometrije; matematika za prvi stepen nastave na Elektrotehničkom fakultetu; matematički metodi u fizici – račun verovatnoće (univerzitetski udžbenik); brojni referati koji se odnose na različite udžbenike i druga nastavna sredstva iz matematike. U svim ovim radovima istakao se kao izvanredan poznavalac problema nastave matematike. Zato oni ulaze kao vredan i značajan prilog u našu metodsko-pedagošku literaturu koja se odnosi na matematiku.

Lit.: Referat o izboru za redovnog profesora Elektrotehničkog fakulteta D. Mihailovića i neposredni uvid u njegove radove.

Beleška o piscu

Dr Ernest Stipanić, profesor univerziteta, rođen je 1917. u Kumboru, opština Herceg-Novi. Gimnaziju je završio u Kotoru 1935, a diplomirao je teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu u Beogradu 1940.

Posle oslobođenja neko vreme je profesor gimnazije u Kotoru, a od 1947. je na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Tu je habilitirao za univerzitetskog nastavnika 1955. sa radom *O principu permanencije u matematici*. Doktorirao je iz teorijske matematike 1957, kod dr Đura Kurepe, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu, sa tezom *Jedna generalizacija algoritma ekshaustije i neki prilozi primeni ekshaustije*.

Preko trideset godina neprekidno je učestvovao u redovnoj i poslediplomskoj nastavi matematike na Građevinskom fakultetu u Beogradu i tehničkim fakultetima u Beogradu, Novom Sadu, Sarajevu i Tuzli, zatim na Prirodno-matematičkom i Filozofskom fakultetu, u Biološkom institutu i u Energoprojektu u Beogradu. Od posebnog su značaja njegova predavanja *teorija verovatnoće sa matematičkom statistikom* i *matrična analiza* na poslediplomskim studijama na tehničkim fakultetima, kao i *istorija, filozofija i metodologija matematike* na poslediplomskim i redovnim studijama matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu i u Titogradu.

Naučni opus E. Stipanića je bogat i mnogostruk. Njegovi naučni i stručni radovi pripadaju matematičkoj analizi, istoriji, filozofiji i metodologiji matematike. U domaćim i inostranim naučnim časopisima objavio je preko 80 naučnih i preko 50 stručnih radova, kao i veliki broj naučnopopularnih radova i knjiga. Iz matematičke analize ističu se radovi koji se odnose na beskonačne redove.

Poznate su njegove knjige *Marin Getaldić* (1961), *Ruđer Bošković* (1984) i *Putevima razvitka matematike* (1987), kao i njegovi matematički, istorijski i filozofski komentari u knjizi Ruđera Boškovića *O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile*, koje je objavio Matematički institut u Beogradu (1975) i niz studija o Marinu Getaldiću, Ruđeru Boškoviću, Federiku Grizogonu, Marku Antonu de Dominisu, Leonardu Ojleru i Mihailu Petroviću.

Napisao je udžbenike za univerzitetske studije *Viša matematika deo I* (osam izdanja, počev od 1966. do 1985), *Viša matematika deo II* (pet izdanja, od 1968. do 1986) i *Teorija verovatnoće i matematička statistika* (1985), kao i nekoliko udžbenika za srednju školu (*Metode istraživačkog rada u matematici*, 1981. i 1984).

Dopisni je član Internacionalne akademije istorije nauka u Parizu (L'Académie internationale d'histoire des sciences) i član je Njujorške akademije nauka (The New York Academy of Sciences); vanredni član Crnogorske akademije nauka i umjetnosti, član je Internacionalne komisije za istoriju matematike (International Commission on the history of mathematics) i Internacionalnog komiteta za istorijsku metrologiju (Comité international pour la Métrologie historique). Stalni je recenzent međunarodnih referativnih časopisa za matematiku: „Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete" (Berlin, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin) i „Mathematical Reviews" (University of Michigan, Ann. Arbor, Mich. USA).

Sa svojim naučnim, odnosno stručnim referatima učestvovao je na preko 30 simpozijuma i kongresa matematičara, zatim istoričara i filozofa matematike, u našoj zemlji i inostranstvu. Po pozivu Instituta za matematička istraživanja u Oberwolfachu (Zapadna Nemačka) više puta je učestvovao sa naučnim referatima na sastancima u institutu. Na poziv Instituta za matematiku Univerziteta u Pizi i Univerziteta u Palermu držao je predavanja na univerzitetima u Pizi, odnosno u Palermu o Marinu Getaldiću i Ruđeru Boškoviću.

Više godina je neprekidno i veoma angažovano učestvovao i učestvuje u radu republičkih i saveznih društvenih organzacija matematičara, kao i matematičkih institucija: Društva matematičara Srbije, Saveza društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, Nacionalnog komiteta za istoriju nauka, Matematičkog instituta u Beogradu, Nastavnog i Prosvetnog saveta Srbije itd., kao i u radu na Građevinskom fakultetu u svojstvu šefa Katedre za matematiku i fiziku i upravnika Zavoda za matematiku, fiziku i društvene nauke. Jedan je od osnivača i član redakcije časopisa „Nastava matematike i fizike", „Nauka i priroda", i „Matematički vesnik", kao i biblioteke „Nauka – Tehnika – Umetnost". Sada je predsednik Društva za istoriju i filozofiju matematičkih, prirodnih i tehničkih nauka i urednik časopisa Beogradskog univerziteta „Dijalektika".

Među više visokih domaćih priznanja, dobitnik je Povelje zaslužnog člana Društva matematičara Socijalističke Republike Srbije, Povelje Saveza društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije i Povelje građevinskih fakulteta u Sarajevu i Prištini. Odlikovan je Ordenom rada sa zlatnim i Ordenom Republike sa srebrnim vencem.

Indeks ličnih imena