

Г Л А С

CCCLXXV

ОДЕЉЕЊЕ ТЕХНИЧКИХ НАУКА

КЊИГА 31

ACADEMIE SERBE DES SCIENCES ET DES ARTS

GLAS

CCCLXXV

CLASSE DES SCIENCES TECHNIQUES

N^o 31

Rédacteur

PETAR MILJANIĆ
Membre de l'Académie

BEOGRAD
1995

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

ГЛАС

CCCLXXV

ОДЕЉЕЊЕ ТЕХНИЧКИХ НАУКА

КЊИГА 31

Уредник

академик

ПЕТАР МИЉАНИЋ

БЕОГРАД

1995

Издаје

Српска академија наука и уметности

Лектор *Милан Одавић*

Коректор *Петар Ђорђевић*

Технички уредник *Јелка Поморишац*

Слог и прелом текста *Татијана Насић*

Тираж 500 примерака

Штампа

ЧИГОЈА Штамп

Београд, Студентски трг 15

САДРЖАЈ – CONTENTS

1. <i>М. Вукобратовић, Д. Стокић</i> : Адаптивно хибридно управљање роботима	1
<i>M. Vukobratović, D. Stokić</i> : Adaptive Hybrid Control of Robots	19
2. <i>Ђ.М. Злоковић</i> : Једначине крутости коначних елемената у G -инваријантним потпросторима	21
<i>Đ.M. Zloковић</i> : Stiffness Equations of Finite Elements in G -invariant Subspaces	61
3. <i>И.С. Стојановић</i> : Планирање употребе геостационарне сателитске орбите и перспективе њеног коришћења	65
<i>I.S. Stojanović</i> : Planning of the Geostationary Satellite Orbit and Perspectives of its Utilization	85
4. <i>М.М. Ристић, З. Николић</i> : Моделирање синтеровања у присуству течне фазе	87
<i>M.M. Ristić, Z. Nikolić</i> : Modeling of Liquid Phase Sintering	104
5. <i>М. Вукобратовић, Олга Тимченко</i> : Неки биолошки аспекти управљања сложеним роботским системима	105
<i>M. Vukobratović, Olga Timchenko</i> : Some Biological Aspects of Controlling Complex Robotic Systems	128
6. <i>В.Д. Ђорђевић</i> : Примена методе асимптотског спајања при прорачуну турбулентног струјања и закона трења у цевима	129
<i>V.D. Đorđević</i> : Fully Developed Turbulent Flow and the Friction Law in Pipes Via Asymptotic Matching	146
7. <i>Р. Томовић</i> : Принципи рада машина	147
<i>R. Tomović</i> : Principles of Operation of Machines	153
8. <i>М. Вукобратовић, Б. Каран</i> : Експерименти с применом фазе логике у управљању робота уз коришћење динамичке компензације на бази модела	155
<i>M. Vukobratović, B. Karan</i> : Experiments with Fuzzy Logic Application to Robot Control with Model-Based Dynamic Compensation	172

9.	<i>М.М. Ристић, И.А. Гржетић</i> : Процеси деградације опека српских средњовековних манастира	173
	<i>M.M. Ristić, I.A. Gržetić</i> : Degradation Processes of the Bricks From Serbian Medieval Monasteries	196
10.	<i>М. Вукобратовић, Олга Тимченко</i> : Експерименти са нетрадиционалним управљањем двоножним роботима	197
	<i>M. Vukobratović, Olga Timčenko</i> : Experiments with Nontraditional Hybrid Control Technique of Biped Locomotion Robots	220
11.	Пристапно предавање <i>А. Маринчића</i> : „Примењена електромагнетика у телекомуникацијама, микроталасној и оптоелектронској техници”	223
	<i>A. Marinčić</i> : Summary of the Introductory Lecture	233

М. ВУКОБРАТОВИЋ, Д. СТОКИЋ

АДАПТИВНО ХИБРИДНО УПРАВЉАЊЕ РОБОТИМА

(Примљено на XIV скупу Одељења, 03. децембра 1991)

Насупрот класичном хибридном управљању по позицији и сили, предлаже се адаптивни алгоритам са управљањем по сили и позицији, на бази тзв. имплицитног управљања по силама. То подразумева срачунавање позиције еквивалентне жељеној сили. Еквивалентна позиција се затим реализује преко класичног управљања по позицији. На тај начин се успешно решава проблем и недостатак конвенционалног хибридног управљања где управљање по позицији и управљање по сили имају опречне захтеве у погледу крутости сервосистема. На предложени начин се такође разрешава проблем робустности система и ствара се реална подлога за примену код различитих задатака метаничке обраде метала помоћу робота. Приказивани су први резултати испитивања предложене схеме на конкретном роботском систему.

1. Увод

У савременој производњи остало је још релативно мало задатака који нису аутоматизовани а који захтевају улагање значајног напора од стране радника. Такви задаци су различите машинске обраде чији су типични примери: полирање, сечење, глачање, одсецање оштрих ивица и сл. Примена нумерички контролисаних машина (NC машина) за овакве задатке је ограничена на случајеве када су делови који се обрађују прецизно дефинисани (по облику и димензијама) и када су варијације делова који се обрађују на једном радном месту минималне, тј. када се ради о обрадама истих делова у великим серијама. Како је у савременој индустрији све више присутна тенденција ка мањим серијама, односно тенденција ка великој флексибилности производње у погледу варијанти исних производа (типичан пример је савремена аутомобилска индустрија),

то је аутоматизација наведених задатака помоћу NC машина практично неостварљива. Савремена индустрија се све више окреће тзв. флексибилним технолошким системима (ФТС) у којима се производе различите варијанте истих производа у релативно малим серијама. Примена NC машина за наведене задатке у оквиру ФТС је неприхватљива, јер се већина оваквих задатака и даље обавља мануелно уз велике физичке напоре и уз значајне ризике у погледу безбедности радника.

Из наведених разлога аутоматизација оваквих задатака помоћу робота представља озбиљну шансу за даље увођење робота у индустрију. Роботи су, захваљујући својој репрограмабилности и адаптивно-сти, погодни за обраду различитих варијанти истих производа, или пак обраду различитих производа на истом радном месту. Међутим, примена робота за овакве задатке још није успешно остварена због многобројних проблема који се јављају првенствено у вези са управљањем роботима. Иако се у појединим обрадама (на пример сечење и полирање) роботи већ примењују, њихова адаптивност је ограничена на релативно узак домен варијација облика и димензија предмета који се обрађују, тако да њихово увођење не представља значајнији помак у односу на примену NC машина за овакве задатке. Универзални роботи за сечење, полирање, глачање и сл., који би се могли лако програмирати за различите облике и димензије делова који се обрађују и који би се адаптирали на варијације у димензијама и карактеристикама, још се не могу наћи на тржишту. Развој управљачких јединица за роботе који би се успешно примењивали у оваквим задацима представља велики изазов за истраживаче, што је и разлог да се у последњих неколико година највећа пажња у готово свим истраживачким центрима на пољу роботике посвећује управо овим проблемима.

Основни проблем при управљању роботима у оваквим задацима представља чињеница да је неопходно истовремено контролисати и кретање робота и силу (моменат) којом робот делује на предмет који се обрађује. Наиме, приликом обраде делова помоћу алата потребно је да робот покреће алат дуж одређене површине радног предмета и да истовремено делује одређеном силом на предмет како би се остваривала жељена обрада. Сви роботи који се данас налазе на тржишту могу се управљати само по позицији (брзини), тј. помоћу робота се може остварити жељено премештање радног предмета (алата) са једног места на друго, бојење и сл. Истовремено управљање по позицији и по сили захтева извесне измене у концепцији управљања роботима. Иако је, како је горе наведено, велика пажња истраживача посвећена овим проблемима, може се закључити да до сада није развијен концепт управљања који би успешно задовољио све захтеве који се постављају пред роботе у погледу управљања у задацима са ограниченим кретањем хватаљке.

У овом раду биће размотрен један нови алгоритам управљања роботима у задацима у којима робот истовремено треба да се креће и да

делује одговарајућом силом на предмет који се обрађује. Алгоритам има за циљ да задовољи основне захтеве који се постављају пред роботе у оваквом типу задатака. Зато су најпре у Одељку 2 анализирани захтеви који се постављају у посматраној класи задатака. Затим је у Одељку 3 дат кратак преглед различитих приступа за решавање наведених проблема који се јављају при управљању роботима по позицији и по сили истовремено. У Одељку 4 приказан је предложени алгоритам за управљање роботима у задацима са ограниченим кретањем хваталке, док су у Одељку 5 размотрени симулациони и имплементациони резултати.

2. Захтеви при синтези управљања роботима у задацима са ограниченим кретањем хваталке

При синтези управљања роботима у задацима у којима је кретање хваталке ограничено у појединим правцима у којима робот треба да делује одређеном силом (моментом) на предмет који се обрађује постављају се различити захтеви како са становишта различитих технолошких процеса, тако и са становишта имплементације робота у индустријским условима. Такође је потребно узети у обзир економске аспекте примене робота у оваквим задацима.

Не улазећи у специфичне захтеве везане за поједине технолошке процесе (као што су сечење, полирање, глачање и сл.) овде ћемо укратко навести опште захтеве који се постављају при синтези управљања роботима у задацима са истовременим управљањем по позицији и по сили:

1. Управљање роботима треба да обезбеди довољно *прецизно позиционирање* (праћење жељене трајекторије) у одређеним правцима и истовремено довољно прецизно остваривање силе (момента) којом робот делује на предмет који се обрађује у комплементарним правцима.
2. Управљање роботима треба да буде довољно *робустно* да релативно мале варијације у облику предмета који се обрађује не захтевају поновно подешавање управљачких параметара.
3. Управљачка јединица треба да омогући једноставно репрограмирање робота када се услови задатка промене. То значи да, за разлику од NC-машина које најчешће могу да покрију релативно узак скуп облика предмета, управљање роботима треба да омогући да се “покрије” шири спектар облика предмета, као и шири спектар типа материјала и начина обраде. Обрада различитих материјала може захтевати измену алата, али би управљање робота требало да омогући аутоматску адаптацију робота на измењене услове¹.

¹ Тенденције да се развије универзални робот који би могао да се једноставно репрограмира за различите типове обраде (тј. да се исти робот користи за сечење, полирање и сл.) у овом тренутку још немају реалну технолошку основу.

4. *Репрограмирање* робота треба да се омогући на *нивоу технолошког задатка*, тако да корисник може лако да мења задатак не замарајући се подешавањем управљачких параметара робота (другим речима, неопходно је остварити тзв. *taskoriented programming*).
5. *Управљање* мора бити *високо поуздано* како би се могло применити у *индустријским условима*, када на систем могу деловати различити поремећаји.
6. *Управљачка јединица* робота за посматрану класу задатака мора бити што "ближа" постојећим *стандардним контролерима робота*, тј. потребно је да управљање буде што "сличније" класичном управљању роботима (у задацима у којима се хватаљка робота креће у слободном простору) како би произвођачи робота и њихових управљачких јединица могли максимално да искористе постојећа решења за управљачке јединице, која су тестирана и усавршена кроз дугогодишњу практичну примену у индустрији.

Поред наведених захтева могу се специфицирати и додатни захтеви, као што су портабилност, могућност проширења и сл. То су захтеви који важе за управљање роботима и у другим класама задатака, па се стога овде неће посебно елаборирати.

Наведени захтеви могу се постављати и у друкчијој форми зависно од тачке гледишта при синтези управљања. На пример, први захтев који се односи на прецизност управљања по позицији и по сили, може се формулисати и као захтев да робот поседује високу крутост у правцима у којима се управља по позицији, док у правцима у којима се управља по сили треба обезбедити ниску крутост. Ови захтеви се могу даље разрађивати, па се тако може дефинисати захтев да ниска крутост робота, у правцима у којима се исти управља по сили, не сме да смањује крутост у правцима у којима се робот управља по позицији.

3. *Кратак преглед приступа за синтезу управљања роботима у задацима са ограниченим кретањима хватаљке*

Како је већ горе наведено, последњих десетак година уложени су велики напори у многим истраживачким лабораторијама у свету да се синтетизује управљање роботима у задацима са ограниченим кретањем хватаљке које би задовољило горе наведене захтеве. Овде ће укратко бити приказани најзначајнији приступи решавању ових проблема.

Генерално говорећи, могу се уочити два основна приступа синтези управљања роботима у задацима са ограниченим кретањем хватаљке:

- а) *Експлицитно хибридно управљање* и
- б) *имплицитно управљање по силама*.

У даљем тексту наводе се основне карактеристике ова два приступа.

а) *Експлицитно хибридно управљање по позицији и по сили*

Предложено је од стране Mason-а [1] и Raibert-а и Craig-а [2]. Идеја хибридног управљања је једноставна: робот се одређеним правцима у односу на спољашњи координатни систем управљања само по позицији, а у одређеним правцима само по сили. Уводи се матрица селективности преко које се дефинишу правци у којима се робот управља по позицији, односно по сили. У правцима у којима се робот управља по позицији не узима се у обзир грешка по сили, док се у правцима у којима се робот мора управљати по сили, грешка по позицији (у тзв. Cartesian-ском простору) поставља на нулу. Тиме се, формално, врши декупловање управљања по позицији од управљања по сили. Међутим, постоје многобројни проблеми у примени хибридног управљања. Овде се наводи неколико битних проблема [3, 4]:

(а1) *Контактни проблем.* У тренутку када долази до контакта робота (алата) и предмета који се обрађује, управљање мора да обезбеди "меки" судар без драстичног прекорачења силе која се жели постићи. Систем се понаша као систем са високом крутошћу која зависи од крутости материјала предмета са којим робот долази у контакт и од крутости материјала алата који робот носи. Како, зависно од типа материјала, крутост предмета (и алата) може драстично да варира, то и укупна крутост система драстично варира, те је тешко обезбедити да се систем понаша као наткритично пригушен ако би управљачки параметри (појачања повратних спрега) били константни. То указује на потребу примене управљања које би се адаптирало на крутост (тип материјала) предмета са којим робот долази у контакт. Примена активног пригушења у правцу судара везана је за проблеме детекције малих брзина. Посебно је критичан контакт са материјалом који има високу крутост јер систем постаје осетљив на поремећаје који долазе од немоделираних динамичких утицаја високих учестаности. Једна од могућности да се разреши овај проблем је преко смањивања крутости саме хватаљке (јер иста утиче на "еквивалентну крутост" система), али се при томе најчешће смањује крутост и у осталим правцима, што се неповољно одражава на прецизност позиционирања.

(а2) *Интеракција између управљања по позицији и управљања по сили.* Хибридно управљање под познатим претпоставкама декуплује правце у којима се робот управља по позицији од праваца у којима се управља по сили. Међутим, ово декупловање се практично остварује у потпуности само код тзв. Cartesian-ске структуре робота, тј. код робота са три линеарна зглоба и са три ротациона зглоба око оса Cartesian-ског координатног система. Код свих осталих структура робота, услед динамичног спрезања између зглобова правци који се управљају по позицији нису распрегнути од праваца који се управљају по сили. Шта више, када робот долази у контакт са околином, мења се еквивалентна крутост у односу на крутост у слободном простору. Код хибридног управљања, како

је предложено у [1, 2], у правцима који се управљају по сили крутост се поставља на нулу када се робот креће у слободном простору, што неминуовно изазива редуцију крутости у свим зглобовима робота. Редуција крутости у зглобовима одражава се на прецизност позиционирања, односно изазива знатно већу осетљивост на спрезање између зглобова. Наиме, еквивалентно смањивање крутости у зглобовима изазива смањење робустности локалних контролера око зглобова робота у односу на динамичко спрезање између зглобова. Иако се у посматраној класи задатака ради о релативно спорим кретањима, приликом "судара" робота са предметом који се обрађује јављају се висока успорења/убрзања која могу да изазову динамичка спрезања између зглобова. Треба имати у виду да се код ове класе задатака прецизност у праћењу жељених трајекторија и у остваривању задатака силе још значајнија него код задатака који захтевају само кретање робота у слободном простору, јер и најмање одступање од задате позиције (трајекторије) може да изазове неприхватљиво високе силе и моменте на хватаљку робота, те је због тога неопходно редуковати динамичко спрезање између зглобова, односно између појединих правца кретања хватаљке.

(а3) *Имплементациони проблеми.* Основни проблем у примени хибридног управљања са експлицитним управљањем по сили лежи у његовој ниској робустности на спољне поремећаје, тако да се тешко може применити у индустријским условима. Штавише, показује се да је овакво управљање нестабилно у појединим конфигурацијама робота [3], што би изазвало посебне тешкоће при програмирању робота (тј. морало би се водити рачуна које су конфигурације за сваку структуру робота нестабилне како би се избегле при програмирању задатака). С друге стране, показује се да при и најмањој промени услова одвијања задатака (облика и материјала предмета и сл.), оваква шема управљања захтева поновно подешавање параметара управљања. Подешавање појачања повратних спрега код хибридног управљања је хеуристично. Другим речима, није могуће утврдити прецизан поступак за одређивање појачања повратних спрега. Према томе, захтев у погледу једноставне репрограмабилности робота практично није могуће испунити са експлицитним хибридным управљањем. Међутим, најзначајнији проблем везан за примену експлицитног хибридног управљања односи се на нестандардну конфигурацију управљачке јединице коју захтева овакво управљање. Наиме, примена експлицитног хибридног управљања захтева да се потпуно промени стандардна конфигурација контролера робота који се данас налазе на тржишту. То је, вероватно, и најважнији разлог што данас практично није ни учињен покушај да се реализује индустријски контролер на бази хибридног управљања.

(б) *Имплицитно управљање по силама*

То је други приступ разрешавања проблема управљања роботом у задацима са ограниченим кретањем хватаљке. Код имплицитних шема уп-

рављања по силама уместо да се директно управља по силама (тако што би се одређивала грешка по оствареној сили и затим реализовао моменат који треба да коригује грешку по сили - како се то чини код хибридних шема са експлицитним управљањем по силама), срачунавају се еквивалентне позиције (или брзине) које одговарају жељеним силама, и затим се тако срачунате еквивалентне позиције реализују преко позиционог контролера. Зато код таквих контролера нема ефеката редукције крутости у зглобовима робота, што обезбеђује њихову стабилност у свим конфигурацијама, и то како приликом контаката са околином, тако и приликом кретања робота у слободном простору. Позиционо управљање се понаша као ниско пропусни филтар, тако да је контролер робустан на варијацију параметара и непрецизности модела робота који се користи за синтезу управљања. Предложене су различите имплицитне шеме управљања по силама, као што су шема управљања крутошћу система [5], или тзв. импедансна шема управљања [6]. Међутим, и имплицитне шеме управљања пате од одређених недостатака. Овде ћемо укратко навести главне предности и недостатке имплицитних шема управљања по силама.

(61) *Недовољно брз одзив.* Пошто се код оваквих шема сила остварује преко позиционог контролера, који се понаша као ниско пропусни филтар, то је одзив система на брзе промене силе релативно успорен. Зато овакве шеме често не могу постићи довољну брзину обраде, јер је неопходно успорити обраду како не би долазило до брзих поремећаја по силама које делују на хватаљку (алат).

(62) *Непрецизна реализација жељене силе.* Одређивање позиције (или брзине) робота која је еквивалентна жељеној сили, остварује се на бази усвојеног модела контактне силе. Како није лако прецизно утврдити форму модела силе и како је тешко идентификовати параметре модела силе, то је срачунавање еквивалентне позиције често недовољно прецизно. На пример, уколико се усвоји модел контактне силе у форми силе крутости, потребно је прецизно идентификовати тачку контаката и крутост контаката да би се могла одредити еквивалентна позиција. Одређивање ових параметара захтева изузетно високу прецизност сензора што је тешко остварљиво у индустријским условима. Слични проблеми се јављају и када се сила контакта понаша као сила пригушења.

(63) *Имплементациони проблеми.* Основана предност имплицитне шеме управљања по силама у односу на експлицитно хибридно управљање леже у чињеници да ова шема задржава стандардну конфигурацију управљачких јединица индустријских робота. Наиме, ова шема у потпуности задржава позиционо управљање какво је код стандардних индустријских контролера, и само захтева додатни модул за срачунавање еквивалентне позиције у правцима у којима робот треба управљати по сили. Ова шема се одликује високом поузданошћу и робушношћу, што је квалитетује за примену у индустријским условима.

Поред ова два основна приступа синтези управљања роботима у задацима са ограниченим кретањима хватаљке, постоје и други покушаји да се задовоље захтеви дефинисани у Одељку 2. На пример, често се користи динамичко управљање [7] код кога се управљање по сили само суперпонира на класично управљање по позицији. Међутим, овакве шеме се могу применити само на релативно једноставније задатке, где су у питању задаци манипулације када манипулациони механизми нису у контакту са околином, или се не захтева прецизно остваривање жељених сила. Детаљан преглед различитих шема управљања по позицији и по сили дат је у прилогу [8, 9].

Један од значајних проблема код управљања роботима у задацима овог типа је, како је горе напоменуто, ефекат динамичног спрезања између зглобова подсистема, односно између праваца који се управљају по позицији и праваца који се управљају по силама. Овај проблем јавља се код практично свих предложених шема управљања. Разматрана је могућност да се динамичко спрезање компензује преко динамичког управљања на бази on-line срачунавања динамике робота [10]. Међутим, модел динамике робота код оваквих задатака је изразито непоуздан, тешко је прецизно идентификовати параметре, те је стога и оваква компензација динамике робота непоуздана. Знатно веће шансе пружа решење преко компензације динамике робота на бази директног мерења сила (момента) у зглобовима робота [11, 12]. Међутим, недостатак оваквог решења је његова техничка сложеност и проблеми који се морају разрешити у вези са директном повратном спрегом по силама у зглобовима робота.

Међутим, и поред свих додатних управљачких ефеката на бази динамичке компензације међудејстава подсистема, уз предходно увођење комбинованих управљачких шема како експлицитног, тако и имплицитног управљања по сили, остаје у основи идеја раздвајања укупног система: робот-околина на правце у којима се контролише сила, од праваца у којима се контролише само позиција. Овакво раздвајање управљања је теоријски неприхватљиво јер, ако се изузму неки хипотетички случајеви, нема примера роботског, макар и најпростијег, механизма у коме се поменуто раздвајање позиције и силе може констатовати. Дакле, концепт хибридног управљања може се са теоријског становишта сврстати у класу некоректно постављених задатака, јер раздвајање правца на правце сила од праваца позиције не представља само просту апроксимацију коректно постављеног проблема, јер се на бази концепта хибридног управљања губе извесни феномени, што доводи у питање смисао тако постављеног проблема.

Коректно постављени задатак управљања робота у контакту са околином захтева симултано управљање по позицији и сили, чија се синтеза базира на својствима асимптотске стабилности уз истовремено задовољење жељеног квалитета прелазних режима кретања (померања) и силе контакта [13, 14].

Поменута примедба на управљање по позицији и сили односи се у првом реду на првобитну верзију хибридног управљања [1, 2], док су каснији покушаји компензације динамичких ефеката робота у контакту са околином, у практичном смислу, допекле ублажили основни недостатак првобитног управљачког алгорита [9, 15, 17].

4. Адаптивни алгоритам управљања роботима по позицији и по сили

У даљем тексту укратко ћемо приказати један нови адаптивни алгоритам за управљање роботима у задацима са ограниченим кретањем хваталке. Алгоритам се у основи базира на имплицитном управљању по сили, али се уводи и експлицитна повратна спрега по силама. Најпре ћемо размотрити модел динамике робота у задацима у којима хваталка долази у контакт са околином, а затим ћемо приказати основне карактеристике предложене шеме управљања.

За симулацију и синтезу управљања роботима могу се користити различити модели робота. Посматрајмо робот са $n = 6$ степени слободe чија је хваталка (или алат који хваталка носи) у контакту са ограничавајућом површином (предметом који се обрађује). Модел робота се састоји од модела динамике механизма и модела актуатора. Модел динамике механизма може се усвојити у следећој форми:

$$P = H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + J^T F \quad (1)$$

где је q ($n \times 1$) вектор углова зглобова робота, P је ($n \times 1$) вектор момената у зглобовима, H је ($n \times n$) матрица инерције, h је ($n \times 1$) вектор гравитационих, центрифугалних и Coriolisovih сила, J је ($n \times n$) Јacobian матрица у односу на тачку контакта између хваталке, (алата) и површине са којима је робот у контакту, F је (6×1) вектор сила и момената реакције преко којих површина делује на хваталку робота (3 компоненте силе и 3 компоненте момента у односу на Cartesian-ски координатни систем.

Модели актуатора (на пример једносмерних електромотора) који покрећу зглобове могу се усвојити у линеарној форми у простору стања:

$$\dot{x}^i = A^i x^i + b^i N(u^i) + f^i P_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

где је x^i ($n_i \times 1$) вектор стања i -тог актуатора, A^i је ($n_i \times n_i$) матрица система, b^i , f^i су ($n_i \times 1$) вектори дистрибуције улаза и силе, u^i је скаларни улаз у i -ти актуатор, $N(u^i)$ је нелинеарност типа амплитудног засићења, P_i је оптерећење које делује на i -ти актуатор, а n_i је ред модела актуатора у простору стања. Ако се усвоје једносмерни електромотори, тада се може узети да је ред модела $n_i = 2$ и да је $n^i = (q^i, \dot{q}^i)^T$.

Укупан модел система добија се комбиновањем модела (1) и (2). Очигледно да у овом моделу нису укључени еластични ефекти у зглобовима и сегментима механизма робота, као ни зазори у механичком преносу.

Ако се претпостави да је крутост хватаљке робота и ограничавајуће површине са којом је робот у контакту коначна, тада се сила контакта F може моделирати као сила крутости:

$$F = -K_E(P - P_E) \quad (3)$$

где је K_E $n \times n$ матрица "крутости околине" (која може да укључи еквивалентну крутост хватаљке робота и сензора силе којим се мери сила контакта), p је $(n \times 1)$ вектор Cartesian-ских координата хватаљке (или алата) за тачку на хватаљци у којој долази до контакта између ње и ограничавајуће површине (вектор укључује три координате позиције и три координате оријентације хватаљке), P_E је $(n \times 1)$ вектор координата тачке судара између хватаљке и површине.

У неким процесима (на пример одсецање оштрих ивица, сечење уопште и сл.) сила контакта понаша се као сила пригушења:

$$F = K_D \dot{p} \quad (4)$$

где је K_D $(n \times n)$ матрица "пригушења околине".

У раду [15] предложена је имплицитна шема управљања која се базира на директној идентификацији карактеристика контакта. Да би се идентификовали параметри контакта, мора се користити одређени модел силе контакта. Уколико се усвоји модел силе крутости (3) као модел силе контакта, тада се крутост контакта може идентификовати на бази мерења силе контакта F , на следећи начин (претпостављајући да је матрица крутости дијагонална):

$$\hat{K}_E^i = F_i(p^i - p_E^i)^{-1} \quad (5)$$

где је \hat{K}_E^i i -ти дијагонални елемент идентификоване матрице крутости \hat{K}_E . Тачка контакта (судара) P_E може се релативно лако идентификовати одређивањем тренутка када се сила контакта мења од нуле на неку коначну вредност. Идентификацијом \hat{K}_E^i и p_E^i могуће је одредити еквивалентну позицију жељеној сили у i -том правцу $F_i^0(t)$:

$$p_{EKV}^i = \hat{K}_E^{i-1} F_i^0(t) + p_E^i \quad (6)$$

Међутим, како је горе наведено, идентификацију \hat{K}_E^i и p_E^i није лако практично остварити. Експериментална испитивања показала су да са стандардним компонентама није могуће довољно прецизно идентификовати ове параметре, тако да и одређивање еквивалентне позиције жељеној сили није довољно прецизно. То може изазвати незадовољавајућу реализацију жељене силе.

Да би се побољшала прецизност реализације жељене силе, овде се предлаже модификована шема управљања која укључује неке додатне елементе:

- (a) Уместо да се еквивалентна позиција срачунава на бази жељене силе (6), она се срачунава користећи грешку по сили, тј. на бази разлике између вредности жељене силе $F_i^0(t)$ и стварне силе $F_i(t)$ која се мери преко давача сила на хватаљци робота.
- (b) Уводи се нови елемент g_F у шеми управљања који има задатак да интеграл грешку по сили на такав начин да је еквивалентна позиција пропорционална интегралу грешке по сили. На овај начин се постиже редукација грешке устаљеног стања при реализацији жељене силе (која настаје услед грешака у идентификацији параметара контакта). Наиме, еквивалентна позиција се стално модификује сразмерно интегралу грешке по сили, те се на тај начин редукује грешка устаљеног стања.

Предложена шема управљања приказана је на сл. 1. Ознаке коришћене на шеми су следеће:

$\Delta F = F - F^0(t)$ представља $(n \times 1)$ вектор грешке по сили,

S је $(n \times n)$ дијагонална матрица селективности, чији је i -ти елемент на дијагонали једнак 1 ако се робот у i -том правцу управља по сили, а једнак 0 ако се робот у i -том правцу управља по позицији,

K_p , K_V , K_I представљају $(n \times 1)$ векторе појачања повратних спрега по позицији, брзини и интегралу грешке по позицији, респективно (односно то су појачања локалних сервосистема у зглобовима робота),

$f(g)$ представља трансформацију (пресликавање) из унутрашњих углова зглобова q у спољашње координате робота у односу на Cartesian-ски координатни систем p ,

$p^0(t)$, $\dot{p}^0(t)$ представљају $(n \times 1)$ векторе жељених позиција и брзина (трајекторија) хватаљке робота у односу на спољашњи Cartesian-ски координатни систем,

K_F представља $(n \times 1)$ вектор појачања повратних спрега по силама (појачања по грешци између жељене и стварне (мерене) силе на хватаљци),

K_{FI} је $(n \times 1)$ вектор појачања повратних спрега по интегралу грешке по сили,

\hat{g}_E представља модел силе контакта (који може бити у форми (3) или (4), или пак у некој другој форми зависно од конкретног процеса који се посматра),

g_E је стварна слика контакта (односно стварна релација између координата робота p и силе контакта F).

На слици је означен и блок за on-line срачунавање гравитационих момената у зглобовима \hat{g} , који има за циљ компензацију ових момената. Очигледно је да шема претпоставља управљање позицијом робота преко тзв. Cartesian-ског управљања (или управљања у спољашњим координатама [16] код кога се грешка по позицији формира на нивоу спољашњих координата. Међутим, предложеној шему управљања по сили ~~може~~ је применити и на класично позиционо управљање роботом преко локалних сервоа у зглобовима робота.

Блок за идентификацију \hat{g}_E остварује се преко (5) на горе објашњен начин (за случај када се сила контакта понаша као сила крутости). На бази идентификованих параметара контакта \hat{g}_E одређује се тзв. инверзни модел силе контакта \hat{g}_E^{-1} . У случају када се усвоји модел у форми силе крутости (3), инверзни модел дат је са (6), те се преко њега добија еквивалентна позиција $\Delta p'_{EQ}$:

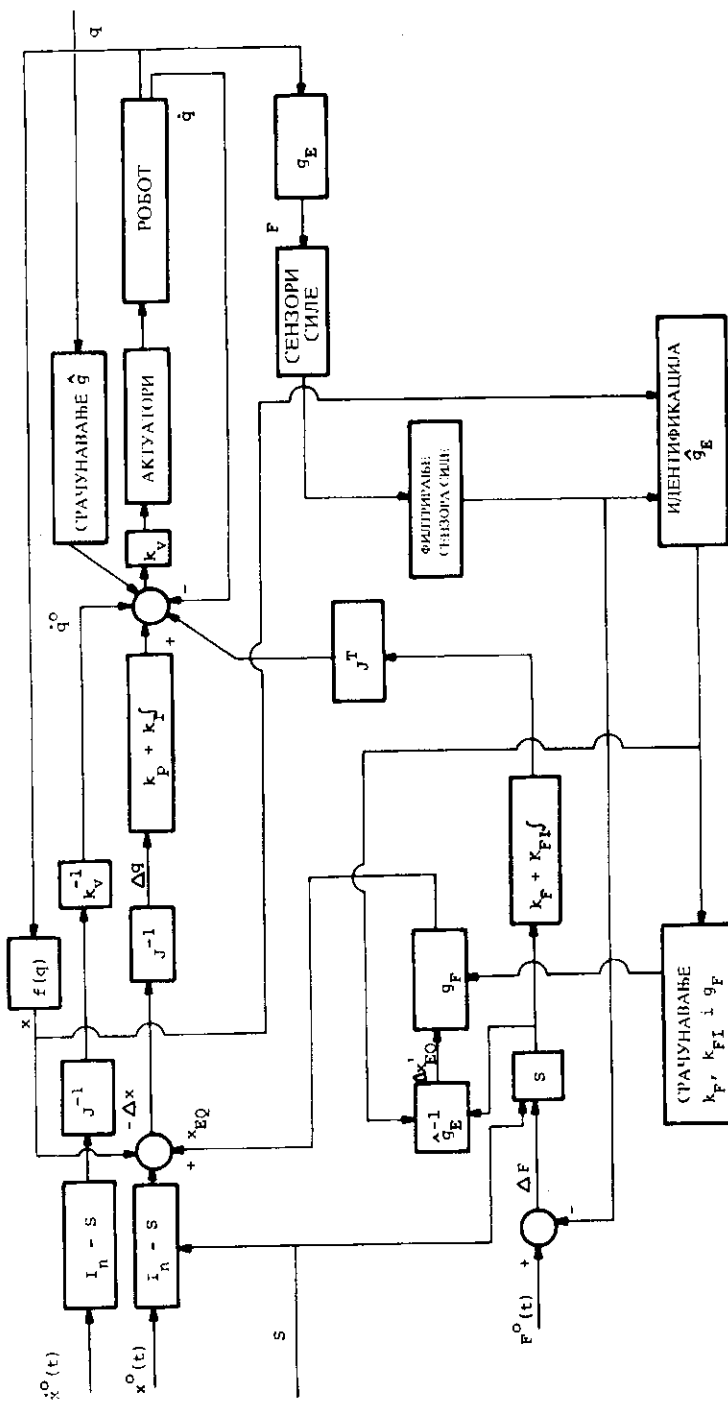
$$\Delta p'_{EQ} = \hat{g}_E^{-1} \Delta F = K_E^{-1} \Delta F. \quad (7)$$

Међутим, како је горе објашњено, уместо да се овако срачуната еквивалентна позиција директно реализује преко позиционог управљања, у предложеној шеми уведен је елемент g_F који има задатак да интегрални еквивалентну позицију $\Delta p'_{EQ}$ како би се редуковала грешка устаљеног стања.

Да би се при подешавању укупног система оставило довољно слободе, предложено је да се елемент g_F усвоји у форми двоструког интегратора. Према томе, преносна функција овог елемента у S -домену за један правац може се написати као:

$$g_F(S) = \frac{p_{EQ}}{\Delta p'_{EQ}} = \frac{\hat{m}S + \hat{b}S + \hat{K}_p}{\hat{K}_p(\hat{m}S + \hat{b})S} \quad (8)$$

где су \hat{m} , \hat{b} и \hat{K}_p параметри које треба одредити током синтезе управљања. Основна претпоставка при синтези овог блока је да његов пропусни опсег мора бити испод пропусног опсега позиционог контролера тако да сигнал који представља излаз из блока g_F (тј. еквивалентна позиција p_{EQ}) мора бити прецизно остварен преко позиционог контролера. Другим речима, то значи да се може претпоставити да је преносна функција позиционог контролера једнака јединици. То такође значи да елемент g_F диктира понашање укупног система, тј. да g_F обликује "импендансу" контакта између робота и ограничавајуће површине. Избором параметара \hat{m} , \hat{b} и \hat{K}_p може се диктирати карактеристична учестаност и фактор пригушења укупног система. Карактеристична учестаност система мора бити испод



Сл. 1. Модификована адаптивна хибридна шема управљања

пропусног опсега позиционог контролера, док фактор пригушења мора бити већи (или једнак) 1, да би се избегли прескоци у реализацији жељене силе.

Како се види на сл. 1., шема укључује и експлицитну повратну спрегу по силама, и то линеарну повратну спрегу (појачање K_F) и интегралну повратну спрегу (појачање K_{FI}). Улога ове експлицитне повратне спреге је двојака:

(а) Преко експлицитне повратне спреге могу се компензовати ефекти силе трења, као и други поремећаји по силама (и то не само у правцима који се управљају по сили већ и у правцима који се управљају по позицији).

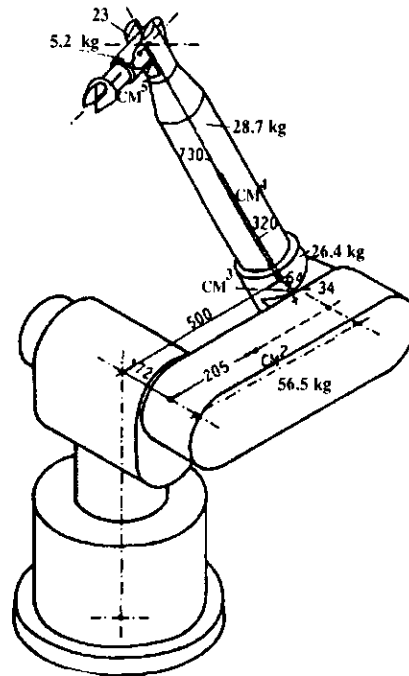
(б) Експлицитна повратна снага по силама повећава робустност система на грешке у идентификацији непознатих параметара система. При одређивању параметара елемента g_F потребно је користити идентификоване вредности крутости контакта (или пригушења) као и еквивалентно позиционо појачање позиционог контролера. Како је идентификација ових параметара увек у одређеној мери недовољно прецизна, то може изазвати неадекватан избор параметара елемента g_F који практично дефинишу понашање система. Показује се [17] да примена експлицитне повратне спреге по силама смањује осетљивост перформансе система на грешке у идентификацији наведених параметара.

У шеми на сл. 1. уведен је блок за адаптацију параметара управљања у складу са идентификованим параметрима контакта. Наиме, како је раније објашњено, при промени карактеристика контактне површине мењају се перформансе укупног система (на пример долази до промене еквивалентне крутости система). Иако је предложена шема управљања робустна на мање варијације параметара, она ипак не може да савлада велике промене карактеристика материјала са којим робот долази у контакт у случају када се исти робот користи за обраду различитих врста материјала. Зато је неопходно увести блок за адаптацију који врши измену параметара елемента g_F , као и појачања у експлицитним повратним спрегама по силама K_F и K_{FI} . Изменом ових параметара постиже се адаптација система на измењене околности у којима се одвија технолошки процес: измену облика и материјала предмета који се обрађује, измену брзине обраде и сл. Измена параметара управљања у зависности од идентификованих параметара контакта \hat{g}_E остварује се према једноставном алгоритму који има за циљ да обезбеди жељену карактеристичну учестаност система, надкритично пригушење, као и да максимизира робустност система на грешке при идентификацији параметара система. На тај начин се постиже да када дође до измене услова технолошког процеса, систем се сам адаптира и није потребно да корисник подешава управљање при свакој измени услова задатка. Тиме се постиже и једноставније репрограмирање робота, јер корисник треба да зада само измене услова технолошког процеса, док је адаптација управљачких параметра ау-

томатска. То значи да блок за адаптацију, као и за идентификацију \hat{g}_E , мора бити повезан са системом за репрограмирање како би се алгоритми за адаптацију мењали зависно од репрограмираних услова задатка.

5. Резултати испитивања предложене шеме

Предложена шема управљања примењена је на индустријском роботу MANUTEC-R3 који је приказан на сл. 2. Геометријски и динамички параметри робота детаљно су специфицирани у [18]. Робот се управља класичним контролером који остварује поуздано и робустно управљање позицијом робота.



Сл. 2. Индустријски робот - *Manutec R3*

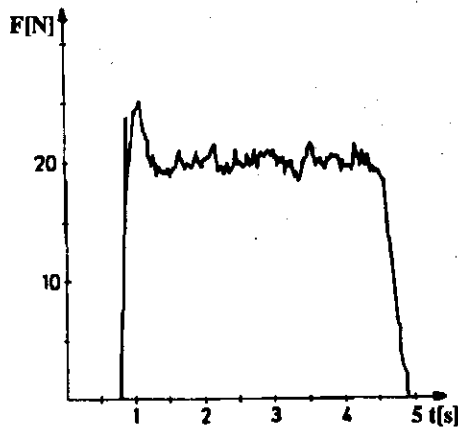
Да би се робот применио у технолошким задацима као што су одсецање оштрих ивица и сл., управљачка јединица је проширена са елементима за управљање по силама: експлицитна повратна спрега по силама (на бази сила контакта мерених преко давача сила постављених у корену хватаљке робота), блок за идентификацију параметара контакта, блок за адаптацију, блок за срачунавање еквивалентне позиције (брзине) и блок g_F који игра улогу двоструког интегратора (ради повећања робустности система).

Шема управљања је примењена на задатак одсецања оштрих ивица код кога се сила контакта може моделирати као сила пригушења (4). У односу на досад разматрану шему управљања разлика је у томе што је у овом случају потребно идентификовати пригушење контакта K_D и затим одредити еквивалентну брзину $\Delta \dot{p}'_{EQ}$ (уместо еквивалентне позиције) на основу:

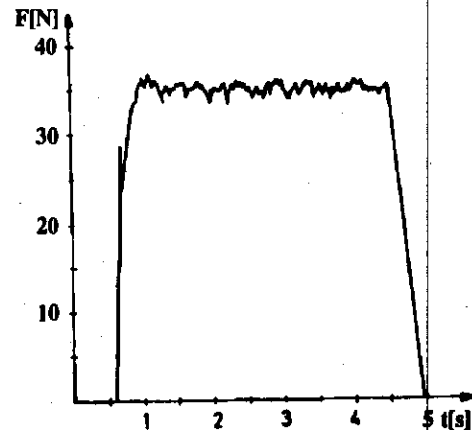
$$\Delta \dot{p}'_{EQ} = \hat{K}_D^{-1} \Delta F. \quad (9)$$

Еквивалентна брзина која се остварује преко позиционог класичног контролера добија се интеграцијом $\Delta \dot{p}'_{EQ}$ у елементу g_F . Елемент g_F остаје неизмењен у односу на случај када је сила контакта у форми силе крутости.

Симулиран је комплетни динамички модел робота и технолошког процеса [15]. Резултати симулације приказани су на сл.3. и 4. Коefицијент пригушења силе контакта (4) износио је $K_D = 4000 \text{ N/(m/s)}$. У првом случају симулиран је задатак када се желело да робот сече ивицу



Сл. 3. Симултациони резултати:
без *on-line* идентификације K_D



Сл. 4. Симултациони резултати:
са *on-line* идентификацијом K_D

примењујући силу од $F^0 = 20 \text{ [N]}$. Према томе, у правцу сечења задаје се ова жељена сила, док се у осталим правцима захтева да хватаљка не мења своје координате. На сл.3. приказани су резултати симулације када *on-line* идентификација коефицијента пригушења није укључена у шему. Прелазни процес у постизању жељене силе сечења у овом случају није задовољавајући, док је понашање система у устаљеном режиму прихватљиво. На сл.4. приказан је случај када је укључен блок за *on-line* идентификацију фактора пригушења. У овом случају реализација силе сечења је знатно боља. Жељена сила сечења у овом случају је $F^0 = 35 \text{ [N]}$. Ови резултати показују да се предложена шема управљања може успешно

применити за процес сечења. С друге стране, резултати показују предности примене адаптивног управљања на бази идентификације параметара технолошког процеса.

Предложена шема управљања испитана је експериментално. Резултати експерименталног тестирања показују добро слагање са симулационим резултатима.

6. *Закључак*

Овде ћемо укратко размотрити основне карактеристике предложеног адаптивног хибридног управљања роботима у односу на захтеве који се постављају при управљању роботима у задацима са ограниченим кретањем хваталке:

1. Предложена шема обезбеђује поуздано и прецизно остваривање задатих трајекторија како по позицији тако и по сили. За остваривање позиција користи се класични контролер чија је поузданост испитана током дугогодишње праксе, и који у овом случају није ни у чему измењен. Остваривање жељене силе гарантовано је увођење интегралног блока који елиминира грешку устаљеног стања.

2. Управљање гарантује високу стабилност и робустност система на мале варијације услова задатка, док блок за адаптацију обезбеђује аутоматско прилагођавање управљачких параметара система у измењеним условима.

3. Како је раније објашњено, предложена шема даје добре могућности да се оствари једноставно и лако репрограмирање задатака. Шема може да покрије широк спектар облика и материјала од којег је начињен предмет који се обрађује, те се тако може постићи знатно шира примена робота него што је могуће са специјализованим NC-машинама.

4. Пошто је шема адаптивна, довољно је да корисник зада измену услова технолошког задатка, а управљачки систем ће се сам прилагодити и адаптирати управљачке параметре (појачања повратних спрега и сл.).

5. Висока поузданост система је обезбеђена јер контролер максимално користи постојећу управљачку јединицу чија је примена у индустријским условима проверена.

6. Основна предност предложене шеме у односу на експлицитно хибридно управљање [1, 2] лежи у њеној сличности са стандардном конфигурацијом контролера робота који се користи у индустријској пракси. Наиме, предложена шема захтева само проширење стандардне конфигурације управљачке јединице, без икаквих радикалних измена у постојећим модулима. На тај начин је обезбеђено знатно лакше прихватање од стране индустрије, једноставнија инсталација и одржавање система.

Основни недостатак предложене шеме може бити њен релативно спор одзив на поремећаје по сили. Ова шема је спорија од оне предложене у

раду [15] услед присуства елемента g_F . Међутим, присуство филтара на давачима сила (који се практично морају применити у свакој шеми управљања по силама) такође успорава одзив система. Према томе, иако је пропусни опсег предложене шеме релативно низак, питање је да ли се у пракси и једна шема може остварити са брзим одзивом уколико се жели гарантовати висока поузданост система.

Треба на крају нагласити да су једном оваквом предложеном управљачком шемом управљања по позицији и сили контакта исцрпљене све могућности практичног побољшања конвенционалног хибридног управљања.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. T. M a s o n, *Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators*, IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-11, No. 6. 1981.
- [2] M. H. R a i b e r t, J. J. C r a i g, *Hybrid Position/Force of Manipulators*, ADME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 102, June, 1981.
- [3] H. C. A n, C. G. A t k e s o n, J. M. H o l l e r b a c h, *Model-Based Control of a Robot Manipulator*, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1988.
- [4] D. M. S t o k i ć, *Constrained Motion Control of Manipulation Robots - A Contribution*, Robotica, Vol. 9, 157-163, 1991.
- [5] J. K. S a l i s b u r y, *Active Stiffness Control of a Manipulator in Cartesian Coordinates*, Proc. of the 19th IEEE Conference on Decision and Control, Albuquerque, 1980.
- [6] N. H o g a n, *Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part I-Theory, Part II-Implementation, Part III-Application*, Trans. of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 107, 1-24, 1985.
- [7] M. K. V u k o b r a t o v i ć, D. M. S t o k i ć, *Control of Manipulation Robots, Research Monograph*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [8] D. E. W h i t n e y, *Historical Perspectives and State of the Art in Robot Force Control*. The International Journal of Robotics Research, No.1, 1987.
- [9] D. M. S t o k i ć, *Hybrid Position/Force Control of Robots; Problem and Application to Deburring Process*, Report, Fraunhofer Institute, IPK, Berlin, 1989.
- [10] O. K h a t i b, *A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol.3, No. 1, 43-53, 1987.
- [11] H. C. A n, J.M. H o l l e r b a c h, *The Role of Dynamic Models in Cartesian Force Control of Manipulators*, The International Journal of Robotics Research, Vol.8, No.4, 1989.
- [12] M.K. V u k o b r a t o v i ć, D.M. S t o k i ć, *Is Dynamic Control Needed in Robotic Systems, and IF-SO to What Extent?* International Journal of Robotic Research, No.2, 1983.
- [13] M.K. V u k o b r a t o v i ć, Yu. E k a l o, *Unified Approach to Control Laws Synthesis for Robotic Manipulators in Contact with Dynamic Environment*, Tutorial S5: Force and Contact Control in Robotic Systems, Proc. IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, 213-229, Atlanta, 1993.
- [14] Yu. E k a l o, M.K. V u k o b r a t o v i ć, *Robust and Adaptive Position/Force Stabilization of Robotic Manipulators in Contact Tasks*, International Journal Robotica, Vol. 11, 373-386, 1993.

- [15] D.M. Stokić, D. Šurdilović, *Simulation and Control of Robotic Deburring*, Int. Journal of Robotics - Automation, Vol.5, No.3, 1990.
- [16] M.K. Vukobratović, D.M. Stokić, *Applied Control of Manipulation Robots: Analysis, Synthesis and Exercises*, TeXbook, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [17] D.M. Stokić, M.K. Vukobratović, D. Šurdilović, *An Adaptive Hybrid Control Scheme for Manipulation Robots with Implicit Force Control*, Proc. of the Symp. '91 ICAR, Piza, 1991.
- [18] M. Otter, S. Turk, *The DFVLR Models 1 and 2 of the MANUTEC-R3 Robot*, Report of DFVLR Institute, Oberpfaffenhofen, 1988.

M. Vukobratović, D. Stokić

ADAPTIVE HYBRID CONTROL OF ROBOTS

S u m m a r y

In contrast to the traditional position and force control, an adaptive algorithm for force and position control based on the so-called implicit force control, is proposed. This understands calculating the position equivalent to the desired force. This equivalent position is then realized via the classic position control. In that way the problem of the conventional hybrid control, where the position/force control exhibits opposite demands concerning the servosystem stiffness, is successfully solved. In the proposed way the problem of system robustness is also solved and a realistic bases for the application in cases of various tasks of robot mechanical metal processing, created. The first results of the proposed scheme testing on a concrete robotic system are presented.

Ђ.М. ЗЛОКОВИЋ

ЈЕДНАЧИНЕ КРУТОСТИ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА У G -ИНВАРИЈАНТНИМ ПОТПРОСТОРИМА

(Примљено на VIII скупу Одељења, 19. маја 1992)

Једначине крутости коначних елемената са особинама симетрије формулишу се у G -инваријантним потпросторима групно суперматричним поступком који је развио аутор. Декомпозицијом функције поља померања у функције са типом симетрије свога потпростора, извођењем функција облика елемената у G -инваријантним потпросторима и њиховом применом формулишу се матрице крутости и једначине крутости за сваки потпростор посебно. Овим поступком овде су изведене једначине крутости у G -инваријантним потпросторима за гредни елемент, за правоугаони елемент за анализу равнoг стања напрезања и за правоугаони елемент за анализу савијања плоче. Поступак даје једначине крутости са групним суперматрицама у нормалном и дијагоналном облику, које се претварају једна у другу групно суперматричним трансформацијама. У поређењу са конвенционалним методама извођење и коришћење једначина крутости елемената у G -инваријантним потпросторима пружају знатне квалитативне и квантитативне предности.

1. *Групно суперматрични поступак за извођење једначина крутости у G -инваријантним потпросторима*

Када својства симетрије неког коначног елемента са својом чворном шемом могу да се опишу групом G , могућно је извођење једначине крутости елемената са матрицом у блок дијагоналном облику којом се формулишу једначине крутости у G -инваријантним потпросторима.

Групно суперматрични поступак за извођење једначина крутости у G -инваријантним потпросторима је систематизован у 11 корака. Кораци 1 до 8 одговарају поступку за извођење функција облика у G -инваријантним потпросторима, датим у мом раду 'Функције облика коначних елемената у

G -инваријантним потпросторима'. Кораци 9 до 11 садрже извођење матрица крутости у G -инваријантним потпросторима и једначине крутости са групном суперматрицом крутости у нормалном облику, као и трансформације у једначину крутости у конвенционалном облику, и обрнуто.

(1) *Увођење јединствене групно суперматричне нумерације чворова*

Јединствене нумерације чворова за елементе са својствима симетрије описане различитим групама изведене су у мом раду 'Концепт групних суперматрица и примена на коначне елементе'. Кад група G описује својства симетрије елемента и чворне шеме, чворови се групишу у један или више непреклапајућих скупова S_1, S_2, \dots, S_l који фигуришу у формулацијама оптималне нумерације чворова.

Пошто се координате свих чворова једног скупа чворова могу генерисати дејством операција симетрије групе G на један једини чвор, у свим анализама у групно суперматричном поступку биће коришћени само први чворови у скуповима чворова S_1, S_2, \dots, S_l .

(2) *Извођење базисних вектора G -инваријантних потпростора.*

Скуп позитивних смерова генералисаних померања чворова и сила елемената мора одговарати првом типу симетрије групе, тако да се конфигурација чворова преводи у саму себе сваком операцијом симетрије групе.

Кад је у некој чворној шеми n_n укупни број чворова који су дејством од G пермутирани у оквиру једног јединог скупа чворова, и када је l број степени слободе у свим чворовима, укупни број степени слободе и димензија G -векторског простора је $n = n_n l$. Тада свако специфично генералисано померање формира свој скуп чворних функција, формулишући тако скупове S_1, S_2, \dots, S_l који одговарају компоненталним функцијама померања. Секвенце ових скупова и њихових функција су утврђене сагласно са нумерацијом чворова, како је дато у мом раду 'Функције облика коначних елемената у G -инваријантним потпросторима'.

Таблица карактера групе G , са картезијанским скуповима и продуктима који се користе у кораку (4) за извођење функција поља померања у G -инваријантним потпросторима, даје карактере иредуцибилних репрезентација група за одређивање идемпотената центра групне алгебре.

Применом идемпотената π_i ($i = 1, 2, \dots, k$), где је k број иредуцибилних репрезентација групе, на чворне функције φ_j ($j = 1, 2, \dots, n$), изводе се базисни вектори $\bar{\varphi}_j$ G -инваријантних потпростора.

(3) *Формулисање релација базисних вектора и чворних функција као система једначина са суперматрицом у дијагоналном облику.*

Ове релације су изложене у мом раду 'Функције облика коначних елемената у G -инваријантним потпросторима'.

- (4) *Извођење функције поља померања декомпоноване у G -инваријантне потпросторе.*

Примена полинома поља померања са члановима уређеним према својој припадности типовима симетрије групе, са циљем да се произведу функције поља померања у G -инваријантним потпросторима, изведена је у мом претходно поменутом раду за елементе који имају чворове са једним степеном слободе. Када чворови поседују l степени слободе, ова процедура даје $ln_i \times ln_i$ матрицу за потпростор U_i , где је n_i димензија потпростора када чворови имају један степен слободе.

- (5) *Извођење релација генералисаних померања Φ са коефицијентима A у G -инваријантним потпросторима.*

Замена чворних координата првих чворова у скуповима чворова S_1 у секције полиномске функције померања које одговарају потпросторима U_1, U_2, \dots, U_k , даје релације генералисаних померања Φ са коефицијентима A за сваки потпростор посебно, тј. систем једначина са суперматрицом у дијагоналном облику (в. мој претходно поменути рад).

- (6) *Одређивање коефицијената A у G -инваријантним потпросторима.*

Коефицијенти A_i се добијају инверзијом матрица \bar{C}_i потпростора U_i .

- (7) *Формулисање поља померања у G -инваријантним потпросторима.*

n -димензионални G -векторски простор поља померања Δ се декомпонује у k G -инваријантних потпростора U_1, U_2, \dots, U_k са n_1, n_2, \dots, n_k димензија, како је дато у мом претходно поменутом раду.

- (8) *Извођење функције облика \bar{N} елемената у G -инваријантним потпросторима.*

Функције облика $\bar{N}^{(i)}$ добијају се за сваки потпростор U_i посебно, како је показано у мом претходно поменутом раду.

- (9) *Извођење матрица крутости \bar{K}_i у G -инваријантним потпросторима.*

Коришћењем функција облика \bar{N}_i у G -инваријантним потпросторима U_i , добијају се матрице крутости \bar{K}_i које одговарају потпросторима U_i , тако да је суперматрица крутости у дијагоналном облику

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}_1 & & & \\ & \bar{K}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \bar{K}_k \end{pmatrix} = \text{Diag} [\bar{K}_1 \ \bar{K}_2 \ \dots \ \bar{K}_k].$$

- (10) Трансформација једначине крутости са групном суперматрицом крутости у дијагоналном облику у једначину крутости са групном суперматрицом крутости у нормалном облику.

Једначина крутости са групном суперматрицом крутости у дијагоналном облику

$$\begin{pmatrix} \bar{K}_1 & & & \\ & \bar{K}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \bar{K}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \\ \dots \\ \bar{\Phi}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}^{(1)} \\ \bar{P}^{(2)} \\ \dots \\ \bar{P}^{(k)} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{P},$$

трансформише се у једначину крутости $K\Phi = P$ са групном суперматрицом крутости у нормалном облику групно суперматричном трансформацијом

$$T^{-1}\bar{K}TT^{-1}\bar{\Phi} = T^{-1}\bar{P},$$

што је изведено у мом раду 'Концепт групних суперматрица и примена на коначне елементе'.

- (11) Трансформација једначине крутости са групном суперматрицом крутости у нормалном облику у конвенционалну једначину крутости.

Ова трансформација се остварује променом нумерације чворова, уведене групно суперматричном анализом, у конвенционалну нумерацију, и променом скупова позитивних смерова генералисаних померања чворова, који одговарају првом типу симетрије групе, у конвенционални скуп позитивних смерова генералисаних померања чворова.

* * *

Коришћењем одговарајућих инверзних трансформација у процедурама корака (11) и (10) обрнутим редоследом, конвенционална једначина крутости се трансформише у једначину крутости са групном суперматрицом крутости у нормалном облику. После тога ова једначина се трансформише у једначину крутости са групном суперматрицом крутости у дијагоналном облику, како је показано у мом раду 'Концепт групних суперматрица и примена на коначне елементе'.

* * *

У следећим одељцима групно суперматрични поступак је примењен за извођење једначина крутости у G -инваријантним потпросторима за гредни елемент, правоугаони елемент за анализу равнoг стања напрезања и правоугаони елемент за анализу савијања плоче, са упоређењима извођења на конвенционални начин и помоћу групно суперматричног поступка.

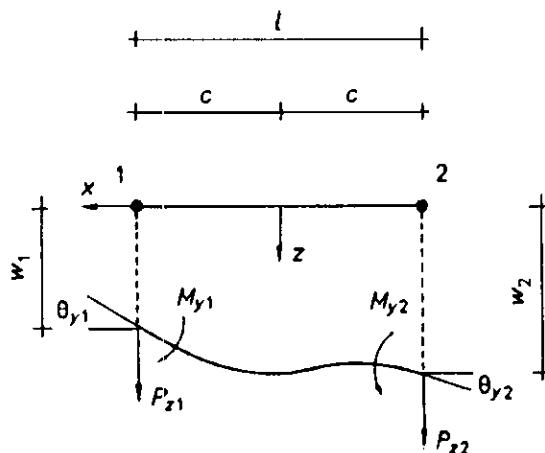
Групно суперматрични поступак за извођење једначина крутости у G -инваријантним потпросторима аутор је развио на основу коначних елемената које су увели

- Argyris, J. H. и Kelsey, S. (1960): правоугаони елемент са четири чвора за равно стање напрезања,
- Adini, A. и Clough, R. W. (1961): правоугаони елемент са 12 степени слободе напрегнут на савијање,
- Bogner, F. K., Fox, R. L. и Schmit, L. A. (1966): правоугаони елемент са четири чвора и 16 степени слободе напрегнут на савијање.

Поред тога коришћена су објашњења и подаци из Dawe, D. J. (1984), Rockey K. C. et al. (1975) и Yang, T. Y. (1986).

2. Једначине крутости у G -инваријантним потпросторима за гредни елемент

Гредни елемент са два чвора, дат на сл. 1, са нумерацијом чворова установљеном у мом раду 'Концепт групних суперматрица и примена на коначне елементе' (чвор 1 лежи на позитивној грани x -осе), описан је групом C_2 и има позитивне смерове од w_1 , w_2 , θ_{y1} , θ_{y2} , P_{y1} , P_{y2} , M_{y1} , M_{y2} који одговарају типовима симетрије прве иредуцибилне репрезентације



Сл. 1. Гредни елемент са два чвора и нумерацијом чворова групно суперматричног поступка

групе. Гредни елемент са два чвора има један скуп чворова $S(1, 2)$ чији су чворови пермутирани дејством операција симетрије групе: E (идентитет) и C_2 (ротација за 180° око z -осе).

Таблица карактера групе C_2 (са картезијанским скуповима и продуктима) је

C_2	E	C_2		
A	1	1	z	x^2, y^2, z^2, xy
B	1	-1	x, y	

Идемпотенти центра групне алгебре добијају се помоћу

$$\pi_i = \frac{h_i}{h} \sum_{\sigma} \chi_i(\sigma^{-1}) \sigma,$$

са h_i димензијом i -тог карактера датог са $h_i = \chi_i(E)$, h редом, h_i i -тим карактером, σ елементом, σ^{-1} инверзијом елемента и $i = 1, 2$. Применом идемпотената центра групне алгебре π_i

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \Pi = T\Sigma, \quad \text{са} \quad T^{-1} = 2T,$$

на чворне функције $\Phi^{(i)}$ изводе се базисни вектори $\bar{\Phi}^{(i)}$ G -инваријантних потпростора

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_3 \\ \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{y_1} \\ \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{y_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \theta_{y_1} \\ w_2 & \theta_{y_2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_1 + w_2 & \theta_{y_1} + \theta_{y_2} \\ w_1 - w_2 & \theta_{y_1} - \theta_{y_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или $\bar{\Phi} = T\Phi$, са $T^{-1} = 2T$.

Обрнуто, релација скупова чворних функција $\Phi^{(i)}$ са скуповима базисних вектора $\bar{\Phi}^{(i)}$ је

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \theta_{y_1} \\ w_2 & \theta_{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{y_1} \\ \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{y_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{w}_1 + \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{y_1} + \bar{\theta}_{y_2} \\ \bar{w}_1 - \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{y_1} - \bar{\theta}_{y_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или $\Phi = T^{-1}\bar{\Phi} = 2T\bar{\Phi}$.

Скупови $\bar{\Phi}_l$ који садрже базисне $\bar{\varphi}_j$ ($l = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$) и представљају $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{\theta}_{y_1}, \bar{\theta}_{y_2}$, уређени су како је дато у мом раду 'Функције облика коначних елемената у G -инваријантним потпросторима'

$$[\bar{\Phi}_1 \quad \bar{\Phi}_2] = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_3 \\ \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{y_1} \\ \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{y_2} \end{pmatrix}.$$

Релација скупова базисних вектора $\bar{\Phi}_l$ са скуповима чворних функција Φ_l изражена је следећим системом једначина са суперматрицом у дијагоналном облику која садржи две матрице трансформације T групе C_2

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \\ & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \bar{\Phi}_l = \bar{T}\Phi_l, \quad \text{са}$$

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (\Phi_1 \quad \Phi_2) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \theta_{y_1} \\ w_2 & \theta_{y_2} \end{pmatrix}.$$

Обрнуто, релација скупова чворних функција Φ_l са скуповима базисних вектора $\bar{\Phi}_l$ је

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} T & \\ & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \Phi_l = 2\bar{T}\bar{\Phi}_l, \quad \text{јер је} \quad T^{-1} = 2T.$$

Функција померања за гредни елемент се обично усваја у облику

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

$$\theta_y = \frac{dw}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$$

или

$$\delta(x, y) = \begin{pmatrix} w \\ \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{pmatrix} (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4)^T.$$

За групно суперматрични поступак помоћу следећег израза чланови у горњем полиному ће бити распоређени у одговарајуће G -инваријантне потпросторе где припадају и по јединственом редоследу чланова који даје блок дијагонални облик матрице система једначина релације померања \bar{U} са коефицијентима A

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} (1 \quad x^2) = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ x & x^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \end{matrix}$$

Вектор колона и вектор врста одговарају картезијанским скуповима и продуктима датим у додатку таблци карактера групе C_2 , који припадају типовима симетрије репрезентација групе A и B .

Тако, са $\theta_y = -\frac{dw}{dx}$, функција померања

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^2 & x & x^3 \\ 0 & -2x & -1 & -3x^2 \end{pmatrix} (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4)^T = (F_1 \quad F_2) (A_1 \quad A_2)^T$$

декомпонована је у два двовимензионална G -инваријантна потпростора U_1, U_2 .

Замена координате првог чвора у скупу чворова $S(1, 2)$, тј. $x = c$ за чвор 1, у функцијске матрице F_1, F_2 од $[w \quad \theta_y]^T$ које одговарају потпросторима U_1, U_2 , даће релације померања $\bar{\Phi}$ са коефицијентима A за сваки потпростор посебно

$$\begin{pmatrix} \frac{\bar{w}_1}{\bar{\theta}_{y1}} \\ \frac{\bar{w}_2}{\bar{\theta}_{y2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ \theta_{y1} + \theta_{y2} \\ w_1 - w_2 \\ \theta_{y1} - \theta_{y2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & c^2 & & \\ 0 & -2c & & \\ \hline & & c & c^3 \\ & & -1 & -3c^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{или } \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & \\ & \bar{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Четвородимензионални G -векторски простор проблема је сада декомпонован у два димензионална G -инваријантна потпростора U_1, U_2 .

Коефицијенти A се одређују инверзијом матрица \bar{C}_1, \bar{C}_2 у потпросторима U_1, U_2

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{2} & & \\ 0 & -\frac{1}{2c} & & \\ \hline & & \frac{3}{2c} & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 1 \\ \hline & & -\frac{1}{2c^3} & -\frac{1}{2c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \bar{C}^{-1} \bar{\Phi}.$$

Четвородимензионални G -векторски простор поља померања Δ , декомпонован у два димензионална G -инваријантна потпростора U_1, U_2 је

$$\Delta = T_D \bar{C}^{-1} \bar{\Phi},$$

$$\text{са } T_D = \text{Diag}[1 \quad x^2 \mid x \quad x^3]$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{2} & & \\ 0 & -\frac{x^2}{2c} & & \\ \hline & & \frac{3x}{2c} & \frac{x}{2} \\ & & x^3 & x^3 \\ \hline & & -\frac{1}{2c^3} & -\frac{1}{2c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \Delta = \bar{N}_\Delta \bar{\Phi}.$$

Функције облика $\bar{N}^{(i)}$ у G -инваријантним потпросторима добијају се помоћу

$$\bar{N}^{(i)} = S \bar{N}_\Delta, \quad \text{са } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mid & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{N}^{(1)} \\ \overline{N}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{2} - \frac{x^2}{2c} \\ \frac{3x}{2c} - \frac{x^3}{2c^3} & \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2c^2} \end{pmatrix}.$$

У потпростору U_1

$$\overline{B}_1 = -y \frac{d^2}{dx^2} \overline{N}^{(1)} = -y \frac{d^2}{dx^2} \left(1 \quad \frac{c}{2} - \frac{x^2}{2c} \right) = -y \left(0 \quad -\frac{1}{c} \right)$$

$$\overline{K}_1 = E \int_V \overline{B}_1^T \overline{B}_1 dV = E \int_A y^2 dy \int_0^c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix} dx = \frac{EI}{c^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

У потпростору U_2

$$\overline{B}_2 = -y \frac{d^2}{dx^2} \overline{N}^{(2)} = -y \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{3x}{2c} - \frac{x^3}{2c^3} \quad \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2c^2} \right) = -y \left(-\frac{3x}{c^3} \quad -\frac{3x}{c^2} \right)$$

$$\overline{K}_2 = E \int_V \overline{B}_2^T \overline{B}_2 dV = E \int_A y^2 dy \int_0^c \begin{pmatrix} \frac{9x^2}{c^6} & \frac{9x^2}{c^5} \\ \frac{9x^2}{c^5} & \frac{9x^2}{c^4} \end{pmatrix} dx = \frac{EI}{c^3} \begin{pmatrix} 3 & 3c \\ 3c & 3c^2 \end{pmatrix}.$$

На тај начин је добијена једначина крутости са матрицом крутости у блок дијагоналном облику, тј. са матрицама крутости G -инваријантних потпростора

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{K}_1 \\ \overline{K}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Phi}^{(1)} \\ \overline{\Phi}^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{EI}{c^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & \\ 0 & c^2 & | & \\ \hline & & 3 & 3c \\ & & 3c & 3c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \overline{\theta}_{y1} \\ \overline{w}_2 \\ \overline{\theta}_{y2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2EI}{l^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & \\ 0 & l^2 & | & \\ \hline & & 12 & 6l \\ & & 6l & 3l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \overline{\theta}_{y1} \\ \overline{w}_2 \\ \overline{\theta}_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{P}^{(1)} \\ \overline{P}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{F}_{z1} \\ \overline{M}_{y1} \\ \overline{F}_{z2} \\ \overline{M}_{y2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или $\overline{K} \overline{\Phi} = \overline{P}$.

Према мом поменутом раду ова једначина се може написати као

$$\begin{pmatrix} A + B & \\ & A - B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Phi}^{(1)} \\ \overline{\Phi}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{P}^{(1)} \\ \overline{P}^{(2)} \end{pmatrix}$$

и трансформисати у једначину крутости са групном суперматрицом крутости у нормалном облику помоћу следеће групно суперматичне трансформације

$$T^{-1} \bar{C} T T^{-1} \bar{\Phi} = T^{-1} \bar{P},$$

и применом на $\bar{K} \bar{\Phi} = \bar{P}$ дати

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & E \\ E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & \\ & A-B \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ E & -E \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} \\ \Phi^{(1)} - \Phi^{(2)} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} E & E \\ E & -E \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P^{(1)} + P^{(2)} \\ P^{(1)} - P^{(2)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(1)} \\ P^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = \frac{1}{2}[(A+B) + (A-B)], \\ B = \frac{1}{2}[(A+B) - (A-B)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{12EI}{2l^3} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 3l^2 \end{pmatrix} \right] = \frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{pmatrix} \\ B &= \frac{12EI}{2l^3} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 3l^2 \end{pmatrix} \right] = \frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} -12 & -6l \\ -6l & -2l^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

тако да се добија једначина крутости са групном суперматрицом крутости у нормалном облику

$$\frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & -6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & -2l^2 \\ \hline -12 & -6l & 12 & 6l \\ -6l & -2l^2 & 6l & 4l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{z1} \\ M_{y1} \\ P_{z2} \\ M_{y2} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad K\Phi = P.$$

Да би се добила једначина крутости у конвенционалном облику, позитивни смерови чворне ротације θ_{y2} и чворног момента M_{y2} морају се променити тако да одговарају конвенционалним позитивним смеровима, што се остварује помоћу

$$T_D K T_D T_D \Phi = T_D P, \quad \text{где је} \quad T_D = \text{Diag}[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1],$$

дајући $\theta'_{y2} = -\theta_{y2}$, $M'_{y2} = -M_{y2}$ и конвенционалну једначину крутости гредног елемента

$$\frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \hline -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta'_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{z1} \\ M_{y1} \\ P_{z2} \\ M'_{y2} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad K_C \Phi' = P'.$$

Обрнуто, помоћу $T_D K_C T_D T_D \Phi' = T_D P'$, горња једначина крутости се трансформише назад у једначину крутости са групном суперматрицом крутости у нормалном облику

$$K\Phi = P \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(1)} \\ P^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Једначина крутости са групном суперматрицом крутости у дијагоналном облику се добија применом групно суперматричне трансформације

$$TGT^{-1}T\Phi = TP,$$

на $K\Phi = P$, тако да је

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E \\ E & -E \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P^{(1)} \\ P^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A+B & \\ & A-B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}^{(1)} \\ \bar{P}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\frac{2EI}{I^3} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 0 & I^2 & & \\ \hline & & 12 & 6I \\ & & 6I & 3I^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}_{z1} \\ \bar{M}_{y1} \\ \bar{P}_{z2} \\ \bar{M}_{y2} \end{pmatrix}.$$

Табела 1 пружа упоређење извођења једначине крутости гредног елемента на конвенционални начин и помоћу групно суперматричног поступка (в. стр. 32).

3. Једначине крутости у G -инваријантним потпросторима за правоугаони елемент за анализу равног стања напрезања

Правоугаони елемент са четири чвора и осам степени слободе, дат на сл. 2(b), са јединственом нумерацијом чворова изведеном у мом раду 'Концент групних суперматрица и примена на коначне елементе', описан је групом C_{2v} , где позитивни правци померања $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4$ одговарају првом типу симетрије групе, што се разликује од конвенционалног скупа позитивних смерова на сл. 2(a).

Чворови скупа чворова $S(1, 2, 3, 4)$ су пермутирани дејством елемената групе, тј. операцијама симетрије E (идентитет), C_2 (ротација за 180° око z -осе), σ_1 и σ_2 (рефлексије у xz и yz равнима).

Таблица карактера групе C_{2v} (са картезијанским скуповима и продуктима) је

C_{2v}	E	C_2	σ_1 (xz)	σ_2 (yz)		
A_1	1	1	1	1	z	$x^2, y^2, z^2,$
A_2	1	1	-1	-1		xy
B_1	1	-1	1	-1	x	xz
B_2	1	-1	-1	1	y	yz

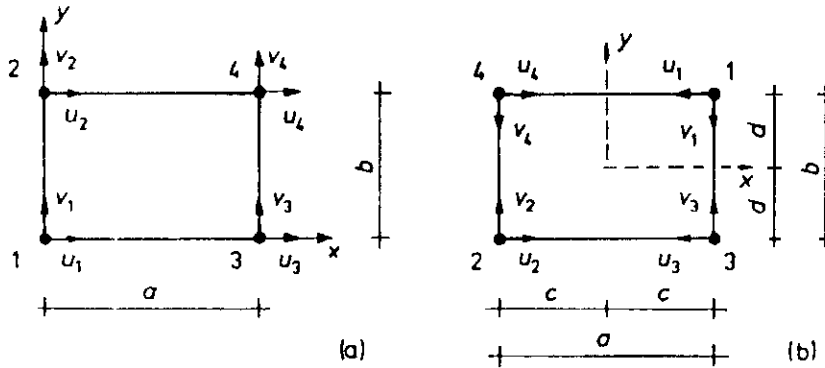
Таб. 1. Упоређење извођења једначине крутости гредног елемента на конвенционални начин и помоћу групно суперматричног поступка

	ИЗВОЂЕЊЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРУТОСТИ ГРЕДНОГ ЕЛЕМЕНТА СА ЧЕТИРИ СТЕПЕНА СЛОБОДЕ	
	на конвенционални начин	групно суперматричним поступком
Функција померања која разаниње простор ноља угиба	$\Phi' = \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta'_{y2} \end{pmatrix}$ простор V	$\bar{\Phi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ \theta_{y1} + \theta_{y2} \end{pmatrix} U_1$ $\bar{\Phi}^{(2)} = \begin{pmatrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_1 - w_2 \\ \theta_{y1} - \theta_{y2} \end{pmatrix} U_2$
Матрица која се инвертује за добијање кофицијената полиномске функције померања	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l^2 & 3l^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & c^2 & & 0 \\ 0 & -2c & & \\ \hline & & c & c^3 \\ 0 & & -1 & -3c^2 \end{pmatrix}$ $(c = l/2)$
Полиномска функција померања	$w = \left[1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] w_1 +$ $+ \left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \theta_{y1} +$ $+ \left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] w_2 +$ $+ \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \theta_{y2}$	потпростор U_1 $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{2} \\ 0 & -\frac{x}{2c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \end{pmatrix}$ потпростор U_2 $\Delta_2 = \begin{pmatrix} \frac{3x}{2c} & \frac{x}{2} \\ -\frac{x^2}{2c^2} & -\frac{x^2}{2c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{pmatrix}$
Матрица B у продукту $B^T B$	$B^T = -y \begin{pmatrix} -\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3} \\ -\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3} \\ -\frac{2}{l} - \frac{6}{l^2} \end{pmatrix}$	потпростор U_1 $\bar{B}_1 = -y \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \end{pmatrix}$ потпростор U_2 $\bar{B}_2 = -y \begin{pmatrix} -\frac{3x}{c^2} & -\frac{3x}{c^2} \end{pmatrix}$
Интеграција полинома	$\int_0^l \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \\ \# \\ \text{сим.} \\ \# \\ \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix} dx$ интеграција 10 троцланих полинома (# не-нула елемент)	$\int_0^{l/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \# & \\ \hline 0 & \# & \# \\ \text{сим.} & \# & \end{pmatrix} dx$ интеграција 4 једночлана полинома
Једначина крутости	$\frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta'_{y2} \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} P_{s1} \\ M_{y1} \\ P_{s2} \\ M'_{y2} \end{pmatrix}$	$\frac{2EI}{l^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 & \\ \hline 0 & 12 & 6l \\ & 6l & 3l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}_{s1} \\ \bar{M}_{y1} \\ \bar{P}_{s2} \\ \bar{M}_{y2} \end{pmatrix}$ (у блок дијагоналном облику)

док су идемпотенти центра групе алгебре

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ C_2 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

или $\Pi = T\Sigma$, са $T^{-1} = 4T$.



Сл. 2. Правоугаони елемент са четири чвора за анализу равног стања напрезања:
 (а) са конвенционалним скупом позитивних смерова померања чворова;
 (б) са скупом позитивних смерова померања чворова који одговарају типу симетрије прве иредуцибилне репрезентације групе C_{2v}

Применом идемпотената $\pi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ на чворне функције $\varphi_i (j = 1, 2, \dots, 8)$ добијају се базисни вектори $\bar{\varphi}_j$ G -инваријантних потпростора U_i

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \\ \bar{\Phi}^{(3)} \\ \bar{\Phi}^{(4)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_5 \\ \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_6 \\ \bar{\varphi}_3 & \bar{\varphi}_7 \\ \bar{\varphi}_4 & \bar{\varphi}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 & \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 & \bar{v}_3 \\ \bar{u}_4 & \bar{v}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 & v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\ u_1 + u_2 - u_3 - u_4 & v_1 + v_2 - v_3 - v_4 \\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 & v_1 - v_2 + v_3 - v_4 \\ u_1 - u_2 - u_3 + u_4 & v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или $\bar{\Phi} = T\Phi$, са $T^{-1} = 4T$.

Обрнуто, релација чворних функција $\Phi^{(i)}$ са базисним векторима $\bar{\Phi}^{(i)}$ је

$$\begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \\ \Phi^{(3)} \\ \Phi^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_5 \\ \varphi_2 & \varphi_6 \\ \varphi_3 & \varphi_7 \\ \varphi_4 & \varphi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 & \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 & \bar{v}_3 \\ \bar{u}_4 & \bar{v}_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4 & \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4 \\ \bar{u}_1 + \bar{u}_2 - \bar{u}_3 - \bar{u}_4 & \bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \bar{v}_3 - \bar{v}_4 \\ \bar{u}_1 - \bar{u}_2 + \bar{u}_3 - \bar{u}_4 & \bar{v}_1 - \bar{v}_2 + \bar{v}_3 - \bar{v}_4 \\ \bar{u}_1 - \bar{u}_2 - \bar{u}_3 + \bar{u}_4 & \bar{v}_1 - \bar{v}_2 - \bar{v}_3 + \bar{v}_4 \end{pmatrix}$$

Скупови $\bar{\Phi}_i (i = 1, 2)$ садрже базисне векторе $\bar{\varphi}_j (j = 1, 2, \dots, 8)$ који представљају $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$, уређене према секвенци изложеној у мом раду 'Функције облика коначних елемената у G -инваријантним потпросторима', дати су са

$$[\bar{\Phi}_1 \quad \bar{\Phi}_2] = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_5 \\ \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_6 \\ \bar{\varphi}_3 & \bar{\varphi}_7 \\ \bar{\varphi}_4 & \bar{\varphi}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 & \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 & \bar{v}_3 \\ \bar{u}_4 & \bar{v}_4 \end{pmatrix}$$

Релација скупова базисних вектора $\bar{\Phi}_i$ са скуповима чворних функција Φ_i је изражена следећим системом једначина са суперматрицом у дијагоналном облику која садржи две матрице трансформације T групе C_{2v}

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \\ & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \bar{\Phi}_i = T \Phi_i, \quad \text{са}$$

$$T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [\Phi_1 \quad \Phi_2] = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_5 \\ \varphi_2 & \varphi_6 \\ \varphi_3 & \varphi_7 \\ \varphi_4 & \varphi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{pmatrix}$$

Обрнуто, релација скупова чворних функција Φ_i са скуповима базисних вектора $\bar{\Phi}_i$ је

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} T & \\ & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \Phi = 4T \bar{\Phi}, \quad \text{јер је} \quad T^{-1} = 4T.$$

Функција померања за правоугаони елемент за анализу равнотежа напрезања обично се узима као

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy.$$

За групно суперматрични поступак следећим изразом се чланови горњег полинома распоређују у одговарајуће G -инваријантне просторе где припадају и са редоследом чланова који даје дијагонални облик суперматрице система једначина релације померања Φ са координатима A

$$\begin{aligned} [x \ y] \begin{pmatrix} 1 & 0 & xy & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & xy & 0 & x & 0 & y \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x & 0 & x^2y & 0 & x^2 & 0 & xy & 0 \\ 0 & y & 0 & xy^2 & 0 & xy & 0 & y^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где 1 , xy , x , y одговарају типовима симетрије репрезентације групе A_1, A_2, B_1, B_2 респективно, како је дато у додатку уз таблицу карактера групе C_{2v} . Пошто члан x^2y има исти тип симетрије као y , x^2 као 1 , xy^2 као x , y^2 као 1 , добија се следећа функција померања

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & | & y & | & 1 & | & xy & | \\ & y & | & x & | & xy & | & 1 \end{pmatrix} \\ = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ | \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ | \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ | \ \alpha_7 \ \alpha_8)^T = \\ = (F_1 \ | \ F_2 \ | \ F_3 \ | \ F_4) (A_1 \ | \ A_2 \ | \ A_3 \ | \ A_4)^T. \end{aligned}$$

На тај начин она је декомпонована у четири димензионална G -инваријантна потпростора U_1, U_2, U_3, U_4 .

Замена чворних координата првог чвора у скупу чворова $S(1, 2, 3, 4)$, тј. $x = c$, $y = d$ за чвор 1 , у функцијске матрице F_1, F_2, F_3, F_4 од $(u \ v)^T$ које припадају потпросторима U_1, U_2, U_3, U_4 , даће релације померања $\bar{\Phi}$ са коефицијентима A за сваки потпростор посебно

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & & & & & & & & \\ & d & & & & & & & \\ & & d & & & & & & \\ & & & c & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & cd & & & \\ & & & & & & cd & & \\ & & & & & & & cd & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \bar{\Phi} = \bar{C}A.$$

Осмоминимални G -векторски простор проблема је сада декомпонован у четири димензионална G -инваријантна потпростора U_1, U_2, U_3, U_4 . Матрица система једначина горње релације се добија у блок дијагоналном облику који садржи четири дијагоналне 2×2 матрице. На тај начин инвертовање матрице \bar{C} је редуковано на писање реципрочних вредности од $c, d, d, c, 1, cd, cd, 1$, тако да је

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \ \alpha_2 \ | \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ | \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ | \ \alpha_7 \ \alpha_8)^T = \\ & = \text{Diag} \left(\frac{1}{c} \ \frac{1}{d} \ | \ \frac{1}{d} \ \frac{1}{c} \ | \ \frac{1}{c} \ | \ \frac{1}{cd} \ | \ \frac{1}{cd} \ \ 1 \right) (\bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ | \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_2 \ | \ \bar{u}_3 \ \bar{v}_3 \ | \ \bar{u}_4 \ \bar{v}_4)^T, \end{aligned}$$

или $A = \bar{C}^{-1}\bar{\Phi}$.

за равно стање деформација:

$$d_{11} = d_{22} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad d_{21} = d_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\bar{B}_1^T D \bar{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}d_{11} & \frac{1}{cd}d_{12} \\ \frac{1}{cd}d_{21} & \frac{1}{d^2}d_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_1 = \int_0^c \int_0^d \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}d_{11} & \frac{1}{cd}d_{12} \\ \frac{1}{cd}d_{21} & \frac{1}{d^2}d_{22} \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} d_{11}p^{-1} & d_{21} \\ d_{21} & d_{22}p \end{pmatrix} \quad \text{са} \quad p = \frac{c}{d}.$$

Потпростор U_2 :

$$\bar{N}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{y}{d} & 0 \\ 0 & \frac{x}{c} \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{y}{d} & 0 \\ 0 & \frac{x}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}_2^T D \bar{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d^2}d_{33} & \frac{1}{cd}d_{33} \\ \frac{1}{cd}d_{33} & \frac{1}{c^2}d_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_2 = \int_0^c \int_0^d \begin{pmatrix} \frac{1}{d^2}d_{33} & \frac{1}{cd}d_{33} \\ \frac{1}{cd}d_{33} & \frac{1}{c^2}d_{33} \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} d_{33}p & d_{33} \\ d_{33} & d_{33}p^{-1} \end{pmatrix}.$$

Потпростор U_3 :

$$\bar{N}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{xy}{cd} \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_3 = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{xy}{cd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{cd} \\ 0 & \frac{y}{cd} \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}_3^T D \bar{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{cd} & \frac{y}{cd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{cd} \\ 0 & \frac{y}{cd} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{c^2d^2}d_{22} + \frac{y^2}{c^2d^2}d_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_3 = \int_0^c \int_0^d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{c^2d^2}d_{22} + \frac{y^2}{c^2d^2}d_{33} \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}d_{22}p + \frac{1}{3}d_{33}p^{-1} \end{pmatrix}.$$

После одређивања A_1, A_2, A_3, A_4 добија се једначина крутости са групном суперматрицом у нормалном облику (са нумерацијом чворова групно суперматричног поступка према сл. 2(b))

$$\frac{1}{12} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 2A & C & A & C & A & C & 2A & C \\ C & 2B & C & B & C & 2B & C & B \\ \hline A & C & 2A & C & 2A & C & A & C \\ C & B & C & 2B & C & 2B & C & 2B \\ \hline A & C & 2A & C & 2A & C & A & C \\ C & 2B & C & B & C & 2B & C & B \\ \hline 2A & C & A & C & A & C & 2A & C \\ C & B & C & 2B & C & B & C & 2B \end{array} \right]$$

$$+ \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 2F & H & F & H & -2F & -H & -F & -H \\ H & 2G & H & G & -H & -G & -H & -2G \\ \hline F & H & 2F & H & -F & -H & -2F & -H \\ H & G & H & 2G & -H & -2G & -H & -G \\ \hline -2F & -H & -F & -H & 2F & H & F & H \\ -H & -G & -H & -2G & H & 2G & H & G \\ \hline -F & -H & -2F & -H & F & H & 2F & H \\ -H & -2G & -H & -G & H & G & H & 2G \end{array} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{s1} \\ P_{s1} \\ P_{s2} \\ P_{s2} \\ P_{s3} \\ P_{s3} \\ P_{s4} \\ P_{s4} \end{pmatrix}$$

или $K\Phi = P$.

Да би се добила једначина крутости $K'\Phi' = P'$ са конвенционалном нумерацијом чворова датој на сл. 2(a), потребно је да се промени нумерација чворова од (1, 2, 3, 4) на (4, 1, 3, 2), што се остварује помоћу

$$\begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & E & \\ E & & & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & E & \\ & & & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 & A_4 & A_2 \\ A_3 & A_1 & A_2 & A_4 \\ A_4 & A_2 & A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 & A_3 & A_1 \end{pmatrix}$$

и

$$\frac{1}{12} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & 2B & C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & B & C & B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & B & C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & B & C & 2B \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & 2A & C \\ C & 2B & C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & A & C \\ C & B & C & B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & B & C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & B & C & 2B \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & B & C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & A & C \\ C & B & C & B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & 2B & C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & A & C \\ C & 2B & C & 2B \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & 2A & C \\ C & B & C & B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & B & C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & A & C \\ C & 2B & C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & C \\ C & 2B & C & 2B \end{array} \right) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c|c|c} \left(\begin{array}{cc|cc} 2F & H & -2F & -H \\ H & 2G & -H & -G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -2F & -H & 2F & H \\ -H & -G & H & 2G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -F & -H & F & H \\ -H & -2G & H & G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} F & H & -F & -H \\ H & G & -H & -2G \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc|cc} -2F & -H & 2F & H \\ -H & -G & H & 2G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2F & H & F & H \\ H & 2G & H & G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} F & H & -F & -H \\ -H & -2G & H & G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -F & -H & -F & -H \\ -H & -2G & H & G \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc|cc} -F & -H & F & H \\ -H & -2G & H & G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} F & H & 2F & H \\ H & 2G & H & 2G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -2F & -H & -2F & -H \\ -H & -G & -H & -G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -F & -H & -F & -H \\ -H & -2G & H & G \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc|cc} F & H & -F & -H \\ H & G & -H & -2G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -F & -H & -2F & -H \\ -H & -G & -H & -G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2F & H & 2F & H \\ H & 2G & H & 2G \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -F & -H & -F & -H \\ -H & -2G & H & G \end{array} \right) \end{array} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \\ u_3 \\ v_3 \\ \dots \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ \dots \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ \dots \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ \dots \\ P_{x4} \\ P_{y4} \end{pmatrix}$$

или $K'\Phi' = P'$.

Ова једначина крутости се трансформише у конвенционалну једначину крутости променом позитивних смерова од $v_2, u_3, u_4, v_4, P_{y2}, P_{x3}, P_{x4}, P_{y4}$ у скупу позитивних смерова који одговарају првом типу симетрије групе C_{2v} датом на сл. 2(б). На овај начин добија се конвенционални скуп позитивних смерова померања чворова и сила у чворовима према сл. 2(а). Ова операција остварује се помоћу

$$T_D K' T_D T_D \Phi' = T_D P',$$

где је $T_D = \text{Diag}(1 \ 1 \ | \ 1 \ \bar{1} \ | \ \bar{1} \ 1 \ | \ \bar{1} \ \bar{1})$, дајући $v'_2 = -v_2, u'_3 = -u_3, u'_4 = -u_4, v'_4 = -v_4, P'_{y2} = -P_{y2}, P'_{x3} = -P_{x3}, P'_{x4} = -P_{x4}, P'_{y4} = -P_{y4}$. Тиме је добијена конвенционална једначина крутости

$$\frac{1}{12} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & C & A & -C \\ C & 2B & C & -2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -2A & C & -A & -C \\ -C & B & -C & -B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & 2A & -C \\ -C & -2B & -C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -A & C & -2A & -C \\ C & -B & C & B \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & 2A & -C \\ -C & -2B & -C & 2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -A & C & -2A & -C \\ C & -B & C & B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -2A & -C & -A & C \\ C & B & C & -B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & -C & A & C \\ -C & 2B & -C & -2B \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc|cc} -2A & -C & -A & C \\ C & B & C & -B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & -C & A & C \\ -C & 2B & -C & -2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & -2A & -C \\ C & -B & C & B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -A & C & -2A & -C \\ C & -B & C & B \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc|cc} -A & C & -2A & -C \\ C & -B & C & B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} 2A & -C & A & C \\ -C & 2B & -C & -2B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} A & C & -2A & -C \\ C & -B & C & B \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|cc} -A & C & -2A & -C \\ C & -B & C & B \end{array} \right) \end{array} \right]$$

Таб. 2. Упоредње извођења матрице крутости правоугаоног елемента за равно стање напрезања на конвенционални начин и помоћу групно суперматричног поступка

	ЗА АНАЛИЗУ РАВНОГ СТАЊА НАПРЕЗАЊА СА ОСАМ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ	
	на конвенционални начин	групно суперматричним поступком
Функције које разацињу простор поља померања	$\Phi' = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2' \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4' \end{pmatrix}$	$\bar{\Phi} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{v}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\ \dots \\ u_1 + u_2 - u_3 - u_4 \\ v_1 + v_2 - v_3 - v_4 \\ \dots \\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \\ v_1 - v_2 + v_3 - v_4 \\ \dots \\ u_1 - u_2 - u_3 + u_4 \\ v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{array}$
Матрица која се инвертује за добијање коефицијената полинома функције померања	$\begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \# & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \# & \# & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \# & \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# \end{pmatrix}$ <p># не-нула елемент · нула елемент</p>	$\begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{array}$
Матрица функције облика	$\begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{array}$
Матрични продукт $B_D^T B$	$\begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \# & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \# & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \# \end{pmatrix} \times$ $\times \begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \# & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \# & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \# \end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \# & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \# & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \# \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \# & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \# & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \# \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \# & \cdot \\ \cdot & \# \end{pmatrix}$ <p>(за потпростор U_1 и слично за U_2, U_3, U_4)</p>
Матрица крутости	$\begin{pmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \end{pmatrix}$ <p>сим.</p>	$\begin{pmatrix} \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \# \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{array}$ <p>у блок дијагоналном облику (симетрично)</p>

* * *

Табела 2 даје упоређење извођења матрице крутости правоугаоног елемента за анализу равнoг стања напрезања на конвенционалним начинима и помоћу групно суперматричног поступка (в. стр. 43).

4. Једначине крутости у G -инваријантним потпросторима за правоугаони елемент за анализу савијања

Правоугаони елемент са четири чвора и 12 степени слободe за анализу савијања, дат на сл. 3(б) са јединственом нумерацијом чворова, изведеној у мом раду 'Концент групних суперматрица и примена на коначне елементе', описан је групом C_{2v} где позитивни смерови генералних померања $w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}$ одговарају првом типу симетрије групе, што се разликује од конвенционалног скупа позитивних праваца на сл. 3(а).

Као што је дато у одељку 3 за правоугаони елемент за анализу равнoг стања напрезања, чворови његовог скупа чворова $S(1, 2, 3, 4)$ пермутирани су дејством елемената групе, тј. операцијама симетрије $E, C_2, \sigma_1, \sigma_2$.

Таблица карактера групе C_{2v} (са картезијанским скуповима и продуктима) је

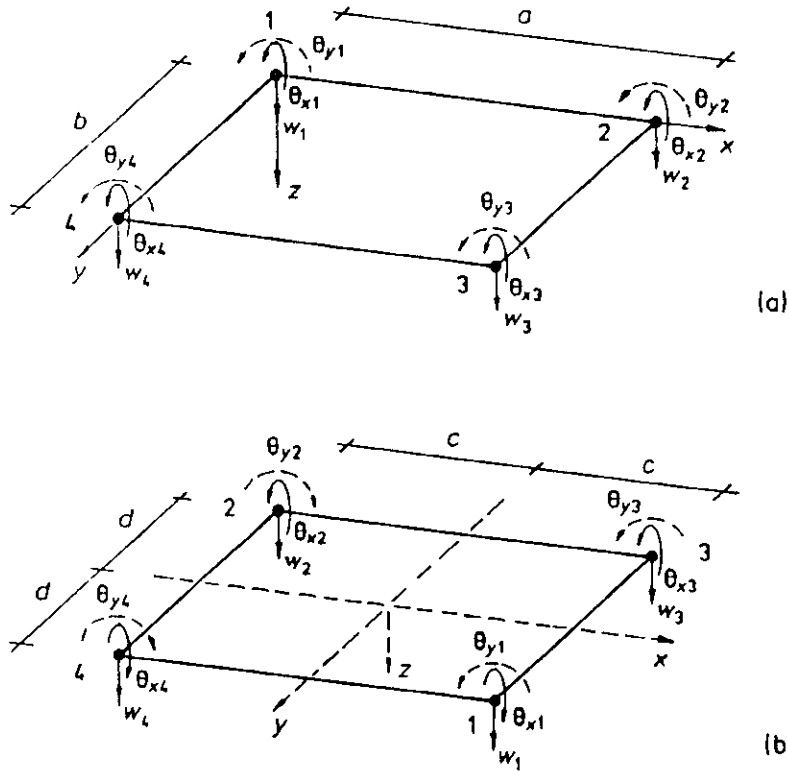
C_{2v}	E	C_2	σ_1 (xz)	σ_2 (yz)		
A_1	1	1	1	1	z	$x^2, y^2, z^2,$
A_2	1	1	-1	-1		xy
B_1	1	-1	1	-1	x	xz
B_2	1	-1	-1	1	y	yz

и идемпотенти центра групне алгебре су

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ C_2 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \Pi = T\Sigma, \quad \text{са} \quad T^{-1} = 4T,$$

као што је добијено у одељку 3.

Применом идемпотената π_i ($i = 1, 2, 3, 4$) на чворне функције φ_j ($j = 1, 2, \dots, 12$) изводе се базисни вектори $\bar{\varphi}_j$ G -инваријантних потпростора U_i .



Сл. 3. Правоугаони елемент са четири чвора за анализу савијања плоче:
 (а) са конвенционалним скупом позитивних смерова генералисаних померања чворова; (б) са скупом позитивних смерова генералисаних померања чворова који одговарају типу симетрије прве иредуцибилне репрезентације групе C_{2v}

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \\ \bar{\Phi}^{(3)} \\ \bar{\Phi}^{(4)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_5 & \bar{\varphi}_9 \\ \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_6 & \bar{\varphi}_{10} \\ \bar{\varphi}_3 & \bar{\varphi}_7 & \bar{\varphi}_{11} \\ \bar{\varphi}_4 & \bar{\varphi}_8 & \bar{\varphi}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{x1} & \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{x2} & \bar{\theta}_{y2} \\ \bar{w}_3 & \bar{\theta}_{x3} & \bar{\theta}_{y3} \\ \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} \\ w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} \\ w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} \\ w_4 & \theta_{x4} & \theta_{y4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 & \theta_{x1} + \theta_{x2} + \theta_{x3} + \theta_{x4} & \theta_{y1} + \theta_{y2} + \theta_{y3} + \theta_{y4} \\ w_1 + w_2 - w_3 - w_4 & \theta_{x1} + \theta_{x2} - \theta_{x3} - \theta_{x4} & \theta_{y1} + \theta_{y2} - \theta_{y3} - \theta_{y4} \\ w_1 - w_2 + w_3 - w_4 & \theta_{x1} - \theta_{x2} + \theta_{x3} - \theta_{x4} & \theta_{y1} - \theta_{y2} + \theta_{y3} - \theta_{y4} \\ w_1 - w_2 - w_3 + w_4 & \theta_{x1} - \theta_{x2} - \theta_{x3} + \theta_{x4} & \theta_{y1} - \theta_{y2} - \theta_{y3} + \theta_{y4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или $\bar{\Phi} = T\Phi$ са $T^{-1} = 4T$.

Обрнуто, релација чворних функција $\Phi^{(i)}$ са базисним векторима $\bar{\Phi}^{(i)}$ је

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \\ \Phi^{(3)} \\ \Phi^{(4)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_5 & \varphi_9 \\ \varphi_2 & \varphi_6 & \varphi_{10} \\ \varphi_3 & \varphi_7 & \varphi_{11} \\ \varphi_4 & \varphi_8 & \varphi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} \\ w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} \\ w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} \\ w_4 & \theta_{x4} & \theta_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{x1} & \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{x2} & \bar{\theta}_{y2} \\ \bar{w}_3 & \bar{\theta}_{x3} & \bar{\theta}_{y3} \\ \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x1} + \bar{\theta}_{x2} + \bar{\theta}_{x3} + \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y1} + \bar{\theta}_{y2} + \bar{\theta}_{y3} + \bar{\theta}_{y4} \\ \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w}_3 - \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x1} + \bar{\theta}_{x2} - \bar{\theta}_{x3} - \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y1} + \bar{\theta}_{y2} - \bar{\theta}_{y3} - \bar{\theta}_{y4} \\ \bar{w}_1 - \bar{w}_2 + \bar{w}_3 - \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x1} - \bar{\theta}_{x2} + \bar{\theta}_{x3} - \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y1} - \bar{\theta}_{y2} + \bar{\theta}_{y3} - \bar{\theta}_{y4} \\ \bar{w}_1 - \bar{w}_2 - \bar{w}_3 + \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x1} - \bar{\theta}_{x2} - \bar{\theta}_{x3} + \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y1} - \bar{\theta}_{y2} - \bar{\theta}_{y3} + \bar{\theta}_{y4} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

или $\Phi = 4T\bar{\Phi}$ са $T^{-1} = 4T$.

Скупови Φ_l ($l = 1, 2, 3$) базисних вектора $\bar{\varphi}_j$ ($j = 1, 2, \dots, 12$) који представљају $w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}$, уређени према секвенци описаној у мом раду 'Функције облика коначних елемената у G -инваријантним потпросторима', дати су са

$$[\bar{\Phi}_1 \quad \bar{\Phi}_2 \quad \bar{\Phi}_3] = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_5 & \bar{\varphi}_9 \\ \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_6 & \bar{\varphi}_{10} \\ \bar{\varphi}_3 & \bar{\varphi}_7 & \bar{\varphi}_{11} \\ \bar{\varphi}_4 & \bar{\varphi}_8 & \bar{\varphi}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{x1} & \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{x2} & \bar{\theta}_{y2} \\ \bar{w}_3 & \bar{\theta}_{x3} & \bar{\theta}_{y3} \\ \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y4} \end{pmatrix}$$

Релација скупова базисних вектора $\bar{\Phi}_l$ са скуповима чворних функција Φ_l је изражена следећим системом једначина са суперматрицом у дијагоналном облику која садржи три матрице трансформације T групе C_{2v}

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & & \\ & T & \\ & & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \bar{\Phi}_l = T\Phi_l, \quad \text{са}$$

$$T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$[\bar{\Phi}_1 \quad \bar{\Phi}_2 \quad \bar{\Phi}_3] = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_5 & \varphi_9 \\ \varphi_2 & \varphi_6 & \varphi_{10} \\ \varphi_3 & \varphi_7 & \varphi_{11} \\ \varphi_4 & \varphi_8 & \varphi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} \\ w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} \\ w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} \\ w_4 & \theta_{x4} & \theta_{y4} \end{pmatrix}$$

Обрнуто, релација скупова чворних функција Φ_l са скуповима базисних вектора $\bar{\Phi}_l$ је

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} T & & \\ & T & \\ & & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \Phi_l = 4T\bar{\Phi}_l, \quad \text{јер је} \quad T^{-1} = 4T.$$

Функција померања за правоугаону плочу са 12 степени слободе за анализу савијања обично се узима као

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3,$$

са $\theta_x = \partial w / \partial y$, $\theta_y = -\partial w / \partial x$ према сл. 3(а)

За грубно суперматрични поступак помоћу следећег израза чланови горњег полинома биће распоређени у одговарајуће G -инваријантне потпросторе где припадају и са јединственим редоследом чланова који даје дијагонални облик суперматрице система једначина релације генералисаних померања $\bar{\Phi}$ са коефицијентима A

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ xy \\ x \\ y \end{pmatrix} [1 \quad x^2 \quad y^2] = \begin{pmatrix} 1 & x^2 & y^2 \\ xy & x^3 y & xy^3 \\ x & x^3 & xy^2 \\ y & x^2 y & y^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{matrix} \quad \text{потпростор}$$

Вектор колона и вектор врста су узети из картезијанских скупова и продуката како стоје у додатку таблице карактера групе C_{2v} према припадности чланова типовима симетрије репрезентација групе A_1, A_2, B_1, B_2 .

Пошто на сл. 3(б), где позитивни смерови померања и ротација чворова имају тип симетрије прве иредуцибилне репрезентације групе, ротација θ_x у првом квадранту има позитивни смер који је супротан позитивном смеру одговарајуће ротације на сл. 3(а) која даје конвенционални скуп позитивних смерова, потребно је да се конвенционални скуп w , $\theta_x = \partial w / \partial y$, $\theta_y = -\partial w / \partial x$ промени у w , $\theta_x = -\partial w / \partial y$, $\theta_y = -\partial w / \partial x$, тако да се добијају следеће функције w , θ_x , θ_y

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^2 & y^2 & | & xy & x^3 y & xy^3 & | & x & x^3 & xy^2 & | & y & x^2 y & y^3 \\ & & -2y & | & -x & -x^3 & -3xy^2 & | & & & -2xy & | & -1 & -x^2 & -3y^2 \\ & -2x & & | & -y & -3x^2 y & -y^3 & | & -1 & -3x^2 & -y^2 & | & & -2xy & \end{pmatrix} \\ \cdot (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \mid \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \mid \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \mid \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12})^T = \\ = (F_1 \mid F_2 \mid F_3 \mid F_4) (A_1 \mid A_2 \mid A_3 \mid A_4)^T.$$

На тај начин горња функција је декомпонована у четири тродимензионална потпростора U_1, U_2, U_3, U_4 .

Замена чворних координата првог чвора из скупа чворова S (1, 2, 3, 4), тј. $x = c$, $y = d$ за чвор 1, у функцијске матрице F_1, F_2, F_3, F_4 од $[w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T$ које одговарају потпросторима U_1, U_2, U_3, U_4 , даће релације генералисаних померања $\bar{\Phi}$ са коефицијентима A за сваки потпростор посебно

3×3 матрице крутости $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3, \bar{K}_4$ из потпростора U_1, U_2, U_3, U_4 извешће се коришћењем горњих функција облика $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$, тако да ће се добити групна суперматрица крутости у дијагоналној облику

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}_1 & & \\ & \bar{K}_2 & \\ & & \bar{K}_3 & \\ & & & \bar{K}_4 \end{pmatrix} = \text{Diag}[\bar{K}_1 \ \bar{K}_2 \ \bar{K}_3 \ \bar{K}_4].$$

Потпростор U_1 :

$$\bar{N}^{(1)} = \left[1 \quad \frac{d}{2} - \frac{y^2}{2d} \quad \frac{c}{2} - \frac{x^2}{2c} \right], \quad \bar{B}_1 = - \begin{pmatrix} \partial^2/\partial x^2 & & \\ & \partial^2/\partial y^2 & \\ & & 2\partial^2/\partial x\partial y \end{pmatrix} \bar{N}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{c} \\ 0 & -\frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}_1^T D \bar{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{d} & 0 \\ -\frac{1}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x & D_y & 0 \\ D_x & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{c} \\ 0 & -\frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D_y}{d^2} & \frac{D_x}{cd} \\ 0 & \frac{D_x}{cd} & \frac{D_x}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_1 = \int_0^c \int_0^d \bar{B}_1^T D \bar{B}_1 dx dy = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \frac{c}{d} D_y & D_x \\ & -\frac{1}{d} D_x & \frac{d}{c} D_x \end{pmatrix}$$

сим. | |

Потпростор U_2 :

$$\bar{N}^{(2)} = \left(\frac{2xy}{cd} - \frac{x^3y}{2c^3d} - \frac{xy^3}{2cd^3} \quad \frac{xy}{2c} - \frac{xy^3}{2cd^2} \quad \frac{xy}{2d} - \frac{x^3y}{2c^2d} \right)$$

$$\bar{B}_2 = \begin{pmatrix} \partial^2/\partial x^2 & & \\ & \partial^2/\partial y^2 & \\ & & 2\partial^2/\partial x\partial y \end{pmatrix} \bar{N}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3xy}{c^3d} & 0 & \frac{3xy}{c^2d} \\ \frac{3xy}{cd^3} & \frac{3xy}{cd^2} & 0 \\ -\frac{4}{cd} + \frac{3x^2}{c^3d} + \frac{3y^2}{cd^3} & -\frac{1}{c} + \frac{3y^2}{cd^2} & -\frac{1}{d} + \frac{3x^2}{c^2d} \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_2 = \int_0^c \int_0^d \bar{B}_2^T D \bar{B}_2 dx dy = \begin{pmatrix} \frac{d}{c^3} D_x + \frac{c}{d^3} D_y + & \frac{c}{d^2} D_x + \frac{1}{c} D_y + & \frac{d}{c^2} D_x + \frac{1}{d} D_y + \\ + \frac{2}{cd} D_x + \frac{28}{5} \frac{1}{cd} D_{xy} & + \frac{41}{5} \frac{1}{c} D_{xy} & + \frac{41}{5} \frac{1}{d} D_{xy} \\ \hline & \frac{c}{d} D_x + \frac{4d}{5c} D_{xy} & D_x \\ \hline \text{сим.} & & \frac{d}{c} D_x + \frac{4c}{5d} D_{xy} \end{pmatrix}$$

Потпростор U_3 :

$$\bar{N}^{(3)} = \left[\frac{3x}{2c} - \frac{x^3}{2c^3} \quad \frac{dx}{2c} - \frac{xy^2}{2cd} \quad \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2c^2} \right]$$

$$\bar{B}_3 = - \begin{pmatrix} \partial^2/\partial x^2 & & \\ \partial^2/\partial y^2 & & \\ 2\partial^2/\partial x\partial y & & \end{pmatrix} \bar{N}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{3x}{c^3} & 0 & \frac{3x}{c^2} \\ 0 & \frac{x}{cd} & 0 \\ 0 & \frac{2y}{cd} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_3 = \int_0^c \int_0^d \bar{B}_3^T D \bar{B}_3 dx dy = \begin{pmatrix} 3 \frac{d}{c^3} D_x & \frac{1}{c} D_1 & 3 \frac{d}{c^2} D_x \\ \frac{1}{3} \frac{c}{d} D_y + \frac{4}{3} \frac{d}{c} D_{xy} & D_1 & \\ \text{сим.} & & 3 \frac{d}{c} D_x \end{pmatrix}.$$

Потпростор U_4 :

$$\bar{N}^{(4)} = \left(\frac{3y}{2d} - \frac{y^3}{2d^3} \quad \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2d^2} \quad \frac{cy}{2d} - \frac{x^2y}{2cd} \right)$$

$$\bar{B}_4 = - \begin{pmatrix} \partial^2/\partial x^2 & & \\ \partial^2/\partial y^2 & & \\ 2\partial^2/\partial x\partial y & & \end{pmatrix} \bar{N}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{y}{cd} \\ \frac{3y}{d^3} & \frac{3y}{d^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2x}{cd} \end{pmatrix}$$

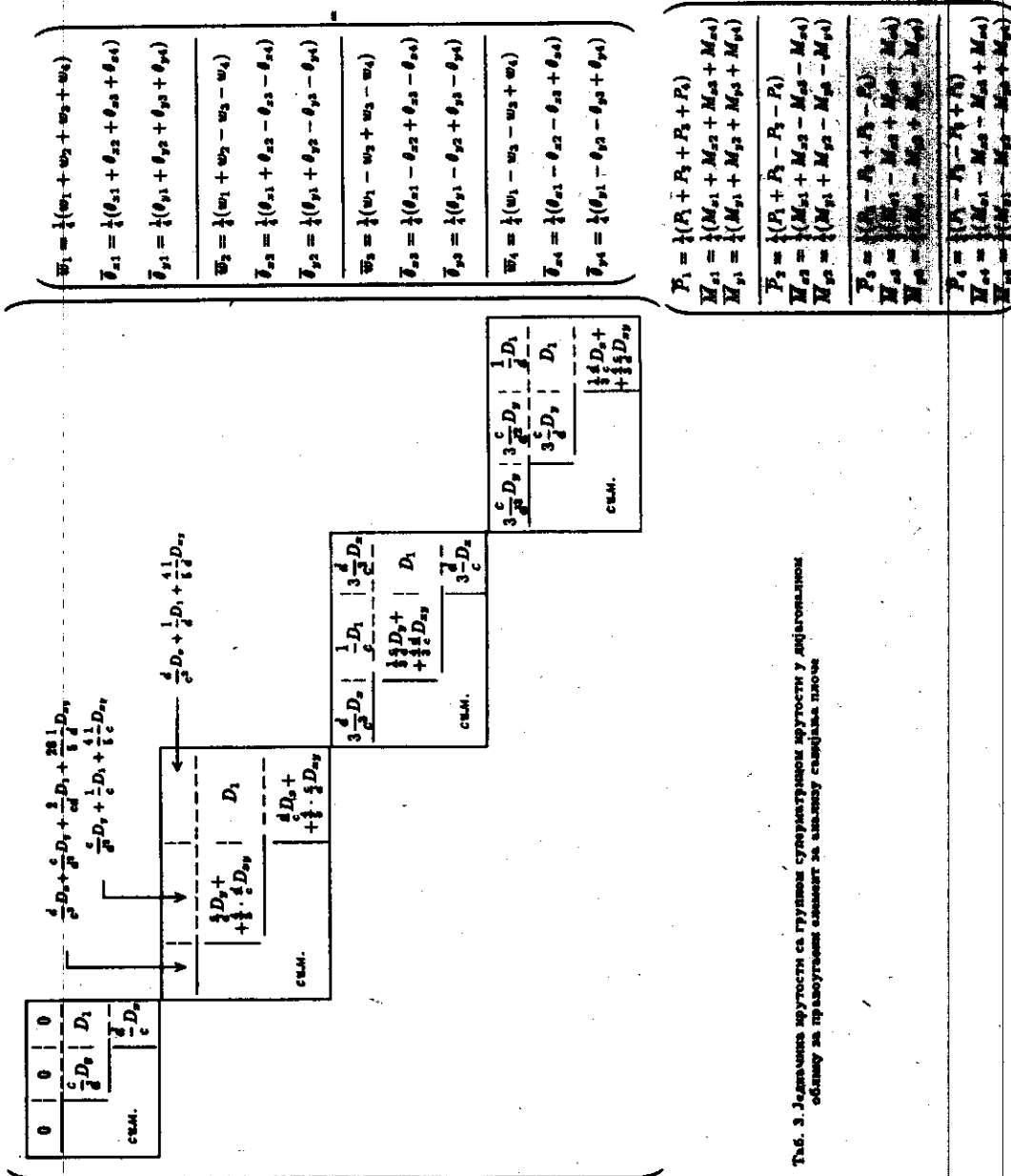
$$\bar{K}_4 = \int_0^c \int_0^d \bar{B}_4^T D \bar{B}_4 dx dy = \begin{pmatrix} 3 \frac{c}{d^3} D_y & 3 \frac{c}{d^2} D_y & \frac{1}{d} D_1 \\ \frac{3}{d} \frac{c}{d} D_y & D_1 & \\ \text{сим.} & & \frac{1}{3} \frac{d}{c} D_x + \frac{4}{3} \frac{c}{d} D_{xy} \end{pmatrix}.$$

Једначина крутости са групном суперматрицом крутости у дијагоналном облику је дата у табели 3. Она се такође може написати као

$$\begin{pmatrix} \bar{K}_1 & & & \\ & \bar{K}_2 & & \\ & & \bar{K}_3 & \\ & & & \bar{K}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \\ \bar{\Phi}^{(3)} \\ \bar{\Phi}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}^{(1)} \\ \bar{P}^{(2)} \\ \bar{P}^{(3)} \\ \bar{P}^{(4)} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{P}.$$

Трансформација једначине крутости $\bar{K} \bar{\Phi} = \bar{P}$ у једначину крутости $K \Phi = P$ са групном суперматрицом крутости у нормалном облику остварује се помоћу групно суперматричне трансформације

$$T^{-1} \bar{K} T T^{-1} \bar{\Phi} = T^{-1} \bar{P},$$



Таб. 3. Једначина кружности са групном симетричном кружношћу у дијагоналици. Облику са правоугаоним елементима за случају самодјала плоче.

изведене у мом раду 'Концепт групних суперматрица и примена на коначне елементе'.

Како је показано у одељку 3, ова трансформација резултује у

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_2 & C_1 & C_4 & C_3 \\ C_3 & C_4 & C_1 & C_2 \\ C_4 & C_3 & C_2 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \\ \Phi^{(3)} \\ \Phi^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(1)} \\ P^{(2)} \\ P^{(3)} \\ P^{(4)} \end{pmatrix} \quad \text{са}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} E & E & E & E \\ E & E & -E & -E \\ E & -E & E & -E \\ E & -E & -E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{K}_2 \\ \bar{K}_3 \\ \bar{K}_4 \end{pmatrix}.$$

Користењем последње релације одређују се елементи $c_{jk}^{(i)}$ матрица C_i (са супституцијама $a = 2c$, $b = 2d$, $p = a/b$):

$$\begin{aligned} c_{11}^{(1)} &= \frac{1}{15ab} (60p^{-2}D_x + 60p^2D_y + 30D_1 + 84D_{xy}) = \frac{1}{15ab}A \\ c_{12}^{(1)} &= \frac{1}{15ab} (30apD_y + 15bD_1 + 6bD_{xy}) = \frac{1}{15ab}B \\ c_{13}^{(1)} &= \frac{1}{15ab} (30p^{-1}D_x + 15aD_1 + 6aD_{xy}) = \frac{1}{15ab}D \\ c_{22}^{(1)} &= \frac{1}{15ab} (20a^2D_y + 8b^2D_{xy}) = \frac{1}{15ab}C \\ c_{23}^{(1)} &= \frac{1}{15ab} 15abD_1 = \frac{1}{15ab}E \\ c_{33}^{(1)} &= \frac{1}{15ab} (20b^2D_x + 8a^2D_{xy}) = \frac{1}{15ab}F \\ c_{11}^{(2)} &= \frac{1}{15ab} (-30p^{-2}D_x - 30p^2D_y + 30D_1 + 84D_{xy}) = \frac{1}{15ab}M \\ c_{12}^{(2)} &= \frac{1}{15ab} (-15apD_y + 6bD_{xy}) = \frac{1}{15ab}(-N) \\ c_{13}^{(2)} &= \frac{1}{15ab} (-15bp^{-1}D_x + 6aD_{xy}) = \frac{1}{15ab}(-O) \\ c_{22}^{(2)} &= \frac{1}{15ab} (-5a^2D_y - 2b^2D_{xy}) = \frac{1}{15ab}(-P) \\ c_{23}^{(2)} &= 0 \\ c_{33}^{(2)} &= \frac{1}{15ab} (-5b^2D_x - 2a^2D_{xy}) = \frac{1}{15ab}(-Q) \\ c_{11}^{(3)} &= \frac{1}{15ab} (30p^{-2}D_x - 60p^2D_y - 30D_1 - 84D_{xy}) = \frac{1}{15ab}R \\ c_{12}^{(3)} &= \frac{1}{15ab} (-30apD_y - 6bD_{xy}) = \frac{1}{15ab}S \\ c_{13}^{(3)} &= \frac{1}{15ab} (15bp^{-1}D_x - 15aD_1 - 6aD_{xy}) = \frac{1}{15ab}T \end{aligned}$$

$$c_{22}^{(3)} = \frac{1}{15ab}(-10a^2 D_y + 2b^2 D_{xy}) = \frac{1}{15ab}(-U)$$

$$c_{23}^{(3)} = 0$$

$$c_{33}^{(3)} = \frac{1}{15ab}(10b^2 D_x - 8a^2 D_{xy}) = \frac{1}{15ab}V$$

$$c_{11}^{(4)} = \frac{1}{15ab}(-60p^{-2} D_x + 30p^2 D_y - 30D_1 - 84D_{xy}) = \frac{1}{15ab}G$$

$$c_{12}^{(4)} = \frac{1}{15ab}(15a^2 D_y - 15bD_1 - 6bD_{xy}) = \frac{1}{15ab}(-H)$$

$$c_{13}^{(4)} = \frac{1}{15ab}(-30p^{-1}bD_x - 6aD_{xy}) = \frac{1}{15ab}(-I)$$

$$c_{22}^{(4)} = \frac{1}{15ab}(10a^2 D_y - 8b^2 D_{xy}) = \frac{1}{15ab}J$$

$$c_{23}^{(4)} = 0$$

$$c_{33}^{(4)} = \frac{1}{15ab}(-10b^2 D_x + 2a^2 D_{xy}) = \frac{1}{15ab}(-L).$$

На тај начин добијена је једначина крутости са групном суперматрицом крутости у нормалном облику (са нумерацијом чворова групно суперматричног поступка на сл. 3(b))

$$\frac{1}{15ab} \begin{pmatrix} A & B & D & M & -N & -"O" & R & S & T & G & -H & -I \\ B & C & E & -N & -P & & S & -U & & -H & J & \\ D & E & F & -"O" & & -Q & T & & V & -I & & -L \\ \hline M & -N & -"O" & A & B & D & G & -H & -I & R & S & T \\ -N & -P & & B & C & E & -H & J & & S & -U & \\ -"O" & & -Q & D & E & F & -I & & -L & T & & V \\ \hline R & S & T & G & -H & -I & A & B & D & M & -N & -"O" \\ S & -U & & -H & J & & B & C & E & -N & -P & \\ T & & V & -I & & -L & D & E & F & -"O" & & -Q \\ \hline G & -H & -I & R & S & T & M & -N & -"O" & A & B & D \\ -H & J & & S & -U & & -N & -P & & B & C & E \\ -I & & -L & T & & V & -"O" & & -Q & D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \hline w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \hline w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ \hline w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ \hline P_2 \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ \hline P_3 \\ M_{x3} \\ M_{y3} \\ \hline P_4 \\ M_{x4} \\ M_{y4} \end{pmatrix}$$

или $K\Phi = P$.

Да би се добила једначина крутости $K'\Phi' = P'$ са конвенционалном нумерацијом чворова датај на сл. 3(a), потребно је да се промени нумерација чворова од (1, 2, 3, 4) на (3, 1, 2, 4), што се обавља помоћу

$$\begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & E & \\ E & & & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ H_2 & H_1 & H_4 & H_3 \\ H_3 & H_4 & H_1 & H_2 \\ H_4 & H_3 & H_2 & H_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & E & \\ & & & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & H_4 & H_2 & H_3 \\ H_4 & H_1 & H_3 & H_2 \\ H_2 & H_3 & H_1 & H_4 \\ H_3 & H_2 & H_4 & H_1 \end{pmatrix}$$

и

$$\frac{1}{15ab} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} A & B & D & G & -H & -I & M & -N & \text{"O"} \\ B & C & E & -H & J & & -N & -P & \\ D & E & F & -I & & -L & \text{"O"} & & -Q \\ \hline G & -H & -I & A & B & D & R & S & T \\ -H & J & & B & C & E & S & -U & -N & -P \\ -I & & -L & D & E & F & T & & V & \text{"O"} & -Q \\ \hline M & -N & \text{"O"} & R & S & T & A & B & D & G & -H & -I \\ -N & -P & & S & -U & & B & C & E & -H & J & \\ \text{"O"} & & -Q & T & & V & D & E & F & -I & & -L \\ \hline R & S & T & M & -N & \text{"O"} & G & -H & -I & A & B & D \\ S & -U & & -N & -P & & -H & J & & B & C & E \\ T & & V & \text{"O"} & & -Q & -I & & -L & D & E & F \end{array} \right) \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \hline w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \hline w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ \hline w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ \hline P_2 \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ \hline P_3 \\ M_{x3} \\ M_{y3} \\ \hline P_4 \\ M_{x4} \\ M_{y4} \end{pmatrix}$$

или $K'\Phi' = P'$.

Ова једначина се трансформише у конвенционалну једначину крутости променом позитивних смерова од $\theta_{y1}, \theta_{x3}, \theta_{x4}, \theta_{y4}, M_{y1}, M_{x3}, M_{x4}, M_{y4}$ у скупу позитивних смерова који одговарају првом типу симетрије групе C_{2v} датом на сл. 3(б). На овај начин добија се конвенционални скуп позитивних смерова чворних генералисаних померања и сила према сл. 3(а). Ово се остварује помоћу

$$T_D K' T_D T_D \Phi' = T_D P',$$

где је $T_D = \text{Diag}[1 \ 1 \ \bar{1} \ | \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ \bar{1} \ 1 \ | \ 1 \ \bar{1} \ \bar{1}]$, дајући $\theta'_{y1} = -\theta_{y1}$, $\theta'_{x3} = -\theta_{x3}$, $\theta'_{x4} = -\theta_{x4}$, $\theta'_{y4} = -\theta_{y4}$, $M'_{y1} = -M_{y1}$, $M'_{x3} = -M_{x3}$, $M'_{x4} = -M_{x4}$, $M'_{y4} = -M_{y4}$. Тако се добија конвенционална једначина крутости

$$\frac{1}{15ab} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} A & B & -D & G & -H & -I & M & N & \text{"O"} & R & -S & -T \\ B & C & -E & -H & J & & -N & P & & S & U & \\ -D & -E & F & I & & L & \text{"O"} & & Q & -T & & V \\ \hline G & -H & I & A & B & D & R & -S & T & M & N & \text{"O"} \\ -H & J & & B & C & E & S & U & & -N & P & \\ -I & & L & D & E & F & T & & V & \text{"O"} & & Q \\ \hline M & N & \text{"O"} & R & S & T & A & -B & D & G & H & I \\ N & P & & -S & U & & -B & C & -E & H & J & \\ \text{"O"} & & Q & T & & V & D & -E & F & -I & & L \\ \hline R & S & -T & M & -N & \text{"O"} & G & H & -I & A & -B & -D \\ -S & U & & N & P & & H & J & & -B & C & E \\ -T & & V & \text{"O"} & & Q & I & & L & -D & E & F \end{array} \right) \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta'_{y1} \\ \hline w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \hline w_3 \\ \theta'_{x3} \\ \theta_{y3} \\ \hline w_4 \\ \theta'_{x4} \\ \theta'_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ M_{x1} \\ M'_{y1} \\ \hline P_2 \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ \hline P_3 \\ M'_{x3} \\ M_{y3} \\ \hline P_4 \\ M'_{x4} \\ M'_{y4} \end{pmatrix}$$

или $K_c \Phi_c = P_c$, где је K_c конвенционална матрица крутости правоугаоног елемента за анализу савијања према сл. 3(а) са раније датим супституцијама за A, B, C, \dots .

* * *

Конвенционална једначина крутости $K_c \Phi_c = P_c$, са нумерацијом чворова и скупом позитивних смерова чворних генералисаних померања и сила датим на сл. 3(a), трансформише се помоћу

$$T_D K_c T_D T_D \Phi_c = T_D P_c,$$

са $T_D = \text{Diag}[1 \ 1 \ \bar{1} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \bar{1} \ 1 \ 1 \ \bar{1} \ \bar{1}]$, у једначину крутости $K' \Phi' = P'$, са групном суперматрицом крутости у нормалном облику:

Да би се добила једначина крутости $K \Phi = P$, са нумерацијом чворова групно суперматричног поступка према сл. 3(b), потребно је да се промени нумерација чворова од (1, 2, 3, 4) на (2, 3, 1, 4), што се остварује помоћу

$$\begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & E & \\ & & & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & E & \\ & & & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 & A_4 & A_2 \\ A_3 & A_1 & A_2 & A_4 \\ A_4 & A_2 & A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 & A_3 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Трансформација једначине крутости $K \Phi = P$ у једначину крутости $\bar{K} \bar{\Phi} = \bar{P}$ са групном суперматрицом крутости у дијагоналном облику извршава се помоћу

$$TKT^{-1}T\Phi = TP, \text{ дајући}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{K}_1 & & & \\ & \bar{K}_2 & & \\ & & \bar{K}_3 & \\ & & & \bar{K}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \\ \bar{\Phi}^{(3)} \\ \bar{\Phi}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}^{(1)} \\ \bar{P}^{(2)} \\ \bar{P}^{(3)} \\ \bar{P}^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Табела 4 даје компаративни приказ извођења матрице крутости правоугаоног елемента за анализу савијања на конвенционални начин и помоћу групно суперматричног поступка.

* * *

Правоугаони елемент са 16 степени слободе за анализу савијања плоче добија се додавањем увијања у виду чланова других извода $\omega = \partial^2 w / \partial x \partial y$ елементу са 12 степени слободе који има $w, \theta_x = -\partial w / \partial y, \theta_y = -\partial w / \partial x$ у сваком угаоном чвору, како је показано на сл. 3(b).

Као елемент са 12 степени слободе на сл. 3(b), елемент са 16 степени слободе описан је групом C_{2v} и има исту јединствену нумерацију чворова. Коришћењем таблице карактера групе C_{2v} и идемпотената Π центра групне алгебре, као раније у овом одељку, изводе се базисни вектори $\bar{\varphi}_j$ ($j = 1, 2, \dots, 16$) G -инваријантних потпростора U_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \\ \bar{\Phi}^{(3)} \\ \bar{\Phi}^{(4)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_5 & \bar{\varphi}_9 & \bar{\varphi}_{13} \\ \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_6 & \bar{\varphi}_{10} & \bar{\varphi}_{14} \\ \bar{\varphi}_3 & \bar{\varphi}_7 & \bar{\varphi}_{11} & \bar{\varphi}_{15} \\ \bar{\varphi}_4 & \bar{\varphi}_8 & \bar{\varphi}_{12} & \bar{\varphi}_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{x1} & \bar{\theta}_{y1} & \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{x2} & \bar{\theta}_{y2} & \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 & \bar{\theta}_{x3} & \bar{\theta}_{y3} & \bar{w}_3 \\ \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y4} & \bar{w}_4 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \omega_1 \\ w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \omega_2 \\ w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} & \omega_3 \\ w_4 & \theta_{x4} & \theta_{y4} & \omega_4 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} w_1 + w_2 - w_3 + w_4 & \theta_{x1} + \theta_{x2} + \theta_{x3} + \theta_{x4} & \theta_{y1} + \theta_{y2} + \theta_{y3} + \theta_{y4} & \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 \\ w_1 + w_2 - w_3 - w_4 & \theta_{x1} + \theta_{x2} - \theta_{x3} - \theta_{x4} & \theta_{y1} + \theta_{y2} - \theta_{y3} - \theta_{y4} & \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 \\ w_1 - w_2 + w_3 - w_4 & \theta_{x1} - \theta_{x2} + \theta_{x3} - \theta_{x4} & \theta_{y1} - \theta_{y2} + \theta_{y3} - \theta_{y4} & \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \\ w_1 - w_2 - w_3 + w_4 & \theta_{x1} - \theta_{x2} - \theta_{x3} + \theta_{x4} & \theta_{y1} - \theta_{y2} - \theta_{y3} + \theta_{y4} & \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

или $\bar{\Phi} = T\Phi$, са $T^{-1} = 4T$.

Обрнуто, релација чворних функција $\Phi^{(i)}$ са базисним векторима $\bar{\Phi}^{(i)}$ је

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \\ \Phi^{(3)} \\ \Phi^{(4)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_5 & \varphi_9 & \varphi_{13} \\ \varphi_2 & \varphi_6 & \varphi_{10} & \varphi_{14} \\ \varphi_3 & \varphi_7 & \varphi_{11} & \varphi_{15} \\ \varphi_4 & \varphi_8 & \varphi_{12} & \varphi_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \omega_1 \\ w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \omega_2 \\ w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} & \omega_3 \\ w_4 & \theta_{x4} & \theta_{y4} & \omega_4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{x1} & \bar{\theta}_{y1} & \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{x2} & \bar{\theta}_{y2} & \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 & \bar{\theta}_{x3} & \bar{\theta}_{y3} & \bar{w}_3 \\ \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y4} & \bar{w}_4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x1} + \bar{\theta}_{x2} + \bar{\theta}_{x3} + \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y1} + \bar{\theta}_{y2} + \bar{\theta}_{y3} + \bar{\theta}_{y4} & \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \bar{w}_4 \\ \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w}_3 - \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x1} + \bar{\theta}_{x2} - \bar{\theta}_{x3} - \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y1} + \bar{\theta}_{y2} - \bar{\theta}_{y3} - \bar{\theta}_{y4} & \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w}_3 - \bar{w}_4 \\ \bar{w}_1 - \bar{w}_2 + \bar{w}_3 - \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x1} - \bar{\theta}_{x2} + \bar{\theta}_{x3} - \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y1} - \bar{\theta}_{y2} + \bar{\theta}_{y3} - \bar{\theta}_{y4} & \bar{w}_1 - \bar{w}_2 + \bar{w}_3 - \bar{w}_4 \\ \bar{w}_1 - \bar{w}_2 - \bar{w}_3 + \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x1} - \bar{\theta}_{x2} - \bar{\theta}_{x3} + \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y1} - \bar{\theta}_{y2} - \bar{\theta}_{y3} + \bar{\theta}_{y4} & \bar{w}_1 - \bar{w}_2 - \bar{w}_3 + \bar{w}_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Скупови Φ_l ($l = 1, 2, 3, 4$) садрже базисне векторе φ_j ($j = 1, 2, \dots, 16$) који представљају $w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \omega_1, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \omega_2, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, \omega_3, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}, \omega_4$, уређени према секвенци објашњеној у мом раду 'Функције облика коначних елемената у G -инваријантним потпросторима', дати су са

$$[\bar{\Phi}_1 \quad \bar{\Phi}_2 \quad \bar{\Phi}_3 \quad \bar{\Phi}_4] = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_5 & \bar{\varphi}_9 & \bar{\varphi}_{13} \\ \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_6 & \bar{\varphi}_{10} & \bar{\varphi}_{14} \\ \bar{\varphi}_3 & \bar{\varphi}_7 & \bar{\varphi}_{11} & \bar{\varphi}_{15} \\ \bar{\varphi}_4 & \bar{\varphi}_8 & \bar{\varphi}_{12} & \bar{\varphi}_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{\theta}_{x1} & \bar{\theta}_{y1} & \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 & \bar{\theta}_{x2} & \bar{\theta}_{y2} & \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 & \bar{\theta}_{x3} & \bar{\theta}_{y3} & \bar{w}_3 \\ \bar{w}_4 & \bar{\theta}_{x4} & \bar{\theta}_{y4} & \bar{w}_4 \end{pmatrix}.$$

Релација скупова базисних вектора $\bar{\Phi}_l$ са скуповима чворних функција Φ_l изражена је следећим системом једначина са суперматрицом у дијагоналном облику која садржи четири матрице трансформације T групе C_{2v}

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & & & \\ & T & & \\ & & T & \\ & & & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \bar{\Phi}_i = T\Phi_i, \quad \text{са}$$

$$T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{и} \quad [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4] = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_5 & \varphi_9 & \varphi_{13} \\ \varphi_2 & \varphi_6 & \varphi_{10} & \varphi_{14} \\ \varphi_3 & \varphi_7 & \varphi_{11} & \varphi_{15} \\ \varphi_4 & \varphi_8 & \varphi_{12} & \varphi_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \omega_1 \\ w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \omega_2 \\ w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} & \omega_3 \\ w_4 & \theta_{x4} & \theta_{y4} & \omega_4 \end{pmatrix}$$

Обрнуто, релација скупова чворних функција Φ_i са скуповима базисних вектора $\bar{\Phi}_i$ је

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} T & & & \\ & T & & \\ & & T & \\ & & & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \Phi_i = 4T\bar{\Phi}_i, \quad \text{са} \quad T^{-1} = 4T.$$

Функција померања за правоугаони елемент са четири чвора и 16 степени слободе за анализу савијања плоче обично се узима као

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x^2 y^2 + \alpha_{13} xy^3 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3.$$

За групно суперматрични поступак помоћу следећег израза чланови из горњег полинома биће распоређени у одговарајуће G -инваријантне потпросторе где припадају и са јединственим редоследом чланова који даје дијагонални облик суперматрице система једначина релације померања $\bar{\Phi}$ са коефицијентима A

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ xy \\ x \\ y \end{pmatrix} [1 \quad x^2 \quad y^2 \quad x^2 y^2] = \begin{pmatrix} 1 & x^2 & y^2 & x^2 y^2 \\ xy & x^3 y & xy^3 & x^3 y^3 \\ x & x^3 & xy^2 & x^3 y^2 \\ y & x^2 y & y^3 & x^2 y^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{matrix} \quad \text{потпростор}$$

Вектор колона и вектор врста су узети из картезијанских скупова и продуката како стоје у додатку уз таблицу карактера групе C_{2v} у сагласности са припадношћу чланова типовима симетрије репрезентација групе A_1, A_2, B_1, B_2 .

Пошто на сл. 3(b), где позитивни смерови померања и ротација чворова имају тип симетрије првог потпростора, изводни члан $\partial^2 w / \partial w \partial y$

Шеснаестодимензионални G -векторски простор проблема је сада декомпонован у четири четвородимензионална потпростора U_1, U_2, U_3, U_4 . Матрица система једначина горње релације добија се у блоку-дијагоналном облику који садржи четири 4×4 матрице:

Коефицијенти A се одређују инвертовањем матрица $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4$ у потпросторима U_1, U_2, U_3, U_4 . На тај начин шеснаестодимензионални G -векторски простор поља померања је декомпонован у четири четвородимензионална потпростора помоћу

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} = \text{Diag}(F_1 | F_2 | F_3 | F_4) \begin{pmatrix} \bar{C}_1^{-1} & & & \\ & \bar{C}_2^{-1} & & \\ & & \bar{C}_3^{-1} & \\ & & & \bar{C}_4^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(2)} \\ \bar{\Phi}^{(3)} \\ \bar{\Phi}^{(4)} \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\Delta = T_D \bar{C}^{-1} \bar{\Phi}.$$

Као у случају елемената са 12 степени слобода функције облика $\bar{N}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и матрице крутости \bar{K}_i се изводе за сваки потпростор U_i посебно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zloковић, G., *Group theory and G-vector spaces in structural analysis: vibration, stability and statics*, Ellis Horwood, Chichester, 1989.
- [2] Злоковић, Б., *G-векторска анализа структура комплексних симетрија*, ГЛАС ССCLIX Српске академије наука и уметности, Одељење техничких наука, књ. 28, 85–132, Београд, 1990.
- [3] Злоковић, Б., *G-векторска анализа у директној методи крутости*, ГЛАС ССCLIX Српске академије наука и уметности, Одељење техничких наука, књ. 28, 199–248, 1990.
- [4] Злоковић, Б., *Концепт групних суперматрица и примена на коначне елементе* ГЛАС ССCLXXIII Српске академије наука и уметности, Одељење техничких наука, књ. 30, 49–86, Београд, 1993.
- [5] Злоковић, Б., *Функције облика коначних елемената у G -инваријантним потпросторима* ГЛАС ССCLXXIII Српске академије наука и уметности, Одељење техничких наука, књ. 30, 99–145, Београд, 1993.
- [6] Adini, A. & Clough, R. W., *Analysis of plate bending by the finite element method*, Grant G 7337, National Science Foundation, USA, 1961.
- [7] Argyris, J. H. & Kelsey, S., *Energy theorems and structural analysis*, Butterworths, London, 1960.
- [8] Bognier, F. K., Fox, R. L. & Schmit, L. A., *The generation of interelement-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas*, Proceedings, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL TR-64-80, Fairborn, Ohio, 397–444, 1966.
- [9] Dawe, D. J., *A finite element approach to plate vibration problems*, J. Mech. Eng. Sci., 7, 28–32, 1965.

- [10] M a t h i a k, K. & S t i n g l, P., *Gruppentheorie*, Vieweg, Braunschweig, 1968.
- [11] R o c k e y, K. C., E v a n s, H. R., G r i f f i t h s, D. W. & N e t h e r c o t, D. A., *The finite element method*, Crosby Lockwood Staples, London, 1975.
- [12] Y a n g, T. Y., *Finite element structural analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.

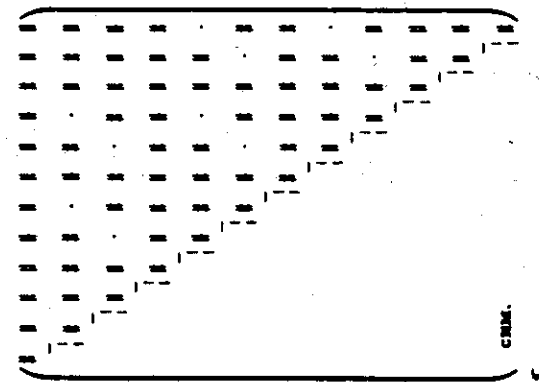
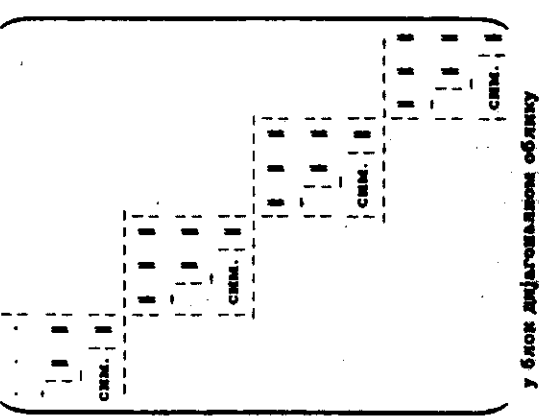
Д.М. Злокović

STIFFNESS EQUATIONS OF FINITE ELEMENTS
IN G -INVARIANT SUBSPACES

S u m m a r y

Stiffness equations of finite elements are formulated in G -invariant subspaces by the group supermatrix procedure, developed by the author, by decomposing the function of the displacement field into functions having the symmetry type of its subspace, by deriving element shape functions in G -invariant subspaces and by applying them for formulation of stiffness matrices and stiffness equations for each subspace separately. The procedure is applied here for derivation of stiffness equations in G -invariant subspaces for the beam element, the rectangular element for planar analysis and the rectangular element for plate flexure. It produces stiffness equations with group supermatrices in normal and diagonal forms, turned into each other by group supermatrix transformations. In comparison with conventional methods, derivation and utilization of element stiffness equations in G -invariant subspaces provides substantial qualitative and quantitative advantages.

(Наставак табеле 4 - са претходне стране)

<p>[e] Матрица крутости</p>	<p>на конвенционални начин</p>  <p style="text-align: right;">с</p>	<p>групо суперматричним поступком</p>	<p>потростор</p>  <p style="text-align: right;">у блок дијагоналном облику</p>
-------------------------------------	--	---------------------------------------	--

Таб. 4. Уморење извођења матрице крутости за правоугаони елемент из амплику савијања на конвенционални начин и помоћу групо суперматричног поступка (наставак)

И.С. СТОЈАНОВИЋ

ПЛАНИРАЊЕ УПОТРЕБЕ ГЕОСТАЦИОНАРНЕ САТЕЛИТСКЕ ОРБИТЕ И ПЕРСПЕКТИВЕ ЊЕНОГ КОРИШЋЕЊА

(Примљено на X скупу Одељења, од 23. јуна 1992)

Садржај. Успешним лансирањем сателита у геостационарну орбиту отворена је сателитска ера у телекомуникацијама. У њима се користе два природна ресурса: геостационарна орбита и фреквенцијски спектар. Међутим, оба она су својим капацитетом ограничена. Могућности комуницирања овим видом телекомуникација су огромне и све земље желе да их користе. Већ до сада број лансираних сателита је велики, а расположиви фреквенцијски спектар релативно узак, па орбита из дана у дан постаје све више насељена. Како су природни ресурси опшечовечанско добро, сматра се да их треба равноправно и користити. Одатле се јавља потреба за израдом плана коришћења орбите.

У реду је приказан метод планирања заснован на дозвољеној интерференцији између сателитских мрежа. Он је тако замисљен да важи двадесет година и да у том периоду гарантује свакој земљи позицију на орбити и одговарајући фреквенцијски спектар, с тим да свако може да дође на орбиту када то захтели. То је омогућено предлогом о коришћењу генерализованих параметара сателитске мреже, тако да се у сваком тренутку може да користи она технологија која је тог тренутка савремена. С тим је обезбеђена довољна слобода сваком, а истовремено гаранција за место на орбити остаје на снази.

1. Увод

Прву идеју за коришћење геостационарне орбите за телекомуникације помоћу сателита саопштио је 1945. године енглески физичар Arthur C. Clarke у свом визионарском чланку "Extraterrestrial Relays" у часопису Wireless World 1. Он каже "... три сателита смештена изнад три океанска региона могу да обезбеде радио покривање целе Земље". Иако на први

поглед као из домена фантастике, ова мисао се убрзо почела претварати у стварност. 1957. године лансиран је СПУТНИК, први вештачки Земљин сателит, да би већ 1958. са сателита SCORE први пут људски глас, а 1959. са сателита EXPLORER 6 и прва телевизијска слика, биле су отворени из космоса. Године 1963. лансиран је први геостационарни сателит SYNCOM I, а исте године преко SYNCOM II остварене су телефонске везе између САД и Африке. Већ 1964. основан је INTELSAT, међународна организација за комерцијалну експлоатацију сателитских телекомуникација. Она је 1965. лансирала први комерцијални сателит INTELSAT I, познат под називом EARLY BIRD. Њим је остварен интерконтинентални пренос 240 независних телефонских комуникација и једног ТВ програма.

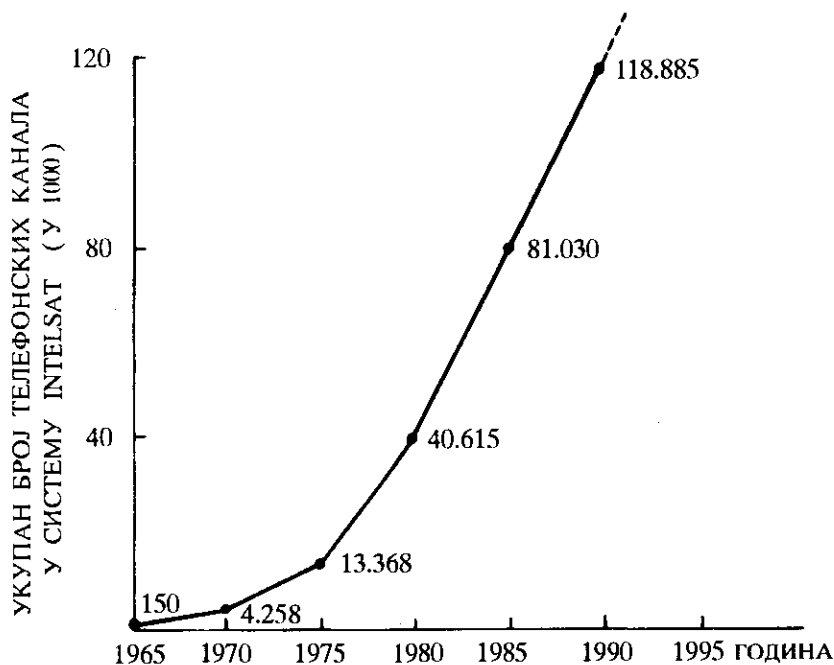
Од овог доба настаје у телекомуникацијама сателитска ера. INTELSAT је лансирао нове, модерније и капацитетом моћније сателите: INTELSAT II, III, IV, IV A, V, V A, и VI. У припреми је INTELSAT VII. У табели Т-1 дат је преглед њихових основних перформанси. Поредњу их, оне јасно указују на изузетно брзу еволуцију ове технике [1, 2, 3]

Прогрес учињен за ових последњих 25 година изгледа скоро невероватан. Треба се подсетити да је 1866, дакле 22 године након проналаска првог електричног телеграфа и почетка доба електричних телекомуникација, положен први трансатлантски телеграфски подморски кабл између Нове Земље и Ирске, а да је тек 1956. први пут говор пренесен првим телефонским каблом између Америке и Енглеске. У њему је било само 36 телефонских канала. А 1965, сателит EARLY BIRD је омогућавао 240 истовремених телефонских комуникација на овом простору, да би капацитет INTELSAT-а VI, лансираног 1989, износио 24000 телефонских канала и 3 ТВ програма.

Табела Т-1

INTELSAT	I	II	III	IV	V	V-A	VI	VII
Год. лансирања	1965	1967	1968	1971	1980	1985	1989	1992
Ширина (m)	0,7	0,7	1,4	2,4	2,0	2,0	3,6	2,7
Висина (m)	0,6	0,7	1,0	5,3	6,4	6,4	5,3	4,2
Живот (год.)	1,5	3	5	7	7	7	13	15
Ширина опсега (GHz)	0,05	0,13	0,3	0,5	2,144	2,250	3,300	2,432
Фрекв. носилаца (GHz)	6/4	6/4	6/4	6/4	6/4 14/11	6/4 14/11	6/4 14/11	6/4 14/11
ТВ канали	240	240	1500	4000	12000	15000	24000	18000
Капацитет	или	или	и	и	и	и	и	и
TV канали	1	1	4	2	2	2	3	3

Данас је у експлоатацији укупно 17 INTELSAT сателита изнад атлантског, индијског и пацифичког региона са импозантним бројем од 917 земаљских станица у 118 земаља чланица.

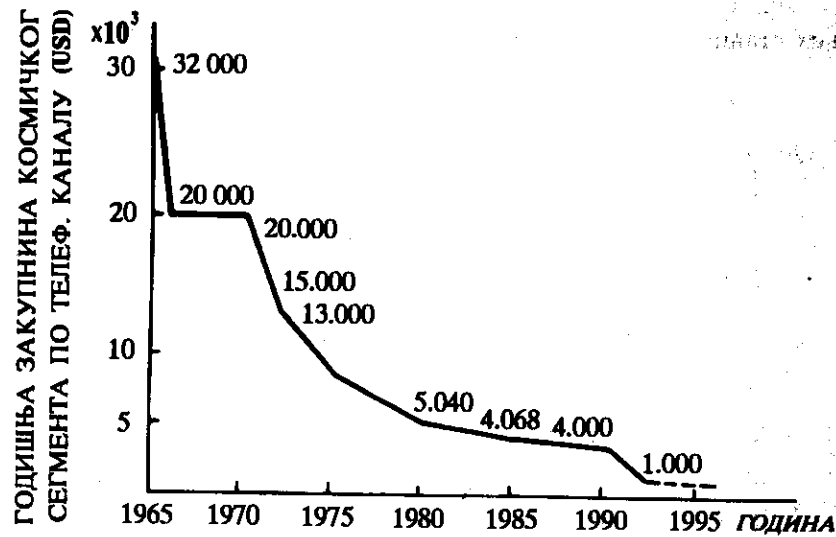


Сл. 1. Укупан број коришћених телефонских канала у систему INTELSAT по годинама

Два скупа података изузетно јасно карактеришу успешан развитак и експлоатацију сателитских телекомуникација. На слици 1 приказан је укупан број коришћених телефонских канала у систему INTELSAT по годинама. Види се да је тај број од 1965. до 1990, дакле за четврт века, порастао око 800 пута. Истовремено са овим растом годишња цена закупа космичког сегмента, слика 2, изражена у USD за један телефонски канал опала је за око 30 пута у истом периоду, да би у данашње дане износила око 900 USD, или нешто више од 2 USD дневно.

На овај начин, појам дистанце у обичном и пословном животу људи у домену комуницирања такорећи више и не постоји. Сва збивања у свету у било ком домену живота губе и локалну и временску димензију, а цео свет постаје присутан догађајима у сваком тренутку и на сваком месту и на Земљи и око ње.

Ако се има на уму да су четири прве основне потребе човека храна, енергија, становање и комуницирање, лако може и да се схвати од коликог



Сл. 2. Годишња закупнина космичког сегмента у USD по телефонском каналу

значаја за човечанство представља успешан ход сателитских телекомуникација.

2. Савремени сателитски сервиси

INTELSAT представља сликовит пример развоја једног одређеног сервиса сателитских телекомуникација. Међутим, напоре са овим сервисом развијао се читав низ других сателитских сервиса тако да их данас има 12. То су:

1. Фиксни сателитски сервис (FSS)
2. Радио-дифузни сателитски сервис
3. Мобилни сателитски сервис
4. Радио-одређивање положаја и радио-навигација
5. Сервис космичких операција
6. Интерсателитски сервис
7. Сервис за истраживање Земље
8. Метеоролошки сателитски сервис
9. Сервис за стандард фреквенције и временских сигнала
10. Сервис за истраживање космоса
11. Радио-аматерски сервис
12. Радио-астрономија.

Вреди рећи неколико речи о овим сервисима.

У FSS веза се остварује између две фиксне земаљске станице преко сателита као што је то случај у систему INTELSAT. То је веза тачка-тачка, а служи за пренос говора, писаног текста, слика и података. У радио-дифузног сервису циљ је да се ТВ и аудио програмом из студија на Земљи покрије што већи број корисника на површини Земље. Мобилни сателитски системи деле се на три дела: поморски, копнени и ваздухопловни сервис и служе за пренос говора, слика и разних података између покретних и фиксних корисника. Данас у систему INMARSAT у пловидби морем око 9000 бродова користи ове услуге. Системи за радио-одређивање положаја и навигацију омогућавају да се одреди положај покретне платформе, њена географска дужина, ширина и надморска висина са неколико метара тачности, да се истовремено обезбеди двосмерна комуникација са одговарајућом централом и да се обавља навигација жељеном трајекторијом. Овај систем се користи у камионском и аутомобилском саобраћају, железници, поморству и у ваздухопловству. Сервис космичких операција везан је за сва лансирања и вођење сателита и других објеката у космосу. Интерсателитски сервис служи за везу између два и више сателита, што је од значаја у оним случајевима када се једним сателитом не могу повезати две сувише удаљене земаљске станице, као и тамо где такве везе служе за прикупљање разних података снимљених ниско-орбитајућим сателитима. У сервису за истраживање Земље врши се даљинско осматрање Земље оптичким камерама, радаром и инфрацрвеним камерама, а добијени резултати користе се у многим областима, као што су агрикултура, шумарство, грађевинарство, геодезија, хидрологија, океанографија, картографија и другим. Метеоролошки системи служе за сликање Земље у целини, дистрибуцију метеоролошких података и скупљање података са аутоматских станица на Земљи. Сервис за стандард фреквенција и временских сигнала има велики број корисника: навигатори, сеизмолози, специјалисти у телекомуникацијама, оператори у космичким операцијама, астрономи, ТВ и радио служба, оператори у енергетским системима а служе и као стандарди у разним лабораторијама.

Гледајући све ове сервисе, карактеристично је да се запази да скоро сви они сем јавних и научних примена имају и војну примену. Зато данас и званично постоје војни сателитски системи САД, НАТО пакта, бившег Совјетског Савеза и други. Јасно је да све то води глобализацији војних активности на Земљи и њеној околини.

3. Ограничени природни ресурси и последице

У свим наведеним телекомуникационим применама сателита користе се два природна ресурса. То су радио-фреквенцијски спектар и геостационарна сателитска орбита. Капацитет сваког од њих је ограничен. Кориснићење виших фреквенцијских опсега зависи од тога докле су доспела акуелна технолошка остварења у компонентама уређаја. На капацитет

орбите утиче низ фактора, као што су усмереност сателитске антене и зрачење кроз бочне листове ван зоне покривања, споредна зрачења антене земаљске станице, поларизација таласа која дозвољава истовремено коришћење истих фреквенција, одржавање фиксне позиције ометача и њена толеранција износи $\pm 0,1^\circ$, тачност усмеравања сателитске антене на центар зоне покривања, дозвољени ниво снаге шума интерференције који износи 800 pWOp за појединачни ометач и 2 000 pWOp у телекомуникационом каналу скупно за све ометаче, као и низ других чинилаца.

Испитивања су показала, наравно сасвим хипотетично и оријентационо, да ако се претпостави растојање између сателита од 2° са хомогеним распоредом дуж орбите, онда се на орбити може сместити онолико сателита и поновити исту фреквенцију онолико пута колико је наведено у табели Т-2. При овом претпостављено је да је поларизација иста. А ако би се користиле две ортогоналне поларизације, број поновљених фреквенција би се удвостручио. Из табеле Т-2 види се да је у опсегу учестаности 14/11 GHz број понављања фреквенција око два пута већи, а у опсегу 30/20 GHz око три пута већи од броја сателита. То није случај са опсегом 6/4 GHz. Наиме, у вишим опсезима могуће је правити усмереније антене и остварити "spot" зоне покривања на Земљи, тако да се са једног сателита зрачи више снопова. На тај начин избегава се интерференција и повећава број поновљених фреквенција, па је и ефикасност искоришћења орбите већа.

Табела Т-2

Фреквенцијски опсег (GHz)	Број сателита	Број поновљених фреквенција
6/4	170	170
14/11	400	880
30/20	670	1870
Укупно:	1240	2920

Све што је напред изложено води ка закључку да и орбита и спектар постају све више закрчени и да то почиње да представља озбиљну кочницу у експлоатацији сателитске технике. Број оних који жеде или да користе космички сегмент неког ко продаје такве услуге, или да имају сопствени сателит, из дана у дан расте. Према званичним подацима IFRB (International Frequency Registration Board) број сателита који су лансирани у геостационарну орбиту и оних за које је процедура доделе позиција и фреквенција већ завршена, у периоду од 1970. до 1993. износи 464. Од тога броја САД и бивши СССР имају по 140 сателита свих намена.

Највећи и најуспешнији корисници геостационарне орбите су индустријски развијене земље. Свега њих двадесетак користи сопствене сателите. Остале земље, а такође и прве, користе међународне извор-

цијуме, као што су INTELSAT, INMARSAT, EUTELSAT, ARABSAT, INTER-SPUTNIK и други.

У оваквим околностима још седамдесетих година почела је на међународном плану да се јавља бојазан многих да када они буду у стању да дођу до сопствених сателита, места на орбити више неће бити. А орбита и спектар су добро целог човечанства. Зато је 1985. и 1988. [4, 5, 6], у две сесије одржана светска конференција за коришћење геостационарне орбите и планирање сервиса који је користе. То је био велики посао и веома тежак скуп, пун испрелетених интереса свих учесника. Закључено је да се планира само ФСС, док је још раније био испланиран Радио-дифузни сервис. Остало је да остали сервиси подлеже интернационалној регистрацији и координацији у IFRB без плана. А то значи и без гаранције за место на орбити и фреквенцијски спектар. Ако координација не успе, нема ни лансирања.

Закључак ових скупова свео се на то да се направи план по коме се свакој земљи за њено национално покривање гарантовано додељује један "allotment", тј. "део у расподели" који чине 800 MHz фреквенцијског спектра у области 6/4 и 14/11 GHz, заједно са једном орбиталном позицијом унутар "предодређеног лука" орбите за покривање одређене сервисне зоне. Гаранција важи двадесет година, колико важи и план. Према томе, и позиција на орбити и фреквенцијски спектар остају расположиви одређеној земљи све док их она не искористи.

На овај начин задовољен је принцип равноправности свих у коришћењу природних општчовечанских добара. Међутим, у оваквом решењу остала је једна дилема: да ли је оправдано "замрзнути" позицију на орбити, ако се она можда никад неће ни користити? Одговор није дат.

У изради оваквог плана коришћења орбите јавила се једна озбиљна тешкоћа.

Наиме, да би се план направио, морали су да се претпоставе неки технички параметри који карактеришу сателитски систем. То су перформансе антена сателитске и земаљске станице, снаге предајника, температуре шума пријемника, дозвољена интерференција и друге које улазе у прорачун система. То су тзв. *стандардни параметри*. Основни циљ прорачуна је да се нађе такав распоред сателита на орбити на основу стандардних параметара да интерференција из мреже у мрежу буде испод неке дефинисане, прихватљиве вредности.

Међутим, тешко је поверовати да ће у току реализације система у периоду од двадесет година бити на снази исте оне вредности параметара из доба израде плана. Напредоваће техника, налазиће се боља и економичнија решења. Стога је од стране научника учињен знатан напор да се скуп стандардних параметара конвертује у скуп *генерализованих параметара* који карактеришу генеришућу моћ интерференције једне мреже с једне стране а с друге стране њену суспектибилност ка интерференцији. Очигледно је да су обе ове величине функције техничких

параметара мреже. Постоји много различитих комбинација вредности параметара које могу да резултују у истим вредностима параметара. Стога, идеја да се план изради и публикује преко генерализованих параметара дозвољава промене параметара те тако пружа могућност у њиховом избору, уз услов да интерференција остаје паразитна колика колика је и планирана.

На тај начин, свака администрација ће без посебне координације моћи да на своје место на орбити постави сателит под условом да генерализовани параметри задовољавају одређене вредности.

4. Технички параметри коришћени за израду плана FSS

За израду плана за FSS коришћена је референтна сателитска мрежа за коју су усвојене ниже наведене карактеристике.

4.1. Радио-фреквенцијски опсези

(4500-4800) MHz за везу сателит → Земља

(6725-7025) MHz за везу Земља → сателит

(10,70-10,95) GHz за везу сателит → Земља

(11,20-11,45) GHz за везу сателит → Земља

(12,75-13,25) GHz за везу сателит → Земља

4.2. Ширина фреквенцијског опсега у једном делу расподеле

300 MHz у опсегу 6/4 GHz и 500 MHz у опсегу 14/11 GHz

4.3. Тип модулације

План не зависи од типа модулације и врсте приступа сателиту.

4.4. Однос носилац/шум (C/N)

Однос C/N је специфициран помоћу ознака са слике 3, где су:

P_{ZT} - предајна снага земаљске станице,

P_{SR} - пријемна снага на сателиту,

N_U - термички шум на улазу у сателитски пријемник,

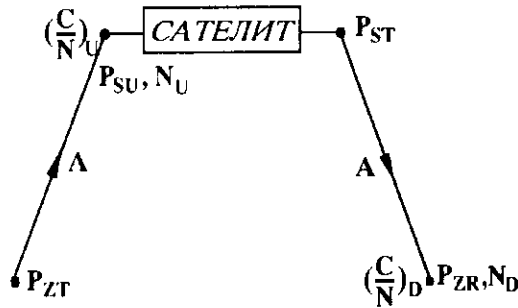
P_{ST} - предајна снага сателитске станице,

P_{ZR} - пријемна снага земаљске станице,

N_D - термички шум на улазу у пријемник земаљске станице,

A - слабљење у слободном простору,

α - појачање сателитског транспондера.

Сл. 3. Уз дефиницију односа сигнал/шум (C/N)

4.4.1. Однос сигнал/шум на улазу у сателитски пријемник на улазном делу везе

$(C/N)_D \geq 23$ dB у условима фединга услед кише са минималном спектралном густином средње снаге (СГСС) предајника земаљске станице од - 60 dB (W/Hz), при чему је средња вредност узета у потребном опсегу учестаности модулисаног носиоца.

4.4.2. Однос сигнал/шум на улазу у пријемник земаљске станице на силазном делу везе

$(C/N)_U \geq 17$ dB у условима фединга услед кише.

4.4.3. Тотални однос сигнал/шум

На основу слике 3, однос сигнал/шум тоталне везе биће:

$$\left(\frac{C}{N}\right)_U = \frac{P_{ST}}{\alpha N_U}; \quad \left(\frac{C}{N}\right)_D = \frac{P_{ST}}{A N_D} = \frac{P_{ZR}}{N_D} \quad (1)$$

Однос сигнал/шум у целој вези дат је изразом:

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{TOT} = \frac{P_{ZR}}{N_D + \frac{\alpha}{A} N_U}, \quad (2)$$

односно,

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{TOT}^{-1} = \left(\frac{C}{N}\right)_U^{-1} + \left(\frac{C}{N}\right)_D^{-1}. \quad (3)$$

Уврсте ли се усвојене вредности из 4.4.1 и 4.4.2, налази се да је:

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{TOT} = 16 \text{ dB}$$

у условима фединга услед кише.

При овом рачуну узето је да дубина фединга услед кише не прелази вредност од 8 dB за 99,95 % године у опсегу учестаности 6/4 GHz, а у опсегу 14/11 GHz вредности од 8 dB за 99,9 % године.

4.5. Елевација антене земаљске станице

Минимални елевациони угао за одређену географску локацију зависи много од брдовитости терена и преципитације. Тако за кишну зону K у којој се налази Југославија, тај угао износи 20° .

4.6. Дозвољена интерференција

За сваки део расподеле (allotment) у плану гарантује се минимални однос СГСС носиоца и укупне интерференције $(C/I)_{SG} \geq 26$ dB.

4.7. Поларизација таласа

Поларизација таласа није узимана у обзир, тако да то представља један фактор сигурности.

4.8. Карактеристике земаљске станице

4.8.1. Пречник антене

$$D = 7 \text{ m за опсег } 6/4 \text{ GHz}$$

$$D = 3 \text{ m за опсег } 14/11 \text{ GHz}$$

4.8.2. Температура шума пријемника земаљске станице

Температура шума система дата на излазним крајевима пријемне антене:

$$140\text{K за } 6/4 \text{ GHz}$$

$$200\text{K за } 14/11 \text{ GHz}$$

4.8.3. Ефикасност антене земаљске станице

$$\eta = 75\%$$

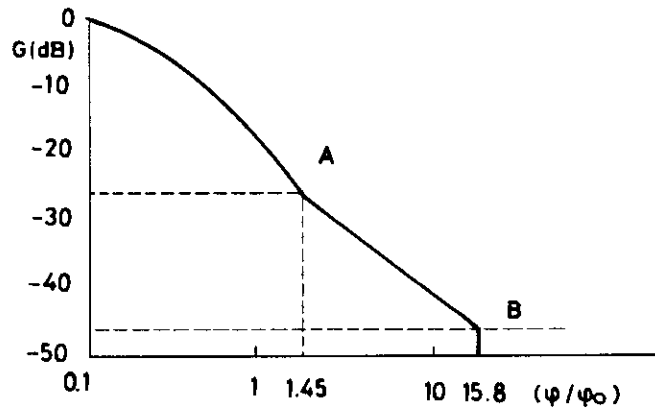
4.8.4. Референтни дијаграм зрачења антене земаљске станице

На слици 4 дат је референтни дијаграм зрачења антене који је узет у обзир при изради плана.

Карактеристичне вредности са овог дијаграма на слици 4 дате су следећим обрасцима:

$$G_{\max} = 10 \log \left[\eta \left[\frac{\pi D}{\lambda} \right]^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 G(\varphi) &= G_{\max} - 2,5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{D}{\lambda} \varphi \right)^2, & \text{за } 0 < \varphi < \varphi_m \\
 G(\varphi) &= G_1, & \text{за } \varphi_m \leq \varphi \leq \varphi_r \\
 G(\varphi) &= 32 - 25 \log \varphi, \text{ (dB)} & \text{за } \varphi_r \leq \varphi < 48^\circ \\
 G(\varphi) &= -10 \text{ dB}, & \text{за } 48^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ
 \end{aligned} \tag{4}$$



Сл. 4. Референтни дијаграм зрачења антене земаљске станице

Добитак првог бочног листа износи:

$$G_1 = 2 + 15 \log \frac{D}{\lambda}, \text{ (dB)} \tag{5}$$

Карактеристични углови у дијаграму зрачења су:

$$\varphi_m = \frac{20\lambda}{D} \sqrt{G_{\max} - G_1}, \text{ (}^\circ\text{)} \tag{6}$$

$$\varphi_r = 15.58 \left(\frac{D}{\lambda} \right)^{-0.6}, \text{ (}^\circ\text{)} \tag{7}$$

Израчунате вредности максималног добитка антене износе:

$$\begin{aligned}
 &\text{за } 6,5 \text{ GHz и } D = 7 \text{ m, } G_{\max} \cong 51,3 \text{ dB,} \\
 &\text{за } 13,5 \text{ GHz и } D = 3 \text{ m, } G_{\max} \cong 51,0 \text{ dB.}
 \end{aligned}$$

Да би се имала представа о реду величине, израчунате су следеће вредности:

$$\text{за } 6,5 \text{ GHz, } \varphi_m = 0,6^\circ, \varphi_r = 0,82^\circ.$$

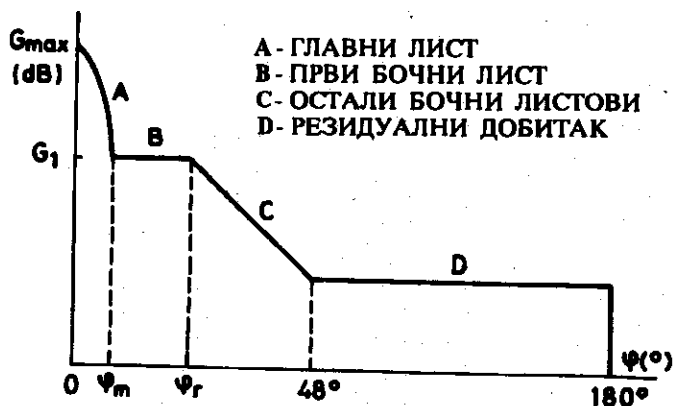
4.9. Карактеристике космичке станице

4.9.1. Облик површине покривања

План се заснива на примени антене на сателиту чији сноп зрачења има за пресек круг или елипсу.

4.9.2. Референтни дијаграм зрачења антене на сателиту

На слици 5 приказан је дијаграм зрачења антене на сателиту.



Сл. 5. Референтни дијаграм зрачења антене на сателиту

Карактеристичне вредности у дијаграму зрачења дате су следећим обрасцима:

$$G_{\max} = 44,45 - 10 \log(\varphi_{01} \cdot \varphi_{02}), \quad (\text{dBi}) \quad (8)$$

Крива А:

$$-12(\varphi/\varphi_0)^2, \quad (\text{dB}) \quad \text{за } 0 \leq (\varphi/\varphi_0) \leq 1,45^\circ \quad (9)$$

$$-22 - 20 \log(\varphi/\varphi_0), \quad (\text{dB}) \quad \text{за } (\varphi/\varphi_0) > 1,45^\circ \quad (10)$$

Крива В:

минус добитак на осовини (посебан случај за добитак на осовини од 46 dBi)

$\varphi_{01}, \varphi_{02}$, угао на сателиту подржаван од велике мале осе елипсе за $1/2$ снаге,

φ_0 , ширина снопа зрачења у преску за $1/2$ снаге у правцу од интереса.

4.9.3. Температура шума система сателитског пријемника

Температура шума система сателитског пријемника у односу на крајеве антене износи:

1000K за 6 GHz

1500K за 14 GHz

4.9.4. Минимална ширина снопа зрачења

Минимална ширина снопа зрачења за $1/2$ зрачене снаге је $1,6^\circ$ за 6/4 GHz и $0,8^\circ$ за 14/11 GHz.

4.9.5. Дозвољена толеранција усмерености антене

Дозвољена толеранција одступања правца главног зрачења у односу на његову номиналну позицију износи $0,1^\circ$ у било ком правцу.

4.9.6. Ефикасност антене

Ефикасност антене на сателиту износи $\eta = 0,55$.

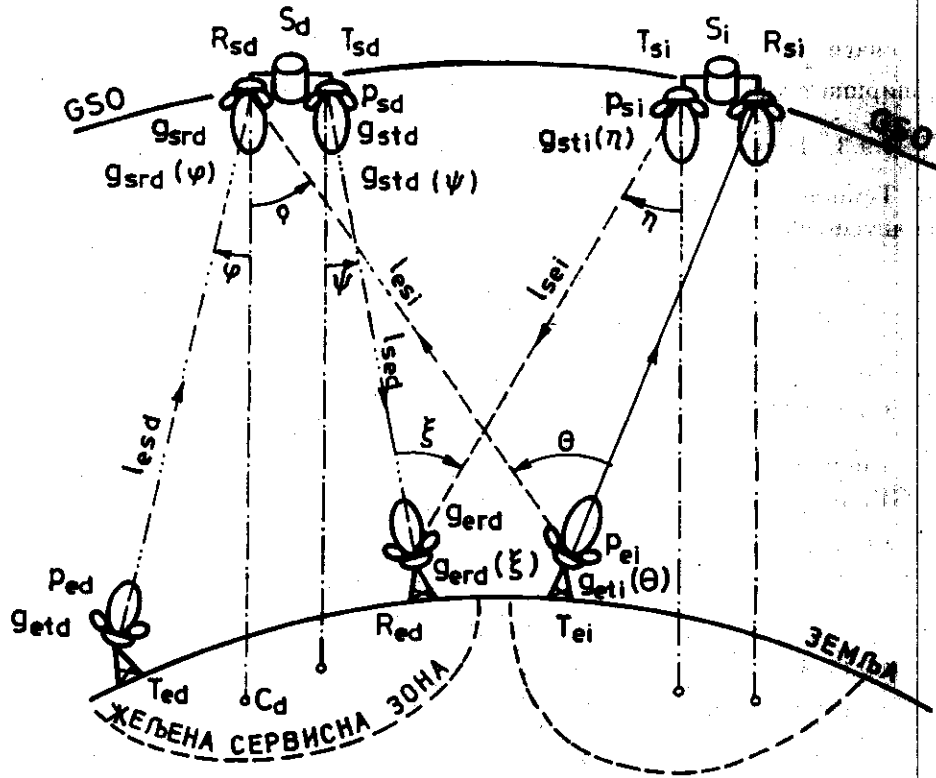
5. Генерализовани параметри мреже

5.1. Сценарио интерференције

Генерализовани параметри мреже изводе се на основу слике 6. Као што се види, у левом делу слике приказана је жељена (d) сервисна зона. У њој се налазе предајна (t) и пријемна (r) станица и заједно са припадајућим сателитом S_d образују сателитску мрежу. У десном делу слике приказана је суседна сателитска мрежа која представља потенцијални извор интерференције.

До интерференције долази двама путевима. Прво, зрачењем земаљске станице T_{ei} кроз бочне листове њеног дијаграма зрачења појављује се интерференција на улазу пријемника R_{sd} жељеног сателита и друго, предајник на сателиту T_{si} кроз бочне листове свог дијаграма зрачења проузрокује интерференцију у пријемник жељене пријемне земаљске станице R_{ed} .

Према томе, цео план коришћења орбите треба извести тако да укупна интерференција кроз ова два пута пропагације таласа буде испод дозвољеног нивоа. Наравно, ако постоји више мрежа које узрокују интерференцију, оне ће се све узети у обзир. Први случај је познат под називом појединачна (single) интерференција, а други скупна (aggregate) интерференција.



Сл. 6. Сценарио интерференције у жељену сателитску мрежу од друге сателитске мреже

За анализу је потребно поменути и то да су предајна и пријемна антена на сателиту (s) оријентисане ка центру сервисне зоне. Предајна и пријемна антена земаљске (e) станице оријентисане су ка сателиту.

5.2. Анализа интерференције

У анализи интерференције са слике 6 коришћене су ниже наведене ознаке:

- P_{cd} - спектрална густина средње снаге усредњена у потребном опсегу модулисаног носиоца којом се напаја предајна антена жељене земаљске станице (W/Hz);
- P_{ei} - спектрална густина средње снаге усредњена у потребном опсегу модулисаног носиоца којом се напаја предајна антена интерферирајуће (i) земаљске станице (W/Hz);
- P_{sd} - спектрална густина средње снаге усредњена у потребном опсегу модулисаног носиоца којом се напаја предајна антена жељеног предајника на сателиту (W/Hz);

- P_{si} - спектрална густина средње снаге усредњена у потребном опсегу модулисаног носиоца којом се напаја предајна антена интерферирајућег предајника на сателиту (W/Hz);
- g_{etd} - максимални добитак земаљске предајне антене жељене станице;
- g_{erd} - максимални добитак земаљске пријемне антене жељене станице;
- $g_{erd}(\xi)$ - добитак земаљске пријемне антене жељене станице у правцу ξ ;
- $g_{std}(\psi)$ - добитак сателитске предајне антене жељене станице у правцу ψ ;
- $g_{srd}(\varphi)$ - добитак сателитске пријемне антене жељене станице у правцу φ ;
- $g_{srd}(\rho)$ - добитак сателитске пријемне антене жељене станице у правцу ρ ;
- $g_{eti}(\theta)$ - добитак земаљске предајне антене интерферирајуће станице у правцу θ ;
- $g_{sti}(\eta)$ - добитак сателитске предајне антене интерферирајуће станице у правцу η .

Анализа интерференције се састоји и израчунавању односа снаге жељеног носиоца и укупне интерференције на улазу у пријемник жељене земаљске станице R_{ed} , тј. $(C/I)_{TOT}$. Тај однос се састоји из два дела:

а) то је $(C/I)_s$ - однос снаге носиоца жељеног сигнала на улазу у сателитски транспондер и снаге интерферирајућег сигнала који долази од предајника интерферирајуће земаљске станице а на улазу у сателитски транспондер, дакле, први поменути пут интерференције;

б) то је $(C/I)_e$ - однос снаге носиоца жељеног сигнала предајника са жељеног сателита на улазу у пријемник земаљске станице и снаге интерферирајућег сигнала који долази од предајника интерферирајућег сателита а на улазу у пријемник жељене земаљске станице, тј. други поменути пут интерференције.

На тај начин, ако се са P означи снага а са l слабљење трасе, биће:

$$(C/I)_s = \frac{P_{ed} g_{etd} g_{srd}(\varphi)}{l_{esd}} \frac{l_{sei}}{P_{ei} g_{eti}(\theta) g_{srd}(\rho)} \quad (11)$$

$$(C/I)_e = \frac{P_{sd} g_{std}(\psi) g_{erd}}{l_{sed}} \frac{l_{sei}}{P_{si} g_{sti}(\eta) g_{erd}(\xi)} \quad (12)$$

Сада ће однос $(C/I)_{TOT}$ за целу везу а на улазу у пријемник жељене земаљске станице бити:

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{\text{TOT}} = \frac{C_e}{I_s + I_e} = \left[\frac{I_s}{C_e} + \frac{I_e}{C_e}\right]^{-1} = \left[\left(\frac{I}{C}\right)_s + \left(\frac{I}{C}\right)_e\right]^{-1} \quad (13)$$

где је:

C_e - снага носиоца на улазу у пријемник жељене земаљске станице;

I_e - снага интерференције на том истом месту изазвана емисијом са интерферирајућег сателита;

I_s - снага интерференције на улазу у пријемник жељене земаљске станице, настала услед интерференције на улазу у жељени сателитски пријемник а због интерференције од интерферирајуће предајне земаљске станице.

Ако се сада са B_c означи ширина спектра жељеног сигнала а са B_i ширина спектра интерферирајућег сигнала, па се лева и десна страна израза (13) помноже са B_i/B_c , добиће се спектралне густине средње снаге уместо снага које фигуришу у изразу (13). Заменом израза (11) и (12) у (13), добија се да однос спектралних густина средњих снага жељеног сигнала и интерференције износи:

$$\begin{aligned} \left(\frac{C}{I}\right)_{SG} &= \frac{B_c}{B_i} \left(\frac{C}{I}\right)_{\text{TOT}} \\ &= \left[\frac{p_{ei} g_{sti}(\theta) g_{ard}(\rho) l_{esd}}{p_{ed} g_{td} g_{rd}(\varphi) l_{esi}} + \frac{p_{ei} g_{sti}(\eta) g_{erd}(\xi) l_{esd}}{p_{ed} g_{td}(\psi) g_{rd} l_{esi}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Ако се сада уведе ознака:

$$\Delta g(\varphi) = \frac{g}{g(\varphi)}, \quad (15)$$

где $\Delta g(\varphi)$ уопште представља дискриминацију антене, формула (14) постаје:

$$\begin{aligned} \left(\frac{C}{I}\right)_{SG} &= \left[p_{ei} g_{sti}(\theta) \frac{1}{p_{ed} g_{td} \Delta g_{ard}(\rho)} \Delta g_{ard}(\varphi) \frac{l_{esd}}{l_{esi}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_{ei} g_{sti} g_{erd}(\xi)}{\Delta g_{sti}(\eta) p_{ed} g_{rd} g_{td}} \Delta g_{std}(\psi) \frac{l_{esd}}{l_{esi}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

Ако се уведу ознаке:

$$A_{ei}(\theta) = p_{ei} g_{eti}(\theta), \quad (17)$$

$$B(\rho) = \frac{1}{p_{ed} g_{etd} \Delta g_{srd}(\rho)}, \quad (18)$$

$$C_{si}(\eta) = \frac{p_{si} g_{sti}}{\Delta g_{sti}(\eta)}, \quad (19)$$

$$D(\xi) = \frac{g_{erd}(\xi)}{p_{sd} g_{std} g_{erd}}, \quad (20)$$

релација (16) може се писати у облику:

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{SG} = \left[A_{ei}(\theta) B_{sd}(\rho) \Delta g_{srd}(\varphi) \frac{l_{esd}}{l_{sei}} + C_{si}(\eta) D_e(\xi) \Delta g_{std}(\psi) \frac{l_{sed}}{l_{sei}} \right]^{-1} \quad (21)$$

У овој релацији може да се изврши следећа апроксимација:

$$l_{esd} \cong l_{sei}, \quad (22)$$

$$l_{sed} \cong l_{sei}, \quad (23)$$

тако да она гласи:

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{SG} = \left[A_{ei}(\eta) B_{sd}(\rho) \Delta g_{srd}(\varphi) \frac{l_{esd}}{l_{sei}} + C_{si}(\eta) D_{ed}(\xi) \Delta g_{std}(\psi) \right]^{-1} \quad (24)$$

Из ове релације може да се увиди прави значај уведених параметара.

Тако:

- $A_{ei}(\theta)$ - представља спектралну густину средње снаге интерферирајућег предајника на Земљи која се зрачи ка пријемнику жељеног сателита;
- $B_{sd}(\rho)$ - представља “осетљивост” пријемника жељеног сателита на интерференцију од земаљске станице;
- $C_{si}(\eta)$ - представља спектралну густину средње снаге предајника на сателиту која се зрачи као интерференција према пријемнику жељене земаљске станице;
- $D_{ed}(\xi)$ - представља “осетљивост” пријемника жељене земаљске станице на интерференцију од сателита.

Спроведећи анализу израза (24), може да се закључи следеће:

- што су $A_{ei}(\theta)$ и $C_{si}(\eta)$ већи, веће су и интерферирајуће спектралне густине средње снаге па је и однос $(C/I)_{SG}$ мањи;
- што су $B_{sd}(\rho)$ и $D_{ed}(\xi)$ већи, већа је “осетљивост” и сателитског и земаљског пријемника на интерференцију па је и $(C/I)_{SG}$ мањи;
- што су дискриминације $\Delta g_{srd}(\varphi)$ долазећег жељеног сигнала и $\Delta g_{std}(\psi)$ емитованог са сателита жељеног сигнала према земаљском пријемнику веће, лошији је однос $(C/I)_{SG}$.

5.3. Генерализовани параметри и закључак анализе

На основу израза (17), (18), (19) и (20) могу се сасвим уопштено дефинисати параметри:

$$A = p_e g_{et}(\theta), \quad (25)$$

$$B = \frac{1}{p_e g_{et} \Delta g_{sr}(\rho)}, \quad (26)$$

$$C = \frac{p_s g_{st}}{\Delta g_{st}(\eta)}, \quad (27)$$

$$D = \frac{g_{er}(\xi)}{p_s g_{st} g_{erd}}, \quad (28)$$

где p_e и p_s означавају спектралне густине средњих снага предајника земаљске и сателитске станице, респективно. Овако дефинисани параметри називају се генерализовани параметри сателитске мреже. Параметри A и C односе се на предајнике земаљске и сателитске станице, респективно, док се параметри B и D односе на пријемнике сателитске и земаљске станице, респективно.

Ако се сада погледа израз (24), јасно се види да постоји читав низ вредности A , B , C и D параметара који увек дају исти однос $(C/I)_{SG}$. Дакле, постигнута је изузетна флексибилност у погледу планирања орбите, а то значи да се у току важења плана од 20 година могу примењивати и различите и нове технологије мењајући A , B , C и D , а да се при том коегзистенција свих у плану не наруши. Тако, на пример, ако у суседној мрежи земаљски предајник емитује сувише велику снагу ради повећања свога параметра A , израз (17), могуће је смањити параметар B , израз (18), повећањем снаге жељеног предајника и да при том односу $(C/I)_{SG}$ задржи исту вредност.

На основу овог може се извући практичан закључак за формулисање плана и његово публикавање.

Да би се одредили параметри A , B , C и D , као што се то види из израза (17–20), потребно је за сваку сателитску мрежу унапред, при изради плана, одредити четири вредности:

$$p_e, p_e g_{et}, p_s g_{st}, \text{ и } p_s g_{st} g_{er}. \quad (29)$$

Сада, A , B , C и D параметри зависе само од дијаграма зрачења предајне и пријемне антене земаљске и сателитске станице. Дакле, у сваком посебном случају лако је да се одреди да ли “ново-дошли” на орбиту задовољава све неопходне услове.

Кад је већ реч о односу $(C/I)_{SG}$, потребно је да се нагласе још две ствари.

добру страну. Планирањем се обезбеђује једнако право свим земљама у коришћењу природних ресурса и гарантује приступ геостационарној орбити, али с друге стране ни техничке ни материјалне могућности нису једнаке, па додељене орбиталне позиције остају неискоришћене за дужи период. А ако се у перспективи покажу настојања да се и остали сателитски сервиси планирају, оба ова ефекта појавиће се у још оштријем облику.

Једини излаз за даљи успешан развој сателитских телекомуникација је повећање капацитета ресурса. То је могуће учинити двама путевима.

Пре свега, а тако се и крећу сви напори истраживача, јесте технолошко освајање виших фреквенцијских подручја. А то значи увести у употребу опсег учестаности од 30/20 GHz, што се већ и ради, и друге још знатно више опсеге учестаности реда 100 GHz па и више, чак до 400 GHz који су до сада предвиђени за будуће сателитске везе. За ово треба изнаћи нове активне и пасивне компоненте, што данас у многим научним институцијама представља преокупацију истраживача.

Друго што може да се учини јесте изналагање нових концепцијских решења било у организацији самог сателитског система, било у примени неких нових решења у преносу сигнала.

У организацији система, размишљања иду следећим путем. Кад је почела сателитска ера, глобално покривање 1/3 Земљине површине, представљало је фасцинирајуће решење. Али, фреквенција која се за то искористи, више не може практично да се примени другде. Онда се почело размишљати о регионалном, па затим о националном радио-покривању сервисних зона. Сателит, космички сегмент, био је само релјеј. Међутим, данас се дошло на нову замисао. Могуће је правити антене, фазно управљане низове, чији се дијаграм зрачења може да мења и по облику и по правцу и то компјутерски управљано са даљине. Захваљујући примени виших фреквенција, зоне покривања могу бити и мале, тзв. "spot" зоне. Сада, ако се и комутациони центар са Земље пресели на сателит, па он постане "централа", могуће је да се комбинацијом "spot" покривања и бирањем партнера у комуникацији успостављају везе као и у аутоматској телефонији на Земљи. Самим тим, коришћене фреквенције могу и да се понављају без бојазни за интерференцију, а то значи велико повећање капацитета.

У погледу преношења сигнала јављају се нови системи модулације. Техника преноса у проширеном спектру, било са директном секвенцом, било са фреквенцијским скакањем или комбиновано, пружа широке могућности за повећање имуности на интерференцију. Даље, примена дигиталних модулација са регенерацијом на сателиту обезбеђује да се отклоне грешке у преносу настале на узлазној траси, па се оне не суперпонирају грешкама насталим на силазној траси.

Вредно је поменути и то да се за неке сервисе траже друга решења која нису везана за геостационарну орбиту. Најновији пример је мобил-

ни систем. Наиме, замишљено је да постоји 7 скоро поларних орбита, кружног облика, у 7 равни око Земље са полупречником од око 800 km. У свакој од њих предвиђа се по 11 нискоорбитајућих сателита (LEO - Low Orbiting Satellite). Дакле, укупно 77 сателита. Како овај број одговара у табели смената иридијуму, систем је назван IRIDIUM. Везе се остварују између два корисника било где да се они налазе на Земљи, било да су фиксни или мобилни, при чему се користе и интерсателитске везе. Нискоорбитајући сателити имају ту предност што је временско кашњење сигнала услед простирања око 30 пута мање од случаја са геостационарним сателитима.

На крају, гледајући глобални телекомуникациони систем, треба узети у обзир и огромне могућности које пружају оптичке телекомуникације, што ће знатно допринети растерећењу геостационарне орбите, тако да она може да се користи за оне сервисе за које нема других решења.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S.J. Campanella, J.V. Evans, T. Muratani, and P. Bartholome, *Satellite Communication Systems and Technology, Circa 2000*, Proceedings of the IEEE, July 1990, pp.1039-1056.
- [2] *INTELSAT Report, 1989-1990*, INTELSAT, Washington 1990.
- [3] M. Stojković, G. Horvai, P. Brown, and T. Alper, *INTELSAT Techniques. Services and Future Developments*, Journal on Communication, January 1991, pp.2-14, Budapest.
- [4] *The ORB (2) is to begin its work*, Telecommunication Journal, 1988, August, pp.495-500, Geneva 1988.
- [5] *Report to the second session of the conference*, WARC ORB (85), Geneva, 1986.
- [6] *FINAL ACTS*, World Administrative Radio Conference on the Use of the Geostationary-Satellite Orbit and the Planning of Space Services Utilizing It, ITU, Geneva, 1988.

I.S. Stojanović

PLANNING OF THE GEOSTATIONARY SATELLITE ORBIT AND PERSPECTIVES OF ITS UTILIZATION

S u m m a r y

Successful launching of satellites in the geostationary orbit has opened a new era in telecommunications. Two natural, but limited resources are exploited: the orbit itself and the available frequency spectrum. Due to the benefit of satellite services offered to all nations, every country pretends to possess its own orbital

position and the belonging frequency spectrum. As a consequence, a large number of satellites has been launched resulting in the overcrowded orbit and the frequency spectrum as well. Since the orbit and the spectrum belong to all mankind, they have to be used equitably. This can be ensured only by careful orbit planning which will guarantee each country the planned orbital position and the spectrum for the long-term future when the country will be able to launch or to purchase a satellite.

In the paper, the planning method based on the allowable level of interference between satellite network is presented. This method is so conceived that it offers each country the freedom to occupy its position when it so decides, taking into account new technologies and new solutions which could appear at that time. The main idea is based on standard system parameters from which the new set of generalized parameters has been derived. This set offers such a flexibility in the planning process that the plan does not depend either on the modulation type or on the kind of the transmitted signals.

М.М. РИСТИЋ, З. НИКОЛИЋ

МОДЕЛОВАЊЕ СИНТЕРОВАЊА У ПРИСУСТВУ ТЕЧНЕ ФАЗЕ

(Примљено на XIV скупу Одељења, 15. децембра 1992)

1. Увод

Процес синтеровања у присуству течне фазе представља необично значајан процес за синтезу савремених материјала. Изузетна комплексност, која га карактерише, онемогућава тачно квалитативно и квантитативно описивање овог процеса. Његову кинетику дефинишу не само основни параметри полазног материјала, већ и/или паковање честица, почетна расподела и прерасподела честица у систему течност-чврсто, штавише, повећање броја контактних мостова по једној честици доводи до образовања врло сложеног физичко-хемијског система, чији је квантитативни опис практично немогућ. Овде треба додати да постојеће теорије још увек представљају само апроксимацију реалног процеса, јер не узимају у обзир све карактеристике полазног праха, стварну количину течне фазе у систему, способност компонената да дифундују итд.

Неки аутори [1, 2] разматрају овај процес тако што претпостављају да га карактерише одвијање процеса растварања и таложења у систему течност-чврсто. Растворени материјал се транспортује кроз течну фазу и таложи на неком месту уз чврсту фазу формирајући легуру. Последица тог процеса је раст зрна и смањење или нестајање порозности. У раду [3] растварање мањих честица и њихово таложење уз веће честице објашњавају чињеницом да се растворљивост чврсте фазе у течностној фази повећава са смањењем радијуса кривине. Према Кингерију [4, 5] танки филм течне фазе у области контакта налази се под увећаним притиском

у односу на остали део течне фазе, што се манифестује порастом концентрације течне фазе. Услед тога градијент концентрације доводи до дифузије раствореног материјала кроз течну фазу.

Све ово указује на значајност проучавања раста зрна у систему течно-чврсто, ради експерименталног и теоријског објашњавања појаве да честице потопљене у течној фази, на температури синтеровања, показују тенденцију раста једних на рачун других [6, 7]. Немогућност постојећих теорија да дају потпуно објашњење тог феномена указује на потребу дефинисања алтернативног метода за описивање и анализу овог процеса.

За проучавање овог феномена посебно интересантан прилаз представља примена метода моделовања и симулације, који представља један од могућих данас већ широко распрострањених начина квалитативног и квантитативног изучавања оваквих физичко-хемијских процеса [8-12]. Поред изузетне флексибилности у начину симулирања процеса, посебну погодност представља могућност увођења, практично, неограниченог броја параметара (физичко-хемијски, аналитички, нумерички и хибридни модели) и њихово праћење током симулације процеса. Наравно да велики број параметара значи и велики број претпоставки, чиме модел-системи постају сложенији. Када се има у виду могућност успостављања интеракције модел-експеримент, на пример симулација геометрије скупљања [13], и евентуална оптимизација процеса, увођење ових метода постаје потпуно оправдано.

2. Нумеричко решење дифузионе једначине

Математичка теорија дифузије у изотропним срединама заснива се на претпоставци да је брзина транспорта дифундирајуће материје кроз јединичну површину пропорционална градијенту концентрације мереног нормално на површину, тј.

$$\vec{J} = -D\nabla C \quad (D = \text{const.}),$$

где је D коефицијент дифузије, а C концентрација. С обзиром на једначину континуитета

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \vec{J} = 0$$

генерализовани облик једначине дифузије постаје

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C.$$

Ако је D_t коефицијент дифузије за течну фазу, тада је дифузија кроз течну фазу одређена парцијалном диференцијалном једначином (дводи-мензионални случај)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_t \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0), \quad (1)$$

чије решење задовољава почетни услов

$$C(x, y, 0) = g(x, y) \quad (0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b), \quad (2)$$

и граничне услове

$$\left. \begin{aligned} C(x, 0, t) &= f_1(x, t) \\ C(x, b, t) &= f_2(x, t) \quad (0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0), \\ C(0, y, t) &= f_3(y, t) \\ C(a, y, t) &= f_4(y, t) \quad (0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

За приближно одређивање решења дифузионе једначине (1) применићемо метод коначних разлика [14]. Нека је експериментална област правоугаоног облика издељена мрежом тачака: m линија паралелних x оси и n линија паралелних y оси. Нека су, такође,

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{i+1} - x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \Delta y &= y_{j+1} - y_j \quad (j = 1, 2, \dots, m-1), \\ \Delta t &= t_{k+1} - t_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

коначни прираштаји за променљиве x , y и t , и нека је

$$C_{i,j,k} \equiv C(x_i, y_j, t_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 0, 1, \dots)$$

концентрација у тачки (x_i, y_j) после времена t_k . Претпостављајући да је $C(x, y, t)$ непрекидна и диференцијабилна, парцијалне изводе апроксимираћемо диференцама

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} \Big|_{i,j,k} &= \frac{C_{i,j,k+1} - C_{i,j,k}}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} &= \frac{C_{i+1,j,k} - 2C_{i,j,k} + C_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \Big|_{i,j,k} &= \frac{C_{i,j+1,k} - 2C_{i,j,k} + C_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} + O((\Delta y)^2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ако је временски прираштај Δt такав да је (критеријум стабилности)

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x \Delta y)^2}{2D_i(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad (5)$$

тада се, сменом (4) и (5) у једначини (1), добија проста експлицитна апроксимација (класична петотачкаста дискретизациона шема) погодна за одређивање приближног решења једначине (1)

$$C_{i,j,k+1} = .25(C_{i+1,j,k} + C_{i-1,j,k} + C_{i,j+1,k} + C_{i,j-1,k}) \\ (i = 2, 3, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, m-1; k = 0, 1, 2, \dots), \quad (6)$$

где је претпостављено да су Δx и Δy једнаки ($\Delta x = \Delta y = h$).

У општем случају (правоугаона експериментална област) прва и последња линија мреже тачака поклапају се са границом експерименталне области. У том случају општи почетни и гранични услови (2) и (3) постају [15]

$$C_{i,j,0} = q_{i,j} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, m-1), \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{i,1,k} &= f_{1,k}, \\ C_{i,m,k} &= f_{2,i,k} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 0, 1, 2, \dots), \\ C_{1,j,k} &= f_{3,j,k}, \\ C_{n,j,k} &= f_{4,j,k} \quad (j = 1, 2, \dots, m; k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

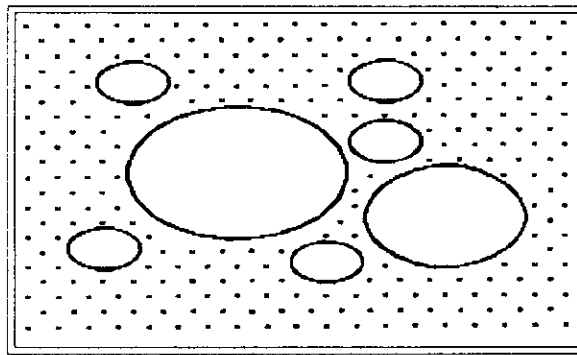
3. Моделовање и симулација процеса

Синтеровање у присуству течне фазе је изузетно сложен процес, с обзиром да је резултат деловања мноштва елементарних механизма, од којих за многе не постоје довољно тачна и поуздана тумачења. Са тог становишта, увођење модела и дефинисање могућих стања система у систему течно-чврсто може дати нека нова објашњења карактеристичних стања и појава битних за разумевање овог процеса [16-18]. При томе ће квалитет добијених резултата бити онолико добар колико су добре почетне претпоставке које су обухваћене моделом.

С обзиром на карактеристике синтеровања у присуству течне фазе примена метода моделовања и симулације представља веома адаптиван метод изучавања овог процеса, при чему поузданост квалитативних и квантитативних резултата директно зависи од ваљаности модела процеса. У том смислу, размотрићемо могућност моделовања синтеровања двокомпонентних система код којих се образовање двокомпонентне легуре одвија у присуству течне фазе непосредно уз једнокомпонентну чврсту фазу [8, 9].

У моделовању синтеровања у присуству течне фазе поћи ћемо од експерименталних и теоријских истраживања Јуна и Хупмана [19, 20], који су показали да, за случај система $W - Ni$, под извесним експерименталним условима покретачку силу процеса растварања и таложења представља разлика хемијског потенцијала чистог W који се у течnoj фази раствара, и легуре $W - 0,45 \text{ at. \%Ni}$ која је резултат процеса таложења. Резултат истовременог одвијања процеса растварања и таложења је раст зрна и приметно смањење, а у неким случајевима чак потпуно нестајање порозности. На ово указују и бројна експериментална опажања да, на температури синтеровања, постоји тенденција раста зрна [7, 21-24].

У том смислу дефинисаћемо следећи модел система (сл. 1): у експерименталној области правоугаоног облика N честице чврсте фазе налазе се у течnoj фази која испуњава читаву експерименталну област. Нека се процеси растварања и таложења у таквом смислу одвијају неком брзином. Може се узети да је концентрација чврсте фазе, која је растворена у течnoj фази, у сваком тренутку у равнотежи са чврстом фазом која се налази у области контакта чврсте и течне фазе. У простору између контактних области постоји градијент концентрације течне фазе, при чему је профил концентрације одређен брзином процеса дифузије у систему.



Сл. 1. Модел-систем за симулацију синтеровања у присуству течне фазе

Нека су

$$D_s = \{x, y\} \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad \text{и} \quad G = \{x, y\}$$

скуп граничних тачака чврсте фазе које су у контакту са течном фазом и скуп тачака течне фазе, респективно. Ако је C_{ic} концентрација течне фазе на контакту са чврстом фазом, а C_t равнотежна концентрација течне фазе, почетни и гранични услови (7) и (8) се за претпостављени модел процеса синтеровања редефинишу на следећи начин [15].

Почетни услови:

$$q_{i,j} = \begin{cases} C_{tc} & (x_i, y_j) \in D_s, \\ C_t & (x_i, y_j) \in G \end{cases} \quad (9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, N)$$

Гранични услови за $t = 0$:

$$f_{1,i,0} = f_{2,i,0} = f_{3,j,0} = f_{4,j,0} = C_t \quad (10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

Гранични услови за $t > 0$:

$$\left. \begin{aligned} f_{1,i,k} &= C_{i,2,k} & C_t &\leq C_{i,2,k} \leq C_{tc}, \\ f_{2,i,k} &= C_{i,m-1,k} & C_t &\leq C_{i,m-1,k} \leq C_{tc} \\ & & &(i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots), \\ f_{3,j,k} &= C_{2,j,k} & C_t &\leq C_{2,j,k} \leq C_{tc}, \\ f_{4,j,k} &= C_{n-1,j,k} & C_t &\leq C_{n-1,j,k} \leq C_{tc} \\ & & &(j = 1, 2, \dots, m; k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Са тако дефинисаним почетним и граничним условима може се реализовати симулација процеса синтеровања итеративним понављањем следећих фаза [25]:

- Израчунавање концентрације C_{k+1} у тачкама $(x, y) \in G$ на основу концентрације C_k и једначине (6).

- Како транспорт материјала дефинише једначина

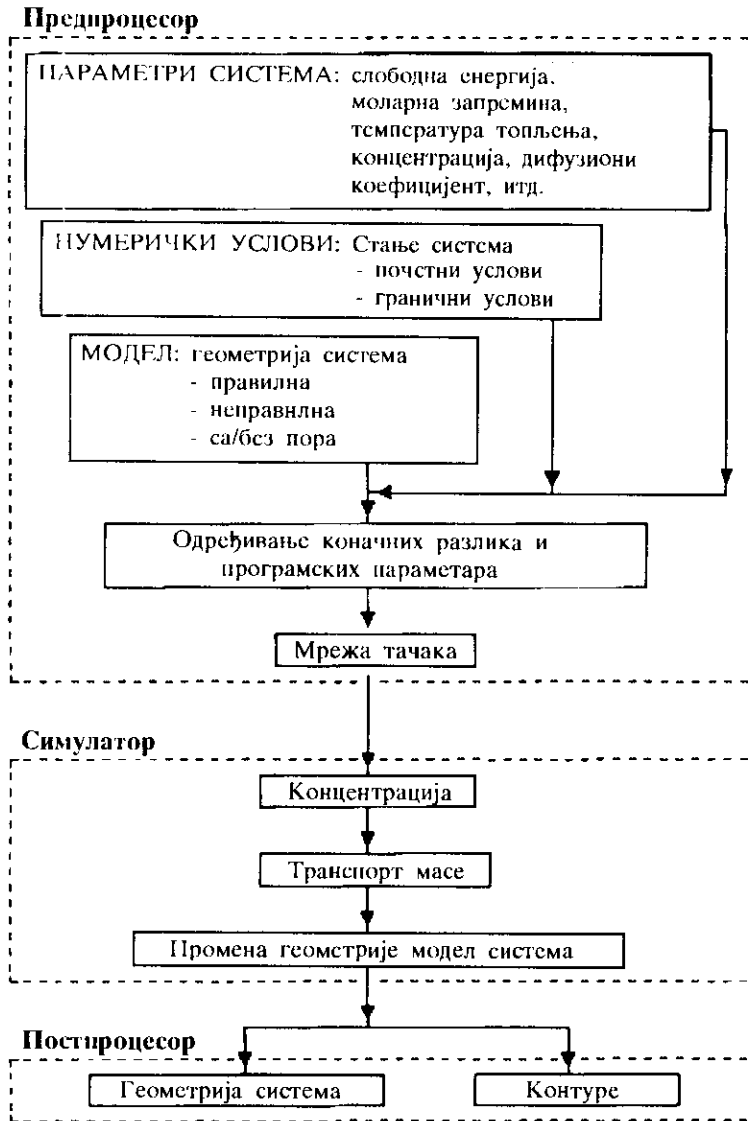
$$J = -D_t \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \right),$$

апроксимирајући изводе диференцама и узимајући могуће правце транспорта добија се [15]

$$J_{i,j,k+1} = -D_t \left[\frac{C_{i+1,j,k+1} - C_{i-1,j,k+1}}{2\Delta x} + \frac{C_{i,j+1,k+1} - C_{i,j-1,k+1}}{2\Delta y} \right].$$

Применом ове диферентне шеме у граничним тачкама $(x, y) \in D_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$) одређује се количина раствореног материјала која се, након транспорта кроз течну фазу, таложи на местима образовања двокомпонентне легуре.

- Одређивање геометрије модел-система након симулационог периода Δt , с обзиром да долази до промене геометрије чврсте фазе која је резултат процеса растварања и таложења у систему.

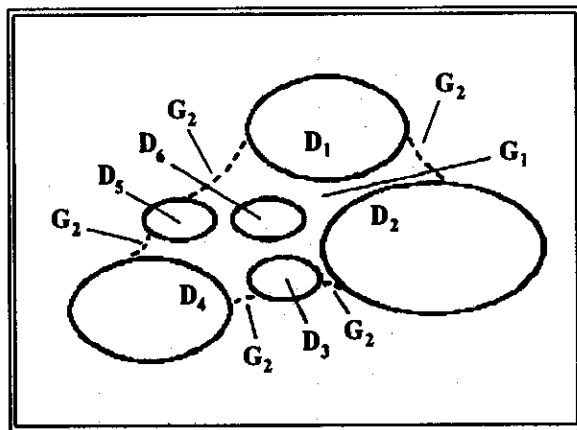


Сл. 2. Дијаграм тока програма СИМТФС за симулацију процеса

Овакав итеративни поступак завршава се постизањем задатог симулационог времена одвијања процеса синтеровања. Општи дијаграм тока програма СИМТФС (симулација течно-фазног синтеровања) дат је на сл. 2 [15, 26].

4. Ограничена количина течне фазе

У претходном разматрању експериментална област на честицама чврсте фазе у течној фази била је правоугаоног облика. Разлог за увођење овакве експерименталне области је углавном нумеричког карактера, с обзиром да су у том случају почетни и, посебно, гранични услови веома прости: границе области су праве линије паралелне координатним осама. Међутим, чињеница је да је у реалним условима количина течне фазе веома мала, локализована само у контактним областима. Полазећи од тога, значајну количину течне фазе унутар експерименталне области треба редуковати на релативно мању, ограничену количину. Са становишта нумеричког решавања једначине (1), претходно дефинисане почетне и граничне услове (9), (10) и (11) за константни скуп граничних тачака, треба заменити новим почетним и граничним условима за редуковани и променљиви скуп граничних тачака [27].



Сл. 3. Модел-систем са ограниченом количином течне фазе

Претпоставимо да је модел систем од N контура као на сл. 3. Ако су

$$G_1 = \{x, y\} \text{ и } G_2 = \{x, y\}$$

скуп унутрашњих тачака течне фазе и скуп граничних тачака течне фазе респективно, тада се почетни услови (9) могу редефинисати као

$$g_{i,j} = \begin{cases} C_{st} & (x_i, y_j) \in D_s \\ C_i & (x_i, y_j) \in G_1, G_2 \\ 0 & (x_i, y_j) \notin D_s, G_1, G_2 \end{cases}$$

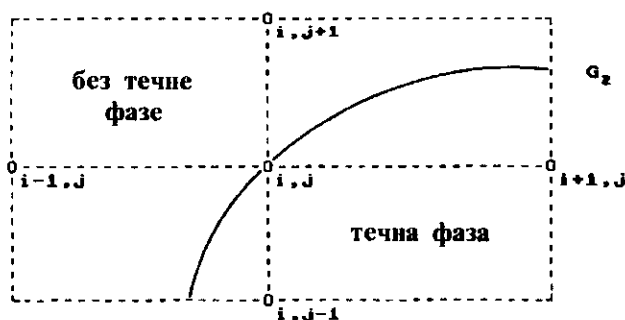
$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, N)$$

Нека је тачка (i, j) гранична тачка течне фазе (сл. 4), $(x_i, y_j) \in G_2$. Ако је у тренутку $t = 0$ концентрација у тој тачки C_i и ако су тачке $(i, j-1)$ и $(i+1, j)$ унутар контактнoг региона

$$(x_i, y_{j-1}) \in G_1 \text{ и } (x_{i+1}, y_j) \in G_1,$$

тада је концентрација у тачки (i, j) у тренутку $t > 0$ (метод лика у огледалу)

$$C_{i,j} = \min (C_{i,j-1}, C_{i+1,j}).$$



Сл. 4. Сегмент мреже тачака

Узимајући у обзир све карактеристике система са ограниченом количином течне фазе, симулација процеса претпоставља итеративну процедуру сличну претходно дефинисаној.

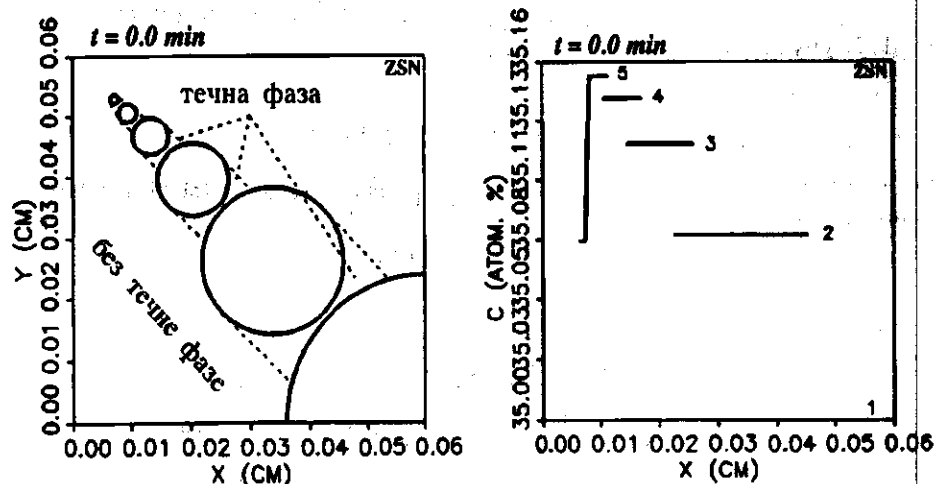
- Израчунавање концентрације C_{k+1} у тачкама $(x, y) \in G_1$ на основу концентрације C_k и једначине (6).

- Израчунавање транспорта материјала у свим граничним тачкама $(x, y) \in D_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$).

- Дефинисање нових скупова D_s , G_1 и G_2 модел-система.

Ефикасност дефинисаног симулационог модела може се најбоље тестирати на теоријском модел-систему шест контура правилне геометрије различитих полупречника: $r_1 = 240 \mu m$, $r_i = r_{i-1}/2$ ($i = 2, \dots, 6$). Нека у оваквом систему егзистира ограничена количина течне фазе, строго локализована само у контактним областима између парова контура (сл. 5(a)). Овим модел-системом размотрићемо синтеровање система $W - Ni$ са подацима као у радовима [20, 28]. За вредност коефицијента дифузије D_i узећемо вредност $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ [29].

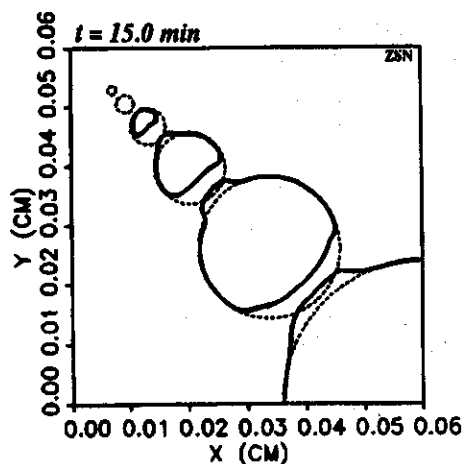
С обзиром на чињеницу да је концентрација течне фазе на контакту са чврстом фазом обрнуто пропорционална полупречнику чврсте фазе, претпоставићемо њен почетни профил као на сл. 5(b). Карактеристично



Сл. 5. Модел-систем 6 контура правилне геометрије са полупречницима (μm):
240, 120, 60, 30, 15 и 7.5.

а. Почетна геометрија, б. Профил почетне концентрације течне фазе на додиру са чврстом фазом

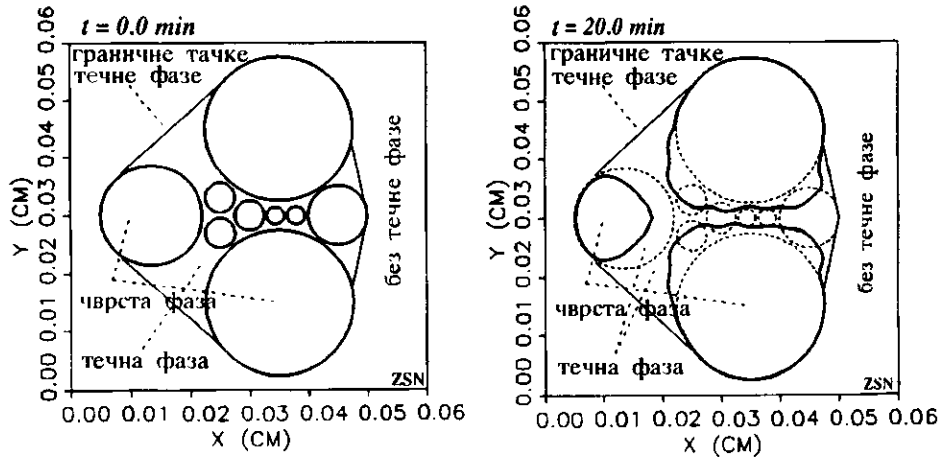
је да овако дефинисани модел уводи контуре које се истовремено понашају као донори и акцептори атома чврсте фазе. Наиме, у делу контактне области која се формира са контуром већег полупречника контуре показују донорска својства и обрнуто. При томе, прва контура има само



Сл. 6. Геометрија модел-система после 15 min
(— почетна геометрија)

акцепторско својство, док најмања може бити само донор материјала, с обзиром да се на њој одиграва само процес растварања. Отуда, већ

после неколико минута симулационог времена две најмање контуре нестају (сл. 6), јер на њима процес растварања започиње и завршава се много пре него што се створе услови за евентуално започињање процеса формирања двокомпонентне легуре. На осталим контурама квалитативни и квантитативни ефекти последица су геометрије и положаја чврсте фазе у односу на остали део модел-система.



Сл. 7. Модел-систем 9 контура правилне геометрије са полупречницима (μm): 125, 85, 50, 25 и 15.
а. Почетна геометрија. б. Геометрија после 20 min

Експериментално опажање да, на температури синтеровања, веће честице расту на рачун мањих које се растварају, може се пратити на модел-систему који је приказан на сл. 7. И у овом систему је количина течне фазе ограничена и локализована у простору између контура чврсте фазе (сл. 7(a)). При томе се на мањим контурама које се налазе непосредно уз две највеће контуре одвија само процес растварања, услед чега долази до наглог раста већих контура (сл. 7(b)). С обзиром да контуре које се растварају врло брзо ишчезавају, градијент концентрације течне фазе у том делу система постаје практично једнак нули, па престаје раст већих контура. У даљем току процеса улогу извора атома чврсте фазе преузимају две удаљеније контуре, што се манифестује растом највећих контура на правцу растварања тих контура.

5. Општи симулациони модел

Нека општи модел-систем дефинишу N контура чврсте фазе правилне или неправилне (произвољне) геометрије, M пора и течна фаза.

Нека је

$$D_s = \{\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{\theta}_s\} \quad (s = 1, 2, \dots, N)$$

скуп граничних тачака контуре s , дефинисан векторима

$$\bar{x}_s = (x_{s,1}, x_{s,2}, \dots, x_{s,n_s}),$$

$$\bar{y}_s = (y_{s,1}, y_{s,2}, \dots, y_{s,n_s}),$$

$$\bar{\theta}_s = (\theta_{s,1}, \theta_{s,2}, \dots, \theta_{s,n_s}),$$

где је $\theta_{s,i}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) угао који дефинише положај i -те тачке контуре, а n_s оптималан број граничних тачака контуре.

Нека је

$$D_p = \{\bar{x}_p, \bar{y}_p, \bar{\theta}_p\} \quad (p = 1, 2, \dots, M)$$

скуп граничних тачака поре p , дефинисан векторима

$$\bar{x}_p = (x_{p,1}, x_{p,2}, \dots, x_{p,n_p}),$$

$$\bar{y}_p = (y_{p,1}, y_{p,2}, \dots, y_{p,n_p}),$$

$$\bar{\theta}_p = (\theta_{p,1}, \theta_{p,2}, \dots, \theta_{p,n_p}),$$

где је $\theta_{p,i}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) угао који дефинише положај i -те тачке поре, а n_p оптималан број граничних тачака поре.

Нека је

$$S_0 = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid (\bar{x}, \bar{y}) \in D_s, (s = 1, 2, \dots, N)\}$$

почетна структура беспорозног модел-система и нека су

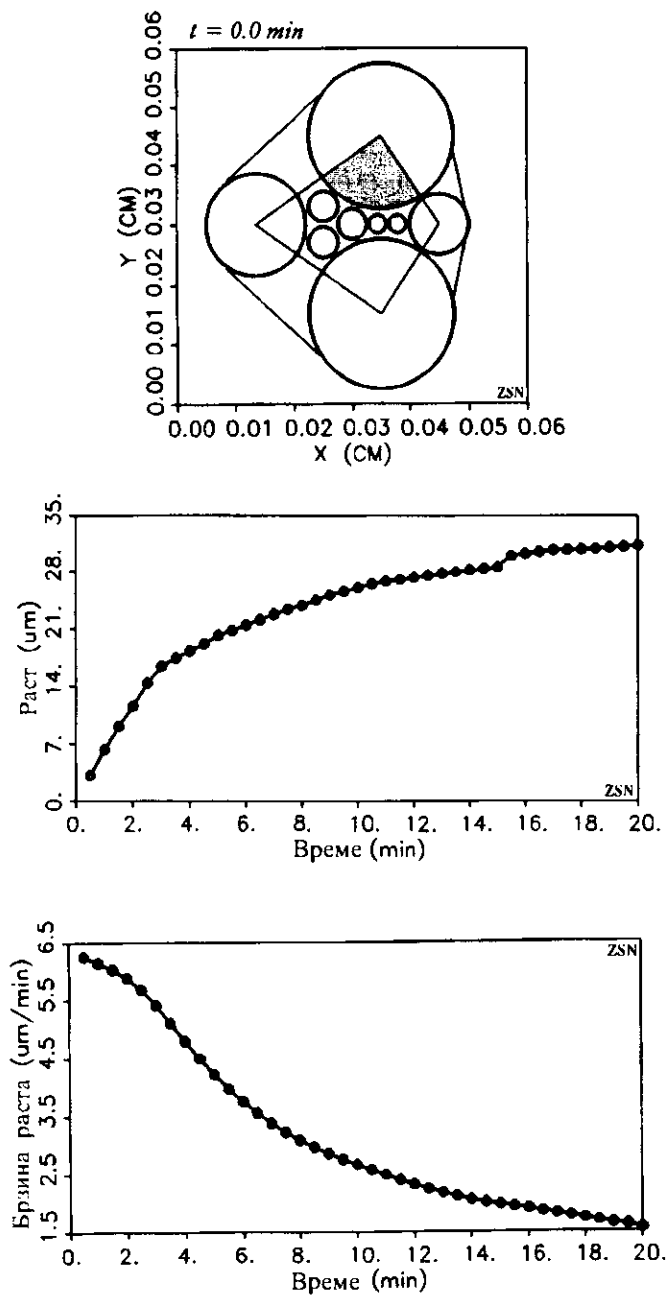
$$S_c = \{\bar{x}, \bar{y}\} \quad \text{и} \quad S_p = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid (\bar{x}, \bar{y}) \in D_p, (p = 1, 2, \dots, M)\}$$

структуре контура и поре модел-система после симулационог времена (времена синтеровања) t . Тада процес синтеровања дефинише трансформација структура

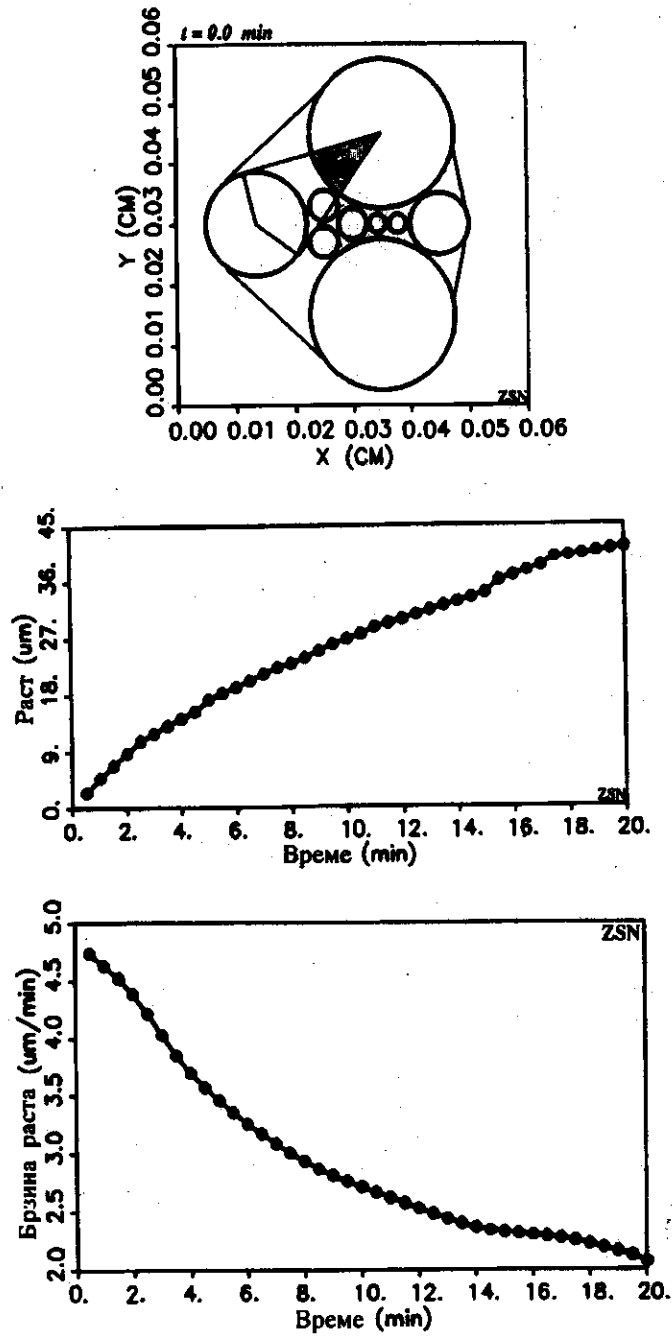
$$S_0 \rightarrow S_c + S_p.$$

6. Кинетика процеса

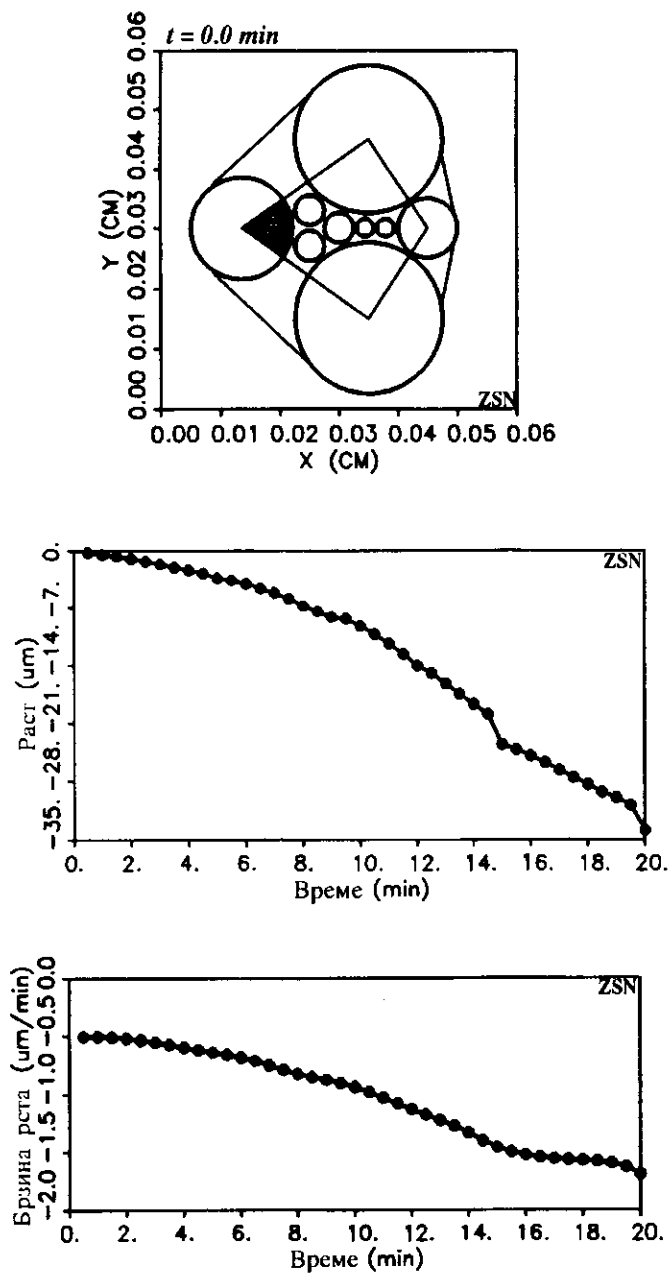
Резултат процеса дифузије у систему течно-чврсто, односно резултат процеса растварања и таложња (формирање двокомпонентне легуре) је промена позиције граничних тачака модел система.



Сл. 8. Одређивање кинетике процеса



Сл. 9. Одређивање кинетике процеса



Сл. 10. Одређивање кинетике процеса

Ако је

$$T = \{t \mid t = k\Delta t, k = 0, 1, 2, \dots, K\}$$

низ унапред датих симулационих времена, где је Δt коначни временски прираштај, и ако су

$$\vec{x}_s = x_s(t) \text{ и } \vec{y}_s = y_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, N)$$

одговарајуће координате за сваку контуру модел система, тада је промена координата граничне тачке (x, y) (позитивна за случај процеса таложења, негативна за случај процеса растварања) после времена t дефинисана формулом

$$\Delta r(t) = r(t) - r(0), \quad r(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

где је (x_0, y_0) центар контуре којој припада тачка (x, y) . Просечна промена координата n_s тачака контуре s је

$$\overline{\Delta r_s(t)} = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} [r_i(t) - r(0)].$$

Ако се познаје низ вредности $\overline{\Delta r_s}$ ($s = 1, 2, \dots, N$) за контуре модел система, тада је просечна брзина промене геометрије модел-система (кинетика процеса синтеровања) после симулационог времена t дефинисана формулом

$$\nu_s = \frac{\overline{\Delta r_s(t)}}{t}.$$

Одређивањем низа вредности $\overline{\Delta r_s}$ за симулациона времена $t \in T$ и придруживањем вектора (t_0, t_1, t_2, \dots) и $(\overline{\Delta r_{s,0}}, \overline{\Delta r_{s,1}}, \overline{\Delta r_{s,2}}, \dots)$ може се добити временска зависност промене геометрије модел-система $(\overline{\Delta r_{s,k}}, t_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, K$). Слично, временска зависност брзине промене геометрије модел-система може се добити придруживањем временског вектора вектору $(\nu_{s,0}, \nu_{s,1}, \nu_{s,2}, \dots)$, односно $(\nu_{s,k}, t_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, K$) [30].

Практична применљивост дефинисаног модела може се проверити и на раније коришћеном модел-систему (сл. 7). Чињеницу да се кинетика процеса одређује за сваку контуру на неком броју граничних тачака n_s искористићемо за карактеризацију процеса у различитим областима течне фазе.

На сл. 8(b) приказана је зависност раста највеће контуре на рачун растварања малих контура које се налазе у простору између великих контура. При томе су узете у обзир само граничне тачке шрафиране области највеће контуре. Нагли раст у почетку процеса последица је

наглог растварања малих контура. У даљем току је, с обзиром да су ти извори материјала знатно смањени, раст такође смањен, са тенденцијом да за већа времена постане константан. На сл. 8(c) приказана је одговарајућа карактеристика брзине процеса.

На сл. 9 анализиран је раст највеће контуре у делу течне фазе према већој контури (шрафирана област). С обзиром на то да та контура није непосредно уз највећу контуру, њен утицај на раст није изражен. Отуда је раст мањи (сл. 9(b)) и последица је растварања како веће контуре тако и прерасподеле раствореног материјала мањих контура. Већа брзина процеса (сл. 9(c)) карактеристична је само за почетак процеса и брзо добија стационаран карактер.

На сл. 10 анализиран је процес растварања веће контуре у граничним тачкама шрафиране области. С обзиром на то да се у њеној непосредној околини налазе две мање контуре које се такође растварају, ова контура се нешто спорије раствара. Тек након потпуног растварања мањих контура интензивира се процес њеног растварања, с обзиром на то да она постаје једини извор материјала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G.W. Greenwood, *Acta Metall*, 4, 243 (1956).
- [2] R. Watanabe, Y. Masuda, in *Sintering and Catalysis*, ed. G.C. Kuczynski, Plenum Press, New York, 329 (1975).
- [3] G. Price, C.J. Smithells, S.V. Williams, *J. Inst. Metals*, 62, 239 (1938).
- [4] W.D. Kingery, *J. Appl. Phys.*, 30, 301 (1959).
- [5] W.D. Kingery, in *Ceramic Fabrication Processes*, ed. W. D. Kingery, John Wiley and Sons, New York, 131 (1958).
- [6] H. Rieger, Thesis, University of Stuttgart (1977).
- [7] W.J. Huppmann, G. Petzow, *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.*, 82, 308 (1978).
- [8] З.С. Николлић, Докторска дисертација, Електронски факултет, Универзитет у Нишу 1980).
- [9] Z.S. Nikolić, W.J. Huppmann, *Acta Metall.*, 28, 475 (1980).
- [10] Z.S. Nikolić, M.M. Ristić, W.J. Huppmann, *Sci. Sinter.*, 12, 19 (1980).
- [11] J.M. Chaix, M. Guyon, J. Rodriguez, C. Allibert, *Scripta Metall.*, 22, 71 (1988).
- [12] P.W. Voorhees, G.B. McFadden, R. F. Boisvert, D. I. Meiron, *Acta Metall.*, 36 (1), 207 (1988).
- [13] Z.S. Nikolić, M.M. Ristić, in *Sintering - Theory and Practice*, ed. D. Kolar, S. Pejovnik and M.M. Ristić, Materials Science Monographs, 14, Elsevier, 477 (1982).
- [14] G.E. Forsythe, W.R. Wasow, *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1960.
- [15] Z.S. Nikolić, R.M. Spriggs, M. M. Ristić, *Sci. Sinter.*, New Direction for Materials Processing and Microstructural Control, ed. D. P. Uskoković, H. Palmour III and R. M. Spriggs, Plenum Press, New York, 235 (1990).

- [16] M.M. Ristić, Z.S. Nikolić, W. J. Huppman, G. Petzow, BULLETIN T. LXXVII de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences techniques, 18, 33 (1981).
- [17] Z.S. Nikolić, M.M. Ristić, Sci. Sinter., 13 (2), 91 (1981).
- [18] Z.S. Nikolić, M.M. Ristic, Proc. of the 10th Plansee-Seminar, Metallwerk, Plansee, Reute, Austria, June 1-5, 1981, pp. 259-268.
- [19] D.N. Yoon, W.J. Huppman, Practical Metallography, 15, 399 (1978).
- [20] D.N. Yoon, W.J. Huppman, Acta Metall., 27, 973 (1979).
- [21] H. Fischmeister, G. Grimvall, in *Sintering and Related Phenomena*, ed. G.C. Kuczynski, Plenum Press, New York, 119 (1973).
- [22] N.C. Kothari, J. Less-Common Metals 13, 457 (1967).
- [23] T.K. Kang, D.N. Yoon, Metall. Trans. A 9A (1978) 433.
- [24] R. Warren, M.B. Waldron, Powder Metall. 15 (1972) 180.
- [25] Z.S. Nikolić, M.M. Ristić, W.J. Huppman, in *Modern Development in Powder Metallurgy*, ed. H.H. Hauser, H.W. Antes and G.D. Smith, 12, Principles and Processes, 497 (1981).
- [26] З.С. Николић, М.М. Ристић, XIII симпозијум о информационам технологијама *Сарајево - Јахорина 1989*, Сарајево, 20-24. март 1989, стр. 226-1-226-4.
- [27] Z.S. Nikolić, R.M. Spriggs, M.M. Ristić, Z. Metallkd., 83 (10), 769 (1992).
- [28] W.J. Muster, D.N. Yoon, W.J. Huppman, J. Less-Common Metals, 65 (1979) 211.
- [29] Y. Ono, T. Shigematsu, J. Japan Inst. Metals 41 (1977) 62.
- [30] Z.S. Nikolić, M.M. Ristić, Sci. Sinter., 24 (1), 49 (1992).

M.M. Ristić, Z. Nikolić

MODELING OF LIQUID PHASE SINTERING

Abstract

The liquid phase sintering process presents an unusually important process for the synthesis of advanced materials. Having in mind that it is characterized by great complexity an especially interesting approach in investigation of this process is the application of modeling methods and simulation that present one the possible and nowadays widely used methods for the qualitative and quantitative investigation of these physicochemical processes.

Глас CCCLXXV Српске академије наука и уметности
Одељење техничких наука, књ. 31 - 1995.
Glas CCCLXXV de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts,
Classe des Sciences techniques, № 31 - 1995.

М. ВУКОБРАТОВИЋ, ОЛГА ТИМЧЕНКО

НЕКИ БИОЛОШКИ АСПЕКТИ УПРАВЉАЊА
СЛОЖЕНИМ РОБОТСКИМ СИСТЕМИМА
—концептуални рад—

(Примљено на I скупу Одељења, 16. фебруара 1993)

У раду се излажу принципи управљања сложеним динамичким системима који се ослањају на извесне биолошке принципе локомоторног акта живих организама. На бази већ раније постављене теорије тачке нула-момента и полуинверзног прилаза решавају проблема синтезе вештачког хода на бази прописане синергије делу просторног механизма, у овом новом прилазу динамичком управљању сложеним роботима, напуштена је конвенционална синтеза управљања која се базира на комплетним динамичким моделима робота. У том поступку уведени су фази (fuzzy) регулатори и неуронски концепт учења. За разлику од конвенционалног фази регулатора и неуронског обучавања, у овом новом прилазу се предлаже комбинована процедура у којој је новина: увођење програмског (номиналног) управљања (feed-forward), које разрешава проблем прве етапе синтезе фиктивног непоремећеног еталон режима рада. У том циљу, а на бази децентрализованог управљања, на другој етапи синтезе, локални регулатори компензују поремећаје, укључујући промену оптерећења у зглобовима локомоционих робота и помераје динамичке силе реакције на контактима роботског механизма и подлоге. Неуронски модул у предложеној управљачкој шеми има двоструку улогу: подешаваје тежинских фактора у фази-правилима, и увођење нових номиналних режима који су потребни ради функционисања фази контролера у режиму великих поремећаја.

Као у оркестру, где сваки инструмент свира своју сопствену партитуру, тако и у процесу ходања сваки зглоб производи своју криву кретања а свако тежиште свој редослед убрзавања, док сваки мишић изводи своју мелодију напора, пуну стално променљивих а ипак стабилних делова. И на сличан начин, ова целина делује у сазвучности јединственог и целовитог ритма, стапајући ову огромну сложеност у јасну и хармоничну једноставност. Заснивач и управљач ове сложене целине, диригент и у исто време композитор разматране свеукупности је свакако централни нерви систем. (Н. Бернштајн [1]).

1. Увод

Задатак ходања, или, другим речима, проблем синтезе и управљања корацима двоножних, четворожних и шестоножних живих бића је задатак који је природа успешно решила. У техничкој пракси, овај проблем се појављује у два вида:

- синтеза вештачког двоножног хода да би се реализовали комплетни активни егзоскелети или протезе/ортозе које би помогле хендикепираним људима да поново ходају; и
- конструкција ходајућих возила која би могла да се крећу и по теренима непогодним за возила која имају тачкове или гусенице.

Има много разлога да верујемо да су природна, биолошка решења код синтезе и управљања ходом оптимална за дате услове. Конструкција ногу и начин хода код живих бића су последица два врло моћна процеса оптимизације, и то процеса еволуције преко природног одабирања и процеса учења и стицања искуства [2]. Зато у синтези и управљању вештачким ходом има смисла позајмити од природе све што може да има одговарајућу техничку реализацију.

У овом раду, који је по својој природи концептуалан, биће приказана шема за синтезу и управљање ходом вишеножних механизма, базирана на биолошким карактеристикама хода које је могуће уочити и мерити на живим организмима. Биће приказане и могуће техничке реализације такве управљачке структуре. Рад је подељен на неколико делова. У делу 2 биће приказани неки биолошки принципи синтезе и управљања ходом. У делу 3, расправља се о извесним специфичностима синтезе вештачког хода и даје се дефиниција тачке нула-момента (ТОМ, или, у енглеској литератури, ZMP-zero-moment point). Начин за формирање математичког модела ходајућег механизма приказан је у делу 4. У делу 5 је приказана управљачка стратегија за синтезу управљања вештачким ходом. Метод за анализу стабилности тако добијеног комплексног динамичког система је приказан у делу 6. Последњи део је закључак.

2. Неки биолошки принципи хода

Предности истраживања људског и животињског хода код задатка синтезе вештачког хода могу се извести из следећих чињеница о ходу, које је формулисао Бернштајн [1]:

- Локомоциони покрети, а посебно ход, припадају најаутоматизованијим покретима. Сви детаљи хода се понављају у строго одређеном редоследу од корака до корака, а ти детаљи су максимално поновљиви код различитих субјеката који ходају. Ово дозвољава истраживачу да усвоји критеријуме и да изводи закључке на појединим субјектима који ће важити у општем случају.

- Локомоциони покрети су екстремно сложени покрети који укључују целокупну мускулатуру и цео покретни скелет, а у њихову контролу је укључен велики део централног и периферијског нервног система. Тако, код локомоционих покрета можемо да очекујемо јасно изражен однос између централног и периферног управљања, са обиљем детаља који карактеришу процес кретања уопште.
- Локомоциони покрети поседују општост. Њихов избор за објекат истраживања обезбеђује истраживачу да ради са великим бројем субјеката који су сви савладали вештину ходања много боље него, на пример, било коју професионалну вештину. Учење и развој хода код нормалног детета подлеже ништа мање строгим законима и правилима него што су морфолошки закони и развој ткива и органа. Ова општост и правилност обезбеђују материјал за широка поређења и омогућавају истраживања онтогенезе покрета, његовог усавршавања, успостављања, развоја и поремећаја.
- Локомоциони покрети припадају категорији изузетно старих покрета. Они су филогенетски старији од развоја коре великог мозга и без сумње су имали утицај на развој централног нервног система. На пример, позната је директна веза између развоја Лајсијевог тела (*corpus Luysi*) и прелаза човековог претка са четвороножног на двоножни ход. Филогенетска старост гарантује постојање дубоке органске везе између локомоторних процеса и различитих структурних нивоа централног нервног система и дозвољава веровање да ће се у различитим стадијумима усавршавања локомоционих покрета открити и трагови различитих нивоа развоја нервног система.
- Све основне детаље нормалног хода могуће је наћи код свих одраслих нормалних субјеката без изузетака. Узроци индивидуалних разлика код хода међу субјектима нису ни различита структура покрета ни различито слагање детаља укључених у локомоциони покрет, него разлике у учестаностима и амплитудама различитих детаља. Ова чињеница омогућава да се направи детаљна номенклатура за структурне елементе локомоционог покрета, која укључује све стабилне појаве карактеристичне за ход здравих, нормалних особа.

Наведене чињенице значе да је ход људи и животиња (на пример ход коња [3], пса или мачке) могуће врло прецизно измерити и класификовати.

Наравно, с обзиром на изузетну сложеност централног нервног система сисара, сви биолошки принципи и механизми управљања још нису познати. Свакако, оно што је јасно је то да код управљања вештачким ходом треба применити вишенивоску управљачку шему.

Такође, врло је погодно усвојити неке од перформанси природног, биолошког управљања. То су:

- Комфортабилност кретања - ово значи да центар масе целог тела прави благе, глатке таласасте покрете око вертикалне осе и око хоризонталне осе нормалне на правац кретања. Амплитуду и фреквенцу ових покрета могуће је мерити за правилан, непоремећен ход по равном, глатком, хоризонталном терену, а могуће је модификовати их за случајеве хода по различитим теренима и у различитим околностима (нагнут, клизав или нераван терен, удари ветра током хода и слично).
- Равнотежа тела током хода, и то пре свега динамичка равнотежа за различите начине ходања. Статичку равнотежу могуће је постићи само за неке специјалне врсте хода код четвороножних и шестonoжних механизма (такозвано “пузање”), или за случај изузетно великих стопала код двоножних механизма.
- Прописана синергија хода - живи организми за кретање по познатим теренима користе научене и запамћене облике хода (номиналну синергију, тј. номинално кретање), а тек у непознатим околностима, уз интензивну интеракцију са чулима, модификују то кретање.
- Симетричност и поновљивост хода - ово је посебно важно код синтезе хода за четвороножне и шестonoжне механизме, где постоји изузетно много различитих облика хода, али се само неколико заиста и користе код животињског хода [4, 5].

Треба истаћи да кретање живих организама са механичког аспекта може да се прикаже као резултат промене услова равнотеже у пољу сила у коме се систем налази. Спонтани покрети због прерасподеле напрезања мишићних група доводе систем у равнотежу или га изводе из ње. Тако, промене у напрезању мишића изазивају кретање, а само кретање изазива промене у напрезању мишића јер мења њихов степен опуштања или контракције. Бернштајн [1] је ову повезаност акција назвао периферијским циклусом интеракције. У техничком жаргону, ово би биле локалне повратне спреге.

Математичка анализа односа између силе и покрета показује да не постоји једнозначна веза између њих. Узрок за неједнозначност лежи у чињеници да се биомеханичка веза између силе и покрета описује диференцијалним једначинама другог реда, за чије су решење неопходна два почетна услова. Различите интеграционе константе (почетна позиција органа, почетна брзина, или нека друга величина ако се тако усвоји) могу да доведу до сасвим различитих кретања за исту побуду која је стигла нервним влакном. Из овога следи закључак да је за одговарајућу координацију и слагање покрета код управљања ходом живих организама неопходно да централни нервни систем има сталну информацију о свим независним параметрима интеграције, па да у зависности од варијација тих параметара генерише побудне импулсе за поједине мишиће. Ове информације обезбеђује проприоцептивни систем, и тако се, по Берн-

штајновој терминологији, формира централни циклус интеракције. У тој повратној спрези, побудни сигнали мењају степен напрезања мишића, тако изазивајући убрзање делова система, па самим тим и целог система. Убрзавање доводе до промене позиција и брзина, па те вредности изазивају нову промену у напрезању мишића, генеришући тако проприоцептивне сигнале. Ти сигнали утичу на ток побудних сигнала, изазивајући одговарајуће промене у њима, јер централни нервни систем адаптира своје команде према измењеним условима на периферији. Технички говорећи, ово представља глобалне повратне спреге базиране на информацијама са сензора.

Свакако, без икаквог је смисла правити директне аналогије између живих организама и техничких система. На пример, за комплетну скелетну активност човека користи се око 700 мишића, а технички би било нецелиходно управљати системом са 350 актуатора (усваја се да мишићни пар одговара једном механичком степену слободе). Ипак, усвајање извесних принципа и идеја из биолошког начина синтезе и контроле кретања може да буде врло корисно.

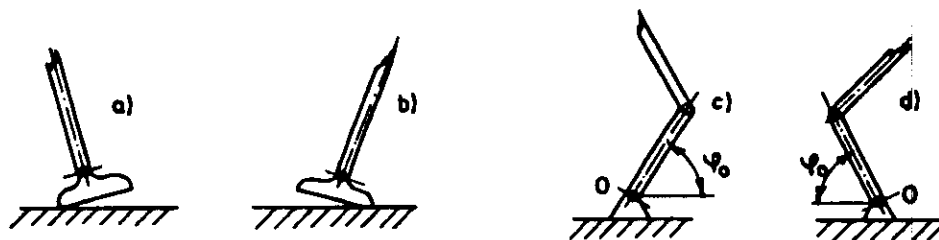
Из ових чињеница могуће је, до извесне мере, стећи представу о проблемима које је неопходно решити код синтезе и управљања вештачким ходом.

3. Динамичке карактеристике ходајућих механизма

Ходајући механизми су механизми који мењају своју кинематичку структуру. Наиме, током хода, ходајући механизам се ослања на различит број ногу, у зависности од усвојеног начина хода и тренутне фазе корака. На пример, антропоморфни систем се током хода ослања на једну, па на обе, а затим на другу ногу. Из тога следи да у једном случају тело и ноге образују отворени, а у другом затворени кинематички ланац. Чак и у једноослоначкој фази, ходајући механизам може да мења своју структуру, као што је приказано на слици 1. Током процеса хода, нога може да ротира око својих ивица, као што приказују слике 1.a) и 1.b). Одговарајуће кинематичке шеме дате су на сликама 1.c) и 1.d). Као што може да се примети, када се нога ослања на једну или другу ивицу, положај тачке O мења се скоковито.

Још једна важна карактеристика ходајућих механизма је та да су неки степени слободе неуправљиви. Сви унутрашњи зглобови механизма могу да буду ојачани одговарајућим актуаторима, али је за зглоб O (слика 1.c) и 1.d) немогуће имати одговарајући актуатор, иако се његов положај константно мења. Из тога следи да је степеном слободе φ_0 немогуће директно управљати. С друге стране, промена φ_0 је врло важна, јер је за веће вредности угла φ_0 систем може да се преврне. Тако, суочени смо са врло специфичном ситуацијом: потребно је управљати понашањем извесних степени слободе механизма посредно, преко осталих оснажених

степену слободу. Ово је по својој суштини динамички проблем и захтева одговарајући приступ.



Сл. 1. Промена структуре ходајућег механизма

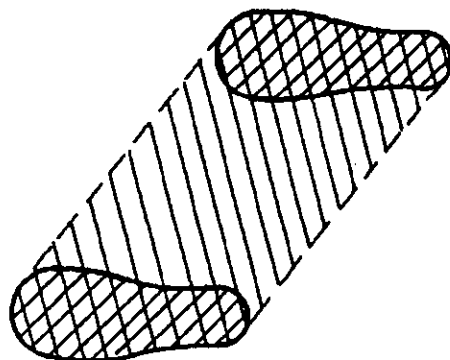
Следећа карактеристика ходајућих механизма је та да су са фиксном подлогом повезани само преко сила трења. Цртежи 1.c) и 1.d) представљају идеализацију, и одговарајући су само у случају када реакција подлоге \vec{N} има вертикалан правац а сила трења \vec{T} је довољна да спречи клизање ноге.

Дакле, ходајући механизам карактеришу променљивост структуре, постојање неуправљивих степени слободу и значајан утицај сила трења. За даље разматрање кретања ходајућих механизма неопходне су информације о погонским моментима који делују у зглобовима механизма, као и информација о силама реакције које делују на контактима стопала са подлогом. Ове информације врло су корисне за одређивање понашања система.

Да би се превазишле поменуте тешкоће, уведена је дефиниција тачке нула-момента (ТОМ) [6, 7]:

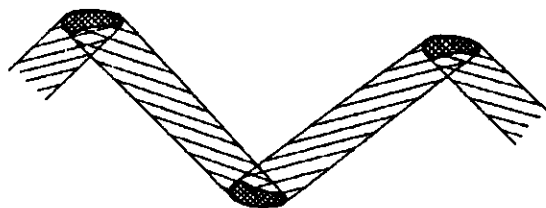
Ако претпоставимо да је током кретања ходајућег механизма трење између стопала и подлоге довољно велико и да у извесном временском тренутку на центар масе механизма делују укупна сила \vec{F} и момент \vec{M} , тада је ТОМ тачка на подлози у којој сила \vec{F} и момент \vec{M} могу да се замене само резултујућом силом.

Посматрајмо сада само двоножни механизам. У случају када је ослонац само на једној ноzi, јасно је да ТОМ не може да лежи изван површине контакта стопала са подлогом. У двоослоначкој фази хода, ТОМ не може да лежи изван површине која је на слици 2. ограничена испрекиданим линијама. У супротном случају, сила реакције подлоге била би усмерена наниже, што је немогуће. Током хода, ТОМ се помера унутар површине приказане сликом 3. У једноослоначкој фази хода, ТОМ ће лежати унутар двоструко шрафиране површине, а у двоослоначкој



Сл. 2. Област могућих положаја ТОМ-а у једноослоначкој и двоослоначкој фази двоножног хода

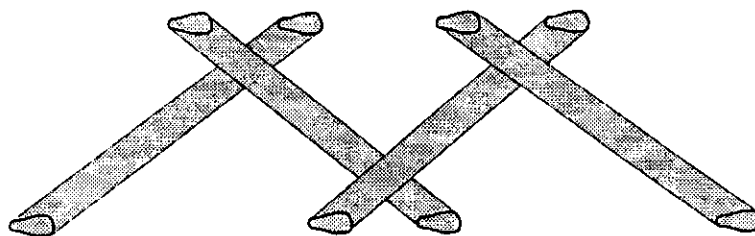
фази негде на једноструко шрафираним површинама, дакле између трагова стопала. У оквиру ових граница ТОМ може да се креће по различитим законима, континуално или скоковито, у зависности од типа хода који се реализује.



Сл. 3. Област могућих положаја ТОМ-а током двоножног хода

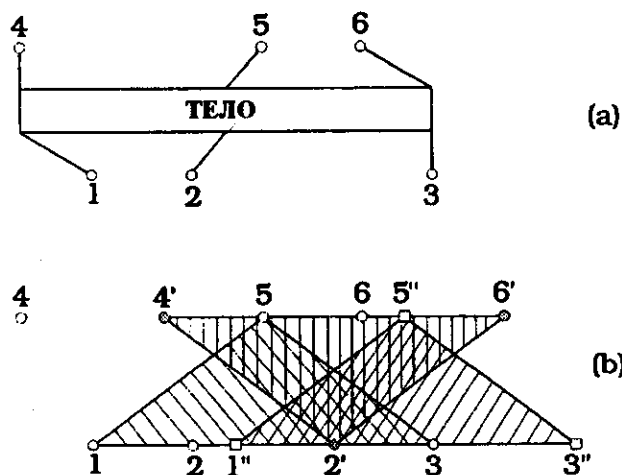
За четвороножни и шестоножни ход јасно је да ТОМ може да се креће само у оквиру генерализаног полигона на подлози чија “темена” су стопала која су тренутно у ослоначкој фази. Облик тог полигона зависи од типа хода који се реализује. На пример, за “пузање” четвороношца (статистички стабилан ход кога су три ноге увек у контакту са подлогом [8]) ТОМ може да се креће унутар троугла кога ограничавају ноге које су тренутно у контакту са подлогом. За кас четвороношца (динамички стабилан ход код кога је ослонац увек на дијагоналним ногама [8]) ТОМ може да се помера унутар “правоугаоних” површина приказаних сликом 4.

Код шестоножних механизма такође постоји више начина ходања. За триподни ход, код кога је ослонац на предњој и задњој ноzi са једне



Сл. 4. Област могућих положаја ТОМ-а током четвороножног каса

стране тела и на средњој ноzi са друге стране, ТОМ може да се помера унутар троугаоних површина приказаних сликом 5.



Сл. 5. Почетни положај ногу у односу на тело код шестеножног хода (а) и област могућих положаја ТОМ-а током шестеножног триподног хода (б)

Једначине динамичке равнотеже ходајућег механизма могу да се формирају за ТОМ. Тако постаје могуће да се реши овај врло специфичан проблем динамике. Наиме, за било коју другу тачку осим за ТОМ, једначине динамичке равнотеже би садржавале непознате силе динамичке реакције, па би било немогуће интегралити их. Али, ако се интеграле једначине написане за ТОМ, онда постоје могуће да се израчунају силе реакције, јер оне зависе од унутрашњих позиција, брзина и убрзања свих зглобова механизма.

4. Математички модели ходајућих механизма

У овом одељку посматраћемо математички модел за двоножни механизам у симболичкој форми. Симболичке моделе четвороножних и шестоножних механизма могуће је добити по истом алгоритму, али би њихова нумеричка комплексност била изузетно висока. Напоменимо да посматрамо комплетан динамички модел ходајућег механизма, са масама ногу узетим у обзир.

Математичко моделирање ножних локомоционих система има много сличности са истим проблемом за манипулационе роботе. Главни циљ многих истраживачких напора на овом пољу може да се формулише на следећи начин: како добити програмски код минималне нумеричке сложености динамичког модела робота? Закључено је да симболички модели прилагођени сваком посебном типу робота обезбеђују максималну нумеричку ефикасност.

Последњих година развијен је кориснички оријентисани софтвер SYM за симболичко моделирање манипулационих робота [9, 10, 11, 12]. SYM се од осталих софтвера сличне намене разликује по томе што може да генерише и управљачке законе у симболичкој форми.

Суштина прилаза примењеног у развоју SYM-а је јединствен начин представљања варијабли модела. Свакој варијабли додељује се тригонометријски полином. Коефицијенти полинома представљени су симболичким изразима који зависе од параметара робота (дужине, масе и слично). Аргументи су унутрашње координате зглобова, њихове брзине и убрзања. Генерисани изрази у затвореној форми се затим трансформишу у форму са минималним бројем рачунских операција.

SYM генерише врло ефикасан програмски код различитих кинематичких и динамичких модела у C-језику спреман за превођење. На пример, инверзан динамички модел за PUMA робот захтева 156 множења и 108 сабирања [11]. SYM програмско окружење намењено је и за генерисање управљачких закона у симболичкој форми, као и за симулацију рада целокупног система [11]. Постоји цео спектар управљачких структура укључених у SYM, а омогућено је и кориснику да зада неки нови управљачки закон. Такође, постоји скуп симулационих параметара које SYM може да контролише, као што су промене нивоа шума, различити периоди одабирања и слично.

SYM може да изводи и различите врсте трансформација над генерисаним моделима:

- генерисање израза у затвореној форми;
- оптимизација нумеричке комплексности генерисаних модела;
- диференцирање модела по усвојеној варијабли или параметру; тј. извођење линеаризованих модела осетљивости;

- прерасподела генерисаних програма у форму погодну за извођење на векторском процесору или мултипроцесорском систему.

Затворена форма аналитичких израза за варијабле модела представља се у форми такозваних структурних матрица.

С обзиром на то да о овоме постоји детаљна литература [9, 10, 11, 12], овде ће бити наведене само најосновније чињенице неопходне да би се дефинисала такозвана “алгебра модела”.

Сваку варијаблу из модела манипулатора могуће је представљати у форми

$$z = \sum_{i=1}^L \eta_i \prod_{i=1}^n (\cos q_i)^{e_{ii}^c} (\sin q_i)^{e_{ii}^s} q_i^{e_{ii}^q} \dot{q}_i^{e_{ii}^{\dot{q}}} \ddot{q}_i^{e_{ii}^{\ddot{q}}} = \sum_{i=1}^L \eta_i \prod_{k=1}^K p_k^{e_{ik}^x} \quad (1)$$

где је $e_{ii}^x \in \{0, 1, 2\}$ и $x \in \{c, s, q, \dot{q}, \ddot{q}\}$. Даље, n је број зглобова манипулатора, а η_i су константе које зависе од параметара манипулатора (дужина, маса, момената инерције, ...). p_k су или координате зглобова или тригонометријске функције ових координата. Једначину (1) могуће је написати као уређену тројку структурних матрица $S = (S_\eta, S_p, S_e)$, где је:

$$S_\eta(z) = [\eta_1(z) \dots \eta_L(z)]^T$$

матрица константи;

$$S_p(z) = [p_1(z), \dots, p_K(z)]$$

матрица варијабли; а

$$S_e(z) = \begin{bmatrix} e_{11}(z) & \dots & e_{1K}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{L1}(z) & \dots & e_{LK}(z) \end{bmatrix}$$

је матрица експонената.

Све величине $\eta_1, \dots, \eta_L, p_1, \dots, p_K, e_{11}, \dots, e_{LK}$ зависе од z и дате су изразом (1).

Као што је напред речено, $S(z)$ је структурна матрица варијабле z . Комплетна матрична алгебра над тако дефинисаним структурним матрицама дата је у [10, 12]. Једноставне операције алгебре структурних матрица омогућавају да се различити модели међусобно комбинују, и да се од једноставнијих модела граде сложенији.

Основна разлика између манипулационих робота и ходајућих механизма са становишта математичког моделирања је у томе што манипулациони роботи представљају отворен прост кинематички ланац, круто

спојен једним крајем са подлогом, док ходајући механизми представљају разгранату кинематичку структуру, повезану са подлогом у неколико контактних тачака. Проблем различитог броја контактних тачака између ногу и подлоге у различитим фазама хода једног истог механизма може се решити прављењем више различитих модела - по један за сваку фазу корака.

Користећи концепт тачке нула-момента (ТОМ-а), који је дефинисан у одељку 3, и због чињеница да све варијабле и у моделима разгранатих кинематичких структура могу да се прикажу у облику израза (1), могуће је добити математички модел ходајућег механизма у симболичкој форми увођењем извесних модификација у SYM програмско окружење. Свакако, математички модели ходајућег механизма су нумерички још сложенији него одговарајући модели манипулационих робота. SYM нуди два начина за превазилажење проблема велике нумеричке сложености:

- расподела свих неопходних израчунавања на мултипроцесорску структуру; или
- израчунавање различитих делова модела механизма са различитом учестаношћу.

Да бисмо синтетизовали вештачки антропоморфни двоножни ход, неопходно је да математички модел двоножног механизма буде бар шестнаестог реда (механизам мора да има бар осам степени слободe - ротационе степене слободe са паралелним осама у чланку, колenu и куку сваке ноге и још два ротациона степена слободe за компензациона кретања трупа у бочној и уздужној равни). Ако постоје још два ротациона степена слободe у зглобовима кукова који омогућавају искорак у страну (ротација око хоризонталне осе постављене дуж правца кретања), тада се добија модел двадесетог реда. За двоножни механизам потребна су нам и два различита модела:

- у двоослоначкој фази хода двоножни механизам има структуру затвореног кинематичког ланца;
- у једноослоначкој фази двоножног механизам има структуру отвореног кинематичког ланца.

На сличан начин као и за двоножни механизам, користећи концепт тачке нула-момента, могуће је формирати и симболичке моделе за четвороножне и шестеножне механизме. Могуће је написати једначине динамичке равнотеже за сваку фазу корака, претпостављајући тренутни положај ТОМ-а. На пример, за четвороножни кас, где је ослонац на дијагоналним ногама, једначине динамичке равнотеже се пишу према ТОМ-у који је на површини ограниченој са две тренутно ослоначке ноге (видети слику 4). За трипоидни шестеножни ход, где је ослонац на предњој и задњој ноzi једне стране тела и на средњој ноzi са друге стране, једначине динамичке равнотеже се пишу према положају ТОМ-а који је негде у “троугаоној” површини коју формирају тренутно ослоначке ноге

(видети слику 5). С обзиром на то да све варијабле у једначинама динамичке равнотеже могу да се напишу у облику израза (1), могуће је добити жељене симболичке моделе вишеножних механизма. Јасно је да су ти модели нумерички још сложенији и вишег реда него за двоножни механизам, и да нам је потребно по неколико модела за сваки ходајући механизам, у зависности од тога колико ногу истовремено може да буде у контакту са подлогом.

5. *Управљачке стратегије код синтезе вештачког хода*

С обзиром на сложеност структуре ходајућих механизма и с обзиром на оно што је познато о биолошким решењима за управљање ходом, јасно је да ће код синтезе управљања на извршном нивоу синтеза регулатора у неколико корака бити најпогоднија стратегија. Овде предлагемо четири корака у синтези регулатора:

- Најпре се прописује вештачка синергија (начин кретања) за део система, а онде се израчунава компензационо кретање за преостали део система, тако да се постигне динамичка равнотежа целокупног система [13, 7, 14, 15]. Затим се израчунавају номинални погонски моменти, чиме се, заправо, задаје номинална динамика систему, тј. управљање у отвореној спреси.
- Затим се за сваки зглоб синтетизују класични ПИД регулатори. Ово значи да се посматра потпуно декуплован систем, и да се покушава стабилизација сваког зглоба посебно. Овакво управљање биће задовољавајуће само ако делују веома мали поремећаји.
- За поремећаје које није могуће стабилисати само локалним регулаторима, неопходно је увести и додатне повратне спреге које ће регулисати и утицај спрезања међу подсистемима, као и утицај силе реакције подлоге која делује на месту контакта стопала са подлогом и може да изазове ротацију целог система око ивице стопала. Уобичајен начин за такву регулацију је увођење глобалног управљања због јаког спрезања међу подсистемима [16, 17], и повратне спреге по сили реакције у циљу стабилизације утицаја сила реакције подлоге [15]. Ово управљање је могуће реализовати на два начина:
 - С обзиром да се спрезање између подсистема код сложених механичких система изражава преко генералисаних сила које је могуће директно мерити током рада, могуће је увести повратне спреге по силама као глобално управљање. За реализацију овог начина неопходан је сензор силе/момента у сваком зглобу механизма и сензор силе на сваком стопалу механизма за реализацију повратне спреге по сили реакције подлоге.
 - Други начин за увођење глобалног управљања је израчунавање у реалном времену сила спрезања међу подсистемима. Али, та израчунавања су врло компликована и захтевају доста времена.

Да бисмо избегли и употребу скупе и компликоване опреме током хода, као и сложена израчунавања у реалном времену, уместо овог познатог начина управљања у овом раду се предлаже други начин синтезе глобалног регулатора, базиран на примени фази (fuzzy) логике. Наиме, пошто је људски ход добро научена и аутоматизована радња, коју је могуће мерити, и реакције човека на различите поремећаје током хода такође је могуће мерити. То значи да можемо да формирамо базу података људских реакција на различите поремећаје током хода. Ти поремећаји могу бити различите врсте, и узроци им могу бити различити. Када је база података формирана као резултат мерења, могуће је формулисати фази правила за управљање вештачким двоножним ходајућим механизмом у реалном времену.

- С обзиром да фази правилима није могуће предвидети све поремећаје који могу да се догоде током хода, може се десити да није могуће одредити одговарајућу реакцију на неки поремећај који је наступио током хода на основу базе података и фази правила којима располажемо. У том случају неопходна је модификација базе фази правила, а то је већ проблем самоорганизујућег фази регулатора, или, другим речима, проблем учења. Један од ефикаснијих приступа развоју самоорганизујућих фази регулатора је обучавање путем неуронске мреже, па се тај приступ и овде предлаже.

У тексту који следи, сваки од четири поменута корака синтезе управљања вештачким ходом биће детаљније описан. Предложена управљачка шема приказана је на слици 6.

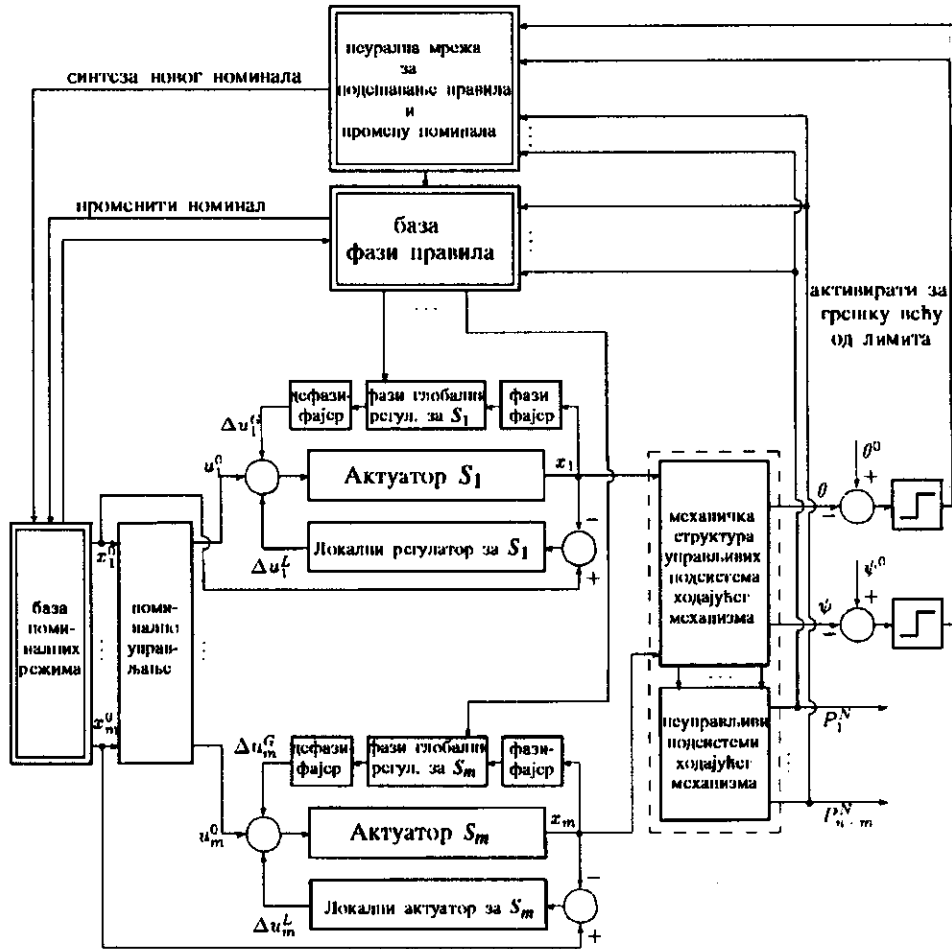
5.1 *Задавање синергије и синтеза хода*

Овај корак у синтези управљања вештачким ходом је заправо техничка реализација природне способности живих организама да изводе правилне локомоционе покрете уз помоћ унутрашњих механизма формираних учењем у раним фазама живота. Тако, базирано на “позајмљеном” репертоару људског или животињског хода по равној подлози и по унапред познатим препрекама као улазним подацима, могуће је синтетизовати и преостале компензационе покрете.

Пре двадесет година, одређен је алгоритам за задавање вештачке синергије код синтезе вештачког антропоморфног хода [13, 14]. Користећи тај алгоритам, и Като са Васеда универзитета (Токио) реализовао је динамички ход двоножног робота WL-10RD 1984. године [18]. Недавно, базирано на концепту ТОМ-а, реализован је динамички ход четвороножних ходајућих механизма ТИТАН IV и ТИТАН VI [8].

Главна тешкоћа и специфичност проблема одређивања вештачке синергије лежи у чињеници да решавање динамике кретања ходајућих механизма не припада ни првом ни другом задатку механике. Због непознатих сила реакције подлоге, немогуће је срачунати убрзања сегмената

система, а такође и комплетну синергију (позиције и брзине сегмената механизма током времена), јер силе реакције подлоге зависе од непознате синергије и њених извода.



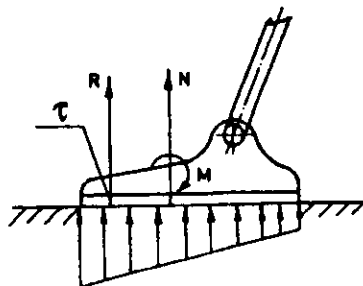
Сл. 6. Управљачка шема са номиналним управљањем, класичним ПИД регулаторима у локалним повратним спрегама, фазни регулаторима у глобалним повратним спрегама и неуралном мрежом за подешавање фази правила и обучавање новог номинала

Истакнимо да је тачка нула-момента изузетно значајна у решавању овог проблема. То је заправо тренутна тачка у којој делују само силе реакције које су изазване ходом, а тоталан моменат за ту тачку је нула. Трајекторију тачака нула-момента је релативно једноставно добити

мерењем. Мерења се врше да би се добио што вернији закон кретања тренутне нападне тачке силе реакције, што обезбеђује вернију слику динамике хода.

Код описа овог метода двоножни ходајући механизам биће узет за пример. Исти метод, уз извесна прилагођења која је једноставно увести, могуће је применити и на четвороножне и шестоножне ходајуће механизме.

Нека је τ тачка нула-момента (слика 7).



Сл. 7. Тачка нула-момента

Према Даламберовом (D'Alembert) принципу, услови динамичке равнотеже, звани динамичке везе јесу:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{\rho}_{\tau i} \times (\vec{F}_i + \vec{G}_i) + \vec{M}_{F_i}) \vec{e}_x = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{\rho}_{\tau i} \times (\vec{F}_i + \vec{G}_i) + \vec{M}_{F_i}) \vec{e}_y = 0 \quad (3)$$

где је $\vec{\rho}_{\tau i}$ радијус вектор од тачке τ до центра масе i -тог сегмента, \vec{F}_i , \vec{M}_{F_i} јесу главни вектор и главни момент инерцијалне силе i -тог сегмента, \vec{G}_i је тежина сваког посебног сегмента, а \vec{e}_x , \vec{e}_y су јединични вектори међусобно нормалних оса X , Y кроз тачку τ .

Једначине равнотеже сила реакције за тренутну тачку нула-момента могу да се напишу у облику:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{M}_{F_i} + \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i) \vec{e}_\zeta = 0 \quad (4)$$

где је $\vec{\rho}_i$ радијус вектор од тачке нула-момента до продорне тачке вертикалне осе ζ кроз раван контакта стопала са подлогом, а \vec{e}_ζ је јединични вектор осе ζ .

Једначине (2), (3), и (4) дају три релације између координата система. Како цео систем има n степени слободе, где је n веће од 3, трајекторије преосталих $(n-3)$ координата могуће је задати тако да се обезбеди динамичка равнотежа целокупног система, укључујући и компензационе покрете трупа и руку. Ово важи у случају да нема додатних тачака нуламомената који се јављају у пасивним зглобовима руку (случај фиксираних руку).

Дакле, синтеза вештачке синергије изводи се на следећи начин: за $(n-3)$ координата се прописује кретање, а преостале координате се налазе из једначина динамичке равнотеже (2), (3) и (4). Једноставно речено, шема кретања робота је следећа: “ноге” се померају на начин снимљен на живом бићу, а тело изводи периодичне компензационе покрете који обезбеђују кретање ТОМ-а по задатој трајекторији и динамичку равнотежу целокупног система у фронталној и сагиталној равни, према усвојеној вертикалној оси. Могуће је формирати базу података за различите номиналне режиме: ходање по равној површини и по различитим познатим препрекама, уз различите карактеристике терена. Како ходање припада периодичним покретима, за сваки начин хода потребни су подаци само за половину периода трајања једног корака, тако да формирана база података неће захтевати ни велике меморијске ресурсе, нити ће бити потребно дуго време за њено претраживање.

Заправо, у синтези управљања, ово је корак на коме се одређује номинална динамика система [6, 7, 14, 19].

5.2. Локални ПИД регулатори

Пропорционални плус интегрални плус диференцијални (ПИД) регулатори су позната и популарна техника за регулацију разноврсних процеса. То је пре свега због једноставности њиховог пројектовања и начина подешавања параметара. Специфичност управљачке шеме коју овде предлагемо је то што се локални ПИД регулатори примењени у сваком зглобу вишеножног механизма приказују у симболичкој форми, дакле са минималним бројем рачунских операција, као што је описано у [11]. С обзиром на то да су детаљи синтезе локалних ПИД регулатора познати из класичне теорије аутоматског управљања, овде о њима више неће бити речи.

5.3. База фази-правила

Као што код људи промене у убрзањима појединих сегмената доводе до промена брзина и позиција, а те промене онда изазивају промену у степену напрезања мишића, што проузрокује стварање проприоцептивних сигнала који утичу на вредности управљачких сигнала који долазе из мозга, уводећи у њих одговарајуће исправке и утичући на централни нервни систем да своје команде прилагоди стању периферијских извршних органа, слично мора да се дешава и код управљања вештачким ходом.

Неопходно је, на бази усвојених сигнала грешке који стижу са периферије, формирати сигнале способне да стабилизују нарушени облик задате синергије преко одговарајуће промене у погонским моментима актуатора ходајућег механизма.

Овде, уместо уобичајеног поступка стабилизације [16, 17, 15], што је споменуто раније, предлажемо друкчији начин за увођење глобалне повратне спреге. То је коришћење фази логике при синтези глобалног управљања, с обзиром да људске реакције на различите поремећаје током хода укључују и информације о спољашњим силама и информације о комплетној динамици целог тела. Тако синтетизоване глобалне повратне спреге треба да стабилизију и јак утицај међусобног спрезања међу подсистемима и утицај силе реакције подлоге.

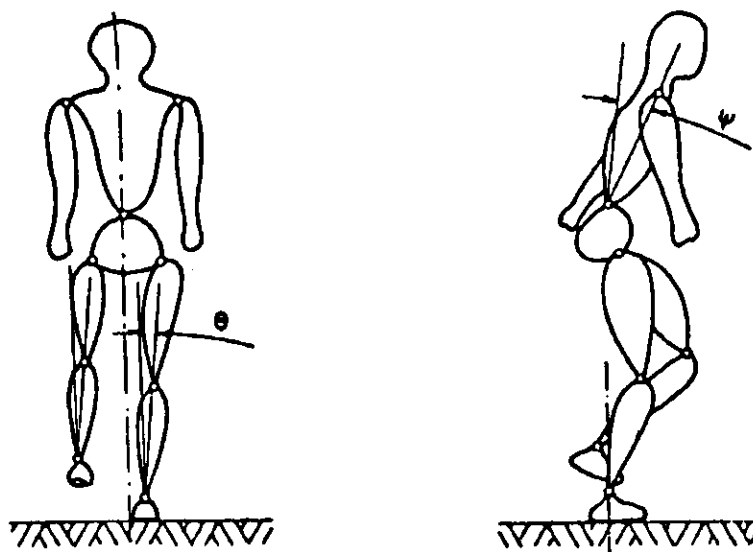
Фази контролери различитих типова развијени су током протекле две деценије и прикази могу да се нађу, на пример, у књизи [20] и прегледним радовима [21, 22, 23]. Фази контролери се обично постављају на каналу грешке, и састоје се од лингвистичких фази правила којима се значајне излазне варијабле трансформишу у управљачке акције. Фази правила која се користе зависе од типа система којим се управља као и од хеуристичких функција које се усвајају. У роботици, фази регулатори су примењени, на пример, за динамичко управљање манипулационим роботом [24] и за налажење трајекторије мобилног робота [25].

Између различитих фази управљачких стратегија [20], овде предлажемо употребу Меквајкар-Виленове (Macvicar-Whelan) фази управљачке матрице [26], јер она примењује фази логику на директан начин, тако да је погодна за управљање брзим процесима у реалном времену. Она је заснована на следећим правилима:

- Ако излаз система има жељену вредност, а извод грешке је нула, онда се задржава претходни излаз контролера.
- Ако је излаз система различит од жељене вредности, управљачки сигнал зависи од знака и вредности грешке и њеног извода. Ако су услови такви да ће се грешка сама убрзо анулирати, излаз контролера је константан или скоро константан. У супротном, мења се излаз контролера да би се постигло жељено понашање система.

Значајна особина ове управљачке стратегије је та да се приближава логици човека који ручно управља процесом више него иједна друга фази управљачка стратегија [26]. Оваква управљачка стратегија показује нешто врло фундаментално: пре него што се пројектује фази контролер, неопходно је проучити управљачке акције које доводе до жељеног понашања система, да би пројектовани фази контролер имао што реалистичније понашање. То је управо оно што треба да радимо код испитивања и мерења људског и животињског хода. Тако, предлажемо да се направи база фази података са снимљеним људским и животињским

реакцијама на различите поремећаје током хода, и онда да се, уз потребу Меквајкар-Виленове фази матрице, синтетизује глобално фази управљање ходајућим механизмом. С обзиром да до поремећаја током хода долази и због међусобног механичког спрезања међу подсистемима ходајућег механизма, као и због дејства различитих спољашњих сила, међу којима је свакако најважнија сила реакције подлоге, и да акције живих бића стабилизује све те поремећаје, и глобално фази управљање требало би да стабилизује обе ове врсте поремећаја. Глобално фази управљање, дакле, треба да обухвати стабилизацију поменутих поремећаја око неког унапред задатог номинала, а такође, у случају потребе, и промену номиналног управљања, тј. избор неког другог номинала из базе номиналних режима описане у одељку 5.1.



Сл. 8. Приказ бочног и уздужног изгледа механизма

Тешкоћа код овако постављене управљачке шеме је та што базом фази правила није могуће обухватити све поремећаје који могу да се догоде током хода. То значи да постоје ситуације у којима је фази глобално управљање недовољно. Овај случај се детектује тако што се пропише граница стабилности за тело током хода, и мере се углови θ и ψ нагињања тела у бочној и уздужној равни (видети слику 8). Ако углови θ и ψ добијају вредности ван прописаног опсега, значи да је дотад примењено управљање неодговарајуће.

5.4. Самоорганизујући фази регулатор или учење новог начина хода

Јасно је да је за заиста аутономне ходајуће механизме неопходна нека врста интелигентног управљања. Другим речима, управљачки систем ходајућег механизма мора да има способност да учи из искуства које

се стиче ходом. У управљачкој шеми која је постављена у овом раду, потребна нам је способност допуњавања базе фази правила новим правилима која прописују реакције на поремећаје који нису снимљени унапред. Ово је заправо проблем самоорганизујућег фази контролера, што може да се реши уз помоћ неуронских мрежа [27].

Друга потреба за учењем у предложеној управљачкој шеми јавља се када су услови хода драстично различити од свих услова који су владали када су снимани подаци за базу номиналних режима. Тада стабилизација око неког запамћеног номинала нема смисла, па треба научити нови номинални режим хода. Овај проблем учења такође је могуће решити уз помоћ неуралне мреже.

Коришћење неуралне мреже баш за ове проблеме изгледа прикладно и због чињенице да је откривено да је одређена група неурона у мозгу животиња, која се назива централни генератор облика (central pattern generator - CPG), одговорна за генерисање поновљивих секвенци мишићних покрета током ходања [28, 29]. То откриће омогућило је истраживачима да предложе различите шеме генератора облика уз помоћ неуралних мрежа. Истакнуто је да постоји разлика између вољног и невољног периодичног кретања. Вољни покрети изводе се по вољи човека и захтевају врло мало информација од чула. Невољни покрети су резултат спољних стимуланса. Настају када се хода по непознатом терену и у непознатим условима, па се информацијама које стижу са различитих чула мења претходно вољно кретање да би се опет постигла стабилност хода. После учења ових нових услова, невољно кретање прелази у вољно и више нема потребе за интензивном интеракцијом са чулима.

Тако, мозгови живих бића имају три начина за контролу хода: вољно кретање, невољно кретање и учење. Да бисмо овај биолошки принцип контроле хода применили на ходајуће механизме, неопходно је да и управљачка шема ходајућег механизма има те три могућности [28].

У управљачкој шеми предложеној у овом раду, управљање вољним кретањем је реализовано уз помоћ базе номиналних режима и локалних ПИД регулатора, док се фази регулатором и неуралном мрежом реализују невољно кретање и учење.

6. Анализа стабилности

Као што је описано у [30], постоји метод за анализу стабилности механизма који садрже и неуправљиве степене слободе. Тај метод базира се на конструкцији Љапуновљеве (Ляпунов) функције за посматрани систем, при чему се посматрају такозвани “комполитни” подсистеми. “Комполитни” подсистеми се састоје од једног управљивог и једног неуправљивог степена слободе, и за примену предложеног метода неопходно је посматрани систем разложити на комполитне и управљиве

подсистеме, што је увек могуће урадити ако је управљивих степени слободe више него неуправљивих.

Ако се композитни подсистем посматра декупловано од остатка система, могуће је стабилизovati га локалним регулатором. Даље, ако се посматрају сва спрезања посматраног композитног подсистема са осталим подсистемима, могуће је поставити критеријуме за стабилност целокупног механизма.

Ова теорија је применљива и на ходајуће механизме, јер се на контакту стопала и површине подлоге појављује неуправљив степен слободe (видети слику 1). Његов утицај на стабилност целокупног система је од огромног значаја, јер је сасвим могуће да сви управљиви степени слободe тачно реализују задате трајекторије, а да се истовремено систем преврне и падне због ротације око ивице стопала. Зато је главни задатак управљачког система да спречи такву ситуацију и обезбеди систем од пада.

Номиналне трајекторије се синтетишу уз коришћење метода синергије прописане делу система, што је описано у одељку 5.1. За тако одређене номиналне трајекторије, $x^0(t)$, срачунава се номинално управљање $u^0(t)$ које треба да обезбеди њихову реализацију у случају да на систем не делују поремећаји.

С обзиром на деловање разних поремећаја, уводи се додатно управљање које треба да врати вектор стања система са поремећајима на његову номиналну вредност, и да у исто време спречи пад система због присуства неуправљивих степени слободe. Тако, управљачки сигнал i -тог актуатора састоји се из два дела

$$u^i = u^{i0} + \Delta u^i$$

где је u^{i0} номинално управљање i -тог актуатора, док је Δu^i управљање због поремећаја (одељци 5.2, 5.3, 5.4). Јасно је да се ово управљање састоји из два дела: локалног, синтетизованог локалним ПИД регулаторима (одељак 5.2), и глобалног дела, који се синтетише фази регулатором и самоорганизујућим фази регулатором (одељци 5.3 и 5.4).

У анализи стабилности, први задатак је одредити област стабилности за све декупловане подсистеме, и то и управљиве и композитне (ако механизам има n активних степени слободe, од којих су m управљиви, тада је укупан број свих подсистема m , при чему су $n - m$ њих композитни). Тако, за сваки декупловани систем могуће је наћи границе управљачких сигнала које гарантују његову експоненцијалну стабилност са унапред задатим степеном стабилности.

Следећи корак је испитивање стабилности целокупног система, са уведеним глобалним управљањем, које треба да минимизира дестабилишући утицај међусобног спрезања међу подсистемима. За овакву анали-

зу стабилности, усвајају се Љапуновљеве функције (позитивно дефинитне функције координата стања Δx^i) за сваки подсистем у форми [15]:

$$v_i = (\Delta x^{iT} H^i \Delta x_i)^{1/2}$$

где је матрица H^i симетрична и позитивно дефинитна и може се добити као решење Љапуновљеве матричне једначине [16, 17].

С обзиром на то да смо предложили фази контролер и самоорганизујући фази контролер у синтези глобалног управљања, јасно је да услове стабилности треба модификовати. Можемо да очекујемо да ћемо добити опсеге за фази управљачке сигнале у којима ће цео систем бити стабилан.

7. Закључак

У овом раду постављен је истраживачки програм за који верујемо да ће довести до задовољавајуће синтезе вештачког двоножног хода, и то хода по различитим теренима и у различитим условима. Предложили смо коришћење природних (биолошких) решења где год она могу да имају одговарајућу техничку реализацију. Да бисмо превазишли чињеницу да непознате силе реакције подлоге које се јављају током хода фигуришу у једначинама динамичке равнотеже целокупног ходајућег механизма, искористили смо појам тачке нула-момента (ТОМ), као и алгоритам за синтезу вештачке синергије хода. Као управљачку стратегију, предложили смо синтезу управљања у четири корака: за управљање у отвореној спрези синтетизује се номинална вештачка синергија, па се уз сваки актуатор поставе локални ПИД регулатори да стабилизују мање поремећаје, фази контролер фиксне структуре регулише утицај међусобног спрезања међу подсистемима и утицај силе реакције подлоге, а самоорганизујући фази контролер реализован преко неуронске мреже служи за обучавање одређене акције у случају непредвиђених великих поремећаја.

Неки од ових принципа и део управљачке стратегије већ су примењени при реализацији активних егзоскелета за рехабилитацију парализованих болесника [31]. Верујемо да се ти исти принципи и предложена управљачка стратегија могу применити и на синтези и управљање ходом четвороножних и шестонозних аутономних ножних робота, и да ће дати задовољавајуће начине кретања у различитим реалним условима и по различитим теренима.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] N. B e r n s t e i n, *The Co-ordination and Regulation of Movements*. Pergamon Press, 1967.
- [2] R.M. A l e x a n d e r, "The gaits of bipedal and quadrupedal animals", *The International Journal of Robotics Research, the MIT Press*, вол. 3, стр. 49-59, лето 1984.
- [3] C. R z y m k o w s k i, K. K e d z i o r, "Modelling and simulation of walking machine jump over obstacle," *Proc. of RoManSy '90: The 6th CISM-IFTOMM Symposium*, (Krakow, Poland), стр. 358-365, јул 1990.
- [4] R.B. M c G h e e, "Some finite state aspects of legged locomotion," *Mathematical Biosciences*, вол. 2, фебруар 1968.
- [5] A.A. F r a n k, R. B. M c G h e e, "Some considerations relating to the design of autopilots for legged vehicles," *Journal of terramechanics*, вол. 6, 1969.
- [6] M. V u k o b r a t o v i ć, D. J u r i ć i ć, "Contribution to the synthesis of biped gait," *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, vol. BME-16, стр. 1-6, јануар 1969.
- [7] D. J u r i ć i ć, M. V u k o b r a t o v i ć, "Mathematical modelling of a bipedal walking system," *Proceeding of the ASME winter annual meeting*, (72-WA/BHF-13, New York), 26-30. новембар, 1972.
- [8] K. Y o n e d a, S. H i r o s e, "Dynamic and static fusing gait of a quadruped walking vehicle on a winding path," *Proc. of IEEE Conf. on Robotics and Automation*, (Nice, France), стр. 143-148, мај 1992.
- [9] M. K i r ć a n s k i, M. V u k o b r a t o v i ć, N. K i r ć a n s k i, A. T i m ć e n k o, "A new program package for the generation of efficient manipulator kinematic and dynamic equations in symbolic forms," *Robotica*, вол. 6, стр. 311-318, 1988.
- [10] M. V u k o b r a t o v i ć, N. K i r ć a n s k i, A. T i m ć e n k o, M. K i r ć a n s k i, "SYM - program for computer-aided generation of optimal symbolic models of robot manipulators," *Multibody systems handbook*, (W. Schiehlen, red), стр. 37-61, Springer-Verlag, 1989.
- [11] A. T i m ć e n k o, N. K i r ć a n s k i, D. U r o š e v i ć, M. V u k o b r a t o v i ć, "SYM - program enviroment for manipulator modeling, control and simulation," *Robotica*, вол. 10, стр. 147-155, 1992.
- [12] A. T i m ć e n k o, N. K i r ć a n s k i, M. V u k o b r a t o v i ć, "A two-step algorithm for generating efficient manipulator models in symbolic form," *Proc. of IEEE Conf. on Robotics and Automation*, (Sacramento, California), стр. 1887-1894, април 1991.
- [13] M. V u k o b r a t o v i ć, Y. S t e p a n e n k o, "Mathematical models of general anthropomorphic systems," *Math. Biosciences*, вол. 17, стр. 191-242, 1970.
- [14] M. V u k o b r a t o v i ć, "How to control artificial anthropomorphic systems," *IEEE Trans. on System, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-3, стр. 497-507, септембар 1973.
- [15] M. V u k o b r a t o v i ć, B. B o r o v a c, D. S u r l a, D. S t o k i ć, *Biped locomotion*. vol. 7, *Scientific fundamentals of robotics*, Springer-Verlag, 1990.
- [16] M. V u k o b r a t o v i ć, D. S t o k i ć, *Control of Manipulation Robots*. vol. 2, *Scientific fundamentals of robotics*, Springer Verlag, 1982.
- [17] M. V u k o b r a t o v i ć, D. S t o k i ć, N. K i r ć a n s k i, *Non-Adaptive and Adaptive Control of Manipulation Robots*. vol. 5, *Scientific fundamentals of robotics*, Springer Verlag, 1985.
- [18] I. K a t o, *Development of Waseda robots - The study of biomechanisms at Kato Laboratory*. Tokyo: Waseda University publication dedicated to I. Kato 60th year jubilee, 1985.

- [19] M. Vukobratović, *Legged locomotion robots and anthropomorphic mechanisms, research monograph*. Belgrade: Mihailo Pupin Institute, 1975.
- [20] G.J. Klir, T.A. Folger, *Fuzzy sets, uncertainty and information*. Prentice-Hall International, Inc., 1988.
- [21] C.C. Lee, "Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller-part I," *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, вол. 20, стр. 404–418, март/април 1990.
- [22] C.C. Lee, "Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller-part II," *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, вол. 20, стр. 418–433, март/април 1990.
- [23] X.T. Peng, A. Kandel, P.Z. Wang, "Concepts, rules and fuzzy reasoning: a factor space approach," *IEEE Transactions on system, man, and cybernetics*, вол. 21, стр. 194–205, јануар/фебруар 1991.
- [24] N.J. Mandić, E.M. Scharf, E.H. Mammadami, "Practical application of a heuristic fuzzy rule-based controller to the dynamic control of a robot arm," *IEEE Proceedings*, вол. 132, стр. 190–203, јул 1985.
- [25] Y. Maeda, M. Tanabe, M. Yuta, T. Takagi, "Hierarchical control for autonomous mobile robots with behavior-decision fuzzy algorithm," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Nice, France), стр. 117–122, мај 1992.
- [26] S. Tzafestas, S. Papanikolopoulos, "Incremental fuzzy expert PID control," *IEEE Transactions on industrijal elektronics*, вол. 37, стр. 365–371, октобар 1990.
- [27] M. Vukobratović, D. Katić, "Connectionist control structures for high-efficiency learning in robotics," *Applied control*, (S. Tzafestas, red.), стр. 705–753, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.
- [28] A.W. Salatian, Y.F. Zhen g, "Gait synthesis for a biped robot climbing sloping surfaces using neural network - Part I: Static learning," *Proc. of IEEE Conf. on Robotics and Automation*, (Nice, France), стр. 2601–2606, мај 1992.
- [29] A.W. Salatian, Y.F. Zhen g, "Gait synthesis for a biped robot climbing sloping surfaces using neural networks - Part II: Dynamic learning," *Proc. of IEEE Conf. on Robotics and Automation*, (Nice, France), стр. 2607–2611, мај 1992.
- [30] B. Borovac, M. Vukobratović, D. Stokić, "Stability analysis of mechanisms having unpowered degrees of freedom," *Robotica*, вол. 7, стр. 349–357, 1989.
- [31] M. Vukobratović, D. Hristić, Z. Stojiljković, "Development of active anthropomorphic exoskeletons," *Biological Engineering*, вол. 12, 1974.

*M. Vukobratović, Olga Timčenko*SOME BIOLOGICAL ASPECTS OF CONTROLLING
COMPLEX ROBOTIC SYSTEMS

- a conceptual paper -

S u m m a r y

In this paper the principles of controlling complex dynamical systems, relying on some biological principles of the living organisms locomotor acts, are presented. Based on the previously established zero-moment point theory and the semi-inverse approach for solving the artificial gait synthesis based on the prescribed synergy to part of the spatial mechanism, in this new approach to dynamical control of complex robots, the conventional control synthesis, based on complete dynamic robot model, is abandoned. Into this procedure fuzzy regulators and the neuron learning concept re introduced. Differing from the conventional fuzzy regulator and neural learning, in the scope of this new approach a combined procedure is proposed, containing the novelty: introducing the programmed control (feed-forward), which solves the synthesis problem of undisturbed working regime. With that goal, and based on decentralized control, in the second synthesis phase local regulators are compensating the perturbations, including load variations in the joints of locomotion robot and displacement of the dynamic reaction force in contacts between the robot mechanism and the support surface.

The role of the neural network module is updating the weighting factors of fuzzy rules, as well as introducing new nominal regimes, which are needed for the functioning of the fuzzy regulator under the conditions of large perturbations.

В. Д. ЂОРЂЕВИЋ

ПРИМЕНА МЕТОДЕ АСИМПТОТСКОГ СПАЈАЊА ПРИ
ПРОРАЧУНУ ТУРБУЛЕНТНОГ СТРУЈАЊА
И ЗАКОНА ТРЕЊА У ЦЕВИМА

(Примљено на X скупу Одељења, 19. октобра 1993)

1. Увод

Потпуно развијено турбулентно струјање у цевима спада у класичне проблеме механике флуида. Може се рећи да је овај проблем експериментално скоро у потпуности истражен и то са два аспекта. Први је типично инжењерски аспект који даје поуздане податке о зависности коефицијента трења од Рејнолдсовог броја и релативне храпавости и који на тај начин омогућава да се при задатом протоку кроз цев одреди пад притиска на некој дужини цеви, или обрнуто, да се при задатом паду притиска одреди проток. Други аспект задире у фундаменте теорије турбулентних струјања, односи се на истраживање fine структуре турбуленције, а нарочито у близини зида цеви (тзв. зидна турбуленција), транспорта турбулентне енергије између карактеристичних слојева флуида, спектралних особина овог струјања и сл. Теорија којом се располаже при прорачуну ових струјања, међутим, веома је оскудна. Она се углавном базира на Прантловој теорији о путањи мешања и на добро познатој чињеници да постоји један слој флуида у близини зида у коме је путања мешања линеарна функција растојања од зида. Из основних једначина струјања се онда добија да се у томе слоју профил брзине струјања може представити у облику једне логаритамске функције, што се одлично слаже са експериментима. Штавише, експерименти показују да се профил брзине може успешно апроксимирати логаритамском функцијом у највећем делу пресека

цеви. Ова теорија, међутим, не може да да и вредност једне константе која се јавља при интеграцији основних једначина. Она се одређује по ређењем са експерименталним подацима, а то се чини и при одређивању неких других константи које се појављују при формулисању тзв. закона трења, па због тога ова теорија у литератури обично носи епитет полуемпиријске теорије.

Овај рад има претензију да постојећу полуемпиријску теорију претвори у егзактну. То се постиже на тај начин што се турбулентни напони моделирају помоћу познате Прантлове теорије о путањи мешања и том приликом користе поуздани подаци о величини путање мешања у појединим карактеристичним областима струјања, познати у литератури и добијени експериментално. У случају глатких и делимично храпавих цеви пресек цеви се дели на две карактеристичне области: тзв. унутрашњи слој у близини зида у коме оба карактеристична напона – услед вискозности и услед турбуленције долазе до изражаја и тзв. спољашњи слој, или турбулентно језгро у коме преовлађују напони услед турбуленције, а до решења се долази коришћењем познате методе асимптотског спајања (в. нпр. [1]). Том приликом се показује да је модел Ван Дриест-а [2] којим се описује путања мешања у унутрашњем слоју код делимично храпавих цеви неадекватан, јер се њиме не могу потврдити резултати добијени експериментима. У раду је зато формиран нови модел који доводи до одличног слагања резултата добијених теоријски и експериментално. Према овом моделу унутрашњи слој ишчежава када храпавост зида цеви изражена преко Рејнолдсовог броја k_* , који ће бити дефинисан у Одељку 2, достигне карактеристичну вредност од 46,56, што је значајно мање од вредности 60, коју нуди модел Ван Дриест-а.

Примена методе асимптотског спајања код овог проблема струјања показала је да се профил брзине у турбулентном језгру, поред логаритамске функције, описује и једном додатном функцијом која је у раду дефинисана и нумерички израчуната и чији се утицај на поједине струјне параметре не може занемарити. Приликом примене ове методе одређене су прве две апроксимације у оба слоја, тако да је у раду дотакнуто и питање утицаја апроксимације вишег реда на поједине карактеристичне резултате. Тако је нпр. показано да се утицај вискозности садржан у Рејнолдсовом броју R_* , који ће такође бити дефинисан у Одељку 2, на тзв. закон дефекта брзине не може у потпуности занемарити. Код потпуно храпавих цеви код којих не постоји унутрашњи слој до резултата се дошло на исти начин као и у [2], тј. ослањањем на претходно добијене резултате на граници између делимично храпавих и потпуно храпавих цеви – при $k_* = 46,56$. Сви резултати који се односе на профиле брзине искоришћени су да би се формулисао закон трења који игра веома важну улогу при прорачуну струјања кроз цеви. Том приликом у потпуности су потврђени познати експериментални резултати Никурадсе-а [3], [4], који се данас широко користе у инжењерској пракси.

2. Дефиниција проблема и неке корисне релације

У раду ће се третирати проблем потпуно развијеног турбулентног струјања у цеви кружног попречног пресека, чији је зид или идеално гладак или храпав, приказан на сл. 1, на којој је полупречник цеви означен са r_0 , средња висина неравнина на зиду цеви са k и карактеристични профил просечне брзине струјања у случају када се у близини зида осећа утицај вискозности са $u(y)$, где је y растојање мерено од зида. На профили брзине се јасно запажа веома оштар градијент брзине у близини зида, у тзв. унутрашњем слоју, и благе промене брзине струјања у највећем делу пресека цеви, у тзв. спољашњем слоју који се још назива и турбулентним језгром. Између њих постоји једна прелазна област унутар које се врши континуалан – гладак прелаз једног профила брзине у други. Профил брзине са оваквим особинама управо омогућава примену методе асимптотског спајања која је овде примењена да би се проблем решио. У литератури се понекад унутрашњи слој дели на подобласти, као што су: вискозни подслој у непосредној близини зида (ако егзистира!) у коме вискозни напони преовлађују над турбулентним, прелазна област изнад њега у којој се оба напона истога реда величине и део у близини границе са спољашњим слојем у коме турбулентни напони преовлађују над вискозним, али се овде испоставља да таква финија подела није неопходна са гледишта примене поменутих методе.



Сл. 1. Схема структуре потпуно развијеног турбулентног струјања у цеви

Упоредо са ознакама на сл. 1, у овоме раду ће се користити још и следеће погодне дефинисане величине: $k_r = k/r_0$ – релативна храпавост, $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ – динамичка брзина (ρ и τ_w су редом, густина флуида и тангенцијални напон на зиду), $y_* = u_* y/\nu$ – бездимензионална координата која има облик локалног Рејнолдсовог броја (ν је кинематичка вискозност флуида) и $u_a = \dot{V}/\pi r_0^2$ – средња брзина струјања (\dot{V} је запремински проток флуида кроз цев). Такође, дефинисаће се укупно три Рејнолдсова броја:

$$R_e = \frac{u_a \cdot 2r_0}{\nu}, \quad R_* = \frac{u_* r_0}{\nu} \quad \text{и} \quad k_* = \frac{u_* k}{\nu}.$$

Инверзна вредност броја R_* одиграће у овом раду веома важну улогу јер ће у асимптотској методи која се примењује представљати мали параметар. Помоћу тангенцијалног напона на зиду дефинише се коефицијент трења λ на уобичајени начин:

$$\tau_w = \frac{\lambda}{8} \rho u_a^2,$$

а један од крајњих циљева рада је и одређивање егзактне зависности овог коефицијента од R_e и k_r .

На основу горе уведених величина следе неке очигледне релације које ће касније бити употребљене:

$$\frac{u_a}{u_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}, \quad R_* = \frac{R_e \sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}}, \quad k_* = k_r R_* \quad (1)$$

3. Основна једначина

Основна једначина којом се описује проблем на сл. 1 може се наћи у већини уџбеника механике флуида и гласи:

$$(lr_0)^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \nu \frac{du}{dy} = \frac{\tau_w}{\rho} \left(1 - \frac{y}{r_0} \right).$$

У њој је очигледно турбулентни напон (први члан на левој страни) моделиран помоћу Прантлове теорије о путањи мешања и $l = l(y)$ представља путању мешања учињену бездимензионом преко r_0 . За потребе овог рада погодније је једначину написати у бездимензионом облику увођењем следећих бездимензионих променљивих:

$$x = y/r_0 \quad \text{и} \quad f(x) = u/u_*,$$

при чему се добија:

$$l^2(x) f'^2 + \frac{1}{R_*} f' = 1 - x. \quad (2)$$

Докле год се утицај вискозности у близини зида не може занемарити (глатке и делимично храпаве цеви!), има смисла при решавању једначине применити гранични услов на зиду: $f(0) = 0$. У ономе што следи биће дата комплетна асимптотска анализа решења ове једначине при $R_* \rightarrow \infty$. Разуме се, том приликом је неопходно располагати поузданим експерименталним подацима о зависности $l(x)$ у целој области струјања.

Прва прецизна мерења путање мешања у спољашњем слоју при разним вредностима R_e броја извршио је Никурадсе [3], [4] и том приликом показао да путања мешања у овом слоју не зависи од стања храпавости зида. Према Прантлу, она се при $R_e \rightarrow \infty$ може апроксимирати следећим полиномом четвртог степена:

$$l_{out} = \kappa x (1 + \alpha_0 x + \beta_0 x^2 + \gamma_0 x^3),$$

у коме су: $\alpha_0 = -1.1$, $\beta_0 = 0,6$ и $\gamma_0 = -0,15$. Што се коефицијента κ тиче, вредности које се препоручују у литератури су веома блиске 0.4. Да би се постигло што боље слагање теоријских резултата са експериментима, у овоме раду ће бити усвојена вредност $\kappa = 0.407$. Такође, с обзиром на то да ће се овде дотаћи и питање апроксимација вишег реда, као што је то у Уводу напоменуто, биће потребно да се обухвати и зависност путање мешања од Рејнолдсовог броја R_* . Веома добро слагање са експериментима може се постићи коришћењем следећег израза:

$$l_{out} = \kappa x(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3), \quad (3)$$

у коме су:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \frac{1}{3,1 + 0,01R_*} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{R_*} + \dots \\ \beta &= \beta_0 - \frac{1}{3,1 + 0,01R_*} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{R_*} + \dots \\ \gamma &= \gamma_0 + \frac{1}{4(3,1 + 0,01R_*)} = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{R_*} + \dots \end{aligned}$$

Прва прецизна мерења профила просечне брзине струјања и фине структуре турбуленције у унутрашњем слоју над глатким зидом извршио је Лауфер [5] помоћу анемометра са врелом жицом. Да би његове резултате могао да репродукује нумеричком интеграцијом једначине (2), Ван Дриест [2] је предложио следећи израз за путању мешања у унутрашњем слоју:

$$l_{in} = \kappa x D(y_*) \quad (4)$$

где је $D = 1 - e^{-y_*/a}$ и назива се пригушним фактором, а a представља универзалну константу чија је бројна вредност 26. У истоме раду Ван Дриест је интуитивно уопштио израз за $D(y_*)$ и на случај хрпавих цеви и предложио га у следећем облику:

$$D = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{y_*}{a}}, & \text{глатке цеви } (k_* = 0) \\ 1 - e^{-\frac{y_*}{a}} + e^{-\frac{b}{k_*} \frac{y_*}{a}}, & \text{дел. хрпаве цеви } (0 < k_* \leq b) \\ 1, & \text{потпуно хрпаве цеви } (k_* \geq b), \end{cases}$$

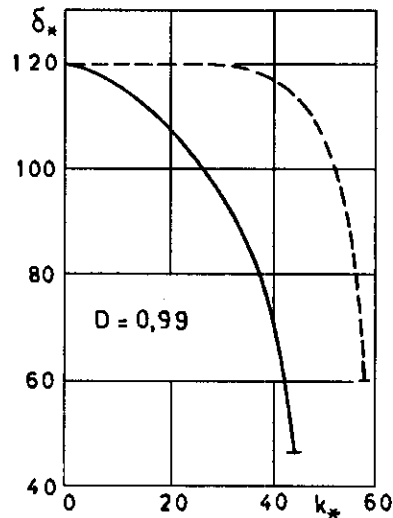
у коме је b још једна универзална константа чија је бројна вредност 60. Комплетну анализу која ће овде бити приказана ми смо прво спровели користећи овај Ван Дриест-ов модел за пригушни фактор, али нисмо добили задовољавајуће слагање са експериментима, осим у случају глатких цеви. Зато смо били принуђени да моделу за пригушни фактор код хрпавих цеви посветимо посебну пажњу и, као резултат напора које смо учинили, у стању смо да предложимо следећи нови модел:

$$D = \begin{cases} 1 - (1 - g(k_*))e^{-\frac{y_*}{a}}, & \text{глатке и дел. хрпаве цеви} \\ & (0 \leq k_* \leq b = 46, 56) \\ 1, & \text{потпуно хрпаве цеви } (k_* \geq b), \end{cases} \quad (5)$$

у коме је:

$$g(k_*) = \frac{k_*}{m} e^{-\frac{n}{k_*}}, \quad g(0) = 0,$$

а m и n су универзалне константе чије су бројне вредности: $m = 42,73$ и $n = 4$. Запажа се да пригушни фактор код Ван Дриест-овог модела постаје једнак јединици за $k_* = 60$, док се у нашем случају то догађа за $k_* = 46,56$ ($g = 1$). Директна импликација ове чињенице је да унутрашњи слој ишчезава и цев постаје потпуно хрпава при $k_* \geq 60$, према Ван Дриест-овом моделу, док наш модел даје знатно нижу вредност: $k_* \geq 46,56$! Поређење оба модела може се извршити потпуније и на следећи начин. Ако се дебљина унутрашњег слоја дефинише као она вредност δ_* променљиве y_* при којој је $D = 0,99$, наведени модели ће дати резултате приказане на сл. 2, и то: испрекидана линија представља модел Ван



Сл. 2. Зависност дебљине унутрашњег слоја од k_* код модела Van Driest-а [2] - испрекидана линија и нашег модела - пуна линија

Дриест-а а пуна наш модел. Запажа се да δ_* према Ван Дриест-овом моделу остаје приближно константно све до вредности $k_* \approx 30$, а онда нагло пада, док је у нашем случају зависност δ_* од k_* знатно уједначенија. Чини нам се да је тешко физички оправдати овакав ток криве код модела Ван Дриест-а.

Изрази (3) и (4) са пригушним фактором одређеним помоћу (5) могу се сада сажети у јединствени израз који покрива цео пресек цеви, као нпр. у [6]:

$$l(x) = \kappa x(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3)D(y_*). \quad (6)$$

У даљем раду овај израз ће се користити при асимптотској анализи једначине (2).

4. Решење у унутрашњем слоју за $0 \leq k_* \leq b$

Да би се добило решење које важи у унутрашњем слоју увешће се унутрашње променљиве:

$$y_* = R_* x, \quad f(x) = F(y_*),$$

па ће се једначина (2) трансформисати у:

$$(1R_*)^2 F'^2 + F' = 1 - \frac{y_*}{R_*}, \quad F(0) = 0.$$

Ако се решење ове једначине потражи у облику асимптотског реда

$$F = F_0(y_*) + \frac{1}{R_*} F_1(y_*) + h.o.t. \quad (7)$$

на уобичајени начин добиће се решење за прва два члана реда:

$$F_0 = \int_0^{y_*} \frac{2dt}{1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2 t^2 D^2(t)}}$$

$$F_1 = - \int_0^{y_*} \frac{t[1 + 2\alpha_0 \kappa^2 t^2 D^2(t) F_0'^2]}{1 + 2\kappa^2 t^2 D^2(t) F_0'} dt.$$

За потребе асимптотског спајања ових решења са решењем у спољашњем слоју неопходно је развити их у ред при великим вредностима унутрашње променљиве y_* . Ако се узме у обзир да је понашање подинтегралних функција у горњим изразима при $y_* \rightarrow \infty$:

$$F_0' \sim \frac{1}{\kappa y_*} - \frac{1}{2\kappa^2 y_*^2} + O(y_*^{-3})$$

$$F_1' \sim -\frac{1 + 2\alpha_0}{2\kappa} + \frac{\alpha_0}{\kappa^2 y_*} + O(y_*^{-2}),$$

лако се добија

$$F_0 \sim A \ln y_* + B_0(k_*) + \frac{1}{2\kappa^2 y_*} + O(y_*^{-2}) \quad (8)$$

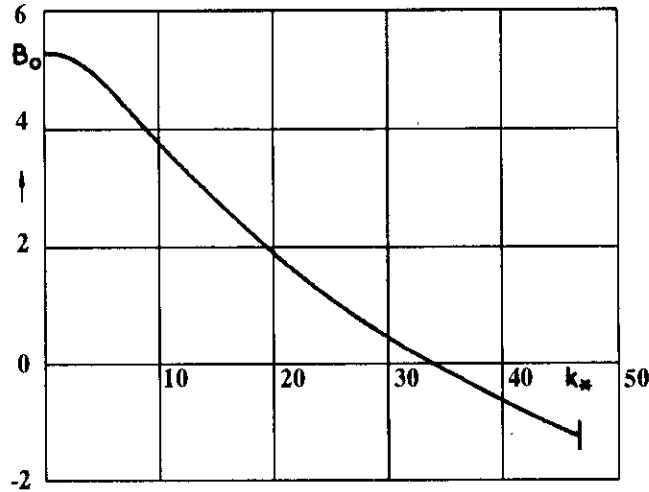
$$F_1 \sim -\frac{1 + 2\alpha_0}{2\kappa} y_* + \frac{\alpha_0}{\kappa^2} \ln y_* + B_1(k_*) + O(y_*^{-1}),$$

где су A , $B_0(k_*)$ и $B_1(k_*)$ константе од којих ће бити наведени само изрази за A и $B_0(k_*)$:

$$A = \frac{1}{\kappa}$$

$$B_0(k_*) = \int_0^1 \frac{2dt}{1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2 t^2 D^2(t)}} + \int_1^\infty \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2 t^2 D^2(t)}} - \frac{1}{\kappa t} \right) dt. \quad (9)$$

Као што ће се ускоро показати, ове две константе ће бити садржане и у решењу у спољашњем слоју и тиме ће одиграти веома важну улогу у остваривању циља постављеног у Уводу – у формирању егзактне теорије



Сл. 3. Зависност константе B_0 од k_*

проблема потпуно развијеног турбулентног струјања у цевима. Зависност $B_0(k_*)$ је нумерички израчуната и приказана на сл.3. Карактеристична вредност за глатке цеви ($k_* = 0$) износи: $B_0(0) = 5,248$, док се за $k_* = b = 46,56$ ($D = 1$) тачном интеграцијом може добити:

$$B_0(b) = \frac{\ln(4\kappa) - 1}{\kappa} = -1,260.$$

5. Решење у спољашњем слоју за $0 \leq k_* \leq b$

За потребе налажења решења у турбулентном језгру неопходно је развити у ред по степенима малог параметра $1/R_*$ и саму путању мешања (6). Добија се

$$l = l_0(x) + \frac{1}{R_*} l_1(x) + h.o.t.,$$

где су: $l_0(x) = \kappa x(1 + \alpha_0 x + \beta_0 x^2 + \gamma_0 x^3)$ и $l_1(x) = \kappa x^2(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)$. Ако се сада решење једначине (2) представи у облику

$$f = f_0(x) + \frac{1}{R_*} f_1(x) + h.o.t. \quad (10)$$

добиће се за два члана реда:

$$f_0 = K_0 - \int_x^1 \frac{\sqrt{1-x}}{l_0(x)} dx \quad \text{и}$$

$$f_1 = K_1 + \int_x^1 \frac{1 + 2l_1\sqrt{1-x}}{2l_0^2} dx,$$

где су K_0 и K_1 константе интеграције које треба одредити асимптотским спајањем добијеног решења са решењем у унутрашњем слоју. Физичко значење ових константи је очигледно, зато што сума асимптотског реда

$$K_0 + \frac{1}{R_*} K_1 + \dots = \frac{u_m}{u_*}$$

не представља ништа друго него однос максималне брзине струјања u_m – брзине у оси цеви и динамичке брзине. За потребе примене методе асимптотског спајања, међутим, погодније је добијена решења писати у облику

$$f_0 = A[\ln x + w_0(x)] + K'_0 \quad \text{и}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\kappa^2 x} + \frac{\alpha_0}{\kappa^2} \ln x + w_1(x) + K'_1, \quad (11)$$

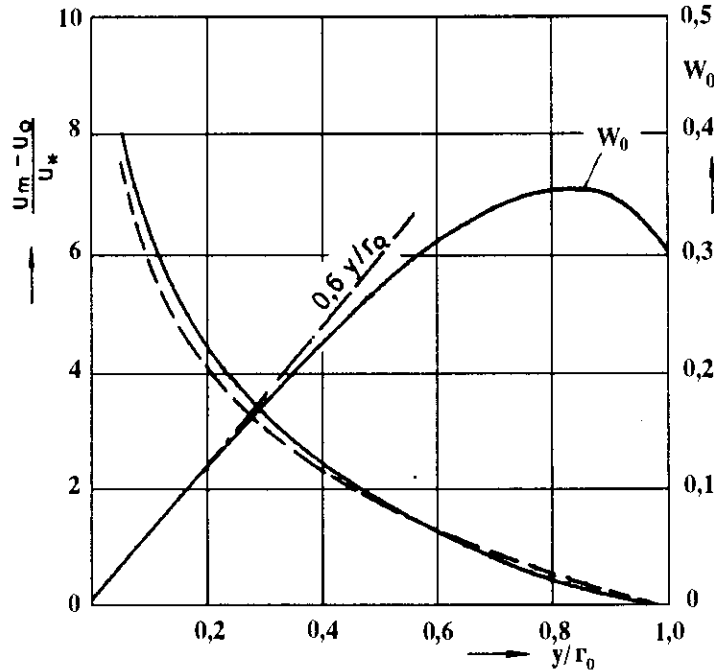
где су K'_0 и K'_1 неке друге константе интеграције, а $w_0(x)$ и $w_1(x)$ представљају функције које ћемо назвати “додатним” и које су одређене са

$$w_0(x) = \int_0^x \left(\frac{\kappa\sqrt{1-t}}{l_0(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \quad \text{и}$$

$$w_1(x) = - \int_0^x \left(\frac{1 + 2l_1\sqrt{1-t}}{2l_0^2} - \frac{1}{2\kappa^2 t^2} + \frac{\alpha_0}{\kappa^2} \frac{1}{t} \right) dt. \quad (12)$$

Термин “додатна” функција је овде употребљен да означи функцију која се додаје логаритамској функцији у описивању профила брзине у турбулентном језгру. Дуго се веровало да се овај профил брзине може у потпуности описати логаритамском функцијом, као нпр. у радовима Никурадсе-а [3], [4]. Тек прецизна мерења Лауфер-а [5] указала су на потребу увођења корекције у виду једне додатне функције, и то не само када је у питању струјање у цевима које се овде разматра, него и струјање у турбулентном граничном слоју. У литератури се, међутим, “додатна” функција по правилу одређује емпиријски и апроксимира тригонометријским функцијама (в. нпр. [6] и [7]), тако да изрази (12), колико је нама познато, представљају прве аналитичке изразе за “додатну” функцију.

Ови изрази, заједно са изразом (9) за константу $B_0(k_*)$ представљају један од најважнијих доприноса у овој раду.



Сл. 4. Зависност закона локалног дефекта брзине и додатне функције w_0 од y/r_0

С обзиром на то да смо у овој раду првенствено заинтересовани за решење првог реда, на сл. 4 је приказан график функције $w_0(x)$ срачунате нумерички. На истом дијаграму приказан је и график тзв. закона дефекта локалне брзине, израчунатог на основу решења првог реда, који се лако може добити из првог од израза (11) и без предходног познавања константе K'_0 као

$$\frac{u_m - u_0}{u_*} = A[w_0(1) - w_0(x) - \ln x].$$

Испрекиданом линијом унесени су експериментални резултати Никурадсе-а [4].

На крају овог одељка навешћемо асимптотско понашање функција f_0 и f_1 за $x \rightarrow 0$. Оно гласи:

$$\begin{aligned} f_0 &\sim A \ln x + K'_0 - \frac{1 + 2\alpha_0}{2\kappa} x + O(x^2) \quad \text{и} \\ f_1 &\sim \frac{1}{2\kappa^2 x} + \frac{\alpha_0}{\kappa^2} \ln x + K'_1 + O(x). \end{aligned} \quad (13)$$

6. Асимптотско спајање

Метода асимптотског спајања представља веома моћну и ефикасну методу за решавање низа проблема у механици флуида и механици континуума уопште, који се одликују особинама граничног слоја, као што су класични гранични слојеви, струјања уз присуство тзв. критичних слојева, тј. слојева у којима је брзина струјања једнака брзини распростирања неког таласа, који се јављају нпр. у теорији таласних кретања и у теорији хидродинамичке стабилности и сл. Као веома корисни приручници за упознавање са овом методом могу да послуже [1] и [8]. Овде ће она да буде употребљена за решавање проблема потпуно развијеног турбулентног струјања у цевима.

Ако се унутрашње решење (7) развије у ред при $y_* \rightarrow \infty$ (в.(8)) и напише помоћу спољашње променљиве $x = y_*/R_*$, добиће се:

$$f = A \ln(R_* x) + B_0(k_*) + \frac{1}{2\kappa^2 R_* x} + O\left(\frac{1}{R_*^2 x^2}\right) + \frac{1}{R_*} \left[-\frac{1+2\alpha_0}{2\kappa} R_* x + \frac{\alpha_0}{\kappa^2} \ln(R_* x) + B_1(k_*) + O\left(\frac{1}{R_* x}\right) \right] + h.o.t.$$

Истовремено, спољашње решење (10) развијено у ред при $x \rightarrow 0$ (в.(13)) гласи:

$$f = A \ln x + K'_0 - \frac{1+2\alpha_0}{2\kappa} x + O(x^2) + \frac{1}{R_*} \left[\frac{1}{2\kappa^2 x} + \frac{\alpha_0}{\kappa^2} \ln x + K'_1 + O(x) \right] + h.o.t.$$

Према основном принципу методе асимптотског спајања [1] оба добијена израза морају бити једнака. Да би овај услов био испуњен, неопходно је да непознате константе K'_0 и K'_1 задобију следеће вредности:

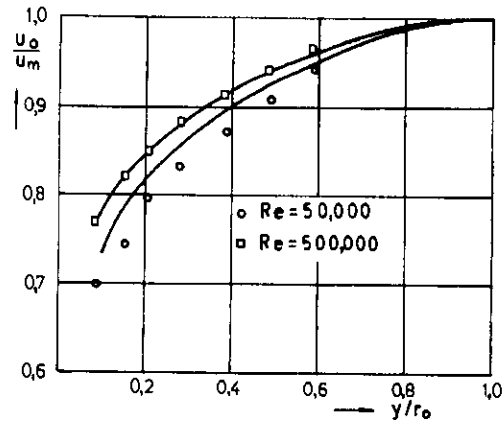
$$K'_0 = A \ln R_* + B_0(k_*) \quad \text{и} \quad K'_1 = \frac{\alpha_0}{\kappa^2} \ln R_* + B_1(k_*).$$

Одређивањем ових константи може се рећи да је основни циљ постављен у овом раду постигнут. Први од израза (11) који репрезентује апроксимацију првог реда профила брзине у турбулентном језгру сада гласи:

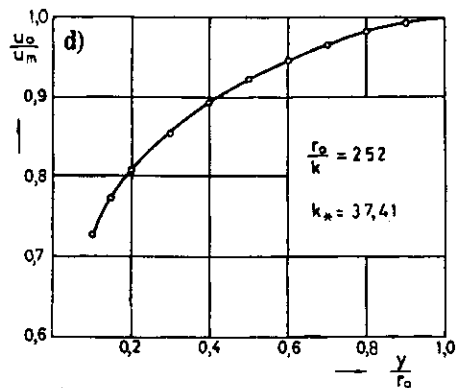
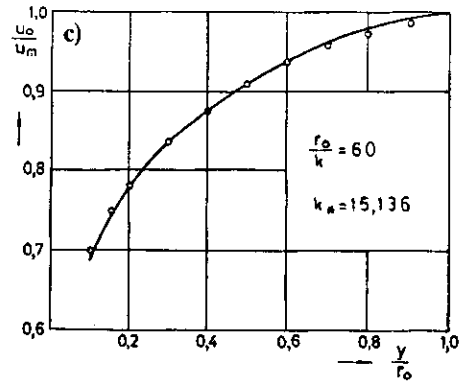
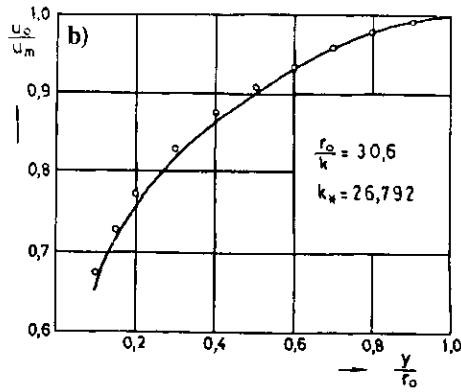
$$\frac{u_0}{u_*} = A [\ln(R_* x) + w_0(x)] + B_0(k_*), \quad (14)$$

док се на уобичајени начин (в. [1] и [8]) може формирати и униформно решење које представља важеће апроксимативно решење једначине (2) у целој области струјања:

$$f_{unif} = f_{in} + f_{out} - f_{match} = F_0(y_*) + A w_0(x) + \frac{1}{R_*} \left[F_1(y_*) + \frac{1+2\alpha_0}{2\kappa} y_* + w_1(x) \right] + h.o.t. \quad (15)$$



Сл. 5а. Поређење теорије (пуна линија) и експеримента за профил брзине код глатких цеви



Сл. 5 б, с и д. Поређење теорије (пуна линија) и експеримента за профил брзине код делимично храпавих цеви

На основу израза (14), на сл. 5 је приказано неколико профила брзине у спољашњем слоју и упоређено са постојећим експериментима. За идеално глатке цеви (сл. 5а) поређење је извршено са мерењима Лауфер-а [5] за две вредности R_e -броја: 50.000 и 500.000. Слагање теоријских резултата, презентираних у овом раду, са експериментима при већој вредности R_e -броја је очигледно изванредно. Међутим, при нижој вредности R_e -броја извесна одступања између једних и других вредности постоје. Могуће је да при нижим вредностима R_e -броја апроксимације вишег реда долази до изражаја у толикој мери да се њихов допринос не може у потпуности занемарити и да би се узимањем у обзир нпр. апроксимације другог реда разлика између теорије и експеримента смањила. Таква анализа, међутим, овде није спроведена. На осталим сликама на сл. 5 (b, c и d) извршено је поређење наших теоријских резултата за делимично храпаве цеви са одговарајућим експериментима Никурадсе-а [4]. Може се рећи да је слагање на сл. 5b добро, а на осталим сликама чак одлично.

7. Закон трења за $0 \leq k_* \leq b$

Као што је то добро познато, закон трења за једно потпуно развијено турбулентно струјање у цеви добија се израчунавањем протока помоћу униформног профила брзине (15), а тиме и средње брзине струјања u_a . Биће:

$$\frac{u_a}{u_*} = 2 \int_0^1 f_{unif}(1-x) dx.$$

Пажљиво израчунавање интеграла на десној страни овог израза при $R_* \rightarrow \infty$ сада доводи до:

$$\frac{u_a}{u_*} = f_{unif}(1) - 2AI + A^2 \frac{\ln R_*}{R_*} + O(R_*^{-1}), \quad (16)$$

где је:

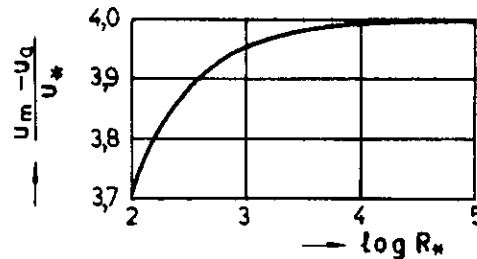
$$I = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{1-x}}{1 + \alpha_0 x + \beta_0 x^2 + \gamma_0 x^3} dx.$$

Нумеричка вредност овог интеграла износи: $I = 0,814$. Приликом израчунавања чланова вишег реда у изразу (16) очигледно је да смо се задржали само на највећем члану који је реда величине: $\ln R_*/R_*$. Из (16) се лако може добити тзв. закон дефекта брзине. Узимањем у обзир нумеричких вредности константи A и I добија се

$$\frac{u_m - u_a}{u_*} = 4 - 6,037 \frac{\ln R_*}{R_*} + O(R_*^{-1}). \quad (17)$$

Поређење овог израза са постојећим изразима у литератури показује да се удео додатне функције $w_0(x)$ при израчунавању овог закона никако

не може занемарити, јер би се иначе при $R_* \rightarrow \infty$ добила вредност од $\frac{3}{2}A = 3,686$, за $\kappa = 0,407$, уместо 4! Вредност коју је добио Никурадсе експериментима износи 4,07, као што је то наведено у [9], што се одлично слаже са нашом вредношћу добијеном теоријски. Такође, у изразу (17) је садржан утицај вискозности на закон дефекта брзине, који се ту појавио као последица узимања у обзир чланова вишег реда. Овај утицај је приказан на сл. 6 и очигледно је да је он веома изражен при нижим вредностима R_* .



Сл. 6. Зависност закона дефекта брзине од броја R_*

Из (16) се сада узимањем у обзир (1) и (15) може добити следећа асимптотска формула за коефицијент трења λ , при $R_* \rightarrow \infty$:

$$2\sqrt{\frac{2}{\lambda}} = A \ln R_* + B_0(k_*) + Aw_0(1) - 2AI + (1 + \alpha_0)A^2 \frac{\ln R_*}{R_*} + O(R_*^{-1}), \quad (18)$$

која се за глатке цеви ($k_* = 0$) своди на

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(R_e \sqrt{\lambda}) - 0,800 - 2,779 \frac{\log(R_e \sqrt{\lambda})}{R_e \sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{R_e \sqrt{\lambda}}\right).$$

Прва два члана последњег израза представљају тачно познату полуемпиријску формулу Никурадсе-а. Допринос трећег члана изгледа да је веома мали. Чак и при најнижој употребљивој вредности R_e -броја: $R_e = 4000$, његова бројна вредност износи 0,01. Када су у питању делимично хрпаве цеви, у литератури се предлаже низ формула које имају чисто емпиријски карактер. Колико је нама познато, формула (18) представља прву теоријску формулу за закон трења код глатких и делимично хрпавих цеви. Поређење резултата који се добијају из ње са експериментима Никурадсе-а биће приказано у наредном одељку.

8. Потпуно хрпаве цеви

При одређивању профила брзине и закона трења у потпуно хрпавим цевима поступиће се онако како је то описано у Уводу. Наиме, израз (14) који представља апроксимацију првог реда за профил брзине

у турбулентном језгру код глатких и делимично храпавих цеви, написаће се у алтернативном облику

$$\frac{u_0}{u_*} = A \left[\ln \frac{y}{k} + w_0(x) \right] + B'_0(k_*),$$

где је: $B'_0 = B_0(k_*) + A \ln k_*$. У добијеном изразу утицај вискозности је садржан једино у величини B'_0 . Међутим, код потпуно храпавих цеви код којих не постоји унутрашњи слој, решење првог реда не сме да садржи овај утицај, па B'_0 мора да има константну вредност. С обзиром на то да карактеристична вредност: $k_* = b = 46,56$ представља, према моделу за пригушни фактор који је овде усвојен, границу између делимично храпавих и потпуно храпавих цеви, биће:

$$B'_0 = B_0(b) + A \ln b = 8,177.$$

Према томе, профил брзине у потпуно храпавим цевима биће дефинисан помоћу:

$$\frac{u_0}{u_*} = 5,657 \log \left(\frac{r_0}{k} x \right) + A w_0(x) + 8,177.$$

На основу овог израза на сл. 7 је нацртано неколико профила брзине при разним односима r_0/k и упоређено са експериментима Никурадсе-а [4]. Очигледно је да је слагање резултата одлично.

Следећи исти принцип, може се одредити и закон трења код потпуно храпавих цеви. Израз (18), узимајући у обзир само прва 4 члана на десној страни (решење првог реда!) може се написати у облику:

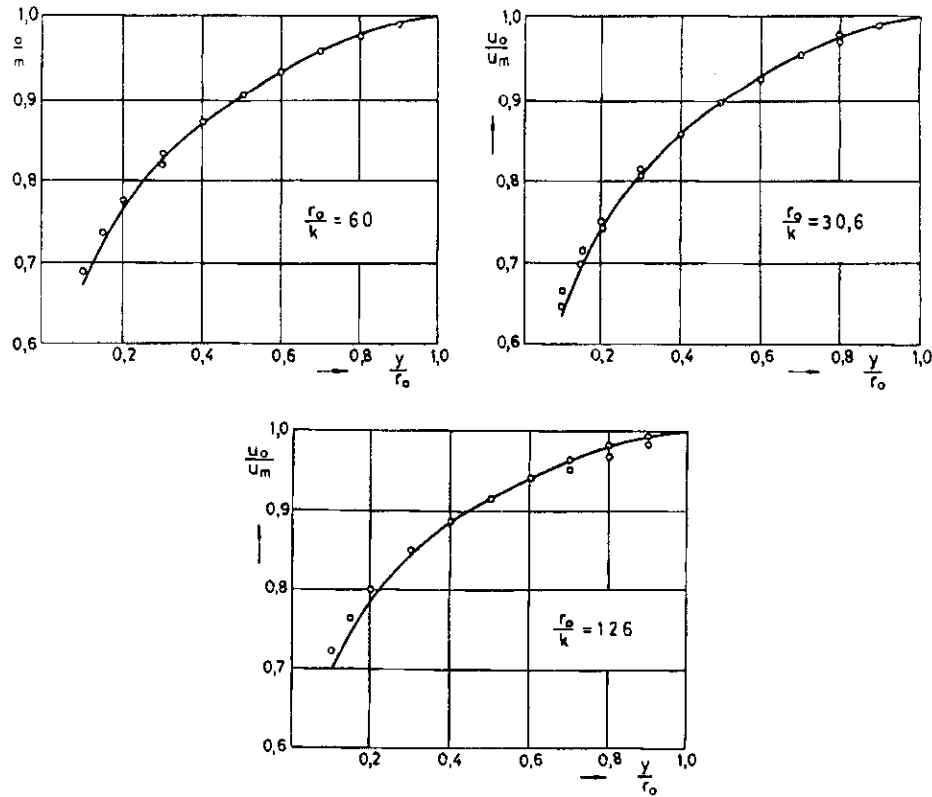
$$2\sqrt{\frac{2}{\lambda}} = A \ln \frac{r_0}{k} + B'_0(k_*) + A w_0(1) - 2AI.$$

Усвајајући исту вредност за B'_0 као и при одређивању профила брзине, одавде се добија:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{r_0}{k} + 1,74,$$

што управо представља полуемпиријску формулу Никурадсе-а, која се данас широко примењује у техничкој пракси, а овде је добијена теоријским путем.

Закон трења у целој области променљиве k_* (глатке, делимично храпаве и потпуно храпаве цеви) приказан је на сл. 8 и упоређен са експерименталним резултатима Никурадсе-а [4], који су апроксимирани испрекиданом изломљеном линијом. У области глатких и потпуно храпавих цеви постигнуто је апсолутно слагање једних и других резултата, док је у прелазној области делимично храпавих цеви то слагање веома добро. Запажа се такође да се прелазак из области делимично храпавих цеви у област потпуно храпавих цеви не врши на асимптотски начин, тј. први извод пуне линије приказане на сл. 8 има прекид у тачки

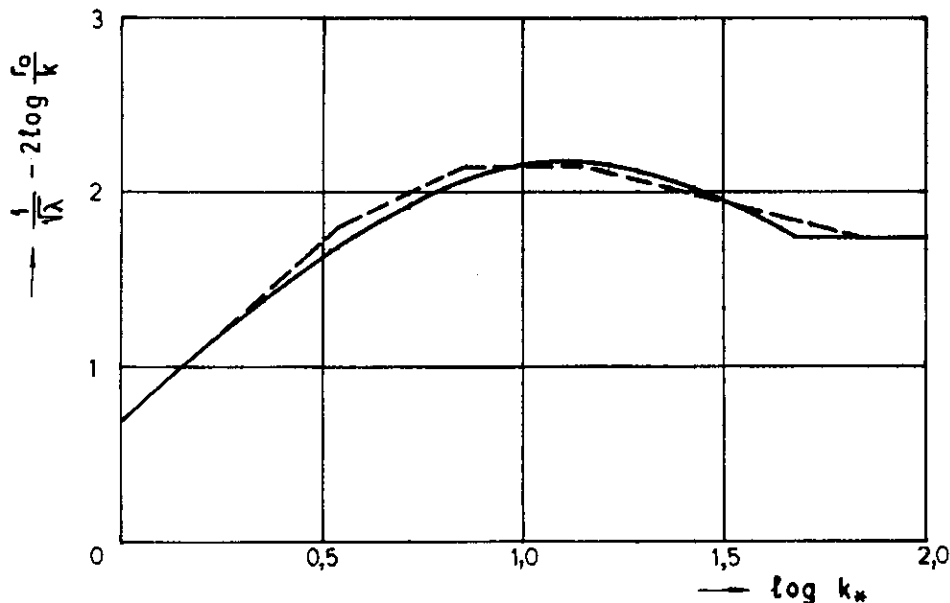


Сл. 7. Поређење теорије (пуна линија) и експеримента за профил брзине код потпуно хрпавих цеви

$k_* = 46,56!$ Овај недостатак теорије следи из одговарајућег недостатка усвојеног модела за пригушни фактор (5), јер је очигледно да је и dD/dk_* за фиксирано y_* дисконтинуално при истој вредности k_* . Истим недостатком се одликује и модел Ван Дриест-а [2], али је он знатно мање тачан. Нпр. у области потпуно хрпавих цеви овај модел даје знатно нижу вредност за коефицијент трења од оне која се добија експериментима и која је теоријски потврђена коришћењем нашег модела. Због овог недостатка потребно је и даље радити на усавршавању модела за пригушни фактор над делимично хрпавим зидом.

9. Закључци

У раду је демонстрирано како се метода асимптотског спајања може успешно применити за проучавање потпуно развијеног турбулентног струјања и закона трења у цевима. Коришћењем поузданих експерименталних података за путању мешања у унутрашњем и спољашњем слоју,



Сл. 8. Закон трења: теорија - пуна линија, експерименти Nikuradse-a [3], [4] - испрекидана изломљена линија

примена ове методе је омогућила добијање аналитичких израза за константу $B_0(k_*)$ и додатну функцију $w_0(x)$, а нумерички прорачуни су довели до одличног поклапања теоријских резултата са експериментима, и када су у питању профили брзине и када је у питању закон трења. Тиме је постигнут основни циљ рада постављен у Уводу – претварање постојеће полуемпиријске теорије у егзактну. Том приликом у раду је формиран нови модел за пригушни фактор над храпавим зидом, јер се модел Van Driest-a [2] показао неадекватним.

Примена методе асимптотског спајања код овог проблема струјања омогућила је такође да се у раду дотакне и питање одређивања апроксимација вишег реда. Израчунати су само они чланови ових апроксимација који се непосредно јављају у закону дефекта брзине и закону трења, и показано је да се утицај вискозности на закон дефекта брзине при умерено високим вредностима броја R_* никако не може занемарити.

Постигнути резултати су охрабрујући и дају наду да се метода асимптотског спајања може успешно применити и за прорачун неизотермног струјања у цевима и прорачун граничног слоја. Такође, они указују на потребу прецизног мерења путање мешања у унутрашњем слоју над храпавим зидом, помоћу савремене мерне технике, у циљу верификације модела за пригушни фактор који је у раду предложен.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. V a n D y k e, *Perturbation methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, California, 1975.
- [2] E.R. V a n D r i e s t, *On turbulent flow near a wall*, J. Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 11, pp. 1007–1011, 1956.
- [3] J. N i k u r a d s e, *Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren*, VDI Forschungsheft 356, 1932.
- [4] J. N i k u r a d s e, *Strömungsgesetze in rauhen Rohren*, VDI Forschungsheft 361, 1933.
- [5] J. L a u f e r, *The structure of turbulence in fully developed pipe flow*, NACA Report No. 1174, pp. 417–434, 1952.
- [6] T. C e b e c i and P. B r a d s h a w, *Physical and computational aspects of convective Heat Transfer*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [7] R.L. P a n t o n, *Incompressible flow*, Wiley, New York, 1984.
- [8] C. M. B e n d e r and S. A. O r s z a g, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [9] S. G o l d s t e i n, *Modern development in Fluid Dynamics*, Vol. II, Dover, New York, 1965.

V.D. Đorđević

FULLY DEVELOPED TURBULENT FLOW AND THE FRICTION LAW
IN PIPES VIA ASYMPTOTIC MATCHING

S u m m a r y

The method of asymptotic matching of inner and outer expansions is applied in the paper for the solution of fully developed turbulent flow in pipes. Precise measurements of the mixing length in characteristic flow regions within the Prandtl's eddy viscosity model are used and exact analytic expressions for the constant $B_0(k_*)$ and the wake function $w_0(x)$ are obtained, with which the semiempirical theory, describing this problem until now, has been converted into the exact one. For the calculation of flow in the inner layer over a rough wall a new model for the damping factor is proposed, that differs from the Van Driest's one which turned out to be inadequate. Theoretical results obtained for velocity profiles, velocity defect law and the friction law show excellent agreement with experiments. The method of asymptotic matching also enabled discussion of some higher order effects.

P. ТОМОВИЋ

ПРИНЦИПИ РАДА МАШИНА

(Приказано на XIII скупу Одељења, 14. децембра 1993)

Репродукција моторних и интелектуалних функција човека помоћу машине предмет је обимних теоријских и практичних истраживања. Као кандидати са стране машина, у обзир долазе роботи и рачунари, односно теорија управљања и рачунарске науке. Теоријска основа ових машина, која одређује домет њихових перформанси, налази се у математици и механици (анализа, векторски простори, варијациони рачун, теорија алгоритама и др.) Стога, ако се жели научно заснована дискусија о односу човек-машина а не велике претензије на основу симулације крајње ограниченог значаја, морају се испитати услови на којима почивају математичке основе аутомата и рачунара.

Теорија управљања и система полазе од претпоставке да је могуће саставити математички модел реалног објекта на основу општих законитости физике или хеуристиком. За техничку праксу су од значаја модели на нивоу израчунљивих података. Најопштији модели ове врсте су једначине стања, тј. опис динамичког понашања система помоћу трајекторија у векторском простору. Међутим, већ се на овоме кораку јављају крупна ограничења ако се теорија система жели проширити на објекте немеханичке природе: пословне системе, урбане системе, здравствене системе, а нарочито биолошке процесе. Поставља се, пре свега, питање нумеричке мерљивости стања оваквих објеката.

Нумеричка мерљивост системских варијабли захтева да буду испуњена два услова. Прво, да се скуп стања система може добро уредити и, друго, да постоји физикална појава која једнозначно пресликава одређени

подскуп реалних бројева на координате стања. Технички гледано, то су претварачи на којима почива аутоматика и све врсте мерења. Док су у чисто механичким системима услови нумеричке мерљивости променљивих стања углавном испуњени, како се иде од “тврдих” ка “меких” објектима све више варијабли измиче објективном пресликавању на скуп реалних бројева. У помоћ се тада узима искуство и субјективне процене, а до изражаја долазе и вредносни судови.

Услови за примену векторских простора су други битан ограничавајући фактор за примену аналитичких метода моделирања. Као математички ентитет, линеарни векторски простор, који је основа простора стања, представља високо организован скуп унутар кога су дефинисане операције над његовим елементима са својствима комутације, асоцијације, дистрибуције, нултим и инверзним члановима. За проширење примене математичких модела на биолошке процесе посебно је ограничење то што су сва стања векторског простора еквивалентна као почетни услови еволуције трајекторија. Преведено на језик праксе, то значи да се прошлост система може сажети у тачку векторског простора. Претпоставка о еквиваленцији стања повлачи као последицу реверзибилност, тј. да се систем може вратити у било које претходно стање, у своју прошлост. Овај услов испуњавају системи са избрисивом меморијом, на пример рачунар, док је меморија организама нераздвојни део њихове егзистенције. Они са сваком променом прелазе у нове, непоновљиве, почетне услове, тако да се њихово понашање може само приближно описати једначинама стања.

Треба указати на једно занимљиво запажање у вези са моделирањем система у векторском простору. Указано је на чињеницу да је скуп који му служи као подлога високо организован. С друге стране, биолошки објекти користе за моторну контролу рефлексне механизме. Са математичке тачке гледишта, рефлекс је директно пресликавање сензорне на моторну шему. Испада да највиши облици организовања материје користе за управљање најелементарније математичке операције.

У покушају да се развије као општи аналитички инструмент, формална теорија система је наишла на инхерентну препреку коју није могла да савлада. Реч је о мултидимензионалности. Пример су управо биолошки системи. Количина сензорних података који стижу аферентним путевима је тако обимна да је управљање у реалном времену немогуће остварити без вишенивоске хијерархијске структуре. То је случај са свима тзв. великим системима. У изузетном покушају да теорију система прошири на велике системе, М. Месаровић је, у ствари, показао да је математичко моделирање вишенивоских управљачких структура у квантитативном погледу немогуће [1]. За ове сврхе потребан је језик који има својства описивања реалних објеката на више ступњева апстракције. То је за сада само људски језик који је, вероватно, и сам производ вишенивоске организације свога супстрата. Формална теорија управљања није у стању да објасни чудесне могућности самоорганизовања макро-

молекула нити самоорганизовано настајање хијерархијских управљачких структура које координирају рад хиљада и хиљада регулационих петљи.

Напредак роботике треба такође посматрати са неопходном критичношћу. Између онога што је остварено техником и функционалних покрета живих бића лежи огроман јаз. За сада се не види могућност да се помоћу аналитичке теорије управљања достигне сложеност моторних активности живе материје, посебно у координацији вид-покрет. Аутономна возила са рачунарском визијом нису уопште у стању да се крећу у природном амбијенту. Аналитичка теорија управљања нема могућности да објасни нумеричке процесе усмеравања лета, рецимо пчеле, њеног заустављања на савитљивим површинама и прикупљања хране сложеним микропокретима. Чини се да ће за ове сврхе бити неопходно продрети у суштину организације нервних мрежа усмерених ка фузији сензорних података и њиховом пресликавању на покрете, те на тој основи изградити неаналитичку теорију управљања.

Однос човек-машина на плану моторне контроле могуће је теоријски сагледати на довољно прецизан начин и тако проникнути у ограничења машинских решења. Када је реч о аутоматизацији интелектуалних активности, учења, когнитивним процесима, решавању проблема, теоријска страна односа човек-машина је изузетно сложена. Ту се срећемо са основним питањима неуробиологије меморије и учења где се унутар струке мишљења знатно разилазе а многе појаве су још неразјашњене. Примера ради, наводимо три репрезентативне дефиниције учења како их виде истакнути неуробиолози: “Учење је процес који се испољава адаптивним променама индивидуалног понашања као резултат искуства” (Thorpe, 1956), “Учење је развој одзива на ограничене аспекте околине” (Maier, Schenckel, 1964), “Учење је релативно устаљена промена понашања као резултат искуства” (Tagru, 1975). Без обзира на озбиљне разлике у тумачењу учења између неуробиолога, заједнички нагласак је на појмовима “индивидуа” и “искуство” насупрот наследном искуству врсте.

Поменут је општи појам учења. Он се, међутим, разлаже на слојеве простијих нервних процеса све до молекуларне неуробиологије и неуробиологије меморије. Према томе, ако се жели научно коректно разговарати о учењу машина, поготово о интелигенцији рачунара, први услов је да се назначи о коме нивоу когнитивних процеса је реч. Има се понекад утисак да појединци образовани у рачунарским наукама говоре прилично олако о биолошким појавама без увида у сву сложеност биохемијских основа меморије и учења. Када се то још упрости ради журналистичких потреба и личне промоције, научно недоказане тврдње и паранаучни експерименти износе се као велика достигнућа. Стварање лажних перспектива у јавности је дубоко штетна ствар, поготово ако се у те сврхе користи углед науке.

Домет аутоматизације интелектуалних процеса може се, ако не до краја строго решити, барем научно коректно поставити. Пошто је не-

оспорно да су рачунари машине за аутоматску реализацију алгоритама, домет машина може се оценити дометом алгоритама. Стога је право питање да ли се когнитивни процеси, и у крајњој линији свест, могу свести на алгоритме. Фундаментална размишљања о овим питањима појавила су се у вези са заснивањем темеља математике и развоја математичке логике. Према томе, ако се жели сагледати домет алгоритамских процедура, треба поћи од повода који су довели до тога да се овај концепт уведе у математику.

Питање алгоритамски решивих задатака поставио је још Хилберт у своја позната 23 проблема од значаја за развој математике на париском светском конгресу математичара 1900 године. Десети проблем односи се на алгоритамску решивост. Пре описа проблема, треба навести дефиницију алгоритма. За наше потребе довољно ју је дати у описном виду. Наводе се само главне карактеристике алгоритамске процедуре: алгоритам се задаје коначним низом инструкција, постоји рачунско средство које изводи инструкције, постоји меморијски капацитет за чување података, израчунавање је детерминисано. Хилбертов десети проблем гласи:

“Испитивање решивости неке диофантовске једначине. За дату диофантовску једначину са било којим бројем непознатих величина и са рационалним целобројним коефицијентима измислити поступак којим се може одлучити, користећи коначан број операција, да ли та једначина има или нема целобројних решења.”

У то време, истина, алгоритам као математички појам није постајао али је очевидно да се о таквом поступку ради. Тек 1970. је доказано да такав алгоритам не постоји. Другим речима, и на плану математике постоје алгоритамски нерешиви задаци. Иначе, математички појам алгоритма појавио се тридесетих година у вези са проучавањем рекурзивних функција и ефективне израчунљивости.

За развој рачунара значајни су радови енглеског математичара А. Тјуринга. Бавећи се питањем ефективне израчунљивости, он је разматрао како треба да изгледа структура апстрактног аутомата за реализацију алгоритма. Тако је дошао до познате Тјурингове машине. Показало се да се проблем алгоритамске решивости сада појављује у новом виду али остаје опет без одговора. Наиме, код алгоритамски нерешивог задатка машина се неће никад зауставити, а то се не може алгоритамски одлучити. Тако је питање одлучивања замењено проблемом заустављања. Као позитиван резултат ових математичких истраживања остали су докази да су алгоритамски системи, класа рекурзивних функција и ефективно израчунљивих задатака међусобно еквивалентни.

Рачунари серијске архитектуре су техничка реализација алгоритамских процедура. Без обзира на техничка усавршавања, побољшања архитектуре, развој вештачких језика и флексибилнијих алгоритама, Њихова универзалност не прелази универзалност Тјурингове машине. Њихове домете треба процењивати са те стране. Наравно, не говоримо о

брзини рада која је за наше потребе маргинални критеријум. Истина, брзина рада у споју са алгоритматским управљањем омогућује примене где машина може да конкурише човеку на интелектуалном плану, рецимо играње шаха. Али управо на овоме примеру се виде фундаменталне разлике. Сваки играч ствара свој индивидуални прилаз игри уз учешће свих слојева когнитивних активности, док машина са знањем човека пренетим преко алгоритама испитује неупоредиво већом брзином огроман број опција. Тако гледано, чудно звуче тврдње да уређај са позајмљеним знањем, без самосталне способности да га развија, надмашује свога творца. Подсетимо се да је за неуробиологе инхерентан атрибут учења учешће личног фактора и искуства.

У првоме периоду развоја рачунара серијске машине су биле доминантне. Паралелизам се постепено развијао, али је суштина архитектуре остала иста. Изванредан напредак технологије омогућио је грађу рачунара на принципу конективности. Елементи ових машина су стотине, хиљаде, слојевито распоређених чворова који када улаз пређе дати праг, дају излаз “да-не” у најпростијем случају. Сваки чвор је повезан везама чији се тежински фактори мењају са свим чворовима следећег слоја. Конективност овако организованог рачунара подсећа доста бледо на конективност нервног система, што је дало повода да се уведе не баш адекватан термин неуралне мреже.

Два су начина како се неуралне мреже припремају за обраду улаза: са инструктором и без њега. Типична употреба мреже је за распознавање облика. На улаз се доводи од човека изабран обучавајући скуп облика па инструктор мењањем тежинских фактора веза између чворова минимизира разлику излаз-улаз. Тако се помоћу конективности памти репрезентација облика који треба разликовати од друге класе фигура. Овакве мреже имају, дакле, уграђено својство асоцијативности. Оне групишу довољно сродне облике у једну класу. Са математичке стране ту нема ништа новог. Ради се о такозваним стохастичким апроксимацијама које се широко користе у оптимизирању недетерминистичких процеса. При томе увек остаје основна тешкоћа овога прилаза. Наиме, није могуће утврдити да ли се ради само о локалном минимуму или глобалном екстремуму.

Конективност рачунара је искоришћена за симулацију тзв. Хебб-овог принципа. Истраживач учења биолошких система, Хебб је у књизи “Организација понашања” (1949) формулисао постулат да се најнижи облици учења – мењање осетљивости синапси – могу објаснити следећим механизмом: “Када аксон ћелије A близак нивоу екситације ћелије B узастопно и без прекида је активира, одређени процес раста или метаболичких промена се одиграва у једној или обадве ћелије те се повећава ефикасност активирања ћелије A на B ”. Овај механизам се може алгоритамски симулирати на рачунару повећавањем тежинског фактора између два истовремено активна неурона. Међутим, неуробиолошка

истраживања Sagew-a и др. (1984) показала су да постулат Hebb-a није ни потребан ни довољан услов да објасни условни моторни рефлекс код морског пужа аплизије. У техничкој пракси примена овога принципа није наишла на ширу примену.

Преглед теоријских основа аутомата и рачунара омогућује да се научно засновано испитају њихови домети у поређењу са биолошким системима. Из горњег прегледа могу се извући следећи закључци:

1. Ефективних формалних метода за управљање хијерархијски структурираним објектима нема нити се могу засновати на овој основи.

2. Тзв. машинско учење и биолошки засновано учење две су потпуно различите ствари. Све примене рачунара одређују се споља алгоритамским путем чиме су одређене и границе његових перформанси.

3. Чворови тзв. рачунарске неуралне мреже и биолошке синапсе сличне су само у погледу праговног одзива. Нервна ћелија обавља, у ствари, шест функција. Улазну, примајући улазне сигнале електричне и *хемијске* природе. Интегрativну, пошто интегрални и обрађује улаз. Проводну, преношењем интегрисане информације на даљину. Излазну, слањем података другим ћелијама, ефекторима и органима. Рачунарску, пресликавањем једног типа информације у други и, најзад, она обавља улогу интерне репрезентације спољних догађаја.

4. Сви покушаји репродукције самоорганизације на рачунарима остали су у тривијалним оквирима, да не спомињемо више облике живота.

Горње чињенице објашњавају фундаменталну дилему односа машина-човек. За сада непремостиве разлике у когнитивним дометима машине и човека могу да леже у самом темељу њихове зграде, у супстрату. Код машине, супстрат су таласни облици, дакле, функције у математичком смислу речи. У биологији, супстрат су макромолекули, а управља се променом конфигурација и спајањем активних стереоструктура. Стога је за сада неоправдано говорити о машини као когнитивном систему у биолошком смислу речи. На жалост, чак и међу стручњацима има у томе погледу много неоснованих тврдњи и мистификација, нарочито термилошких. Оваква иступања могу да служе другим циљевима, али паранаука је опасно средство да се руши углед науке уколико она ћути пред таквим појавама.

REFERENCE

- [1] Y a d i n D u d a i, *the Neurobiology of memory*, Oxford University Press, 1989.
- [2] Р. Т о м о в и ћ, W.J. К а р п л у s, *Ограничења формалне теорије система*, Грађевинска књига, 1979, превод са енглеског.

R. Tomović

PRINCIPLES OF OPERATION OF MACHINES

S u m m a r y

Robots carry out functional movements of man, while computers solve problems set up by algorithms. In order to see more clearly to what extent machines can replace man in problems mentioned above, the author discusses the theoretical foundations upon which the operations of robots and computers rest. Thus it is possible to evaluate more objectively the scopes of those devices with respect to man.

Глас CCCLXXV Српске академије наука и уметности
Одељење техничких наука, књ. 31 – 1995.
Glas CCCLXXV de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts,
Classe des Sciences techniques, № 31 – 1995.

М. ВУКОБРАТОВИЋ, Б. КАРАН

ЕКСПЕРИМЕНТИ С ПРИМЕНОМ ФАЗИ ЛОГИКЕ
У УПРАВЉАЊУ РОБОТА УЗ КОРИШЋЕЊЕ ДИНАМИЧКЕ
КОМПЕНЗАЦИЈЕ НА БАЗИ МОДЕЛА

(Примљено на XIV скупу Одељења, 28. децембра 1993)

Рад описује симулационе експерименте праћења просторних трајекторија помоћу робота уз хибридни приступ синтези управљања у коме се комбинују традиционалне управљачке технике засноване на коришћењу модела с техником управљања заснованом на коришћењу фазе (fuzzy) логике. Комбиновани метод је развијен као екстензија традиционалне децентрализоване управљачке стеме засноване на моделу, додавањем подешавача с фазе логиком за модификовање параметара серво-контролера зглобова робота. Симулациони експерименти спроведени на индустријском роботу са шест степени слободе потврђују погодност метода заснованих на фазе логици за побољшање перформанси роботског управљачког система.

1. Увод

Традиционално, управљачки систем манипулационих робота пројектује се као децентрализовани систем, који се састоји из скупа локалних PID (proportional-integral-derivative) регулатора с номиналним управљачким сигнаlima који се израчунавају на основу динамике номиналног роботског модела. У свом најједноставнијем облику, овакве управљачке схеме састоје се из локалних серво-система затворених око индивидуалних зглобова робота. Иако коришћен код већине савремених комерцијалних робота, овај прилаз показује се задовољавајућим једино при позиционом управљању и праћењу спорих трајекторија. У случају брзих трајекторија, овакво једноставно управљање не понаша се добро због

ефеката динамичког спрезања између оса зглобова робота и због тога су различите управљачке схеме предложене с циљем да се оствари компензација динамичких ефеката [1]. Заједничко за све ове управљачке схеме је увођење додатних повратних спрега намењених за компензовање нелинеарних промена у динамичким силама спрезања. При том, за одређивање вредности динамичких сила, на располагању су два основна метода: силе могу да се израчунавају коришћењем интерног модела динамике робота или да се мере помоћу сензора. Међутим, обе стратегије поседују озбиљне недостатке. Динамички модел може да постане веома сложен систем нелинеарних диференцијалних једначина [2] и он је увек мање или више апроксимација реалног робота. С друге стране, коришћење сензора силе у зглобовима робота обично захтева посебно пројектовање зглобова и истовремено снижава структурну крутост роботске руке: сензор силе понаша се као еластични члан система који може да доведе до нестабилности у управљању.

Потенцијално моћну алтернативу за решавање проблема комплексности и непоузданости модела могу да пруже технике апроксимативног резоновања и управљања заснованог на знању. На овом пољу истраживања огромну популарност добили су током последње декаде контролери с фази логиком (FLC – fuzzy logic controller) [4]. Већина изучаваних схема FLC следи основну структуру установљену од стране Мамданија [5]. Језгро ове структуре чини база правила чији елементи су лингвистичка управљачка правила која, за случај једноставног FLC са два улаза – грешком e и брзином промене грешке Δe , као и једним излазом – брзином промене управљачког сигнала Δu , добијају облик

Правило r : ако важи

$$\tilde{E} \text{ је } \tilde{E}_r \text{ и } \Delta \tilde{E} \text{ је } \Delta \tilde{E}_r$$

онда формирати излаз тако да важи

$$\Delta \tilde{U} \text{ је } \Delta \tilde{U}_r$$

при чему су \tilde{E} , $\Delta \tilde{E}$ и $\Delta \tilde{U}$ фази скупови који одговарају улазно/излазним сигнаlima контролера, док лабеле \tilde{E}_r , $\Delta \tilde{E}_r$ и $\Delta \tilde{U}_r$ означавају фиксне лингвистичке вредности (као што су “мали”, “велики” итд.) које се репрезентују преко фази скупова. Правила могу да буду статичка (тј. унапред фиксирана) или динамичка: класични пример динамичког FLC је самоорганизујући контролер (SOC – self-organizing controller) у коме се скуп фази мета-правила користи за модификовање управљачких правила уобичајеног FLC.

Досад је публиковано више радова на тему управљања с фази логиком у роботизици. Један од првих покушаја направили су Мандич, Шарф и Мамдани [7]. Ови аутори вршили су низ експеримената с роботском

руком у којој су два зглоба (рамени и лакатни зглоб, код којих се јавља највећа варијација момента инерције) управљани преко два независна SOC. Тенсхајт и Шарф [8] су такође вршили експерименте са применом SOC у управљању линеарног система другог реда, који је репрезентовао преносну функцију мотора с једносмерном струјом и оптерећења. Њихови експерименти показали су да је SOC имао задовољавајуће перформансе, боље у односу на перформансе PID контролера.

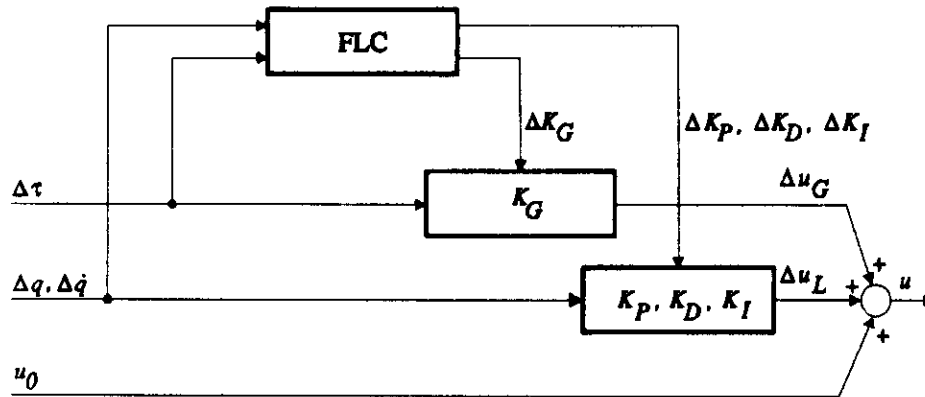
Ови и други иницијални радови у којима је покушано да се управља манипулационим роботима директно помоћу FLC указали су на две главне групе проблема. Прву групу манифестује одсуство одговарајућих аналитичких средстава за синтезу управљања, тј. селекцију параметара FLC (или иницијалних вредности параметара у случају SOC). Друго, помоћу обичних FLC схема оствариле су се перформансе сличне или незнатно боље у односу на просте PID схеме. Због тога, може се очекивати да се коришћењем простог FLC не могу добити задовољавајуће перформансе у сложенијим роботским задацима, као што је праћење трајекторија. Појава ових проблема може делимично да се објасни чињеницом да су рани радови били примарно сконцентрисани на демонстрацију могућности метода заснованих на фази логици да се ефективно изборе с проблемима нелинеарног управљања без потребе за тачним математичким моделирањем контролисаног система. Због тога је била унеколико потиснута улога унапред расположивог математичког знања у ситуацијама кад је динамика система детерминистичка, као и развијених управљачких техника заснованих на коришћењу модела.

Јачи спој између FLC и стандардних управљачких метода остварен је у схеми предложеној од стране Цафестаса и Папаниколопулоса [9], који су указали на могућност коришћења FLC као експертног система за фино подешавање PID-управљања. Сличан приступ применили су на роботско управљање Поповић и Шекават [10].

Двонивоска хијерархија, у којој се експертни систем користи за подешавање управљања на нижем хијерархијском нивоу, може да доведе до приближавања прилаза заснованих на фази логици класичним техникама синтезе управљања, али она у основи не решава проблем слабих перформанси. Ово указује на то да знање које је на располагању о математичком моделу динамике робота не би требало да се игнорише. Веома важно је да ово знање може да се искористи за снижење нелинеарног динамичког спрезања између подсистема зглобова робота. На тај начин, оно што је пожељно је хибридни приступ, у коме би се комбиновале предности управљања с фази логиком и управљања заснованог на моделу.

Основна идеја хибридног прилаза састоји се у коришћењу задовољавајуће апроксимације роботског динамичког модела у циљу смањења динамичког спрезања између зглобова робота и даље у искоришћењу хеуристике засноване на фази логици као ефектног средства за обраду ефеката непокривених од стране усвојеног апроксимативног модела. Сли-

чну идеју формулисали су де Силва и Мекфарлејн [11], који су тестирали концепт кроз симулацију двосегментног робота, при чему су претпоставили идеалну ефикасност глобалне нелинеарне повратне спреге на nižем нивоу. Због тога, динамика робота у њиховом раду је апроксимирана преко скупа подсистема зглобова од којих је сваки моделиран као систем другог реда с непознатим поремећајима типа убрзања.



Сл. 1. Хибридна управљачка схема

У овом раду, перформансе предложеног хибридног прилаза анализирани су на комплетном моделу робота са шест степени слобода. Намена овог истраживања је двострука. Прво, демонстрирана су очекивана побољшања у управљању. Друго, подједнако важан аспект овог рада је питање нивоа до кога је могуће да се поједностави интерни модел робота ангажовањем сложенијег сервоа с фази логиком. Зато, други циљ састоји се у испитивању могућих симплификација у традиционалном управљању уз задржавање истог нивоа квалитета управљања.

2. Хибридни приступ

Хибридна схема је екстензија децентрализоване управљачке структуре и састоји се из скупа подсистема затворених око појединих зглобова робота. Сваки од подсистема сачињавају две компоненте: традиционални контролер заснован на моделу и опционални подешаваач заснован на фази логици (в. сл. 1). Улази за i -ти подсистем, $i = 1, \dots, n$, где је n број активних зглобова, јесу номинални управљачки сигнал u_{i0} , позициона грешка у зглобу Δq_i и брзинска грешка у зглобу $\Delta \dot{q}_i$. Номинал u_{i0} се израчунава за задату трајекторију на основу интерног модела динамике робота, а појачања локалног PID сервоа се синтетизују тако да се стабилизује слободни (распрегнути) подсистем. У случајевима када се

захтева висока тачност праћења брзих трајекторија, могуће је да се дода глобална повратна петља (пуна динамичка компензација), при чему се глобални повратни сигнал формира на основу израчунате или измерене девијације динамичког момента $\Delta\tau_i$ који делује на зглоб. Даље профињавање уводи подешаваач на вишем управљачком нивоу који је намењен за фино подешавање појачања традиционалног контролера. Подешаваач је структуриран као контролер с фази логиком који прати карактеристике одзива у зглобу и модификује појачања тако да обезбеди боље одзиве за велике девијације праћених величина.

2.1. Децентрализована управљачка схема

У овом раду разматрано је децентрализовано управљање у општем облику

$$u_i = u_{i0} + \Delta u_{Li} + \Delta u_{Gi} \quad (1)$$

$$\Delta u_{Li} = K_{Pi}\Delta q_i + K_{Di}\Delta \dot{q}_i + K_{Ii} \int_0^t \Delta q_i dt \quad (2)$$

$$\Delta u_{Gi} = K_G \left(\frac{\tau_i}{C_{mi}/r_{mi}} - u_{i0} \right) \quad (3)$$

при чему су

- i = индекс зглоба, $i = 1, 2, \dots, n$;
- u_i = управљачки напон на улазу сервосистема зглоба;
- u_{i0} = номинални управљачки сигнал;
- Δu_{Li} = локално PID управљање;
- Δu_{Gi} = глобални управљачки члан;
- Δq_i = позициона грешка у зглобу, $\Delta q_i = q_{i0} - q_i$;
- $\Delta \dot{q}_i$ = брзинска грешка у зглобу, $\Delta \dot{q}_i = \dot{q}_{i0} - \dot{q}_i$;
- τ_i = динамички момент који делује на зглоб;
- C_{mi}/r_{mi} = укупно статичко појачање мотора и редуктора;
- K_{Pi} = пропорционално појачање;
- K_{Di} = брзинско појачање;
- K_{Ii} = интегрално појачање;
- K_G = глобално појачање.

Номинал за активни зглоб са мотором једносмерне струје и зупчаничким преносом обично се израчунава уз усвајање линеарног модела другог реда

$$u_{i0} = \frac{1}{C_{mi}/r_{mi}} (N_i^2 J_{mi} \ddot{q}_{i0} + F_{vi} \dot{q}_{i0} + \tau_{i0}) \quad (4)$$

где је

- N_i = преносни однос механичког преноса, $N_i = q_{mi}/q_i$, при чему је q_{mi} излазни угао вратила мотора;

J_{mi} = момент инерције ротора;

F_{vi} = коефицијент вискозног трења редукован на излазно вратило;

τ_{i0} = номинални механички момент.

У одсуству спољних контактних сила реакције и ако се претпостави да су сегменти робота идеално крути, номинални момент τ_{i0} може да се изрази као функција номиналних угаоних позиција $q_0 = [q_{10} \ q_{20} \ \dots \ q_{n0}]^T$, брзина $\dot{q}_0 = dq_0/dt$ и убрзања $\ddot{q}_0 = d^2q_0/dt^2$ као [2]

$$\tau_{i0} = \sum_{j=1}^n H_{ij}(q_0)\ddot{q}_{j0} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ijk}(q_0)\dot{q}_{j0}\dot{q}_{k0} + G_i(q_0) \quad (5)$$

где су коефицијенти H_{ij} , C_{ijk} и G_i у општем случају високо нелинеарне функције угаоних позиција. Имајући на уму нумеричку комплексност стварних израза за израчунавање номинала за одређени робот, од интереса је да се испитају могућности коришћења различитих апроксимација израза (5). У овом раду анализирани су следеће апроксимације:

1. Модел у коме се узимају у обзир само гравитациони ефекти [тј. сви H_{ij} и C_{ijk} у (5) постављени на нулу;
2. Модел који додатно укључује дијагоналне елементе матрице инерције H_{ii} ;
3. Модел који додатно укључује ван-дијагоналне елементе матрице инерције H_{ij} за $i \neq j$;
4. Комплетан модел (5).

2.2. Селекција појачања у сервоима зглобова

Појачања локалних PID контролера синтетизују се независно за сваки зглоб уз претпоставку да су подсистеми који се односе на зглобове међусобно распрегнути коришћењем номинала и опционалног глобалног управљања. На тај начин, могуће је да се усвоји линеаризовани распрегнути модел динамике робота. Селекција вредности K_{Pi} , K_{Di} и K_{Ii} сада може да се изврши узимајући у обзир следећа разматрања:

- Комбинација K_{Pi} , K_{Di} , K_{Ii} треба да обезбеди стабилност линеарног подсистема;
- Потребно је одабрати велику вредност K_{Ii} како би се побољшао стационарни одзив. С друге стране, K_{Ii} треба да буде довољно мало да не би значајније утицало на прелазни одзив;
- K_{Pi} треба да буде велико како би се остварио брз одзив. С друге стране, ово појачање треба да буде довољно мало како би се предупредиле резонантне осцилације механичке структуре робота;
- K_{Di} се селекује тако да подсистем буде благо натпригушен.

У већини ситуација следећи критеријуми могу да се искористе као практични водич за селекцију PID појачања:

$$K_{Pi} = R_{Pi} \left(\frac{\omega_{0i}}{\omega_{i \max}} \right)^2 \quad (6)$$

$$K_{Di} = R_{Di} \left[\frac{2(\sqrt{K_{Pi}} - \zeta_{i \min})}{\omega_{i \min}} \right] \quad (7)$$

$$K_{Ii} = R_{Ii} [\omega_{i \min} (2\zeta_{i \min} + \omega_{i \min} K_{Di}) K_{Pi}] \quad (8)$$

при чему односи $R_{Pi} \ll 1$, $R_{Di} \geq 1$ и $R_{Ii} \ll 1$ играју улогу пројектних параметара, ω_{0i} је сопствена резонантна учестаност механичке структуре робота, а ζ_i и ω_i су функције дијагоналних елемената матрице инерције H_{ii} :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{C_{mi}/r_{mi}}{H_{ii} + N_i^2 J_{mi}}}, \quad \zeta_i = \frac{F_{vi}}{2\sqrt{C_{mi}/r_{mi}}(H_{ii} + N_i^2 J_{mi})}$$

Може да се примети да су правила (6-8) изведена као компромис између супротних захтева над појачањима PID регулатора, која се по претпоставци држе на константним вредностима. Међутим, ако се дозволи варирање вредности појачања, ова правила могу да постану еластичнија, чиме се уједно пружа могућност синтезе ефикаснијег управљања. Истовремено, у синтези променљивих појачања постаје наглашен значај технике управљања на бази фази логике, као ефикасног алата за развој управљачких схема с ефективно променљивим појачањима.

У синтези глобалног управљања (3) неопходно је да се изабере скаларно појачање K_G . С обзиром да се разматра случај када се глобално управљање примењује заједно с централизованим номиналом и локалним PID управљањем, нормално се бира вредност K_G која је по претпоставци довољна за компензацију преосталог “малог износа” спрезања.

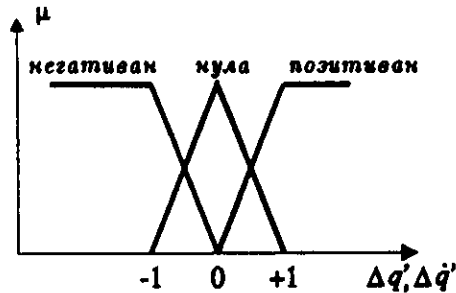
2.3. Подешаваачи на бази фази логике

Општа структура контролера с фази логиком дозвољава конструисање веома сложених управљачких правила за подешавање појачања серво-система зглобова. Подешаваач с фази логиком може да има централизовану, хијерархијску или децентрализовану структуру и његови улази могу да буду величине изведене на основу обимне анализе добијеног одзива. Међутим, у овом раду се пошло од тога да је, у циљу поређења с традиционалним схемама, довољно да се посматра једноставна децентрализована структура компонована из независних серво подешаваача који раде на бази текуће позиционе грешке у зглобу Δq и брзинске грешке у зглобу $\Delta \dot{q}$. Даље, с намером да се испита ниво до кога хибридни

прилаз може да се искористи за елиминацију пуне динамичке компензације, претпостављено је да глобална повратна спрега по сили (оптерећењу) није имплементирана у схемама које користе подешаваче с фази логиком.

У синтези правила за подешавање појачања коришћена је прилично једноставна хеуристика:

- (i) Ако је позициона грешка велика и не показује значајнију тенденцију опадања, пропорционално појачање се повећава како би се убрзала конвергенција грешке.
- (ii) Ако су и позициона и брзинска грешка мале, пропорционално појачање се смањује да се избегну резонантне осцилације.
- (iii) Ако је позициона грешка велика а брзина конвергенције грешке задовољавајућа, пропорционално појачање се оставља неизмењено.
- (iv) Ситуација кад је позициона грешка мала а брзинска грешка велика може да се припише различитим узрочницима. Први узрок може да буде номинал с превисоким нивоом убрзања: у том случају, могућа стратегија могла би да се састоји у повећању пропорционалног појачања. Други извор може да буде високофреквентни шум; у овој ситуацији боље решење је да се појачање смањи. Због супротних захтева, усвојен је компромис по коме се појачање оставља неизмењено.



Сл. 2. Примарни фази скупови

- (v) Вредности брзинског и интегралног појачања мењају се симултано с променама пропорционалног појачања тако да се ниво стабилности и пригушење одржавају приближно на нивоу који одговара условима нулте грешке (тј. тако да одговарају стабилности и пригушењу контролера с константним појачањима).

С циљем да се правила изразе математички, универзум могућих вредности $[-1, +1]$ нормализованих улаза подешавача $\Delta q'$ и $\Delta \dot{q}'$ издељен је на три фази интервала, означених као *негативан*, *нула* и *позитиван* и описаних преко функција степена чланства приказаних на сл. 2. Нормализација улаза остварена је помоћу трансформације

$$x' = \text{sign}(x) \cdot \min(|x/x_{\max}|^\alpha, 1) \quad (9)$$

у којој параметар $x_{\max} > 0$ одговара максималној грешки која се нормално очекује у регуларним условима рада, док се параметар $\alpha > 0$ користи за подешавање границе између “нултих” и “ненултих” фази региона грешке: селекцијом $\alpha < 0$, граница се помера према нижим вредностима грешке.

Правила за подешавање појачања изведена на основу (i)-(v) схематски су приказана на дијаграму стања-акција у табели 1, у којој сваки улаз представља консеквент фази импликације

Правило r : ако важи

$$\Delta q' \text{ је } \tilde{A}_r \text{ и } \Delta q' \text{ је } \tilde{B}_r$$

онда формирати излаз тако да важи

$$\Delta K' \text{ је } \tilde{C}_r$$

при чему је $\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r \in \{\text{негативан, нула, позитиван}\}$. За дате $\Delta q'$ и $\Delta q'$, резултат евалуације индивидуалног правила је фази скуп $\Delta \tilde{K}_r$, описан функцијом степена чланства

$$\mu_{\Delta \tilde{K}_r}(\Delta K') = \mu_{\tilde{A}_r}(\Delta q') \wedge \mu_{\tilde{B}_r}(\Delta q') \rightarrow \mu_{\tilde{C}_r}(\Delta K') \quad (10)$$

Резултат евалуације целе базе правила је унија $\Delta \tilde{K}$ индивидуалних скупова $\Delta \tilde{K}_r$, описана преко

$$\mu_{\Delta \tilde{K}}(\Delta K') = \bigvee_r \mu_{\Delta \tilde{K}_r}(\Delta K') \quad (11)$$

Алгоритми за евалуацију управљачких правила и конверзију резултатућег фази скупа у физички излазни сигнал имплементирани су следећи препоруке Јинга и Шилера [12]. Према овим препорукама, оператори “ \wedge ” и “ \rightarrow ” имплементирају се као оператори избора минимума, док се оператор “ \vee ” имплементира као ограничени збир:

$$\begin{aligned} \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \\ \mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \\ \mu_A(x) \vee \mu_B(y) &= \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(y)) \end{aligned}$$

Стварни нормализовани излаз $\Delta K'$ генерисан је као тежинска средина оних вредности нормализованих излаза за које излазни примарни скупови достижу своје максимуме, при чему се као тежински фактори користе нормализовани степени чланства:

$$\Delta K' = \frac{\sum_{\Delta K' \in \{-1, 0, +1\}} \Delta K' \cdot \mu_{\Delta \tilde{K}}(\Delta K')}{\sum_{\Delta K' \in \{-1, 0, +1\}} \mu_{\Delta \tilde{K}}(\Delta K')} \quad (12)$$

Добијена вредност $\Delta K' \in [-1, +1]$ интерпретирана је као нормализована релативна промена појачања. За дату вредност појачања $K(t)$ у тренутку t , нова вредност појачања одређена је преко

$$K(t + \Delta t) = \min(\max(K(t) \cdot e^{\beta \Delta K'}, K_0), K_{\max}) \quad (13)$$

при чему је K_0 иницијално појачање. У циљу редукције броја рачунских операција, вредности $e^{\beta \Delta K'}$ за пропорционално /брзинско/ интегрално појачање могу да се прерачунају за еквидистантне вредности $\Delta q'$ и $\Delta \dot{q}'$ и затим сместе у табелу претраживања. За табелу са $2^n \cdot 2^n$ улаза, потребно је $2n$ компарација за налажење улаза који одговара датим грешкама Δq и $\Delta \dot{q}$. С обзиром на то да се израз (13) примењује на сва три типа појачања, показује се да је довољно укупно $2n + 6$ компарација и 3 мултипликације за имплементацију поједностављеног алгорита рада подешавача.

Таб. 1. Правила за подешавање појачања
(прираштаји појачања у зависности од износа позиционе и брзинске грешке)

		$\Delta q'$		
		негативан	нула	позитиван
$\Delta \dot{q}'$	позитиван	нула	нула	позитиван
	нула	позитиван	негативан	позитиван
	негативан	позитиван	нула	нула

Из израза (10–13) види се да алгоритам подешавања појачања укључује параметре β и K_{\max} . Кад се једном изаберу вредности β_P и $K_{P \max}$ за подешавање пропорционалног појачања K_P , одговарајући параметри за брзинско и интегрално појачање могу да се одреде тако да се ниво стабилности и однос пригушења одрже на приближно константним вредностима. Према (6–8), ово се своди на услове вскиџмм

$$K_{D \max} / K_{D0} = [K_{P \max} / K_{P0}]^{0.5} \quad (14)$$

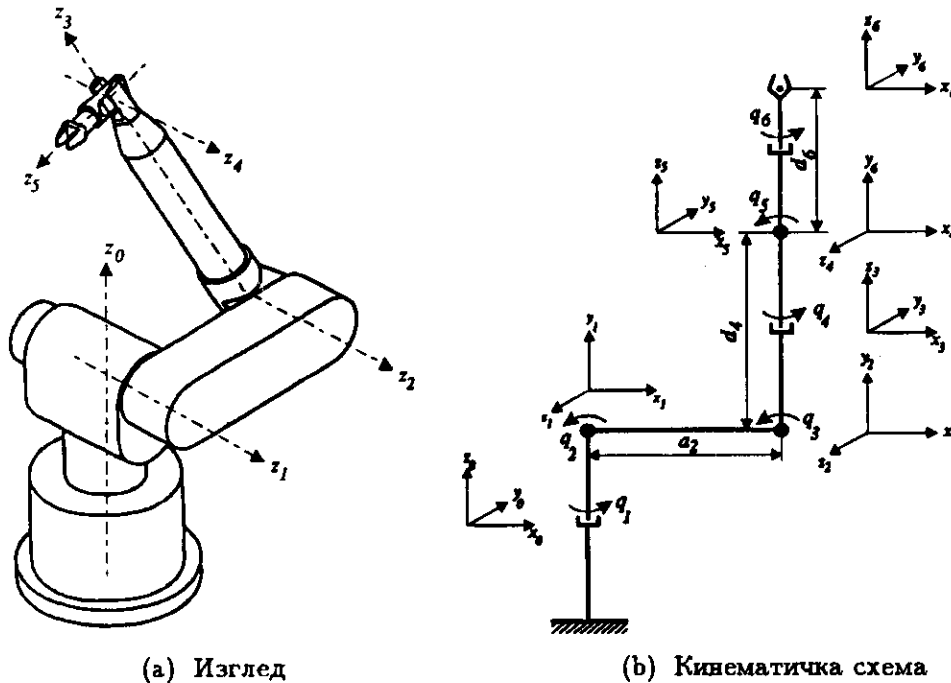
$$K_{I \max} / K_{I0} = [K_{P \max} / K_{P0}]^{1.5} \quad (15)$$

$$\beta_D = 0.5\beta_P \quad (16)$$

$$\beta_I = 1.5\beta_P \quad (17)$$

3. Студијски пример

У циљу верификације описаног хибридног прилаза, извршена је симулациона студија с индустријским роботом Manutec-R3. Робот Manutec-



Сл. 3. Робот Manutec - R3

R3 је масивни робот са шест степени слободe, дохватом око 1.3 m и максималним оптерећењем око 15 kg. Конструисан је од крутих алуминијумских сегмената, тако да је оправдано моделирање овог робота као система крутих тела (5). У зглобовима робота користе се мотори с једносмерном струјом са веома малим временским константама, тако да динамика актуатора може адекватно да се моделира коришћењем модела другог реда (4). Међутим, иако се може сматрати задовољавајућим са становишта ове студије, треба нагласити да модел (4) ипак садржи значајна поједностављења у којима је занемарен низ нелинеарних феномена (напр. зазор у зглобовима, еластичност зглобова и суво трење).

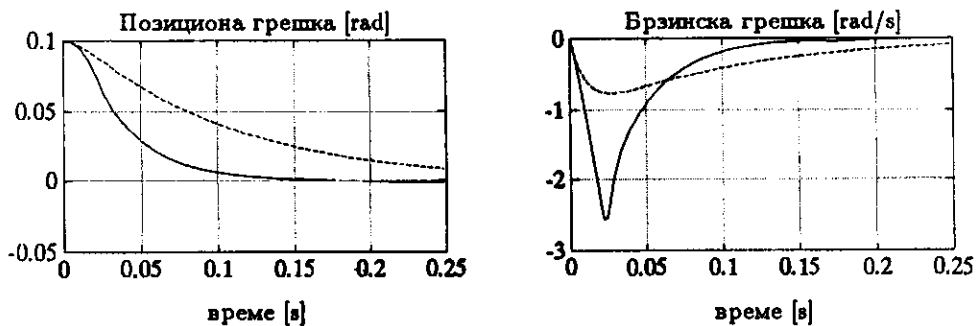
3.1. Избор управљачких параметара

Параметри PID регулатора синтетизовани су следећи пројектна правила (6–8) и резултати синтезе сумирани су у табели 2. Синтеза описаних PID подешавача укључује селекцију параметара који се појављују у улазним (9) и излазним (13) трансформацијама. Задавање начина нормализације улазних грешака Δq и $\Delta \dot{q}$, описане преко (9), врши се избором фактора скалирања Δq_{\max} и $\Delta \dot{q}_{\max}$, као и експонента α_q и $\alpha_{\dot{q}}$. Подсетимо се да експоненти α_q , $\alpha_{\dot{q}}$ одређују стварне граничне нивое $\Delta \sigma_L$, $\Delta \dot{q}_L$ између

Таб. 2. Одабране вредности појачања

i	K_{Pi} [V/rad]	K_{Di} [Vs/rad]	K_{Ii} [V/rad/s]
1	50	5.5	4.4
2	90	6.5	11.9
3	150	5.5	39.3
4	150	5.6	38.8
5	150	4.7	46.6
6	150	3.2	68.9

“малих” и “великих” грешака. На тај начин, вредности експонената могу да се индиректно дефинишу задавањем жељених граничних нивоа Δq_L и $\Delta \dot{q}_L$. У овом раду, очекиване максималне вредности грешака постављене су на $\Delta q_{\max} = 0.001$ и $\Delta \dot{q}_{\max} = 0.05$ за прва три зглоба робота, док су за задња три зглоба усвојене вредности $\Delta q_{\max} = 0.0005$ и $\Delta \dot{q}_{\max} = 0.025$. За све зглобове, граница између “малих” и “великих” релативних грешака усвојена је да буде $\Delta q_L / \Delta q_{\max} = \Delta \dot{q}_L / \Delta \dot{q}_{\max} = 0.2$, што даје вредности нормализационих експонената $\alpha_q = \alpha_{\dot{q}} = 0.4307$.



Легенда:

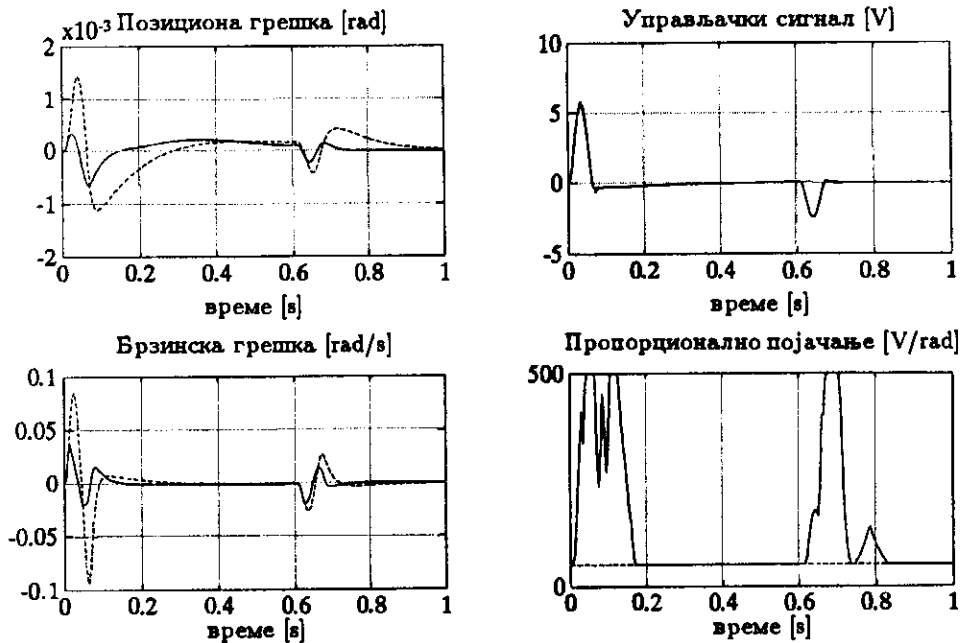
- PID управљање с константним појачањем
- PID управљање с подешавањем на бази фази логике

Сл. 4. Позиционирање с иницијалном грешком у првом зглобу

Параметри β_P и $K_{P\max}$, који одређују максималну брзину промене и горњи лимит коефицијента пропорционалног појачања K_P , произвољно су постављени на вредности $\beta_P = \log 1.2 = 0.1823$ и $K_{P\max} = 10K_{P0}$ за све PID подешаваче. Одговарајуће вредности за брзинске и интегралне коефицијенте су затим одређене на основу (14–17).

3.2. Позиционирање са задатим иницијалним поремећајима

Први скуп експеримената урађен је с намером да се анализира понашање хибридне управљачке схеме у задацима позиционирања. У том циљу изабран је положај $p = [0.65 \ 0 \ 0.25]^T$ с хватаљком оријентисаном наниже као циљни положај хватаљке робота (овај положај је приближно у средини радног простора робота) и затим су претпостављени иницијални поремећаји по позицији у одабраним зглобовима. Слика 4 приказује део резултата добијених кад је претпостављена иницијална грешка од 0.1 rad у првом зглобу. Иако ова иницијална грешка доводи до каснијих поремећаја у свим осталим зглобовима, њен утицај је највећи управо на подсистем првог зглоба. Због тога су дијаграми на сл.4. дати само за први зглоб и представљају позиционе грешке добијене за случај PID регулатора с променљивим појачањима одређеним помоћу подешавача с фази логиком (пуна линија) и PID регулатора с константним појачањима (испрекидана линија). У оба случаја номинали су формирани коришћењем комплетног модела динамике роботске руке. Из дијаграма се види да обе схеме дају пригушен одзив и да се време смирења значајно скраћује коришћењем подешавача с фази логиком.



Сл. 5. Дијаграми праћења трајекторије

Слични експерименти поновљени су за номинале формиране уз различита упрошћења модела. Међутим, добијени дијаграми прелазног

процеса били су скоро идентични. Ова неосетљивост може да се објасни чињеницом да се при великим грешкама знатно увећавају сигнали за компензацију грешака које формира PID контролер, тако да ови сигнали постају доминантни у односу на номиналне управљачке сигнале.

3.3. Тачност праћења трајекторија

У овом скупу експеримената претпостављена је праволинијска трајекторија између тачака $p_0 = [0.3, -0.35, -0.1]^T$ и $p_T = [1.0, +0.35, 0.6]^T$, уз одржавање константне оријентације хваталке робота. Трајекторија је генерисана уз претпоставку трапезоидног профила брзине с параметрима $\lambda = 0.1$ и $v_{\max} = 2\text{m/s}$ (параметар λ представља количник времена убрзавања/успоравања и укупног времена проласка кроз трајекторију).

У циљу илустрације, компаративни резултати добијени с PID регулаторима с константним појачањима и PID регулаторима с подешавањем на бази фази логике, при чему су номинали у оба случаја израчунавани коришћењем комплетног роботског модела, приказани су за први зглоб на слици 5. Са дијаграма се види да се управљачки сигнали тек незнатно разликују у разматраним схемама. Осим тога, редуција грешке која се остварује помоћу контролера с фази логиком увек је праћена значајним повећањем појачања.

Систематски преглед резултата добијених коришћењем различитих управљачких схема даје табела 3, која садржи вредности максималних позиционих грешака. Ова табела показује да PID управљање с фази логиком у свим случајевима доводи до редуције грешака. За претпостављену трајекторију PID регулатор с фази логиком и номиналом израчунатим на бази апроксимативног модела који укључује само моделе актуатора и гравитационе ефекте, омогућује остваривање сличних перформанси као PID регулатор с константним појачањима и номиналом израчунатим на

Таб. 3. Просечне и максималне грешке праћења трајекторија [mm]

Ефекти укључени у динамички модел	PID		PID + FLC	
	$\overline{\Delta p}$	Δp_{\max}	$\overline{\Delta p}$	Δp_{\max}
Модели актуатора + гравитација	2.12	8.34	0.52	2.04
Исто + дијаг. елементи матрице инерције	2.00	4.03	0.63	1.26
Исто + пуна матрица инерције	1.26	2.52	0.51	1.41
Исто + брзински чланови	0.34	1.75	0.20	0.64
Исто + глобално управљање	0.29	1.51	-	-

бази комплетног модела. У задњем реду табеле 3 приказани су резултати за случај додатног глобалног управљања с глобалним појачањем

постављеним на вредност $K_{Gi} = 0.5$ за $i = 1, 2, \dots, 6$. Види се да је и овакво управљање још увек инфериорно у односу на PID регулатор с фази логиком и номиналом одређеним на бази комплетног модела.

У свим експериментима с праћењем трајекторија показало се да се управљачки сигнали које генеришу PID контролери с фази логиком мало разликују од управљачких сигнала одговарајућих контролера с константним појачањима. Разлике се јављају првенствено код вршних вредности сигнала, при чему контролери с фази логиком дају по правилу мање вршне вредности. На тај начин, ови експерименти сугеришу да подешавачи на бази фази логике (i) не утичу на облик временских дијаграма утрошка снаге и енергије и (ii) њихово коришћење може да доведе до снижења потребне максималне снаге и укупног утрошка енергије. За разматрану трајекторију редуција максималне снаге је знатна и варира од 10 процената за прва два зглоба до 30 процената за трећи зглоб.

3.4. Нумеричка комплексност

Нумеричка комплексност је један од најважнијих критеријума везан за дигиталну имплементацију разматране управљачке схеме. Зато ћемо на овом месту испитати могућност редуковања рачунских захтева коришћењем подешавача на бази фази логике. Наиме, иако њихова имплементација уводи додатна рачунања, подешавачи могу да редукују укупну рачунску комплексност тиме што се снижава потребни ниво моделирања динамике робота.

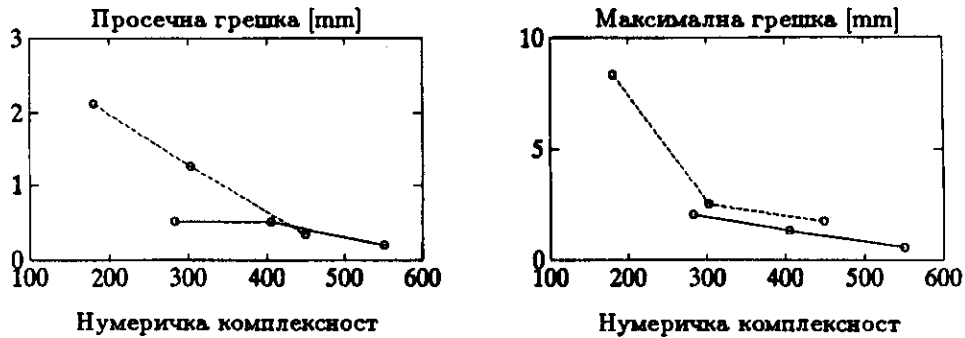
Таб. 4. Нумеричка комплексност апроксимативних модела

Ефекти укључени у динамички модел	Број операција		
	sin, cos	*	+, -
Гравитациони чланови	5	76	45
Исто + дијагонални елементи матрице инерције	-	-	-
Исто + пуна матрица инерције	5	141	102
Исто + брзински чланови	5	219	170

Број операција у покретном зарезу који је потребан за имплементацију различитих апроксимација динамичког модела робота (Manutec-R3), одређен уз помоћ програма SYM [13], приказан је у табели 4. Ови подаци комбиновани су с подацима о грешкама праћења трајекторија из табеле 3, чиме су добијени дијаграми тачности праћења у зависности од нумеричке комплексности, приказани на сл. 6. “Нумеричка комплексност” у овим дијаграмима репрезентује укупно нормализовано време

$$t/T_{+,-} = \sum N_{+,-} + R_* \sum N_* + R_{\sin, \cos} \sum N_{\sin, \cos}$$

потребно за израчунавање механичких момената и имплементацију PID подешавача, при чему су претпостављени односи $R_* = T_*/T_{+,-} \approx 1$ и $R_{\sin, \cos} = T_{\sin, \cos}/T_{+,-} \approx 12$.



Сл. 6. Зависност тачности праћења од нумеричке комплексности

Из дијаграма на сл. 6 користи од PID регулатора с променљивим појачањима постају још јасније. За трајекторију узету као пример види се да коришћење PID подешавача с фази логиком и једноставног модела који укључује само гравитационе ефекте доводи до сасвим малог снижења тачности праћења у односу на случај коришћења PID регулатора с фиксним појачањима. При том, ова мала деградација квалитета компензира се редукцијом нумеричке комплексности од скоро 40 процената.

4. Закључак

У овом раду показана је погодност фази логике за формирање табела претраживања за подешавање параметара роботских управљачких система. Обимни симулациони експерименти с роботом са шест степени слободe показали су да резултујући контролери с променљивим појачањима у многим аспектима надмашују у погледу перформанси традиционалне схеме с константним појачањима. Најочигледнија предност састоји се у побољшању тачности, које је показано како у задацима позиционирања, тако и у задацима праћења трајекторија. Важна особина је та да побољшање тачности није праћено деградацијом других перформанских карактеристика, као што су потрошња енергије и максимални развијени механички моменти. Други важан аспект је могућност редуковања рачунске комплексности роботског модела без жртвовања квалитета управљања. Мада проблеми везани за осетљивост на варијације параметара нису експлицитно анализирани, резултати добијени коришћењем апроксимативних роботских модела имплицирају побољшану робустност приказаног контролера с променљивим појачањима.

Коришћена процедура за модификацију параметара заснива се на једноставним статичким табелама претраживања које апроксимирају одлуке везане за подешавање управљања у простору грешака на зглобовима. Могући смер даљег усавршавања могао би да се састоји у синтези сложенијих правила подешавања која би такође укључила одлучивање на основу изведених карактеристика перформанси, како у простору координата зглобова, тако и у простору координата задатка. Друга могућност је у коришћењу специфичних адаптивних правила подешавања зависних од задатка уз алгоритам адаптације вођен оствареним карактеристикама перформанси (као што су нпр. алгоритми адаптације коришћени у самоорганизујућим контролерима).

Са становишта расположивог знања о контролисаном процесу, ова студија може да се посматра као нетипична примена управљања на бази фази логике. Наиме, крути робот који ради у слободном простору је детерминистички систем чији је комплетан математички модел унапред познат. Због тога се ово истраживање концентрисано на могућности висококвалитетног праћења брзих трајекторија коришћењем поједностављених модела динамике робота. Знатно важнија побољшања могу се очекивати од предложеног хибридног управљања применом овог концепта на адаптивно управљање манипулационим роботима у коме се узимају у обзир неизвесности у погледу карактеристика манипулисаних објеката или динамичког окружења. Тек у домену адаптивних алгоритама управљања роботима, интеграција управљачких техника заснованих на коришћењу математичких модела и техника заснованих на коришћењу експертског знања треба да покаже значајне предности над традиционалним управљањем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Vukobratović, D. Stokić, N. Kirćanski, *Non-Adaptive and Adaptive Control of Manipulation Robots*, Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [2] M. Vukobratović, V. Potkonjak, *Dynamics of Manipulation Robots: Theory and Application*, Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [3] D. Stokić, M. Vukobratović, *Historical perspectives and state of the art in joint force sensory feedback control of manipulation robots*, *Robotica*, 1993, vol. 11, pp. 149–157.
- [4] C.C. Lee, *Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller*, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1990, vol. 20, pp. 404–435.
- [5] P.J. King, E.H. Mamdani, *The application of fuzzy control systems to industrial processes*, *Automatica*, 1977, vol. 13, pp. 235–242.
- [6] T. Procyk, E. Mamdani, *A linguistic self-organizing process controller*, *Automatica*, 1979, vol. 15, pp. 15–30.
- [7] N.J. Mandić, E.M. Scharf, E.H. Mamdani, *Practical application of a heuristic fuzzy rule-based controller to the dynamic control of a robot arm*, *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 1985, vol. 132, pp. 190–200.

- [8] R. Tanscheit, E.M. Scharf, *Experiments with the use of a rule-based self-organizing controller for robotics applications*, Fuzzy Sets and Systems, 1988, vol. 26, pp. 195–214.
- [9] S. Tzafestas, N.P. Papanikolaopoulos, *Incremental fuzzy expert PID control*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1990, vol. 37, pp. 365–371.
- [10] D. Popović, R.S. Shekhawat, *A fuzzy expert tuner for robot controller*, Proceedings 1991 IFAC/IFIP/IMACS Symposium on Robot Control, Vienna, 1991, pp. 229–233.
- [11] C.W. de Silva, A.G.J. MacFarlane, *Knowledge-Based Control with Application to Robots*, Berlin, Springer-Verlag, 1989.
- [12] H. Ying, W. Siler, J.J. Buckley, *Fuzzy control theory: A nonlinear case*, Automatica, 1990, vol. 26, pp. 513–520.
- [13] M. Vukobratović, N. Kirčanski, A. Timčenko, M. Kirčanski, *SYM-program for computer-aided generation of optimal symbolic models of robot manipulators*, W. Schiehlen (red.), *Multibody Systems Handbook*, New York, Springer-Verlag, 1989.

M. Vukobratović, B. Karan

EXPERIMENTS WITH FUZZY LOGIC APPLICATION
TO ROBOT CONTROL WITH MODEL-BASED DYNAMIC
COMPENSATION

S u m m a r y

The paper describes trajectory tracking simulation experiments with a hybrid approach to robot control that combines traditional model-based and fuzzy logic-based control techniques. The combined method is developed by extending a model-based decentralized control scheme with fuzzy logic-based tuners for modifying parameters of joint servo controllers. The simulation experiments conducted on a real-scale six-degree-freedom industrial robot demonstrate suitability of fuzzy logic-based methods for improving the performance of the robot control system.

М.М. РИСТИЋ, И.А. ГРЖЕТИЋ

ПРОЦЕСИ ДЕГРАДАЦИЈЕ ОПЕКА СРПСКИХ СРЕДЊОВЕКОВНИХ МАНАСТИРА

(Приказан на II скупу Одељења, 15. фебруара 1994)

Најзначајнији културно-историјски споменици средњовековне Србије су несумњиво цркве и манастири који су грађени уз декоративну употребу опека које су у то време биле веома важан грађевински материјал. Према свом квалитету, опеке српских средњовековних манастира спадају у материјале који су релативно отпорни на дејство спољних (атмосферских) фактора.

У природи се континуално одвијају процеси преобразавања (алтерације) високотемпературних у нискотемпературне минерале под дејством воде и кисеоника. Ти процеси у оквиру поменутих хетерогених система могу се објаснити термијски и термодинамички. Полазећи од ових чињеница, циљ овог рада је да се објасне деградациони процеси који захватају опеке српских средњовековних манастира. Иако су ови процеси изузетно спори, важно је проучити и објаснити њихов механизам.

1. Увод

Испитивање српских средњовековних манастира представља посебан изазов за сваког истраживача, не само због културних и историјских разлога већ и због њихове заштите. Да би заштита ових споменика била што ефикаснија, од посебног је значаја упознавање процеса који разарају ове за нас врло значајне споменике. Српски средњовековни манастири су, по правилу, грађени од тесаног камена, опека и малтера као везивног материјала. Процес деградације у различитој мери захвата опеке, али не заобилази ни камен, мада је највише видљив на малтеру.

Циљ наших комплексних истраживања био је да се проуче деградациони процеси опека српских средњовековних манастира. За ово су коришћени резултати детаљних испитивања који су дати у монографији “Опеке српских средњовековних манастира” [1].

2. Хемијска анализа и квалитет средњовековних опека

2.1. Хемијска анализа

Према хемијским анализама испитиване опеке српских средњовековних манастира (таб. I) садржале су највише SiO_2 , затим Al_2O_3 и друге компоненте као што су Fe_2O_3 , CaO , MgO , Na_2O и K_2O , с тим што елементи у траговима нису одређени (таб. II) [1].

Таб. I. Списак манастира чије су опеке испитиване

Ознака	Манастир (споменик културе)
М-01	Градина — Мартинићи (X-XI век)
М-02	Црква Св. Николе (Куршумлија) (1168-1172)
М-03	Манастир Студеница (Рашка) (1183-1196)
М-04	Манастир Студеница - Радослављева припрата (1228-1234)
М-05	Манастир Сопоћани (Нови Пазар) (1265)
М-06	Манастир Градац (кровна!) (1270)
М-07	Манастир Вањска (1313-1316)
М-08	Пећка патријаршија (Пећ) (1330)
М-09	Марков манастир (Скопље) (1346)
М-10	Манастир Св. Арханђела (Призрен) (1348-1352)
М-11	Црква Лазарица (Крушевац) (1375-1385)
М-12	Лазарева палата (Крушевац) (1375-1385)
М-13	Манастир Раваница (Пуприја) (1381)
М-14	Манастир Св. Андреја (Скопље) (1389)
М-15	Манастир Љубостиња (Трстеник) (крај XIV века)
М-16	Манастир Велуће (Трстеник) (крај XIV века)
М-17	Манастир Каленић (Светозарево) (1407-1413)
М-18	Црква на гробљу у Смедереву (почетак XV века)
М-19	Смедеревски град (1439)

Таб. II. Хемијски састав опека српских средњовековних манастира

Манастир	Влага	Губи- так жар.	%						
			SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	CaO	MgO	Na_2O	K_2O
М-01	0,39	14,69	33,60	18,20	6,77	21,86	3,50	0,78	0,75
М-02	—	2,45	55,40	17,87	10,24	5,05	5,02	2,09	2,00
М-03	—	1,72	62,64	18,03	8,31	3,24	2,90	1,65	1,96
М-04	0,39	1,14	66,86	16,98	8,40	1,82	1,80	1,00	1,89
М-05	—	3,19	56,75	18,77	9,08	5,33	3,00	1,25	2,60

M-06	0,61	3,82	55,20	20,09	8,22	6,40	2,90	1,25	2,25
M-07	1,09	8,22	47,49	14,88	5,99	15,90	3,54	1,19	2,39
M-08	—	2,12	68,70	15,31	6,56	1,68	2,00	0,94	2,37
M-09	1,04	3,17	72,25	14,26	2,97	3,11	1,60	0,87	1,87
M-10	—	1,33	69,50	15,30	7,90	1,28	1,27	1,45	0,95
M-11	—	2,00	66,08	15,49	6,35	4,06	2,90	1,31	1,73
M-12	—	2,37	64,36	16,61	6,56	4,08	3,20	1,18	1,36
M-13	—	8,05	57,70	15,51	4,82	6,75	1,80	3,75	1,83
M-14	0,36	1,21	55,06	20,58	12,39	2,39	3,50	0,96	3,37
M-15	—	2,22	70,55	14,11	6,14	1,55	2,50	1,18	1,45
M-16	1,63	2,90	62,92	17,28	7,84	1,96	1,80	2,45	2,59
M-17	0,50	0,59	66,71	17,71	7,60	0,70	3,01	1,48	2,22
M-18	1,79	9,14	53,88	12,47	5,47	12,06	4,07	1,06	1,62
M-19	1,15	6,76	57,70	14,91	5,49	8,70	3,10	1,26	2,05

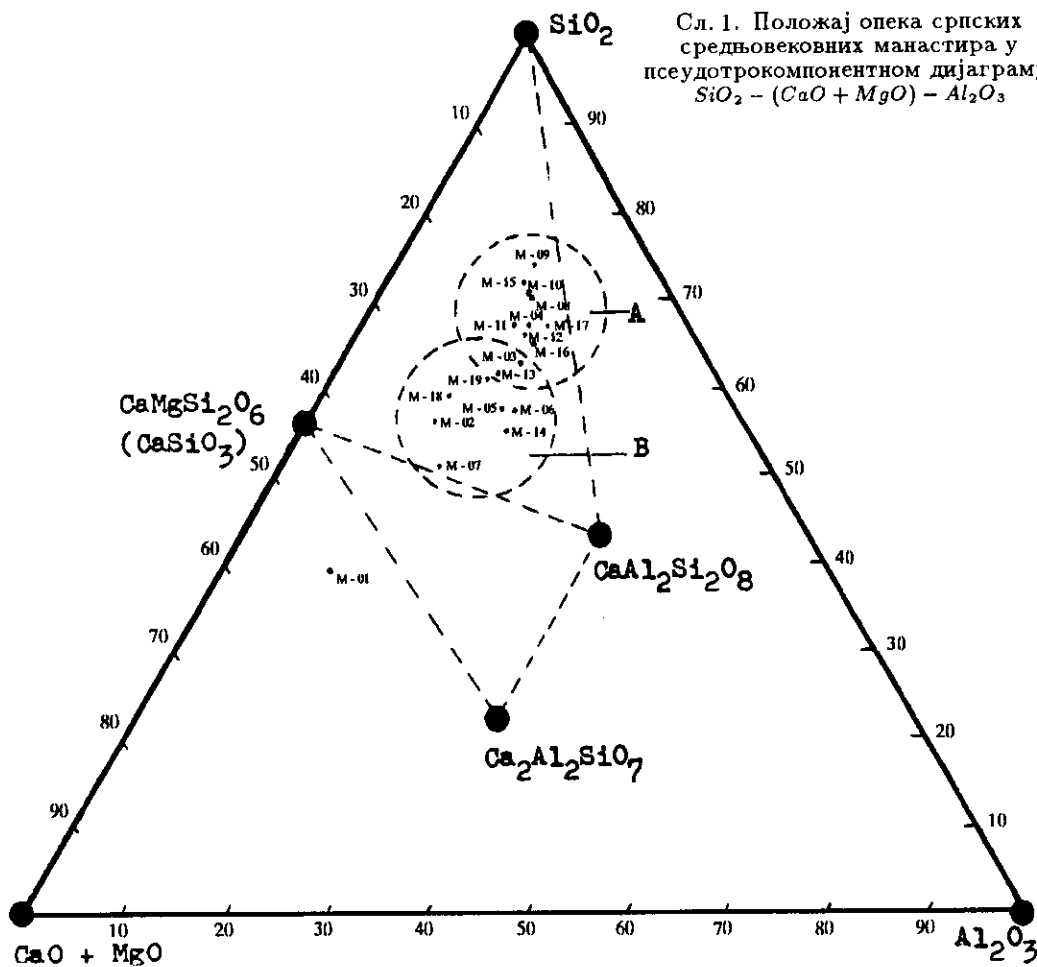
Резултати истраживања су показали да је прорачунати минералошки састав сировина према методи Дудерова [2] полазне керамичке масе испитиваних опека углавном био окарактерисан присуством каолинита $[Al_4Si_4O_{10}(OH)_8]$, калијум-фелдспата [микроклина – $KAlSi_3O_8$], натријум-плагиокласа [$NaAlSi_3O_8$ – албит] и кварца $[SiO_2]$ (таб. III) [1]. Поред тога у глинама постоје одређене количине калцита $[CaCO_3]$ или доломита $[(Ca, Mg)CO_3]$, лискуна $[KAl_2AlSi_3O_{10}(OH)_2]$, пирита $[FeS_2]$ и других мање заступљених минерала.

Таб. III. Прорачунати минералошки састав опека

Манастир	Каолинит	Микроклин	Албит	Кварц	Приближни састав керамичке масе	
					Глина	Песак
M-01	47,70	5,20	7,74	8,39	90	10 ⁻
M-02	31,76	12,13	18,14	21,55	75	25
M-03	33,82	11,76	14,17	30,31	65	35
M-04	34,06	11,34	8,59	38,57	60	40
M-05	36,30	15,90	10,94	23,82	75	25
M-06	40,99	13,84	11,01	21,67	75	25
M-07	28,62	15,50	11,04	20,99	80	20
M-08	28,93	14,33	8,13	41,76	60	40

M-09	28,21	11,43	7,61	48,75	50	50
M-10	38,34	5,45	11,87	33,88	65	35
M-11	29,62	10,47	11,35	39,09	60	40
M-12	34,31	8,28	10,28	37,69	60	40
M-13	20,47	11,26	34,59	22,11	75	25
M-14	39,04	20,07	8,18	18,50	80	20
M-15	27,52	8,81	10,26	46,78	50	50
M-16	27,28	15,85	21,46	27,22	70	30
M-17	32,76	13,23	12,62	34,57	65	35
M-18	25,02	10,58	9,91	34,05	65	35
M-19	28,82	13,03	11,47	32,14	65	35

Сл. 1. Положај опека српских средњовековних манастира у псеудотрокомпонентном дијаграму: $SiO_2 - (CaO + MgO) - Al_2O_3$



Карактеризација хемијског састава опека у односу на фазни дијаграм који дефинише доминантне минералне врсте у опекама, а који је уствари псеудотрокомпонентни дијаграм $[SiO_2 - (CaO + MgO) - Al_2O_3]$ који дефинише поља међусобне стабилности и заступљености анортита [плагиокласа $-CaAl_2Si_2O_8$], геленита $[Ca_2Al_2SiO_7]$, диопсида $[CaMgSi_2O_6$ – пироксен] и воластонита $[CaSiO_3]$ указује да су скоро све опеке по свом саставу сврстане у две групе које леже у пољу кварца, анортита и диопсида, односно воластонита (сл. 1) [1].

2.2. Фазна анализа и технологија печења

Детаљна фазна анализа рендгенском дифракцијом указује на неколико доминантних кристалних фаза чије су релативне концентрације у односу на аморфну фазу одређене на семиквантитативном нивоу [1]. То су: лискуни, фелдспати, кварц, хематит, калцит и диопсид (таб. IV). Хемијски састав аморфне фазе указује на доминантно присуство оксида алуминијума, силицијума, гвожђа и трагова оксида других елемената.

Таб. IV. Фазни састав опека српских средњовековних манастира

	кварц	фелдспат	калцит	хематит	диопсид	лискун
М-01	+		+		+	
М-02	+	+	+	+		
М-03	+	+		+		
М-04	+	+	+	+		+
М-05	+	+	+			+
М-06	+	+	+	+		+
М-07	+	+	+	+		+
М-08	+	+		+		+
М-09	+	+				+
М-10	+	+		+		+
М-11	+	+	+	+		+
М-12	+	+		+		+
М-13	+	+	+	+		+
М-14	+	+	+	+		
М-15	+	+		+		+
М-16	+	+				+
М-17	+	+	+	+		
М-18	+	+	+	+		
М-19	+	+	+	+		+

Приликом утврђивања технологије печења од посебног значаја је било одређивање температуре печења опека. Диференцијалном термичком анализом (ДТА) и анализом топлотног ширења установљене су највероватније температуре печења (таб. V и VI). Одређивање температуре печења опека методом ДТА није дало довољно прецизне резултате.

Таб. V. Процена температуре печења опека српских средњовековних манастира

Манастир	$T(^{\circ}C)$
M-01	$< 900^{\circ}C$
M-02	$< 800^{\circ}C$
M-03	$< 800^{\circ}C$
M-04	$< 900^{\circ}C$
M-05	$< 750^{\circ}C$
M-06	$< 700^{\circ}C$
M-07	$< 900^{\circ}C$
M-08	$< 800^{\circ}C$
M-09	$< 700^{\circ}C$
M-10	$< 800^{\circ}C$
M-11	$< 750^{\circ}C$
M-12	$< 800^{\circ}C$
M-13	$< 900^{\circ}C$
M-14	$< 750^{\circ}C$
M-15	$< 900^{\circ}C$
M-16	$< 800^{\circ}C$
M-17	$< 800^{\circ}C$
M-18	$< 900^{\circ}C$
M-19	$< 800^{\circ}C$

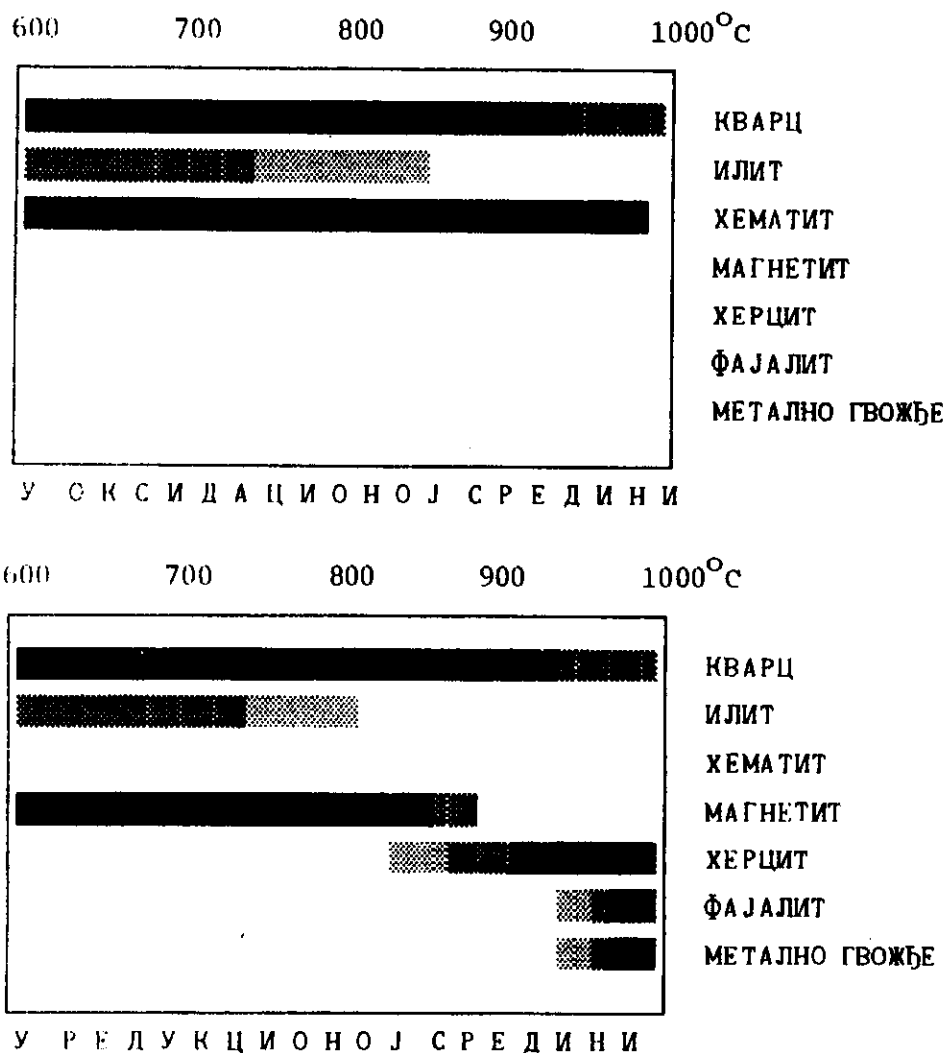
Таб. VI. Температура започињања процеса синтеровања полазних састојака опека дефинисаног као престанак ширења и почетак скупљања масе која се пече

Манастир	$T(^{\circ}C)$
M-01	820
M-02	720
M-03	800
M-04	760
M-05	800
M-06	880
M-07	800
M-08	820
M-09	820
M-10	750
M-11	—
M-12	800
M-13	910
M-14	750
M-15	800
M-16	900
M-17	880
M-18	900
M-19	780

Дилатометрија, која описује промену запремине керамичке масе испитиваних опека са променом температуре, од собне до температуре печења може да открије значајне податке. Током загревања керамичког система до температуре печења керамички систем се скупља, а када се достигне температура печења, систем почиње да се шири [3]. На температури на којој почиње процес ширења, започиње и процес синтеровања основних састојака опека. На овај начин су поузданије одређене температуре печења испитиваних опека (таб. VI).

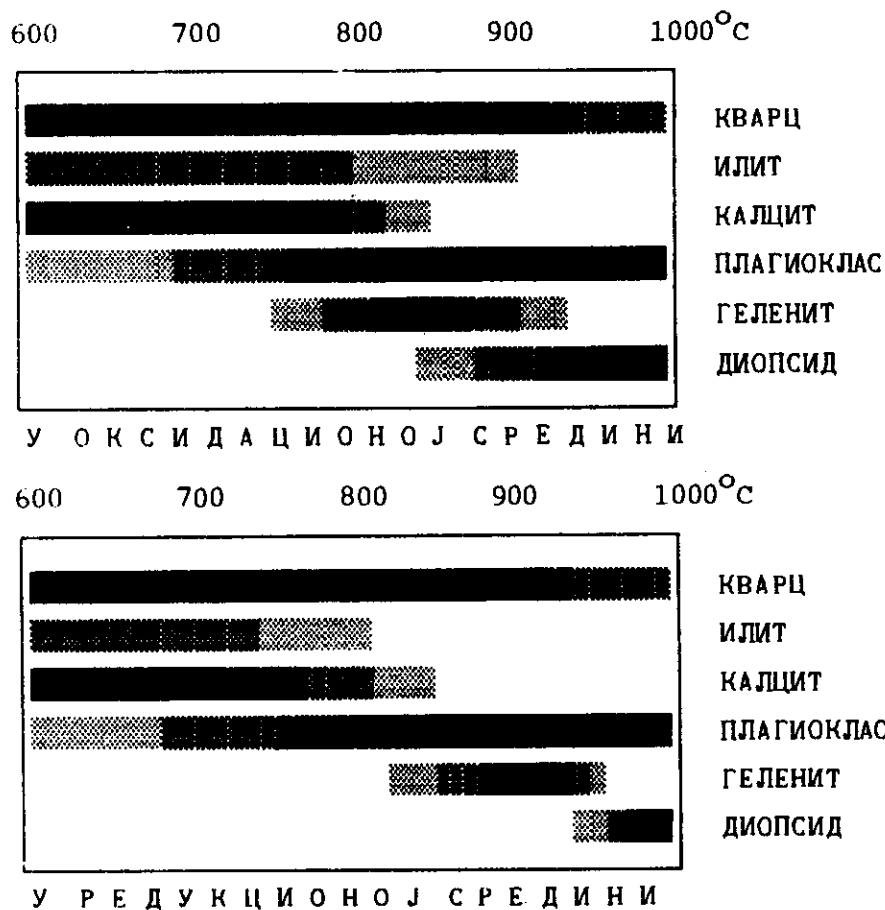
2.3. *Продукти печења*

Продукти процеса печења зависе од полазног материјала, нарочито од садржаја калцијума и гвожђа. Из таб. II види се да садржај CaO у опекама варира. У зависности од услова печења: температуре, редукционе или оксидационе средине, у финалној маси могу да се оформе



Сл. 2. Фазне промене током загревања глине са повећаним садржајем Fe_2O_3

различити минерали (сл. 2 и 3) од којих су за овај рад од посебног значаја настали плагиокласи, геленит, диопсид и фајалит [Fe_2SiO_4].

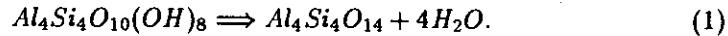


Сл. 3. Фазне промене током загревања глине са повећаним садржајем CaO

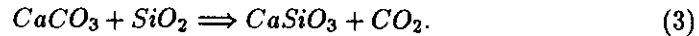
На основу истраживања методом ДТА резултата изложених у таб. VI опеке српских средњовековних манастира могу се сврстати у две групе. У прву групу спадају опеке печене на температурама између 700 и 800° (M-02, M-04, M-10, M-14, M-19), а у другу групу спадају опеке печене на температурама између 800 и 900° (M-01, M-03, M-05, M-06, M-07, M-08, M-09, M-12, M-13, M-15, M-16, M-17, M-18) [1].

Познавање термодинамике процеса печења опека указује да се све до 500° не одигравају никакве значајне хемијске промене. Тек од те температуре, па навише, почињу да се одвијају хемијске реакције и фазне трансформације приликом којих се нискотемпературни минерали из полазног материјала трансформишу у финалне, хемијске измењене високо-температурне минерале карактеристичне за керамичку масу [4].

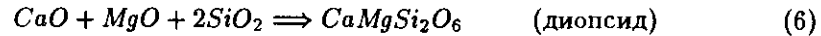
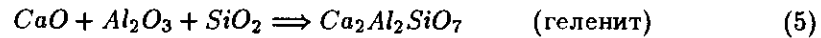
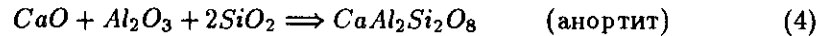
Тако, на пример, на температури од око 600° каолин дехидратацијом прелази у метастабилну и делимично аморфну фазу метакаолин:



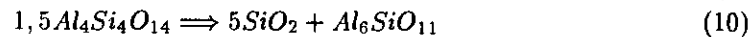
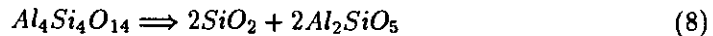
Затим, у температурном интервалу од 600 до 900° реагују калцит и кварц, при чему настају CaO и волластонит:



Од 800 до 900° долази до разлагања метакаолина на Al_2O_3 и SiO_2 , који могу даље да реагују са CaO , при чему настају диопсид, геленит, анортит и други високотемпературни минерали:



Тек на температурама изнад 900° , на око 980° до 1050° настају силиманит и мулит:



Судећи према резултатима приказаним у таб. V и VI, тако високе температуре печења испитиваних опека нису достигнуте. Зато је присуство силиманита и мулита као високотемпературних минерала у опекама српских средњовековних манастира мало и ограничено.

Поред тога, треба напоменути да се лискуни (мусковит) разлажу тек на 980° [5] тако да њихово присуство у опекама треба посебно разматрати у смислу утврђивања њиховог порекла. Да ли се лискуни у опекама налазе као примарни минерали, дакле, као саставни део полазног материјала за израду опека, или као секундарни минерали настали неким од деградационих процеса високотемпературних једињења у опекама, као што су, на пример, фелдспати. Разлика између примарног и секундарног мусковита је у садржају гвожђа кога увек има знатно мање у секундарним минералима, с обзиром на то да се гвожђе из примарних минерала алтерацијом издваја у засебне минерале, као што су лимонит и/или хематит.

Методом ДТА могу се установити ендотермне и егзотермне фазе загревања опека. Индикативне су поједине ендотермне фазе које се односе на уклањање влаге из узорака опека у температурном интервалу од 230 до 260° . Ове ендотермне фазе се објашњавају дехидратацијом појединих минералних фаза (филосиликата) у опекама које су воду везале из атмосфере [6].

2.4. *Анализа порозности опека*

Анализа порозности опеке је веома важна, јер даје податке о величини пора које су обично у влажној средини испуњене водом. Такве поре тада представљају центре физичке и хемијске деградације опека. На ниским температурама вода прелази у лед који се шири и ствара микропукотине у које затим може да доспе нова количина воде која тако утиче на ширење процеса хемијске и физичке деградације.

Применом живиног порозиметра [7] одређене су величине пора у испитиваним опекама (сл. 4) и утврђене вредности за средњу величину поре (\bar{D}) и максимална величина пора (D_{\max}) [1]. Средња величина пора израчуната је према једначини:

$$\bar{D} = \left(\sum_i^n N_i D_i \right) / \left(\sum_i^n N_i \right) \quad (11)$$

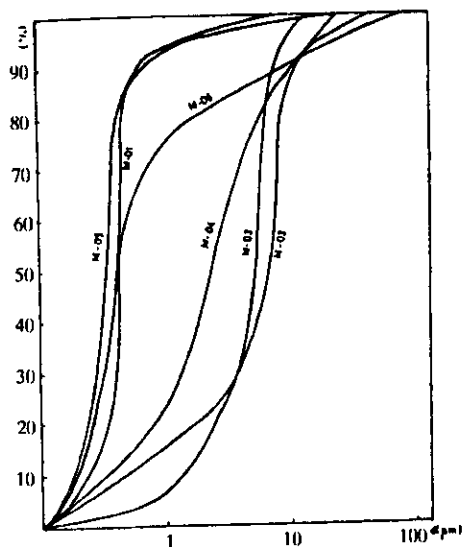
где су: D_i - средња величина пора у i -том интервалу величине пора, а N_i - број пора у i -том интервалу величине пора. Добијени резултати су изложени у таб. VII.

Таб. VII. Средње и максималне величине пора у опекама српских средњовековних манастира

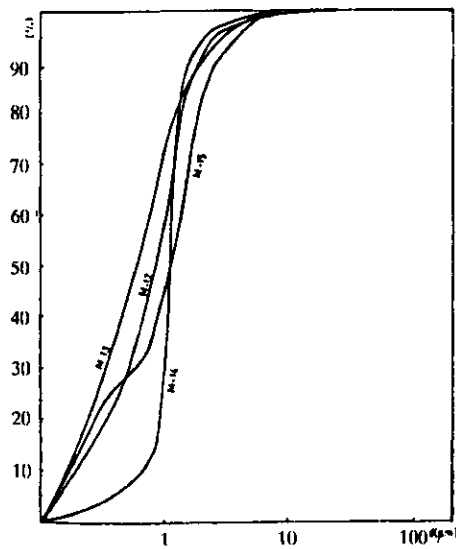
Манастир	Величина пора (μm)		Манастир	Величина пора (μm)	
	\bar{D}	D_{\max}		\bar{D}	D_{\max}
М-01	1,68	25	М-11	3,77	15
М-02	10,06	45	М-12	2,82	25
М-03	6,70	15	М-13	1,68	8,5
М-04	7,70	75	М-14	2,70	25
М-05	0,99	8,5	М-15	2,31	8,5
М-06	3,56	25	М-16	2,81	15
М-07	3,08	45	М-17	2,52	15
М-08	1,80	8,5	М-18	2,46	25
М-09	2,81	8,5	М-19	0,93	8,5
М-10	2,29	8,5			

На основу ових података испитиване опеке сврстане су у три групе: 1) опека са изразито великом величином пора, $\bar{D} = 5$ до $10 \mu\text{m}$ (М-02, М-03, М-04); 2) опеке са величином пора, $\bar{D} = 2$ до $5 \mu\text{m}$ (М-06, М-07, М-09, М-10, М-11, М-12, М-14, М-15, М-16, М-17, М-18); 3) опеке са релативно малом величином пора, $\bar{D} < 2 \mu\text{m}$ (М-01, М-05, М-08, М-13, М-19).

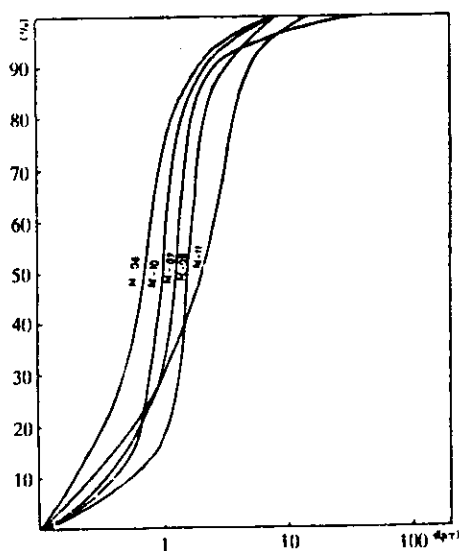
Деградација опека је сложен процес који се одвија делом као хемијска деградација, а делом и као физичка деградација.



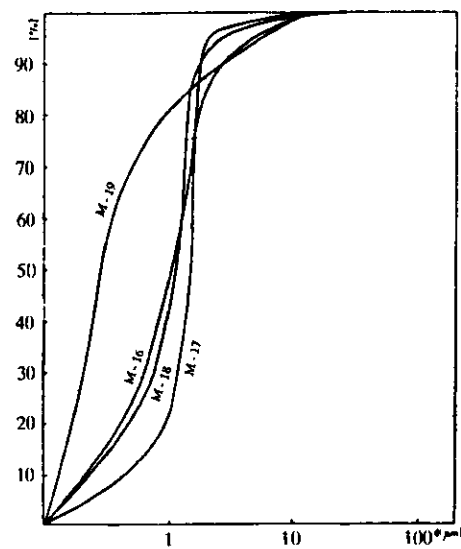
Сл. 4а Расподела величина пора у опекама манастира М-01, М-02, М-03, М-04, М-05 и М-06



Сл. 4в Расподела величина пора у опекама манастира М-12, М-13, М-14 и М-15,



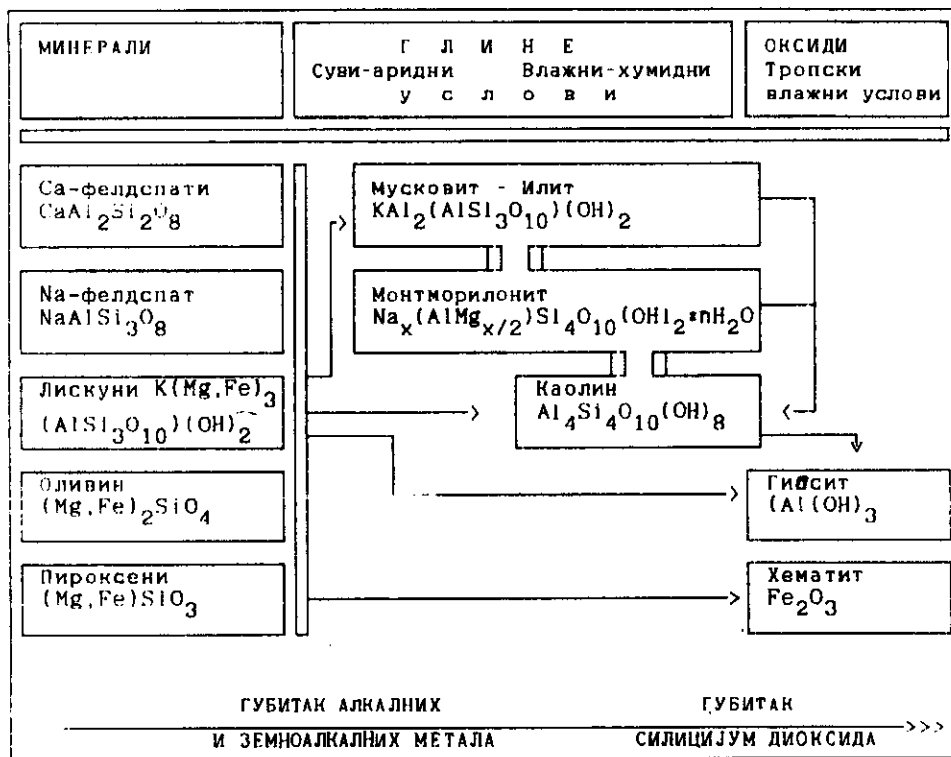
Сл. 4б Расподела величина пора у опекама манастира М-07, М-08, М-09, М-10 и М-11



Сл. 4г Расподела величина пора у опекама манастира М-16, М-17, М-18 и М-19,

3. Хемијска деградација

Стабилност минерала насталих на високим температурама у присуству воде и кисеоника са временом знатно опада. Потврде у прилог овој тврдњи могу се наћи у природним процесима преображавања (алтерације) магматских стена [8, 9], насталих хлађењем магме од 1200 до 900°, при чему настају исти или слични минерали који се налазе у печеним опекама. То су оливини, фајалит, пироксени, плагиокласи, фелдспати и други. На сл. 5 приказан је општи процес преображавања високотемпературних у нискотемпературне минерале у присуству већих и мањих количина воде.



Сл. 5. Преображење (алтерација) минерала и стена под дејством воде

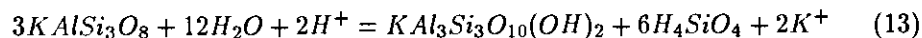
Сви ови процеси су спонтани и то се може термодинамички доказати на основу познате формуле о укупној слободној енергији реакције $\Delta G_{\text{реакције}}$:

$$\Delta G_{\text{реакције}} = \sum \Delta G^{\circ}_{\text{продуката}} - \sum \Delta G^{\circ}_{\text{реактаната}}, \quad (12)$$

при чему се зна да за $\Delta G_{\text{реакције}} > 0$ реакција није спонтана, односно да се не одвија, а када је $\Delta G_{\text{реакције}} < 0$ реакција тече спонтано, с тим

што су ΔG° продуката и ΔG° реактаната табеларни подаци [10]. Једина величина која се не може лако установити је брзина реакције.

Тако, на пример, преображај фелдспата у лискун тече према следећој реакцији:

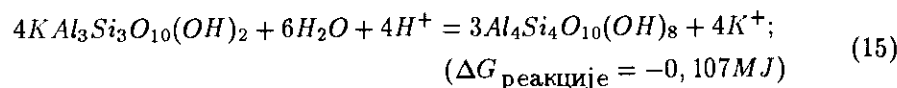


ΔG реакције је $-1,017$, што значи да се реакција спонтано одвија, а добијена силицијумова киселина даље се трансформише у нискотемпературни кварц или опал:



Настали секундарни SiO_2 често је аморфан и не може се детектовати рендгенском дифракционом анализом, али се зато може лако препознати оптичком микроскопијом, што је, уосталом, примећено у испитиваним узорцима. Врло је важно напоменути да је мобилност и растворљивост силицијума последица деградације минерала који у себи садрже алкалне и земно-алкалне метале, при чему може настати H_4SiO_4 много лакше него директно из SiO_2 . Ова констатација се може допунити и резултатима Римстида и Барнса [11] који доказују да постоји разлика између растворљивости аморфног силицијум-диоксида и кварца, при чему је кварц мање растворљив.

Даљи алтерациони процеси могу да секундарни лискун преобразе у хидроксимусковит, тј. илит, код кога су K^+ јони делимично замењени са H_3O^+ јонима или у каолин:



На сличан начин могу се алтерисати и диопсид, албит, генелит и други високотемпературни минерали.

Према степену стабилности поменути продукти алтерација могу се разврстати као што је то приказано на сл. 6, а брзина разлагања и средњи животни век појединих петрогених минерала приказани су у таб. VIII и IX [12, 13]. На основу ових података стиче се права слика до које мере су процеси разградње спори, али ипак присутни. Пошто се један број ових минерала проналази и у опекама, то су ови подаци веома важни, јер пружају податке и о путевима преображавања вештачки добијених минерала током процеса печења опека. Како се види, анортит је веома кратког "животног века". Овоме у прилог иде чињеница да је у опекама анортит утврђен, али у малим количинама. Из сл. 1 се види да је једна значајна група опека српских средњовековних манастира блиска коноди анортит - диоксид, па према томе треба очекивати значајније количине ових минерала у опекама. Међутим, алтерациони процеси су ове минерале

Таб. VIII. Средња брзина ослобађања SiO_2 из појединих минерала (при pH 5 и на $25^\circ C$) [12, 13]

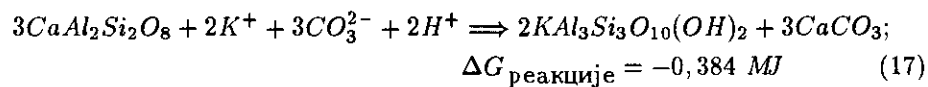
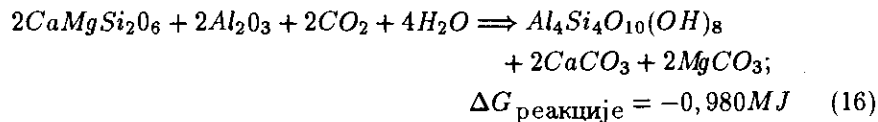
Минерал	Формула	Средња брзина у $mol/m^2/s$	Референца
Кварц	SiO_2	$4,10 \cdot 10^{-14}$	[15]
Мусковит	$KAl_3Si_3O_{10}(OH)_2$	$2,56 \cdot 10^{-13}$	[16]
Форстерит	Mg_2SiO_4	$1,20 \cdot 10^{-12}$	[17]
К-фелдспат	$KAlSi_3O_8$	$1,67 \cdot 10^{-12}$	[18]
Албит	$NaAlSi_3O_8$	$1,19 \cdot 10^{-11}$	[19]
Енсатит	$Mg_2Si_2O_6$	$1,00 \cdot 10^{-10}$	[20]
Диопсид	$CaMgSi_2O_6$	$1,40 \cdot 10^{-10}$	[20]
Нефелин	$(Na, K)AlSi_3O_8$	$2,80 \cdot 10^{-9}$	[13]
Анортит	$CaAl_2Si_2O_8$	$5,60 \cdot 10^{-9}$	[21]

делом разградили [14]. Алтерација диопсида може да се одвија до каолина (реакција 16), или до мусковита, односно илита (реакција 17). Алтера-

Таб. IX. Средњи "животни век" појединих петрогених минерала (1 mm^3 при pH 5 и на 25°) [12, 13]

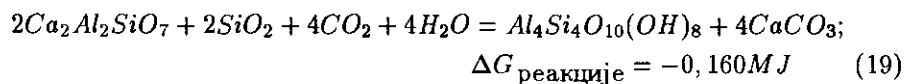
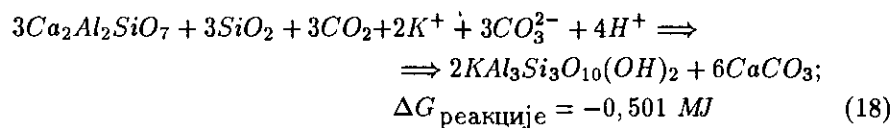
Минерал	Формула	Средњи "животни век" у годинама
Кварц	SiO_2	34.000.000
Мусковит	$KAl_2AlSi_3O_{10}(OH)_2$	2.700.000
Форстерит	Mg_2SiO_4	600.000
К-фелдспат	$KAlSi_3O_8$	520.000
Албит	$NaAlSi_3O_8$	80.000
Енсатит	$Mg_2Si_2O_6$	8.800
Диопсид	$CaMgSi_2O_6$	6.800
Нефелин	$(Na, K)AlSi_3O_8$	211
Анортит	$CaAl_2Si_2O_8$	112

ција геленита се одвија до мусковита (реакција 18) или каолина (реакција 19), а може да тече и до тзв. хидратисаног геленита: $Ca_2Al_2Si_7O_{28} \cdot 8H_2O$.



<p>П О Р А С Т А Б И Л Н О С Т И</p> <p>↓</p>	Гвеленит	$\text{Ca}_2\text{Al}_2\text{SiO}_7$
	Калцијум плагиоклас	$\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$
	Са-алкални плагиокалс	$\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8\text{-NaAlSi}_3\text{O}_8$
	Алкално-Са плагиоклас	$\text{NaAlSi}_3\text{O}_8\text{-CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$
	Алкални плагиоклас	$\text{NaAlSi}_3\text{O}_8$
	Калијум фелдспат	KAlSi_3O_8
	Мусковот (лискун)	$\text{KAl}_2\text{AlSi}_3\text{O}_{10}(\text{OH})_2$
	Хидроксимусковит (илит)	$(\text{Mg,Al}_7)(\text{Al}_2\text{Si}_{14})\text{O}_{40}(\text{OH})_8$
	Кварц	SiO_2

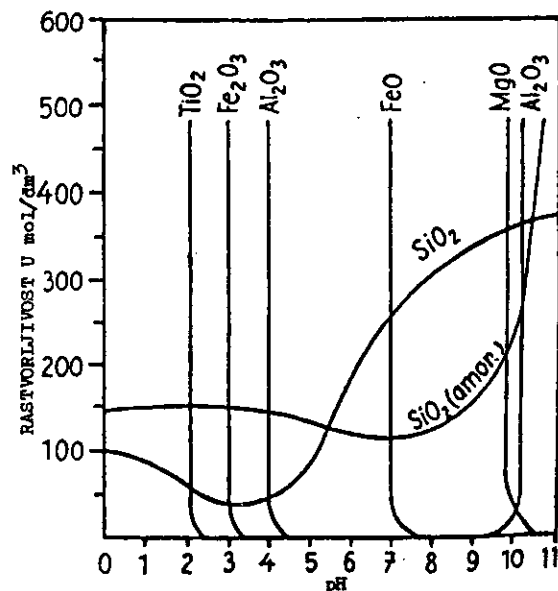
Сл. 6. Релативна стабилност петрогених минерала у зависности од алтернационих процеса



Све претходне реакције су спонтане, па према томе све се одвијају, али са различитом кинетиком која није овде одређена. На примеру геленита (реакције 18 и 19) приказане су могућности алтерације геленита

до лискуна, односно до каолинита. Обе су реакције спонтане, с тим што је алтерација геленита до лискуна према слободној процени вероватнија јер је ΔG реакције 18 < ΔG реакције 19, мада је и реакција преображавања лискуна у каолинит такође спонтан процес и веома чест у природи (реакција 15).

Алтерације силикатних минерала су у основи процеси који умрежавају силикатни матрикс, а приликом тог процеса се обавезно у решетку новонасталих стабилнијих форми уграђује одређена количина воде у облику *ОН*-група (реакције 13, 15, 16, 17, 18 и 19).



Сл. 7. Утицај *pH* на растворљивост појединих оксида – конституената силикатних минерала

На растворљивост појединих конституената испитиваних опека сигурно утиче и промена киселости средине – *pH*, што је приказано на сл. 7. Како опеке нису изложене директним утицајима хемијских агенса који мењају *pH* средине, то се очекује да се киселост у опекама све време кретала око *pH* вредности која је дефинисана парцијалним притиском CO_2 у атмосфери и његовом растворљивошћу у води, а то значи да је утицај екстремних *pH* вредности на растворљивост компонената које изграђују опеке сведен на минимум. Присуство појединих алкалних и земно-алкалних оксида у опекама није могло значајно да мења *pH*, с обзиром на то да су везани у кристалну решетку присутних силиката. Чисте кише, чији се *pH* креће од 5,5 до 5,7 услед раствореног угљен-диоксида у кишници, нису, дакле, могле значајно да утичу на разлага-

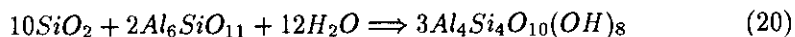
ње опека јер угљена киселина у киши не може бити присутна у високим концентрацијама. Можда је тек у последњих 50 година, са развојем индустрије у Србији, растао садржај киселих оксида, као што су SO_2 или NO_2 , али то захтева посебна истраживања.

На крају треба рећи неколико речи и о алтерацијама мулита и силиманита, који се не распадају на начин који је карактеристичан за минерале који у себи садрже катјоне као што су Ca^{2+} , Mg^{2+} , Fe^{2+} , K^+ , Na^+ и други. Ови катјони су веома важне компоненте процеса преображавања, јер се испирају из минерала или вештачких материјала, и то различитом брзином (таб. X и XI), а за њима заостају кварц - SiO_2 и Al_2O_3 , од

Таб. X. Продукти алтерација стена као последица испирања појединих јона

Алтерациони ступањ	Минерал	Ослобођени јони	Продукат алтерације
Ранн ступањ	Бнотит	K^+, Mg^{2+}	глине, лимонит, хематит
	калцит		калцит
	гипс	Ca^{2+}, SO_4^{2-}	гипс
	Ољвини	Mg^{2+}, Fe^{2+}	глина, лимонит, хематит
	Фелдспати Пироксени	Na^+, Ca^{2+} Mg^{2+}, Ca^{2+} Fe^{2+}	глине глине, лимонит, хематит
Интермедијерни ступањ	Глине	SiO_2	боксити
	Мусковит	K^+, SiO_2	мусковит монтморилонит
Узнапредовали стадијум	Глине	SiO_2	боксити оксида гвожђа
	Гипсит		гипсит
	Хематит		хематит

којих током печења настају мулит, силиманит и њима слични високотемпературни производи. У овим вештачким минералима катјона нема, па се деградациони процеси свде на процес растварања ових минерала у води, а не на процес хемијске измене ових минерала у присуству воде (реакција 20), јер се такви процеси не одвијају.



Растворљивост кварца, мулита и силиманита је изузетно мала па су деградациони процеси ових минерала за дуги низ година скоро не приметни (нпр. кварца – таб. IX). Па ипак, треба посебно нагласити да услед

Таб. XI. Релативна мобилност појединих метала пореклом из њихових оксида изражена у арбитражним јединицама (од 1 до 10000) [22]

Врста оксида	Оксид	Релативна мобилност	
Сесквиоксиди	Al_2O_3	2	од 1 до 100
	Fe_2O_3	30	мала мобилност
	Cr_2O_3	60	
Диоксиди	TiO_2	10–100	од 100 до 500
	SiO_2	300	средња мобилност
Оксиди алкалних и земно-алкалних метала	Na_2O	1000	од 500 до 10000
	K_2O	100–1000	велика мобилност
	CaO	500–2000	
	MgO	300–2000	

ниским температура печења опеке средњовековних српских манастира не садрже значајне количине ових материјала који настају, како је то већ речено, на температурама изнад 980° .

4. Физичка деградација

Хемијска разградња је спор процес, па је добар део оштећења опека на спољним фасадама, а нарочито у приземним деловима манастира, последица физичких деградационих процеса. Порозност опека знатно доприноси процесу физичког разарања, ако је у порама присутна вода, и то у порама и микропукотинама чија се величина креће од 0,1 до $1\mu m$ [23, 24], кристали леда се могу оформити, али испод уобичајене тачке мржњења воде. На физичку деградацију не утиче вода која се налази у интеркристалном простору алумино-силиката, нити вода која је адсорбована у облику мономолекулских слојева на силикатни матрикс, јер се таква вода не може превести у кристале леда ни на температурама испод $0^\circ C$. Установљено је, наиме, да се вода у порама цигала не леди лако, јер постоје одређена ограничења у таквим срединама која онемогућавају молекуле воде да се преорганизују тако да заузму оне положаје који су неопходни за стварање кристалне структуре леда [25]. Ово је, пре свега, последица неравнотежних услова који настају између метастабилне течности и леда који постоји изван пора, на пример, у великим пукотинама. То је последица разлике у парцијалним притисцима који владају изнад течности у порама цигала и над ледом изван пора. Ова равнотежа се успоставља на далеко нижим температурама од $0^\circ C$. Врло је вероватно да су адхезионе силе које владају између молекула воде и растворених

алкалних и земноалкалних метала пореклом из матрикса цигле, односно адхезионе силе између воде и зидова пора, далеко веће од кохезионних сила које би владале између молекула воде у кристалима леда. Тек када се ове силе изједначе, односно кохезионе силе надвладају, почиње мржњење, а то се дешава на температурама нижим од 0°C . Зато вода у порама сигурно потпомаже хемијску деградацију; међутим, динамика и механизми ових процеса још увек нису сасвим разјашњени.

Уколико су продукти алтерација изложени директном утицају киша, онда је могуће да се са површинских делова цигала постепено испирају и тиме се физички отклоне одређени делови опека. На овај процес се надовезује стални утицај климатских промена и њихове смене, кишних и сушних, летњих и зимских периода. Физичка деградација је нарочито изражена у зимским периодима, када вода услед свог аномалног понашања при преласку у лед почиње да се шири и постепено нарушава опеке спољне фасаде манастира које су тада добро натопљене водом. Ерозија спољних фасада током времена постаје све већа. Микроклима, дакле, представља један важан фактор који дефинише агресивност средине, а ова зависи од надморске висине, средње летње и зимске температуре, односно влажности и, наравно, количине падавина. За све поменуте манастире карактеристична је континентална клима са топлим и сувим летима, влажним и хладним зимама и са просечним воденим талогом од 1500 до 2500 mm годишње.

5. Опште разматрање

Деградациони процеси захватају опеке које су порозније, затим оне које у себи садрже већи садржај алкалних и земно-алкалних метала, односно оне опеке састављене од сировина које су биле богатије фелдспатима и плагиокласима. Са овим у вези јесу и алтерациони процеси који се мењали хемијски састав алумино-силиката и њихову кристалну структуру у које се постепено уграђивала вода. Количина таквих силиката не може се једноставно одредити. Њихова заступљеност је зато посредно одређена и изложена у таб. III. Ово се заснива и на чињеницама да се у опекама српских средњовековних манастира мулит и силиманит не налазе у значајним количинама као и да се ове фазе не могу деградирати под дејством атмосферских фактора на начин на који се деградирају остали алумино-силикати који садрже једновалентне, двовалентне и тровалентне катјоне. Компонента која по својим својствима може да се делимично понаша као мулит или силиманит јесте метакаолинска аморфна фаза, међутим, у тој фази се налазе укључци плагиокласа, фелдспата и други, који подлеже хемијској деградацији.

За процес деградације опека значајна је температура печења опека, јер су нестабилније и подложније деградационим процесима оне опеке које су печене на нижим температурама. Овај параметар увек долази на друго место у односу на садржај алкалних и земно-алкалних мета-

ла у компонентама које изграђују опеке, пошто се ови елементи током времена испирају без обзира на којој су температури печене опеке (таб. XI). И, коначно, повећан степен испирања увек је присутнији тамо где је порозност опека већа.

У коначној процени које ће се опеке или најлакше преобразити (деградирати) користе се три основна фактора:

– порозност (П) која повећава могућност деградације опека са порастом броја и величине пора,

– затим садржај фелдспата и плагиокласа (А), јер обухватају алкалне и земно-алкалне метале чији повећан садржај повећава вероватноћу деградације опека и

– температура печења (Т) која, уколико је већа, има за последицу стварање већих количина отпорнијих минералних фаза као и смањење броја и величине пора, а ови фактори уједно смањују могућност деградација опека.

Ако се пође од ова три фактора, од којих су прва два у директној сразмери, а трећи у обрнутој сразмери са прва два, добија се феноменолошки параметар деградације D приказан у таб. XII, математички изражен као $(P \cdot A) / T$, који добро може да опише релативну нестабилност и неотпорност испитаних опека српских средњовековних манастира. На процесе деградације утичу сва три поменута фактора. Што је већи број микропукотина сразмерно је већи ефекат физичке деградације услед стварања леда, а и већа количина плагиокласа и фелдспата је изложена активном дејству воде. Ова два параметра стоје у директној сразмери са феноменолошким фактором деградације D , и међусобно један другог увећавају. За разлику од њих, у обрнутој сразмери са параметром D стоји температура која, што је већа, смањује број пора и повећава стабилност опека. Што је, дакле, параметар D већи то је деградација опеке вероватнија.

На основу изложених података у таб. XII опеке се могу разврстати условно у три групе:

– група коју чине опеке које су подложне релативно високом степену деградације ($M-02$, 0,423; $M-03$, 0,217; $M-04$, 0,202; $M-16$, 0,116; $M-11$, 0,110; $M-14$, 0,102; $M-07$, 0,102; $M-06$, 0,101),

– група коју чине опеке са смањеном могућношћу одвијања деградационих процеса ($M-13$, 0,085; $M-17$, 0,074; $M-10$, 0,053; $M-12$, 0,066; $M-09$, 0,065; $M-18$, 0,056; $M-15$, 0,055; $M-08$, 0,049) и

– група опека код којих су деградациони процеси ограничени ($M-05$, 0,033; $M-19$, 0,029; $M-01$, 0,027).

Ова класификација се у принципу релативно добро слаже са анализом стабилности опека изведене на основу хемијских анализа и уз примену линеарне трансформације ових параметара [1]. Нека неслагања ипак постоје и вероватно су последица чињенице да у оквиру ове класификације

Таб. XII. Степен деградације опека српских средњовековних манастира на основу феноменолошког параметра деградације (D)

Средња величина спора (\bar{D} у μm)	Укупни садржај К-фелдспата и плагиокласа у %	Температура печења у $^{\circ}C$	$D = \frac{(\bar{D} \cdot A)}{T}$
П	А	Т	
М-02, 10,06	М-13, 45,85	М-02, 720	М-02, 0,423
М-04, 7,70	М-16, 37,31	М-10, 750	М-03, 0,217
М-03, 6,70	М-02, 30,27	М-14, 750	М-04, 0,202
М-11, 3,77	М-14, 28,25	М-11, 750	М-16, 0,116
М-06, 3,56	М-05, 26,84	М-04, 760	М-11, 0,110
М-07, 3,08	М-07, 26,54	М-19, 780	М-14, 0,102
М-12, 2,85	М-03, 25,93	М-03, 800	М-07, 0,102
М-16, 2,81	М-17, 25,85	М-05, 800	М-06, 0,101
М-09, 2,81	М-06, 24,85	М-07, 800	М-13, 0,085
М-14, 2,70	М-19, 24,17	М-12, 800	М-17, 0,074
М-17, 2,52	М-08, 22,46	М-15, 800	М-10, 0,053
М-18, 2,46	М-18, 20,49	М-01, 820	М-12, 0,066
М-15, 2,31	М-11, 21,82	М-08, 820	М-09, 0,065
М-10, 2,29	М-04, 19,93	М-09, 820	М-18, 0,056
М-08, 1,80	М-15, 19,07	М-06, 880	М-15, 0,055
М-01, 1,68	М-09, 19,04	М-17, 880	М-08, 0,049
М-13, 1,68	М-12, 18,56	М-16, 900	М-05, 0,033
М-05, 0,99	М-10, 17,32	М-18, 900	М-19, 0,029
М-19, 0,93	М-01, 12,94	М-13, 910	М-01, 0,027

није узет у обзир садржај калцијум-карбоната [$CaCO_3$], јер се зна да је тај минерал непожељан у сировинама од којих се праве опеке. Из тих разлога ову поделу треба узети са извесном резервом у односу на следеће узорке: М-01, М-07 и М-18, с обзиром да је аналитички утврђено (таб. II) да у себи садрже неуобичајено висок садржај CaO . Даља истраживања имају за циљ да се у анализу нестабилности укључи и утицај присутног калцијум-карбоната.

Наравно да ће процеси деградације бити скоро незнатни код свих оних опека које су заштићене од директних утицаја атмосферских фактора.

6. Закључак

Влага и атмосферске прилике непосредно утичу на преображавање опека српских средњовековних манастира, што има за последицу континуално одвијање хемијских деградационих процеса. Према својим карак-

теристикама ови процеси су изузетно спори, али се значајније не разликују од познатих алтерационих процеса петрогених минерала у хетерогеним системима у Земљиној кори, који су засновани на основним физичко-хемијским и термодинамичким законима. Подробнијом анализом узорака из зидова манастира деградација опеке је јако изражена у приземним деловима манастира или деловима фасаде од опеке која је порозна, која садржи висок садржај алкалних и земно-алкалних метала, и која је печена на нижим температурама, око 800° и испод ове температуре. Ово се могло очекивати јер се при тим температурама у опекама стварала врло мала количина синтероване стакласте масе која је настала од SiO_2 и Al_2O_3 градњом силиманита, мулита и сличних продуката, који су у основи врло отпорни на деградационе процесе.

На пример, узорци пореклом из Студенице (М-03), Радосављеве припрате (М-04) или манастира Велуђе (М-16), трпе или могу да претрпе велике деградационе промене. Мањи степен деградације опека је код Пећке патријаршије (М-08), манастира Св. Арханђела (М-10), Љубостиње (М-15) и још неких других.

Процеси деградације су углавном хемијски и у принципу су дуготрајни, али су зато потпомогнути и убрзани физичким процесима, с обзиром на то да су испитивани манастири дуги низ година били препуштени зубу времена.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М.М. Ристић, С.М. Ћирковић и В.П. Кораћ, *Опеке српских средњовековних манастира*, Посебно издање САНУ, Београд, 1989, том DХCVII, књига 32, 104. стр.
- [2] J.T. Duderov i I.G. Duderov, *Rasčoti po tehnologiji keramiki*, Strojizdat, Москва, 1973.
- [3] M.S. Tite, *Determination of the Firing Temperature of Ancient Ceramics by Measurement of Thermal Expansion*, Archeometry 1969, Vol. 11, 131-144, and in Nature, Vol. 222, 81.
- [4] П. Брзакловић, *Технологија грађевинских материјала*, Центар за унапређење грађевинарства, Београд, 1962.
- [5] H. Valduin, *Differential Thermoanalytical Tests on Ancient Bricks and Mortar*, Z.I. International, 1978, Vol. 11, 616-621.
- [6] L. Courtois, *Phénomènes de régénération après cuisson de certaines céramiques anciennes*, C.R. Acad. Sc, 1973, Vol. 276D, 2931-2933.
- [7] H.P. Sanders, *Pore-Size Distribution in Neolithic, Iron Age, Roman and other Pottery*, Archeometry, 1973, Vol. 15, 159-161.
- [8] N.C. Bredy, *The Nature and Properties of Soils*, Eth ed. Macmillan, 1974, New York.
- [9] R.F. Mueller and S.K. Saxena, *Chemical Petrology*, Springer, 1977, New York, 394 pp.
- [10] R.A. Robie, B.S. Hemingway and J.R. Fisher, *Thermodynamic Properties of Minerals and Related Substances at 298.15 K and 1 Bar Pressure and at High Temperatures*, Geol. Sur. Bul. 1979, no.1452, 455 pp.

- [11] J.D. Rimstidt and H.L. Barnes, *The kinetics of silica-water reaction*, Gochem. Cosmoche. Acta, 1980, Vol. 44, 1683-1699.
- [12] A.C. Lasaga, *Geospeedometry, an extension of geothermometry*, Adv. Phys. geochem, 1983, Vol. 3, 81-114.
- [13] A.C. Lasaga, *Chemical kinetics of water rock interaction*, J. Gephys. Res, 1984, Vol. 89B, 4009-4025.
- [14] И. Г р ж е т и ћ, *Деградациони процеси опека српских средњовековних манастира*, Југословенска конференција: Теорија и технологија синтеровања, САНУ, Београд, 1993.
- [15] J.D. Rimstidt and H.L. Barnes, *The kinetics of silica-water reaction* Geoche. Cosmoche. Acta, 1980, Vol. 44, 1683-1699.
- [16] F. Lin and C.V. Clemency, *The kinetics of dissolution of muskovite at 25°C and 1 atm CO₂ partial pressure*, Gochim. Cosmochim. Acta, 1981, Vol. 45, 571-576.
- [17] D.E. Grandstaff, *The dissolution rate of forsterite olivine from Hawaiian beach sand*, In Third International Symposium on Water-Rock Interaction Proceedings, Alberta Research Council, Edmonton, 1980, 72-74.
- [18] B. Busenberg and C.V. Clemency, *The dissolution kinetics of feldspars at 25° and 1 atm CO₂ partial pressure*, Gochim. Cosmochim. Acta, 1976, Vol. 40, 41-50.
- [19] G.R. Holdren and R.A. Berner, *Mechanism of feldspar watering I*, Experimental studies, Gochim. Cosmochim. Acta, 1979, Vol. 43, 1161-1171.
- [20] J. Schott, R.A. Berner and E.L. Sjöberg, *Mechanism of pyroxene and amphibole weathering I*, Experimental studies of iron-free minerals, Gochim. Cosmochim. Acta, 1981, Vol. 45, 2123-2135.
- [21] V.N. Flier, *The dissolution kinetics of anorthite (CaAl₂Si₂O₈) and synthetic strontium feldspar (SrAl₂Si₂O₈) in aqueous solution at temperature below 100°C*: With application to the geological disposal of radioactive nuclear wastes, Ph.D. Thesis. Pa. State University, University Park, 1982.
- [22] F. Lelong, Y. Tardy, G. Grandin, J.J. Trescases and B. Boulangé, *Pedogenesis, chemical watering and processes of formation of some supergene ore deposits*, in K.H. Wolf (ed.), Handbook of Stratabound and Stratiform Deposits, 1967, Vol. 6 New York, Elsevier.
- [23] G.C. Robinson, *The relation between pore structure and durability of bricks*, Ceramic Bulletin, 1984, Vol. 63, 295-300.
- [24] M. Maağe, *Frost resistance and pore size distribution of bricks*, Ziegelindustrie International, 1990, Vol. 43, 472-481.
- [25] G.G. Litvan, *Testing the frost susceptibility of bricks*, Ziegelindustrie International, 1990, Vol. 43, 482-486.

*M.M. Ristić, I.A. Gržetić*DEGRADATION PROCESSES OF THE BRICKS FROM SERBIAN
MIEVIAL MONASTERIES

A b s t r a c t

The most important cultural and historical monuments from medieval Serbia are undoubtedly the churches and monasteries built in Serbo-byzantine style. The main characteristic of this style is a decorative application of bricks, which have been a very important building material in those times.

By their quality, the bricks from Serbian medieval monasteries do not belong to high quality bricks resistant to weathering agents. They were made from raw materials which contained caolinite (20–47%), microcline (5–20%), albite (8–34%) and quartz (8 – 49%) (Ristić, Ćirković, Korać, 1989).

The phase analysis of the brick samples showed that they were made mostly of diopside ($CaMgSi_2O_6$), feldspars ($KAlSi_3O_8$), mica ($KAl_2AlSi_3O_{10}(OH)_2$), quartz (SiO_2), hematite (Fe_2O_3) and calcite ($CaCO_3$). This analysis revealed that the bricks have changed during time since they contained feldspars and mica minerals which are usually the products of plagioclase alterations and, as well, the minerals which contain crystal water. It is known that fresh bricks usually contain high temperature minerals like silimanite (Al_2SiO_5), mulite (Al_6SiO_{11}), gelenite ($Ca_2Al_2SiO_7$), diopside ($CaMgSi_2O_6$), wollastonite ($CaSiO_3$) and others. These minerals do not contain water in their crystal lattice, but the differential thermal analysis of the investigated samples proved the presence of wster in the brick matrix.

The natural process of alteration of high temperature into low temperature minerals under the influence of water and oxygen is continuous. These heterogeneous processes could be chemically and thermodynamically explained. Having this in mind, the goal of this article was to explain degradation processes which influence the bricks from Serbian medieval monasteries, or in other words to explain the alterations od artificial minerals under the influence of natural agents. Although these processes are very slow, the interpretation of these mechanisms is very important.

М. ВУКОБРАТОВИЋ, ОЛГА ТИМЧЕНКО

ЕКСПЕРИМЕНТИ СА
НЕТРАДИЦИОНАЛНИМ УПРАВЉАЊЕМ
ДВОНОЖНИМ РОБОТИМА

(Примљено на III скупу Одељења, 8. марта 1994)

У овом раду приказани су резултати симулационих експеримената са новим, нетрадиционалним динамичким управљањем двоножним роботима, који укључују примену фази (fuzzy) контролера. Управљачка шема симулационог модела упрошћеног двоножног механизма донекле је промењена, јер су у сваком зглобу уместо класичних контролера (PID или повратна спрега по стању) примењени локални фази контролери, чија је улога да мењају појачања локалних повратних спрега у зависности од величине грешке праћења и њеног извода за локални подсистем.

Математички модел механизма изведен је према већ постојећем концепту тачке нула-момента [1, 2, 3, 4] који је послужио у решавању проблема синтезе вештачког хода полуинверзном методом, тј. прописивањем кретања делу механизма, а затим одређивањем кретања остатка механизма тако да се задовоље услови динамичке равнотеже комплетног система уз услов поновљивости кретања (хода).

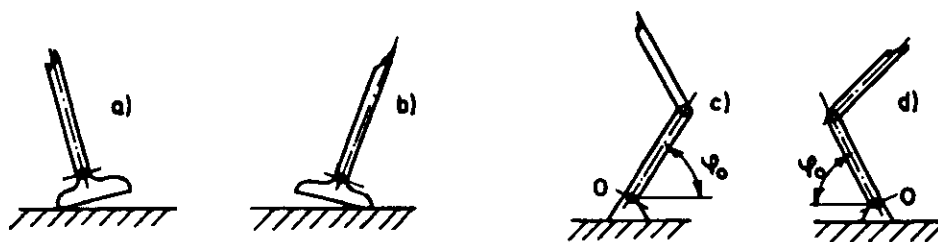
Новина код ових прилаза динамичком управљању вештачким ходом је то што се комбинује програмско управљање (feedforward) којим се решава проблем хода у непоремећеним (идеалним) условима, са фази регулаторима, који решавају проблем поремећених режима.

Симулациони резултати показују предности обавног прилаза, јер различити поремећаји, које је тешко било стабилисати традиционалним путем, могу успешно да се третирају фази контролерима, без значајнијег усложњавања управљачке шеме, како са становишта реализације, тако и са становишта нумеричке комплексности.

1. Увод

Проблем синтезе вештачког вишеножног хода је технички компликован проблем пре свега због сложене механичке структуре ножних механизма. Ножни механизми током свог функционисања мењају кинематичку

конфигурацију. Наиме, током хода, механизам се ослања на различит број ногу, у зависности од усвојеног начина хода и тренутне фазе корака. На пример, антропоморфни систем се током хода узастопно ослања на једну, па на две ноге. Из тога следи да у једном случају тело и ноге образују отворени, а у другом затворени кинематички ланац. Чак и у једноослоначкој фази, ножни механизам може да мења своју структуру, као што је приказано на слици 1. Током процеса хода, нога може да ротира око својих ивица, као што приказују слике 1.a) и 1.b). Одговарајуће кинематичке шеме дате су на сликама 1.c) и 1.d). Као што може да се примети, када се нога ослања на једну или другу ивицу, положај тачке O мења се скоковито.



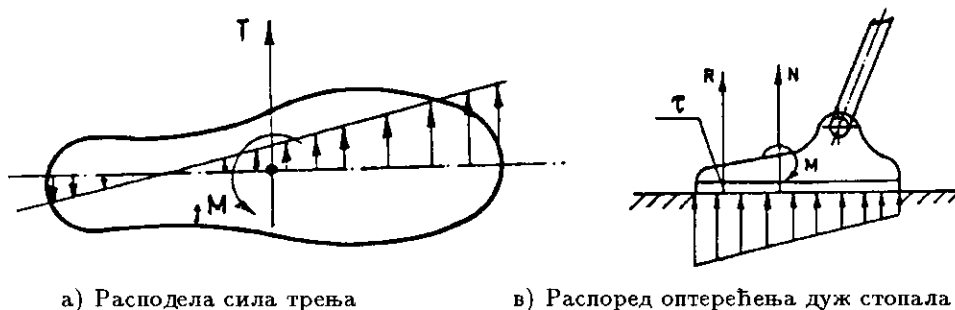
Сл. 1. Промена структуре ножног механизма

Још једна важна карактеристика механизма је та да су неки степени слободе неуправљиви. Сви унутрашњи зглобови механизма могу да буду оснажени одговарајућим актуаторима, али је за зглоб O (контакт стопала са подлогом - слика 1.c) и 1.d)) немогуће обезбедити одговарајући актуатор. Из тога следи да је степеном слободе φ_0 немогуће директно управљати. То значи да φ_0 представља пасивни, односно неоснажени степен слободе. С друге стране, промена φ_0 је врло важна, јер веће вредности тог угла могу да доведу систем до превртања (пада). Дакле, суочени смо са врло специфичном ситуацијом: потребно је управљати извесним степенима слободе механизма посредно, преко осталих оснажених степени слободе. Ово је по својој суштини динамички проблем и захтева одговарајући приступ.

Следећа карактеристика ножних механизма је та да су са фиксном подлогом повезани само преко сила трења. Цртежи 1.c) и 1.d) представљају идеализацију, и одговарајући су само у случају када реакција подлоге \vec{N} има вертикалан правац а сила трења \vec{T} је довољна да спречи клизање стопала ноге (видети слику 2a)).

Дакле, ходајући механизам карактеришу променљивост структуре, постојање неуправљивих степени слободе и значајан утицај сила трења. За даље разматрање кретања ходајућих механизма неопходне су информације о погонским моментима који делују у зглобовима механизма, као

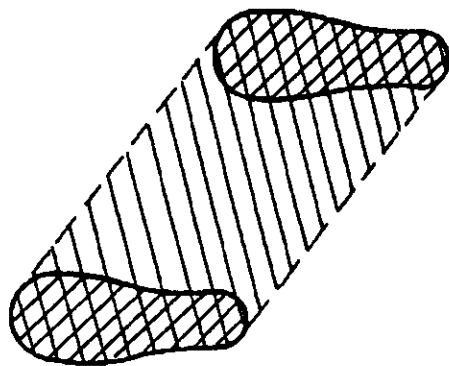
и информација о силама реакције које делују на контактима стопала са подлогом. Ове информације су од суштинског значаја за одређивање понашања система.



Сл. 2. Расподела контактне силе код двоножног хода

Да би се превазишле поменуте тешкоће, уведена је дефиниција тачке нула-момента (ТОМ) [1, 2]:

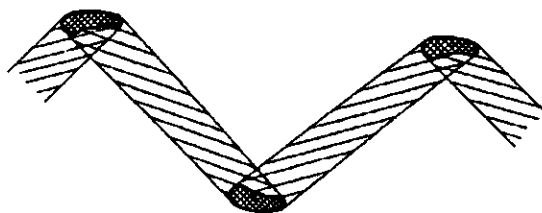
Ако претпоставимо да је током кретања ходајућег механизма трење између стопала и подлоге довољно велико и да у извесном временском тренутку на центар масе механизма делују укупна сила \vec{F} и момент \vec{M} , тада је ТОМ тачка на подлози у којој сила \vec{F} и момент \vec{M} могу да се замене само резултујућом силом.



Сл. 3. Област могућих положаја ТОМ-а у једноослоначкој и двоослоначкој фази двоножног хода

Посматрајмо сада двоножни механизам. У случају када је ослонац само на једној ноzi, јасно је да ТОМ не може да лежи изван површине контакта стопала са подлогом. У двоослоначкој фази хода, ТОМ не може да лежи изван површине која је на слици 3. ограничена испрекиданим линијама. У супротном случају, сила реакције подлоге била би усмерена наниже, што је немогуће. Током хода, ТОМ се помера унутар површине

приказане сликом 4. У једноослоначкој фази хода, ТОМ ће лежати унутар двоструко шрафиране површине, а у двоослоначкој фази негде на једноструко шрафираним површинама, дакле између трагова стопала. У оквиру ових граница ТОМ може да се креће по различитим законима, континуално или скоковито, у зависности од типа хода који се реализује.



Сл. 4. Област могућих положаја ТОМ-а током двоножног хода

Једначине динамичке равнотеже ножног механизма могу да се формирају у односу на ТОМ. Тако постаје могуће да се реши овај врло специфичан проблем динамике. Наиме, за било коју другу тачку осим за ТОМ, једначине динамичке равнотеже би садржавале непознате силе динамичке реакције, па би било немогуће интегралити их. Али, када се интеграле једначине написане за ТОМ, чиме се одређују и унутрашње позиције, брзине и убрзања свих зглобова механизма, постаје могуће да се одреде силе реакције, јер оне зависе од свих горе израчунатих величина.

2. Управљачка стратегија код синтезе вештачког хода

С обзиром на сложеност структуре ножних механизма и с обзиром на оно што је познато о биолошким решењима за управљање ходом, јасно је да ће код синтезе управљања на извршном нивоу синтеза контролера у неколико корака бити најпогоднија стратегија. Овде предлагемо четири корака у синтези контролера:

- Најпре се прописује начин кретања за део система (трајекторије зглобова ногу), а онда се израчунава компензационо кретање за преостали део система, тако да се постигне динамичка равнотежа целокупног система [5, 2, 3, 4]. Затим се израчунавају номинални погонски моменти, чиме се, заправо, задаје номинална динамика система, тј. управљање у отвореној спреси.
- Затим се за сваки зглоб синтетизују локални контролери, било класични PID контролери, било локална повратна спрега по стању. Ово значи да се посматра потпуно декуплован систем, и да се покушава стабилизација сваког зглоба посебно, дакле примењујемо децентрализовано управљање.

- За поремећаје које није могуће стабилисати само локалним контролерима, неопходно је увести и додатне повратне спреге које ће регулисати и утицај спрезања међу подсистемима, као и утицај силе реакције подлоге која делује на месту контакта стопала са подлогом и може да изазове ротацију целог система око ивице стопала. Уобичајен начин за такву регулацију је увођење глобалног управљања због јаког спрезања међу подсистемима [6, 7] (трећи корак у синтези управљања), и повратне спреге по сили реакције у циљу стабилизације утицаја сила реакције подлоге [4] (четврти корак у синтези управљања). Две последње повратне спреге могуће је реализовати на један од следећих начина:

– С обзиром на то да се спрезање између подсистема код сложених механичких система изражава преко генералисаних сила које је могуће директно мерити у зглобовима механизма током рада, могуће је увести повратне спреге по силама као глобално управљање. За реализацију овог начина неопходан је сензор силе/момента у сваком зглобу механизма, а за реализацију повратне спреге по силама реакције и сензор силе на сваком стопалу механизма.

– Други начин за увођење глобалног управљања је срачунавање у реалном времену сила спрезања међу подсистемима. Али, та израчунавања су нумерички комплексна и захтевају микропроцесоре високих могућности.

Међутим, при реализацији обе ове стратегије јављају се извесни проблеми. Прво, динамички модел може да буде представљен врло сложеним системом нелинеарних диференцијалних једначина [6]. Важно питање у пројектовању управљања је до које мере је неопходно прецизно моделирати динамику система. Компликованији модели дозвољавају прецизније законе управљања, али са друге стране захтевају скупљу и сложенију опрему за реализацију управљачког система. Да би се решило питање сложености модела, предложено је више компјутерски оријентисаних метода за аутоматско генерисање било комплетних динамичких модела, било њихових упрошћених форми [8]. Следећи проблем проистиче из чињенице да сваки модел роботског механизма представља више или мање верну апроксимацију стварног понашања робота. Увек остају немоделирани ефекти чије би укључење у модел знатно повећало његову сложеност. Решење овог проблема могло би да буде у увођењу давача сила, тј. сензора сила у сваком зглобу. С обзиром на то да они мере стварне укупне динамичке силе, повратна спрега по овако измереним силама је робустна на варијације параметара и непрецизности у задавању модела. Међутим, примена сензора сила у зглобовима робота такође је скопчана са техничким проблемима. Пре свега, то обично захтева специјалну конструкцију зглобова, а затим ови сензори смањују структурну крутост механизма.

Алтернативни начин за решавање проблема сложености и непрецизности модела нуди управљање засновано на знању и техникама апроксимативног закључивања. Примена апроксимативног закључивања у аутоматском управљању привукла је пажњу многих истраживача који испитују могућност аутоматског управљања процесима (системима) који су или лоше дефинисани, или имају и сувише компликован математички модел, или је потребно да се управљање одвија у радним условима који нису унапред познати, или су сами захтеви на управљање недовољно прецизно постављени. У овом пољу истраживања контролери базирани на примени фази логике, инспирисани радовима Задеа (Zadeh) [9], стекли су велику популарност у последњој декади [10, 11].

У тексту који следи сваки од четири поменута корака синтезе управљања вештачким ходом биће детаљније описан.

У том циљу усвојена је децентрализована управљачка структура, и одређен је закон управљања у форми:

$$u_i = u_i^0 + \Delta u_i^{Lf} + \Delta u_i^G + \Delta u_i^F \quad (1)$$

где је:

- i - редни број зглоба, $i = 1, 2, \dots, n$;
- u_i - управљачки напон i -тог зглоба;
- u_i^0 - програмско управљање (feedforward), израчунато за задату трајекторију;
- Δu_i^{Lf} - локални управљачки сигнал, чија се вредност првобитно одређује као излаз класичног PID контролера или повратне спреге по стању, а затим се мења у складу са променом појачања локалних повратних спрега које је последица рада фази контролера;
- Δu_i^G - глобално појачање;
- Δu_i^F - управљачки сигнал који стабилизује утицај силе реакције на контакту стопала са подлогом.

2.1. Синтеза хода и програмско управљање

Овај корак у синтези управљања вештачким ходом је заправо техничка имитација природне способности живих организама да изводе регуларне (стационарне) локомоционе покрете помоћу управљачких механизма формираних учењем у раним фазама живота. Тако, базирано на "позајмљеном" репертоару људског или животињског хода (трајекторије зглобова ногу на пример) по равној подлози и по унапред познатим препрекама, могуће је синтетизовати и преостале (компензационе) покрете.

Пре двадесет пет година, одређен је алгоритам у својој првобитној форми за задавање вештачке синергије (позиције, брзине и убрзања свих сегмената механизма током кретања) код синтезе антропоморфног хода [5, 3]. Користећи тај алгоритам, који је проширен каснијим истраживањима

[4], И. Като са Васеда универзитета (Токио) је 1984. године реализовао динамички ход двоножног робота WL-10RD [12]. Недавно, на бази концепта ТОМ-а, реализован је у Јапану динамички ход четвороножних механизма ТИТАН IV и ТИТАН VI [13].

Главна тешкоћа и специфичност проблема одређивања вештачке синергије лежи у чињеници да решавање динамике кретања ножних механизма не припада у потпуности ни првом ни другом задатку механике. Због непознатих сила реакције подлоге, немогуће је срачунати убрзања сегмената механизма, па самим тим и комплетну синергију механизма. Важи и обрнуто: пошто није позната синергија механизма, није могуће одредити силе реакције подлоге, јер оне зависе од целокупног кретања механизма.

Истакнимо да је тачка нула-момента изузетно значајна у решавању овог проблема. То је заправо тренутна тачка према којој је укупни момент свих сила нула. Трајекторију тачака нула-момента је релативно једноставно добити експериментом. Мерења се врше да би се добио вернији закон кретања тренутне нападне тачке сила реакције, што обезбеђује природни портрет динамике хода.

Код описа овог метода биће узет за пример двоножни механизам. Исти метод, уз извесна прилагођења која је једноставно увести, могуће је применити и на четвороножне и шестеножне механизме.

Нека је τ тачка нула-момента (слика 2b).

Применом Даламберовог (D'Alembert) принципа добија се да су услови динамичке равнотеже:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{\rho}_{\tau_i} \times (\vec{F}_i + \vec{G}_i) + \vec{M}_{F_i}) \vec{e}_x = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{\rho}_{\tau_i} \times (\vec{F}_i + \vec{G}_i) + \vec{M}_{F_i}) \vec{e}_y = 0 \quad (3)$$

где је $\vec{\rho}_{\tau_i}$ радијус-вектор од тачке τ до центра масе i -тог сегмента, \vec{F}_i , \vec{M}_{F_i} су главни вектор и главни момент инерцијалне силе i -тог сегмента, \vec{G}_i је тежина сваког посебног сегмента, а \vec{e}_x , \vec{e}_y су јединични вектори међусобно нормалних оса X , Y кроз тачку τ .

Једначине равнотеже сила реакције за тренутну тачку нула-момента могу да се напишу у облику:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{M}_{F_i} + \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i) \vec{e}_\zeta = 0 \quad (4)$$

где је $\vec{\rho}_i$ радијус-вектор од тачке нула-момента до продорне тачке вертикалне осе ζ кроз раван контакта стопала са подлогом, а \vec{e}_ζ је јединични вектор осе ζ .

Једначине (2), (3) и (4) дају три релације између координата система. Како цео систем има n степени слободе, где је n веће од 3, трајекторије преосталих $(n - 3)$ координата могуће је задати на релативно произвољан начин, а најбоље према снимљеном узорку људског хода. Ово важи у случају да нема додатних тачака нула-момената које се јављају у пасивним зглобовима руку (случај фиксираних руку). Ако постоје пасивни зглобови (нпр. у рукама механизма), за сваку ТОМ која се јавља у пасивном зглобу могуће је написати три додатне једначине динамичке равнотеже, тако да се смањује укупан број координата за које треба прописати кретање.

Дакле, синтеза вештачке синергије изводи се на следећи начин: за $(n-3)$ координата се прописује кретање, а преостале координате се налазе из једначина динамичке равнотеже (2), (3) и (4). Једноставно речено, шема кретања робота је следећа: “ноге” се померају на начин снимљен на живом бићу, а тело изводи периодичне компензационе покрете који обезбеђују кретање ТОМ-а по задатој трајекторији и динамичку равнотежу целокупног система у фронталној и уздужној равни, према усвојеној вертикалној оси. Могуће је формирати базу података за различите номиналне режиме: ходање по равној површини и по различитим познатим препрекама, уз различите карактеристике терена. Како ходање припада периодичним покретима, за сваки тип хода потребни су подаци само за половину периода трајања једног корака.

Заправо, у синтези управљања, ово је корак на коме се одређује номинална динамика система [1, 2, 3, 4], јер је управљачки сигнал у отвореној спрези (програмско управљање) $u^0 = [u_1^0 \dots u_n^0]^T$ могуће једноставно одредити ако знамо номиналне моменте у зглобовима и моделе покретача за сваки зглоб.

2.2. Локални контролери

Локални контролер у сваком зглобу механизма, дакле контролер који има информације само о стању зглоба на који је примењен, могуће је реализовати на више начина, а најуобичајенији су класични PID контролер и повратна спрега по стању. Који ће се од ова два приступа применити зависи како од реда модела извршних органа, тако и од воље пројектанта. С обзиром на то да су детаљи синтезе ових контролера познати из класичне теорије аутоматског управљања, овде о њима више неће бити речи.

2.3. Повратна спрега по силама спрезања између подсистема (глобално управљање)

Као што је раније већ наглашено, локални контролери гарантују жељено понашање локалних подсистема само ако је систем потпуно декуплован. Јасно је да реални подсистеми никад не могу да се идеално декуплују, чак ни кад је примењено централизовано програмско управљање,

које знатно смањује купловање. Модел одступања од номиналне трајекторије за i -ти актуатор (тј. за i -ти подсистем) дат је у форми:

$$S_i: \Delta \dot{x}_i = A_i \Delta x_i + b_i \Delta u_i + f_i \Delta P_i, \quad (5)$$

где су A_i , b_i и f_i матрице модела актуатора, Δx_i је одступање вектора стања актуатора од његове номиналне трајекторије (ако је актуатор једносмерни мотор, посматрамо његов модел другог реда, где је $x = [q, \dot{q}]^T$, тј. позиција и брзина зглоба су координате стања) а Δu_i одступање улазног сигнала од његове номиналне вредности. ΔP_i представља ефекте купловања међу подсистемима и функција је координата стања свих подсистема. Јасно је да ни номинално програмско управљање ни локалне повратне спреге не могу да компензују тај члан. Ако је његов дестабилишући утицај велики, неопходно је да се уведе још једна, допунска, повратна спрега, која ће имати информације о координатама стања за цео систем [6]:

$$\Delta u_i^G = -K_i^G \frac{\bar{f}_i}{\bar{b}_i} \Delta P_i^*, \quad (6)$$

где је ΔP_i^* скаларна функција (измерена или израчуната) која представља одступање динамичког оптерећења (сила) од њиховог номинала ΔP_i , а K_i^G је појачање глобалне повратне спреге, и његова вредност се обично бира између 0.5 и 1.

2.4. Повратна спрега по сили реакције подлоге

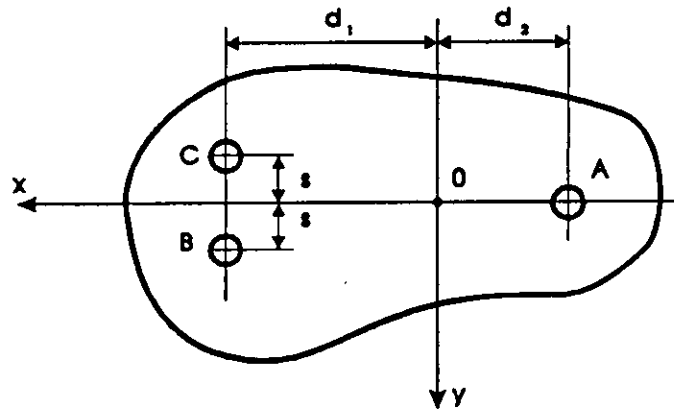
Могуће је да се догоди да локално и глобално управљање, која су дефинисана у претходним корацима, нису довољна да обезбеде жељено понашање неоснаженог степена слободе који се јавља на контакту стопала са подлогом и има доминантну улогу у одржању равнотеже целокупног система. Неоснаженим степеном слободе није могуће управљати да би се кориговало одступање његовог понашања од номинала, тако да је неопходно увести додатну повратну спрегу у неки од оснажених подсистема, да би се индиректно утицало на неоснажени подсистем преко ефеката купловања.

Незадовољавајуће понашање неоснаженог подсистема манифестује се померањем тачке нула-момента (ТОМ-а) са њене номиналне трајекторије. За познато кретање целокупног механизма, сила реакције подлоге дефинисана је својим интензитетом, правцем и нападном тачком која је негде испод стопала. Ако се на стопало монтирају три сензора силе, као на слици 5, а систем изводи задато кретање, онда измерене вредности вертикалних компоненти силе реакције подлоге R_A , R_B и R_C одговарају њиховим номиналним вредностима, па је могуће одредити номиналну трајекторију ТОМ-а. Мерењем вертикалних компоненти силе реакције подлоге R_A^* , R_B^* и R_C^* кад на механизам делују поремећаји одређују се стварне позиције ТОМ-а, из једначина:

$$s(\Delta R_B - \Delta R_C) = M_x^{ZMP} = R_z \Delta y \quad (7)$$

$$d_1(\Delta R_B + \Delta R_C) - d_2 \Delta R_A = M_y^{ZMP} = R_z \Delta x \quad (8)$$

где су $\Delta R_A = R_A - R_A^*$, $\Delta R_B = R_B - R_B^*$ и $\Delta R_C = R_C - R_C^*$ одступања одговарајућих измерених сила од њихових номиналних вредности; R_z је резултујућа вертикална компонента силе реакције подлоге, Δx и Δy су одступања стварне позиције ТОМ-а од њеног номиналног положаја, а растојања s , d_1 и d_2 су приказана на слици 5. Утицај хоризонталне компоненте силе реакције подлоге је занемарен, с обзиром да се сматра да је трење довољно велико да спречи клизање ослоначке ноге по подлози.



Сл. 5. Распоред сензора сила испод стопала механизма

Јасно је да се због одступања Δx и Δy положаја ТОМ-а дуж x - и y -осе јављају два момента M_x^{ZMP} и M_y^{ZMP} који делују на све сегменте механизма. С обзиром на структуру механизма, неопходна су нам бар два оснажена подсистема за компензацију померања ТОМ-а у оба правца—нека су то i -ти и j -ти оснажени подсистеми. Тада је неопходно реализовати додатне momente ΔP_i^{ZMP} и ΔP_j^{ZMP} , које је могуће срачунати из једначина (7) и (8), познатог модела механизма и задатог начина хода [4]. Претпоставља се да ће ови додатни momenti изазвати промене убрзања одговарајућих подсистема, док ће њихове брзине остати приближно непромењене због деловања ових момената.

Уведена повратна спрега има једину улогу да одржава жељену позицију тачке нула-момента. Сасвим је могуће да та повратна спрега чак нешто поквари праћење унутрашњих трајекторија осталих зглобова, али ће динамичка равнотежа целокупног система бити очувана, што је најважнији задатак код двоножног хода.

2.5. Фази контролер

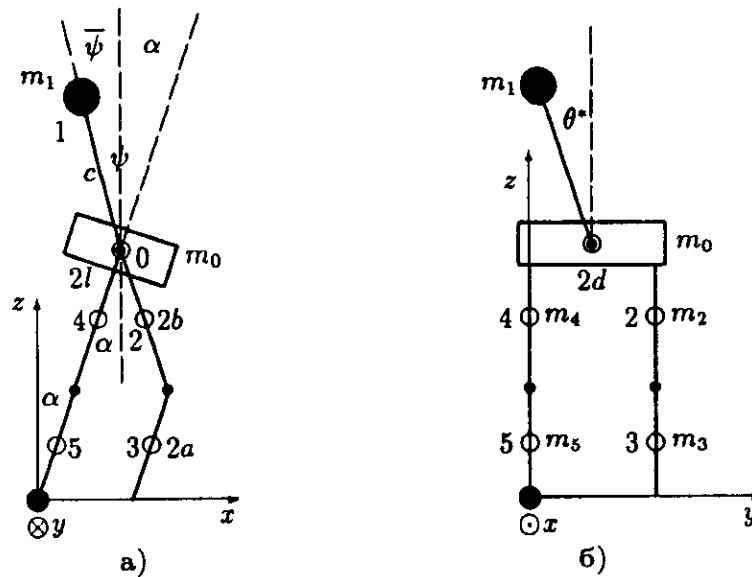
Фази контролери различитих типова развијени су у последње две декаде [14, 10, 15, 16]. Фази контролер се обично поставља на канал грешке и састоји се од лингвистичког фази алгоритма који упоређује

вредности задатих променљивих за посматрани процес и на основу тога одређује управљачку акцију. Фази правила која се користе зависе од типа система којим се управља као и од хеуристичких функција које се користе. У роботизи, фази контролери су примењени, на пример, за динамичко управљање манипулационим роботом [17] и за решавање навигационих проблема код аутономних мобилних робота [18].

У овом раду применили смо фази регулатор као адаптивни локални контролер. За сваки зглоб ножног механизма пројектован је по један фази контролер чија је улога да, према усвојеним правилима, мења појачања локалних контролера да би се добило боље праћење номиналне трајекторије.

3. Пример

Да бисмо потврдили изложени хибридни концепт управљања, направљен је симулациони експеримент са упрошћеним двоножним механизмом. У овом одељку описаћемо параметре робота и управљачког система који су коришћени у симулационим експериментима.



Сл. 6. Посматрани механизам у уздужној и бочној равни

3.1. Модел двоножног механизма

Посматрали смо механизам са шест сегмената приказан сликом 6. Усвојен је „клизајући“ начин хода. Његова особеност је та што су обе ноге стално у кинематичком контакту с подлогом, с тим што је тежина на само једној од ногу. Једна од ногу је увек испружена, а натколенице обе

ноге су стално паралелне. Карлични део система O круто је повезан за ногу која је испружена. У том случају за опис положаја ногу карличног дела довољна је само једна координата – угао α између испружене ноге и вертикале. Горњи део модела чини концентрисана маса на крутом штапу занемарљиве масе (обрнуто клатно). У односу на карлични део система O ово клатно има два степена слободe, један у уздужној (угао ψ) и један у бочној (угао θ) равни. Начин дефинисања угла ψ види се са слике 6а). Слика 6б) показује величину угла θ само за $\psi = 0$; за $\psi \neq 0$ слика 6б) приказује пројекцију угла θ на вертикалну раван θ^* . Због једноставнијег математичког записивања, уместо угла ψ у прорачунима се користи угао $\bar{\psi}$, такође приказан на слици 6а).

Кинематички и динамички параметри механизма приказани су табелом 1. Све нумеричке вредности су у јединицама SI система.

Таб. 1. Кинематички и динамички параметри механизма

сегмент	име	облик	дужина	маса	мом.инерц.
0	карлица	танки квадар	0.21×0.3	6.75	0.0127
1	тело	концентрисана маса на дугом штапу без масе	0.865	5	–
2	десна натколеница	дуги, узан штап	0.49	1.9	0.038
3	десна потколеница	дуги, узан штап	0.465	1.3	0.0234
4	лева натколеница	дуги, узан штап	0.49	1.9	0.038
5	лева потколеница	дуги, узан штап	0.465	1.3	0.0234

За посматрани начин хода усвојено је да се угао α мења према закону

$$\alpha = \frac{\alpha_m}{2}(1 - \cos \omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (9)$$

где је α_m максимална угаона амплитуда, а T је полупериод корака.

Када је промена угла α задата, за горњи део система је могуће одредити номиналну трајекторију, тако да буду задовољене једначине (2) и (3), узимајући у обзир још и услове поновљивости:

$$[\theta(0) \ \psi(0) \ \dot{\theta}(0) \ \dot{\psi}(0)]^T = [-\theta(T) \ \psi(T) \ -\dot{\theta}(T) \ \dot{\psi}(T)]^T \quad (10)$$

који обезбеђују периодичност корака.

Централизован динамички модел механичког дела система могуће је написати у форми:

$$P = H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}), \quad (11)$$

што у MATLAB-овом m -програмском језику може да се израчуна следећим програмом:

```

function [hh, ha] = k_hh(a, t, p, par, faza)
stsp = t(5) * p(5);    % elements of H-matrix
stcp = t(5) * p(6);    hh(1, 1) = h1 * caca + h2 * sasa + g1;
ctsp = t(6) * p(5);    hh(1, 2) = h4 * stsp * ca + h5 * stcp * sa;
ctcp = t(6) * p(6);    hh(1, 3) = h6 * ctcp * ca + h5 * ctsp * sa;
tp = t(2) * p(2);      hh(2, 1) = g2 * stcp * sa + h10 * stsp * ca;
ctct = t(6) * t(6);    hh(2, 2) = g3 * cpcp + g4 * spsp;
stct = t(5) * t(6);    hh(2, 3) = g5 * stcp * ctsp;
cpcp = p(6) * p(6);    hh(3, 1) = h10 * ctcp * ca + g2 * ctsp * sa;
spsp = p(5) * p(5);    hh(3, 2) = 0;
ca = a(6);             hh(3, 3) = g3 * ctct;
sa = a(5);
sasa = sa * sa;        % elements of h-vector
caca = ca * ca;        ha(1) = a(4) * (h3 * saca) + t(4) *
saca = sa * ca;        (h4 * ctsp * ca + h5 * ctcp * sa) + ...
                        p(4) * (h4 * ctsp * ca + h5 * ctcp * sa) + ...
                        tp * (h7 * stcp * ca + h8 * stsp * sa) + h9 * sa;
ha(2) = a(4) * (g2 * stcp * ca + h11 * stsp * sa) + ...
                        p(4) * (g3 * stcp * ctcp + g4 * stsp * ctsp) + ...
                        tp * (g7 * stsp * stcp) + g8 * stcp + mkompt;
ha(3) = a(4) * (h11 * ctcp * sa + g2 * ctsp * ca) + ...
                        tp * (g6 * stct) + g8 * ctsp + mkompp;

```

Три једносмерна мотора су примењена у систему, и они реализују углове α , θ и ψ . Њихове моделе могуће је написати у форми:

$$S_i: \dot{x}_i = A_i x_i + b_i u_i + P_i, \quad (12)$$

где је A матрица димензија 2×2 , тј. примењен је модел другог реда, па у моделу комплетног i -тог подсистема (механички део + актуатор) позиција и брзина зглоба представљају променљиве стања. Према томе, имамо:

$$x_1 = [\alpha \dot{\alpha}]^T, \quad x_2 = [\theta \dot{\theta}]^T, \quad x_3 = [\psi \dot{\psi}]^T \quad (13)$$

а за централизовану систем:

$$x = [\alpha \dot{\alpha} \theta \dot{\theta} \psi \dot{\psi}]^T. \quad (14)$$

3.2. Избор управљачких параметара

Пошто је примењен модел актуатора другог реда (12), при чему су позиција и брзина зглоба варијабле стања, погодно је да се примени повратна спрега по стању уместо класичног PID контролера. Локалне повратне спреге се уводе у форми:

$$u_i^L = k_i^p \Delta x_i + k_i^v \dot{\Delta x}_i, \quad (15)$$

а за систем у затвореној повратној спрези се захтева да има фактор пригушења $\zeta = 0.7$ (слабо поткритично пригушен систем) и $\omega_n = 5$. Линеаризацијом нелинеарног система за типичан корак, одређују се позиционо и брзинско појачање k_i^p и k_i^v у сваком зглобу.

Иако је модел који смо посматрали релативно слабо куплован (углавном степени слободе α и ψ утичу један на други), примењено је и глобално управљање, јер би за сложенији модел механизма оно било неопходно. Глобално управљање је примењено преко израчунавања динамичких сила у зглобовима у реалном времену, према једначини (6), а за вредност глобалног појачања усвојено је за сваки зглоб $K_i^G = 0.5$, $i = 1, 2, 3$.

Кретања концентрисане масе којом је представљено тело у θ и ψ правцу су усвојена за компензацију померања тачке нула-момента из њеног номиналног положаја. Два додатна компензациона момента за актуаторе који реализују углове θ и ψ се израчунавају према једначинама (7) и (8) са циљем да се тачка нула-момента врати назад у свој номинални положај. С обзиром на то да ТОМ мора да буде на површини контакта стопала са подлогом, у овим прорачунима се, уместо тачкастог стопала, сматра да постоје стопала без масе, задатих димензија.

Фази контролер у форми lookup табеле примењен у сваком зглобу реализован је према раду [19], и његова улога је да подешава појачања k_i^p и k_i^v , чије су почетне вредности одређене на класичан начин, преко повратне спреге по стању.

Пре него што се на њих примене фази правила за одређивање потребних промена локалних појачања, на улазе фази контролера Δq и $\Delta \dot{q}$ (одступања координата стања од њихових номиналних вредности) примењује се нелинеарна трансформација да би се добиле нормализоване вредности $\Delta q'$ и $\Delta \dot{q}'$ у затвореном интервалу $[-1, +1]$. Тако добијени улазни нормализовани простор грешке се затим дели на фази области (примарне фази скупове) и сваком од тих скупова се придружују одређена фази правила за подешавање појачања. Резултат примене правила на задате $\Delta q'$ и $\Delta \dot{q}'$ су два фази скупа $\Delta \tilde{K}^p$ и $\Delta \tilde{K}^v$, који су такође дефинисани на нормализованом простору $[-1, +1]$. Добијене фази промене представљају улаз алгоритма за дефазификацију, и као резултат се добијају тачне вредности, које се конвертују у стварну промену појачања преко примене одговарајуће излазне нелинеарне трансформације.

Поље догађаја за сваки од нормализованих улаза овде је подељено на три фази интервала, који су означени лингвистичким варијаблама *негативно*, *нула*, *позитивно*, а карактерисани су функцијама припадности троугаоног облика.

У раду [19] су усвојена релативно једноставна хеуристичка правила за подешавање појачања. Појединачно правило има форму:

Експерименти са нетрадиционалним управљањем двоножним роботима 211

Правило r : ако је $\Delta q'$ једнако \tilde{A}_r и $\Delta \dot{q}'$ једнако \tilde{B}_r онда је $\Delta K'$ једнако \tilde{C}_r (16)

при чему $\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r \in \{ \text{негативно, нула, позитивно} \}$.

Правила за подешавање појачања су шематски приказана табелом 2.

Таб. 2. Правила за подешавање појачања

Позиц. гр. Брз. грешка	негативно	нула	позитивно
позитивно	нула	нула	позитивно
нула	позитивно	негативно	позитивно
негативно	позитивно	нула	нула

За задате $\Delta q'$ и $\Delta \dot{q}'$, резултат израчунавања једног појединачног правила је фази скуп $\Delta \tilde{K}_r$ окарактерисан својом функцијом припадности:

$$\mu_{\Delta \tilde{K}_r}(\Delta K') = \mu_{\tilde{A}_r}(\Delta q') \wedge \mu_{\tilde{B}_r}(\Delta \dot{q}') \rightarrow \mu_{\tilde{C}_r}(\Delta K') \quad (17)$$

а резултат примене целокупне базе фази правила је унија $\Delta \tilde{K}$ појединачних $\Delta \tilde{K}_r$, описана са:

$$\mu_{\Delta \tilde{K}}(\Delta K') = \bigvee_r \mu_{\Delta \tilde{K}_r}(\Delta K'). \quad (18)$$

Примењени алгоритам за израчунавање фази правила и дефазификацију урађен је по препорукама Јинга (Ying) и Шилера (Siler) [20]. Према тим препорукама, оператори “ \wedge ” и “ \rightarrow ” се реализују као минимум оператори, док се оператор “ \vee ” реализује као ограничена сума.

Тачан излаз $\Delta K'$ генерише се као отежњена средња вредност оних вредности за које излазни фази сетови достижу своје максимуме, при чему нормализовани степени припадности служе као тежински фактори. Добијене вредности $\Delta K'$ интерпретирају се као нормализоване релативне промене појачања. Тако, за следећи интеграциони интервал, нова вредност појачања се израчунава према изразу

$$K(t + \Delta t) = \min(\max(K(t) \cdot e^{\beta \Delta K'}, K_0), K_{max}), \quad (19)$$

где параметар β одређује максималну релативну промену појачања у два узастопна интервала, а K_0 и K_{max} су минимална и максимална дозвољена вредност појачања K .

У нашој управљачкој шеми, оба појачања K^p и K^v мењају се по истом скупу фази правила, а за параметар β изабране су вредности $\beta_p = \log 1.2 = 0.1823$ за позиционо појачање и $\beta_v = 0.5\beta_p$ за брзинско појачање. Ове вредности одговарају максималној релативној промени од 20% по интеграционом интервалу за позиционо појачање.

Да бисмо смањили нумеричку комплексност, вредности $e^{\beta\Delta K'}$ за позиционо и брзинско појачање унапред се израчунају за еквидистантне вредности $\Delta q'$ и $\Delta \dot{q}'$ и сместе у lookup табелу. С обзиром на то да та табела има $2^n \cdot 2^n$ поља, $2n$ поређења је неопходно да би се нашло поље које одговара задатим грешкама Δq , $\Delta \dot{q}$.

4. Симулациони резултати и дискусија

У овом делу рада ћемо извршити поређење симулационих резултата понашања механизма са фази контролерима и без њих у различитим симулационим условима. Основни параметри хода које смо варирали били су максимална угаона амплитуда корака α_{max} и полу период корака T , тако да се брзина хода мењала у опсегу од 2.56 km/h ($\alpha_{max} = 20^\circ, T = 1[s]$) до 5.82 km/h ($\alpha_{max} = 30^\circ, T = 0.7[s]$).

Када смо израчунавали номинално управљање, користили смо различите упрошћене моделе динамике система:

1. модели актуатора + гравитациони чланови;
2. модели актуатора + гравитациони чланови + сопствена инерција;
3. модели актуатора + гравитациони чланови + сопствена инерција + остали инерциони чланови;
4. модели актуатора + гравитациони чланови + сопствена инерција + остали инерциони чланови + брзински чланови (комплетан модел).

Управљачки сигнал смо израчунавали у различитим формама: са глобалним управљањем и без њега, са фази контролерима и без њих. Испитивали смо три вредности померања ТОМ-а: када померања нема, када је померање мало (5 cm дуж x -осе и 2 cm дуж y -осе) и када је померање велико (20 cm дуж x -осе и 5 cm дуж y -осе).

У следећим одељцима ћемо приказати добијене резултате за $\alpha_{max} = 30^\circ$ и $T = 0.7[s]$. Аналогни резултати су добијени и за остале комбинације поменутих параметара. Поредићемо случајеве у којима је примењен фази контролер са одговарајућим случајевима без фази контролера.

4.1. Тачност праћења трајекторије

У табели 3 су приказане просечне грешке праћења (средњоквадратна грешка за сва три зглоба) и максимална одступања од номиналне трајекторије која се јављају током корака, и то за случајеве само са класичним контролером и са фази контролером, и то са глобалним управљањем ($K^G = 0.5$) и без глобалног управљања ($K^G = 0$). Број рачунских

d ТОМ	K^c	Ефекти укључени у номин. упр.	Класични контролер			Фази контролер		
			ср.гр.	маг. гр.	N flops	ср.гр.	маг.гр.	N flops
$dx = 0$ $dy = 0$	0	Актуатори + гравитац.	0.0158	0.6945	312	0.0112	0.6512	379
		Претх. + сопст.инерц.	0.0130	0.6410	326	0.0105	0.6327	392
		Претх. + цела инерција Комплетан модел	0.0128	0.6411	356	0.0104	0.6328	423
	0.5	Актуатори + гравитац.	0.0156	0.6945	319	0.0110	0.6512	386
		Претх. + сопст.инерц.	0.0128	0.6410	346	0.0102	0.6327	412
		Претх. + цела инерција Комплетан модел	0.0126	0.6474	399	0.0101	0.6355	406
$dx = 0.06$ $dy = 0.02$	0	Актуатори + гравитац.	0.0154	0.6945	372	0.0113	0.6512	439
		Претх. + сопст. инерц.	0.0132	0.6410	386	0.0106	0.6327	453
		Претх. + цела инерција Комплетан модел	0.0128	0.6111	415	0.0103	0.6328	483
	0.5	Актуатори + гравитац.	0.0151	0.6945	379	0.0111	0.6512	446
		Претх. + сопст.инерц.	0.0130	0.6410	406	0.0105	0.6327	472
		Претх. + цела инерција Комплетан модел	0.0126	0.6480	570	0.0100	0.6356	636
$dx = 0.20$ $dy = 0.05$	0	Актуатори + гравитац.	0.0165	0.6945	372	0.0113	0.6512	440
		Претх. + сопст.инерц.	0.0144	0.6410	386	0.0107	0.6327	454
		Претх. + цела инерција Комплетан модел	0.0135	0.6411	415	0.0106	0.6328	484
	0.5	Актуатори + гравитац.	0.0163	0.6945	379	0.0110	0.6512	447
		Претх. + сопст.инерц.	0.0141	0.6410	406	0.0106	0.6327	474
		Претх. + цела инерција Комплетан модел	0.0138	0.6475	460	0.0105	0.6356	528
			0.0133	0.6481	570	0.0103	0.6357	637

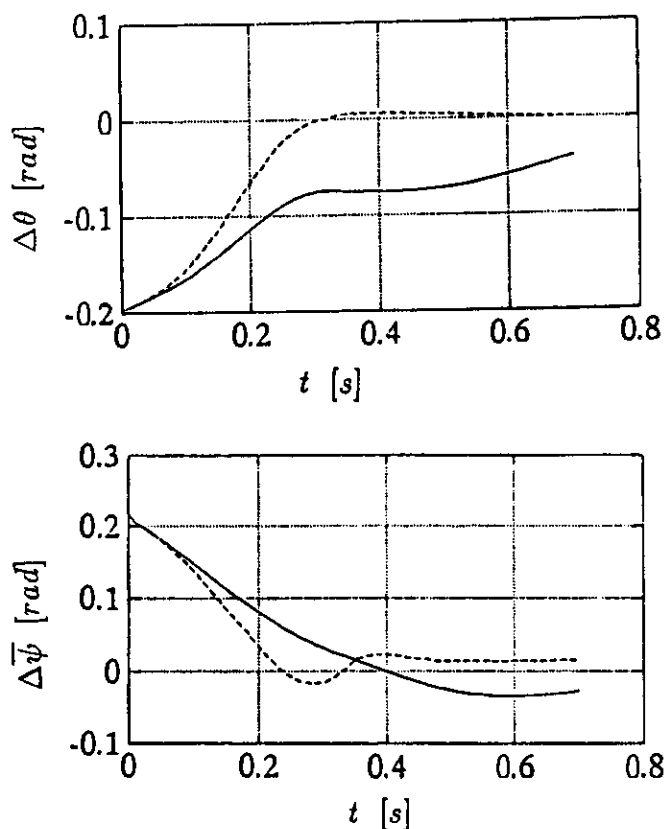
Таб. 3 Грешке праћена за различиту сложеност израчунавања номинала

операција у покретном зарезу (N floors) по интеграционом интервалу који је потребан за израчунавање сваког појединачног закона управљања је такође приказан у табели.

Може да се види да су просечне грешке 15% до 50% мање када је примењен фази контролер у односу на исти случај без фази контролера, а да су и максималне грешке смањене за пар процената.

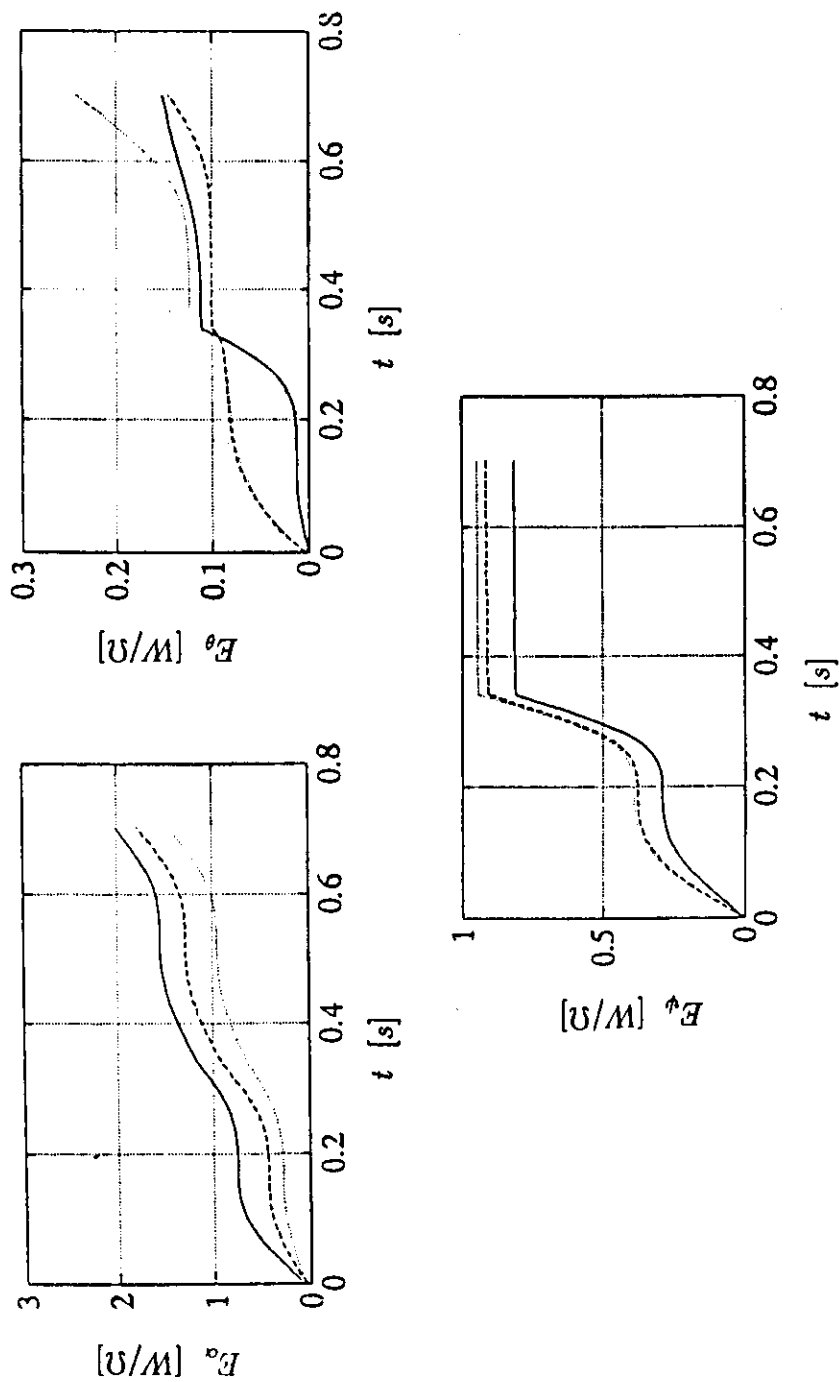
4.2. Одржање динамичке равнотеже

Повратна спрега за регулисање позиције ТОМ-а реализована је на класичан начин – одступање ТОМ-а од номиналне позиције изазива по-

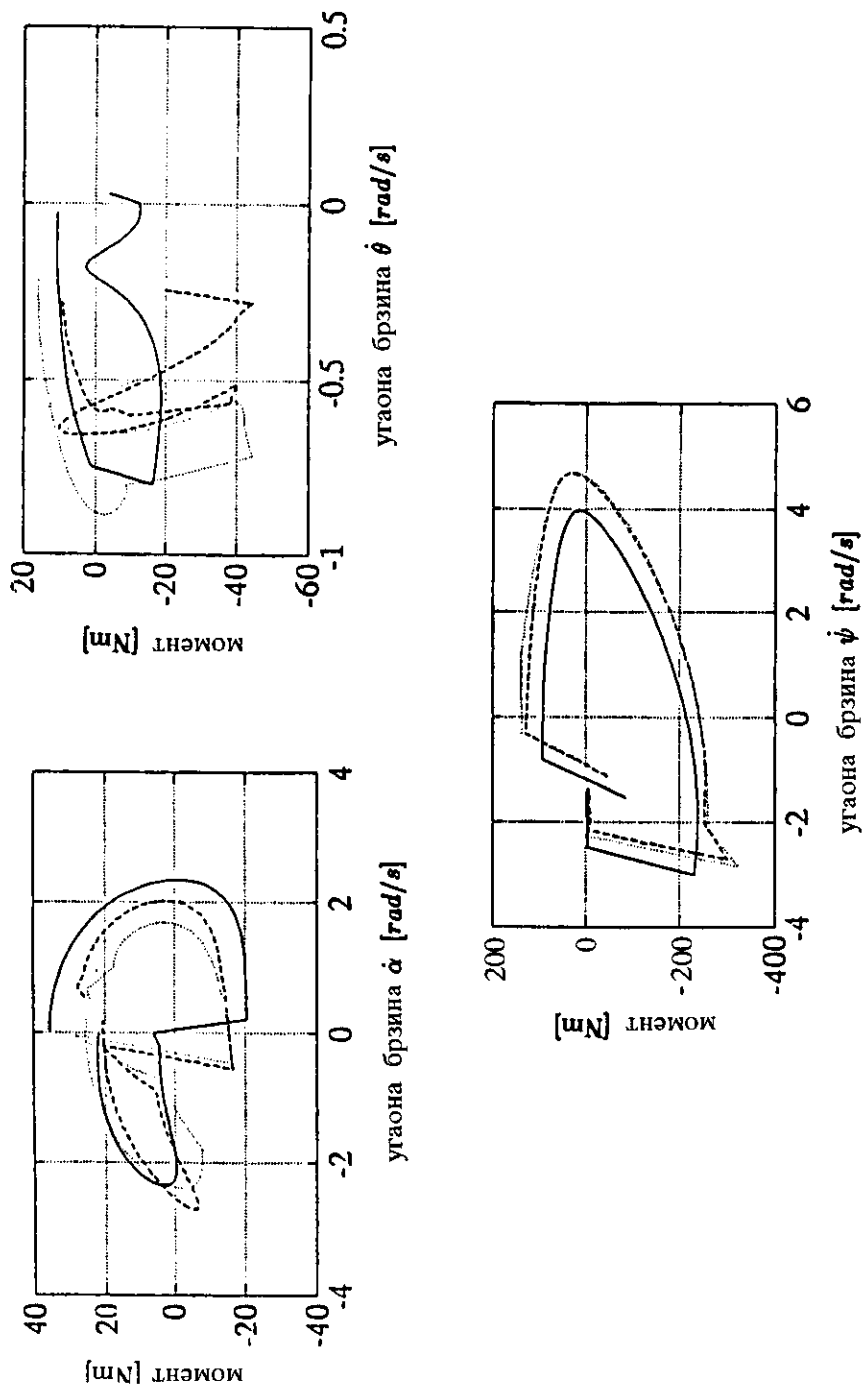


Сл. 7. Одступање углова θ и ψ да би се одржала позиција ТОМ-а

јаву два додатна момента код степена слободе механизма који реализују углове θ и ψ , па се тим додатним моментима, преко сила купловања, утиче да ТОМ поново заузме жељени положај.



Сл. 8. Угрошак енергије у свим зглобовима



Сл. 9. Веза угаоне брзине и момента за све зглобове механизма

Са слике 7. може да се види да је одступање углова θ и ψ са њихових номиналних трајекторија мање у случају када је примењен фази контролер у односу на класичан контролер. При томе на графику пуне линије приказују класичан случај, а испрекидане случај са фази контролером.

4.3. Утрошак енергије

Упркос већим појачањима у случајевима када је примењен фази контролер, може да се види да утрошак енергије није битније повећан у односу на класичан контролер. Слика 8 приказује утрошак енергије за сва три степена слободе у номиналном режиму (—), за класичан контролер (--) и за фази контролер (...).

4.4. Веза угаоне брзине и момента у појединим зглобовима

Слика 9 показује да се портрети момента у појединим зглобовима према угаоној брзини у истом зглобу не разликују битније у номиналном случају (—), случају да је примењен класични контролер и случају када је примењен фази контролер (...).

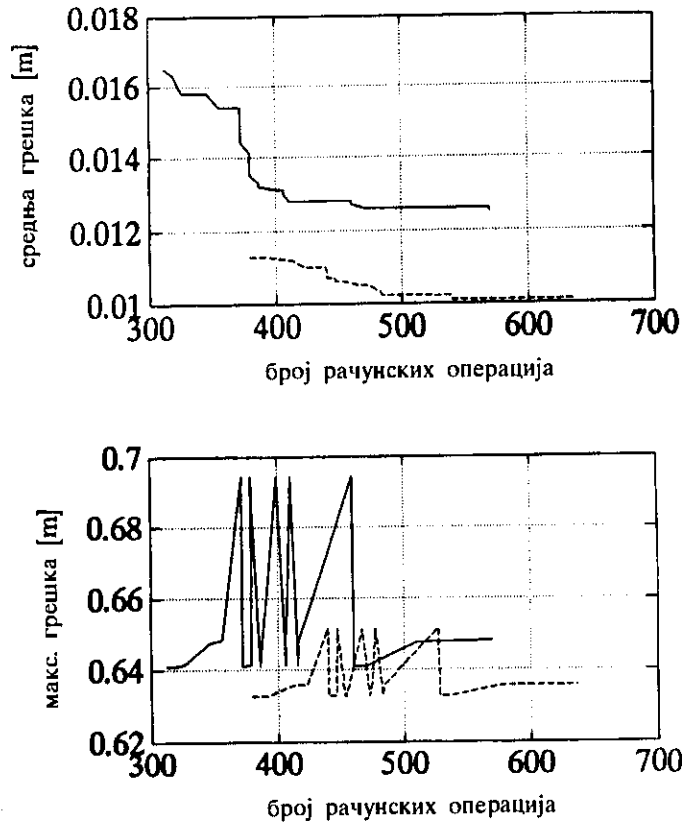
4.5. Нумеричка сложеност

Из табеле 3. може да се види да примена фази контролера не повећава знатније нумеричку сложеност. Али, још значајнији резултат може да се види са слике 10, на којој су приказане средња грешка праћења трајекторије и максимална грешка праћења у зависности од броја рачунских операција потребних да се израчунају поједини закони управљања, и то за управљачке шеме које укључују фази контролер и за класичне управљачке шеме. Ове слике јасно показују да за исту грешку праћења фази контролер захтева мање рачунских операција, а да за исти број рачунских операција фази контролер даје мање грешке праћења, без погоршања осталих карактеристика система.

5. Закључак

Овај рад показује погодности примене фази логике за формирање lookip табела за подешавање параметара локалних контролера код двоножног ходајућег робота.

За симулациони модел изабран је једноставан модел двоножног ходајућег механизма. Разлог за овакав избор је у томе што поменути модел, упркос својој механичкој једноставности, припада класи роботских механизма која захтева увођење различитих повратних спрега да би се реализовало динамичко управљање, укључујући и повратне спреге због силе реакције подлоге која се јавља на контакту стопала механизма и подлоге. Ако се усвоји децентрализована управљачка шема, посматрани механизам захтева увођење номиналног управљања и локалних контролера, као и глобалне повратне спреге (компензација међусобног динамичког утицаја појединих подсистема) и повратне спреге услед дејства силе реакције



Сл. 10. Просечна и максимална грешка праћења номиналне трајекторије по x -оси за позиционирање ногу механичког модела

подлоге, да би се очувала динамичка равнотежа комплетног система. С обзиром да су претходном периоду извршени многи, како симулациони, тако и експерименти на стварним ходајућим механизмима, базирани на традиционалном прилазу управљања на бази познатог модела, покушај да се хибридује управљачка шема увођењем фази контролера у управљачке шеме са делимично израчунатом динамиком модела био је изазован задатак.

Без обзира на пример који представља једну од најпростијих конфигурација антропоморфног робота, добијени резултати показују сврсисходност оваквог прилаза, при чему фази контролер није једноставна замена за традиционално управљање засновано на познавању модела. За ножне механизме сложеније структуре може се очекивати да ће предности оваквог комбинованог прилаза, који укључује фази контролер у делимично познат модел система, још више доћи до изражаја. Треба истаћи и

резултат који показује да за исту тачност праћења жељене трајекторије зглобова ногу, управљачке шеме које укључују фази контролер имају мању нумеричку сложеност.

Аутори верују да ће предности оваквог хибридног управљачког прилаза бити још веће у случају да се примене адаптивни алгоритми управљања роботима, односно ако се изврши хибридизација управљачких техника заснованих на знању са традиционалним управљачким техникама адаптивног управљања које подразумевају познавање модела. Примена неуралних мрежа, које би имале значајну улогу у обучавању и избору нових номиналних трајекторија, нарочито у случају великих поремећаја, такође би знатно допринела перформансама управљања сложеним роботским системима као што су ножни локомоциони роботи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Vukobratović and D. Juričić, "Contribution to the synthesis of biped gait", *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, vol. BME-16, pp. 1-6, January 1969.
- [2] D. Juričić and M. Vukobratović, "Mathematical modelling of a bipedal walking system", in *Proceedings of the ASME winter annual meeting*, (72-WA/BHF-13, New York), pp., 26-30, November 1972.
- [3] M. Vukobratović, "How to control artificial anthropomorphic systems", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-3, pp. 497-507, September 1973.
- [4] M. Vukobratović, B. Borovac, D. Surla, and D. Stokić, *Biped locomotion*. Vol. 7 of *Scientific fundamentals of robotics*, Springer-Verlag, 1990.
- [5] M. Vukobratović and Y. Stepanenko, "Mathematical models of general anthropomorphic systems", *Math. Biosciences*, vol. 17, pp. 191-242, 1970.
- [6] M. Vukobratović and D. Stokić, *Control of Manipulation Robots*. Vol. 2 of *Scientific fundamentals of robotics*, Springer Verlag, 1982.
- [7] M. Vukobratović, D. Stokić, and N. Kirčanski, *Non-Adaptive and Adaptive Control of Manipulation Robots*. Vol. 5 of *Scientific fundamentals of robotics*, Springer Verlag, 1985.
- [8] M. Vukobratović, N. Kirčanski, A. Timčenko, and M. Kirčanski, "SYM-program for computer-aided generation of optimal symbolic models of robot manipulators", in *Multibody systems handbook*, (W. Schiehlen), ed.), pp. 37-61, Springer-Verlag, 1989.
- [9] L. A. Zadeh, "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes", *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 3, pp. 28-44, January 1973.
- [10] C.C. Lee, "Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller - part I," *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 20, pp. 404-418, March/April 1990.
- [11] T. Terano, K. Asai, and M. Sugeno, *Fuzzy systems theory and its applications*. Academic press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1992.
- [12] I. Kato, *Development of Waseda robots - The study of biomechanisms at Kato Laboratory*. Tokyo: Waseda University publication dedicated to I. Kato 60th year jubilee, 1985.
- [13] K. Yoneda and S. Hirose, "Dynamic and static fusion gait of a quadruped walking vehicle on a winding path", in *Proc. of IEEE Conf. on Robotics and Automation*, (Nice, France), pp. 143-148, May 1992.

- [14] G. J. Klir and T. A. Folger, *Fuzzy sets, uncertainty and information*. Prentice-Hall International, Inc., 1988.
- [15] C. C. Lee, "Fuzzy logic in control systems: fuzzy controller – part II," *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 20, pp. 418–433, March/April 1990.
- [16] X. T. Peng, A. Kandel, and P. Z. Wang, "Concepts, rules and fuzzy reasoning: a factor space approach", *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 21, pp. 194–205, January/February 1991.
- [17] N. J. Mandić, E. M. Šcharf, and E. H. Mamedani, "Practical application of a heuristic fuzzy rule-based controller to the dynamic control of a robot arm", *IEE Proceedings*, vol. 132, pp. 190–203, July 1985.
- [18] Y. Maeda, M. Tanabe, M. Yuta, and T. Takagi, "Hierarchical control for autonomous mobile robots with behavior-decision fuzzy algorithm", in *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Nice, France), pp. 117–122, May 1992.
- [19] M. Vučkobratović and B. Karan, "Experiments with fuzzy logic control with model-based dynamic compensation", *submitted to Robotic and Automation*, 1994.
- [20] H. Ying, W. Siler, and J. J. Buckley, "Fuzzy control theory: a nonlinear case," *Automatica, the journal of IFAC*, vol. 26, pp. 513–520, May 1990.

M. Vučkobratović, Olga Timčenko

EXPERIMENTS WITH NONTRADITIONAL HYBRID CONTROL TECHNIQUE OF BIPED LOCOMOTION ROBOTS

S u m m a r y

The paper demonstrates the suitability of fuzzy logic for building lookup tables for tuning parameteres of legged robot control systems.

The simple mechanical model of two-legged mechanism has been chosen as an example model. The reason for this choice is that this mechanism, in spite of its mechanical simplicity, belongs to a class of robotic mechanisms that require introduction of different feedback loops in order to implement the dynamic control scheme, including the feedback loop according to dynamic reaction force that acts between the mechanism's foot and the ground. If the decentralized control scheme is adopted, the considered mechanism requires, besides feedforward compensation and local controllers, introduction of global control loops (cross-coupling effects compensation in perturbed regime) and reaction force feedback in order to preserve the dynamic equilibrium of the complete system. As in the past period the simulation experiments and experiments on real walking systems were extensively done on the basis of traditional approach of model-based control, an attempt to make hybridization of the dynamic control scheme by introducing fuzzy logic controller in the control scheme with a partially calculated dynamic model has been a challenging task

Regardless of an example that represents minimal configuration of anthropomorphic robot, the obtained results certify the usefulness of this approach, where the fuzzy logic controller is not a simple alternative to the traditional model-based control. Moreover, if the walking system becomes more complicated, it is reasonable to expect even more advantages of this fuzzy-model based control. The important result is the analysis of the numerical complexity of different control schemes versus trajectory tracking accuracy. This analysis shows that for the same tracking accuracy the schemes that include the fuzzy controller less numerical complexity.

The authors strongly believe that the advantages of this hybrid approach would be even greater in the domain of adaptive robot control algorithms, where the integration of knowledge-based and model-based control techniques should exhibit considerable advantages over the traditional model-based control. The integration of neural training controller, that would have an important role in learning and choosing different nominal trajectories, especially in the case of essentially large perturbations, would also improve the system characteristics.

Глас CCCLXXV Српске академије наука и уметности
Одељење техничких наука, књ. 31 – 1995.
Glas CCCLXXV de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts,
Classe des Sciences techniques, № 31 – 1995.

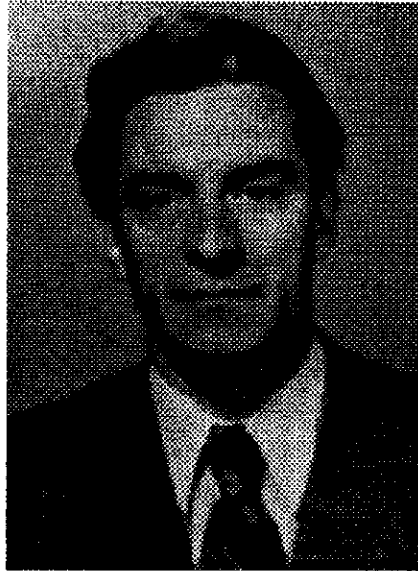
Дописни члан
АЛЕКСАНДАР МАРИНЧИЋ

Рођен је 9. јула 1933. године у Сињу, а од 1935. године стално живи у Београду. На Електротехничком факултету у Београду дипломирао је 1956, магистрирао 1957, а докторирао на Универзитету у Шефилду (Sheffield), Енглеска, 1963. године.

На Електротехничком факултету у Београду запослио се прво као асистент (1958–1965), потом као доцент (1965–1969). У периоду од 1967–1971. године боравао је као експерт UNESCO-а, гостујући професор и руководилац пројекта – саветник декана на Средње-источном техничком универзитету у Анкари. Године 1971. изабран је за ванредног професора на Електронском факултету у Нишу, где је обављао дужност продекана и шефа Катедре за телекомуникације.

За ванредног професора на Електротехничком факултету у Београду изабран је 1974. године а за редовног 1980. године у ком звању и сада ради. Две године је био шеф Одсека за електронику а од 1991. године је шеф Катедре за телекомуникације. Био је два пута гостујући професор на универзитету у Енглеској.

Аутор је или коаутор преко стотину научних радова из области микроталаса и оптоелектронике у оквиру шире области телекомуникација. Аутор је два убеника и једних скрипти, коаутор једних скрипти и три књиге.



За научне радове добио је четири награде: годишњу награду РТБ (1982), два пута награду за најбољи рад на конференцији ЕТАН-а (1979, 1981) и награду за најбољи рад у часопису Електротехника (1983).

Одржао је велики број предавања из области популаризације науке – своје уже струке и историје електротехнике. Од 1982. године је управник Музеја Николе Тесле.

За дописног члана Српске академије наука и уметности изабран је 25. априла 1991. године.

ПРИМЕЊЕНА ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКА У
ТЕЛЕКОМУНИКАЦИЈАМА, МИКРОТАЛАСНОЈ
И ОПТОЕЛЕКТРОНСКОЈ ТЕХНИЦИ

(Приступно предавање одржано 21. маја 1991.г. на VIII скупу Одељења,
3. децембра 1991)

Уважени секретару Одељења, уважене колеге,

Желим да Вам изразим дубоку захвалност за предлог и потоњи избор за дописног члана Одељења техничких наука, чиме сте изразили поверење и признање мом научном и стручном раду. Велика ми је част да сада припадам кругу научника којима сам се увек дивио и чији рад ми је увек био узор. У свом даљем раду усрдно ћу се трудити да радим још боље и успешније и да својим скромним доприносима, у најширим границама својих могућности, допринесем високом угледу Српске академије наука и уметности. Велика част је уједно и велика обавеза, изазов на даље прегалаштво на путу који ме је довео до академских висина.

Замолио бих вас на самом почетку излагања да ми опростите несвесне пропусте и омашке које можда нису у складу са протоколом Српске академије наука и уметности. У неку руку, и поред свих година и богатог животног искуства у раду на 4 наша и 4 инострана универзитета, ја сам почетник међу вама. Трудићу се да успешно и релативно брзо ускладим своје друге обавезе са новим обавезама које проистичу из избора за дописног члана Српске академије наука и уметности и пружићу максимум за одржање великог угледа нашег одељења.

Тема моје уводне беседе је *Примењена електромагнетика у телекомуникацијама, микроталасној и оптоелектронској техници.*

На почетку морам да се извиним због амбициозног наслова јер је јасно да и много вештији говорник не би могао да целовито покрије тему у једном релативно кратком предавању. Молим вас, стога, да схватите ову тему као основу за приказ највећег дела моје активности на научном

и стручном пољу, која, посматрана као целина, показује карактеристичну повезаност примењене електромагнетике, телекомуникација, микроталасне и оптоелектронске технике.

На почетку своје научне каријере крајем 60-тих година на Електротехничком факултету у Београду, као асистент бавио сам се мерењима у телекомуникацијама и електроници. Онако како сам замишљао ту струку, требало је да она буде надградња телекомуникација и електронике и тако сам јој приступио. Ово мишљење задржао сам и до данашњих дана уз једно објашњење да не бих био погрешно схваћен. Свако мора да се бави мерењима у оквиру своје специјалности, ту спора нема. Али онај ко жели да буде креатор у области мерења мора одлично познавати струку и више од тога, специфичности технике мерења која захтева највише умеће.

Први корак ван класичних мерења у телекомуникацијама и електроници учинио сам онда када сам се почео бавити мерењима у микроталасној техници. Био је то уједно и први корак у примењену електромагнетичку и област микроталасне технике. Крајем 60-тих година микроталаси су били у великом замаху и на своју срећу имао сам солидне основе за рад у тој области. Доспевши на универзитет у Шефилду, готово одмах почео сам да радим на квази-оптичкој техници у домену милиметарских таласа. Упознавши се са могућностима рада и анализирајући теме предложене од стране професора A. L. Cullen-a, одлучио сам да се бавим мерењем диелектричне константе плоча. Од првобитне идеје да мерим померај уског снопа при уметању диелектричне плоче између две левак антене, рад је еволуирао на мерење поларизационог стања рефлектованих и трансмитованих таласа. Велики проблеми су настали када је требало добити резултате за диелектричну константу из компликованих израза за поларизациона стања. У оно доба рачунари су се тек појавили и развој неке сложене рачунске технике није долазио у обзир. Истраживања су вршена корак по корак, дијаграм по дијаграм, док се не би сагледала појава и понашање поларизационог стања при разним почетним условима. Главни пробој у решавању проблема извршио сам после многих безуспешних настојања и бројних графика добијених мучним рачунањем на механичком калкулатору. Уочио сам сличност израза за рефлектовани и трансмитовани талас и из ових издвојио релацију која више није била зависна од односа дебљине плоче и диелектричне константе. Одушевљен помислио сам да ћу врло брзо добити праве резултате, али се убрзо показало како је пракса једно, а теорија друго. Професор је захтевао да иницијалну тачност реда 5-7% повећам на 1-2%. Слутио сам да овај захтев нећу лако постићи и то је била вучна сила у следећих годину и по дана до завршетка тезе. Морао сам израдити низ нових, прецизних компонената: левкова са диелектричним сочивима, просторне ослабљиваче, умножаче фреквенција и пројектовати нови спектрометар за прецизно мерење положења диелектричне плоче и поларизационих стања предајне и пријемне антене.

И поред задовољства што је низ сопствених идеја био потврђен овим радом и успешно одбрањеном тезом остало ми је у сећању да би можда боље било да сам прихватио идеју професора Cullen-а да истражујем утицај савијања осе диелектричних таласовода на њихове пропагационе карактеристике. У само неколико година касније био бих на самом врху истраживача у области оптичких телекомуникација, где сам се активно укључио неких петнаестак година касније. Интересантно је да је код истог професора радио и један последипломац на тему диелектричних таласовода који је касније остварио бриљантну каријеру у Аустралији (Snyder).

Када се једном закорачи у подручје микроталаса, почиње да се развија посебан афинитет за електромагнетске таласе и њихове трансформације у разним компонентама (таласоводима) и у слободном простору (антене и зрачење). Надовезујући се на своје богато експериментално искуство са милиметарским таласима и значајно продубљеним знањем електромагнетике, наставио сам са истраживањима слободних и вођених електромагнетских таласа. Код вођених таласа постоје разлике оних на структурама константног попречног пресека (водови) и оних са променљивом геометријом (левкови). Теоријска основа за строга решења свих наведених таласа су Максвелове једначине, апроксимативна решења користе се Хајгенс-Френеловом теоријом дифракције, а за неке структуре применљива је и геометријска теорија простирања зрака и нешто тачнија теорија локалних равних таласа.

Прве левак антене изучавао сам и конструисао за свој спектрометар. С обзиром на велики угао левка (пирамидални левак) морао сам да додајем диелектрична сочива са специјалним $\lambda/4$ слојевима за прилагођавање сочива на слободни простор. Левкови су прављени врхунском технологијом електроформирања. Електромагнетно зрачење ових антена било је налик на Гаусов снап који је у мерној зони “играо” улогу равноталаса. Међусобни утицај антена и нежељена крос-поларизациона спрега приморали су ме да развијем мерну технику која је дала одличне резултате.

После рада на тези у оквиру једног истраживачког пројекта радио сам на развоју компонента микроталасног радио-релејног система. У овом истраживању, којима је био циљ конструкција уређаја за активну везу, искрсла су два проблема која су захтевала дубље анализе. Један од њих односио се на компензацију температурне зависности резонантне шупљине алармног система уређаја, други на импедансу на међуфреквенцији микроталасног мешача. Први сам успешно решио захваљујући математичком моделу и симулацији разних случајева, а други је остао и до данас загонетка. Наравно, и овај други проблем сам решио “технички”, али прави разлог нисмо имали времена да истражујемо.

Прелазак са логаритмара, таблица и механичких калкулатора на електронске калкулаторе и рачунаре представља квалитетан скок који је унео незамисливе нове квалитете у истраживања. Крајем шездесетих година већ се озбиљно радило на многим решењима у области електро-

магнетике, телекомуникација и микроталасне технике која су се раније, уз велике напоре и вештину, могла очекивати од одабраних. Када је рачунарство ушло у свакодневни живот и праксу научника и стручника, квалитет и квантитет рада се енормно повећао.

У другој половини 60-тих година рачунари су почели да се шире примењују у свету. Биле су то релативно слабе машине, са електронским цевима које је требало замењивати у одређеним интервалима да би се гарантовао несметани рад у дужем периоду. У једном свом истраживачком раду требало је да развијем теорију и објасним резултате мерења на левак антенама са редукованим бочним листовима зрачења. Задатак је био изазован али тешко решив. Теорија одређеног броја левак антена правилне геометрије ми је била позната, али се проблем није уклапао у познате форме. Из опште теорије једног математичара извео сам апроксимацију која је указала на један могући пут ка решењу уколико се зна електромагнетно поље у бесконачном таласоводу истог попречног пресека као што је онај у отвору антене. Имао сам среће да на универзитету сарађујем са групом која је успела да нађе нумеричка решења за произвољне облике попречног пресека таласовода. Применио сам те резултате, израчунао поље зрачења и оно се добро слагало са експерименталним резултатима. Рачун не би био замислив (у тако кратком времену од 3 месеца) да се нисам одлучио да ризикујем и научим основне тајне програмирања. Када сам добио прве резултате, проблема није било јер је рачунар за кратко време дао обиље нових резултата који су успешно објаснили разлоге за изванредне експерименталне успехе примењене технике.

Почетком седамдесетих година на универзитету у Анкари, уз примену већ моћног IBM 360 рачунара, радио сам са сарадницима на два тешка аналитичка проблема. Тада смо већ прешли на развој сложених алгоритама и компликованост рачунања била је у другом плану.

Први проблем на који ћу се осврнути био је егзактан метод за расејано поље инцидентног равног таласа од савршено проводних металних тела. Примењена је техника експанзије поља у сферне векторске таласне функције које су дате као производ Беселових или Ханкелових функција и векторских сферних хармоника. Применом проширених граничних услова на интегралне једначине формулисане на граничној површини расејача дошли смо до матричних једначина из којих се налазе коефицијенти сферних векторских таласних функција. Провера нумеричких резултата извршена је за познати облик расејача (сфера), а затим су израчунате функције расејања за разне геометријске облике који теоријски дају различите дијаграме расејања. Теорија и прорачуни проверени су експерименталним путем помоћу посебно развијене мерне апаратуре. Сагласност теорије и експеримента била је изванредна, а овај рад десетак пута је цитиран у литератури (IEEE Proc.). Истраживања су нас навела да закључимо да је Рејлијева хипотеза о развоју расејаног поља у експандујуће таласне функције (outward-going) само апроксимација.

Из истог периода је и рад посвећен израчунавању поља зрачења левак антене на основу измереног блиског поља. За развој ове технике, која је касније цитирана као једна од могућих техника за ове сврхе у совјетском часопису, пресудна је била примена теореме одабирања добро познате из теорије обраде дигиталних сигнала. Због великих аналитичких проблема (вишеструко решавање интеграла са брзо осцилујућим интеграндом) морало се тражити начина да се редукује број улазних података на минимум. Из познате сличности трансформације блиског у далеко поље, које је налик на двоструку Fourier-ову трансформацију, и чињенице да су функције које се јављају ограничене по x , y у домену дужина, а по k_x , k_y у домену компонената таласних вектора, одређени су кораци Δx и Δy (нађено је да с обзиром на максималне вредности k_x и k_y које су једнаке k , ова растојања су иста и износе λ/π). За мале отворе ова техника се и не примењује тако да је критеријум сасвим прикладан, што је проверено мерењем и прорачуном поља за неколико разних облика антена, а највеће димензије су биле реда $10 - 20\lambda$.

Рачунски поступак спроведен је на рачунару IBM 360 али није постојао алгоритам брзе Fourier-ове трансформације који би се могао уз доста додатних напора применити за тачније и брже прорачуне. Ова техника данас је постала стандардни поступак мерења далеког поља великих антена у малим анехоичним собама.

Истраживања антена земаљских сателитских станица у оквиру међународног пројекта (COST 25) била је прилика за даљи развој нумеричких метода у прорачунима електромагнетског поља у области микроталасне технике. Као што је познато, микроталасна техника има много додирних тачака са теоријом електричних кола, али је дала подстицаја и развоју специфичних кола са више приступа и концепту еквивалентних TEM линија. У раду на сателитским антенама наша истраживања ишла су у два правца: један ток истраживања био је усмерен на примарни извор зрачења – коругирану левак антену, а други се односио на ефекте танког воденог филма на дијаграме зрачења антене као целине.

У решавању проблема коругиране левак антене до пуног изражаја је дошла примена нумеричког решавања карактеристичних једначина. У тражењу електромагнетног поља у ограниченим структурама, примена граничних услова води ка трансцендентној једначини која се, осим у ретким случајевима, решава само нумеричким путем. У радовима других истраживача из ове проблематике примењиване су апроксимације у циљу поједностављења сложених нумеричких проблема. Ми смо поставили проблем у пуном обиму и дошли до резултата који су објашњавали особине широкопојасности ових антена. Рад изложен на европској микроталасној конференцији касније је прештампан у збирци одабраних радова у књизи под насловом “Advanced Antenna Technology”.

Други правец истраживања – испитивање утицаја воденог филма на добитак, дијаграме зрачења и крос-поларизацију параболичних антена

био је допринос југословенске групе овом пројекту. Дводимензионални модел који сам формулисао дао је одговоре на питања добитка антене и деформације дијаграма зрачења, а модел проф. Поповића одговорио је на питања нивоа крос-поларизационих изобличења. Сва решења су плод нумеричких прорачуна и главни резултати ових истраживања уврштени су у документе међународног саветодавног комитета CCIR, као одређене препоруке. Сумарни резултати ових истраживања објављени су часопису Proc. IEE.

У оквиру истог пројекта, заједно са проф. Стојановићем и млађим колегама радили смо на прорачуну температуре шума сателитских антена. Утврђиван је однос G/T који је један од пресудних параметара у сателитском телекомуникационом ланцу.

Крајем 70-тих и почетком 80-тих година у области телекомуникација вршила су се већ интензивна истраживања у подручју оптичких телекомуникација. Године 1966. посетио сам STL и видео прве полупроводничке ласере и демонстрацију преноса ТВ сигнала преко оптичког влакна. Некако у то време објављено је да велико слабљење тадашњих влакана није последица губитака у стаклу, већ технологије. Већ 1970. године теоријска предвиђања су достигнута и превазиђена, а данас се силицијумска стакла праве са слабљењем од 0,2 dB/km, што значи да се на 15 km дужине влакна још увек има половина убачене снаге.

Истраживања у подручју оптичких телекомуникација започео сам 1977-8. године. Године 1980. у заједници са колегама из Института "Михаило Пупин" написали смо прву књигу из области оптичких телекомуникација. У почетку истраживања радио сам на проучавању простирања зрака у мултимодним влакнима, а убрзо сам прешао на мономодна влакна разних облика језгра и на томе још увек интензивно радимо. Искуства из микроталасне технике са решавањем сложених карактеристичних једначина овде су само тражила прилагођавање на нове граничне услове. Поред фазних коефицијената захтевало се и познавање првог, другог и трећег извода фазног коефицијента, што је опет рађено посебним алгоритмима.

Део истраживања који се односи на оптоелектронске предајнике и пријемнике, технике модулације, прорачуне осетљивости и перформанси пријемника издвајам овог пута из приказа јер нису непосредно везани са темом беседе.

Нова знања и развој нумеричких метода, појава моћних персоналних рачунара, све је то значајно проширило домене примене електромагнетике у решавању проблема оптоелектронике. Велики део времена посветио сам истраживањима разних облика влакана и поставио основе за неколико магистарских и докторских теза. Један правац истраживања односио се на геометријски идеална влакна значајна за произвођаче влакана, други на геометријски деформисана влакна значајна за практичну примену у каблирању.

Истраживање двослојних влакана са само два параметра захтева доста рачунања, добро је проучено и доста се користи у пракси. Тро-

слојна влакна имају 4 параметра и много више разних могућности које смо систематски изучавали. Оваква влакна могу се остварити са значајно проширеним пропусним опсегом, што смо показали на бројним примерима.

Диелектрично-металне структуре су друга група таласовода који омогућују пренос у блиском пољу и потенцијално су применљиви за једножични пренос енергије. Из проучавања таквих структура дошао сам до једног сасвим новог резултата. Наиме, уочивши високу сагласност неких објављених теоријских и експерименталних резултата, поставио сам себи задатак да решим обрнут проблем: ако познајем карактеристике простирања, треба да прорачунам параметре диелектрика. У овим истраживањима користио сам се нумеричком симулацијом, развио алгоритме за прорачун параметара диелектрика, извршио експериментална истраживања која су се савршено уклапала у очекивања. Испоставило се да се овом методом могу мерити тубуларни диелектрици са тачношћу испод 0,5%! (IEE Proc.). Проблем преноса енергије овим структурама још увек је у фази изучавања.

Вративши се поново на истраживања оптичких влакана развили смо поступке општег прорачуна на бази векторских и скаларних граничних услова. Код влакана са пет слојева добијене су и три таласне дужине са укупном дисперзијом нула и теоријски пропусни опсези су заиста енормни. Тако испада да је могуће преносити и стотинак канала, од којих сваки захвата 10 Gb/s, па је укупни информациони капацитет влакна реда 1 Tb/s. Колико је то огроман капацитет лако се схвата ако се узме у обзир да сви радио носиоци не захватају више од 20-30 GHz. Главни резултати ових истраживања сажети су у следећем:

- утврђена је разлика резултата при коришћењу векторских и скаларних граничних услова;
- пронађени су облици петослојних и трослојних влакана са изузетно широким пропусним опсезима;
- утврђене су границе толеранција појединих величина;
- на неким једноставнијим облицима извршена је провера аналитичких и експерименталних резултата (прорачун урађен на ETF, влакно израђено у ИСКРИ, мерења обављена у Швајцарској).

Други аспект оптичких влакана, којим се бавим 7-8 година, јесте утицај несавршености геометрије влакна на слабљење и фазни коефицијент. Избор овог проблема везан је са производњом оптичких каблова и остварени резултати су се већ исказали у пракси. На пример, при изради каблова поставио се проблем корака и полупречника поужавања који, с једне стране, утичу на слабљење, а с друге одређују полупречнике савијања кабла. Лако савијање кабла захтева густу спиралу, а ова повећава дужину влакна и његово слабљење. Разрадом погодног математичког модела и рачунарском симулацијом утврђене су прихватљиве границе за све непознате величине. Овде остаје да се прецизним мерењима диференцијалног слабљења експериментално верификују сви теоријски налази и

за ту сврху смо за сада развили посебне мерне методе за које верујемо да ће нам дати жељене одговоре.

У последњих десетак година бавио сам се и проблемима микроталасне енергетике, радио на реализацијама разних апликатора (сушење папира, сушење дувана, уједначавања загревања у пећници и у биолошке сврхе). Уз ова претежно инжењерска истраживања бавио сам се и проблемом нумеричког прорачуна резонантних фреквенција правоугаоних резонатора са диелектричним слојевима. Најтежи проблем је било решавање карактеристичне једначине и тумачење услова резонанси на бази технике трансверзалне резонансе. О овим истраживањима објавили смо један опширан рад у иностраном часопису који је одмах побудио интересовање – вероватно референта, јер иначе не бисмо могли схватити како је неко већ у следећем броју истог часописа објавио свој допринос проблему ових резонатора са референцом на наш рад.

Као илустрацију трансфера знања и искуства из једне области (оптоелектронике) у другу област (микроталасне антене) послужићу се примером једног свог приступа теорији секторалне левак антене са редукованим бочним листовима зрачења. Са секторалним левак антенама бавио сам се од 1966. године када сам развио теорију једне секторалне антене са модификованим дијаграмом зрачења. Касније сам радио на другој варијанти секторалне антене са редукованим зрачењем за коју су постојали само експериментални подаци. Радило се о секционализацији секторалног Е-левка са специјалним делитељем снаге. Симулацијом на рачунару дошао сам до конструктивних података на основу којих сам саградио модел пирамидалне секционисане антене (презентирано на две међународне конференције о антенама и простирању) цитиране касније више пута. У даљем раду, надовезујући се на проучавања зрака у срединама са променљивим индексом преламања поставио сам математички модел нове антене и после низа симулација дошао до конструктивних података. Већ први модел понашао се као и математички модел, касније је све то детаљно испитивано и било подлога за докторску тезу на универзитету у Кардифу. Иначе сада смо повезали ове радове са другим раније испитиваним секторалним антенама и пре кратког времена све то изложили на последњој А&Р конференцији у Енглеској. Тренутно је у току мерење најновијег модела и теоријска разрада модела са импедансним зидом где очекујемо да нам опет теорија простирања зрака да нека општа упутства о начину избора конструктивних параметара. Размишљамо и о развоју тродимензионалног решења Максвелових једначина и сложеним граничним условима какве имају ове антене.

Закључак

Истраживачки радови које сам представио у главним цртама спадају у групу мојих најзначајнијих радова у протеклих тридесетак година.

Радио сам их самостално и са колегама са неколико универзитета, са десетак докторанада и двадесетак магистраната. У највећем броју случајева теме сам бирао према условима и могућностима у датом периоду, а од момента када су уведени рачунари интензивно смо развијали нове алгоритме за нумеричко решавање проблема електромагнетике примењене у телекомуникацијама, микроталасној и оптоелектронској техници.

Развио сам неколико лабораторија за телекомуникације (Титоград, Нови Сад, Ниш), микроталасну технику (Анкара, Ниш), оптоелектронику (Београд ВТВА и скромно на ЕТФ, Београд).

У сарадњи са привредом и истраживачким институтима у Београду и Нишу радио сам на низу техничких реализација за које ми је научно – истраживачки рад који сам вам представио био теоријска подлога.

Захваљујем се свима на стрпљењу и надам се да сам успео да у главним цртама прикажем главне резултате, приступ и циљеве свог научно-истраживачког рада у протеклих тридесетак година.

A. Marinčić

SUMMARY OF THE INTRODUCTORY LECTURE

S u m m a r y

The paper deals with the scientific and professional activities of the author in his continuous university career. After his early works in the field of measurements in telecommunications, the author extended his activities to the field of microwaves, in which he wrote his doctoral dissertation at a university in England. His later investigations included also the field of optoelectronic telecommunications and various applications of the electromagnetism carried out at the universities of Sheffield, Ankara, Cardiff, Nottingham, Novi Sad, Niš and Podgorica. By his scientific and professional activities the author has contributed to the development of the Applied Electromagnetism in Telecommunications, by organizing instruction, laboratories, and mentorship of doctoral dissertations, master-of-science dissertations and other papers, especially as the director of strategic projects of the Republic of Serbia in the field of Applied Electromagnetism, Microwaves and Optoelectronic Telecommunications.